FERNANDA DE OLIVEIRA SOARES TAXA

UNICAMP
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS E PROCESSO DE ABSTRAÇÃO EM CRIANÇAS NA 3ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

CAMPINAS-SP
2001

FERNANDA DE OLIVEIRA SOARES TAXA

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS E PROCESSO DE ABSTRAÇÃO EM CRIANÇAS NA 3ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Doutor em Educação, na área de concentração de Psicologia Educacional.

FACULDADE DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
CAMPINAS-SP
2001

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS E PROCESSO DE ABSTRAÇÃO EM CRIANÇAS NA 3ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Fernanda de Oliveira Soares Taxa
Orientadora: Profª. Drª. Lucila Diehl Tolaine Fini

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Fernanda de Oliveira Soares Taxa e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: _____ / _____ / _____
Assinatura do orientador:

____
Profª. Drª. Lucila Diehl Tolaine Fini

Comissão Julgadora:

____

____

____

____

CAMPINAS-SP
2001

AGRADECIMENTOS ESPECIAIS

À minha *família,* em especial, a meu pai e a minha mãe, Taxa e Neusa - companheiros fiéis – zelosos de mim, diante de minhas exigências e ausências na realização desta obra, acarretando mudanças em suas rotinas de vida, postos a meu serviço, porque doadores de si por amor, sabedores do sentido verdadeiro da vida e do valor que damos a cada tarefa a cumprir.

À minha *orientadora* – Lucila – fiel guardadora, incentivadora, serena sem deixar de ser exigente com o fazer científico e incansável guia de todos os nossos passos neste empreendimento.

À *Xus* – amiga das terras de Espanha - pela determinação, plena da paixão pelo ensino, destemida na produção de grandes mudanças.

À *Simone*, minha irmã, e ao *Cássio*, meu cunhado pela ajuda na digitação e pela presteza com a informática em momentos de grande necessidade, pela paciência e pelo sorriso amigo, mesmo quando do atendimento urgente e das exigências para me aprimorar, aprimorando meu próprio trabalho.

Às *escolas*, pelo acolhimento a mim oferecido, apesar dos desafios que enfrentam diariamente, elas que são reais promotoras do processo ensino-aprendizagem, de portas abertas à investigação, no enfrentamento constante da insatisfação do docente e do discente, e na busca da superação de suas dificuldades a fim de cumprir o papel que lhe cabe na formação científica, social e política do seu alunado.

Finalmente, agradeço, carinhosamente, ao meu sobrinho *Matheus* que, com a graça encantadora de uma criança, conseguiu proporcionar-me pausas neste trabalho para podermos brincar deliciosamente juntos.

AGRADECIMENTOS

Às Professoras Doutoras Maria Lúcia F. de Moro e Márcia Regina F. de Brito pelas correções e sugestões competentes dadas por ocasião do Exame de Qualificação, contribuindo para o crescimento deste trabalho. A estas professoras, o meu sincero agradecimento, sobretudo pela postura rigorosa, mas sempre agradável com que ambas conduzem o fazer científico.

Ao grupo de alunos e alunas – mestrandos e doutorandos da Psicologia da Educação Matemática que, durante nossos encontros como grupo de pesquisa, contribuíram significativamente para o avanço dos conhecimentos, como também para as relações pessoais fortalecidas durante nossa formação acadêmica.

À Professora Dolors Busquets, pelo acolhimento dado na Universidade de Barcelona, assim como pela participação nos projetos de pesquisa em escolas públicas da cidade e cursos de formação de professores a mim oportunizados.

Ao Professor Mestre - Marcos Antonio S. de Jesus - um bom amigo - pela paciência e ajuda oferecida com relação a uma melhor compreensão matemática nos momentos em que a grande ciência se tornou um desafio fundamental para a continuidade deste trabalho.

Ao Professor Doutor - Ricardo Primi - outro bom amigo - companheiro nas investigações, desperto nas pesquisas, e um valioso condutor da ciência estatística.

À CAPES, pelo incentivo oferecido, por meio da Bolsa Sandwich, criando-me condições para realizar os estudos necessários à busca de novos conhecimentos.

À Professora Maria Apparecida Fonseca de Almeida, pela correção ortográfica, pelas sugestões dadas, e, sobretudo, pelos agradáveis encontros ocorridos que ajudaram na redação final deste trabalho

DEDICATÓRIA

A Ciência, a ciência, a ciência...
Ah, como tudo é nulo e vão !
A pobreza da inteligência
Ante a riqueza da emoção !

Aquela mulher que trabalha
Como uma santa em sacrifício,
Com quanto esfôrço dado ralha !
Contra o pensar, que é o meu vício !

A ciência ! Como é pobre e nada !
Rico é o que alma dá e tem.

(Fernando Pessoa)

Este estudo é dedicado à escola pública brasileira, cujo espaço preserva certamente, ainda que de forma caótica ou longe do que a desejável, a prova efetiva do exercício de produção de conhecimentos e de autonomia, além da transformação dos alunos e professores que nela atuam.

SUMÁRIO

Páginas

LISTA DE FIGURAS

Páginas

LISTA DE TABELAS

Páginas

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo analisar o desempenho escolar em Matemática, os níveis de abstração em prova de múltiplos comuns, as operações combinatórias, pela perspectiva piagetiana, e a solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa. Foram investigados 132 sujeitos de 3ª série do Ensino Fundamental de escolas públicas de uma cidade do interior do Estado de São Paulo. Do total de sujeitos, foram constituídos dois subgrupos (n=32) da amostra em razão dos resultados obtidos quanto ao desempenho satisfatório e insatisfatório em Matemática. Os sujeitos dos dois subgrupos foram submetidos à avaliações quanto à noção de múltiplos comuns e à noção da idéia de acaso e probabilidade, assim como foram solicitados a solucionar problemas aritméticos. Os dados indicaram que os alunos que apresentam melhor desempenho em Matemática são os que também apresentam níveis mais elaborados de abstração e apresentam uma tendência de progresso em operações combinatórias. Os sujeitos que apresentaram melhor desempenho em Matemática valiam-se de um princípio compensatório, revelando um nível de abstração mais elaborado, mas ainda assim, pautados em suas ações, sem demonstrarem tomada de consciência do problema em questão. A correspondência termo a termo mostrou-se um esquema de ação importante para a análise das estratégias utilizadas pelas crianças, demonstrando em suas soluções, graus qualitativamente diferenciados quanto ao seu emprego para solucionar os problemas. Constatou-se que, na solução de problemas de produto cartesiano, mesmo sem se valer de uma estratégia mais elaborada como aquela que visasse a descoberta do sistema combinatório, as crianças conseguiam selecionar os dados pertinentes do problema e elaborar critérios que auxiliavam na busca do sistema combinatório.

ABSTRACT

This work has as its goal to analyze students' school performances in Mathematics, the abstraction level of common multiples, combinatory operations, through a Piagetian perspective, and the solution of arithmetical problems with a multiplicative structure. We investigated 132 subjects from the 3rd Grade of Basic Education in public schools in a city in the countryside of the state of São Paulo. Among the subjects, two subgroups were extracted (n=32) from the sample, due to the results achieved in satisfactory or insatisfactory performance in Mathematics. The subjects of the two subgroups were subject to assessments of the notion of common multiples and the idea of chance and probability, and they were also asked to solve arithmetical problems. The data indicates that the students who presented better performances in Mathematics are also the ones that present more elaborate levels of abstraction and a trend towards progress in combinatory operations. The subjects that had better performances in mathematics used a compensatory principle, revealing a level of abstraction that was more elaborate, but one that was still based on its actions, without showing na acquired conciousness of the problem in question. The term-to-term correspondence proved to be na important action scheme for the analysis of the strategies used by the children, showing in their solutions qualitatively differentiated levels as to their usage to solve the problems. It was made evident that, in the solution of problems with a Cartesian product, even without using a more elaborate strategy as the one that sought to discover the combinatory system, the children were able to select the pertinent data from the problem and establish criteria that helped in the search for the combinatory system.

RÉSUMÉ

Ce travail a eu comme objectif d'analyser le résultat scolaire en Mathématique, le niveau d'abstraction de communs multiples, les opérations combinatoires, par la perspective de Piaget, et la solution de problèmes arithmétiques de structure multiplicative. Des investigations ont été faites près de 132 élèves de la 3e. année primaire dans des écoles publiques d'une ville de province de l'Etat de São Paulo. Du total des sujets, deux sous-groupes ont été constitués (n=32) de l'échantillon en raison des résultats obtenus quant au résultat satisfaisant en Mathématique. Les sujets des deux sous-groupes ont été soumis à des évaluations de la notion de communs multiples et de la notion de l'idée de hasard et de probabilité, de même qu'ils ont été sollicités à solutionner des problèmes arithmétiques. Les données ont indiqué que les élèves qui montrent un meilleur résultat en Mathématique sont ceux qui montrent aussi des niveaux plus élaborés d'abstraction et qui montrent une tendance de progres dans des opérations combinatoires. Les sujets qui ont montré un meilleur résultat en Mathématique ont eu recours à un principe compensatoire, révélant un niveau d'abstraction plus élaboré, mais même ainsi, réglés dans leurs actions, sans démontrer une prise de conscience du problème en question. La correspondance terme-à-terme s'est démontrée être un schéma d'action important pour l'analyse des stratégies utilisées par les enfants, démontrant dans ses solutions, des degrés de qualité différentielle quant à leur emploi pour solutionner les problèmes. On a constaté que, dans la solution de problèmes de produit cartésien, même sans avoir recours à une stratégie plus élaborée comme celle qui vise la découverte du système combinatoire, les enfants ont réussi à sélectionner les données pertinentes du problème et à élaborer des critères qui aidaient dans la recherche du système combinatoire.

INTRODUÇÃO

A solução de problemas aritméticos no Ensino Fundamental tem sido considerada uma tarefa escolar importante na prática pedagógica dos professores. No campo da Matemática, da Linguagem e demais disciplinas, considera-se de grande importância a exploração de tal atividade, seja em nível verbal ou numérico, tendo em vista a criação de situações de desafio para a inteligência dos alunos.

As crianças constroem o conhecimento matemático gradualmente, seja valendo-se das atividades escolares que realiza, seja por meio da experiência cotidiana vivida fora do contexto escolar. É possível, no entanto, verificar que o desempenho em solução de problemas realizados por crianças nem sempre apresenta a qualidade que se espera da atividade escolar em sala de aula. Independente do nível de qualidade esperado, as crianças apresentam solução para os problemas matemáticos, sendo possível tomá-las como objeto de estudo e de investigação. As soluções apresentadas por essas crianças diante de problemas não devem jamais ser desprezadas pelos educadores. Os professores deveriam estar atentos tanto para o ponto de partida como para o de chegada dos alunos na análise de problemas, desde os mais simples de adição e subtração, como os que passam a envolver um nível de complexidade maior, como é o caso do raciocínio exigido pela multiplicação. Aquilo que as crianças são capazes de fazer e compreender em sala de aula, assim como aquilo que não conseguem e não entendem em uma dada situação-problema, deveriam ser elementos de análise dos educadores.

Na década de noventa, diversos programas de avaliação, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 1995); o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 1996) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM, 1998), foram implantados no Brasil visando detectar o nível de desempenho escolar dos alunos do Ensino Fundamental e Médio. Os resultados obtidos quanto ao desempenho em Matemática tem evidenciado que grande parte dos alunos de escolas públicas brasileiras não chegam a dominar os conhecimentos matemáticos básicos das séries iniciais do Ensino Fundamental. Os resultados sobre solução de problemas aritméticos, sobretudo evidenciaram um desempenho insatisfatório, com percentuais, em sua maioria, abaixo de 50%, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1997).

A prática constante de sistemas de avaliação indica pistas importantes sobre o desempenho, em particular, em Matemática dos alunos em processo de formação de conhecimento e revelam o grau de qualidade de educação do país, servindo de parâmetros para avaliações de maior porte, como é o caso do TIMS – Third International Maths and Science Study, elaborado pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), envolvendo alunos de 9, 13 e 17 anos de diversos países a respeito de seus conhecimentos em Matemática e Ciências (Revista Educação, 1998).

As noções físicas, matemáticas e biológicas são resultado efetivo de um complexo processo cognitivo no qual intervém a experiência cotidiana da criança, a maturação e as aprendizagens escolares. Nesse sentido, a experiência escolar corresponde somente a uma parte da elaboração de conhecimento dos sujeitos, mas, ao mesmo tempo, carrega em si um campo propício de relações e inter-conexões com os estudos da aquisição de conhecimentos (Vergnaud, 1994).

A aprendizagem da Matemática pelas crianças está diretamente ligada à compreensão do mundo que as rodeia. A ciência matemática é um aspecto importante na vida cotidiana do sujeito: como no caso de situações de partilhar objetos, ou naquele de utilização do sistema monetário, por exemplo. Diante da necessidade de apropriar-se das relações quantitativas que se estabelecem em uma situação de compra e venda, ou mesmo em situações de reconhecimento do espaço físico quando viajam ou atentam para questões de deslocamentos, velocidade e tempo, as crianças valem-se do pensamento lógico-matemático para interpretar a realidade.

Nunes e Bryant (1997) lembram que, na organização social de muitas comunidades, as pessoas expressam grande preocupação com as habilidades matemáticas da população, e que estas preocupações devem ser transportadas para a esfera da escola como o espaço legítimo de alunos e professores que lidam com essa forma de conhecimento. Os autores alertam para o fato de que o ensino da Matemática deverá estar fundamentado na idéia de tornar as crianças "alfabetizadas" e "numeralizadas" para a atualidade, de modo que dominem o sistema escrito lingüístico e numérico e o das operações aritméticas, segundo os conceitos da sua própria cultura. Apontam, sobretudo, para que tal aprendizagem reflita um tipo de sujeito dinâmico, pois quanto mais conseguirmos saber sobre como as crianças aprendem matemática e as implicações desta aprendizagem no pensamento, maior serão as possibilidades de os professores auxiliarem na formação de um sujeito ativo e transformador da realidade que o rodeia.

O aprendizado da ciência matemática deveria estar relacionado com uma real "alfabetização" nos aspectos quantitativos da realidade, possibilitando o desenvolvimento da capacidade de projetar e arquitetar soluções para os problemas que envolvem grandezas e medidas(CENP, 1988).

A ação e a reflexão da criança têm papel decisivo no processo educativo; são fatores recorrentes da sua atividade sobre a realidade. O conhecimento é construído pela própria criança, como assinala Piaget, com base na relação direta com as ações e operações que é capaz de fazer sobre a realidade, com o que é capaz de captar, compor e transformar progressivamente.

O papel do professor no entanto, também é de grande importância, uma vez que seu esforço e capacidade podem desencadear e potencializar a atividade do aluno, ajustando constantemente as modalidades de sua ação pedagógica. Não se pode desconsiderar que o professor deve organizar as atividades na sala de aula, selecionar material didático apropriado e coordenar todas as atividades.

O educador, porém, muitas vezes negligencia os processos mentais relacionados ao aprendizado de solução de problemas e, com base nisto, não procura explorá-los devidamente como uma tarefa enriquecedora do desenvolvimento cognitivo do sujeito. Além disso, muitas vezes, os professores tendem a não considerar que a Matemática esteja diretamente ligada ao desenvolvimento cognitivo das crianças e dos jovens em período de escolaridade, por meio das relações lógico-matemáticas que estabelecem, valorizando apenas indícios de aquisições, no sentido restrito, de um conteúdo matemático específico.

A atividade cognitiva das crianças e o processo ensino-aprendizagem constituem um terreno de investigação de especial importância e requer não só uma análise no campo dos conteúdos de ensino, como também o estudo dos processos gerais de aquisição do conhecimento, e em particular, o de solução de problemas.

Compreender que o desenvolvimento das estruturas lógicas está relacionado aos conteúdos da própria Matemática, como mostra Piaget et al. (1965); Piaget (1987); Piaget e García (1997) é de importância fundamental para a reflexão sobre a aprendizagem de sentido mais amplo e para a melhoria do ensino, vale dizer, de aprimoramento do raciocínio lógico do aluno e da modificação das estruturas do sujeito.

Seja nas formas de representação mais simples, seja nas mais sofisticadas, como é o caso, por exemplo, do emprego e da utilização dos sinais matemáticos, importa a todo momento o processo de abstração, aspecto imprescindível para a construção das operações aritméticas, as quais passam por níveis diferenciados de construção do sujeito no campo do desenvolvimento cognitivo como no campo das solicitações e das tarefas escolares.

Segundo a teoria piagetiana, a abstração supõe coordenação de formas diferenciadas de retirar informações dos objetos. A aquisição das operações aritméticas está diretamente ligada à construção lógica do sujeito, a qual necessita de uma qualidade de raciocínio cada vez avançada, como é o caso de procedimentos cada vez mais complexos. O avanço e a melhoria na qualidade das ações e coordenações reversíveis na criança deveriam ser considerados pelo professor ao ensinar conteúdos escolares.

A aplicação de um conteúdo específico como o da Matemática em tarefas de solução de problemas tem sido debatida constantemente. Uma "psicopedagogia das matemáticas", conforme assinalado por Brun (1979), deveria centrar seus esforços no estudo das estratégias utilizadas pelos alunos ao solucionar problemas aritméticos, como, por exemplo, o das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Vergnaud (1991) afirmou que nem todos os procedimentos usados pelas crianças conduziriam à solução dos problemas propostos pelo professor. Tais procedimentos, porém, são importantes para se compreender o que ela faz, e devem ser analisados. Podem-se identificar os erros na utilização de informações de dados do problema, saber o que as crianças desconhecem e o que desconsideram no processo de solução. O trabalho feito por Vergnaud indicou como analisar relações pertinentes bem como o processo de representação.

Na escola fundamental, tem se percebido ser uma conduta bastante freqüente o ensino da operação da multiplicação por meio de tarefas que envolvam algoritmos, exigindo como estratégia de solução a memorização da tabuada. Com freqüência, os professores tendem a considerar que os problemas verbais aritméticos são aprendidos com mais dificuldade pelas crianças do que as operações aritméticas, como acentuam Puig e Cerdán (1988), Baroody (1994). Parece haver um engano por parte dos professores ao esperar que as crianças dominem as operações antes de começarem a trabalhar os problemas aritméticos.

Em se tratando de problemas multiplicativos mais elementares, como os de somas sucessivas, duas aquisições fundamentais para a compreensão da multiplicação são apontadas por Granell (1983). Uma delas é compreender que é necessário considerar o operador multiplicativo (o número de conjuntos equivalentes de operações a realizar) e a outra é o de realizar a compensação exata entre o número de elementos de cada conjunto e o número de operações a efetuar.

Piaget e Inhelder (1975) indicaram que o pensamento proporcional, eixo importante sobre o desenvolvimento do conceito que envolve multiplicação é dominado somente por crianças a partir dos 10-11 anos, mas atentam para o fato de que as crianças mais novas já dão passos iniciais sobre idéias multiplicativas desde muito cedo.

O raciocínio multiplicativo não surge facilmente para nas crianças em fases da aprendizagem escolar. Na escola, os professores parecem não compreender suficientemente os caminhos que as crianças percorrem para entender multiplicações e divisões.

Muitos estudos sobre solução de problemas têm sido realizados, tais como aqueles enfocados por Carpenter (1986) sobre o conhecimento aritmético informal das crianças como formas anteriores à compreensão de expressões formais da Matemática. Citem-se outros estudos como os de Carpenter e Moser (1983) que investigaram o papel e a importância da estrutura semântica do problema; ou ainda, os trabalhos de De Corte e Verschaffel (1987) que investigaram o processo de construção da representação de problemas aritméticos de enunciado verbal. A performance dos alunos em diferentes tipos de problemas multiplicativos, por exemplo, também têm sido objeto de investigação de diversos autores (Greer, 1992; Vergnaud, 1994; Mulligan e Mitchelmore, 1997).

Na perspectiva da Psicologia Genética, diferentes estudos (Kamii e Livingston, 1995; Carretero, 1994; Moro, 1993-1998), sobre solução de problemas vêm procurando abordar as relações entre o conhecimento conceitual e os procedimentos dos sujeitos e suas implicações educacionais.

O desempenho na formulação e na solução de problemas também têm sido investigados entre crianças e jovens do Ensino Fundamental (Taxa, 1996; Busquets, 1995-1997; Brito et al.,1998; Fini e Taxa; 1998-2000).

Os trabalhos citados anteriormente têm evidenciado que os problemas aritméticos verbais estão longe de ser mera aplicação de fórmula matemática e supõem um processo de construção conceitual.

A elaboração de sucessivas reformas curriculares para o ensino da Matemática, o excesso de concepções que enfatizam o formalismo, a falta ou interpretação indevida de programas e métodos que contemplem a atividade intelectual e material das crianças, bem como sua experiência cotidiana ao apropriar-se de conteúdos matemáticos, têm legitimado cada vez mais alguns dos problemas quanto ao baixo desempenho dos alunos nas escolas brasileiras em Matemática.

Segundo Vergnaud (1991), seria necessário um vasto programa de investigações em Psicologia, Metodologia do Ensino e Didática para tentar analisar os problemas no ensino da Matemática, e, sobretudo, investir na formação de professores.

Na atualidade, pesquisas realizadas acerca de problemas de combinatória têm demonstrado que, mesmo crianças muito novas, ao serem submetidas a um processo de aprendizagem, têm avançado em suas concepções mesmo que, pela ótica do professor, problemas de produto cartesiano sejam considerados conteúdos matemáticos mais elaborados.

Com base nesse contexto, acredita-se na importância e na possibilidade de detectar relações entre o desempenho na solução de problemas multiplicativos, o processo de abstração de múltiplos comuns e operações combinatórias de crianças ingressantes da 3ª série do Ensino Fundamental. O estudo destas relações podem ser fundamentados na teoria de Piaget, tendo em vista que a solução de problemas aritméticos desencadeia a confrontação de diferentes esquemas, em diferentes níveis de elaboração, possibilitando a análise das antecipações e das abstrações em jogo.

A estrutura combinatória constitui um dos modelos lógico-matemáticos que caracterizam as operações formais na teoria piagetiana e desenvolve-se gradativamente ao longo do período operatório concreto.

Acredita-se que a compreensão da análise combinatória ocorreria paralelamente à experiência escolar. Poderia haver para tal uma contribuição do ensino nas séries iniciais, antes mesmo dos formalismos exigidos nas séries posteriores, mas desde que este conceito fosse melhor entendido como parte integrante e necessária à construção da estrutura multiplicativa no pensamento infantil, incluindo toda a classe de noções que envolvem o conceito de proporcionalidade, acaso e probabilidade.

As crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental já realizam problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas ou usualmente conhecidos como os de "somas repetidas" em sala de aula, assim como exercitam a operação da multiplicação por meio do algoritmo. No caso de problemas do tipo produto de medidas, porém, quais soluções em nível de desempenho, estratégias e justificativas são elaboradas pelas crianças ? Resultados dos acertos e erros, assim como das estratégias utilizadas pelas crianças em busca da solução dos problemas haveriam de nos fornecer pistas para analisar progressos qualitativamente diferenciados de solução de problemas de estrutura multiplicativa de natureza combinatória ? É possível identificar a existência de uma tendência quanto a categorias de estratégias utilizadas na solução dos problemas de produto cartesiano em crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental que iniciaram suas aprendizagens escolares com multiplicação ?

Estudos nesta direção necessitam de maior aprofundamento, tanto para verificar as relações entre o desempenho na operação da multiplicação e na solução de problemas envolvendo operações combinatórias, como, sobretudo, para identificar as estratégias utilizadas pelas crianças ao solucionarem tarefas como as investigadas neste estudo.

Este trabalho objetivou investigar o desempenho matemático, em especial, em tarefas de solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa ligadas ao produto cartesiano, as operações combinatórias e o nível de abstração em prova de múltiplos comuns em crianças ingressantes na 3ª série do Ensino Fundamental.

Em um primeiro capítulo, apresenta-se a proposta metodológica da pesquisa, assim como os respectivos critérios de análise dos dados.

O segundo capítulo trata dos constructos teóricos da abordagem psicogenética de Piaget sobre o processo de abstração. Aborda ainda a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e o conceito de esquema na perspectiva piagetiana.

O terceiro capítulo aborda a problemática acerca da solução de problemas no campo da Psicologia. Traz também a análise da literatura especializada quanto aos estudos e pesquisas sobre a aquisição operação da multiplicação em crianças das séries iniciais.

No quarto capítulo, focaliza-se a discussão atual a respeito dos sistemas de avaliação do desempenho escolar no âmbito educacional brasileiro na última década, assim como a análise de propostas curriculares e didáticas na área da Matemática.

O quinto capítulo destina-se à apresentação dos dados coletados, assim como à análise e à discussão dos mesmos.

Por fim, apresentaremos as considerações finais, tendo em vista a implicações psicopedagógicas a respeito da elaboração do pensamento multiplicativo na Matemática para as séries iniciais do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO I

METODOLOGIA DA PESQUISA

Este trabalho tratou da solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa na 3ª série do Ensino Fundamental.

A questão central do estudo foi a compreensão da operação da multiplicação por crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental na perspectiva piagetiana. O problema desta pesquisa, foi o seguinte: "*Há relações entre o desempenho escolar em Matemática de alunos ingressantes da 3ª série do Ensino Fundamental e o desempenho desses alunos em provas de abstração de múltiplos comuns, de operações combinatórias e de solução de problemas de produto cartesiano ?*

1.1 Hipótese

Crianças da 3ª série do Ensino Fundamental que obtêm escores mais altos no desempenho escolar em Matemática também apresentam, quando comparadas com aquelas que obtém escores menores, níveis mais elevados em a) prova de abstração e operações combinatórias e b) na solução de problemas de produto cartesiano apresentado em uma prova tipo lápis e papel.

1.2 Objetivos

Investigar o desempenho escolar em Matemática, a solução de problemas aritméticos de produto cartesiano, níveis de abstração envolvendo múltiplos comuns e as operações combinatórias subjacentes à construção da estrutura multiplicativa em alunos do Ensino Fundamental.

Decorrente do objetivo geral, objetivou-se, especificamente:

I) Verificar o desempenho dos sujeitos na prova de Matemática elaborada pelo "Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo"[1] (SARESP/96) para alunos no final do primeiro ciclo do Ensino Fundamental (ingressantes na 3ª série) ;

II) Avaliar, por meio de provas piagetianas, o nível dos sujeitos quanto ao processo de abstração (Piaget, 1977a) de múltiplos comuns e o raciocínio combinatório (Piaget e Inhelder, 1951);

III) Analisar o desempenho e as estratégias dos alunos em tarefas tipo lápis e papel na solução de problemas de estrutura multiplicativa que envolvam o produto cartesiano;

IV) Verificar a relação entre o desempenho em Matemática e o desempenho nas provas de abstração, processo das operações combinatórias e na solução de problemas de lápis e papel de produto cartesiano.

[1] O Sistema de Avaliação de Rendimento do Estado de São Paulo foi implantado em 1996 pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo – SEE/SP com o objetivo de avaliar o desempenho escolar dos alunos em Matemática, Língua Portuguesa, Ciências , História e Geografia no Ensino Fundamental.

A constatação da diferença significativa entre o desempenho em Matemática, o processo de abstração, as operações combinatórias e a solução de problemas de estrutura multiplicativa usando lápis e papel pode apresentar elementos mais precisos para se compreender a construção progressiva da estrutura multiplicativa no pensamento de crianças ingressantes na 3ª série do Ensino Fundamental ?

Vale ressaltar que a avaliação de tarefas de solução de problemas de produto cartesiano, utilizando lápis e papel, constitui-se em um dos objetivos centrais desta investigação, pois permite uma análise qualitativa dos dados quanto à categorização das estratégias utilizadas pelos alunos no curso das combinações. O número de variação das combinações e a verbalização feita para cada problema proposto também foram objeto de análise neste estudo.

1.3 Sujeitos

Nesta pesquisa, foram, em uma primeira etapa, entrevistadas e avaliadas, pela prova oficial do SARESP, 132 crianças que haviam concluído o 1º Ciclo do Ensino Fundamental, (1ª e 2ª séries). Dentre os 132 sujeitos que participaram da primeira etapa deste estudo, foi selecionado um subgrupo, que foi submetido à avaliação das provas piagetianas e a tarefas de solução de problemas aritméticos de produto cartesiano. Os alunos investigados eram ingressantes imediatos da 3ª série, e davam início ao 2º Ciclo do Ensino Fundamental da Rede Pública em uma cidade do interior do Estado de São Paulo. A coleta de dados foi realizada em quatro escolas públicas da referida cidade.

1.4 Procedimentos para a seleção das escolas e composição da amostra

Foi selecionada uma amostra aleatória (n=132) de alunos ingressantes na 3ª série do Ensino Fundamental de escolas da rede pública de uma cidade do interior do Estado de São Paulo. Optou-se pela amostragem estratificada proporcional, uma vez que este tipo de amostragem tende a assegurar a representatividade relacionada às propriedades que foram adotadas como critério para a estratificação: as variáveis – número de alunos por classe e gênero dos sujeitos que constituíram a amostra (Kerlinger, 1979; Toledo e Ovalle, 1985).

Obteve-se da Diretoria Regional de Ensino (D.E) a lista das 27 escolas estaduais de primeiro e segundo graus da referida cidade do interior do Estado de São Paulo. Foram, então, identificadas 19 escolas que contavam com séries iniciais e classes de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Excluindo-se as que tinham 2º grau, obteve-se um total de 10 escolas. Das 19 escolas acima referidas, algumas foram municipalizadas, ficando excluídas.

Para a constituição da amostra, inicialmente estabeleceu-se como critério de seleção a verificação das escolas que concentravam maior número de classes de 2ª série. Os alunos deveriam estar em final do 1º ciclo e serem ingressantes do 2º ciclo (3ª série) do Ensino Fundamental. Assim, restaram 6 dentre as 10 escolas, alvo da pesquisa. Selecionaram-se aquelas cujos alunos eram menos favorecidos economicamente, segundo informações da Diretoria Regional de Ensino (D.E). Os dados fornecidos pela D.E sugeriam que o perfil dos alunos menos favorecidos economicamente (baixa renda) não era dos matriculados nas escolas centrais e nas da zona rural daquele município.

Com base nesses critérios estabelecidos em conjunto com a D.E, quatro escolas foram selecionadas. Verificou-se o número total de alunos de todas as segundas séries, comparando-se a lista fornecida pela Diretoria de Ensino (D.E) com a lista de presença fornecida pelas escolas, uma vez que no início do período letivo há transferências e evasão de alunos.

Com base no número total dos alunos ingressantes das terceiras séries, calculou-se a taxa de alunos por escola, e, posteriormente, o número por classe de cada uma das terceiras séries das quatro escolas que, somados, constituiriam os 132 sujeitos da primeira etapa desta pesquisa.

O grupo das 132 crianças investigadas foi formado por sorteio aleatório[2], considerando-se a variável gênero no momento de constituição da amostra: variação de um por um para cada gênero: masculino e feminino.

Optou-se por selecionar sujeitos com idades entre oito anos e meio a dez anos e meio, aproximadamente, e que não tivessem tido mais que uma reprovação no decorrer das duas primeiras séries do Ensino Fundamental. Com esse critério, procurou-se neutralizar a

---

[2] Tabelas XXXIII[1] e XXXIII[2] contendo permutações ao acaso de 10 a 20 números; comumente utilizados na construção de arranjos experimentais (FISHER, R.A.; YATES, F., 1971).

possibilidade de incorporar uma amostra de sujeitos com possível tendência e comprometimento especial em relação a dificuldades de aprendizagem.

1.4.1 Composição de dois grupos

Após a seleção das escolas e dos 132 sujeitos, aplicou-se a prova realizada pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP/96).

Após aplicação da avaliação por meio da prova do SARESP/96 que visava aferir o desempenho em Matemática, foram identificadas e selecionadas 32 crianças para serem sujeitos da investigação do processo de abstração, das operações combinatórias e solução de problemas de estrutura multiplicativa.

Constituiu-se o Grupo A e Grupo B, com 16 crianças em cada um deles, respectivamente. No Grupo A foram selecionados os alunos que apresentaram escores mais elevados e no Grupo B, aqueles que tiveram os menores escores na prova do SARESP.

A seleção do número de alunos em cada um dos subgrupos da amostra deveu-se, do ponto de vista estatístico, selecionar, aproximadamente, 16% de sujeitos para os Grupos A e B, respectivamente. Este percentual representa, assim, o número de alunos dos dois subgrupos: aqueles que estão acima e aqueles que estão abaixo do desvio-padrão ao redor da média.

1.4.2 Procedimentos para coleta de dados e Materiais

A presente pesquisa foi organizada em quatro momentos distintos para a coleta de dados, os quais consistiram no seguinte:

a) Entrevista individual;
b) Aplicação em grupo da prova de Matemática do SARESP para avaliação do desempenho escolar;
c) Aplicação individual de provas piagetianas (múltiplos comuns e operações combinatórias) para avaliação dos níveis de classificação que avalia a abstração reflexiva (Piaget, 1977a; Piaget e Inhelder, 1951);

d) Aplicação individual de quatro problemas aritméticos de estrutura multiplicativa (três deles especificamente de análise combinatória (produto de medidas) e um único problema de isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1991).

1.4.3 Procedimento geral de coleta de dados

Após a constituição da amostra (n=132), combinou-se com as professoras e a direção das escolas que os alunos sorteados se afastariam da sala de aula durante o tempo necessário para a aplicação das atividades propostas: a) entrevista; b) prova do desempenho em Matemática (SARESP); c) avaliações do desenvolvimento cognitivo (provas piagetianas- processo de abstração e análise combinatória); e d) problemas aritméticos de estrutura multiplicativa.

As atividades de coleta de dados foram realizadas pela própria pesquisadora. Dentre as atividades, algumas deram-se em momentos particulares com cada criança e outras em atividades realizadas em pequenos grupos.

A entrevista, as provas piagetianas e as sessões para solução de problemas foram aplicadas individualmente. A aplicação da prova do SARESP ocorreu em grupos que variavam de 5 a 10 crianças, conforme o número de sujeitos sorteados em cada uma das 4 escolas, pois o número de sujeitos variava de escola para escola, de período (manhã ou tarde) e turmas, o que não possibilitou à pesquisadora reunir todos os sujeitos da pesquisa em um único momento para a aplicação da prova do SARESP.

Vale ressaltar que houve preocupação e cuidado por parte desta investigação em verificar primeiramente se as crianças já não haviam realizado a prova de Matemática do SARESP. Segundo informação de todas as escolas da própria D.E daquele município os alunos não tinham sido submetidos a nenhuma avaliação da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, como a prova aplicada pelo SARESP.

1.5 Entrevista Individual

Os sujeitos, primeiramente, participaram de uma entrevista com o apoio de um questionário semi-estruturado sobre suas opiniões e preferência em relação a conteúdos das matérias curriculares que vinham aprendendo. Em outro bloco do questionário, procurou-se obter informações quanto ao interesse e processo de solução de problemas aritméticos. Com base nas respostas das crianças, procurou-se identificar preferências de cada um por áreas curriculares e opiniões dos sujeitos sobre as tarefas que realizam na escola em relação à solução de problemas aritméticos.

Na entrevista também foi explicado à criança que havia sido escolhida que poderia optar por não participar do trabalho, caso não o desejasse. As entrevistas foram gravadas em fitas K7 e os dados obtidos, transcritos em protocolos para análise das respostas, assim como os resultados foram relacionados com a avaliação do desempenho escolar em Matemática.

1.6 Avaliação do Desempenho Escolar - A avaliação do SARESP

Em seguida à entrevista, foi aplicada a prova completa (Anexo 1) do "Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo" (SARESP/1996) para a identificação e verificação do desempenho escolar em Matemática.

Uma das questões discutidas na Psicologia em estudos sobre a inteligência humana é a definição sobre o desempenho escolar. Neste estudo, a avaliação do desempenho é entendida como uma medida do nível de capacidade do sujeito em uma dada circunstância, podendo ser substancialmente diferente daquilo que se espera em termos de uma apreensão e compreensão ideal em face de um conteúdo (Bee e Mitchell, 1986).

A prova de Matemática foi aplicada para os 132 alunos da pesquisa em pequenos grupos, mas realizada individualmente por cada criança, seguindo as normas e orientação do Sistema de Avaliação do Desempenho Escolar do Estado de São Paulo. Solicitou-se da criança a utilização de lápis e papel, conforme as orientações do SARESP.

A prova do SARESP foi aplicada integralmente. Nesta pesquisa, no entanto, somente os algoritmos e os problemas aritméticos foram considerados como objeto de análise com as demais tarefas realizadas.

Os exercícios com algoritmos, na prova do SARESP, referiam-se às quatro operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão, respectivamente, sendo, então, solicitado que as crianças armassem as operações e calculassem :

Adição	Subtração	Multiplicação	Divisão
a) 13 + 17 =	a) 17 – 13 =	a) 32 x 2 =	a) 21 : 3 =
b) 307 + 62=	b)286– 154=	b) 42 x 10 =	b) 35 : 1 =
c) 252 + 50=	c) 124 – 16 =	c) 25 x 4 =	c) 264 : 2 =

Complete a parcela que está faltando nesta adição
_______ + 105 = 318

Os problemas aritméticos da prova do SARESP foram os seguintes:

Problema 4
Num viveiro de aves estão 44 canários, 20 periquitos e 8 araras.No viveiro estão... aves.
Problema 10
Uma pista de Kart tem 3 quilômetros de extensão. Em uma corrida de 8 voltas quantos quilômetros os karts devem percorrer para completar a prova ?
Problema 11
Maria saiu de sua casa para ir à padaria, passando pela banca de jornais. Calcule a distância que ela percorreu até chegar à padaria. Escreva a operação e o resultado do problema no espaço abaixo.
Problema 12
Esta gaveta tem 6 divisões. Em cada divisão tem uma dúzia de parafusos. Quantos parafusos estão guardados na gaveta ?
Problema 18
Ana tem 20 palitos de sorvete. Colando 5 palitos numa folha de papel, ela fez uma casa como esta. Quantas casas iguais a esta Ana pode fazer com os palitos da caixa ?
Problema 19
O time de futebol da escola tem 27 alunos. Faltaram ao treino de ontem 9 alunos. Quantos alunos estiveram no treino de ontem ?
Problema 21
Marcelo chegou na casa da avó dele às 9 horas e saiu às 11 horas. Quantas horas ele ficou na casa da avó ?

1.7 Provas Piagetianas

As crianças foram submetidas a duas provas piagetianas: a do processo de abstração, múltiplos comuns (Piaget, 1977a) e a da idéia de acaso, operações combinatórias (Piaget e Inhelder, 1951), em sessões individuais e diferenciadas de aplicação, segundo as orientações do método clínico piagetiano. Ambas as provas permitem uma análise mais específica voltada ao processo de construção da estrutura multiplicativa.

A aplicação das duas provas ocorreu logo após a correção e seleção dos alunos que compuseram os grupos A e B: maiores e menores escores quanto ao desempenho em Matemática. Participaram de ambas as provas sobre desenvolvimento cognitivo somente as crianças (n=32) que compuseram o Grupo A e B.

1.7.1 Abstração Reflexionante: múltiplos comuns

Selecionou-se uma tarefa da obra referente aos estudos de Piaget (1977) sobre abstração reflexionante, no caso, ao processo de abstração das relações lógico-aritméticas. Optou-se por aplicar a prova sobre a construção de múltiplos comuns.

A prova de múltiplos comuns foi realizada em uma única sessão individual com cada um dos alunos do grupo A e B. Foram utilizadas fichas quadradas de papelão (2cm x 2cm), de duas cores diferentes, mas formando duas coleções de quantidades iguais de fichas para cada uma. A tarefa da pesquisadora foi a de solicitar que a criança fizesse duas coleções ou grupos iguais de fichas. Para compor a coleção das fichas amarelas, o sujeito deveria pegar as fichas sempre de duas em duas fichas, e para as azuis sempre de três em três. A indicação dada à criança foi a de que formasse uma coleção para as amarelas e outra para as fichas azuis e que, cada vez que pegasse as fichas amarelas, deveria subseqüentemente pegar as azuis.

Para a formação das coleções, trabalhou-se com três quantidades diferentes. Inicialmente, davam-se 24 fichas para formar cada coleção (fichas amarelas e fichas azuis); em seguida, após a aplicação segundo o andamento da prova, aumentava-se a quantidade para 36 fichas e, finalmente, questionava-se sobre a formação dos grupos com um total de 12 fichas em cada um dos grupos.

O acréscimo e diminuição na quantidade de fichas objetivou analisar com maior precisão o nível em que se encontrava o sujeito, seguindo os parâmetros da análise de Piaget (1980) e com isso diminuir a possibilidade de incorreção quanto à classificação dos níveis. A variação na quantidade de fichas (n=24; n= 36; n=12) também objetivou constatar se as crianças apresentavam níveis de classificação diferenciados mediante a mudança na quantidade de fichas.

Critérios de classificação –

Estágio I – Nível IA e IB

Nível IA - A criança apresenta dificuldade para compreender as questões propostas para o início da prova. Não há diferenciação entre a adição e a multiplicação na medida em que ela não distingue que as fichas não estão somente reunidas umas com as outras (conjunto A e B). A situação implica compreender o número de vezes nas quais estas quantidades se reúnem. No entanto, a criança procura estabelecer a igualdade de fichas em ambos os conjuntos.

Nível IB - A criança ainda apresenta reações de incompreensão diante da situação dos dois grupos que se compensam com as quantidades postas em um grupo 2 a 2 e no outro, 3 a 3. No entanto, já demonstra perceber o número de vezes que apanha de 2 em 2 fichas e de 3 em 3 fichas.

Nível IIA - Há um avanço com relação ao nível precedente, mas as crianças o conseguem por meio de tateios sucessivos. Há clara explicitação de que precisam mais fichas em razão das viagens realizadas em uma das coleções. Neste nível, aparece o princípio de compensação, como, por exemplo, anunciar que serão necessários tantos montes a mais (viagens) quanto menores forem as quantidades de fichas de cada coleção. Aqui, a abstração diz respeito aos resultados sem consciência da operação "n" vezes.

Nível IIB - A criança consegue resolver o problema das compensações logo de início, demonstrando que haverá sempre igual quantidade entre ambos os conjuntos, mas que a ficha a mais de 3 em relação a 2 fará sempre compensar a ausência de 2 a 2 fichas. Neste nível, a criança está tateando para chegar a perceber o sistema de compensação em jogo.

Estágio III - A criança resolve o problema evitando compensações por tentativas e verbaliza, de início, a relação entre as unidades de ambos os conjuntos.

1.7.2 Análise Combinatória

Selecionou-se uma tarefa referente aos estudos de Piaget e Inhelder (1951) sobre origem da idéia de acaso e da probabilidade. Para tanto, optou-se por realizar a prova sobre o desenvolvimento das operações de combinação.

A prova das operações combinatórias foi realizada logo após a prova de múltiplos comuns (processo de abstração) em sessões individuais com os 32 sujeitos dos grupos A e B.

Foram utilizadas figuras de crianças, recortadas em papelão e de quatro cores diferentes: azul, vermelho, verde e amarelo.

Nessa prova, as crianças deviam mostrar a tarefa cumprida e justificar as operações feitas, valendo-se do material, as várias maneiras pelas quais quatro crianças poderiam ir ao parque juntas sempre de duas a duas. A mesma operação foi solicitada, pedindo-se que elas combinassem as idas das crianças ao parque sempre de três em três.

Critérios de classificação –

Estágio I – A criança não encontra todas as combinações possíveis, apresentando dificuldades em compreender que os mesmos elementos podem ser combinados de diferentes maneiras entre si. O sujeito pode chegar, por descoberta empírica ou por ensaio e erro, a algumas das combinações possíveis, mas sem previsão sistemática dos pares que deverá formar.

Estágio II - A criança encontra as combinações possíveis por ensaio e erro, sabendo que esgotou todas as possibilidades. O sujeito demonstra buscar um sistema combinatório e faz probabilidades acerca de um início de quantificação sistemática.

Estágio III – A criança consegue fazer todas as combinações possíveis e de maneira sistemática, desde o início, entre os elementos da situação-problema. Neste estágio, ela demonstra durante a solução do problema, combinatórias metódicas e completas do ponto de vista da quantificação exata.

Ambas as provas: a de abstração e a de análise combinatória foram realizadas individualmente, gravadas em vídeo e transcritas na sua íntegra em protocolos para análise posterior.

1.8 Problemas aritméticos de Estrutura Multiplicativa

Após a aplicação das provas piagetianas, as crianças dos grupos A e B foram solicitadas a solucionar problemas envolvendo a estrutura multiplicativa. Para tal, considerou-se a classificação de Vergnaud (1991) sobre problemas do tipo produto de medidas.

Utilizaram-se quatro problemas de estrutura multiplicativa, dos quais três (Problema 1, 2 e 3) eram problemas do tipo produto de medidas e um problema (4) do tipo isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1991). Os problemas foram apresentados aos sujeitos, por escrito.

Os problemas apresentados para as crianças foram os seguintes:

Problema 1
Maria brinca todas as tardes e gosta de se vestir de maneiras diferentes. Maria tem 4 camisas e 3 bermudas. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

Problema 2
Mamãe foi ao supermercado e comprou colheres. O vendedor colocou em 4 saquinhos. Ele colocou 4 colheres em cada saquinho. Quantas colheres mamãe comprou ao todo?

Problema 3
Uma sala de aula tem 2 portas de entrada e 3 portas de vidro de saída para o pátio. De quantas maneiras diferentes você pode sair dessa sala utilizando as portas de entrada e de saída?

Problema 4
Em uma festa da escola,3 meninos e 3 meninas querem dançar. Quantos pares se pode fazer para dançar entre os 3 meninos e as 3 meninas ?

Cada um dos problemas foi escrito numa folha de papel com letras de forma e espaço em branco para a solução. Foram deixadas outras folhas de papel em branco, caso a criança julgasse necessário utilizá-las para dar continuidade à solução.

A pesquisadora entrevistou cada sujeito individualmente, investigando a solução dos problemas, seguindo orientações iguais para todos os sujeitos:

a) a criança sorteava a ordem dos problemas e lia cada um deles por vez para iniciar o processo de solução. O problema era lido duas vezes pela própria criança; e, caso fosse constatado que a criança não conseguia ler, a experimentadora fazia a leitura do problema;

b) após a leitura feita pela criança, a experimentadora lhe solicitava que descobrisse o resultado, que respondesse a pergunta central do problema, indicando-lhe que podia utilizar lápis e papel e a representação, por meio de números ou desenhos para auxiliar na resolução. Caso a criança quisesse dar uma resposta inicial, o pesquisador registrava a resposta dada.

Durante o processo, apresentavam-se perguntas para o sujeito, procurando esclarecer as respostas, sem apontar erros ou acertos.

A coleta de dados em relação aos problemas aritméticos de estrutura multiplicativa ocorreu em duas sessões. Na primeira, aplicaram-se dois problemas. O problema 4, de isomorfismo de medidas, foi aplicado com o objetivo de neutralizar um possível efeito de aprendizagem em relação aos problemas de análise combinatória trabalhados nesta pesquisa. Na segunda sessão, aplicaram-se os dois outros problemas restantes, com o que encerra-se o processo de coleta de dados da pesquisa.

Critérios de classificação –

a) Identificar o *número total de combinações* possíveis para cada um dos problemas, indicando se as crianças acertaram ou erraram os problemas;
b) Identificar o *número de combinações* que cada criança realizou. Neste caso, interessava-nos, conforme descrito anteriormente, analisar o número de combinações que a criança conseguiu realizar mediante cada problema de análise combinatória com lápis e papel;
c) Identificar *categorias de estratégias* durante a solução dos problemas segundo o esquema de correspondência termo a termo. Tais estratégias de solução por meio do esquema de correspondência termo a termo foi categorizado segundo os estudos de Piaget e Szeminska (1975).

1.9 Análise de dados

Primeiramente, foi realizada a correção e pontuação dos alunos na prova de Matemática. Foram utilizados os mesmos critérios indicados pelo manual de correção das provas do Sistema de Avaliação do Desempenho Escolar do Estado de São Paulo, ou seja, foram computados acertos ou erros.

A prova do processo de abstração e das operações combinatórias foram analisadas e computadas segundo critérios clássicos de Piaget e Inhelder (1951) e Piaget (1977a). Para a prova de abstração, cada nível (IA,IB, IIA, IIB,III) recebeu um valor ordinal, tal como se caracterizam os próprios níveis tendo em vista o progresso no que se refere à abstração da noção de múltiplo comum. Da mesma forma, pontuaram-se valores um, dois e três para os níveis de classificação (estágio I, II,II) da prova das operações combinatórias. Em seguida, as pontuações atribuídas para a prova de abstração e a das operações combinatórias foram correlacionadas com os resultados obtidos nas variáveis: desempenho escolar em Matemática e solução de problemas de estrutura multiplicativa.

Os resultados obtidos nas tarefas de solução de problemas de estrutura multiplicativa utilizando lápis e papel foram registrados detalhadamente em protocolos e analisados primeiramente quanto a acertos e erros. Em seguida, foram categorizadas as respostas em razão dos tipos de estratégias empregadas durante a elaboração dos pares ordenados possíveis para cada um dos problemas.

Os resultados obtidos para as variáveis: desempenho escolar em Matemática, processo de abstração, operações combinatórias e solução de problemas de estrutura multiplicativa foram analisados com apoio no quadro de referência da análise estatística.

Foi utilizada a análise estatística descritiva e correlacional. Realizou-se a análise da proporção de acertos de cada um dos itens em cada uma das provas citadas, assim como da consistência interna dos itens.

Por fim, foram analisadas qualitativamente os resultados obtidos em relação à elaboração das categorias das estratégias das crianças nas tarefas de solução de problemas de estrutura multiplicativa do tipo lápis e papel.

CAPÍTULO II

O PROCESSO DE ABSTRAÇÃO NA TEORIA DE J. PIAGET E OS CAMPOS CONCEITUAIS NA TEORIA DE G. VERGNAUD

As pesquisas desenvolvidas por Jean Piaget e seus colaboradores têm, sem dúvida, uma importância especial, quando se trata de analisar o problema da aquisição de conhecimentos pelo ser humano. A obra do autor tem se mostrado uma inegável contribuição para a compreensão das estruturas da inteligência e dos processos do desenvolvimento cognitivo, tanto no que se refere à psicologia como à educação.

As pesquisas piagetianas mostram o desenvolvimento da inteligência como um processo construtivo de um sujeito ativo em suas interações com o meio-ambiente. A inteligência não é algo dado ao nascermos, mas desenvolve-se gradualmente como resultado da interação de fatores internos e externos ao indivíduo.

O ser humano é continuamente desafiado pelo meio-ambiente, procurando compreender, explicar e organizar os dados de realidade, segundo o leque de suas experiências e possibilidades cognitivas em jogo.

Piaget (1976) assinala que a construção do conhecimento está diretamente ligada ao processo de abstração do indivíduo e que ele constitui um dos aspectos mais gerais do processo de equilibração. O referido autor destaca o processo de equilibração majorante como o problema central do desenvolvimento como forma de reequilibração que conduz a uma melhor adaptação. O processo de equilibração é entendido por Piaget como o processo central para explicar o desenvolvimento e constitui fator necessário para conciliar harmonicamente os demais fatores do desenvolvimento (maturação, interação social, experiência física e lógico-matemática). A equilibração, nesse quadro, é entendida como um sistema de auto-regulações, seqüência de compensações ativas do sujeito aos desafios do meio ou perturbações exteriores.

Com base na interação sujeito-objeto e no processo de equilibração majorante é que o sujeito constrói o conhecimento. É a equilibração que permite ao sujeito construir suas estruturas cognitivas, constituindo sistemas pelos quais ele interpreta a realidade.

Os trabalhos mais recentes de Piaget, como diz Domingues de Castro (1998) tratam do funcionamento mental, da explicação das relações organismo e meio-ambiente, pautada por regulações regidas pelo processo de equilibração.

Idéias como a de equilibração e do próprio conceito de reversibilidade que tem uma marca definitiva no pensamento das crianças de 7-8 anos são valorizadas dentro da teoria piagetiana como mecanismos explicativos para o desenvolvimento cognitivo. Sabe-se, no entanto, que os estudos de Piaget a respeito do processo de abstração reflexionante mostrou-se, talvez, a mais plausível para explicar o desenvolvimento cognitivo.

2.1 O Processo de Abstração

Para a teoria do desenvolvimento de Piaget, a ação é matéria-prima para a aquisição do conhecimento: na interação com os objetos, o sujeito se transforma e constrói conhecimentos. Resultados de pesquisas, na perspectiva da psicologia genética de Piaget, enfocam e esclarecem a natureza do conhecimento lógico-matemático, distinguindo-o do conhecimento físico e do conhecimento social. Piaget faz uma distinção quanto aos tipos de experiências do sujeito, como a experiência física e a lógico-matemática.

Com isso, a experiência cumpre estes dois papéis distintos e complementares: agir sobre um objeto, distinguindo suas propriedades, o que denominamos de experiência física. Distinguir as propriedades dos objetos, no entanto, não corresponde a uma atividade da mesma natureza do descobrimento de propriedades em razão da ação do sujeito no decorrer de sua interação com o objeto. A experiência denominada lógico-matemática caracteriza-se pelas coordenações das ações do sujeito, e abstração de conhecimentos a partir delas. O conhecimento nesse último caso é abstraído da ação do sujeito sobre os objetos e não diretamente dos objetos.

As atividades realizadas pelo sujeito, seja no plano da ação material, seja no plano da atividade mental, implicam que se extraiam características do objeto, vale dizer, daquilo que foi tirado de um nível inferior de atividade e transferido a um plano superior chegando a novas composições ou generalizações.

Observa-se, no entanto, que, ao falarmos de ação, o conceito de atividade na teoria piagetiana tem sido interpretado, muitas vezes, de forma equivocada, o que tem constituído um aspecto dificultador na interpretação da teoria para a prática educativa. Destacamos, então, tal como já afirmado por Piaget (1980), que um sentido do conceito de atividade na teoria psicogenética encontra-se em relação ao processo de abstração reflexionante.

Conforme lembrado por Gallagher (1978), o fato de fazer as crianças agirem sobre os objetos por meio de material de manipulação é uma maneira indevida de aproximar a teoria às aprendizagens escolares, assim como é indevida a forma de propaganda do marco teórico piagetiano.

A denominação de termos como "ação", "atividade" ou mesmo "agir sobre" é freqüente nos trabalhos de Piaget e a idéia subjacente a este respeito seria a de que para conhecer, o sujeito tem que agir sobre os objetos, para, então, transformá-los. É preciso que, ao agir sobre os objetos, o sujeito valha-se de ações ou atividades de deslocamento, conexão, combinação, montagem, desmanche, entre outras para abstrair as propriedades a serem abstraídas.

Cabe compreender o caráter essencial da teoria de Piaget que parte de uma análise epistemológica. O referido autor apresenta um quadro teórico de aquisição do conhecimento enfatizando a construção do sujeito e não a apropriação do conhecimento como cópia dos objetos da realidade que o rodeia.

Não se trata, então, de discutir a importância de materiais de manipulação na sala de aula para o favorecimento de aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas, sim, de discutir o quadro explicativo dos mecanismos de aprendizagem relacionados ao significado da atividade do sujeito.

Domingues de Castro (1996) lembra o alcance pedagógico de se compreender o processo de abstração, considerando-se em relação à aprendizagem. Essa aproximação com a aprendizagem indica-nos que o processo de abstração está presente tanto no caso de impulsionar o sujeito à incorporação de conteúdos - aprendizagem strictu sensu- como atuar estruturalmente no sentido de provocar a construção de esquemas - aprendizagem latu sensu - (Domingues de Castro,1996, p.23).

O conceito de atividade implica necessariamente retornar aos fundamentos biológicos da própria teoria. Os trabalhos de Piaget (1973) nas relações entre regulações biológicas e processos cognitivos são um entrelaçamento de suas idéias em relação ao desenvolvimento das estruturas cognitivas do sujeito e da própria necessidade de auto-regulação biológica dos seres vivos.

A invenção ou a descoberta, para o autor, derivam da ação do sujeito. A experiência física, porém, não é a única fonte do conhecimento, tampouco toda e qualquer ação nos conduz ao conhecimento. Ela é pois, condição necessária, mas não suficiente do conhecimento. Assim, nas ações e operações do sujeito em interação com o mundo está implícito diretamente o processo ou mecanismo funcional da abstração reflexionante.

Podemos dizer que o processo de abstração está ligado a um deslocamento realizado pelo sujeito, a fim de que, por meio da abstração, ele seja capaz de isolar e generalizar certos aspectos de uma dada realidade.

O sujeito conhece na medida em que pode extrair conhecimento dos observáveis e não-observáveis. Entende-se por observáveis os objetos ou ações do sujeito em suas características materiais, ao passo que os não-observáveis referem-se às coordenações das ações. Podem-se observar algumas ações realizadas pelas crianças ao se depararem com uma situação ou mesmo ao tentarem fazer a "leitura" de um objeto. Mas não se pode ver a coordenação realizada mentalmente que a criança fez ao apropriar-se do objeto ou ao generalizar uma situação para uma semelhante àquela em destaque.

Tomemos a noção "talher", conforme exemplificado por Kesselring (1990). A característica a ele atribuída não é uma qualidade que os objetos (colher de plástico, garfo de prata, faca com cabo de madeira) possuem como tais, mas sim imposta aos próprios objetos por meio da ação humana.

Tomemos ainda, como o faz o referido autor, o exemplo da laranja: podemos tocá-la, olhá-la, cheirá-la. Podemos ainda percebê-la como um objeto que tem certa forma, tamanho, peso, cheiro e cor, tal como denominamos: cor-de-laranja. Dessa forma, descola-se, por abstração, a forma, a cor e demais atributos deste objeto. Sabemos, no entanto, que a cor-de-laranja é encontrada em muitos outros objetos.

Kesselring (1990) conclui que, ao deslocarmos ou abstrairmos a cor de uma laranja, detemo-nos no caráter individual, como é o caso da cor apenas da laranja em questão. Mas vamos além disso, pois é possível reconhecer esta mesma cor em outros objetos; e isto se dá graças ao fato de podermos generalizar a cor individual da laranja. Conquistamos, assim, por abstração, propriedades dos objetos, como a forma, a cor, o peso entre outras.

Como destacado por Moreno (1988), quando diferenciamos a cor de um objeto, estamos separando esta qualidade das demais. Assim, ao abstrair a cor implica, simultaneamente, individualizar as qualidades que foram deixadas de lado, ou seja, aquelas que deixamos para reter a propriedade: cor . É na contraposição de uma propriedade a outras que nos possibilita abstrair uma propriedade como tal e de forma que caracterize o objeto analisado.

Desde muito cedo as crianças são capazes de realizar estas contraposições no sentido de "separar" uma propriedade de um único objeto, mas quando se trata de fazer o mesmo para um conjunto de objetos, observamos que o processo se complica consideravelmente.

Uma forma elementar de abstrair os dados de uma determinada realidade ou objeto dá-se por meio da abstração empírica; e consiste em o sujeito retirar informações dos objetos segundo suas propriedades ou seus caracteres materiais.

Conforme assinalado por Piaget (1980), a abstração empírica apóia-se nos objetos físicos ou nos aspectos materiais da própria ação. O autor, no entanto, salienta que, ainda sob suas formas mais elementares, a abstração empírica não consiste em "leituras" diretas da realidade. Destaca-se aqui que, ao abstrairmos algo de um dado objeto, como o seu peso, a sua cor, é preciso que o sujeito valha-se de instrumentos de assimilação e esteja baseado nos esquemas sensório-motores ou conceituais. Estes esquemas não são fornecidos a priori pelo objeto, mas, sim, construídos dialeticamente no plano da ação material e mental pelo próprio sujeito.

Piaget (1977c) assinala que *" ... por mais necessários que sejam estes esquemas, a título experimental, à abstração empírica, ela não se refere a eles, mas busca atingir o dado que lhe é exterior, isto é,* *visa a um conteúdo em que os esquemas se limitam a enquadrar formas que possibilitarão captar tal conteúdo." (Piaget, 1977c, p. 5)*

Becker (1993) exemplifica o processo de abstração, deste modo:

> *"...ouve-se a criança chamando um cavalo de "au-au", mas não se vê a coordenação que a levou a generalizar para o cavalo o nome que atribuía usualmente ao cachorro... ou como acontece quando uma criança de 3 anos enfileira, sem plano prévio, alguns carrinhos e, ao terminar, chama a este conjunto de "fómula um" ... aquilo que a criança retirou não está no objeto, no observável, mas nas relações entre os objetos (carrinhos) ... a criança retirou dos objetos o que ela colocou neles e não o que lhes é próprio... ou quando uma criança operatória concreta ... [apreende na ação concreta que 3 + 3 + 3 = 3 x 3 ; ou que (9 – 3) – 3 = 9: 3]..." (Becker,1993, p. 43).*

Estudando jogos como instrumentos pedagógicos interessantes para desencadear avanços nas estruturas de crianças com dificuldade de aprendizagem, Zaia (1996) lembra-nos que o processo de abstração é responsável pela passagem de um estado inicial de conhecimento para outros mais evoluídos, os quais estão ligados aos aspectos da equilibração. A autora completa, a este respeito, dizendo o seguinte:

> *" ... a abstração empírica de determinadas propriedades assume grande importância para participar de determinados jogos. É o caso da altura do objeto para "queda dos dominós" ... Mas ela constitui apenas uma pequena parte das abstrações provocadas pelo jogo; as antecipações, o levantamento de hipóteses, o planejamento de estratégias, dependem essencialmente da abstração reflexiva... esta projeção de um nível para o outro não basta para a construção de uma nova totalidade, sendo necessária a reflexão para reorganizar e reconstruir os elementos transpostos, coordenando-os e integrando-os aos que já pertenciam ao novo nível" (Zaia,1996,p.25).*

Na medida em que a criança passa a enriquecer o objeto e o modifica em razão de quadros mais amplos que aqueles obtidos em uma abstração empírica, pode-se dizer que esta progressão resulta em uma abstração pseudo-empírica. É muito comum observar em níveis representativos como o pré-operatório ou mesmo no nível das operações concretas que a criança consegue efetuar suas construções segundo resultados constatáveis, o que leva o sujeito a acrescentar novos dados ao objeto por meio de atividade mental, mas ainda apoiado nas propriedades constatadas.

As crianças dos níveis pré-operatório e operatório concreto valem-se da necessidade de apoiar-se dos resultados constatáveis da ação, levando-as à realização de abstrações pseudo-empíricas. A leitura do objeto em dada situação permite que a criança o enriqueça com determinadas propriedades; informações estas que não existiam antes da ação da criança sobre aquele objeto. Os novos dados introduzidos são produto da atividade da criança e, desse modo, a antecipação de possibilidades, o planejamento e a elaboração de estratégias são aspectos importantes como formas de enriquecimento de uma situação de jogo.

Um exemplo claro deste tipo de abstração (pseudo-empírica) é observado na construção da seriação, quando a criança consegue montar uma série cuja atividade foi realizada predominantemente pela mera manipulação das varas ou pelas tateios ocorridos em função do próprio material.

Apoiada sobre a abstração empírica e pseudo-empírica, a abstração reflexionante se constitui em todos os planos de atividades cognitivas do sujeito, seja no nível de coordenações de ações, de operações, de esquemas ou de estruturas. Com base na abstração reflexionante podem-se retirar diversos caracteres e utilizá-los para novas adaptações e, conseqüentemente, para enfrentar novos problemas.

Piaget (1980) descreve dois sentidos complementares que permeiam a abstração reflexionante. O primeiro deles refere-se ao fato de que se pode transpor a um plano superior o que foi retirado no patamar que o precedeu, como é o caso de conceituar uma ação. A este evento específico de uma abstração reflexionante, Piaget denomina de "reflexionamento". Um segundo sentido para a abstração reflexionante é a compreensão de que deve haver reconstrução sobre o novo plano daquilo que foi retirado no plano de partida; e designado pelo termo "reflexão" ou "abstração reflexiva" .

A análise de Becker (1993) sobre a abstração reflexionante lembra que:

" ... não há um sujeito prévio às ações como também não há um objeto prévio às ações. Sujeito e objeto se determinam mutuamente, sem sacrifício de suas identidades próprias, ao contrário, com

enriquecimento progressivo das mesmas, se as condições objetivas não impedirem o desenrolar do processo." (Becker, 1993,p.46)

Conforme assinalado por Brenelli (1993), reiterando os escritos de Piaget, a abstração reflexionante envolve dois processos solidários: o "réfléchissement" entendido como a "interiorização de uma ação numa representação conceptualizada" e o "réfléchie" que *"... reorganiza os elementos retirados do plano anterior, compondo-os com os que já se encontravam neste novo plano, resultando em novas combinações, que podem direcionar à construção de operações sobre as operações"* (Brenelli, 1993,p.26).

A abstração reflexiva é um mecanismo funcional relacionado com a conceitualização e tomada de consciência em face da construção de conhecimentos que se constitui pelo sujeito. A soma é um bom exemplo do processo de abstração reflexiva diretamente relacionada com o pensamento matemático. Desde cedo, as crianças mais novas sabem reunir objetos, e, no plano da ação, executar a soma destes objetos. Somente, porém, no nível da conceitualização são elas capazes de abstrair a construção de coleções distinguindo as totalidades como tais dos seus elementos. Mais adiante são capazes de reunir coleções com distinção da totalidade de conjunto e as subcoleções. No caso do exemplo da soma, a progressão de cada uma destas condutas é abstraída das ações precedentes e não dos objetos como tais, manipulados pelas ações.

Nesse sentido, podemos falar de abstração, por exemplo, em outra situação como o da aquisição do conceito de conjunto por parte do sujeito como um conceito criado por abstração com base na ação de juntar coisas. A noção de conjunto é, então, conquistada não necessariamente e apenas mediante uma ação física, mas, sim, por meio da ação mental das relações criadas pelo sujeito.

Num plano superior, o sujeito é capaz de realizar abstrações reflexivas, em que estas ações são reorganizadas e coordenadas, numa tarefa de reflexão da criança que a leva à tomada de consciência daquelas ações. Em nível de abstração reflexiva, a reflexão passa a ser obra do pensamento do sujeito, sob a forma de construção retroativa tornando-se uma reflexão sobre a reflexão.

Enfrentar novos desafios pode fazer surgir novas formas ou esquemas de ações, as quais não são necessariamente conhecidas pelo sujeito. Sabe-se, no entanto, que a abstração reflexiva poderá tornar conscientes ao sujeito tais esquemas.

Piaget (1977) assinala então, sobre a criação de novos patamares de reflexionamentos e completa:

"... caracterizados por "reflexões" sobre as reflexões precedentes e chegando finalmente, a vários graus de "meta-reflexão" ou de pensamento reflexivo (réflexive), permitindo ao sujeito encontrar as razões da conexão, até então, simplesmente constatadas (...) por exemplo, refletir sobre a adição, depois de, simplesmente, dela se ter servido, transforma o processo aditivo em novo objeto de pensamento" (Piaget, 1977, p. 275).

A exemplo, da construção de novos patamares de reflexionamentos, os sujeitos que depois de terem acrescentado *n* (viagens) vezes *x* (fichas), passam a considerar o número de *n* operações e não apenas o fato de adicionarem os *x* (fichas).

A origem de um conhecimento organizado por abstração reflexionante não significa que se tenha cessado, de uma vez, a abstração empírica. Piaget explica que o tipo de abstração reflexionante não substitui abstração empírica. Destacamos com isso que, ao mesmo tempo que há uma evidente distinção entre ambas abstrações, há também um estreitamento quanto a uma definição rígida de suas fronteiras. Isto ocorre porque a abstração empírica necessita da reflexionante como esta última necessita dos dados empíricos para a aquisição de conhecimentos por parte do sujeito cognoscente.

Domingues de Castro (1996), analisando o processo de abstração reflexionante, afirma que ele inclui:

"... uma progressiva conceptualização na passagem de uma atividade física a uma representação mental, distingue entre a forma e o conteúdo de um conceito, caracteriza a reconstituição de seqüências de ações, intervém no processo de comparação e culmina com formas de reflexão "em segundo grau" e processos mais avançados de reorganização de esquemas nas atividades de criação e invenção"
(Domingues de Castro, 1996, p.24).

Segundo Gallagher (1978), a abstração reflexiva é caracterizada por uma projeção no sentido físico e uma reflexão no sentido de reorganização mental, quer dizer, um processo dinâmico que reafirma novamente a necessidade de reconstruir o que se retirou de um nível inferior e foi ajustado por acomodação, para a estrutura de um nível superior, conforme descrito por Piaget (1980).

O processo de abstração tem um papel fundamental na construção de estruturas operatórias que se estabelecem por meio das coordenações das ações do sujeito sobre uma dada situação. Quando a criança tem oportunidade de experimentar, no sentido de explorar uma dada situação, estabelecendo o maior número de relações possíveis entre os dados, e inventando e descobrindo soluções, pode-se dizer que se instala um processo de reflexionamento. Este processo, segundo Piaget, pode ser caracterizado em diferentes graus, suscitando novos patamares.

Por abstrações reflexivas, as reconstruções advindas das reequilibrações são possíveis com base em uma reorganização de novas combinações de elementos que foram retirados de um nível anterior. As transformações de um estado inicial por intermédio de várias formas de desequilíbrios e reequlíbrios resultam em um estado qualitativamente diferente. Neste processo intervém mecanismos de regulação que conduzem às reequilibrações e, conseqüentemente, ao aprimoramento das estruturas anteriores (Taxa, 1996).

Piaget (1977) assinala que

> *"... o desenvolvimento da abstração reflexionante acarreta sempre mais, a construção de formas em relação aos conteúdos, formas estas que podem dar lugar, seja à elaboração de estruturas lógico-matemáticas, seja a essas "atribuições", aos objetos e a suas conexões, nas quais consiste a explicação causal em física" (Piaget, 1977, p. 277).*

Sternberg e Powell (1983) lembram que os estudos realizados sobre raciocínio analógico implicam a compreensão do papel e valor das abstrações envolvidas no processo de aquisição da inteligência. Lembram que o sistema de inter-relações dos processo cognitivos, dentre eles, destacam as abstrações, que contém vários mecanismos dinâmicos pelos quais o crescimento cognitivo acontece.

Para Cattell (apud Sternberg e Powell, 1983), os pensamentos abstratos são interpretados como componentes da "inteligência-fluida", identificada como um dos fatores das numerosas investigações sobre análise dos fatores da inteligência.

O foco destes autores parte da idéia de que o desenvolvimento da inteligência é a habilidade para perceber relações que levem o sujeito ao sucesso e à capacidade de estabelecer relações de ordem cada vez mais complexas. No caso da solução de problemas sobre raciocínio analógico, o emprego de um raciocínio abstrato mais sofisticado é, em grande parte, uma função das relações de ordem que o sujeito precisa discriminar para chegar à solução adequada. Com isso, o sujeito precisa valer-se do estabelecimento de relações de ordem cada vez mais altas para resolver problemas.

Vimos como a atividade de manipulação, ou mesmo, a ação por si só não conduz à projeção e reorganização de novos conhecimentos, ou ainda, a um tipo de abstração mais sofisticada. O enriquecimento de um objeto por abstração, seja em nível empírico ou pseudo-empírico é um resultado parcial da atividade. Há que se fazer descobertas e enriquecimentos sobre os objetos, e a atividade é uma das formas imprescindíveis para que o processo de abstração permita a construção dos enriquecimentos trazidos pela criança aos objetos.

O sentido da atividade para a teoria piagetiana ressalta o valor e papel da ação sem perder de vista a importância dos mecanismos funcionais envolvidos nos processos de construção do conhecimento pelo sujeito. Os professores podem se valer do conhecimento de tais mecanismos e processos e enfatizá-los no trabalho docente em face das aprendizagens escolares. A compreensão do processo de abstração, da tomada de consciência e o da própria equilibração pode servir de bússola diante da elaboração de um currículo que favoreça atividades de aprendizagem que provoquem ou suscitem conflitos e contradições nos alunos e sob os quais se possam elaborar estratégias pedagógicas efetivas.

É importante lembrar que o sentido de abstração reflexionante ocorre em todos os níveis de desenvolvimento, das etapas mais elementares, como na passagem da ação à representação até mesmo nos níveis em que a reflexão é a própria matéria-prima na cognição do sujeito. O que vale distinguir é o fato de que a atividade reflexiva evolui no curso do desenvolvimento, sem perder de vista a natureza do processo.

2.2 A teoria dos Campos Conceituais descrita por G. Vergnaud

Vergnaud (1990) estudou a elaboração de conceitos em situações didáticas valendo-se da solução de problemas. Com base na idéia de *campo conceitual*, analisa o papel da formação de conceito na solução de problemas, buscando identificar a função das palavras, definições, explicações ou representações simbólicas na formação conceitual e na própria solução de problemas.

Para este autor, os campos conceituais referem-se a um conjunto de situações que remete o sujeito a muitos *conceitos* , por meio de *invariantes operatórios* e *representações simbólicas*, que possibilitam ao sujeito diferentes representações para entender as relações em questão.

A teoria dos campos conceituais trata, ainda, da conceitualização do real, permitindo situar a análise das filiações e rupturas entre os conhecimentos. Envolve, também, a análise da relação entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nos comportamentos dos sujeitos em uma dada situação.

Para Vergnaud (1990), o funcionamento cognitivo repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados, e ao mesmo tempo, repousa sobre novos aspectos de conhecimentos incorporados pelos próprios sujeitos.

Um conceito envolve muitas situações e, reciprocamente, estas envolvem vários conceitos. O desenvolvimento de conhecimentos na criança se constitui por meio de um conjunto relativamente vasto de situações entre as quais existem relações de parentesco (analogias, contrastes, variações) e para analisá-las apela-se para muitos conceitos e vários tipos de simbolismos.

Particularmente, no que se refere à formação e desenvolvimento de conceitos, o esquema de Lemeignan e Weill-Barais (apud Da Rocha Falcão, 1996) culminaria no constructo teórico de campos conceituais, conforme exposto na figura 1:

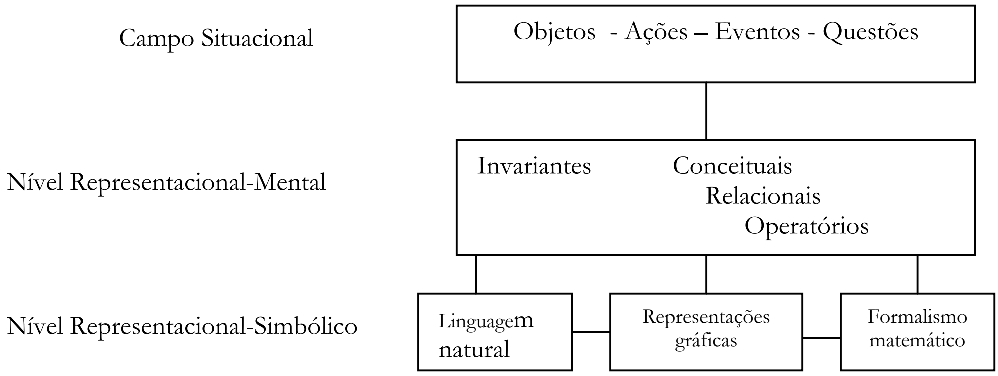


Figura 1- Quadro esquemático sobre o processo de desenvolvimento de conceitos apresentado por Da Rocha Falcão (1996, p.163)

Segundo Vergnaud (1990), um conceito é necessariamente um tripé de três conjuntos: C= (*S,I,S*), significando: *S* – o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; *I* – conjunto de invariantes operatórios subjacentes ao tratamento dessas situações pelo sujeito; *S* – conjunto de significantes que permitem representar os invariantes, as situações, os procedimentos tratados.

A atividade conceitual é indispensável como aspecto ajustador do plano do significante e implica igualmente, e sem dúvida alguma, aspectos que se situam no plano do significado e que não são diretamente observáveis. Esta atividade, no plano do significado, é ela mesma um produto da ação do sujeito sobre o real: as ações do sujeito permitem, então, distinguir outros aspectos do significado.

Um campo conceitual é, em especial, definido por seu conteúdo dinâmico, contemplando, por exemplo, estruturas aditivas e multiplicativas. A análise das situações de multiplicação e divisão, por exemplo, fazem apelo a uma grande variedade de conceitos: proporção simples e múltipla, função linear e não-linear, multiplicação e divisão, múltiplo, divisor e quociente, entre outras. Estas situações exigem uma grande variedade de formulações possíveis e uma grande variedade de simbolismos, como tabelas, gráficos, equações e esboços.

No caso das estruturas aditivas, a teoria dos campos conceituais distingue seis tipos de relações básicas: a) relação parte-todo; b) relação estado inicial, transformação e estado final; c) relação de comparação: "ter tanto, mais ou menos que"; d) composição de transformações; e) composição de relações de comparação ou de relações aditivas quaisquer (crédito e débito, por exemplo); f) transformação de uma relação (Vergnaud, 1997, p.75).

Em cada uma dessas categorias observam-se tipos de problemas e dificuldades distintas, dependendo das variáveis numéricas em jogo, podendo, assim, gerar um grande conjunto de situações de soma e subtração que as crianças avançam de maneiras distintas.

Verifica-se em Vergnaud (1991) que a análise das relações multiplicativas mostram vários tipos de multiplicação e várias classes de problemas. Seria importante distinguir tais classes e analisá-las cuidadosamente, ajudando a criança a reconhecer as diferentes estruturas de problemas e encontrar os procedimentos apropriados para sua solução.

No que tange à multiplicação, o referido autor distingue duas grandes categorias de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas, e, ao tratar de solução de problemas, indica que é preciso estarmos atentos, procurando analisar se o aluno identifica qual o problema que está trabalhando, qual o procedimento e qual é o apoio de representação conceitual que utiliza (Vergnaud,1991).

Segundo o autor, a categoria mais elementar em *isomorfismo de medidas*, é aquela que apresenta os dados do problema numa relação quaternária, isto é, aquela em que duas quantidades são medidas de um certo tipo, e as restantes, medidas de outra natureza.

O autor assinala que, para a criança resolver um problema elementar de *isomorfismo de medidas*, ela não teria grandes dificuldades envolvidas, já que as quatro quantidades postas em relação são medidas de correspondência de dois tipos de quantidades, por exemplo: "Tenho 4 pacotes de yogurt. Há 4 yogurt em cada um. Quantos yogurts tenho ?". Temos: a) número de pacotes e b) número de yogurtes.

No ensino da multiplicação como somas sucessivas, o exemplo de um problema de soma repetida talvez seja para o professor a maneira mais clara de "explicar" a operação da multiplicação. Em uma situação de aprendizagem na qual o professor utilize a lousa e exposição verbal para explicar o conteúdo, a escolha por problemas do tipo *isomorfismo de medidas* com números inteiros é facilitadora, pois possibilita que a criança "resolva" o problema por meio de adições sucessivas, utilizando os códigos convencionais, como: " 3 potes com 5 balas são: 5 balas mais 5 balas mais 5 balas".

Brenelli (1996) lembra que essa solução pode ser clara para o professor, mas nem sempre para o aluno que deve compreender o operador multiplicativo.

Mesmo considerando essa estratégia metodológica de somas sucessivas, a criança pode apresentar dificuldades significativas na busca da incógnita do problema, ou seja, ela precisa construir uma representação interna dos dados para depois aplicar fórmulas matemáticas. Na maioria das vezes, registros como os de somas sucessivas (5 + 5 + 5 = 15) não têm significado nenhum para as crianças, e tampouco são equivalentes ao algoritmo da multiplicação (3 x 5 = 15), como ensinam os professores.

Os problemas do tipo produto de medidas são problemas que lembram o produto cartesiano e correspondem a uma função bilinear. São comumente encontrados em alguns livros didáticos e podem ser representados segundo a tabela de dupla entrada.

Por esta perspectiva, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar as situações em jogo que envolvam o conceito de multiplicação (Taxa, 1996).

Alguns resultados esclarecedores quanto ao processo de aquisição da aritmética e da álgebra, por exemplo, têm sido produzidos com base na teoria dos campos conceituais. Focar o percurso entre a compreensão da solução de problemas por parte do aluno como uma propriedade invariante e o estabelecimento da fórmula para o cálculo poderá nos fazer compreender melhor a manifestação de diferentes concepções do sujeito, a mobilização de diferentes procedimentos (corretos e incorretos) de solução, assim como a utilização de diferentes modos de representação para que o sujeito possa comunicar tais concepções e procedimentos.

Essas reflexões põe em evidência que a teoria dos campos conceituais não está reduzida a uma teoria didática, mas, ao mesmo tempo, essas questões evidenciam a grande importância para a Didática da Matemática e abre um leque de possibilidades de os professores valerem-se dos elementos teóricos postulados por Vergnaud a fim de que façam uma análise refinada dos comportamentos das crianças em sala de aula.

A ação do sujeito em situação e a organização de seu comportamento devem ser consideradas quando se pretende compreender o sentido das situações e dos símbolos, por exemplo. Por isso, é atribuído ao conceito de esquema a importância de não prescindi-lo da análise, uma vez que este organiza o comportamento do sujeito, abrangendo regras de ação e antecipações. Cabe lembrar que isto só é possível em função das invariantes operatórias (conceitos em ação e teoremas em ação) que servem para organizar a busca da informação pertinente em função do problema a ser resolvido, além disso servem para balizar as inferências.

Vergnaud (1990) assinala que tanto a linguagem como os símbolos matemáticos têm um papel fundamental na conceitualização e na ação e atenta para o fato de que estes aspectos não teriam sentido se não fosse a existência dos esquemas e das situações em jogo.

Vergnaud (1979,1990,1997) retoma o conceito de esquema na perspectiva piagetiana para analisar a atividade do aluno na solução de problemas. Os procedimentos dos sujeitos para solucionar problemas utilizando representações não-canônicas ou mesmo procedimentos formais e informais que se reúnem simultaneamente está relacionado com o processo de abstração das crianças e esquemas de ação, ao construírem, por exemplo, o conceito da multiplicação.

Vergnaud (1985), particularmente, aponta para o fato de que o conceito de esquema tem papel fundamental no processo de construção e representação das operações mentais realizadas pela criança. Os esquemas são aliados imprescindíveis para a estrutura cognitiva do sujeito e servem para organizar ao plano do significado, a articulação necessária entre as situações de referências e os significantes simbólicos.

O processo de construção do conhecimento pelo sujeito apóia-se fundamentalmente nos esquemas que ele possui. Os esquemas constituem os elementos básicos por meio dos quais o sujeito poderá atuar sobre a realidade. Podem ser uma ação concreta ou mesmo um conceito, enfrentando situações iguais ou parecidas a outras já vividas.

Dessa forma, os esquemas organizam as condutas do sujeito, com base em um recorte dos objetos, propriedades e relações de diferentes níveis. Por esta perspectiva, o conceito de esquema assume papel fundamental na proposta sobre campos conceituais, pois refere-se à ação do sujeito, que é fonte e critério para a construção de conceitos, concomitantemente com seus modelos representacionais (Vergnaud, 1985).

Em síntese, o conceito de esquema pode ser definido como uma forma de organização invariante do comportamento com base em uma classe de situações. Os esquemas explicitam os conhecimentos em ação dos sujeitos, e são os elementos cognitivos responsáveis para que a ação do sujeito seja operatória (Vergnaud, 1990a).

O conceito de esquema pode interessar a duas classes de situações: 1) aquelas em que os sujeitos dispõem, no seu repertório, segundo o seu desenvolvimento e das circunstâncias, das competências necessárias para dar tratamento relativamente imediato à situação; 2) aquelas em que os sujeitos não dispõem das competências necessárias, obrigando-as a um tempo de reflexão e exploração, o que pode resultar eventualmente ao êxito ou ao fracasso da situação.

Moro (1998) assinala que os esquemas são possíveis inconscientes que se compõem e recompõem a cada nova situação. Com base nisto, o sujeito retira, na interação com objetos, por abstração, aquilo que seu esquema de assimilação lhe possibilita retirar. Neste sentido, o processo de abstração está limitado ao esquema de assimilação disponível naquele momento.

Da Rocha Falcão (1996) destaca o seguinte:

> *"... Esquemas abrangem desde competências sensório-motoras complexas, como a habilidade de um piloto de fórmula 1 que é capaz de abordar uma curva em alta velocidade, até competências matemáticas, como a contagem e a resolução de equações algébricas, passando por competências sócio-culturais, como o desempenho de políticos profissionais diante de repórteres de televisão ou adversários. Se indubitavelmente as regras de ação fazem parte dos esquemas, estes não se resumem a estas regras, pois adicionalmente comportam invariantes operatórios (no sentido piagetiano do termo), inferências e antecipações"(Da Rocha Falcão, 1996,p.150).*

Reiterando a concepção piagetiana, Perrenoud (1999a) afirma que o conceito de esquema é contemplado como:

> *"... estrutura invariante de uma operação ou de uma ação, não condena a uma repetição idêntica. Ao contrário, permite, por meio de acomodações menores, enfrentar uma variedade de situações de estrutura igual. É, em certo sentido, uma trama da qual nos afastamos para levar em conta a singularidade de cada situação. Assim um esquema elementar, tal como "beber em um copo", ajusta-se*

a copos de formas, pesos, volumes e conteúdos diferentes O esquema é uma ferramenta flexível ...” (Perrenoud, 1999, p.23).

Como afirmam Piaget e Inhelder (1993): *"Um esquema é a estrutura ou a organização das ações, as quais se transferem ou generalizam no momento da repetição da ação, em circunstâncias semelhantes ou análogas" (Piaget e Inhelder, 1993, p.15).*

Partindo-se da concepção piagetiana de que o conhecimento é construído com base na interação sujeito-objeto, a assimilação de novos objetos ou situações depende das estruturas do sujeito. A interação do sujeito com o objeto depende das possibilidades desse sujeito em relação ao objeto, e, conseqüentemente, depende dos esquemas que possui.

Uma criança em interação com o mundo assimila os objetos e age sobre eles transformando-os em função dos esquemas de que dispõe. Aquele objeto com que interage, no entanto, não será assimilado na sua totalidade. Assimilam-se apenas as características dos objetos, das ações ou da coordenação das ações por abstração empírica ou reflexionante.

Ao ter que exercer uma ação acomodadora de um esquema baseando-se em objetos exteriores, esta ação faz que o esquema se diferencie em função da própria perturbação originada pelo dado externo. O papel da acomodação é, portanto, entendido como o de um diferenciador que carrega dois sentidos distintos. Por um lado, diferenciam-se os esquemas pelo trabalho de acomodação e, por outro, diferenciam-se cada vez mais os objetos a serem assimilados (Piaget, 1974).

Isto faz que o sujeito se transforme a si mesmo, o que Piaget denomina de acomodação. O mecanismo de acomodação implicaria transformação do próprio sujeito.

Subseqüentemente, podemos dizer que, em conjunto, com a função diferenciadora encontramos uma função integradora dos esquemas. Assim:

“... esta função diferenciadora corresponde uma função coordenadora que é processada pela assimilação... primeiramente, dos objetos e, posteriormente, dos próprios esquemas entre si... O esquema de sugar foi assimilado ao esquema de agarrar, os esquemas de agarrar e de sugar foram assimilados ao esquema de olhar... Temos, assim, assimilação dos esquemas entre si ou assimilação recíproca dos esquemas... Esta assimilação recíproca abre caminho a novas assimilações recíprocas, que

abrem caminho pra novas acomodações que, por sua vez, diferenciarão os esquemas a serem coordenados... O equilíbrio entre a diferenciação e a integração é sem dúvida, a característica a mais geral e a mais importante da abstração reflexionante ..." (Becker,1993,p.47).

Esta característica evidencia o caráter circular entre sistemas de troca do sujeito e objeto, confirmando a idéia de Piaget de que sujeito e objeto transformam-se mutuamente. É preciso que o organismo se acomode às características específicas do objeto a ser assimilado, assim como, na assimilação o conhecimento é modificado pelo sujeito cognoscente.

O conhecimento prático dos alunos, como as ações que exercem, no caso das crianças mais novas, quanto ao fato de juntar, compor e quantificar objetos, constitui a matéria-prima para a construção do conhecimento. Como salienta Piaget, porém, não é o conhecimento prático ou ainda esta "ação de primeiro nível" a única responsável pelo processo de formação de conhecimento. É preciso entendê-la correlacionada com a uma ação de "segunda potência", conforme postulado por Piaget (1977a, 1977b).

Uma ação de segunda potência implica "ação sobre a ação" feita em um patamar anterior, no caso a ação prática, gerando daí uma ação endógena, ou, ainda, uma ação voltada à progressiva interiorização.

Este fato exemplifica-se na explicação dada pelos alunos, por solicitação dos professores, de uma tarefa realizada no plano prático. Ao terem que reconstituir a ação realizada para resolver uma dada situação, enfrentam novos problemas e desafios. Para que a ação de segunda potência ocorra é necessário um jogo de abstrações: empíricas e reflexionantes. Pode-se com isto afirmar que as aprendizagens escolares estão estreitamente relacionadas com este nível de ações de segunda potência e não no fato simples do nível da ação prática, como pensam muitos professores.

Segundo Vergnaud (1997), são quatro os tipos de elementos organizadores constitutivos do esquema: a) objetivo e antecipações; b) regras de ação, cuja função é gerar a conduta; c) invariantes operatórias (conceitos em ato e teoremas em ato), as quais permitem ao sujeito selecionar a informação pertinente e tratá-las; d) inferências.

Os invariantes ocupam papel decisivo nos processos de aquisição de conhecimentos. Vergnaud (1990) comenta que nos primeiros anos de vida, a criança adquire invariantes que lhe permitem organizar o mundo quanto a objetos, classes e relações e aponta a construção da noção de objeto permanente, relações classificatórias, de equivalência, de ordem, entre outras.

As inferências possibilitam aos esquemas considerar as variáveis de uma dada situação e adaptar-se a outras novas. Dessa forma, as regras de ação envolvem cada vez mais a seqüência de ações do sujeito (Vergnaud,1990b).

Com base nisto, destacamos que o real é conceituado com base na formação de teoremas-em-ação e conceitos-em-ação e que os conhecimentos matemáticos podem ser identificados em nível de conceitos e teoremas em ato.

Estes invariantes operatórios são destacados por Vergnaud (1990b) como:

a) Invariantes do tipo proposição – referem-se a proposições verdadeiras ou falsas da realidade, nomeadas como "teoremas-em-ação". Quando, a partir de 5 anos, aproximadamente, as crianças descobrem que não precisam mais recontar o todo de duas coleções para encontrar o cardinal, então podemos encontrar nessa situação, um tipo de conhecimento que pode ser expressado por um teorema-em-ação;
b) Invariantes do tipo "função proposicional" - constituem-se aspectos indispensáveis à construção das proposições, mas não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas.

Vergnaud (1997) ressalta que os conceitos de cardinal, de estado inicial, transformação e estado final são fundamentais para o processo de conceitualização das estruturas aditivas, mas não se configuram como proposições.

Os alunos raramente explicitam estes conceitos, ainda que os construam na ação. Isto é denominado por Vergnaud (1997) "conceitos-em-ação" ou ainda, como "categorias-em-ação".

Os conceitos-em-ação são um tipo lógico dos teoremas-em-ação e, por isso, denominados funções proposicionais. O referido autor ressalta a existência de uma relação dialética entre funções proposicionais e proposições, e ambas se constroem em estreita interação.

Por fim, as invariantes do tipo argumento referem-se a uma proposição resultante da atribuição de valores particulares aos argumentos da função proposicional. Ao falarmos de função proposicional e proposições, falamos então em argumentos que podem ser, para a Matemática, objetos materiais, números, relações ou mesmo proposições (Vergnaud, 1990b, p. 147-148).

Em resumo, Vergnaud (1996) destaca que

"... conceitos e teoremas explícitos são apenas a ponta visível do iceberg da conceitualização, sem a parte oculta, formada pelas invariantes operatórias, essa parte visível nada seria. Reciprocamente, só se pode falar em invariantes operatórias integradas aos esquemas com o auxílio de categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objetos-argumentos" (Vergnaud, 1996, p.8).

O estudo sobre solução de problemas aritméticos fornecem-nos elementos de análise sobre conceitos teóricos como os de esquemas e os de invariantes implícitos nas tarefas que envolvem problemas aritméticos com crianças das séries iniciais.

O conhecimento matemático está sustentado por esquemas organizadores do comportamento, como, por exemplo, o esquema de enumeração. As crianças mais novas ao contar pequenas coleções (contar balas ou peças de brinquedos) não deixam de abranger uma organização invariante, necessária para a manutenção do esquema.

O esquema de enumeração abarca tipos de elementos organizadores. Abarca um o*bjetiv*o (associação de uma coleção a um número que será sua medida); *regras* (uma única contagem para cada objeto e contar todos os objetos); *constantes operatórias* (conceitos em ato - de caráter biunívoco, cardinal, sucessor) e teoremas em ato (no sentido de que o cardinal é independente da ordem em que se contam os objetos).

Quando uma criança conta objetos desde pequena (4-5anos), observam-se evoluções e estabilização. Tal esquema consiste num conjunto organizado de gestos, percepções e emissões vocais.

A estabilidade diz respeito a dois princípios matemáticos: a) bijecção; b) cardinalidade. Estes dois princípios matemáticos são, no caso da enumeração, indispensáveis ao funcionamento do esquema. Os erros das crianças nos mostram, por exemplo, que muitas crianças fracassam ao "cardinalizar", ou seja, fazer a identificação do último número-palavra pronunciado como aquele que representa a medida de todo o conjunto.

A bijecção e a cardinalidade estão ligadas aos invariantes operatórios (conceitos em ato e teoremas em ato) que permitem ao sujeito selecionar as informações pertinentes e dar tratamento a elas

O princípio de bijecção refere-se aos gestos da criança, organizados de maneira sincronizada, pois implica que os objetos sejam contados na sua totalidade (no sentido de sua exaustividade) e uma única vez (no sentido de sua exclusividade). Dessa forma, os gestos das mãos e olhos não devem esquecer nenhum dos objetos, não deixando de controlar, por exemplo, a contagem repetida ou a falta da contagem de um dos objetos.

O princípio da cardinalidade refere-se à série de palavras pronunciadas. Por exemplo, a palavra cinco é pronunciada duas vezes: "um, dois, três, quatro, cinco... cinco". A palavra "cinco" primeiramente remete ao quinto e último elemento da coleção e, em seguida, remete à coleção completa, designando o cardinal da coleção.

O tom empregado pela criança para pronunciar as duas palavras é diferente. Como o léxico não marca esta diferença, o tom o faz. Algumas crianças voltam a contar a coleção toda para responder "quantos objetos" e não compreendem que responder "cinco" seria o suficiente.

Em sua obra, Vergnaud (1997) destaca também a importância da propriedade da soma na aquisição do número. O autor lembra que o esquema de recontar o todo evidencia que a criança não opera sobre os números. As crianças reúnem as duas coleções mentalmente, mas não chegam a fazer a soma dos cardinais. Sabe-se que duas condutas são consideradas necessárias para se reconhecer que a criança opera sobre os números. Uma delas é quando a criança evoca diretamente: "seis mais três, nove!" e a segunda conduta é aquela em que a criança toma como base o cardinal da primeira coleção e continua a contagem dos elementos da segunda coleção: "seis ! sete, oito, nove... nove!" (Vergnaud, 1997).

Conforme destacado por Vergnaud (1985), a criança aplica novas regras de ação sobre as regras convencionais transmitidas para a solução da técnica operatória (algoritmo) para resolver uma operação matemática em função dos esquemas que possui.

Uma forma bastante usual do trabalho docente é o de priorizar o treinamento de ações práticas, trabalhando, por exemplo, com o uso excessivo de algoritmos para solução de problemas. Observa-se ainda que há uma tendência de os professores trabalharem com algoritmos de maneira bastante equivocada, não contemplando sua conceitualização do ponto de vista psicológico e matemático[3].

Conforme assinalado por Vergnaud (1985), os algoritmos são aqui entendidos não como uma simples aplicação de determinadas técnicas, mas como um processo de aplicação de determinados passos que exigem do sujeito a compreensão do conceito de número aliada ao entendimento do sistema de numeração decimal da nossa cultura, e que estes só são passíveis de construção por meio de processo de abstração reflexionante.

Vergnaud (1994) assinala que todos os algoritmos são esquemas, ou melhor, que os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos, mas atenta para o fato de que os esquemas não são todos algoritmos.

O autor completa, informando que:

> *"a confiabilidade do esquema para o sujeito baseia-se, em última análise, no conhecimento que ele possui, explícito ou implícito, das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver. A automatização, evidentemente, é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação (...) contudo uma série de decisões conscientes também pode ser objeto de uma organização invariante. A automatização, aliás, não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é ou não apropriada (...) As crianças são capazes de gerar uma série de ações diferentes em função das características da situação: reserva ou não, decimal ou não. Enfim, todos os nossos comportamentos abrangem uma parte de automatismo e outra de decisão consciente" (Vergnaud, 1996, p.3).*

Vergnaud (1985) reafirma a importância do conceito de esquema para a formação de conceitos à luz de situações didáticas, salientando que podemos definir um esquema como:

---

[3] Segundo a definição de Krutetski (1976) "... Uma das características da matemática é a qualidade algorítmica da solução de muitos de seus problemas. Um algoritmo, como é bem sabido, é uma indicação precisa e delimitada sobre quais operações realizar e em qual seqüência resolver qualquer problema de um determinado tipo. Um algoritmo é uma generalização, desde que seja aplicável a todos os problemas de um determinado tipo. Naturalmente, um grande número de problemas não são algoritmizados e são resolvidos por métodos especiais. Por esse motivo, a habilidade para encontrar o caminho para a solução considerada não apropriada, de acordo com uma determinada regra, é uma das características essenciais do pensamento matemático, conforme mostrado por Kolmogorov. (Krutetski (1976, p. 87)

"... uma aplicação (no sentido matemático) que absorve seus acessos (informações) e suas saídas (ações, comandos motores...) entre os espaços multidimensionais ... A psicologia cognitiva deve identificar os elementos macroscópicos significativos, permitindo análises fiáveis, das diferenciações, das filiações. É nesse sentido que me parece indispensável analisar o conceito de esquema em quatro categorias de elementos : a) invariantes operatórias, b) as inferências ou cálculos, c) as regras de ação, d) as predições ou previsões" (Vergnaud,1985,p.250).

Do ponto de vista educacional, tal característica outorga à prática do professor de Matemática um papel peculiar no que se refere a ultrapassar a idéia empirista de que a formação do conhecimento esteja ligada à cópia ou transposição direta dos objetos, recolocando a discussão a respeito do papel e da importância do processo de abstração das crianças ao construírem conceitos matemáticos na escola.

2.3 A correspondência termo a termo como esquema quantitativo básico para a construção do número e operações aritméticas

A construção do número se dá, segundo Piaget e Szeminska (1975) como síntese de dois tipos de relações: as de ordem e as de classe e suas inter-relações. Os autores estudaram a construção do conceito de conservação de quantidades, contínuas e descontínuas, analisando a conservação do número no processo. Avaliaram a presença da predominância da percepção e da lógica como elementos indissociáveis entre a conservação e a não-conservação, como firma Flavell (1988, p. 318).

Estudaram o estabelecimento de equivalência, considerando a correspondência termo a termo entre elementos na compreensão da igualdade numérica.

As pesquisas piagetianas mostraram que no processo da construção do número a criança deve compreender o princípio de correspondência um a um, contando cada objeto de um conjunto uma vez e apenas uma vez. Também devem dar-se conta de que apesar de alterações na aparência, quantidades contínuas ou descontínuas, permanecem idênticas seja qual for a disposição espacial.

Segundo Piaget e Szeminska (1975), a invariância numérica, aquisição fundamental das operações concretas, ocorre somente quando a criança é capaz de conceber que uma quantidade numérica permanece idêntica a si mesma, seja qual for a disposição espacial das unidades que a compõem.

Os autores estudaram as relações da conservação da quantidade e as correspondências biunívocas e recíprocas. Os autores destacam que o desenvolvimento da correspondência biunívoca constitui-se elemento imprescindível para a construção do número. Lembram, no entanto, que quando a correspondência termo a termo surge no decorrer da evolução da estrutura numérica, e, embora necessária, não é suficiente para a consolidação da mesma. Estão em jogo os aspectos cardinais e ordinais do número, podendo estes estar diferenciados e, mesmo que a criança estabeleça a correspondência termo a termo, isto não assegura a invariância numérica.

Piaget (1993) assinala que pequenos números são acessíveis às crianças mais novas em razão de serem números intuitivos correspondentes a figuras perceptivas. Quando solicitamos que crianças de 4-5 anos aproximadamente, construam uma fileira de fichas brancas com base em uma fileira já construída de, por exemplo, 8 fichas verdes, é comum que estas crianças construam uma fileira de fichas brancas de mesmo tamanho que as das verdes. Estas crianças não demonstram preocupação com o número de elementos, tampouco com a correspondência termo a termo de cada ficha branca com cada ficha verde.

Os estudos de Piaget neste tipo de tarefa evidenciaram uma forma primitiva de intuição, na qual a criança avalia a quantidade somente pelo espaço ocupado, ou seja, pelos aspectos perceptuais das coleções e não pela análise das relações.

A partir de 5 anos, aproximadamente, as crianças tendem a equiparar uma ficha branca em frente a cada ficha verde e concluem, com base na correspondência termo a termo, a igualdade das coleções. Ao serem alternadas, porém, as disposições das fichas, estas crianças passam a avaliar quantidades desiguais entre as coleções. As crianças mantêm a equivalência na medida em que exista a correspondência visual, não resultando no argumento de conservação por correspondência lógica.

Os referidos autores verificaram a relação entre o esquema de correspondência e a conservação do número analisando a transição entre a correspondência espacial, entendida como um tipo de correspondência perceptualmente constatável e a correspondência temporal, na qual a criança não tem acesso visual dos elementos a serem correspondidos.

A correspondência visual ou espacial evidencia apenas esquemas de ação ligados à percepção e não a esquemas interiorizados como representação. Igualar quantidades de uma coleção à outra por correspondência termo a termo não significa que as crianças estejam considerando aspectos cardinais e ordinais do número. Tais aspectos podem se manifestar de maneira indiferenciada nas ações das crianças, conforme exposto na seqüência, a respeito dos tipos de correspondências empregadas pelas crianças.

A correspondência denominada temporal, insere-se no quadro da inferência quantitativa e está diretamente ligada à construção necessária da conservação da igualdade numérica.

Piaget e Szeminska (1975), a respeito da construção do número destacam tipos de correspondências diferenciadas como esquemas quantitativos em situações nas quais as crianças são levadas a utilizar a correspondência termo a termo.

A primeira delas, *"correspondência estática com objetos hetereogêneos"* indica que é a natureza do material que provoca o estabelecimento da correspondência. Exemplifica que, em uma coleção de pires e xícaras, as crianças farão a correspondência conforme o caráter ou significado utilitário do material, e, baseando-se nesse critério, constituem coleções equivalentes. Neste primeiro tipo de correspondência, os dados são fornecidos ao sujeito por meio da percepção, ou melhor, prevalecendo os dados perceptuais.

A *"correspondência estática com objetos homogêneos"* ocorre, ou, ainda, é estabelecida não mais com base no que o material pode provocar. Estabelece-se uma correspondência (por exemplo, entre fichas de cor azul e vermelha) apenas quando o sujeito sente internamente a necessidade de coordenar relações percebidas no espaço ocupado pelos objetos dados.

Por fim, a *"correspondência dinâmica"* refere-se a troca de um contra um realizada pela criança. Um exemplo comum é a troca de uma mercadoria por uma moeda que equivale ao seu pagamento.

Um exemplo de uma situação de correspondência com objetos homogêneos é quando se dá uma coleção de fichas iguais para as crianças e se lhes pede que separem tantas das vermelhas para cada azul separada. No primeiro nível, as crianças não fazem a correspondência termo a termo para solucionar e, sim, utilizam-se de um esquema que pode ser denominado de *correspondência global*. Nele, as crianças não coordenam as duas relações fornecidas pelo dado de percepção: comprimento da fila e sua densidade, como a distância de um elemento ao próximo, e a criança concebe apenas uma quantidade bruta unidimensional, ficando presa à dimensão do comprimento. Este nível também se caracteriza segundo Piaget e Szeminska (1975), como aquele correspondente ao de imitação da contagem.

No nível seguinte, o da correspondência intuitiva, igualam-se as duas coleções pelo emprego espontâneo da correspondência termo a termo. A criança passa a coordenar as relações espaciais de densidade e comprimento, o que lhe permite colocar um elemento da coleção em face de outro para solucionar o problema proposto. Ela é, então, denominada intuitiva, porque é possível quando o dado perceptivo se apresenta favorável, ou seja, quando os objetos das duas coleções guardam a mesma distância entre eles ou ocupam o mesmo comprimento. A criança deixará de acreditar na igualdade, se transformarmos sua coleção, deixando elementos de B mais afastados um do outro. Com isso, a coordenação é rompida, subordinando-se às ilusões percebidas.

Para conceber a igualdade, é necessário que a criança compense a diminuição da densidade de B (mais espaço entre os elementos) com o aumento de seu comprimento. Esta coordenação exigirá a presença da reversibilidade operatória que ainda não foi construída neste nível. Dessa forma, conforme destacado por Rangel (1992), a multiplicação "densidade x comprimento" ainda guarda seu caráter qualitativo e não aritmetizado (Rangel, 1992, p. 125).

Ao relacionarmos esta situação com a aprendizagem da contagem, observa-se que mesmo que a criança já tenha "aprendido a contar", neste nível, ela não conseguirá empregar esta aprendizagem como instrumento confiável para solucionar o problema proposto, como o de igualar as fichas das duas coleções. A criança consegue resolver o problema pela correspondência termo a termo, mas caso faça a transformação em B, e se lhe sugere que conte os elementos das séries, tal instrumento não lhe vai assegurar necessariamente a compreensão de que a quantidade de fichas permanece invariável.

Somente quando a correspondência termo a termo, que, no início, era qualitativa, torna-se, então, numérica, a numeração falada atinge o seu real significado e passa a ser utilizada como instrumento lógico. Ao acrescentar um novo elemento à série que está quantificando, a criança preocupa-se apenas com a relação criada em sua mente de colocar mais um.

Rangel (1992) põe em destaque que:

> *"...O espaço ocupado entre este elemento e o anterior não mais importa na avaliação da quantidade , pois este dado perceptivo é subordinado a esta relação de colocar mais um , apoiando, deste modo, o seu julgamento na ação transformadora e não mais no estado aparente (comprimento das filas)." (Rangel, 1992, p.130).*

Nesse sentido, a correspondência biunívoca e reciproca torna-se fundamental neste processo. Este fato exemplifica-se na tentativa, por exemplo, de comparar elemento a elemento de duas coleções. Os estudos de Piaget e Szeminska (1975) evidenciaram como as crianças conseguem superar correspondências espaciais e como são capazes, em um determinado momento, de colocar, por exemplo, uma "bolinha" em um recipiente todas as vezes que se coloca uma outra "bolinha" em um recipiente paralelo estabelecendo e compreendendo a igualdade da quantidade. Este tipo de correspondência biunívoca e recíproca supera, por exemplo, correspondências espaciais, mas ainda equivale a uma enumeração prática e não basta para garantir a conservação.

A correspondência biunívoca deve ser entendida como instrumento de igualização entre conjuntos, fundamentando as noções cardinais. Piaget e Szeminska (1975) admitem a correspondência com base na teoria dos conjuntos, sendo esta primeira um instrumento bastante primitivo e precoce dentro do desenvolvimento do pensamento espontâneo. A correspondência, neste sentido, está, sem dúvida, implícita no princípio da enumeração verbal, podendo ser também explicitada dentro das condutas do sujeito com relação a seus julgamentos quantitativos.

Analisando situações que envolvem a aquisição da invariância numérica, Piaget (1993) explica:

> *"... Um número inteiro é uma coleção de unidades iguais entre si, ou seja, uma classe cujas subclasses se tornam equivalentes pela supressão das qualidades. Mas ao mesmo tempo, é uma série ordenada, ou*

melhor, uma seriação de relações de ordem. A dupla natureza de ordinal e cardinal resulta de uma fusão dos sistemas de encaixamento e de seriações lógicas (...) Agora pode-se compreender porque as correspondências termo a termo permanecem intuitivas durante a primeira infância..."(Piaget, 1993,p.55).

Piaget e Inhelder (1993) completam:

"... o número resulta, em primeiro lugar, de uma abstração das qualidades diferenciais, que tem como resultado tornar cada elemento individual equivalente a cada um dos outros: 1 = 1 = 1 etc. Estabelecido isto, esses elementos se tornam classificáveis segundo as inclusões (<): 1 < (1+1) < (1+ 1+ 1) etc. Mas são, ao mesmo tempo, seriáveis (→) e o único meio de distingui-los e de não contar duas vezes o mesmo elemento nessas inclusões é seriá-los (no espaço ou no tempo): 1 → 1 →1 etc. O número aparece assim como se constituísse simplesmente uma síntese da seriação e da inclusão { [(1) → 1] → 1 } → etc..." (Piaget e Inhelder, 1993, p.90).

Os estudos de Piaget e Szeminska (1975) assinalam que a numeração falada constitui-se num instrumento útil à consolidação do número. A este respeito, Gréco e Morf (1962) examinam a posição das noções numéricas em relação as noções quantitativas e a correspondência biunívoca, buscando analisar a aquisição e conexidade na seqüência dos primeiros números inteiros em crianças.

Moro (1998) reiterando a análise destes autores destaca alguns resultados significativos. Primeiramente destaca o aspecto ligado à natureza pré-operatória (qualitativo/figurativa) dos pré-números, a partir de coleções iguais compostas por correspondência biunívoca, sob as quais as crianças compreendem igualdades numéricas, antes da conservação de quantidades. Essas igualdades, porém, conforme lembrado pela referida autora são entendidas como aquisição das quotidades.

A autora expõe o que Gréco e Morf (1962) analisaram a respeito da aquisição da referida noção:

"A noção de quotidade tem um significado além do aspecto serial da numeração (sua dimensão serial), porque esses aspecto, inerente à ação de enumerar, determina classes de equivalência numérica, antes da constituição operatória de invariantes quantitativos. É uma noção que tem status cardinal, mas quasi-numérico porque ainda não tem o sistema de encaixes. Logo, a quotidade possui já certos aspectos fundamentais ao número e é etapa operacional da construção ativa das estruturas numéricas, dado que se trata de uma conservação de quotidade (...) dessa perspectiva, a idéia de quotidade é vista como passagem para a de quantidade numérica ou para a idéia de número, a criança admite a igualdade de coleções, atribuindo-lhes um numeral, mas este tem o caráter de denominador das coleções, sem haver a conservação das quantidades numéricas, propriamente ditas" (Moro, 1998, p.4-5).

Moro (2001) assinala que a correspondência biunívoca é um esquema poderoso que, ao lado da contagem, traz a conservação de quotidades como fase da construção numérica (Moro, 2001, p.7). Como fase da construção numérica, a quotidade implica na atribuição do numeral com caráter de denominador das coleções e, ainda não, de numerador.

Os estudos de Gréco e Morf (1962), a respeito das estruturas numéricas elementares, apontam o desenvolvimento do esquema de correspondência termo a termo e a correspondência um para muitos como esquemas invariantes básicos para lidar com situações promotoras do raciocínio multiplicativo. Estudaram a correspondência termo a termo como esquema importante e presente na consolidação do número operatório.

Nunes e Bryant (1997) alertaram para a precocidade com que aparecem nas crianças os pontos de partida para a compreensão de conceitos como a multiplicação e a divisão. As primeiras idéias das crianças sobre multiplicação vêm, segundo os referidos autores, do desenvolvimento do esquema de correspondência. Os autores assinalam que a compreensão da correspondência termo a termo capacita as crianças no desenvolvimento de outros esquemas quantitativos, como o das correspondência de um para muitos. Tais esquemas quantitativos são básicos para a apropriação, por exemplo, das relações multiplicativas e mereceriam compreensão conceitual por parte dos professores.

Segundo Nunes e Bryant (1997) as situações que envolvem raciocínio multiplicativo não referem-se apenas a ações de unir e separar e destacam, por exemplo, a correspondência um para muitos como situação multiplicativa.

Analisando a composição das relações de equivalência, Piaget e Szeminska (1975) mostram que as crianças podem efetuar a correspondência termo a termo entre duas coleções, apoiadas em características perceptivas, e não com base na equivalência durável. Nesse caso, constatam intuitivamente, sem chegar a compor operatoriamente.

Os autores apontam as fases de composição de relações de equivalência, afirmando que crianças capazes de compor equivalências compreendem, apoiadas na lógica e não na intuição, relações de correspondência multiplicativa. Substituindo o intuitivo pelo modo operatório, constata-se a composição multiplicativa.

Se correspondência termo a termo constitui um esquema importante na aquisição das estruturas aritméticas, como as que envolvem situações multiplicativas, outro tipo de esquema, como o da correspondência um para muitos entre dois conjuntos torna-se um tipo de correspondência também necessária para a progressão da multiplicação. Este tipo de correspondência torna-se básico para um novo conceito: o de proporção.

O desafio imposto às crianças em situações que envolvem conceito de proporção é o de manter constante a diferença entre dois conjuntos.

Nunes e Bryant (1997) assinalam que o esquema de correspondência um para muitos é o fator invariável da situação, diferenciando-se substancialmente do tipo de invariável presente no raciocínio aditivo e completam:

> *"...ações efetuadas para manter uma proporção invariável não são unir/separar, mas replicação (...) e seu inverso. Replicação não é como unir, em que qualquer quantidade pode ser acrescentada a um conjunto. Replicação envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente para o conjunto de modo que a correspondência invariável um para muitos seja mantida. Por exemplo, na relação "um carro tem quatro rodas", a unidade a ser considerada no conjunto de carros é uma, enquanto a unidade no conjunto de rodas é uma unidade composta de quatro rodas. O inverso de replicar é remover unidades correspondentes de cada conjunto. Se removemos um carro devemos remover quatro rodas, a fim de manter a proporção 1: 4 entre carros e rodas" (Nunes e Bryant, 1997, p. 143-144).*

Em síntese, as situações de correspondência um para muitos envolvem o desenvolvimento de dois novos sentidos de número: o da proporção, conforme explicado anteriormente e o do fator escalar, que se refere ao número de replicações aplicadas a ambos conjuntos mantendo a proporção constante. Cabe destacar que nenhum destes sentidos se relaciona ao tamanho do conjunto, ou seja, a proporção e o fator escalar permanecem constantes mesmo quando o tamanho varia (Nunes e Bryant, 1997).

Problemas aritméticos, do tipo produto cartesiano, como os aplicados nesta pesquisa implicam, por exemplo, a utilização e o domínio de correspondência termo a termo, assim como o da correspondência um para muitos como esquemas de ação que auxiliam na solução e no cálculo de problemas multiplicativos.

Vimos como os esquemas de correspondência (termo a termo e um para muitos) desempenham papel fundamental para a construção do número, mas a consolidação de tal construção implica, sobretudo, síntese recíproca das duas estruturas lógicas: a da classificação e a da seriação.

A síntese entre relações simétricas (estrutura de classificação) e assimétricas (estrutura de seriação) é que legitima o desenvolvimento da estrutura numérica. Isto leva Piaget e Szeminska (1975) a fundarem sua hipótese, com relação à correspondência, não como elemento central, porém como instrumento implícito na construção da própria estrutura.

Considera-se importante que se investigue o processo de abstração em tarefas de solução de problemas no sentido de auxiliar o professor das séries iniciais a compreender a riqueza e diversidade no desenvolvimento da conceitualização das operações aritméticas, em especial, a da multiplicação.

Na perspectiva piagetiana, a prática docente dos professores deve estar comprometida primeiramente com um estudo aprofundado de como o sujeito constrói conhecimento; considerando o funcionamento cognitivo, a trajetória de construção das estruturas e o saber inicial do aluno em relação a conteúdos voltados à multiplicação organizados na escola.

CAPÍTULO III

REVISÃO DA LITERATURA - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MULTIPLICAÇÃO NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

A literatura especializada, tanto nacional quanto internacional, tem enfocado a importância da solução de problemas como princípio de referência às aprendizagens escolares no campo da Matemática. Autores como De Corte e Verschaffel (1987), Greer, (1992); Pozo et al. (1994), Vergnaud (1991), entre outros, têm sido referência básica para as discussões sobre este tema.

A revisão bibliográfica, referente às investigações produzidas nos últimos anos e que ora se apresenta neste capítulo, está direcionada a dois aspectos distintos, porém complementares: os trabalhos de pesquisa publicados acerca dos processos psicológicos que envolvem a solução de problemas, seja na abordagem desenvolvimentalista, seja na abordagem do processamento de informação, e as publicações que procuraram delinear os conceitos que giram em torno da operação da multiplicação.

3.1 Panorama geral sobre solução de problemas

A bibliografia especializada tem apontado, como no caso dos trabalhos de Pozo et al. (1994), a solução de problemas aritméticos como elemento norteador das atividades escolares. Seria esperado que essa idéia pudesse estar refletida em práticas didáticas, à luz dos estudos e pesquisas da Psicologia, especialmente sobre processos cognitivos como modelos explicativos da formação de conhecimento do sujeito.

Pozo et al. (1994) chegam a afirmar que a solução de problemas pode constituir, além de um conteúdo escolar, uma maneira de conceber as atividades educacionais. Defendem a idéia de que aprende-se a solucionar problemas e solucionam-se problemas para aprender, seja na Matemática, nas Ciências Exatas e nas Ciências Humanas (Pozo et al.,1994, p.15).

A opção por uma determinada concepção psicológica como marco de referência para a ação docente na educação de crianças e adolescentes é fundamental para educadores e deveria manter ligação direta entre aqueles que se dedicam ao trabalho de pesquisa e os que estão engajados nas atividades de sala de aula. A atividade docente pode ser beneficiada se o educador procurar estar atento para estudos e pesquisas realizadas na esfera nacional e internacional e atualizado quanto a teorias sobre os processos de aprendizagem.

O panorama de pesquisa sobre solução de problemas é bastante amplo e não é possível no quadro de uma tese, um maior aprofundamento do que ora se apresenta, para contemplar todos os elementos conceituais que envolvem esta temática. Trataremos, porém, deste tema recorrendo a estudos já realizados nesta direção, mas de forma abreviada.

Desde os estudos de Polya (1981) e suas respectivas publicações, destacando as fases da solução de problemas, o interesse pelo processo de solução de problemas tem chamado a atenção de pesquisadores voltados à educação matemática. A definição sobre solução de problemas tem sido amplamente discutida e vários autores como Gagné (1974); Krutetskii (1976); Klausmeier (1977) apresentam diferentes conceitos para esta atividade.

Para Lester (apud Pozo et al., 1994), a definição clássica de problema refere-se a uma situação que o sujeito queira ou precise resolver e cujo o caminho não está disponível de forma rápida e direta de modo que o conduza à solução.

Brito (2000) assinala que a solução de problemas refere-se a um

"...processo cognitivo que visa transformar uma dada situação em uma situação dirigida a um objetivo, quando um método óbvio de solução não está disponível para o sujeito que vai solucionar o problema. A solução de problemas apresenta quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do indivíduo."(Brito, 2000, p. 6)

Para Gagné (1974), solucionar problemas está ligado a um tipo de atividade de alto nível de aprendizagem do sujeito, o qual se vale dos princípios aprendidos, possibilitando a elaboração de novos princípios.

Gagné (apud Brito, 2000) destaca a existência de 3 fases no processo de solução de problemas. A primeira delas refere-se à tradução da proposição verbal à expressão numérica, a segunda diz respeito a operar cognitivamente de modo a modificar a expressão e, por fim, a fase de validação da solução.

Na visão de Krutetskii (1976), a solução de problemas refere-se ao processo cognitivo pelo qual o sujeito recorre aos conceitos aprendidos a fim de elaborar uma estratégia que vise encontrar uma resposta adequada. Para o autor, a solução de problemas implica aperfeiçoamento de esquemas existentes na estrutura cognitiva do sujeito. Lembra ainda o mesmo autor que os sujeitos apresentam aquilo que se pode chamar de "estado de prontidão" para executar uma atividade que envolva solução de problemas matemáticos. As habilidades e as condições psicológicas são fatores favoráveis para que se realize com êxito a atividade de solução de problemas.

Brito (2000) destaca a descrição de estágios apontados por Krutetskii (1976) como básicos para a atividade cognitiva dos sujeitos ao solucionarem problemas matemáticos. Os estágios indicam que o aluno precisa abstrair, reter a informação matemática, em seguida, processar matematicamente as informações obtidas e reter a informação matemática que foi processada anteriormente.

Klausmeier (1977) indica que o processo de solução de problemas está ligado a uma ordem das operações executadas pelos sujeitos, do que resulta falarmos da existência de uma seqüência de operações. A seqüência pode se apresentar distintamente entre si, mas a ordem das operações, segundo o autor, é executada de maneira semelhante na tarefa de solução de problemas.

Mayer (apud Pozo et al., 1994) afirma que o processo de solução de problemas implica compreensão e tradução por parte do sujeito a uma série de expressões e símbolos matemáticos. Após a compreensão e tradução, o sujeito passa a programar estratégias que estabeleçam diferentes submetas, a fim de que, com base em algumas técnicas, chegue à solução. Segundo Mayer (apud Pozo et al., 1994), o processo de resolução de um problema matemático pode ser assim organizado: estágio (problema) ► tradução (baseando-se no conhecimento lingüístico/semântico/ esquemático) ► solução (baseado no conhecimento operativo e estratégico) ► resposta.

A solução de problemas como lembram Pozo et al. (1994) deve ser entendida como um "continuum educacional". Exige tratamento dinâmico, tanto por parte dos professores que os propõem como dos alunos que os executam. É preciso compreender que a solução de problemas não deve ser confundida como uma atividade de simples exercitação repetitiva que envolve relações quantitativas.

O conteúdo matemático, por meio da solução de problemas, deve ser entendido como uma forma de linguagem que favoreça o desenvolvimento de uma série de conceitos fundamentais e de forma articulada, a fim de instrumentalizar o sujeito para a vida e o desenvolvimento do raciocínio.

Um aspecto de grande importância, destacado por Vergnaud (1997), ou seja, a solução de problemas, não constitui apreensão de algumas regras para elaboração e êxito na solução do problema e, sim, constitui-se como uma das situações mais genuínas para a formação de conceitos e desencadeamento de teoremas em ato, o qual vem a ser um invariante relacional importante dentro dos princípios teóricos do referido autor.

Uma das recomendações de autores norte-americanos, na década de 80, do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) punha em destaque a importância a ser dada à solução de problemas matemáticos, sendo este o foco central do processo ensino-aprendizagem da Matemática. As avaliações do desempenho escolar em Matemática, entretanto, têm mostrado o baixo rendimento dos alunos obtido na solução de problemas.

A este respeito, o documento dos Parâmetros Curriculares da Matemática do Ministério da Educação e do Desporto (MEC/1997) afirmava que as orientações dadas a professores a respeito da abordagem de conceitos e métodos na perspectiva da solução de problemas era pouco conhecida no âmbito escolar.

Por via de regra, a solução de problemas é entendida como uma tarefa escolar, tipicamente matemática, ou seja, envolve relações quantitativas e serve para a aplicabilidade de técnicas operatórias do tipo algorítmicas.

Para Pozo et al. (1994), o ensino baseado na solução de problemas implica domínio de procedimentos dos alunos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, a fim de que eles dêem resposta a situações variadas e diferentes.

Os estudos de De Corte e Verschaffel (1987) apontam o fato de que a estrutura semântica do enunciado verbal de problemas aritméticos é fator determinante para o bom desempenho dos sujeitos.

Alves (1999) completa a informação, dizendo que *"...na solução de problemas matemáticos, após a compreensão do enunciado verbal o sujeito elabora uma representação da situação analisada. Um dos fatores responsáveis pela representação correta de um problema é a leitura correta de seu enunciado." (Alves, 1999, p.9).*

Observa-se que, muitas vezes, os alunos já apresentam dificuldades na solução de problemas por motivo de falhas e incorreções no momento da leitura dos enunciados. A intervenção do professor para a solução de problemas matemáticos deveria contemplar este aspecto com maior apuro durante a realização da atividade pelo aluno.

Brito (2000) ressalta o valor e o papel das habilidades verbais e matemáticas para a solução de problemas. As primeiras, referem-se à compreensão do enredo da situação-problema e a outra classe de habilidades contempla o arcabouço lógico das relações a serem estabelecidas pelo sujeito para a compreensão da estrutura do problema.

Sabe-se que não há uma definição consensual sobre solução de problemas, pois esta depende da visão epistemológica e psicológica que se tem sobre o objeto em questão.

Os problemas aritméticos comumente propostos na escola apresentam um enunciado a ser resolvido. No enunciado, a informação dada tem caráter quantitativo, expressa relações de natureza quantitativa e uma pergunta que pede ao aluno determinar uma ou várias quantidades ou relações entre quantidades.

Puig Espinosa e Cerdan Perez (1988) defendem a idéia de que um problema aritmético vai além desta concepção escolar e o definem como uma atividade que requer sempre conceitos, conhecimentos ou recursos não estritamente aritméticos dos contextos que aparecem no enunciado, além de que estes não sejam decisivos no momento de solução.

Com base nesta idéia, podemos dizer que a solução de problemas passa a ser uma atividade que dá lugar à produção de conhecimento, integrando também a sua faceta como atividade de aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos pelos sujeitos a situações novas e até mesmo não familiares.

Um problema matemático de enunciado verbal é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações e simultaneamente o desencadeamento de operações para obtenção de um resultado. Para o sujeito que resolve um problema matemático, a solução pode não estar disponível de início. É aceitável, no entanto, que esta seja construída.

Tomando a perspectiva de Vergnaud, é preciso que a tarefa de solução de problemas matemáticos venha acompanhada da elaboração de situações que provoquem mobilização de conhecimentos pelo aluno, levando-o à elaboração de esquemas de ação, propiciando novos saberes.

Ao contrário de alguns modelos pedagógicos, como aqueles que se baseiam em modelos epistemológicos eminentemente empiristas, um problema matemático não é atividade mecânica de aplicação de fórmulas, mas uma situação que leve os alunos à interpretação do enunciado em busca de planificação da resposta a ser dada.

A construção de um conceito não se dá somente pelo fato de o aluno buscar uma resposta ao problema enunciado. É preciso que a criança construa um campo de conceitos os quais passam a ter sentido num campo de problemas. Cabe lembrar que um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações realizadas pelo sujeito.

Tal como anunciado pelos PCNs (1997), a solução de problemas constitui o contexto apropriado para a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes ligadas ao conhecimento matemático das crianças.

3.2 A estrutura multiplicativa como operação e os tipos de problemas de enunciado

A operação da multiplicação pode ser entendida como uma operação aritmética entre números naturais, cujo ponto de partida são dois números, e o de chegada, um número distinto dos anteriores. Registra-se uma transformação dos primeiros sobre o último número. Dizemos, então que se refere ao conjunto "N x N" de pares ordenados de números naturais e o próprio conjunto N (Maza ,1991a). Tal enunciado pode ser expressado por :

$$N \times N \rightarrow N \text{ ou } (5,3) \rightarrow 15$$

E é nesta concepção de multiplicação que a caracterizamos como uma operação binária. Podemos, no entanto, interpretá-la como uma operação unitária quando os dois números da operação têm papéis distintos, como expressado por:

$$N \xrightarrow{x3} N$$
$$5 \rightarrow 15$$

Esta ambigüidade do conceito de multiplicação traz, do ponto de vista pedagógico uma série de equívocos de natureza conceitual no trabalho dos professores ao objetivarem o ensino desta operação aos alunos na escola. De modo geral, como operação unitária, a multiplicação é entendida como uma operação na qual se tem uma quantidade (multiplicando) transformada por outra quantidade (multiplicador), a qual sinaliza o número de vezes que a primeira quantidade deve repetir.

Esta análise da estrutura geral da multiplicação permite-nos dizer que, do ponto de vista matemático, deve essa operação ser entendida como uma operação binária, mas do ponto de vista pedagógico, do começo de sua aprendizagem pelo sujeito, é pensada como operação unitária.

Outro aspecto a ser lembrado é o fato de considerar-se a operação da multiplicação na qualidade de atividade que envolve problemas de enunciado. Trata-se de evidenciar que o tipo ou melhor, a classificação dos problemas multiplicativos, quando devidamente trabalhados pelos professores, podem auxiliar na construção desta operação. Sabe-se que os tipos de problemas de multiplicação implicam distintos níveis de dificuldade por parte do sujeito que os resolve.

Os estudos de Vergnaud (1991), de Busquets (1997), bem como os de Maza (1991a, 1995) evidenciaram que, de acordo com o tipo e a posição da incógnita do problema, os alunos tendem a apresentar maior ou pior êxito na busca da solução. Isto evidencia que um tipo de problema leva o sujeito a elaborar de forma distinta a análise, a representação e a execução dos dados do problema. Da mesma forma, esses estudos apontam o fato de que os conhecimentos empregados em um ou outro tipo de problema são diferentes e permitem desenvolver um tratamento com relação à multiplicação, como operações mais flexíveis e de maior amplitude conceitual.

Sabe-se que os problemas de multiplicação podem ser classificados como problemas de isomorfismo de medidas ou de produto cartesiano. Os problemas de multiplicação, entretanto, têm sido solucionados por meio da ênfase na estratégia de somas repetidas. Este tipo de estratégia pode ser aplicado em diferentes tipos de problemas multiplicativos em função de serem problemas do tipo: a) razão, b) combinação, c) comparação e d) conversão (Maza, 1991).

Os *problemas de razão* - são aqueles que apresentam uma quantidade de elementos, por exemplo, 4 balas, envolvendo uma razão entre duas quantidades, como R$ 1,00 por bala. Nesse tipo de problema, as quantidades de uma magnitude podem se chamar de "quantidades extensivas" (E) e de "quantidades intensivas" (I) quando estas se referem à razão de uma quantidade em função da unidade de outra magnitude. Esta relação pode ser melhor entendida quando se dispõe de uma quantidade inicial que vai se modificando na medida em que se repete um determinado número de vezes. Nos problemas de razão, a estratégia de solução está ligada ao fato de se repetir a quantidade intensiva segundo o número da quantidade extensiva. Os problemas do tipo razão referem-se a um modelo de operação unitária da multiplicação e também podem ser expressados por " E x I = E".

Os *problemas de combinação* - são aqueles que levam à combinação dos elementos de cada um dos conjuntos dos dados iniciais apresentados na situação-problema. Os problemas do tipo combinação não são, à primeira vista, tal como os de razão, tão facilmente resolvidos por somas repetidas, pois requerem uma nova concepção, ou seja, a noção da operação combinatória. No caso dos problemas do tipo combinação, a estrutura pode ser expressada por " E x E= E", o que significa que, ao dispormos duas quantidades iniciais, ambas devem ser consideradas simultaneamente para que se consiga resolver o problema. Neste caso, a multiplicação é concebida como uma operação binária.

Os *problemas de comparação* - a estrutura dos problemas de comparação refere-se à repetição da quantidade extensiva segundo o número da quantidade intensiva, o que pode ser expressado por "E x I = E". Tal como descrito acima, tal estrutura mantém similaridades com a estrutura dos problemas do tipo razão. A seguinte situação-problema expressa o tipo de problema de comparação: "Um brinquedo de peças para fazer construções custa R$20,00 e um outro brinquedo que contém mais peças de montar custa 3 vezes mais. Quanto precisaria pagar para comprar o segundo brinquedo?"

Nesta situação, o número 3 representa quanto o brinquedo com mais peças é superior ao brinquedo com menos peças. Diferentemente dos problemas de razão, os problemas de comparação apresentam em sua estrutura um termo comparativo denominado "quantificador". E é exatamente ao lidar com a diferença existente entre a razão e o quantificador que pode-se observar a dificuldade das crianças. Isto merece estudos aprofundados para se verificar o grau de complexidade da solução e a própria compreensão do problema.

Os *problemas de conversão* - são aqueles que apresentam questões físicas de conversão de medidas e geralmente trabalhadas somente em nível de séries mais avançadas do final do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Os problemas de conversão, porém, também podem ser solucionados por somas repetidas, o que nos confirma ser essa a estratégia mais freqüente e ao alcance dos alunos para a solucionar problemas multiplicativos. A estrutura dos problemas de conversão pode ser expressada por: "I x I= I".

Os problemas de razão são mais simples de resolver que os de combinação, em função da estrutura conceitual implícita nestes últimos. Aqueles primeiros guardam, ainda, similaridades estruturais com os problemas do tipo comparação. Para que os alunos consigam uma unificação conceitual da multiplicação, é preciso que se estabeleça na prática pedagógica dos professores um entrelaçamento didático entre os tipos de problemas multiplicativos, possibilitando aos alunos a descoberta de que as diferentes formas de solucionar um problema desta natureza correspondem, ao final, a uma solução ligada à operação da multiplicação.

Greer (1992) realizou uma revisão da literatura a respeito dos modelos de situações que envolvem a compreensão da multiplicação e da divisão. Ressalta o autor que a existência das diversas aplicações utilizadas pelo ensino para a aprendizagem da multiplicação e da divisão resulta de estudos e pesquisas bastante complexas no campo da Psicologia a respeito da formação de conceitos matemáticos, em especial, sobre a solução de problemas. O autor buscou evidenciar a complexidade psicológica subjacente a uma suposta simplicidade matemática que muitos professores tentam ensinar aos seus alunos quando submetidos a tarefas que envolvem problemas verbais de enunciado. Em particular, esta complexidade é manifestada quando as operações não são só consideradas do ponto de vista computacional, mas como modelos de situações para a compreensão e domínio da operação de multiplicação.

As classes mais importantes de problemas de multiplicação por diferentes perspectivas teóricas, segundo o autor incluem: a) "grupos e medidas idênticas"; b) "razão e proporção"; c) "medidas de conversão"; d) "multiplicação-comparação"; e) "multiplicação-conversão"; f) "produto cartesiano" g) "área retangular"; h) " produto de medidas".

As distinções entre classes de situações que envolvem a multiplicação e a divisão remetem-nos à discussão do tratamento pedagógico dado nas escolas sobre estas operações.

Segundo Greer (1992) as diferentes classes de problemas de multiplicação e divisão refletem algumas indicações pedagógicas que giram em torno da elaboração de uma variedade de representações externas a fim de tornar a solução dos alunos efetiva em relação à diversidade de situações de multiplicação e divisão existentes.

As representações gráficas mais usuais para situações que envolvem a multiplicação por meio do produto cartesiano pode ser expressado, por exemplo, na figura 2. Esta ilustração representa uma das várias maneiras de solucionar no plano da representação gráfica, as 12 possibilidades de combinação dos elementos de um conjunto de 3 elementos e um conjunto de 4 elementos.

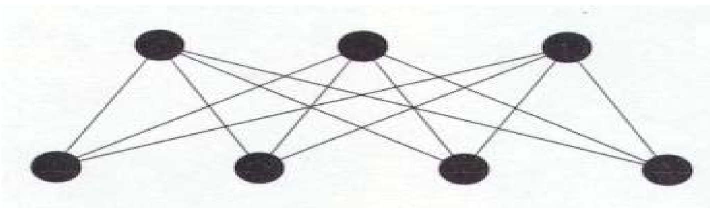


Figura 2 – Representação gráfica indicando um dos vários caminhos para representar as 12 possíveis combinações de elementos entre um grupo de 3 elementos e um grupo de 4 elementos Greer (1992, p.281)

Na figura 3 temos a representação ilustrada, ou melhor, desenhada do produto cartesiano entre os elementos dos conjuntos dados da situação-problema referente ao conjuntos de 4 camisas e 3 bermudas.

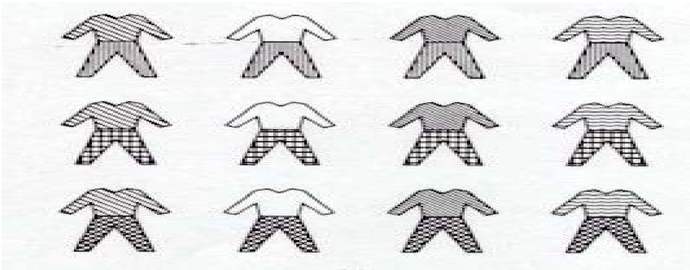


Figura 3 – Representação ilustrada do Produto Cartesiano (Greer,1992, p. 281)

Dois outros tipos de representação também são destacados por Maza (1991b). O primeiro deles refere-se ao diagrama de Venn (figura 4) como uma boa maneira de representar o conjunto de combinações entre todos os elementos do primeiro conjunto com todos do segundo conjunto.

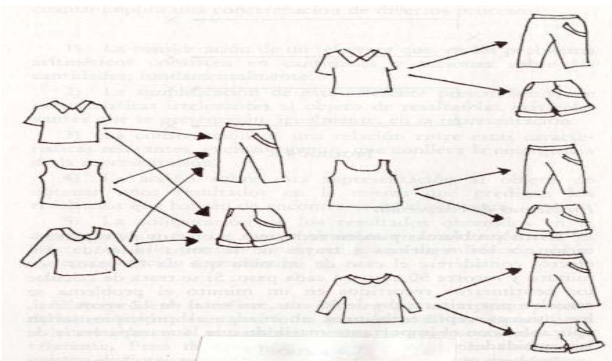


Figura 4 – Representação gráfica por meio do diagrama de Venn para a solução de um problema multiplicativo (Maza,1991b, p.59)

O diagrama de árvore (figura 5) também mostra a combinação possível entre os elementos de ambos os conjuntos e é utilizado em livros didáticos como forma mais abstrata de representação para a solução de problemas de análise combinatória. Este tipo de representação permitiria aos sujeitos aplicar tal diagrama a qualquer outro contexto em que apareçam problemas multiplicativos de produto cartesiano.

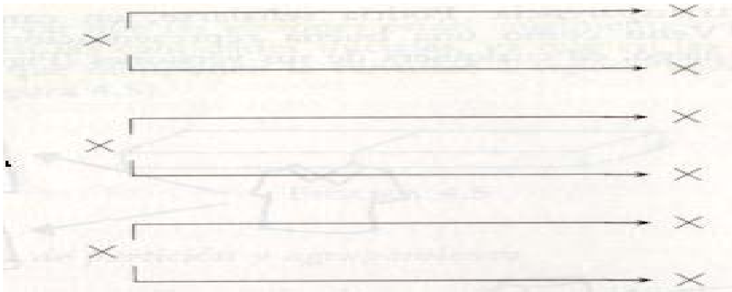


Figura 5 – Representação gráfica por meio do diagrama de árvore para
a solução de um problema multiplicativo (Maza, 1991b, p.60)

Outros tipos de representação gráfica sobre multiplicação e divisão são empregados na aprendizagem destas operações. A figura 6, por exemplo, representa a ilustração de um modelo de números em linha para a representação de cada multiplicação ou, ainda, a divisão por cotas.

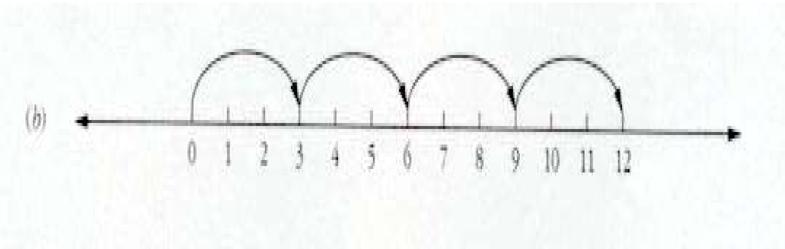


Figura 6 – Modelo de números em linha para representar cada multiplicação
ou divisão em cotas (Greer, 1992, p.281)

A figura 7 mostra por sua vez, a representação da divisão partitiva de 12 objetos:

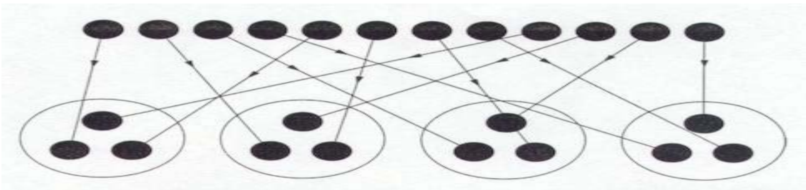


Figura 7 – Representação gráfica por meio da divisão partitiva de 12 objetos
para 4 grupos (Greer, 1992, p.281)

A figura 8 ilustra a representação tradicional para o produto de duas frações, como por exemplo $^1/_3 \; . \; ^1/_4 = {}^1/_{12}$.

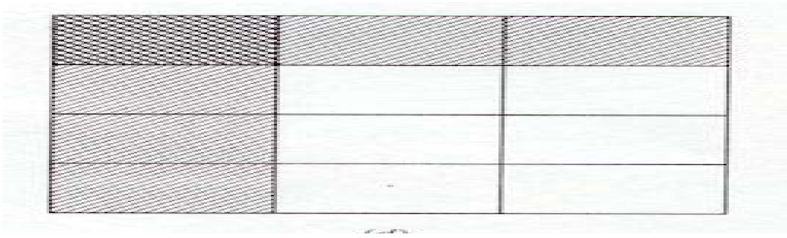


Figura 8 – Ilustração de uma representação tradicional para o produto de duas frações (Greer, 1992, p. 281)

Segundo Greer (1992), dois pontos podem ser destacados a respeito destas representações: 1) elas representam facilmente os conjuntos de objetos; 2) a referência conceitual e o cálculo são aspectos dinâmicos a serem contemplados nestas representações e podem ser muito mais poderosos que qualquer representação estática sobre a multiplicação.

É importante perceber que o modo pelo qual uma situação é interpretada pelo aluno não é inerente à situação, pois depende da própria estrutura conceitual do estudante sobre um determinado conteúdo matemático em questão. As representações gráficas não são, evidentemente, instrumentos estáticos de conhecimento utilizados pelos professores. A construção de representações gráficas em solução de problemas é bastante complexa e implica diversos processos, como a construção de dados relevantes, o estabelecimento de relações entre as quantidades e as ações a serem executadas, a comparação dos resultados obtidos, entre outros aspectos.

Ao longo dos últimos anos encontramos um grande conjunto de estudos que têm procurado evidenciar qual é a origem dos erros dos alunos ao elegeram inadequadamente uma operação para solucionar um problema matemático, assim como investigaram os fatores que interferem na escolha adequada da operação a ser realizada.

A compreensão em leitura e o desenvolvimento conceitual sobre a operação em questão são alguns dos fatores descritos como intervenientes para a escolha adequada da operação na solução de problemas. Os dados do enunciado ligados ao contexto, a familiaridade dos alunos com os termos e o tamanho dos números também foram apontados pela literatura como fatores importantes.

Outro conjunto de fatores tem sido estudado, os quais parecem influenciar de maneira dependente na decisão do sujeito em tarefas de solução de problemas. São eles: a) os modelos intuitivos que o sujeito possui de cada operação; b) os tipos de números, especialmente as diferenças entre realizar problemas com números naturais ou números decimais; c) a estrutura semântica do problema; d) as preferências numéricas com relação ao tamanho dos números.

Desde a década de 80, pesquisadores como Fischbein et al. (1985); Greer (1992); Bell (1989) têm centrado sua atenção em como estudantes do Ensino Médio solucionavam problemas envolvendo números decimais. Os autores evidenciaram que um mesmo tipo de problema de estrutura multiplicativa contendo números decimais e um outro contendo números naturais apresentavam por parte dos alunos a eleição e o cálculo de operações distintas. Para um problema de multiplicação, quando se apresentavam números decimais, os alunos escolhiam a operação da divisão como forma de solução para o problema, ao passo que, para o mesmo tipo de problema com números naturais, os alunos escolhiam, acertadamente, a operação da multiplicação para resolver a situação.

Os alunos demonstravam estar pautados nos números decimais contidos no problema como números que deveriam resultar em um número ainda menor e, por isso, utilizavam a operação da divisão para tornar os números do problema ainda menores. Cabe, no entanto, ressaltar, conforme lembrados por aqueles pesquisadores, que esta idéia é correta entre os naturais, mas não se aplica aos números decimais quando se consideram decimais menores que a unidade (Maza, 1991b).

Estes resultados permitiram a elaboração da hipótese de que os alunos têm crenças prévias quando enfrentam situações que envolvem números decimais, como é o caso de acreditar que a multiplicação é uma operação que produz sempre um resultado maior que qualquer um dos dois fatores da operação ou ainda, que a divisão sempre produz um número menor e só é possível quando o dividendo é maior que o divisor.

Estes conceitos prévios dos alunos foi detalhadamente estudada por Fischbein e outros (1985) e denominada de "modelos intuitivos ou implícitos". Segundo estes autores (apud

Maza, 1991b) os modelos dos alunos em solução de problemas estão ligados ao fato de que:

> *"Cada operação fundamental de aritmética fica ligada a um implícito, inconsciente e primitivo modelo intuitivo. A identificação da operação necessária para resolver um problema com dois dados numéricos tem lugar não diretamente; e sim mediatizado pelo modelo. O modelo impõe suas próprias restrições no processo de busca" (Maza, 1991b, p. 43).*

O modelo intuitivo da multiplicação seria então o das somas repetidas e talvez por isso, os alunos tendem a crer que a multiplicação sempre resulta no acréscimo da quantidade, pois estão pautados na idéia de repetição de um número tantas vezes quantas se indica no outro número.

Os alunos apresentam menor dificuldade quando o multiplicando é um decimal; porém quando o decimal ocupa o papel do multiplicador, as dificuldades são enormemente crescentes. Tal fato evidenciou, segundo os referidos autores, a idéia de que a soma repetida é um modelo intuitivo bastante poderoso e viável com forma de solução para problemas multiplicativos entre os alunos.

Segundo Bell e Greer, et al. (1989) o modelo intuitivo é aplicável em situações simples nas quais um número ou medida é reproduzida várias vezes. Em situações mais complexas, porém, (números maiores ou números decimais), a utilização do modelo de adições repetidas, implícita para a multiplicação, impõe constrangimento quanto à compreensão do sujeito e cria dificuldade para solucionar o problema.

Assim, a teoria de modelos intuitivos estaria aberta para a crítica de que estes dão conta da solução por meio das somas sucessivas entre as quantidade do problema, mas o mesmo modelo não pode ser estendido quando se trata de operar com números decimais.

Com base nesta crítica, outro fator a ser destacado refere-se às preferências numéricas dos alunos. Bell et al. (1989) enfatizam que realizar um problema no qual se proponha a divisão de "4 :12" apresenta menos êxito do que problemas cuja divisão fosse a de "12 : 4". Os autores acreditam que há um pre-conceito de que o dividendo deva ser menor que o divisor; o que corresponderia a um tipo de solução voltada à percepção numérica em detrimento da percepção estrutural do problema. Neste caso, impera a idéia de "tamanho relativo" entre divisor e dividendo, o que resultaria afirmar que a solução de um problema estaria guiada muito mais pela percepção numérica que os conceitos descritos nos modelos intuitivos de Fischibein.

Acredita-se, no caso das aprendizagens escolares sobre solução de problemas de multiplicação que a construção desta operação não se encerra somente segundo os conceitos prévios dos alunos por meio dos modelos intuitivos, conforme defendido por Fischbien e outros (1985) a respeito das somas repetidas. A ênfase de tal modelo no processo de aprendizagem implicaria restrições na construção da operação de multiplicação dos alunos, uma vez que estes iniciam a compreensão da multiplicação pela ótica do conjunto numérico dos naturais, mas passa também pela ótica dos números decimais.

A identificação e a compreensão por parte dos alunos com relação aos diferentes tipos de problemas multiplicativos e suas representações gráficas têm um papel importante no processo de aprendizagem desta operação.

Cabe lembrar que a multiplicação ensina-se também pela ótica de outros modelos, como o produto cartesiano e implica outros problemas conceituais que devem ser contemplados como princípios pedagógicos na prática docente dos professores de Matemática, sobretudo com alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental, tal como se vem enfocando neste estudo.

3.3 Múltiplos Comuns: uma faceta da estrutura multiplicativa – A construção de relações simultâneas entre adições e multiplicações

Os estudos realizados por Piaget e colaboradores (1977a, 1977b) evidenciam alguns dos problemas centrais a respeito da abstração reflexionante e suas complexas relações com a abstração empírica tal como exposto no capítulo anterior.

No que tange às construções aritméticas elementares, um dos focos das investigações procura abarcar a análise quanto ao processo de abstração reflexionante e a construção de múltiplos comuns.

A fim de clarificar a problemática da abstração reflexionante nas crianças em um conteúdo específico como o da operação da multiplicação, é preciso compreender e distinguir que as operações multiplicativas de classes e relações constituem construções de classificações ou seriações de dois a mais critérios simultâneos. Estas estão relacionadas às operações aditivas, apresentando dificuldades simples para o sujeito.

No entanto, a aquisição e compreensão da operação multiplicativa apresenta-se de forma menos natural que a aditiva. Freqüentemente, os alunos substituem composições aditivas por relações multiplicativas, seja em tarefas com algoritmos ou mesmo naquelas que envolvem problemas de enunciado. Muitas vezes, observa-se que os alunos sabem apenas recitar a expressão da multiplicação conforme a aquisição escolar da tabuada. Piaget e colaboradores (1977a, 1977b) analisam as relações entre composições aditivas e multiplicativas e, valendo-se do ponto de vista da abstração reflexionante como objeto de investigação, tenta, nas tarefas que propõe às crianças, neutralizar as questões lingüística e simbólicas entre adição e multiplicação.

A análise realizada pelo referido autor, permite-nos compreender o processo de abstração de múltiplos comuns com base na composição de dois conjuntos por meio de fichas amarelas apanhadas duas a duas, e azuis, tomadas três a três, tal como a tarefa replicada nesta pesquisa e descrita no primeiro capítulo.

Nos dois primeiros níveis (IA e IB), a abstração está ligada aos dados puramente perceptuais, tal como a correspondência ótica. Além disso, há idéia implícita de terem sido postos mais freqüentemente fichas no grupo das amarelas, mas, em contrapartida, a criança traduz ilusoriamente este número de operações sobre o número dos objetos e sobre o próprio resultado.

Conforme destaca Piaget (1977c):

> *" ... O único aspecto da sua ação de que tomam consciência é o de haver acrescentado, sem parar, duas fichas de um lado e três fichas de outro... centram sobre o resultado aditivo destes transportes... saber quantos transportes ocorreram, isto é, qual o número de vezes que eles juntaram 2 ou 3 , é uma questão bem diferente..." (Piaget, 1977c, p.34)*

Por volta dos 7-8 anos, é possível verificar que as crianças antecipam as igualdades, mas sem prever corretamente a quantidade total da composições. É possível realizar a tarefa por meio de tentativas sucessivas. Pode-se dizer que há uma certa "tomada de consciência" quanto ao número das operações correspondentes a *"n vezes x"*.

O problema está no fato de a criança compreender que, para atingir a igualdade entre grupos de 3 azuis e grupos de 2 amarelas, o número *"n"* em *"n* vezes *x"* é independente do valor dos x, e que tal fato bastaria por si só para assegurar a equivalência entre os conjuntos. Para Piaget (1977c):

> *"se se visa à igualdade entre as duas coleções, procedendo em relação a uma delas com "n vezes x", e , com relação à outra, n' vezes x', então, se x > x' deve-se compensar esta diferença por n < n', e, reciprocamente, se x < x', ou seja, procedendo ainda de maneira aditiva por adjunções, tentando novos montes, começam a compreender um princípio essencial da multiplicação: a relação inversa entre o multiplicador e o multiplicando, no caso de igualdade de produtos" (Piaget, 1977c,p 37).*

As crianças de 9-10 anos demonstram compreensão do problema, logo de início e conseguem resolvê-lo sem tateios. As crianças explicitam que pegaram 2 vezes 3 fichas azuis e 3 vezes as fichas amarelas. Admitem que apanharam ao mesmo tempo 2 (amarelas) ou 3 (azuis), e que isto poderá ser feito infinitamente com as quantidades sem se alterar o valor total no final da tarefa.

No nível da abstração reflexionante, as crianças prescindem de compensações por tateios e resolvem pelo estabelecimento de relação entre as unidades. Explicitam que a relação entre as quantidades seja sempre o dobro, explicando também a compensação entre essas quantidades.

As tarefas propostas para análise do processo de abstração em relação à construção dos múltiplos comuns, como um dos princípios para a compreensão da multiplicação, mostra-nos diferentes dificuldades das crianças durante a aquisição desta operação.

As crianças de 4-5 anos procedem por adjunções sucessivas e suas condutas reforçam a total incompreensão da multiplicação, que não é nem mesmo ainda uma adição de adições. Estas crianças mais novas ainda procedem por uma simples sucessão de adições, o que não é a mesma coisa que uma adição de adições, o que se deve à falta simultânea de "um plano prévio e de uma síntese imediata" (Piaget, 1977c,p.41).

A etapa seguinte diz respeito à compreensão parcial da multiplicação, ou seja, entendida esta como adição de adições. Subseqüentemente, a operação multiplicativa "n vezes x" é compreendida, constituindo o produto de uma abstração reflexionante com base nas adições de adições.

Do ponto de vista da análise, quanto às abstrações reflexivas, pode-se dizer que sua constituição se dá por meio de etapas progressivas: a criança não tem consciência de suas próprias ações de adjunções - realiza abstração dos "pacotes" de "x elementos transportados" e não transportados, ainda sobre a relação "n vezes" - a abstração do número "n" das operações, tomando consciência e conceitualizando explicitamente a relação entre os elementos estruturais em jogo (Piaget, 1980).

A solução de problemas envolvendo a noção de múltiplos comuns, entendida como uma noção subjacente à estrutura multiplicativa implica tratamento e desmembramento das operações e não dos objetos. É preciso que os sujeitos, ao solucionar problemas desta natureza centrem-se sobre as ações e, ao mesmo tempo, sobre seu próprio mecanismo como operação multiplicativa. Não é possível que se pense somente sobre os resultados obtidos na solução do problema. Este processo do qual se vale o sujeito supõe uma abstração mais profunda, de natureza "reflexiva" e não somente empírica.

3.4 Operações Combinatórias: outra faceta implícita na estrutura multiplicativa – A formação da noção de acaso e probabilidade

Um modelo matemático tratado nas escolas, mas também utilizado no dia-a-dia das crianças, é a combinatória. Segundo Piaget e Inhelder (1951), a compreensão das operações combinatórias como combinações, permutações ou arranjos foram estudadas tendo em vista as noções de acaso e das probabilidades. As operações combinatórias desenvolvem-se progressivamente e, em torno dos 12-13 anos de idade, a criança é capaz de encontrar, pelo método sistemático, todas as permutações existentes entre os elementos de um conjunto.

Sabe-se que as operações concretas determinam o acesso às operações formais. Um exemplo desse acesso refere-se à colocação de estruturas operatórias de tipo formal, como a "combinatória", o que leva a uma generalização das relações de classificação e seriação.

A idéia de azar, ou melhor, a elaboração da noção de acaso é resultado de um trabalho operatório prévio que emparelha com a estrutura multiplicativa e a noção de proporcionalidade.

Assim, Piaget (1973b) esclarece que a construção da noção de acaso se desenvolve tomando-se por base a conservação da quantidade e a relação multiplicativa entre as partes e o todo. Esta definição implica compreensão de que a evolução da idéia de acaso está subordinada à construção das estruturas operatórias do sujeito.

Do ponto de vista epistemológico, a noção pode ser entendida como *"... interferência de séries causais independentes e que corresponde assim ao que se pode designar em geral sob o termo "mistura". Entretanto, a mistura é irreversível e aumenta com uma probabilidade cada vez mais fraca de volta ao estado inicial" (Piaget, 1973b, p. 25).*

Piaget (1973b) lembra, com isso, que as crianças do nível pré-operatório, pelo fato de não terem consolidado as operações inversas, valem-se de uma "intuição da irreversibilidade" para conseguir compreender a idéia da mistura aleatória. Isto significa distinguir, na tarefa realizada pela criança, o plano da ação e o da noção propriamente dita. No plano da ação, mesmo com ausência da reversibilidade, as crianças mais novas são capazes de perceber flutuações furtuitas, tal como denominado por Piaget e Inhelder (1951). As crianças conseguem, por exemplo, identificar algumas "probabilidades subjetivas" de uma dada situação, como a de prever que poderá ter maior dificuldade em atravessar a rua, quando esta está cheia de carros, do que quando esta estiver com menos carros.

Piaget (1973b), no entanto, destaca que somente depois de o sujeito construir estruturas de operações reversíveis será capaz de compreender e existência dos processos em jogo, desvinculando-se do acaso e chegando a um cálculo das probabilidades entre os elementos de uma determinada situação.

Dessa forma, aplicar operações sobre os objetos traz no pensamento formal, a substituição destes por hipóteses e proposições, aplicadas a novas operações engendradas pelo estágio anterior. A lógica das proposições refere-se a sistemas de classificação e seriação complexos, demarcando um "pensamento" denominado de "hipotético–dedutivo", o que faz, no caso das operações combinatórias, que a criança chegue à quantificação das probabilidades e às operações de combinação pertinentes em uma dada situação.

Dolle e Bellano (1998) completam que a informação, dizendo que a aquisição das operações combinatórias permitirá ao sujeito a construção e a utilização, segundo um método sistemático, de todas as maneiras possíveis de agrupar os objetos de uma coleção. Os autores acrescentam que a elaboração de todas as diferentes maneiras de agrupar os objetos leva o sujeito à superação de combinações por tateamento empírico "... *a uma organização das ações e a uma generalização dos processos cognitivos ao nível operatório formal (Dolle e Bellano, 1998, p. 119).*

Uma distinção entre os três mecanismos operatórios do ponto de vista psicológico e como técnicas de contagem, do ponto de vista matemático, os quais envolvem a análise combinatória, pode ser sintetizada na figura 9:

	Definição e Situação-problema	*Formalização Matemática*
Combinações	**Definição-** Situações que remetem escolher, de um total maior de elementos, uma quantidade menor ou igual, não importando a ordem. A combinação simples é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente de outro apenas pela natureza dos elementos componentes. *Para um grupo de 3 sujeitos: João, Pedro e Jorge, a combinação entre eles será contada uma única vez.* Em outro exemplo, podemos calcular: *"Quantas comissões de 2 pessoas podem ser formadas com 5 alunos (A, B, C, D, E) de uma classe?" AB, AC, AD,AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.* Na formação das comissões, AB e BA, representam a mesma comissão. Os alunos A e B, não importa a ordem, formam apenas uma comissão (Giovanni e Bonjorno, s/d). **Situação-problema-** *Tenho 10 pessoas e desejo formar grupos com 3 pessoas para trabalhar. Quantos grupos diferentes eu poderia formar ?*	Para a situação-problema enunciada da combinação de 10, tomados 3 a 3, temos: $C_{\eta,\rho} = \dfrac{\eta!}{\rho! \text{ x } (\eta-\rho)!}$ Como resultado da situação-problema proposta, temos: $C_{10,3} = \dfrac{10!}{3! \text{ x } (7)!}$

	Definição e Situação-problema	*Formalização Matemática*
Arranjos	**Definição-** Situações que remetem escolher, de um total maior de elementos, uma quantidade menor ou igual, importanto, sobretudo, a ordem entre os elementos. O arranjo simples é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes (Giovanni e Bonjorno, s/d). **Situação-problema-** *Tenho os dígitos 1,2,3,4,5. Quantos números com 3 algarismos sem repetição eu posso ter ?* Outro exemplo de arranjos seria a de calcular as combinações com 5 algarismos e descobrir quantas centenas de 3 dígitos podemos formar, sem repetição dos dígitos na mesma centena.	Ao fazer combinações de 5 a 3, poderíamos pegar o 315, mas não poderíamos inverter a ordem. Temos então, arranjo de 5 tomados 3 a 3, sendo expresso por: $A\ \eta,\rho = \dfrac{\eta!}{(\eta - \rho)!}$ Como resultado da situação-problema proposta, temos: $A\ 5,3 = \dfrac{5!}{2!}$ No caso da solução para a situação-problema dos algarismos, temos: $A\ 5,3 = \dfrac{5!}{2\ !}$
	Definição e Situação-problema	*Formalização Matemática*
Permutações	**Definição-** A operação de permutação é um caso particular dos arranjos. Implica troca de ordem e de posição. Situação que remete contar o número de vezes diferentes de permutar, ou seja, que troca de lugar. Troca um número de elementos de um mesmo conjunto, trocando, assim, um número de elementos de um mesmo conjunto. Dessa forma, o arranjo de "n" elementos tomados "n a n", é igual a permutação de "n". **Situação-problema-***Tenho 5 algarismos: 1,2,3,4,5. Quantos números com 5 algarismos distintos eu posso formar ?* Ou ainda, *dada a palavra ROMA, quantos anagramas eu posso formar ?*	Permutar 5 algarismos é o mesmo que permutação de 5, o que corresponde a 5 ! Para a situação-problema enunciada sobre a permutação de 5 algarismos, temos: $P\eta = \eta!$ $P\eta = \eta\ .\ (\eta - 1)\ .\ (\eta - 2)\ .\ (\eta - 3)\ ...$ Como resultado da situação-problema proposta, temos: $5\ ! = 5\ .\ 4.\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 120$ No caso da palavra ROMA, temos: $4\ ! = 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 24$

Figura 9 - Quadro explicativo da distinção entre Combinações, Arranjos e Permutações

A análise combinatória corresponde a um conceito a ser apreendido pelos alunos no Ensino Médio por meio de conteúdos determinados. Do ponto de vista conceitual, no campo da Matemática , a análise combinatória refere-se ao princípio fundamental da contagem, o que corresponde lidar com a "idéia de possibilidades". A aquisição do princípio de contagem se dá por meio de técnicas específicas, como a de combinação, arranjos e permutações.

Cabe aqui, no entanto, ressaltar que inúmeros estudos, como os de Vergnaud (1988;1991), English (1991), Nunes e Bryant (1997) têm sido feitos a fim de evidenciar que o surgimento desta operação aparece como princípio multiplicativo sob a forma da combinatória em crianças mais novas. Ainda que não seja em nível formal, atividades desta natureza devem ser contempladas no prática docente dos professores em tarefas de solução de problemas com crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental.

3.5 Dados de pesquisa – Desempenho matemático, solução de problemas aritméticos e problemas de estrutura multiplicativa

Uma pesquisa realizada pela CENP (1988) sobre avaliação do desempenho escolar com 6013 alunos em final de 2ª série da rede pública revelou que a única operação, no caso a da adição, é totalmente dominada pelos alunos no sentido de técnica operatória. Um terço dos alunos consegue realizar a subtração com recurso e multiplicações e divisões elementares. Esse resultado permitiu a discussão da contradição entre um ensino baseado no aspecto quantitativo- ensino das quatro operações nas duas primeiras séries do 1º grau diante do ensino baseado no aspecto qualitativo- aprendizagem com compreensão das operações de adição e subtração nos dois primeiros anos de escolaridade.

Estudar as competências matemáticas dos alunos nas séries iniciais também foi objeto de investigação realizada por Brito et al. (1998). Os autores investigaram 410 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental por meio de uma prova contendo 15 problemas que envolviam estes conceitos matemáticos: a) sistema de numeração decimal, b) princípio multiplicativo, c) operações aritméticas, d) formulação de problemas, dentre outros conceitos. Os resultados obtidos quanto ao desempenho dos alunos mostram que os conceitos que envolveram geometria apresentaram um percentual baixo de acertos neste item. A análise quanto à diferença do desempenho considerando a variável gênero indicou não haver diferença significante entre os alunos.

As pesquisas disponíveis pela base dados do E.R.I.C/92-97 sobre as investigações acerca da solução de problemas têm evidenciado uma preocupação e foco bastante grandes em relação a essa temática por parte dos pesquisadores, envolvendo estudos com crianças, jovens e até mesmo professores. Diferentes vertentes de pesquisa, como as norte-americanas, têm focalizado a solução de problemas como atividade fundamental dos processos cognitivos dos alunos ao realizarem tarefas desta natureza.

Kamii e Lewis (1991) realizaram um estudo sobre o desempenho em Matemática na escola primária, apresentando um estudo com alunos de 2ª série para demonstrar que o desempenho em testes de Matemática já realizados nas escolas primárias apresentam resultados diferenciados dos alunos em relação a respostas quando entrevistados segundo a instrução de abordagem construtivista ou de forma tradicional. Os resultados indicaram que na instrução construtivista os estudantes demonstraram pensamento de ordem superior em tarefas que envolvem valor de lugar, adição com dígitos duplos, problemas verbais e estimativa de quantidades.

Carey (1991) estudou sentenças numéricas ligadas a problemas de palavra de adição e subtração e seus respectivos símbolos. O estudo solicitou primeiramente de 24 crianças de 3 classes diferentes que escrevessem sentenças de número e que também selecionassem sentenças numéricas com alternativa, apropriadas para os problemas. Os resultados indicaram que as crianças poderiam ser caracterizadas em cinco agrupamentos de acordo com sua flexibilidade em aceitar o número de sentenças alternativas e que a flexibilidade foi relacionada ao tamanho do número.

Mulligan (1992) realizou um estudo longitudinal com 70 crianças sobre as soluções de problemas de multiplicação e divisão. Foram analisadas estratégias de solução, identificando o nível de desempenho e a própria estratégia utilizada. A autora encontrou estratégias de solução que foram classificadas em três níveis: a) contagem; b) modelo não direto de contagem, ou, ainda, modelo visando o elemento aditivo ou estratégias de subtração e, por fim, c) utilizando os fatos já conhecidos e presentes nas operações aritméticas. Os resultados obtidos mostraram ainda a inclusão de 17 estratégias de solução.

Levain (1992) analisou a solução de problemas de multiplicação de crianças que haviam terminado o primeiro ciclo da escola primária francesa. Os resultados indicaram que crianças de 10-11 anos solucionaram problemas de multiplicação e divisão considerando fatores da estrutura representacional do problema, como os valores numéricos e o contexto declarativo do problema ligado ao enunciado.

Carey e Campbell (1992) relataram pesquisas que averiguaram como estudantes de primeiro grau comunicam idéias matemáticas por meio do uso de símbolos como forma de estruturação para investigar a relação parte-todo. Discutem as habilidades das crianças ao resolver problemas quando se utilizam da união entre palavras do problema e símbolos. O estudo revelou a necessidade de se dar tratamento entre a ligação de problemas de palavra e símbolos, destacando, ainda, a importância do contexto para a compreensão dos símbolos e do desenvolvimento de seu significado.

Graeber (1993) realizou uma pesquisa sobre as concepções errôneas sobre multiplicação e divisão. A autora problematiza a generalização que se faz sobre a multiplicação entendida como uma operação que parece indicar o aumento das quantidades envolvidas ao passo que a divisão é, muitas vezes, trabalhada como uma operação que "diminui” as quantidades em jogo.

Carpenter e outros (1993) estudaram modelos de processo de solução de problemas de crianças de jardim da infância. Após um ano de instrução, 70 crianças de jardim da infância foram individualmente entrevistadas sobre como elas solucionavam problemas básicos de palavras, problemas que envolviam muitos passos e problemas não rotineiros. Do total de sujeitos investigados, 32 (45,7%) crianças usaram uma estratégia válida para todos os nove problemas e 44 (62,8%) responderam corretamente sete ou mais problemas. O modelo elaborado pelos autores forneceu a indicação de estratégias similares empregadas pelas crianças para solucionar os problemas.

As pesquisas sobre solução de problemas têm mostrado que as crianças possuem compreensão matemática considerável e, muitas vezes, anteriores à instrução formal. Conforme defendido por Vergnaud (1991), essa compreensão está diretamente ligada as situações cotidianas com as quais as crianças estão expostas diariamente.

A análise do desempenho matemático e dos procedimentos utilizados na solução de problemas aritméticos de enunciado verbal também foi realizada por Brito (2000) com 22 alunos de quarta série de uma escola particular e 62 estudantes de duas escolas públicas que freqüentavam a quinta, sexta, sétima e oitavas séries do Ensino Fundamental. A autora destaca que o estudo evidenciou a dificuldade dos sujeitos quanto à leitura do problema para obtenção da informação matemática. A etapa de se chegar a elaboração do algoritmo, assim como o seu respectivo cálculo foi obstruída pela etapa anterior a respeito da compreensão dos elementos semânticos e literais do enunciado dos problemas. O estudo evidencia também que os sujeitos pareceram demonstrar envolvimento com a tarefa de solucionar os problemas, mas isto, segundo a autora, parece dar-se em razão do efeito da aprendizagem com respeito a este tipo de atividade, ou seja, a de o aluno fazer a "atividade pela atividade" sem demonstrar preocupação com os procedimentos a serem utilizados para chegar à solução.

A descrição e interpretação dos procedimentos das crianças diante das atividades de solução de problemas que realizam também se constituem um aspecto importante a ser analisado com relação aos processos cognitivos.

Neste sentido, o raciocínio lógico-matemático utilizado em tarefas de solução de problemas por crianças de 4ª série foi investigado por Brino e Nale (2000) evidenciando que os sujeitos conseguem fazer com maior precisão a descrição das contas a serem realizadas no problema do que a descrição do raciocínio empregado. A memorização dos passos ensinados pelos professores e de uma leitura dos dados numéricos do enunciado mostraram ser predominantes como formas de resolver problemas aritméticos.

Um ensino voltado à solução de problemas parece ainda priorizar a memorização de técnicas algorítmicas como atividade cognitiva fundamental dos alunos em face de tarefas desta natureza.

Situações que envolviam jogos de estratégia sobre noções de multiplicação foram investigadas por Brenelli (1996) evidenciando que os procedimentos dos sujeitos revelam o processo de construção conceptual e que não se confundem, necessariamente, com a habilidade de efetuar operações gráficas.

Lopes (1997) analisou a diferença entre o desempenho e a compreensão em situações de adição e subtração em 12 crianças de 2ª e 3ª séries do Ensino Fundamental, assim como verificou o nível de abstração ligado à inversão das operações aritméticas. Os resultados evidenciaram que o desempenho matemático em adição e subtração não depende de os sujeitos apresentarem níveis de abstração reflexiva, mas que o fator compreensão dos sujeitos, também analisado no estudo, apresentou relação com níveis superiores de abstração.

Guimarães (1998) verificou os progressos apresentados por 17 crianças da 3ª série do Ensino Fundamental quanto a construção da noção de multiplicação por meio de intervenção pedagógica com jogos de regras. A autora buscou ainda, relações entre as noções multiplicativas e a abstração reflexiva. Os resultados evidenciaram que os sujeitos apresentaram bom desempenho matemático nas tarefas escolares de multiplicação. Foram encontradas relações entre melhores níveis de abstração e os sujeitos que apresentaram níveis mais elaborados quanto à construção da multiplicação. Os sujeitos apresentaram progressão nos níveis de classificação do desenvolvimento cognitivo, revelando que o processo de intervenção pode contribuir na construção das operações multiplicativas dos sujeitos.

Anghileri (1989) investigou em uma fase exploratória da pesquisa, a interpretação verbal usualmente empregada para o símbolo da multiplicação de 62 crianças por meio de entrevistas individuais. Na fase específica, buscou revelar algumas das dificuldades e procedimentos utilizados por 234 crianças com relação às tarefas de multiplicação, como tarefas que envolviam a adição repetida, distribuição, fator escalar e produto cartesiano. As crianças foram subdivididas em três grupos: alunos que estavam acima da média, na média e subdivididos abaixo da média em relação ao desempenho escolar em Matemática. Os resultados mostraram uma discrepância entre as recomendações encontradas nos livros das escolas primárias e as expressões comumente utilizadas pelas crianças como forma de interpretação da multiplicação. O estudo evidenciou que a grande maioria dos livros didáticos utilizam a expressão correta para "2 x 2" como "2 multiplicado por 2" ao passo que grande parte de professores e crianças utilizam com freqüência a expressão: "2 vezes 2 " ou "dois dois". Os resultados obtidos na fase específica indicaram predomínio do procedimento de contagem para a multiplicação e o grupo dos alunos abaixo da média utilizaram mais a contagem um a um. O estudo evidenciou que os fatos da multiplicação foram raramente usados até mesmo entre as crianças com maior desempenho, mas que estas apresentam também maior variedade de procedimentos para solucionar os problemas de produto cartesiano.

Para uma criança que está em processo de aprendizagem da operação da multiplicação, tal discrepância entre as formas diferentes de expressão (formal e cotidiana) pode apresentar-se como uma dificuldade considerável. Beilin (apud Anghileri, 1989) lembra que formas "ativas" de expressões sobre multiplicação, utilizando-se a palavra "vezes" são geralmente mais fáceis para adultos e crianças em comparação a expressão de forma "passiva", utilizando-se: multiplicado por.

A ambigüidade existente entre a interpretação dada pelas crianças à multiplicação e as informações trazidas pelos livros didáticos possa apresentar-se, talvez, como um aspecto de menor importância quando a criança já tenha compreendido a lei comutativa da multiplicação. Na fase inicial da aquisição desta operação, porém, valer-se da linguagem natural da criança sobre multiplicação parece ser um fator imprescindível para aprendizagens mais efetivas sobre a referida operação.

Os procedimentos de solução de professores foi estudado por Guershon e Merlyn (1995). Esses autores analisaram a solução de problemas multiplicativos de 32 professores que atuavam em classes elementares da escola primária. Os dados mostraram que os professores resolveram os problemas por meio de um raciocínio que se aproxima de conceitos de razão e proporção. As soluções dos professores evidenciaram, no entanto, que estes chegavam a soluções corretas dos conceitos somente usando o método de tentativa e erro.

Uma das repercussões do processo ensino-aprendizagem está diretamente ligada com a interação professor-aluno. Esta interação tem sido objeto de estudo de alguns pesquisadores Martínez (1998), Higino e Cruz et al. (2000), Hazin e Da Rocha Falcão (2000), indicando que o professor tende a tornar-se um elemento facilitador no aprendizado dos alunos quando este se propõe, entre outras atuações, a elaborar estratégias de atuação pedagógica com base nas explicações dadas pelos estudantes com base nas atividades que estão realizando.

Higino e Cruz et al. (2000) investigaram crianças de 2ª e 3ª séries do Ensino Fundamental de uma escola pública de Recife, procurando identificar os avanços obtidos pelos sujeitos acerca do sistema de numeração decimal após situações experimentais de aprendizagem utilizadas pelo professor. O estudo evidenciou que a forma diferenciada de atuação pedagógica do professor propiciou uma grande variação de registros para compreensão das tarefas que envolvem o sistema de numeração decimal, assim como modificações nas explicações verbais dos alunos.

Em outro estudo, Higino e Cruz (2000) investigaram duas professoras da rede pública e particular, respectivamente, sobre seus objetivos de ensino em relação à Matemática com alunos de educação infantil, demonstrando que não há preocupação por parte das docentes em identificar e intervir em relação às estratégias e raciocínios desenvolvidos pelos alunos em tarefas de solução de problemas. As professoras se mostraram centradas na importância de tarefas de solução de problemas matemáticos, com ênfase, entretanto, nos momentos de sistematização da aprendizagem, levando-as a resolver situações-problema rotineiramente solucionadas pelas crianças.

A relação professor-aluno diante das aprendizagens escolares parece estar determinada, entre outros fatores, pelo pensamento dos professores com relação às crenças e concepções de sua prática educativa. As representações dos professores sobre sua prática constitui referentes teóricos, tanto para impulsionar novas condutas de atuação como docente, assim como para capacitá-lo na qualidade de professor reflexivo, ou ainda, legitimá-lo ao paradigma do professor como pesquisador, em especial no campo da Matemática (Martínez, 1998).

Carpenter e outros (1996) realizaram uma pesquisa sobre instrução cognitiva utilizando um guia que favorecesse uma base de conhecimento matemático para a reforma educativa na área. O programa contido no referido guia apresentava sugestões para crianças da escola primária, contemplando o fato de que os alunos nesta faixa etária ingressam na escola com conhecimento matemático intuitivo e informal. A idéia defendida pelos autores é a de que é possível servir-se do conhecimento informal trazido pelas crianças como base para o desenvolvimento da Matemática formal requerida no currículo da escola primária. Descreve um modelo de pesquisa baseado na forma de raciocinar das crianças, podendo ser usado pelos professores para interpretar, transformar e recompor o conhecimento informal ou espontâneo dos estudantes sobre o pensamento matemático.

Pesquisas de Schliemann e Carraher (1995) investigaram as relações entre o conhecimento matemático e a vida cotidiana de crianças. As autoras investigaram 16 crianças de 3ª série de duas escolas públicas, sendo algumas destas, crianças vendedores de rua na cidade de Recife. O estudo evidenciou diferença significativa entre o desempenho das crianças que não realizavam atividade remunerada com o grupo de crianças que eram vendedores ambulantes. Quanto à análise do procedimento, houve diferença significativa quanto ao procedimento escolhido pelos sujeitos: o procedimento oral era preferido para situação da vendinha e problemas verbais e o procedimento escrito paras as continhas. No caso da operação de multiplicação em situação de venda simulada, o procedimento oral obteve 88% de acertos e o escrito 12% de acertos pelos sujeitos que o utilizaram. No problema verbal, o procedimento oral obteve 69% das escolhas e o escrito 31%. Para situação de computação, o oral obteve 12% das escolhas dos sujeitos ao passo que o procedimento escrito foi de 88%.

Acioly e Schliemann (1987) estudaram o conhecimento matemático entre cambistas do jogo do bicho em Recife, analisando como a combinatória fazia parte da experiência do dia-a-dia no trabalho daquelas pessoas. Avaliaram como o uso de regras, fórmulas ou algoritmos contribuíam para a compreensão do sistema combinatório entre um grupo de cambistas (n=20) do jogo do bicho e um grupo de estudantes (n=20, sendo 50% aprovados recentemente no vestibular nas áreas de ciências exatas e tecnologia e 50% em humanas e sociais). O estudo evidenciou que, em geral, os estudantes apresentaram melhor desempenho que os cambistas. As autoras atentam para o fato de que os estudantes, apesar da permanência de 12 anos na escola, nove deles foram classificados nos estágios IA e IB, segundo critérios de Piaget (1951) sobre a análise combinatória.

Os estudos de Fishbein, Pampu e Minzat de 1970, citados por Schliemann e Carraher (1995), evidenciaram que o desempenho em tarefas de combinatória poderia ser melhorado por meio de instrução específica. A devida solicitação do professor faz supor que a instrução escolar sobre análise combinatória poderia contribuir para o melhor desempenho dos alunos em tarefas nesta área.

Os estudos de Brun e Lemoyne, et al. (1994) têm procurado abordar a noção de esquema com base nos trabalhos desenvolvidos sobre a teoria dos campos conceituais, objetivando especificamente a análise de cálculos com algoritmos. Partem esses autores da idéia de que os erros são formas transitórias conduzidas para repensá-los como traços da construção progressiva de "esquemas-algoritmos" dos sujeitos.

Os referidos autores lembram que uma questão central sobre os estudos que envolvem a idéia de "esquema-algoritmo" é a de saber se a característica automatizada de um algoritmo seria compatível com a característica dinâmica de esquema.

Tarefas que envolvem algoritmos, como é o caso da divisão, levam os sujeitos à análise de classes de situações para as quais, nem sempre estes dispõem de todas as competências necessárias para chegar a uma solução adequada. Isto obriga o sujeito a um tempo de reflexão, de exploração, hesitações, tentativas e erros para solucionar a situação, medida que não conduz necessariamente ao sucesso.

A investigação realizada por Brun e Lemoyne, et al. (1994) parte da confrontação entre esquemas e algoritmos em tarefas de cálculo escrito em relação à operação da divisão. Os autores avaliaram seis classes de alunos de 5ª e 6ª séries da escola primária por meio de exames individuais de cálculos escritos sobre divisão. Os resultados obtidos mostraram uma classificação em três categorias com relação ao emprego das regras dos alunos em vista da divisão. Constataram os autores que os erros encontram-se relacionados com a execução do automatismo empregado pelos sujeitos, evidenciando que os erros não correspondem a uma falta de controle semântico ou conceitual; ao contrário, às vezes ele atua em excesso por parte dos alunos. Para os autores, o esquema algoritmo da divisão comporta: invariantes operatórias, antecipações com fins a atingir, regras de ação e inferências, tal como postulado por Vergnaud (1985,1991).

A compreensão dos erros demanda destinguir dimensões, ao mesmo tempo, cognitivas e didáticas do quadro interpretativo do aluno. Uma questão essencial para compreender os erros observados diz respeito ao funcionamento didático desses erros. Essa questão merece aprofundamento, por exemplo, dentro do quadro dos trabalhos de pesquisa sobre a formação de professores.

Brown e Burton (apud Brun e Lemoyne et al., 1994) ressaltam o caráter organizador dos esquemas para detectar "erros sistemáticos"; isto é, as regularidades entre diferentes indivíduos e entre o próprio indivíduo nos diferentes momentos. Os erros caracterizam-se por uma lógica interna que possivelmente se reproduz, pois elas são a "fonte sistêmica" para a aquisição de conceitos dos sujeitos. Ressaltam esses autores, ainda, que os erros com cálculos escritos leva-nos a focalizar tanto os aspectos "sintáticos" das regras dos algoritmos, como também a considerar os aspectos conceituais e numéricos postos em ação sobre os cálculos.

Quando o aluno realiza um algoritmo, como é o caso, por exemplo da multiplicação ou da divisão, mostra-nos um verdadeiro "conhecimento em ação", conforme destacado por Vergnaud (1991). Esta atividade não pode ser confundida como uma simples aplicação comum de regras convencionais. Numa situação de cálculo com algoritmo, o aluno deve antecipar, fazer escolhas, planificar suas ações, controlar, por si próprio tanto a experiência que o instrumentaliza para desencadear noções do conceito em questão como o conhecimento que possui sobre a forma automatizada de realizar um cálculo.

Berjemero e Rodríguez (1997) também assinalam que o lugar da incógnita constitui um fator tão significativo quanto a estrutura semântica do problema Para os autores, a solução de problemas aditivos requer a construção, ao menos provisória de um esquema ou algoritmo particular dependente da sua estrutura semântica. Eles investigaram as estratégias de solução de problemas aditivos do tipo "igualar" e "combinar" quantidades em 100 crianças de pré-escolas e primeiras séries do ensino primário de Madrid. Os resultados mostraram que os problemas do tipo "combinar" obtiveram maior percentual de acertos que os problemas do tipo "igualar" quantidades. A presença de objetos para solucionar os problemas e o lugar da incógnita dos problemas apresentados foram considerados fatores que facilitaram a representação do problema. A estratégia de contagem um a um foi observada como a mais utilizada pelos sujeitos do estudo. Segundo os autores, a solução correta de um tipo de problema não garante uma boa resolução de outros problemas similares.

A existência de problemas aditivos com variação no grau de complexidade deveria ser contemplado na prática educativa, sem priorizar tipos mais fáceis em detrimento dos problemas aditivos mais complexos. No entanto, os professores não devem perder de vista a compreensão de que os diferentes tipos de problemas exigem, cada um a sua vez, construção de novos esquemas de ação para elaboração da solução correta.

Gonzalez-Pienda et al. (1998) replicaram o estudo de Hegarty et al. (1995), buscando identificar se os alunos com êxito lembravam-se melhor da situação expressada no problema e pior quanto aos termos relacionais do problema, ou seja, se cometiam menos erros semânticos e mais erros literais, quando comparados com os alunos sem êxito. Investigaram 36 alunos (idade média de 11,6 anos) de duas classes do 6º curso de educação primária de dois colégios públicos na Espanha. O estudo evidenciou que os grupos não se diferenciaram no que diz respeito às valorações (mal, regular e bom) atribuídas pelos próprios alunos. Quanto ao interesse pela Matemática, os resultados mostraram diferença significativa entre os dois grupos. Os alunos sem êxito apresentaram erros semânticos e literais. Estes alunos cometeram erros semânticos, significativamente superiores, em relação aos alunos com êxito. O grupo sem êxito, no entanto, não cometeu, significativamente, menos erros literais que os grupo de alunos com êxito. Segundo os autores, a hipótese de que alunos com êxito recordam-se melhor do aspecto semântico e os sem êxito recordam-se dos aspectos literais foi confirmada parcialmente. Como apontado por Hegarty et al. (1995), ainda que haja evidência de que ambos os grupos de sujeitos tendam a usar processos de compreensão qualitativamente diferentes, seria incorreto afirmar que cada um destes grupos utiliza uma determinada estratégia para todos os problemas (Gonzalez-Pienda et al., 1998).

A compreensão de princípios básicos da propriedade comutativa da multiplicação foi estudada por Schliemannn e Araujo, et al. (1998), lembrando que esta não se deriva de uma simples percepção da formulação matemática ou do sentido arbitrário dado ao conceito. Lembram os autores referidos que as crianças não percebem, tampouco relacionam, de forma direta, que "duas casas com 14 pessoas" não é o mesmo que "14 casas com duas pessoas em cada uma delas", tal como é explicitado o conceito da propriedade comutativa da multiplicação. Para as autoras, este conceito está ligado ao fato de se poder criar novos modos de pensamentos sobre os números de forma flexível.

As autoras investigaram a solução de problemas de multiplicação de crianças escolarizadas e crianças que eram vendedores ambulantes, buscando analisar a maneira pela qual os sujeitos dos dois grupos diferiam no uso do princípio comutativo da multiplicação. No primeiro estudo, as autoras investigaram 72 crianças de 6 a 9 anos, de classes de primeira a terceira série e 44 crianças vendedores de rua de 9 a 14 anos. Os sujeitos foram entrevistados individualmente e solicitados a solucionar em voz alta 4 problemas de enunciado versando sobre o preço de chocolates. Ora um dos problemas apresentava no enunciado um número maior correspondente ao valor em dinheiro a ser calculado e a menor quantidade do problema correspondente aos chocolates e vice-versa. Os resultados mostraram que o grupo de crianças vendedores de rua que receberam alguma instrução sobre a multiplicação, raramente usaram esta operação para solucionar os problemas e poucos sujeitos identificaram a propriedade comutativa na solução dos problemas apresentados. O uso da propriedade comutativa da multiplicação foi identificada quando a análise das soluções e justificativas dos sujeitos vieram acompanhados de declarações e da generalização dos resultados nos dois problemas de tal forma que explicitassem que ambos os problema envolvem situações como: "três vezes cinco ser igual a cinco vezes três". Para os que usaram adição repetida foram consideradas as declarações que denotavam consciência de comutatividade da multiplicação como equivalentes a " somando 3, cinco vezes é igual a somar 5, três vezes " ou "para 3 + 3 + 3 + 3 + 3 é igual a 5 + 5 + 5 ".

Em outra investigação sobre a propriedade comutativa da multiplicação, Schliemannn e Araujo, et al. (1998) aumentaram a diferença entre os números a serem multiplicados no problema, dificultando o procedimento de adição repetida. Investigaram 72 crianças de 6 a 9 anos, de classes de primeira a terceira série e 43 crianças vendedores de rua de 9 a 14 anos. Os resultados mostraram que os problemas que tinham o número maior como item de preço foram mais fáceis de serem resolvidos por ambos os grupos de sujeitos. Igualmente como no estudo anterior, crianças dos dois grupos apresentaram melhor resultado quando tinham experiência escolar mais elevada. O uso da comutatividade na multiplicação foi evidenciada no estudo pelas crianças escolarizadas em comparação aos vendedores.

Conforme lembrado por Vergnaud (1981), a propriedade comutativa da multiplicação não é tão óbvia para a criança. Para o autor, quando é dado um problema onde se deva calcular quanto se deve pagar em 5 balas que se deseja comprar, custando 3 dólares cada bala, as crianças mais novas não aceitam solucionar com facilidade a situação, apenas multiplicando "3 vezes 5" ou "5 vezes 3" indiferentemente.

Segundo Schliemannn e Araujo, et al. (1998), as crianças podem desenvolver conhecimento matemático independentemente de instrução escolar, segundo as atividades cotidianas de que participam. Ressaltam, porém, que um dos papéis da instrução escolar deve ser o de promover atividades que permitirão às crianças o descobrimento e a construção de relações e propriedades matemáticas que podem não ser óbvias ou pertinentes quando os problemas são resolvidos fora de situações escolarizadas.

Ao ampliarmos a discussão a respeito de solução de problemas no Ensino Fundamental, pode-se constatar que não só problemas aritméticos de tipo escolar, podem contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Problemas matemáticos que envolvem situações da vida cotidiana, podem ser objeto de análise dos professores com relação as atividades quantitativas realizadas pelas crianças. A reflexão sobre as relações interpessoais e os conflitos que dela derivam implica nível educativo na discussão e aprofundamento de temas em que se desenvolvem os intercâmbios intelectuais e afetivos entre as pessoas e que também constituem a base do conhecimento e da ciência.

De Miguel Vallejo e Taxa (1998) analisaram as produções infantis que envolviam solução de problemas aritméticos de adição e subtração, assim como situações de conflito ligadas a relações interpessoais, em especial as brigas ocorridas entre as crianças na escola. As autoras observaram que a solução de problemas, seja em nível das relações interpessoais ou de problemas matemáticos, pode contribuir significativamente para uma formação mais globalizadora de crianças na escola.

A exploração de diferentes tipos de representações das crianças, baseadas estas na indicação de Vergnaud (1991) sobre as relações de transformação entre estado inicial, transformação e estado final como elemento imprescindível de análise para a solução de problemas, mostrou-se um recurso valioso para auxiliar o processo de solução de problemas dos alunos investigados.

Ao solucionar problemas matemáticos e de conflitos interpessoais dos alunos, as crianças eram solicitadas e desafiadas a analisar simultaneamente as ações ocorridas e a busca da transformação necessária a ser solucionada. Isto permitia um levantamento de hipóteses diante dos dados numéricos e dos dados de enredo quando se tratava de conflitos interpessoais propiciando estratégias de solução cada vez mais elaboradas. Da mesma forma, o resultado final do problema significava também um produto obtido por meio de análise detalhada em face da ação inicial e da transformação ocorrida no problema.

O estado inicial, a transformação e o resultado final são, ao mesmo tempo, conteúdo dos problemas apresentados para as crianças, assim como objeto de análise dos procedimentos empregados pelos alunos para obtenção da solução.

O estudo de possíveis relações entre solução de problemas aritméticos e de conflito interpessoais permitem constatar que ações qualitativamente hetereogêneas podem corresponder a transformações matematicamente equivalentes e sua inversa, respectivamente, ou seja, as transformações matematicamente opostas podem corresponder a ações qualitativamente homogêneas.

Kornilaki e Nunes (1999) discutem a questão da multiplicação e divisão como operações que se desenvolvem paralelamente e que ocorrem como operações coordenadas no processo de construção das crianças sobre a estrutura multiplicativa. O estudo investigou o modo como 120 crianças de 5 a 8 anos coordenam diferentes esquemas de ação em situações de multiplicação. Os sujeitos foram solicitados a resolver problemas de divisão e multiplicação que poderiam ser solucionados com o uso de calculadoras. Foram focalizados problemas diretos com correspondência, fragmentação e formação de parcelas e problemas nos quais os mesmos esquemas poderiam ser usados, no sentido inverso. No caso de problemas diretos de multiplicação era possível a correspondência um para muitos. Um dos problemas utilizados, como o que enunciava "Três crianças vêm para minha festa e cada uma me dará o mesmo número de chocolates. Vou receber 12 chocolates. Quantos chocolates terei recebido de cada criança ?" Os resultados obtidos mostraram que 88% das crianças mais velhas (acima de 6 anos) apresentavam esquemas de ação para resolver este tipo de problema. Em contraste, somente 35% eram hábeis para dar conta da inversão das transformações. As autoras concluem que as crianças apresentam graus diferenciados de dificuldades nas operações de multiplicação e divisão e que são necessárias outras pesquisas para verificar se ambas as operações têm diferentes origens.

Lautert e Spinillo (2000) investigaram o desempenho e as concepções de 80 crianças em relação ao conceito de divisão, das quais um subgrupo já havia sido instruído sobre este conceito. Os resultados mostraram seis tipos de respostas das crianças com relação às concepções a respeito da divisão. A idéia de divisão nas crianças variava desde respostas elementares como a de "separar", "distribuir", até respostas que garantiam aspectos essenciais do conceito da divisão. O desempenho do subgrupo de crianças que já haviam aprendido divisão foi superior ao outro subgrupo. O estudo evidenciou que os tipos de respostas sobre as concepções das crianças sobre divisão variou em função da instrução. O bom desempenho em solução de problemas de divisão, entretanto, não garantiu respostas mais elaboradas com relação à idéia que as crianças faziam da referida operação. Noções como a de separar e distribuir foram mais enfatizadas pelos alunos investigados.

O desempenho de crianças das séries iniciais em tarefas de solução oral de problemas de divisão também foi investigado por Correa e Bryant (2000). Os autores citam dois modelos fundamentais concernentes à compreensão inicial da referida operação, denominados divisão partitiva e divisão por cotas. Os resultados mostraram que os alunos com maior escolaridade obtiveram melhor desempenho na resolução da tarefas propostas e que os problemas que envolviam divisão partitiva obtiveram maior número de acertos. Foram evidenciados procedimentos ligados à dupla contagem e ao uso de adições repetidas nos problemas de divisão partitiva.

Os estudos sobre a solução de problemas de divisão com alunos das séries iniciais parecem indicar que, mesmo submetidas à instrução escolar, as crianças tendem a apresentar noções elementares desta operação. A exemplo, a divisão partitiva apresenta-se como uma das noções elementares da operação da divisão e, mesmo tendo aprendido a calcular por meio de técnicas mais sofisticadas, as crianças retornam a este modelo para conseguir resolver com êxito as tarefas propostas.

Ao mesmo tempo, os resultados destes estudos também nos permitem verificar que o efeito da aprendizagem escolar tem influenciado na construção da operação da divisão das crianças. Acredita-se, no entanto, que a compreensão das relações entre as noções construídas pelos sujeitos em face de uma operação aritmética e a formalização desta em nível da linguagem e técnicas algorítmicas é um tema complexo e merece aprofundamento teórico e empírico nos estudos da Psicologia do desenvolvimento.

3.5.1 Dados de pesquisa – Problemas de multiplicação ligados às operações combinatórias

Os estudos sobre solução de problemas que envolvem o produto cartesiano no pensamento infantil têm procurado, em Psicologia e Educação Matemática, identificar o desempenho e analisar os tipos de estratégias de que se valem as crianças ao realizar tarefas que envolvem a estrutura combinatória subjacente.

English (1991) investigou as estratégias de solução em problemas combinatórios utilizadas por 50 crianças de 4 a 9 anos por meio de material concreto de manipulação em tarefas de solução de problemas multiplicativos. As crianças foram submetidas à solução de sete problemas em sessões individuais, utilizando camisas e calças de diferentes cores a serem vestidas por bonecos (ursos de brinquedo). O estudo evidenciou seis tipos de estratégias de solução para os problemas de análise combinatória. Nos dois primeiros tipos de estratégia, são destacas condutas de seleção ligadas ao acaso, como por exemplo, deter-se somente na ação de vestir os bonecos, assim como a conduta por tentativa e erro ligadas à combinações pautadas nas peças de roupas. Na terceira e quarta estratégias, há o aparecimento de um certo padrão de seleção dos itens combinados, demonstrando oscilações entre chegar a completar todas as combinações possíveis, mas com predomínio nas tateações de pares ordenados. As duas últimas estratégias são caracterizadas primeiro pelo aparecimento de um padrão de "medida" empregado pela criança ao selecionar os itens a serem combinados, ou seja, um padrão ligado a ao critério de duplicação das combinações. Posteriormente, o padrão de "medida" empregado pelas crianças relaciona-se com a descoberta do sistema tornando a solução correta, uma vez que os instrumentaliza à realização de todas as combinações possíveis e manifestação de justificativas ligadas ao fato de que não poderão fazer mais combinações mediante a constatação de que já haviam utilizado todas as camisas e calças para vestir os bonecos. Os resultados mostraram diferença significativa entre idades dos sujeitos e estratégias de solução, e as estratégias mais sofisticadas foram usadas pelas crianças mais velhas. As estratégias por meio de tentativa e erro, porém, foram utilizadas por todas as crianças em vários momentos durante a execução das tarefas.

A solução de problemas baseada na estratégia de correspondência termo a termo foi estudada por Nunes e Bryant (1991) em 180 crianças de pré-escola e primeira série de escolas particulares de Recife, considerando tipos de problemas com mudança nas quantidades e de comparação, com níveis de dificuldade diferentes. Dois grupos experimentais foram submetidos a treinamento da correspondência temporal e um outro à correspondência espacial. O grupo controle foi submetido à resolução de problemas comparativos, sem, no entanto, serem encorajados a fazer uso da correspondência como estratégia de solução. Os resultados indicaram que o êxito em problemas de mudança de quantidade foram superiores aos problemas de comparação. Um melhor desempenho no pós-teste foi verificado em todos os grupos; houve também diferença significativa entre pré e pós-teste para o grupo experimental que utilizou a correspondência espacial. No pré-teste as crianças demonstraram 22% de acerto nos problemas comparativos e o grupo de correspondência espacial 67% no pós-teste. Para solucionar os problemas comparativos, as crianças do grupo experimental passaram a utilizar da correspondência um a um entre as quantidades dos conjuntos, obtendo a diferença por meio da contagem dos elementos que sobravam em um dos conjuntos. O estudo evidenciou que há possibilidade de se obter a coordenação entre o esquema de correspondência e conceitos iniciais de adição e subtração em crianças pré-escolares e de 1ª série, promovendo assim, melhor desempenho em tarefas de solução de problemas comparativos.

No referido estudo, os autores esclarecem que as crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental relutam na solução de problemas multiplicativos porque têm dificuldade em compreender a idéia de estabelecer comparações quantitativas entre conjuntos e, com isso, não dispõem de estratégias suficientes para a obtenção da quantificação da diferença entre os conjuntos.

A correspondência um a um e um para muitos como principio básico para solução de problemas que envolvem múltiplos comuns foi estudada por Frydman e Bryant (1994), ao investigarem 18 crianças de um jardim de infância e 18 da primeira série da escola primária, subdivididas em 3 grupos segundo as idades dos sujeitos. Os autores avaliaram um grupo controle e outro experimental a fim de testar a habilidade das crianças para solucionar problemas referentes a repartir quantidades desiguais, quando uma das quantidades era múltipla de uma outra e quando elas tinham que construir um múltiplo comum entre duas quantidades. Os resultados obtidos mostraram que os sujeitos do grupo controle obtiveram melhor êxito nas tarefas mais simples. Aproximadamente, todas as crianças tiveram êxito nas tarefas cujo emprego da correspondência um a um podia ser melhor controlada. As crianças de cinco anos demonstraram poder ajustar o princípio de correspondência quando tinham que repartir quantidades menores e desiguais. A estratégia usual das crianças foi a de igualar ou emparelhar as quantidades de blocos dos conjuntos de pequenas quantidades. O estudo evidenciou que a maioria das crianças apresenta impossibilidade de igualar grandes quantidades em relação à compensação necessária de um a outro conjunto.

Observa-se, com base no estudo destes autores, que as crianças mais novas têm dificuldade na construção do múltiplo comum. Estas crianças parecem saber diferenciar o número total de blocos distribuídos pelo número de ações realizadas para obtê-los. Não há uma total ausência das relações multiplicativas nas crianças mais novas, mas sua compreensão ainda está inserida no princípio da compensação por meio das ações de correspondência que estabelecem entre a igualação dos conjuntos e não na conceituação da noção de múltiplos comuns.

Resultados de pesquisa sobre estratégias de solução de problemas multiplicativos (Taxa, 1996) em crianças de 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Fundamental por meio da utilização de material concreto de apoio mostraram que, em problema do tipo produto de medidas, as crianças de 1ª e 2ª séries não conseguem chegar a todos os pares ordenados possíveis para solucionar corretamente a situação. Tampouco houve desempenho superior do grupo de alunos da 3ª série. O estudo, contudo, evidenciou que a variação do total de combinações, próximas ao resultado correto foi melhor elaborada pelas crianças, com predomínio dos alunos da 2ª e 3ª séries, por meio de tateios, repetições das combinações e quantificações equivocadas das possibilidades realizadas. Os alunos de 1ª série valiam-se predominantemente do esquema de correspondência termo a termo para realizar os pares ordenados e não admitiam outras possibilidades quando já haviam feito a correspondência uma a um entre camisas e bermudas. As crianças de 2ª e 3ª séries demonstraram necessidade do registro gráfico no momento de manipulação das peças. A realização de um maior número de combinações, mas com muitas repetições e variações entre os critérios de seleção foi evidenciado como uma valiosa conduta de elaboração das combinações entre os sujeitos investigados.

Bryant e Kornilaki (1999) buscaram investigar a representação das crianças em atividades de solução de problemas multiplicativos. O estudo revelou que a origem da multiplicação e divisão é bastante diferente, tendo em vista que a base para a compreensão inicial da multiplicação é a correspondência um para muitos. Verificaram que as crianças mostraram-se dependentes do esquema de correspondência um para muitos como procedimento da multiplicação. Comentam que, em dadas circunstancias, tal esquema pode servir como um componente efetivo para o ensino da multiplicação na escola.

Nunes e Katsoris (1999) analisaram problemas multiplicativos do tipo medidas e do tipo produto cartesiano. As autoras defendem que ambos os tipos de problemas podem ser resolvidos, baseando-se na correspondência um para muitos. Analisaram o funcionalismo destes modelos apresentados por crianças de oito anos por meio de problemas de produto cartesiano seguindo instruções apoiadas na construção da matriz ou da correspondência um para muitos. A análise estatística mostrou que o grupo das crianças que foram instruídas com base na correspondência apresentaram desempenho significativamente melhor que aquelas que receberam a instrução com base na matriz. As autoras assinalam que o ensino de solução de problemas de produto cartesiano para crianças por intermédio de raciocínio da correspondência poderia favorecer na construção de modelos de solução para melhorar os resultados escolares desta operação.

Brito e Taxa (1999) analisaram o desempenho e os procedimentos utilizados por alunos de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental na solução de um problema aritmético de estrutura multiplicativa envolvendo o produto cartesiano. No grupo 1, alunos da 3ª série utilizaram material concreto como apoio para solucionar o problema e o grupo 2, alunos da 4ª série utilizaram lápis e papel. Os resultados mostraram que no grupo 1, 15% dos alunos realizaram todas as combinações (n=12) possíveis entre as peças de roupas contidas no enunciado do problema. No Grupo 2, 63,6% realizaram todas as combinações de pares ordenados do problema. Os alunos da 4ª série apresentaram melhor desempenho que os alunos da 3ª série na solução do problema de análise combinatória. Segundo as autoras, este resultado parece indicar que a representação gráfica mostra-se um recurso mais interessante para as crianças quanto ao controle dos dados e transformações do problema do que a representação por meio de figuras que não possibilita igualmente, o controle das combinações, fazendo predominar a solução no plano da ação. A análise de procedimentos de ambos os grupos, no entanto, evidenciou a tendência de os alunos utilizarem formas de representação variadas quando se tratou de registros no papel e demonstração de estratégias e justificativas quando os alunos valeram-se do material concreto com apoio para a solução do problema.

Os estudos sobre como as crianças e jovens aprendem aritmética têm gerado um número considerável de pesquisas, enfocando a criança como um produtor ativo de significados para as tarefas que realiza, sobretudo aquelas que envolvem conceitos matemáticos.

Os resultados dos estudos têm apontado que crianças das séries iniciais utilizam a multiplicação como operação unitária. Os procedimentos de adição como contar em grupos ou recitar os números somados um a um são mais freqüentemente utilizados e compreendidos do que a aplicação de um único fato que relaciona a uma compreensão de multiplicação como uma relação binária que gera um produto.

Conforme defendido por Vergnaud (1979), embora a multiplicação seja uma operação binária, as crianças mais novas tendem a usá-la como uma operação unitária, valendo-se de um ou outro operador. Isto significa que as crianças não só têm de identificar um procedimento correto relativo à operação, mas também têm de reconhecer os papéis dos dois números envolvidos.

Os resultados das pesquisas citadas no presente estudo fornecem aos investigadores e professores um aprofundamento dos aspectos teóricos básicos a respeito da progressão da construção da operação da multiplicação. A compreensão da multiplicação vem da integração de muitos esquemas de maneira que a criança possa reconhecê-la como operação matemática binária e cuja aplicação é apropriada para resolver e representar em diversas tarefas que envolvem conceitos desta natureza.

A prática docente diante da solução de problemas multiplicativos tem favorecido a estratégia de somas repetidas, seguidas de técnicas algorítmicas da operação de multiplicação com acréscimo de números cada vez maiores a serem calculados.

Estudos, porém, como o de Nunes e Bryant (1991), Frydman e Bryant (1994), Taxa (1996), entre outros, revelam a importância e a necessidade de se compreenderem os processos e mecanismos cognitivos dos sujeitos na aquisição de conceitos matemáticos ensinados na escola. As crianças demonstram, desde o ensino das séries iniciais do Ensino Fundamental, no caso da correspondência um a um, que têm esquemas quantitativos disponíveis para realizar tarefas que envolvam a solução de problemas de operações combinatórias. As pesquisas têm demonstrado sobretudo que as crianças podem progredir substancialmente em nível da aquisição da estrutura multiplicativa, se tiverem experiências diversificadas e planejadas de forma adequadas, contemplando os aspectos de processos psicológicos e matemáticos da operação de multiplicação em solução de problemas.

Acredita-se que o trabalho com problemas multiplicativos do tipo produto de medidas exige da criança um nível de abstração reflexionante. Podem ser trabalhados, no entanto, com crianças menores, mas por meio de soluções inventadas por elas próprias: desenhos, utilização com material de apoio, onde apareça não só a exploração do cálculo mental, mas também o registro matemático construído por elas mesmas.

CAPÍTULO IV

AVALIAÇÃO GOVERNAMENTAL DO DESEMPENHO ESCOLAR E PROPOSTAS CURRICULARES NO CAMPO DA MATEMÁTICA

Nas duas últimas décadas, uma vasta literatura tem enfocado tanto no âmbito das pesquisas como no âmbito dos órgãos governamentais a importância da definição do currículo e da avaliação como fatores determinantes para o sucesso das aprendizagens escolares. Destacamos neste capítulo as ambas temáticas: propostas curriculares e avaliação como princípios de referência às aprendizagens escolares no campo da Matemática.

4.1 O processo de avaliação no ensino

4.1.1 Visão Geral

O tema avaliação tem inflamado significativamente as discussões sobre a educação, no sistema educacional brasileiro nos anos noventa. E, como seria de se esperar, desafia todos os envolvidos a qualquer tentativa de consenso sobre o modo de avaliar e os níveis de exigência necessários e pertinentes.

Diferentes interesses e formas de avaliar instituições, alunos ou qualquer outro aspecto da escola têm sido propostos e praticados por organismos governamentais. Tal movimento pode ser explicado, segundo Dias Sobrinho (1997), pelo fato de a avaliação institucional adquirir *"... muita força a partir do momento em que se tornou em todo o mundo mais aguda a crise que tem levado os Governos a investirem cada vez menos na área social, especialmente em educação ..." (Dias Sobrinho,1997, p.20-21).*

Qualquer concepção de avaliação que se estabeleça, seja em nível dos órgãos externos ou internos da escola, envolve uma visão de mundo, de homem e de educação. Uma questão bastante pertinente a se propor refere-se ao fato de que deveremos supor que os conteúdos avaliados e tidos como fundamentais para a vida acadêmica dos alunos correspondem a uma verdadeira aprendizagem por parte dos mesmos, e, sobretudo, avaliar se tais conteúdos contribuem para a formação de um sujeito social tendo em vista a cidadania e não somente levando em conta a profissionalização.

Perrenoud (1999b) lembra que a avaliação encontra-se no âmago das contradições do sistema educativo e apresenta-se complexa segundo a diversidade das "lógicas" impostas sobre a questão. Ao fazer uma análise sobre duas principais lógicas do sistema de avaliação segundo a realidade escolar, o autor assinala:

> *"Avaliar é – cedo ou tarde – criar hierarquias de excelência, em função das quais se decidirão a progressão no curso seguido, a seleção no início do secundário, a orientação para diversos tipos de estudos, a certificação antes da entrada no mercado de trabalho, freqüentemente, a contratação. Avaliar é também privilegiar um modo de estar em aula e no mundo, valorizar formas e normas de excelência, definir um aluno modelo, aplicado e dócil para uns, imaginativo e autônomo para outros ..." (Perrenoud,1999b, p. 9).*

Analisando o fenômeno avaliação, Brito (1984) põe em destaque a discussão desta temática, apresentando uma variedade de objetos de análise e enfatiza que encontrar uma única definição para abarcar todas as sua formas é uma tarefa bastante complexa. A autora lembra que as diferentes definições de avaliação deveriam ser tomadas como complementares e não antagônicas, como se pode observar da parte de alguns estudiosos. Entretanto, é notório que alguns aspectos sobre avaliação são priorizados em determinadas abordagens, pois isto é o que lhes confere a diferença entre essas abordagens.

Uma avaliação entendida como transformadora e comprometida com ações integradoras indica uma possível ênfase nas metodologias qualitativas de investigação. Vale ressaltar, todavia, que isso não se opõe às abordagens de orientações quantitativas, ou seja, o fato de estarmos tratando de um fenômeno social não significa que possamos prescindir de rigor da realidade avaliada, o que implica seleção de procedimentos e instrumentos adequados. Conforme lembrado por Dias Sobrinho (1997), quando avaliamos uma realidade e apresentamos dados imprecisos, estamos deturpando e enviesando as interpretações possíveis para aquela mesma realidade e, consequentemente, um diagnóstico não fidedigno não poderá contribuir para um projeto educativo eficaz e tampouco uma avaliação tendo em vista a transformação de tal realidade.

4.1.2 A avaliação, os testes padronizados e o desempenho matemático no Brasil e outros países - a visão de alguns especialistas

Informações obtidas com base em um sistema nacional de avaliação educacional deveriam permitir verificar, ao longo do tempo, a eficiência e a eficácia do sistema de ensino e, ao mesmo tempo, abrir possibilidades para a obtenção de explicações sobre os fatores que poderiam influenciar nos resultados obtidos.

Klein e Ribeiro (1991) e Klein e Fontanive (1995) mostraram que o acesso à primeira série do primeiro grau está praticamente garantido a todos os alunos e, pelo menos, 95% de crianças em idade adequada para o ingresso têm acesso à referida série. Já no que se refere à conclusão do primeiro grau, os resultados mostram que o acesso está longe de ser universalizado. Em 1990, somente 45% dos alunos estavam concluindo o primeiro grau, seja por via do sistema regular, seja por via do supletivo de ensino. Ao mesmo tempo, os trabalhos mostram que os alunos passam em média cerca de nove anos no primeiro grau e os que o concluem fazem-no, em média, em 11 anos.

Por um lado, poder-se-ia afirmar que os altos índices de repetência estariam ligados a um alto grau de exigência para aprovação, e que os concluintes seriam alunos altamente qualificados. Por outro lado, sabe-se que os dados sobre o desempenho de alunos em exames vestibulares e nas avaliações realizadas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), em 1990 e 1993, indicam que as altas taxas de repetência são acompanhadas por um ensino de baixa qualidade.

Segundo Southard (1998), analisando um programa de avaliação - o Blueprint 2000 - nos Estados Unidos (Flórida), os testes padronizados têm sido uma constante no sistema de avaliação norte-americano, servindo para a seleção e classificação dos alunos. Sabe-se, no entanto, que o uso abusivo destes testes tem ocasionado a discussão no cenário educacional americano, e tem sido atribuído o uso extensivo dos testes à *"...distância cada vez maior entre os objetivos do teste e o currículo... A preocupação em avaliar conhecimento verbal em vez de avaliar a aplicação do conhecimento a situações reais. Não há utilização dos testes para a melhoria da instrução..." (Southard,1998,p.29).*

Com a reforma educacional norte-americana, pôde-se assistir à ênfase dada a novos instrumentos de avaliação que procuram medir habilidades intelectuais mais complexas como conceitos e soluções de problemas e aplicação a problemas reais.

Brito, Munhoz e Primi et al. (2000) verificaram as relações entre o raciocínio e o desempenho em Matemática dos alunos que realizaram a prova aplicada pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM/MEC-BR). Os autores destacam que *"...a avaliação das habilidades e competências matemáticas ultrapassa mera avaliação de "certo ou errado" em uma questão, exigindo uma análise da maneira como o indivíduo está pensando ao desenvolver a tarefa." (Brito, Munhoz e Primi et al., 2000, p. 49).*

A avaliação por meio de questões abertas mostra-se, segundo os autores anteriormente citados, ser a melhor possibilidade de detectar os conceitos e os procedimentos que se deseja conhecer, a fim de que se possam avaliar os componentes da habilidade matemática e as competências decorrentes dos componentes da habilidade dos alunos. Os resultados obtidos no estudo dos referidos autores evidenciaram que a prova do ENEM/1998 é um instrumento viável para a avaliação dos alunos. Ressaltam os autores, todavia, que se faz necessário o aprofundamento e a revisão de aspectos do instrumento.

Tal como anunciado por Macedo (1997), a problematização de temas recorrentes em avaliação escolar devem estar engajados a pressupostos epistemológicos. A elaboração e adequação de instrumentos de medidas que possam avaliar cada vez mais e com melhor precisão o desempenho escolar dos alunos tem sido um desafio crucial em termos de avaliação.

A idéia proposta por Macedo (1997), a respeito do tema avaliação, é bastante interessante bem como a sugestão do tratamento de seus resultados à luz de implicações psicopedagógicas.

4.1.3 Avaliação dos organismos governamentais: o SAEB e o SARESP

No Brasil, os estudos sobre um sistema estadual e nacional de avaliação tem sido realizado desde 1994 aproximadamente. É esperado que a avaliação educacional, seja em âmbito estadual, como é o caso do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 1996;1998), ou nacional, como o Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB, 1995; 1999), ou mesmo do Ensino Nacional do Ensino Médio (ENEM, 1998), possam fornecer diagnósticos e subsídios para a implementação ou manutenção de políticas educacionais. Tais avaliações, em larga escala, do sistema escolar, devem objetivar, ainda, a informação do que alunos em diferentes séries sabem e são capazes de fazer em determinadas áreas curriculares, em um determinado momento, devendo-se também acompanhar a evolução destes alunos ao longo dos anos.

A utilização dos instrumentos destes sistemas de avaliação, bem como dos resultados obtidos têm trazido à tona como mostram contatos informais com escolas públicas e particulares, discussões sobre a qualidade do ensino e a construção de seus instrumentos.

Em 1988, foi implantado o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) sendo a primeira aplicação em 1990 e o segundo ciclo em 1993. Os resultados obtidos nas provas de Matemática aplicadas em 1993, indicaram que 67,7% dos alunos da primeira série do Ensino Fundamental acertaram pelo menos metade dos testes. Para os alunos da terceira série, no entanto, o índice caía para 17,9%, conforme divulgado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, referente à área de Matemática (MEC- PCNs, Vol.3, 1997).

Os resultados obtidos pelo SAEB (1995)[4] quanto ao desempenho matemático dos alunos mostraram que as crianças de 4ª série investigadas dominam 29,5% dos conhecimentos matemáticos necessários e aprendidos nas séries iniciais do ensino fundamental, divulgado pela Revista Educação (out./98).

A análise do desempenho em Matemática obtido com base na avaliação do SAEB/95 indicou, especificamente que, em "Número e operações" – os alunos de 4ª série, quanto à "compreensão de conceitos", demonstraram atingir 41% de acertos, tendo em vista o "conhecimento de procedimentos", 31% e em "aplicação ou resolução de problemas" envolvendo números e operações o percentual foi de 31%. Segundo assinalado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) – volume introdutório, o desempenho em Matemática dos alunos apresentou-se insatisfatório.

A elaboração das provas do SARESP são feitas com base em matrizes, isto é, por via da constituição de tabelas de especificação de conteúdos e objetivos, indicando temas e metas do currículo a serem desenvolvidos em cada série e disciplina. Tais parâmetros estão fundamentados nas propostas curriculares elaboradas pela Coordenadoria de Estudos e Normas pedagógicas (SEE/CENP, 1988).

A análise preliminar de Esposito e Davis (1999) dos resultados do SARESP/96 com relação à idade dos sujeitos indicou que 63% dos alunos que cursavam a 4ª série tinham idade (9-10 anos) correspondente ao esperado. A relação defasagem idade-série, correspondente a um ano de atraso, somou 18%, sendo 10% dos que apresentaram dois anos de atraso e 9% dos que tinham idade igual ou superior a 14 anos.

A média geral do desempenho escolar em Matemática apresentado pelos alunos indicou que em 1996 (3ª série) foi de 49,5 (desvio padrão de 16,3). Em 1997 (4ª série), a média foi de 60,4 (desvio padrão de 16,2). Este resultado possibilitou identificar que houve um acréscimo de 10,9 pontos na média apresentada na avaliação de 1997 pelos alunos da 4ª série em relação aos alunos investigados em 1996, quando cursavam a 3ª série do ensino fundamental.

---

[4] Para uma discussão mais aprofundada e leitura completa da análise dos dados obtidos quanto ao desempenho escolar avaliado pelo SAEB, consultar "Saeb 97: primeiros resultados".

Com base nos resultados do desempenho escolar em Matemática, a comparação entre os resultados observados e os desejados deve estar presente, de tal maneira, que se possa fazer um levantamento de hipóteses a fim de se analisarem as causas dos efeitos encontrados. No caso da avaliação feita pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), foram comparados os resultados obtidos pelos alunos ano a ano, buscando entender o aumento ou a regressão das médias dos alunos nos conteúdos avaliados, podendo fazer-se, então, melhor identificação dos ganhos ocorridos quanto a aprendizagens escolares.

Vale ressaltar que a temática sobre avaliação, em especial a da avaliação sobre desempenho escolar, merece uma leitura crítica e atenta dos resultados divulgados, a fim de que se possa contribuir efetivamente para a prática pedagógica do professor em relação aos conteúdos curriculares tratados na escola, culminando em ações de melhoria do processo de ensino-aprendizagem em Matemática.

Cabe lembrar que, no caso dos resultados do SAEB (1997) e SARESP (1996-97), os dados mostraram que, dentre outros aspectos, a solução de problemas aritméticos merece atenção de pesquisadores e educadores. Paralelamente, no caso das operações aritméticas da avaliação do SARESP (1997), os resultados indicaram que apenas 15% dos sujeitos investigados concluem as séries iniciais do Ensino Fundamental dominando, de forma elementar, as operações de multiplicação e divisão, conforme divulgado pela Revista Educação (Outubro/1998).

4.2 Propostas e parâmetros curriculares para o ensino da Matemática no Brasil e na reforma educativa espanhola

O ensino da Matemática tem sido objeto de discussão no âmbito educacional, especialmente na definição por autoridades do Ministério da Educação e do Desporto (MEC), com relação a novos parâmetros curriculares da Matemática para as séries iniciais do Ensino Fundamental.

4.2.1 CENP e PCNs

A Proposta Curricular da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas- Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (CENP,1988) defende uma posição de rompimento com um enfoque mais tradicional de ensino em que se valoriza apenas a memorização de sinais e símbolos matemáticos. Defende ainda, o rompimento com as clássicas situações de "prova" – as quais têm cobrado dos alunos apenas a memorização da tabuada, o resultado da "conta", a nomenclatura de figuras geométricas, e, por fim, alguns esquemas pré-estabelecidos para a solução de problemas e considera e valoriza os processos lógicos que envolvem a construção de conceitos matemáticos.

A referida proposta anuncia uma concepção epistemológica baseada na construção de conhecimentos dos conceitos matemáticos. Mediante tal proposta, os professores deveriam ficar atentos para, ao invés de optar por uma seqüência linear dos conteúdos, aderirem a uma proposta mais integradora entre os conteúdos, sem tratamento exaustivo de um conteúdo em detrimento dos outros.

Segundo a proposta curricular para o ensino de Matemática do 1º grau, elaborada pela CENP na década de 80, referente ao denominado Ciclo Básico (1ª e 2ª séries) e 3ª e 4ª séries iniciais, espera-se que os alunos possam classificar, seriar, ordenar, fazer correspondências com conteúdos que envolvam três grandes temas, como os conceitos de número, geometria e medidas.

Segundo a fundamentação daquelas propostas curriculares para a disciplina da Matemática, o ensino da referida área na séries iniciais deve objetivar a compreensão dos alunos em nível de elementos quantitativos, valendo-se da realidade física e social e processos lógicos próprios do sujeito. Para tanto, as operações mentais que devem ser exploradas, tendo em vista o ensino e a aprendizagem com crianças do Ciclo Básico, estão diretamente ligadas a processos lógicos de pensamento que também seriam necessários nas demais disciplinas, como Português, Ciências, História, Geografia, entre outras postas no currículo oficial.

Na segunda metade da década de 90, o Ministério da Educação e do Desporto (MEC), especificamente a Secretaria de Educação Fundamental apresenta os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para as quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. A elaboração dos Parâmetros esteve apoiada pelas pesquisas, no âmbito nacional e internacional, e pelos dados estatísticos que delineavam o perfil de desempenho escolar dos alunos do Ensino Fundamental.

O MEC enfatiza que os Parâmetros Curriculares Nacionais deverão ser entendidos como documentos norteadores de referências para a formulação do projeto educacional de cada escola.

Os fundamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais pressupõem que a prática pedagógica de todo professor, ainda que de maneira inconsciente, como também afirma Becker (1993b), implica concepções de ensino-aprendizagem. Estas determinariam, assim, a concepção de currículo, a função social da escola, as relações entre professor-aluno, os conteúdos, as metodologias e os procedimentos a serem adotados.

É possível identificar a influência da psicologia genética nos Parâmetros como referência de compreensão acerca dos processos que envolvem a formação de conhecimento no sujeito. O documento em questão põe em destaque:

> *"(...) importância da participação construtiva do aluno e, ao mesmo tempo, da intervenção do professor para a aprendizagem de conteúdos específicos que favoreçam o desenvolvimento das capacidades necessárias à formação do indivíduo. Ao contrário, de uma concepção de ensino e aprendizagem como um processo que se desenvolve por etapas, em que a cada uma delas o conhecimento é "acabado", o que se propõe é uma visão de complexidade e da provisoriedade do conhecimento. De um lado, porque o objeto de conhecimento é "complexo" de fato e reduzi-lo seria falsificá-lo; de outro, porque o processo cognitivo não acontece por justaposição, senão por reorganização do conhecimento. É também "provisório", uma vez que não é possível chegar de imediato ao conhecimento correto, mas somente por aproximações sucessivas que permitem sua construção" (MEC, 1997,vol 1, p.44).*

Em função de uma abordagem construtivista e de uma escola voltada à construção do conhecimento, faz-se necessário dar tratamento de questões do cotidiano que interferem na vida do aluno de forma a serem essas questões tratadas como conteúdos escolares. Essa concepção vem validar a necessidade de um tratamento transversal no sentido de contemplar temáticas sociais no currículo escolar

A concepção de transversalidade no currículo pressupõe a integração das áreas de conhecimento e comprometimento *"... das relações interpessoais e sociais escolares com as questões que estão envolvidas nos temas, a fim de que haja uma coerência entre os valores experimentados na vivência que a escola propicia aos alunos e o contato intelectual com tais valores" (MEC, 1997, vol1, p. 64).*

Com relação especificamente ao ensino da Matemática, as considerações preliminares dos Parâmetros sugerem relacionar observações do mundo real que a criança faz com diferentes formas de representação, como desenhos, figuras, esquemas, tabelas, entre outros. Outro aspecto destacado para o ensino da Matemática é propiciar a relação existente entre as representações das crianças com os princípios e conceitos matemáticos.

Com base no destaque destes aspectos é enfatizado que a seleção e organização de conteúdos no ensino da Matemática deveriam obedecer à relevância social e à do desenvolvimento intelectual das crianças, ao invés de adotar como único critério a lógica interna da própria Matemática.

O conhecimento matemático é entendido, conforme proposto nos Parâmetros como:

> *"(...) fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contra-exemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e acertos. Mas ele é apresentado de forma descontextualizada, atemporal e geral, porque é preocupação do matemático comunicar resultados e não o processo pelo qual os produziu. (...) A Matemática desenvolve-se, desse modo, mediante um processo conflitivo entre muitos elementos contrastantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo. Curioso notar que tais conflitos encontram-se também no âmbito do ensino dessa disciplina" (MEC,1997, vol.3, p.28).*

As relações entre a Matemática e temas transversais podem ser assim expressados na figura 10, consoante a indicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

CONSTRUÇÃO DA CIDADANIA

- *Inserção do sujeito no mundo do trabalho, nas relações sociais é de fundamental importância;*
- *Tomadas de decisões estão diretamente ligadas à compreensão, por parte do sujeito, de classificar, ordenar, quantificar e medir, assim como apropriar-se, de maneira crítica pela leitura, de dados estatísticos que revelam uma dada realidade;*
- *Matemática e Metodologia devem caminhar juntas, pois a criação de estratégias de ensino que possibilitem a capacidade de comprovação, argumentação e espírito crítico são imprescindíveis para a formação da iniciativa pessoal e do trabalho coletivo;*

ÉTICA

- *Desenvolver atitudes no aluno em relação ao seu processo de aprender e ao do próprio grupo;*
- *Possibilitar construção significativa do conhecimento matemático sem preconceito de área do saber de indivíduos mais talentosos;*
- *Trocar idéias, discuti-las e mediá-las com o saber científico;*

ORIENTAÇÃO SEXUAL

- *Igualdade de oportunidades e condições entre homens e mulheres na construção do conhecimento matemático;*

MEIO AMBIENTE

- *Relacionar questões ambientais ao trabalho interdisciplinar da Matemática;*
- *Fenômenos do Ambiente ligados a conceitos e procedimentos do conhecimento matemático, como os de elaboração de hipóteses, argumentação e interpretação de dados;*

SAÚDE

- *Relacionar conhecimento matemático (quantitativo) em função de questões voltadas ao desenvolvimento físico e a problemas que envolvem a saúde das pessoas;*

PLURALIDADE CULTURAL

- *Valorização da saber matemático, intuitivo e cultural implícitos no universo do aluno;*
- *História da Matemática e a Etnomatemática como temáticas necessárias à construção do conhecimento;*

Figura 10 - Quadro explicativo das relações entre os conteúdos matemáticos e os temas transversais indicadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais

A Matemática no Ensino Fundamental deve articular-se de maneira que o delineamento dos conteúdos com base nos temas transversais e a elaboração de objetivos e metodologias devam explorar tanto o caráter de aplicabilidade do conhecimento como o conhecimento de estruturação lógico-dedutivo do sujeito.

4.2.2 Relações entre Parâmetros Curriculares Nacionais e a reforma educativa espanhola

A defesa de uma concepção de currículo de característica transversal pode ser identificada nos trabalhos de autores como Sastre e Moreno et al. (1993), Galego(1998), Perrenoud (1999). Nestes, pode-se constatar a crítica feita sobre a relação entre ciência e ensino, entendendo-se a primeira de natureza acumulativa, a qual produz explicações parciais da realidade em que vivemos. Para estes autores, se entendida desta maneira, a ciência implicaria, então, tendo em vista as questões educacionais, também uma forma recortada de elaborar conceitual e metodologicamente os programas curriculares.

Nessa linha, as discussões e mudanças ocorridas na reforma do ensino da Espanha há uma década tiveram como pano de fundo reflexões acerca da dicotomia entre a ênfase de um ensino voltado às disciplinas clássicas do currículo e a opção pela introdução de um currículo que contemplasse o conhecimento social e o afetivo impregnados pela vida cotidiana dos sujeitos. Questões sobre a origem e o porquê da estrutura curricular voltada às disciplinas que contemplam o saber científico ocidental possibilitaram críticas no que se refere à concepção de ciência, tentado romper a idéia de que a produção e sistematização de conhecimento corresponde a um conjunto de verdades absolutas e acumulativas (Kuhn, 1996).

Sastre e Moreno (1993) lembram que uma concepção de ciência de natureza acumulativa obstrui nossa capacidade de levantar problemas, tecer soluções e até mesmo de ignorar questões ligadas a problemas sociais como a fome no terceiro mundo, as agressões e demais formas de violência vigentes em nossa sociedade, os desequilíbrios ambientais e a falta de preparo para lidar com a formação de relações interpessoais de maneira harmônica.

No campo educacional, temas considerados "transversais"[5] implicam soluções viáveis para o conflito discutido entre a integração dos saberes, como o científico e o cotidiano e as implicações sociais advindas pela opção de um ou outro currículo e sua propagação na escola.

[5] No caso da reforma educacional espanhola – trata-se da "Educação Moral e Cívica", da "Educação para a Paz", da "Educação para a Saúde", da "Educação para a Igualdade de Oportunidades entre os sexos", da "Educação do Consumidor" e da "Educação para o Trânsito".

Um tratamento didático-pedagógico que tenha por foco central os temas transversais foi investigado[6] por Taxa e De Miguel Vallejo (1998). As autoras investigaram as intervenções realizadas na prática pedagógica de professores das séries iniciais de escolas públicas da cidade de Barcelona, verificando as possibilidades e dificuldades de um trabalho deste tipo, assim como analisaram atividades produzidas pelos alunos.

Dirigidos ao primeiro e segundo ciclos de educação primária espanhola, o material didático de Moreno e Sastre et al (1989), intitulado "Conhecimento do meio – A Transversalidade desde a Co-educação", objetivava que as crianças refletissem sobre fenômenos e situações diversas, englobando o saber cotidiano e o saber científico. A Língua e Literatura, a Matemática, a Educação Artística e a Educação Física apresentavam, neste contexto, um novo significado: o de instrumentos para organizar as experiências e aprofundamento quanto ao conhecimento do mundo físico, social e cultural.

Neste trabalho não cabe apresentar a análise global da pesquisa, mas enfocar, em especial, os aspectos ligados aos objetivos gerais da Matemática.

A pesquisa mostrou que como atividades matemáticas desenvolvidas, as unidades referiam-se a conteúdos elementares da área para as duas primeiras séries primárias, como: a quantificação e representação de objetos e situações variadas solicitadas pela professora ou mesmo trazidas pelas crianças do próprio grupo-classe. No caso da unidade didática sobre o corpo humano, ao discutir, representar e classificar atributos de semelhança e diferença entre as partes do corpo (feminino e masculino, tamanho, cor, entre outros), os alunos classificavam subgrupos de alunos que apresentam características físicas semelhantes; ordenavam as pessoas segundo a estatura; e, posteriormente, eram envolvidas em uma série de atividades de quantificação e representação numérica referente às classificações e ordenações realizadas.

Na unidade didática sobre "sentimentos", verificou-se que os alunos organizavam informações obtidas sobre estados de ânimos, como os de alegria e tristeza. As atividades matemáticas, a este respeito, referiam-se à ordenação quantitativa das informações sobre as causas que levam as crianças a ficarem alegres e tristes.

[6] Programa de Doutorado Sandwich- CAPES-BEX2566/97-4 – Universidade de Barcelona e escolas públicas da cidade de Barcelona

Atividades relacionadas a jogos eram uma constante, verificando-se que as crianças mostravam compreender as regras estabelecidas para esses jogos, assim como discuti-las e montar as formas de registro de cada um dos jogos propostos.

Destacam-se ainda atividades que se referem a trabalhos ligados a lojas e simulação de compra e venda de objetos. As crianças, no caso, conseguiam solucionar situações-problema que envolviam transformações aditivas, durante a simulação, seguido de um trabalho de cunho mais escolar.

A figura 11 mostra, como exemplo, a síntese de uma das unidades didáticas analisadas. As unidades didáticas "Os Animais" e "Nos comunicamos e viajamos" mostra as relações da Matemática com os conteúdos do conhecimento do meio físico, social e cultural.

Unidade Didática 5- Os Animais	**Unidade Didática 6- Nos comunicamos e viajamos**
- Construção de grupos de animais segundo diversos critérios,abordando relações parte-todo entre os grupos elaborados e representando-os graficamente; - Quantificação dos elementos dos grupos; - Exploração em nível manipulativo (com figuras ou reprodução de animais em miniatura) valendo-se de situações em que se produzam transformações quantitativas; - Invenção de relatos que outorguem significado em pírico às operações de somar e subtrair; - Simbolização gráfica com cifras e signos aritméticos das situações realizadas; - Abstração das relações aditivas apoiando-se em relatos orais e escritos e realização mentalmente o cálculo que implicam tais relações.	- Ordenação de meios de transporte e meios de comunicação por grupos segundo critérios elaborados, primeiramente pelos alunos; - Aprofundar análises das relações parte-todo entre soma e subtração dos grupos elaborados; - Resolução dos problemas formulados por escrito; - Formulação de perguntas para serem respondidas mediante um cálculo aritmético; - Estimativa de resultados, em situações de vida cotidiana, relacionados com os meios de transporte em que apareça um conteúdo aritmetizado; - Elaboração de gráficos simples que expressem os índices de audiência de programas de televisão; - Aprofundamento no conhecimento dos signos aritméticos.

Figura 11 - Quadro explicativo das relações entre conhecimento matemático e temas do cotidiano do material didático espanhol

Tal como a reforma educativa ocorrida na Espanha, a tentativa de superação da tendência e do estilo de intervenção pedagógica em solução de problemas como uma tarefa meramente de "aplicação de contas" é redimensionada na atual proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais, enfocando a solução de problemas como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos.

Em consonância com a ênfase dada às novas orientações didático-pedagógicas e aquelas de um ensino pautado na exploração da solução de problemas, não se pode deixar de lado, com relação ao trabalho do professor, a devida importância em se compreender que os conceitos e conteúdos matemáticos são construídos por meio de processos de abstração, cujos mecanismos envolvem sempre um processo contínuo e muitas vezes parcial na construção do conhecimento.

A importância da solução de problemas e, em decorrência, as dificuldades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, vêm sendo exaustivamente discutidas ao longo das duas últimas décadas. Muitos aspectos ainda devem ser esclarecidos sem que o assunto seja esgotado.

As provas do SARESP, apesar de quaisquer críticas de que seja objeto, podem ser um instrumento interessante para novas avaliações, já que se dispõe de resultados que mostram tendências de um grande número de alunos em relação a matrizes e propostas curriculares da Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo (CENP,1988).

É importante que se leve em conta o desenvolvimento cognitivo das crianças e as características de raciocínio relacionadas o processo de abstração, os quais apresentam uma vertente importante para a análise da solução de problemas, abrindo perspectivas a pesquisas que podem contribuir na prática docente.

CAPÍTULO V

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os dados desta pesquisa foram coletados conforme descrito no capítulo da metodologia proposta. Após a aplicação dos instrumentos e suas respectivas correções, armazenaram-se em um banco de dados as pontuações que permitiram codificar numericamente as informações quando se tratou de correlacionar as variáveis ordinais. Foi utilizado o software estatístico "Statistics Package for Social Science"- SPSS (1993) .

Os resultados foram analisados e são apresentados em cinco partes. Consideraram-se primeiramente dados gerais sobre a composição da amostra. Na parte 1 foi realizada a análise descritiva da amostra em relação ao gênero, idade e relação entre gênero, idade e as escolas. Em seguida, na parte 2 são apresentados os resultados de quatro questões da entrevista realizada individualmente com os alunos. Estas questões buscaram fazer uma sondagem verificando as opiniões dos sujeitos com relação às preferências das áreas curriculares, assim como sobre o nível de dificuldade que eles atribuíam em face dos conteúdos matemáticos tratados na escola.

Na parte 3 da análise dos resultados desta pesquisa, apresentam-se os dados obtidos com relação ao desempenho matemático com base na prova do SARESP, assim como a análise de freqüência do desempenho escolar em Matemática, o gênero e as quatro escolas investigadas neste estudo

A parte 4 refere-se à análise dos níveis de classificação das provas piagetianas: o processo de abstração e o das operações combinatórias, assim como o desempenho das crianças na solução dos problemas de análise combinatória utilizando lápis e papel. Em seguida, apresenta-se a análise correlacional da pesquisa, na qual foram feitas as comparações entre as variáveis quanto ao desempenho escolar em Matemática, os níveis de abstração em múltiplos comuns, a noção de acaso e probabilidade e a solução de problemas de análise combinatória.

Por fim, na quinta e última parte de análise dos resultados, foram feitas as categorizações das estratégias utilizadas pelas crianças com relação aos problemas de análise combinatória.

Parte 1 -
5.1 Análise descritiva dos sujeitos em relação ao gênero, idade e as escolas

Foram investigadas 132 crianças ingressantes da 3ª série do Ensino Fundamental com idades entre 8 a 11 anos e meio de quatro escolas públicas de uma cidade do interior do estado de São Paulo.

5.1.1 Gênero

Considerando-se o número total de sujeitos investigados (n=132), verificou-se que 48,5% eram alunos do gênero masculino e 51,5% do gênero feminino. Na constituição da amostra aleatória (amostragem estratificada) neutralizou-se a questão de predomínio de um ou outro gênero para fins de investigação quanto ao desempenho escolar em Matemática, o processo de abstração e a solução de problemas de análise combinatória. Como era de esperar, em razão da constituição da amostra, observa-se que a diferença de sujeitos do gênero feminino não mostrou-se expressiva em relação à variável gênero.

5.1.2 Idade

Conforme mostra a tabela 1, do total de 132 sujeitos investigados, 20 (15,2%) alunos têm oito anos e 92 (69,7%) têm nove anos. Os sujeitos com dez anos referem-se a 18 (13,6%) alunos e foram encontrados apenas dois (1,5%) alunos com 11 anos de idade. Ao analisar as faixas etárias dos sujeitos observou-se que os alunos com nove anos constituíram o grupo predominante, cuja idade média foi a de 9,0152 anos (desvio-padrão de 0,6 anos).

Tabela 1 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com a idade

Idade (em anos)	**8,0**	**9,0**	**10,0**	**11,0**	Total
Nº de sujeitos	20 (15,2%)	92 (69,7%)	18 (13,6%)	2 (1,5%)	132 (100%)

5.1.3 Análise do gênero e das idades em relação às escolas

Os resultados apresentados na tabela 2 revelam que a distribuição dos sujeitos do gênero masculino e feminino em relação às escolas mostrou-se semelhante, ou seja, o número de meninos e meninas em cada escola não variou acentuadamente. Uma distribuição eqüitativa também foi observada entre as idades com relação às escolas, ou seja, o número de alunos encontrados nas idades de 8 a 11 anos em cada uma das escolas não variou acentuadamente na/para a amostra dos sujeitos investigados.

Tabela 2 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo o gênero, as idades e as escolas

		ESCOLAS 1	2	3	4	Total
Gênero	Masculino	14 (10,6%)	11 (8,3%)	18 (13,6%)	21 (15,9%)	64 (48,5%)
	Feminino	17 (12,8%)	12 (9%)	14 (10,6%)	25 (18,9%)	68 (51,5%)
Idade	(anos)					
	8,0	2 (1,5%)	7 (5,3%)	1 (0,8%)	10 (7,5%)	20 (15,1%)
	9,0	25 (19%)	15 (11,3%)	20 (15,1%)	32 (24,2%)	92 (69,6%)
	10,0	4 (3%)	1 (0,8%)	10 (7,6%)	3 (2,2%)	18 (13,6%)
	11,0	0 (0%)	0 (0%)	1 (0,8%)	1 (0,8%)	2 (1,6%)
Total		31 (23,5%)	23 (17,5%)	32 (24,2%)	46 (34,8%)	132 (100%)

Estes resultados apontaram para o fato de que as idades dos sujeitos estão bem distribuídas entre as escolas, não havendo predomínio de uma determinada idade em qualquer uma das quatro escolas investigadas. Tais resultados indicam que a maioria da amostra de sujeitos investigados nesta pesquisa encontram-se dentro da idade adequada para o ingresso da 3ª série do Ensino Fundamental e que embora as escolas públicas investigadas sejam constituídas por alunos de nível sócio-econômico desfavorecido, estes se encontram também em tempo e série de escolarização.

Parte 2 -
5.2 Análise das Entrevistas Individuais

Para fins desta pesquisa, foram computadas as respostas de apenas quatro questões da entrevista. A respectiva entrevista foi realizada com base em um questionário semi-estruturado e permitiu identificar a opinião dos alunos quanto a: a) a preferência dos alunos nas áreas curriculares, assim como a rejeição por alguma delas; b) a preferência e grau de dificuldade dos alunos sobre os conteúdos que estavam aprendendo; c) a preferência e grau de dificuldade dos alunos sobre solução de problemas.

Para cada uma das perguntas que ora apresentaremos, os sujeitos tenderam a dar respostas do tipo: "eu gosto mais de...", "eu também gosto de... ou gosto mais ou menos de...", "eu não gosto de ...", "acho que para mim é mais fácil fazer..."; "acho que é mais difícil...", etc. Estas respostas foram organizadas em quatro tipos distintos: a) o que o aluno considera mais fácil; b) o que o aluno considera do que mais gosta; c) o que o aluno gosta de fazer ou acredita ter um nível mediano de dificuldade ou facilidade; d) manifestação de neutralidade diante do questionamento, ou seja, quando o aluno não menciona qualquer resposta que declare alguma informação a respeito da área do conhecimento ou do conteúdo em discussão.

Tabela 3 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com a opinião quanto à preferência por disciplina ou atividade que realiza

	Disciplinas					
	Matemática	Português	Ciências	Geografia	Educação Física	Desenho
Gosto menos de	34 (25,8%)	46 (34,8%)	27 (20,5%)	11 (8,3%)	0 (0%)	0 (0%)
Neutro	0 (0%)	48 (36,4%)	88 (66,7%)	116 (87,9%)	129 (97,7%)	126 (95,5%)
Gosto mais ou menos de	20 (15,2%)	3 (2,3%)	1 (0,8%)	1 (0,8%)	1 (0,8%)	1 (0,8%)
Gosto mais de	78 (59,1%)	35 (26,5%)	16 (12,1%)	4 (3,0%)	2 (1,5%)	5 (3,8%)
Total	132 (100%)	132 (100%)	132 (100%)	132 (100%)	132 (100%)	132 (100%)

A tabela 3 mostra que dos 132 sujeitos investigados, a área de Matemática obteve 34 (25,8%) sujeitos que opinaram "gostar menos" desta disciplina. Ainda, com relação a esta opinião, na área de Português, obtiveram-se 46 (34,8%) alunos, em Ciências 27 (20,5%), Geografia 11 (8,3%) alunos. Nenhum dos alunos investigados indicou "gostar menos de" Educação Física e atividades ligadas ao desenho.

Dentre as opiniões entendidas como "neutras", observou-se que nenhum aluno manifestou neutralidade com relação à área de Matemática. No entanto, 48 (36,4%) alunos mantiveram opinião neutra com relação à área de Português, 88 (66,7%) alunos para a área de Ciências, 116 (87,9%) alunos para a disciplina de Geografia, 129 (97,7%) alunos para Educação Física e 126 (95,5%) alunos para as atividades ligadas ao desenho.

A Matemática foi apontada por 20 (15,2%) alunos como uma área de preferência mediana das crianças, segundo as respostas do tipo "gosto mais ou menos de". Para a área de Português, 3 (2,3%) alunos opinaram "gostar mais ou menos" desta disciplina. As áreas de Ciências, Geografia, Educação Física e Desenho foram indicadas como a preferência mediana por 1 (0,8%) aluno em cada uma das disciplinas, respectivamente.

A opinião manifestada sobre "gostar mais de" Matemática, indicou que 78 (59,1%) dos alunos declaram que esta é a disciplina curricular de sua preferência; e 35 (26,5%) sujeitos indicaram gostar mais da área de Português. A disciplina de Ciências também foi indicada como a área de preferência por 16 (12,1%) alunos e, em Geografia, 4 (3,0%) alunos. A opinião "gostar mais de" Educação Física, foi respondida por 2 (1,5%) alunos. Por fim, 5 (3,8%) alunos responderam que a atividade de desenhar é a que mais gostavam de realizar, independentemente da área curricular.

Quanto a opinião dada sobre a dificuldade encontrada perante um conteúdo matemático, verificou-se que dos 132 sujeitos investigados, 5 (3,8%) sujeitos opinaram que a operação da adição é a atividade "mais difícil". Ainda, com relação a este tipo de opinião, a operação da subtração foi assim respondida por 15 (11,4%) alunos, a operação da multiplicação por 54 (40,9%) alunos e a operação de divisão por 51 (38,6%) alunos. Apenas 7 (5,3%) alunos manifestaram opinião neutra diante da dificuldade sobre e um conteúdo matemático específico.

A tabela 4 mostra a distribuição dos sujeitos de acordo com a opinião dada sobre a preferência atribuída à tarefa de solução de problemas aritméticos.

Tabela 4 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com a preferência atribuída na entrevista para a solução de problema aritmético

Solução de Probelmas	Não gosta	Neutro	Gosta mais ou menos	Mais gosta	Total
Nº de sujeitos	20 (15,2%)	17 (12,9%)	95 (72%)	0 (0%)	132 (100%)

Dos 132 sujeitos entrevistados, 20 (15,2%) alunos chegaram a responder que esta é a atividade que não gostam de realizar nas aulas de Matemática. Ainda em relação a análise das respostas sobre a preferência ou não para solucionar problemas matemáticos, 17 (12,9%) alunos apresentaram respostas de neutralidade em vista desta atividade e 95 (72%) mencionaram no decorrer da resposta que têm preferência mediana em solucionar problemas. Nenhum aluno manifestou maior preferência com relação a realizar atividades de solução de problemas.

As opiniões manifestadas pelos sujeitos quanto a maior preferência diante de um tipo de problema, indicou que 5 (3,8%) dos alunos declaram ser a adição a situação-problema que menos gostam de fazer e 26 (19,7%) sujeitos indicaram gostar menos de problemas que envolvem a operação da subtração. Os problemas do tipo multiplicativo foram indicados como os menos prediletos por 39 (29,5%) sujeitos e os de divisão por 49 (37,1%) sujeitos. Do total de sujeitos investigados, 13 (9,8%) alunos manifestaram opiniões de neutralidade diante da preferência por solucionar um tipo específico de problema aritmético.

A análise da entrevista com relação à preferência dos alunos em uma área curricular mostra uma tendência de os alunos darem preferências para as áreas de Matemática e Português. A solução de problemas não foi manifestada por nenhum dos sujeitos como uma atividade de maior preferência dos alunos, embora grande parte das respostas tenha revelado que dão preferência à Matemática.

Com relação à Matemática, no entanto, embora os alunos manifestem preferência por esta área, eles não o fazem em todas as atividades matemáticas que realizam, ou seja, quando se trata de atividades mais simples como aquelas que envolvem algoritmo da adição e subtração há maior concentração da preferência dos alunos. Quando se trata, porém, de realizar atividades que envolvam algoritmos de multiplicação e divisão, assim como solução de problemas, os alunos manifestam preferência pela atividade de acordo com o grau de complexidade do algoritmo ou do problema a ser realizado.

Destacam os alunos, em suas respostas, que as atividades que envolvam quantidades maiores ou problemas com mais de uma operação são mais complexas e difíceis de realizar.

Na pesquisa de Gonçalez (2000) sobre atitudes dos alunos em relação à Matemática, os sujeitos investigados não apontam a referida disciplina como a preferida, mas tampouco é tida como a menos preferida. No referido estudo, os alunos de 3ª e 4ª séries também tendem a apontar mais que duas áreas como preferência curricular, tal como ocorrido entre os sujeitos desta pesquisa.

Parte 3 -
5.3 Avaliação do Desempenho Escolar em Matemática

A avaliação do SARESP propõe 21 questões, distribuídas em 30 itens, correspondentes a conteúdos matemáticos adequados ao primeiro ciclo das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Na seqüência são apresentados os resultados gerais com relação à distribuição na pontuação obtida nos itens da prova do SARESP e o total de alunos que apresentaram respostas corretas. A análise de cada um dos itens da prova, como é o caso dos exercícios de seqüência numérica, escrita de numerais por extenso e noções de figuras geométricas, entre outros, não é apresentada detalhadamente, uma vez que não corresponde ao foco central ora investigado nesta pesquisa.

Em seguida, no entanto, são apresentados os resultados, de forma mais detalhada, dos itens quanto aos algoritmos e à solução dos problemas aritméticos da prova de Matemática. Os itens que envolveram a solução de problemas variavam quanto à estrutura do seu enunciado, sendo alguns itens referentes a solucionar problemas que solicitavam a utilização de dinheiro para representar situações de compra e venda; outros eram situações problemas referentes à leitura de tabelas e organização dos dados pertinentes para resolução da tarefa.

Na prova do SARESP a maior pontuação que o aluno podia obter eram 30 pontos. A figura 12 mostra o gráfico com as pontuações obtidas pelos 132 sujeitos investigados nesta pesquisa.

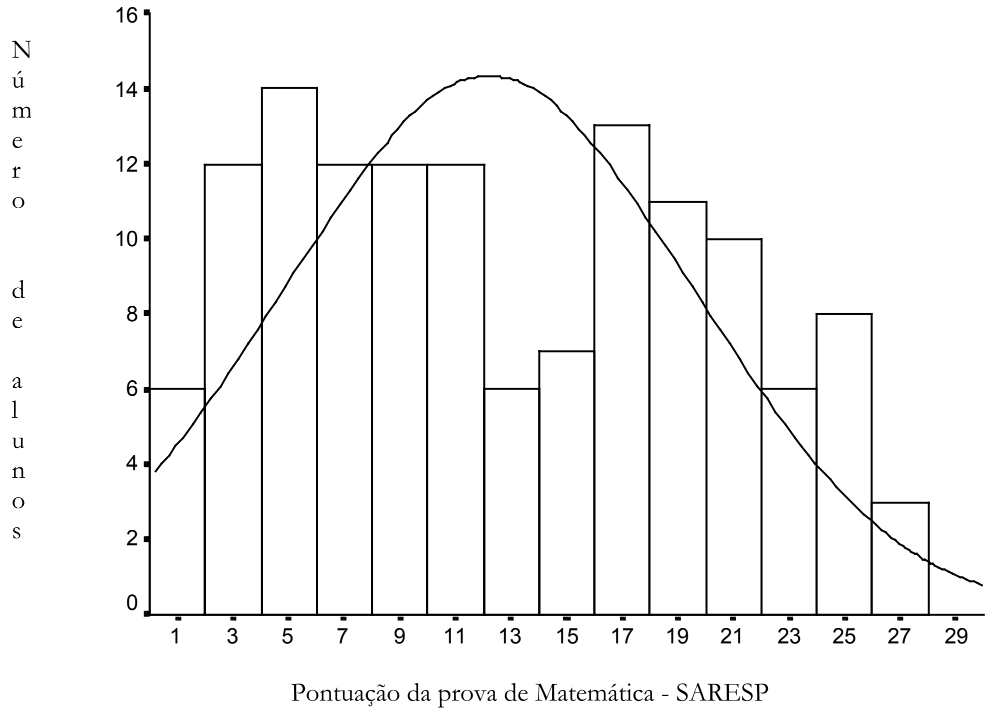


Figura 12 – Distribuição da pontuação e do número de sujeitos que acertaram os itens da Prova de Matemática (SARESP)

A análise do desempenho em Matemática com base na prova do SARESP mostrou que a menor nota obtida foi zero pontos e a nota máxima foi 27 pontos. A média do desempenho foi 12,2 com desvio-padrão de 7,33.

Na presente amostra, a precisão por consistência interna dos itens da prova de Matemática do SARESP foi de 0,92. Este resultado vem confirmar, segundo a análise da Teoria da Resposta ao Item (TRI) em face dos itens da prova de Matemática elaborada pelo SARESP, que o referido instrumento de avaliação tende a medir com alto nível de precisão que, quando um aluno apresenta um determinado desempenho matemático, tem maiores chances de acertar um maior número de itens da prova, conforme se pressupôs anteriormente no primeiro capítulo desta pesquisa.

Na figura 12, os resultados mostraram que do total de 132 sujeitos investigados, 6 (13,6%) alunos obtiveram, respectivamente, as seguintes pontuações: 1, 13 e 23 na prova do

SARESP. Foram encontrados 7 (6,3%) sujeitos que obtiveram pontuação 15 e apenas 8 (6%) dos sujeitos obtiveram 25 pontos na prova.

Perfazer um total de 21 pontos na prova foi o caso de 10 (7,5%) sujeitos. Foram encontrados 11 (8,3%) sujeitos que conseguiram 19 pontos e 12 (36,3%) sujeitos que fizeram 3, 7, 9 e 11 pontos em cada um destes totais, respectivamente.

Os resultados mostraram que 13 (9,8%) sujeitos obtiveram 17 pontos e 14 (10,6%) sujeitos perfizeram 5 pontos do total geral da prova de Matemática. Constatou-se que apenas 3 (2,2%) sujeitos conseguiram obter 27 pontos, pontuações estas, consideradas as mais altas entre os sujeitos da amostra na prova de Matemática que totalizava 30 pontos.

A figura 12 revela uma distribuição bimodal, indicando a existência de dois grupos distintos: alunos com desempenho satisfatório e alunos com desempenho insatisfatório em Matemática. Observa-se que há uma concentração de pessoas ao redor da nota 5, caracterizando-se como o subgrupo dos alunos com baixo desempenho e um outro subgrupo, os alunos com melhor desempenho ao redor de 17 pontos obtidos na prova.

5.3.1 Análise do desempenho em relação às escolas

A análise de variância mostrou alguns fatores que poderiam ser intervenientes com relação aos resultados obtidos no desempenho escolar em Matemática.

Tabela 5 – Distribuição das médias de desempenho dos sujeitos em relação às escolas

	Nº de sujeitos	Média	Desvio-padrão
1	31	11,6452	7,9773
2	23	14,4348	6,7476
3	32	10,5000	6,8061
4	46	12,6304	7,4158

O desempenho em Matemática dos alunos (Anexo 2) quando analisados tendo em vista as escolas não se mostrou discrepante. A análise de variância do desempenho em Matemática em relação às escolas não mostrou diferença significativa (Anexo 3), como evidenciou o teste ANOVA (F [3,128]=1,41; p= 0,24). Este fato permite-nos afirmar que parece haver uma aprendizagem da Matemática bastante semelhante quanto aos conteúdos e tarefas exigidas pelos professores com relação ao processo ensino-aprendizagem nas quatro escolas investigadas com crianças da 3ª série do Ensino Fundamental.

5.3.2 Análise do desempenho em relação ao gênero

A análise do desempenho em Matemática em relação ao gênero mostrou (Anexo 4) que para os 64 sujeitos do gênero masculino a média foi a de 11,5156 (desvio-padrão de 7,4087) e para o gênero feminino, os 68 sujeitos obtiveram média de 12,8382 (desvio-padrão de 7,2598).

Aplicou-se a prova de T-teste (Anexo 5), o que nos possibilitou verificar que, para os sujeitos desta pesquisa, o desempenho em Matemática em relação ao gênero não apresentou diferença estatisticamente significativa (t=- 1,03; gl=130; p=0,30).

Os resultados obtidos sobre o desempenho escolar em relação ao gênero apresentaram semelhança com o estudo de Gonçalez (2000), no qual a média de desempenho do gênero masculino foi 6,82 e, para o feminino, 7,09. Quando a referida autora averiguou se havia diferenças entre os gêneros no que diz respeito ao desempenho, ficou evidenciado que as meninas apresentaram melhor desempenho e os meninos apresentaram um desempenho ligeiramente inferior.

Em ambos os estudos o grupo de sujeitos do gênero feminino não apresentou resultados significativamente inferiores ao grupo masculino.

Fennema, Tobias e Jacobs (1993), citadas por Gonçalez (2000) desenvolveram várias pesquisas sobre gênero e as atitudes em relação à Matemática. Seus estudos trouxeram alguns fatos que poderão ajudar os pesquisadores da área a se aprofundarem em algumas questões como: a) as disciplinas de Matemática e Ciências por serem, como acreditam muitos, de domínio masculino afetam o desempenho de ambos os gêneros; b) a crença de que um indivíduo é bom em Matemática e em Ciências ele não poderá ser em linguagem e em artes; c) as alunas atribuíram seu sucesso, em Matemática, a fatores externos, como por exemplo, a sorte e, os meninos atribuíram o sucesso à habilidade.

Os estudos relacionados à questão do gênero têm fornecido um material relevante sobre o desempenho matemático e sobre as atitudes em relação à Matemática. Esses estudos são muito importantes para compreender os estereótipos culturais, e possivelmente ajudando a esclarecer o quadro dos preconceitos na escola.

No que diz respeito a gostar ou não da Matemática, a pesquisa de Gonçalez (2000) também não encontrou diferenças significativas entre os gêneros, porém quando se estudou se a Matemática é um assunto do domínio masculino, esse atributo foi encontrado nos alunos da 3ª série havendo diferenças significativas entre as 4ª e as 8ª séries que não a consideram do domínio masculino.

Os dados desta pesquisa indicam que haveria que se investigar mais detalhadamente as variáveis: desempenho e gênero. O estereótipo de que o gênero masculino tem melhor desempenho nas ciências exatas em relação ao gênero feminino talvez possa ser explicado não em virtude de fatores gerais da inteligência, e sim em virtude de habilidades específicas dos estudantes, conforme destacado por Santos, Primi et al. (2000).

5.3.3 Análise do desempenho em relação às idades

A diferença entre desempenho em Matemática em relação às idades dos sujeitos foi estatisticamente significativa ($F[2,129]=5,51$; $p=0,005$) sendo que os alunos mais novos (8 anos) apresentaram desempenho superior aos demais, como mostra a tabela 6. Os dados (Anexo 6) mostraram que os sujeitos mais novos investigados nesta pesquisa foram aqueles que obtiveram as melhores pontuações na prova do SARESP.

Tabela 6 – Distribuição das médias de desempenho dos sujeitos em relação às idades

	Nº de sujeitos	Média	Desvio-padrão
8	20	15,900	8,1493
9	92	12,2065	7,3343
10	20	8,4500	4,1987
Total	132	12,1970	7,3344

Observou-se que a diferença entre o desempenho em relação às escolas e ao gênero não se mostrou significativa. Ao analisarmos, no entanto, o desempenho matemático em relação à idade, pode-se constatar que a variável idade é um fator interveniente nos resultados obtidos quanto ao desempenho em Matemática destes alunos.

Este resultado indica a necessidade de estudar por que as crianças mais novas e ao mesmo tempo com idades adequadas para as séries que estão cursando tendem a apresentar melhor desempenho em Matemática. Podem talvez, apresentar menos defasagens quanto a processos cognitivos e aprendizagem de conteúdos escolares do que aquelas crianças que têm idades mais avançadas e cursam a mesma série.

Os dados obtidos não são suficientes para que se entendam por exemplo, os fatores emocionais, mas outras pesquisas poderiam analisar aspectos que envolvam esta temática, tais como a auto-estima e sua relação com o desempenho e as idades dos sujeitos.

Vale ressaltar que os resultados obtidos com relação aos alunos que apresentam baixo desempenho em Matemática e idades mais avançadas em relação à média de idade dos demais sujeitos desta pesquisa, permitiriam afirmar que se configura em um subgrupo particular da amostra e talvez, corresponderia a um grupo de sujeitos que apresentem dificuldades de aprendizagem no campo da Matemática. Acreditamos que para estes sujeitos seria necessária a elaboração de projetos de intervenção psicopedagógica quanto a aprendizagem dos conteúdos matemáticos em nível conceitual, assim como de procedimentos e de atitudes, tal como orientado pelos PCNs (1997).

5.3.4 Análise dos resultados quanto ao acerto dos algoritmos da prova de Matemática (SARESP)

Para a pontuação total de acertos, conforme indicado pelo manual de correção do SARESP/96, caso a criança tivesse acertado os três algoritmos postos em cada questão para a operação da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, receberia pontuação um. Dessa forma, a análise sobre o desempenho matemático foi feita seguindo este critério, ou seja, caso a criança tivesse errado uma única operação das três apresentadas para cada uma das quatro operações, seria considerado zero pontos para esse item.

Tabela 7 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o acerto total dos três algoritmos contidos na prova para cada uma das quatro operações

	Algoritmos				
	Adição 1	Adição 2*	Subtração	Multiplicação	Divisão
Nº de sujeitos	65 (49,6%)	69 (54,3%)	40 (30,8%)	13 (10,5%)	8 (7,8%)

* Refere-se ao item de algoritmo da adição faltando uma parcela

Conforme apresentado na tabela 7, dos 132 sujeitos avaliados, 65 (49,6%) crianças acertaram os 3 algoritmos da adição e 69 (54,3%) completaram corretamente o item sobre adição que solicitava o descobrimento da parcela que faltava na operação.

Os resultados obtidos nas respostas dos sujeitos quanto ao algoritmo da operação de subtração mostraram que 40 (30,8%) crianças acertaram os três algoritmos da referida operação. Para os algoritmos da multiplicação, 13 (10,5%) crianças multiplicaram corretamente os 3 itens da questão e 8 (7,8%) crianças fizeram acertaram os algoritmos da divisão.

3.3.5 Análise dos resultados quanto à solução de problemas da prova de Matemática (SARESP)

Os resultados obtidos no problema de adição, mostraram que 79 (59,2%) crianças acertaram o item. Para o problema da subtração 1, os resultados obtidos mostraram que 46 (34,8%) crianças acertaram o item. No problema de subtração 2, observou-se que 41 (31%) crianças solucionaram corretamente o problema. Para a situação-problema que envolvia adição e subtração com base no cálculo com dinheiro, 50 (37,8%) sujeitos fizeram corretamente este item da prova, como mostra a tabela 8.

Tabela 8 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o acerto na solução de problemas aritméticos contidos na prova de Matemática do SARESP

Problemas						
Adição	Subtração 1	Subtração 2	Adição e Subtração	Multiplicação 1	Multiplicação 2	Divisão
79 (59,2%)	46 (34,8%)	41 (31%)	50 (37,8%)	29 (21,9%)	32 (24,2%)	54 (40,9%)

Os resultados obtidos no problema de multiplicação 1, sobre o cálculo do número total de voltas a ser percorrida em "x" quilômetros de uma pista de corrida, indicaram que 29 (21,9%) crianças acertaram o item. No problema de multiplicação 2, referente ao cálculo do total de parafusos em uma gaveta e suas respectivas divisórias, os resultados obtidos mostraram que 32 (24,2%) crianças solucionaram corretamente o item.

Quanto ao problema de divisão, 54 (40,9%) crianças o solucionaram corretamente. Observou-se que o resultado no caso do problema de divisão foi superior ao obtido nos problemas de multiplicação, resultado este não comumente encontrado nas pesquisas sobre solução de problemas. O estudo de Bell et al. (1989) e Brito (2000) evidenciaram maior incidência de erros na solução de problemas de divisão e a dificuldade dos alunos foi constatada mesmo considerando-se quantidades pequenas.

Cabe lembrar que a divisão é um dos componentes da estrutura multiplicativa e também umas das operações mais complexas, o que nos permitiria prever que os resultados talvez se mostrassem semelhantes ou até mesmo com predominância de êxito para os problemas de multiplicação, dado o nível de complexidade da operação da divisão que envolve tanto a representação mental do problema como o cálculo por meio do algoritmo. Para nossa surpresa, no entanto, o resultado dos problemas de divisão ultrapassou o percentual de acertos dos problemas de multiplicação. Por um lado, isto pode ser explicado pelo fato de ambas as operações estarem inseridas na estrutura multiplicativa como classe operatória, e a diferença dos acertos obtida no problema de divisão ter-se dado pelo fato de os dados numéricos terem favorecido a operação. Outra hipótese levantada foi o fato de os acertos terem ocorrido em razão de ser, o problema de divisão um dos últimos itens da prova e, com base nesse fato, os sujeitos tenderam a um efeito de aprendizagem com relação a este item, acertando o problema. Por outro lado, e parece-nos mais provável, destacamos o fato de que, para este problema, a prova apresentava a representação gráfica dos 20 palitos do enunciado do problema e um exemplo de uma casa feita de cinco palitos. Este aspecto talvez tenha favorecido às crianças solucionar e apresentar a resposta correta. Provavelmente lhes tenha ocorrido solucionar a operação não por meio da técnica algorítmica da divisão, ou mesmo terem empregado a transformação operatória pertinente, ou seja, 20 : 5 = 4 e, sim, ter desenhado quatro casas com 5 palitos cada uma, para obtenção da resposta correta (n=4), contando os palitos.

Os resultados divulgados da avaliação em Matemática do SARESP/96 também indicaram para esta questão um desempenho superior ao encontrado na solução de problemas de enunciado de multiplicação.

Estes resultados, a nosso ver, evidenciaram que a representação gráfica dos palitos, oportunizou aos alunos realizar de maneira exitosa a divisão, diferentemente das propostas que solicitavam apenas o cálculo pelo algoritmo das operações aritméticas contidas nos problemas.

Parte 4 -
5.4 Resultados das classificações dos níveis nas provas piagetianas e do desempenho na solução de problemas de análise combinatória

Dos 132 sujeitos avaliados quanto ao desempenho escolar em Matemática, obtiveram-se as notas que indicavam os melhores os piores escores. Com base nestes resultados, foram selecionados os dois subgrupos de alunos (n=32) a fim de se analisarem as relações entre o desempenho matemático, os níveis de abstração voltado à construção de múltiplos comuns, as operações combinatórias e a solução de problemas multiplicativos de produto cartesiano com lápis e papel.

Os 32 sujeitos que compuseram os subgrupos: Grupo A (alunos com escores mais altos) e Grupo B (alunos com escores mais baixos) foram submetidos às provas de abstração, de análise combinatória, assim como solicitados a solucionar problemas aritméticos de estrutura multiplicativa (produto cartesiano) com lápis e papel. Os respectivos resultados e sua análise são apresentados a seguir por ordem de aplicação dos instrumentos.

5.4.1 Prova do processo de abstração – Noção de múltiplos comuns

Foi realizada primeiramente a atribuição dos níveis de classificação dos sujeitos obtidos na prova de abstração. Em seguida, foi realizada a análise de concordância entre as classificações dos níveis IA, IB e IIA atribuídos às três quantidades de fichas utilizadas na aplicação da prova de abstração.

As tabelas 9, 10 e 11 mostram a classificação simultânea dos sujeitos entre as três diferentes quantidades de fichas com as quais se deveria realizar a prova para verificação do nível do processo de abstração sobre múltiplos comuns.

Tabela 9 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a concordância nas classificações dos níveis de abstração obtidos com a prova de múltiplos comuns com 12 e 24 fichas

		Abstração N = 24 fichas					Total
		IA	IB	IIA	IIB	III	
Abstração N = 12 fichas							
	IA	3	-	-	-	-	3
	IB	2	10	-	-	-	12
	IIA	-	7	10	-	-	17
	IIB*	-	-	-	-	-	0
	III*	-	-	-	-	-	0
Total		5	17	10	0	0	32

* Nesta pesquisa não foram encontrados sujeitos no nível IIB e III na prova de abstração com 12 e 24 fichas

Do total de 32 sujeitos que constituíram um subgrupo da amostra dos alunos investigados, 3 alunos encontram-se no nível IA ao realizar a prova de abstração, tanto para a quantidade de 12 fichas como para a etapa seguinte com 24 fichas. Foram classificados 12 alunos no nível IB, sendo que 2 deles encontram-se em níveis diferenciados: nível IB para 12 fichas e IA para 24 fichas. Ainda, com relação ao nível IB, 10 alunos foram classificados neste nível para n=12 e n=24 fichas, respectivamente. Para o nível IIA obteve-se a classificação de 17 alunos, e 7 deles encontram-se no nível IIA em n=12 fichas, mas encontram-se em IB para n=24 fichas. Foram classificados 10 alunos em IIA em ambas as quantidades de fichas (n=12; 24).

A análise dos níveis de classificação entre 12 e 36 fichas para avaliar o processo de abstração em face dos múltiplos comuns é apresentada na tabela 10.

Tabela 10 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a concordância nas classificações dos níveis de abstração obtidos com a prova de múltiplos comuns com 12 e 36 fichas

		Abstração N = 36 fichas					Total
		IA	IB	IIA	IIB	III	
Abstração N = 12 fichas							
	IA	3	-	-	-	-	3
	IB	3	9	-	-	-	12
	IIA	-	6	11	-	-	17
	IIB*	-	-	-	-	-	0
	III*	-	-	-	-	-	0
Total		6	15	11	0	0	32

* Nesta pesquisa não foram encontrados sujeitos no nível IIB e III na prova de abstração com 12 e 36 fichas

A análise dos níveis de abstração com a utilização de 12 e 36 fichas mostrou que 3 alunos encontram-se no nível IA para ambas as quantidades de fichas dadas na tarefa sobre múltiplos comuns. Para o nível IB, obteve-se um total de 12 alunos neste nível, e 3 deles encontram-se em IB para 12 fichas, mas em IA para 36 fichas e 9 alunos estão em IB em ambas as quantidades de fichas.

Tabela 11- Distribuição dos sujeitos de acordo com a concordância nas classificações dos níveis de abstração obtidas com a prova de múltiplos comuns com 24 e 36 fichas

		Abstração N = 36 fichas					Total
		IA	IB	IIA	IIB	III	
Abstração N = 24 fichas							
	IA	5	-	-	-	-	5
	IB	1	14	2	-	-	17
	IIA	-	1	9	-	-	10
	IIB*	-	-	-	-	-	0
	III*	-	-	-	-	-	0
Total		6	15	11	0	0	32

* Nesta pesquisa não foram encontrados sujeitos no nível IIB e III na prova de abstração com 24 e 36 fichas

Dos 32 sujeitos investigados, 5 alunos encontram-se no nível IA em 24 e 36 fichas na prova de abstração. Foram classificados 17 alunos no nível IB, e 1 deles encontra-se no nível IB para 24 fichas e IA para 36 fichas. Ainda, com relação ao nível IB, 14 alunos foram classificados neste nível para n=24 e n=36 fichas, respectivamente. A análise de concordância mostrou também que 2 alunos encontram-se em IB para 24 fichas e em IIA para 36 fichas. No nível IIA foram classificados 10 alunos, e 1 deles encontra-se no nível IIA em n=24 fichas e em IB para n=36 fichas. Foram classificados 9 alunos em IIA em ambas as quantidades de fichas.

A análise de concordância para verificar a relação entre os níveis de classificação obtidos pelos sujeitos e as diferentes quantidades de fichas trabalhadas na prova do processo de abstração sobre múltiplos comuns pode ser comprovada pelo teste de correlação de Spearman.

A análise dos níveis de classificação obtidos dos sujeitos em 12 e 24 fichas indicou correlação de 0,747, significativa ao nível de $p<0,01$. Da mesma forma, na análise de concordância nos níveis de classificação obtidos em 12 e 36 fichas, houve correlação de 0,779, significativa ao nível de $p<0,01$. Os resultados também mostraram concordância nos níveis de classificação na prova de abstração das quantidades 24 e 36 fichas, indicando correlação de 0,861, significativa no nível de $p<0,01$, entre estas variáveis (Anexo 7).

Estes resultados evidenciam que os níveis de classificação obtidos pelos sujeitos com relação ao processo de abstração mantêm concordância entre si mesmo quando submetidos a abstrair a noção de múltiplos comuns entre diferentes quantidades. Os dados revelam a tendência de os alunos serem classificados em um determinado nível de abstração ainda que se considerem as diferentes quantidades apresentadas às crianças.

Os sujeitos que são classificados em um nível mais elementar na prova de abstração com 12 fichas, são também assim classificados na prova utilizando 24 e 36 fichas. Os sujeitos que apresentam níveis de classificação como IB e IIA encontrados nesta pesquisa, permanecem em um destes níveis nas provas com 12, 24 e 36. Observou-se., no entanto, que, em alguns casos, os sujeitos apresentavam transição de um nível para o outro numa quantidade e outra de fichas da prova de abstração.

De acordo com o que foi proposto no objetivo desta pesquisa, a tabela 13 a seguir, apresenta a descrição comparativa e a análise estatística dos dois subgrupos (A e B – maiores e menores escores) da amostra em relação aos níveis de classificação obtidos em cada uma das quantidades examinadas no processo de abstração. Foi realizada a análise da distribuição dos sujeitos de cada subgrupo quanto ao nível de abstração em cada uma das três etapas da prova, ou seja, a classificação dos sujeitos com base na utilização de 12, 24 e 36 fichas.

Para analisar as relações entre o desempenho dos sujeitos dos dois subgrupos e o nível de abstração, usou-se o teste Qui-quadrado de independência. Da mesma forma, utilizou-se igual procedimento para analisar as relações entre o desempenho dos sujeitos pertencentes aos dois subgrupos nas operações combinatórias e na solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel, os quais são apresentados na seqüência.[7]

A tabela 12 mostra que dos 32 sujeitos que constituíram os subgrupos da amostra, nenhum aluno do Grupo A foi encontrado no nível IA, e no Grupo B, 3 (18,8%) alunos classificaram-se neste nível para a quantidade de 12 fichas. Em IB, para o Grupo A, 5 (31,3%) alunos e 7 (43,8%) alunos do Grupo B. No nível IIA foram encontrados 11 (68,8%) alunos do Grupo A e 6 (37,5%) alunos do Grupo B.

---

[7] Considerou-se um nível de significância de 5% para afirmar que existia uma porcentagem de caselas com o valor de freqüência menor que 5. Para evitar os problemas gerados quando a freqüência esperada das caselas das tabelas fossem menores que 5, adotou-se um procedimento do Statistical Package for Social Sciences (SPSS, 1993) que calcula as probabilidades exatas pelo método de Monte Carlo o qual simula de 10000 amostras, supondo que a hipótese nula seja verdadeira (independência entre as variáveis) com base nas freqüências marginais observadas e verifica qual a probabilidade de ocorrência da distribuição específica que é testada. Este procedimento, portanto, resulta em probabilidades não viesadas.
Para informação mais detalhada, vide Statistical Package for Social Sciences (SPSS, 1993)

Tabela 12 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com os níveis de abstração em n=12 fichas

		Grupo A	Grupo B	Total
Abstração n = 12	IA	-	3 (18,8%)	3 (9,4%)
	IB	5 (31,3%)	7 (43,8%)	12 (37,5%)
	IIA	11 (68,8%)	6 (37,5%)	17 (53,1%)
Total		16 (100%)	16 (100%)	32 (100%)

A aplicação do teste Qui-quadrado (Anexo 8) evidenciou que não apresentaram diferença significativa entre os subgrupos A (maiores escores) e B (menores escores) e os níveis de abstração utilizando 12 fichas (χ^2=4,8; *gl*= 2; *p*=0,11). Este resultado evidenciou que tanto os alunos que apresentam os escores mais altos, como aqueles que apresentam pontuação mais baixa na prova sobre desempenho em Matemática não apresentam diferenças estatisticamente significativas entre si com relação aos níveis de classificação do processo de abstração da noção de múltiplos comuns ao utilizarem 12 fichas.

Tabela 13 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com os níveis de abstração em n=24 fichas

		Grupo A	Grupo B	Total
Abstração n = 24	IA	-	5 (31,3%)	5 (15,6%)
	IB	9 (56,3%)	8 (50,0%)	17 (53,1%)
	IIA	7 (43,8%)	3 (18,8%)	10 (31,3%)
Total		16 (100%)	16 (100%)	32 (100%)

As classificações dos níveis de abstração com 24 fichas mostrou, como em 12 fichas, que nenhum sujeito do Grupo A foi encontrado em IA e no Grupo B, 5 (31,3%) alunos estavam neste nível. No Grupo A, 9 (56,3%) alunos e no Grupo B, 8 (50%) alunos encontram-se em IB. No nível IIA, 7 (43,8%) alunos do Grupo A foram encontrados, ao passo que no Grupo B encontraram-se apenas 3 (18,8%) alunos, conforme mostra a tabela 13.

Contrariamente ao resultado da prova de abstração com 12 fichas, os resultados obtidos entre os dois subgrupos e os níveis do processo de abstração utilizando 24 fichas (Anexo 9) apresentaram diferença significativa, evidenciada pelo teste Qui-quadrado ($\chi^2 = 6{,}6$; $gl = 2$; $p = 0{,}03$).

Este resultado permite-nos lembrar da importância da progressão das noções quantitativas, conforme estudado por Piaget e Gréco, et al. (1960). Os autores assinalam que a síntese numérica ocorre inicialmente para os números elementares, estendendo-se progressivamente por meio de parcelas. A aquisição do conceito de número operatório e das operações aritméticas exige das crianças um longo percurso e níveis diferenciados de elaboração que ocorrem muito antes do ingresso na escola. Abstrair a noção de múltiplo comum entre quantidades maiores parece estar ligada a um melhor domínio dos alunos que apresentam melhor desempenho em Matemática. Os alunos do grupo B que apresentam menores escores apresentam uma tendência do nível de classificação do processo de abstração semelhante ao dos alunos do grupo A quando submetidos a lidar com pequenas quantidades, como é o caso da prova de abstração com 12 fichas. Conforme aumenta o desempenho dos sujeitos, parece também aumentar a sua capacidade de abstrair os dados referentes ao múltiplo comum em quantidades maiores.

Logo, a atividade cognitiva em lidar com quantidades pequenas, tal como a de abstrair a noção de múltiplo comum entre 12 fichas, revela-se, tanto para os sujeitos do Grupo A, como os do Grupo B desta pesquisa, como um problema que exige relações mais básicas diante da abstração de múltiplos comuns utilizando-se 24 e 36 fichas.

Tabela 14 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com os níveis de abstração em n=36 fichas

		Grupo A	Grupo B	Total
Abstração n = 36	IA	-	6 (37,5%)	6 (18,8%)
	IB	7 (43,8%)	8 (50,0%)	15 (46,9%)
	IIA	9 (56,3%)	2 (12,5%)	11 (34,4%)
Total		16 (100%)	16 (100%)	32 (100%)

Para a quantidade de 36 fichas, nenhum aluno do Grupo A foi encontrado no nível IA e no Grupo B, 6 (37,5%) alunos foram classificados. Em IB, para o Grupo A, 7 (43,8%) alunos e 8 (50%) alunos do Grupo B. No nível IIA foram encontrados 9 (56,3%) alunos do Grupo A e 2 (12,5%) alunos do Grupo B.

A análise entre os subgrupos A e B e os níveis de classificação do processo de abstração utilizando 36 fichas (Anexo 10) mostrou diferença significativa no teste Qui-quadrado ($\chi^2 = 10{,}5$; *gl*= 2; *p* = 0,005).

Os resultados obtidos na análise entre os subgrupos de alunos quanto ao desempenho em Matemática e o nível do processo de abstração mostraram que, tanto na prova com 24 fichas como naquela em que os sujeitos utilizavam 36 fichas, apresentaram diferença estatisticamente significativa. Neste caso, verificou-se que os sujeitos do Grupo A são aqueles que apresentam melhor desempenho em Matemática e ao mesmo tempo, tendem a apresentar níveis de abstração mais elevados na prova de múltiplos comuns quando utilizam 24 e 36 fichas em relação aos sujeitos do Grupo B.

5.4.2 Prova da noção da idéia de acaso e probabilidade – Operações combinatórias

Os resultados obtidos na prova sobre operações combinatórias foram analisados primeiramente em termos de classificação dos estágios (I, II e III) atribuídos nos estudos de Piaget e Inhelder (1951) e em conformidade com a descrição feita na metodologia da pesquisa. Em seguida são apresentadas as classificações dos sujeitos em termos do método de combinação utilizados. A classificação quanto ao método utilizado foi realizado somente para os sujeitos que se encontravam no Estágio II. Tal como previsto por Piaget e Inhelder (1951), por ser um estágio intermediário entre a ausência total de um sistema combinatório, como o encontrado nas condutas dos sujeitos do Estágio I e da descoberta do sistema como o Estágio III, este nível intermediário suscita na conduta dos sujeitos uma variação nos métodos de combinação eleitos pelo sujeito na busca de solução do problema enunciado na prova e possibilitou-nos analisar etapas intermediárias que os alunos fazem quando ora se aproximam ou não de um sistema total de combinações entre 4 elementos tomados dois a dois.

5.4.3 Classificação dos estágios na prova das operações combinatórias

A análise da classificação dos estágios em que se encontram os sujeitos quanto à avaliação do desenvolvimento cognitivo nas operações combinatórias de quatro elementos tomados 2 a 2, mostrou que um (6,3%) aluno do Grupo A encontra-se no estágio I e 8 (50%) alunos do Grupo B também encontram-se neste mesmo estágio. No estágio II foram encontrados 15 (93,8%) alunos do Grupo A e 9 (56,3%) alunos do Grupo B.

Na tarefa de combinatória de quatro elementos tomados 3 a 3, os resultados obtidos mostraram que no Grupo A apenas um (6,3%) aluno encontra-se no estágio I, ao passo que no

Grupo B, foram encontrados 7 (43,8%) alunos. No estágio II foram encontrados 15 (93,8%) alunos do Grupo A e 9 (53,3%) alunos do Grupo B, conforme mostra a tabela 15.

Tanto na prova das operações combinatórias de quatro elementos tomados 2 a 2, assim como tomados 3 a 3, não foram encontrados sujeitos classificados no estágio III.

Tabela 15 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com a classificação dos estágios obtidos na prova das operações combinatórias

		Grupo A	Grupo B	Total
Combinação 2 a 2	Estágio I	1 (6,3%)	8 (50%)	9 (28,1%)
	Estágio II	15 (93,8%)	8 (50%)	23 (71,9%)
	Estágio III	-	-	-
Total		16 (100%)	16 (100%)	32 (100%)
Combinação 3 a 3	Estágio I	1 (6,3%)	7 (43,8%)	8 (25%)
	Estágio II	15 (93,7%)	9 (56,3%)	24 (75%)
	Estágio III	-	-	-
Total		16 (100%)	16 (100%)	32 (100%)

De acordo com o teste Qui-quadrado (Anexo 11), considerando-se as variáveis subgrupos e estágios de classificação das operações combinatórias de quatro elementos tomados dois a dois, obtiveram-se diferenças estatisticamente não significativas (χ^2=5,5; *gl*=1; *p*= 0,06).

Para as variáveis subgrupos e estágios de classificação das operações combinatórias de quatro elementos tomados três a três, o teste Qui-quadrado (Anexo 12) revelou diferença significativa ($\chi^2 = 6{,}0$; $gl=1$; $p=0{,}014$).

No caso da tarefa de combinar quatro elementos tomados dois a dois, observa-se que ainda que não significativo, o resultado apresentou significância marginal. Mesmo no caso da tarefa de combinar quatro elementos tomados três a três, observa-se que o resultado está muito próximo, do ponto de vista estatístico, também de uma significância marginal. Isto evidencia que os sujeitos do Grupo A conseguem realizar o número total de combinações de quatro elementos tomados 2 a 2 ou tomados 3 a 3 de maneira muito próxima ao número de combinações que os sujeitos do Grupo B conseguem fazê-lo. De qualquer forma, no entanto, observa-se que os sujeitos do Grupo A tendem a aproximar-se mais da busca e descoberta de um sistema combinatório, tal como as condutas observadas no estágio II. Isto nos permite afirmar que os sujeitos do Grupo A, que apresentam melhor desempenho em Matemática, conseguem obter um avanço qualitativo no que se refere à classificação do nível das operações combinatórias em relação ao Grupo B.

Estes resultados estão em conformidade com os estudos de Piaget e Inhelder (1951), quando estes autores descrevem que a aquisição das operações combinatórias está ligada à construção do raciocínio proporcional e probabilístico. Implicam descoberta de um sistema com combinatórias metódicas, nas quais nenhuma associação entre pares ou trios é negligenciada, superando a conduta por meio de pesquisa empírica. Esta maneira de operar mentalmente consiste, segundo descrito por Piaget e Inhelder (1951) sobre as operações combinatórias, em uma “seriação de correspondências sucessivas” correspondentes a operações de segunda potência, ou, ainda, de operações que se referem a outras operações, implícitas no período formal.

5.4.4 Classificação dos métodos de combinação utilizados pelos sujeitos na prova das operações combinatórias

O estágio II de classificação das operações combinatórias referem-se às combinações possíveis realizadas por ensaio e erro pelos sujeitos. Caracteriza-se também como um estágio de busca, ou melhor, de procura por um sistema de combinações ao invés de os sujeitos centrarem-se na realização da tarefa com pares isolados.

Esta caracterização específica do estágio II também foi investigada por Piaget e Inhelder (1951). Os autores identificaram cinco métodos distintos de combinações os quais as crianças, especificamente do estágio II, apresentam ao realizarem tarefas combinatórias.

O primeiro método (método 1) é caracterizado pela descoberta de combinações por meio de um procedimento de simples justaposição dos pares, com predomínio na descoberta empírica. O segundo método (método 2) já se caracteriza em razão do progresso do sujeito em relação à interseção dos pares a serem combinados, oscilando entre justaposições e justaposições entrecruzadas, mas, ainda, com predomínio da idéia de justaposição.

No terceiro método (método 3), o sujeito passa a marcar um ponto de referência, como, por exemplo, a associação dos pares extremos do conjunto de elementos a serem combinados. No método 3, ainda que apareça a idéia de fazer combinações com uma referência entre uma associação e outra, as crianças se valem do procedimento de justaposição entrecruzada. No quarto método (método 4) a criança ainda não se libera da justaposição entrecruzada, mas já procede por pares simétricos e também faz algumas combinações ao acaso, por tateios empíricos. O quinto método (método 5) caracteriza-se pela descoberta espontânea do sistema (Piaget e Inhelder, 1951).

A tabela 16 mostra a classificação dos níveis dos sujeitos dos dois subgrupos investigados com relação ao método utilizado no estágio II para realizar as combinações de quatro elementos tomados dois a dois e tomados três a três.

Tabela 16 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com a classificação dos métodos de combinação obtidos na prova das operações combinatórias no Estágio II

		Grupo A	Grupo B	Total Geral
Estágio II Combinação 2 a 2	*Método 1**	-	-	-
	Método 2	4 (26,7%)	7 (87,5%)	11 (47,8%)
	Método 3	6 (40%)	-	6 (26,1%)
	Método 4	5 (33,3%)	1 (12,5%)	6 (26,1%)
	*Método 5**	-	-	-
Sub-Total		15 (100%)	8 (100%)	23 (100%)
Estágio II Combinação 3 a 3	*Método 1**	-	-	-
	Método 2	6 (40%)	8 (88,9%)	14 (58,3%)
	Método 3	7 (46,7%)	1 (11,1%)	8 (33,3%)
	Método 4	2 (13,3%)	-	2 (8,3%)
	*Método 5**	-	-	-
Sub-Total		15 (100%)	9 (100%)	24 (100%)

* Nesta pesquisa não foram encontrados sujeitos no estágio II que utilizaram os métodos 1 e 5.

A tarefa de análise combinatória de quatro elementos tomados 2 a 2 mostrou que 4 (26,7%) alunos do Grupo A e 7 (87,5%)do Grupo B foram classificados no método 2 ao realizar as combinações dos pares. No método 3 foram encontrados apenas 6 (40%) sujeitos do Grupo A. A utilização do método 4 foi realizada por 5 (33,3%) alunos do Grupo A e por um único (12,5%) aluno do Grupo B.

Na tarefa de combinatória de quatro elementos tomados 3 a 3, os resultados obtidos mostraram que no Grupo A 6 (40%) alunos utilizaram o método 2 ao realizar as combinações, ao passo que no Grupo B, foram encontrados 8 (88,9%) alunos. O método 3 foi utilizado por 7 (46,7%) alunos do Grupo A e apenas um único (11,1%) aluno do Grupo B. A utilização do método 4 foi realizada por apenas 2 (13,3%) alunos do Grupo A e nenhum aluno do Grupo B valeu-se deste método para realizar a combinação de 3 em 3.

Os dados indicaram que houve diferença significativa ($\chi^2=8{,}1$; *gl*=2; *p*=0,028) entre os subgrupos (A e B) e os métodos utilizados na solução de operações combinatórias de quatro elementos tomados dois a dois (Anexo 13).

Observa-se, porém, que houve diferença marginalmente significativa ($\chi^2=5{,}6$; *gl*=2; *p*=0,06) entre os subgrupos e os métodos utilizados na solução de operações combinatórias de quatro elementos tomados três a três (Anexo 14).

Os resultados indicaram que, por um lado, o nível de classificação das operações combinatórias de quatro elementos tomados dois a dois não apresentam diferenças estatisticamente significativas em relação aos sujeitos dos subgrupos A e B. Por outro lado, os resultados indicaram uma diferença significativa em relação aos métodos empregados pelos sujeitos do Grupo A na tarefa de combinar quatro elementos tomados dois a dois.

Estes resultados evidenciaram que há uma maior concentração dos sujeitos em ambos os grupos no estágio II das operações combinatórias, segundo a classificação de Piaget e Inhelder (1951). Quando, porém, os sujeitos dos dois subgrupos são analisados tendo em vista os métodos empregados na busca de um sistema combinatório, constata-se que as crianças do Grupo A apresentam métodos mais elaborados que as crianças do Grupo B, na medida em que se propõem, ainda que sem mostrar tomada de consciência, buscar um sistema que lhes permita realizar todas as combinações possíveis para solucionar a tarefa.

No caso da tarefa de combinar quatro elementos tomados três a três, os resultados indicaram que os sujeitos do Grupo A e B não tendem a diferenciar seus métodos de combinação para solucionar o problema. Este resultado parece-nos indicar, novamente, a questão da influência da quantificação de combinações com as quais as crianças são solicitadas a lidar. Para solucionar a tarefa de combinar quatro elementos dois a dois, as crianças deveriam chegar a um total de 6 pares ordenados e para quatro elementos tomados três a três, deveriam fazer 4 trios. No caso das combinações de quatro elementos tomados três a três, quando as crianças apresentavam o método de justaposição entrecruzada dos elementos (método 2), a solução tornava-se mais simplificada para o próprio sujeito, possibilitando-lhe, de melhor forma, a quantificação dos trios que faziam e o controle dos mesmos, a fim de que não fizessem repetições. Coordenar quatro combinações possíveis realizadas por meio de um método mais eficaz, como, por exemplo, o método 2, assim como quantificá-las foi um domínio apresentado tanto pelos sujeitos do Grupo A, como pelos sujeitos do Grupo B investigados nesta pesquisa, diferentemente dos resultados obtidos com relação aos métodos empregados para realizar seis combinações possíveis de quatro elementos tomados dois a dois.

5.4.5 Análise dos Problemas Aritméticos de Estrutura Multiplicativa – Produto cartesiano com lápis e papel

As correções dos três problemas de análise combinatória, segundo classificação de Vergnaud (1991), utilizados nesta pesquisa foram primeiramente computados segundo acertos e erros dos alunos quanto ao resultado do problema, como no caso do problema 1 – camisas e bermudas – com um total geral de 12 combinações possíveis. Para o Problema 2 – baile na escola – o total geral de combinações possíveis era de 9 combinatórias; e o Problema 3 – sala de aula – o total refere-se a 6 combinações possíveis.

Tabela 17 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com o número de acertos obtidos nos problemas de análise combinatória com lápis e papel

		Grupo		
		A	B	Total
Problemas de Produto de Medidas				
	Problema 1 Camisas e Bermudas (n = 12)	3 (18,8%)	2 (12,5%)	5 (15,6%)
	Problema 2 Baile (n = 9)	8 (50%)	1 (6,3%)	9 (28,1%)
	Problema 3 Sala de aula (n = 6)	8 (50%)	1 (6,3%)	9 (28,1%)
Problema de Isomorfismo de Medidas				
	Problema 4 Colheres (n = 16)	13 (81,3%)	6 (37,5%)	19 (59,4%)

A tabela 17 apresenta os resultados dos sujeitos dos dois grupos com relação aos acertos obtidos nos problemas de produto cartesiano, os quais foram solicitados a resolver utilizando lápis e papel e questionamentos do experimentador.

Nos problemas de produto de medidas, os resultados mostraram que no Problema 1 (camisas e bermudas), 3 (18,8%) alunos do Grupo A e 2 (12,5%) alunos do Grupo B fizeram todas as combinações possíveis entre as peças de roupas. Tanto para o Problema 2 (baile) como para o Problema 3 (sala de aula), 8 (50%) alunos do Grupo A acertaram todas as combinações e apenas um (6,3%) sujeito do Grupo B fez corretamente as 9 combinações possíveis.

A análise do problema 4 (colheres), o único do tipo isomorfismo de medidas, mostrou que 13 (81,3%) alunos do Grupo A solucionaram e calcularam corretamente a resposta e 6 (37,5%) alunos do Grupo B fizeram o problema corretamente.

A análise do desempenho nos problemas (1, 2 e 3) de produto cartesiano com lápis e papel em relação aos sujeitos dos Grupos A e B apresentou diferença estatisticamente significativa em dois dos três problemas investigados.

O resultado obtido na solução do problema 1 (camisas e bermudas) não apresentou diferenças significativas (χ^2=0,23; *gl*=1; *p*=0,62), quando os sujeitos foram agrupados de acordo com o desempenho em Matemática – Grupos A e B (Anexo 15). Os resultados, no entanto, mostraram diferença estatisticamente significativa do desempenho em Matemática dos sujeitos em relação à solução dos problemas 2 (baile) e 3 (sala de aula). Tanto para o problema 2, como para o problema 3, a diferença (χ^2=7,5; *gl*=1; *p*=0,006) mostrou-se significativa (Anexos 16 e 17).

O problema 4 – empacotamento de colheres – do tipo isomorfismo de medidas, embora difira dos outros problemas do tipo produto de medidas corresponde a um aspecto da estrutura multiplicativa, apresentou diferença significativa (χ^2=6,34; *gl*=1; *p*=0,012) do desempenho em relação à solução do problema entre os dois grupos de sujeitos avaliados (Anexo 18).

Estes resultados indicam que os alunos do Grupo A, que apresentam melhor desempenho em Matemática apresentam também melhor desempenho nos problemas de produto cartesiano, com exceção do problema 1 – das camisas e bermudas que envolveu um número maior de combinações em relação aos outros dois problemas.

Em uma análise seguinte, computou-se a quantidade de combinações das crianças que variavam de zero até o total final do número de combinações possíveis. Foi realizada a comparação das médias obtidas pelos grupos A e B sobre o número de combinações realizadas em cada um dos problemas de análise combinatória com lápis e papel.

Os resultados obtidos no Grupo A (bom desempenho em Matemática) mostraram que no Problema 1 (camisas e bermudas) a média (Anexo 19) das combinações possíveis foi 6,6 com desvio-padrão de 3,8. Para o problema 2 (baile) obteve-se média 6,9 (desvio-padrão=2,4) e para o problema 3 (sala de aula), a média foi a de 3,8 (desvio-padrão=2,6).

No Grupo B (desempenho insatisfatório em Matemática), os resultados obtidos mostraram que no problema 1, a média foi a de 5,5 (desvio-padrão=3,5) e no problema 2, a média foi de 5,6 (desvio-padrão=1,6). Por fim, no problema 3, os resultados (Anexo 19) indicaram média de 2,8 (desvio-padrão=1,8).

Foi utilizada a prova não-paramétrica Kruskal-Wallis (Anexo 20), para analisar a diferença da média do número total de combinações feitas nos problemas de produto cartesiano entre os sujeitos dos subgrupos. O referido teste indicou que não há diferença estatisticamente significativa do número de combinações realizadas em cada problema entre os sujeitos dos grupos A e B.

Os resultados evidenciaram que os sujeitos do Grupo A fazem mais combinações em cada um dos três problemas examinados, mas estas combinações não apresentam diferença estatisticamente significativa em relação ao número de combinações realizadas pelos sujeitos do grupo B.

Entretanto, mesmo não apresentando diferenças estatisticamente significativas entre os dois subgrupos e o desempenho quanto às médias de pares ordenados feitos em cada um dos problemas, observou-se que as estratégias de solução utilizadas pelos sujeitos de ambos os grupos na busca da solução foram enriquecidas por uma série de condutas distintas, ora melhor elaboradas, ora elaboradas de forma mais elementar. Estas condutas apresentam formas qualitativamente distintas entre si e foram classificadas como categorias de estratégias com base no esquema de correspondência termo a termo, cuja análise se segue mais adiante.

5.4.6 Análise das relações entre o desempenho escolar em Matemática, o processo de abstração, as operações combinatórias e a solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel

A análise a seguir refere-se ao teste de correlação entre os resultados obtidos entre o desempenho escolar em Matemática, o processo de abstração, as operações combinatórias e a solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel.

A tabela 18 mostra os quatro fatores investigados, apresentando itens diferenciados de domínio nestes fatores, os quais foram submetidos à análise que se segue.

O processo de abstração sobre as noções de múltiplos comuns constou de uma tarefa que avaliou o nível dos sujeitos mediante três quantidades distintas, conforme foi apresentado anteriormente. Para o fator abstração com 12 fichas, obteve-se coeficiente de correlação significativo de 0,417 (p< 0,05) com o fator SARESP, o qual serviu de referência para avaliar o desempenho matemático dos sujeitos. Nos itens de domínio abstração com 24 fichas e 36 fichas também foi encontrado coeficiente de correlação significativo com o fator SARESP de 0,493 (p<0,01) para o primeiro e 0,605 (p<0,001) para o segundo.

As operações combinatórias analisadas correspondem às noções de acaso e probabilidade e constou de uma tarefa que avaliou o nível dos sujeitos com relação a combinar 4 elementos tomados dois a dois e em seguida, tomados três a três. Verificou-se, em ambos os itens de domínio "combinação 2 a 2" e "combinação 3 a 3", um coeficiente de correlação significativa com o fator SARESP. Na tarefa de combinar quatro elementos dois a dois, a correlação significativo foi de 0,476 (p<0,05) e, na combinação três a três, obteve-se 0,396 (p<0,05) como índice de correlação significativa com relação ao desempenho em Matemática.

Para o fator ligado aos problemas de produto cartesiano, os resultados obtidos mostraram que no item de domínio Problema 1 (camisas e bermudas) não houve coeficiente de correlação com o SARESP, cujo índice encontrado foi o de 0,140 (p>0,05). No entanto, nos três outros itens de domínio dos problemas de produto cartesiano foram encontrados coeficiente de correlação significativa com o SARESP. No problema 2 (baile) foi encontrada correlação significativa de 0,453 (p<0,01) e no problema 3 (sala de aula), a correlação significativa foi de 0,559 (*p*<0,001). No problema 4 (colheres), a correlação encontrada com o fator SARESP foi significativa de 0,0574 (*p*<0,001).

Tabela 18 – Coeficientes de correlação entre desempenho em Matemática, processo de abstração, operações combinatórias e solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel

Fatores	*Itens de domínio dos fatores*	*Coeficiente de correlação com o* ***SARESP***
Processo de Abstração	Abstração 12 fichas	*0,417
	Abstração 24 fichas	**0,493
	Abstração 36 fichas	***0,605
Operações Combinatórias		
	Combinação 2 a 2	*0,476
	Combinação 3 a 3	*0,396
Problemas de Produto Cartesiano (lápis e papel)		
	Problema 1 (camisas e bermudas)	0,140
	Problema 2 (Baile)	**0,453
	Problema 3 (sala de aula)	***0,559
	Problema 4 (colheres)	***0,574

* p < 0,05; ** p < 0,01; *** p < 0,001

De maneira geral, os resultados indicaram que os fatores ligados aos níveis de abstração em múltiplos comuns, operações combinatórias e problemas de produto cartesiano, com exceção do Problema 1, estão correlacionados com o desempenho matemático dos alunos investigados neste estudo.

Alguns dos fatores específicos da prova de desempenho matemático do SARESP, como os itens de algoritmo e os de problemas aritméticos verbais de estrutura multiplicativa (operações de multiplicação e divisão) foram submetidos à análise de correlação entre os fatores: prova dos níveis de abstração, operações combinatórias e solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel, a fim de verificar, de maneira específica, os itens de domínio sobre desenvolvimento cognitivo e aqueles que dizem respeito ao desempenho em Matemática, como mostra a tabela 19.

Tabela 19 – Coeficientes de correlação dos itens específicos quanto ao desempenho nas operações multiplicativas da prova do SARESP, o processo de abstração, as operações combinatórias e a solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel

Fatores	***Algoritmos/SARESP***		***Problemas Aritméticos/SARESP***		
	Multiplicação	Divisão	Multiplicação 1	Multiplicação 2	Divisão
Abstração					
12 fichas	0,183	0,314	0,326	- 0,08	*0,476
24 fichas	0,152	0,148	**0,575	- 0,07	*0,451
36 fichas	0,142	0,308	*0,400	- 0,01	0,407
Operações Combinatórias					
2 a 2	0,102	0,243	0,302	0,198	0,253
3 a 3	0,069	0,218	*0,433	0,198	*0,468
Problemas de Produto Cartesiano (lápis e papel)					
Problema 1-Camisas e bermudas	0,055	*0,507	0,101	0,078	0,073
Problema 2 – Baile	0,084	0,364	0,158	0,052	0,273
Problema 3 - Sala de aula	0,226	*0,427	**0,501	0,138	*0,434

* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$

Conforme mostra a tabela 19, o fator prova de abstração com 12, 24 e 36 fichas foi correlacionado com os cinco itens de domínio específicos ligados ao desempenho matemático na operação de multiplicação contidos na prova do SARESP. Observou-se que o item de domínio de abstração com 12 fichas obteve correlação significativa de 0,476 (p<0,05) com o problema aritmético de divisão.

No fator abstração com 24 fichas foi encontrado um coeficiente de correlação significativo de 0,575 (p<0,01) com o fator problema aritmético de multiplicação 1 da prova do SARESP. Neste fator também foi encontrada correlação significativa de 0,451 (p<0,05) com o problema aritmético de divisão da prova do SARESP.

No fator abstração com 36 fichas foi encontrada correlação significativa de 0,400 (p<0,05) com o problema aritmético de multiplicação 1, da prova do SARESP.

Nos itens de domínio ligados às operações combinatórias (4 elementos tomados dois a dois e tomados três a três) não foi encontrado índice de correlação dentre os cinco fatores analisados nos itens específicos de tarefas multiplicativas contidas na prova do SARESP. Os resultados mostraram, porém, que a combinação de quatro elementos tomados 3 a 3 obteve índice de correlação significativa de 0,433 (p<0,05) com o fator problema aritmético de multiplicação 1 da prova do SARESP. O fator operações combinatórias de quatro elementos tomados três a três também obteve índice de correlação significativa de 0,468 (p<0,05) com o problema aritmético de divisão da prova do SARESP.

No caso dos problemas – tarefas com lápis e papel - o problema 1 (camisas e bermudas) obteve correlação significativa de 0,507 (p<0,05) com o fator algoritmo de divisão contido na prova do SARESP, conforme indicado na tabela 19.

Para o problema 2 (baile), a correlação não atinge significância em nenhum dos cinco itens de domínio específicos sobre operações multiplicativas contidas na prova de Matemática do SARESP.

No problema 3 (sala de aula) obteve-se índice de correlação significativa de 0,501 (p<0,01) com o fator "problema aritmético de multiplicação 1" da prova do SARESP. O problema 3 também apresentou correlação significativa de 0,434 (p<0,05) com o problema aritmético de divisão. Os resultados indicaram ainda que, um outro item de domínio da prova do SARESP, como o do algoritmo da divisão, obteve correlação significativa de 0,427 (p<0,05) com o problema 3.

Os dados indicaram que a maioria dos itens analisados quanto a avaliação do desenvolvimento cognitivo investigados nesta pesquisa apresentam-se correlacionados com itens específicos da prova do SARESP que avaliam o desempenho em operações multiplicativas de alunos ingressantes da 3ª série do Ensino Fundamental.

Ressalta-se ainda que, a análise dos resultados dos alunos na solução dos problemas contidos na prova do SARESP em relação ao desempenho global da prova, confirma que os alunos que se saíram melhor em solução de problemas (o que correspondia a uma das tarefas contidas na prova), também são os que apresentam pontuação mais elevada na prova completa. O mesmo pode ser observado quando se analisou os itens específicos dos algoritmos e o desempenho escolar global do sujeito em Matemática. Os alunos que obtiveram melhores escores na prova do SARESP, obtiveram também melhor pontuação nos itens que envolviam tarefas de solução de problemas e tarefas com cálculo por meio da técnica algorítmica. Da mesma forma que, os alunos que obtiveram os menores escores na Prova do SARESP, apresentaram menos acertos nos itens dos problemas aritméticos e os algoritmos (Anexo 21)

Com relação aos dados obtidos na entrevista sobre a preferência dos alunos nas áreas curriculares, observa-se que, embora 59,1% dos sujeitos tivessem indicado preferência pela disciplina da Matemática dentre todas as outras áreas curriculares, não foi encontrada correlação significativa (Anexo 22) na prova estatística, entre os resultados obtidos na entrevista quanto à preferência dos estudantes das 3ª série do Ensino Fundamental em relação ao desempenho obtido na prova de Matemática aplicada nesta pesquisa. Estes resultados indicam que o depoimento dos alunos quanto a "gostar mais", "gostar menos" ou mesmo de manter uma opinião de neutralidade, ou ainda, preferência mediana quanto à Matemática, não está relacionado ao fato de o aluno ter apresentado desempenho satisfatório ou não na avaliação de Matemática aplicada nesta pesquisa.

Conforme já descrito, pôde-se constatar que os alunos que obtêm maiores escores de desempenho em Matemática também são os que apresentam níveis superiores em provas de abstração, operações combinatórias e solução de problemas de produto cartesiano, apresentando propensão crescentes.

Parte 5
5.5 Estratégias de solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel

A seguir, apresenta-se uma análise qualitativa dos três problemas de produto cartesiano com lápis e papel com base na categorização das estratégias de solução utilizadas pelos sujeitos.

Os três problemas de análise combinatória investigados nesta pesquisa são situações que solicitavam dos sujeitos a construção de um conjunto de pares ordenados e o estabelecimento de uma correspondência entre cada elemento do primeiro conjunto com todos os elementos do segundo conjunto.

Conforme descrito anteriormente, obteve-se um pequeno número de acertos nos três problemas de produto cartesiano com lápis e papel realizados por alunos dos dois subgrupos investigados nesta pesquisa. No problema 1, apenas 15,6% dos sujeitos de ambos os grupos realizaram a solução correta. Nos problemas 2 e 3, 28,1% dos sujeitos acertaram, respectivamente, a solução de cada um dos problemas.

Resta-nos então tentar compreender as soluções dos sujeitos em relação ao que se pôde solucionar, ou seja, o que as crianças apresentaram tendo em vista as condutas e justificativas no curso da realização dos problemas. Isto levou-nos à análise do número de combinações realizadas, as quais evidenciaram estratégias de solução desencadeadas durante as tarefas. Dessa forma, apresentamos a seguir, as categorias das estratégias utilizadas pelos sujeitos com base no esquema de correspondência termo a termo.

Uma das problematizações iniciais levantadas nesta pesquisa refere-se à análise das estratégias empregadas, tomando-as como ponto de partida para identificar os critérios de seleção dos dados utilizados pelas crianças durante a solução dos problemas e que implicam aproximação da descoberta do sistema combinatório.

As estratégias dos sujeitos permitem-nos verificar desde soluções mais elementares, por exemplo, aquelas ligadas a correspondência um a um entre os elementos do problema e as ações sucessivas de juntar pares ordenados pautadas em abstrações empíricas até uma leitura dos dados mais sofisticada, como é o caso de passar a coordenar a realização de pares ordenados dentro de um sistema que busque a regra combinatória, na qual cada elemento de um grupo será associado a cada elemento do outro grupo, superando assim, as combinações por tateios, ou mesmo por adição sem controle de pares ordenados.

5.5.1 Estratégias de solução com base no esquema de correspondência termo a termo

A análise qualitativa das estratégias de solução utilizadas pelos sujeitos nos problemas de produto cartesiano evidenciou o uso do esquema de correspondência termo a termo tal como estudado e descrito por Piaget e Szeminska (1975).

As três categorias de estratégias descritas por este estudo foram baseadas nos resultados das pesquisas dos referidos autores a respeito das noções de equivalência que as crianças apresentam ao serem submetidas a tarefas que analisam a correspondência termo a termo na solução de problemas que envolvam noções multiplicativas. O esquema de correspondência termo a termo é utilizado pelas crianças como um esquema quantitativo e está diretamente ligado ao processo de construção da conservação da quantidade, assim como ela mesma refere-se ao próprio progresso das construções das correspondências termo a termo cardinal e ordinal.

As categorias a que nos referimos foram denominadas: A) Categoria 1 -*"Estratégias por correspondência termo a termo rígida"*; b) Categoria 2 - "*Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória"*; c) Categoria 3 - *"Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial"*

Destacamos, a seguir, as características principais de cada uma das estratégias identificadas com base na análise dos protocolos das condutas do sujeitos investigados (Gillieron,1980). Primeiramente, foram analisados os protocolos buscando-se delimitar seqüências de ações e verbalizações dos sujeitos no decorrer da solução. Em seguida, identificou-se a utilização de tipos de estratégias semelhantes empregada pelas crianças; o que nos possibilitou a descrição de 3 grandes categorias de estratégias. Identificou-se ainda, na leitura e análise dos protocolos, os critérios utilizados pelas crianças, o que nos possibilitou também classificar as estratégias em termos de condutas menos elaboradas ou condutas mais elaboradas. No entanto, a análise dos protocolos não nos permitiu estabelecer uma hierarquização propriamente dita dos tipos de estratégias, e, sim, diferenciar a variação de critérios ocorrida dentro de cada tipo de estratégia do que propriamente uma diferença de posição hierárquica, em um quadro inspirado em Moro(1993, p.371).

As características principais das categorias das estratégias de solução com base no esquema de correspondência termo a termo foram esquematizadas na figura 13.

Categoria 1 Estratégias por correspondência termo a termo rígida	***Categoria 2*** Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória	***Categoria 3*** Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial
Os sujeitos realizam a representação gráfica primeiramente e, em seguida, fazem os pares ordenados por correspondência termo a termo entre os elementos dos dois grupos contidos no problema. Uma conduta comum entre os sujeitos desta categoria de estratégia é não admitir trocas entre os elementos dos conjuntos. O elemento "a mais" de um dos conjuntos é, imediatamente "descartado" pelas crianças como possibilidade de participar das combinações. Os sujeitos dão diferentes alternativas para eliminar o "elemento a mais". Há uma busca pela simetria entre a quantidade dos elementos a serem combinados. A impossibilidade de realizar combinações por tateios ou por simples composição de adições de pares ordenados é completamente descartada pelos sujeitos em função de centrarem-se na correspondência um a um.	As condutas dos sujeitos estão marcantemente ligadas à variação de critérios. Com base na utilização do esquema de correspondência um para muitos, as crianças tentaram solucionar os problemas empregando estratégias diferenciadas. A análise dos protocolos evidenciou condutas seqüenciadas neste tipo de estratégia, tais como: *a)* antecipar uma resposta como ponto de partida na busca da solução do problema; *b)* responder por antecipação com base na correspondência termo a termo ou na utilização de cálculos com algoritmos das operações aritméticas; *c)* realizar repetições dos pares combinados; *d)* dar-se conta de que faziam repetições; *e)* tentar controlar as combinações repetidas; *f)* realizar combinações com base na idéia de que poderiam "trocar" as peças e poderiam fazê-la indefinidamente, sem controle da quantificação; *g)* justificar com base em critérios afetivos, estéticos, entre outros. Nesta categoria, conseguir coordenar as ações realizadas com as justificativas dadas de forma coerente e organizada foi um aspecto de difícil domínio para as crianças.	Nesta categoria, uma estratégia comum foi, tal como na categoria do tipo 2, a tentativa de antecipar o resultado e tentar uma solução imediata por meio do algoritmo. Os sujeitos ainda apresentam oscilação nas condutas, porém menos freqüente entre a ação realizada e a justificativa dada durante a elaboração das combinações. Entre um par ordenado e outro há combinações sistemáticas, cuja permanência de um critério é mantido pela criança. A criança seleciona a camisa de uma cor e a utiliza com a primeira bermuda, em seguida, utiliza a mesma camisa com a segunda bermuda. Na próxima combinação, no entanto, descarta aquela camisa e passa utilizar a última bermuda utilizada como referência aos próximos pares ordenados. Os sujeitos admitem que não se pode fazer de qualquer jeito, e, sim, que há uma regra para combinar as camisas com as bermudas, os meninos com as meninas e as portas de entrada com as portas de saída da sala de aula. O controle das combinações é uma dificuldade marcante, embora já haja entre as crianças desta categoria a tentativa evidente de fazê-lo.

Figura 13 – Quadro das categorias das estratégias de solução de problemas de produto cartesiano com lápis e papel

As tabelas 20,21 e 22 mostram a distribuição do número de alunos de cada um dos subgrupos em cada uma das estratégias de solução utilizadas na solução dos problemas de análise combinatória com lápis e papel.

Tabela 20 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com as categorias das estratégias de solução de problemas de produto cartesiano -Problema 1

		Grupo A	Grupo B	Total
Problema 1				
	Categoria 1	5 (31,2%)	4 (25%)	9 (28,1%)
	Categoria 2	7 (43,7%)	9 (56,2%)	16 (50%)
	Categoria 3	3 (18,7%)	2 (12,5%)	5 (14,2%)
Sub-total		15 (93,7%)	15 (93,7%)	30* (93,7%)

*Foram encontrados 2 sujeitos que não fizeram nenhuma combinação no problema 1, não apresentando estratégias que se pudessem categorizá-las em nenhum dos 3 tipos das estratégias mencionadas.

Os resultados obtidos quanto às estratégias de solução do problema 1 de análise combinatória com lápis e papel mostraram que no Grupo A, 5 (31,2%) alunos solucionaram por meio das estratégias contidas na categoria 1, 7 (43,7%) alunos resolveram valendo-se das estratégias da categoria 2 e apenas 3 (18,7%) alunos utilizaram estratégias da categoria 3. No Grupo B, foram encontrados 4 (25%) alunos que solucionaram o problema por meio das estratégias contidas na categoria 1, 9 (56,2%) alunos utilizaram as estratégias contidas na categoria 2 e 2 (12,5%) alunos valeram-se das estratégias da categoria 3.

A análise dos resultados mostrou a tendência de concentração das estratégias ligadas à categoria 2 como forma de solução para o problema 1, tanto entre os alunos do Grupo A como os alunos do Grupo B.

Tabela 21- Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com as categorias das estratégias de solução de problemas de produto cartesiano -Problema 2

		Grupo		
		A	B	Total
Problema 2				
	Categoria 1	3 (18,7%)	2 (12,5%)	5 (14,2%)
	Categoria 2	6 (37,5%)	13 (81,2%)	19 (59,3%)
	Categoria 3	7 (43,7%)	1 (6,2%)	8 (25%)
Sub-total		16 (100%)	16 (100%)	32 (100%)

No problema 2, os resultados mostraram que no Grupo A, 3 (18,7%) alunos solucionaram o problema por meio das estratégia da categoria 1; 6 (37,5%) alunos o fizeram por meio das estratégias da categoria 2 e 7 (43,7%) solucionaram o problema por meio das estratégias da categoria 3. No Grupo B, foram encontrados 2 (12,5%) que utilizaram a estratégia 1, ao passo que 13 (81,2%) já conseguiram valer-se da estratégia 2 para solucionar o problema e apenas um (6,2%) aluno o solucionou por meio das estratégias contidas na categoria 3.

Os resultados do problema 2 evidenciaram que os alunos do Grupo B, na sua grande maioria, tendem a valer-se da estratégia do tipo 2 na busca da solução dos pares ordenados a serem constituídos entre meninos e meninas, conforme proposto no enunciado. Em contra-partida, os alunos do Grupo A apresentam uma distribuição quase equitativa entre a estratégia de tipo 2 e 3 ao buscar a solução dos 9 pares ordenados do problema.

Tabela 22 - Distribuição da freqüência dos sujeitos por grupo de acordo com as categorias das estratégias de solução de problemas de produto cartesiano -Problema 3

		Grupo		Total
		A	B	
Problema 3	Categoria 1	2 (12,5%)	4 (25%)	6 (18,7%)
	Categoria 2	2 (12,5%)	8 (50%)	10 (31,2%)
	Categoria 3	8 (50%)	1 (6,2%)	9 (28,1%)
Total		12 (75%)	13 (81,2%)	25* (78,1%)

* Dos 32 sujeitos investigados nos 2 subgrupos, 4 alunos do Grupo A e 3 alunos do Grupo B não realizaram nenhum par ordenado referente aos dados do problema

No problema 3, 2 (12,5%) alunos do Grupo A solucionaram, por meio das estratégias contidas nas categorias 1 e 2, respectivamente em cada uma destas categorias, e 8 (50%) alunos solucionaram valendo-se das estratégias da categoria 3. No Grupo B, foram encontrados 4 (25%) alunos que utilizaram a estratégia do tipo 1; 8 (50%) alunos na estratégia 2 e apenas um (6,2%) que solucionou o problema por meio da estratégia mais elaborada com a de tipo 3.

Novamente, os alunos do Grupo A demonstraram a tendência em solucionar um dos problemas de análise combinatória por meio da estratégia do tipo 3 em relação aos alunos do Grupo B. Cabe ressaltar, no entanto, que 4 alunos do Grupo A e 3 alunos do Grupo B não conseguiram elaborar qualquer combinação entre as portas da sala de aula. A falta de tentativa para solucionar este problema, assim como um número reduzido de crianças encontradas na categoria 2 de estratégias para este problema, possam, talvez, ser atribuídas ao fato de que este problema revela-se como uma situação não muito rotineira para as crianças ao terem que pensar sobre operações combinatórias, diferentemente dos dois outros problemas que podem apresentar-se mais significativos em termos de atividades e enredos ligados à experiência cotidiana realizadas pelas crianças.

5.6 *Categoria 1 - Estratégias por correspondência termo a termo rígida*

A categoria de estratégias do tipo correspondência termo a termo rígida foi assim denominada tomando como referência as características citadas por Piaget e Szeminska (1975) sobre a correspondência estática entre objetos homogêneos, conforme descrito no segundo capítulo deste estudo.

Para a organização das características desta categoria de estratégias, observou-se que as crianças foram capazes de solucionar os três problemas apresentados mediante a utilização de uma correspondência termo a termo em um sentido bastante limitado. Isso revela o que os referidos autores nos indicam sobre a constituição de coleções equivalentes com relação a este esquema de ação utilizado pelos sujeitos para solucionar problemas desta natureza: o das relações aditivas e multiplicativas.

Ao alunos que se valeram do esquema de correspondência termo a termo, aplicaram-no, de forma predominantemente reduzida. Corresponder os objetos um a um foi a única estratégia que as crianças utilizaram para lidar com os dados numéricos do problema demonstrando que este constituiu-se na única possibilidade de solução para o problema.

A estratégia de solução baseada unicamente na correspondência termo a termo evidenciou resultados estritamente ligados à diminuição da dimensão combinatória do problema. Isto quer dizer que as crianças reduziram o aspecto combinatório entre os elementos do problema, operando de forma mais simplificada, ou seja, centrando-se em um dos dados numéricos do problema e com base nele, estabelecendo por correspondência um a um a equiparação do primeiro elemento do conjunto de camisas com o primeiro elemento do conjunto de bermudas, em seguida, a segunda camisa com a segunda bermuda e, por fim, a terceira camisa com a terceira bermuda.

Esse aspecto observado nas condutas dos sujeitos evidenciou, por exemplo, no problema 1 (combinação de 4 camisas com 3 bermudas) que as crianças selecionavam primeiramente o menor número dos dois conjuntos (neste caso o das 3 bermudas) e com base deste, combinavam as peças de roupas. As crianças manifestavam verbal e graficamente a equivalência de 3 camisas selecionadas (das 4 existentes) com as três outras peças de roupas (bermudas) a serem combinadas. Uma vez estabelecido este critério: "a ordem das peças (1ª, 2ª e 3ª camisas com a 1ª, 2ª e 3ª bermudas), ou ainda, a equivalência numérica de 3 camisas = 3 bermudas, as crianças passavam a demonstrar no papel, os pares ordenados. Tomavam como referência a quantidade 3 camisas com 3 bermudas e faziam a combinação entre estas peças, não admitindo, sequer a possibilidade de realizar outras combinações que não estas três, pois justificavam irredutivelmente que *"... se tem só 3 bermudas, então pega as 3 camisas aqui e põe com elas e daí só dá 3 maneiras"*.

É interessante observar que nenhum dos 32 sujeitos investigados negam, no que se refere à compreensão do enunciado, a existência de 4 camisas para o problema 1, e mesmo assim, regulam seu raciocínio pela estratégia do esquema de correspondência termo a termo rígida, de modo a não considerar a 4ª camisa como possibilidade, não fazendo, assim, em hipótese alguma, qualquer combinatória com ela.

Observou-se, ainda que, para os dois outros problemas de análise combinatória, todas as crianças verbalizaram durante o momento de solução, a identificação correta dos dados numéricos do problema. Isto permite-nos considerar a importância do esquema de correspondência termo a termo como um esquema quantitativo utilizado como estratégia de solução para os problemas de produto cartesiano. Os alunos, porém, aqui investigados e que se valeram deste tipo de correspondência empregaram-na somente no sentido de equivalência um a um, sem ampliação deste esquema de ação, como, por exemplo, o emprego da correspondência de um para muitos. Estes dados evidenciam uma similaridade com os resultados obtidos por Frydman e Bryant (1994) quando os autores ressaltam performance diferenciadas das crianças ao aplicarem a correspondência termo a termo e a correspondência um para muitos em tarefas de solução de problemas. As crianças pequenas apresentam melhor performance quando se valem de um tipo de correspondência na qual há predomínio do estabelecimento de relações perceptuais. No caso da correspondência um para muitos, as crianças devem valer-se predominantemente da inferência da correspondência entre os elementos dos dois conjuntos para obter êxito na tarefa.

Ao não serem capazes de ampliar o esquema de correspondência um a um, as crianças acabam por neutralizar qualquer outro dado do problema e, neste caso, o dado quantitativo dos elementos de cada conjunto poderia ser uma espécie de pista conceitual para provocar avanços no esquema de correspondência destas crianças. Ao contrário disso, como os sujeitos estão centrados na equivalência quantitativa, negam qualquer outro dado pertinente à elaboração correta da solução.

5.6.1 Estratégias por correspondência termo a termo rígida no problema 1 - (camisas e bermudas)

Os exemplos que se seguem referem-se a trechos dos protocolos dos sujeitos durante a solução de problemas explicitando a análise de suas condutas em relação às estratégias ligadas à correspondência termo a termo rígida.

ROB (9;10) faz:

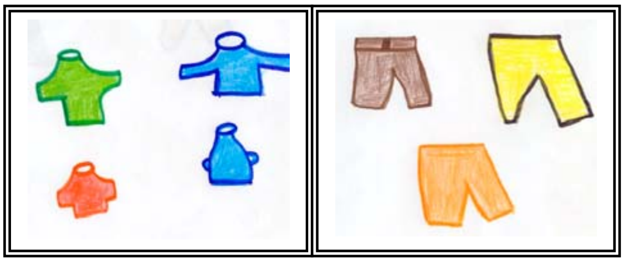


Figura 14 - Organização dos dados do problema das peças de roupas realizado por ROB (9;10)

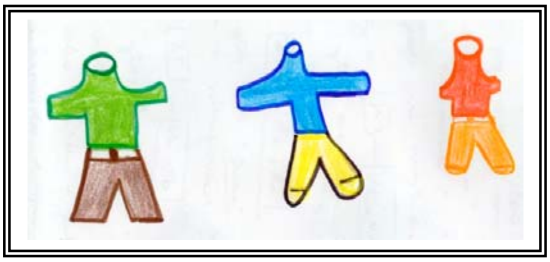


Figura 15 - Transformações combinatórias do problema das peças de roupas com base nas estratégias da categoria 1 realizadas por ROB (9:10)

Entrevistadora	*Sujeito*
Conte-me o que você leu. O que conta a história deste problema ?	*"Que a Maria tem roupas e ela vai vestir e usar todas elas."*
Quantas camisas ela tem ? A Maria tem mais alguma outra roupa ?	*"Ela tem 4 camisas."* *"Ela tem 3 bermudas."*
Como você faz para saber que fez todas as maneiras de a Maria se vestir ?	*"Porque é a primeira camisa e a primeira bermuda... É a segunda blusa com a segunda calça ".*
Tem outra maneira de ela se vestir ?	*"Não, porque aqui (aponta para as 3 bermudas do desenho inicial que havia feito) só tem 3 bermudas e aqui (aponta para as camisas) tem 4 camisas ".*
Com essas 4 camisas e essas 3 bermudas, dá para formar 3 maneiras de se vestir ? Tem certeza ? Ela não pode fazer diferentes dessas ? Como sabe ?	*"Tenho, porque como eu disse, já usou as 3 bermudas combinadas com as quantidades de camisetas que dá, e fica sobrando uma camiseta, porque num tem camisa pra combinar ".*

Figura 16 – Quadro explicativo do trecho da solução verbalizada pelo sujeito ROB (9;10) durante a realização do problema 1

Conforme explicitado no quadro acima, no final da solução do problema, o menino olha atentamente para o que havia feito, tentando verificar se aquela resposta encerrava mesmo a sua solução. Olhando fixamente mais uma vez para a folha de solução do problema, ele batia com o dedo na 4ª camisa desenhada e termina respondendo: *"Num tem jeito, só se tivesse um outro shorts pra fazer par"*.

Uma outra criança, valendo-se desta estratégia, faz 3 combinações possíveis e difere na representação gráfica em comparação a ROB porque, aproveitando do desenho realizado das 4 camisas e 3 bermudas, utiliza a representação por meio de flechas, indicando os pares ordenados entre as peças.

Como mostra a figura 17, REN (9;7) faz:

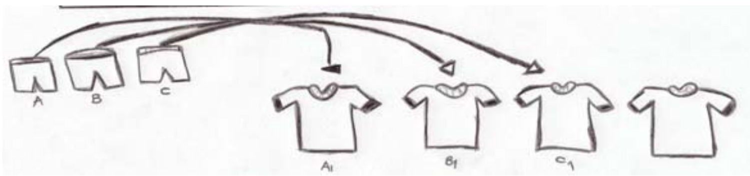


Figura 17 – Transformações combinatórias realizadas por REN (9;7) com base nas estratégias da categoria 1 no problema 1

Os sujeitos que realizaram por meio da estratégia de correspondência termo a termo rígida, afirmam, de maneira geral que não é possível fazer outras combinações. Muitas das justificativas podem ser assim sintetizadas por meio da explicação de REN (9;7): *"Ela só pode vestir de 3 maneiras, porque só tem 3 bermudas... se eu fazer 3 bermudas e 4 camisas, vai sobrar um... Ela tem mais camisa que bermudas ... Se eu ligar* (refere-se, fazendo sinal de ligar com o dedo das bermudas para as camisas) *vai sobrar uma* " (refere-se à 4ª camisa).

Ao explicar desta forma, a criança parece não aceitar o fato de ao fazer as combinações, ficar sem combinar uma das camisas, e já que isto não poderia ocorrer, escolhe como critério a eliminação da 4ª camisa como uma possibilidade a mais a ser combinada e prefere justificar a não combinação pela ausência de uma 4ª bermuda.

Com relação à explicação dada sobre as combinações, o menino diz: *"Porque eu fiz a primeira bermuda e ela vai com a 1ª camisa da Maria... eu fiz a segunda bermuda que eu desenhei e ponho com a 2ª camisa da Maria: vai ficando a primeira com a primeira e a segunda com a segunda, pra ficar em ordem e num bagunçar o armário dela... eu fiz a última bermuda que ela tinha com a 3ª camisa dela, e daí é o problema que fica sobrando a outra camisa, mas também, fica tudo em ordem: a primeira com a primeira, a segunda com a segunda e a terceira com a terceira, pena que num tem a quarta bermuda pra por com a quarta camiseta "*.

Em princípio, o menino parece demonstrar certa sistematização para fazer os pares e explicar o critério das três combinações. Explica que foi pegando pela ordem (primeira, segunda e terceira peças) do grupo das bermudas igual a ordem do grupo das camisas. No entanto, conforme já descrito, o fato da utilização de um esquema de correspondência mais rígida não lhe permite conseguir coordenar o critério da ordem e estendê-lo para todas as 12 combinações possíveis. Neste caso, ainda que tenha manifestado um aspecto importantíssimo, como o da ordem dos elementos das duas coleções, o menino não consegue valer-se do que podemos chamar de indício de sistematização manifestado na própria estratégia de correspondência termo a termo para ampliar a quantidade de peças a serem combinadas, como, por exemplo, admitir que poderia pegar a primeira bermuda e colocar com a segunda e terceira camisa e assim, sucessivamente, para cada uma das peças. A criança não mostra identificar a relação um para muitos.

REN (9;7) demonstra no decorrer da solução um certo incômodo com o fato de atentar para a possibilidade de trocar as peças entre si, mas demonstra ao mesmo tempo estar fixado na sobra de uma camisa. Ainda que questionado no curso da solução do problema, não ousa, então, atrever-se a trocar as peças entre si, terminando por justificar que, se o fizer, sempre sobrará uma camisa, o que resultaria infinitamente em 3 combinações.

Para SIM (9;8), que também utiliza da estratégia de correspondência termo a termo rígida, quando questionada sobre a possibilidade de trocar as peças, afirma: *"Num dá, porque daí vai dar no mesmo, porque se ela mudar, se ela tira uma camisa e coloca outra, vai dar no mesmo!"*. A menina refere-se tal como manifestado por outras crianças que mesmo admitindo que poderia trocar peças entre si, não ousaria fazê-lo, pois a idéia de que há sempre 4 camisas para 3 bermudas parece revelar que sempre a quarta camisa ficaria sobrando sem par. Essas crianças não conseguem pensar simultaneamente no fato de trocar as peças entre si nas 3 combinações que fizeram e, ao mesmo tempo considerar que, mesmo sobrando a quarta camisa, esta poderia ser revezada nas trocas com as 3 bermudas que utilizaram para as três combinações realizadas.

5.6.2 Estratégias por correspondência termo a termo rígida no problema 2 – (baile entre as crianças)

Conforme já descrito sobre a característica geral da correspondência termo a termo rígida, observou-se a utilização das mesmas estratégias utilizadas pelos sujeitos ao solucionar o problema 2, sobre a combinação entre pares de crianças para dançarem no baile na escola.

Por não admitirem qualquer outra estratégia de solução senão aquela em que poderiam corresponder três meninos com três meninas, as crianças justificam, de maneira geral, tal como exposto na explicação de CRIS (9;11): *"Não, porque se eles tão dançando todos juntos daí não tem mais nem menino e nem meninas"*. JAN (10;8) também se vale da mesma justificativa que CRIS a fim de não prosseguir com outras combinações e justifica que as fez desta maneira, baseada na seguinte explicação: *"É por causa que tá na mesma direção de novo"*. A menina, além de se valer da correspondência termo a termo entre os elementos do problema, vale-se do critério da posição entre os elementos. Conforme exposição anterior, houve uma tendência, ainda que manifestada de maneira elementar, de as crianças mencionarem a ordem (1ª, 2ª e 3ª) das camisas com relação à das bermudas para estabelecer as combinações ou, ainda, quanto à posição de cada camisa em relação a cada bermuda representada graficamente no papel, no momento inicial de organização dos dados do problema.

Com relação às representações gráficas analisadas para a solução do problema 2, não foram identificadas formas muito distintas das que foram utilizadas no problema 1, ou seja, algumas crianças desenhavam 3 meninos e 3 meninas e depois passavam a desenhá-los novamente e desta segunda vez o faziam, colocando-os um ao lado do outro ou, então, os colocavam de mãos dadas ou dançando. Outra representação típica da estratégia de correspondência termo a termo rígida foi a de elaborar o desenho das 3 meninas e dos 3 meninos e, em seguida, fazer as combinações demonstrando-as por meio de setas, flechas, tracejados, entre outras marcas criadas particularmente pelas próprias crianças. Como exemplo, CAM (10;0) faz:

Figura 18 - Transformações combinatórias realizadas por CAM (10;0) com base nas estratégias da categoria 1 no problema 2

Em nível de representação gráfica, as crianças que se valeram da utilização de flechas, setas ou qualquer outra forma de registro para demonstrar os pares combinados, talvez, ainda que não conscientemente, já demonstravam uma forma menos elementar que aquela em que as crianças desenhavam, um por um, os pares ordenados como forma possível de solucionar o problema.

Esta conduta, no entanto, com relação à representação (utilização de flechas e setas) foi assim considerada quando analisadas dentro da estratégia de correspondência termo a termo rígida, pois observou-se, contrariamente, como será descrito na próxima categoria, que aquelas crianças capazes de fazer mais combinações, faziam-nas por meio de tateios, e, com isso, sentiam necessidade de controlar suas ações desenhando cada um dos pares.

5.6.3 Estratégias por correspondência termo a termo rígida no problema 3 – (sala de aula)

As mesmas condutas e justificativas utilizadas nos dois outros problemas na estratégia de correspondência termo a termo rígida também foram encontradas durante a solução do problema 3, a respeito das portas de entrada e saída de uma sala de aula.

JAN (10;8), quando soluciona este problema, dizendo e fazendo as duas maneiras de se entrar e sair da sala de aula, justifica as diferentes possibilidades: "*Não, porque não tem mais jeito. É porque não tem mais porta aqui*". A menina aponta para o lugar vago existente na sua representação gráfica, pois havia feito duas portas de entrada e abaixo desenha as 3 portas de saída. Com isso, ao empregar a correspondência termo a termo como única estratégia verifica, por constatação empírica, que acima da 3ª porta de saída falta-lhe uma terceira porta de entrada, o que a impede de admitir e combinar a 3ª porta de saída. Ela utilizou as 2 portas de entrada para combinar com as duas portas de saída e, não havendo uma terceira porta de entrada, não seria possível combiná-la com a 3ª porta de vidro que desenhou e servia como uma das saídas da sala de aula.

JOA (9;4) também não admite de maneira alguma que se possam fazer combinações de maneiras diferentes e justifica: *"De duas maneiras... é por causa que aqui tem 3 aqui* (refere-se às portas da saída) *e aqui tem 2* (as de entrada) *e deixa uma para fora* (refere-se à 3ª porta da saída) *ou então uma fica faltando* (a 3ª porta de entrada) ... *Não dá mais, causo que daí tem que ter uma de entrada para ficar igual: três igual a três".*

No que se refere às soluções gráficas empregadas neste problema, como a realizada por REN (9;7) foi comum encontrar representações deste tipo:

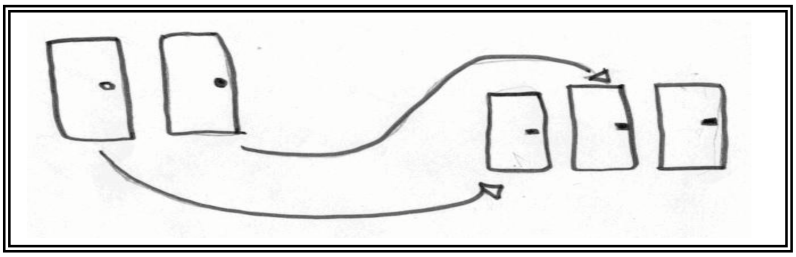


Figura 19 – Transformações combinatórias realizadas por REN (9;7) com base nas estratégias da categoria 1 no problema 3

O menino faz o desenho das portas e liga com um traço duas combinações possíveis, baseando-se nas duas portas de entrada e não admitindo mais possibilidades, uma vez que não havia mais portas de entrada para utilizar.

Mesmo com base na representação gráfica e com o questionamento feito pela experimentadora, as crianças não avançaram com relação a um maior número de combinações. Observa-se que o aspecto do desenho em si mesmo, da solicitação de uma análise mais apurada da criança sobre sua própria representação gráfica não levou as crianças a realizarem maior avanço com relação à elaboração de outras combinações.

5.7 *Categoria 2 – Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória*

Os sujeitos identificados nesta categoria de estratégia para a solução dos problemas de análise combinatória foram aqueles que ultrapassaram a realização dos pares ordenados por meio da correspondência termo a termo rígida e ao mesmo tempo não chegaram a fazer todas as combinações possíveis para cada uma das situações-problema apresentadas.

Essa categoria foi assim denominada em razão de as crianças já terem acrescentado alguns ajustes com relação à correspondência termo a termo, ampliando-a para um outro tipo de correspondência, como a de um para muitos como estratégia para desencadear soluções para os problemas multiplicativos. As situações que envolvem operações multiplicativas implicam relação constante de correspondência um para muitos entre dois conjuntos, tornando-se um esquema quantitativo básico na construção de conceitos matemáticos de multiplicação (Nunes e Bryant, 1997).

Neste sentido, uma conduta geral foi a de enriquecer a correspondência um a um de maneira que as crianças já, de imediato, passavam a admitir maior número de trocas entre camisas e bermudas, meninos e meninos para dançarem no baile e as portas de entrada e saída da sala de aula.

A exemplo do problema 1, a possibilidade de realizar uma combinação para a 4ª camisa já não é inadmissível, tal como afirmado pelas crianças na estratégia anterior. Aqui, elas passam a admitir a 4ª combinação em função de incorporar a 4ª camisa como elemento a ser combinado, diferentemente da estratégia anterior, na qual as crianças pautavam-se única e exclusivamente na correspondência termo a termo rígida entre os elementos a serem combinados.

O fato de a criança ampliar o seu esquema de correspondência, ainda que, sem tomada de consciência, pareceu-nos um avanço na estratégia de solução destes sujeitos, ou seja, eles passam a admitir que é possível fazer outras combinações, não ficando restritos ao fato de formar os pares apenas por equiparação um a um dos elementos de cada conjunto. Mostram, com isso, um princípio importante para a compreensão do sistema combinatório: a replicação dos elementos em cada um dos conjuntos pertinentes em cada um dos problemas.

Observamos, no entanto, ao mesmo tempo, que as crianças que se valeram desta conduta, também o fizeram sem controle preciso com relação à quantificação exata das combinações, e, por isso, não chegaram a completar todos os pares para cada um dos problemas. Da mesma forma como não chegaram a uma quantificação exata de combinações, também não fizeram de forma sistemática, mas, sim, valeram-se da variação de critérios, ao acaso ou com base na ação de combinar pares de crianças ou pares de roupas, chegando, ao final, à aproximações de uma sistematização.

A variação de critérios, conforme já anunciado (vide figura 13) foi observada e analisada como uma estratégia valiosa para fazer que os sujeitos conseguissem solucionar os problemas, ainda que não tenham apresentado uma resposta correta sobre o total de combinações como solução final dos problemas.

Apresentaremos, a seguir, algumas situações em que as crianças manifestam as características acima descritas com relação a esta segunda categoria de estratégia de solução dos problemas de tipo produto cartesiano.

5.7.1 *Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória no problema 1 - (camisas e bermudas)*

Conforme descrito, as crianças partiam da combinação termo a termo como solução antecipatória, ou seja, logo de início respondiam, no caso do problema 1, que seria possível fazer 3 maneiras, pois havia 3 camisas e 3 bermudas. No problema 2, em seguida da leitura, diziam que seria possível formar 3 pares, pois havia 3 meninos e 3 meninas. Já no problema 3, as crianças que partiram da solução por meio da resposta de antecipação diziam que seria possível entrar e sair de duas maneiras diferentes, pois havia duas portas de entrada para serem combinadas com duas, das três portas de saída.

Um exemplo foi a antecipação de LET (9;5) que admite, logo de início, que poderá fazer 3 combinações. Ela explica: *"Deixa eu pensar numa coisa: É de 3, porque aqui (aponta para o enunciado do problema) tem 3 bermudas e camisa tem mais quantidade que bermuda, daí tem que tirar uma camisa para fazer o combinado , e daí tirando esta que tá sobrando, dá 3 maneiras"*. Como explicado por LET, outras crianças também partem da idéia de que já há 3 maneiras de combinar e ao serem questionadas sobre outras possíveis combinações, já passam a utilizar a 4ª camisa como possibilidade de troca entre qualquer uma das três camisas, no caso do problema 1. Com isso, começam, então, a abrir um vasto campo de critérios para realizar as trocas entre as peças de roupas, as crianças do baile da escola ou as portas da sala de aula.

Outro tipo de resposta de antecipação foi aquela em que as crianças partem de um algoritmo na tentativa de solucionar o problema. FEL (9;4), logo após a leitura do problema, diz que é uma maneira de fazer Maria se vestir e pega o lápis e escreve na folha: "4 : 3 = 1". Ele coloca também a resposta do problema por extenso, como usualmente se solicita nas tarefas de solução de problemas na escola. O menino escreve: *"R: Pode ser vestir de 3 modos diferentes"*. No entanto, ao começar a escrever a frase, pára e muda a conta para: "4 + 3 = 7" e então volta-se para a escrita por extenso da resposta do problema. A figura 20 mostra a representação gráfica da solução deste sujeito:

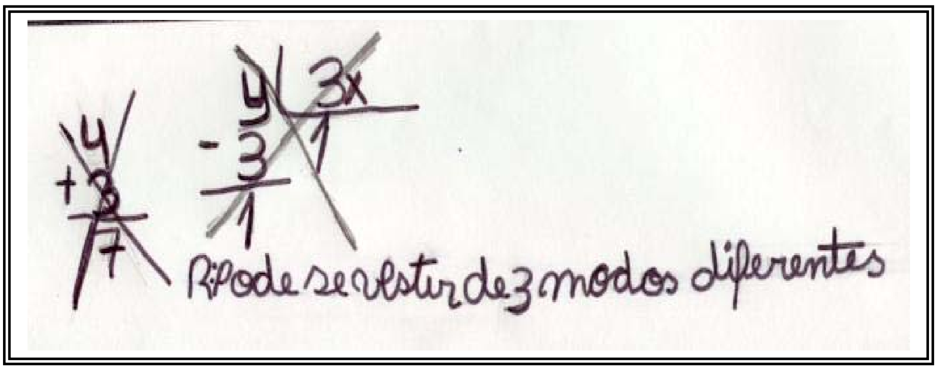


Figura 20 – Etapa inicial de solução do problema 1 de FEL (9;4) por meio da utilização dos algoritmos da adição e da divisão

Em seguida, questiona-se a solução dada pelo menino, pedindo-lhe que justifique a elaboração dos dois algoritmos. Na seqüência, o trecho do protocolo, mostra a compreensão e a justificativa de FEL ao antecipar sua resposta por meio do emprego de algoritmos:

Entrevistadora	*Sujeito*
O que você fez aí no papel ? Pode me explicar ?	*"Eu coloquei 4 + 3"*
Antes, você tinha feito, 4 : 3, não é ?	*"É que eu pensei que era 4 : 3, mas não é , daí eu fiz 4 + 3, porque se fosse 4 : 3, ela daria para se vestir de um modo diferente, né ? Não pode, ia ter que ser 7".*
E por que não poderia ser 1, como você colocou primeiro ?	*"Porque um modo ia ser muito pouco para 4 camisas e 3 bermudas"*
Ela pode se vestir de 7 ou de 3 modos ? Você está falando de 7, mas escreveu de 3 modos. Você pode me explicar melhor ?	*" É. Ah ! Agora eu não sei ! Eu num tô certo se agora é 7 "*
Você acha que é mais ou menos que 7 ?	*" Eu acho que é de dividir (refere-se a operação da divisão), acho que 7 também é muito... sabe ? É que daí se eu fizer (conta de divisão) vai ser uma camisa e uma bermuda, outra camisa e outra bermuda, e uma camisa e outra bermuda e daí acabou, é muito pouco , perto de 7"*
Tem algum jeito de você me mostrar aí no papel o que está me dizendo ?	*"É, eu vou tentar fazer isso ".*

Figura 21 - Quadro explicativo do protocolo do sujeito FEL (9;4) durante a realização do problema 1

O menino inicia a solução primeiramente fazendo o cálculo mental da operação da divisão e dizendo que seria uma maneira de a Maria se vestir e, em seguida, registra o algoritmo no papel. Imediatamente após sua resposta, no entanto, parece se dar conta de que o total encontrado não corresponderia ao número total de combinações, como o próprio menino afirma: entre 4 camisas e 3 bermudas é possível fazer mais combinações do que uma única maneira, tal como encontrou no resultado do algoritmo. Ele modifica para o algoritmo da adição e verifica que são 7 maneiras; resultado que lhe parece ser mais plausível do que o anterior. Mesmo assim, observa-se a falta de segurança e precisão do sujeito com relação ao resultado obtido, levando-o a verificar e comprovar o resultado encontrado por meio da adição. Com isso, o menino faz a representação gráfica das combinações, chegando ao total de 8 combinações entre as 4 camisas e as 3 bermudas, conforme mostra a figura 22.

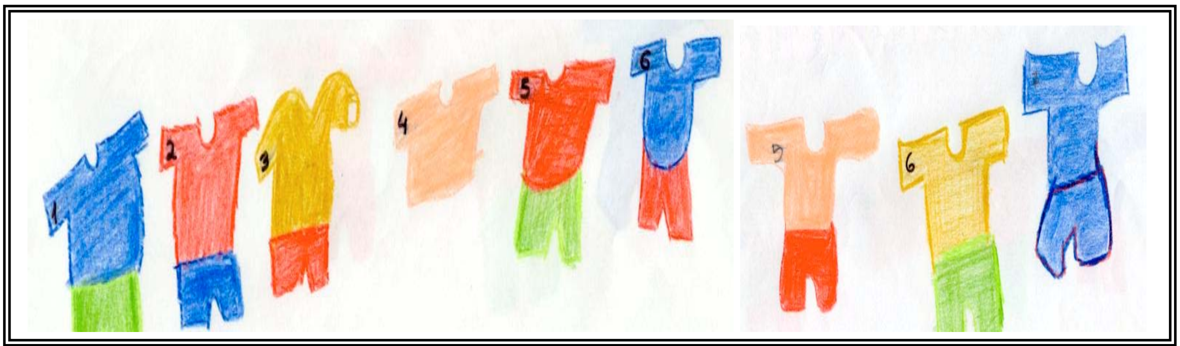


Figura 22 - Transformações combinatórias realizadas por FEL (9;4) com base nas estratégia da categoria 2 no problema 1

Ao terminar de fazer as 8 combinações, FEL foi solicitado a explicar o resultado encontrado no algoritmo da adição (n=7) e o resultado obtido segundo a representação gráfica (n=8). O menino passa a mão pelas camisas e bermudas combinadas no papel e diz em tom baixo de voz: *"Essa, essa, essa, essa... É 7 mesmo ! Deu tudo 7 mesmo, olha ! Porque também é 7 lá na minha conta. Então a conta tava certa ! É 7, por causa com os modos de vestir que eu fiz aqui, aqui, aqui, aqui é outro, e outro."* Ao falar, ele corria com o dedo sobre as combinações feitas, sem demonstrar por contagem um a um, ou, com maior rigor, os sete pares que mencionava.

O menino aponta para o algoritmo da adição que havia feito no início, tentando associar e validar ambas as soluções: com algoritmo e com a representação gráfica. Mesmo quando questionado, porém, sobre o fato de que na representação gráfica havia feito 8 combinações, o menino parece querer mascarar a quantidade de pares encontrados com base nos desenhos das roupas. Ele parece querer impor que o resultado obtido no algoritmo da adição deveria ser o mesmo das quantidades desenhadas, e, com isso, parece querer negar a existência das 8 combinações feitas, justificando, por fim, que, um dos oito pares desenhados ele havia feito de forma errada. O menino diz que fez, por engano, uma combinação a mais e que esta deveria ser retirada dali e, com isso, obteria o resultado "7", tal qual encontrado no algoritmo da adição.

A questão de valer-se do algoritmo para solucionar o problema foi uma estratégia constante para os sujeitos que foram identificados nesta categoria durante a solução dos problemas de natureza combinatória.

Conforme descrito nos trechos da análise do protocolo de FEL, outras crianças também manifestaram dúvidas entre fazer 4 ou 7 combinações no problema 1. Algumas diziam, no início da solução, ser possível fazer quatro combinações quando se baseavam na correspondência um a um, mas já adicionando a 4ª camisa a uma outra bermuda. As crianças antecipavam e em seguida registravam, desenhando no papel, as quatro combinações. Em seguida, diziam também que poderia ser um total de sete combinações, empregando a utilização do algoritmo da adição. Para estes sujeitos, coordenar duas respostas para um único problema trouxe-lhes maior dificuldade para chegar a uma única resposta, pois ao mesmo tempo que demonstravam saber que os desenhos que faziam representavam as maneiras de se vestir da personagem do problema, demonstravam também convicção de que o algoritmo da adição seria a melhor forma de resolver o problema. As crianças enfatizavam a solução do problema por meio do emprego de uma conta matemática.

Observa-se que estas crianças não conseguiram avançar num tipo de solução a qual significaria reconhecer que a operação da adição tal como realizada por eles não revelava a mesma transformação realizada quando combinavam os pares de camisas e bermudas, ou seja, não foram capazes de discriminar transformações distintas: operar aditivamente as peças de roupas e operar, de forma multiplicativa, os elementos entre um conjunto e outro.

5.7.2 *Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória no problema 2 - (baile entre as crianças)*

As condutas dos sujeitos no problema 2 seguiram as mesmas características das estratégias empregadas no problema 1.

Há antecipação de uma resposta com base na correspondência termo a termo ou em algum tipo de algoritmo. Na solução de MAR (8;10), ela antecipa dizendo que são 3 pares e remete à operação da adição "3 + 3 = 6", mas, na seqüência de sua explicação, diz que seria melhor fazer "6 : 2 = 3". A menina parece tentar encontrar um algoritmo em que ela possa apoiar e confirmar sua idéia inicial sobre o resultado "3". FELI (9;0) é uma outra criança que também antecipa uma resposta e escreve algoritmos da adição e da subtração: "3 + 3 = 6"; e em seguida escreve "6 – 3 = 3". Ele explica que fez assim porque: *"Para dar o 6, para eu colocar aqui, senão fica sem sentido, porque o 6 não tem aqui (enunciado)* E *são 6 crianças".* Para o algoritmo da adição diz que o fez porque este representava os três meninos que iriam dançar com as três meninas, resultando em seis crianças. Já para o algoritmo da subtração, afirma ter feito esta conta para tirar a "prova real" da conta da adição, um procedimento bastante usual nas tarefas matemáticas solicitadas pelos professores. Ao fazer a representação gráfica do problema, chega a fazer 6 pares e acreditando ter esgotado as possibilidades de fazer outras combinações, responde: *"Ai, eu não tô muito certo, acho mesmo que não dá para fazer mais, acho que fiz com todos. Eu te mostrei quem eu troquei com quem e fiz todos".*

Embora muitas das crianças que empregaram as estratégias da categoria 2, valendo-se da variação de critérios, conseguissem fazer um maior número de combinações (aproximadamente de 4 a 8 combinações, para os problemas 1 e 2), e demonstrassem tentar controlar e quantificar a solução correta para o problema, elas não conseguiram chegar à descoberta do sistema que lhes permitiria eliminar dúvidas como a que foi manifestada acima pelo menino FELI.

A menina DAN (8;7) também começa a solução com antecipação da resposta por meio do emprego do algoritmo. Diz que são três pares para dançar, porque: *" 3 + 3 é 6, então uma menina com um menino, outra menina com outro menino e outra menina e outro menino dão 3 pares".* Na seqüência de sua explicação, quando foi questionada sobre o total "6", ela explica que este refere-se a quantidade total de crianças. Em seguida, diz que não se pode fazer mais pares porque não se tem mais meninos e nem meninas. Imediatamente, no entanto, ao término da sua justificativa, ela afirma: *" É ! Mas se eu trocar (as peças de roupas) até que sim, até que daí tem outros jeitos deles dançar".*

Ela admite que as crianças podem trocar os pares entre si, fazendo na representação gráfica três combinações colocando um menino ao lado de uma menina, de forma que pudessem estar de braços dados. Em seguida, ela faz oralmente outros pares e vai passando o dedo nos desenhos e ligando uma menina a outro menino, sem, com isso, voltar-se para o lápis para fazer qualquer registro das combinações, como mostra a figura 23.

Figura 23 –Transformações combinatórias realizadas por DAN (8;7) com base nas estratégias da categoria 2 no problema 2

Depois da representação gráfica, ela faz 4 combinações oralmente, sem qualquer registro no papel. Ao final, faz 7 combinações e 2 repetições e termina justificando que são três pares possíveis. A seqüência dos pares ordenados, na solução de DAN, foi a seguinte: 1º) combinação da 1ª menina com o 1º menino; 2º) combinação da 2ª menina como o 2º menino; 3º) combinação da 3ª menina com o 3º menino; 4º) combinação oral da 3ª menina com o 1º menino; 5º) combinação da 2ª menina com o 3º menino; 6º) combinação da 1ª menina com 3º menino; 7º) combinação da 1ª menina com o 2º menino. Outras duas combinações repetidas foram realizadas logo após a sexta combinação.

Verificou-se que, os sujeitos perdiam-se na quantificação, ou não descontavam as combinações repetidas e, por fim, erravam também porque tentavam relacionar o resultado do algoritmo com o resultado obtido na representação gráfica. A falta de controle da quantificação das combinações feitas ou mesmo, pode-se inferir, ausência da tomada de consciência das repetições realizadas, levaram os sujeitos desta categoria a erros com relação a uma resposta correta entre o que fizeram no papel e a justificativa para o que fizeram. As crianças tendiam a fazer maior número de combinações na representação gráfica ou mesmo verbalmente, sem, sequer dar-se conta da quantificação correta.

Estas condutas evidenciaram a dificuldade das crianças tanto em relação à ausência do sistema combinatório quanto da tomada de consciência entre o fazer as combinações, no plano da ação, (o que se verificou quando solucionavam o problema) e a dificuldade de justificar os pares feitos, no plano da compreensão quando solicitados pelo pesquisador (Piaget, 1977b).

Na solução de KAT (9;1), a menina demonstra que tenta superar a idéia da correspondência um a um entre os meninos e as meninas. Mas inicia a representação gráfica valendo-se deste tipo de correspondência, ligando, por meio de traços, a primeira menina com o primeiro menino, depois a segunda menina com o segundo menino e a terceira menina com o terceiro menino. Enquanto faz as combinações e seus respectivos traçados entre um par ordenado e outro, ela também afirma ter feito aquele tipo de disposição no papel para favorecer a maneira de juntar as crianças para o baile. Este tipo de conduta foi encontrada nas crianças que fizeram maior número de combinações, sem , no entanto chegar ao total possível dos pares ordenados do problema.

De forma intuitiva, as crianças desta categoria de estratégias de solução passam a considerar a ordem e a posição como aspectos que as auxiliam na elaboração das combinações. Conforme mostra a figura abaixo, KAT (9;1), logo após ter ligado as três primeiras combinações, tenta estabelecer uma ordem para continuar ligando meninos e meninas, mas não consegue fazê-lo. A menina não consegue coordenar a ampliação da ordem a qual havia mencionado, ou seja, ligar o primeiro menino com a segunda menina e depois com a terceira menina e assim sucessivamente até chegar às nove combinações possíveis. Mesmo assim, embora não consiga prolongar este critério como estratégia para continuar a formação de pares ordenados, a menina sabe que há mais combinações e passa então a falar de critérios estéticos e afetivos para fazer as 4ª, 5ª e 6ª combinações.

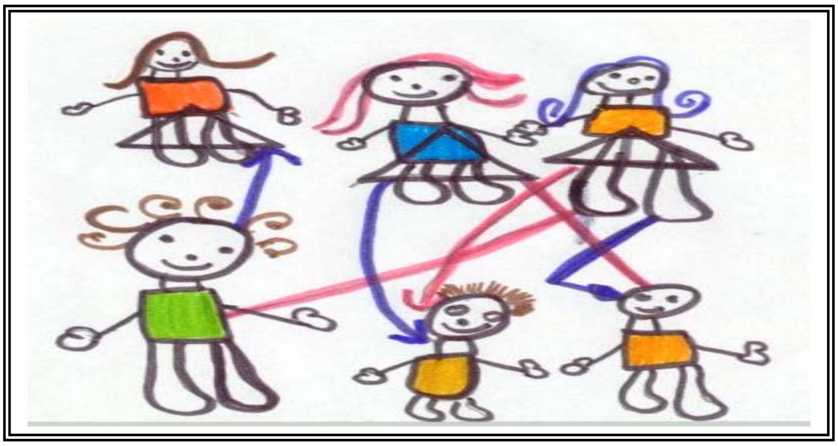


Figura 24 - Transformações combinatórias realizadas por KAT (9;1) com base nas estratégias da categoria 2 no problema 2

A utilização de estratégias que superassem apenas a aplicação da equivalência um a um entre os elementos dos dois conjuntos dos problemas de análise combinatória foi bastante evidenciada nas condutas dos sujeitos que apresentaram critérios simultâneos como forma de solução para chegar a uma resposta

A análise da variação de critérios contidas na categoria 2 como estratégias de solução por parte das crianças mostrou que, ainda que não as tenha favorecido para se chegar a respostas corretas para os problemas, estas se apresentam como formas importantes e denotam passos decisivos auxiliando na busca e descoberta do sistema combinatório.

5.7.3 *Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória no problema 3 - (sala de aula)*

As crianças que resolveram este problema com base nas estratégias da categoria 2, fizeram rapidamente 4 combinações, mas observa-se que a falta de um sistema combinatório impediu que elas dessem seqüência a todas as possibilidades. Elas avançam com relação à estratégia da categoria 1 porque admitem fazer "trocas" entre as portas, sem estar a estratégia somente pautada na correspondência termo a termo, mas são trocas aleatórias ou, quando muito, as crianças aproveitam um dos termos utilizados na combinação anterior, ou seja, se utilizam da 2ª porta de entrada que estava combinada com a 2ª porta de saída e colocam, novamente a 2ª da entrada com a 3ª porta da saída.

Na solução de LET (9;5), a menina admite antecipadamente que são duas maneiras, pois só há duas portas de entrada para combinar com duas portas de saída, sendo que a 3ª porta de saída ficaria sem par. Tal afirmação parece indicar uma similaridade bastante grande com o argumento dado pelas crianças para o problema das camisas e bermudas; no qual os sujeitos acreditam que, se há 4 camisas e 3 bermudas, pode-se combinar um a um e um elemento "sobrará", nesse caso, a 4ª camisa.

Na seqüência da solução, a menina parece querer admitir maior número de combinações, mas ainda desconsidera a 3ª porta de vidro como possibilidade. Faz a 1ª porta de entrada com a 1ª porta de saída, a 2ª porta de entrada com a 2ª porta de saída. Com a admissão de que há possibilidade de troca, inverte os pares anteriores, ou seja, coloca a 1ª porta de entrada com a 2ª porta de saída e a 2ª de entrada com a 1ª de saída.

Por fim, chega a admitir a possibilidade de usar a 3ª porta de saída, mas o faz uma única vez, não aceitando que possa combinar outra vez mais. Justifica: *" Porque eu te disse que era duas portas de entrada e dava pra usar as duas de saída e sobrava uma, daí eu troquei a 1ª com a 2ª de vidro e a 2ª de entrada com a 1ª e a 3ª porta de vidro num dava pra usar, mas daí eu vi que se puder trocar elas eu coloco ela (3ª porta de vidro) com a 1ª porta de entrada e daí já acabou tudo mesmo, pelo menos eu usei essa porta três".*

Uma conduta comum entre os sujeitos foi a solução de FABI (11;0), quando o menino termina a 5ª combinação diz que não se pode fazer mais, pois já usou todas as portas. Ele explica: *"Pode ser 5 e pode ser 3 também".* No entanto, quando questionado sobre os dois resultados, responde: *"Que eu acho ? São 5... Porque tá fácil, se 2 e 3 são 5 é isso mesmo, pelo o que eu aprendi é ... eu falei que era 3 maneiras diferentes de ele sair e 2 maneiras diferentes de entrar e dá 5".* Tal como descrito nos problemas anteriores, há uma tendência de as crianças tentarem unificar o cálculo algoritmo feito como antecipação da resposta e a solução realizada por meio da representação gráfica.

Os critérios de combinações com base em justificativas estéticas, afetivas, entre outras utilizados pelos sujeitos dentro da categoria 2, são apresentados a seguir.

Critérios	*Justificativa do sujeito*
Estéticos	DEB (9;7) *"Porque esse conjunto ela pode passear na praça enquanto é primavera... ela pode passear no campo, cavalgar com essa camisa (aponta para a marrom) e pra continuar com a camiseta, as são marrom... (refere-se a bermuda marrom que acabará de desenhar no conjunto)... se ela for numa festa de aniversário, de uma amiga, essa camiseta é alegre e daí a bermuda porque é assim: uma cor alegre também, suave! ".* LUC (8;11) *" Porque é escuro as cores e combina"* SAM (9;8) *"Porque essa camisa e essa bermuda era o que ela mais gostava ". " Porque a amiga dela falou assim para ela :" você tem que usar camisa preta com shorts azul, combina mais com você, combina com o seu lacinho no cabelo que você tem causa que ela achaava que a bermuda verde clara dava com a camisa azul escura ".* LET (9;5) *"Porque essa camisa tem cor vermelha e o short também tem um pouquinho de vermelho no cinto, daí combina".*
Afetivos	JOA (9;4) *" Esses dois vão junto (1ª menina com 1º menino), porque se não, a outra (3ª menina) vai ficar com ciúme e vai ficar xingando a outra (1ª) menina"* KAT (9;1) *"Ela vai por essas 3 camisas com essas calças, mas vai deixar essa (4ª camisa) pra dar pra uma amiguinha que tá sem blusinha de frio que é pra ajuda, né !"*
Ordem e posição dos objetos	MAR (8;10) *"Por causa que eu tô começando pela calça (aponta para a preta) com a camisa rosa." S: " Por causa que a azul (bermuda) é embaixo da laranja (camisa) [referiu-se ao desenho inicial que fez e na disposição, a camisa laranja foi a 2ª desenhada e a bermuda azul estava bem abaixo da camisa], eu já aproveito pra fazer o conjunto". "Por causa que tava em cima também" (aponta para a bermuda verde e camisa vermelho escuro que havia feito no primeiro desenho, o das peças de roupas).* ROD (10;11) *"Porque elas tavam pertinho uma da outra...E porque é diferente porque nunca pode ser o mesmo par".*

Figura 25 - Quadro explicativo dos critérios utilizados pelos sujeitos para as combinações realizadas com base em justificativas estéticas, afetivas e de posição entre os elementos dos conjuntos

A manifestação de critérios ligados a aspectos estéticos, afetivos, de ordem e posição dos elementos do problema foram demonstrados pelas crianças classificadas nesta segunda categoria de tipos de estratégias empregadas pelas crianças para a solução dos problemas de natureza combinatória. No decorrer da solução de cada problema, quando as crianças valiam-se ora da correspondência termo a termo, ora da correspondência de um para muitos, elas também anunciavam entre uma combinação e outra a possibilidade de fazer novas combinações em função de querer agrupar meninos e meninas ou camisas e bermudas segundo uma propriedade desses objetos que, em alguns momentos, se referia à cor, tamanho, entre outras. Em outros momentos, as crianças diziam que poderiam fazer mais combinações por estarem procurando, entre os elementos dos problemas aspectos ligados a um sentimento ou estado de ânimo entre as personagens, como, por exemplo, foi evidenciado no problema 2.

Os dados evidenciaram que, dentre os três tipos de critérios (estético, afetivo, de ordem e posição) mais comentados pelas crianças, houve predomínio da utilização e verbalização de aspectos estéticos na elaboração das combinações.

Outra conduta manifestada pelas crianças, conforme já descrito anteriormente, foi a oscilação entre não dar-se conta, de início, das repetições e passar a dar importância para os pares repetidos que faziam durante a solução do problemas. Esse aspecto referente à repetição levou, muitas vezes à inibição de avançar e realizar novas combinações. As crianças que passavam a dar muita importância ao controle das repetições acabavam justificando que não teriam mais pares ordenados além daqueles que fizeram, em torno de 6 a 9 combinações para o problema 1, e de 4 a 6 combinações para o problema 2. Uma vez admitido-se que as repetições não poderiam ser computadas como novas maneiras de combinar, as crianças não conseguiam prosseguir na elaboração de novas combinações, pois afirmavam que se fizessem um outro par ordenado, poderiam fazê-lo repetido de alguma combinação anterior e, com isso, encerravam a solução para o problema. Outro aspecto com relação às repetições foi observado na conduta das crianças que não se deram conta das repetições, levando-as à realização de vários pares ordenados com muitas combinações repetidas.

O critério adotado com relação à tentativa de controlar e quantificar os pares ordenados, foi evidenciado pelas justificativas dadas pelas crianças. Elas afirmavam durante a solução do problema, a cada nova combinação, que estavam olhando com muita atenção para a solução a fim de que não fizessem pares de roupas iguais. Afirmavam, sem muita precisão de que seria possível ter mais combinações além das que estavam fazendo, mas não conseguiam quantificar ao certo, quantos pares ordenados deveriam fazer para chegar à resposta final do problema.

Uma outra conduta entre alguns dos sujeitos que solucionaram por meio desta categoria de estratégias (tipo 2) foi o fato de as crianças admitirem trocas entre os pares, mas oscilavam entre considerar cada par como uma combinação. As crianças faziam um primeiro conjunto de três combinações como se fosse uma maneira de combinar os elementos propostos. Por exemplo, faziam a 1ª camisa com a 1ª bermuda, a 2ª camisa com a 2ª bermuda e a 3ª camisa com a 3ª bermuda. Ao serem inquiridas a respeito de quantas maneiras haviam se valido, respondiam que haviam usado uma única maneira de proceder às combinações. Em seguida, admitiam que poderiam fazer outros pares e o faziam, por exemplo, deste modo: a 1ª camisa com a 2ª bermuda, a 2ª camisa com a 3ª bermuda e a 3ª camisa com a 1ª bermuda e voltavam a dizer que estes novos pares referiam-se a uma maneira. Alguns dos sujeitos conseguiram fazer 9 combinações para o problema 1 e, com base nesse critério, mostravam-se convictos de que a personagem do problema poderia se vestir apenas de três maneiras. Quando questionadas sobre as combinações anteriores, afirmavam que aquelas eram outras maneiras.

As crianças parecem considerar os conjuntos de pares de forma isolada. Parece-nos que, para estas crianças, a pergunta do problema sobre "novas maneiras", ou "outras maneiras", está relacionada ao fato de acrescentarmos outra quantidade de camisas e bermudas ou de crianças ao enunciado do problema.

Durante a solução dos problemas, as crianças que apresentam esta justificativa são questionadas exaustivamente sobre este tipo de interpretação e, mesmo assim, não admitem que as novas combinações sejam incorporadas na quantidade total. Esta conduta demonstrou que, ao começar um novo grupo de combinações, a criança parece considerar a primeira delas sem integrá-las ao conjunto total.

5.8 Categoria *3 – Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial*

Esta categoria de estratégias de solução dos problemas de análise combinatória tem como princípio a caracterização da correspondência dinâmica entre os elementos do problema no sentido de superação em relação aos critérios das categorias antecedentes, resultando um melhor desempenho nos problemas por parte dos sujeitos. As estratégias aqui empregadas levaram, ainda que sem qualquer aproximação com a formalização combinatória, a realizar todas as combinações possíveis de pares ordenados nas situações-problema propostas.

Os sujeitos categorizados nas estratégias do tipo correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial foram aqueles que conseguiram realizar todas as combinações possíveis para os problemas apresentados. O avanço desta última categoria está ligada ao fato de que os sujeitos conseguiram solucionar corretamente os problemas de análise combinatória demonstrando verbal e graficamente com melhor precisão as combinações que realizaram.

As estratégias desta categoria apresentam como característica principal o fato de que os sujeitos utilizavam, predominantemente, a correspondência um para muitos como esquema de ação para a busca da solução. O emprego da correspondência entre os elementos do problema foi enriquecido verbal e graficamente de maneira qualitativamente superior às encontradas anteriormente.

As crianças faziam antecipações mais próximas do total correto, controlavam com maior precisão as repetições ocorridas, computavam cada nova combinação e quantificavam corretamente o total de pares ordenados, mas ainda oscilavam nas operações combinatórias e explicação das ações.

As crianças que se valeram desta estratégia, ao mesmo tempo que chegaram a todas as combinações possíveis e, por isso, denominada totalizada, fizeram-no por meio de um sistema que não pode ser ainda chamado de sistema combinatório.

Vale ressaltar, no entanto, que os sujeitos encontrados nesta categoria não foram capazes de enunciar, senão após a própria execução da tarefa, um modelo explicativo do sistema combinatório, evidenciando abstrações ligadas às reflexões das ações de combinar os pares ordenados. Isto também põe em evidência que a construção das operações combinatórias como abstração reflexionante ainda percorrerá um longo caminho até que se solidifique como resultado de pura reflexão do sujeito. A enunciação de que cada elemento de um conjunto deva combinar com cada um dos elementos do outro conjunto, sejam as camisas com as bermudas, os meninos e as meninas, as portas de entrada com as portas de saída revela, assim, a regra geral sobre o sistema combinatório. O nível de abstração das operações combinatórias na qualidade de estrutura formal de pensamento leva a um outro avanço significativo quanto a processos cognitivos: o da capacidade de as crianças dizerem de forma matematizada e reportando para a operação de multiplicação. No caso dos problemas apresentados, as crianças poderiam anunciar que com 4 camisas e 3 bermudas poder-se-iam fazer 12 combinações, uma vez que a mesma situação pode ser resolvida em razão do conhecimento lógico-matemático pela operação da multiplicação que poderia ser expressa por 3 x 4 =12 ou 4 x 3 =12.

5.8.1 Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial no problema 1 - (camisas e bermudas)

Os exemplos abaixo destacam a análise dos protocolos de solução de problemas explicitando as condutas dos sujeitos em relação à estratégia ligada à correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial.

Um dos domínios apresentados pelas crianças que conseguiram realizar todas as combinações foi a elaboração de estimativas corretas do número total de combinações. No caso de ALI (8;11), quando questionada sobre a possibilidade de fazer uma estimativa, ela pega a folha onde havia desenhado as peças de roupas, como momento de organização dos dados e vai apontando e falando: *"rosa com rosa", " rosa com verde", "rosa com abóbora", roxa com verde, roxa com abóbora, roxa com rosa, azul com verde, azul com abóbora, azul com rosa, abóbora com verde, abóbora com abóbora e abóbora com rosa". Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze maneiras".* Neste momento, enquanto fazia as combinações oralmente, ia também apontando os pares combinados. A menina anunciou as 12 combinações de forma sistematizada, mas cabe ressaltar que, em seguida, ela solicita que precisaria desenhar no papel para confirmar sua resposta. Com isso, ela passa a fazer as combinações no papel, mas, no decorrer da solução, ALI passa a oscilar entre critérios estéticos e de ordem entre a elaboração de um par ordenado e outro, conforme apresentado na figura abaixo.

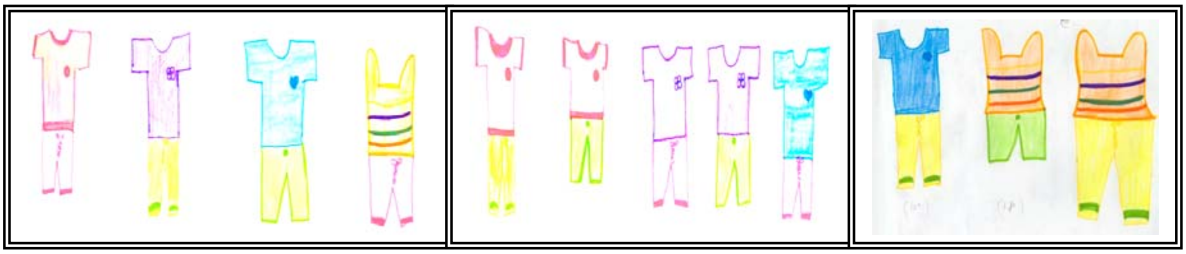


Figura 26 - Transformações combinatórias com base nas estratégias da categoria 2 realizadas por ALI (8;11) no problema 2

ALI compõe as quatro primeiras combinações no papel, anunciando que está agindo dessa maneira em virtude da ordem das camisas e das cores das bermudas. Ela faz a primeira camisa (rosa) com a terceira bermuda (rosa), em seguida faz a segunda camisa (roxa) com a segunda bermuda (amarela). O terceiro par é a terceira camisa (azul) com a primeira bermuda (verde), depois faz a quarta camisa (sem manga com listas coloridas) com a segunda bermuda (rosa). Ao terminar as quatro primeiras combinações, a menina diz que já usou as 4 camisas algumas vezes com as três bermudas e que na seqüência fará mais combinações.

No papel, ela utiliza-se da regra de pegar primeiramente pela ordem das camisas, mas já não age igualmente quanto às bermudas. Na 5ª e 6ª combinações, ela utiliza a camisa rosa duas vezes seguidas, alternando somente as bermudas, pois diz saber que deverá usar a bermuda amarela e depois a verde, uma vez que já havia utilizado a bermuda rosa na primeira combinação. Em seguida, para a 7ª e 8ª combinações, afirma que vai usar a camisa roxa, pois faltam duas maneiras de a personagem se vestir com a referida camisa. A menina faz a camisa roxa com as duas bermudas (rosa e verde) que faltavam combinar com esta peça de roupa. Para a camisa azul (9ª e 10ª combinações) ela explica o mesmo critério que havia utilizado anteriormente: sabia que a azul já havia combinado com uma bermuda e agora faltava somente colocá-la com as duas outras bermudas (rosa e amarela). Finalmente, ela utiliza o mesmo procedimento para fazer a 11ª e 12ª combinações, utilizando, então, a camisa laranja com listas coloridas.

Embora não tenha utilizado de forma sistemática as combinações que realizou no papel em comparação àquelas que realizou oralmente no início, a menina consegue controlar os pares ordenados realizados e justificar que já havia utilizado as três formas possíveis de combinar cada uma das camisas com as bermudas.

Na continuação, ALI explica estar convicta de que não havia mais peças a serem combinadas. Ela demonstra saber que há uma regra, mas oscila durante sua justificativa entre respostas intuitivas de um sistema combinatório e o sistema em si como regra geral.

No final, ela também manifesta que poderia resolver o problema por meio de uma conta matemática. Apresentamos, a seguir, um trecho do protocolo de ALI (8;11) sobre a aproximação que a menina tenta estabelecer com a conta matemática a ser efetuada para a solução do problema.

Entrevistadora	*Sujeito*
De quantas maneiras a Maria se vestiu até agora ?	*"De 12. Bem, deixa eu ver, deixa eu contar (contou todas as combinações feitas)... É 12 mesmo".*
A Maria pode se vestir de outra maneira, diferente dessas ?	*"Não, já acabou todas as maneiras de combinar ... Sem desenhar, dava pra fazer uma conta, né ?".*
É possível resolver este problema fazendo uma conta da matemática? Que conta você faria ?	*"É. Bem, acho que nesse problema não dava para fazer conta, não dava para colocar 4 + 3 ou 3 x 4 , não ! Ou será que dava ? Acho que só daria para colocar a resposta desenhada "*
Se você colocasse 4 + 3 , o que ficaria ?	*"Ficaria 7, e não são 7 maneiras, mas se eu colocar 4 x 3, são 12 ! Será que é isso ? Deixa eu ver... 4 camisas com 3 bermudas ... (pausa de 20´´) ... Porque 4 vezes, 4 camisas com 3 bermudas são 12, são 12 maneiras de se fazer, é isso ! Dá pra fazer conta de vezes ! "*

Figura 27 - Quadro explicativo do protocolo do sujeito ALI (8;11) durante a realização do problema 1

ALL (9;1), uma outra criança, também chega a fazer as 12 combinações possíveis para o problema das camisas e bermudas. Ele inicia a solução do problema fazendo o cálculo mental da adição entre os dados numéricos do enunciado. O menino leu o problema e imediatamente olhou para cima e balbuciou " 3 e 4 ". Escreveu no papel "4 + 3 = 7." Ele contava nos dedos escondendo-os entre as pernas. E em seguida, escreveu a resposta por extenso. Quando foi solicitado a explicar o que fez, responde: *"Pergunta quantas maneiras ela pode se vestir, daí eu fiz 4 + 3 que deu 7".*

Na representação gráfica, ele numera cada camisa e bermuda e tenta controlar a combinação pela numeração atribuída. Ao fazer as três primeiras combinações pela correspondência termo a termo, ele pára e diz: *"Eu acho que eu fiz a conta errado... É que, hum... Mas também é porque é que aqui* (aponta para as combinações feitas) *deu 3 e ali deu 7 e eu acho que dá 3 maneiras e não 7... acho que eu escolhi errado a operação, mas eu sei que são 3 maneiras, eu só num sei escrever com que continha eu vou fazer isso ... É de 3, porque só tem 3 bermudas e também pode ser 4 ...Olhe, se tirar essa bermuda e colocar na blusa que ficou sem bermuda... quer ver, assim, tira a 1ª bermuda e coloca nessa* (4ª camisa) *camisa que tá sem bermuda".*

Ao admitir que poderia fazer trocas além das três combinações, o menino passa a fazer outros pares. Quando foi questionado sobre o como estava fazendo as combinações, justifica que estava trocando a camisa que não tinha par, neste caso, a 4ª camisa com todas as bermudas, o que nos indicou um princípio de sistematização e critério adotado para continuar dando conta de uma maior quantidade de combinações possíveis.

O menino prossegue sua explicação: *"É porque camisa com número 1 vai bem com bermuda com número 1 também... Acho que eu vou aproveitar um pouquinho mais a camisa que tem o nº 1... Ah ! É porque eu tô lembrando de cabeça que eu acabei de fazer e usar a bermuda que tem número 2, daí eu aproveito ela mesmo e ponho com a camisa que tem número 3, que eu acho que ainda não fiz... Eu percebi que ainda não tinha feito a camisa 3 com a bermuda 3, eu já combinei uma hora a 2 com 2 lá no comecinho, olha (aponta para o seu desenho no papel, referente a 1ª combinatória) e também já fiz a 1 com a 1, acho que só falta a 3 com a 3 mesmo".*

No final da solução, ALL reconhece que a operação da adição mencionada no início de sua proposta de solução não seria a mais adequada para solucionar o problema. Refere-se ao fato de ir combinando e trocando as peças entre si, ou seja, uma transformação própria da operação de multiplicar, de criar um produto com base em grandezas distintas.

Quando realiza a ação, no entanto, tem mais êxito do que quando necessita justificá-la. Ele tenta, ainda que sem êxito, aproximar uma relação entre o algoritmo da adição e o resultado das combinações. Ao final, afirmou que o algoritmo feito não se relacionava com as combinações, pois percebia que não havia apenas adicionado as camisas às três bermudas.

5.8.2 Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial no problema 2 - (baile entre as crianças)

As estratégias de solução das crianças para o problema 2 dentro da terceira categoria apresenta as mesmas características anteriormente descritas.

ALI (8;11) inicia a solução fazendo a antecipação da resposta, dizendo que são 3 pares possíveis. Faz o algoritmo da divisão no papel, mas verifica pelo total dado (n=1) que não poderia ser feito apenas um par entre as crianças. Demonstra dúvida sobre que operação realizar para solucionar o problema e detém-se em descobrir qual seria o algoritmo mais adequado para a situação-problema.

A figura 28 mostra o registro do algoritmo utilizado pela menina no início da solução:

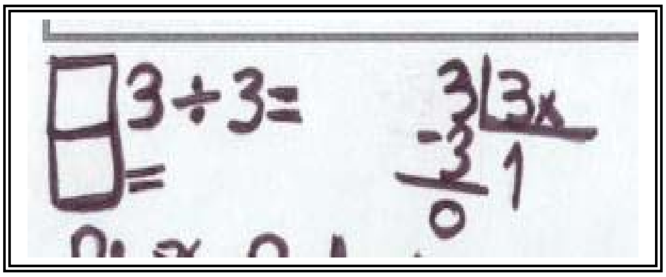


Figura 28 - Etapa inicial de solução do problema 2 de ALI (8;11) por meio da utilização do algoritmo da divisão

Em seguida, ela começa a fazer as combinações por meio da representação gráfica, desenhando primeiramente os três meninos e as três meninas e dizendo que ainda vai tentar descobrir que conta deverá fazer. Depois do desenho das 6 crianças, ela vai apontando com o dedo e expondo oralmente as três primeiras combinações. Em seguida, faz traços para ligar os pares que acabara de falar. Ela liga com o lápis o primeiro menino à terceira menina, depois o segundo menino à primeira menina e, por último, o terceiro menino à segunda menina, conforme apresentado na figura 29.

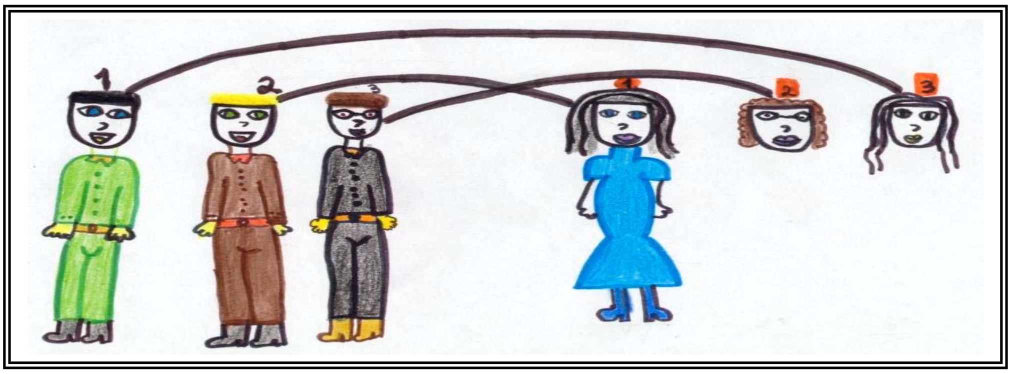


Figura 29 - Transformações combinatórias representadas por traços com base nas estratégias da categoria 3 realizadas por ALI (8;11) no problema 2

A partir da 4ª combinação, a menina pega o lápis, volta-se para outra folha de papel e faz as demais representações dos pares. A menina tenta manter uma ordem de combinação entre um par e outro, e, mesmo sem fazê-la por meio do emprego sistemático, ela chega a todas as nove maneiras possíveis de os três meninos dançarem com as três meninas no baile da escola. A seqüência das combinações foram as seguintes: 4ª combinação – desenha o primeiro menino com a primeira menina; 5ª combinação – faz o segundo menino com a segunda menina; 6ª combinação – coloca o terceiro menino com a terceira menina. Depois faz a 7ª combinação – colocando o terceiro menino com a primeira menina. A 8ª combinação, conforme mostrado na figura 30, apresenta a repetição de um par ordenado (5ª combinação) já elaborado pela menina Imediatamente após tê-la feito, ela mesma afirma ter realizado uma combinação repetida e pede para que não seja computada no total. A menina faz então, as duas últimas combinações para chegar ao total de nove combinações possíveis como resposta correta para este problema.

Figura 30 - Transformações combinatórias representadas por pares ordenados entre as crianças com base nas estratégias da categoria 3 realizadas por ALI (8;11) no problema 2

Ao terminar de fazer as nove combinações, ALI volta a mencionar a tentativa de relacionar a situação problema a uma conta matemática. A menina refere-se, então, à operação da multiplicação, afirmando poder resolver por meio do algoritmo "3 x 3 = 9." Ela escreve a conta no papel e registra a resposta do problema por extenso. Ao final da solução, demonstra estar satisfeita por ter encontrado o algoritmo correspondente à situação que, no início, não conseguira fazer.

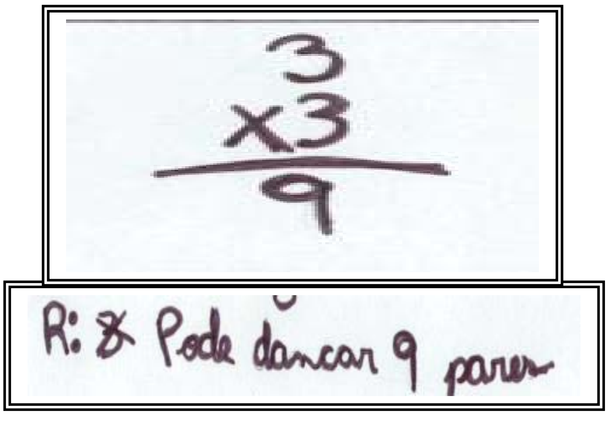


Figura 31 - Etapa final de solução do problema 2 de ALI (8;11) com base na utilização do algoritmo da multiplicação

Cabe destacar que o avanço significativo quanto às estratégias e justificativas empregadas por estes sujeitos não nos permite afirmar que a estrutura das operações combinatórias tenham se solidificado no sentido de operações combinatórias formais. Vale ressaltar que chegar ao resultado final, como foi o caso das condutas de ALI (8;11) e ALL (9;1), está ligado ao fato de a criança poder valer-se das ações e representações gráficas (algoritmos e desenhos) empregadas no decorrer da solução, para enfim, obter êxito.

O controle das combinações, ou ainda, a quantificação exata daquilo que iam fazendo foi constatado como uma conduta freqüente entre os sujeitos que resolveram corretamente o problema. Além de controlar a quantidade de pares combinados, as crianças também demonstraram identificar e em seguida tentar minimizar a elaboração das repetições dos pares. Dar-se conta de que faziam pares repetidos pareceu-nos uma conduta importante para as crianças que acertaram o problema, pois serviu como referência para que eles passassem a fazer muitos pares, como foi o caso dos sujeitos da estratégia anterior, cuja falta de tomada de consciência de que faziam repetições levava-os a elaborar repetições sobre repetições sem, ao menos perceber que o faziam. A resposta de SIM (9;8) sintetiza, de maneira geral, as respostas das crianças quanto à questão das repetições. Ela afirma: *"Acho que não, porque a gente já fez, meninas com meninos e meninos com meninas, daí num dá mais. Só se mudar os meninos com as meninas de novo... daí ei ia colocar, mas eu acho que ia ficar repetido ... Acho que não, porque eu já troquei três vezes e se eu trocasse de novo ia ficar repetido daí".*

5.8.3 Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial no problema 3 - (sala de aula)

Uma das soluções corretas e mais elaboradas no problema da sala de aula foi também realizada por ALI (8;11). Ela antecipa uma resposta e identifica a situação como semelhante ao outro problema de produto cartesiano. A menina, começa falando: *"Bom, quantas maneiras eles* *podem sair e entrar ... é semelhante àqueles problemas de quantos pares, né ? Deixa eu ver ... como eu posso fazer isso ... bem, primeiro eu tenho que saber quantas portas eu tenho... bem, é... "*

Ela faz rapidamente a representação gráfica e liga a 2ª porta de entrada a cada uma das portas de saída. Faz repetições, no entanto, durante a solução do problema. Ao ter de justificar sua resposta final para a solução do problema, explica: *"Olha eu acho que é de 6 maneiras, e sabe? Agora que eu entendi, que é uma primeira porta com todas que tem de saída e daí a segunda com todas as de as saída que tem... então, que era o que eu tinha que fazer com os problemas dos pares de meninos, porque era só eu trocar um menino com todas as meninas e daí o outro menino com todos as meninas".*

A identificação de que poderia ter utilizado a mesma regra para o problema do baile evidenciou-nos que a menina havia tomado consciência e generalizado a estrutura de ambos os problemas. Sua resposta, sobretudo, evidenciou que ela também havia se dado conta de que poderia ter feito o mesmo para o problema do baile, o que resultaria numa maneira mais organizada e rápida, tal como o critério que adotou para solucionar o problema da sala de aula.

Na representação, conforme mostra a figura 32, a menina também procurou fazer tal como verbalizou sua resposta:

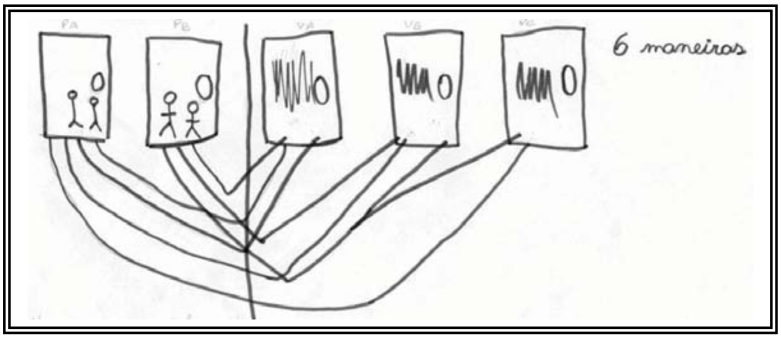


Figura 32 - Transformações combinatórias representadas por traços entre as portas de entrada e as portas de saída da sala de aula com base nas estratégias da categoria 3 realizadas por ALI (8;11)

LUC (8;11), outra criança, já anuncia que a solução não acontece por meio da soma e faz as combinações entre as portas de maneira sistemática e oralmente. Faz a operação, ligando com os dedos e falando que pode fazer a 1ª porta de entrada com 1ª de saída, a 2ª com a 2ª e a 3ª com a 3ª de saída, respectivamente. Ao ser solicitada a justificar o que havia feito, volta-se para a folha de papel e esboça uma representação gráfica. Faz marcas no papel para tentar controlar a solução e, ao fazê-la, já não apresenta uma forma tão sistematizada como havia anunciado oralmente. A menina muda a ordem das combinações, e, embora tenha feito as 6 combinações para o problema, a ordem empregada de forma sistematizada no momento de verbalização foi superior à empregada no momento de representação do problema.

Outro anúncio de um sistema combinatório foi verbalizado oralmente por SIM (9;8). Quando esta resolve fazer a solução por meio da representação gráfica, no entanto, não segue as combinações sistemáticas que havia feito de forma oral. A solução por meio da representação gráfica mostra a explicação escrita pela menina:

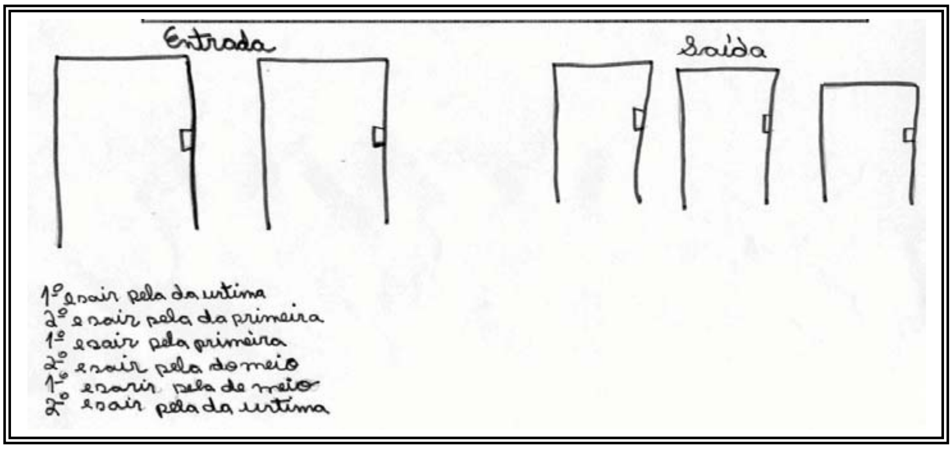


Figura 33 - Transformações combinatórias representadas pela escrita por extenso entre cada uma das portas de entrada a cada uma das portas de saída da sala de aula com base nas estratégias da categoria 3 realizadas por SIM (9;8) no problema 3

Uma solução apresentada para o problema da sala de aula verbalizada por alguns sujeitos foi a de que só se poderiam fazer diferentes combinações, além das 6 maneiras possíveis, se eles pudessem usar as portas de saída como portas de entrada e vice-versa. Com base nesta idéia, CRI (9;11) depois de realizar as 6 combinações, afirma: *"Não tem mais nenhum jeito, só se for ao contrário: entrar por essas (saída) e sair por essas (entradas)."*

A solução realizada por CRI, assim como por outras crianças evidenciou condutas semelhantes às encontradas nos estudos de Piaget (1985) a respeito da criatividade lógica, na qual o autor trata da questão da produção das novidades, centrando-se no problema da formação dos possíveis. Lembra-nos o referido autor que a abertura dos possíveis são cada vez mais numerosos, levando à criança a ser capaz de pensar sobre muitas possibilidades para uma dada situação, cujas interpretações são cada vez mais ricas (Piaget, 1985, p.7).

Os dados obtidos na análise das estratégias utilizadas pelos sujeitos mostraram que, valendo-se dos esquemas de correspondências (uma a um e um para muitos), das antecipações, dos cálculos com algoritmos, entre outras condutas, as crianças puderam solucionar os problemas de análise combinatória proposta nesta pesquisa. A correspondência termo a termo, como esquema quantitativo básico, conforme nos foi evidenciado pelos sujeitos, demonstrou aprimoramentos distintos entre as categorias das estratégias de solução apresentadas.

Os sujeitos que se valeram da variação de critérios durante a solução evidenciaram que a busca e a descoberta de um sistema combinatório implica abstrações bastante elaboradas com relação à operação da multiplicação. Implica, sobretudo, coordenação em nível lógico-matemático da conceitualização do raciocínio proposicional.

Os dados também evidenciaram a capacidade das crianças em abstrair e coordenar um maior número de dados a fim de que solucionassem corretamente o problema. A verificação de estratégias mais elaboradas por parte das crianças que solucionaram corretamente em relação às que chegaram perto da resposta do problema, no entanto, não poderiam ser denominadas como abstrações refletidas no sentido da estrutura formal de pensamento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A preocupação com a solução de problemas aritméticos no Ensino Fundamental incentivou-nos a este trabalho, uma vez que tais atividades se constituem, na escola, uma das tarefas mais importantes para o trabalho do professor no ensino da Matemática.

O presente estudo buscou analisar as relações entre o desempenho escolar em Matemática, os níveis de abstração em prova de múltiplos comuns, as operações combinatórias e a solução de problemas de multiplicativos (produto cartesiano) com lápis e papel tendo como sujeitos, alunos ingressantes da 3ª série do Ensino Fundamental, em escolas públicas de uma cidade do interior do Estado de São Paulo.

Além disso, buscou analisar as estratégias de solução de problemas de estrutura combinatória dos sujeitos, considerando as formas de representação gráfica e as verbalizações ocorridas durante a realização das tarefas.

Os sujeitos foram 132 alunos de 3ª série do Ensino Fundamental com a idade média de 9 anos, submetidos a uma prova de desempenho escolar em Matemática do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo-SARESP. Foram constituídos dois subgrupos da amostra: os de melhor desempenho e os de pior desempenho em razão dos resultados obtidos na prova de Matemática. Os dois subgrupos de sujeitos foram avaliados por meio de provas piagetianas quanto à noção de múltiplos comuns e operações combinatórias e tarefas de solução de problemas multiplicativos.

Inicialmente, cabe lembrar que os resultados analisados obtidos quanto à consistência interna dos itens da prova de Matemática do SARESP/96, assim como os resultados obtidos quanto à concordância entre os níveis de classificação das provas sobre desenvolvimento cognitivo, comprovaram serem tais instrumentos de pesquisa adequados para a avaliação pretendida.

A hipótese norteadora deste estudo foi a de que crianças na 3ª série do Ensino Fundamental, que apresentam o melhor desempenho escolar em Matemática, apresentam também melhores níveis de classificação quando submetidas à avaliação do desenvolvimento cognitivo em provas que envolvam operações multiplicativas, assim como apresentam melhor desempenho em solução de problemas de natureza combinatória quando comparados com alunos que apresentam desempenho insatisfatório em Matemática.

Esta hipótese decorreu, de uma maneira geral, da necessidade de se compreenderem aspectos ligados à construção progressiva da estrutura multiplicativa, particularmente sobre análise combinatória, em particular situações-problema do tipo "produto cartesiano", por parte de crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental. De maneira específica, também decorreu da busca das relações existentes entre o desempenho escolar e aspectos cognitivos com base nos diferentes desempenhos dos alunos quanto à estrutura multiplicativa.

Ao analisarmos as relações entre o desempenho escolar em Matemática, os níveis de abstração em múltiplos comuns, as operações combinatórias e tarefas com solução de problemas multiplicativos (produto cartesiano), os dados evidenciaram relações entre estas variáveis. A análise dessas relações mostraram-se relevantes e seria oportuno, a seguir, realizar algumas considerações importantes.

Primeiramente, ressaltamos, como se previa no início da pesquisa, que há diferenças significativas entre os sujeitos que apresentaram desempenho satisfatório em Matemática (alunos do Grupo A) e os alunos que apresentaram desempenho insatisfatório (Grupo B), dentre todos os alunos avaliados em razão do desempenho matemático, dos níveis de abstração e das operações combinatórias.

Os resultados mostraram diferenças no desempenho entre os sujeitos dos dois subgrupos, e os alunos que apresentaram melhor desempenho escolar em Matemática quando avaliados pela prova do SARESP, no início da pesquisa, foram os que apresentaram melhores níveis de classificação no desenvolvimento cognitivo, em provas piagetianas e em provas do tipo lápis e papel para solução de problemas multiplicativos.

Os dados permitiram-nos confirmar a hipótese central desse estudo, evidenciando que os alunos com maiores escores no desempenho matemático, de fato, obtiveram os melhores níveis de classificação na prova de múltiplos comuns e tendência de progressos em operações combinatórias.

Os resultados dos alunos na prova sobre operações combinatórias mostraram que os sujeitos, em sua grande maioria, encontram-se no estágio II, o qual se caracteriza pela busca de um sistema combinatório, mas está pautada predominantemente nas ações dos sujeitos ao realizarem a tarefa.

Os sujeitos com melhor desempenho (Grupo A) apresentaram diferenças significativas também quanto ao desempenho em provas de problemas, do tipo lápis e papel, quando comparados com os sujeitos que apresentaram desempenho insatisfatório (Grupo B) em Matemática. Do total, 50% dos sujeitos do Grupo A conseguiram solucionar corretamente os problemas 2, do tipo combinatória, a respeito do baile entre as crianças e o problema 3, de mesmo tipo, a respeito das portas de entrada e saída de uma sala de aula.

Estes resultados evidenciaram a existência de uma tendência de progresso de desempenho em tipos de problemas aritméticos que envolvem a estrutura combinatória (produto cartesiano) para os sujeitos do Grupo A. Dentre esses sujeitos, alunos com êxito tendem a apresentar melhor resultado na solução de problemas que envolvem raciocínio combinatório, os quais são propostos em situações-problema, do que os alunos que apresentam baixo desempenho em Matemática.

Os dados evidenciaram, no caso do problema de tipo combinatório, como o das peças de roupas, o baixo desempenho de todos os alunos quando se considerou o resultado global de acerto de todas as combinações possíveis. Para discutir essa questão, haveremos de retomar alguns dados analisados.

Nesse estudo ficou evidenciado que, na solução de problemas aritméticos de multiplicação de produto cartesiano, as tarefas que exigem das crianças um número maior de combinações possíveis levam tanto os sujeitos que obtiveram na avaliação de Matemática inicial da pesquisa, melhores escores, como aqueles que obtiveram piores escores a apresentarem baixo índice de acertos no que se refere ao total de pares ordenados do problema.

Observamos um tipo de interferência específica sobre os resultados na solução do problema de combinações, analisando o que pedia a combinação de camisas e bermudas. Nos problemas 2 (baile) e 3 (sala de aula) nos quais se previa um menor número de combinações, os alunos dos dois grupos (A e B) apresentaram maior concentração de acertos. Cabe ressaltar, porém, que o êxito na solução dos problemas 2 e 3 foi melhor evidenciado pelos sujeitos do Grupo A com desempenho satisfatório quando a quantidade dos problemas solicitava um total geral de combinações menores que dez. Quando, no entanto, o problema solicitava a realização de um total de combinações maior que dez, os sujeitos de ambos os grupos obtiveram baixo desempenho de solução quanto à quantificação exata. Embora os três problemas versassem sobre o mesmo conceito, o da análise combinatória, houve diferença quanto ao desempenho dos alunos caso se considere o número maior e menor de pares ordenados a serem realizados.

O número total de combinações possíveis em cada problema revelou-se um aspecto que influencia o processo de solução. Piaget e Szeminska (1975) descreveram a correspondência termo a termo e ressaltaram a importância deste tipo de correspondência como um fator necessário para a aquisição das noções numéricas e fundamentais na aquisição das operações aritméticas. Assinalam, no entanto, que, embora as crianças se utilizem da correspondência termo a termo para dar conta de situações que implicam equivalência entre elementos de dois conjuntos, esta correspondência não é suficiente para dar conta de todas as relações. O emprego da correspondência termo a termo, muitas vezes, refere-se à compreensão apenas sobre as aparências perceptivas, comprovando que este tipo de esquema ainda não é suficiente para engendrar, por exemplo, o que os autores denominaram de uma equivalência durável. A correspondência que conduz à equivalência durável está diretamente ligada à mesma operação que a correspondência termo a termo sem equivalência durável, mas é preciso que a esta última se prolongue numa coordenação de relações ainda mais complexas.

Piaget e Inhelder (1993) destacam, a este respeito, que a superação de "correspondências qualificadas" para "correspondências quaisquer" são elos que conduzem à compreensão do número. Conseqüentemente, estão implicadas na aquisição das operações aritméticas, sendo estas características fundamentais à construção do pensamento operatório-concreto.

Essa consideração dos autores parece explicar igualmente o resultado nesta pesquisa, cujo emprego da correspondência foi bastante evidenciado como esquema de ação no processo de solução dos problemas de natureza combinatória. A falta de esquemas relativos à multiplicação, além dos apresentados pelos sujeitos desta pesquisa evidenciam o processo de solução mais limitado em termos do desempenho dos alunos.

O baixo desempenho na solução de problemas de produto cartesiano deveu-se, talvez, à falta de coordenação entre o esquema de correspondência e as operações aritméticas de natureza combinatória e não por falta de compreensão da situação proposta. Este resultado também foi evidenciado pelo estudo de Nunes e Bryant (1991) quando os autores analisaram problemas multiplicativos de comparação.

O problema que implica combinar camisas e bermudas envolve uma dificuldade especial, pois exige que o sujeito considere o conjunto de camisas , o de bermudas e o das combinações de camisas e bermudas. Como lembram Nunes e Bryant (1997), analisando pesquisas em situações multiplicativas, a relação de um para muitos não é explicita no enunciado. Cabe ao sujeito descobrir que, para cada bermuda, há várias transformações possíveis para montagem do traje (combinado).

Os autores verificaram que, mesmo quando o sujeito dispõe do apoio do conjunto sob forma de material concreto (camisas e bermudas), como no caso da pesquisa destes autores, as crianças de 8 anos encontram dificuldade na solução. Assinalam, ainda, que, quando a criança consegue identificar a relação um para muitos, no início da solução, consegue, então, resolver o problema.

Ainda que crianças pequenas possam raciocinar sobre relações um para muitos, elas ainda apresentam dificuldades, aos 8 anos, mesmo com problemas mais simples. Aproximadamente aos 9 anos, apenas conseguem sucesso considerável quando se trata de problemas de produto cartesiano (Nunes e Bryant, 1997).

Cabe lembrar que considerar os pares 4 a 4, por exemplo, no problema 1, pode significar manter o apoio do perceptivo que permite ao sujeito a constatação intuitiva sem estabelecer a relação lógica propriamente. O sujeito pode até representar a quinta combinação, mas isto vai implicar considerar, ao mesmo tempo, as quatro combinações anteriores e a possibilidade de, também mentalmente, considerar as seguintes. A bermuda um, será ao mesmo tempo par da camisa um e da quarta. Apoiar apenas nas relações e no raciocínio mostrou-se ainda mais difícil.

No nível do pensamento formal, a combinatória é de importância fundamental, pois estende a capacidade de pensamento do sujeito, levando-o a considerar a realidade não mais com base em aspectos concretos, mas em razão de um número qualquer ou de todas as combinações possíveis de uma dada situação, reforçando a capacidade dedutiva da inteligência.

Lembra-nos Piaget e Inhelder (1993) que a dificuldade das crianças no nível do pensamento concreto em situações que envolvam raciocínio combinatório está ligada ao fato de elas não conseguirem libertar-se da forma em relação ao conteúdo, fato este que as impede ainda de construir quaisquer relações e quaisquer classes, mediante quaisquer quantidades e elementos. Esta espécie de desengate do pensamento sobre os objetos quanto a elos concretos que as crianças ainda estabelecem são estes rompidos quando elas são capazes de generalizar, como dizem os autores, as "operações de classificação" ou de "relações de ordem", resultando nas operações de classificação ou, também denominada como "classificações de todas as classificações".

Tais referências sustentam, do ponto de vista teórico, os resultados obtidos em relação à solução dos problemas de estrutura combinatória, uma vez que as crianças investigadas neste estudo encontram-se na faixa de idade que, se pressupõe, seja a das operações concretas e se valem de um método gradativo sem generalização para realizar as combinações, fazendo, em sua grande maioria, combinações incompletas sem descoberta do formalismo matemático.

Os resultados mostraram que as crianças utilizaram o esquema de correspondência. No entanto, quanto maior o número de pares ordenados a serem constituídos, maior foi a dificuldade de coordenar o esquema de correspondência termo a termo com o esquema mais totalizado que implica sistematização entre o primeiro elemento com cada um dos elementos do outro grupo, de forma que se preserve sempre a ordem entre a combinação de um par ordenado a outro.

Os sujeitos mostraram que compreendiam as relações vinculadas no enunciado e as transformações apontadas, iniciando estratégias de solução, sem empregá-las, no entanto, de tal forma que as conduzissem à resposta correta do problema.

Sabe-se que a mudança de um dado contexto pode provocar no aluno a elaboração de um novo esquema de ação para se adaptar à nova situação e buscar a solução do problema, ainda mais se uma situação for mais complexa que a outra. Quando se modifica a quantidade de pares ordenados a serem realizados, impõe-se um novo desafio às crianças. O raciocínio das crianças deve assimilar e adaptar-se a novos dados e, se estes são mais complexos que aqueles pelos quais ela obteve solução anterior, impõem-se novas dificuldades ao processo de raciocínio para a nova situação. Isto pode levar as crianças a retrocederem a níveis de elaboração mais elementares, como é o caso do baixo desempenho na solução do problema que apresentava um aumento na quantidade de combinações a serem realizadas.

Não queremos dizer que a cada novo problema a criança retroceda a níveis anteriores de raciocínio quanto ao emprego, por exemplo da correspondência, tampouco das noções combinatórias em jogo. Um número maior de combinações, porém, significa coordenar também maior número de relações, como, por exemplo o controle e a ordem dos pares ordenados. Além do desafio de solucionar problemas desta natureza, dada a ausência peculiar a estas crianças de um sistema combinatório, são elas desafiadas a solucionar problemas cujas quantidades de combinações tornam-se elementos dificultadores do processo. O aspecto das quantidades envolvidas nos problemas fazem parte do processo de solução e desafia constantemente o mecanismo funcional do desenvolvimento intelectual infantil.

Parece que esse desafio foi fortemente evidenciado pelas crianças que se aproximaram mais da elaboração correta da quantidade de pares ordenados, pertencentes à segunda categoria de tipos de estratégias. Mesmo com base na variação de critérios, verificou-se que elas tendem a descrever mais a tarefa que estão realizando, sem que, no entanto, se possa verificar a tomada de consciência dos conceitos envolvidos.

A relação entre o desempenho e o valor das quantidades de um problema também foi apontada pelo estudo de Correa e Bryant (2000). Os autores investigaram e verificaram que a quantidade dos valores utilizados provocou níveis de dificuldades diferenciados na solução das crianças para a realização dos cálculos do problema.

O aspecto ligado à quantidade pertinente em cada uma das tarefas foi um fator que se mostrou importante nos resultados da prova de múltiplos comuns, das operações combinatórias e dos problemas de produto cartesiano. Observou-se que o operar mentalmente, seja na prova de múltiplos comuns ou mesmo nas tarefas que envolveram análise combinatória com grandezas maiores implicavam também níveis mais elevados de abstração reflexionante. O aumento da quantidade numérica por mais complexo que possa parecer em determinadas tarefas, também é indicativo de um crescente domínio de relações lógico-matemáticas por parte dos sujeitos.

Cabe ressaltar que é com base na análise das estratégias de solução que encontramos um quadro explicativo mais delineado em relação a reais possibilidades das crianças ao tentarem solucionar problemas combinatórios. As estratégias utilizadas dão-nos maiores pistas, quando comparadas à análise quantitativa do desempenho quanto aos critérios utilizados pelas crianças, os quais possibilitaram uma aproximação maior quanto à elaboração de pares ordenados.

As correspondências termo a termo e um para muitos podem ser entendidas como um esquema de ação que auxilia na progressão das conduta dos sujeitos e, até que se chegue a um sistema combinatório, há que se caminhar e fazer progressos com relação à construção das operações multiplicativas.

Nunes e Bryant (1997) assinalam que as crianças mais novas produzem conjuntos equivalentes por meio de correspondência e apresentam dificuldades para realizar a contagem dos elementos do problema quando devem chegar a um valor. Os autores destacaram que a criança pode entender a relação um para muitos, mas têm dificuldades na contagem do conjunto de elementos que não é mais aditiva e, sim, multiplicativa. Na presente pesquisa, muitas crianças, especialmente as que apresentaram baixo desempenho também valiam-se da correspondência em detrimento da busca das transformações combinatória entre os elementos dos conjuntos do problema.

No caso das estratégias de solução da primeira categoria, os dados evidenciaram que as crianças fazem a identificação dos elementos pertinentes em cada um dos conjuntos, quantificando corretamente, por exemplo, 4 camisas e 3 bermudas. Elas fixam-se, porém, apenas nisto e combinam o que é possível ler como dado imediato, sem, no entanto, abrir possibilidades de ampliar a troca entre as peças de roupas. Isto está ligado às abstrações reflexivas: a leitura dos dados perceptuais é fonte de referência forte e critério de seleção para estratégias de solução dos alunos. Na primeira categoria de estratégias, soluções, predominantemente por abstração empírica, evidenciaram que as crianças fixavam-se na equivalência de 3 camisas com 3 bermudas, desconsiderando o fato de trocar as peças e com isso provocar combinações diferentes.

A grande maioria dos sujeitos da segunda categoria procuraram dar uma resposta imediata à leitura do problema, o que denominamos condutas de antecipação. Isto ocorreu mais freqüentemente com os sujeitos do Grupo A (alunos com melhor desempenho) em relação aos do Grupo B (alunos com pior desempenho). A antecipação foi observada tanto quando eles verbalizavam uma resposta para o problema logo após a pergunta central do enunciado, assim como quando eles escreviam um algoritmo. As respostas de antecipação, embora incorretas evidenciam níveis de abstração mais elaborados em relação aos que não realizam nenhuma espécie de estimativa para o problema. As respostas incorretas de antecipação, no entanto, parecem denotar abstrações pseudo-empíricas no sentido de alguns enriquecimentos dos sujeitos atribuídos aos problemas multiplicativos, mas com predomínio do emprego das operações aditivas.

Analisando-se a segunda categoria de estratégias, quando as crianças fazem o algoritmo da adição para resolver o problema, o resultado refere-se à somatória de elementos dos dois conjuntos e não da multiplicação entre os elementos. Um grande número de sujeitos mostraram que fizeram "3 + 3 = 6" para o problema do baile entre as crianças, mas o resultado "6" foi justificado como o valor total de crianças e não como sendo o total de pares possíveis de se realizar, o que resultaria em 9 pares ordenados.

Cabe ressaltar que a variação de critérios, evidenciada pela categoria 2 como solução para os problemas de produto cartesiano parece ser uma característica marcante nas crianças da 3ª série do Ensino Fundamental em relação à construção do princípio multiplicativo, especialmente no que diz respeito à construção das operações combinatórias.

A atividade dos sujeitos, neste caso, em tarefas de solução de problemas de análise combinatória reflete, em suas estratégias de solução, a interpretação das relações subjacentes à estrutura multiplicativa. Lembra-nos Anghileri (1989) que a variação de critérios parece indicar o modelo conceitual para a multiplicação que se desenvolve pela própria variedade de esquemas associados nas diferentes situações-problema.

Afirma-nos Hegarty et al. (1995) que, ainda que haja evidência de que ambos grupos de sujeitos tendem a usar estratégias de solução qualitativamente diferentes, seria incorreto discriminar, neste estudo, que há existência de hierarquias fixas de progressão e de emprego das mesmas estratégias de solução para todos os problemas. As estratégias, no entanto, identificadas neste estudo, evidenciam processos mais elaborados e menos elaborados de compreensão em face da solução de problemas de natureza combinatória.

Quando a criança consegue elaborar estratégias de solução, valendo-se da correspondência termo a termo e cálculo algorítmico dos dados numéricos do problema de análise combinatória, até diferentes tipos de representações gráficas, aqui apresentadas, podemos dizer que se puderam observar aspectos importantes da construção da estrutura multiplicativa. As estratégias analisadas nas três categorias evidenciaram um plano provisório de solução mediante problemas de análise combinatória. As crianças demonstraram realizar passos importantes e necessários na aquisição das noções ligadas às estruturas multiplicativas.

Escarabajal (1984) lembra que um esquema é, portanto, uma rede relacional que, dentro desse contexto, no caso, no da solução de problemas, descreve em um momento dado, um conhecimento lógico-matemático da criança. Solucionar um problema consiste em selecionar um dos esquemas disponíveis e aprimorá-los, em razão, por exemplo, dos dados do enunciado. A análise dos esquemas utilizados para representar os conhecimentos operados dentro dos mecanismos de compreensão na solução de problemas parecem constituir um quadro teórico interessante na direção do nível onde esses esquemas tiveram um papel funcional.

Afirma-nos Moro (1993), com base nos resultados obtidos quanto à análise de estratégias de solução de problemas de adição e subtração, que as categorias de estratégias descritas em sua pesquisa evidenciaram progressão entre os patamares encontrados. No caso do estudo da referida autora, foi encontrada uma progressiva diminuição de estratégias ligadas a aspectos figurativos, favorecendo estratégias ligadas às ações iterativas e às explicações dadas pelas crianças. Da mesma forma, as categorias de estratégias descritas neste estudo, evidenciaram aprimoramentos de solução dos sujeitos diante de problemas de natureza combinatória.

A solução dos problemas aritméticos de produto cartesiano aplicados nesta pesquisa parecem oferecer experiência com o objeto de modo a provocar nos sujeitos a utilização de esquemas de ação. No entanto, um estudo posterior com relação a situações de aprendizagem poderia caracterizar melhor os avanços ocorridos na reestruturação dos esquemas empregados pelos sujeitos.

Assinala-nos Vergnaud (1997) que as crianças conseguem elaborar estratégias de solução consistentes com as situações relatadas nos enunciados referentes aos verbos de ação, e isto se deve aos sistemas de representação que desempenham um papel estruturante nos processos de raciocínio. Recorrer a objetos observáveis é um aspecto importante para as crianças, pois é forma de regular a representação das quantidades e suas respectivas transformações como forma de solução quando, ainda, elas não são capazes de fazê-lo apenas utilizando a técnica algorítmica de solução.

Uma atribuição às estratégias é o fato de elas guardarem, em geral, características do pensamento operatório concreto, evidenciando noções da estrutura multiplicativa e noções intuitivas da construção do raciocínio combinatório. Tanto na realização da tarefa, como no da justificativa e representação gráfica, as soluções dos sujeitos evidenciam um patamar ligado à busca do sistema combinatório. Valendo-se da utilização de estratégias diferenciadas para chegar a uma resposta, as crianças justificaram, algumas vezes de maneira mais correta, outras vezes menos correta, os cálculos que realizavam para a solução do problema.

De acordo com Piaget e Inhelder (1975), as estratégias de solução analisadas neste estudo emergem: a) das "combinações empíricas (condutas de seleção ligadas ao acaso, tentativa e erro); b) das "combinações que buscam um sistema" (apresentando certo padrão de seleção dos itens); c) "combinações por descoberta do sistema".

Lembra-nos English (1991) que crianças mais novas não progridem além do comportamento de tentativa e erro para solucionar problemas combinatórios e um pequeno número de crianças apresentam algumas tentativas de seguir um padrão de seleção dos itens, mas raramente elas conseguem prolongar este padrão e chegar a completar a tarefa.

Os resultados sobre produto cartesiano permitem-nos afirmar que as crianças podem, sob condições apropriadas de aprendizagem escolar, realizar pares ordenados para um problema independentemente de adquirirem um método sistemático de combinatória.

Lembra-nos Anghileri (1989), no entanto, que há um predomínio evidente de as crianças usarem a adição em detrimento do procedimento e utilização da multiplicação e que este procedimento pode ser explicado pela fase transitória entre operações unitárias e binárias destacadas por Vergnaud (1983).

Compreender a multiplicação e a divisão representa uma transformação qualitativa importante no pensamento das crianças, rompendo com a idéia de que multiplicar é conseqüência de abreviadas adições sucessivas.

Um outro aspecto que mereceu destaque foram os resultados obtidos na prova de abstração. A análise dos níveis de abstração em prova de múltiplos comuns evidenciou que os sujeitos do grupo com baixo desempenho em Matemática centram-se em dados de sua própria ação e das propriedades do material para solucionar a tarefa proposta, evidenciando um predomínio de abstrações empíricas sobre esta noção.

A característica fundamental no estágio mais elementar (nível IA*)* conforme descrita por Piaget (1980) foi evidenciada nas conduta dos sujeitos desta pesquisa. As crianças não fazem sequer adições sobre adições, pois destacam apenas as ações isoladas de colocar duas fichas em uma coleção e três fichas na outra coleção.

Embora fossem demonstrados argumentos de conservação da quantidade, as crianças pareciam, ao mesmo tempo no decorrer da prova, valer-se da idéia de que havia mais fichas nas azuis. Isso reforçou a idéia do predomínio de abstrações pseudo-empíricas, enfatizando a ação de acrescentar fichas. Esta revelou-se como uma maneira de as crianças minimizarem o problema de se pensar sobre a questão central a ser abstraída nesta tarefa: a da compensação entre o número de viagens e fichas nas coleções.

Além da correspondência ótica, as crianças que apresentam um nível elementar de abstração modificam a regra da composição das coleções, ou seja, procuram fazer a composição sempre de um em um e não de dois em dois ou três em três fichas conforme solicitado. As crianças neste nível não conseguem coordenar todas as informações entre o número de fichas de cada coleção, o número de grupos e o da igualdade numérica entre as coleções ocorridas no decorrer da prova a qual eles deveriam lidar simultaneamente. Há uma clara evidência explicitada pelas crianças na dificuldade e oscilação em pensar sobre fichas e viagens simultaneamente. Elas chegam ao final da prova dizendo que não sabem explicar tal situação e atribuem sempre ao acaso.

No nível seguinte (IB) falamos, então, de uma abstração pseudo-empírica no sentido de que os sujeitos já buscam distinguir e controlar as adições que fazem e com isso pensar, ainda que intuitivamente, com base em suas próprias ações, aspecto este que se mostrou de grande dificuldade para as crianças do nível anterior. Os sujeitos deste nível deram indício, ainda que intuitivo, do princípio de compensação, mas explicavam apenas pelas adjunções sucessivas de fichas postas nas coleções. Com isso, reafirmavam que estavam fazendo as coleções sempre de dois em dois e três em três.

As expressões *"pegar em cada"* e *"cada um dos"* utilizadas por sujeitos deste nível mostraram fortes evidências de um indício de elaboração do princípio de compensação e forma transitória para o nível IIA, pois ao utilizar tais expressões para explicar a tarefa, as crianças tentavam demonstrar que já não estavam pensando somente em adições sucessivas dos grupos que compunham, e sim no número de elementos contidos em cada um dos grupos, o que denominamos adições de adições.

Um nível de abstração reflexionante mais elaborado está no fato de as crianças do nível IIA conseguirem estabelecer um princípio compensatório, mas com base nas ações sucessivas de ir adicionando às fichas de cada coleção e explicitação de que seria necessário pegar sempre mais fichas do grupo das amarelas de viagens. Essas crianças davam argumento do princípio de compensação dizendo que havia uma regra e que esta referia-se ao fato de que, ao se colocar de duas em duas as fichas amarelas, precisariam fazer mais viagens e, ao mesmo tempo, fariam menos viagens para compor a coleção das fichas azuis.

O avanço dos sujeitos no nível IIA mostrou-nos claramente que eles admitiam uma regra, a qual estava ligada à mudança dos "grupinhos", sem, no entanto, estabelecerem a relação de que era preciso para cada "$2 \times 3^{B\ (azuis)}$" o equivalente a "$3 \times 2^{A (amarelas)}$".

No que as crianças deste nível não conseguiram avançar e do que não tomaram consciência disse respeito à quantificação do número exato de viagens e fichas entre as duas coleções. Este indício de argumento compensatório, o de atribuir mais viagens para um grupo, parece-nos ser um primeiro passo para começar a pensar sobre a questão estrutural da noção de múltiplo comum pertinente, ou seja, o número de vezes em que a criança apanhou duas fichas das amarelas e três fichas das azuis.

Conforme descrito na análise dos resultados sobre a prova de abstração, não foram encontrados sujeitos no nível IIB. Neste nível, as crianças seriam capazes de anunciar o número de “n” viagens que são equivalentes ao número de “n” fichas entre uma coleção e outra.

Da mesma forma, não foram encontrados, nesta pesquisa, sujeitos no Estágio III. As condutas e justificativas das crianças não foram, em nenhum momento, evidenciadas por abstrações reflexivas. Em nenhum momento, as condutas deixaram de ser realizadas sem o suporte de suas ações, tampouco valendo-se de antecipações que levavam a enunciar e tomar consciência de que o estabelecimento de relação entre as fichas e as viagens estava ligado ao fato de se ter sempre o dobro de fichas em uma das coleções.

Lembra-nos Fridman e Bryant (1994) a capacidade que têm as crianças de ajustarem o princípio de correspondência quando têm que repartir quantidades desiguais, em que uma quantidade é múltipla da outra. Primeiramente, uma tendência marcante das crianças é a de equiparar as quantidades dos grupos. Posteriormente, outra dificuldade marcante é a impossibilidade de solucionar a tarefa por meio da equiparação de grandes quantidades.

Os dados obtidos quanto ao nível de abstração das crianças do Grupo B apóiam a sustentação de Piaget (1980) sobre a dificuldade das crianças quanto à construção de múltiplos comuns. Essas mesmas crianças, no entanto, não são completamente inconscientes das relações multiplicativas presentes na noção de múltiplos comuns.

Algumas considerações a respeito das relações entre as análises dos fatores de desenvolvimento cognitivo, solução de problemas e desempenho matemático são apresentadas na seqüência.

Os fatores ligados aos resultados dos alunos nas provas de múltiplos comuns e das operações combinatórias investigadas nesta pesquisa estão correlacionados com os itens contidos na prova do SARESP quando analisada na sua totalidade. Na sua grande maioria, os itens contidos na prova do SARESP são questões que solicitavam dos alunos conhecimentos a respeito dos conteúdos referentes a números e as quatro operações aritméticas. Ao mesmo tempo, estes itens suscitam diferentes níveis de habilidades dos alunos a fim de que estes consigam solucionar adequadamente as questões.

Os dados permitem-nos afirmar que a relação entre desempenho em provas de Matemática, de múltiplos comuns, de operações combinatórias e solução de problemas de produto cartesiano evidenciam que conhecimentos de natureza conceitual, de natureza procedimental e conhecimentos declarativos referentes à estrutura multiplicativa estão relacionados entre si e presentes nestes instrumentos, influenciando os resultados dos sujeitos.

De todos os fatores analisados, conforme descrito no capítulo 5, constatou-se que a prova do desenvolvimento cognitivo das operações combinatórias de quatro elementos tomados dois a dois foi o único fator que não apresentou correlação com nenhum dos itens específicos sobre a operação da multiplicação da prova do SARESP. Da mesma forma, o problema 1 (camisas e bermudas) também foi o único fator que não apresentou correlação significativa quando analisado com todos os itens da prova do SARESP.

Estes dados indicam particularmente que, componentes específicos do conteúdo sobre análise combinatória presentes nestes fatores não mantém correspondência direta com os conteúdos avaliados em termos dos itens que compõem a prova do SARESP. No entanto, vale ressaltar que os demais problemas de produto cartesiano apresentaram correlação significativa com o SARESP e são, em termos de quadro conceitual, semelhantes ao problema 1 e as operações combinatórias de quatro elementos tomados dois a dois. Este dado nos permite assinalar, no caso desta pesquisa que, obter sucesso na prova do SARESP não depende do aluno apresentar níveis mais ou menos elevados nas provas de análise combinatória.

Outro dado que cabe destacar é que foi encontrada na prova de abstração com 36 fichas uma correlação altamente significativa com os itens do SARESP. Nesta etapa da prova, os sujeitos que apresentaram maior indício de desenvolvimento apresentaram também melhor desempenho em Matemática. Talvez aqui tenhamos encontrado um estreitamento maior com relação aos processos cognitivos dos sujeitos frente aos níveis de abstração em múltiplos comuns e os itens de conteúdo matemático avaliados na prova do SARESP.

É evidente que esse estudo não investigou profundamente as correlações entre os itens das provas, mas evidenciou resultados interessantes sobre a existência das relações entre desempenho escolar e abstração reflexionante implícitos no processo de construção do pensamento multiplicativo de crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental, citados anteriormente.

Estes resultados sugerem a realização de outros estudos que possam aprofundar os aspectos específicos de cada item de avaliação do desenvolvimento cognitivo com cada item da prova do desempenho em Matemática.

É importante relembrarmos que os dados obtidos sobre os níveis de classificação do processo de abstração evidenciou casos particulares de assimilação generalizadora dos alunos que obtiveram a classificação de níveis mais elevados. Nesta prova, ficou evidenciada a tentativa das crianças quanto ao reconhecimento do velho em um novo conteúdo. Houve um enriquecimento dos observáveis já existentes por processos de abstração das crianças entre as três etapas da provas utilizando diferentes quantidades, sem que possamos atribuí-la a uma modificação do sistema.

A abstração reflexiva está relacionada à generalização construtiva. De maneira geral, o sentido do processo de generalização em Psicologia é a de uma extensão de um conceito já existente. A generalização é uma função geral indissociável da abstração, pois não se abstrai mais que para generalizar e, para se generalizar, é preciso valer-se da abstração.

Lembramos, ainda, que as crianças que apresentaram melhor desempenho matemático chegaram a solucionar corretamente alguns dos problemas de produto cartesiano, também com apoio da representação gráfica (outra vez, desenhos, traços, flechas), registrando, na etapa final das combinações o algoritmo de multiplicação correspondente à situação. Esses dados levam-nos considerar que a possibilidade de solucionar um problema matemático de estrutura mais complexa, como a que envolve a operação combinatória, por meio da utilização do algoritmo da multiplicação, implica nível de abstrações reflexionantes, o que as crianças, mesmo as que apresentam os melhores desempenhos, ainda não fazem senão com base nas ações de combinar. A transposição daquilo que as crianças fazem na ação e na representação dos grafismos ou esboços de pares ordenados para a escrita algorítmica deve ser uma preocupação central do trabalho de intervenção de professores que pretendem contemplar processos cognitivos em detrimento de uma atuação enfatizada na obtenção de uma resposta.

Os problemas de multiplicação e divisão aplicados no trabalho de Brito (2000) evidenciaram soluções corretas predominantemente pelos sujeitos das séries finais do Ensino

Fundamental, valendo-se de representação gráfica diferenciadas com desenho de objetos, traços e bolinhas em relação à aplicação de algoritmos.

Embora o problema 3 (sala de aula) tenha obtido maior número de acertos em relação ao problema 1 (camisas e bermudas), os dados evidenciaram também um pequeno número de sujeitos que não realizaram qualquer tipo de solução. Cabe lembrar que se tratava de um problema não rotineiro, o que pode ter influenciado o desempenho de alguns sujeitos que apresentaram maior dificuldade para encontrar a solução. Os estudos de Lindquist e outros (apud Brito, 2000) constataram que os alunos apresentavam melhor desempenho quando os problemas eram apresentados de forma semelhante à dos livros didáticos ou aos exercícios passados pelos professores, sobretudo quando os algoritmos apareciam registrados de forma usual na técnica operatória.

Lembra-nos Almeida e Almeida (1998) que a familiaridade da situação descrita é um fator facilitador, cuja representação faz parte do repertório da estrutura das crianças, resultando, assim, na solução adequada para o problema, em contraposição a problemas não familiares.

Outro fato a se mencionar, que mereceu destaque no momento de finalização deste estudo, é a importância da área da Matemática atribuída pelas crianças ao processo ensino-aprendizagem escolar.

No nosso estudo, não tratamos das atitudes dos alunos em relação à Matemática, mas trabalhamos com algumas opiniões por eles manifestadas diante dessa área de conhecimento. Os resultados sobre as preferências dos alunos pela área de Matemática permitem-nos afirmar que, embora esta área seja uma das disciplinas tida como uma das mais complexas, pois ela é, ao mesmo tempo, uma disciplina que seduz os alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, entrevistados, na sua relação com a aprendizagem escolar. Parece-nos que a área em si não provoca, a primeira vista, no caso de crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental investigadas neste estudo, sensação de aversão. Ao contrário disto, mostrou-se como uma área importante e necessária na visão das crianças. Talvez, o desconforto e o constante baixo desempenho em Matemática passe a ocorrer mais tardiamente em razão do processo de aprendizagem pelo qual os alunos são submetidos no período de sua escolarização.

Implicações psicopedagógicas

As considerações com as quais pretendemos finalizar a interpretação dos dados deste estudo referem-se a algumas implicações psicopedagógicas para o ensino de Matemática.

Diferentes orientações didáticas têm, ao longo dos anos, indicado diversas formas de interpretação das influências nas escolas brasileiras, de teorias do desenvolvimento e aprendizagem, como marcos psicológicos, no sentido de busca de soluções para o ensino.

É interessante para o educador entender como a criança chega a assimilar, ou, conforme a perspetiva piagetiana, construir propriedades essenciais do sistema numérico.

O trabalho de Piaget sobre a inteligência do ser humano tem exercido uma influência marcante nas propostas e parâmetros curriculares nacionais (PCNs), ainda que, possivelmente em menor grau nas metodologias adotadas nas escolas brasileiras, em especial no que diz respeito ao ensino da Matemática. Também tem influenciado pesquisas sobre a construção do conceito de número e das operações aritméticas.

A revisão da literatura mostra estudos que têm destacado o caráter mecânico e destituído de significado com relação ao trabalho escolar da Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. No nosso estudo, acreditamos que a contribuição destas pesquisas revele a importância de se compreenderem as relações entre desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e a solicitação do meio, como, por exemplo, o trabalho do professor.

A análise das estratégias de solução de problemas aritméticos de multiplicação mostrou que a construção do raciocínio multiplicativo não é uma tarefa simples. Neste estudo verificou-se que alguns sujeitos podiam compreender relações multiplicativas mesmo que não chegassem à solução quantitativa correta. Como afirmam Nunes e Bryant (1997), a criança que passa da adição-subtração para a multiplicação deve dar conta de um novo conjunto de situações, de relações lógicas novas e de sentidos novos do número.

Situações nas quais os professores elaboram as etapas de solução, tal como a apresentação do algoritmo para um problema matemático indica um espaço muito restrito aos alunos para a busca diferenciada e de natureza mais reflexiva diante da solução de problemas.

Lembra-nos Domingues de Castro (1996) que o pensamento reflexivo implica atividades, as quais a escola não deveria ignorar. O incentivo à criança em realizar certos percursos mentais, como o da ação à sua representação, o de seqüências de eventos à sua reconstituição, por exemplo, são tarefas que os professores não podem esquecer. A prática docente deve implicar um compromisso de criar e organizar situações que solicitem a reflexão e o processo de abstração dos alunos.

O trabalho com material manipulativo, permitindo-se à criança explorar as relações, incentivando a analisar o próprio raciocínio e ação, pode contribuir para progressos na compreensão da multiplicação.

Enfatiza-nos Vergnaud (1991) que, comumente, o trabalho das crianças na solução de problemas implica abstrair a operação aritmética que represente a transformação ocorrida entre dados apresentados, com base no estado inicial e estado final. A importância de um tratamento didático do professor diante da compreensão do enunciado do problema e da elaboração de esboços dos alunos por meio de distintas formas de representações gráficas, como a utilização de esquemas, de desenhos e de números até que se possa matematizá-las no sentido da operação aritmética mais formalizada, amplia-se significativamente na realização da transformação dos dados do problema e reflete o processo de solução compreendido pelos alunos.

Além disso, o encorajamento da comunicação entre colegas, na sala de aula, por parte dos professores não significa ignorar o valor da reflexão pessoal e sim reconhecer que a troca e a comunicação entre os alunos exigem esforços de tomada de consciência e de clareza de pensamento. A ocorrência desses aspectos é necessária à aprendizagem e se estabelecem com base na reciprocidade e na cooperação intelectual.

Há que estabelecer-se um processo harmônico em relação à Matemática, ao aluno e ao saber matemático a ser construído. Por um lado, a Matemática pode ser vista como uma disciplina em que as crianças apresentam com maior ênfase, uma inteligência prática, ou ainda, trata-se de uma área de caráter utilitário no sentido de vida econômica das pessoas, assim como as transições comerciais que realizam diariamente. Por outro lado, porém, é papel da escola e do professor potencializar e auxiliar as crianças para a aquisição de uma Matemática expressa como uma disciplina que se caracteriza pela possibilidade de estruturar o raciocínio. Dessa forma, a Matemática pode ser entendida como uma área do conhecimento que auxilia significativamente a realização de conexões entre outras áreas do saber e o próprio conteúdo do cotidiano. Assim essa ciência, favorece o estabelecimento de relações, construindo formas dedutivas de raciocínio, como é o caso de estabelecer relações entre o todo e as partes, além de formas indutivas de raciocínio, tal como ir das partes para o todo.

Rotineiramente, na escola, os alunos são solicitados a solucionar problemas que envolvem situações quantitativas ligadas à temática da vida cotidiana ou situações hipotéticas. Temas como o consumo, o trabalho das pessoas, ou mesmo situações rotineiras que desafiam o raciocínio das crianças são formas pelas quais elas podem valer-se para aprimoramento ou avanços de relações quantitativas a serem construídas.

A prática pedagógica dos professores pode contemplar problemas matemáticos, lógicos ou de linguagem, assim como, por exemplo, problemas de relação interpessoal, ocorridos no cotidiano das crianças. Acredita-se que a linguagem oral e escrita, a expressão artística entre outros tipos de linguagem, como os diferentes tipos de representação gráfica, são recursos interessantes na aprendizagem de solução de problemas matemáticos.

A compreensão dos processos de construção de conhecimentos matemáticos presentes no currículo escolar deve ser considerada elemento indissociável da prática de ensino dos professores. O ensino da Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental objetiva, alcançar, da parte dos alunos, o domínio de conhecimentos como a conceitualização do número, as operações aritméticas e a geometria básica. Estes tópicos devem estar ao alcance de todos, com base nas análises consistentes, por parte dos professores, de aspectos sócio-político-econômicos contemplados no currículo, valendo-se de um processo ensino-aprendizagem efetivo em sala de aula.

Algumas de nossas considerações quanto a orientações metodológicas estão relacionadas às idéias postuladas por Vergnaud (1981) quando o autor assinala que a aquisição de conhecimentos matemáticos constituem um objeto de estudo bastante complexo e que não pode ser compreendida apenas pelo seu caráter metodológico (ou em uma abordagem metodológica). Ressalta o autor, no entanto, algumas idéias como a necessidade de recorrer à diversidade de métodos e ao desenvolvimento da experimentação na sala de aula como orientações metodológicas fundamentais à prática dos professores. Lembra as entrevistas clínicas individuais do tipo crítico, desenvolvidas por Piaget, como um procedimento inetressante para que os professores possam analisar as dificuldades conceituais e de procedimentos nas quais os alunos se valem diante de uma dada situação.

Do ponto de vista metodológico, os professores podem estabelecer uma dinâmica de atividades em sala de aula, solicitando rotineiramente das crianças um acompanhamento detalhado do que estão realizando. Alguns procedimentos metodológicos podem ser esquematizados da seguinte forma:

- *Troca de idéias iniciais* - Este procedimento pode ocorrer como forma de abordagem inicial da problemática que se pretende abordar com os alunos. A troca de idéias pode ser realizada de forma verbal, escrita ou por meio de dramatização sobre uma determinada situação-problema surgida, ou criada em sala de aula.
- *Utilização de material concreto de apoio* – Neste tipo de procedimento metodológico, o professor pode valer-se da ação das crianças sobre objetos diferenciados ou mesmo de representação gráfica dos objetos, ou ainda de esboços escritos ou esquemas utilizados que revelam o conhecimento que os alunos têm de um determinado problema. Este procedimento deve favorecer, ainda, o estabelecimento de novas relações das crianças com o problema em questão.
- *Utilização de grafismos na lousa* – Valer-se da escrita matemática ou de quadros esquemáticos das crianças em face da solução de um problema deve ser ferramenta de trabalho dos professores. Utilizar formas de representação gráfica diferenciadas dos alunos é uma forma de conceitualizar e de concretizar as explicações verbais ou mesmo as relações e os cálculos mentais realizados sobre o material concreto de apoio sobre o problema analisado.
- *Debate no coletivo (assembléias)* – O professor deverá promover situações em que respeitando o momento e o conteúdo da participação de cada membro do grupo, propicie que surjam novas idéias sobre os dados até então analisados sobre um problema. Este momento revela-se fundamental àqueles que dão importância ao processo de solução, sendo, então, explicitadas estratégias e contra-argumentações permanentes sobre aspectos importantes trazidos pelos alunos. É uma solicitação constante no decorrer da aula e indispensável para explicitar a contraposição de idéias e elaboração de novas hipóteses.

❖ *Trabalho individual* – Ainda que a tônica do trabalho, em sala de aula, possa ser enfatizada por processos didáticos coletivos, faz-se necessário e fundamental realizar tarefas de síntese pessoal dos alunos. As sínteses individuais, no entanto, podem ocorrer alternadamente em relação aos momentos coletivos e os professores não devem perder de vista a importância de explicitá-las e integrá-las ao grupo, pois o trabalho do professor em tentar aproximar respostas elementares a repostas mais sofisticadas pode surgir da oportunidade oferecida por eles mesmos ao aproveitar o trabalho individual de cada um.

❖ *Retorno à comparação coletiva* – Há possibilidade, no decorrer do trabalho individual, de o aluno voltar a trocar idéias com um ou mais colegas, ou ainda pedir permissão para "usar" uma mesma idéia já anunciada e discutida para a solução de um problema. Essa estratégia permitida e combinada entre os alunos não significa "cópia" da atividade entre as crianças e sim o "empréstimo da idéia do outro" que implicaria reconstrução da idéia do outro pela criança como ponto de partida para realizar a solução do problema proposto.

A possibilidade de uma intervenção psicopedagógica em sala de aula, segundo as orientações didáticas aqui descritas, auxiliariam o exercício constante de tarefas reguladas entre a ação individual e a coletiva. A autonomia e compromisso da criança com o seu processo de aprendizagem, em especial, com um melhor aproveitamento entre "o pensar", "o fazer" e "o compartilhar" no processo de construção de conhecimento passa a ter outro significado, diferentemente das práticas mais tradicionais de ensino que vêm ocorrendo no espaço da sala de aula.

Esta perspectiva também nos leva a considerar que os erros cometidos pelas crianças são manifestações de elos de um processo de construção intelectual que deve ser objeto de análise do professor. As manifestações dos alunos em conjunto com um olhar focado para os processos mentais ocorridos informam a própria natureza do processo e do percurso em que se encontra o aluno.

Dar tratamento didático-pedagógico aos erros dos alunos pode levá-los à superação dos mesmos, levando-os a outros níveis de elaboração e compreensão do problema. Ao mesmo tempo, a superação dos erros diante de um problema pode dar lugar a novas condutas equivocadas. Este processo pode constituir-se em um movimento interessante para o professor no que diz respeito a uma maior e melhor aproximação da construção final que se espera quanto a formalização ou convenção sobre um determinado conteúdo matemático.

O professor poderá investir em problemas aritméticos, especialmente os de estrutura multiplicativa que envolvem noções combinatórias, de proporção e probabilidade, mediante as quais as crianças pequenas sintam necessidade de elaborar algum tipo de registro, valendo-se da sua própria notação como uma forma significativa para a compreensão de problemas desta natureza.

Quando o professor, em sala de aula, propõe problemas de estrutura diferenciadas das usuais tratadas na escola, em especial nas séries iniciais do Ensino Fundamental, como os de análise combinatória, de probabilidade e estimativas, poderá ele promover avanços no que se refere ao processo de abstração reflexionante de construção das operações aritméticas, assim como ao estabelecimento de relações mais ampliadas em tarefas escolares.

Poderá possibilitar, ainda, trocas entre os alunos e alunas em nível verbal e manipulativo, acompanhado de argumentações, contra-argumentações e criação de esboços, rascunhos ou esquemas de solução inventados e cada vez mais aprimorados pelas próprias crianças.

A solução de problemas, como lembram Pozo et al. (1994) deve ser entendida como um "continuum educacional". Exige tratamento dinâmico, tanto por parte dos professores que os propõem como dos alunos que os executam. É preciso compreender que a solução de problemas não deve ser confundida como uma atividade de simples exercitação repetitiva que envolve relações quantitativas.

Observamos, então, que a escolha do trabalho didático-pedagógico do professor em relação à solução de problemas matemáticos de enunciado deve valorizar a organização de atividades que favoreçam a abstração reflexionante. O professor deve valorizar a atividade intelectual deste tipo de tarefa e, com base nisto, constituir-se o verdadeiro eixo condutor da prática educativa.

Tomando a perspectiva de Vergnaud, é preciso que a tarefa de solução de problemas matemáticos venha acompanhada da elaboração de situações que provoquem mobilização de conhecimentos pelo aluno, levando-o à elaboração de esquemas de ação, propiciando novos saberes.

Os conceitos matemáticos, na verdade, terão sentido, do ponto de vista do processo ensino-aprendizagem, se forem abordados e explorados em nível de tarefas que envolvam solução de problemas.

A escola, em especial, as aprendizagens escolares desempenham papel essencial no desenvolvimento do conhecimento matemático. Existe uma variedade de situações que podem ser dadas aos alunos de forma que proporcionem aprendizagem de novos e sofisticados procedimentos em relação à compreensão de conteúdos matemáticos que, por via de regra, não são adquiridos formalmente fora da escola.

Pesquisas adicionais devem ser empreendidas a fim de investigar como crianças das séries iniciais podem ser incentivadas a progredir além das estratégias de correspondência, de contagem e aditivas no processo de solução de problemas multiplicativos. Além disso, promover pesquisas é necessário para a compreensão dos componentes do pensamento multiplicativo, do raciocínio proposicional de um sistema combinatório, conforme investigado por Piaget.

Acredita-se que as pesquisas desenvolvidas são pontos de partida para os professores compreenderem o quadro teórico dos processos de construção de conhecimentos dos alunos e devem ser acessíveis e devidamente oportunizadas por meio de projetos específicos de formação dos professores. Transformar a sala de aula em um espaço de investigação, assim como de produção de conhecimentos dos alunos implica sempre alguma ousadia porque pressupõe desafios constantes na prática dos professores, aprimorando seus próprios processos intelectuais regulados com ações pedagógicas inseridas em projetos coletivos de atuação.

REFERÊNCIAS

Acioly, N.M.; Schliemann, A.D. (1987). Escolarização e conhecimento de matemática desenvolvido no contexto do jogo do bicho. *Cadernos de Pesquisa*, nº 61:p.42-57.

Almeida, L. A.; Almeida, A.M. B. (1998). Dificuldades na Matemática: Análise de estratégias inerentes a erro(s) na adição e subtração no 1º Ciclo do Ensino Básico. *Actas do IV Congresso Galaico-Português de Psicopedagogia*. Braga: Universidade de Minho, vol. 1, p.488-504.

Alves, E.V.(1999). *Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio.* Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp,(Dissertação de Mestrado, Campinas: Unicamp).

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, p.368-385.

Baroody, A.J. (1994).*El pensamiento matemático de los niños- um marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial e educación especial.* Madrid: Visor.

Becker, F. (1993a). Ensino e Construção do Conhecimento: o processo de abstração reflexionante. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, 18(1), jan/jun, p.43-52.

Becker, F. (1993b). *A epistemologia do professor - o cotidiano da escola.* Rio de Janeiro: Editora Vozes.

Bee, H.; Mitchel, S. K. (1986). *A pessoa em Desenvolvimento.* Trad. Jamir Martins. São Paulo: Editora Habra Ltda.

Bell, A. Greer, B., et al. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 20, n 5: p. 434-449.

Berjemero, V.; Rodríguez, P. (1987). Estructura semàntica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales. *Infancia y Aprendizaje*, vol. 39-40, p.71-81.

Brenelli, R.P. (1993). *Intervenção Pedagógica, via jogos Quiles e Cilada para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldade de aprendizagem.* Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 385 p. (Tese, Doutorado em Psicologia Educacional).

Brenelli, R.P. (1996). Uma proposta psicopedagógica com jogo de regras. In SISTO, F.F. (Org). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar.* Petrópolis, RJ: Vozes.

Brino, R. de F.; Nale, N. (2000). Investigação do raciocínio lógico-matemático utilizado por crianças de 4ª série na resolução de problemas matemáticos. In *Sociedade Brasileira de Psicologia. Resumos de Comunicações Científicas.* XXX Reunião Anual de Psicologia. Brasília, DF: SBP, out, 318 p.

Brito, M.R.F.de. (1984).*Uma análise fenomenológica da avaliação.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica- (Tese de doutorado em Psicologia da Educação).

Brito, M.R.F.de.; et al (1998). Um estudo das competências matemáticas adquiridas por estudantes nas séries iniciais do ensino fundamental. In *Resumos do V EPEM –Quinto Encontro Paulista de Educação Matemática*, São José do Rio Preto: S.P, p. 42-44.

Brito, M.R.F.de.; Taxa, F.O.S. (1999). Na exploratory study about problem solving in two groups of elementary school students.. In *Abstracts – IX th European Conference on Developmental Psychology* – Human Development at the turn of the century. Island of Spetses, Greece, September, p. 51.

Brito, M.R.F.de. (2000). *A compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental.* Paper apresentado em congresso (Artigo para publicação).

Brito, M.R.F.de; Munhoz, A.M.H.; Primi, P.; et al. (2000). Exames Nacionais: Uma análise do ENEM aplicado à Matemática. In *AVALIAÇÃO- Revista da Rede de Avaliação Institucional da Educação Superior*, v 5, nº 4 (18), dez, p.45-53.

Brun, J. (1979). Pedagogia de las matematicas y psicologia: análisis de algunas relaciones. In *Infancia y Aprendizaje*, Abril, p. 44-56.

Brun, J.O.; Lemoyne, G.O; Conne, F.O; P, J. (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des èlèves à des algoritmes de calcul écrit. In *Cahiers de la recherche en éducation.* v 1, nº 1, p.117-132.

Bryant, P.; Kornilaki, E. (1999). Children´s development of multiplicative thinking. In *Abstracts – IX th European Conference Developmental Psychology* – Human Development at the turn of the century. Island of Spetses, Greece, September, p.389.

Busquets, M.D. (1995). Resolução e Formulação de Problemas. Tr. de. Lia L. Zaia. In *Anais: XII Encontro Nacional dos Professores do PROEPRE- Construtivismo e Educação.* Campinas: Faculdade de Educação/UNICAMP, p.75-77.

Busquets, M.D.(1997). Educación Integral y desarrollo curricular. *Cuadernos de Pedagogía*, nº 271, jul, p.52-55.

Carey, D. (1991). Number Sentences:Linking Addition and Subtraction Word Problems and Symbols. *Journal for-Research in Mathematics Education*, v.22, nº 4, jul: p. 266-280.

Carey, D. A ; Campbell, P. F. (1992). Research into Practice. *Arithmetic Teacher*, v. 40, nº 3, nov, p. 184-186.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the inicial learning of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual procedural knowledge:* The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P.; Moser, J.M. (1983). The aquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Developmental Psychology Series. London: Academic Press.

Carpenter, T. P.; et al. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *Journal for-Research in Mathematics Education*, v.24, nº 5, nov: p. 428-441.

Carpenter, T.; et al. (1996). Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Primary Mathematics Instruction. *Elementary School Journal*, v 97, nº 1, sep, pp. 3-20.

Carretero, A.. L. (1994). *Evolución del Concepto de Fracción y Modelos Representacionales.* Barcelona: Universitat de Barcelona, (Tese, Doutorado em Psicologia Básica).

Carretero, A. L. (1997). Ciências Lógicomatemáticas. In *Enciclopedia Practica de Pedagogía.* Barcelona: Edit. Planeta, v. 1, p.93-110.

Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas/CENP. (1988). *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Primeiro Grau.* 3ª edição, São Paulo: Secretaria Estadual de Educação.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica – del saber sabio al saber enseñado.* Trad. Claudia Gilman. Argentina: Aique editora.

Correa, J.; Bryant, P. (2000). A resolução oral de tarefas de divisão pela criança. In *Sociedade Brasileira de Psicologia. Resumos de Comunicações Científicas.* XXX Reunião Anual de Psicologia. Brasília,DF: SBP, out, 318 p.

Costa, S. F. (1998). *Introdução Ilustrada à Estatística.* 3ª edição. São Paulo: Editora Harbra.

Da Rocha Falcão, J.T. (1996). Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. In DIAS, Mª. da Graça; Spinillo, A. *Tópicos em Psicologia Cognitiva*. Recife: Editora Universitária da UFPE.

De Corte, E., Verschaffel, L.(1987).The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtration word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18, p.563-581.

De Miguel Vallejo; Taxa, F. de O.S. (1998). Intervenção psicopedagógica em resolução de problemas aritméticos: uma experiência na perspectiva de temas transversais em educação. In *Anais do XV Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*. Águas de Lindóia:S.P, Setembro.

Dias Sobrinho, J.(1997). Avaliação Instituicional: integração e ação integradora. In *AVALIAÇÃO- Revista da Rede de Avaliação Institucional da Educação Superior*, v 2, nº 2, jul: p.19-29.

Dolle, J. M.; Bellano, D. (1998). *Essas crianças que não aprendem: diagnósticos e terapias cognitivas*. Trad. Cláudio João Paulo Saltini. 3ª edição. Petrópolis- RJ: Vozes.

Domingues de Castro, A. (1996). Educação e Epistemologia genética. In In SISTO, F.F. (Org). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar*. Petrópolis, RJ: Vozes, p. 17-33.

English, L. D. (1991). Young children´s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics,* 22: 451-474.

Escarabajal, M. C. (1984). Compréhension et résolution de problèmes additifs. *Psychologie Française*, nº 29 –3, nov, p. 247-252.

Esposito, Y.L.; Davis, C. (1999). Avaliação do rendimento escolar: o modelo adotado pelo Estado de São Paulo. In Bicudo, M.A.V.; Da Silva Junior, C. A. (Orgs). *Formação do educador e Avaliação Educacional,* v.1. Conferências e Mesas-Redondas.São Paulo: Editora UNESP, p. 11-135.

Fisher, R. A.; Yates, F. (1971). *Tabelas Estatísticas: para pesquisa em biologia, medicina e agricultura*. Trad. Slavador Licco Haim. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono.

Fini, L.D. T; Taxa, F. de O.S. (1998). Problemas Verbais Aritméticos: Inventando e Resolvendo. In *V SIEG – Simpósio Internacional de Epistemologia Genética.*. Águas de Lindóia:S.P, Setembro.

Fini, L.D. T; Taxa, F. de O.S. (2000). Formulación y Resolución de los Probelmas Aritméticos. In *V Reunión de Didactica Matematica del Cono Sur- Universidad Santiago de Chile.*, Santiago do Chile: Chile, Janeiro.

Fini, L.D. T; Taxa, F. de O.S. (2000). Desempenho matemático em tarefas de cálculo com algoritmo e solução de problemas aritméticos de alunos das séries iniciais do ensino fundamental. In *Anais do XVII Encontro Nacional de Professores do PROEPRE- Construtivismo e prática pedagógica*. Águas de Lindóia: S.P, Novembro/Dezembro, p.246-247.

Fischibein, E.; Deri,M; et al. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Resarch in Mathematics Education,* v. 16, nº 1: 3-17.

Flavell, H.J. (1988). *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget.* Trad Maria Helena S.Patto. 3ªedição. São Paulo: Livraria Pioneira Editora.

Frydman, O.; Bryant, P. (1994). Children´s understanding of multiplicative relationships in the construction of quantitative equivalence. *Journal of Experimental child psychology*, 58, p.489-509.

Gagné, R.M. (1974). Aprendizagem de princípios; Resolução de Problemas. In GAGNÉ, R.M. *Como se realiza a aprendizagem*. Trad.Therezinha M. Ramos Tovar. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Galego, C. (1998). Por los caminos de la inteligencia. *Cuadernos de Pedagogía*, nº 271, jul, p.38-49.

Galego, C. (1998). Lógica, sensibilidad y matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, nº 271, jul, p.56-60.

Gallagher, J. M. (1978). Reflexive Abstraction and Education – The meaning of activity in Piaget's Theory. In J.M. Gallagher; J.A. Easley (Eds). *Knowledge and development,* v.Piaget and education. New York: Plenum.

Giovanni, J. R.; Bonjorno, J. R. (s/d). *Matemática – 2º grau, volume 2*. São Paulo: FTD editora.

Gonçalez, M. H. (2000). *Relação entre a Família, Desempenho, Confiança e as Atitudes em relação à Matemática*. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 385 p. (Tese, Doutorado em Psicologia Educacional).

Gonzalez Pienda; et al. (1998). Estrategias de los alumnos com y sin exito en la resolución de problemas. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación*, v 2, nº 2: p.55-63.

Gillieron, C. (1980). El psicopedagogo como observador: por qué y como. *Infancia y aprendizaje*. Madrid, n° 9: p.7-21.

Graeber, A. O. (1993). Understanding Fraction Multiplication. *Arithmetic Teacher*, v.40, nº 7, mar, p.408-411.

Granell, C.G. (1983). Procesos Cognoscitivos en el aprendizaje de la multiplicación. In Moreno, M. *La pedagogía operatoria, un enfoque constructivista de la educación*. Barcelona: Laia.

Greer, B. (1992). Multiplication and Division as models of situations. In Grouws, D. (Ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning – A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: Macmillian Library Reference USA, p.276-295.

Gréco, P.; Morf, A.(1962) *Structures numériques elémentaires.* Études d´Épistémologie Génétique, v. XIII. Paris: PUF.

Guershon, H.; Merlyn, B. (1995). Teachers' Solutions for Multiplicative Problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, v 3, mar, p. 31-51.

Guimarães, K. P. (1998). *Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação, via jogos de regras: em busca de relações.* Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 181 p. (Dissertação, Mestrado em Psicologia Educacional).

Hazin, I.; Da Rocha Falcão, J. (2000). Auto-estima e desempenho em Matemática: uma contribuição ao debate teórico-metodológico acerca das relações entre cognição e afetividade. In *Sociedade Brasileira de Psicologia. Resumos de Comunicações Científicas.* XXX Reunião Anual de Psicologia. Brasília,DF: SBP, out, 318 p.

Hegarty, M., Mayer, R. E., Monk, C.A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problems solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87: p.18-32.

Higino, Z.; Cruz, M.S. et al. (2000). O professor como facilitador no aprendizado da Matemática. In *Sociedade Brasileira de Psicologia. Resumos de Comunicações Científicas.* XXX Reunião Anual de Psicologia. Brasília, DF: SBP, out, 318 p.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais/INEP (1998*). Relatório-Síntese - Exame Nacional de Cursos (ENEM):*. Brasília: INEP, p. 3-27.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais/INEP (1995*). Sistema de Avaliação da Educação Básica/SAEB/95 -Relatório Final*, Brasília: D.F.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais/INEP (1999*). Sistema de Avaliação da Educação Básica/SAEB - SAEB 97: primeiros resultados***,** Brasília: D.F.

Kamii, C.; Lewis, B. A. (1991). Achievement Tests in Primary Mathematics: Perpetuating Lower-Order Thinking. *Arithmetic Teacher*, v. 38, nº 9, maio, p. 4-9.

Kamii, C.; Livingston, S.J. (1995). *Desvendando a aritmética - Implicações na teoria de Piaget.* Trad. Marta Rabiogio e Camilo F. Ghorayeb. Campinas-SP: Papirus.

Kerlinger,F. N. (1979). *Metodologia da Pesquisa em Ciências Sociais – um tratamento conceitual.* Trad. Helena Mendes Rotundo. São Paulo: EPU.

Kesselring, T. (1990). Os quatro níveis de conhecimento em Jean Piaget. In *Educação e Realidade*. Porto Alegre, 15 (1): 3 – 22, jan/jun, p. 3-21.

Klausmeier, H. J.; Goodwinn, W. (1977). *Manual de Psicologia Educacional*. Tr. de Abreu, M.C.T. A. São Paulo: Harper e Row do Brasil.

Klein, R.; Ribeiro, S. C. (1991). O censo educacional e o modelo defluxo: o problema da repetência. *Revista Brasileira de Estatística*, Rio de Janeiro, v.52, p. 5-45.

Klein, R.; Fontanive, N.S. (1995). Avaliação em larga escala: uma proposta inovadora. ***In.*** *Em Aberto* Brasília, 15 (66): abr.jun, p. 23-27.

Kornilaki, E; Nunes, T.(1999).Do multiplication and division develop in parallei or as co-ordinated operations ? In *Abstracts – IX th European Conference Developmental Psychology* – Human Development at the turn of the century. Island of Spetses, Greece, September, p. 389-390.

Krutetskii, V.A. (1976).*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Translated from the Russian by Teller. University of Chicago Press.

Kuhn, T. S. (1996). *A Estrutura das Revoluções Científicas*. Editora Perspectiva, São Paulo: S.P.

Lautert, S.; Spinillo, A.G. (2000). Relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. In *Sociedade Brasileira de Psicologia. Resumos de Comunicações Científicas.* XXX Reunião Anual de Psicologia. Brasília,DF: SBP, out, p.21-22.

Levain, J. P. (1992). Solutions to Multiplying Problems at the End of the Primary Cycle. *Educational Studies in Mathematics*, v 23, nº 2, apr, p.139-61.

Lopes, S. V. de A. (1997). *Relações entre abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental.* Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, (Dissertação, Mestrado em Psicologia Educacional).

Macedo, L. (1997).Para uma avaliação construtivista. In São Paulo (Estado) *Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Escola em Movimento (Argumento).* São Paulo, SE/CENP, p. 121-127.

Martínez, P. F. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Colección Mathema, Granada, Editorial Comares.

Maza, C. (1991a). *Enseñanza de la maultiplicación y división*. Madrid: Editorial Sinteses.

Maza, C. (1991b). *Multiplicar y dividir - a traves de la resolución de problemas*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Maza, C. (1995). *Aritmética y representación; de la comprensión del texto al uso de materiales.* 1ªedição, Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Moreno, M.M; Sastre, G. et al. (1989).*El Conocimiento del Medio - La transversalidad desde la coeducaión - Materiales para el profesorado.* Ministério de Educación y Ciencia – Instituto de la Mujer, Secretaria de Estado de educación – Espanha.

Moreno, M.M; Sastre, G. et al. (1988). Enciclopedia Practica de Pedagogia - El nino en las etapas de la ensenanza. Editorial Planeta, Barcelona, Espanha.

Moro, M.L.F. (1993). A adição/Subtração em crianças de 1ª série – Um estudo sonbre aprendizagem construtivista. *Psicologia: Teoria e Pesquisa,* Brasília: v. 9, n. 2: p.365-385.

Moro, M. L. F. (1998). A aprendizagem inicial da Matemática: principais contribuições de Gérard Vergnaud. Texto extraído e adaptado de Moro, M.L.F. *Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais – o percurso de três parceiros.*(vol. 1). Tese de professor Titular. Curitiba: UFPR.

Moro, M. L. F. (1998). A Epistemologia do número segundo a Escola de Genebra. Texto extraído e adaptado de Moro, M.L.F. *Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais – o percurso de três parceiros.*(vol. 1). Tese de professor Titular. Curitiba: UFPR.

Moro, M. L. F. (2001).*Adição/Subtração: os caminhos de sua psicogênese na aprendiza*gem. Paper apresentado em congresso (Artigo para publicação).

Mulligan, J. (1992). Children's Solutions to Multiplication and Division Word Problems: A Longitudinal Study. *Mathematics Education Research Journal*, v 4, nº 1: p.24-41.

Mulligan, J. T.; Mitchelmore, M.C. (1997). Young children´s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.28, n° 3: p.309-330.

Neto, J.B.G.; Rosemberg, L. (1998). Indicadores de qualidade do ensino e seu papel no sistema nacional de avaliação. In On line -www.gov.mec/inep.html, p. 9-22.

Nunes, T.; Bryant, P.E. (1991). Correspondência: um esquema quantitativo básico. *Psicologia: Teoria e Pesquisa,* Brasília, v. 7, nº 3: p.237-284.

Nunes, T., Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Trad.Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T.; Katsoris, G. (1999). Rate and Cartesian product problems: Do we need two medal models? In *Abstracts – IX th European Conference Developmental Psychology* – Human Development at the turn of the century. Island of Spetses, Greece, September, p.390.

Perrenoud, P. (1999a). *Construir as competências desde a escola.* Trad Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Perrenoud, P. (1999b).*Avaliação- da excelência à Regulação das aprendizagens entre duas lógicas.* Trad Patrícia C. Ramaos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1951).*A origem da idéia do acaso na criança.* Trad.Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Editora Record Cultural.

Piaget, J.; Gréco, P.; et al. (1960). *Problèmes de la construction du nombre.* Études D´Épistémologie Génetique – XI, Presses Universitaires de France, Boulevard, Saint-Germain, Paris.

Piaget, J. et al (1965). *La enseñanza de las matematicas.* Trad.Adolfo Maillo e Alberto Aizpun. 2ª edição, Aguilar editorial.

Piaget, J. (1973). *Psicologia e Epistemologia – Por uma teoria do conhecimento.* Trad. Agnes Cretella, Companhia Editora Forense, Rio de Janeiro.

Piaget, J. (1973). *Biologia e Conhecimento – ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognitivos.* Trad. Francisco M. Guimarães. Petrópolis- R.J, Vozes.

Piaget, J. (1974). *Aprendizagem e conhecimento.* Rio de Janeiro: Freitas Bastos.

Piaget, J.; Inhelder, B (1975). *Gênese das estruturas lógicas elementares.* Trad. Álvaro Cabral. 2ª ed, Rio de Janeiro: Zahar, Brasília.

Piaget, J.**;** Szeminska. (1975).A. *A gênese do número na criança.* Trad. Christiano M.Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar.

Piaget, J. (1975).*O Nascimento da Inteligência na criança.* Trad.Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Editora Zahar.

Piaget, J. (1976).*A equilibração das estruturas cognitivas; o problema central do desenvolvimento.* Tr de. Marion M. dos S.Penna. Edição original. Rio de Janeiro: Zahar Editora.

Piaget, J. (1978).*A formação do símbolo na criança; imitação, jogo, sonho, imagem e representação***.** Trad. Álvaro Cabral, Christiano M.Oiticica. 3ªedição. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan.

Piaget, J. (1977a). *Recherches sur l´abstraction réfléchissante – l´abstraction des relations logico-arithmétiques.* Études D´Épistémologie Génetique – XXXIV, Presses Universitaires de France, Boulevard, Saint-Germain, Paris.

Piget, J. (1977b). *Recherches sur l´abstraction réfléchissante – l´abstraction de l´ordre des relations spaciales.* Études D´Épistémologie Génetique – XXXIV, Presses Universitaires de France, Boulevard, Saint-Germain, Paris.

Piaget, J. (1977c). *Abstração refelexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Trad.Fernando Becker e Petronilha B. G. Da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J. (1980).*Investigaciones sobre la Abstracción Reflexionante***.** Trad. Alícia Entel. Buenos Aires: Editorial Crea AS.

Piaget, J. (1985). *O possível e o necessário – evolução dos possíveis na criança*. Trad. Bernardina M. de Albuquerque. Porto Alegre, Artes Médicas.

Piaget, J. (1987). *Introduccion a la epistemologia genetica- El pensamiento matemático.* Trad. Mª. Teresa Cevasco e Victor Fischman. 1ª edição, México: Paidós Editorial -Psicología Evolutiva.

Piaget, J.; Inhelder, B (1993). *A psicologia da criança.* Tr. de Octávio M.Cajado. 12ªedição. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil.

Piaget, J. (1993). *Seis Estudos de Psicologia.* Tr. de Maria Alice M.D'Amorim, Paulo S.L.Silva. 19ªedição. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Piaget, J.; Gárcia, R. (1997). *Hacia una lógica de significaciones*. Trad. Emilia Ferreiro. 2ª edição, Barcelona: Gedisa Editorial.

Polya, J. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trad. castellana. 2ª edição. México: Trillas.

Pozo, J. I. M., et al. (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.

Puig, L., Cérdan, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares***.** Madrid: Editorial Sintesis.

Rangel, A.C.S. (1992) *Educação Matemática e a Construção do número pela criança- uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Revista Educação (1998). O ensino posto à prova. In *EDUCAÇÃO*, por Viktor, M. Outubro, ano 25, nº 210: p. 20-24.

Santos, A.A.A. dos, Primei, R., et al (2000). Gênero e estilos de resposta em testes de múltipla escolha. *Anais do V Congresso Nacional de Psicologia Escolar e Educacional* – V CONPE, Itajaí: Santa Catarina.

Santos, A.A.A. dos, Primei, R., et al (2000). A preferência por conteúdos em um processo seletivo com livre escolha. *Anais do V Congresso Nacional de Psicologia Escolar e Educacional* – V CONPE, Itajaí: Santa Catarina

Sastre, G.; Moreno, M.M.; et al. (1993). *Los Temas Transversales – claves de la formación integral.* Madrid: Santillana.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. (1988). *Ciclo básico e a reorganização do ensino de 1º grau – Sistema de avaliação.* Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Ciclo Básico. São Paulo, SE/CENP.

Secretaria de Estado da Educação (1996). *SARESP/96 – Relatório final dos resultados da 1ª aplicação,* São Paulo, v. I,.165 p.

Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução.* Brasília: MEC/SEF.

Secretaria de Educação Fundamental.(1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Secretaria de Estado da Educação. (1998). *SARESP/97 -Conhecendo os resultados da Avaliação*, São Paulo, v. V. 150 p.

Secretaria de Estado da Educação.(1998). *SARESP/97 –Análise Pedagógica dos Itens das Provas aplicadas aos alunos das 4ª e 8ª séries*, São Paulo, v. II, 97 p.

Secretaria do Estado da Educação. (1998). *Revista Escola Agora*, ano III, nº 18, agosto.

Schliemann, A.D.; Carraher, T.N.(1995). *Na vida dez, na escola zero.* 10ªedição. São Paulo: Cortez Editora.

Schliemannn, A.D., Araujo, C., et al. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Resarch in Mathematics Education*, v.29, n°4: p.422-435.

Siegel, S. (1975). *Estatística não-paramétrica – Para as Ciências do Comportamento*. Trad. Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Editora McGraw-Hill Ltda.

Southard,M.F. (1998). Avaliação da educação básica tendências e desafios. In On Line www.gov.mec/inep.html, p. 28-36.

Statistical Package for Social Sciences (1993). *SPSS - Exact tests 6.1 for Windows*. Chicago: Mehta and Patel / SPSS inc.

Sternberg, R. J.; Powell, J. S. (1983). The development of intelligence. In P.H. Mussen (Series Ed.), J. Flavell e E. Markman (Vol. Eds.), *Handbook of child psychology,* v. 3, 3ªed., p.341-419, New York:Wiley.

Taxa, F. de O. S. (1996). *Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais.* Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, (Dissertação, Mestrado em Psicologia Educacional).

Taxa, F. de O.S.; De Miguel Vallejo;. (1998). Niñas i niños aprendemos a resolver conflicts. In *III Congrés Interscolar- Barcelona Identitats* – Instituto Municipal de Educación del Ayuntamiento de Barcelona, Barcelona: Espanha, maio.

Toledo, G. L. ; Ovalle, I. I. (1985). *Estatística Básica*. 2ª edição. São Paulo: Atlas.

Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. Educational *Studies in Mathematics*, nº 10: p.263-274.

Vergnaud, G.(1981). Quelques orientations theoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 2, nº 2: p.215-232.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la representation. *Psychologie Française*, nº 30-3/4, nov, p.245-252.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In Editors Merlyn B, Laurence E. Associates. *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston: National Council of teachers of mathmatics, p 141-161.

Vergnaud, G. (1990a). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques*, v.10, nº 23: p.133-170.

Vergnaud, G. (1990b). Catégories Logiques et invariants opératoires. *Archives de Psychologie*, 58: 145-149.

Vergnaud, G. (1991**)**. *El niño, las Matemáticas y la Realidad; problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria.* Trad.Luis O. Segura. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Le raisonnement en physique et en mathématiques. *Psychologie Française*, nº 39-2: p.153-160.

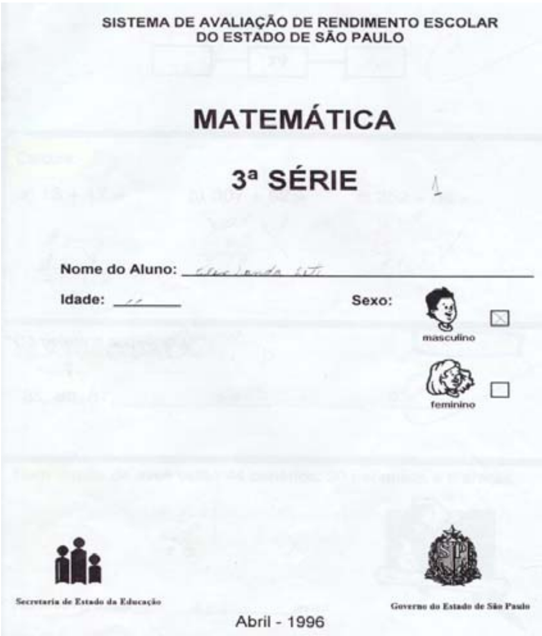
Vergnaud, G. (1996). Teoria dos Campos Conceituais. In *Anais do 1º seminário internacional de educação matemática do Rio de Janeiro*. Projeto Fundão, Rio de Janeiro: RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro/ UFRJ.

Vergnaud, G. (Coord.) (1997). *Aprendizajes y Didácticas: ¿ Qué hay de nuevo ?* . Trad.Clara Maranzano. Buenos Aires: Edicial.

Zaia, L. L. (1996). *A solicitação do meio e a construção das estruturas operatórias em crianças com dificuldades de aprendizagem*. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp (Tese, Doutorado em Psicologia Educacional).

ANEXOS

ANEXO 1 – Prova de Matemática do Sistema de avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo / SARESP



SISTEMA DE AVALIAÇÃO DE RENDIMENTO ESCOLAR
DO ESTADO DE SÃO PAULO

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE

Nome do Aluno: ______

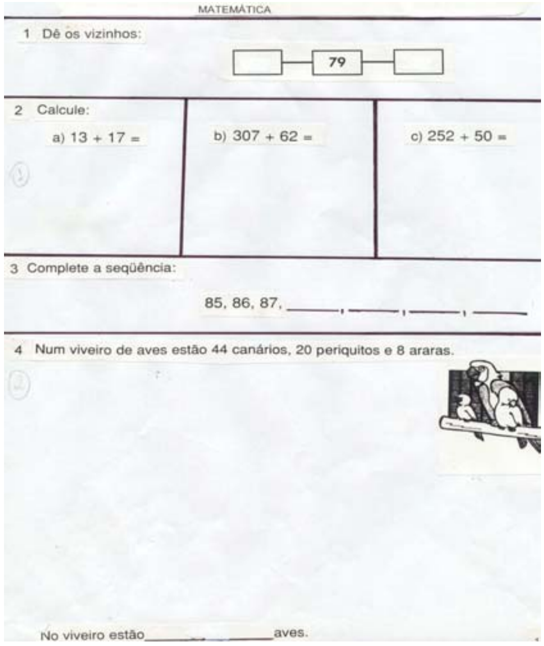
Idade: ______

Sexo: masculino ☐ feminino ☐

Secretaria de Estado da Educação

Governo do Estado de São Paulo

Abril - 1996



MATEMÁTICA

1 Dê os vizinhos:

☐—79—☐

2 Calcule:

a) 13 + 17 =

b) 307 + 62 =

c) 252 + 50 =

3 Complete a seqüência:

85, 86, 87, ____, ____, ____, ____

4 Num viveiro de aves estão 44 canários, 20 periquitos e 8 araras.

No viveiro estão ________ aves.

5 No quadriculado que aparece abaixo o desenhista marcou os caminhos que Vera, Camila e Tiago seguiram para chegar até o tesouro.

Tiago Vera Camila

Quem percorreu o caminho mais curto? ______

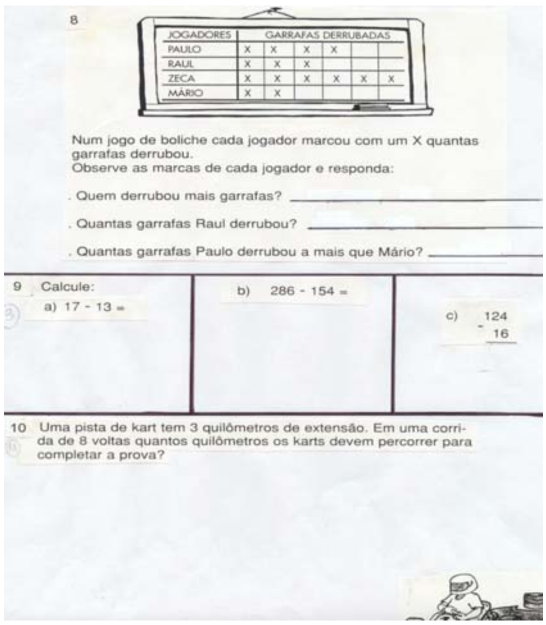
Quem percorreu o caminho mais longo? ______

6 Com este cheque eu comprei um relógio por 84 reais.Complete o cheque escrevendo o preço por extenso.

R$ 84,00

7 Complete a parcela que está faltando nesta adição:

$$\begin{array}{r} \square \\ +\ 205 \\ \hline 318 \end{array}$$



8

JOGADORES	GARRAFAS DERRUBADAS						
PAULO	X	X	X	X			
RAUL	X	X	X				
ZECA	X	X	X	X	X	X	X
MÁRIO	X	X					

Num jogo de boliche cada jogador marcou com um X quantas garrafas derrubou.
Observe as marcas de cada jogador e responda:

. Quem derrubou mais garrafas? ______

. Quantas garrafas Raul derrubou? ______

. Quantas garrafas Paulo derrubou a mais que Mário? ______

9 Calcule:

a) 17 - 13 =

b) 286 - 154 =

c) $\begin{array}{r} 124 \\ -\ 16 \\ \hline \end{array}$

10 Uma pista de kart tem 3 quilômetros de extensão. Em uma corrida de 8 voltas quantos quilômetros os karts devem percorrer para completar a prova?

11

Marina saiu de sua casa para ir à padaria, passando pela banca de jornais.
Calcule a distância que ela percorreu até chegar à padaria.
Escreva a operação e o resultado do problema no espaço abaixo.

Ao voltar para casa, Marina passou pela casa de Andréa.
Responda: Qual o percurso mais longo: o da ida ou o da volta?
Explique sua resposta nas linhas abaixo:

____
____
____

12 Esta gaveta tem 6 divisões. Em cada divisão tem uma dúzia de parafusos. Quantos parafusos estão guardados na gaveta?
Marque com um X a melhor resposta:

( ) aproximadamente 20
( ) aproximadamente 50
( ) aproximadamente 70
( ) aproximadamente 100

13 Siga esta instrução:

- No espaço abaixo desenhe um triângulo.
- Agora, desenhe um círculo à esquerda do triângulo.
- No interior do círculo desenhe um quadrado.

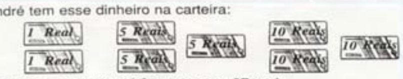
14 Calcule:

a) 31 x 2 =

b) 42 x 10 =

c) 25
x 4

15 André tem esse dinheiro na carteira:



André comprou um robô que custou 37 reais.
Desenhe as notas que ele usou para pagar o robô.

Desenhe as notas que sobraram na carteira de André.

16 Observe esta lista de preços:

• pequeno	20 reais	13 reais	7reais	115 reais
● médio	27 reais	19 reais	10 reais	170 reais
⬤ grande	33 reais	25 reais	15 reais	186 reais

a) Qual o preço de uma camiseta grande? ____________
b) Qual o preço de um boné médio? ____________
c) Escreva o nome e o tamanho do objeto que custa:

115 reais ____________

17 Calcule:

a) 21 : 3 =

b) 35 : 1 =

c) 264 | 2

18 Ana tem 20 palitos de sorvete. Colando 5 palitos numa folha de papel ela fez uma casa como esta:

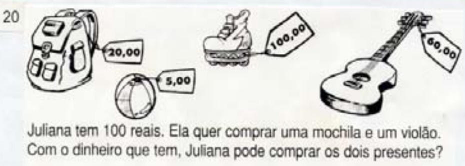
Quantas casas iguais a esta Ana pode fazer com os palitos da caixa?

$$\begin{array}{r} \square \\ +\ 205 \\ \hline 318 \end{array}$$

19 O time de futebol da escola tem 27 alunos. Faltaram ao treino de ontem 9 alunos.
Quantos alunos estiveram no treino de ontem?

Resposta: ____________

20



Juliana tem 100 reais. Ela quer comprar uma mochila e um violão.
Com o dinheiro que tem, Juliana pode comprar os dois presentes?

____

Explique sua resposta: ____________
____
____
____

21 Marcelo chegou na casa da avó dele às 9 horas e saiu às 11 horas.
Quantas horas ele ficou na casa da avó?

ANEXO 2 – Distribuição dos sujeitos de acordo com o desempenho em Matemática na prova do SARESP em relação às escolas

Descriptives

SARESP

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximur
1,00	31	11,6452	7,9773	1,4328	8,7191	14,5712	,00	26,0
2,00	23	14,4348	6,7476	1,4070	11,5169	17,3526	3,00	24,0
3,00	32	10,5000	6,8061	1,2032	8,0462	12,9538	1,00	24,0
4,00	46	12,6304	7,4158	1,0934	10,4282	14,8326	2,00	27,0
Total	132	12,1970	7,3344	,6384	10,9341	13,4598	,00	27,0

ANEXO 3 – Análise de variância quanto ao desempenho escolar em Matemática em relação às escolas

ANOVA

SARESP

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	225,412	3	75,137	1,410	,243
Within Groups	6821,466	128	53,293		
Total	7046,879	131			

ANEXO 4 – Distribuição dos sujeitos de acordo com o desempenho em Matemática em relação ao gênero

Group Statistics

	GEN	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
SARESP	,00	64	11,5156	7,4087	,9261
	1,00	68	12,8382	7,2598	,8804

ANEXO 5 – Prova T-Test quanto ao desempenho em Matemática em relação ao gênero

Independent Samples Test

		evene's Test for Equali of Variances		t-test for Equality of Means						
									% Confidence Inte the Difference	
		F	Sig.	t	df	ig. (2-tailed	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upp
SARES	Equal variances assun	,103	,748	-1,036	130	,302	-1,3226	1,2770	-3,8490	1,20
	Equal variances not a:			-1,035	129,145	,303	-1,3226	1,2778	-3,8507	1,20

ANEXO 6 – Distribuição da freqüência das médias de desempenho dos sujeitos em relação às idades

ANOVA

SARESP

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	555,053	2	277,526	5,515	,005
Within Groups	6491,826	129	50,324		
Total	7046,879	131			

ANEXO 7 – Análise das correlações entre os níveis de classificação e as diferentes quantidades utilizadas na Prova de Abstração

Correlations

			AB12	AB24	AB36
Spearman's rho	AB12	Correlation Coefficient	1,000	,747**	,779
		Sig. (2-tailed)	,	,000	,000
		N	32	32	32
	AB24	Correlation Coefficient	,747**	1,000	,861
		Sig. (2-tailed)	,000	,	,000
		N	32	32	32
	AB36	Correlation Coefficient	,779**	,861**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	,000	,
		N	32	32	32

**. Correlation is significant at the .01 level (2-tailed).

ANEXO 8- – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho matemático dos sujeitos e níveis de classificação do processo de abstração com 12 fichas

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided) Sig.	99% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	4,804[a]	2	,091	,110[b]	,102	,11
Likelihood Ratio	5,986	2	,050	,082[b]	,075	,08
Fisher's Exact Test	4,378			,110[b]	,102	,11
N of Valid Cases	32					

a. 2 cells (33,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1,50.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 2000000.

ANEXO 9 - Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho matemático dos sujeitos e níveis de classificação do processo de abstração com 24 fichas

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided) Sig.	99% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	6,659[a]	2	,036	,035[b]	,030	,04
Likelihood Ratio	8,636	2	,013	,027[b]	,022	,03
Fisher's Exact Test	6,474			,035[b]	,030	,04
N of Valid Cases	32					

a. 2 cells (33,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,50.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 2000000.

ANEXO 10 - Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho matemático dos sujeitos e níveis de classificação do processo de abstração com 36 fichas

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided) Sig.	99% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	10,521[a]	2	,005	,005[b]	,003	,00
Likelihood Ratio	13,203	2	,001	,003[b]	,001	,00
Fisher's Exact Test	10,540			,004[b]	,002	,00
N of Valid Cases	32					

a. 2 cells (33,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3,00.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 2000000.

ANEXO 11 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho matemático e estágios de classificação das operações combinatórias com 4 elementos tomados dois a dois

Chi-Square Tests [c]

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	7,575[b]	1	,006	,015	,008
Continuity Correction [a]	5,565	1	,018		
Likelihood Ratio	8,362	1	,004	,015	,008
Fisher's Exact Test				,015	,008
N of Valid Cases	32				

a. Computed only for a 2x2 table

b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,50.

c. For 2x2 crosstabulation, exact results are provided instead of Monte Carlo results.

ANEXO 12 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho matemático e estágios de classificação das operações combinatórias com 4 elementos tomados três a três

Chi-Square Tests [c]

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	6,000[b]	1	,014	,037	,019
Continuity Correction [a]	4,167	1	,041		
Likelihood Ratio	6,578	1	,010	,037	,019
Fisher's Exact Test				,037	,019
N of Valid Cases	32				

a. Computed only for a 2x2 table

b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,00.

c. For 2x2 crosstabulation, exact results are provided instead of Monte Carlo results.

ANEXO 13 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de métodos empregados pelos sujeitos dos subgrupos para solucionar as operações combinatórias de quatro elementos tomados dois a dois

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided)		
					99% Confidence Interva	
				Sig.	Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	8,105[a]	2	,017	,028[b]	,024	,03
Likelihood Ratio	9,893	2	,007	,019[b]	,016	,02
Fisher's Exact Test	7,469			,028[b]	,024	,03
N of Valid Cases	23					

a. 5 cells (83,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,09.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 508741944.

ANEXO 14 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de métodos empregados pelos sujeitos dos subgrupos para solucionar as operações combinatórias de quatro elementos tomados três a três

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided)		
					99% Confidence Interva	
				Sig.	Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	5,638[a]	2	,060	,060[b]	,054	,06
Likelihood Ratio	6,605	2	,037	,060[b]	,054	,06
Fisher's Exact Test	4,986			,060[b]	,054	,06
N of Valid Cases	24					

a. 3 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,75.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 508741944.

ANEXO 15 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho dos subgrupos na solução do problema 1 (camisas e bermudas) de produto cartesiano

Chi-Square Tests [c]

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	,237[b]	1	,626	1,000	,50
Continuity Correction [a]	,000	1	1,000		
Likelihood Ratio	,238	1	,625	1,000	,50
Fisher's Exact Test				1,000	,50
N of Valid Cases	32				

a. Computed only for a 2x2 table

b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,50.

c. For 2x2 crosstabulation, exact results are provided instead of Monte Carlo results.

ANEXO 16– Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho dos subgrupos na solução de problema 2 (baile) de produto cartesiano

Chi-Square Tests [c]

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	7,575[b]	1	,006	,015	,00
Continuity Correction [a]	5,565	1	,018		
Likelihood Ratio	8,362	1	,004	,015	,00
Fisher's Exact Test				,015	,00
N of Valid Cases	32				

a. Computed only for a 2x2 table

b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,50.

c. For 2x2 crosstabulation, exact results are provided instead of Monte Carlo results.

ANEXO 17 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho dos subgrupos na solução de problema 3 (sala de aula) de produto cartesiano

Chi-Square Tests [c]

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	7,575[b]	1	,006	,015	,008
Continuity Correction[a]	5,565	1	,018		
Likelihood Ratio	8,362	1	,004	,015	,008
Fisher's Exact Test				,015	,008
N of Valid Cases	32				

a. Computed only for a 2x2 table

b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,50.

c. For 2x2 crosstabulation, exact results are provided instead of Monte Carlo results.

ANEXO 18 – Teste Qui-quadrado referente às diferenças de desempenho dos subgrupos na solução de problema 4 (empacotamento das colheres) de isomorfismo de medidas

Chi-Square Tests [c]

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	6,348[b]	1	,012	,029	,015
Continuity Correction[a]	4,664	1	,031		
Likelihood Ratio	6,617	1	,010	,029	,015
Fisher's Exact Test				,029	,015
N of Valid Cases	32				

a. Computed only for a 2x2 table

b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6,50.

c. For 2x2 crosstabulation, exact results are provided instead of Monte Carlo results.

ANEXO 19 – Análise das médias de combinações realizadas pelos sujeitos dos subgrupos A e B
Means

Report

GRUPO		PANCMB	PBNCMB	PCNCMB
A	Mean	6,6875	6,9375	3,8125
	Median	6,5000	8,0000	5,5000
	Std. Deviation	3,8248	2,4350	2,6387
B	Mean	5,5000	5,6250	2,8125
	Median	4,0000	6,0000	3,0000
	Std. Deviation	3,5590	1,6683	1,8697
Total	Mean	6,0938	6,2813	3,3125
	Median	6,0000	6,0000	3,0000
	Std. Deviation	3,6840	2,1588	2,3062

ANEXO 20 – Análise de variância das médias de combinações realizadas nos problemas combinatórios de acordo com os sujeitos dos subgrupos
NPar Tests/ Kruskal-Wallis Test

Test Statistics [b,c]

			PANCMB	PBNCMB	PCNCMB
Chi-Square			,552	3,381	2,031
df			1	1	1
Asymp. Sig.			,458	,066	,154
Monte Carlo Sig.	Sig.		,462[a]	,065[a]	,159[a]
	99% Confidence Interval	Lower Bound	,449	,059	,149
		Upper Bound	,474	,071	,168

a. Based on 10000 sampled tables with starting seed 1535910591.

b. Kruskal Wallis Test

c. Grouping Variable: GRUPO2

ANEXO 21 - Análise de correlação solução de problemas, algoritmos e o desempenho no SARESP

Fatores		Coeficiente de correlação com o SARESP
Problemas Aritméticos		
	Adição	*0,660
	Subtração 1	*0,516
	Subtração 2	*0,587
	Adição/ Sub	*0,536
	Multiplicação 1	*0,547
	Multiplicação 2	*0,462
	Divisão	*0,598
Algoritmos	Adição 1	*0,650
	Adição 2	*0,597
	Subtração	*0,520
	Multiplicação	*0,296
	Divisão	*0,351

ANEXO 22 – Análise de correlação entre os itens da entrevista sobre opiniões dos sujeitos quanto à preferência por áreas e conteúdos curriculares e o desempenho da prova de Matemática do SARESP

Fatores		Coeficiente de correlação com o SARESP
Preferências pelas áreas curriculares		
	Matemática	0,024
	Português	0,050
	Ciências	-0, 075
	Geografia	-0,069
	Ed. Física	0,000
	Desenho	*-0,212
Dificuldades nos conteúdos		
	Adição	0,143
	Subtração	0,048
	Multiplicação	0,154
	Divisão	-0,129
	Problemas	0,014
	Operações (2 algorimos)	-0,044
	Escrita de numerais	*-0,200
	Leitura	0,047
Preferência por solução de problemas	Resolver problemas	0,108
Preferências por tipos de problemas	Adição	0,027
	Subtração	*0,213
	Multiplicação	0,121
	Divisão	-0,129
	Vários algoritmos	0,015