

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Um estudo sobre a própria prática em um
contexto de aulas investigativas de Matemática**

JULIANA FACANALI CASTRO

Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini

Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação defendida por Juliana Facanali
Castro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: _____

Assinatura: _____

Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini

Comissão Julgadora

2004

Para Renato
por seu apoio incondicional

Aos meus filhos
por terem me dividido
com mais este trabalho

A meus pais
por me incentivarem
por acreditarem em mim

A meus sogros...

Aos professores do Grupo de Sábado:
esse trabalho é nosso!

Agradecimentos

Ao Dario, por sua orientação desde o estágio supervisionado, passando pela Iniciação Científica até o Mestrado. Por suas contribuições valiosas, por seu apoio, por sua confiança e principalmente por sua paciência.

Aos professores participantes da banca de qualificação, Adair, Celi e Miguel, pelas sugestões e críticas.

Aos integrantes do PRAPEM pela leitura do trabalho em sua fase inicial, pelas considerações, pela discussão travada acerca dele, por terem ajudado-me a "direcioná-lo" um pouco mais.

Ao professor Ariovaldo Antonio Zaniratto um dos responsáveis diretos pela minha paixão por aprender e ensinar Matemática.

Aos meus alunos por terem me ensinado tanto enquanto pretendiam apenas aprender um pouco.

Índice

Apresentação	01
Para começar... ..	05
Senta, que lá vem história... ..	09
E eu me inquietei... ..	25
A busca de outros interlocutores	33
Enfim, a minha pesquisa de professora	59
Neste grupo a gente aprende ou desaprende?	63
Preparando o cenário e ensaiando	89
Mais ensaios... ..	103
O grande dia	113
Olhando para o que eu fiz e para o que eles fizeram... ..	127
O presente, produto do que já passou e semente do que virá	165
Para terminar... ..	181
Referências Bibliográficas	190

RESUMO

Este trabalho visou analisar o papel desempenhado pelas experiências pedagógicas com investigações matemáticas em sala de aula em meu processo de constituição profissional como professora de Matemática. As informações nas quais baseou-se este estudo compreendem: registros em diário de campo; gravações em áudio de discussões, reflexões e intervenções, ora da professora-pesquisadora com um grupo colaborativo de professores de Matemática, ora desta com seus alunos, em sala de aula. A partir dessas informações foram elaboradas narrativas reflexivas escritas que constituem-se tanto no modo de apresentação, organização e análise das informações, quanto em objeto de estudo deste trabalho. Os referenciais teóricos nos quais ancorou-se este estudo dizem respeito ao professor-pesquisador, à produção de narrativas reflexivas escritas e às investigações matemáticas na aula e no currículo. O estudo mostrou que a experiência de planejar, vivenciar, analisar, refletir e escrever a respeito da experiência pedagógica com investigações matemáticas em sala de aula foi extremamente formativa para a professora-pesquisadora. Isso permitiu que noções relativas a investigações matemáticas em sala de aula fossem reelaboradas em um movimento dialógico entre teoria e prática. Permitiu também que fossem percebidas modificações nas relações entre professora, alunos e conhecimento matemático, sendo possível então qualificar essas relações visando a aprendizagem docente e discente.

ABSTRACT

This work has aimed at analyzing the role performed by some pedagogical experiences with mathematic investigations in the classroom within the process of professional formation of the teacher-researcher. The information on which this study was based comprise: records on field diary; audio recording of discussions, reflections and interventions, sometimes experienced by the teacher-researcher with a collaborative group of Mathematics teachers and other times with her students in the classroom. From the information collected, written reflexive accounts were elaborated, establishing both the method of presentation, organization and analysis of the information gathered and also the object of study of this work. The theoretical references, on which this study was based, concern the in-service formation of the teacher; the mathematic investigations in the classroom and in the curriculum; the production of written reflexive narratives; and the teacher-researcher herself in the investigation of her own practice. The study has demonstrated that the experience in planning, putting into practice as well as analyzing and writing about this pedagogical experience with mathematic investigations has been extremely formative for the teacher-researcher. This has enabled the notions of investigative task and activity in the teaching of Mathematics to be re-elaborated within a dialogical movement between theory and practice. It has also allowed a perception of modifications in the relationships among teacher, students and the mathematic knowledge, becoming possible to qualify these relations as aimed at the learning of both faculty and students.

Apresentação

*Pesquisa é o que permite a interface
criativa entre teoria e prática.*
Ubiratan D'Ambrosio

Este trabalho de pesquisa foi realizado por uma professora do Ensino Fundamental e diz respeito a sua própria prática. Durante sua realização, eu, a professora em questão, não estive afastada de minhas atribuições docentes, e nem mesmo fazia sentido que estivesse, visto que, olhar para o movimento de constituir-me professora de Matemática, enquanto pesquisava minha própria prática, era parte principal deste trabalho.

Mas a prática que estava sendo investigada não era uma prática qualquer e sim uma prática que estava sendo intencionalmente modificada no sentido de contemplar uma postura reflexiva por parte da professora pesquisadora e oportunizar a realização de investigações matemáticas em sala de aula pelos alunos.

Na tentativa de compreender um pouco mais o processo de constituir-me professora de Matemática, narro, de forma reflexiva, o caminho percorrido por mim passando por experiências escolares, da Licenciatura, da Iniciação Científica, da inserção num grupo colaborativo de professores, etc. Essa narrativa revelará o início de meu envolvimento com o tema "Formação Continuada de Professores em Serviço".

Em seguida, procuro me remeter às inquietações que foram responsáveis pela delimitação do foco deste trabalho e às leituras e reflexões responsáveis pela re-delimitação do mesmo. Nesse movimento de delimitação e re-

delimitação do foco deste trabalho destacaram-se principalmente: as aulas investigativas, a prática reflexiva, a inserção num grupo colaborativo de professores, a produção de narrativas escritas sobre episódios de sala de aula, a pesquisa da própria prática e suas relações com o processo de constituir-me professora de Matemática.

Apresento então o trabalho realizado em seus diversos momentos: a experiência de vivenciar uma aula investigativa em conjunto com outros professores, com o intuito de aprender mais sobre essa dinâmica, a preparação de algumas turmas para participar de aulas de acordo com essa nova perspectiva além uma primeira tentativa de envolver alunos com tarefas investigativas.

Seguem, nesta apresentação, breves descrições dos assuntos abordados em cada um dos capítulos a fim de proporcionar um panorama geral do trabalho de pesquisa realizado.

"Para começar..." abre espaço para que eu conte um pouco do movimento de minha inquietação tornando-se prática reflexiva e da narrativa, também reflexiva, enriquecendo meu trabalho de professora e comunicando meu trabalho de pesquisadora.

"Senta, que lá vem história..." invade minhas lembranças de aluna do Ensino Fundamental e Médio, de estudante de Licenciatura em Matemática, de participante de um projeto de Iniciação Científica e de estagiária. Essas lembranças encontram-se e estabelecem diálogo com meu presente de professora de Matemática e integrante de um grupo colaborativo de professores de Matemática .

"E eu me inquietei..." procura apresentar algumas questões que contribuíram para a construção do objeto de pesquisa e que fizeram parte do processo inicial de delimitação do foco desta investigação.

"A busca de outros interlocutores" narra meu encontro, através da literatura, com as aulas investigativas, e o movimento de desconstrução e de reconstrução do foco de pesquisa e das questões norteadoras deste trabalho de pesquisa.

"Enfim, a minha pesquisa de professora" apresenta os procedimentos metodológicos que possibilitaram que minha investigação de professora pudesse vir a ser considerada pesquisa do ponto de vista acadêmico. Nesse capítulo também são apresentados foco e questões norteadoras definitivas.

No capítulo seguinte: "Neste grupo a gente aprende ou desaprende?" um grupo de professores do qual faço parte experiencia como alunos uma aula investigativa para depois aventurar-se a planejar tarefas investigativas.

Em "Preparando o cenário e ensaiando" é descrita a preparação da professora-pesquisadora e dos alunos para realizar investigações matemáticas em sala de aula.

Nos capítulos "Mais ensaios...", "O grande dia", "Olhando para o que eu fiz e para o que eles fizeram..." são dedicados ao trabalho de pesquisa propriamente dito, o trabalho de uma professora a investigar sua própria prática e a refletir e comunicar suas experiências com aulas investigativas através de narrativas escritas.

Em "O presente, produto do que já passou e semente do que virá" se dá o reencontro com o presente. Neste capítulo foi narrada outra experiência de sala de aula na qual alunos envolveram-se com uma tarefa investigativa. A partir da elaboração dessa narrativa bem como sua análise frente às outras

narrativas presentes neste trabalho de pesquisa é que foram alinhavadas as considerações finais

"Para concluir ..." apresenta e discute objetos de estudo e análise desta Dissertação através da continuação do diálogo com as experiências narradas neste trabalho e com as reflexões acerca dessas experiências, tendo como eixo minha questão de investigação.

Para começar...

... vou contar uma história. A minha história. A história de como aluna passei a professora e de como professora me descobri para sempre aluna dos alunos, dos colegas da escola, do Grupo de Sábado, da Universidade, dos livros, da Instituição Escolar, do mundo...

Vou contar uma história, pois foi contando histórias de aulas de Matemática¹ que me percebi superando, como diz Freire (1996), os saberes do senso comum na direção de saberes rigorosa e criticamente produzidos. Estes saberes foram emergindo e superando-se à medida que me inquietei com algo e tive a oportunidade de canalizar essa inquietação para uma prática reflexiva, mediada por leituras e pela produção de narrativas, narrativas também reflexivas, discutidas, ressignificadas e reescritas, colaborativamente, com um grupo de professores.

Mas, essa história não será contada de forma linear, ao contrário, será repleta de saltos e de retomadas; de recordações e de esquecimentos. Sendo assim, vou começar não pelo início e nem pelo fim, mas pelo meio. Isto porque foi no meio dessa história que percebi que ela valia a pena, não apenas ser contada, mas escrita e investigada. Mas não escrita uma vez só e a uma só mão,

¹ Histórias de Aulas de Matemática: trocando, escrevendo, praticando, contando/Grupo de Pesquisa-Ação em Álgebra Elementar. Campinas, SP: Graf. FE: CEMPEM, 2001. Histórias de aulas de Matemática: Compartilhando saberes profissionais. Campinas, SP: Graf. FE: CEMPEM, 2003.

mas tantas vezes e a quantas mãos fossem necessárias para que, mais que um retrato da realidade, ela pudesse ser um instrumento transformador desta.

Cada indivíduo tem sua prática. Todo professor ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo (...).

Mas, sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre teoria e prática é o que chamamos de pesquisa.

Ubiratan D'Ambrosio

Senta, que lá vem história...

Grupo de Sábado é o nome pelo qual ficou conhecido o Grupo de Pesquisa-Ação em Álgebra Elementar. Também, com um nome como esse era mesmo necessário um apelido²! Mas não foi só por isso que o nome de batismo foi deixado de lado. Na verdade, pouco a pouco, ele foi deixando de refletir os objetivos e as ações de seus integrantes. Inicialmente havia uma motivação ligada ao ensino de Álgebra, mas, com o passar do tempo, outros interesses e preocupações, não restritos à Álgebra, passaram a ser objeto de estudo e discussão do grupo.

Este grupo, constituído por professores universitários, mestrandos e doutorandos em Educação Matemática e, principalmente, por professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, procura, através de trabalhos colaborativos, desencadear um processo cíclico de reflexão e ação em nossas próprias práticas pedagógicas. Esse processo remete, principalmente, a três momentos de reflexão: antes, durante³ e posterior a ação⁴.

² Esse "apelido" já foi institucionalizado.

³ Alguns autores questionam o que assumo neste trabalho como reflexão durante a ação e afirmam que não existe reflexão na ação pois é impossível agir e refletir ao mesmo tempo. Court. (1988), por exemplo, considera que a idéia de reflexão na ação se refere à consideração de possíveis alternativas de solução para um problema concreto e não ao que conceitualmente se define por reflexão. Dewey (1932) diferencia a reflexão do que se faz durante uma ação chamando esta última de deliberação.

⁴ Quando a reflexão ocorre simultaneamente com a ação Schön fala em reflexão na ação; quando a reflexão ocorre posteriormente à ação SCHÖN fala em reflexão sobre a ação. Sobre isto escreve Alarcão: *Se refletirmos no decurso da própria ação, sem a interrompermos, embora com breves instantes de distanciamento, e reformulamos o que estamos a fazer enquanto estamos a realizá-lo (...) estamos perante um fenómeno de reflexão na ação (...). Se reconstruirmos mentalmente a ação para tentar analisá-la retrospectivamente, então estamos a fazer uma reflexão sobre a ação* (1996, p. 16-17).

A reflexão antes da ação acontece, por exemplo, durante o planejamento, problematização e discussão de uma ação a ser desenvolvida em sala de aula. Esta é uma oportunidade na qual procuramos considerar as múltiplas variáveis que influem na ação e é também o momento no qual nos colocamos no papel do aluno.

Refletir durante a ação pode significar, por exemplo, tomadas de decisões frente a dilemas. Fazemos isso quando precisamos rever estratégias, decidir como intervir nos rumos do trabalho de uma equipe, como mediar a produção de significados que está ocorrendo nesta e como negociar este, entre outros significados, junto à classe toda. Desta maneira, a reflexão na ação parece constituir-se no *modo de funcionamento de uma competência de alto-nível* (PERRENOUD, 2002, p. 25).

O momento de reflexão posterior à ação tem se mostrado extremamente rico à medida que nos permite analisar nossa própria prática com um certo distanciamento. Outro ponto importante a ser destacado é o fato de nossa prática ser apresentada para ser analisada também pelos integrantes do Grupo de Sábado. Lá são lançados sobre nosso trabalho outros olhares, são revelados nuances, expostas falhas, descobertas riquezas. O trabalho é avaliado para que aprendamos com ele e possamos replanejá-lo. Assim a *reflexão sobre a ação é uma fonte de auto-informação e de evolução das competências e dos saberes profissionais* (PERRENOUD, 2002, p. 25).

Frente à experiência dos integrantes do Grupo de Sábado de refletir cada vez mais sobre nossas próprias práticas, tendo como um dos objetivos reformulá-las, percebemo-nos, então, próximos do que vem sendo chamada de prática reflexiva, pois:

o conceito de prática reflexiva surge como um modo possível dos professores interrogarem as suas práticas de ensino. A reflexão oferece oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas. (SERRAZINA e OLIVEIRA, 2002, p. 29)

Essa aproximação também se confirma quando, lendo Perrenoud (2002), na tentativa de entender um pouco melhor o que vem a ser a prática reflexiva, me deparo com a afirmação de que a noção de prática reflexiva remete a dois processos mentais distintos e com relações entre si: a reflexão na ação e a reflexão sobre a ação. Estes e outros momentos da reflexão são constantes no trabalho do Grupo de Sábado, mas, será que eles são constantes também no trabalho cotidiano de cada um dos professores que o integram? Poderíamos então ser considerados profissionais reflexivos? Para tanto acredito que seja necessário continuar trilhando esse caminho de reflexão sistemática sobre a própria prática sempre, pois:

Todos nós refletimos na ação e sobre a ação, e nem por isso nos tornamos profissionais reflexivos. É preciso estabelecer distinção entre a postura reflexiva do profissional e a reflexão episódica de todos nós sobre o que fazemos.

Visando chegar a uma verdadeira prática reflexiva, essa postura deve se tornar quase permanente, inserir-se em uma relação analítica com a ação, a qual se torna relativamente independente dos obstáculos encontrados ou das decepções. Uma prática reflexiva pressupõe uma postura, uma forma de identidade, um habitus. Sua realidade não é medida por discursos ou por intenções, mas pelo lugar, pela natureza e pelas consequências da reflexão no exercício cotidiano da profissão, seja em situação de crise ou de fracasso, seja em velocidade de cruzeiro (PERRENOUD, 2002, p. 13).

As reuniões do grupo acontecem desde março de 1999, aos sábados pela manhã⁵, e tem mantido, durante todo esse tempo, uma pauta centrada, exclusivamente, nos interesses do grupo e nas decisões democraticamente tomadas por seus integrantes.

Uma característica recorrente na dinâmica do grupo é o fato de que qualquer trabalho a ser desenvolvido durante as reuniões seja ele de estudo teórico e metodológico, de planejamento ou discussão de ações educativas, este tem como ponto de partida, e também de chegada, a prática pedagógica de cada um dos professores escolares⁶ que integram o grupo.

Outra característica a ser destacada é o papel que, paulatinamente, o Grupo de Sábado vem assumindo na vida profissional de cada um dos professores escolares que o integram. Esse papel está sendo definido à medida que o grupo vem se constituindo num espaço aberto não apenas a discussões, problematizações e busca de soluções, mesmo que pontuais e momentâneas, para os problemas enfrentados, diariamente, por nós professores. Mais do que isso, o Grupo de Sábado tem estado aberto também ao encontro de pessoas. Ressalto a palavra "pessoas" pois nesses encontros muitas vezes nos mostramos e desabafamos. Este "mostrar-se" e "desabafar" parece ter relação com o fato de que naquele espaço, com aquelas pessoas e naquele momento encontramos um ambiente favorável para que nos vejamos como grupo que aprende junto e no qual os integrantes não estabeleceram relações de

⁵ O fato das reuniões ocorrerem sempre aos sábados pela manhã é que justifica o nome pelo qual o grupo ficou conhecido.

⁶ Quando digo "professores escolares" refiro-me aos que atuam no Ensino Fundamental e Médio. Apesar do grupo ser constituído exclusivamente por professores alguns estão afastados da Escola, atuando como professores universitários ou realizando pesquisas de mestrado ou de doutorado, ao me referir a eles utilizo o termo "acadêmicos".

competição e, portanto, podem se expor sem medo. Lá também⁷ tomamos consciência de nossa imperfeição e pouco a pouco deixamos de sofrer com ela para nos sentirmos por ela desafiados.

Nós, do Grupo de Sábado, estudamos, planejamos e discutimos ações a serem desenvolvidas em sala de aula, privilegiando uma prática reflexiva. Temos consciência da importância desse movimento no processo de nos constituirmos professores de Matemática e entendemos que tudo isso pode ser uma alternativa de formação continuada para outros professores.

Queremos contar, compartilhar... Surge então a idéia de escrever narrativas, de falar de professor para professor, de não deixar se perder nas entrelinhas de um relato de experiência formal a vida que há no interior de uma sala de aula. Queremos publicar nosso trabalho e conseguimos.

Nos diversos momentos de reflexão, antes, durante e depois da ação, analisávamos nossas práticas e buscávamos reformulá-las, aprender, tirar lições. Mas, quando nos pusemos a escrever narrativas sobre essas mesmas práticas nos percebemos fazendo novas análises e tirando lições às vezes distintas, às vezes mais profundas. Isso parece acontecer devido ao fato de nossas narrativas não serem simples relatos, elas são narrativas reflexivas escritas. O simples fato de escrevê-las pressupõe um outro momento de reflexão e exige uma reflexão num nível distinto das outras reflexões feitas até então. Além do mais, elas são lidas, analisadas, discutidas e ressignificadas pelo grupo nas reuniões e, então, reelaboradas pelo autor. Desempenham o papel de potencializadoras do processo de produção de significados para as

⁷ Não apenas lá tomamos consciência imperfeição profissional mas o que quero é ressaltar aquele espaço como privilegiado nesse sentido.

experiências vividas por nós como também permitem o aprofundamento e a qualificação da análise destas.⁸

Mas que "outro momento de reflexão" é este a que me refiro? Parece-me que estamos diante de um fenômeno de meta-reflexão, pois:

a reflexão sobre a reflexão na ação é um processo que fomenta a evolução e o desenvolvimento profissional do professor, levando-o a construir a sua própria forma de conhecer. Esse tipo de reflexão que podemos definir como meta-reflexão leva o professor a desenvolver novos raciocínios, novas formas de pensar, de compreender, de agir e equacionar problemas. (AMARAL, MOREIRA e RIBEIRO, 1996, p. 97-98)

Ainda sobre o mesmo tema Alarcão escreve que os momentos de reflexão na e sobre a ação

têm um valor epistêmico e tê-lo-ão ainda mais se sobre ele exercermos uma outra atividade que os ultrapassa: a reflexão sobre a reflexão na ação, processo que leva o profissional a progredir no seu desenvolvimento e a construir sua forma pessoal de conhecer. A reflexão sobre a reflexão na ação ajuda a determinar as nossas ações futuras, a compreender futuros problemas ou a descobrir novas soluções (ALARCÃO, 1996, p. 17).

Faço parte desse grupo desde sua primeira reunião. Eu havia acabado de concluir o curso de Licenciatura em Matemática⁹ e estava lecionando em duas

⁸ As narrativas escritas pelos integrantes do Grupo de Sábado e discutidas nele *constituem-se tanto em fenômeno que se investiga como em método de investigação* (grifos dos autores) (CLANDININ e CONELLY, 1995, p. 12).

⁹ Esse curso foi realizado no período noturno, na UNICAMP, de 1994 a 1998. O curso tinha duração de 4 anos e, no entanto, levei 5 anos para concluí-lo.

escolas da Rede Estadual da cidade de Campinas¹⁰ quando fui convidada pelo professor Dario Fiorentini a integrar o grupo. Apesar de sempre ter sido aluna de Escolas Públicas desde a Educação Infantil até o Ensino Superior¹¹ e de possuir certa experiência com a atividade educativa eu sentia-me despreparada frente aos desafios que se colocavam diariamente em sala de aula e ansiava pela oportunidade de falar sobre minhas dificuldades e de aprender a lidar com elas.

Quando afirmo possuir certa experiência com a atividade educativa refiro-me não somente à minha formação inicial de professora de Matemática como também a uma pequena história profissional. Durante dois anos e meio, de 1994 a meados de 1996, enquanto cursava o curso de Licenciatura em Matemática, trabalhei em uma Unidade Kumon¹² na qual atuava orientando e corrigindo os exercícios realizados pelos alunos. Estes alunos tinham de 3 a 17 anos e os conteúdos por eles estudados eram tão variados quanto à faixa etária deles. Este trabalho, tão diversificado, foi fundamental para mim, pois, além de

¹⁰ E.E.P.G "Barreto Leme", localizada em Joaquim Egídio, distrito de Campinas-SP e E.E.P.S.G. "Júlio de Mesquita Filho", também em Campinas-SP.

¹¹ Frequentei escolas públicas durante toda minha vida escolar., da Educação Infantil até o Mestrado.. O pré-primário, como era denominado na época foi cursado na E.E.I "Luís Bárbaro", da 1ª à 8ª série estudei na E.E.P.S.G. "Profa. Maria de Lourdes de França Silveira", o Ensino Médio cursei Colégio Técnico em Edificações na Escola Técnica Estadual "Vasco Antônio Venchiarutti" vinculada ao Centro Paula Souza, todas essas escolas localizam-se em Jundiaí, interior de São Paulo.

¹² *O método japonês "Kumon" de aprendizagem da Matemática é o exemplo mais autêntico da pedagogia tecnicista. (...) explorando unicamente: 1º) a memorização de princípios e fórmulas; 2º) habilidades de manipulação de algoritmos ou de expressões algébricas; 3º) habilidades de resolução de problemas-tipo. De fato, raramente aparecem questões exigindo do aluno explicações, ilustrações, construções de modelos matemáticos que descrevam situações-problema, análise, justificações ou deduções. (...) A pedagogia tecnicista não se centra no professor (como no ensino tradicional e no formal-moderno), nem no aluno (como veremos na escola ativa ou construtivista), mas nos objetivos instrucionais, nos recursos (materiais instrucionais, calculadoras, et.) e nas técnicas de ensino que garantiriam o alcance dos mesmos.* (FIORENTINI, 1995)

me colocar no papel de professora pela primeira vez, me mostrou o quão prazeroso isso poderia ser também.

Eu tinha, com relação às características do Método Kumon, uma série de restrições. O ensino da Matemática ocorria através da exemplificação de um procedimento, sem justificativas, e o aprendizado se dava por repetição exaustiva. Não era essa a idéia que eu possuía sobre o ensino e a aprendizagem, mas aquele era meu trabalho. Como agir? Esta questão passou a me incomodar menos quando me percebi mediando a relação do aluno com o exercício de maneira a torná-lo mais significativo. Isso acontecia quando procedimentos mecânicos eram justificados por mim e relações eram estabelecidas e verbalizadas pelos alunos.

Mas quais eram essas minhas idéias sobre o ensino e a aprendizagem? Hoje respondo sinceramente que não sei bem. Acho também que não saberia explicar com clareza se me perguntassem na época. Mas, posso afirmar que essas idéias, sejam elas quais fossem, eram oriundas, principalmente, de minhas experiências enquanto aluna bem mais do que de minha formação de professora de Matemática que já estava em curso.

Eu havia sido aluna, durante parte do Ensino Fundamental e Médio, de um singular professor de Matemática: Ariovaldo Antônio Zaniratto. Suas aulas privilegiavam a qualidade em detrimento da quantidade e tinham como primordial a necessidade de envolvimento do aluno com o que se quer ensinar para que a aprendizagem pudesse ocorrer. Para isso, os recursos, mesmo que na maioria das vezes fossem limitados ao giz, lousa e imaginação, sempre foram utilizados com criatividade: História da Matemática, saídas da sala de aula para a realização de trabalhos práticos, estimativas, cálculo mental, problemas desafiadores, vídeos, slides, muita disposição e visível prazer em ensinar. Era

impossível para mim não me deixar influenciar por essa perspectiva de aula de Matemática.

Em contrapartida, a Universidade me mostrava, até então, uma faceta, pouco animadora do ensino e da aprendizagem. Na maioria das aulas, professores e alunos não se relacionavam, professores pareciam acreditar serem detentores do saber e nos apresentavam esse saber de costas, enquanto escreviam na lousa o que podíamos ler num livro. Além do mais, o conteúdo era tratado como algo estanque. Eu sentia que o peso da responsabilidade pela minha aprendizagem estava toda sobre meus ombros. Apesar de discordar desta perspectiva, por acreditar que o professor tem um papel importante na mediação da relação do aluno com o conhecimento, assumi essa responsabilidade como única alternativa para concluir o curso. Tudo isso influenciou minha prática pedagógica no sentido de contestação desse modelo de ensino e de aprendizagem, de relação com o conhecimento e de relacionamento entre professor e alunos.

Posteriormente, enquanto ainda era aluna do curso de Licenciatura em Matemática, trabalhei como professora de atendimento individualizado e também de curso preparatório para ingresso em escolas de Ensino Médio Profissionalizante. Essas experiências exigiram que eu ampliasse e aprofundasse meus conhecimentos matemáticos. Como é comum, tendo sido aluna, unicamente, de escolas públicas e, particularmente, no Ensino Médio, de uma Escola Técnica, não tive acesso, durante minha história escolar, a diversos conteúdos. O atendimento individualizado, em especial, foi responsável pelo desenvolvimento de minha percepção dos alunos enquanto indivíduos que aprendem de forma diferente uns dos outros. Os alunos com rendimento insatisfatório em Matemática revelaram-se potencialmente capazes de

aprender, embora nem sempre eu me sentisse suficientemente preparada para lidar com todos os aspectos que dificultavam sua aprendizagem.

Mas, nenhuma dessas experiências comparava-se com a de estar diariamente, frente a frente, com classes lotadas, heterogêneas, indisciplinadas, indiferentes aos conteúdos e que tinham com a escola uma relação de completo descompromisso. Deparei-me com essa realidade em fevereiro de 1999 quando assumi 30 aulas de Matemática (três quintas-séries, uma sexta-série e uma sétima-série) em duas escolas estaduais da cidade de Campinas. Eu não sabia lidar com isso, mas queria aprender.

A possibilidade de participar de um grupo - o Grupo de Sábado - cujo principal objetivo era o de constituir-se num espaço para uma experiência de formação continuada que tivesse como eixo as vozes, as práticas e as reflexões dos professores me animou. Aceitei o convite.

Logo me vi envolvida com o grupo e também eles comigo e com minhas salas. Isso se mostrou quando da elaboração, em conjunto com o grupo, de atividades introdutórias ao conceito de potenciação que seriam aplicadas em minhas três salas de quinta-série. Duas integrantes do grupo, Renata Anastácio Pinto e Conceição Aparecida Paratelli, dispuseram-se a filmar e observar a aplicação da primeira experiência do grupo. Depois disso, meu relato oral do episódio ao restante do grupo, os relatos delas sobre o que puderam observar e a exibição da gravação em vídeo das aulas, serviram como subsídios para desencadear discussões e reflexões no grupo. Essa experiência foi apresentada por mim e por outro integrante do grupo, Gilberto Francisco Alves de Melo, sob a forma de relato de experiência no 12º COLE¹³. Foi a partir dessa

¹³ Congresso de Leitura do Brasil, realizado de 20 a 23 de julho de 1999 em Campinas, SP, na UNICAMP. O resumo das atividades desenvolvidas consta dos Anais.

primeira experiência de trabalho colaborativo que comecei a me sentir co-responsável por minha formação em serviço pois este foi um dos gatilhos desencadeadores de meu processo de reflexão sobre minha própria prática.

Aqui a expressão "formação em serviço" pretende representar uma perspectiva de formação continuada do professor que não o desloca de seu local de trabalho e na qual a formação se dá a partir, e visando, a prática pedagógica deste, seus saberes, suas reflexões, orais ou escritas, a respeito de sua própria prática pedagógica, sua inserção num grupo colaborativo de professores e acadêmicos, sua relação com a literatura, com os conteúdos, com as perspectivas educativas... Qual, então, é o papel da Universidade na formação continuada do professor, nessa perspectiva?

Na experiência de formação continuada que acontece no Grupo de Sábado, acadêmicos e professores escolares não tem funções hierarquicamente definidas apesar de darem e receberem contribuições diferentes no processo de todos os envolvidos constituírem-se profissionais, pois: *quem forma se forma e reforma ao formar e quem é formado forma e se forma ao ser formado* (FREIRE, 1996, p. 25).

Mas essa não havia sido minha primeira oportunidade de reflexão sobre o tema: formação continuada. Durante o curso de Licenciatura em Matemática estive envolvida num projeto de Iniciação Científica. Eu era bolsista PIBIC-CNPq e orientanda do professor doutor Dario Fiorentini. O trabalho de Iniciação Científica constitui-se num estudo realizado junto ao grupo de estudo CEMPEM-PRAPEM da FE/UNICAMP e teve como propósito acompanhar, descrever, analisar e avaliar uma "Experiência Inovadora de Formação

Continuada de Professores de Matemática"¹⁴ de um subprojeto do Projeto "Inovações no Ensino Básico - Projeto de Educação Continuada", em convênio com a UNICAMP e SEE-SP. Para este estudo foi selecionado o Subprojeto "O ensino-aprendizagem da Matemática como uma Atividade de Resolução e Formulação de Problemas"¹⁵. O trabalho de formação continuada foi realizado com 39 professores de matemática de 5ª à 8ª série das cidades de Itu e Salto (SP). O material de análise dessa experiência foi constituído de questionários de diagnóstico inicial dos professores participantes, memórias reflexivas escritas pelos professores relacionando suas práticas e idéias com o que estavam estudando no curso, transcrições de reflexões, debates e produções coletivas gravadas em vídeo, avaliações (intermediária e final) realizadas pelos professores acerca do curso e entrevista com os docentes formadores de professores. Na apresentação deste trabalho por mim, no Congresso de Iniciação Científica e no XIII ERPM¹⁶, foi destacada: a relação entre teoria e prática na formação dos professores; as memórias reflexivas dos professores; a "voz" dos professores nesse curso de formação continuada; saberes profissionais e; as tensões e conflitos vividos por professores num processo de mudança curricular e educacional. Brotava aqui meu interesse pela formação continuada dos professores de Matemática.

¹⁴ Este é o título do trabalho de Iniciação Científica.

¹⁵ Para saber mais sobre esse subprojeto e seus resultados ver Fiorentini, et al. Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. Quadrante: revista teórica e de investigação. Portugal. APM, vol 8, 1999 (p. 33-59).

¹⁶ Encontro Regional de Professores de Matemática.

Participar das reuniões do Grupo de Sábado e envolver-me com as propostas de trabalho que conjuntamente construíamos foi, gradativamente, fazendo renascer em mim o prazer em escrever. Dario Fiorentini e Renata Anastácio Pinto desempenharam papel fundamental nesse reencontro meu com a escrita. Dario estava motivado pelo trabalho realizado com professores que resultou no livro "Por trás da porta, que Matemática acontece?" e afirmava com frequência que professores escolares solicitavam sempre ao CEMPEM materiais que tratassem de situações de sala de aula e que tivessem sido produzidos por outros professores. Ele procurava nos colocar em contato com histórias de aulas de Matemática escritas por outros professores, juntamente com professores universitários, extraídas do livro "Histórias de investigações matemáticas" escrito por Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, (1998). Renata, por sua vez, traduziu uma narrativa escrita pela professora norte-americana Donna Scalon¹⁷ quando participou do projeto de escrita (MPWP), entre os anos de 1991 e 1992, coordenado pela professora Deborah Shifter, e trouxe-a para leitura e discussão do Grupo. Além disso, oportunizou a leitura e discussão de um texto teórico relacionando escrita e pesquisa escrito por Marques (1998) e também nos motivou a escrever nossas próprias histórias.

O modo narrativo foi impondo-se naturalmente como próprio dos professores, presente sempre em seus relatos orais, rico em nuances que só podiam ser notados graças às observações realizadas pelo narrador, repletos de reflexões contextualizadas, e não relegadas ao momento final.

¹⁷ Álgebra é legal.: reflexões sobre uma pedagogia inovadora em uma região urbana. O título original em inglês é *Algebra is cool: reflections on a changing pedagogy in a urban setting*. Este texto é a tradução de um dos capítulos do livro: SCHIFTER, D. (ed.) *Whats happening in the Math Class? Envisioning new practices through teacher education*. Vol. 2. Teachers College, Columbia University, New York and London, 1996.

No grupo, a narrativa foi assumida como:

uma forma de expressão que aproxima linguagem e experiência, ou seja, a narrativa supõe o prazer em contar e ouvir histórias, histórias que se alimentam dos acontecimentos que permeiam a vida de narradores e ouvintes. (...) Portanto, a narrativa pode ser definida como uma forma de expressão que concilia a linguagem e a vida das pessoas, tanto na sua dimensão coletiva como individual (SOUZA, apud PINTO, p. 27, 2002).

Observem que não digo que o grupo tenha me levado a escrever. Escrever sempre foi hábito meu e algo que sempre fiz com desenvoltura. O prazer, no entanto, havia se perdido em algum momento da adolescência e foi, decididamente, enterrado quando de meu ingresso na Universidade. Salvo as experiências do Estágio Supervisionado e da Iniciação Científica não houve outras experiências bem sucedidas de exercício da escrita, mesmo em sua forma mais básica, como instrumento de organização e comunicação de idéias. Mesmo quando me refiro às produções escritas resultantes dos trabalhos desenvolvidos durante o Estágio Supervisionado e Iniciação Científica, como bem sucedidas, o faço em termos. Essas produções escritas estavam carregadas de cuidados: cuidado em relatar e descrever em detalhes, analisar, conjecturar, concluir sem colocar-se, sem comprometer-se, utilizando para isso um relatório formal.

As experiências com a escrita, no que diz respeito à minha prática profissional, paralelas e anteriores ao meu ingresso no Grupo de Sábado, não foram muito interessantes. Quando eu comecei a trabalhar como professora da Rede Estadual, leitura e escrita, quase que desapareceram. Mesmo quando se escrevia o planejamento era uma escrita do tipo "conteúdo-estratégia, conteúdo-estratégia, conteúdo-estratégia", que se podia copiar do

planejamento do ano passado, pois ninguém nunca iria ler ou discutir. Não havia motivação para a realização daquele trabalho que envolvia a escrita, pois, na sala de aula, eu iria trabalhar da maneira que considerasse melhor, independente do que havia escrito no planejamento. O planejamento era apenas um instrumento burocrático e eu não enxergava valor nele.

No ano seguinte à minha "estréia" na Rede Estadual "estreei" também na Rede Particular. Nesse novo contexto, o planejamento era algo a se cumprir e, portanto, exigia de minha parte compromisso com sua elaboração e redação. Ele era discutido e reformulado no início de cada ano, considerando-se a experiência do ano anterior e as previsões para o ano corrente. Posteriormente ele era revisto novamente levando em conta os imprevistos e as particularidades do ano corrente.

Havia também uma tentativa de integração entre as diversas áreas através de projetos educativos em torno de temas geradores. Esses projetos eram elaborados e escritos, mas, era uma escrita que me auxiliava a organizar e transmitir as idéias do trabalho que seria realizado com meus alunos e não a refletir sobre elas e reorganizá-las. Eu estava escrevendo apenas para que os outros pudessem entender meu trabalho, mas não para que eu conseguisse entendê-lo melhor.

A primeira história de sala de aula produzida por mim e analisada, discutida e ressignificada pelo grupo ainda carregava muitas dessas características, seu título é: "Um Estudo do Meio e a ampliação dos horizontes de alunos de 5ª série da Rede Estadual: análise e reflexão sobre a própria prática pedagógica"¹⁸. A idéia desse trabalho surgiu do fato de ter me visto obrigada a considerar como variáveis no processo de ensino e de aprendizagem

¹⁸ Texto não publicado

a indisciplina e o desinteresse. Na tentativa de entender e aprender a lidar com essas variáveis surgiu a idéia de um Estudo do Meio. Essa estratégia de ensino e de aprendizagem visava uma aproximação com os modos daqueles alunos aprenderem fora da escola e com os seus conhecimentos extra-escolares. Era também uma oportunidade de trabalhar a interdisciplinaridade já que poderiam existir atividades e objetivos comuns nas disciplinas envolvidas, além de um certo grau de envolvimento, de alguns docentes, em torno deles. Havia também o objetivo de proporcionar lazer a eles e oportunizar aproximação entre nós abrindo espaço para uma possível conquista.

A história apresenta os processos de ação e de reflexão presentes nos diferentes momentos do Estudo do Meio, na formulação do próprio texto e relata, também, a tentativa de romper com a idéia de que só a academia seria capaz de produzir pesquisa rigorosa e teoria educacional de qualidade, procurando valorizar e elevar o nível das produções reflexivas do professor escolar.

Enfim quis mostrar que o Grupo de Sábado desempenhou o papel fundamental, pois, foi terreno fértil no qual sementes como minha história escolar, minha formação inicial, a experiência do Estágio Supervisionado e da Iniciação Científica além de uma pequena experiência profissional, germinassem e resultassem na elaboração do projeto de trabalho que eu pretendia desenvolver no Mestrado em Educação Matemática.

E eu me inquietei...

*Tenho andado distraído
Impaciente
Indeciso
E ainda estou confuso
Só que agora é diferente
Estou tão tranqüilo
E tão contente.
Renato Russo*

Em meados de 2000, realizei o exame de seleção para o Mestrado em Educação Matemática e fui admitida. Passou-se o tempo, seis meses talvez, e uma questão não parava de me incomodar: eu havia escrito um projeto, realizado uma avaliação, sido admitida no Mestrado, cursado disciplinas, discutido com meu orientador e ainda não conseguia ter claro o foco da pesquisa acadêmica que iria desenvolver. O que havia era:

A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta faz parte integrante do fenômeno vital (FREIRE, 1996, p, 14-15).

Consciente que estava do papel que essa curiosidade vinha desempenhando em minha trajetória de professora de Matemática, à medida que me mostrava sempre inconclusa, buscando novas versões de meu trabalho e de mim mesma, me vi interessada em entender esse processo de ir me tornando a cada dia uma professora de Matemática diferente da do dia anterior.

Foi assim, desejando compreender um fenômeno que estava ocorrendo comigo, que, de repente, me percebi protagonista de minha pesquisa. Só então pude delimitar, um pouco mais, o que viria a ser investigado considerando os contextos em que eu estava inserida.

Percebo-me refletindo na prática e sobre a prática, ou seja, sobre minha própria prática e tomando a mim mesma como sujeito de minha própria investigação, percebo-me também realizando reflexões e meta-reflexões sobre o processo de constituir-me professora de Matemática. Tenho com isso as intenções de certificar-me, em primeiro lugar, e logo em seguida de convencer aos outros, da relevância do exercício pessoal do processo de reflexão e de meta-reflexão sobre a própria constituição do professor.

Sobre as tentativas de compreender os processos através dos quais os professores vão se constituindo escreve Moura:

Procurar saber como é que os sujeitos vão se formando professores tem sido uma preocupação dos que vêm pesquisando sobre a formação do educador. No fundo o que se quer saber é de que modo o professor vai se constituindo profissional ao longo de sua vida. (2001, p. 152)

Tendo em vista tudo isso este trabalho mostra-se potencialmente importante para aprofundar e alargar as discussões sobre o tema.

Ser protagonista de minha pesquisa significa investigar minha própria prática e revelava, a essa altura, interesse em tentar compreender minha atuação em sala de aula e meus processos de aprendizagem e suas relações com:

- Minha história escolar;
- Minha formação inicial;

- Minha participação num Projeto de Iniciação Científica sobre uma experiência inovadora de formação continuada de professores de Matemática;
- Minha inserção num grupo colaborativo de professores e educadores matemáticos;
- A instituição escolar de modo geral enquanto modelo de ensino e de aprendizagem, geradora de diretrizes, propostas, parâmetros;
- As escolas em que havia trabalhado até então com suas peculiaridades administrativas e pedagógicas bem como o grupo de professores e de alunos em conjunto com os quais eu desenvolvia meu trabalho;

A princípio pensei em estudar as potencialidades desses contextos em meu processo de formação (inicial e continuada) e suas relações com meu desenvolvimento profissional.

Sentia-me próxima de uma boa questão, mas a palavra "potencialidades" soava vaga, indefinida, comprometendo a possibilidade de responder à questão. Tinha também consciência da não linearidade de minha prática docente, conseguia identificar avanços, momentos de mesmice nos quais as práticas rotineiras se impunham sobrepujando práticas reflexivas, constituindo-se em recuos ou retrocessos. Essa consciência gerava também desconforto com a expressão "desenvolvimento profissional" que, segundo Imbernón (1994),

inclui tanto a formação inicial quanto a permanente entendida como um processo dinâmico e **evolutivo** da profissão docente. e engloba os processos que **melhoram** o conhecimento profissional, as habilidades e as atitudes... (p.45, grifos meus)

Eu não tinha certeza de que me desenvolveria de acordo com essa definição e portanto não me sentia à vontade para utilizar a expressão.

Os problemas foram sendo então atacados, não um a um, mas todos, a uma só vez, por um turbilhão de idéias vindas de diferentes fontes e aparentemente desordenadas e desvinculadas. Quando dei por mim, a questão inicial havia se diluído, como se tivesse vida própria e independesse de minha aceitação. Alguns contextos foram se impondo naturalmente: o da escola em que lecionava, o do Grupo de Sábado, o do mestrado e também o da minha trajetória de aluna à professora. Trajetória que, por ser minha, era diferente de todas as outras e que vinha desempenhando papel decisivo em minha constituição, não mais, necessariamente, desenvolvimento, profissional. Aconteceu então a desconstrução do conceito de desenvolvimento profissional emergindo o de constituição profissional.

Livre da conotação progressivista que a palavra desenvolvimento carregava senti-me à vontade para expor-me, sem a obrigação de ser melhor mas com a certeza de que seria diferente.

O fato de substituir o termo "desenvolvimento" pelo termo "constituição" pode ser entendido pelo leitor como descompromisso com a qualidade de minha prática pedagógica. Entretanto, pretendo mostrar que, apesar da preocupação sempre presente com a qualidade da prática, esta pode revelar que nem sempre a reformulação de uma ação educativa, baseada em saberes profissionais provenientes da formação continuada, garante que ela seja qualitativamente superior a anterior mesmo que, sob a perspectiva do pesquisador, sempre exista a possibilidade de extrair experiências educativas, aprendizados.

Quando considero a existência de uma conotação progressivista no termo "desenvolvimento" e decido utilizar, ao invés dele, o termo "constituição", o faço, não negando que a formação continuada do professor deva objetivar o desenvolvimento profissional deste, mas, acreditando que esse não é um movimento que se dá sempre para frente, penso que há avanços, retrocessos, momentos de marasmo ou calmaria.

Delineou-se então um arcabouço de questão de investigação tendo como base algumas indagações minhas, relativas à minha história, a insatisfações com minha prática pedagógica vigente, e outras que relacionam as ações e objetivos do Grupo de Sábado com a formação profissional do professor e com a qualidade do ensino e da aprendizagem que resulta de seu trabalho em sala de aula. Entre elas:

- A reflexão sobre minha trajetória de estudante à professora e sobre minha curta história profissional poderia me ajudar a melhor compreender minha prática pedagógica atual e a minha inquietação com a mesma? Essa questão se constitui no ponto de partida das discussões que me permitiram ir delimitando pouco a pouco o objeto da investigação;
- Os integrantes do Grupo de Sábado têm objetivos comuns tais como propiciar formação profissional para os professores do grupo e melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem. Esse objetivo se concretiza no meu caso?
- As tentativas de refletir crítica e sistematicamente no Grupo de Sábado a respeito da prática dos professores escolares que o integram, tendo como base as narrativas produzidas por nós, exercem que papéis em meu processo de formação profissional?

- E as ações no sentido de aliar literatura, formação anterior e saberes da prática?
- A união de professores e de educadores e a realização de trabalhos colaborativos em torno de objetivos comuns como: mobilizar e dinamizar saberes e práticas do professor, melhoria da qualidade do ensino, formação profissional do professor e produção de conhecimento educacional, possibilita que esses objetivos sejam atingidos com mais facilidade?
- Um grupo de professores e educadores pode produzir, elaborar, reelaborar e ressignificar teoria educacional?
- Como tudo isso interfere no meu trabalho em sala de aula? Em que tudo isso me ajuda a resolver problemas práticos do ensino e da aprendizagem?

Flagrei-me então disposta a investigar as interferências em minha constituição profissional de cada um dos contextos de formação continuada nos quais estava inserida, como professora e pesquisadora de minha própria prática.

No entanto percebo que meu olhar está dirigido a um aspecto específico de minha constituição profissional: à minha prática docente. Decido então substituir a expressão "constituição profissional" por "constituição docente" ou "constituição do professor" pois os problemas que envolvem a constituição profissional são bem mais amplos e não se reduzem aos problemas que o profissional professor enfrenta em sala de aula.

Por tratar da constituição docente do professor de Matemática coloca-se a necessidade de explicitar o que entendo por: professor de Matemática e suas atribuições docentes . A princípio considero que independentemente das

discussões existentes em torno da ocupação do professor ser considerada um ofício ou uma profissão, tratadas por Perrenoud (2002) esta envolve um saber fazer próprio dos que trabalham tendo como foco principal o ensino, sua organização e o aprimoramento destes.

Acredito também que ser professor envolva uma postura inquieta e o desejo constante de contribuir para construção do mundo através da transformação das pessoas, incluindo-se, numa constante e cíclica aprendizagem. De acordo com Moura (2001) *para ser professor é necessária uma ação que visa transformar-se ao transformar uma pessoa* (p. 144). Essa transformação do outro, por meio de uma ação planejada de tal forma pelo professor que coloca o outro na posição de aprendiz, visa integrar os membros da sociedade *de modo que eles possam adquirir códigos culturais que lhes permitam executar e partilhar tarefas coordenadas pelo conhecimento comum dos sujeitos* (MOURA, 2001, p. 144).

As transformações às quais me referi são entendidas por mim como movimentos de ensino e de aprendizagem. O professor, em sua missão de ensinar e de, portanto, propiciar oportunidades de aprendizagem a quem se quer ensinar e também a quem ensina, precisa conceber o ensino, ainda segundo Moura (2001), *como a mobilização de vários saberes: disciplinares, curriculares, das ciências da educação, da tradição pedagógica, experienciais e da ação pedagógica* (p. 145), saberes esses que se renovam e se transformam exigindo dos professores a disponibilidade constante para a aprendizagem.

Além disso há que se considerar a necessidade do professor vislumbrar e tentar compreender a escola, os conteúdos, o ensino e a aprendizagem em sua complexidade e em seu movimento contínuo de transformação. Novamente concordo com Moura (2001) quando fala do *conhecimento como feito e se*

fazendo e da didática promover desenvolvimento de competências nos futuros professores para que estes entendam os processos de se fazer professor como um eterno modo de aprender (p. 154).

Eu acreditava ter esboçado o foco de minha investigação. Mas, eu ainda estava por demais presa às minhas convicções, provenientes de minhas leituras e experiências, e sentia necessidade de ampliar meus horizontes, ir além. Então saí em busca e não precisei ir muito longe. Até a biblioteca foi o bastante.

A busca de outros interlocutores.

*A resposta certa, não importa nada: o
essencial é que as perguntas estejam certas.*
Mário Quintana

As sensações de alívio e satisfação pelas quais fui tomada ao vencer mais uma etapa da elaboração do trabalho de pesquisa que viria a ser realizado foram logo substituídas por uma nova leva de questões. Talvez a mais importante delas tenha sido a que remetia à necessidade de construir o esteio de procedimentos metodológicos que permitiria aos saberes, provenientes de minha prática pedagógica, sistemática e reflexiva, superar-se a ponto de serem considerados, pela academia, como conhecimento científico¹⁹. Já não me bastavam as inquietações, as discussões, os saberes da prática, as antigas leituras...²⁰ Foi então que um mergulho na literatura fez-se inadiável e

¹⁹ Neste trabalho os termos "conhecimento" e "saber" são utilizados com distinções nos significados a eles atribuídos: *conhecimento aproximar-se-ia mais com a produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia o saber, por outro lado, representaria um modo de conhecer/saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a outras formas de saber e fazer relativos a prática não possuindo formas rígidas formais de validação* (FIORENTINI et al., 1998, p.312).

²⁰ Uma parte da academia, hoje, já reconhece formas metodológicas alternativas de pesquisa. O que não se abre mão é de alguma discussão teórico e metodológica em torno da questão ou do objeto de investigação. Essa discussão trata tanto da forma quanto do conteúdo. No que se refere à forma os processos de produção de conhecimento não precisam necessariamente ser reprodução de um modelo já validado, o próprio pesquisador pode propor um modo de investigar que considera mais conveniente, desde que o justifique. Quanto ao conteúdo, significados, conceitos e idéias essenciais do objeto de investigação precisam dialogar com o que já tem sido dito e pesquisado a respeito da mesma temática.

fundamental. Conheci as aulas investigativas²¹ e a partir de então surgem novos questionamentos críticos, com relação à minha prática pedagógica anterior, ocorrem mudanças nessa minha prática e eu passo a constituir-me outra professora...

Aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permitam a eles realizar atividade matemática, ou seja, com a realização de investigações matemáticas²², e supõe também um professor preparado para tanto²³. Dessa maneira afirmo que uma aula investigativa é aquela que privilegia a realização de investigações matemáticas em sala de aula pelos alunos.

A princípio apresentarei a noção de aula, tarefa e atividade investigativa tal como conheci, através da literatura. Em seguida procurarei estabelecer um diálogo esclarecedor e crítico com tal literatura, ressignificando tais noções.

As tarefas investigativas e a atividade matemática proporcionada por sua realização pelos alunos mostravam-se importantes no processo educativo à medida que, segundo Abrantes et al (1999):

- Possibilitam uma visão global da Matemática ao envolver os alunos em processos característicos desta, tais como *exploração de hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e provar resultados* (p. 1);

²¹ O conceito de aula investigativa e o papel formativo destas tanto para professores quanto para alunos passou a ser mais bem entendido por mim a partir da leitura do livro "Investigações matemáticas na aula e no currículo", organizado por Abrantes et al (1999).

²² É preciso ter em vista que essas investigações matemáticas estarão sendo realizadas por alunos e não por matemáticos. Desta forma coloca-se a necessidade de diferenciar motivações e objetivos em cada um dos casos. Além disso, há que se levar em conta à adequação do conteúdo matemático necessário ao desenvolvimento da investigação, à linguagem utilizada na proposta e ao lugar que as investigações irão ter no currículo.

²³ Ao longo deste trabalho a discussão sobre saberes necessários para ser professor numa aula que privilegia investigações será recorrente. Muitas vezes a discussão será sobre os saberes produzidos pelo professor que reflete no contexto de aulas investigativas.

- Favorecem o envolvimento do aluno com o trabalho e conseqüentemente facilitam uma aprendizagem significativa;
- *Fornecem múltiplos pontos de entrada para alunos de diferentes níveis de competências matemáticas e embora lidando com aspectos complexos do pensamento, reforçam as aprendizagens mais elementares* (p. 1).

Quando se fala em aulas investigativas refere-se constantemente a **tarefa** proposta aos alunos e a **atividade** matemática realizadas por estes. Coloca-se a necessidade de esclarecer o significado desses dois termos, pois eles assumem- neste trabalho de pesquisa, nas aulas investigativas e em minha prática pedagógica, significados distintos dos que são comumente atribuídos a eles. Para tanto recorro a Ponte et al (1997):

As tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem - problemas, investigações, exercícios, projetos, construções, aplicações, produções orais, relatórios, ensaios escritos, etc. - proporcionam ponto de partida para o desenvolvimento de sua atividade matemática. As tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições.

A atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito ao aluno. Refere-se àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução de numerosos tipos de ação (...) (p. 73).

As tarefas são propostas de trabalho apresentadas aos alunos pelo professor ou provenientes de questionamentos dos mesmos. Essas tarefas possuem algumas características peculiares que as diferem das propostas de trabalho com o quais já temos familiaridade²⁴. Segundo Ponte et al (1997) uma tarefa envolve uma situação de aprendizagem, relativa ao quadro de cultura do aluno, e ao conteúdo matemático, relativo ao currículo correspondente. Além disso, a tarefa deve *apontar de modo sugestivo para conceitos e processos e*

²⁴ Problemas, exercícios, pesquisas etc.

proporcionar ao aluno uma boa oportunidade de se envolver em atividade matemática (p. 74).

As Normas Profissionais para o Ensino de Matemática (NCTM, 1991) listam características que devem estar presentes nas tarefas propostas pelos professores aos alunos nas aulas de Matemática. Segundo esse documento:

O professor de Matemática deve propor tarefas baseadas em:

- Matemática sólida e significativa;
- conhecimento das aptidões, interesses e experiência dos alunos;
- conhecimento da variedade de formas pelas quais os diversos alunos aprendem Matemática;

e que:

- apelem à inteligência dos alunos;
- desenvolvam a compreensão e aptidões matemáticas dos alunos;
- estimulem alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as idéias matemáticas;
- apelem à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático;
- promovam a comunicação sobre Matemática;
- mostrem a Matemática como atividade humana permanente;
- tenham em atenção e assentem em diferentes experiências e predisposições dos alunos;
- promovam o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática (NCTM, 1991).

Por atividade entende-se não a proposta de trabalho colocada ao aluno, esta é a tarefa, mas aquilo que ele faz com o propósito de explorar a tarefa: suas idéias, conjecturas, testes, argumentações, exemplos, estratégias, raciocínios, conclusões, cálculos, esboços, gráficos, figuras, registros escritos utilizando linguagem corrente e/ou matemática, colocações orais, discussões etc.

Há que se diferenciar agora tarefas de tarefas investigativas e a atividade da atividade investigativa. No que se refere às tarefas investigativas uma das características mais importantes é a que diz respeito ao seu grau de

estruturação ou abertura a múltiplas abordagens. Para se encontrar o nível apropriado de abertura de uma tarefa de investigação é necessário considerar as experiências anteriores dos alunos e do professor nesse âmbito e este é, portanto, um aspecto que deve ser considerado quando da elaboração desta. Tarefas mais abertas tendem a dar espaço para a emergência de múltiplas interpretações e resoluções, promovendo entre os alunos discussões e negociações variadas e significativas. Outro aspecto relevante a ser observado é o cuidado com a redação das tarefas a serem propostas aos alunos, pois:

a utilização de termos muito conotados com as investigações, nas próprias tarefas, tem a dupla vantagem de estes passarem a fazer parte do vocabulário dos alunos e, reciprocamente, de os ajudar a perceber de que tipo de atividade se trata (PORFÍRIO e OLIVEIRA, 1999, p. 115).

Mas, mesmo cuidando da abertura da tarefa e de sua redação não se pode garantir que a atividade resultante da exploração desta pelo aluno seja investigativa. É neste momento que o papel do professor mostra-se fundamental. Ele deve estar atento e presente, fazendo questionamentos que vão além do constante no enunciado da tarefa, como por exemplo:

"Quais argumentos você pode apresentar para tentar comprovar a validade de suas conjecturas?"

Ou em outras palavras:

"Procure justificar as relações que você estabeleceu."

Ou ainda:

"As relações que você estabeleceu são sempre válidas? Explique o motivo."

Concomitantemente a esse encontro com a literatura, encontro esse que me soava como convite a experimentar essa nova perspectiva de aula, de

ensino, de aprendizagem, de relação com o conteúdo, com os alunos, com a profissão, dúvidas e medos me assolavam. Entre eles:

- Em que medida meus alunos envolviam-se com uma tarefa a ponto de realizarem atividade matemática, ou seja, de se apropriarem e/ou produzirem conhecimento matemático? E essa questão era mais uma autocrítica que uma pergunta real.
- Eu seria capaz de ser professora segundo essa perspectiva? Eu me considerava capaz, entendia essa nova perspectiva como um desafio a ser aceito.
- O que era preciso que eu aprendesse do ponto de vista matemático e pedagógico? Aos poucos fui percebendo que não havia como definir o que era necessário aprender, era preciso sim assumir uma postura aberta a busca e aprendizagem constante.
- E as tarefas onde encontrá-las, ou, como elaborá-las ?
- Conseguiria eu intervir nos trabalhos dos alunos sem ser diretiva demais atuando como mediadora entre eles e o conhecimento?
- Afinal, eu me adaptaria a um novo papel?
- Meus alunos estariam preparados para tanto?
- Uma aula como essa teria que reflexos na escola em que eu lecionava?

Mas a exploração das aulas investigativas não se deu apenas no campo teórico, através da literatura e de questionamentos meus. Essa teoria toda havia impregnado minhas idéias e sido ressignificada por elas e ficou evidente para mim, enquanto refletia, o quanto elas diferiam de minha prática em sala de aula. Eu havia percebido que *a reflexão crítica sobre a prática se torna uma exigência da relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blábláblá e a prática, ativismo* (FREIRE, 1996, p. 24).

Entendi e tomei as tarefas investigativas como tarefas pedagógicas e escolares, não no sentido de facilitadoras da resolução de problemas, mas por perseguir, intencionalmente, objetivos formativos para além de uma aprendizagem meramente matemática, procurando veicular valores e crenças, entre eles:

- professores e alunos são produtores de conhecimento;
- investigação e atividade são meios através dos quais o conhecimento pode ser produzido;
- negociação de significados e tomadas de decisão são fatores importantes na construção e na apropriação do conhecimento pelos estudantes;
- os estudantes devem ser estimulados no sentido da conquista da autonomia intelectual; etc.

Não considere, como ainda não considero hoje, que só se aprenda através de aulas investigativas e nem assumi essa prática integralmente como apresentada pela literatura. A releitura e ressignificação constante desta prática educativa pelos atores desta, considerando seus respectivos quadros de cultura, são consideradas por mim essenciais para que o professor possa se perceber como construtor do saber²⁵ capaz de revigorar suas práticas educativas com base em seus saberes.

Foi provocada por essas leituras, e pelas releituras que fiz destas, além de insatisfeita com a forma de trabalho que vinha realizando, que me aventurei, juntamente com meus alunos, a realizar uma primeira experiência de

²⁵ Acredito que o saber seja ressignificado ininterruptamente ao longo da história por diferentes sujeitos e impulsionados pelas mais diferentes motivações.

aula investigativa. Essa experiência deu origem à narrativa reflexiva escrita sob o título: "Investigando Aulas Investigativas"²⁶.

Para ilustrar melhor o movimento que ocorreu em minha prática pedagógica no sentido de diminuir a distância entre ela e as novas idéias, que depois de reelaboradas, se tornaram minhas, transcrevo aqui um trecho daquela narrativa:

Acabo de ser admitida no mestrado. Vou pesquisar minha própria prática e as implicações disso em meu desenvolvimento profissional. Vou ter muito trabalho. Além disso, existem as disciplinas, as leituras... Por um instante sinto-me sobrecarregada. Temo não dar conta.

Durante as férias, numa tentativa de me proteger de uma provável avalanche de trabalho, iniciei o planejamento das atividades que as 8^{as}. séries realizariam em 2001. Além do planejamento propriamente dito preparei avaliações sobre cada um dos tópicos, rascunhei os projetos educativos propostos e organizei toda aquela "papelada" que deve ser enviada aos pais ou apresentada em reuniões. Pretendia, com isso, iniciar o ano "mais leve".

Porém, havia uma semana antes do início das aulas. Agendei então uma reunião com meu orientador do mestrado para definirmos metas para esse primeiro semestre. Orientou-me quanto às disciplinas nas quais deveria me matricular, indicou-me leituras, falou-me sobre suas expectativas e eu sobre minhas pretensões e limitações.

Pus-me a ler. E o que deveria dar-me a sensação de "dever cumprido" estava me incomodando. Tinha a impressão de que aquelas leituras estavam pondo a perder todo o trabalho de planejamento e preparação de provas realizado nas férias. De uma hora para outra tudo aquilo que eu havia preparado parecia ultrapassado, eu não acreditava mais naquilo. Eu me perguntava:

- Como podem simples leituras falarem mais alto que as experiências de todo um ano?
- Será que essas leituras haviam mesmo mudado meu modo de compreender o processo educativo?

²⁶Essa narrativa foi publicada no livro Histórias de aulas de matemática: trocando, escrevendo, praticando, contando/Grupo de Pesquisa-Ação em Álgebra Elementar. Campinas, SP: Graf. FE: CEMPEM, 2001 (p. 39-51).

- Mesmo que essas leituras tenham modificado meu modo de entender o processo educativo, será que elas seriam capazes de influenciar minha prática?
- A minha prática leva em consideração, além de minhas concepções e de meus conhecimentos práticos, a estrutura da escola que valoriza: aspectos disciplinares e um currículo centrado nos conteúdos. Isso, considerando minha necessidade de me manter no emprego, adequando-me assim ao perfil da escola.

Tudo isso foi comigo para a sala de aula. O assunto: Possibilidades e Chances. Início pelos conteúdos do livro de 7ª série, para os quais o tempo não foi suficiente no ano passado, segundo a professora. Prefiro passar os exercícios na lousa. São poucos por dia. Isso me dá liberdade para alterar os enunciados e imprimir um caráter mais exploratório às questões. Pergunto pouco, mas tento levar o aluno a formular suas próprias questões e buscar estratégias para respondê-las. Socializo e confronto estratégias diferentes. Dou a eles o poder de decidir, desde que argumentem, sobre quem tem razão quando ocorrem impasses.

Não estranho que poucos alunos entrem no ritmo que tento imprimir à aula, no que diz respeito a manifestar-se: mal me conhecem, podem não estar habituados a serem solicitados dessa maneira, são adolescentes e é natural que não se exponham demais frente aos colegas. Mas acredito que com o tempo essa postura mude, desde que eu mantenha minha mudança.

Mudança? Só ao final do dia é que tomo consciência. A maneira que conduzi a aula de hoje é muito diferente da maneira que eu estava habituada a fazer no ano passado. Mas foi tão natural... Começo a acreditar que, realmente, algo mudou.

Mas mudou como? Mudou o quê? Estava habituada a propor problemas cuidadosamente formulados aos alunos. Os questionamentos normalmente eram muitos e tinham como objetivo conduzir os alunos, passo a passo, à solução do problema, seguindo o caminho que eu considerava mais produtivo. Após deixá-los à vontade, trabalhando em duplas, por alguns minutos eu novamente tomava a palavra e apresentava, com a participação deles, algumas das possíveis soluções para o problema. Poucos se manifestavam. Também para que? Eu faria tudo de qualquer maneira.

Mas, nesse meu primeiro dia, procurei propor situações abertas, nas quais cabia aos alunos fazer descobertas, colocá-las em questão e juntar componentes de questionamento à situação. No momento da socialização quase tudo partiu deles, a muito custo, é verdade. As diferentes sugestões de como explorar a situação foram observadas e analisadas a fim de verificar se eram equivalentes. Conjecturas foram formuladas e testadas. Pedi que argumentassem em defesa de suas idéias. Forneci o mínimo de informações extras possíveis, procurei também validar o trabalho por eles realizado, apoiar

suas idéias, mesmo que não fossem as minhas, arbitrar conflitos, valorizar a interação aluno-aluno tanto quanto a aluno-professor. Quis valorizar o processo ao invés do produto.

Parece tanta coisa para apenas um dia ... Mas não foi... (...)" (CASTRO, 2001, p.40-2)

Aprendi, através dessa experiência, que as aulas investigativas não só podiam se constituir numa estratégia pedagógica para mobilizar outras formas de aprendizagem nos alunos, como também de acessar outras características da Matemática, aproximando o processo de ensinar e aprender Matemática na escola do processo de fazer Matemática que durante muito tempo pertenceu apenas aos matemáticos. Esses aspectos me pareceram importantes à medida que permitiram atingir alunos até então não atingidos por outras estratégias.

Não pretendo, com a simplificada análise acima, identificar os estudantes da atualidade com os matemáticos do passado por perceber diferenças contextuais, qualitativas e motivacionais entre esses dois grupos tão distintos entre si.

Ser professor numa aula que privilegia a atividade investigativa dos alunos, pois está centrada em tarefas investigativas, exige deste, abertura e disposição para aprender sempre e por diversas vias além de uma atitude reflexiva e investigativa sobre a própria prática. Embora essas exigências profissionais, sob um ponto de vista, possam representar obstáculos para os professores optarem por esta perspectiva didático-pedagógica, sob outro, podem se constituir em um desafio.

Reconheci nas aulas investigativas um cenário propício à reflexão e à produção de saberes, não somente por parte dos alunos como também, e principalmente, por parte dos professores. Professores em aulas investigativas precisariam estar, a todo tempo estudando e refletindo e assim produzindo,

mobilizando, mediando e ressignificando saberes em interação com seus alunos. Esta situação mostrava-se favorável ao desenvolvimento da autonomia necessária para tornarem-se co-responsáveis e co-autores conscientes do processo de constituírem-se professores de Matemática. Investigando suas próprias práticas em, segundo Skosmovse (2000), *cenários investigativos*, os professores poderiam ampliar e aprofundar o seu constituir-se.

Este momento foi fundamental na redefinição do foco de pesquisa, pois foi aberto o canal que permitiu à "prática reflexiva" dialogar com o "pesquisar a própria prática". A prática reflexiva é entendida aqui como uma condição necessária, mas não suficiente para que ocorra a investigação sobre a própria prática. De qualquer forma ambas estão sendo tratadas neste trabalho de pesquisa não como um fim por si só, mas como instrumento para se tratar da constituição do professor de Matemática e para tornar possíveis mudanças no ensino e na aprendizagem da Matemática. Não mudanças impostas "de cima para baixo" mas mudanças desejadas e entendidas como necessárias por professores e alunos.

Perrenoud (2002) é um dos autores que tem destacado a importância da reflexão do professor tanto em relação ao seu exercício profissional quanto para sua formação permanente:

A autonomia e a responsabilidade de um profissional dependem de uma grande capacidade de refletir em e sobre sua ação. Essa capacidade está no âmago do desenvolvimento permanente, em função da experiência, de competências e dos saberes profissionais.

Por isso, a figura do profissional reflexivo está no cerne do exercício de uma profissão, pelo menos quando a consideramos sob o ângulo da especialização e da inteligência no trabalho (PERRENOUD, 2002, p. 13).

A reflexão sobre a ação vinculada a escrita de histórias de vida ou diários de bordo vem sendo utilizada como estratégia para formação de professores há algum tempo.

Segundo Cardoso et al (1996, p. 65), o movimento da Educação no sentido de promover a autonomia dos alunos para que possam agir em prol de sua aprendizagem e da construção de sua cidadania exige, certamente, autonomia por parte dos professores, pessoal e profissionalmente falando.

Nóvoa apud Cardoso et al (1996, p. 68) afirma que nas décadas de 60 e 70 as competências técnicas da docência foram supervalorizadas enquanto a dimensão pessoal foi sendo esvaziada. *A separação entre o eu pessoal e eu profissional* imposta poderá ter conduzido a uma *crise de identidade dos professores*.

A solução desta crise pode ser iniciada pela valorização dos saberes produzidos pelos professores no exercício de sua prática. Mas a produção de saberes exige dos professores um certo nível de autonomia. Desta forma, coloca-se a necessidade de se promover a constituição de professores reflexivos, pois a reflexão é uma condição necessária para a promoção da autonomia nos professores e para a capacidade destes promoverem autonomia nos alunos pois: *os professores reflexivos são também autônomos na sua atividade, dado que são críticos em relação aos papéis que desempenham* (CARDOSO et al, 1996, p. 83).

Desta forma é que afirmo que a reflexão não tem valor por si só. Ao refletirem criticamente, antes, durante, sobre a ação ou sobre a reflexão, sozinhos ou em grupos, os professores conseguem rever e reformular suas próprias práticas, formular teorias sobre a prática e responsabilizarem-se pelo

processo de constituírem-se professores de Matemática. Só então se está no caminho de uma prática verdadeiramente reflexiva.

Zeichner e Smith apud Amaral et al (1996, p.99) abordam a reflexão crítica situando-a ao nível da ética, da moralidade e da política que influenciam os modos de pensar dos professores.

Mas por que os professores devem realizar pesquisas sobre suas próprias práticas? Já não há quem faça isso com competência e seriedade? O professor tem competência e tempo para ser também pesquisador? Refletir sobre nossa própria prática já não é suficiente para que nos coloquemos como protagonistas do processo educativo tanto na produção de saberes quanto na definição do que e como ensinar?

Embora não tenha ainda respostas para essas questões, me apoio em Amaral et al (1996) que, baseados nos estudos de Zeichner (1993), sustentam que a pesquisa dos professores é uma condição necessária para que eles possam conquistar sua emancipação profissional. Eles escrevem:

mesmo sob a bandeira da reflexão, não se tem permitido aos professores um papel ativo na formulação dos propósitos e objetivos do seu trabalho. Acrescenta ainda que a emancipação dos professores é fictícia, pois continua a ser os investigadores de fora da sala de aula a definir as bases do conhecimento para o ensino. Assim, os professores, além de não serem ouvidos, são meros consumidores destas investigações (p.99).

Ponte (2002) aponta quatro grandes razões para que os professores façam pesquisa sobre sua própria prática:

(i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo meios para enfrentar e resolver os problemas dessa mesma prática; (ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; (iii) para contribuírem para a construção de um patrimônio de

cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e (iv) como modo de darem uma contribuição para o conhecimento mais geral dos problemas educativos (p. 7).

Eu, entretanto, tomando por base minha experiência profissional e amparada por Fonzi (1999), não acredito que os professores, possam, isoladamente, começar a investigar. O apoio de um grupo com o qual possam discutir quando sentirem necessidade, por exemplo, de mudarem suas práticas pedagógicas ou quando precisarem lidar com aspectos emocionais, seus ou de seus alunos, resultantes do fato de estarem experienciando uma nova perspectiva educativa e de formação continuada, parece fundamental. A respeito disso escrevem Boavida e Ponte (2002):

Na verdade, para a realização de uma investigação sobre a prática, a colaboração oferece importantes vantagens, que a tornam num valioso recurso. São várias razões para que isso se verifique:

- Juntando diversas pessoas que se empenham num objetivo comum, reúnem-se, só por si, mais energias do que possui uma única pessoa, fortalecendo-se assim a determinação em agir;
- Juntando diversas pessoas com experiências, competências e perspectivas diversificadas, reúnem-se mais recursos para se concretizar, com êxito, um dado trabalho, havendo, deste modo, um acréscimo de segurança para promover mudanças e iniciar inovações;
- Juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem (p. 44).

Para mim, esse grupo já existe: é o Grupo de Sábado. Nele tenho a oportunidade de envolver-me na realização de projetos e ele constitui-se num *meio privilegiado para desenvolver nos professores os saberes necessários à realização de atividades de investigação* (OLIVEIRA et al, p. 106, 1999).

Mesmo assim, as dificuldades são grandes, o trabalho do Grupo de Sábado é moroso e muitas vezes sem a qualidade esperada. Isso, talvez, deve-se ao fato de que investigar foi, por muito tempo, algo estranho aos professores, uma competência atribuída exclusivamente à academia. Mas, analisando, à luz da teoria, o trabalho que estamos realizando sob a mediação do Grupo, me sinto reconfortada ao perceber que estamos caminhando no sentido de transformá-lo em pesquisa sobre nossa própria prática. Esta dissertação de mestrado pode ser considerada um exemplo disso.

Para explicar melhor esta perspectiva, recorro a Beillerot Apud Ponte (2002) que apresenta três condições mínimas para que uma atividade possa vir a ser considerada investigação. Segundo ele a atividade deverá: produzir conhecimentos novos, ter uma metodologia rigorosa e ser pública.

Em relação à produção de conhecimentos novos, creio não existir grandes problemas, pois a prática educativa é rica em situações singulares que, uma vez analisadas, trazem sempre algum fato ou conhecimento novo. Quanto à terceira condição, também não vejo problemas, pois o trabalho se tornaria público quando de sua apresentação em Congressos ou de sua publicação em uma revista ou livro. No caso da pesquisa resultar em uma dissertação, ela torna-se pública à medida que é defendida e debatida publicamente frente a uma banca. Resta, então, a segunda condição, a mais polêmica e controversa.

O aspecto mais problemático diz respeito à utilização de uma metodologia rigorosa. Este, talvez, seja o ponto no qual há que se investir mais. É necessário encontrar maneiras de compatibilizar a informalidade do meu trabalho de professora em sala de aula com a formalidade da pesquisa acadêmica. Acredito que esse seja meu maior desafio neste trabalho de pesquisa. Para discutir e situar melhor essa problemática, me valho da

contribuição de Lytle e Cochran-Smith apud Fiorentini e Miorim (2002). Estas pesquisadoras norte-americanas, depois de terem analisado várias pesquisas produzidas por professores escolares, chegaram à seguinte definição para a *pesquisa dos professores*:

um estudo sistemático e intencionado dos professores sobre seu próprio trabalho na sala de aula e na escola. (...) Com sistemático nos referimos fundamentalmente a formas ordenadas de reunir e registrar informações, documentar as experiências que acontecem dentro ou fora da aula e criar uma espécie de registro escrito. (...) Com intencionado indicamos que a investigação dos professores é uma atividade planejada, isto é, não espontânea (p.35).

A intencionalidade existiria sim em meu trabalho de pesquisa e estaria sendo contemplada no processo de preparação e planejamento das ações a serem realizadas em sala de aula.

O processo sistemático de produção, organização das informações e registro escrito das mesmas, e sua posterior interpretação e análise, o leitor poderá encontrar um pouco mais adiante, neste trabalho.

Decidi investigar minha própria prática no contexto de aulas investigativas por considerar esse contexto rico para entender um pouco melhor meu processo de constituição de professora de Matemática. O cenário das aulas investigativas vinha se mostrando propício à produção e renovação de meus saberes docentes²⁷, pois exigia constante movimento de ampliação e

²⁷ Existe diferenciação entre saberes docentes, conhecimentos profissionais e saberes profissionais? Pode-se afirmar que saberes docentes citados por Fiorentini, conhecimentos profissionais, termo utilizado por Llinares e saberes profissionais, nomenclatura de Ponte são praticamente sinônimos. Utilizo neste trabalho a denominação *saberes docentes* pois esta remete à idéia dos saberes dos professores relacionados à prática, sem entrar na discussão se a docência é uma profissão ou não. Segundo Fiorentini et al (1999) O saber docente é: *reflexivo, plural e complexo porque histórico, provisório, contextual, afetivo, cultural, formando uma teia, mais ou menos coerente e imbricada, de saberes científicos - oriundos dos*

aprofundamento dos saberes necessários para formular tarefas adequadas, mediar a produção e a negociação de significados por estes.

Mas como acessar esse movimento de ampliação e aprofundamento considerando que eu estaria olhando para meus próprios saberes? Afligia-me a idéia de que para coletar dados a respeito de um assunto eu deveria me posicionar a uma certa distância a fim de garantir imparcialidade. Lembrei-me, então, de Freire (1996):

Em tempo algum pude ser um observador 'acinzentadamente' imparcial, o que, porém, jamais me afastou de uma posição rigorosamente ética. Quem observa o faz de um certo ponto de vista, o que não situa o observador em erro. O erro na verdade não é ter um certo ponto de vista, mas absolutizá-lo e desconhecer que, mesmo do acerto do seu ponto de vista é possível que a razão ética não esteja com ele (p. 15).

Eu me perguntava: já que a imparcialidade seria impossível, como fazer para garantir a ética em minha pesquisa? Depois de muito pensar sobre essa questão entendi que ético seria comunicar o que realmente viria a acontecer no decorrer da pesquisa, as discussões de fato ocorridas, as reflexões com as quais verdadeiramente me envolveria, o movimento efetivo de ampliação e aprofundamento de meus conhecimentos. Concluí que estaria assumindo uma conduta ética se documentasse, relatando, todo o processo de escolher, de decidir, envolvido em minha pesquisa. Para fazer isso eu deveria explicitar as reflexões e motivos por trás de cada uma das escolhas, das decisões. Ao fazer isso, no entanto, eu precisaria ter consciência e prudência sobre o quanto isso era relativo visto que, ao relatar e analisar, eu já o faria de um certo ponto de vista e esse relato privilegiaria o que foi mais significativo para mim.

saberes disciplinares, dos currículos e das ciências da educação - e de saberes da experiência e da tradição pedagógica (p. 55).

Paralelamente a isto eu estava a me propor um novo desafio que procurarei delinear agora. Queria encontrar uma maneira de potencializar o papel das tarefas investigativas em sala de aula visando não apenas utilizá-las como instrumentos para mobilizar os alunos na direção da produção de conhecimento matemático com significado, mas também como oportunidades de aprendizagem para os professores. A segurança com que afirmo isso está intimamente ligada a minha experiência em lidar com essas tarefas e com os saberes que percebi produzidos, mobilizados, ressignificados, elaborados e produzidos por mim ao planejar, atuar e refletir durante e sobre uma aula centrada nas investigações matemáticas dos alunos. Sobre isso escrevem Oliveira et al. (1999):

(...) a realização de um trabalho de cunho investigativo constitui uma experiência tão fundamental para o aluno que quer aprender Matemática como para o professor que quer aperfeiçoar sua prática. Encontrar formas de facilitar esses processos é um dos grandes desafios que se colocam a todos aqueles que trabalham na formação de professores e na investigação educacional (p. 108).

Mas como agregar mais um item - a elaboração de tarefas investigativas - à infundável lista de atribuições dos professores? Digo agregar porque o modelo predominante de escola ainda é refém de uma cultura conteudista e os professores ainda sentem-se, e estão, acorrentados a uma lista de conteúdos e de habilidades que devem ser ensinadas pelos professores e aprendidas por seus alunos, considerando-se que há um controle externo e avaliativo dessa aprendizagem e, por conseguinte, da capacidade de cada professor de ensinar. Precisei, enquanto professora desse modelo de escola, reavaliar a necessidade de agregar e senti-me mais confortável quando consegui substituir algumas

propostas de trabalho centradas na exposição oral de conteúdos ou na realização de exercícios de aplicação por tarefas que mobilizassem a atividade investigativa dos alunos.

Muito do que eu havia lido parecia-me importante para propiciar que os professores que pretendessem desenvolver em suas aulas propostas de trabalho de cunho investigativo pudessem potencializar, maximizando ou qualificando, a aprendizagem não apenas dos seus alunos, mas deles próprios. Era claro para mim que o aprendizado dos alunos seria um e o dos professores outro, mas não excludentes, ao contrário, com muitos elementos comuns, mesmo que em níveis diferentes de compreensão e aprofundamento.

Assim, tanto professores como alunos precisariam aprender mais sobre as idéias e os modos matemáticos de pensar de forma a relacioná-los aos tópicos a ensinar e aprender. Focando mais nos professores, mostra-se a necessidade de conhecer e entender a Matemática como disciplina que possui diversas teorias pedagógicas. Havendo interesse na perspectiva investigativa, tornava-se imprescindível conhecer os *diferentes pressupostos sobre aprendizagem e ensino que informam os objetivos educativos e dos papéis dos alunos e dos professores característicos das aulas baseadas na inquirição (...)* (FONZI, 1999, p. 54).

Outras necessidades pareciam se colocar: a compreensão do pensamento matemático dos alunos e a capacidade de planejar aulas investigativas sem as delimitar demais. Esse planejar não poderia se constituir na elaboração de um roteiro de trabalho fechado que conduzisse os alunos pelo caminho mais curto em direção ao saber. Era preciso cuidar para que, ao planejar, não se tolhesse a liberdade dos próprios alunos decidirem qual o caminho a seguir na busca do saber. Era preciso também procurar descobrir e/ou conhecer as condições

para que o saber pudesse emergir deles mesmos. Como parte deste planejar considerava o ato de elaborar dinâmicas de trabalho e formas de intervenção que favorecessem e apoiassem as investigações dos alunos.

Eu havia percebido, porém, que não bastava inovar intencionalmente na sala de aula e refletir em e sobre essa inovação para colaborar efetivamente no processo de me tornar co-responsável por minha constituição docente. Mesmo quando a inovação intencionalmente mobilizava saberes docentes e dava espaço a reflexões sobre minha prática pedagógica e reestruturações da mesma, ela não era suficiente. Para que essa inovação pudesse realmente influenciar minha constituição docente era preciso que uma série de procedimentos tornassem-se rotineiros. Esses procedimentos deveriam garantir a reflexão ou análise sistemática sobre minha prática e que se daria a partir de registros dos acontecimentos de aula, das produções escritas dos alunos, das minhas reflexões, dos possíveis encaminhamentos e reestruturações. A produção de narrativas escritas sobre minha própria prática poderia ser uma boa estratégia para viabilizar isso.

A opção pela produção de narrativas reflexivas, escritas pelo próprio professor sobre suas aulas, tem relação também com:

- o desejo e a necessidade que está sendo colocada de nos profissionalizarmos²⁸ e de sermos co-responsáveis nesse processo de profissionalização;
- o nosso despertar para o fato de que produzimos saberes em nossas salas de aula, juntamente com nossos alunos, e também no grupo, refletindo com nossos colegas, e de não querermos, portanto, ter esses saberes usurpados.

²⁸ A prática reflexiva no ofício do professor vem sendo vista por Perrenoud (2002), entre outros, como caminho possível para a profissionalização da profissão docente.

Eventualmente pode-se pensar que refletir e escrever sobre a própria prática constitui-se em uma tentativa de defender-se do observador externo que, com sua imparcialidade, critica. E a crítica geralmente dói, sobretudo se ela não levar em conta a condição docente e a complexidade do fazer pedagógico. No entanto, ousou afirmar que, baseada na experiência de escrever sobre minha própria prática e de refletir, em conjunto com outros colegas, sobre minhas narrativas e também sobre as deles, não criticamos menos nem em menor profundidade que o observador externo. A diferença é que nossa crítica e as de nossos colegas, além de contemplar nossa condição docente, são autorizadas por nós. Sendo assim, a ouvimos e admitimos com mais facilidade, e o que é mais importante, nos dispomos a refletir sobre ela com o objetivo de mudar. Quando a crítica é oriunda do observador externo resistimos mais a ouvir e admitir e, muitas vezes, nos colocamos no movimento contrário: defendendo nossas criticadas práticas ou idéias, sem nos colocarmos no lugar de quem critica, sem nos disponibilizarmos para a mudança.

A forma narrativa vem sendo defendida por alguns autores²⁹, entre eles Conelly & Clandinin, como a mais adequada para os professores apresentarem suas histórias de sala de aula. A experiência de escrever narrativas também tem me mostrado o quanto elas têm ajudado a ir mais fundo e mais longe na reflexão sobre a minha própria prática. E mais, partilhar essas narrativas com outros professores, além de motivar a escrita das mesmas, possibilita que elas possam desencadear, neles, novas reflexões.

²⁹ Ambrose (1993), Jalongo (1992), Schifter (1994, 1996a e 1996b), Ponte et al (1998), Larrosa (1996), Bruner (1998) Polkinghorne (1998).

Para justificar a presença de narrativas reflexivas escritas na Dissertação de Mestrado³⁰ argumento que:

- elas se configurariam no modo de apresentação dos fatos, os quais estariam situados no tempo e no espaço mediante uma primeira análise produzida pelo próprio autor-ator;
- elas estariam contribuindo para a ampliação, aprofundamento e disseminação, entre os professores, do debate sobre possíveis mudanças no ensino e na aprendizagem e nos modos de conceber a constituição profissional do professor de Matemática.

Mas meu trabalho não seria simplesmente uma história de aula. O trabalho resultaria numa Dissertação de Mestrado. Por que insistir na apresentação de todo o trabalho de pesquisa sob a forma de narrativa?

Embora considerasse a forma narrativa como a mais adequada para escrever minhas histórias e acreditasse que a reflexão coletiva desencadeada pela análise crítica de narrativas escritas fosse uma maneira alternativa, com contribuições, significativas, àquela baseada apenas no relato oral do episódio pelo professor ao grupo, por muito tempo tive dúvidas se essa forma seria a mais adequada para escrever minha Dissertação de Mestrado. Essa dúvida foi se desfazendo aos poucos à medida que percebia ser mais importante comunicar com fidedignidade e coerência as etapas, discussões e conclusões da pesquisa do que me ater a um modelo tradicional de apresentação da pesquisa. Tendo organizado e analisado informações, fundamentalmente, produzindo

³⁰ Clandinin e Conelly argumentam que *a principal razão para o uso da narrativa na investigação educativa é que os seres humanos somos organismos contadores de histórias, organismos que individualmente e socialmente vivemos vidas relatadas. O estudo da narrativa, portanto, é o estudo da forma em que os seres humanos experimentamos o mundo.*

narrativas, me convenci de que o mais coerente, e natural para mim, seria organizá-las (informações e análises) sob a forma narrativa.

Além do mais, eu queria apresentar meu trabalho de pesquisa sem correr o risco de que, ao comunicá-lo, através da Dissertação de Mestrado, esta tomasse a forma de um relato de experiência. Havia também o desejo de transmitir aos leitores a possibilidade de construírem imagens, de sentirem emoções e de me perceberem aprendendo ao realizar este trabalho de pesquisa.

Já no início da década de 1990, Irwin apud Pinto (2002) vinha tratando da questão do reconhecimento e da aceitação de outras formas de escrita que não aquela mais privilegiada e valorizada pela academia. O fato dos professores estarem encontrando, cada vez com mais frequência, suas histórias escritas, suas reflexões e seus saberes considerados e de as estarem aceitando como lícita e adequada a forma narrativa como elas tem sido apresentadas é importante para que se possa, a partir das vozes publicadas dos professores, repensar as políticas de formação de professores.

Incomodava-me também o fato de ao longo de minhas histórias, revisitar assuntos, mesmo que nesse revisitar eu os explorasse por outro ângulo e lhe desvelasse outros aspectos. Temia me afastar demais dos moldes tradicionais de comunicar uma pesquisa. Talvez fosse mais confortável escrever um capítulo sobre cada assunto. Tranquilei-me ao entender que se o fizesse poderia estar desconfigurando os saberes produzidos visto que se eu os compartimentalizasse num único capítulo eu estaria escondendo uma de suas características mais significativas para essa pesquisa, o fato de terem sido produzidos no calor de um processo e em momentos e contextos diferentes. Lembrei-me, então, novamente de Freire (1996):

retomar um assunto ou tema tem que ver principalmente com a marca oral de minha escrita. Mas tem que ver também com a relevância que o tema de que falo e a que volto tem no conjunto de objetos a que direciono minha curiosidade. Tem que ver também com a relação que certa matéria tem com outras que vêm emergindo no desenvolvimento de minha reflexão (p, 14-15).

Como síntese desse processo, a construção metodológica desta pesquisa constitui-se no desafio de transformar minha prática reflexiva em pesquisa de professora. Essa construção caminhou junto com a definição do foco e do objetivo de meu trabalho de pesquisa. Nota-se que esse processo está permeado por três contextos formativos principais: O Grupo de Sábado proporcionando a oportunidade de trabalho reflexivo e colaborativo entre professores de Matemática e de produção de narrativas reflexivas escritas, as Aulas Investigativas potencializando ensino e aprendizagem para professores e alunos, e a literatura tratando da investigação da própria prática e propiciando embasamento teórico não apenas para argumentar na dissertação de mestrado mas para constituir-me professora de Matemática. Com a intenção de compreender melhor esse processo todo decido explorá-lo mais a fundo mediante um processo investigativo sistemático.

Em resumo estava decidida a ter como foco deste trabalho de pesquisa o processo de constituir-me professora de Matemática. A fim de defini-lo melhor, tomei a seguinte questão norteadora: O fato de estar investigando minha própria prática interfere de que maneira e com quais elementos no processo de constituir-me professora de Matemática?

Pretendia que outra questão igualmente importante me auxiliasse: Qual o papel desempenhado pelo Grupo de Sábado, pelas narrativas escritas, pelas

aulas investigativas e pela postura reflexiva no processo de constituir-me professora de Matemática?

Tendo como base essas questões identifiquei como objetivo deste trabalho de pesquisa investigar o processo de constituir-me professora de Matemática:

- tentando compreendê-lo em sua complexidade, sem perder de vista suas especificidades, para que eu possa perceber-me parte integrante e tornar-me parte atuante dele;
- para vislumbrar alguns dos saberes que me constituem professora de Matemática e como eles são produzidos ou adquiridos;
- esperando "tirar algumas lições".

Ainda que as questões de investigação explicitadas acima estivessem claras e fossem legítimas eram demasiado amplas e complexas pelo fato de estarem centradas num foco subjetivo e personalista: o processo de constituir-me professora de Matemática.

Frente a este dilema e tendo em vista que o trabalho naturalmente centrou foco mais na construção e análise rigorosa de documentos constituídos a partir das aulas investigativas e também pelo fato da noção de tarefa investigativa ter provocado uma mudança qualitativa em minha prática docente, reconfigurou-se, agora definitivamente, a questão de investigação:

Qual o papel desempenhado pela experiência com investigações matemáticas em sala de aula em minha constituição como professora de Matemática?

Para auxiliar-me na exploração dessa questão surgem outras, um pouco mais específicas:

- Como a concepção de tarefa investigativa e o trabalho em sala de aula envolvendo investigações matemáticas transformaram as relações entre professora, alunos e conhecimento?
- Que atividades investigativas acontecem quando alunos e professora envolvem-se em sala de aula com investigações matemáticas?
- Qual a importância dessas atividades e dessas transformações no ensino e na aprendizagem da professora e dos alunos?

A questão assim anunciada remete a uma discussão genérica acerca do recurso pedagógico denominado tarefas investigativas, pois é a partir delas que se desenvolvem as investigações matemáticas em sala de aula. Mas, a generalidade da discussão não invalida o recurso aos contextos formativos aos quais me referi anteriormente como um elemento central para a realização das mesmas. O que muda é que os contextos que colaboram em meu processo de constituição profissional, mais especificamente docente, não serão tratadas como objeto de investigação mas como contextos nos quais as experiências com as aulas investigativas ocorrem e são ressignificadas possibilitando o acesso às informações necessárias para subsidiar o tratamento acadêmico da questão redefinida.

Enfim, a minha pesquisa de professora

Fala-se hoje, com insistência, no professor pesquisador. No meu entender o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador.

Paulo Freire

Este trabalho de pesquisa lança um olhar mais cuidadoso sobre o papel das tarefas investigativas no processo de constituir-me professora de matemática. Foram consideradas como parte integrante desse processo minhas vivências enquanto pessoa, aluna, professora com postura reflexiva, pesquisadora de minha própria prática, produtora de narrativas escritas e integrante do Grupo de Sábado.

O diálogo com a literatura desempenhou papel fundamental nesse processo, por ter-me:

- apresentado às aulas investigativas e ao seu potencial no que diz respeito à aprendizagem dos alunos e à constituição profissional do professor de Matemática;
- ajudado a compreender as narrativas reflexivas escritas como forma de apresentação, organização e análise das informações mas também como objeto de análise deste trabalho de pesquisa;
- possibilitado o contato com as idéias e as experiências de diferentes e distantes interlocutores.

O Grupo de Sábado por sua vez foi o berço e vem sendo o esteio de uma professora em constante transformação, pois com ele estamos aprendendo a refletir em conjunto sobre nossas próprias práticas utilizando a narrativa reflexiva escrita como ferramenta para comunicar fatos, aprofundar, ampliar e compartilhar reflexões.

Como alternativa de apresentação dos fatos que constituirão a base documental de análise deste estudo, apresentarei, a seguir, em forma de narrativa reflexiva, alguns episódios, aparentemente dispersos, mas representativos do caminho percorrido por mim e que considero relevantes e significativos para a compreensão deste. Para tanto, retomei minha trajetória de aluna à professora e de professora à investigadora de minha própria prática³¹. Foquei meu olhar em uma situação de sala de aula na qual se evidencia a construção de um cenário mais adequado para a realização de atividades investigativas³². Em seguida, situei o contexto no qual essa situação ocorreu, não de forma minuciosa, mas cuidando para registrar e discutir os aspectos que considerei relevantes no decorrer do trabalho desenvolvido. Apresentei, então, um episódio ocorrido em um dos encontros do Grupo de Sábado, no qual, nós, professores, vivemos a experiência de realizar uma investigação matemática com a intenção de, posteriormente, planejar tarefas investigativas³³, tendo como referência além da literatura alguma experiência própria. Descrevi a experiência de elaboração³⁴, em conjunto com o Grupo de Sábado, das tarefas

³¹ Capítulo de título: Senta que lá vem história.

³² Capítulo de título: Preparando o cenário e ensaiando.

³³ Capítulo de título: Nesse grupo a gente aprende ou desaprende?

³⁴ Capítulo de título: Mais ensaios

investigativas que seriam aplicadas por mim em sala de aula, em duplas, bem como a realização dessas tarefas pelos alunos³⁵. A conclusão deste trabalho de pesquisa foi feita procurando tecer, como os fios de minhas experiências, passadas e presentes envolvendo aulas investigativas, o emaranhado que constitui minha prática docente.

As informações necessárias à elaboração dessas narrativas foram obtidas a partir de registros escritos por mim³⁶ durante ou após as aulas, de gravações em áudio³⁷ e das produções escritas dos alunos³⁸.

Os registros escritos por mim foram, primeiramente, feitos em folhas avulsas e, depois, arquivadas. Nelas constam registros, nem sempre literais, de falas minhas e de alunos, descrições de episódios de sala de aula e reflexões sobre os mesmos.

As gravações em áudio foram realizadas nos momentos de preparação do Grupo de Sábado para o trabalho com aulas investigativas, sobretudo o planejamento das tarefas investigativas e também durante a atividade dos alunos na realização das tarefas investigativas planejadas.

As produções escritas dos alunos são relativas às atividades investigativas em classe e correspondem ao registro de suas estratégias de resolução, bem como às justificativas das decisões tomadas ao longo da exploração da tarefa.

³⁵ Capítulos de títulos: O grande dia e Olhando para o que eu fiz e para o que eles fizeram ...

³⁶ R.E.P. será a sigla utilizada quando eu estiver me referindo ou transcrevendo um registro escrito meu.

³⁷ T.G.A. será a sigla utilizada quando eu estiver me referindo ou transcrevendo uma gravação em áudio

³⁸ P.E.A. será a sigla utilizada quando eu estiver me referindo ou transcrevendo uma produção escrita de aluno.

As narrativas não representavam apenas uma forma de apresentação e de sistematização dos acontecimentos. Ao produzi-las, ocorria um primeiro afastamento e estranhamento entre eu e os fatos. Esse estranhamento dava origem a crises, pois, através da escrita, refletia sobre minha prática e tomava conhecimento das limitações de meu trabalho, de meus saberes e de minhas próprias idéias. Assim, ao refletir por escrito, criava condições para que outras reflexões e elaborações ocorressem a partir desses escritos. Esperava, com isso, produzir condições para análises mais profundas e conclusões mais consistentes.

Nas narrativas, as vozes dos integrantes do Grupo de Sábado nem sempre estão explícitas e muitas vezes confundem-se com minha voz, pois delas me apropriei visto que também eu sou integrante do Grupo de Sábado e muitas vezes fica impossível distinguir as reflexões que elaborei sozinha das que elaboramos de modo compartilhado no Grupo.

Neste grupo a gente aprende ou desaprende?

Eu, particularmente, já estou pensando em sair desse grupo, já não sei o que é ângulo, o que é perímetro, o que é poliedro... (Rogério³⁹) (R.E.P.)

Era uma manhã de sábado como todas as outras nas quais nos reuníamos. Mas, para mim, aquela era especial. Finalmente eu iria iniciar minha pesquisa relativa à dissertação de mestrado. Até então tudo não passava de idéias, leituras, reflexões, debates e dúvidas, muitas dúvidas. Algumas mais surgiriam naquela manhã, outras se elucidariam.

Tudo isso ainda era muito meu e eu estava ávida por trocar. Chegara a hora.

A idéia era de propiciar ao grupo uma visão panorâmica do trabalho de pesquisa que eu estava a realizar. E mais: pretendia experienciar com eles uma atividade investigativa. Justifico a necessidade desse experienciar pelo fato de que, em meus planos, o grupo desempenharia um papel fundamental na pesquisa. Nele as propostas investigativas de trabalho, a serem desenvolvidas por mim junto aos meus alunos, seriam elaboradas e discutidas, coletivamente. Parecia imprescindível, portanto, que conhecêssemos a natureza da atividade investigativa para além da literatura⁴⁰, que a entendêssemos como alunos, para que pudêssemos planejá-las como professores.

³⁹ Rogério de Souza Ezequiel, diretor de escola da Rede Municipal e professor da Rede Estadual.

⁴⁰ Havíamos lido uma narrativa de sala de aula da professora escolar norte-americana Donna Scalon escrita na ocasião de sua participação do projeto de escrita MPWP coordenado pela

Mas o grupo teve também um papel anterior. Foi nele que despertei para as potencialidades da produção de narrativas enquanto instrumento de reflexão sistemática sobre minha própria prática. Contando, construindo significados, escrevendo, planejando, atuando, discutindo, refletindo, replanejando, reescrevendo, analisando, ressignificando, em conjunto, foi que me percebi profissional em constituição constante.

A essa altura, já me sentia responsável pela minha própria formação e não mais ansiava tanto por participar de um projeto de formação continuada nos moldes tradicionais, mesmo que esse visasse o desenvolvimento profissional do professor e procurasse valorizar seus saberes. No grupo, eu me sentia confortável e capaz de buscar isso, com a perspectiva de, talvez, não encontrar.

Senti necessidade de participar ao grupo que suas contribuições iriam além. As propostas ali elaboradas voltariam em forma de narrativas para que as discutíssemos. Os significados que eu construiria na reflexão que se daria durante ação ou, posteriormente, quando da elaboração da narrativa, seriam ressignificados sob o olhar do grupo. As narrativas então tomariam sua forma final, quase sempre linear nos acontecimentos, mas nunca linear nas reflexões.

professora Deborah Schifter, entre os anos de 1991 e 1992. Havíamos lido também narrativas escritas por professores portugueses, publicadas num livro organizado por João Pedro da Ponte (PONTE et al, 1998). Sobre a importância da escrita na relação com a pesquisa lemos *Escrever é preciso: o princípio da pesquisa* (MARQUES, 1988). Lemos também *Quatro funções da Investigação na aula de Matemática* (GOLDENBERG, 1999) mais voltada para aulas investigativas. Estas foram as leituras mais importantes, de acordo com meu ponto de vista. Todas elas, de uma maneira ou de outra, contribuíram para motivar o grupo na escrita, inspirar a elaboração de propostas investigativas de trabalho ou para nos alertar para a importância de refletirmos sobre nossas próprias práticas.

Mas nada disso era novidade. Fazíamos isso, naturalmente, todos os sábados. A novidade era que agora a pesquisa seria apresentada não somente aos professores, mas para a academia. O nível de exigência mudava e minhas preocupações com rigor, método e diálogo com literatura compatível aumentavam.

Iniciei colocando o que, na ocasião, eu pensava que seria o foco de minha pesquisa: o processo de minha constituição profissional em dois diferentes cenários: o Grupo de Sábado e a escola.

Explicitiei meu papel nesses cenários: eu não era apenas atriz, mas co-responsável por sua elaboração, confecção, reestruturação... E era essa responsabilidade que eu vinha, naquela manhã de sábado, dividir com meus colegas. Uma das metas era construir um cenário propício para investigar.

Mas, quem iria investigar o quê? Essa era a pergunta que se fazia visível nos olhos de meus colegas. A resposta não era simples. Os alunos estariam envolvidos em tarefas investigativas e eu estaria investigando essa experiência pedagógica, pois *realizar uma atividade de investigação e não refletir sobre ela é perder uma de suas grandes potencialidades* (TUDELLA et al, 1999, p. 94).

Senti que era o momento das palavras cederem lugar à prática para que pudéssemos realmente entender tudo aquilo sobre o que eu falara.

Eu havia selecionado uma tarefa e organizado uma dinâmica que poderia propiciar uma exploração investigativa por parte dos envolvidos. Decidi que eu assumiria o papel da professora: apresentando a proposta, fornecendo material manipulativo, fazendo intervenções, mediando argumentações e contra-argumentações, negociando significados... Ao final deveríamos discutir como

professores o que havíamos experimentado no papel de alunos. Optei por uma Oficina. Apresentei aos colegas do grupo o material que segue:

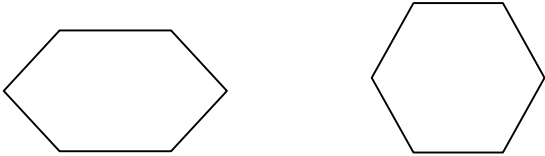
Oficina: Atividades Investigativas na Aula de Matemática

O que é uma atividade investigativa?

Eu não vou iniciar respondendo a essa pergunta, mas vou criar um cenário que dará suporte e indícios para respondê-la. Para isso vamos realizar uma tarefa proposta por Abrantes (ABRANTES, 1999, p. 161):

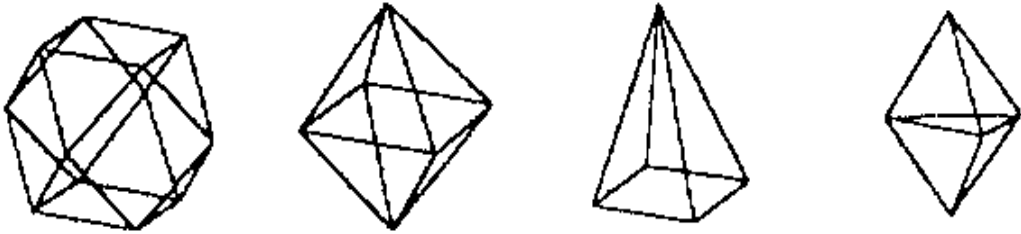
Poliedros

Observa os dois polígonos seguintes:



Ambos são hexágonos, mas o da direita dizemos que é regular, porque tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes. O da esquerda apenas tem os lados congruentes, e não os ângulos internos. Por isso Euclides, um matemático grego que viveu há 2300 anos, dizia, em vez de polígono regular, polígono equilátero (de lados com medidas iguais) e equiângulo (de ângulos com medidas iguais).

No espaço existem, além dos polígonos, poliedros. Observa com atenção os quatro poliedros seguintes e tenta ver como poderíamos aplicar a palavra **regular** aos poliedros.



Dinâmica: (Vamos simular uma situação de sala de aula na qual eu representarei a professora e vocês os alunos:

- Reúna-se em duplas para realizar a tarefa;
- Utilizem, se quiserem, o material manipulativo;
- Chamem a "professora" sempre que sentirem necessidade;
- Ao final de 10 minutos vamos socializar as definições produzidas.
- Vamos então discuti-las e negociar significados. Ou seja, vocês irão argumentar em defesa de suas definições, os colegas irão contra-argumentar até que cheguemos a um consenso.

Essa é apenas uma dinâmica possível, não sendo, de maneira nenhuma, a única.

É tarefa do professor encontrar a dinâmica mais adequada a seu caso, aos seus alunos e a sua escola, enfim, ao seu contexto, num determinado momento.

Justifiquei então a escolha daquela tarefa: definir me pareceu algo que tradicionalmente esteve longe do aluno⁴¹. Julguei importante que o grupo experimentasse fazer a Matemática dos matemáticos, que conhecessem a natureza da atividade matemática e o processo de produção de conhecimento nessa disciplina e não só o processo de transmissão, como tradicionalmente a escola faz.

Eu não sentia segurança suficiente para me deixar levar pela dinâmica. Tinha medo de “perder o controle sobre o grupo”, de não conseguir “conduzir bem os trabalhos”. E esse medo, sadio, me levou a uma preparação, uma reflexão antecipada sobre as questões que poderiam ser importantes para se chegar à definição de poliedro regular. Segundo Fonzi(1999), o que fiz foi:

Desenvolver imagens de aula onde se utilize uma pedagogia de inquirição – visto que ensinar matemática baseada na inquirição é tão diferente daquele tipo de matemática que os professores estão habituados, estas imagens podem guiar os professores nas primeiras tentativas deste modo de ensino e, também torná-los mais confiantes na experimentação desta nova perspectiva educativa (p. 55).

Cuidei para não me ater por demais no levantamento de questões, queria deixar espaço para o inusitado.

⁴¹ Posteriormente a produção da narrativa reflexiva escrita sobre essa experiência de investigação matemática junto ao Grupo de Sábado, quando da discussão deste trabalho de pesquisa pela Banca de Qualificação, tomei conhecimento da obra de Imre Lakatos intitulada “A lógica do conhecimento matemático – provas e refutações”. Nessa obra estabelece-se, em aulas de matemática fictícias, um diálogo histórico sobre poliedros, envolvendo alunos célebres., que se aproxima do que chamo neste trabalho de aula investigativa. A leitura da obra acima auxiliou-me a ampliar e aprofundar meus conhecimentos matemáticos sobre o tema poliedros e sobre a complexidade do conjecturar, do questionar uma conjectura através de contra-exemplos, do provar. Percebi muitas semelhanças, mesmo que em níveis absolutamente diversos, entre o trabalho de investigação realizado por nós professores e por eles, fictícios alunos, representantes de célebres matemáticos.

À partida, a idéia de planificar esse tipo de trabalho pode parecer contraditória. E de fato, a planificação, no sentido em que usualmente se lhe atribui pode trazer o risco de condicionar em demasia uma aula que se pretende centrada nas descobertas dos alunos (TUDELLA et al, 1999, p. 87).

Seguem algumas dessas questões:

- As faces devem ser regulares? (Faces equiláteras e com ângulos iguais)
- As faces devem ser todas iguais? (Poliedro equilátero)
- Devemos verificar as condições acima simultaneamente? (Quais são as condições necessárias?)
- Precisamos enunciar todas? (Quais as suficientes?)

Com essas questões “na manga” justifiquei a sugestão de, inicialmente, trabalhar em duplas. Pretendia com isso dar espaço para o aparecimento de estratégias e abordagens diferentes para uma mesma questão.

Se sair diferente não tem problema. Estou falando isso porque a gente tem uma tendência de achar que tem um jeito só. É uma coisa mais nossa que do aluno, eu acho. Se sair diferente não tem problema, aliás, é para sair diferente. Portanto, não colem! - eu.

Pelo menos na minha experiência com aluno real sai coisa muito diferente. - Dario⁴².

De professor não sai, sai? - eu.

Não sai muito não. Por que isso? - Dario.

Professor sai x , y - Conceição⁴³.

Professor tá meio enquadrado! - Dario. (T.G.A.)

⁴² Dario Fiorentini, professor universitário, orientador deste trabalho de pesquisa.

⁴³ Conceição Aparecida Paratelli, formadora de professores.

Neste momento explicitávamos a visão que tínhamos de nós mesmos: previsíveis.

As duplas formadas foram: Dario e Roseli⁴⁴, Alfonso⁴⁵ e Helena⁴⁶, Adilson⁴⁷ e Conceição, Renata⁴⁸ e Rogério, Luciana⁴⁹ e Andréia. Forneci papel e material manipulativo: sólidos geométricos regulares ou não, de diferentes materiais. Passei a observar o trabalho das duplas. Findos 15 min., 5 min. a mais que o previsto, interrompi as atividades e pedi que Alfonso e Helena iniciassem a segunda etapa, expondo a definição que elaboraram. A escolha foi justificada pelo fato deles terem sido os únicos a sentirem necessidade de elaborar, inicialmente, uma definição para poliedro e, somente depois, pensarem em uma definição para poliedro regular. Vejam como foi:

Nós começamos tentando definir poliedro: sólido em que as faces são polígonos com uma aresta em comum, dois a dois. - Alfonso.

Vamos tentar entender... - eu.

Se você tem duas arestas, tem um vértice comum, desse mesmo vértice não pode partir outra aresta, senão não é poliedro. Ou é um poliedro não convexo? Da mesma forma se você tem duas faces tem uma aresta comum, você não pode ter outra face partindo da mesma aresta senão não é poliedro. Ou é um poliedro não convexo? Mas essa definição permite que dois poliedros unidos apenas por um vértice sejam considerados um mesmo poliedro. - Helena. (T.G.A.)

⁴⁴ Roseli Aparecida C. D. Moraes, na ocasião, diretora de escola municipal.

⁴⁵ Alfonso Jiménez Espinosa, na ocasião, doutorando em Educação Matemática.

⁴⁶ Helena Tejera Lisbôa, professora das Redes Municipal e Estadual.

⁴⁷ Adilson Pedro Roveran, professor das Redes Pública e Particular.

⁴⁸ Renata Anastácio Pinto, doutoranda em Educação Matemática.

⁴⁹ Luciana Parente Rocha, pleiteava vaga no Mestrado em Educação Matemática.

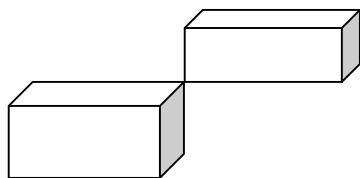


Figura 1

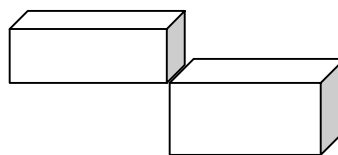


Figura 2

A partir das colocações iniciais e dos esboços de Alfonso e Helena pudemos acessar o modo de pensar deles. Para definir poliedro regular sentiam necessidade de clarificar o que era poliedro. Pudemos perceber também que ao definirem poliedro perceberam que aquela definição não estava completa, pois dava margem a anomalias. A estratégia deles foi abandonar a primeira tentativa de definição e começar de novo, de outra maneira:

Como a gente caiu nisso aqui, partimos para tentar definir poliedro como uma intersecção de planos que contenham alguma coisa no espaço - Helena. (T.G.A.)

Mesmo tendo apresentado em linhas gerais uma segunda definição a primeira ainda ecoava no grupo fazendo muita gente pensar:

Voltando um pouco, para ser polígono precisa ser linha simples - Adilson. Não pode cruzar - Conceição.

Isso aqui (Figura 3) é um polígono não convexo, mas esses daqui (Figuras 4 e 5) não. O primeiro é fechado e linha simples nos outros dois não é linha simples.- Adilson. (T.G.A.)

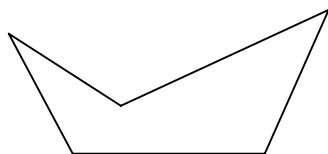


Figura 3

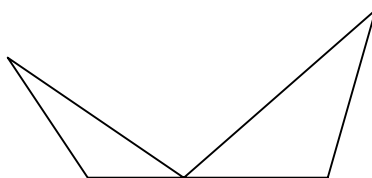


Figura 4

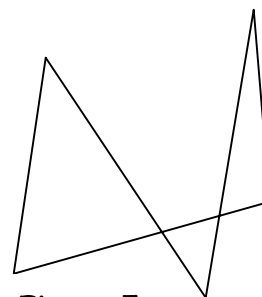


Figura 5

Com essas colocações Adilson e Conceição pareciam estar tentando "arrumar" a primeira definição de Alfonso e Helena. Para eles faltava à definição de poliedro algo equivalente à *linha simples* do plano.

Mas Helena queria prosseguir:

Retomando, começamos a pensar em termos de intersecção de planos, como é que os planos teriam que se interceptar de modo a definir um poliedro. Daí a gente começou discutir e não terminou. A gente estava tentando chegar no limite e ter certeza de que iria formar um poliedro só e não mais do que um. - Helena.

Mas eu não entendi uma coisa: e se fossem dois poliedros com um vértice só em comum, como é que ficaria? - Rogério.

De acordo com a primeira definição apresentada essa 'coisa' seria um poliedro, mas eles continuam buscando uma forma de definir que a exclua, mas ainda não chegaram a conclusão nenhuma. - eu. (T.G.A.)

Essa discussão se estendeu por mais alguns minutos quando senti necessidade de intervir:

Vamos conversar uma coisa, é um ponto importante de uma aula que privilegia investigações: surgem outras coisas que merecem investigação, como tudo isso que estávamos debatendo. Precisamos definir no grupo, ou na sala de aula se partimos para a investigação desse novo foco de interesse ou continuamos nossa investigação inicial e fazemos essa em outra ocasião. Estou colocando isso porque vai acontecer na sala de aula..." (T.G.A.)

Nesse momento fica explícita uma característica importante de uma aula que privilegia investigações: o professor não pode ser o único responsável pelas tomadas de decisões. Os alunos como produtores, associados entre si e ao

professor, devem reconhecer na atitude de decidir qual caminho seguir uma atividade própria do processo de produção de conhecimento matemático.

Aí tem um forte papel do professor. O professor tem que perceber que investir nesse tipo de atividade de investigação, sem ter se preparado, pode significar "perder" duas aulas e não chegar a lugar nenhum. - Dario. (T.G.A.)

Mesmo quando nós, professores, afirmamos, reiteradas vezes, que estamos comprometidos com uma metodologia de trabalho centrada nos processos de produção de conhecimento dos alunos, temos a forte tendência de considerar que: se os objetivos não foram alcançados de nada valeu o caminho percorrido.

Há que se considerar, no entanto, que essa postura já representa um avanço na medida em que considera que *aprender matemática é sempre produto*⁵⁰ *de uma atividade* (SILVA et al, 1999, p. 71). Mas, entendendo "produto" como um conteúdo que queremos "ensinar" vale lembrar que a matemática abrange, além de conteúdos todo o processo de descobrir, reunir e dar sentido a eles. Segundo Goldemberg *a Matemática é, em parte, um modo de pensar* (1998).

Outro aspecto a se considerar é o fato do professor estar ou não preparado para investir nessa nova investigação. É real que ser professor numa aula que privilegia investigações exige, deste, novas competências, mas exige, também, na maioria das vezes, conhecimentos matemáticos num nível diferente

⁵⁰ Grifo meu

daqueles experienciados por ele enquanto aluno, estudante para professor ou professor.

Apresentei então minha decisão, representando a figura do professor frente aos integrantes do grupo:

Vamos supor que isso tivesse acontecido numa sala de aula. Eu não estou me sentindo segura para mediar essa discussão. Eu não tenho elementos para responder a uma pergunta. Eu, na sala de aula, diria: vamos fazer essa investigação sim, mas não hoje. Essa será a nossa investigação da próxima aula. (T.G.A)

Mesmo tendo afirmado anteriormente *que o professor não pode ser o único responsável pelas tomadas de decisões*, neste momento tomo para mim esta responsabilidade. Faço isso visitando meus conhecimentos matemáticos, minha sensibilidade pedagógica, o tempo disponível para a realização da investigação, considerando o que já foi produzido pelas outras duplas que ainda não se colocaram...

E a investigação original prosseguiu:

E o que a gente faz agora? - Luciana.

Voltamos para a investigação original. - eu.

Tem as outras duplas. - Dario.

Vamos supor que poliedro seja uma coisa como a que a gente definiu no início, e que é uma só, ou seja, não tem aquela possibilidade de ter outro unido apenas por um vértice. - Helena. (T.G.A.)

Novamente Helena explicita que para prosseguir e definir poliedro regular ela necessita ter claro o que é poliedro. Para isso, apresenta sua

definição original, mas exclui a anomalia mesmo sem saber como fazer isso alterando a definição. Senti que ela estava "amarrada" sem conseguir prosseguir. Tentei interferir mostrando que a definição de poliedro não deveria ser uma preocupação, pelo menos naquele momento:

Mesmo que a definição de poliedro utilizada não exclua aquela 'coisa' ela nunca será um poliedro regular. - eu. (T.G.A.)

Surgem algumas manifestações que represento aqui pela seguinte fala:

Eu, particularmente, já estou pensando em sair desse grupo, já não sei o que é ângulo, o que é perímetro, o que é poliedro... - Rogério. (T.G.A.)

A fala parecia refletir um sentimento do grupo todo à medida que depois dela instalou-se a desordem. Todos queriam falar sobre coisas que reaprenderam no grupo. Sobre as idéias que traziam consigo e como elas, em contato com as idéias dos colegas do grupo, sejam eles professores ou acadêmicos, e em diálogo com a literatura foram desmontadas e reorganizadas. Mas, se, por um lado, havia o prazer em aprender, por outro, havia a decepção de não saber. Uma certeza havia: ninguém estava apenas ensinado ou apenas aprendendo. Éramos um grupo onde quase todos faziam um pouco de tudo. Cada um a seu modo.

O trabalho tinha que prosseguir e novamente interferi:

Vamos deixar eles definirem poliedro regular!

Dentro dessa definição eu teria que ter intersecção de planos de modo que todas as faces formadas fossem polígonos regulares iguais e que os triedros fossem iguais. - Helena. (T.G.A.)

Ao ouvir essa definição para poliedro regular, imediatamente lembrei-me das questões que eu havia levantado durante o planejamento e percebi o quanto elas estavam presentes naquela definição. O planejamento como uma antecipação cuidadosa e flexível da ação iria me permitir fazer intervenções mais elaboradas já foram pensadas com uma certa antecedência.

Ao mesmo tempo me pareceu que essa definição parecia uma analogia com a idéia que eu possuía de polígono regular: lados e ângulos internos com medidas iguais. A *lados iguais* do polígono corresponderia *faces formadas por polígonos regulares iguais* e a *ângulos internos com medidas iguais* corresponderia *triedros iguais*.

Enquanto eu fazia essa analogia, muitas dúvidas surgiam, algumas resultantes de meu desconhecimento outras sobre as quais eu precisaria refletir para me posicionar a respeito. Vejam algumas delas:

- Será que a utilização do termo *triedro* é adequada para se referir ao ângulo interno do poliedro?
- Caso a utilização fosse correta não seria necessário dizer, no lugar de *triedros iguais*, *triedros de medidas iguais*?
- Será que apenas o que foi apresentado na definição seria suficiente para garantir a regularidade do poliedro?

Tive dúvidas se o momento era adequado para uma intervenção, talvez interferir naquele momento significasse centrar esforços em detalhes sem

importância para a investigação. Considerei que seria mais produtivo deixar a investigação prosseguir e guardar meus questionamentos para um outro momento. Hoje penso ter agido acertadamente, pois a discussão que surgiu a seguir foi riquíssima:

*Como consequência as faces opostas serão paralelas. - Adilson.
Será? Eu acho que não. Veja esse aqui - eu. (T.G.A.)*

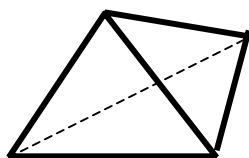


Figura 6 (Tetraedro no qual todas as faces são triângulos equiláteros)

*Cadê a face oposta a esta aqui? E ele é regular. - eu.
É regular ou não é regular? - Dario. (T.G.A.)*

Adilson elabora uma conjectura a partir da segunda definição apresentada por Helena e de alguns poliedros regulares. No entanto questioneei sua conjectura apresentando um poliedro que se encaixava na definição em questão, mas que ia contra sua conjectura. Mas Dario enxergou nessa situação uma maneira de problematizar ainda mais nossa investigação, como se poderá ver mais à frente. Antes disso, vamos participar um pouco do sentimento que estava tomando os integrantes do grupo com a perspectiva de viver em sala de aula uma experiência parecida com essa:

Vamos ver a definição. Falem a definição senão... Estão com medo de falar? - eu.

É que eu já estou preocupada com essa aula sua... - Luciana.

Você acha que eu vou ficar louca? - eu.

Ela vai começar lá com os alunos dela só com polígonos. - Dario.

Pula esse assunto, você vai ficar doente. - Luciana.

Ela vai deixar para eu falar sobre esse assunto no ano que vem. - Andréia.

Ela está com medo porque é ela quem pega os alunos depois de mim. Ela é professora do Ensino Médio lá do colégio... - eu. (T.G.A.)

Apesar da conversa ter ocorrido em tom de brincadeira ela refletia uma preocupação real. Nós professores estávamos tomando consciência de como seria difícil aceitar o desafio de assumir o risco, de aceitar o novo, de mudar.

O caos que se instalava a cada colocação, e que a narrativa não deve estar sendo capaz de comunicar, era produtivo, pois estavam sendo produzidos saberes pedagógicos e matemáticos e isto estava acontecendo de forma muito significativa para cada um de nós. No entanto o que estava acontecendo diferia tanto da aula que conhecíamos e de certa forma dominávamos... Já não sabíamos se estávamos dispostos a trocar nosso cotidiano de sala de aula, de certa forma seguro e previsível, por uma experiência que tinham tudo para ser desestruturadora. Desestruturadora de uma dinâmica de sala de aula conhecida nossa, de um modelo de ensino e de aprendizagem que apesar de contestado por nós era tudo o que conhecíamos, dos papéis estabelecidos para o professor e para o aluno, o primeiro ensinando e o segundo aprendendo. Estávamos com medo.

Seguindo minha solicitação Renata e Roseli apresentaram as definições que elaboraram juntamente com seus respectivos parceiros:

A gente colocou que é uma figura tridimensional, formada por polígonos regulares iguais e de cada vértice parte o mesmo número de arestas. - Renata.

Agora vamos ver uma outra definição para fazer o contraponto. - eu.

Sólido geométrico, convexo, com faces iguais e arestas iguais. - Roseli. (T.G.A.)

Passamos então a discutir a diferença entre os termos *figura tridimensional* e *sólido geométrico*:

A Renata falou em figura tridimensional e a Roseli em sólido geométrico . Será que é a mesma coisa? - eu.

Não pois cone é um sólido geométrico mas e não é poliedro. - Conceição.

Mas estamos querendo diferenciar sólido geométrico de figura tridimensional e não de poliedro. - eu.

Acho que a diferença entre sólido geométrico e figura tridimensional é que a última pode ser uma coisa do tipo (e então ele mostra uma folha de papel toda retorcida). A diferença é que o sólido geométrico precisa conter os pontos internos. Se eu tiver uma figura oca é uma figura tridimensional e não um sólido geométrico. - Adilson.

Então é a mesma diferença que há entre circunferência e círculo? - eu.

Figura tridimensional é quando consideramos apenas a superfície." - Helena.

Se eu montar um cubo com cartolina e não encher, ele não é sólido geométrico? - Renata.

Ele é sólido porque é fechado. - Luciana. (T.G.A.)

Peguei dois materiais manipulativos que representavam sólidos geométricos. O primeiro era feito de cartolina e oco o segundo de madeira e maciço. Perguntei:

Então esse (feito de cartolina e oco) é figura espacial e esse (confeccionado em madeira sólida) é sólido geométrico?

Não, os dois são sólidos geométricos, pois a cartolina tem espessura. Se a cartolina fosse uma superfície de dimensão zero o primeiro seria uma superfície poliédrica - Helena.

Para mim se for fechado é sólido. Se ele for só a casca mas for fechado, mesmo seu interior sendo de outro material para nós é sólido, para eles não. - Dario.

E se não for fechado? - Adilson.

Se não for fechado não é sólido, mas seria uma figura tridimensional. - Dario.

Não podemos considerar o material, as espessuras, o ar nessa discussão, precisam pensar na superfície ideal. Quando penso em sólido não penso nem em madeira nem em ar eu penso nos pontos da superfície e nos pontos internos. - Helena. (T.G.A.)

Quero registrar aqui duas reflexões uma realizada durante o ocorrido e a segunda resultante da produção desta narrativa. A primeira diz respeito a uma confusão que se estabeleceu durante nossa investigação, mas que se dá diariamente na sala de aula com alunos e professores também: confundimos a representação de um polígono com o polígono, confundimos a representação do poliedro com o poliedro. Ficamos presos muitas vezes às representações e não conseguimos abstrair o suficiente para elaborar uma definição para o ente ideal. Até que ponto o material manipulativo estava sendo útil e até que ponto estava se configurando num obstáculo didático?

A segunda remete ao conceito de região fechada. Hoje levanto a seguinte conjectura: a dificuldade em se diferenciar sólido geométrico de figura tridimensional passava também pelo desconhecimento do significado que o termo "fechado" possui em matemática. Essa dificuldade parecia estar sendo complicada pela diferença de significado na língua portuguesa e no contexto matemático.

Na seqüência, o grupo notou que um cubo sem uma das faces se enquadraria na definição de poliedro regular apresentada por Renata. Então ela disse:

Preciso colocar o 'fechada' para não dar margem a isso..."(T.G.A.)

Dario nos convidou a pensar numa pirâmide de base quadrada sem a base dizendo:

Nessas condições todas as faces são iguais e acontece o mesmo que no cubo.

Mas, de todos os vértices partem o mesmo número de arestas? - eu

Não, isso não. Você tem razão, é só no caso do cubo. - Dario. (T.G.A.)

Nesse momento flagrei-me preocupada com o pouco tempo disponível para que pudéssemos realizar a contento aquilo a que nos propomos. Estávamos ainda envolvidos com a primeira etapa do trabalho: experienciar como eles como alunos e eu como professora, a realização de uma investigação matemática. Havia ainda a segunda etapa que consistia em com base na experiência vivida refletirmos sobre as potencialidades pedagógicas das

investigações matemáticas em sala de aula, bem como sobre as exigências que seriam colocadas aos professores por essa perspectiva de trabalho.

Ambas as definições devem usar ou sólido geométrico ou figura espacial fechada. (T.G.A.)

Surge uma crítica à definição apresentada por Renata:

Quando se afirma que as faces devem ser regulares, a igualdade já fica garantida. (T.G.A.)

Muitos discordaram:

Pense numa pirâmide de base quadrada e faces laterais na forma de triângulos equiláteros: todas as faces são regulares, mas não são iguais. (T.G.A.)

A falas que acabei de reproduzir, ao meu ver, remetem à idéia de condições necessárias e suficientes. É necessário falar que as faces do poliedro são regulares, mas isso não é suficiente para garantir que sejam iguais. Mas e a recíproca? Sinto hoje não ter proposto essa discussão na ocasião. Mas ainda há a oportunidade de discutir esse assunto quando da discussão desta narrativa no Grupo de Sábado.

Se, por um lado, sinto não ter proposto essa discussão naquela manhã, por outro, entendo que ele não poderia ter se dado naquele tempo, pois é resultado de uma reflexão de hoje. E hoje eu sou outra. E essa reflexão pode se dar hoje, pois me dispus a investigar e escrever sobre o que aconteceu.

Conceição e Adilson apresentam então a definição deles explicando que partiram da idéia de polígono regular que é equilátero e equiângulo e, por analogia, entenderam que para o poliedro ser regular necessitaria de faces iguais e ângulos internos iguais. Para comunicar isso, utilizaram os termos criados por eles: *equifácero* e *equiedro*.

Então para vocês essa figura não é um poliedro regular? - Dario, referindo-se ao tetraedro representado pela Figura 6.

Ele é poliedro, mas não é regular - Conceição.

Mas segundo a nossa definição ele é regular - Dario.

Segundo a nossa também. - Renata.

Então falta algo na definição de vocês, falta considerar a questão do ângulo. - eu.

No início a nossa definição não tinha a palavra "convexo", mas daí teríamos que considerar deformações como aquela de dois poliedros unidos apenas por um vértice tendo que ser considerados como um único poliedro, mas daí a gente colocou o convexo e achamos que está bom. - Dario. (T.G.A.)

O diálogo acima está repleto de convites explícitos e intencionais à investigação. Tudo se inicia com um questionamento que dá origem a uma discussão mediada por mim, mas incentivado por Dario.

A seguir o grupo é convidado a argumentar em defesa de uma definição que não incluísse o hexaedro em questão no rol dos poliedros regulares:

Deixa eu falar uma coisa: para eles (Dario, Roseli, Renata e Rogério) isso daqui (fig. 6) é regular temos que aceitar ou derrubar essa definição. Será que vocês (Dario, Roseli, Renata e Rogério) aceitariam trocar a

convexidade por 'de cada vértice partir o mesmo número de arestas' ? - eu.

Não, pois daí esta possibilidade (fig. 6) estaria excluída. - Dario. (T.G.A.)

Helena argumenta baseando-se na idéia que temos sobre regularidade:

O conceito de regularidade tem relação com constância e aí se de um vértice partem 3 arestas e de outro partem 4 arestas não existe regularidade, há variação. - Helena. (T.G.A.)

Procuro atacar a definição deles por outro ângulo fazendo analogia com a definição de polígono no plano e ressaltando a necessidade das duas definições (polígono e poliedro) serem compatíveis. Segue então uma tentativa de compatibilizar essas duas definições:

Estávamos discutindo ali e o Dario disse que não sente necessidade de falar do ângulo. Se não precisa falar do ângulo no espaço não precisa falar de ângulo no plano e então isso (fig. 7) seria polígono regular. As definições de polígono regular e poliedro regular precisam ser compatíveis - Eu (T.G.A.)

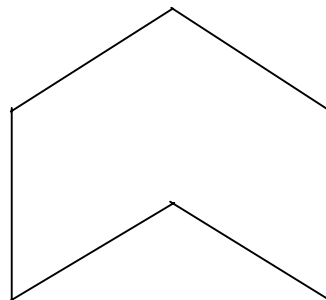


Figura 7

Tudo bem: Sólido geométrico, convexo, com faces iguais, arestas iguais e ângulos das faces iguais. - Dario.

O que ele está dizendo é que analisar os ângulos das faces de um poliedro é equivalente a analisar os ângulos internos de um polígono. Vocês concordam? - eu.

Não, precisamos analisar o ângulo no espaço. - Adilson.

Tá bom, eu concordo, é razoável. Eu procurei uma divergência, queria problematizar, pois acho que se pode terminar uma aula sem chegar a um consenso. Dario. (T.G.A.)

Reflico hoje sobre o meu movimento de tentar compatibilizar as definições de polígono e poliedro mediante um raciocínio analógico. Entendo que este não se constitui num argumento conclusivo em Matemática. De qualquer maneira esse movimento ilustra bem o que pode se passar durante uma aula centrada nas atividades dos alunos envolvidos com tarefas investigativas. Reforça também a certeza de que para ser professor nesse contexto é necessário estar muito mais preparado e disposto a aprender. Se, por um lado, esse meu movimento (de tentar compatibilizar as duas definições) revela minha crença, sem fundamentação matemática, na necessidade de que as definições de poliedro e polígono fossem compatíveis, por outro lado, evidencia-se uma intenção didática, a intenção de associar a idéia e a definição de polígono, figura plana, com a idéia e a definição de poliedro, figura espacial. Partir de algo conhecido, de um conhecimento sobre o qual se tem segurança visando ampliá-lo, aprofundá-lo, elaborar uma definição mesmo que depois ela tivesse que ser posta à prova e não resistisse a esta. O valor dessa experiência estaria no caminho percorrido e não no objetivo não atingido a contento. É possível observar que ao mesmo tempo em que identifico limitações de ordem

matemática em minha intervenção, percebo valor pedagógico nela. Fica para mim a meta de procurar ter clareza dos conceitos matemáticos com os quais pretendo trabalhar com meus alunos. Fica também a certeza de que nunca terei total clareza sobre todos os conceitos matemáticos que pretendo trabalhar com meus alunos.

Ao final dessa experiência, estávamos assustados frente à perspectiva de vivenciarmos uma experiência como aquela em nossas salas de aula. Eu que pretendia mediar uma discussão a respeito da dinâmica de uma aula que privilegia investigações matemáticas por parte dos alunos, das características das tarefas, da natureza das atividades realizadas pelos alunos tive que me contentar com a discussão das exigências e desafios que se colocam aos professores envolvidos.

As preocupações explicitadas foram as mais variadas:

- A partir de agora todas as suas aulas serão assim? Essas aulas serão muito desgastantes para o professor.
- Como a escola em que você leciona vê isso? A dinâmica dessas aulas, centrada em tarefas investigativas e na atividade dos alunos, rompe com o modelo tradicional de aula e de ensino e aprendizagem de Matemática.
- Como compreender e tratar a disciplina nesse novo contexto? Quando papéis estão sendo redefinidos, certezas dão lugar a dúvidas.

Eu não tinha respostas concretas para as perguntas., Assim como eles, eu também estava experimentando pela primeira vez uma aula investigativa na prática. Não pretendia, no entanto, revolucionar de uma só vez minha prática. A

inserção de tarefas investigativas no currículo e em minha prática deveria ocorrer naturalmente envolvendo conteúdos que possibilitassem exploração e com relação aos quais eu tivesse um conhecimento relativamente profundo. Logicamente, com o tempo, isso iria se modificando, expandindo e aprofundando à medida que eu e meus alunos nos apropriássemos desse modo de conceber o ensino, a aprendizagem e a Matemática.

As discussões do grupo, naquele momento, não foram além do levantamento e exploração dessas preocupações, não sendo, portanto, atingido um dos objetivos do encontro.

Esta narrativa procura retratar uma primeira tentativa prática de aproximar um grupo de professores de uma nova maneira de entender a Matemática, seu ensino e sua aprendizagem. Anterior a esse momento, houve um contato do grupo com a literatura compatível. Nessa oportunidade, discutiu-se não apenas aspectos teóricos de aulas investigativas, mas também narrativas reflexivas sobre aulas que se baseavam em tarefas e em dinâmica que privilegiavam atividade matemática de cunho investigativo por parte dos alunos.

Preparando o cenário e ensaiando.

Os espelhos partidos têm muito mais luas.

Mario Quintana

Anteriormente à realização da experiência com a aula investigativa no Grupo de Sábado, uma questão me inquietava: como ir pouco a pouco transformando o momento da aula num ambiente propício às investigações matemáticas dos alunos? Receava que, frente a uma mudança brusca na dinâmica de trabalho, os alunos se retraíssem. Receava também perder o controle disciplinar. A princípio, esse último receio me parecia fruto do contexto em que eu estava inserida naquele momento: uma escola com rígidas regras disciplinares e com uma cultura tradicional de sala de aula. Hoje, ao refletir sobre isso, tendo a considerar que agi dessa forma por insegurança. Insegurança de quem é iniciante; de quem está tentando criar sua prática pedagógica, mas também de quem faz parte de uma equipe que trabalha numa escola, escola esta que paga meu salário.

Considerei que seria conveniente elaborar uma dinâmica intermediária para abordar o conteúdo seguinte. Essa dinâmica não poderia ser totalmente expositiva nem completamente aberta à exploração dos alunos. Decidi então por uma estratégia relativamente conhecida nossa, minha e dos alunos, uma

aula dialogada⁵¹. Procurei cuidar para me deixar levar por eles mais do que conduzi-los. Perguntar mais do que responder. Ouvir.

Iniciei a aula escrevendo na lousa duas palavras:

Círculo

Circunferência

Ocorreu então uma rápida conversa entre eu e os alunos que relato a seguir:

Quem sabe explicar a diferença entre círculo e circunferência? - eu.

Círculo é tudo e circunferência é só em volta. - Pedro⁵².

Ok. É correto dizer: área da circunferência? - eu.

Não! - Muitos.

Por quê? - eu.

Porque linha não tem área - Ana.

Mas posso falar: área interna à circunferência. - Luís.

O que vocês acham? - eu.

Tudo bem! - Muitos.

Existe outra maneira de me referir à área interna da circunferência? - eu.

Área do círculo. - Pedro.

⁵¹ Quando digo "aula dialogada" estou me referindo a uma dinâmica de trabalho na qual eu (professora), aluno e conhecimento, interagimos através do diálogo. Os questionamentos feitos por mim aos alunos visam fazê-los refletir, elaborar e reelaborar conceitos e encontrar maneiras de comunicar raciocínios, idéias, conjecturas, hipóteses, conclusões e definições de forma clara. As respostas a esses questionamentos são ouvidas, discutidas e tomadas como "gancho" para a continuação da aula. O objetivo da adoção dessa dinâmica de aula era o de preparar os alunos para realizar investigações matemáticas em equipes e com relativa autonomia.

⁵² Nesta narrativa os nomes dos alunos são fictícios. Ela diz respeito a uma aula acontecida em setembro de 2001 em uma das quatro turmas de 8ª série do período da manhã para as quais lecionava. Além disso, as falas constantes destas não são exatamente fiéis nas palavras, mas o procuram ser no sentido. Isso se deve ao fato de ter escrito a narrativa imediatamente após o término da aula com base em minha memória e em minhas anotações em diário de campo, não tendo eles sido suficientemente detalhados para que eu pudesse ser fiel a todos os nomes e palavras.

Vocês concordam? - eu.

Sim! - Muitos.

E se eu for falar em comprimento, devo me referir ao círculo ou à circunferência? - eu.

Tanto faz. - Lia.

Por que você acha isso? - eu.

Porque os dois têm comprimento. - Lia. (R.E.P.)

Meses depois do acontecido, me ponho a refletir sobre esse pequeno diálogo e tenho agora impressões diversas das que tive no momento em que vivi o episódio. Muitos fatores podem estar contribuindo para esse fenômeno: eu mudei, aprendi muitas coisas, desconstruí outras e, portanto, sou capaz de percepções e considerações que àquele tempo eu não era. Por outro lado, estou a me observar num outro tempo e este fator me distancia de mim mesma: afinal, se não sou mais aquela, que perigo há em me criticar?

E, assim, entendendo e sentindo, me pego pensando em quão rica foi essa pequena conversa e quão rápido ela deve ter se perdido entre os tantos outros pensamentos dos alunos que dela participaram. Ao mesmo tempo em que penso isso me lembro dos outros vinte e tantos alunos que apenas escutaram a conversa, não tendo nela se envolvido efetivamente. Acredito que muitos estavam atentos, mas tenho certeza também de que outros nem sequer a ouviram apesar de a terem escutado. Sinto então não ter, na ocasião, pensado em uma estratégia que propiciasse o envolvimento de mais alunos na discussão e que também exigisse deles a elaboração de um registro escrito que fosse resultado da negociação entre os alunos. Percebo então que não há o que lamentar, há sim o que comemorar, afinal, graças a esta pesquisa, aprendi outras coisas. Aprendi, por exemplo, que o que aprendo hoje não podia ter sido

aprendido ontem e que esse "aprendizado" logo se torna ultrapassado ou obsoleto. Desta maneira coloca-se como imprescindível um movimento cíclico envolvendo ação e reflexão. Tenho que cuidar para não deixar que esse movimento mine minhas forças e não culmine por tornar-me pessimista. Para isso sinto ser necessário cultivar o prazer pelo aprender.

Mas o diálogo continua:

Ok. Como vocês acham que podemos fazer para descobrir o comprimento de uma circunferência? - eu.

Coloca um barbante em volta depois estica e mede. - Caio.

Ótimo! Acho eu que durante muito tempo se fez assim para se descobrir o comprimento de curvas até que num certo momento alguém percebeu que ... Antes disso, o que é diâmetro de uma circunferência? - eu.

É uma reta que vai de um lado ao outro de uma circunferência. - Caio.

Assim? - eu. (R.E.P.)

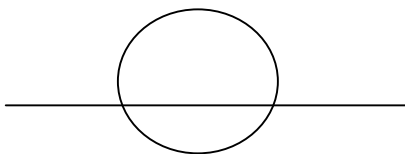


Figura 8

Não, assim: - Caio (R.E.P.)

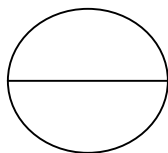


Figura 9

Mas eu fiz o que você disse: fui de um lado ao outro de uma circunferência com uma reta. - eu.

Tem que passar pelo meio. - Caio.

Mas você não tinha dito isso... Diga de novo. - eu.

Diâmetro é uma reta que vai de um lado ao outro de uma circunferência e passa pelo meio. - Caio.

Pessoal, como chama o meio da circunferência? - eu.

Centro. - Muitos.

Vou desenhar o que foi dito e vocês me dizem se eu estou desenhando certo. - eu. (R.E.P.)

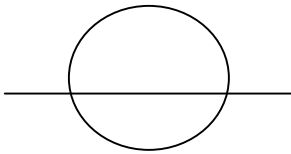


Figura 10

Não, tem que dizer semi-reta. - Luís.

Semi-reta? Por quê? - eu.

Não, tem que dizer segmento de reta. - Luís.

Ok, agora sim, tenho todas as informações necessárias para desenhar o que vocês queriam. Acho que o diâmetro já está bem definido. Agora alguém pode me explicar o que é raio? - eu. (R.E.P.)

Mas antes de saber a resposta que os alunos deram a esse questionamento paremos um pouco. Percebo que alguns explicitam domínio do significado de alguns termos geométricos como: reta, segmento de reta, semi-reta, círculo, circunferência e, centro. e que foram percebendo, ao longo da conversa, que é necessário cuidado com as palavras pois pequenos nuances em seus significados foram capazes de comunicar idéias completamente distintas das que objetivávamos. Elaborar uma definição escrita como resultado da discussão e da negociação - isto é, sistematizar a discussão - foi o que me pareceu ter faltado.

Há, ainda, algo que quero acrescentar: toda essa discussão não estava ocorrendo por acaso; havia intencionalidade de minha parte. A discussão não corria solta. Embora procurasse problematizar os conhecimentos que vinham sendo mobilizados, ainda era eu quem conduzia a discussão. Isto porque me preocupava-me a perspectiva de não conseguir abordar todo o conteúdo a que me propunha. Preocupava-me também a possibilidade de perder o controle disciplinar sobre a classe. Pergunto-me hoje: como teria sido se eles tivessem tido liberdade de seguir seus próprios caminhos e não os meus? Qual deveria ter sido a dinâmica, como deveria ter sido proposta a tarefa para que fosse possível a eles realizarem isso?

Voltemos, então. Eu havia pedido que alguém me explicasse o que é raio.

É a metade do diâmetro. - Pedro. (R.E.P.)

Na ocasião contentei-me com a resposta, mas hoje ela não me basta. Esta resposta traz implícita a idéia de que o raio e medida do raio são a mesma coisa. Mas, da mesma maneira e ao mesmo tempo em que eu me vejo questionando a resposta do aluno me pergunto: até que ponto isso não é consequência de minha própria prática? Vasculhando minhas reminiscências, lembro de ter pedido inúmeras vezes que, dado o raio, fosse calculado o perímetro da circunferência. Por outro lado, devo reconhecer que foi graças a esta pesquisa que pude perceber que meu próprio discurso vem contribuindo para que raio e medida do raio sejam confundidos.

Vejamos como a conversa continuou:

Como escrever isso em linguagem matemática? - eu.

Raio é diâmetro dividido por 2 - Pedro.

Escreva na lousa. - eu.

$$R = \frac{D}{2} \text{ - Pedro.}$$

Tudo bem para todos? - eu.

Tudo bem! - Muitos. (R.E.P.)

Quando perguntei "*tudo bem para todos?*", demonstrei minha preocupação com a compreensão não somente dos alunos diretamente envolvidos na conversa, mas com todos os outros presentes na sala de aula. No entanto, este artifício era bastante cômodo para mim à medida que me contentava com o *tudo bem* de uns poucos, entendendo-o como "sinal verde" para prosseguir a discussão. Mas como acessar a compreensão da maioria? Ou melhor, como envolver a todas na discussão? Essa última questão já estava se tornando recorrente...

Retomando então, em um certo momento os homens perceberam que dividindo o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro o resultado era sempre próximo de 3. isso valia para circunferências grandes, pequenas, enfim, para qualquer uma. Isso era um conhecimento prático. Vocês conseguem representar esse conhecimento prático através da linguagem matemática? - eu.

Comprimento dividido por diâmetro é mais ou menos 3. - Lia.

Posso escrever assim (e indo à lousa): $\frac{C}{D} = \pm 3$ " - eu.

Não! - Muitos.

O que eu fiz de errado? - eu.

Coloque o igual com a cobrinha em cima ao invés de mais ou menos. - Luís.

Assim? (E indo à lousa) $\frac{C}{D} \cong 3$ - eu.

É! - Muitos.

Deixem eu continuar. Ao longo da história, os métodos para efetuar medições foram sendo aperfeiçoados e foram sendo encontrados aproximações melhores para a divisão do comprimento pelo diâmetro. (E indo à lousa) $\frac{C}{D} \cong 3 \cong 3,1 \cong 3,14 \cong \dots$ Quanto mais se aperfeiçoavam esses métodos mais casas decimais apareciam e não se verificava nenhum padrão, ou seja, esse número não parecia uma dízima periódica. Hoje se sabe que esse número não é uma dízima periódica pois apesar de ter infinitas casas decimais estas não obedecem a um padrão. Esse número recebeu o nome de pi, que é uma letra do alfabeto grego. Nós dizemos que esse número é irracional e se houver tempo até o final do ano falaremos de outros como ele. Moça, depois desse falatório, como é que fica a fórmula? - eu. (R.E.P.)

A princípio, após ter transcrito as gravações em áudio dessa parte da aula, pensei: "Quanta bobagem! De onde eu tirei esse arremedo de História da Matemática? Para falar a verdade, não sabia muito bem como foram construídos historicamente os conceitos que trabalhei naquela aula. Tenho que aprender. Onde buscar?" Posteriormente, refletindo e dialogando com outros interlocutores considerei exagerada essa minha auto-crítica pois pedagogicamente minhas colocações podem ser consideradas válidas à medida que contribuem para a produção de significados sobre o número "pi". Outras alternativas pedagógicas poderiam ter sido usadas de forma a considerar os alunos como sujeitos de conhecimento, como por exemplo: pedir para os alunos buscarem na internet e em livros informações sobre a história do surgimento do "pi" e de suas tentativas de determinação ou explorar a razão entre as medidas da circunferência e do diâmetro de vários objetos circulares.

Segue um silêncio que ora me parece muito significativo. Ele ocorre após a primeira exposição oral de minha parte. Por um lado, esse silêncio pode

significar que os alunos consideravam minhas palavras de professora como verdade incontestável. Por outro lado, esse silêncio pode significar que o que disse não valia a pena ser contestado.

Como ninguém se colocava fui até a lousa e escrevi: $\frac{C}{D} = \pi$

Ninguém contestou.

Em que isso ajuda a encontrar uma fórmula para o comprimento da circunferência? - eu.

Comprimento é diâmetro vezes pi. - Caio.

Como você chegou a essa conclusão? - eu.

Passei o D para lá, multiplicando. - Caio.

E ele pode fazer isso? - eu.

Pode, é só multiplicar os dois lados por D. - Lara.

Fica assim então: $C = D \cdot \pi$ ou $P = D \cdot \pi$ - eu.

Por que P, professora? - Lara.

P de perímetro. - eu.

Mas como pode perímetro de circunferência? - Lara.

É a mesma coisa, perímetro, comprimento é tudo a mesma coisa. O que é perímetro para você? - eu.

É a soma dos lados. - Lara.

Quantos lados têm a circunferência? - eu.

Um.

Nenhum.

Inúmeros.

O único jeito de explicar o que é perímetro é falando sobre a soma das medidas dos lados? - Eu.

Não, perímetro é o contorno. - Ivo.

Circunferência pode ter perímetro? - eu.

Pode. - Muitos. (R.E.P.)

No diálogo acima tantas coisas me chamaram atenção... Mas não posso escrever sobre todas. Escolho a que me parece mais problemática para mim e para os alunos: o conceito de perímetro. Este parece estar, para a maioria das pessoas, atrelado à idéia de polígono e, por conseguinte, à fórmula mágica: perímetro é a soma das medidas dos lados. Flagro-me preocupada em elaborar propostas de trabalho que permitam aos alunos construir um conceito mais amplo para perímetro. Lembro-me de discussões riquíssimas ocorridas sobre esse mesmo tema em reuniões do Grupo de Sábado. Depois dessa reflexão, nunca mais consegui explorar o conceito de perímetro da mesma maneira. Passaram a , fazer parte dessa nova abordagem não-polígonos, figuras planas com fronteiras internas e externas entre outras situações que contribuíam para a construção de um conceito de perímetro mais abrangente⁵³.

Vamos voltar à nossa fórmula: $P = D \cdot \pi$. Um professor que tive me disse que essa fórmula pode ser usada para descobrir se a bíblia diz ou não a verdade. O que vocês acham disso? - eu.

Ele é louco - Muitos.

Ele me disse que existe na Bíblia uma passagem na qual são citados o comprimento e o diâmetro de uma piscina circular e que com base nesses dados pode-se descobrir se essa piscina existiu ou não. Sobre o que ele está falando? - eu.

Ele divide o comprimento da piscina pelo seu diâmetro, se der 3 a piscina existe. - Lia.

Ou o cara que escreveu sabia Matemática... - Luís.

Como assim, sabia Matemática? - eu.

Ele inventa uma piscina em que na hora de dividir C por D dá 3. - Luís.
(R.E.P.)

⁵³ Ver sequência de narrativas sobre esse assunto em Histórias de aulas de Matemática: Compartilhando saberes profissionais. Campinas, SP: Graf. FE: CEMPEM, 2003.

Apesar de os alunos, num momento anterior, terem se mantido calados frente a um discurso meu, bastante inverossímil, a partir de então eles começaram a sentirem-se à vontade para contestar. Afinal a fala não era minha., era apenas um velho professor meu que não era conhecido deles, a quem eles não deviam respeito e nem lançaria sobre eles um olhar avaliativo, e, além do mais, que história é essa de Bíblia metida no meio da aula de Matemática? Mas essa contestação não vem por acaso. Ela se baseia em conhecimento matemático e revela uma argumentação em defesa à sua posição. Será uma vitória travestida de derrota?

Tá bom! Será que a gente consegue escrever a fórmula do perímetro da circunferência usando o raio? - eu. (R.E.P.)

Novamente silêncio. O que significava esse silêncio? Acredito que os alunos pensavam que eu concluiria logo o assunto, falaria logo tudo o que estava tentando arrancar deles. Conhecedores do contrato didático em vigor, sabiam que eu sabia e o que eu queria que eles dissessem. Por que brincava então com eles? Mas, e se eu não soubesse? E se de verdade estivéssemos envolvidos numa discussão na qual tanto os rumos quanto o destino fossem desconhecidos por ambos? Será que essa situação, muito comum numa aula investigativa, contribuiria para que nos envolvêssemos realmente na construção do conhecimento e não somente numa encenação desse ato?

Como imaginei que os alunos esperavam, escrevi explicando a substituição de D por $2r$ e alteração na ordem dos fatores:

$$P = D.\pi$$

$$P = 2r\pi$$

$$P = 2\pi r$$

Esse mesmo professor dizia que para se lembrar da fórmula do perímetro da circunferência bastava lembrar-se de dois franceses. - eu. (R.E.P.)

Silêncio.

Isso é uma piada pessoal, é para vocês rirem. Eu ri bastante. - eu.

Você ria à toa professora. - Ana.

Vamos para a área, então, pessoas sérias. - Eu (R.E.P.)

Acredito que sejam necessárias algumas palavras sobre o ocorrido e relatado acima. Esse episódio mostra quanto são relativas as estratégias e os bons exemplos de ensino de que fala Shulman (1986). O que deu certo numa época ou classe pode não surtir o mesmo efeito em outra... Ao perceber que a estratégia não funcionou, restava apenas brincar sobre o ocorrido... A brincadeira funciona como uma forma de compensação e algo usual no contrato didático estabelecido implicitamente com os meus alunos.

A história dessa aula não termina por aqui. Muito ainda aconteceu até seu final. As reflexões sobre ela também foram múltiplas e certamente novas interpretações surgirão sempre que voltar a analisá-la. Mas vale destacar que

só quando me pus a escrever sobre as sensações que a leitura da transcrição do episódio vivido por mim me causaram é que consegui explicitar para mim mesma meus estranhamentos e questionamentos a respeito de minha própria prática. Esse texto agora é suporte para uma nova versão de mim mesma enquanto professora de Matemática.

Mais ensaios

Organizar e dirigir situações de aprendizagem é manter um espaço justo para tais procedimentos. É, sobretudo, despende energia e tempo e dispor das competências profissionais necessárias para imaginar e criar outros tipos de situação de aprendizagem, que as didáticas contemporâneas encaram como situações amplas, abertas, carregadas de sentido e de regulação, as quais requerem um método de pesquisa, de identificação e de resolução de problemas.
Philippe Perrenoud

No encontro do Grupo de Sábado posterior ao narrado no capítulo "Neste grupo a gente aprende ou desaprende?", trabalhamos na elaboração de tarefas com as quais meus alunos se envolveriam. As tarefas deveriam abordar o tema "Funções" e essa foi uma decisão minha. Para tomá-la, considerei que havia de minha parte uma imensa vontade de trabalhar esse assunto com os alunos e, no ano anterior, com outras turmas, o tempo não havia sido suficiente e isto havia me frustrado bastante. Considerei também que esse assunto era pedagogicamente rico à medida que uma tarefa proposta aos alunos poderia ser explorada e registrada por diferentes equipes de maneiras variadas, através de esquemas, gráficos, desenhos, descrição por escrito das etapas, linguagem algébrica, entre outras possibilidades a serem criadas por eles. Além disso, angustiava-me a perspectiva de que aqueles alunos pudessem vir a perder a oportunidade de conhecer o desenvolvimento do conceito, a riqueza de significados, a variedade de possibilidades para se explorar as funções. Queria que eles se envolvessem em tarefas potencialmente formativas nas quais:

- Percebessem possíveis padrões;
- Decidissem por um padrão e justificassem a decisão;
- Registrassem-no com auxílio de figuras, da linguagem escrita e da linguagem algébrica;
- Lidassem com situações cotidianas que podem ser descritas através de funções utilizando-as e compreendendo sua importância e utilidade;
- Comparassem diferentes maneiras de registro do mesmo padrão e procurassem entender porque são equivalentes;
- Percebessem possibilidades e restrições para as variáveis da função da função.

O assunto "Funções" era tratado em um dos capítulos do livro didático utilizado⁵⁴. Havia uma cobrança explícita por parte da direção da escola com relação à sua utilização e à exploração de todos os assuntos deste. Essa cobrança uniu-se ao fato de que abordagem do livro ao assunto era bastante interessante⁵⁵ embora conflitasse com a idéia de propor tarefas que exigissem atividade investigativa por parte dos alunos. Esse conflito acontecia pois tarefas investigativas precisam ser relativamente abertas à exploração dos alunos e os questionamentos presentes nos problemas apresentados no livro eram bastante específicos e davam margem a apenas uma resposta que podia ser considerada correta. O que poderia variar na resolução de um problema

⁵⁴ IMENES e LELLIS, 1997.

⁵⁵ Considero a abordagem dada pelo livro às funções bastante interessante pois é dada ao aluno a oportunidade para que ele estabeleça relações entre grandezas, comunique essas relações através da linguagem algébrica. Tudo isso se dá através da exploração de uma variedade bastante grande de situações numéricas, geométricas, da vida em geral.

proposto no livro era a estratégia. Na tentativa de resolver esse conflito resolvi tomar alguns dos problemas propostos pelo livro didático como ponto de partida para a elaboração de algumas das tarefas pelo Grupo de Sábado. E lá fomos nós.

Na elaboração das tarefas um dos objetivos era que elas gerassem discussões. As discussões que se estabeleceriam deveriam se dar entre alunos, durante o trabalho em duplas, comigo, através de interferências minhas no trabalho das duplas, e entre diferentes duplas, no momento da discussão final.

A decisão pelo trabalho em duplas ou trios se baseou na necessidade de discussão que se colocava pela natureza investigativa do trabalho que estávamos prestes a realizar. Se, por um lado, o trabalho individual se constituía em obstáculo às discussões, o trabalho em equipes maiores me assustava pois, segundo meu entendimento na ocasião, haveria maior possibilidade de dispersão por parte dos alunos.

O registro das conjecturas formuladas pelos alunos, da argumentação contra ou a favor delas e das conclusões, era algo que se mostrava importante, pois, a partir desse material é que eu tentaria mobilizar a classe em torno de uma discussão mais ampla e profunda sobre cada uma das tarefas propostas. Para tanto é que foi planejado o momento final, de discussão coletiva, no qual cada dupla seria convidada a expor suas estratégias, argumentar em defesa de suas conjecturas, comparar resultados, etc.

Com base nisso, decidimos solicitar às duplas ou aos trios que realizassem registros detalhados de todo o processo de exploração de cada uma das tarefas incluindo: tentativas frustradas; erros; as várias conjecturas

levantadas; testes que validassem ou não estas; diferentes formas de registrar o padrão percebido; esquemas; gráficos; tabelas; e tudo o que os auxiliassem na exploração da tarefa.

Nos minutos iniciais do trabalho, enquanto discutíamos sobre como transformar um problema selecionado por mim em tarefa investigativa, nos deslumbramos com a riqueza da situação e começamos a levantar questões a serem feitas aos alunos. Essas questões visavam propiciar aos alunos o contato com toda essa riqueza, mas, sem perceber, desvirtuavam a natureza da tarefa investigativa à medida que conduziam a exploração desta pelos alunos. Logo nos demos conta disso e recuamos fazendo opção por propostas mais abertas. Mantivemos algumas questões que nos pareceram importantes para aprofundar as discussões a respeito de aspectos imprescindíveis do tema "Funções" e outras que visavam enfatizar a natureza investigativa das tarefas.

Elencamos também materiais que poderiam ser úteis e estar à disposição dos alunos no momento da realização do trabalho colaborativo como: papel quadriculado, régua, palitos de sorvete, tachinhas, contas de luz. Nesse momento me lembrei de máquinas similares à da Tarefa 1 que se encontravam no CEMPEM. Pensamos ser interessante levá-las à sala de aula para que os alunos, caso necessário, pudessem manuseá-las durante a exploração da tarefa. Levei-as para casa e fiz as adaptações necessárias a fim de que um dos braços da máquina tivesse o dobro do comprimento do outro braço e as deixei prontas para o grande dia⁵⁶.

⁵⁶ A régua de metal que funcionava como braço da balança possuía originalmente apenas um furo em seu ponto médio. Por esse furo passava um prego ou arame que sustentava o braço da

Tarefas sobre Funções

Orientações: 1. Ao realizar cada uma das tarefas a dupla deverá fazer, da forma que considerar mais conveniente, o registro de todas as etapas, todos os raciocínios, todas as idéias;

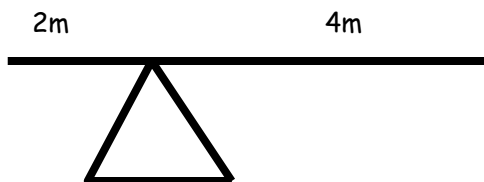
2. Desse registro devem constar, inclusive, os erros cometidos e os caminhos que, por algum motivo, foram abandonados;

3. Todos os registros devem vir acompanhados de justificativas, sejam elas da espécie que forem;

4. Cada uma das tarefas deve ser realizada em uma folha de sulfite à parte.

Tarefa 1.: Observe a máquina abaixo. Seus braços medem respectivamente 2m e 4m. Um peso foi colocado no braço direito dessa balança. Encontre uma ou mais maneiras para representar o peso⁵⁷ que deve se colocar no braço esquerdo da balança a fim de que ocorra o equilíbrio.

E se os braços da máquina tivessem outras dimensões?



Tarefa 2: Tenho 26 m de tela e pretendo fazer um cercado e plantar uma horta. Encontre uma ou mais maneiras de representar a área de todos as hortas possíveis de serem cercadas com essa quantidade de tela.

Qual a melhor horta que consigo cercar com essa tela?

O que você pode me dizer a respeito dos números capazes de representar os lados desse cercado?

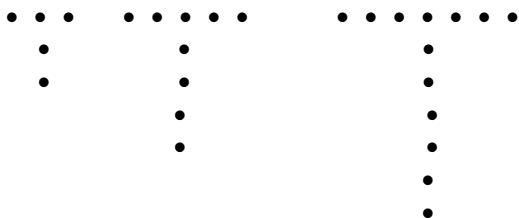
E dos números capazes de representar a área desse cercado?

balança e o unia ao corpo da balança. Foram feitos outros furos equidistantes para que o apoio pudesse ser feito em outros pontos que não o médio.

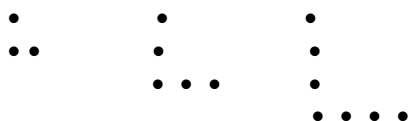
⁵⁷ O termo "peso" está sendo utilizado aqui com o mesmo sentido que é atribuído a ele na linguagem corrente.

Tarefa 3: Encontre uma ou mais maneiras de representar uma figura de uma posição qualquer de cada uma das seqüências de pontos abaixo.

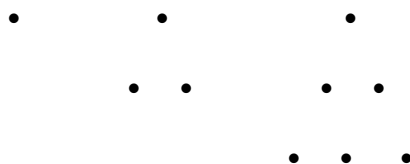
Seqüência 1⁵⁸:



Seqüência 2:



Seqüência 3:



O que você pode me dizer a respeito dos números que podem representar a posição de uma figura qualquer de cada uma das seqüências?

E o que você pode me dizer a respeito dos números que representam o número de pontos de uma figura qualquer da seqüência?

Tarefa 4.: Encontre uma ou mais maneiras de representar a relação que existe entre os números da parte esquerda e da parte direita de cada uma das tabelas abaixo

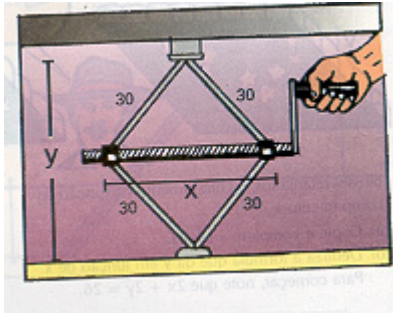
a)	x	y	b)	x	y	c)	x	y
	$\frac{1}{2}$	1		-2	1		0	1
	3	6		-1	2		1	2
	$\frac{5}{2}$	5		0	3		2	4
	7	14		5	8		3	8
				9	12		4	16

⁵⁸ Seqüências 1 e 2 retiradas do livro Matemática - 8ª. série - IMENES e LELLIS - pág 223

Tarefa 5⁵⁹: Observe o "macaco" abaixo e encontre uma ou mais maneiras de representar todas as diferentes alturas que o "macaco" é capaz de atingir.

O que você pode me dizer a respeito das alturas que esse "macaco" é capaz de atingir?

E a respeito das larguras que esse "macaco" é capaz de assumir?



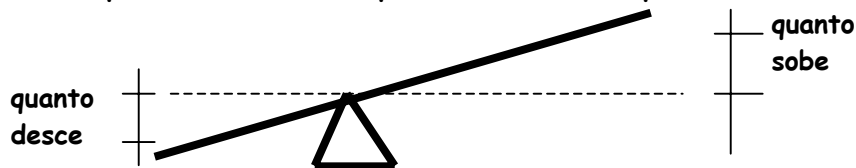
Tarefa 6: Tendo em mãos uma conta de luz recente represente através de um gráfico o consumo de sua residência. Com base nesse gráfico faça comentários justificados a respeito de: consumo máximo, consumo mínimo, períodos em que houve queda no consumo, períodos em que houve aumento no consumo e outros assuntos que vocês acharem convenientes.

Tarefa 7: Observe a alavanca abaixo, seu lado esquerdo mede 3m e seu lado direito 4m. Encontre uma ou mais maneiras de representar o quanto se eleva o lado direito quando se abaixa o lado esquerdo.

E se os lados tivessem outras dimensões?

O que você é capaz de dizer a respeito dos valores que podem assumir o quanto se eleva o lado direito?

E a respeito dos valores capazes de assumir o quanto se abaixa o lado esquerdo?



Tarefa 8: João foi ao parque de diversões e mesmo sem brincar em nenhum brinquedo gastou R\$ 20,00. Bruno foi ao mesmo parque de diversões e gastou R\$ 35,00 tendo brincado em 3 brinquedos, todos com o mesmo preço. Encontre uma ou mais maneiras de representar todas as possíveis quantias a serem gastas por uma pessoa que vá ao parque de diversões.

⁵⁹ Figura retirada do livro Matemática - 8ª. série - IMENES e LELLIS - pág 224.

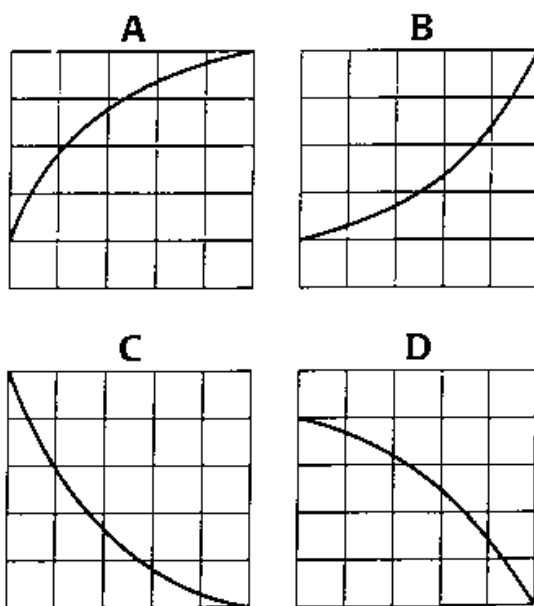
Tarefa 9: Me explique o que você entende por função.

Tarefa 10: Nos jornais você freqüentemente encontra manchetes como estas:



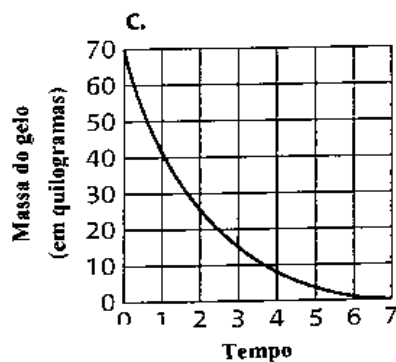
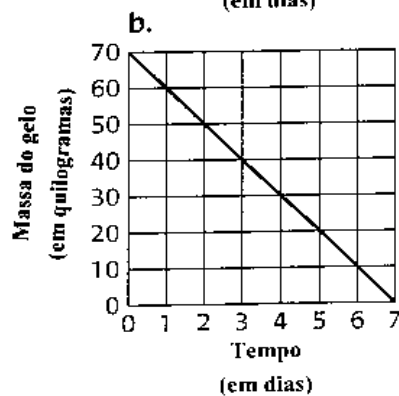
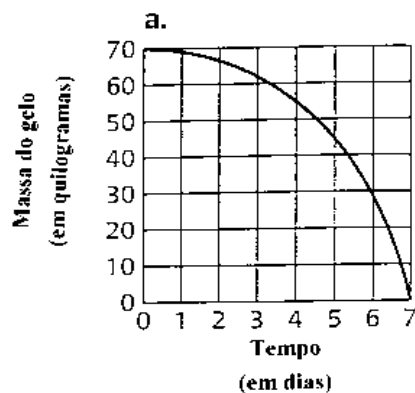
Observe os gráficos e responda:

1. Qual gráfico se encaixa à manchete da esquerda?
2. Qual gráfico se encaixa à manchete da direita?
3. Faça manchetes para os outros dois gráficos.



Tarefa 11:

1. Os três gráficos ao lado mostram diferentes modos de como o gelo pode derreter. Escreva algumas frases que descrevam cada um dos gráficos (em termos de como o gelo pode derreter).
2. Faça um novo gráfico para um modo diferente de como o gelo pode derreter. Descreva seu gráfico.
3. Um modelo às vezes pode ajudar você a entender uma situação. Descreva como você pode usar cubos de gelo para explicar o derretimento de um iceberg.
4. Encontre uma ou mais maneiras de encontrar a massa correspondente de gelo para um tempo qualquer no gráfico b.



Não é pretensão deste trabalho de pesquisa analisar o trabalho de elaboração das tarefas no Grupo de Sábado e de realização das atividades investigativas em sala de aula em sua totalidade. Relato, descrevo e analiso os episódios que foram mais significativos aos objetivos deste estudo, sobretudo aqueles que se mostraram relevantes ao meu próprio processo de formação profissional e que me ajudaram a rever minha prática e a re-significar meus saberes docentes.

Sinto-me segura ao fazer isso, pois um dos objetivos deste estudo é identificar e compreender as contribuições que minha experiência com aulas investigativas trazem à minha formação e constituição como professora de Matemática.

Se me disponho a investigar minha própria prática tenho que procurar ser fiel a ela, isto é, narrar os fatos da maneira mais fiel possível, evitando que minhas emoções "façam mais alto". Além disso, acredito que o fato de estar envolvida na investigação de minha prática aguça meus sentidos, me faz mais atenta e crítica ao meu modo de ser e fazer-me professora de matemática.

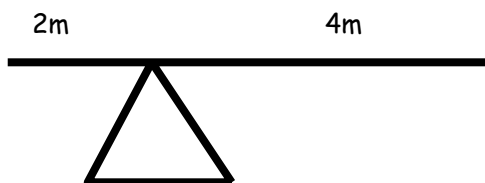
O grande dia⁶⁰

Finalmente o grande dia chegou. Era uma segunda feira, meados de novembro, 7h15min. A aula era na 8ª série B⁶¹, uma turma com 30 alunos. Eu estava animadíssima. Formaram-se as duplas ou os trios, distribuí as tarefas, insisti na importância do registro detalhado de todas as etapas do trabalho. Ofereci o material concreto. Logo em seguida fui chamada por uma dupla de meninos:

⁶⁰ Esse capítulo constitui-se numa narrativa produzida a partir de registros feitos em diário de campo, produções escritas dos alunos e gravações em áudio. Ao reproduzir aqui apenas parte dos diálogos, aqueles mais significativos, a narrativa esconde um pouco a dinâmica complexa, de idas e vindas, de sala de aula... Essa limpeza encobre os acertos e erros; as várias tentativas até chegar a uma boa significação... Considerem então que precisei lidar com desinteresse, conversas paralelas, falta de prontidão para com a realização das tarefas propostas, falta de integração entre os elementos da dupla ou trio de trabalho. Enfim, essas aulas foram aulas normais.

⁶¹ As tarefas foram aplicadas nas quatro turmas de 8ª. série para as quais eu lecionava. Essas turmas eram do período matutino do Colégio Dom Barreto. Este colégio pertence à Rede Particular de Ensino e localiza-se em Campinas. Essas turmas tinham em média 30 alunos cada. As tarefas foram realizadas em meados de novembro e envolveram os alunos, entre exploração e socialização, por aproximadamente 5 aulas, cada uma delas com 50 minutos. Os alunos foram consultados sobre a possibilidade suas produções escritas e orais constituírem-se em material a ser analisado em minha Dissertação de Mestrado. Consentiram com bastante alegria. Durante esse ano havíamos construído uma relação permeada por muita afetividade. Esses alunos acompanharam de perto os meses finais da gestação de meu filho Rafael, seu nascimento e os primeiros meses de vida. Durante os meses que permaneci afastada da sala de aula por estar em Licença Maternidade nos correspondíamos virtualmente. Vivemos juntos também a experiência de ir transformando pouco a pouco as aulas de Matemática em oportunidades de fazer Matemática através de abordagens e dinâmicas mais investigativas. Foi numa dessas turmas (8ª. B), que vivi, no início do ano, a experiência narrada por mim em "Investigando Aulas Investigativas" (Castro, 2001).

Temos um problema (Tarefa 1). É impossível equilibrar isso aqui com clipes. Precisamos em primeiro lugar compensar a diferença de peso entre os dois braços. (R.E.P.)



Enquanto eu os ouvia outros já me chamavam desesperados. Desesperei-me também: Como pude cometer um erro como esse? Deveria ter experimentado o material antes de oferecê-lo aos alunos. E agora?

Pensei um pouco e apresentei a seguinte proposta a eles:

Que tal considerarmos a máquina com dois braços de mesma medida? Dessa maneira resolve-se o problema da diferença entre os pesos dos braços?

Mas assim o problema fica fácil, para equilibrar basta colocar o mesmo peso dos dois lados. - disse alguém.

Você tem razão. Então eu vou complicar, como na tarefa inicial: se eu pendurar dois clipes no segundo furinho da esquerda quantos clipes devo pendurar no quarto furinho da direita? Pensando nessa situação respondam às perguntas da tarefa 1. (R.E.P.)

E então, naquela sala, o trabalho fluiu. Nas outras salas, ao propor o trabalho, tomei a decisão de relatar o acontecido e pedia que eles supusessem a máquina em equilíbrio; ou seja, a régua de metal estaria apoiada em seu ponto central.

A partir do momento que eu relatava o acontecido: o fato de eu ter proposto uma tarefa cuja exploração deveria basear-se na experimentação de

um material concreto disponibilizado sem ter percebido no entanto que havia incompatibilidades entre a tarefa proposta e a utilização que eu sugeria para o material concreto (braços de tamanhos diferentes e cliques dipostos nas extremidades), sendo necessário então utilizar o material concreto de uma outra maneira (braços com tamanhos iguais e cliques dipostos em lugares diferentes, não apenas nas extremidades), a maioria dos alunos ignoravam-no. Levantavam hipóteses sobre como obter o equilíbrio na máquina (10 cliques no primeiro furo, de dentro para fora, e 5 cliques no segundo furo, também de dentro para fora) mas não viam necessidade de comprová-las empiricamente. Utilizavam com bastante desenvoltura, mesmo que em níveis bastante variados, a linguagem algébrica para representar a relação que descobriam entre comprimentos dos braços e peso a ser colocado em cada um dos braços. Por comprimento dos braços eles consideravam a quantidade de furos de dentro para fora até o ponto onde eram pendurados os cliques.

Por um lado, questiono essa minha decisão pois fez com que a maioria dos alunos trabalhasse hipoteticamente sem explorar a situação empiricamente. Por outro lado penso nessa decisão como pedagogicamente acertada visto que apresentei toda a problemática que justificava a reformulação do enunciado e conseqüentemente a exploração do material concreto disponível. Considero também o fato de apesar de ter elaborado uma tarefa na qual o equilíbrio inicial nas condições descritas era fisicamente impossível fez com que alguns alunos refletissem sobre a situação e passassem a discutir algo pouco comum na resolução de problemas matemáticos: a lógica da elaboração de uma tarefa ou de um problema. Para esses alunos, esse fato parece ter sido altamente

significativo pois passaram, inclusive, a pensar junto com a professora em como dar condições de solução para o problema. Ou seja, aquilo que, a princípio parecia um erro pedagógico da professora, pode constituir-se em uma atividade formativa.

Essa situação mostra que toda prática é permeada por situações contraditórias. Esse fato exige de mim uma atitude de vigilância crítica em relação à minha prática, mostrando como aspectos positivos tencionam-se com negativos. Dessa forma, um erro na formulação de uma tarefa pode, dependendo da postura do professor, desencadear uma prática significativamente formativa. O importante, tendo em vista a imprevisibilidade da prática, é a capacidade do profissional refletir na ação. Segundo Schön (1992), os profissionais bem sucedidos na prática são aqueles reflexivos não somente antes e depois da ação, mas também durante a ação. Reconhecer que a prática humana é, por natureza, imperfeita é um aprendizado.

Neste sentido, a pesquisa não deve ser entendida simplesmente como uma oportunidade de identificar falhas para, posteriormente, preveni-las. A pesquisa, por permitir um olhar retrospectivo sobre a prática, deve colaborar para a compreensão dos fatos ocorridos, sobretudo os limites da prática. Sem a prática da pesquisa, corremos o risco de continuarmos cegos às coisas que fazemos e dizemos, corremos o risco não apenas de não enxergar nossos erros mas também de não perceber o quanto acertamos dentro das limitações da prática.

Mas, todo esse fenômeno, desde o desligamento do concreto até a desenvoltura com o uso da linguagem algébrica, me preocupa hoje. Até que

ponto eles são representativos de algo desejável na maneira como o aluno vê e faz Matemática? Ela pode significar, por um lado, que os alunos compreenderam a tarefa, e a situação nela envolvida, de forma suficientemente profunda para trabalharem-na única e exclusivamente no âmbito da aritmética ou da álgebra. Por outro lado, pode significar, por exemplo, que os alunos entendem a Matemática como uma ciência desligada da realidade, que obedece a regras que sabemos válidas e que, portanto, não devem ser contestadas para que não precisemos ter o trabalho de comprová-las. Pode significar também a valorização do produto em detrimento do processo; de uma preferência escancarada da escola pelos argumentos aritméticos ou algébricos em detrimento das evidências provenientes da experiência concreta. Nesse contexto, uma resolução aritmética satisfaz, mas uma solução algébrica é mais geral e, portanto, deve ser a esperada pelos professores e a apresentada pelos alunos.

Nos momentos de discussão coletiva, percebo-me claramente valorizando a abstração e contribuindo para o quadro que acabei de contestar. Isso acontece, por exemplo, quando sugiro para uma determinada tarefa uma abordagem que vai da exemplificação numérica diretamente para a generalização representando esta através da linguagem algébrica simbólica, sem valorizar igualmente a exploração empírica (ou quase-empirista) e as múltiplas formas ou alternativas de representar as idéias e resultados matemáticos, sem que, para isso, tenha que utilizar necessariamente a linguagem algébrica simbólica. Acontece também quando relego para um único momento da aula algumas poucas palavras sobre o meu equívoco na formulação

da Tarefa 1 e sobre a necessidade de reformulação do enunciado, do desenho e da adequação do material concreto.

Vejam como foi o momento de discussão final da Tarefa 1 na 8ª série A. Convido os alunos a exporem o que produziram:

A primeira questão é aquela da balancinha. Como é que vocês tentaram? Como vocês começaram a fazer aquilo? Tentem lembrar. (T.G.A.)

O André então se coloca:

Já que um lado é o dobro do outro, um lado tem que ter o dobro do peso do outro. (T.G.A.)

Entendi perfeitamente o que ele quis dizer. Mas ele não comunicou suas idéias de forma precisa. Começam a "pipocar" em minha cabeça maneiras de intervir com o intuito de que ele, ou outro, reelabore de maneira mais precisa aquela frase. Decido por um desenho e por uma pergunta:

Vamos desenhar a balança? (T.G.A.) - e enquanto faço o convite eu mesma já o aceito e reproduzo na lousa o desenho constante da Tarefa 1. *André, você disse que um lado tem que ter o dobro do peso do outro, mas, qual lado? (T.G.A.)*

A resposta dele é rápida e revela que apesar de seu discurso não estar organizado, suas idéias estão.

Do lado esquerdo tem que colocar o dobro do peso que for colocado do lado direito. (T.G.A.)

Essa fala do aluno expressa retórica e genericamente a relação algébrica ou funcional da situação. Mas isso não foi resultado de minha mediação, ela só o ajudou a elaborar de maneira mais precisa o seu pensamento e a relação que já havia inferido.

Na tentativa de seguir esse raciocínio, peço que apresentem os exemplos numéricos nos quais se basearam para iniciar a exploração da tarefa. Sei que eles utilizaram exemplos numéricos antes de tentar descobrir, pois, quando me chamavam para que lhes ajudasse a iniciar a proposta eu lhes sugeria que o fizessem.

*Vocês pensaram em exemplos? Em que exemplos vocês pensaram?
6 kg do lado esquerdo e 3 kg do lado direito. - alguém respondeu.
Esse foi um exemplo numérico, qual foi o próximo passo? - perguntei.
A fórmula. - responderam em coro alguns alunos. (T.G.A.)*

Esta resposta em coro deve surpreender a quem lê já que o enunciado da tarefa não faz menção alguma à necessidade de se encontrar uma fórmula. No entanto ela não me causa surpresa, pois me recordo que quando me perguntavam:

Em quantas dimensões diferentes de braços precisamos pensar? (T.G.A.)

Eu respondia:

Em quantas vocês quiserem, ou em uma que represente todas. Assim: se eu colocar um peso x no lado esquerdo, que peso devo colocar do lado direito? Se coloquei um peso A do lado esquerdo e um peso B do lado direito, o peso A será quantas vezes o peso B ? E o peso B será que fração do peso A ? (T.G.A.)

Fica fácil entender então o diálogo a seguir:

E como vocês fizeram para conseguir isso? - perguntei.

Eu usei x . - respondeu Juliana.

Você usou x como? - perguntei. (T.G.A.)

Esta foi uma pergunta feita com o objetivo de que Juliana explicitasse melhor a estratégia utilizada por ela e que já era conhecida minha visto que havia sido sugerida por mim. E então ela responde:

Do lado esquerdo $2x$ e do lado direito x . (T.G.A.)

Ouçõ então Lucas querendo falar. Ele parece estar querendo pular esta etapa. Peço então que o ouçam e ele diz:

Tipo, do lado de $2m$ tem um peso A e do lado de $4m$ tem um peso B . Então eu vi lá que B é a metade de A . Então $B = A/2$ ou $A = 2B$. (T.G.A.)

Interfiro então. Mostro-me satisfeita com sua estratégia e procuro, a partir da fala dele, abordar a existência de representações diferentes, mas equivalentes, para a generalização de um mesmo resultado. Então os questiono:

*Ele chegou a duas fórmulas. Pode duas fórmulas para uma mesma coisa?
É a mesma coisa. - diz Paula. (T.G.A.)*

O que ela está querendo dizer é que as duas fórmulas expressam ou representam a mesma idéia. Não sinto necessidade naquele momento de insistir ou aprofundar nesse assunto, a equivalência é óbvia. Penso que existirão outras oportunidades de discutir esse assunto. Deixo-o de lado por enquanto. Tiro da manga uma outra questão:

*A gente chama essa fórmula de função. Alguém sabe porquê?
Porque uma letra depende da outra - responde Bruno.
Isso! Porque uma "letra" está em função da outra. - completo. (T.G.A.)*

A discussão, transcrita acima, baseou-se nos registros que iam sendo feitos na lousa à medida que os alunos faziam suas colocações. A idéia era de ir sistematizando por escrito e construindo uma representação simbólica da relação existente entre peso (quantidade de cliques) e comprimento do braço (número de furos, contados de dentro para fora, até o ponto em que os cliques foram pendurados).

Fiquei tão satisfeita com a percepção do Bruno de que, em uma função, as "letras" dependem umas das outras que nem percebi ter perdido a oportunidade de ir um pouco mais a fundo; de tentar verificar se o domínio conceitual demonstrado ultrapassava o discurso, isto é, se ele entendia as "letras" como variáveis. Além disso, esta poderia ter se constituído numa oportunidade para se discutir o fato de que funções são relações de dependência mas que nem toda relação de dependência é uma função. Paciência.

Fica para a próxima. Eu já estava me afastando demais da produção deles. Era hora de voltar. Digo:

Então tá bom. Mas, surgiu mais algum comentário com relação a essa primeira questão?

Elas são inversamente proporcionais. - diz Juliana.

Quem é que são inversamente proporcionais? - eu

Os pesos e os braços. - Juliana (T.G.A.)

No momento em que Juliana fez essa colocação ela me pareceu óbvia o suficiente para que não despendêssemos mais tempo com ela. Entretanto, após refletir sobre esse diálogo, me pergunto se Juliana realmente representava o conceito de grandezas inversamente proporcionais. Levanto algumas hipóteses:

- Teria sido uma percepção intuitiva?
- Foi resultante da observação de exemplos numéricos e da verificação que "na extremidade do braço maior foi colocado o menor peso e na extremidade do braço menor foi colocado o maior peso para que ocorresse o equilíbrio" ?
- Ou foi resultante da observação também de exemplos numéricos, mas sob um outro prisma, "mantendo-se o lado esquerdo com comprimento e peso sobre a extremidade dele, fixos, e partindo de uma situação de equilíbrio, dobrando o peso sobre a extremidade do lado direito o comprimento deste deveria ser diminuído à metade, triplicando-se o comprimento do braço o peso sobre a extremidade deste deveria ser reduzido à terça parte" ?

Nunca saberei qual destas, ou qual outra hipótese, teria sido a representativa do modo de pensar de Juliana. No momento da aula, durante o fervilhar das idéias, não me ocorreu explorar e aprofundar essa discussão. Só depois do acontecido, distanciada da prática e com mais tempo para refletir, é que pude perceber a oportunidade perdida.

Bruno havia chegado alguns minutos atrasado à aula e não sabia do problema com a Tarefa 1. Nenhum colega o avisou e nem eu lembrei-me de fazê-lo. Mesmo assim, durante a exploração da Tarefa 1, ele percebeu o mesmo que os alunos da 8ª. série B perceberam ao manipular o material concreto. Pedi que ele contasse à classe o que havia notado:

Uma balança real com um braço de 2 m do lado esquerdo e de 4 m do lado direito já estaria toda caída para o lado direito por conta do peso do braço. (T.G.A.)

Nas outras classes os momentos de discussão final sobre a Tarefa 1 foram bastante parecidos com este. Acredito que este fato se deva também ao fato de ter conduzido demais tanto a exploração da tarefa pelos alunos quanto o momento de discussão. Considero também que, ao simplificar ou tentar eliminar o erro que havia no enunciado inicial da tarefa, suas características investigativas ou exploratórias foram bastante diminuídas. Alguns alunos produziram reflexões e significados relevantes sobre a situação-problema antes de ela ter sido reformulada. Percebo, hoje, que o pensamento lógico-matemático desses alunos foi mobilizado de maneira significativa neste

episódio. Produziram algo não previsto ou pressuposto por mim, ou seja, o peso dos braços é também uma variável que interfere no equilíbrio da balança.

Tendo percebido isso, tomei uma decisão: a partir daquele momento procuraria respeitar mais o ritmo de trabalho de cada dupla ou trio e os caminhos escolhidos por eles. Mas esta opção parecia inviabilizar a discussão que eu havia planejado que acontecesse ao final de cada tarefa, pois, enquanto uns haviam avançado muito, outros nem haviam saído do ponto inicial. Assim, a discussão final sobre cada uma das 10 tarefas restantes acabou acontecendo ao final de todo o trabalho, após os alunos terem desenvolvido as 10 atividades. Essa decisão de respeitar as produções dos alunos, trouxe pelo menos uma consequência negativa: ocorrendo a discussão num momento tão distante da exploração da tarefa perdia-se muito do envolvimento dos alunos na negociação coletiva das mesmas.

E quanto trabalho restava: 10 tarefas! Hoje questiono essa quantidade de tarefas, supostamente investigativas, propostas aos alunos para serem realizadas de uma só vez, como parte de um mesmo trabalho. A idéia que nos levou, na época, a optar por isso foi a de explorar a diversidade de situações nas quais podia-se tratar do tema "Funções". Hoje percebo que a quantidade de tarefas propostas e o desejo de concluí-las influenciou negativamente o grau de aprofundamento na exploração destas pelos alunos.

Mas como saber isso antes da realização de minha experiência com aulas investigativas? Talvez tenha sido necessário correr o risco de fazer uma viagem por um caminho nunca antes percorrido por mim. Mas, como eu tinha em mente um ponto de chegada, controlei os possíveis desvios de percurso.

Desvios esses que poderiam, talvez, ser mais ricos que aqueles que foram efetivamente aceitos como válidos por mim. Mas tive medo de me perder durante essa viagem... Minha história e minhas crenças do passado pareciam entrar em conflito com o que emergia na prática de sala de aula. Daí minha tendência em "controlar" as tarefas supostamente investigativas.

Por que digo "supostamente investigativas"? Digo, pois graças a essa pesquisa, hoje, tenho uma noção mais clara do que seja uma tarefa investigativa e também de atividade investigativa. À medida que minha experiência e reflexão avançam, passo a olhar com mais atenção para os enunciados, para meus encaminhamentos, para as explorações dos alunos. E é isso que tento fazer a seguir.

*Luz
É sentido
É palavra
Palavra é o que o coração não pensa
(Renato Russo)*

Olhando para o que eu fiz e para o que eles fizeram...

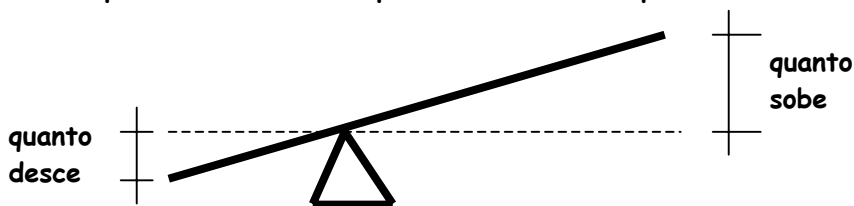
...espero aprender. Foco meu olhar na Tarefa 7. Leio e releio o enunciado:

Tarefa 7: Observe a alavanca abaixo, seu lado esquerdo mede 3m e seu lado direito 4m. Encontre uma ou mais maneiras de representar o quanto se eleva o lado direito quando se abaixa o lado esquerdo.

E se os lados tivessem outras dimensões?

O que você é capaz de dizer a respeito dos valores que podem assumir o quanto se eleva o lado direito?

E a respeito dos valores capazes de assumir o quanto se abaixa o lado esquerdo?



Estou satisfeita com a forma como foi formulada a tarefa: me parece suficientemente maleável para que possam ser aceitas como corretas uma variedade grande de maneiras de representar o quanto se eleva o braço direito quando se abaixa o braço esquerdo. A primeira questão em negrito pode auxiliar os alunos no processo de generalização, ou seja, pensar numa alavanca

de braços com quaisquer outras dimensões. As duas últimas questões em negrito encaminham a discussão para o domínio e a imagem da função que rege esse fenômeno.

Quanto aos encaminhamentos e às orientações dadas aos alunos quando solicitaram, a idéia era de mais ouvir que falar, mais perguntar que responder, enfim, deixar que as decisões fossem tomadas por eles.

Olho agora para as produções escritas dos alunos juntamente com meus colegas do Grupo de Sábado. Inicialmente comparamos os registros do trio formado por Natália, Suelem e Jaime com os de outro trio integrado por Daniele, Izabella e Roberta.

Natália, Suelem e Jaime

$$4:3=1,333$$

Se eleva 1,3 vezes a mais que se abaixa.

Se fossem 5 e 7

$$7:5=1,4$$

Se elevaria 1,4 vezes a mais do que se abaixa.

Divide-se a maior medida pela menor, o resultado será quantas vezes a maior parte se elevará a mais que a menor parte. (P.E.A.)⁶²

⁶² O registro dessa equipe foi feito em folha de monobloco preta e caneta branca, o que impossibilitou a digitalização da imagem.

Alunos: Danielle 16
 Spallera do 8º E
 Roberto 26

Trabalho sobre funções

☞ Lista 7

$$4 \text{ é } \frac{4}{3} \text{ de } 3$$

A altura que o braço direito se elevará quando o braço esquerdo se abaixar, será o quanto o esquerdo se abaixará multiplicado por $\frac{4}{3}$ ou 1,3, aproximadamente.

$$A_D = A_E \cdot \frac{4}{3}$$

A_D = altura do braço direito

A_E = altura do braço esquerdo

Se os braços tivessem outras dimensões, a altura que o braço direito se elevaria seria igual a quanto o esquerdo se abaixaria multiplicado por quanto o direito é maior ou menor que o esquerdo.

$$A_D = A_E \cdot \frac{D}{E} \rightarrow \text{isso se o braço direito for maior que o esquerdo}$$

Os valores que podem representar o quanto se eleva o braço direito é diretamente proporcional ao quanto ele é maior ou menor que o braço esquerdo.

Os valores que podem representar o quanto se abaixam o braço esquerdo são dados por uma fórmula:

$$A_E = A_D \cdot \frac{E}{D}$$

Os valores são diretamente proporcional ao quanto o esquerdo é menor ou maior que o direito.

(P.E.A.)

Nos dois trios, a idéia chave parece ser a mesma: descobrir quantas vezes o braço direito é maior que o braço esquerdo. O primeiro trio aparentemente percebe que essa quantidade é uma dízima e, no entanto, a expressa através de um número decimal com finitas casas decimais (1,333) e mais, quando precisa utilizar essa quantidade em um cálculo faz mais uma

aproximação (1,3). A segunda equipe parece ter superado o problema da dízima de outra maneira, através da utilização da representação fracionária.

A primeira equipe faz uso de uma expressão "vezes a mais" que pode dar margem a interpretações diferentes da que era objetivada por eles. O uso desta expressão por eles se justifica pelo uso que dela se faz na linguagem coloquial com o mesmo sentido de "vezes". Em Matemática estas duas expressões se diferenciam. Uma alternativa pedagógica possível, para casos como esse, seria explorar e negociar com os alunos os diferentes sentidos - matemáticos ou não - das palavras que utilizam para expressar seu pensamento matemático. Penso que, a partir desse episódio, estarei mais atenta para isso em minhas aulas.

Essa equipe trata do exemplo constante do enunciado da tarefa, imagina a alavanca de braços com outras dimensões, mas mantém o braço esquerdo sendo menor que o braço direito. Acredito que façam isso sugestionados pela figura. A segunda equipe vai mais longe, se libertando do que sugere a figura, pensando numa alavanca genérica na qual o braço esquerdo poderia ser até mesmo maior que o direito.

Apesar da alavanca genérica do primeiro trio não ser tão genérica quanto a do segundo trio, ambos explicitam o quanto se eleva o braço direito em função de quanto se abaixa o braço esquerdo mesmo que utilizando a linguagem algébrica em níveis diferentes.

A exploração desta tarefa pelo primeiro trio acaba nesse ponto apesar de ainda restarem duas questões a serem respondidas. Esquecimento? Falta de entendimento? Pressa em passar para a próxima tarefa?

O segundo trio vai mais além. As duas últimas questões em negrito foram interpretadas por eles de maneira diversa daquela que eu imaginei no momento da formulação. Apesar de não apresentarem os valores numéricos do quanto se eleva o braço direito em função do quanto se abaixa o braço esquerdo e do quanto se abaixa o braço esquerdo quando se eleva o braço direito, os integrantes desse trio representaram "o quanto se eleva o braço direito" e "o quanto se abaixa o braço esquerdo" através de fórmulas, uma expressando o quanto se eleva o braço direito em função do quanto se abaixa o braço esquerdo e a outra expressando o quanto se abaixa o braço esquerdo em função do quanto se levanta o braço direito.

Existem duas frases constantes dos registros escritos do segundo trio que ainda se constituem em mistério para mim, aí vão elas:

Os valores que podem assumir o quanto se eleva o braço direito são inversamente proporcionais ao quanto ele (o braço direito)⁶³ é maior ou menor que o braço esquerdo. (P.E.A.)

e

Os valores (que podem assumir o quanto se abaixa o braço esquerdo)⁶⁴ são diretamente proporcionais ao quanto o esquerdo é menor ou maior que o direito. (P.E.A.)

Numa tentativa de compreendê-las busco auxílio, peço que outras pessoas leiam as frases e as interpretem. Os que as lêem consideram-nas

⁶³ Comentário entre parênteses meu.

⁶⁴ Comentário entre parênteses meu.

contraditórias. Uma anulando, contrapondo-se, invalidando a outra. Ou seja, se uma delas for verdadeira a outra não pode ser... Mas o que vale destacar aqui, é a capacidade dos alunos conjecturarem.

Ainda estou tentando desvendá-lo. Mas, enquanto isso, volto a me debruçar sobre os registros de outros alunos e as reflexões desencadeadas pela análise destes juntamente com o Grupo de Sábado.

Depois de comparar as estratégias de resolução dos dois trios anteriores nos deparamos com um registro extremamente sintético e direto:

André, José e Lucas

Tarefa 7: Refleti e descobri que o lado direito, ou seja, $4m$ é 1,33 vezes maior que o lado esquerdo ou seja, $3m$, então, o lado direito vai subir ou descer 1,33... vezes mais que o lado esquerdo

$$x = \frac{y}{1,33} \quad y = x \cdot 1,33$$

(P.E.A.)

A primeira surpresa decorre da utilização, por parte dos alunos, dos verbos "refletir" e "descobrir". Mas eles podem simplesmente ter se apropriado de termos do meu vocabulário. Será que foi isso? Preciso estar atenta para que eles realmente investiguem e não somente façam de conta que estão investigando. Os alunos, de fato, segundo Bakhtin (2000), se apropriam do discurso do professor ou do discurso do outro, é a forma que encontram para estabelecer uma interlocução estes. Além disso a imitação dos adultos é a primeira forma que a criança tem de aprender. Ou seja, fazer de conta que

estão investigando pode levá-los a aprender a investigar. De qualquer forma, sinto-me reconfortada, parece que estamos no caminho certo. Desencanto-me um pouco em seguida: por que será que eles não prosseguiram? E nos pomos a levantar hipóteses. Eis algumas:

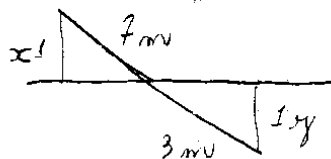
- eles podem ter feito uso de uma calculadora que apresentou a representação decimal da divisão do 4 pelo 3, desta maneira eles se desligaram da razão entre o 4 e o 3 que serviria de base para a generalização sugerida e passaram da percepção do padrão, para a comunicação deste por escrito e daí para a representação através da linguagem algébrica simbólica;
- eles perceberam a "lógica da coisa", descreveram-na e deram-se por satisfeitos. A primeira questão em negrito deve ter parecido óbvia para eles, já que o raciocínio era idêntico e eles já o haviam dominado. As duas questões seguintes não devem nem sequer ter sido lidas e, se foram lidas, mas não compreendidas, não deve ter havido paciência para debruçarem-se sobre elas. Além disso, havia mais quatro tarefas a serem feitas.

Neste ponto, tivemos a impressão, eu e o Grupo de Sábado, de termos ido até onde podíamos com a análise.

Tínhamos em mãos agora os registros de Thiago.

Thiago

TAREFA 7



$$\frac{y}{x} = \frac{3}{1}$$

$$y = 3x$$

$$f(y) = \frac{3x}{y}$$

(P.E.A.)

Os integrantes do Grupo de Sábado começam a levantar questões: Por que ele trabalhou sozinho? Ele fez menção ao Teorema de Tales ou à Semelhança de Triângulos? Ele entende a primeira igualdade escrita como uma equação ou como uma "Regra de Três"? De onde ele tirou aquele " $f(y)$ "?

Tive resposta apenas para a primeira e para última questão. Thiago sempre teve uma convivência difícil com seus colegas e foi decisão dele, não contestada pelos colegas, trabalhar sozinho. Ainda tentei interferir sugerindo alguns colegas com os quais ele poderia trabalhar, mas não houve interesse de nenhuma das partes. Optei por não insistir. Quanto à última questão ele havia me contado que estava estudando funções no cursinho preparatório para ingresso em escolas técnicas profissionalizantes que ele cursava no período da tarde. Parecia ser lá que ele tinha ido buscar aquela forma de representar uma função.

Consideramos que a simbologia não estava sendo utilizada de forma absolutamente correta. Sintaticamente reconhecíamos um erro, mas semanticamente falando, não. Havia um movimento por parte do Thiago em direção à aprendizagem, à apropriação de uma linguagem própria da álgebra... Embora Thiago não tivesse feito uma representação correta do ponto de vista algébrico, ele estava se apropriando da linguagem funcional ao utilizar o símbolo $f(y)$. Desse ponto para uma representação perfeita, faltava muito pouco...

Na ocasião da análise dos registros de Thiago pelo Grupo de Sábado não levantamos hipóteses diferentes das levantadas quando da análise dos registros do trio anterior. Hoje, entretanto, consigo pensar em outras possibilidades, assumindo a responsabilidade por muitos terem parado após a percepção e o registro do padrão. Acredito que, com palavras e atitudes, tenha passado a mensagem de que a percepção e a representação escrita (o registro) da relação matemática da situação-problema eram o fundamental, podendo o resto ter uma exploração adicional ou não. Ao fazer a leitura dessa mensagem e cruzando esta com a informação de que o trabalho era longo, muitos alunos devem ter decidido seguir adiante ao invés de dedicar mais tempo a uma tarefa cujos principais objetivos já haviam sido atingidos. Mas não foi só isso... Se os alunos tivessem observado o desenho com cuidado, imaginando o movimento dos braços da alavanca ou utilizassem o comportamento de um modelo confeccionado com palitos de sorvete, ao meu ver, teria sido, provavelmente, mais simples falar sobre os valores que poderiam assumir; o quanto sobe o braço direito quando desce o braço esquerdo, e vice versa. Mas

isso não estava acontecendo com frequência. Hoje, mais distanciada daquela experiência, avalio que fui relativamente responsável por isso, pois poderia ter incentivado mais esse tipo de exploração. Penso que não o fiz por estar me sentindo, como eles, pressionada pela grande quantidade de tarefas propostas e pela limitação do tempo disponível.

Apesar de não existir uma data estipulada para o término do trabalho eu, intimamente, esperava que eu e meus alunos estivéssemos envolvidos nesse trabalho por cerca de uma semana entre: exploração das tarefas, elaboração dos registros escritos e discussão/negociação coletiva. Dessa forma, eu imprimia ao trabalho o ritmo necessário para o cumprimento deste prazo não declarado e criava um ambiente propício à superficialidade.

Ao rever, mais tarde, essas reflexões, percebo minha tendência de me culpar por aquilo que "não deu certo"... Talvez, naquele momento de reflexão, eu ainda não havia percebido que toda prática inovadora é arriscada... Erra quem arrisca caminhar por um caminho nunca antes experimentado ou conhecido. Além disso, estou aprendendo com os alunos uma forma diferente de explorar a Matemática. Sempre que considero não ter agido da maneira mais adequada e proponho outra ação, o faço a partir de reflexão e/ou análise e isso já representa um aprendizado meu e só acontece graças à pesquisa que estou realizando. Sem a pesquisa provavelmente eu não perceberia os limites de minha prática. Não perceberia com tanta precisão em que direção eu poderia ter agido melhor... Sem o processo investigativo ou reflexivo eu poderia não perceber esses limites, achando que minha prática é perfeita ou, então, desistir de vez desse trabalho com aulas investigativas, não tirando dessa

experiência um aprendizado importante para minha constituição profissional. Preciso, portanto, aprender a olhar para minha prática como campo de aprendizagem...

Passamos então aos registros feitos por Camila e Pollyana e desta vez ficamos, eu e os integrantes do Grupo de Sábado, realmente confusos. Levantamos uma série de hipóteses para tentar entender o que elas pensaram e por fim concordamos em um ponto: elas interpretaram de forma equivocada a proposta da tarefa. Vejamos o que foi apresentado por elas:

<i>Camila e Pollyana</i>		
⊕	QD	QS
	0	7
	1	6
	2	5
	3	4
	4	3
	5	2
	6	1
		vice-versa também.
		(P.E.A.)

Segundo a interpretação delas, o quanto desce (QD) é o que vínhamos considerando como comprimento do braço esquerdo e o quanto sobe (QS) o que vínhamos considerando como comprimento do braço direito. Esta interpretação é definitivamente equivocada visto que no desenho constante da tarefa proposta o tamanho de cada um dos braços, bem como "o quanto o braço esquerdo desce" e "o quanto o braço esquerdo sobe" estão bem caracterizados e não se justifica a confusão.

Outro ponto em que a interpretação delas difere da dos demais é que quando elas se põem a variar os comprimentos dos braços da alavanca, elas o fazem mudando apenas o ponto de apoio da alavanca, mantendo constante (7m) o comprimento total, ou seja, a soma dos comprimentos dos dois braços. Ao reler a questão, percebi que o enunciado permite essa interpretação visto que não falava em variação no comprimento total. Essa variação no comprimento dos braços é apresentada por elas apenas em termos de números naturais, sem referências às possibilidades fracionárias ou tentativas de generalização.

Elas produziram, para a tarefa, sentidos diferentes daqueles esperados por mim. Reconheço, entretanto, que, apesar disso, estabeleceram relações e aprenderam algo mesmo que esse algo tenha sido diferente daquilo que eu pretendia inicialmente.

A princípio pensei que se eu tivesse tido acesso a esse raciocínio, enquanto o trabalho ainda estava em processo, poderia ter interferido de maneira a contribuir no esclarecimento da proposta. Por outro lado, se tivesse percebido e interferido, alterando o rumo, eu teria ido contra um dos princípios das aulas investigativas: a produção de múltiplos sentidos, sendo alguns deles diferentes daquele esperado pelo professor. Numa aula investigativa, o professor não sabe de antemão as respostas e explorações possíveis dos alunos. Depois que elas surgem é que, todos, mediante um processo de negociação, poderão avaliar se é possível ou não aquela interpretação ou exploração.

Durante a realização do trabalho, eu atendia àqueles que me solicitavam auxílio e esse atendimento já era o suficiente para me tomar todo o tempo.

Esse é um dos desafios resultantes do fato de trabalhar de forma investigativa, com tarefas abertas num contexto de classes relativamente grandes⁶⁵ e equipes pequenas⁶⁶.

Sinto-me tranqüila quando penso que, mesmo quando não tive a oportunidade de intervir nas produções dos alunos que interpretaram de maneira diferente e equivocada as tarefas propostas, estes tiveram a oportunidade de confrontar o que fizeram com o que os colegas fizeram. Isso se deu no momento de negociação e discussão final. Este momento é fundamental no contexto das aulas investigativas, pois abre espaço para os alunos repensarem suas produções particulares, exporem aos colegas suas conjecturas e significados, sustentando-os e defendendo-os com argumentos, exemplos e contra-exemplos.

Ao mesmo tempo em que penso isso, outro pensamento me vem: se realmente o momento de negociação e discussão final se configura num momento no qual cada um pode repensar a produção da equipe frente às produções das outras equipes, por que aqueles que "erraram" não refizeram ou simplesmente apagaram o que fizeram de "errado" e copiaram da lousa o "certo" como é comum aos alunos fazerem? A limitação do tempo pode ter sido um fator determinante. Não foi disponibilizado a eles tempo entre a discussão de uma e outra tarefa e nem ao final de toda a discussão para que pudessem refazer ou copiar. O fato de eles terem entregue seus trabalhos da maneira como realmente os fizeram pode significar que haviam compreendido que mais

⁶⁵ As classes tinham em média 30 alunos cada.

⁶⁶ Lembrando que os alunos estavam trabalhando, em sua maioria, dispostos em duplas ou em trios.

importante do que onde haviam chegado eram os caminhos percorridos por eles para chegar lá.

Eu havia deixado claro que não atribuiria conceito aos trabalhos deles, mas que estes seriam objetos de estudo meu e do Grupo de Sábado. A minha disposição em aprender com eles sobre a Matemática, seu ensino e sua aprendizagem, intervindo em suas produções, discutindo-as com eles e analisando-as ao final do processo foi explicitada, reiteradas vezes. Este também pode ter sido um dos motivos que levou, alguns deles, a entregarem suas produções originais. Sem a preocupação com a atribuição de um conceito ao trabalho realizado, podiam, portanto, errar e não necessariamente corrigir seus erros. Assim, acredito que se sentiram mais livres para explorar as tarefas, criar estratégias, se deixar levar pelo pensamento matemático e pela apropriação e/ou construção do conhecimento matemático.

Percebo-me, neste momento, avançando no sentido de conseguir perceber, a partir da investigação de minha própria prática, outras relações, possibilidades e interpretações, e não somente críticas severas, obtendo, assim, uma melhor compreensão de meu trabalho docente e aliviando a carga de tensão que coloco em meu trabalho. Dessa maneira acredito que posso continuar realizando-o com competência e seriedade mas também com a leveza necessária. Assim, acredito estar contribuindo efetivamente para minha formação docente e para a construção de uma escola melhor, no âmbito das relações, tanto das pessoas com o saber como das pessoas com as outras pessoas. Nesse sentido, decido procurar ser mais cuidadosa e menos pessimista nas interpretações de minha própria prática.

Freire mostra também que leituras e interpretações do espaço pedagógico são fundamentais para a construção de uma escola melhor:

Devo estar atento à leitura que os alunos fazem de minha atividade com eles. Precisamos aprender a compreender a significação de um silêncio, ou de um sorriso ou de uma retirada da sala... Afinal, o espaço pedagógico é um texto para ser constantemente 'lido', interpretado, 'escrito' e 'reescrito'. Neste sentido, quanto mais solidariedade exista entre o educador e educandos no 'trato', deste espaço, tanto mais possibilidades de aprendizagem democrática se abrem na escola". (FREIRE, 1997, p. 109)

Temos, eu e o Grupo de Sábado, tantos registros para analisar ainda... E não temos tanto tempo... Aceleramos o ritmo de nosso trabalho. Percebemos que algumas das considerações que estamos a fazer começam a ficar repetitivas. Tentamos agora extrair as idéias principais de cada uma das produções, identificar até onde chegaram e o que faltou fazer, perceber erros resultantes de interpretações diferentes da esperada ou conjecturas levantadas, que, por serem aparentemente corretas, foram assumidas como tal, mas que não resistiriam a um teste. Tenho consciência de que apenas algumas coisas podem ser percebidas na discussão com o Grupo de Sábado. Isto posto que reunimo-nos por um espaço de tempo limitado e que permite a produção de alguns estranhamentos importantes considerando a bagagem experiencial e teórica de cada um dos integrantes. Outras interpretações e compreensões acontecem no próprio processo de análise da pesquisa. Esse processo demanda um tempo e um envolvimento muito maiores e estabelece interlocução com a literatura, com o orientador, com os membros da banca de qualificação, etc.

São espaços e momentos diferentes e complementares, mas não melhores nem piores.

Tenho que tomar agora uma decisão que diz respeito à minha narrativa. Essa decisão se assemelha e confunde com a decisão, não declarada, mas implícita em suas ações, do Grupo de Sábado. Também agora se coloca a necessidade de avançar, de aumentar o ritmo, afinal, não os quero cansar, ao contrário, quero envolvê-los na realização das atividades. Selecciono, dentre os registros, alguns que considere representativos da variedade de abordagens. Dentre eles estão incluídos registros que consideramos corretos pelo menos até certo ponto, outros que poderíamos considerar corretos, ao menos parcialmente, com alguns condicionais, e também os erros. Tentamos não atribuir maior valor aos registros produzidos à imagem e semelhança daqueles privilegiados pela tradição acadêmica. Acredito que todos têm algo a nos ensinar.

Vejamos, por exemplo, o que dizem Mariana e Paula B.:

Mariana e Paula B.

TAREFA 7: NO lado de 4m é colocado um peso 25% menor que o lado de 3m para se equilibrar. (P. E.A.)

Diríamos: outro exemplo de interpretação equivocada da proposta. Ao primeiro olhar, afirmamos categoricamente: errado! Mas atribuir "certo" ou "errado" aos registros não é nosso objetivo. Estamos ali reunidos para tentar entendê-los. Supomos, em primeiro lugar, que as meninas não devem ter lido

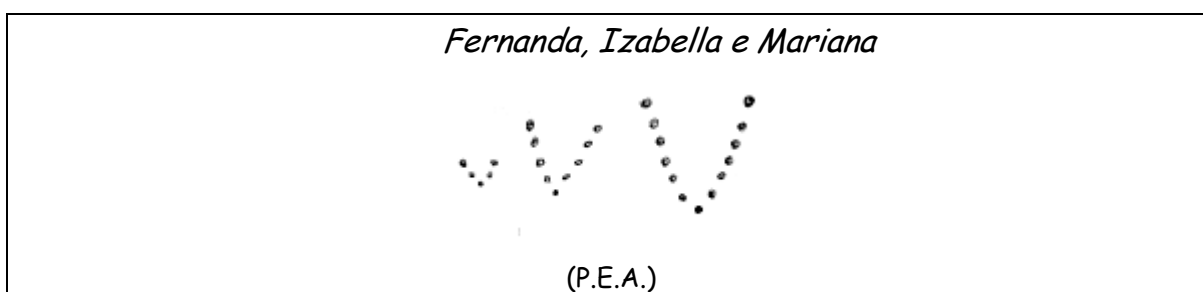
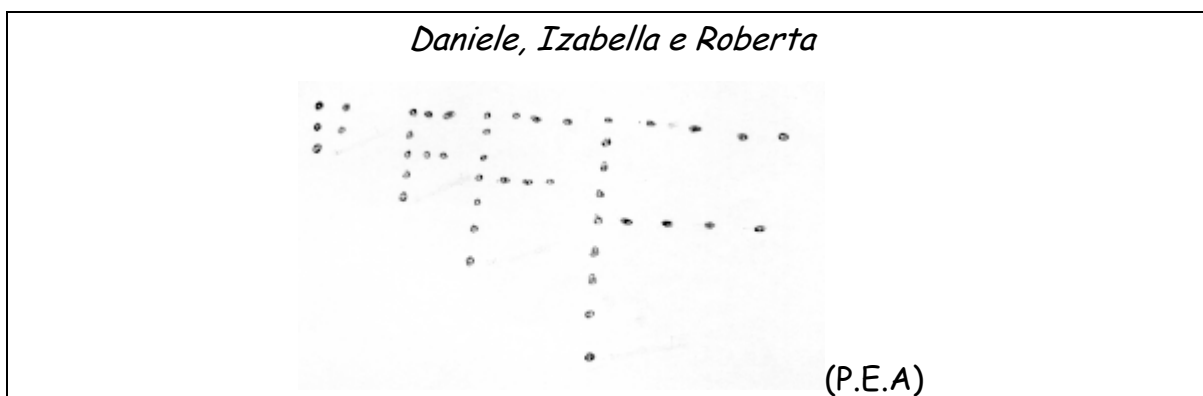
com atenção a tarefa. Ao "baterem o olho" na figura devem ter percebido certa semelhança desta com a da tarefa 1. Então tarefa 7 e tarefa 1 parecem ter se fundido. Elas não dedicaram, como se pode supor pelo registro extremamente "enxuto". Há análise matemática da situação, mas condizente com a interpretação delas para a situação. Aparentemente o raciocínio delas foi o seguinte: sendo o comprimento do braço menor 75% do comprimento do braço maior e considerando que para ocorrer equilíbrio é necessário que pesos e comprimento dos braços sejam inversamente proporcionais elas concluem que o peso a ser colocado no braço maior deva ser 25% do peso colocado no braço menor.

Inúmeros outros registros escritos de alunos foram alvo de nossas reflexões e análises. Considero que para representar parte do processo em que estou envolvida estes tenham sido suficientes. Procurei entender e aprender refletindo em conjunto com o Grupo de Sábado sobre as produções escritas dos alunos. Mas esse movimento no sentido de entender o pensamento dos alunos e de aprender com eles não se deu única e exclusivamente dessa maneira. Isso acontecia também durante a exploração das tarefas pelos alunos quando eu era convidada por eles para discutir ou validar suas conjecturas ou produções.

Para representar essa outra parte do processo de pesquisa e de trabalho docente escolho episódios relativos à Tarefa 3 que pedia para que encontrassem "uma ou mais maneiras de representar uma figura de uma posição qualquer de cada uma das seqüências de pontos..." Essa escolha foi feita

considerando a variedade e a riqueza das interações entre eu e os alunos, gravadas em áudio e posteriormente transcritas por mim. Vejam:

Fiquei surpresa quando Luciana, Mariana e Vivian me chamaram para que eu olhasse o que tinham feito na Tarefa 3, Seqüência 1. Elas haviam simplesmente mudado a disposição dos pontos que formavam as figuras das seqüências, formando outras figuras. Posteriormente percebi que elas não foram as únicas a interpretar dessa maneira a tarefa proposta.



Pareceu-me, naquela ocasião, um problema de interpretação, ou de redação, do trecho "encontre uma ou mais maneiras de representar". Expliquei a elas que o esperado era que elas encontrassem uma ou mais maneiras de

descobrir a quantidade de pontos que formavam uma figura qualquer da seqüência. A reorganização dos pontos de cada uma das figuras da seqüência, entendido por mim, na ocasião, como erro de interpretação ou de redação, e que foi, portanto, descartada para que eu pudesse expor o que era realmente esperado, não seria, hoje, tratado por mim da mesma maneira. Frente a uma maneira alternativa de representar cada uma das figuras da seqüência eu insistiria na tentativa de perceber e registrar um padrão para essa seqüência, bem como na descoberta de uma lei ou expressão algébrica que relacionasse a quantidade de pontos da figura com a posição desta na seqüência. Talvez essa forma alternativa de dispor os pontos desse origem a maneiras diferentes de pensar a tarefa em questão.

Para tentar impulsionar o trabalho eu disse:

Vocês precisam encontrar uma representação algébrica para a quantidade de pontos de uma figura qualquer da seqüência. Assim, olha: encontrar uma fórmula que expresse o número de pontos da figura que está na posição "n". Se o "n" for 10 eu boto o 10 naquela fórmula e obtenho o número de pontos que a figura 10 tem. É isso que eu quero. (T.G.A.)

Mas o que eu havia feito com o intuito de impulsionar o trabalho teve efeito contrário: elas ficaram paralisadas, me olhando, como se eu estivesse falando uma outra língua. E eu estava. Tentei "consertar" substituindo o "falatório" por questionamentos:

A figura 1 tem quantos pontos? A figura 2 tem quantos pontos? A figura 3 tem quantos pontos? A figura 10 tem quantos pontos? A figura 100

tem quantos pontos? A figura "n" tem quantos pontos? É nisso que eu quero que vocês pensem, tá bom? (T.G.A.)

A princípio considerei que as intervenções acima haviam sido produtivas considerando a produção escrita que elas apresentaram em seguida. Porém, em determinado momento acreditei que a produção escrita das alunas ficou demasiadamente impregnada por meu modo de pensar. Que errei, ao conduzi-las para onde eu acreditava que elas deveriam chegar, por não ter deixado que elas mesmas encontrassem uma estratégia que permitisse encontrar e representar a estrutura lógico-matemática de suas seqüências de figuras. Numa análise posterior e na qual se fazem presentes diversos interlocutores, além de novas experiências profissionais, reavalio esse meu posicionamento. Percebo que muitas vezes o direcionamento é pedagogicamente conveniente, tendo em vista nossos objetivos.. Nem pedagogicamente prudente deixar os alunos totalmente sem direção. Muitos questionamentos, problematizações, encaminhamentos, sugestões são pedagogicamente necessários.

Mariana, Vivian e Luciana

1. Percebemos que a figura seguinte tem o número de pontos da anterior mais 4 pontos:

$$X + 4$$

2. Para representar uma figura de uma posição qualquer da sequência daremos aplicar a seguinte fórmula:

$$\text{N}^{\circ} \text{ da posição da figura} \cdot 4 + 1 = \text{número de pontos}$$

(P.E.A.)

Vale a pena destacar que a percepção de que a "figura seguinte tem o número de pontos da anterior mais 4 pontos" foi registrada por elas, mesmo sem ter sido suficiente para descobrir a quantidade de pontos de uma figura qualquer da sequência sabendo somente sua posição. Isso parece demonstrar que os alunos estavam começando a entender "processo" e "produto" como igualmente importantes. Talvez eu estivesse no "caminho certo"...

Em seguida João, Guilherme e Théo me chamaram afirmando que haviam descoberto os padrões para a quantidade de pontos que constituía uma figura qualquer das seqüências 1, 2 e 3. Eles perceberam que:

Na seqüência 1 ele andava de 4 em 4, na seqüência 2 ele andava de 2 em 2, na seqüência 3 andava 2, depois três, depois 4... (T.G.A.)

Haviam parado nisso, mas eu instiguei-os para que avançassem mais:

Agora tentem trabalhar na descoberta de fórmulas para uma figura qualquer de cada uma das seqüências.

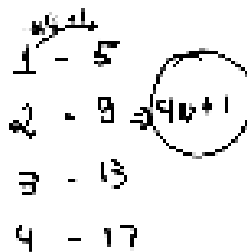
Uma fórmula para cada uma das seqüências? - perguntaram.

Isso!!! Então eu quero que vocês trabalhem nisso. - respondi. (T.G.A.)

Como esse trio (João, Guilherme e Théo) já havia produzido alguma relação entre os números da coluna da direita com os números da coluna da esquerda fez-se necessária uma intervenção diferente da que foi feita no trabalho do trio anterior (Mariana, Vivian e Luciana). Decidir como intervir em cada uma das diferentes situações que surgem, mesmo que dentro de uma mesma tarefa, é uma competência que percebo desenvolver-se sobremaneira ao longo desse trabalho.

Então eles organizaram os dados em forma de tabela e perceberam a relação entre as duas colunas, descobriram como "transformar" os números da coluna da esquerda nos respectivos da coluna da direita, como se pode ver a seguir:

João, Guilherme e Théo



1	5
2	9
3	13
4	17

(P.E.A.)

Apesar de ter entendido o raciocínio percebo que havia o que melhorar no registro dos meninos. Faltava especificar que variáveis estavam sendo representadas por cada uma das colunas da tabela, que letras estavam sendo utilizadas para representá-las e como uma variava em função da outra, através de uma fórmula e não simplesmente de uma expressão algébrica. Este, portanto, destacava-se como um aspecto importante a ser abordado no momento da discussão final: informações essenciais ao registro para que ele possa ser considerado completo.

O que, na ocasião, me pareceu apenas uma questão de organização e detalhamento dos registros hoje, me parece bem mais complexa e difícil de ser tratada. A forma "incompleta" com que os registros foram realizados pelos alunos pode não ser sinal de que eles tiveram "preguiça" ou consideraram desnecessário explicar mais do que foi explicado e sim de que aquele era o nível de sistematização das idéias daqueles alunos naquele momento. Intervenções constantes e próximas no trabalho dos alunos, visando fazê-los refletir, ampliar e aprofundar as idéias e a sistematização destas, deverão ser bem mais produtivas e formadoras que o simples "fornecimento de informações essenciais ao registro para que ele possa ser considerado completo".

Enquanto eu conversava com João, Guilherme e Théo, Ricardo e seu parceiro levantaram as mãos. Queriam que eu fosse até lá. Pedi que aguardassem. Logo estaria com eles. Mal cheguei, eles disseram:

A primeira figura tem x pontos. (T.G.A.)

Precisei interromper:

De qual tarefa vocês estão falando?

Tarefa 1, Sequência 1. - responderam. (T.G.A.)

Então continuaram:

A segunda figura tinha o dobro da primeira menos 1.

A terceira figura tinha o triplo da primeira menos 2.

A quarta figura tinha o quádruplo da primeira menos 3.

E a décima como é que fica? - eu.

O décimo da primeira menos nove. - eles.

Você quis dizer: dez vezes a primeira menos nove. - eu.

Isso. - eles.

E a enésima? - eu.

O número da figura, n , vezes x menos um menos n : $nx - 1 - n$. - eles

Um menos n ? - eu.

n menos 1. - eles.

n vezes x menos n menos 1: $nx - n - 1$. - eles

Quantidade de pontos é igual a n vezes x menos $n - 1$: $Q = nx - n - 1$ - eles.

Quem é o x ? - eu.

x é o número de pontos, 5 aqui. (referindo-se a quantidade de pontos da primeira figura). - eles

Agora que vocês sabem qual o valor de x , reescrevam a fórmula. - eu.

$5n - n - 1$. - eles escreveram.

Só que é menos tudo isso. (referindo-se ao $n - 1$) Então tem parênteses aqui: $5n - (n - 1)$. Agora mexe nessa fórmula mais um pouquinho. - eu.

Tiro dos parênteses? - eles.

Isso! - eu.

$6x$ - eles.

Que x ? - eu.

$6n$. - eles.

Por quê $6n$? - eu

*Tira dos parênteses, troca o sinal fica $4n + 1$. - eles.
Adorei o jeito que vocês fizeram mas ainda falta fazer isso para as
Seqüências 2 e 3.- eu. (T.G.A.)*

Sei que realmente "ainda falta fazer isso nas seqüências 2 e 3", mas sinto-me bastante satisfeita por terem realizado isso na seqüência 1. Isso já evidencia compreensão e poderão aplicar o que perceberam, descobriram, aprenderam quando chegarem nas seqüências 2 e 3. Havia tanto ainda por fazer na exploração desta seqüência, que, acredito, que poderia tê-los incentivado nesse sentido... Mas não os culpo, nem a mim, apenas agora compreendo melhor essa nossa pressa que nos levava a deixar para trás as questões em negrito e ir em frente. Quero cumprir com o planejado e eles com o proposto. Muitas vezes a prática entra em conflito com o discurso e o fim é mais valorizado que o processo, apesar se defender e acreditar realmente no contrário.

Perceber isso me faz parar para pensar em quantas, e quais, outras mensagens inconscientemente transmito para meus alunos. Pouco a pouco aumenta minha consciência sobre minha própria prática. O currículo que produzo com meus alunos está, assim, tornando-se menos oculto (APPLE, 1982). E quais seriam essas outras mensagens que só agora, graças à análise, percebo? São mensagens relativas a valores, pois quando o professor ensina um conceito ou propõe um problema não está ensinando apenas conceitos, está também ensinando um modo ver e conceber a Matemática, o mundo. Está ensinando a valorizar determinadas formas de ação, de expressão ou de pensamento, a valorizar atitudes críticas, de busca de relações ou de compreensão. Caso

contrário, o professor pode estar ensinando a fazer mecanicamente, sem que o aluno compreenda o que faz e porque faz.

Isso mostra a importância da reflexão durante e após a prática. É a imprevisibilidade da prática e suas limitações que justificam a necessidade de buscar outras maneiras de produzir o trabalho docente e refletir sobre ele. Nessa busca, são importantes as contribuições proporcionadas por outros estudos e outros interlocutores. Estes podem trazer outras formas de entender e produzir a prática. Mas isso exige tempo e distanciamento... Tempo para produzir narrativas escritas que facilitam a organização dos fatos, a elaboração de reflexões e o aprofundamento das análises.

Voltando à sala de aula, notei que Gabriel e Douglas prestavam atenção em minha conversa com Ricardo e seu companheiro e, assim que terminei, me chamaram, preocupados, dizendo:

Será que erramos? Fizemos diferente ... Percebemos que cada figura (da seqüência 1) aumenta dois pontos na vertical e dois pontos na horizontal. E como isso ajuda vocês a descobrir o número de pontos de uma figura qualquer? - perguntei.(T.G.A.)

Como ficaram em silêncio, reformulei a pergunta:

Isso ajuda vocês a descobrir o número de pontos de qual figura?

Da próxima. - eles.

Agora o problema é o seguinte: da maneira como vocês estão fazendo, vocês estão sempre presos à quantidade de pontos da figura anterior para conseguir descobrir a quantidade de pontos da próxima. Tentem descobrir uma maneira de não depender da figura anterior. - pedi.

E aí alemão? - Gabriel.(T.G.A.)

Gabriel e Douglas formavam uma dupla interessantíssima. Para entender a interlocução "E aí alemão?", é necessário explicar que Gabriel tinha pele extremamente clara, e muito bom humor, enquanto Douglas era negro, e extremamente calado. Como Gabriel havia recebido de mim a atribuição de registrar as produções da dupla, "delegou" a Douglas a responsabilidade de explorar todas as tarefas. Interferi pontuando que ambos deveriam envolver-se na exploração das tarefas, contribuindo. Eu havia tomado a decisão de responsabilizar Gabriel pelo registro com o objetivo de propiciar a ele mais uma oportunidade de exercitar a habilidade de comunicar seus raciocínios, estratégias, conjecturas, considerando que essa era para ele uma dificuldade recorrente, da qual ele se esquivava constantemente. Eu acreditava que a parceria de Douglas e Gabriel poderia ser positiva no sentido dos contrapontos e da reciprocidade da aprendizagem pois, enquanto Douglas dificilmente expunha suas idéias oralmente, Gabriel fazia isso com desenvoltura. Douglas, entretanto, comunicava seu pensamento matemático de forma detalhada e organizada através de registros escritos enquanto Gabriel negava-se ou não conseguia fazer isso. Além disso, cabe destacar que Gabriel estava cursando a 8ª. série pela segunda vez, tendo sido meu aluno no ano anterior. Essa convivência mais longa tinha servido para que eu pudesse perceber o quão forte era sua resistência com a comunicação escrita de seu pensamento matemático.

Justifico o fato de evidenciar algumas características pessoais dos alunos nesse ponto por entender que o trabalho do professor e seus procedimentos de ação, como constituir grupos de trabalho e atribuir tarefas a

cada um, são consequência do conhecimento que o professor tem dos alunos e de suas intencionalidades pedagógicas, como o caso do desenvolvimento de determinadas atitudes e habilidades cognitivas. Além disso, o trabalho realizado pelos alunos é reflexo do trabalho do professor e produzem novos sentidos para o repensar da prática docente.

Eu estou tentando ajudar vocês a ... (T.G.A.)

Eu ia dizer algo quando fui interrompida:

Aumentou 4. - eles.

Vocês já evoluíram: ao invés de dizer que aumentou 2 na vertical e 2 na horizontal vocês já estão dizendo que aumentou 4. - eu.

Nós também descobrimos que o gravador não funciona sem som. - Gabriel. (T.G.A.)

Gabriel havia notado que toda vez que fazíamos silêncio a fita parava de rodar e, devido ao seu temperamento, não resistiu a mais uma "brincadeirinha". Sorri e continuei:

O próximo é o anterior mais 4, ainda assim estamos presos no anterior. Será que a gente consegue relacionar o número de pontos com a posição da figura? (T.G.A.)

Novamente silêncio, continuei:

A posição 1 tem 5 pontos. A posição 2 tem 9 pontos. Será que eu não consigo uma fórmula que faça 1 virar 5 e 2 virar 9?

A posição vezes 4, "n" vezes 4. - Gabriel.

Será que é só a posição vezes 4, "n" vezes 4. Por quê? Dá certo mesmo? - perguntei.

A posição 20 tem 20 vezes 4. - Gabriel.

Será que é só 20 vezes 4? Vamos ver a posição 3 se é 3 vezes 4? Quanto tem aqui? (eu)

1, 2, 3, ..., 13. 3 vezes 4 dá 12 e aqui tem 13, falta mais 1. - Gabriel.

Isso! E para a quarta posição? - eu.

4 vezes 4 mais 1 é 17. - Gabriel. (T.G.A.)

Ele fez os cálculos mentalmente e verificou que sua conjectura se confirmava para todas as figuras da seqüência ali representadas.

Você formulou uma conjectura e verificou que sua conjectura é válida para todos os casos que estão aqui. - eu.

Agora só falta assinar e pegar o cachê. - brincou novamente Gabriel.

Agora só falta escrever a fórmula. - retruquei.

n vezes 4 mais 1. - respondeu Gabriel com cara de quem estava dizendo algo óbvio demais.

Mas, n vezes 4 mais 1 é igual a que? - perguntei com o intuito de ajudá-lo a escrever a fórmula para a quantidade de bolinhas da figura em função da posição da figura.

É igual ao número de bolinhas, claro. - respondeu Gabriel cada vez mais visivelmente cansado de tantas perguntas "bobas". (T.G.A.)

Mas eu não desisti.

Então use uma letra para representar na fórmula o número de bolinhas. (T.G.A.)

Depois de registrar de forma bastante simplificada o caminho percorrido por eles, escreveram a seguinte fórmula:

Gabriel e Douglas

$$m \cdot 4 + 1 = 17 \text{ (balanço)}$$

(P.E.A.)

Igor e seu companheiro trabalhavam despreocupadamente na mesma sala. Ao meu ver, estavam despreocupados demais e isso me preocupava. Tentei preocupá-los um pouco pedindo que registrassem com detalhes o caminho percorrido por eles até descobrirem a fórmula usada para calcular o número de pontos de uma figura qualquer de cada uma das seqüências. Prometeram-me fazer isso, mas não cumpriram. Só fui perceber que haviam me "enrolado" quando fui analisar suas produções. Sem mais explicações escreveram:

Tarefa 3:

• • • • • • • • Aumenta sempre na mesma quantidade

• •

• •

• •

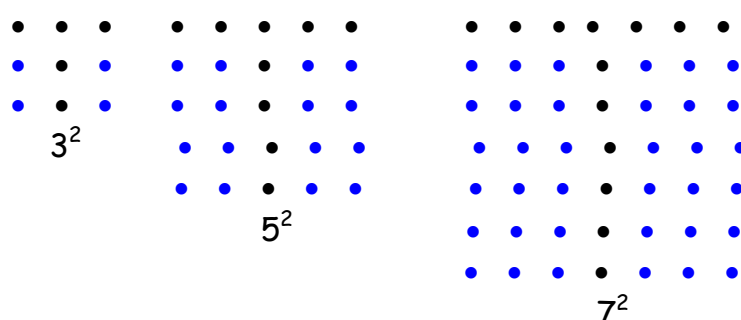
• •

Seqüência 1 - no = $L^2 - (L - 1)^2$ $L = 2 \times n + 1$

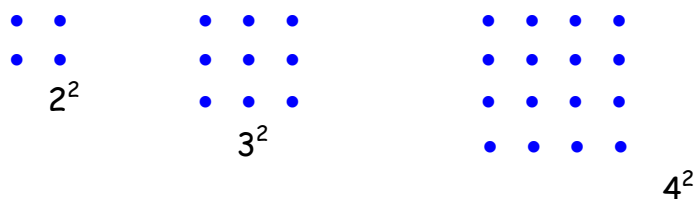
(P.E.A.)⁶⁷

⁶⁷ Optei por transcrever o registro dessa dupla pois a digitalização da imagem não ficou suficientemente legível.

Esperava que a dupla tivesse especificado o que cada variável estava representando, e mais, gostaria que eles tivessem explicitado como chegaram a essas fórmulas. Como isso não aconteceu, procurei tentar decifrar o pensamento desses alunos e levantei algumas hipóteses. A que me pareceu ter sido utilizada por eles foi: Completa-se os espaços vazios da figura com pontos até que figura torne-se um quadrado.



Nota-se que os pontos que preencheram a figura até torná-la um quadrado podem ser reorganizados também na forma de um quadrado cujo lado é uma unidade menor que o quadrado formado anteriormente.

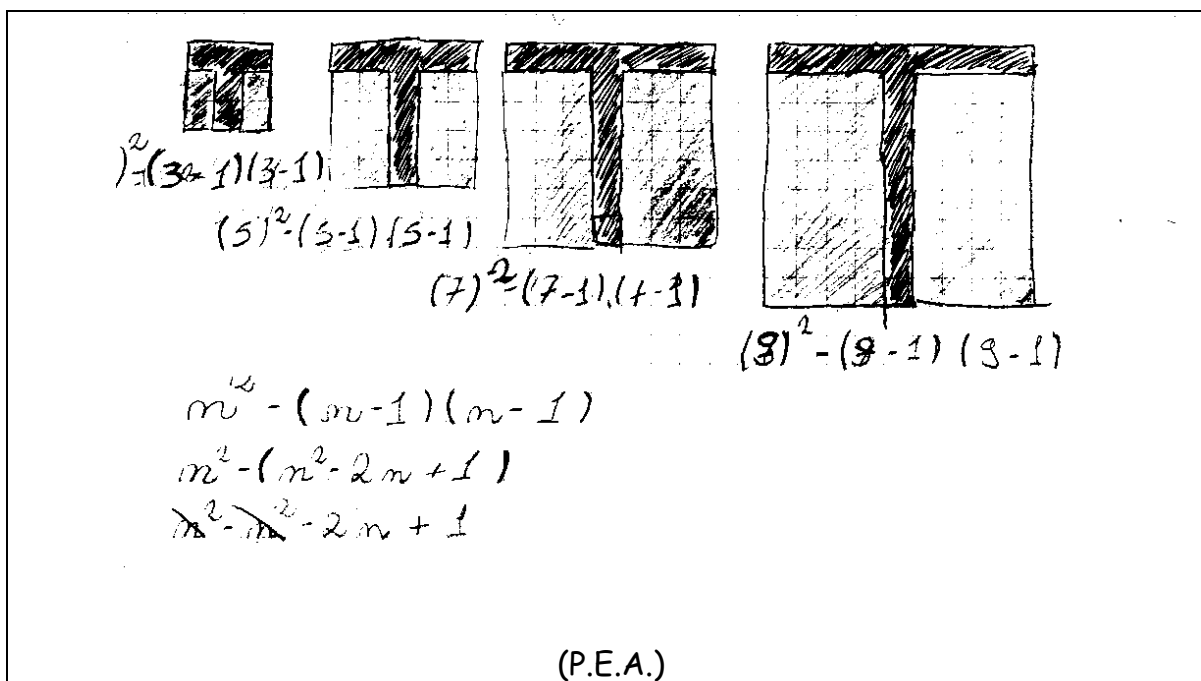


A diferença entre a quantidade de pontos do quadrado maior e do quadrado menor é a quantidade de pontos da figura original.

$$3^2 - 2^2, 5^2 - 3^2, 7^2 - 4^2.$$

Desta maneira pude concluir que a variável "n°." estava representando a quantidade de pontos de uma figura que podia ser transformada, quando completada, num quadrado de lado L . Mas, observem o cuidado da dupla: eles parecem ter percebido que o número de pontos (n°), como função do lado do quadrado (L) era problemático, pois, para descobrir a quantidade de pontos de uma figura qualquer, era preciso primeiro descobrir qual a medida do lado do quadrado. Esse problema foi resolvido quando perceberam que a medida desse lado (L) variava em função da posição da figura (n), isto é, L era o dobro de n somado com um.

Convenci-me mais ainda que esta hipótese levantada por mim aproximava-se do modo de pensar de Igor e seu companheiro quando me deparei com o registro de Thiago baseado na mesma idéia mas com o número de pontos de uma figura qualquer da sequência dependendo do número de pontos alinhados horizontalmente na figura, número este representado no registro abaixo pela letra n .



Catarina, Fernanda e Rafaela foram além. Representaram por l o número de pontos alinhados horizontalmente na figura e escreveram uma fórmula na qual o número de pontos que constituía a figura variava em função de l . Explicitaram também de que forma l dependia de " n " e que " n " representava a posição da figura na seqüência. Além disso afirmaram que " n " pode assumir valores inteiros e positivos e que o número de pontos que formam as figuras da seqüência são ímpares alternados, começando pelo 5.

Henrique e Rafael acharam que haviam terminado o trabalho quando perceberam que de uma figura para outra da seqüência aumentava-se 4 pontos. Chamaram-me para mostrar o que haviam descoberto. Quis convencê-los de que havia ainda muito que fazer:

Agora vocês têm que tentar relacionar a posição da figura com o número de pontos dela. Vocês já perceberam que de uma figura para outra aumenta 4 pontos.

Já sei é $n = n - 1 + 4$ - Henrique.

O que é o "n" que vocês estão falando? - perguntei. (T.G.A.)

Esse meu questionamento tinha como objetivo levá-los a refletir sobre as variáveis em questão e sobre como representá-las e parece ter funcionado. Instalou-se uma animada discussão, Henrique e Rafael pareciam longe de conseguir chegar a um acordo. Mas isso durou pouco.

n é o número de pontos de uma figura e $n - 1$ é o número de pontos da figura anterior. - disse Rafael.

É melhor assim: $n = y + 4$ onde n é o número de pontos de uma figura e y o número de pontos da figura anterior. - completou Henrique.

É um bom começo. É o primeiro registro que vocês vão ter: o número de pontos de uma figura qualquer é igual ao número de pontos da figura anterior mais 4. Mas vocês encontraram uma fórmula para o número de pontos de uma figura qualquer da sequência que depende do número de pontos da figura anterior. Então para eu calcular o número de pontos da centésima figura eu preciso saber o número de pontos da figura 99. Não é prático. Eu preciso de uma fórmula que permita calcular o número de pontos de uma figura qualquer sem depender do número de pontos da figura anterior. Do que vocês acham que o número de pontos de uma figura poderia depender? Do número de pontos da figura anterior já vimos que não dá.

Da primeira. - disseram

Da primeira tudo bem pois a gente conhece mesmo, a anterior é que é difícil de conhecer. - concordei. (T.G.A.)

Como ficaram em silêncio por um tempo imaginei que estivessem com dificuldades em desenvolver o raciocínio partindo da quantidade de pontos da

primeira figura. Tentei reencaminhar o trabalho mas as coisas ocorreram de modo bem diferente do que o esperado por mim...

O que vocês acham de tentar relacionar a posição da figura com o número de pontos que ela possui? A primeira figura tem 5 pontos, a segunda tem 9, a terceira tem 13. Será que eu consigo descobrir como faço o 1 virar 5, o 2 virar 9 e o 3 virar 13? Uma lei que permita relacionar a posição e o número de pontos? Entenderam? Pensem um pouquinho, quando tiverem alguma coisa me falem. Parem de olhar para a tabela na vertical olhem para ela na horizontal. (T.G.A.)

E eles fizeram o que eu pedi:

Na primeira figura o número de pontos é obtido fazendo a posição mais 4 pois $1 + 4 = 5$, na segunda mais 7 pois $2 + 7 = 9$, na terceira mais 10 pois $3 + 10 = 13$ - disseram.

Desse jeito não descobrimos um padrão. - decretei. Vamos tentar de outro jeito, procurar uma lei que funcione para todos. Desse jeito na primeira linha funcionou uma lei, na segunda outra e na terceira outra. (T.G.A.)

Acredito que teria sido conveniente incentivá-los a explorarem melhor esse caminho. Eles poderiam ter percebido que:

$$4 = 3 \cdot 1 + 1; \quad 7 = 3 \cdot 2 + 1; \quad 10 = 3 \cdot 3 + 1.$$

E que sendo n a posição da figura na sequência a quantidade de pontos desta poderia ser obtida fazendo:

$$n + n \cdot 3 + 1 = 4n + 1$$

Mas eles não desistiram, continuaram tentando:

Para a primeira figura basta fazer a posição vezes 5, para a segunda vezes 5 menos 1, para a terceira vezes 5 menos 2, e assim por diante. (T.G.A.)

Mas, de repente, eles mesmos perceberam uma falha no padrão que acabaram de descrever e o reformularam:

Para a primeira figura faz uma vez o cinco, para a segunda duas vezes o cinco menos dois, para a terceira três vezes o cinco menos 3, para a quarta quatro vezes o cinco menos 4.

E para a décima? - perguntei.

Dez vezes o cinco menos 10. - responderam.

Vamos testar para a quinta figura da seqüência? - sugeri.

Cinco vezes o cinco menos 5. Está dando 20 e tinha que dar 21. (eles)

É só fazer mais um. - disseram.

Não. É 1×5 , $2 \times 5 - 1$, $3 \times 5 - 2$, $4 \times 5 - 3$, $5 \times 5 - 4$, $10 \times 5 - 9$, $n \times 5 - (n - 1)$ - repensaram.

A fórmula de vocês está diferente da de todo mundo. Mas está certa também. Quando formos colocar na lousa temos que provar que elas são equivalentes. - eu disse. (T.G.A.)

É difícil eu parar de contar... São tantos episódios ricos em oportunidades mútuas de aprendizagem. Mas é necessário seguir em frente, olhar para mim, professora, e para minha prática, mutante, num outro momento, num outro contexto...

Salto para o momento final, para a fase de negociação de significados, oportunidade na qual cada uma das tarefas foi discutida coletivamente e cada dupla teve a oportunidade de apresentar seus processos e resultados à classe, tendo que defender a validade dos mesmos. Esse momento foi rico, pois explorações diversas para uma mesma atividade proposta foram colocadas lado

a lado para serem discutidas, consideradas equivalentes ou excludentes, ou simplesmente como interpretações diferentes mas possíveis.

Nesse momento meu papel de professora foi fundamental: incentivando e auxiliando os alunos a:

- exporem a atividade matemática resultante da exploração que fizeram da tarefa proposta;
- justificarem suas decisões;
- argumentarem em defesa de suas conjecturas;
- exporem suas conclusões de forma clara e precisa, fazendo uso, para isso, tanto da linguagem materna como da álgebra, em seus diversos níveis.

No entanto, isso tudo não ocorreu de forma tranqüila e linear. Os alunos precisavam estar sendo chamados a todo o momento a participar. Acredito que a decisão de respeitar o tempo que cada grupo necessitava para realizar cada um das tarefas propostas, remanejando a discussão de todas as tarefas para o final, tenha sido responsável por um afastamento excessivo entre os alunos e o trabalho por eles realizado. Como as informações já não estavam "frescas" em suas memórias, era necessário que, para colocarem-se perante toda classe, consultassem o material escrito, e isso tomava tempo e despendia mais energia do que muitos deles estavam dispostos a disponibilizar.

Levanto também outra hipótese, que não exclui a anterior: os alunos vivem a maioria do tempo numa cultura escolar na qual o professor, depois de propor uma situação-problema, apresenta a resposta correta e os passos que devem ser seguidos a fim de que se chegue a ela. A dinâmica que estava

ocorrendo ali entrava em conflito com esse modelo de modo que muitos alunos decidiam por ficarem apenas com uma resposta correta e um caminho de chegar até ela., Qualquer coisa além disso poderia ser interpretada como "possibilidade de confundir-se" ou "tentativa da professora de complicar algo que tornou-se simples por já ter sido compreendido".

Tenho claro que minha prática, assim como todas, não é perfeita. Tem suas limitações e não simplesmente acertos ou erros. Está contextualizada, é feita de dilemas, reflexões, tomadas de decisões, fatos, mais do que sucessos ou fracassos. A pesquisa está me ajudando a educar meu olhar com relação à minha prática de forma que, ao analisá-la, eu consiga mais do que criticar, compreender minha prática pedagógica e possa, a partir dessa compreensão, trabalhar no sentido de continuar construindo-a, alargando-a, aprofundando-a, solidificando-a.

O presente⁶⁸, produto do que já passou e semente do que virá

*Ando devagar porque já tive pressa
e levo esse sorriso porque já chorei demais
Hoje me sinto mais forte
Mais feliz quem sabe
Só levo a certeza de que muito pouco eu sei
Que nada sei.
Almir Sater*

Dando um salto no tempo, um ano e 3 meses depois daquela experiência com aulas investigativas no Colégio Dom Barreto, estou agora trabalhando na Escola Comunitária de Campinas. Leciono para o IV Ciclo do Ensino Fundamental⁶⁹, no período da tarde. Em 2003 dei início ao meu segundo ano nesta escola. O ano anterior foi desafiador principalmente no aspecto da adaptação a um novo ambiente de trabalho que, acabei deixando meu projeto de Dissertação um pouco de lado e junto dele minhas experiências com aulas investigativas. Mas, ao final do ano de 2002, resolvi retomar meu projeto e fixei algumas metas: estava decidida a investir nelas no ano seguinte. No âmbito da prática escolar, pretendia:

⁶⁸ Como presente considero a última experiência com aulas investigativas que foi foco de reflexão e análise neste trabalho de pesquisa.

⁶⁹ O IV Ciclo do Ensino Fundamental compreende a 7ª e a 8ª série.

- Ampliar e aprofundar o trabalho de parceria entre eu e a professora de Matemática do Ciclo IV do período da manhã.⁷⁰;
- Envolver-me, e aos alunos, mais freqüentemente em tarefas investigativas;
- Encontrar maneiras alternativas de lidar com aspectos relativos a posturas e atitudes de uma classe com a qual eu estaria trabalhando pelo segundo ano consecutivo.

Enquanto me entusiasmava pela realização das duas primeiras metas, a terceira me provocava receios e era algo que eu estava evitando pensar por medo de não conseguir.

Mas não só de antigos desafios se constituía esse meu novo ano. Eu seria professora de duas novas turmas, os primeiros anos do IV Ciclo, e estava ansiosa por conhecê-los.

Durante a semana de Planejamento⁷¹ eu e a professora do período da manhã decidimos propor aos alunos dos 1^{os} anos do Ciclo IV um trabalho que nos propiciasse a oportunidade de observar como trabalhavam em equipes, como comunicavam suas idéias matemáticas e de conhecer a relação que haviam construído, até então, com a Matemática. Além disso, queríamos apresentar a eles o trabalho que pretendíamos desenvolver junto com eles neste novo Ciclo.

⁷⁰ O trabalho de parceria é possibilitado por duas horas semanais de reunião. Este trabalho consiste, por exemplo, em refletir, planejar, discutir, avaliar e replanejar currículo, prática pedagógica, reuniões de pais, utilização da sala ambiente e dos materiais nela disponíveis. Um dos objetivos desse trabalho é construir a identidade do trabalho com Matemática no IV Ciclo, considerando as características próprias de cada classe, de cada período, de cada professora mas, procurando evitar grandes distorções.

⁷¹ No período de 27 a 31 de janeiro de 2003 os professores da escola participaram de reuniões de planejamento.

Lembrei-me então de uma tarefa que eu havia proposto de improviso aos primeiros anos do ano passado na qual se investigavam as relações entre a quantidade de quadradinhos e os perímetros das figuras que podem ser formadas com esses quadradinhos quando a quantidade de quadradinhos vai aumentando.

Não tínhamos certeza de que os alunos compreenderiam a proposta caso a enunciássemos como acima. Propus-me, então a elaborar um roteiro de trabalho para os alunos, além de tentar explicitar os objetivos da proposta e as orientações para que os alunos a realizassem a contento. Por e-mail enviei um esboço para que a professora do período da manhã pudesse fazer suas críticas e dar suas contribuições. Na sexta-feira nos encontramos e "fechamos" a proposta que seria entregue aos alunos. Ela ficou assim:

ANALISANDO QUADRADOS E PERÍMETROS

Objetivos

Propiciar aos alunos:

- Trabalho colaborativo em equipes;
- A experiência de fazer Matemática formulando e resolvendo problemas, levantando hipóteses e testando-as, comunicando e justificando descobertas;
- Vivenciar as conexões da Geometria com Números, Álgebra, Combinatória, Análise

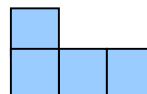
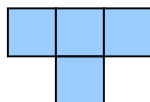
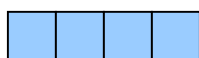
Orientações

Elejam:

- Coordenador: ele deverá organizar o trabalho e resolver conflitos;
 - Redator: deverá se responsabilizar pela versão final do registro, detalhando e organizando todas as etapas do trabalho;
 - Cronometrista: controlará o tempo;
 - Relator: comunicará oralmente o trabalho da equipe para a classe.
- Todos os alunos deverão participar das etapas de produção do trabalho.

Vamos investigar o que acontece com o perímetro de figuras formadas por quadrados unidos pelos lados.

Estes são apenas alguns exemplos:



Um roteiro ...

1. Construam figuras utilizando quantidade crescente de quadrados.
2. Observem o que acontece com os perímetros dessas figuras.
3. Organizem as informações obtidas.
4. Encontrem um padrão para os perímetros.
5. Utilizem esse padrão para prever o que acontecerá com os perímetros das figuras formadas por 10 quadrados.
6. Verifiquem se na prática essa previsão se confirma.
7. Façam outras previsões e justifiquem os motivos pelos quais elas podem ser consideradas corretas.
8. Tendo como base a investigação desenvolvida, vocês consideram possível prever o que acontecerá com os perímetros de uma figura formada por uma quantidade qualquer de quadrados? Se a resposta for afirmativa, explique como e se a resposta for negativa explique porque.

Além de já ter trabalhado uma proposta similar a esta com duas turmas de primeiro ano em 2002, já havia proposto e discutido uma tarefa similar quando fui convidada pelo professor Dario Fiorentini a falar sobre Aulas Investigativas aos alunos da Licenciatura em Matemática da UNICAMP do período noturno. Mesmo assim tinha certeza de que seria surpreendida pelas produções dos alunos, afinal isso sempre acontece. Mesmo sabendo que por mais preparada que estivesse essa "previsível surpresa" aconteceria novamente dediquei algumas horas do meu final de semana para tentar mapear a variedade de estratégias, caminhos, interpretações, percepções, conjecturas, padrões, conclusões que os alunos poderiam vir a ter a partir do momento que estivessem envolvidos com a proposta. De todo esse trabalho só ficou a certeza de que é necessário preparar-se para o inesperado mas, por mais que nos preparemos para ele nunca estaremos cobrindo todas as possibilidades. E isso é bom pois a certeza de que sempre há algo a aprender é que me move. Além disso percebo que o algo que há para aprender depende do quão preparada estou e que essa afirmação também é verdadeira quando se fala em ensinar. Acredito que isso se deva ao fato de ensinar e aprender sejam ações que não se dissociam nunca.

Era uma segunda-feira, primeiro dia de aula. Havia muito que dizer a eles pois iniciavam um novo Ciclo com seus objetivos específicos e maior nível de exigência, além de se depararem como novos professores e suas peculiaridades. Era necessário saciar a curiosidade deles. Falei o que achei necessário, respondi o que me perguntaram e então pedi que formassem quartetos,

obedecendo ao mapa de sala⁷². Cada um dos alunos recebeu então a proposta de trabalho. Lemos juntos objetivos e orientações. Expliquei que a princípio todos deveriam envolver-se com a investigação cuidando para registrar as etapas do trabalho em seus respectivos cadernos. Reforcei que, apesar dos registros serem individuais o trabalho não o era. Eles estavam organizados em equipes para que pudessem discutir caminhos e estratégias, dividir tarefas, validar, ou não, conjecturas levantadas, etc. Apesar de cada um dos integrantes ter um papel definido no trabalho este se constituía em mais uma atribuição além da de envolver-se em todas as etapas do trabalho.

A decisão de que a proposta de trabalho fosse realizada pelos alunos em equipes visava também possibilitar que eu acompanhasse mais de perto, e com mais tempo, os trabalhos de cada uma das equipes.

O roteiro sugerido ultrapassava a função de "lista de procedimentos necessários para se atingir um objetivo". Os alunos não o trataram como "receita" mas sim como parâmetro. A maioria dos alunos seguia seus próprios caminhos e depois retornavam ao roteiro procurando identificar o que dele havia sido contemplado e o que não e discutiam entre eles e comigo, como o fazer.

A partilha das produções de cada uma das equipes com as demais ocorreu imediatamente depois da realização desta. O relator, responsável pela comunicação à classe das produções da equipe, o fez tendo em mãos um cartaz. Esse cartaz elaborado pela equipe, mas cuja confecção era responsabilidade do redator, continha as idéias básicas do raciocínio utilizado para exploração da

⁷² Mensalmente o serviço de Orientação Educacional define os lugares que serão ocupados pelos alunos.

tarefa e as principais descobertas e conclusões da equipe. Estratégias, descobertas e conclusões foram apresentadas à classe e discutidas, problematizadas e contestadas por esta. Este momento possibilitou mais que a troca entre os alunos, foi também um exercício de respeito ao outro, de valorização do indivíduo inserido numa equipe colaborativa.

A seguir, apresento um resumo das principais conclusões⁷³, das principais descobertas dos alunos. O faço com minhas palavras na tentativa de enquadrar uma série de conclusões ou descobertas similares numa mesma categoria.

- *A quantidade de perímetros possíveis para uma mesma figura, a partir das formadas por quatro ou mais quadradinhos, não é única. Dependendo de como se forma a figura obtém-se perímetro mínimo, máximo ou intermediário.*

A idéia abordada aqui é a de que figuras de mesma área podem ter perímetros diferentes. Em momento algum toquei nesse assunto e nem eles fizeram referência. Teria sido bastante importante, acredito. Mas naquele momento eu não estava pronta para isso e só estou agora pois agora é depois e o depois é o momento de algumas percepções e aprendizagens.

- *Com uma mesma quantidade de quadradinhos pode-se obter perímetros diferentes, dependendo da figura que se forma. Quanto maior o número de*

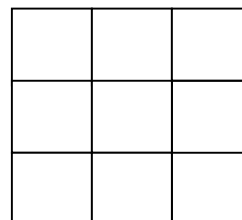
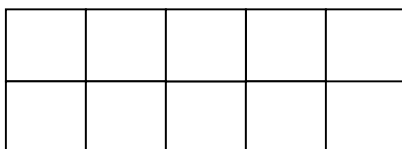
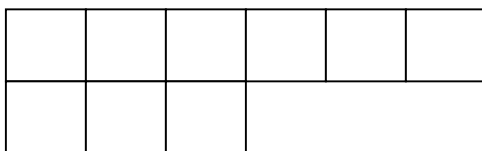
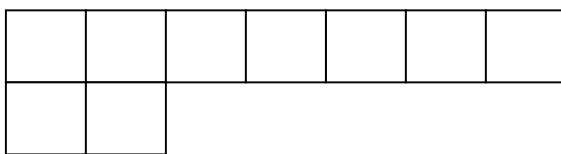
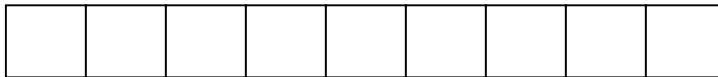
⁷³ Não apresento as produções dos alunos dos 1^{os} anos C e D que deram origem às conclusões que apresento pois na ocasião em que foram feitas, não tinha em mente tomá-las como objeto de reflexão. Baseio-me então em meus registros diários, procedimento que se tornou cotidiano em minha prática.

quadrinhos usados para formar a figura, maior será a possibilidade de perímetros diferentes.

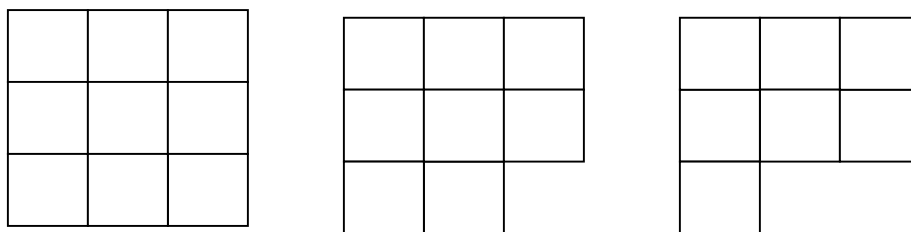
Outra linha de análise está presente aqui. Ao invés de focar o olhar no valor dos perímetros estes alunos focam o olhar na quantidade de perímetros. Sendo esta uma proposta relativamente aberta à exploração dos alunos era esperado que isso acontecesse. Aonde será que isso nos levará? Seremos capazes de relacionar quantidade de quadrinhos e quantidade de perímetros possíveis? Essas grandezas dependerão exclusivamente umas das outras?

- *O menor perímetro acontece quando formamos um quadrado com os quadrinhos, ou a forma que mais se aproxima dele.*

Nesse ponto percebe-se presente a idéia do quadrado minimizando o perímetro das figuras possíveis de serem construídas com uma mesma quantidade de quadrinhos, ou seja, com a mesma área.



Mas também maximizando a área de figuras de mesmo perímetro



- Quando a figura formada é um quadrado e deseja-se obter seu perímetro extrai-se a raiz quadrada da quantidade de quadradinhos e multiplica-se por quatro. Em linguagem algébrica, sendo x a quantidade de quadradinhos

$$\text{Perímetro Mínimo} = 4\sqrt{x}$$

Os alunos escrevem uma fórmula e não se esquecem de dar significado para suas variáveis e condicionar a validade desta. A complexidade da análise do perímetro mínimo se revela e os alunos trabalham na tentativa de encontrar um ou mais padrões para o perímetro das figuras que não são quadradas.

Hoje percebo que esse perímetro também é o perímetro mínimo das figuras formadas por $x^2 - 1$, $x^2 - 2$, ..., $x^2 - (x-1)$ quadradinhos. Percebo também que esse perímetro acrescido de 2, $4\sqrt{x} + 2$, é o perímetro mínimo das figuras formadas por $x^2 + 1$, $x^2 + 2$, ..., $x^2 + x$ quadradinhos. Seguindo o mesmo raciocínio $4\sqrt{x} + 4$ é o perímetro mínimo das figuras formadas por $x^2 + x + 1$, $x^2 + x + 2$, ..., $x^2 + x + x$ quadradinhos. A próxima figura, formada por $x^2 + 2x + 1$

quadrinhos é um quadrado perfeito e portanto seu perímetro mínimo é $4\sqrt{x+1}$.

De repente me percebo aprendendo Matemática com meus alunos e isso me surpreende. Minha surpresa deve estar surpreendendo o leitor. Apesar de ter presente em meu discurso a crença na reciprocidade do ensino e da aprendizagem nas relações entre aluno, professor e conteúdo só neste momento a percebi se confirmando. Só agora me flagrei estabelecendo relações que só foram possíveis a partir de análises de conclusões, percepções e falas de alunos.

- *O maior perímetro acontece quando formamos uma fileira com os quadrinhos. Para obtê-lo dobra-se a quantidade de quadrinhos e soma-se dois.*

$$\text{Perímetro Máximo} = 2x + 2$$



O retângulo de largura unitária é logo identificado como o de perímetro máximo pois nele perde-se o mínimo possível de lados dos quadrinhos. A fórmula para o perímetro máximo é escrita de forma a ser compatível com a do perímetro máximo pois em cada uma delas x representa a quantidade de quadrinhos utilizada para formar a figura.

Acabo de perceber que meus alunos pensam diferente de mim: seus raciocínios são muito mais geométricos que os meus. Essa percepção me parece

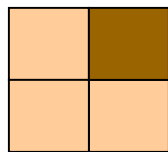
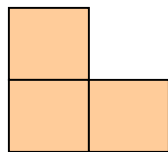
importantíssima para que eu possa compreender melhor seus raciocínios e fazer intervenções mais adequadas. Estou aprendendo a conhecer como meus alunos aprendem.

- *Os perímetros são sempre números pares.*

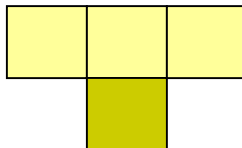
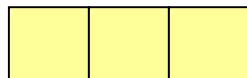
Apesar dessa conclusão ter sido tirada tendo como base dados empíricos as fórmulas escritas pelos alunos a confirmam pois: $2x + 2$ é par com certeza e $4\sqrt{x}$ também o é sendo x quadrado perfeito. Os demais perímetros o serão também pois:

- *Sabendo o menor e o maior perímetro descobre-se também os demais que são os pares entre eles.*

Essa afirmação se justifica pois cada vez que se aumenta um quadradinho ou o perímetro não aumenta ou aumenta duas unidades. Veja:



Neste caso o perímetro não aumentou.



Neste caso o perímetro aumentou duas unidades.

- *Uma maneira para se calcular um perímetro mínimo qualquer:*

- Quando se tem uma quantidade de quadradinhos para a qual há duas possibilidades para o perímetro o perímetro mínimo é obtido fazendo o dobro da quantidade de quadradinhos.
- Quando se tem uma quantidade de quadradinhos para a qual há três possibilidades para o perímetro o perímetro mínimo é obtido fazendo o dobro da quantidade de quadradinhos menos dois
- Assim se a quantidade de perímetros diferentes for quatro deverá se fazer o dobro menos quatro. Se for cinco, o dobro menos seis. E se for "n" o dobro da quantidade de quadradinhos menos o dobro da quantidade de perímetros diferentes menos quatro.

<i>Quantidade de Quadrados</i>	<i>Perímetros Possíveis</i>	<i>Quantidade de Perímetros Possíveis</i>
1	4	1
2	6	1
3	8	1
4	8, 10	2
5	10, 12	2
6	10, 12, 14	3
7	12, 14, 16	3
8	12, 14, 16, 18	4
9	12, 14, 16, 18, 20	5
10	14, 16, 18, 20, 22	5
15	16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32	6
20	18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42	13
100	40, 42, 44, 46, 48, ..., 196, 198, 200, 202	82
N	$2n - (2x - 4), \dots, 2n + 2$	X

Neste capítulo foi narrada outra experiência de sala de aula na qual alunos envolveram-se com uma tarefa investigativa. A partir da elaboração dessa narrativa, bem como sua análise frente às outras narrativas presentes neste trabalho de pesquisa, é que foram alinhavadas as considerações finais que serão apresentadas em "Para concluir ...".

Após planejar, viver, analisar, refletir e escrever sobre esta última experiência, avalio as experiências com aulas investigativas neste trabalho de pesquisa como extremamente formativas para mim, professora-pesquisadora, tendo em vista que, a partir delas consigo:

- Estabelecer com minhas experiências anteriores um diálogo mais significativo, reelaborando as noções de investigação matemática, aula investigativa, tarefa investigativa e atividade investigativa⁷⁴;
- Notar minha habilidade com relação à formulação/elaboração de tarefas investigativas, desenvolvendo-se quando amplia-se meu entendimento sobre as tarefas investigativas como tarefas planejadas tendo em vista fins pedagógicos tais como explorar, produzir significados, estabelecer relações, conjecturar, argumentar, expressar e defender oralmente e por escrito suas resoluções e

⁷⁴ Acredito que nesse nível esteja sendo ampliado e aprofundado principalmente o "saber" relativo a investigação matemática, aula investigativa, tarefa investigativa e atividade investigativa pois são ressignificados com base na experiência aspectos teóricos e conceituais envolvendo os temas acima.

afirmações, desenvolvendo, assim, o pensamento matemático e a autonomia intelectual, entre outros⁷⁵;

- Perceber modificações nas relações entre professora, alunos e conhecimento matemático, resultantes também de experiências envolvendo aulas investigativas e sentir necessidade de, para além de perceber essas modificações, aprender a tirar proveito delas no sentido de qualificar essas relações e o ensino e a aprendizagem de professores e alunos;⁷⁶
- Entender a necessidade de incorporar tarefas investigativas em minha prática curricular de forma prudente, reconhecendo como utopia a idéia de trabalhar exclusivamente com aulas investigativas no contexto escolar atual, considerando também as limitações do trabalho docente frente a grande quantidade de conteúdos a serem tratados a cada ano e ao limitado tempo disponível para o preparo de aulas. Vejo-me, a essa altura, desenvolvendo o que é chamado por Tardif (2000) de saber curricular.
- Afirmar que este trabalho de pesquisa não teve como objetivo obter elementos que justificassem a eleição de aulas investigativas como a estratégia mais produtiva para o ensino e na aprendizagem da Matemática. Esse trabalho permitiu-me perceber a necessidade de

⁷⁵ O conhecimento tem além da dimensão conceitual denominada por "saber", uma dimensão procedimental denominada aqui por "saber fazer". Percebo o meu "saber fazer" a formulação de tarefas investigativas qualificando-se ao longo deste trabalho de pesquisa.

⁷⁶ Evidencia-se agora, outra dimensão do conhecimento, a dimensão atitudinal, o "ser", que inclui as relações que os indivíduos envolvidos com o conhecimento mantém com o conhecimento e com os outros.

diversificar estratégias e práticas pedagógicas visando diversificar também a experiência matemática dos alunos.

- Vislumbrar possíveis “pontos fracos” na gestão de minhas aulas, podendo dessa forma centrar neles meus esforços. Entre eles posso citar dificuldades que professora e alunos sentiram com o “rompimento” com o modelo tradicional de aula, ensino e aprendizagem de Matemática, e conseqüentemente com a dinâmica do trabalho em equipes e com a socialização das produções das equipes.
- Certificar-me de que todos os aspectos levantados acima são perpassados por, e contribuem para, minha constituição docente.

Para terminar ...

... proponho continuar o diálogo com as experiências pedagógicas envolvendo investigações matemáticas em sala de aula e com as reflexões acerca dessas experiências, tendo como eixo a questão de investigação deste trabalho de pesquisa. Esse diálogo se dará revisitando, problematizando, discutindo e ressignificando os sentidos produzidos e apresentados nas narrativas reflexivas que integram este estudo.

Além disso, pretendo discutir as contribuições da realização deste trabalho de pesquisa em minha constituição docente, considerando os diferentes contextos formativos nos quais ele esteve inserido.

A princípio ressalto a teoria entrando em conflito com minha própria prática pedagógica e desencadeando transformações nesta. Minhas leituras sobre investigações matemáticas no ensino e nas aulas de Matemática impulsionaram a revisão de minha prática pedagógica e de minhas concepções sobre Matemática escolar e o ensino e a aprendizagem desta. Essa revisão baseou-se na comparação de minhas práticas e concepções com as descritas pela literatura sobre aulas investigativas, na identificação de diferenças, no entendimento de que, talvez, algumas das dificuldades que eu e meus alunos enfrentávamos em sala de aula pudessem ser superadas a partir de mudanças de concepções e práticas.

A partir do momento que tive minhas concepções e práticas problematizadas por essas leituras, senti-me inclinada a experienciar, em sala de aula, uma nova prática baseada nessa teoria. Entretanto, não fiz isso como quem segue uma receita. Ao contrário, procurei tão somente inspirar-me em seus pressupostos, fazendo adaptações às condições de minha prática. Aliás, nem poderia ser diferente, pois ninguém muda radicalmente sua prática sem que mude, também, suas crenças, concepções e saberes. Essa mudança não ocorreu de uma hora para outra. Minha história escolar, minha formação inicial e minha experiência docente não podiam ser simplesmente negadas ou abandonadas a partir de teorias e experiências de outros. Foi preciso que eu mesma experienciasse essa nova perspectiva de aula de Matemática e refletisse sistematicamente sobre ela.

Durante esse processo, foi fundamental a mediação colaborativa do Grupo de Sábado e minha própria investigação sobre a prática. Tudo isso, interligado, contribuiu para que eu resignificasse a teoria relativa às investigações matemáticas em sala de aula, apropriando-me, assim, efetivamente, dela, produzindo novos saberes docentes. Em meio a todo esse processo fui reconfigurando, aos poucos, minha prática pedagógica. Identifiquei, então, as primeiras mudanças... Percebi-me propondo aos alunos situações mais abertas, desafiando-os a formularem conjecturas, colocá-las em discussão, argumentar em defesa delas, comprová-las ou refutá-las. Além disso, notei em mim o movimento de procurar apoiar as idéias dos alunos, arbitrar conflitos, valorizando e dinamizando as interações professor-aluno e aluno-aluno.

A essa altura já evidenciava-se a estreita relação de alimentação recíproca e constante entre teoria e prática, potencializando e sendo potencializada pela investigação de minha própria prática. A organização e análise das informações deste estudo através de narrativas reflexivas escritas e o apoio de um grupo colaborativo de professores de Matemática viabilizaram a investigação de minha própria prática como metodologia ou estratégia para produção de conhecimento em Educação Matemática e como instrumento e contexto de minha constituição docente.

Minhas relações com o conhecimento matemático e pedagógico transformaram-se em função do movimento de modificação da prática, impulsionado pela teoria, e de sua ressignificação, em função das experiências vividas na prática. Esse movimento não se deu necessariamente nessa ordem, nem com a mesma intensidade em cada um dos sentidos. Essa dualidade realimentava-se, produzindo um movimento constante e produtivo.

No entanto, é preciso cuidado para não se tornar vítima desse movimento que envolve níveis elevados de auto-crítica, podendo, inclusive, colocar em crise a identidade docente. A identidade docente, que compreende concepções, crenças, saberes, habilidades, práticas, e uma alta dose de intuição, precisa ser construída a cada dia, numa relação dialógica entre teoria e prática, entre ensino e pesquisa, entre professor e aluno, entre Matemática e pedagogia, entre o saber, o saber fazer e o saber ser, sem perder de vista a segura certeza de que a prática, por ser ação humana, é imperfeita.

A princípio, a reflexão sobre minha própria prática, quando da produção das narrativas escritas, fez com que eu lançasse sobre ela um olhar crítico,

mais do que curioso, vendo defeitos onde existiam limitações, ameaçando desconstruir uma prática que, na verdade, estava sendo exposta para ser, sobretudo, compreendida e melhorada.

Acredito que isso tenha acontecido pelo fato de eu estar investigando minha própria prática e temer que, dessa forma, eu pudesse ser interpretada como condescendente comigo mesma, comprometendo assim a confiabilidade do trabalho de pesquisa que eu estava realizando. No entanto, esse cuidar em não ser benevolente comigo exacerbou-se abrindo espaço para autocríticas por demais severas e recorrentes.

A tomada de consciência do desencadeamento do processo de desconstrução de minha identidade docente ocorreu, de forma mais contundente, durante o Exame de Qualificação, tendo em vista as considerações feitas pelos professores que compunham a Banca Examinadora. A partir desse momento, decidi trabalhar para reverter esse processo, não reconstruindo minha antiga identidade docente, mas buscando nela, e nas críticas sobre ela, elementos para a construção de uma nova identidade docente. Essa nova identidade, em constante constituição, tem buscado estabelecer uma outra relação, mais tranqüila e saudável, com minha prática docente, procurando, mais do que criticá-la, compreendê-la.

Frente a tudo isso, identifico um desafio àqueles que se propõem a investigar sua própria prática pedagógica: distanciar-se dela no momento da análise para que possa acontecer um "estranhamento" entre o professor-pesquisador e sua prática pedagógica. "Distanciamento" e "estranhamento" possibilitam que a prática pedagógica do professor-pesquisador possa ser

problematizada e ressignificada de forma mais abrangente e profunda. Isto, pois o fato de ser pesquisador, sujeito da pesquisa e ter como objeto de pesquisa sua própria prática pedagógica, faz com que o professor-pesquisador mantenha, com a realização do trabalho de pesquisa e de sala de aula, uma relação pessoal e emocional mais intensa do que comumente se observa, com reflexos em sua atividade docente. Entretanto, alguns fatores auxiliaram-me a estabelecer com minha prática pedagógica um certo nível de "distanciamento" e "estranhamento". Entre outros, destaco:

- a produção de narrativas reflexivas escritas, baseadas não somente em minha memória, mas também em diário de campo e em gravações em áudio, visando aliar a fidelidade dos fatos à subjetividade destes;
- os olhares externos dos integrantes do Grupo de Sábado e do orientador trouxeram novas interpretações, dando origem à produção de outras análises sobre minhas experiências com investigações matemáticas em sala de aula;
- a leitura crítica e a discussão deste trabalho de pesquisa pela Banca Examinadora do Exame de Qualificação, auxiliando-me deslocar minhas análises, que a princípio situavam-se em um nível muito personalista, de forma a estabelecer um diálogo mais formativo com minhas experiências envolvendo investigações matemáticas em sala de aula.

A experiência em sala de aula com investigações matemáticas possibilitou que eu conseguisse ampliar e aprofundar minha compreensão sobre

o que vem a ser tarefas investigativas e seu papel no ensino e na aprendizagem de professores e alunos. À primeira vista, podem ser entendidas apenas como mais uma alternativa didática de formulação e resolução de problemas onde os recursos a conhecimentos matemáticos se fazem essenciais. Entretanto, uma análise mais cuidadosa dessa experiência, como a que foi realizada neste estudo, revela outras potencialidades pedagógicas tais como:

- envolver no trabalho de sala de aula alunos com diferentes níveis de compreensão e de domínio conceitual, técnico e da linguagem matemática;
- desenvolver habilidades investigativas em Matemática, sobretudo a exploração, a formulação de questões e conjecturas, a argumentação, a validação ou refutação de conjecturas e hipóteses;
- desenvolver a capacidade de comunicar idéias, oralmente e por escrito;
- utilizar e desenvolver a linguagem matemática.

Dessa forma, descubro, nas investigações matemáticas em sala de aula, uma dimensão educativa que, de início, não se fazia presente. Essa dimensão é relativa à veiculação de valores e de princípios éticos e à formação da cidadania; e que me leva a reconhecer aluno e professor como produtores de conhecimento que constroem, mediante investigações⁷⁷, sua autonomia profissional e intelectual.

⁷⁷ As investigações do aluno dizem respeito às tarefas e atividades investigativas e as do professor às investigações sobre a própria prática.

Mas é necessário fazer referência às competências necessárias ao professor para que este possa planejar e mediar situações de ensino e de aprendizagem baseadas nessa perspectiva. Como vimos neste trabalho, a habilidade em formular tarefas investigativas desenvolveu-se à medida que aprofundei e ampliei minha compreensão sobre o papel educativo das investigações matemáticas em sala de aula. Essa habilidade consiste em selecionar conteúdos e situações propícios, explicitar objetivos de trabalho, formular orientações claras que auxiliem os alunos na exploração da tarefa, elaborar tarefas adequadas ao conhecimento matemático dos alunos e com as quais eles possam envolver-se e produzir significados relevantes à formação da autonomia do aluno enquanto sujeito social.

A gestão de uma aula investigativa ainda é para mim um grande desafio, assim como deve ser para os alunos a realização de investigações matemáticas em sala de aula, pois entra em conflito com a tradição pedagógica, ou seja, as aulas investigativas representam uma ameaça aos modelos de escola, de aula, de professor e de aluno, tradicionalmente produzidos. Considero-a desafio, pois ela subentende romper uma tradição, aos quais são submetidos professores e alunos. Um dos aspectos dessa tradição é que o professor sabe, ou deveria saber, as respostas das tarefas ou problemas propostos, e qual o melhor caminho para chegar a elas. Ao propor uma tarefa investigativa o professor não tem conhecimento de todas as explorações possíveis. Do ponto de vista do professor isso pode ser tão motivador quanto assustador. Motivador no sentido de lidar com o imprevisto e com a possibilidade de aprender enquanto trabalha. Assustador no sentido de não conseguir lidar com

o imprevisto e, então, ser visto como incompetente, podendo comprometer a relação de poder estabelecida na sala de aula entre professor e alunos. Prefiro valorizar a possibilidade que se coloca ao professor de aprender juntamente com os alunos e na reflexão sobre sua prática pedagógica. Mas nem sempre isso é uma questão de preferência.

Quando falo em gestão de uma aula investigativa estou falando sobre mediar as relações entre alunos e conhecimento matemático, entre alunos e entre esses e o professor. E as relações sempre são mais complicadas do que se prevê. Em aulas investigativas há, ainda, um outro agravante: em alguns momentos os papéis de professores e alunos invertem-se: alunos ensinando e professores aprendendo. Tendo em vista essa problemática entendo como necessárias ações para que professores e alunos possam, gradualmente, irem assumindo seus novos papéis, não contrários, mas mais amplos e democráticos que os antigos. Não se trata, única e exclusivamente, de uma relação entre professores e alunos, mas envolve também, entre outros, orientadores, coordenadores, diretores e pais de alunos.

A incorporação de investigações matemáticas no currículo exige que o professor "cruze dados" tais como: adequação do conteúdo, seu nível de conhecimento sobre o conteúdo, possibilidade de envolvimento dos alunos com uma investigação sobre o conteúdo, tempo disponível para a realização da investigação, a "necessidade" de se cumprir o programado, entre outras variáveis. Mas o essencial é não tratar a investigação matemática em sala de aula como uma tarefa extra, ou seja, uma atribuição a mais para o professor e uma atividade a mais para o aluno. Isso para que ela não se transforme num

"peso". Importante é incorporá-la aos conteúdos, utilizando-a como estratégia quando for conveniente, mas com frequência, para que habituemo-nos, professores e alunos, a elas, e possamos usufruir de forma crescente de seu potencial político e pedagógico.

Para concluir, não poderia deixar de dizer que: foi a realização de um trabalho de pesquisa sobre minha própria prática pedagógica, tendo como base a produção de narrativas reflexivas escritas, e como apoio um grupo colaborativo de professores de Matemática, que possibilitou desvendar as contribuições que as investigações matemáticas em sala de aula podem trazer à mudança da cultura escolar e ao processo de constituição do professor que ensina Matemática.

Referências Bibliográficas

ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; BRUNHEIRA, L. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa.: APM, .1999.

ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa.: APM,. 1996.

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. *Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica, 1999.

ALARCÃO, I. Reflexão crítica sobre o pensamento de Shön e os programas de formação de professores. In: ALARCÃO, I. (org.). *Formação reflexiva de professores: Estratégias de supervisão*. Porto.: Porto Editora., 1996

AMARAL, M. J; MOREIRA, M. A.; RIBEIRO, D. O papel do supervisor no desenvolvimento do professor reflexivo. In: ALARCÃO, I. (Org) *Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão*. Porto.: Porto Editora., 1996

AMBROSE, R. P. Personal narratives and professional development. In: *Childhood Education - Annual Theme Issue - vol. 69, nº 5 -- 1993*

APPLE, M. W. *Ideologia e currículo*. São Paulo: Brasiliense, 1982.

BAKHTIN, M.. *Estética da Criação Verbal*. São Paulo: Martins Fontes, 3ª. edição, 2000.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa.: GTI. APM,. 2002

CARDOSO, A. M.; PEIXOTO, A. M.; SERRANO, M. C.; MOREIRA, P. O movimento da autonomia do aluno: repercussões a nível de supervisão. In: ALARCÃO, I. (org.) *Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão*. Porto: Porto Editora, 1996

CASTRO, J. F. Explorando os significados do termo "radical" numa aula de Matemática. In: GRUPO DE PESQUISA-AÇÃO EM ÁLGEBRA ELEMENTAR. *Histórias de aulas de Matemática: escrevendo, trocando, contando, praticando*. Campinas: Editora Gráfica FE - CEMPEM-PRAPEM - UNICAMP,, 2001.

CASTRO, J. F. Investigando aulas investigativas. In: GRUPO DE PESQUISA-AÇÃO EM ÁLGEBRA ELEMENTAR. *Histórias de aulas de Matemática: escrevendo, trocando, contando, praticando*. Campinas. Gráfica FE - CEMPEM - PRAPEM - UNICAMP. 2001

CASTRO, J. F. Quadrados e Perímetros: uma experiência sobre aprender a investigar e investigar para aprender. In: GRUPO DE SÁBADO. *Histórias de aulas de Matemática: Compartilhando saberes profissionais*. Campinas: SP: Graf. FE: CEMPEM, 2003.

CONELLY M. F.; CLANDININ, J. D. Relatos de experiência e investigação narrativa. In: LARROSA, J. (et al) *Déjame que te cuente: ensaios sobre narrativa e investigação: ensayos sobre narrativa y educación*. Barcelona: Editorial Laertes, 1995.

COURT, D. Reflection-in-action: some definitional problems. In: P. GRIMMET e G. ERICKSON (eds.), *Reflection in Teacher Education*. Teachers College - New York - 1988.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Editora Papirus, 1996.

DEWEY, J. *Theory of de moral life* - Renehart and Winston - New York - 1932.

JIMÉNEZ ESPINOSA, A. *Quando professores de matemática da escola e da universidade se encontram: re-significação e reciprocidade de saberes*. 2002. 237p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) - FE, UNICAMP, Campinas(SP).

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*. Campinas: Cempem - FE/Unicamp, 1995, p.1- 37.

FIorentini, D. (org.) *Coletânea de trabalhos do PRAPEM. VII ENEM*. Campinas. 2001.

FIorentini, D. Pesquisando "com" professores - reflexões sobre o processo de produção e ressignificação dos saberes da profissão docente. In: MATOS & FERNANDEZ (eds.) *Investigação em Educação Matemática: Perspectivas e Problemas*. Lisboa: APM, 2000, (p. 187 - 195).

FIorentini, D.; Miorim, M. A (org.) *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Editora Gráfica FE - CEMPEM-PRAPEM - UNICAMP, 2001.

FIorentini, D.; Nacarato, A.; Pinto, R. Saberes da experiência docente em Matemática e educação continuada. *Quadrante: revista teórica e de investigação*. Lisboa: APM, 1999, p. 33-60

FIorentini, D.; Souza Jr., A. J.; Melo, G. F. A. Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. ET AL (org.) *Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)*. Campinas: Mercado de Letras, 1998, p. 307-335.

FONSECA, H. Aprender a ensinar investigando. In: PONTE, J. P. (org.) *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: GTI-APM, 2002

FONZI, J. Compreender o que é necessário para apoiar os professores no desenvolvimento de uma pedagogia de investigação. In: ABRANTES, P. et al (Org.) - *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM, 1999.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

GERALDI, C.; FIorentini, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.) *Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)*. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In: ABRANTES et al (Org.) - *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM, 1999.

GRUPO DE PESQUISA-AÇÃO EM ÁLGEBRA ELEMENTAR. *Histórias de aulas de Matemática: escrevendo, trocando, contando, praticando*. Campinas. Gráfica FE - CEMPEM - PRAPEM - UNICAMP. 2001

GRUPO DE SÁBADO. *Histórias de aulas de Matemática: Compartilhando saberes profissionais*. Campinas, SP: Graf. FE: CEMPEM, 2003.

HARGREAVES, A. *A docência como profissão paradoxal*. Tradução de Rosana G.S. Miskulin e Maria Teresa Freitas.

IMBERNÓN, F. *La formación y el desarrollo profesional de profesorado: hacia una nueva cultura profesional*. Barcelona: Editorial Graó, 1994

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M.C. *Matemática - 8ª. Série*. São Paulo: Scipione, ano?.

JALONGO, M. R. Teachers stories: our ways of knowing. In: *Education Leadership* - vol 74, nº 7 - 1992.

JAWORSKI, B. Mathematics teacher research: process, practice and development of teaching. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 1: 3-31. 1998.

LARROSA, J. Leitura, experiência e formação. In: COSTA, M. V. (org.) *Caminhos investigativos: novos olhares na pesquisa em educação*. Porto Alegre: Editora Mediação, 1996.

LLINARES, S. Conocimiento Profesional del Professor de Matematicas: Conocimiento, Creencias y Contexto em Relación a la Noción de Función. In: PONTE, P. et al. *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1996, p. 47-82.

LAKATOS, L. *A lógica do descobrimento Matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LYTLE, S. L.; COCHRAN-SMYTH, M. Learning from teacher research: a working typology - In: *Teachers College Record* - volume 92, nº 1 - Columbia University - 1990.

MARQUES, M. *Escrever é preciso: O princípio da pesquisa*. Ijuí. Unijuí. 1998.

MASON, J.; GRAHAM, A.; PIMM, D.; GOWAR, N. *Rutas hacia/raíces del Álgebra*. Colombia. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. 1999.

MENEZES, L. C. (org.) *Professores: formação e profissão*. Coleção Formação de Professores. Campinas. Editora Autores Associados. NUPES. 1996.

MORAES, R. *No ponto final a clareza do ponto de interrogação inicial: a construção do objeto de uma pesquisa qualitativa*. Educação. Porto Alegre. Ano XXV, no. 46, p. 231-248. Março 2002.

MORIN, E. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Cortez Editora. UNESCO. Brasília. 2002.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D. ; CARVALHO, A. M. P. (Org.) *Ensinar a Ensinar: Didática para a Escola Fundamental e Média*. São Paulo: Pioneira, 2001, p. 143-262.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1991.

NÓVOA, A.(org.) *Profissão: professor* - Porto Editora - Porto

NÓVOA, A. (coord.) *Vidas de professores*. Porto: - Porto Editora,1992

OLIVEIRA, I; SERRAZINA, L. A Reflexão e o professor como investigador. In: : GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002

OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P.; SANTOS, L.; BRUNHEIRA, L. Os professores e as atividades de investigação. In: ABRANTES, P. et al (org.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM,. 1999.

PERRENOUD, P. *A prática reflexiva no ofício do professor: profissionalização e razão pedagógica*. Porto Alegre: Artmed,. 2002

PINTO, R. A. *Quando professores de Matemática tornam-se produtores de textos escritos*. 2002. 246p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) - FE, Unicamp, Campinas(SP).

PIRES, M. A. diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: um projeto de reflexão ação. In: : GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Lisboa: APM, 2002

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.) - *Refletir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Lisboa: APM, 2002

GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A. M.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. *Didática da Matemática: Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário, 1997.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PORFÍRIO, J.; OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In: ABRANTES., P. et al (org.) - *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM., 1999.

ROCHA, A. Os alunos de Matemática e o trabalho investigativo. In: : GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002

SEGURADO, I O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In: : GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002

SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. In: : GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa:- GTI. APM., 2002

SCALON, D. B. Álgebra é legal: reflexões sobre uma pedagogia inovadora em uma região urbana. In: *What's happening in Math Class? Envisioning new practices through teacher education*. SCHIFTER, D. (ed.). Vol. 2. Teachers College, Columbia University, New York and London, 1996.

SCHIFTER, D. (ed.) *What's happening in math class? Reconstructing professional identities* - Vol. 2 - Teachers College - Columbia University - 1996.

SCHÖN, D. *La formación de profesionales reflexivos: hacia um nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Ediciones Piados, 1992.

SILVA, A.; VELOSO, E.; PORFÍRIO, J.; ABRANTES, P. O currículo de Matemática e as atividades de investigação. In: ABRANTES, P. et al (org.) - *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa. APM. 1999.

SKOVSMOSE, O. *Cenários para investigação*. Bolema. Ano 13. no. 14. p. 66 a 91. 2000.

TARDIF, M. Os professores enquanto sujeitos do conhecimento: subjetividade, práticas e saberes do magistério. In: Candau V. (org.). *Didática, currículo e saberes escolares*. Rio de Janeiro: DP&A editora, 2000.

TUDELLA, A.; FERREIRA, C.; BERNARDO, C.; PIRES, F.; FONSECA, H.; SEGURADO, I.; VARANDAS, J. Dinâmica de uma aula com investigações. In: ABRANTES, P. (et al) - *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa. APM. 1999.

ZEICHNER, K. *A Formação reflexiva de professores: idéias e práticas*. -- 1993Lisboa: Educa, 1993.