Rosa Maria Machado

Números: A Filosofia dos Gregos que Ainda Sobrevive.

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Educação
1993

Rosa Maria Machado

Este exemplar corresponde à redação final da DISSERTAÇÃO defendida por Rosa Maria Machado e aprovada pela Comissão Julgadora em

22\11\93

Campinas, 22 de Novembro de 1993.

Prof. Dr. Hermas G. Arana

Números: A Filosofia dos Gregos que Ainda Sobrevive.

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Educação
1993

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO na Área de Concentração: HISTÓRIA E FILOSOFIA. à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Hermas Gonçalves Arana.

Comissão Julgadora:-

Mistério e calma
das horas e do tempo ...
Para os meus pais e irmãos:
Hermínio, Alzira,
Edmir José, Ednei Fernando
e Edmar Ricardo.

– *Meu amigo,* **HERMAS!**

... espero que nem sempre seja tarde nos relógios que acompanham nossos ritmos, para agradecer-lhe: pela segurança proporcionada, por sua competência, pelo respeito com que tratou minhas limitações e pelas cobranças firmes e oportunas ...

A casa parece mais humana
com transeuntes atrasados;
estações com trens anoitecidos
e passageiros, e rumos, e bagagens.
Conheço de repente este trem,
cumprimento os amigos de viagem:
— *Adenilde, Adonai, Brito, Donata, Ivone,*
Leda Maria, Maurilo, Nikolaus, Patrocínio,
Prof. Edenilson, Prof. Mário, Regina, Régis,
Sincléris, Zézo, Zoraide, Toscano e Wilbert —

AMIGOS, OBRIGADA!

RESUMO

Essa dissertação é a fundamentação teórica da prática pedagógica, que tem por objetivo contribuir com o ensino de matemática e com a formação do professor de matemática. O desenvolvimento estrutural está baseado na Filosofia da Matemática, através de um conceito mais abstrato das matemáticas que é o conceito dos números. É através dele que acreditamos contribuir com o ensino da matemática; buscando a inspiração nos antigos gregos dos séculos VI – III a.C.. Contextualizado o fenômeno investigado, procurei interpretá-lo sob várias concepções da filosofia matemática; através de cinco filósofos e matemáticos: Tales, Pitágoras, Platão, Aristóteles e Euclides.

Assim, acredito que estou propiciando aos nossos alunos e Professores condições para que possam aprender e ensinar matemática sem torturas e, conseqüentemente estaremos contribuindo para uma modificação na estrutura educacional Brasileira.

ABSTRACT

This dissertation is a theoretical foundations of the pedagogical practice and its aim is to help with mathematical teaching and with the teacher's mathematical graduation. The structural development is based on the Mathematics Philosophy through the concept of number. It's through it that I believe to contribute for mathematics teaching, searching the bases from ancient greeks in VI – III B.C.. Putting into context this studied phenomenon, I sought to interpret it through five main philosophers and mathematicians: Thales, Pytagoras, Plato, Aristotle and Euclid.

So, I hope to give students and teachers, conditions a philosophic focus, that I belive will make it possible to learn and teach mathematics without suffering and, consequently, I will be contribuiting for a change in the structure of Brazilian education.

SUMÁRIO

Introdução 8

Capítulo 1: Epistemologia e Ciência

1.1 Epistemologia e Ciência 15
1.2 O conhecimento racional ou abstrato 22
1.2.1 Conceito 22
1.2.2 Os processos para a formação de conceitos 23
1.3 Juízo 25
1.4 Raciocínio 26
1.4.1 Dedução 26
1.4.2 Indução 27
1.4.3 Analogia 29

Capítulo 2: O conhecimento Matemático

2.1 Conhecimento Matemático 31
2.1.1 Empirismo 32
2.1.2 Racionalismo 33
2.1.3 Intelectualismo 35
2.1.4 Realismo 35
2.1.5 Idealismo 36
2.2 O critério e o conceito de verdade 37
2.3 Crítica ontológica da verdade 40
2.4 O conceito de existência 43

Capítulo 3: A Grécia e os Gregos

3.1 A Grécia e os gregos 45
3.1.1 Tales de Mileto 48
3.1.2 Anaximandro de Mileto 50
3.1.3 Anaxímenes de Mileto 51
3.2 Os Pitagóricos 53
3.2.1 Pitágoras 53
3.2.2 Pitágoras e os Pitagóricos 54
3.2.3 Aritmética Pitagórica 58

3.2.4 Identidades Algébricas 60
3.2.5 Solução geométrica para equação quadrática 63
3.2.6 Transformação de áreas 65
3.2.7 Os sólidos regulares 66
3.2.8 Representação geométrica dos números 68

Capítulo 4: PLATÃO E A ACADEMIA

4.1 Platão 76
4.2 A regressão analítica 90
4.3 A dialética sintética 91
4.4 Números ideais 92
4.5 As grandezas ideais 93
4.6 O platonismo a partir de Platão 94

Capítulo 5: ARISTÓTELES

5.1 Aristóteles 96
5.2 A obra matemática de Aristóteles 97
5.3 Origem biológica da lógica 100
5.4 O silogismo e alguns tipos elementares 100

Capítulo 6: EUCLIDES

6.1 Alexandria 106
6.2 A geometria euclidiana 107
6.3 As definições de Euclides 108
6.3.1 Os axiomas 110
6.3.2 Postulados 111
6.4 "Elementos" e os Números 113
6.5 A importância filosófica dos "Elementos" 118

Conclusão 121

Apêndice

Apêndice I — Origens Primitivas 128
Apêndice II — História da escrita e História da notação numérica 132
Apêndice III – Evolução do conceito de número 141
Apêndice IV – Filosofia Greco-Romana 145
Apêndice V — Significado das palavras numéricas 148
Apêndice VI – Atitudes importantes do Professor de Matemática 151

Bibliografia 153

Introdução

Comparando o homem a uma ave, disse um cínico, certa ocasião, que o ser humano não tem ponto de chegada; o seu vôo, todavia, é soberbo. É surpreendente, pois nada está definido. A vida, no que tem de melhor, é um processo que flui. É na vida, para a vida e pela vida que o ser humano aprende e se revela. É para a vida que a Escola existe. A escola será sempre uma instituição. Resta-nos as perguntas: — o que se pretende quando se educa? Um ser educado é um ser passivo que se deixa educar ou educa-se (auto-educa-se)? Estas perguntas instigantes, nos levam a retroceder no tempo para observar como ocorreu o processo de educação em nós.

Trago comigo uma vivência dentro das chamadas Ciências Exatas: a Matemática, que tantas vezes é criticada e raramente elogiada, tanto pela sociedade de uma maneira geral, quanto pelos alunos. As críticas são por vezes feitas a nível de proposições, tais como:

- A matemática é uma ciência EXATA, que trata das quantidades e de suas medidas.
- A matemática é a ciência dos números e das figuras.
- A matemática é ABSTRATA.
- A matemática é a arte de calcular.
- A capacidade para a matemática é inata.
- A matemática desenvolve o raciocínio.

A primeira definição afirma ser a matemática uma ciência exata. Esse não corresponde à verdade como demonstraremos ao longo do desenvolvimento do nosso trabalho. Além disto a matemática não é tão somente ciência que trata das quantidades e de suas medidas, dos números e das figuras e, tampouco, "a arte de calcular". Muitas pessoas, acreditam que a matemática se restringe a "medir quantidade"; ou se esqueceram ou não conseguiram compreender que a matemática é muito mais complexa, muito mais que isso. Existem entes matemáticos que não são números, figuras ou quantidades. Por exemplo: vetores, transformações, operadores, conjuntos, " espaços", relações,etc.

As proposições citadas acima são apenas uma pequena amostra da imagem que se faz da matemática. Pessoas que passam pela Escola com experiências frustrantes em matemática, carregam consigo o fracasso por toda a vida. Para que este fracasso persista, eu destacaria principalmente o autoritarismo e o dogmatismo dos professores. Outra razão seria a forma de se encarar o ensino de matemática, distante das realidades dos nossos alunos. A metodologia, utilizada tanto em sala de aula quanto a dos livros didáticos, apresenta uma matemática com um modelo de um processo aistórico, totalmente desvinculada de um estímulo imediato, ou seja, que não se utiliza na prática.

De maneira geral, a questão da linguagem matemática é interessante por fazer parte do rol dos rótulos negativos dentro da sociedade, no que se refere à questão do concreto e do abstrato. Há quem insinue que a matemática, não passa de uma linguagem de pensamento. Na verdade, a linguagem matemática é universal, ou seja, é um conjunto de simbolismos. E este surge por um processo de origem, cuja invenção é livre, é adotado de modo consciente para denotar idéias. Para isso, é preciso que as pessoas que queiram conhecer matemática se familiarizem com eles, que aprendam o seu significado. Além disto, a sua linguagem almeja uma precisão completa, tanto ao que se refere ao seu significado, como o rigor do raciocínio que ela expressa. Portanto, ela não só se utiliza de símbolos específicos, mas também os raciocínios que ela expressa são lógicamentes encadeados.

Esses aspectos da matemática apontam certas atividades para serem desenvolvidas no seu ensino, pois ela exige que aquele que quer conhecê-la saiba o que está examinando e justifique a cada momento o seu raciocínio, o qual, por sua vez, deve ser fundamentado em provas rigorosas e precisas. Assim, por exemplo, não é suficiente ensinar aos alunos de Matemática como calcular e demonstrar com habilidades de modo automático. É preciso que esse aluno entenda e articule suas razões em cada afirmativa que faz.

Há certas diferenças que gostaria de enfatizar. É o caso dos conceitos da Educação e o Ensino de Matemática. A educação matemática é algo complexo; exige-se que se reflita sobre as idéias básicas subjacentes às diferentes linhas de pensamentos matemáticos e que se pesquise como essas idéias aparecem nos diferentes modelos do Ensino. O Ensino de Matemática está diretamente associado a ATOS — podendo cada professor utilizá-los de forma lógica, estratégica ou institucional — e eles estão relacionados à Ciência e o fundamental é o conhecimento do conteúdo matemático.

Como estudante de graduação (UNESP – Campus de Rio Claro-SP), como professora de 1º e 2º Graus da Rede Estadual e Particular de Educação, como professora do ensino técnico (Colégio Técnico de Limeira – Unicamp) e como professora universitária (Instituto Superior de Ciências Aplicadas de Limeira – SP); estive em contato freqüente com pessoas que, de uma forma ou de outra, fazem parte de todo este processo educacional que no momento nos envolve.

Este contato, adicionado a minha prática, contribuiu muito para que eu me situassse no complexo chamado:"processo educacional" e muitas foram as observações que fiz. Dentre elas destaco aquelas que estão mais ligadas à falta de embasamento filosófico do professor, que conseqüentemente, não consegue analisar e refletir sobre as questões gerais do conhecimento. É nesta direção que sigo com meus estudos. Na análise e reflexão do fazer matemático.

Espero que este trabalho esperte professores e curiosos no ensino de matemática e que os leve a entender a contribuição da matemática - grega do século VI ao III - a.C. em nossos dias, no sentido de reaproximar questões filosóficos que sofreram distorções com o passar do tempo, principalmente no que se refere ao rótulo do conceito de que a matemática se reduz a números (no sentido de grandeza). A dificuldade que se encontra para estudar os gregos antigos, é que há raríssimas fontes originais, embora muitas informações nos tenham sido transmitidas através da História, pelos discípulos dos filósofos e matemáticos. Uma dessas raridades é o papiro Moscou do Museu de Belas Artes de Moscou, que data de 1850 a.C., conhecido também por papiro Golenichev em homenagem a seu antigo proprietário

Para a superação dos problemas relacionados com o ensino da matemática é necessária a reaproximação entre o seu significado atual àquele que tinha originalmente, que está intimamente relacionado ao desenvolvimento dos primeiros rudimentos da razão, à fundamentação do raciocínio em todas as ciências. A matemática advém historicamente da vida coletiva da humanidade, como reconhecimento de certos aspectos abstratos decorrentes da experiência comum e do desenvolvimento de processos de contar, medir e calcular.

As antigas civilizações pré-helênicas (Egito, Mesopotâmia, China, Índia, Europa Neolítica) desenvolveram de acordo com as suas culturas as suas próprias matemáticas. De fato, o que encontramos na História Universal são fórmulas e receitas práticas que surgiram diretamente do empírico, formados por conhecimentos esparsos e não por um corpo de conhecimento interligado. Por exemplo, o próprio desenvolvimento da "Geometria", um ramo da matemática, que está naturalmente relacionada com a Agrimensura, sobretudo no antigo Egito e na Mesopotâmia, apareceu devido às preocupações coletivas sobre comprimentos, áreas, volumes e ângulos de determinadas regiões ou até mesmo de certos objetos. Das necessidades de contagem, aparece a "Aritmética" e se desenvolve através da Geometria e das medidas de comprimentos, áreas e volumes. A Grécia recebeu muitas influência vindas do Egito, da Mesopotâmia, da Pérsia, países freqüentados por seus comerciantes e navegadores — os gregos foram muito espertos! Através de elementos esparsos, de exemplos tomados aqui e ali, souberam os gregos construir grandes obras, que marcaram a história universal, como o surgimento dos conceitos das grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Excluiremos o que diz respeito às evoluções das obras de arte e literatura grega, que, sem dúvida, foram e continuam sendo fontes de temas grandiosos e regras estéticas. Limitaremos nosso estudo à evolução da filosofia grega que, através de sua lógica, sua física, sua moral, sua política, possibilitou a humanização do homem. As primeiras obras gregas datam do século VI a.C.. As escolas de Atenas foram fechadas, por Justiniano em 529 d.C.. Entre essas duas datas, floresceu e frutificou a filosofia antiga. O nosso objetivo não é desenvolver um estudo minucioso da filosofia antiga, mas de desenvolver um estudo sobre as contribuições da matemática-filosofia-história deste povo admirável: — os gregos. Deve-se ressaltar, porém, que só nos foi possível um conhecimento das obras gregas através de fragmentos analisados por "doxógrafos" ou através de citações em obras de autores que se debruçaram em estudos gregos. Além do mais, é importante ressaltar sempre: — muitos dos filósofos da Antigüidade nada escreveram. Ficaram limitados à leitura e comentários e exercícios redigidos por seus discípulos.

Estudaremos os pré-socráticos através de Tales e Pitágoras, e a seguir, o período fundamental da metafísica grega, período em que floresceram as doutrinas de Platão, discípulo dissidente de Sócrates, fundador da Academia, e Aristóteles, discípulo dissidente de Platão, fundador da escola peripatética. Finalmente, Euclides, o mais eminente matemático dessa época, fundador da teoria axiomática, observando como a questão dos números como foi tratada por cada um deles. Assim, acreditamos ter um ambiente propício para acreditar que a matemática como ciência tenha surgido na Grécia no século VI a.C., como atividade intelectual, como algo reconhecido como sendo ciência, quer como conteúdo, quer em método. Consideravam a matemática como conhecimento puro. A matemática grega distingue-se da matemática da babilônia e da egípcia pela sua estrutura, principalmente no que se refere aos problemas relacionados com processos infinitos, movimentos e continuidade. Devido às tentativas dos gregos resolverem estes problemas, fizeram com que aparecesse o método axiomático-dedutivo. Este método consiste em admitir como verdadeiras certas proposições e, a partir delas, por meio de um encadeamento lógico, chegar a proposições mais gerais. Veremos com mais detalhes sobre esse método na seção sobre a axiomática no capítulo de Euclides.

Consideram-se quatro etapas para o desenvolvimento da matemática grega. A primeira trata de um conjunto de contribuições separadas e com sinais das tradições vindas do Oriente,(principalmente do Egito e da Babilônia) muitas vezes baseado na necessidade de resolver problemas práticos. A característica dessa etapa, que se estende até o século V a.C., é a união entre os conhecimentos matemáticos e a filosofia (subentendendo filosofia - a totalidade do saber), a ponto de poder falar na ocorrência de uma simbiose dos saberes, o que não é inusitado. O personagem mais conhecido desta época, é sem dúvida nenhuma, Pitágoras, que utiliza o termo matemática para a aritmética e geometria.

Na segunda etapa destacam-se na história das idéias Platão e Aristóteles (século IV a.C.). Trata-se de uma etapa metodológica, pois Platão questiona a tradição pitagórica, procurando esclarecer a essência e o problema da matemática, cuja importância estava relacionada à questão divina: Deus sempre geometriza. Com Aristóteles é desenvolvido o método axiomático. A característica de Aristóteles é a quebra metodológica entre filosofia e matemática, ao conceber aquela como filosofia primeira e essa como uma das variadas filosofias segundas.

Atenas era o centro da cultura antiga na segunda etapa. Entretanto, na terceira é a cidade de Alexandria, às margens do Rio Nilo, que sobressai o conhecimento matemático, enriquecendo-se de maneira sistemática. Trazendo da etapa anterior uma bagagem metodológica de resultados descobertos, edifica-se de maneira mais segura e acelerada, através da axiomatização. Há na verdade três grandes nomes desta etapa: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Pérgamo (século III a.C.). Destaco em meu trabalho, o grande Euclides.

A quarta etapa é marcada por uma notável perda de espírito inventivo. Aparecendo uma tendência prática baseada numa tecnologia calculadora conhecida por logística, que já aparecia na época de Pitágoras. Na mesma etapa aparece uma certa vocação erudita, colecionadora, codificadora através de Claúdio Ptolomeu.

Em concomitância pode-se falar na evolução das idéias filosóficas gregas em quatro fases: a primeira cosmológica (cujo tema central envolvia a origem do mundo), pré-socrática (do ano de 600 ao 450 a.C.); a segunda, antropológica (Sócrates e os sofistas), do ano de 450 ao 400 a.C.; a terceira , sistemática (Demócrito, Platão e Aristóteles), século III a.C.; e a quarta, helenística (estóicos, epicureos, escépticos, Plotino ...), desde o século II a.C. até o início da Idade Média.

A palavra matemática vem do grego máthema, mathematos que significa aprender. Daí deriva a palavra mathematiké usada por Pitágoras no sentido de ensino. A cultura grega, considerada o berço da nossa civilização, já previa o futuro da matemática deixando, grandes problemas que atravessaram séculos para serem resolvidos e há alguns que até hoje continuam em aberto. Um exemplo recente do ano de 1992, envolvendo o problema de Apolônio: -Encontrar circunferências tangentes às circunferências. A solução genérica foi dada pelo jovem cientista francês Pierre Duchet, da Université J. Fourier - Grenoble que, com a ajuda de um computador, conseguiu resolver o problema através das Geometrias Elíptica e a Euclidiana.

A matemática não tem objetivos de desenvolvimento com fins nela mesma, porque ela surge de questionamentos humanos que se preocupam em dar respostas a essas questões. A matemática adapta-se a qualquer realidade. Uma das principais finalidades da matemática, quando bem ensinada, é despertar no aluno a crença na razão, confiança na verdade do que se demonstra e no valor da demonstração. Embora, na prática educativa, o aluno se submeta ao que diz o professor.

A educacão visa a transformacão sob dois aspectos: social e político. Socialmente as finalidades essenciais do ato de ensinar são determinados pela sociedade dominante, que, de certa maneira, obriga os professores a transmitirem um saber para que as novas gerações mantenham e deêm continuidade ao status social e político vigente.

Um educador tem tarefa objetiva a realizar : promover o desenvolvimento das crianças que a sociedade lhe entregou para educar, capacitando-as cada vez mais a ultrapassar a si mesmas. Da ciência, os educadores querem constatações para transformá-las em atividades pedagógicas, guiando-se pelo êxito e o bem estar dos educandos.

O saber constitui um meio "prático" e necessário de cada ser humano comprovar as suas forças, as suas aptidões, e realizar o seu destino. Como já foi dito antes, é para a vida que se aprende; é na vida e pela vida que a Escola existe. Assim, penso na existência de uma escola comprometida com a vida, preocupada com o conhecimento produtivo e trasnsformador, aberta, livre à vida, que inclua em seu currículo as perguntas e os problemas mais importantes dos nossos tempos. Uma comunidade de professores e alunos investigando a verdade, valorizando o diálogo e participando; com liberdade de criar e tentar novos caminhos e com capacidade de explorar, investigar e descobrir.

Acredito numa modificação na estrutura educacional brasileira, e visando a ela, gostaria de contribuir através deste trabalho, onde me proponho fazer um estudo dos principais matemáticos gregos . Temos que proporcionar condições para que o aluno aprenda. Há muito que passamos a viver nas páginas, torturando nossos alunos, e conseqüentemente, deixamos de viver na vida. Ministramos aulas totalmente desligadas da nossa realidade e a de nossos alunos; é necessário não apenas sobreviver, mas avançar . . .

O ser humano não tem programas; tem objetivos. Está sempre á procura de um sentido, aspira à compreensão, à interpretação e à transformação do mundo — à "HUMANIZAÇÃO" — e, por sua capacidade reflexiva, almeja a compreensão, a interpretação e transformação de sua própria vida.

É tempo de fazermos as nossas crianças sentirem o mundo em que vivem, para mais tarde perscrutarem outros mundos existentes.

É tempo de alicerçarmos o nosso ensino das matemáticas, nas estruturas mentais natas em todo ser humano, partindo do concreto até chegarmos ao abstrato.

É tempo de alicerçarmos o nosso ensino das matemáticas, partindo das invariantes topológicas até chegarmos as invariantes métricas.

É tempo de traduzirmos o nosso mundo tridimensional, numa linguagem unidimensional, através da geometria, intermediária insubstituível entre as linguagens naturais e o formalismo matemático.

É tempo de construirmos um mundo melhor, mais fraterno, propiciando a educação às massas, para que todos possam partilhar as conquistas científicas do nosso século e séculos passados.

É tempo de construirmos a mente matemática, que irá em tempos futuros conquistar novos mundos, desvendando-nos os mistérios do Universo e da Vida.

JOAQUIM RANGEL
RIO CLARO, JUNHO DE 1980.

1. Epistemologia e Ciência

1.1 Epistemologia e Ciência

"O homem tem naturalmente a paixão de conhecer."
(Aristóteles, Metafísica, livro I,cap.I)

Toda disciplina, seja filosófica ou não, deveria ser precedida do estudo dos diferentes problemas fundamentais do conhecer e do método de conhecimento. Entendemos por conhecer o ato de tornar presente no entendimento o dado formado pelo complexo de relações; por outro lado, o conhecimento é esse dado, sua ação como objeto conhecido, sua natureza e suas leis. O conhecimento está determinado pelo estudo da relação entre o sujeito cognoscente (nossa mente, nossa consciência) e o objeto conhecido (os fatos, objetos e fenômenos); é o que se denomina conhecimento.

Sob diferentes posturas conceituais, preferimos assumir que *conhecimento* pode significar tanto o processo de conhecer como o produto desse processo. Por exemplo, os conhecimentos científicos que consistem no conhecimento causal e metódico dos fatos e dos fenômenos, colocando uns em relação com os outros, de modo que é possível descobrir-lhe a uniformidade e de determinar as leis que o regem, que é o caso da física, da biologia...

A palavra ciência vem do latim *scientia* e significa saber, conhecimento. Ciência é o conhecimento pelas causas reais e naturais comprovadas. É um sistema de conhecimentos metódicos sobre a natureza, a sociedade e o pensamento. Portanto, a ciência é um multiplicador do saber baseado em demonstrações. Contudo, é importante lembrar que esse conjunto de verdades demonstradas encontra-se vinculado entre si, sistematicamente unido; por exemplo: as equações do primeiro grau formam a base de estudo das equações do segundo grau em matemática. Assim, a ciência resulta ser um conjunto de conhecimento sistematizado de maneira demonstrativa.

O trabalho tem como objetivo conceituar os números, sua evolução em consonância com a cultura grega do século VI - III a.C.. Procura-se esclarecer que a Matemática não é apenas uma coleção de teoremas ou uma linguagem derivada da lógica; e procura-se evidenciar a importância da contribuição ao de estruturação que o antigo povo grego deu ao mundo, a nível de filosofia, ciência e matemática.

O momento fundamental filosófico-histórico se encontra a partir do ano 600 a.C. com Tales de Mileto; até o ano 300 a.C.com Euclides, pois os conhecimentos que nos foram legados por seus seguidores ou por livros, têm sido objeto de desenvolvimento de pesquisa até nossos dias.

Com a unidade e as regras de medida, a aritmética elementar do antigo Egito e a astronomia da Babilônia, apareceram os primeiros esboços da ciência, rudimentos que também se encontram na física dos Jônios. Com a teoria mecanicista dos atomistas (Leucipo e Demócrito), a teoria dos números e a acústica de Pitágoras, a geometria de Euclides, os trabalhos de matemática de Alexandre de Perga, a zoologia de Aristóteles, a anatomia de Herófilo, a mecânica celeste de Aristarco de Samo e o gênio de Arquimedes, o saber científico já havia encontrado na Antigüidade orientação positiva.

A morte de Arquimedes fecha o ciclo. Toda a Idade Média marca uma época de paralisação quanto aos trabalhos ditos científicos. Os novos primeiros movimentos apareceram somente com Roger Bacon, ao fim do período; positivaram-se com Copérnico e Galileu, mas é com este último que a física faz sua primeira grande revolução moderna.

É muito comum, em termos de ciência moderna, afirmarmos que ela está presente em nosso cotidiano, devido ao desenvolvimento industrial e tecnológico que aí está. No entanto, a sua descoberta é recente. A ciência moderna tem por volta de trezentos anos, ou seja, tem a idade da modernidade. Isto não significa que os Gregos não faziam ciência ou não foram capazes de definir ciência. É justamente na Grécia que iremos encontrar o nascimento da Filosofia e o início do pensamento científico, ou simplesmente o pensamento racional. A Escola de Mileto contribuiu com o aparecimento do *logos*, entendido como sendo a libertação do mito, ou seja, descoberta da *razão* (o pensar).

Encontramos assim, as origens do pensamento racional. Os filósofos jônios são os responsáveis pela abertura do caminho que a ciência não fez senão seguir: o reconhecimento da *razão*. Para Platão, "a ciência é superior a todas as leis e a todos os arranjos", ou seja, o mais alto produto teórico, a especulação puramente desinteressada, enquanto que para Aristóteles, ela se refere ao necessário e ao eterno, ou seja, constitui "o mais alto produto da civilização" , e classificou as diversas ciências em teóricas (física, matemática, metafísica) e práticas (lógica e moral).

> *Saber uma coisa de modo absoluto é saber a causa que a produziu e que a causa não poderia ser outra.*
>
> *(Aristóteles)*

Através da Filosofia, o conhecimento que antes pertencia a um determinado grupo, é transmitido pelo filósofo, por intermédio da palavra e da escrita, dirigindo-se a todas as cidades. O nascimento da pólis, no sentido próprio, foi fundamental porque nada que pertencesse ao domínio público poderia ser centralizado nas mãos de uma única pessoa, mesmo que fosse o rei. Mas todas as coisas comuns deviam ser o objeto, entre os que compõem a coletividade política de um debate livre.

Tornando público o "mistério", de maneira dialética, pois as discussões eram feitas em plena luz da ágora, com argumentações dialéticas acabando por superar a iluminação sobrenatural, o *logos*, instrumento destes debates públicos, adquire sentido duplo: de um lado, significa a palavra, o discurso que pronunciariam os oradores na assembléia; do outro, a razão, a capacidade de argumentar que define o homem enquanto um ser racional.

Assim, o homem grego encarna o *logos* sobressai-se com uma inteligência excepcional: o espírito de observação juntamente com o poder de raciocínio.

Na história da matemática, observamos que a matemática grega enquanto se encontrava em estado mitológico e ainda não havia conquistado o seu espaço como ciência independente, sobressaía-se de forma expressiva, através das regras de proporção, equilíbrio e simetria na arquitetura, que condicionaram o dimensionamento dos templos, palácios e demais edifícios.

A ciência nasceu de atividades comuns a todos os seres humanos e como resposta racional à visão mágica do mundo, tornando claros dois objetivos fundamentais: o primeiro denomina-se *objetivo inicial*, ou seja, o conhecimento comum; e o segundo denomina-se *objetivo final*, a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, e do mundo humano (individual e social). Este quadro ordenado e explicativo, está baseado em duas exigências:

(i) de racionalidade: obediência ao princípios pré-estabelecidos de acordo com a razão;

(ii) de acordo com a realidade: dar condições aos homens não só de conhecerem, mas de terem a chance de prever fenômenos. Assim, quanto maior a possibilidade de previsão, maior o domínio deles sobre a Natureza.

A ciência tem por objeto o geral. O indivíduo e o individual, como tal, não é e não pode ser objeto da ciência propriamente dita, mas unicamente do conhecimento intuitivo, sensível ou intelectual. O necessário é o objeto da ciência: "conhecer cientificamente o homem é aprender essencialmente a sua realidade".

Concomitantemente, surge a reflexão sobre as condições às quais um conhecimento deve satisfazer para ser considerado "ciência verdadeira" *(epistemé)* de uma coisa. Esta reflexão veremos que se tornou característica de Platão e atinge uma sistemática admirável em Aristóteles. Nas obras filosóficas de Aristóteles, por exemplo, convenciona-se que toda afirmação, para ser considerada "científica", deve ser garantida por uma demonstração que mostre como ela pode ser derivada corretamente de verdades mais gerais. Satisfeita essa exigência, pode-se afirmar que uma ciência particular caracteriza como sendo uma ciência dedutiva, pois explica ao mesmo tempo a causa dos fatos e transmite conhecimentos mais seguros sobre seu objeto.

> *"A ciência é um produto do espiríto humano, produto conforme às leis de nosso pensamento e adaptado ao mundo exterior. Ela oferece pois dois aspectos, um subjetivo, o outro objetivo, ambos igualmente necessários, visto que nos é tão impossível mudar o que quer que seja nas leis de nosso espiríto como nas do Mundo."* *(Bouty. La Vérité Scientifiqu pag.7, 1908.)*

Na preocupação de compreendermos a ciência, não podemos esquecer de esclarecer um ponto fundamental que "Bouty" aborda. É o que se entende por *objetivo* e *subjetivo* em ciência. Portanto:

(i) *objetivamente*, entendemos que a ciência é um conjunto de verdades certas e lógicamente unidas entre si, de tal forma que possamos construir um sistema coerente. Assim, podemos dizer que são ciências: a filosofia, a matemática, a física,...

(ii) *subjetivamente*, a ciência é o conhecimento correto das coisas devido as suas causas ou por suas leis. O "porquê" das coisas, digamos que pertence ao campo da filosofia, enquanto que para as ciências da natureza se limitaria a pesquisa do "como", isto é, trataria de estudar as leis que regem a coexistência ou a sucessão dos fenômenos.

As grandes diversidades e complexidades dos fenômenos que ocorrem no mundo e no homem deram lugar à constituição de várias Ciências. A primeira tentativa de classificá-las se deve a Aristóteles. Segundo ele, a escala do saber enciclopédico dispõe-se em três grupos: o primeiro engloba as ciências destinadas ao conhecer (Matemática, Física e Metafísica); o segundo, aquelas consagradas ao agir (Ética, Economia e Política); o terceiro ao criar (Poesia, Retórica e Dialética). Durante todo o período helênico e também durante a Idade Média, a ciência, permaneceu no estado em que Aristóteles havia deixado.

No ensino escolástico da Idade Média, dividia-se a Ciência em dois grupos:

(i) o trivium: Gramática, Retórica e Dialética;

(ii) o quadrivium: Aritmética, Música, Geometria e Astronomia.

Outras classificações da ciência surgiram depois, tais como as de Francis Bacon, Reneé Descartes, Auguste Comte e Henri Poincaré.

Francis Bacon dividiu as ciências em: ciências de memória (história), de imaginação (poesia), e de razão (filosofia). Preocupou-se com o conceito de verdade através do método para elaboração da ciência, de acordo com o qual só é científico aquilo que já foi testado e aprovado, ou seja, o método experimental.

Reneé Descartes classificou a Ciência segundo a *catena scientiarum*, comparável à série de números inteiros, em que cada nó de ligação representa uma ciência ligada à precedente.

> *As ciências estão unidas de tal maneira que é mais fácil estudá-las em conjunto que isoladamente.*
>
> *(Descartes, Regulae; pag 37)*

Auguste Comte é quem, sem dúvida, classificou-as segundo o critério da complexidade crescente e da generalidade decrescente, pelo qual cada uma das ciências, a partir da segunda, supunha a precedente como sua condição necessária, acrescentando novas determinações que a especificam, ou seja, o estudo do mundo ou Cosmologia, abrangendo a Matemática, a Astronomia, a Física e a Química; o estudo do homem, ou Antropologia, compreendendo a Biologia e a Sociologia. Esta ordem de dependência lógica seria confirmada pela ordem cronológia do desenvolvimento dessas ciências e ditaria o plano de uma educação racional, tanto relativamente à instrução geral como à dos cientistas. Apesar de com os Pitagóricos, a matemática dos números ter sido em parte metafísica e mística, desde a Antigüidade já estava constituída como ciência positiva. No século XIX, a hierarquia de A. Comte é encontrada em diversos autores como Whewell, Cournot e Emile Boutrou.

Para todo tipo de conhecimento supõe-se a existência de um sujeito que aprende um objeto. Dependendo do papel atribuído àquele sujeito e àquele objeto, bem como da forma pela qual é explicada aquela apreensão, resultam diferentes doutrinas que integram a disciplina filosófica conhecida por teoria do conhecimento ou epistemologia (quando se pensa em termos de Filosofia, ligada ao "problema da verdade"). Para alguns autores, existe diferença entre os dois termos, como poderemos observar a seguir.

A palavra *Epistemologia* apareceu nos dicionários franceses por volta de 1906, e seu significado literal é Teoria da Ciência (do grego *epistemé* que significa ciência, e *logia*, teoria e estudo). O seu significado foi alvo de grandes questionamentos e sofrendo críticas por uma lado e recebendo elogios por outros. Lalande (1867 – 1963), em seu *Vocabulaire Technique et Critique de la Philosophie*, insiste na distinção entre teoria do conhecimento (estudo das relações entre o sujeito e o objeto no ato de conhecer), e epistemologia (que seria o estudo crítico dos princípios, hipóteses e resultados das diversas ciências, destinado a determinar sua origem lógica, seu valor e seu alcance objetivo). Por sua vez, a análise reflexiva do ato de conhecer estaria reservada à *gnosiologia* (do grego *gnosis* que equivale a conhecimento e *logos* que significa ciência), por ser a ciência que estuda os problemas fundamentais do conhecimento.

A partir do século XVIII, foi dado à palavra ciência um sentido mais restrito e mais preciso como quando hoje falamos de Academia das Ciências, de cultura científica, das aplicações da ciência, etc. Após a segunda metade do referido século é que surgiram, quase simultâneament, e as duas obras fundamentais sobre o que chamamos hoje de *epistemologia*, embora o termo ainda não existisse: uma que se referia às ciências formais, lógica e matemática, a *Wissenschaftslehre* (1837) de Bernardo Bolzano; e a outra, as ciências da natureza, a *Philosophy of inductive sciences* (1840) de Willian Whewell.

Observamos que o título que Bolzano atribui à sua obra *Wissenschaftslehre* corresponde literalmente em alemão à palavra epistemologia. Todavia, a palavra wissenschaftslehre é usada com grande preocupação de rigor, aplicando-se a questões fundamentais da lógica como as de analiticidade e de derivabilidade, que também são características das matemáticas.

A epistemologia, no período que compreende de Platão até B. Russell, era estudada apenas por cientistas (inclusive matemáticos) em suas horas de ócio ou quando proferiam palestras de divulgação, e por filósofos sem preparo científico.

A epistemologia é encarada atualmente como algo que extrapola o campo da Filosofia para o campo da Ciência, ou seja, atualmente é encarada como uma Ciência. Iremos encontrar o fundamento dessa postura nas crises recentes que abalaram as diversas ciências. As revoluções pelas quais passaram fizeram com que aqueles que a praticavam se questionassem sobre seus princípios e refletissem. O pensador francês L. Brunschvicg define este processo com um jogo de palavras, dizendo:

> *Que os processos da ciência não são sempre progressivos, mas podem ser também reflexivos.*
>
> *(Blanchè. pág. 23.)*

Por mais que reflitamos sobre ciência, não podemos de modo algum ignorar a Filosofia, porque ela volta aos princípios e aos métodos de uma ciência e a ciência nem sempre conduz a uma Filosofia. E mais, nem toda metaciência é necessariamente filosófica. Por exemplo, o desenvolvimento dos trabalhos de Hilbert ou de Gödel, que trata de um discurso sobre a linguagem matemática, ocorre segundo métodos formais que são os mesmos da lógica matemática. Também são exemplos significativos os trabalhos de Brouwer, Poincaré e Gonseth.

Para que possamos entender e compreender a questão citada no parágrafo acima, temos que atentar para outro aspecto do problema fundamental da filosofia: o da possibilidade do conhecimento.

Tomemos como exemplo o *convencionalismo*, que está dentro do chamado ceticismo relativo, que Kant denominou de *agnosticismo*: nega a possibilidade de conhecimento da essência das coisas, mas admitia um conhecimento existencial ou fenomênico. A Teoria de Henri Poincaré, segundo a qual os princípios científicos, pelo menos os da geometria e de mecânica, têm caráter puramente convencional, é um exemplo dessa teoria. O convencionalismo substitui a noção de verdade pela de comodidade. É erro, perguntar se a geometria euclidiana é mais verdadeira que outra. Ela é apenas mais cômoda. A ciência para Henri Poincaré resume-se em uma linguagem convencional, uma maneira de formular o que percebemos dos fenômenos, mas de nenhum modo, uma explicação decisiva do real, colocando em dúvida até mesmo a grande descoberta da translação da Terra em torno do Sol. E concebe o sistema Copérnico apenas como uma linguagem. E, segundo ele, a afirmação que diz que a Terra gira não tem sentido, pois nenhuma experiência a verificará. Simplesmente é mais cômodo supor que a Terra gira.

Entendemos por epistemologia essencialmente o estudo crítico dos princípios, das hipóteses e dos resultados das diversas ciências.Mais especificamente, o estudo da investigação científica e seu produto, o conhecimento científico. No caso da matemática, iremos observar a questão do método, enquanto que na Filosofia da Matemática estarão inseridos epistemologicamente problemas, como:

(i) em que consiste a existência de um objeto matemático? Por exemplo: o número existe? Está convencionalmente provada a sua existência?

(ii) que relação guardam entre si a matemática e a realidade?

Uma resposta sistemática para esses tipos de questionamentos, baseada na Filosofia da Matemática, seria afirmar que a matemática é o mais perfeito exemplo de esforço de homens racionais.

A Filosofia da Matemática é considerada um dos ramos da Filosofia mais controvertidos e difíceis, por contrastar conceitos novos com os resultados antigos.

Os problemas da filosofia da matemática estariam baseados, inicialmente, sobre algumas questões:

- o que é conhecimento matemático?
- qual o significado de verdade em matemática?
- qual o conceito de existência em matemática?

Muitos matemáticos, que têm a preocupação do desenvolvimento de suas especializações, não dariam atenção a nenhum desses questionamentos e possivelmente, dariam a seguinte resposta às questões acima: –Sim, está bem–. Assumindo, assim, a postura de que são irrelevantes as questões do conhecimento.

Observamos que no desenvolvimento do nosso trabalho ao que se refere a questão de filosofia e matemática, ele se encontra fundamentado sob a forma de Filósofos-Matemáticos (Tales, Pitágoras, Platão e Aristóteles) e Matemáticos-Filósofos (Euclides).

Antes de abordar os problemas especiais da Filosofia da Matemática, é importante ressaltar algumas distinções que geralmente os Filósofos costumam fazer.

1.2 O Conhecimento Racional ou Abstrato

O conhecimento *racional* ou *abstrato* ou *lógico* nos permite o conhecimento das qualidades não-sensíveis, essenciais, gerais dos objetos. A ajuda da razão faz com que o homem seja capaz de procurar os fundamentos abstratos das coisas. É por intermédio da razão que concebemos, julgamos e raciocinamos, isto é e refletimos e pensamos.

Destacaremos o conhecimento racional, sob as seguintes formas: *Conceito*, *Juízo* e *Raciocínio*.

1.2.1 Conceito

O *conceito* é uma forma de conhecimento que permite expressar os caracteres gerais e essenciais das coisas e dos fenômenos da realidade objetiva. É uma representação mental abstrata e geral. Vejamos, um exemplo: a idéia de homem é abstrata. Quando nos referimos ao homem, não queremos dizer alguém chamado Antonio, Benedito... Mas sim, uma noção geral para nos referirmos ao Antonio, ao Benedito... O que estamos tentando dizer é que a idéia de homem é universal. A idéia de homem contém implicitamente um conjunto de observações que o caracterizam, por exemplo: ser um animal racional. Essa coisa chamada homem está totalmente determinada e definitivamente fechada, sem dar condições de se adicionar ou subtrair qualquer coisa, matematicamente diríamos que as condições que o determinam são necessárias e suficientes, ou seja, – o homem real é real e, verdadeiramente, animal racional; ou ainda: a velocidad, e o que a define como científica, é o conceito de ela ser a primeira derivada do espaço em relação ao tempo. Esses exemplos foram para mostrar que há uma estrutura bem definida, inflexível. Portanto, dizemos que o conceito é definido ou está definido.

Enfim, o conceito não pode incluir variáveis aleatórias. Todas têm que estar bem determinadas dentro de um conjunto e, determinadas as suas funções, não há como possuir mais que um valor: é unívoca. Por exemplo: - ao dizermos: curva, plana, fechada, centrada trata-se do conceito de circunferência; as observações nos conduziram para algo que é a circunferência, sem necessidade de adicionar ou subtrair alguma das observações para que se definisse e definitivamente acreditasse que se trata de uma circunferência.

Os conceitos de causalidade, quantidade, qualidade, considerados como tais, na realidade objetiva não existem. Todavia, os conceitos gerais surgem dos objetos e fenômenos da realidade objetiva através dos processos mentais de análise, síntese, abstração e generalização de um rol de fatos singulares. Observam-se elementos, faz-se abstração das propriedades não-essenciais, para formar conceitos que refletem as relações e os caracteres essenciais, fundamentais, de um grupo de fatos e fenômenos da realidade objetiva.

Observe o seguinte: - o fato de serem extraídas da realidade objetiva, todas as noções científicas são representações mentais dessa realidade. Portanto, os conceitos só existem no espírito do sujeito cognoscente, mas seu conteúdo é objetivo, isto é, eles só refletem os fenômenos objetivos.

Os filósofos da Idade Média designavam as idéias abstratas sob o nome de *universais.*

> *Os lógicos caracterizavam um conceito ou um termo segundo o ponto de vista da compreensão e da extensão. A compreensão de um conceito é a sua definição, isto é, o conjunto de caracteres que ele compreende. Os antigos diziam, por exemplo, que o homem é um animal racional (animal é o gênero próximo; racional, a diferença específica, o caráter é que distingue o homem das demais espécies). A extensão do conceito é o conjunto dos individuos aos quais se aplica o conceito. A extensão e a compreensão dos conceitos variam em sentido inverso; o conceito do homem tem uma compreensão mais rica que o conceito de animal, pois que ele junta o caráter racional a todos os outros caracteres do gênero animal, e por esta razão tem uma extensão menor; o conceito* **homem** *se estende a menos indivíduos que o conceito animal. A idéia de ser tem a extensão máxima (aplica-se a tudo o que existe), e a compreensão mais reduzida (um só caráter: a existência). Um indivíduo, muito ao contrário, é indefinível: ele possui caracteres que o singularizam, que lhe são próprios. Neste caso não há a mínima extensão: apenas Sócrates é Sócrates! Em compensação, a compensação do indivíduo seria antes descrevê-lo do que o definir, uma vez que a definição se refere precisamente aos caracteres gerais comuns a vários indivíduos. O indivíduo é o singular, o concreto.*
>
> *(Huismane Vergez; pág. 84.)*

1.2.2 Os processos para a Formação de Conceitos

Para podermos conceituar algo, usamos vários processos mentais: análise, síntese, abstração, generalização, etc.

(i) Análise: consiste em decompor um todo (objeto ou fenômeno) em seus elementos constituintes, a fim de compreender o lugar que eles ocupam e o papel que desempenham no todo;

(ii) Síntese: é o inverso da análise; consiste em recompor um todo (objeto ou fenômeno) a partir de seus elementos constituintes, a de compreendê-lo em sua totalidade, em seu conjunto;

(iii) Abstração (do latim=ab trabere = tirar de): consiste em isolar ou separar, para considerá-lo à parte, um elemento de um todo que não é separável na realidade, a fim de distinguir o particular do geral, ou seja, numa linguagem mais filosófica diríamos: o acidental do essencial (aquilo que é sempre o mesmo em objetos diversos, independentemente de suas particularidades individuais);

(iv) Generalização: consiste em estender a toda uma classe de objetos essenciais, gerais, universais, o que foi constatado num certo número de objetos ou fenômenos da mesma classe. Quanto mais um conceito é abstrato, mais geral ele é.

Tanto a análise, como a síntese, a abstração e a generalização são processos mentais inseparáveis um do outro, isto é, não existem separadamente. E com os conceitos formam-se os *juízos* e *raciocínios*.

1.3 Juízo

É uma relação entre dois ou mais conceitos; o "homem não é imortal", são juízos, negando do homem a imortalidade. O *juízo* expressa-se numa proposição, isto é, uma afirmação ou negação entre dois ou mais conceitos. A proposição é a expressão verbal do juízo. Por exemplo: o homem é um ser social e racional.

Homem – conceito – sujeito.

É – verbo que une – afirmando ou negando.

Ser social e racional – conceito ou predicado.

Não devemos pensar que o juízo esteja submetido às categorias gramaticais (sujeito, verbo e predicado) e necessariamente aprisionado a uma forma de linguagem. O conceito explica-se partindo do juízo (todo conceito resume e cristaliza os diversos juízos que determinam sua compreensão e sua extensão).

1.4 Raciocínio

O raciocínio, em geral, é a operação pela qual o espírito, de duas ou mais relações conhecidas, conclui uma outra relação que desta decorre logicamente. Em outras palavras, é uma combinação de juízos, da qual se tira uma conclusão, que é outro juízo, ou seja, é um processo para justificar logicamente uma proposição (uma proposição é um juízo representado por sua expressão verbal).

O raciocínio matemático é capaz de nos fazer desprender da realidade atingindo os limites do pensamento. Como o raciocínio lógico consiste em se servir do que se conhece para encontrar o que se ignora, apresenta-se fundamentalmente sob as formas:

(i) *raciocínio dedutivo*, o que se conhece inicialmente uma verdade universal;

(ii) *raciocínio indutivo*, ou um ou vários casos singulares;

além do que acreditamos ser importante comentar, e que chamaremos de *raciocínio análogo*.

1.4.1 Dedução

A Dedução segundo a Lógica Aristotélica, é uma relação que vai do geral para o particular, isto é, parte dos princípios gerais para os juízos particulares. Entretanto, na Lógica Matemática existem deduções que partem do geral para o geral (por exemplo: - Todos os subgrupos são normais). O ponto de partida da dedução é sempre um princípio admitido como verdadeiro a *priori*. O ponto de chegada é a *tese* ou a *conclusão*, que é aquilo que se quer provar.

Há duas formas de dedução:

(i) Dedução Analítica, Formal ou Silogística

É um raciocínio puramente formal, onde a conclusão não representa um conhecimento novo, pois ela está implícita nos princípios. É muito utilizada na lógica formal, tendo a sua forma mais importante o silogismo: raciocínio composto de três juízos ou proposições: duas premissas (maior e menor) e uma conclusão. Como exemplo de um silogismo ou dedução formal temos a seguinte afirmação: Todos os homens são mortais (premissa maior).

Ora, Sócrates é homem (premissa menor). Logo, Sócrates é mortal (conclusão).

Observe que nas duas premissas, tomadas em conjuntos, já está implícita a conclusão – Sócrates é mortal.

A deducção formal é totalmente tautológica, mas completamente "infrutuosa".

(ii) Dedução Sintética, Construtiva ou Demonstrativa

É o raciocínio mais empregado nas ciências matemáticas. A conclusão é uma proposição nova que se constrói com a ajuda dos princípios. Por exemplo: num teorema de geometria a conclusão não está contida mecanicamente nos princípios (hipótese), mas a demonstração consiste em construí-la com a hipótese. Para compreendermos melhor, tomemos como exemplo:

> *Constrói-se a soma dos ângulos de um polígono com as dos triângulos nos quais pode-se decompor o polígono e cujo número é o de seus lados, menos dois.*

É importante ressaltar que esse teorema é mais geral do que o que estabelecia a soma dos ângulos do triângulo, pois nos fornece a soma dos ângulos de um polígono qualquer que seja o número de lados do mesmo.

> *O matemático as vezes espera o resultado do cálculo em que mergulhou com a mesma itensidade com que o físico aguarda a experiência crucial.*
> *(TANNERY, De la méthode dans les sciences; pág.31).*

1.4.2 Indução

A *indução* é o raciocínio que vai dos fatos à lei (ou seja, que vai do particular para o geral), isto é, que sobe da observação dos fenômenos às leis que o regem, que são relações constantes e necessárias que há entre eles, através das observação dos fatos e dos fenômenos da realidade objetiva, que caracterizam o ponto de partida da indução, sendo que seu objetivo, ou seja, seu ponto de chegada é o estabelecimento de leis ou regularidades que regem determinados fatos ou fenômenos. É o método mais usado pelas ciências naturais e sociais.

A indução compreende um conjunto de procedimentos, uns empíricos, outros lógicos e outros intuitivos, que iremos desenvolver mais adiante.

Distinguem-se três formas de indução:

(i) Indução Formal

Exprime realmente a totalidade dos fenômenos observados. Por exemplo: A Terra, Marte, Vênus, etc. são desprovidos de luz própria. Ora, a Terra, Marte, Vênus, etc. são todos os planetas. Logo, todos os planetas são desprovidos de luz própria.

Essa lei se refere a todos os planetas do nosso sistema solar. Observe que a indução formal se caracteriza por não aumentar o conhecimento, mas apenas substitui por um termo geral uma série de termos singulares. *Observação: Princípio da Indução Finita*

Um método importante e bastante usado em Matemática, através do qual podemos provar certas afirmações que se referem a números inteiros positivos. O enunciado deste princípio é o seguinte:

Se uma propriedade referente ao inteiro positivo n é tal que

(a) *é válida quando $n = 1$;*

(b) *da validade da propriedade para $n = k$ é possível garantir a validade da mesma propriedade para $n = k + 1$.*

Então, a propriedade é verdadeira para todo n inteiro positivo.

<u>Exemplo</u>: *Provemos que a soma dos n primeiros números naturais é dada por*

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) *Para $n = 1$, temos $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, logo a afirmação é válida para $n = 1$.*

(b) Suponhamos, agora, que a propriedade seja verdadeira para $n = k$ (hipótese de indução), isto é

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Temos que

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Logo, a propriedade é também verdadeira para $n = k + 1$. Como consequência, segue que a propriedade é verdadeira sempre.

(ii) <u>Indução Científica</u>

A lei não exprime a totalidade, mas, sim, uma parte dos fenômenos. Conclui-se a partir de um ou mais fatos particulares para todos os fatos semelhantes, presentes e futuros. Por exemplo: Sócrates morreu, Platão morreu, Aristóteles morreu, etc. Ora, Sócrates, Platão, Aristóteles e os demais eram homens. Logo, todos os homens são mortais.

Observe que não foram observados todos os casos ou fatos, mas um certo número deles, considerados suficientes para estabelecer a relação constante e necessária representada pela lei. Na prática nem sempre é possível observar todos os fatos ou fenômenos, portanto este é o raciocínio mais usado nas ciências. É claro, que a indução científica é imperfeita e passível de erro.

Observe que a indução difere essencialmente da dedução. A diferença se encontra no raciocínio dedutivo. A conclusão está contida nas premissas como parte do todo, enquanto que no raciocínio indutivo, a conclusão está para as premissas como o todo está para as partes. Como caso particular da indução, desenvolveremos a *analogia*.

1.4.3 Analogia

Consiste no raciocínio da passagem de uma semelhança constatada a outra semelhança não constatada. Por exemplo: constata-se que o planeta Marte tem atmosfera semelhante à da Terra e disso se conclui que pode haver seres vivos em Marte.

O raciocínio por analogia é muito freqüente, e às vezes, traz resultados positivos. Mas temos de convir que se trata de um raciocínio incompleto, arriscado e de valor discutível.

Apesar de certos autores acreditarem que indução e dedução, tal como análise e síntes, e abstração e generalização, não são modos isolados de raciocínio e de pesquisa, acreditamos que eles se entrelaçam e até mais: são inseparáveis. Por exemplo: a conclusão estabelecida pela indução pode servir de princípio (premissa maior) para a dedução, mas a conclusão da dedução pode também servir de princípio da indução seguinte, e assim por diante. Exemplos: o ferro conduz eletricidade, o cobre também, o zinco também, etc. Ora, o ferro, o cobre, o zinco, etc. são metais. Logo, todos os metais conduzem eletricidade.

A conclusão deste raciocínio indutivo serve de premissa maior para o raciocínio dedutivo: todos os metais conduzem eletricidade.

Ora, o ouro é metal. Logo, o ouro conduz eletricidade.

As conclusões da analogia não são tomadas nem como "necessárias" nem como "prováveis", mas como apenas "verossímeis". Devido a certos impasses, o seu emprego pela ciência é grandemente evitado, pois pode conduzir a erros graves. Contudo, é importante ressaltar que se trata de um tipo de raciocínio pouco conhecido que talvez venha a adquirir grande importância dentro das ciências humanas e mesmo em ciências exatas, que recentemente se vêm desenvolvendo, como a cibernética.

2. O Conhecimento Matemático

2.1 O Conhecimento Matemático

Ó Matemática severa, não te esqueci, desde que as tuas sábias lições, mais doces do que o mel, penetraram no meu coração como uma onda de frescura ... Havia no meu espírito uma coisa vaga, um não sei quê, espesso como fumo; mas fui capaz de subir religiosamente os degraus que conduzem ao teu altar, e dissipaste esse véu de escuridão como o vento dissipa o nevoeiro. Substituíte-lhe uma frieza excessiva, uma prudência consumada e uma lógica implacável.

(LAUTRÉAMONT, Les chants de Maldoror)

A palavra *matemática* vem do grego e significa: o que se pode aprender (*máthèma* significa aprendizagem e *Mathemata* é conhecimento).

Houve tempo em que a Matemática pertenceu ao campo da Filosofia e as pessoas não podiam estudar Filosofia sem, também, estudar Matemática, como se esta fosse efetivamente um dos seus ramos. Assim, a Matemática no passado integrou o campo dos estudos abrangidos pelo termo da Filosofia. O fundamento dessa questão está baseado no conceito antigo da palavra *filósofo* que na Antiga Grécia significava *"amigo da ciência e da sabedoria"*, e é atribuída a Pitágoras. Para os gregos, a filosofia era a *ciência universal*, isto é, nela se encontravam todos os conjuntos de conhecimentos que se agrupavam sob o nome de *ciência, de arte e de filosofia*. Como já vimos no capítulo anterior, esta concepção perdurou sensívelmente até os fins da Idade Média, quando as artes e as ciências se destacaram e conquistaram sua autonomia. Esta separação é hoje reconhecida e existe um interessse cada vez maior de distinguir os conhecimentos científicos dos filosóficos. Assim, dificilmente encontraríamos algum filósofo em nossos dias que classificaria a ciência matemática como um ramo da Filosofia.

A palavra Filosofia significa: amor ao saber. Ora, o objeto da Ciência Matemática constitui um dos ramos do saber. Portanto, amar o saber era também amar aquilo que constitui hoje a Matemática.

Através dos séculos, observamos que ocorreu uma divisão no trabalho intelectual, e o resultado dessa divisão foi o reconhecimento de que a Matemática é uma ciência particular, com seu campo próprio, e que não se confunde com a própria Filosofia. Há, no entanto, um laço profundo de relacionamento entre a Filosofia e a Matemática.

Na história do pensamento, uma das primeiras ciências a constituir-se foi a Matemática. E foi exatamente por este motivo que ela chamou, primeiramente, para si a atenção: por ter sido a disciplina que se desvinculou de um saber não "científico", como seria o saber teológico e filosófico, mas manteve relações com essas ordens do saber. Tanto que ainda hoje testemunhamos as preocupações de ordem matemática entre os estudiosos das Escrituras, da Religião, dos Astros, ..., que relacionam tal estudo à religião, e entre os cultores da própria Filosofia.

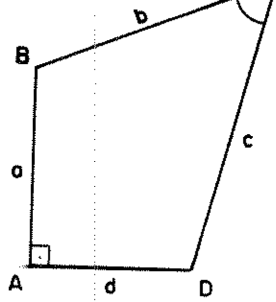
Ao afirmarmos que: "o Matemático é o homem do raciocínio por excelência", o que nos incomoda é que o raciocínio é também instrumento do Filósofo. No entanto, as outras ciências utilizam o raciocínio, e mais do que isto, utilizam também a observação. E é a observação que faz com que essas ciências se diferenciem, como é o caso da Biologia, da Física, da Astronomia, das Ciências Socias, etc. Nestas ciências se inicia o conhecimento através da observação que, de certa forma, também leva a conclusões. Porque o conhecimento científico só será considerado válido quando a verificação que nada mais é do que uma nova observação, confirmar ou pelo menos não refutar as hipóteses levantadas, para explicar os fatos selecionados para a investigação.

A Matemática por excelência é uma ciência dedutiva, é uma ciência do raciocínio. Está sempre presente na história das culturas dos homens, através das suas linguagens, das escritas, de seus questionamentos, práticos ou teóricos. Portanto, cada civilização produz sua matemática, e assim, não há como compararmos que uma determinada matemática seja superior à outra, mas apenas que são diferentes.

Existem várias teorias epistemológicas que se dedicaram ao problema da origem do conhecimento matemático. Todavia, para o desenvolvimento de nosso trabalho, há necessidade de analisar as relações da matemática e a realidade, sob as seguintes correntes de pensamento: o *empirismo*, o *racionalismo* e o *intelectualismo*(o realismo e o idealismo).

2.1.1 Empirismo

Acreditam que a única fonte de conhecimento humano é a experiência sensível. É através da experiência sensível que se consegue exclusivamente formar todos os conceitos (gerais e abstratos). Os fundamentos desta doutrina se encontram na noção de reminiscência em Platão (427 – 347 a.C.). A matemática aqui seria uma ciência de observação, onde os *pontos*, as *linhas* e os *círculos*, que cada um tem no espírito, são simples cópias dos pontos, linhas e círculos que conheceu na experiência, por exemplo: o ponto sugere a representação de uma estrela no caderno; a linha, a representação do fio de prumo; o plano, a representação da mesa; o círculo, para representar o Sol ou a Lua, etc. A noção de números viria quando o pastor percebe que seu rebanho não está completo, ou ainda quando alguém que, não sabendo contar, pudesse pagar a sua hospedagem empilhando moedas até que se dissesse: — Pare! Desta forma, o conhecimento humano se torna limitado ao mundo empírico, ou seja, não há como superar a experiência, tornando o conhecimento supra sensível, impossível. Um outro exemplo encontrado na história da matemática, é no Egito. Devido às inundações periódicas do Rio Nilo, obrigavam os harpedonatas ou agrimensores a retomar cada ano o traçado dos limites das propriedades. A Geometria dos Egípcios tinha um caráter experimental, as fórmulas eram empíricas. Para avaliar a área de um quadrilátero de lados a, b, c e d, serviam-se da fórmula:



$$\frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2},$$

que dá um valor tanto mais aproximado quanto mais os ângulos do quadrilátero se aproximarem de ângulos retos.

Assim, observamos que a necessidade de saber gera de início os conhecimentos empíricos, que são resultados do ato espontâneo do espírito, mas permanecem conhecimentos imperfeitos, pois lhes falta por vezes a objetividade e se formam ao acaso, por generalização prematura, sem ordem nem método (os provérbios do povo, as receitas metereológica dos camponeses,...) Esses conhecimentos empíricos não devem ser desprezados. Eles constituem o primeiro degrau do que chamamos de ciência, que só tendem a aperfeiçoar os processos que o empirismo emprega para adquirir seus conhecimentos.

Em contra-partida ao mundo da matemática empírica, encontramos no famoso filósofo Husserl, a seguinte postura:

> *Em geometria, a experiência não está presente enquanto experiência. Quando o geômetra desenha no quadro as suas figuras, constrói traços que existem de fato no quadro que, por sua vez, existe de fato. Todavia, não mais que gesto físico de traçar, a experiência da figura desenhada, enquanto experiência, não fundamenta, de modo algum, a intuição e o pensamento que conduzem à essência geométrica ... Para o geômetra ... a intuição das essências (Wesenschau) ... fornece os fundamentos últimos.*
> *(Husserl, Idées diretrices pour une phénoménologie, págs. 31 – 32.)*

Os racionalistas modernos afirmam a superioridade da razão sobre os sentidos, procurando mostrar que o que há de fundamental no intelecto independe dos dados sensíveis.

> "Nada existe no intelecto que antes não estivesse nos sentidos" (afirma o adágio empirista, ao qual Leibniz (1646 – 1716) acrescenta: "Exceto o próprio intelecto".)

Nos estudos mais recentes da filosofia, a convergência de várias posições levou à constituição do conhecido *empirismo científico*, representado principalmente pelo *empirismo lógico.*

2.1.2 Racionalismo

Durante o século VI a.C., nas cidades gregas da Ásia Menor, predominou uma forma de reflexão, inteiramente positiva, sobre a natureza: *racionalismo* (de *ratio*, razão). Somente recebe essa denominação de conhecimento racionalista, o conhecimento que é necessário e universalmente válido; por exemplo: "o todo é maior que as partes" é um pensamento claro e conciso, não há como a razão contradizer. Desta forma, os racionalistas se fundamentam no pensamento que os juízos da razão possuem necessidade de lógica e validade universal.

Os adeptos do racionalismo, afirmam como principal fonte de conhecimento a *razão*. Despreza-se o conhecimento dado como sobrenatural e cultua-se o conhecimento racional. A Matemática torna-se paramêtro do conhecimento científico. Supunham, ainda, que seria possível atingir as verdades absolutas ou pelas noções a priori do espírito ou pelas idéias inatas. A forma mais antiga do racionalismo se encontra em Platão.

Descartes e Leibniz são caracterizados por este tipo de conhecimento.

René Descartes (1596 – 1650) caracterizou seu pensamento por:

(i) adotar o raciocínio matemático como modelo para chegar a novas verdades;

(ii) ver o mundo de forma matematizada.

Associando fatos algébricos e geométrico, Descartes criou a *Geometria Analítica* que apareceu como desafio aos acontecimentos científicos que, nos séculos XVI e XVII, eclodiram na Europa ocidental e colocaram em evidência problemas procedentes de propriedades das curvas e das superfícies do plano e as equações algébricas com duas variáveis.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) descobriu, juntamente com Isaac Newton (1643 – 1727) o princípio filosófico do *Cálculo Diferencial e Integral*, julgando ser possível a criação de uma linguagem científica universal que, complementada por um sistema dedutivo e simbólico, poderia substituir a argumentação descritiva pelo cálculo funcional (uma nova forma de calcular, ou seja de prever).

Quanto ao problema das "verdades matemáticas", os racionalista não conseguem harmonizá-las com a experiência senão através da hipótese de um intermediário divino:

> *Deus criou o mundo em conformidade com as verdades eternas que ocupam o seu entendimento, o que explica que elas venham a ser encontradas na experiência".*
>
> *(Blanché, pag. 98.)*

Acreditamos que as verdades matemáticas não são eternas, imutáveis, porque estão em contínuo processo de aprofundamento. Daremos um exemplo para ilustrar este fato. Vejamos: o primitivo conceito de adição, que se baseia no processo de contar coisas, objetos, tratava-se de um processo finito. No entanto, a teoria das progressões geométricas cria uma situação de ousadia, pois vai pensar no infinito e ao mesmo tempo limitado!

Faz parte do currículo do 2º Grau, o ensino de *soma infinita*:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots$$

Mesmo que continuemos indefinidamente, esta soma não ultrapassará o número 2. Se o leitor observar, compreenderá que a soma dessas infinitas parcelas se aproximará indefinidamente de 2. Isto significa que a diferença, em valor absoluto, entre este número e aquela soma tornar-se-á cada vez mais próxima de zero, porém jamais coincidirá com zero.

Os racionalistas tiveram êxito ao colocar o fator racional no conhecimento humano. Todavia é exclusivista fazer do pensamento a única fonte de conhecimento, segundo os empiristas. É claro que assim se harmoniza com o ideal de conhecimento, baseando-se que todo conhecimento possui necessidade lógica e validade universal. Porém, se torna exclusivista, pois trata uma forma determinada de conhecimento, do conhecimento matemático.

2.1.3 Intelectualismo

O intelectualismo surge como mediador entre as correntes racionalistas e empirístas. A base entre essas correntes é epistemológica. Enquanto os racionalistas consideram que a única fonte e base para o conhecimento humano é a razão, os empirístas acreditam que é a experiência. Os intelectualistas como mediadores acreditam que é através dessas duas correntes que ocorre a produção do conhecimento. Tanto os intelectualistas quanto os racionalistas, baseiam-se na tese que há juízos logicamente necessários e universalmente válidos, não apenas ao que se refere ao objetos ideais – os empiristas também admitem este fato –, mas também ao que se refere ao objetos reais. O fundamental é que os intelectualistas consideram os elementos destes juízos, os conceitos, derivados da experiência. Deste modo, a consciência cognoscente lê na experiência, tira os seus conceitos da experiência, portanto, o intelectualismo afirma que existe no intelecto, no pensamento, dados novos da experiência. Assim, a experiência e o pensamento edificam a base do pensamento humano.

O intectualismo aparece com os gregos, quando Sócrates e Platão ensinaram que a *definição de uma coisa nos revela o que realmente essa coisa é.* Aristóteles é o principal representante desta corrente. Ele foi discípulo de Platão, ou seja, ele sofreu influências do racionalismo, mas também sofreu influências do naturalismo. E como naturalista se sentiu impelido a tentar fazer uma síntese do racionalismo e do empirismo. Sob a postura empiríca ele colocava o mundo das idéias dentro de uma realidade empírica. As idéias eram colocadas sob a forma mais concretas e se encontravam dentro das coisas concretas.

2.1.4 Realismo

Segundo os realistas, a matemática é comparada a uma viagem de descobrimentos, onde os matemáticos não podem criar ou inventar os objetos acerca dos quais fala; porque todos esses objetos estão aí para serem descobertos e descritos. Em um dos escritos de Bertrand Russell, ele afirma:

> *"Todo conhecimento deve ser reconhecimento; sob pena de não passar de ilusão, a Aritmética precisa ser descoberta exatamente no mesmo sentido em que Colombo descobriu as Índias Ocidentais; e não criamos números, assim como ele não criou os Índios. ...Tudo o que puder ser imaginado, existe; e o ser é anterior e não um resultado do fato de ter sido pensado".* *(Meu desenvolvimento filosófico, pág. 45)*

A concepção realista confunde-se em matemática com o próprio desenvolvimento da noção de números, porque a sua origem está relacionada a uma realidade concreta, ou seja, quando o homem sentiu necessidade de "contar" suas ovelhas e se utilizou de pedrinhas para representar a sua coleção. Mais tarde o homem utilizou seus dedos ao invés das pedrinhas. Tudo isso é produto da razão humana. Portanto, para os realistas admitem a existência dos números, como entidades abstratas, independentes do nosso pensamento.

2.1.5 Idealismo

O idealismo surge como tese racionalista que tem o objeto das matemáticas como puramente *ideal*. As matemáticas seriam independentes dos fatos, e para serem verdadeiras não necessitam que seus objetos sejam *reais*. É nada mais nada menos do que a Teoria de Platão (a teoria das idéias). A idéia inicial se encontra em Sócrates, com a procura lógica dos conceitos, mas é com Platão que toma corpo. Discutiremos com mais detalhes sobre o idealismo no capítulo destinado a Platão. De modo geral, o idealismo matemático significa todo o conjunto de teorias que tendem a renovar e aprofundar o saber platônico, que segundo os próprios gregos, tinha matematizado a natureza.

O ideal se opõe ao real; o real não importa na consciência da existência das coisas, e o real é precisamente a certeza imediata dessa existência. Para os platônicos, o ideal constitui uma espécie de mundo perfeito e eterno, anterior e superior ao mundo visível. Para diversas concepções idealistas, o ideal é representação do pensamento sem nenhuma realização material. Os números representam idéias, ou seja, possue a afirmação de que as pessoas possuem uma infinidade de idéias-de-números.

2.2 O Critério e o Conceito de Verdade

"...As verdades da Geometria governam todas as coisas que for possível intuir parcialmente, sejam reais ou produtos da nossa imaginação. As fantásticas visões do delírio, as magnifícas invenções da lenda e da poesia, onde os animais falam e as estrelas se imobilizam, onde os homens se transmutam em pedras e as árvores se tornam homens, onde as pessoas se salvam do afogamento puxando-se a si próprias pelos cabelos – tudo fica, na medida em que for objeto de intuição, submisso aos axiomas da Geometria". (Frege, Gottlob. The Foundations of Arithmetic, pag.21)

Fui conduzida a ler Bertrand Russell e me apaixonar por ele principalmente por dizer: - "Eu queria certeza assim como se quer fé religiosa". Ao ler isto, me senti como tendo descoberto que até mesmo os grandes homens tinham dúvidas não só na ciência mas também em relação à vida. É claro que isto é uma coisa óbvia, mas é do próprio óbvio que as pessoas mais se banalizam. A reflexão que ocorreu em mim foi sobre a questão da verdade. O que nos dá certeza de algo? Qual é o conceito de verdade em Matemática?

Historicamente, acreditamos que foi Aristóteles que introduziu a questão da verdade, sob um ponto de vista de não somente analisar o termo "verdadeiro", mas de trazer à tona que o "ser é norma da verdade".

Falso é dizer que o que é, não é, ou o que não é, é; verdadeiro é dizer o que é, é e o que não é, não é...

(Aristóteles, Metafísica III, 1011b – 27.)

Quando falamos sobre o conhecimento, afirmamos que a verdade do conhecimento se encontra na concordância do conteúdo do pensamento com o objeto. Denominamos de *conceito transcendente* da verdade este tipo de concepção. Há uma outra concepção, sob a qual a essência da verdade se encontra perante o nosso pensamento, ou seja, a verdade é a concordância do pensamento consigo mesmo, o qual denominamos de *conceito imanente*. Através do conceito imanente é que iremos fundamentar as questões vindas da matemática.

Sabemos que não basta apenas dizer que um conhecimento seja verdadeiro. Há necessidade de provar a certeza de que se trata de um conhecimento verdadeiro. Esta questão está baseada no *critério da verdade*. A palavra critério vem do grego: *kriterion* que significa juízo, *krinein* significa julgar. Ficando a critério do juiz, do princípio e da norma, distinguir o verdadeiro do falso.

A questão do critério de verdade está em estreita relação com a questão do conceito de verdade. A demonstração disto ocorre sob o ponto de vista do idealismo lógico (onde a verdade está na concordância do pensamento consigo mesmo). No entanto, a concordância do pensamento somente ocorre quando este se encontra livre de contradições, ou seja, reforçando a noção do conceito imanente ou idealista. È necessário considerar a ausência de contradições, como critério de verdade.

Sem dúvida, a ausência de contradições é um critério de verdade, mas não o faz um critério válido para todo tipo de conhecimento. A sua validade abrange apenas uma classe determinada de conhecimento: as ciências formais ou ideais.

Ao pensar na Lógica ou na Matemática, observamos que o pensamento não se encontra com objetos reais, mas sim com objetos mentais, ideais, permanecendo dentro da sua própria classe. Assim, é válido tanto o conceito imanente de verdade como também o seu critério.

Retomando os gregos, sabemos que o papel da geometria é extremamente dual. Em princípio ela assume o papel de descrever precisamente a realidade em que vivemos, e também assume o papel de uma disciplina intelectual, uma estrutura dedutiva. Claro que, atualmente, esses dois aspectos são tratados separadamente. A geometria euclidiana está baseada em alguns axiomas e postulados que citaremos:

1. *Uma reta pode ser traçada ligando dois pontos quaisquer.*

2. *Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.*

3. *Um círculo pode ser traçado com qualquer centro e com qualquer raio.*

4. *Todos os ângulos retos são iguais.*

5. *Se duas retas, em um mesmo plano, são cortadas por uma outra reta e, se a soma dos ângulos internos de um lado é menor que do que dois ângulos retos, então as retas se encontrarão, se prolongadas suficientemente do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos.*

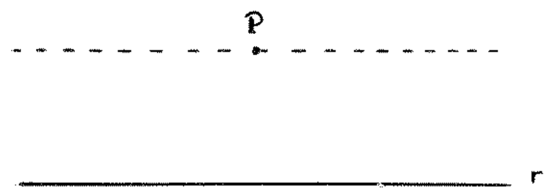
Dentro deste contexto de verdade, não podemos deixar de mencionar sobre o uso das palavras axioma ou postulado segundo a geometria como descrição do mundo. Em uma primeira versão, os axiomas ou postulados significam uma verdade evidente por si própria ou universalmente reconhecida, uma verdade aceita sem necessidades de demonstração. A outra versão assume que os alicerces da geometria dedutiva são os axiomas, sobre os quais as conclusões posteriores se basearão. Essa última é a que sobrevive em nossos dias. Os postulados 1, 2, 3, 4, parecem de enunciados fáceis e, em verdade, evidentes por eles mesmos. O postulado 5 já não apresenta um enunciado tão evidente quanto aos demais, parecendo-nos um tanto complicado, difícil de ser interpretado por se apresentar distante das nossas experiências do dia-a-dia. Contudo, esse postulado vem de Euclides e é conhecido pelo postulado das paralelas, ou ainda como o quinto postulado. Há uma coisa realmente curiosa neste postulado das paralelas: a palavra "paralela" não aparece; embora Euclides se expresse na Definição 23 de seu livro "Elementos": *"Retas paralelas são retas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambos os sentidos, não se encontram, em qualquer dos sentidos"*. Foi a partir dos estudos deste axioma que se tem a origem do desenvolvimento das geometrias não euclidianas, por exemplo: – a geometria rimaniana. A explicação que se tem para denominar o quinto axioma de Euclides, o axioma das paralelas, é que ele é equivalente a qualquer uma das seguintes afirmações, envolvendo a palavra *paralela*:

1. *Se uma reta intersecta uma das paralelas, intersectará a outra.*

2. *Retas que são paralelas a uma reta são paralelas entre si.*

3. *Duas retas que se intersectam não podem ser paralelas a uma mesma reta.*

4. *Sejam dados, em um plano, uma reta "r" e um ponto "P" fora da reta "r". Então existe uma e só uma paralela a "r" passando por "P".*



- Observações:

(i) *A palavra equivalente neste contexto significa que qualquer uma destas afirmações, juntamente com os outros postulados, implica o quinto postulado de Euclides, e vice-versa.*

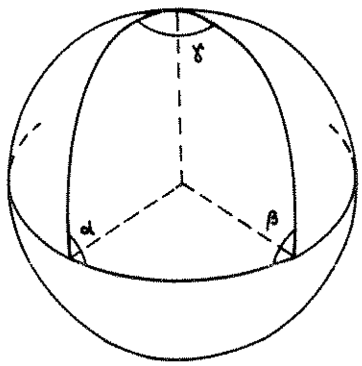
(ii) *A quarta afirmação tornou-se a forma padrão de definição sobre paralelismo em nossos dias.*

2.3 Crítica ontológica da verdade

Nas matemáticas o conceito transcendente da verdade se revela inócuo. Supõem um falso conceito de realidade. As leis matemáticas não são pro priedade das coisas, mas de uma certa forma estão ligadas. Trata-se de relações ideais, noções construídas operatoriamente, por exemplo: - o número dois, como todo número, não terá sentido fora do contexto matemático, ou seja, fora das operações matemáticas que o gera. Assim, fundamenta-se a sua coerência e a sua legitimidade como elemento de um juízo verdadeiro. *A verdade matemática é a unidade de condições operatórias que supõe toda proposição matemática.*

A história nos mostra que o conceito de verdade como correspondência entre o *ideal* e o *real* é obsoleto. Fundamentando-se, em última instância, em uma imagem limitada da realidade, como nos mostra a própria história – o descobrimento das geometrias não–euclidianas (conceitos e operacionalidades) – tornaram-se a base da Teoria da Relatividade formulada por Albert Einstein (1879–1955). Essas geometrias baseiam-se em espaços diferentes do concebido por Euclides. Surge então a pergunta: – Qual das geometrias é verdadeira? Embora, cada uma das geometrias tenha princípios que entrem em contradição com alguns princípios de outras, cada uma delas é logicamente consistente, *cada uma delas é verdadeira.* A geometria euclidiana é suficiente para o estudo de vários problemas importantes e do cotidiano, desde o século III a.C., refletindo partes do mundo *real.* As geometrias não-euclidianas refletem também partes do mundo real, mas com refinamento maior que a geometria euclidiana, e é de grande importância epistemológica, pois, desde Platão, foi atribuído aos axiomas de Euclides um caráter absoluto, negando a eles qualquer procedência experimental. Assim, a seguir apresentamos uma amostra de exemplos de três espaços diferentes e importantes na matemática, que enfatiza a questão do ideal e real.

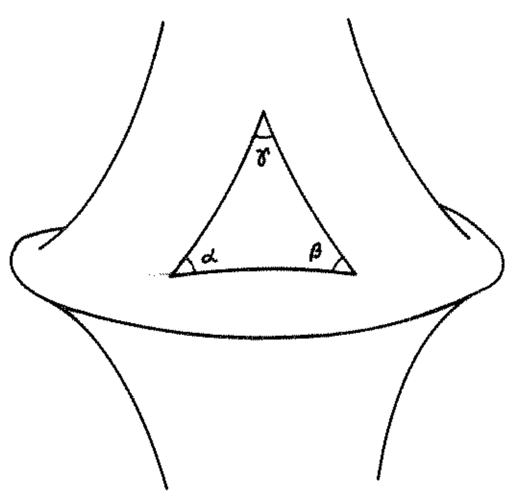
A geometria de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), se fundamenta *"que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que a soma de dois ângulos retos".*



$$\alpha + \beta + \gamma > 180°$$

Geometria de Riemann

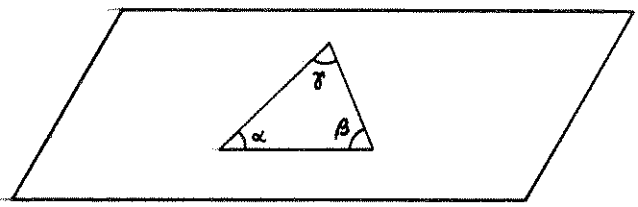
A geometria de Nikolas Ivanovich Lobacheviski (1793–1856), se fundamenta *"que a soma de ângulos internos de triângulo é menor que a soma de dois ângulos retos".*



$$\alpha + \beta + \gamma < 180°$$

Geometria de Lobatcheviski

Enquanto que a Geometria Euclidiana se fundamenta *" a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a soma de dois ângulos retos".*



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

Geometria de Euclides

Ao estudar essas geometrias, concluimos que a geometria euclidiana possui curvatura zero, a geometria rimaniana possui curvaturas positivas, e a geometria lobachevskiana possui curvaturas negativas.

- Geometria Euclidiana ⇒ C = 0
- Geometria Rimaniana ⇒ C > 0
- Geometria Lobachevskiana ⇒ C < 0

Através destes exemplos, podemos concluir que *uma proposição válida em um sistema, pode não ser válida em outra, sem que isso não indique nenhuma contradição.* Uma outra conclusão importante, trata-se da importância de homens como Riemann e Lobachevski que contribuíram para a concepção de uma nova Física. Nesta, o conceito de matéria se misturaria ao conceito de energia, e que se tornou mais fantátisco: – o tempo físico passou a ser relacionado intimamente com o espaço.

2.4 O Conceito de Existência

Uma das questões fundamentais na Filosofia da Matemática, consiste na conceituação de existência em Matemática. A palavra "existir" (do grego, exsistere: de ser; existir é ser), nas matemáticas, segundo Poincaré: – "só pode ter um sentido: significa estar isento de contradição". A palavra "existência" também tem as suas raízes no grego e o seu significado filosófico é o que designa a vida em suas funções e variações "organopsíquicas". De uma forma mais geral, a vida é um ato; a existência denuncia-se por uma possibilidade que a pessoa existe. Para Aristóteles, a existência é uma matéria vestida de forma.

> *...Enquanto os matemáticos estudam seres* **imutáveis**, *mas na qual estão inseridos, e a física estuda os seres separados uns dos outros mas móveis, a Filosofia Primeira ou Metafísica, como é chamada, conforme designação dos comentadores de Aristóteles, é a "Ciência que estuda o Ser na sua qualidade de ser e os atributos que lhe pertencem essencialmente".*
>
> *(Aristóteles, Metafísica* Γ*11003 a 20.)*

Matemáticos notáveis como David Hilbert (1862 – 1943) e L. Brouwer (1881 – 1966), principais representantes das correntes do Formalismo e do Intucionismo, respectivamente, se preocuparam com o assunto.

A teoria de Hilbert, diríamos que está baseada na questão filosófica (ou lógica), onde a existência, em Matemática, resume-se na ausência de contradição. De um modo geral ele defende que uma teoria é lícita, do ponto de vista matemático puro, quando for consistente, isto é, uma proposição e a sua negação não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Supor o contrário, constituiria, aparentemente, um erro filosófico. Aprofundando um pouco, podemos, com certeza, entender o papel fundamental da metamatemática no sistema hilbertiano, cujo objetivo era de provar a consistência das diversas teorias matemáticas. Os formalista entendem que existência significa compatibilidade.

É importante observar que numa teoria, quando se encontra a contradição, ela se torna trivial. Pelos princípios da lógica simbólica, prova-se que, se em uma teoria forem demonstráveis $\mathcal{P}$ e $-\mathcal{P}$, qualquer proposição da teoria é demonstrada. A consequência é que não teremos como distinguir o que é demonstrável e não-demonstrável. Logo, a teoria não terá apresentado nenhum interesse.

Brouwer defende a tese, partindo de pressupostos de que a matemática é a criação do matemático e que existir significa tão somente aquilo que é construído pela inteligência humana. Ele não aceita como critério de existência a questão da compatibilidade, argumentando que uma teoria mesmo não tendo apresentado contradição, nem por isso pode ser considerada válida, porque um criminoso, pelo fato de numca ter sido condenado por um tribunal, não quer dizer que ele não seja culpado.

Há também análises baseadas nas questões de sintática e semântica, as quais não fazem parte de nosso estudo.

Acreditamos que *existir* em Matemática é o que não for trivial.

3. A Grécia e os Gregos

3.1 A Grécia e os Gregos

Com o declínio do Império Egípcio e Babilônico, novas culturas sobressaíram, especialmente os Hebreus, Assírios, Fenícios e Gregos. A Idade do Ferro foi caracterizada por grandes transformações, além de conquistas, guerras e invenções. O alfabeto e a introdução de moedas foi um dos fatos principais desta época. O comércio foi estimulado e grandes descobertas geográficas ocorreram. O mundo estava pronto para um novo tipo de desenvolvimento cultural através do povo Grego. É importante ressaltar que o que denominamos de *Cultura Grega* é resultado de uma fusão de grande número de povos provenientes da Ásia, da África e de inúmeras regiões do Mediterrâneo, principalmente Creta. A origem, evolução e declínio dessa cultura restringiu-se inicialmente a algumas ilhas do Mar Egeu e à costa da Ásia Menor, passando em seguida para a região hoje denominada de Grécia e depois começou a se expandir pelo sul da Itália, norte da África, constituindo a Magna Grécia que, finalmente sob a dominação romana, estendeu-se por uma área muito mais ampla.

Os nomes Grécia e gregos surgiram da adaptação feita pelos romanos de uma antiga e obscura tribo que praticamente desaparecera muito antes de Cristo e que se denominava Graii. Anteriormente a eles, no período denominado Myceniano, teve lugar um grande movimento migratório das ilhas do Mar Egeu, em particular das Cyclades, de raças provenientes da Ásia Menor e de Creta e que mais tarde foram denominadas de Pelasgos. Esses povos tiveram séculos de contatos com os Hititas, que desempenharam um papel importantíssimo entre as culturas da Ásia Oriental e a futura cultura grega. Isso se sobressai devido a uma série de deuses e heróis da mitologia grega cuja procedência é oriental. E para nós, isso é importante para que possamos perceber a influência da matemática das culturas orientais na formação da matemática grega.

No entanto, o coração do mundo grego, no qual gostaríamos de fundamentar o nosso trabalho, achava-se nas comunidades da Península Balcânica, em que se localizava a maioria das grandes cidades da Grécia Clássica: Esparta, Corinto, Tebas e Atenas. Essa península não era, como o Vale do Nilo e o Fértil Crescente, uma terra rica e hospitaleira. Apresentava grandes dificuldades agrícolas; onde a colheita de grãos, azeitonas, uvas e legumes, era escassas, pois poucos terrenos aráveis apresentavam relevo montanhoso, com terra pobre e rochosa. Carneiros e cabras, porém, podiam ser criados nas encostas, e esses rebanhos aumentavam a renda dos gregos. Tanto a geografia como o clima favoreceram a formação da civilização grega e o mar lhes dava acesso às terras longínquas. Os gregos eram abertos à influencia cultural de outros povos. Como as montanhas separavam suas cidades umas das outras, dificilmente seriam capazes de realizar uma unificação política em ampla escala.

As novas civilizações criaram Cidades-Comércio ao longo da costa da Ásia Menor e mais tarde no continente da Grécia, na Sicília e na costa da Itália. O individualismo, tão importante na vida política e social dos gregos, não foi menos vital em outras fases de sua cultura. No Oriente Antigo, a arte havia sido criada por ordem do rei, ao passo que a vida intelectual representava domínio dos sarcedotes.

A vida dos gregos era totalmente dedicada ao serviço do Estado e o preparo para essa exigente tarefa está baseado na consciência cívica dos gregos, em seu amor a cidade e em seu profundo sentimento religioso. Um cidadão grego de distinção sempre pensava em algo acima dele, digno de tudo quanto pudesse fazer, e esse algo era o Estado, a sociedade que o criara, protegera e o educara. Outra característica da vida grega era seu ansioso desejo de procurar a verdade. Os gregos, muito mais do que qualquer outro povo da Antigüidade, possuíam o amor, ao conhecimento pelo conhecimento. Diferiam dos egípcios, cujo medo superesticioso os impedia de passar além da aplicação prática do conhecimento, para a especulação científica.

Os gregos possuíam uma ousada originalidade, que lhes permitia o rompimento com a tradição, além de uma mentalidade arejada e o amor à liberdade. Tais qualidades, porém, mesclavam-se num todo que servia ao grande ideal grego de harmonia do corpo, da mente e do espírito. O despertar do pensamento grego no século VI a.C. , foi a mais notável obra pioneira no campo da investigação e da pesquisa intelectual. Sob um clima de racionalismo, os gregos desenvolveram um rigoroso e lógico corpo de ciência, deduzido da ciência mais empírica e fragmentária.

Em *A Ciência Grega* (pág. 12), Benjamin Farrington cita com muita convicção:

> *A ciência, sejam quais forem os seus últimos desenvolvimentos, tem sua origem na técnica, nas artes e nos ofícios, e nas várias atividades, os quais o homem se entrega. Sua fonte é a experiencia, seus fins, práticos, e a sua prova é o êxito real. A ciência nasce em contacto com as coisas, a sua prova depende dos sentidos, e por mais que pareça deles se afastar, é-lhe necessário voltar ao seu campo.*

Para compreender plenamente o desenvolvimento científico de uma sociedade qualquer, devemos ter presente o grau de seu progresso material e de sua estrutura política. Ciência "ab vacuum" não existe, a Ciência emana uma sociedade determinada, em região e época determinadas. A História da Ciência deve ser encarada em função da vida social em seu conjunto.

A ciência grega, como toda a civilização ocidental, gerada na bacia do mediterrâneo, é algo tão fantástico, que podemos dizer com toda certeza: a cultura grega nos deslumbra! Pela primeira vez na história da humanidade, surge a idéia de pesquisar as relações de compatibilidade e racionalidade acaso existentes entre conhecimentos até então dados como desconexos, de tal forma que a interpretação fosse puramente naturalista.

A matemática grega teve um papel fundamental no desenvolvimento dessa ciência no Ocidente. As próprias palavras *matemática*, *matemáticos* ou seus equivalentes, na maioria das línguas européias modernas, são de origem grega, derivadas dos verbos conhecer e aprender.

Na época clássica a matemática era conhecida como mathema – o que é ensinado – significava todas as formas de conhecimento.

Sabemos pouco sobre o ensino da matemática na antiga Grécia, apenas que era estudada por amor ao próprio saber, que a Geometria era utilizada para medições dos campos, enquanto que a Aritmética e o sistema de pesos e medidas, para o uso de cobrança de impostos. Paralelamente à matemática, surgiu uma reflexão ao mesmo tempo metodológica e ideológica sobre as ciências. O desenvolvimento da matemática pura foi contemporâneo ao desenvolvimento da filosofia.

Num primeiro instante, dentro da matemática, encontramos homens que se preocupam com algumas questões fundamentais, como:

(i) Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?

(ii) Por que um círculo é bissectado por um diâmetro?

No antigo Oriente, o processo empírico predominante baseava-se em questões do tipo "como"; contudo estavam respondendo a questões mais científicas do tipo "por que". Desta forma, percebemos o início de algumas tentativas de apresentação do método dedutivo. Assim, a matemática, quanto ao seu significado moderno da palavra, nasceu de uma atmosfera racional em uma das Cidades-Comércio localizadas na costa-oeste da Ásia-Menor no século VI a.C. Quanto ao que se refere às atividades matemáticas, sabemos que se centravam em duas regiões, quase em extremidades opostas do mundo grego, florescendo ao redor do Mediterrâneo. A principal dificuldade que se encontra em estudar a matemática-grega é que temos de nos ater a informações dadas há vários séculos, dificultando, assim, a fundamentação de nossas pesquisas dessa época histórica. Contudo, procuraremos enfatizar duas razões de se estudar a matemática desse período:

(i) interesse sobre quantidades infinitamente pequenas ou indivisíveis,

(ii) familiarização com a forma e a estrutura de demonstração.

Sobre a origem da matemática-grega existem relatos de que se concentravam nas escolas Jônica e Pitagórica e tendo como representantes de cada uma delas Tales (585 a.C.) e Pitágoras (550 a.C.). É sabido que os escritos desses grandes filósofos desapareceram com o tempo e que seus trabalhos geralmente eram escritos em prosa. Na verdade, não encontramos documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no século IV a.C.. No entanto, durante a segunda metade do século V a.C. circularam relatos persistentes e consistentes sobre vários matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que tomaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria, como poderemos observar. Denominaremos esse período de: *Idade Heróica da Matemática*, onde destacamos homens com tão poucos recursos e trabalhando em problemas de alto significado matemático. Até mesmo o termo grego *mathema*, significava todas as formas de conhecimentos, e a matemática no sentido moderno da palavra, nasceram dessa atmosfera de racionalismo.

Essa fase chamada pré-socrática (séculos VI e V a.C.) foi um período em que o pensamento abstrato predominou e os filósofos não foram meros espectadores da natureza, mas sim observadores apoiados nas técnicas e nas observações, como afirma Benjamin Farrington em *A Ciência Grega* (pág. 32):

> *Estes filósofos são, segundo a exata qualificação dos antigos, physiologoi, isto é, observadores da natureza... Observam os fenômenos que*

se oferecem a seus olhos, deixando de lado toda intervenção sobrenatural e mística, esforçando-se por dar-lhes uma explicação estritamente natural. Neste sentido e por sua repugnância em aceitar toda intervenção mágica, dão o passo decisivo para a ciência e marcam o começo, pelo menos o começo sistemático e consciente de um método positivo aplicado à interpretação dos fenômenos da natureza.

Na tentativa de caracterizar as principais concepções filosóficas que se desenvolveram neste período, serão destacados os pensamentos de Tales, Anaximandro e Anaxímenes, que compunham a Escola de Mileto ou Escola Jônica e Pitágoras que liderava a Escola Pitagórica ou a Escola Itálica.

3.1.1 Tales de Mileto (624 – 548 a.C.)

Para Tales, a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos.

(Aristóteles)

Fundador da Escola Jônica, a mais antiga escola filosófica que se conhece. De sua vida sabemos que era natural de Mileto, Ásia Menor, uma cidade comercial próspera, possuindo um grande número de colônias no Mar Negro, uma grande população escrava, bem como uma luta de classes ferrenha entre os ricos e os pobres pertencentes à população livre. Teve oportunidades de conhecer outras culturas até mesmo de morar por uns tempos no Egito, onde despertou a admiração por cálculos das alturas das pirâmides através de suas sombras.

Retornando a Mileto, tornou-se conhecido como consultor, engenheiro, negociante, filósofo, matemático e astrônomo. Foi o primeiro homem no campo da Filosofia e da Matemática; na Filosofia afirmou que tudo era feito de água, e na Matemática descobriu resultados importantes, ficando conhecido como criador da organização dedutiva da geometria.

Conhecido como um dos ***sete sábios da Grécia***, devendo-se isso à sua atuação política; teria tentado unir as Cidades-Estados na Ásia-Menor, numa confederação, com o objetivo de fortalecer o mundo helênico diante das ameaças de invasões de povos orientais.

Os filósofos da Escola de Mileto consideravam que havia um princípio como origem das coisas, o que, para Tales, era água.

Água é a origem das coisas e Deus é aquela inteligência que faz tudo da água.

(Aristóteles, Metaphysica, pág. 25.)

Destacaremos a seguir alguns resultados atribuídos a Tales:

(i) *Um círculo é bissectado por um diâmetro.*

(ii) *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*

(iii) *Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.*

É atribuído a Tales a descoberta deste teorema, porém pode ter sido Euclides o primeiro a demonstrá-lo.

(iv) *Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.*

Tales, talvez, tenha usado este resultado de semelhança para determinar a distância de um navio à praia, ou seja, na resolução de problemas de geodésia elementar.

(v) *Um ângulo inscrito em um semi-círculo é um ângulo reto.*

Este resultado era conhecido pelos Babilônicos e provavelmente Tales o apreendeu em uma de suas viagens para a Babilônia. Contudo, esta proposição é considerada a mais notável de toda a sua obra geométrica. Esta proposição também é conhecida como Teorema de Tales, a qual acredita-se que ele tenha demonstrado.

Acreditamos que estes resultados não foram estabelecidos como teoremas, mas, certamente, Tales os sustentou por algumas razões lógicas e não por experimento ou mesmo por intuição. Baseamos nossa afirmação no fato de que, quando Tales esteve no Egito levou daí para a Grécia a ciência da Geometria. O que os egípcios sabiam de geometria eram coisas rudimentares, não havendo razão para se acreditar que Tales haja chegado a provas dedutivas, como as que foram posteriormente descobertas pelos gregos. Tanto sua ciência como sua filosofia eram primitivas, mas bastavam para estimular o pensamento e a observação.

A título de ilustração, tomemos como exemplo o problema da igualdade dos pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam e são iguais. Na figura abaixo, iremos mostrar que o ângulo a é igual ao ângulo b.

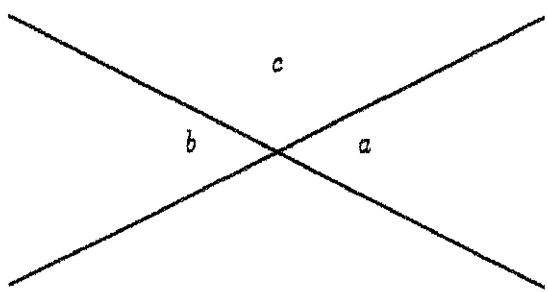


Figura 1

Temos que, o ângulo a somado ao ângulo c coincide com o ângulo raso. Assim também o é a soma do ângulo b com o ângulo c. Decorre, então, que $a = b$.

Há evidências sobre estórias que Tales previu um eclipse solar no ano de 585 a.C., predição resultante, sem dúvidas, do uso de uma das Tábuas compostas pelos Egípcios ou pelos Caldeus, não obstante acreditamos que o seu verdadeiro mérito consistiu no caráter dedutivo dado à ciência, e ainda em que, com ele e com a sua Escola filosófica, começaram os Gregos não só a estruturar a ciência matemática adquirida dos Egípcios e dos Caldeus, mas também de fundamentar os seus conhecimentos na ciência de uma forma geral.

3.1.2 Anaximandro de Mileto (611 – 547 a.C.)

Sucessor e discípulo de Tales, teve uma concepção mais perfeita, mais fundamentada devido ao número maior de observações e em medições mais profundas, onde ele disse que o *apeiron* (ilimitado) era o princípio e o elemento das coisas existentes. Foi o primeiro a introduzir o termo princípio. *Tudo está em tudo* – dizia ele. Do indefinido, através de uma teoria dos opostos, calor e frio seriam os responsáveis pelo mundo e pelos quatros elementos: água, terra, fogo e ar.

Pode-se dizer que esta teoria foi precursora da teoria da evolução das espécies, pois afirma que as coisas vivas passavam a existir quando os elementos se misturavam, produzindo o calor e a umidade, indo desde as formas mais simples até as mais complexas, e ao terminar sua existência, retornariam às mesmas condições das quais haviam saído.

No entanto o que nos chama a atenção, é que Anaximandro esboçou a primeira imagem do Universo traduzida em números, onde ele afirmava que a Terra pairava no centro do cosmo sob a forma de um bloco de coluna (cilindros de pedra cuja a superposição formava as colunas dos templos gregos), onde a altura e diâmetro estão na razão de 1:3. Assim, a Terra estaria fixa e seria representada por um sistema radial simétrico. Ao redor da Terra, encontraríamos grandes círculos ou anéis que se afastariam à razão de 9, 18, 27, ..., etc. A distribuição ficaria da seguinte forma: o círculo interno contém ou as estrelas fixas ou os planetas, o que se torna visível devido á abertura lateral, tornando possível enxergar as estrêlas. O Sol é 28 vezes maior do que a Terra, enquanto que a Lua seria 19 vezes maior que a Terra. A idéia fundamental da origem do Universo, através de Anaximandro, é que nada se pode originar daquilo que é limitado.

Há possibilidades de Anaximandro ter contribuído com os Pitagóricos – o número é a origem de todas as coisas – quando se analisa a questão do ilimitado (*apeiron*), identificando número com unidade, ou o ilimitado que tudo inclui.

É atribuída a ele a introdução do *gnomon* (instrumento com que nos solstícios se observavam as alturas máxima e mínima do Sol acima do horizonte) na Grécia e o primeiro cartógrafo conhecido, que inaugurou a literatura filosófica dos Gregos, publicado em 547 a.C., uma obra cuja base é a concepção do infinito no espaço e no tempo.

Anaximandro era realmente um curioso científico, sendo sempre original em suas afirmações, sempre racionalista.

Observação: Um gnomon tinha originalmente a forma retangular sombreada ao longo da superfície de um relógio solar. Depois atribui-se a esta palavra o significado de perpendicular, e foi usada para descrever um instrumento utilizado para o traçado de ângulos retos, assim como um esquadro de carpinteiro.

Figura 2

Para os Pitagóricos, o gnomon teve muita importância, pois investigaram diferentes séries numéricas como veremos mais adiante.

3.1.3 Anaxímenes de Mileto (540 – 480 a.C.)

Companheiro de Anaximandro, possivelmente sintetizando as concepções de Tales e Anaximandro, acreditava que o ar é a substância inicial de tudo. O ar, ao passar por um processo de compressão ou dilatação, era o responsável pelas várias formas de matéria. Nesse sistema, o calor e o frio atuam da seguinte maneira: o ar é rarefeito pelo calor, em fogo; e o ar é condensado pelo frio, em água e em matéria sólida. Percebemos nos três pensamentos que o materialismo é um ponto comum, pois tentam procurar um caminho para a existência, sempre voltado para a matéria como primeiro caminho, ou seja, eles mostram uma nova maneira de exergarem o mundo, no primeiro momento de ruptura com o mito. Observamos que, mesmo eles, mantendo em suas explicações, elementos de estrutura mítica, como, por exemplo, a busca da origem do universo em uma unidade, introduziram aspectos que possibilitaram a elaboração do pensamento racional: os fenômenos da natureza foram reconhecidos como tais e a própria natureza, sua estrutura, foi assumida como o tema central a ser investigado.

É interessante ressaltar que para os filósofos desta Escola, os astros, que eles supunham ligados cada um a uma esfera de cristal, móvel e transparente, giravam em torno da Terra colocada no centro do Universo. Deve-se a Anaximandro a concepção da possibilidade de a Terra existir no espaço, sem nenhum suporte. Para este filósofo a Terra seria, não de forma esférica, mas cilíndrica, de altura igual à terça parte do diâmetro da base, e os astros do nosso sistema planetário, que primitivamente se moviam ao longo de círculos paralelos ao círculo base do cilindro terrestre, teriam sido levados às posições então ocupadas, pela ação do calor, o qual, fazendo aumentar a tensão do ar ambiente, determinaria turbilhões que fariam desviar os corpos celestes. Hipótese notável, que formulada mais tarde por Buffon e por Kant, foi completamente desenvolvida por Laplace na sua *Exposição do sistema do mundo* (1796).

Anaxímenes, ainda que seguindo as teorias de Anaximandro, supôs que o cilindro com que este filósofo figurava a Terra, tinha altura nula, isto é, supunha que a Terra e os demais corpos celestes chatos como discos, opinião que também foi seguida pelos notáveis filósofos Eleatas, Atomistas e Sofistas, e por Anaxágoras de Clazómenes, mestre de Péricles, de Eurípedes e talvez de Sócrates.

Com a invasão de Mileto pelos persas em 494 a.C., o centro da cultura passam a ser Itália e Sicília, onde já havia cidades-Estados gregas fundadas, principalmente, a partir do século VIII a.C..

Na história universal, o povo grego é caracterizado pela tendência de transformar seus heróis em ídolos. Não duvidamos que o interesse grego pela matemática tenha começado na época de Tales, mesmo tendo consciência das grandes dificuldades de registros desta época, para citarmos as suas realizações. Contudo, com o que conhecemos hoje da matemática egípcia e babilônica, parece provável que a inspiração tenha vindo da Mesopotâmia e não do Egito.

A fase subsequente da filosofia grega, associada às cidades gregas do sul da Itália, é mais religiosa, mística, política.

3.2 Os Pitagóricos

É, de fato, tudo o que se conhece tem número. Pois é impossível pensar ou conhecer algumas coisas sem aquele.

(Filolau)

3.2.1 Pitágoras (582 – 507 a.C.)

Pitágoras, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar de nascimento de Tales. A cidade de Samos nessa época, era considerada rival comercial de Mileto e pelo que se sabe, Pitágoras viveu em Samos, até, aproximadamente, na segunda metade do século VI a.C.. Devido à conquista persa da Jônia por volta de 530 a.C., mudou-se para Crotona, no sul da Itália, onde desenvolveu grande parte de seu trabalho. Ele não foi apenas um filósofo, ou um matemático, mas uma figura legendária: profeta, sábio, místico e político. Baseando-se na matemática e na música, deu uma explicação metafísica e harmônica do Universo, isto é, foi além do mundo físico, não o entendendo apenas da forma materialista, como fizeram os jônicos.

Ele fundou uma comunidade, em parte científica, mas especialmente político-religiosa, chamada depois de Escola Itálica, que se baseava na doutrina da metempsicose ou transmigração das almas, num esforço inteiramente subjetivo e puramente humano, o qual acreditavam que o corpo era uma tumba onde a alma habitava temporariamente. Consideravam os números como caminho para explicar o Universo e utilizavam para isso, um simbolismo fantasioso. Todos os fenômenos que compunham o mundo poderiam ser reduzidos ao número, isto é, o número não era encarado apenas como um símbolo, mas representava o papel da matéria e da forma do Universo.

Poderá parecer para nós, que Pitágoras ao afirmar que: *Todas as coisas são números*, seja um absurdo. Contudo, acreditamos que Pitágoras tenha se baseado, para ter, esta concepção na observação no campo musical: o som produzido varia de acordo com a extensão da corda sonora, ou seja, há uma dependência do som em relação à extensão da música em relação à aritmética, que até nossos dias predomina nos termos matemáticos como *média harmônica* e *série harmônica*. Encontramos em Bertrand Russell, em *História da Filosofia Oriental* (pág. 41), a seguinte postura em relação à Pitágoras:

> *Ele considerava o mundo, provavelmente, como atômico, e os corpos feitos de moléculas compostas de átomos dispostos de várias formas. Esperava, assim, fazer da aritmética o estudo fundamental para a física e a estética.*

Os Pitagóricos formavam uma ordem estritamente monástica, onde homens e mulheres eram admitidos em igualdade de condições. A propriedade e a maneira de se viver era comum a todos. Mesmo as descobertas científicas e matemáticas eram consideradas coletivas e num sentido místico, preservaram esta postura mesmo depois da morte de Pitágoras.

A base para o ensino filosófico e moral da Escola Pitagórica era o ensino da matemática; havia duas classes:

(i) os Auditores ou Pitagoristas, que aprendiam música e noções de cálculos,

(ii) os Matemáticos ou Pitagóricos, que conheciam as principais descobertas da Escola e os segredos dos deuses, que através de um juramento solene impedia aos seus membros de divulgar.

A característica fundamental do século V a.C., sob o ponto de vista matemático, foi de fundamentar as verdades matemáticas, sucessivamente descobertas, cujos resultados demonstrados foram utilizados pouco a pouco, como ponto de partida de novas e importantes extensões.

Devido ao problema que já explicitamos no início dos estudos sobre a matemática grega, de que os documentos da época perderam-se, é realmente muito difícil, se não impossível, distinguir as ideias próprias de Pitágoras, das de seus discípulos. No que diz respeito à Teoria dos Números, todos os antigos autores atribuem a Pitágoras, o louvor de ter estabelecido claramente a Aritmética (ciência abstrata) e a Lógica ou a arte do cálculo. Foi ele quem elevou o conceito da Geometria dentro da Ciência.

Dentro da Geometria deve-se a ele o conceito geométrico do espaço, como ente contínuo e ilimitado, o estudo da construção dos poliedros regulares e o dos polígonos e pelos desenvolvimentos dos estudos das figuras, traduzindo-se por meio de relações entre números, e das propriedades dos números em relação com a geometria, chegou à noção de números irracionais e das grandezas incomensuráveis.

3.2.2 Pitágoras e os Pitagóricos

A Filosofia Pitagórica se fundamenta e se distingue das outras filosofias, devido a questão do número ser o tema central, dando ênfase as suas qualidades e problemas para o homem. Esta exaltação e estudos das propriedades dos números, através da aritmética (considerada como a Teoria dos Números), da geometria, música e astronomia, constituíram o modo de organização das ciências matemáticas adotada pela cultura geral da época helenística.

O sistema educacional da Idade Média ficou conhecida como *quadrivium pitagórico*, juntamente com a *gramática trivium*, lógica e retórica, formando assim as *sete artes liberais fundamentais*, que se ensinava de acordo com as necessidades de cada aprendiz, o que caracterizava o programa de estudos pitagórico.

O ensino de Pitágoras era inteiramente oral, e os estudos da astronomia representavam tanto os conhecimentos elementares sobre o nascimento e o acaso dos astros, o calendário e as estações, como as noções de maior complexidade matemática relativas aos movimentos reais e aparentes do Sol, da Lua e dos planetas. É comum encontrar o nome de *esférica*, referindo-se estritamente à matemática da astronomia, porque havia as hipóteses da esfericidade da Terra e do Cosmo formuladas a partir do século V a.C..

Além de outros símbolos e cerimônias místicas, os Pitagóricos usavam o pentagrama ou o pentágono estrelado, como sinal de aliança entre eles.

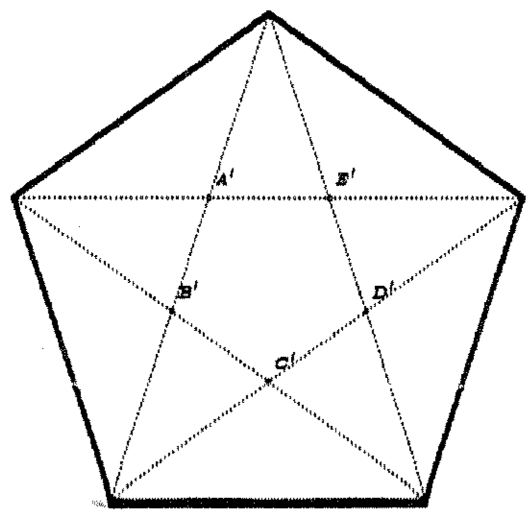


Figura 3

Ao ver tal pentágono estrelado, não devemos olhá-lo apenas como um símbolo, mas questionando-nos o que realmente os pitagóricos pensaram ao construí-lo. As diagonais do pentágono regular $ABCDE$ determinam pontos A', B', C', D' e E' (conforme figura) de tal forma que o polígono $A'B'C'D'E'$ é, ainda, um pentágono regular. Além disso, tais diagonais a vários triângulos congruentes. Por exemplo, os triângulos $\Delta BCC'$ e $\Delta EDC'$ são congruentes. Outro fato, bastante notável, é que $\Delta BAE'$ e $\Delta AA'E'$ são isósceles e semelhantes e isto garante que os pontos A', B', C', D' e E' dividem as diagonais em segmentos desiguais de tal forma que:

> *A razão entre a diagonal e o segmento maior é igual à razão deste para o menor.*

Um caso particular de tal situação, pode ser observado na diagonal BE:

$$\frac{BE}{BE'} = \frac{BE'}{BA'}.$$

Com efeito, já que os triangulos $\Delta BAE'$ e $\Delta AA'E'$ são isósceles e semelhantes, temos que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AA'}{A'E'}.$$

Mas, $AB = BE'$ e $AE' = AA' = E'E = BA'$. Logo,

$$\frac{BE'}{BA'} = \frac{BA'}{A'E'} = \frac{BE' + BA'}{E'E + A'E'} = \frac{BE}{BE'}.$$

Na história da Matemática, essa subdivisão das diagonais é a conhecida *secção áurea* de um segmento, nome dado por Kepler (1571 – 1630).

Os gregos utilizavam muito a secção áurea, porém não acharam que haveria necessidade de-lhe dar um nome especial, eles apenas designavam por *divisão de um segmento em média e extrema razão*.

Uma das características da secção áurea é que ela se auto propaga.

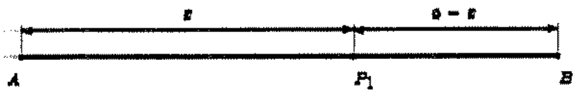


Figura 4

Se um ponto P_1 divide AB em média e extrema razão, sendo AP_1 o segmento maior, e marcamos sobre ele P_2, tal que $AP_2 = P_1B$, então AP_1 ficará subdividido em média e extrema razão pelo ponto P_2. De fato, como

$$\frac{AB}{AP_1} = \frac{AP_1}{P_1B},$$

vem que

$$\frac{AB}{AP_1} = \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AB - AP_1}{AP_1 - P_1B} = \frac{AP_2}{P_1P_2},$$

como afirmamos.

Agora, se marcarmos em AP_2 um ponto P_3 , tal que $AP_3 = P_2P_1$, o segmento AP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Continuando este processo, n-vezes, obteremos segmentos AP_n, cada vez menores, divididos em média e extrema razão por P_{n+1}.

Apesar desta construção equivaler à resolução de uma equação quadrática, não podemos afirmar que os pitagóricos, por volta de 500 a.C., dominassem esse conhecimento.

Caso eles tivessem esse conhecimento, certamente, teriam construído o segmento áureo da seguinte forma:

Sejam AB um segmento de reta e P_1 o ponto que divide AB em média e extrema razão. Assim,

$$(AP_1)^2 = (AB)(BP_1).$$

(Note que AP_1 é a média geométrica entre AB e BP_1.)

Pondo $AB = a$, temos que $BP_1 = a - x$. Posto que $(AP_1)^2 = AB \cdot BP_1$, vem que $x^2 = a(a - x)$, e portanto, $x^2 = a^2 - ax$. Logo,

$$x^2 + ax - a = 0.$$

Resolvendo esta última equação, teremos:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}.$$

Segue, então, que x, o segmento áureo procurado, é dado por

$$x = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}.$$

Pitágoras, talvez tenha aprendido a resolução desta equação simples atraves dos Babilônicos; mas teria ele percebido o problema do a como número irracional?

Acreditamos que não. Resta-nos entender como teriam os gregos solucionado este tipo de problema.

Com o auxílio da Escola Pitagórica, tentaremos desenvolver a geometria, a álgebra e a aritmética dessa época.

3.2.3 Aritmética Pitagórica

Na Grécia Antiga, ocorreu a distinção entre o estudo de relações numéricas e arte prática de trabalhar com os números, ficando conhecidas como aritmética e mais tarde logística. É interessante observar como essa idéia persistiu até a Idade Média. Nos textos antigos encontramos tratamento ambíguo dado à questão teorética e ao trabalho com aspecto prático de números, com o nome de *aritmética*.

Atualmente a aritmética possui o significado original no continente Europeu, enquanto que na Inglaterra e na América do Norte o significado é ainda o mesmo que os antigos logísticos definiram. Porém, nesses dois países, o termo teoria dos números é usado no sentido de estudos abstratos dos números.

Pitágoras e seus discípulos optaram pelo desenvolvimento da teoria dos números, e de uma forma geral, dos números místicos. Assim, encontramos que Iamblichus (Aproximadamente 325 d.C.), sob a influência de filósofos neoplatônicos por volta de 320 d.C., escreveu que a descoberta de números amigos se deve a Pitágoras. Dizem até, que ele usou a seguinte sentença para definir esses números: *"Alguém que é um outro eu, como 220 e 284"*. Entretanto, o tratamento dado por Pitágoras para defini-lo, seria da seguinte forma:

> *Dois números são amigos, se a soma dos divisores próprios de um dos números, for igual ao outro número.*

Observação: Os *divisores próprios* de um número positivo N são todos os divisores inteiros positivos de N, exceto ele mesmo. O número 1 é um divisor próprio de N. Às vezes podemos encontrar, como sinônimo um tanto antiquado para divisor próprio, a expressão *parte alíquota*. Por exemplo, consideremos os números 220 e 284 e definamos por $D(220)$ o conjunto dos números inteiros divisores de 220 e $D(284)$ o conjunto dos números divisores de 284. Logo,

$$D(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}.$$

Agora, somando os divisores próprios de 220, temos

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 22 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Temos, também, que

$$D(284) = \{1, 2, 4, 71, 142, 284\}.$$

Logo, a soma dos divisores próprios de 284 coincide com 220. Decorre, então, que 220 e 284 são amigos.

Esse par de números, 220 e 284, é coroado por uma aura mística e mais tarde mantém-se a superstição de que dois talismãs sustentaram a marca da relação perfeita e o desgaste. Por seu encanto, misticismo e magia, nessa época os números desempenharam um papel importante na feitiçaria na astrologia e, principalmente, no horóscopo.

Passaram-se muitos anos sem que fossem descobertos novos números amigos. Por volta de 1936, o matemático francês Pierre De Fermat apresentou os números 17.296

e 18.416 como outro par, apesar de existirem controvérsias, sobre isso. Atualmente, as pesquisas atribuem a Arab al-Banna (1256 – 1321) a descoberta, talvez usando a regra de Tâbit ibn Qorra, geômetra árabe do século IX que formulou a seguinte regra para a determinação dos números amigos:

> *Sendo* $p = 2^{n-1}3 - 1$, $q = 2^n 3 - 1$ *e* $r = 2^{2n-1}9 - 1$ $(n \geq 2)$ *primos entre si, então* $2^n pq$ *e* $2^n r$ *são números amigos.*

Dois anos mais tarde, após Fermat ter descoberto outros números amigos, o matemático e filósofo Renée Descartes descobriu um terceiro par.

Leonhard Euler, matemático suiço, descobriu um sistema de pesquisar números amigos, e em 1747, conseguiu uma lista de 30 números, e mais tarde chegou a ter 60 números.

Curiosamente, sobre estes números, após sessenta anos o matemático italiano Nicola Paganini, em 1866, encontrou dois pares de números de valores relativamente baixos: 1184 e 1210.

Atualmente são conhecidos por volta de um bilhão de números amigos.

Sob o clima de misticismo, os Pitagóricos nos deixaram outros conceitos de números como: *perfeitos*, *deficientes* e *abundantes*. Definiremos cada qual a seguir.

Números Perfeitos são aqueles cuja soma dos divisores próprios é igual ao próprio número. Por exemplo, o número 6 é perfeito. De fato, temos que $6 = 1 + 2 + 3$ e 1,2 e 3 são os divisores próprios de 6.

Euclides, em seus *Elementos*, toma como referência a idéia de Pitágoras e define números *perfeitos imediatos*, baseando-se na seguinte definição.

> *Formando uma progressão geométrica, cujo primeiro termo seja a unidade e a razão 2 , e fazendo a soma dos termos desta progressão; todas as vezes que esta soma for um número primo, ter-se-á um número perfeito, fazendo o produto dessa soma pelo termo somado.*

Então, dada a progressão geométrica

$$(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \cdots),$$

tem-se que $1+2 = \mathbf{3}$, $1+2+4 = \mathbf{7}$, $1+2+4+8+16 = \mathbf{31}$, $1+2+4+8+16+32+64 = \mathbf{127}$, e os números destacados em negrito, são primos (um número p é dito *primo* quando só tem 1 como divisor próprio; caso contrário ele é dito *composto*). Logo, de acordo com o resultado citado, são perfeitos $6 = 2 \cdot 3$, $28 = 4 \cdot 7$, $496 = 16 \cdot 31$ e $8128 = 64 \cdot 127$.

De uma forma geral, números perfeitos, N, podem ser obtidos do seguinte modo.

$$N = (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1})2^n = (2^{n-1} - 1)2^{n-1},$$

desde que se tenha $2^n - 1$ *primo*.

Leonhard Euler mostrou mais tarde que todo número perfeito é escrito pela fórmula de Euclides. Quanto à existência ou não de mais números perfeitos é um dos célebres problemas que se encontra em aberto na Teoria dos Números.

Com o início da "Era da Informática", por volta de 1952, através de um SWAC, decobriram mais números perfeitos, para $n = 521,\ 607,\ 1279,\ 2203$ e 2281 pela fórmula de Euclides.

Ainda hoje, o conceito de números perfeitos tem sido motivo de inspiração para matemáticos modernos.

Seja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores de n (incluindo n), então n é perfeito se e somente se $\sigma(n) = 2n$.

De uma forma geral, quando tivermos $\sigma(n) = kn$, $k \in \mathbb{N}$, então n é chamado de *k-upla perfeita*. Um exemplo disso são os números 120 e 672 que são 3-uplas (triplas) perfeitas, isto é, $\sigma(120) = 3 \cdot (120)$ e $\sigma(672) = 3 \cdot (672)$.

A Escola Pitagórica também se preocupou em definir *números abundantes*, que são aqueles cuja soma dos divisores próprios é maior que o próprio número, por exemplo: já que 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 são os divisores próprios de 24 e a soma destes é 36, vem que 24 é um número abundante.

Foi por volta de 1944 que surgiu o conceito de números *superabundante*, definindo assim: um número natural n é dito *superabundante* se, e somente se,

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}, \text{ para todo } k < n.$$

E finalmente, a definição de número deficiente: *número deficiente* é aquele cuja soma dos divisores menores que o número é menor que o próprio número. Por exemplo, 22 é um número deficiente.

Outros conceitos apareceram sobre números, além daqueles que descrevemos neste capítulo. Trabalhos antigos sobre números têm sido base de pesquisas modernas, como por exemplo, números *quase-perfeitos*, *números semi-perfeitos* e *números fantásticos*.

3.2.4 Identidades Algébricas

Por um bom tempo, sentiram-se impregnados com a representação de um número, e completamente faltando qualquer notação algébrica adequada.

Os primeiros gregos inventaram um engenhoso processo geométrico para executar operações algébricas. Grande parte dessa álgebra tem sido atribuída a Pitágoras e também se encontra na grande obra *Os Elementos* de Euclides. Epecíficamente no livro II, encontramos um número de proposições que na realidade são identidades algébricas dissimuladas em termos de uma terminologia geométrica.

Acreditamos que estas proposições foram desenvolvidas através de um método de dissecção, pelos primeiros Pitagóricos. Para podermos ilustrar o método consideramos algumas proposições do livro II.

A *Proposição* 4 estabelece, geometricamente, a identidade

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Dissecar o quadrado, de lado $a + b$, em dois quadrados e em dois retângulos de áreas a^2 , b^2, ab e ab, como podemos observar na figura abaixo.

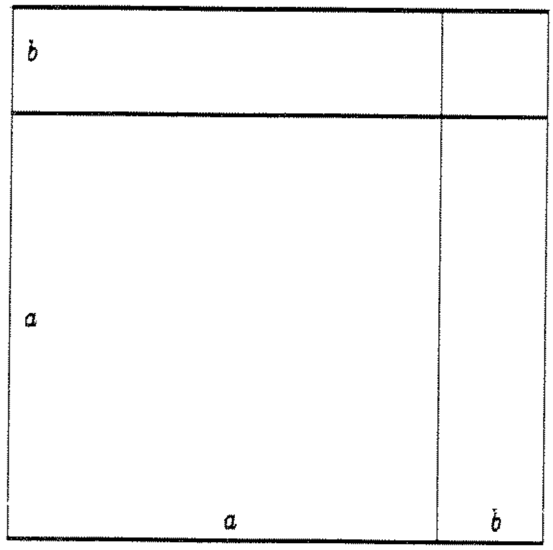


Figura 6

O enunciado da proposição de Euclides é:

> *Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer o quadrado dela toda é igual à soma dos quadrados das duas partes com duas vezes o retângulo contido pelas duas partes.*

A *Proposição* 5 do livro II, é:

> *Se uma linha reta é dividida igualmente e também desigualmente, o retângulo contido pelas partes desiguais, juntadas com o quadrado na linha entre os pontos de divisão, é igual ao quadrado de meia linha.*

Seja AB o segmento da linha reta dada, e o dividamos igualmente em P (por P) e desigualmente em Q. Então a Proposição diz que:

$$AQ \cdot PQ^2 = PB^2.$$

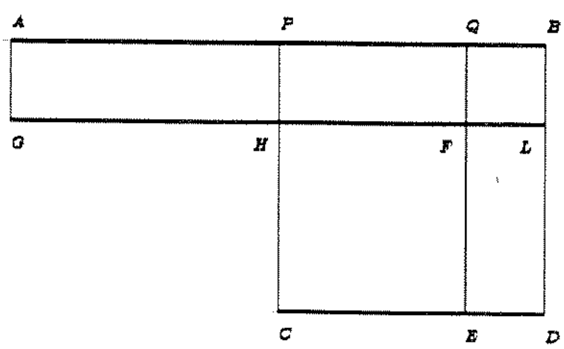


Figura 7

Pondo $AB = 2a$ e $QB = 2b$, isto nos conduz a identidade algébrica

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2,$$

ou, se indicarmos $AB = 2a$ e $PQ = b$ para obter a identidade ,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

A dissecção dada nos Elementos para o aparecimento deste teorema aparece na Figura 7. É mais complicada que a *Proposição* 4. Na figura, $PCDB$ e $QFLB$ são os quadrados descritos nos lados PB e QB. Então,

$$\begin{aligned} AQ \cdot QB + PQ^2 &= AGFQ + HCEF \\ &= AGHP + PHFG + HCEF \\ &= PHLB + PHFG + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + ACEF \\ &= PB^2. \end{aligned}$$

O enunciado da *Proposição* 6 do livro II é:

Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e produzida por qualquer ponto, o retângulo contido por toda a linha, nestes termos gerado e a parte de sua geração, com o quadrado na metade da linha dividida ao meio, é igual ao quadrado da linha reta construída na metade e a parte gerada.

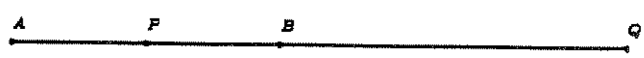


Figura 8

O segmento de reta dado AB com o ponto médio P é produzido até Q, então mostraremos que:

$$AQ \cdot BQ + PB^2 = PQ^2.$$

Se colocarmos $AQ = 2a$ e $BQ = 2b$ nós voltaremos novamente à identidade

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2,$$

ou seja, a dissecção usada na *Proposição* 5 pode ser ilustrada como mostra a Figura 9 que segue.

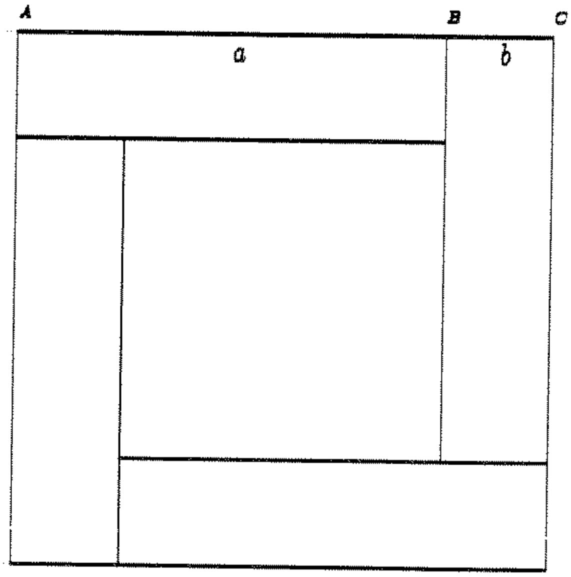


Figura 9

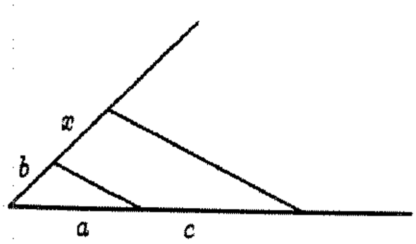
3.2.5 Solução Geométrica para Equações Quadráticas

Os gregos utilizaram dois métodos para resolver equações simples: o *método das proporções* e o método das *aplicações de áreas*. Acreditamos que ambos os métodos tenham realmente vindos dos Pitagóricos.

O método das proporções permite uma construção (exatamente como fazemos hoje nos nossos cursos de 2º Grau), de um segmento de reta x que satisfaça à equação $a : b = c : x$ ou á euquação $a : x = x : b$, onde a, b e c, são segmentos de retas dados. De forma geral, o método das proporções fornece soluções geométricas das equações:

$$ax = bc \quad e \quad x^2 = ab,$$

cujas soluções são determinadas através das seguintes figuras.



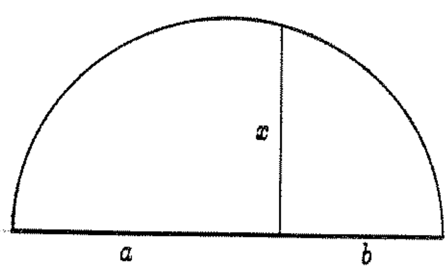


Figura 10

Quanto ao método da aplicação de áreas, considere um segmento de reta AB e um paralelogramo $AQRS$ tendo o lado AQ estendendo-se ao longo do raio AB. Se Q não coincide com B, tome C de maneira que $QBCR$ seja um paralelogramo. Quando Q está entre A e B, o paralelogramo é dito *aplicado ao segmento* AB; quando Q está contido em AB com origem através de B, o paralelogramo $AQRS$ é dito *aplicado ao segmento AB, excedido pelo paralelogramo $QBCR$*.

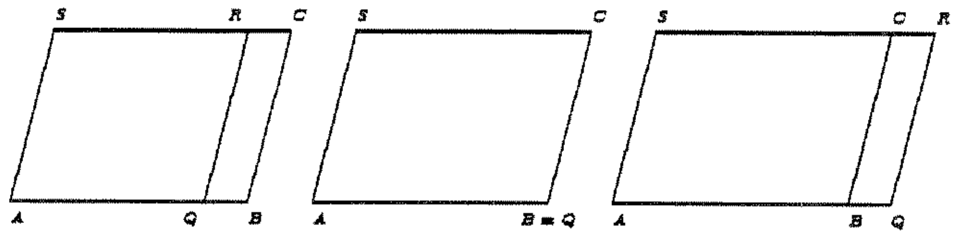


Figura 11

Observação: Estas construções encontram-se no Livro I, como a *Proposição* 44.

Para aplicar a um segmento dado AB um paralelogramo de área e ângulos da base conhecidos, considere o caso especial onde os ângulos da base são ângulos retos, então o paralelogramo aplicado é um retângulo. Denotando o comprimento AB por a, a altura do retângulo por x e as dimensões de um retângulo de área igual daquele aplicado por b e c. Então, $ax = bc$ ou $x = bc/a$.

A *Proposição 28* do Livro VI dos *Elementos*, apresenta a seguinte construção.

Para aplicar a um segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma figura retangular F, alinhado com um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado, a área de F não excedendo a do paralelogramo descrito na metade de AB e semelhante ao incompleto $QBCR$. Considere o caso especial onde o paralelogramo é um quadrado. Denote o comprimento AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (o qual é aqui um retângulo) Qpor x, e o lado a um quadrado F igual em área ao retângulo aplicado por b. Então,

$$x(a - x) - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax - b^2 = 0. \tag{1}$$

Encontramos na *Proposição* 29 do Livro VI a construção: para aplicar a um segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ igual em área a uma figura retangular F, e excedido por um retângulo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado, considere o caso especial onde o paralelogramo dado é um quadrado. Denote o comprimento de AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (o qual agora é um retângulo) por x, e o lado de um quadrado F igual em área ao retângulo aplicado por b. Então,

$$x(x - a) - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax - b^2 = 0. \tag{2}$$

O que estamos tentando mostrar com isto, é que a *Proposição* 44, do livro I, dá uma solução geométrica para a equação linear $ax = bc$ e as *Proposições* 28 e 29 dão soluções geométricas para as equações do 2º grau (ou quadrática) dos tipos

$$x^2 - ax + b^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - ax - b^2 = 0,$$

respectivamente.

É claro que podemos criar outras construções para os casos especiais das *Proposições* 28 e 29 do livro VI que são consideravelmente as mais simples que as construções mais gerais dadas nos *Elementos*.

Consideremos, por exemplo, o caso especial da *Proposição* VII - 28. Queremos aplicar a um segmento de reta dado um retângulo. Na equação (1), observamos que o problema pode ser visto da seguinte maneira:

> *Dividir um segmento de reta dado de modo que as partes do retângulo contido por ele igualar-se-ão a um quadrado dado, o quadrado não excedendo o quadrado da metade do segmento dado.*

Para melhor compreendermos o problema, faça AB e b serem dois segmentos de reta, tal que b não seja maior que $AB/2$.

Divida AB num ponto Q sendo $AQ \cdot QB = b$ e $PE = b$. Perpendicular a AB no ponto médio P, e com centro em E e raio PB, desenhe um arco cruzando AB em seu ponto Q, como na figura abaixo.

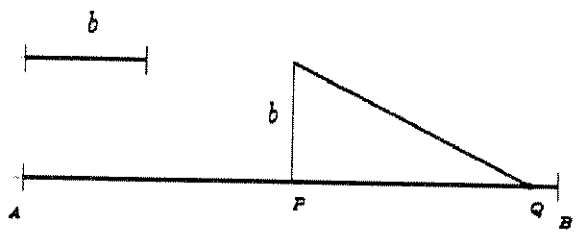


Figura 12

A prova, fornecida pela *Proposição* II-5, a qual foi, provavelmente, elaborada pelos Pitagóricos, é a seguinte.

$$AQ \cdot QB = (AP + PQ)(AP - PQ) = AP^2 - PQ^2 = EQ^2 - PQ^2 = b^2.$$

Fazendo $AB = a$ e $AQ = x$ e levando em conta que $QB = a - x$, temos que a última equação obtida é equivalente a

$$x(a - x) = b^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax - b^2 = 0,$$

cujas raízes são AQ e QB.

A álgebra geométrica dos pitagóricos, de pensamento astuto, intensificou a apreciação da simplicidade e a convivência da notação algébrica do nosso tempo.

3.2.6 Transformação de Áreas

Os Pitagóricos estavam interessados em transformar a área de uma superfície retilínea em outra superfície retilínea. A solução deste problema é construir um quadrado igual em área á um polígono dado, (*Proposição* 42, 44 e 45 do Livro I e *Proposição*

14 do Livro II dos *Elementos*). A solução mais simples, também conhecida dos Pitagóricos, é a seguinte: considere qualquer polígono $ABCD\cdots$ Construa BR paralelo a AC cortando DC em R. Então, os triângulos ΔABC e ΔARC tendo em comum a base AC e alturas iguais em relação à base comum, estes triângulos têm áreas iguais. Os polígonos $ABCD\cdots$ e $ARD\cdots$ têm áreas iguais. Todavia, o polígono derivado tem um lado a menos que o dado. A Figura 13 que segue ilustra esta construção para um quadrilátero $ABCD$ sendo transformado no triângulo ΔARD.

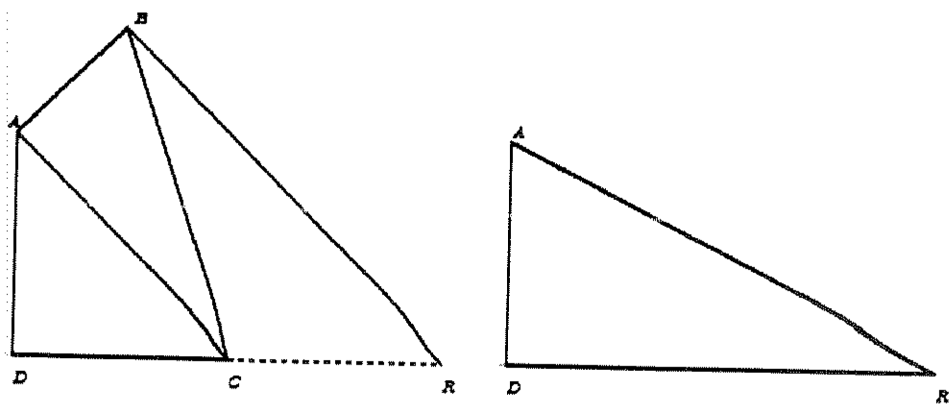


Figura 13

Através de repetição deste processo, nós finalmente obtemos um triângulo com a mesma área do polígono dado. Se b é qualquer lado deste triângulo e h a altura em b, o lado de um quadrado equivalente é dado $\sqrt{bh/2}$, isto é, pela média geométrica entre b e $h/2$. A partir desta média que é facilmente construída através de régua e compasso, o problema todo pode ser resolvido.

Até hoje em dia resolvemos muitos problemas interessantes podem ser resolvidos com este processo de construção de retas paralelas.

3.2.7 Os Sólidos Regulares

Um *poliedro* é definido como sendo *regular* quando suas faces são polígonos regulares e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes. Enquanto existem polígonos regulares de todos os tipos, só existem cinco poliedros regulares. Os poliédros regulares são classificados de acordo com seu número de faces. Deste modo, há o *tetraedro* com quatro faces triangulares; o *hexaedro* ou *cubo*, com seis faces quadradas; o *octaedro* com oito faces triangulares; o *dodecaedro* com doze faces pentagonais e o *icosaedro* com vinte faces triangulares. Em nossas aulas usamos muito a palavra *thodi*, como auxílio para resumir os nomes de todos os poliedros.

A primeira história destes poliedros regulares está perdida na escuridão do passado. Um tratamento matemático sobre eles se encontra iniciado no Livro XIII dos *Elementos*. Um dos primeiros estudiosos deste livro, observou que se trata dos então conhecidos *sólidos de Platão*, incorretamente chamados, porque três deles: o tetraedro, hexaedro e dodecaedro são devidos aos Pitagóricos, enquanto o octaedro e icosaedro são devidos a Theaetetus.

A descrição de todos os cinco poliedros regulares foi dada por Platão, que em seu *Timaeus*, mostra como construir modelos dos sólidos colocando triângulos, quadrados e pentágonos juntos para formar suas faces. *Timaeus* de Platão é o Timaeus de Pitágoras de Soiri, a quem Platão presumivelmente encontrou quando visitou a Itália.

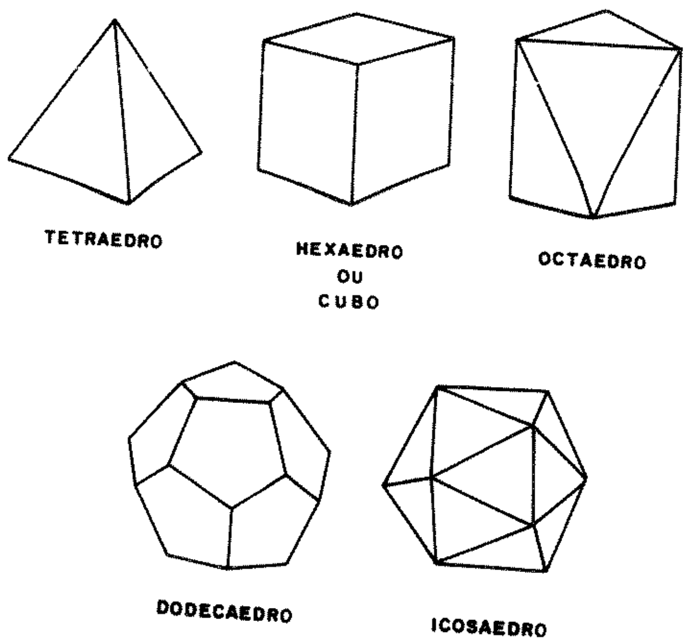


Figura 14

No trabalho de Platão, misticamente *Timaeus* associa os quatro mais facilmente construtíveis sólidos (tetraedro, octaedro, ícosaedros e cubo) com os quatro *Empedodean elementos* primários de todos os materiais sem forma: fogo, ar, água e terra. O difícil é para o quinto sólido, o dodecaedro é associádo ao universo em evolução.

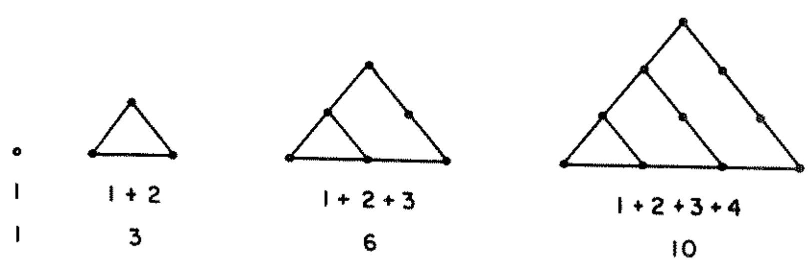
Johann Kepler (1571 – 1630), astrônomo e matemático, deu uma talentosa explicação das associações *Timaeus*. Dos sólidos regulares, ele intuiu que o tetraedro tem o menor volume por sua superfície, enquanto que o icosaedro tem o maior. O tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. O hexaedro estaria associado à terra. O octaedro, quando seguro levemente por dois vértices opostos entre o polegar e o indicador, facilmente gira e tem estabilidade do ar. Finalmente o dodecaedro é associado com o universo, porque ele tem doze faces e o zodíaco tem doze signos.

O tetraedro, o hexaedro e o octaedro, podem ser encontrados na natureza como nos cristais de *sodium sulphantimoniate*, sais comuns e alume cromado, respectivamente. Os outros dois não ocorrem em formas cristalinas, mas têm sido observados como esqueletos de animais marinhos microscópicos chamados *radiolaria*. Em 1885, um dodecaedro regular de brinquedo, de origem Etrusca, que acredita-se datado por volta de 500 a.C., foi descoberto em *Monte Loffa*, próximo de Pádua, na Itália.

3.2.8 Representação Geométrica dos Números

O aparecimento dos *números figurados*, está registrado na história da matemática e é atribuído o feito a conhecida Escola Pitagórica, cujo conceito teve muita influência até o século XVII. A associação entre a geometria e a aritmética, nesses números é muito intrigante; mostra um número de pontos distribuídos segundo uma configuração geométrica. A seguir, apresentaremos algumas destas configurações:

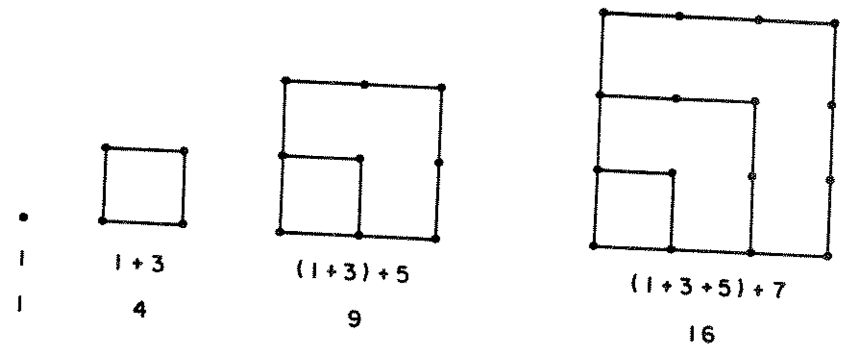
(i) Números Triangulares: são os números naturais N que formam triângulos que representam geométricamente as somas dos números da série dos números naturais, assim:



$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

onde $n = 1, 2, 3, \cdots$

(ii) Números Quadrados: são os números naturais N que formam quadrados que representam geometricamente as somas dos números ímpares da série dos números naturais, assim:

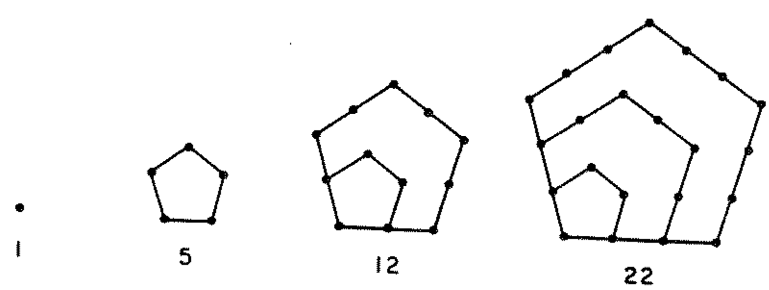


$$N = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

ou

$$N = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

(iii) Números Pentagonais: são números naturais N que formam pentágonos que representam geometricamente as somas da série dos números naturais, assim:



$$N = 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + \cdots = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

ou

$$N = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

(iv) Números Hexagonais: são os números naturais N que formam hexágonos que, em geral obtido por processo análogo aos anteriores, ou seja:

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots$$

Os números triangulares, foram estudados pelos Gregos e mais tarde no período da Renascença, mas ainda hoje aparecem em "papers" na Teoria dos Números.

Muitas relações simples podem ser deduzidas através da Análise Geométrica, por exemplo: a descoberta da soma de números ímpares resulta sempre em um número quadrado, assim:

$$1 + 3 = 4, \qquad 1 + 3 + 5 = 9, \qquad 1 + 3 + 5 + 7 = 16, \text{ etc.}$$

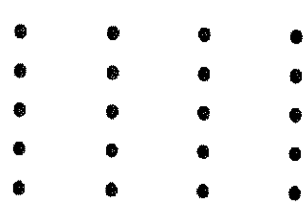
<u>Comentários</u>:Ao iniciarmos os nossos estudos em Teoria dos Números é comum encontrarmos como exemplo de números quadrados:

$$2^2 = 4,$$
$$3^2 = 9,$$
$$7^2 = 49,$$
$$\ldots$$

e, analogamente, como exemplo de números cúbicos:

$$2^3 = 8,$$
$$3^3 = 27,$$
$$5^3 = 125$$

Na verdade, o que gostaríamos de ressaltar é a expressão de forma geométrica que herdamos dos matemáticos Gregos. Observamos que os Gregos preferiram pensar na compreensão de números inteiros, como quantidades geométricas. Conseqüentemente, um produto $c = a.b$ era interpretado como área c de um retângulo de lados a e b. Uma outra interpretação seria pensar $a.b$ como números de pontos formando um retângulo com a-pontos sobre um lado e b-pontos sobre o outro lado. Por exemplo, $20 = 5 \times 4$; onde 20 representa o número de pontos que formam um retângulo. Ilustraremos o fato a seguir:

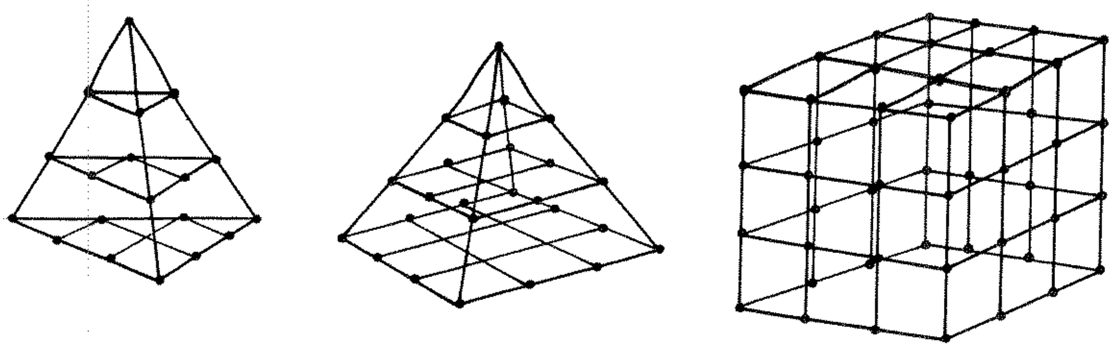


De qualquer número inteiro é produto de dois números inteiros de tal forma que geometricamente poderá ser representado por um retângulo que é denominado de números retangulares.

No caso em que os dois lados de um retângulo forem iguais, o denominam-se de números quadrados. Entretanto, nem todos os números podem ser representados como números retangulares, exceto pelo caminho trivial, seria agrupando-os em linhas. Por exemplo, o número 5 pode ser representado como número retangular sob uma única condição: se tomarmos um dos lados do retângulo sendo 1 e o outro lado sendo 5. Vejamos:

Acreditamos que através destes tipos de situações que levaram os Gregos a entenderem os "números primos". Na forma geométrica um único ponto não poderia ser considerado um número primo o qual a unidade 1 foi início da confusão, pois foi através dela que começou a ser construído. Assim, o número 1 não foi ou não é um número primo.

Deixando a questão do plano, poderemos usar o mesmo raciocínio para três dimensões; obtendo-se pirâmides triangulares através de somas de números triangulares; pirâmides quadrangulares através de somas de números quadrados e cubos:



Sejam

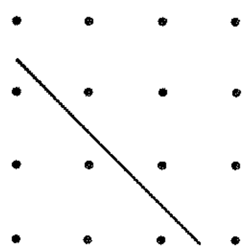
$$T = \text{pirâmide triangular}$$
$$Q = \text{pirâmide quadrangular}$$
$$C = \text{cubo}$$

Assim,

$T_1 = 1$	$T_2 = 1 + 3 = 4$
$T_3 = 1 + 3 + 6 = 10$	$T_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$
$Q_1 = 1$	$Q_2 = 1 + 4 = 5$
$Q_3 = 1 + 4 + 9 = 14$	$Q_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
$Q_3 = 1 + 4 + 9 = 14$	$Q_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
$C_1 = 1$	$C_2 = 2^3 = 8$
$C_3 = 3^3 = 27$	$C_4 = 4^3 = 64$

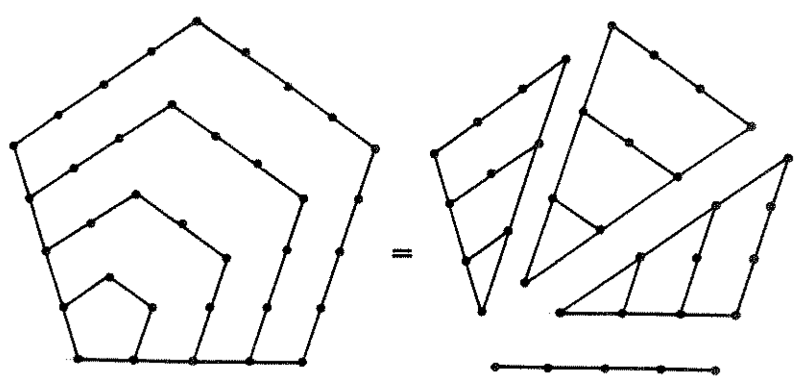
Poderemos desta forma apresentar alguns teoremas fundamentais, para esclarecer alguns pontos:

TEOREMA I: *" Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos."*

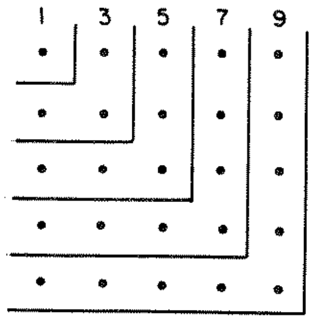


Observamos que o número quadrado na forma geométrica, pode ser dividido da seguinte forma:

TEOREMA II: *"O n-ésimo número pentagonal é igual a n mais três vezes o (n- 1)-ésimo número triangular."*



TEOREMA III: *"A soma de qualquer número de inteiros ímpares consecutivos começando com 1 é um quadrado perfeito."*



Essas representações gerais dos números triangulares, quadrados e pentagonais; contribuiu para demonstrar certos resultados algébricamente. Observe que o n-ésimo número triangular, Tn é dado por uma soma aritmética, ou seja, "a soma de uma série aritmética é igual ao produto do número de termos com a metade da soma dos dois termos extremos."

$$Tn = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e, o n-ésimo número quadrado, Sn é n^2. Assim, o nosso teorema I pode ser expresso algébricamente, da seguinte forma:

$$Sn = n^2 = n(n+1) + (n-1) = \frac{Tn + T(n-1)}{2}$$

O ésimo número pentagonal P_n, pode também ser obtido pela soma da série aritmética:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)$$
$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2} = n + \frac{3n(n-1)}{2}$$

Esta soma pode ser considerada a prova do teorema III, pois ele é obtido algébricamente pela soma da série aritmética:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

Além desses resultados sobre números, a Escola Pitagórica menciona-se a dependência dos intervalos musicais através de raio numérico. Pitágoras foi o primeiro a estudar a relação do comprimento de uma corda e o som que ela emite. Descobrira que, se considerarmos uma corda distendida entre dois suportes ela emitirá um som quando afastada de sua posição inicial, ou seja, tomemos um segmento AB de comprimento qualquer e observe as seguintes situações:

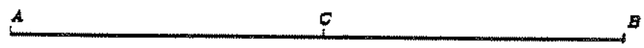
(i) onde $AB = AC$

temos então:

$$\frac{AC}{AB} = 1,$$

que denomina-se: som fundamental.

(ii) se dividirmos o segmento ao meio:



obtemos:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2},$$

que denomina-se, oitava sobre o fundamental.

(iii) se dividirmos a corda em 2/3

obtemos:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3},$$

que denomina-se, quinta fundamental.

Assim, se tocarmos de quinta em quinta, e portanto de 2/3 em 2/3 nunca chegaremos ao mesmo ponto que se tocarmos de 1/2 em 1/2. Numa linguagem comum, diríamos que as potências de 2 nunca encontra rão as potências de 3, ou seja, não haverá elementos comuns. Em linguagem matemática diriámos que há o problema da incomensurabilidade das duas escalas.

Entretanto, os gregos elaboraram uma teoria musical completa, conseguindo regular a execução dos instrumentos e do canto. E, novamente, a arquitetura se faz presente no cuidado com a acústica dos teatros. Evidenciamos que a música e a matemática possuem uma estreita relação, baseada na teoria das proporções.

Acreditamos que este resultado foi o primeiro fato físico-matemático, deixado pelos Pitagóricos para o início dos estudos científicos das escalas musicais. Além disso, Pitágoras acreditava que os corpos celestes em seus movimentos produziam sons harmoniosos, nascendo desta concepção a conhecida "harmonia das esferas", da antiga Astronomia e que o famoso filósofo Eudoxo de Cnido, ressaltou:

> *"Pode-se considerar o intervalo da Terra à Lua como um tom, o da Lua ao Sol como uma quarta, o da Terra ao Sol como uma quarta." (Tannery, P., t. XIII,1889)*

4. Platão e a Academia

4.1 PLATÃO (427 – 347 a. C.)

> *"Que ninguém que ignore a geometria entre aqui".*
>
> (Platão)

Os primeiros três séculos da matemática grega, principiando com os esforços iniciais da geometria demonstrativa por Tales, por volta de 600 a.C. e culminando com o excepcional "Elementos" de Euclides, por volta de 300 a.C., constituem-se um período de extraordinária conquista. Consideramos anteriormente algumas contribuições de Pitágoras e de sua Escola Itálica além da Escola Jônica fundada por Tales de Mileto. Através da primeira escola Pitágorica em Crotona, ergueram-se e prosperaram vários centros de matemática em diversos lugares da Grécia.

Foi por volta de 1200 a.C. que as primitivas tribos Dóricas se deslocaram em direção ao sul, penetrando na península grega, deixando suas fortalezas montanhosas do norte por terras mais favoráveis. Devido ao nome do chefe da tribo, o - O Espartano, deu-se à cidade-estado o nome de Esparta, a qual se desenvolveu e se tornou um das cidades mais fortes da Antiga Grécia. Muitos dos habitantes precedentes da região invadida anteriormente desapareceram na Ásia Menor e nas Ilhas Jônias do Mar Egeu onde, com o tempo, estabeleceram colônias. Vimos que foi no sexto século a.C. que a Escola Jônica foi fundada, e a filosofia grega floresceu, e a geometria demonstrativa nasceu.

A Pérsia se tornou um grande império militar, seguindo o inevitável programa expansionista induzido por uma economia baseada na escravidão, conquistando a Jônia e as colônias gregas da Ásia Menor em 546 a.C.. Como resultado, filósofos como Pitágoras abandonaram sua terra natal e mudaram-se para as prósperas colônias gregas no sul da Itália.

O domínio da opressão gerou inquietação nas cidades Jônias conquistadas, e em 499 a.C. uma revolta foi fomentada. Atenas, que estava se tornando um centro de civilização a oeste com progresso político e promissora democracia, juntou-se à revolução mandando armas. Embora a revolta tenha sido subjugada, o insensato rei Dário da Pérsia decidiu punir Atenas. Em 492 a.C. ele organizou um enorme exército e marinha para atacar o continente grego, mas seus navios foram destruídos por uma tempestade, e suas forças terrestres sofreram dificuldades expedicionárias. Dois anos mais tarde as forças persas penetraram em Ática, onde eles foram decisivamente derrotados pelos atenienses em Maratona. Atenas assumiu o manto de liderança grega.

Em 480 a.C., Xeres, filho de Dário, tentou outra invasão da Grécia por terra e mar. Os atenienses encontraram o exército persa na grande batalha naval de Salamis e venceram e, embora as forças terrestres gregas sob o comando espartano tenham sido derrotadas em Thermopylae, os gregos subjugaram os persas no ano seguinte em Plataea e forçaram os invasores a deixar a Grécia. A hegemonia de Atenas foi consolidada, e o meio século seguinte foi de paz, e os atenienses tiveram um brilhante período em sua história. Esta cidade de Péricles e Sócrates tornou-se o centro do desenvolvimento democrático e intelectual, provocando o surgimento de novos estudos denominado "humanidades". Matemáticos eram atraídos de todas as partes do mundo grego.

Anaxágoras de Clazomene (morreu em 428 a.C.), o último membro ilustre da Escola Jônica, estabeleceu-se lá, e a sua contribuição matemática deu origem a um dos problemas que ocupou os matemáticos por mais de 2000 anos: - "a quadratura do círculo". Não se sabem detalhes quanto à natureza do problema ou regras que o condicionaram. O que sabemos desse problema é que deveria ser construído com ajuda da régua e do compasso um quadrado de área exatamente igual à do círculo. Observe que temos uma outra forma de matemática, diferente daquela apresentada pelos egípcios e babilônicos.

Muitos dos Pitágoricos foram para Atenas para ensinar. Supoẽ-se que nesta época Hipócrates, da ilha Jônia de Chios, tenha visitado Atenas e publicado a primeira obra de geometria, conhecida como: - Elementos de Geometria. Contudo, esta obra, que antecipou os "Elementos" de Euclides por mais de um século, perdeu-se.

A paz chegou ao fim em 431 a.C. com o começo da Guerra do Peloponéso entre Atenas e Esparta, provando ser um longo e prolongado conflito. Atenas, no começo bem sucedida, mais tarde sofreu uma calamidade devastadora (peste) que matou um quarto de sua população. Conta-se, que devido a essa situação tenha originado um problema matemático famoso.

> *"Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os Atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois. Essa, diz a lenda, era a origem do problema da "duplicação do cubo" , que a partir daí foi geralmente designado como "problema deliano" - dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro."*
>
> *(Boyer, Carl, pág.48)*

Nesta época tornava-se conhecido o terceiro problema clássico da matemática: - "dado um ângulo qualquer, construir por meio de régua e compasso apenas um ângulo igual a um terço do ângulo dado". Os três problemas famosos ou clássicos da Antigüidade, ficaram conhecidos como: a duplicação do cubo, a trisecção de um ângulo e a quadratura de um círculo.

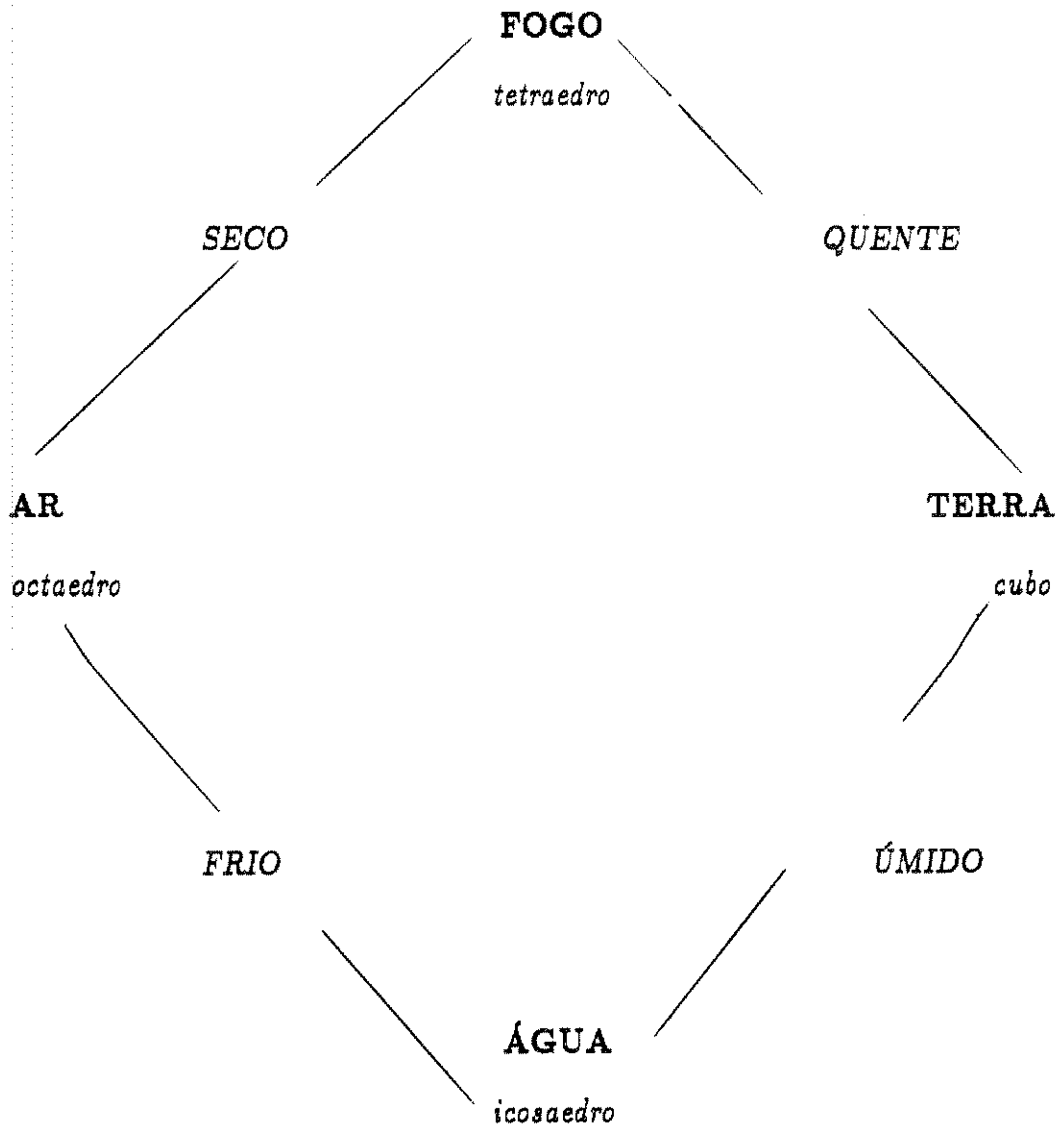
A importância desses problemas é que por mais de 2200 anos seria provado que todos eles são impossíveis de serem resolvidos com ajuda da régua e compasso. De fato, esses problemas poderiam ser resolvidos por aproximação, mas com certeza esses três problemas enriqueceram ainda mais a geometria grega.

Em 440 a.C., Atenas teve de aceitar a humilhante derrota e Esparta assumiu a liderança política para perdê-la apenas em 371 a.C., derrotada pela liga das cidades-estado rebeldes. Durante essas lutas, pouco progresso foi feito na geometria em Atenas, e mais uma vez o desenvolvimento veio da região mais pacífica da Magna Grécia. Aos Pitagóricos do sul da Itália foi permitido regressar, desde que afastados de toda questão política, e uma nova escola Pitagórica em Tarento ergue-se, sob influência do talentoso e muito admirado Arquitas.

Arquitas, como discípulo pitagórico, acreditava na eficácia do número, e assim, colocou o estudo da aritmética acima da geometria. Escreveu sobre as aplicações das médias aritméticas e geométricas. Ele acreditava que a música tinha um papel fundamental na educação das crianças. A música para ele significava: - "números em movimentos". De maneira geral, Arquitas estabeleceu o ensino através do quadrivium matemático - aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimentos) e astronomia (ou grandezas em movimento), contribuindo para o aprendizado em matemática numa educação liberal. Foi tão importante a questão do quadrivium que ainda hoje há resquícios no pensamento pedagógico. Conta-se que a mais importante contribuição para a matemática foi ele ter salvado a vida de Platão do tirano Dionísio. E por sua vez Platão permaneceu o resto de sua vida profundamente penetrado na veneração pitagórica pelo número e pela geometria e a supremacia de Atenas na matemática durante o século IV a.C.. Há necessidade de observar que Arquitas é um matemático de transição na matemática durante o tempo de Platão.

Com o fim da Guerra do Peloponeso, Atenas, embora reduzida a um menor poder político, recobrou a sua liderança cultural. Nasce Platão, em, ou perto, de Atenas em 427 a.C., o ano da grande calamidade. Tornou-se o criador do idealismo filosófico e ao mesmo tempo um propulsor da teoria matemática.

Platão passou a sua juventude no período de democracia de Péricles e foi educado em uma família aristocrática, tendo a melhor educação de sua classe: ginásticas, palestras e poesias. Aos vinte anos, conheceu Sócrates por quem fora influenciado e tornou-se mais tarde seu discípulo no estudo da filosofia em Atenas. Após a morte de Sócrates, Platão partiu em viagens para conhecer a cultura egípcia e da Magna Grécia, freqüentando círculos intelectuais com os pitagóricos. Estudou matemática com Teodoro de Cirene (principal matemático de seu tempo) na costa africana, e tornou-se amigo do eminente Arquitas de Tarento, com quem provavelmente aprendeu sobre os cincos sólidos regulares, que estavam associados aos quatro elementos de Emplédocles como podemos observar no esquema seguinte:



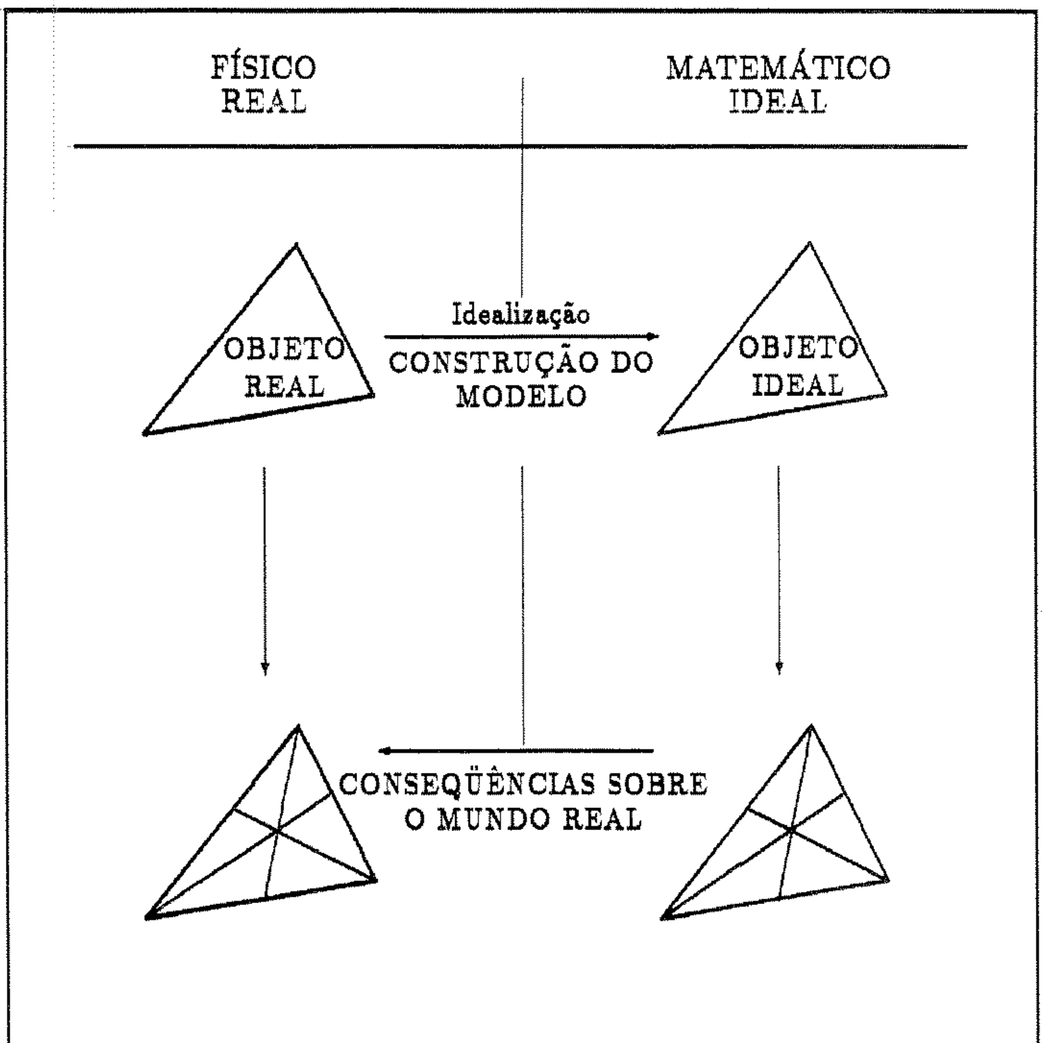
Aqui convém ressaltar que estes quatro elementos se dispõem segundo uma proporção geométrica, cujos membros são os *números sólidos*, isto é, são produtos de três números primos. A terra e o fogo são os dois principais elementos dos extremos; a água e o ar serão os dois elementos médios. Assim, está satisfeita a condição de conexão que é exigência da ciência platônica, pois a proporção geométrica é a mais bela dos belos, aquela que dela mesma e das coisas ligadas tira a unidade mais completa.

Admirador dos Pitagóricos, admitia que os números eram a causa e expressão dos tradicionais elementos: a água, a terra, o fogo e o ar. Afirmava que os princípios numéricos proporcionam a quem os conhece, uma refinada e fundamental cultura. Sua doutrina tratava os conceitos matemáticos como entes ideais e que ocupavam um lugar intermediário entre a abstração e as coisas concretas. Para melhor compreensão Platão se utilizava de um exemplo que o caracterizou:

> *- Somos como os habitantes de uma caverna, que percebem as sombras do mundo exterior, e se enganam, tomando a sombra como ela fosse o mundo verdadeiro.* *(República VII.514-517)*

Platão com esse exemplo tinha o objetivo de colocar que os objetos matemáticos são todos abstratos e o mundo platônico é o mundo do círculo verdadeiro, do quadrado verdadeiro. Para ele a matemática é o local onde residem todas as formas verdadeiras, as perfeições verdadeiras, e supõe-se que a linguagem matemática é capaz de descrever verdadeiramente o mundo das idéias.

Exemplificando; - dado teoricamente um centro e um determinado raio, podemos traçar um círculo, com essa construção o que se tem é a *idéia* de um círculo. Segundo Platão, a partir dessas idéias dos objetos é que eles existiam em um mundo especial. Abaixo mostramos sistematicamente como é que ocorre o processo de abstração e a idealização matemática, segundo Platão.



fonte:(– A Experiência Matemática -pág.160)

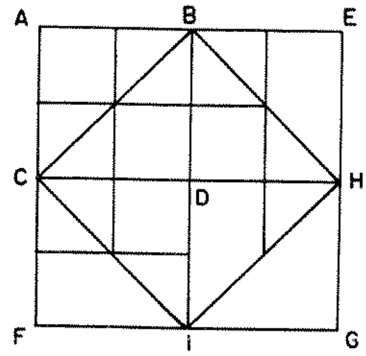
No diálogo intitulado *"Timaeus"*, Platão escreve suas idéias sobre os sólidos regulares. Quanto ao personagem "Timaeus", não se têm notícias de que ele realmente existiu. Comentamos no capítulo sobre Pitágoras a questão dos poliedros regulares conhecidos como: "sólidos platônicos" ou "corpos cósmicos'.

Logo após seu retorno à Atenas por volta de 387 a.C., ele fundou sua famosa academia, uma instituição com o objetivo da busca sistemática das pesquisas filosófica e científica a fim de contribuir na formação de futuros dirigentes políticos. O nome academia deriva de um herói local Academus ou Hecademus. Ele presidiu sua academia pelo resto de sua vida, morrendo em Atenas em 347 a.C., na venerável idade dos 80 anos.

Quase todos os trabalhos matemáticos do século IV a.C. foram desenvolvidos por amigos ou pupilos de Platão, fazendo de sua academia fronteira entre a matemática dos primeiros Pitagóricos e os da Escola de Alexandria. Platão não influenciou em nenhuma descoberta matemática, mas sim a sua entusiástica convicção de que o estudo da matemática fornece o melhor treinamento da mente, e portanto era essencial para o cultivo de filósofos e daqueles que deveriam governar seu Estado ideal. Isto explica a célebre frase: - *Que ninguém que ignore a geometria entre aqui.* Assim, por causa de seu elemento lógico e de sua atitude mental pura, ele sentiu a criação da sua filosofia.

Platão preocupou-se em fazer a distinção entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (a técnica de cálculo digital). Ele achava que a logística deveria ser utilizada pelos negociantes e guerreiros, porque havia necessidade de aprender a "arte dos números, ou não saberão dispor suas tropas". Quanto a aritmética deveria ser conhecida pelos filósofos, pois "deve subir acima do mar das mudanças". Observamos que ele fazia uma nítida separação entre os aspectos teóricos e computacionais. Na "República", Platão sublima a aritmética dizendo: " a aritmética tem um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato". Ainda na "República", Platão se refere ao número como: - "o senhor de melhores e piores nascimentos".

No livro *Menon*, de Platão, há um diálogo onde Sócrates interroga um escravo o qual, sem nada lhe ensinar diretamente, é capaz de encontrar propriedades geométricas: - "que a área do quadrado grande é duas vezes a do quadrado ABCD, cuja diagonal é o lado maior". (Este problema visa provar a tese da Reminiscência). As primeiras respostas do escravo são empregadas nos quadros da aritmética pura: - o quadrado de área dupla parece ter um lado de comprimento duplo, mas o comprimento duplo é 4, a área dupla é 16. O lado do quadrado será então maior que 2 e menor que 4, quer dizer 3. Essa resposta esgota de qualquer maneira as fontes da imaginação propriamente numérica, e é ainda inexata; o quadrado de lado três teria uma área de nove. - Sócrates sugere então um tratamento exclusivamente geométrico. Dado um quadrado ABCD (como a figura abaixo), nós podemos fazer a justaposição de três quadrados iguais de maneira de obter a área quádrupla AEGF. Unindo-se as diagonais: BC, CI, IH, HB, nós colocamos em dois cada um das quatro áreas iguais ao quadrado primitivo.



Observe que o quadrado BCIH é então o dobro do primeiro quadrado; sendo que o lado de comprimento igual a $\sqrt{8}$, é a reta que os sofistas denominavam de diâmetro, sendo que é a partir dele que se forma então a área dupla.

Surge então a pergunta: - Como é que o escravo sabe tal coisa? Sócrates argumenta que tal fato o escravo não aprendeu nesta vida mortal, de maneira que o seu conhecimento se deve à vida anterior ao seu nascimento. Observe que, para Platão, há a necessidade de mostrar a existência de um conhecimento verdadeiro, conhecimento eterno. Daí os seus argumentos são:

(i) Conhecemos as verdades da geometria que ainda não aprendemos pela educação ou experiência.

(ii) Este conhecimento é um exemplo das verdades universais, imutáveis que, com efeito, podemos perceber e reconhecer.

(iii) Assim, deve existir um reino de verdade absoluta, imutável, a fonte e a base de nosso conhecimento do Bem.

Platão tinha claro que o papel da filosofia era conduzir à descoberta de um conhecimento verdadeiro que se encontrava atrás da aparência, das mudanças e ilusões do mundo temporal. Matemática tinha extrema importância para ele, significando um conhecimento independente da experiência dos sentidos, conhecimento de verdades eternas e necessárias. Por esta razão ocupava um lugar valoroso no curriculum da academia, e onde o ensino era análogo ao quadrivium, classificando a matemática sob quatro ramos: a aritmética, a geometria (plana), a estereometria (geometria dos sólidos) e a astronomia. Era uma classificação meramente didática, porque todas as demonstrações deveriam ser "more geométrica". Quanto à sua opinião sobre a aritmética, ele nos diz:

A Aritmética tem um efeito grande e elevador, forçando a alma a raciocinar sobre os números abstratos, e se rebelando contra a introdução de objetos visíveis ou tangíveis no raciocínio.

(República VII.525)

Alguns vêm em certos diálogos de Platão que podem ser considerados os primeiros sérios ensaios em filosofia da matemática. Não podemos nos esquecer que para os gregos em geral a matemática significava geometria, e a filosofia da matemática de Platão e Aristóteles (que veremos como próximo assunto), é a filosofia da geometria. Reproduzimos abaixo o sublime diálogo entre Sócrates e Gláucon : "República", livro VI e VII, para que possamos compartilhar com Platão sobre a ciência do número e do cálculo.

Sócr. -Observa, pois, que existem dois poderes reinantes, um sobre o mundo inteligível e o outro sobre o mundo visível; e não acrescento no céu para que não imagines que me esteja entretendo com trocadilhos. Tens agora bem nítida no espírito essa distinção entre o visível e o inteligível?

Gláu. - Tenho.

Os campos do visível e do inteligível representados por uma linha reta dividida em dois segmentos desiguais.(pág. 263)

S.- Toma, pois, uma reta que esteja dividida em dois segmentos desiguais e torna dividir cada um dos segmentos, obedecendo à mesma proporção. Ficará assim classificado cada um deles com respeito à sua maior clareza ou obscuridade, e verás que a primeira subdivisão do campo do visível corresponde às imagens. Chamo imagens em primeiro lugar às sombras, e em segundo às figuras que se formam na água e em todos os corpos sólidos, polidos e brilhantes. Entendestes-me?

G.- Entendo, sim.

S.- Na segunda subdivisão coloca aquilo de que essas figuras são imagens: os animais que nos rodeiam e todas as coisas que crescem ou são fabricadas.

G.- Muito bem.

S.- Não admitiras que ambas as subdivisões deste segmento possuem diferentes graus de verdades e que a imagem está para o original assim como o objeto de opinião está para o objeto de conhecimento?

G.- Admito, pois não.

S.- Consideremos agora o modo pelo qual se divide o campo do inteligível.

G.- De que modo?

Paralelo entre as imagens e as hipóteses.(pág.263)

S.- Assim: Há duas subdivisões, na primeira das quais a alma usa como imagens aquelas coisas que antes eram imitadas, partindo de hipóteses e encaminhando-se assim, não para o princípio mas para a conclusão, e na segunda, partindo também de uma hipótese, mas para chegar a um princípio não hipotético, leva a cabo sua invetigação unicamente com a ajuda das idéias tomadas em si mesmas e sem recorrer às imagens, como no caso anterior.

G.- Não compreendo muito bem o que queres dizer.

S.- Vou fazer então uma nova tentativa. Depois de certas considerações preliminares hás de compreender melhor. Não ignoras que os estudantes de Geometria, de Aritmética e outras ciências afins dão por supostos os números pares e os ímpares, as figuras, as três espécies de ângulos e outras coisas desse gênero, diferentes para cada ciência; adotam-nas como hipóteses, procedendo como se as conhecessem, e não se julgam no dever de dar qualquer explicação, nem a si mesmos nem aos outros, a respeito do que consideram evidente para todos; e partindo daí, prosseguem de maneira coerente, até levar a termo a investigação que se propunham.

G.- Sei muito bem disso.

S.- E não sabes também que se servem de figuras visíveis como objeto de seus raciocínios, mas sem pensar nelas mesmas e sim naquilo a que se parecem, discorrendo, por exemplo, acerca do quadrado em si e da diagonal, porém não das figuras que desenham, e da mesma forma nos demais casos; e assim as coisas que traçam ou modelam, e que têm suas próprias sombras refletidas na água, são por sua vez empregadas por eles como imagens no afã de chegar aquelas coisas em si, que só podem ser contempladas com o olho do pensamento?

G.- Tens razão.

S.- E dessa classe de objetos dizia eu que era inteligível, se bem que em sua investigação a alma se veja obrigada a servir-se de hipóteses; e como não pode elevar-se acima destas, não se encaminha para o princípio, mas usa como imagens aqueles mesmos objetos que são imitados pelas sombras e reflexos da região inferior e que, em relação a estes, apresentam mais nitidez, e portanto, possuem maior valia.

G.- Compreendi, falas ainda do que se faz em Geometria e nas ciências afins.

A dialética serve-se das hipóteses para elevar-se acima destes.(pág. 265)

S.- Pois bem, aprende agora que coloco na segunda subdivisão do segmento inteligível aquilo que a razão alcança por si mesma, valendo-se do poder dialético e considerando as hipóteses não como princípios mas como verdadeiras hipóteses, isto é, pedestais e trampolins que lhes permitem elevar-se ao não-hipotético, ao princípio de tudo; e apegando-se a este e ao que dele depende, passará de uma dedução a outra e descerá novamente às conclusões, sem recorrer ao auxílio de qualquer objeto sensível mas partindo únicamente de idéias para passar a idéias e terminar em idéias.

G.- Agora consegui entender, embora não perfeitamente, pois me parece tremenda a empresa que descreves; em todo caso, percebo que tens em mira deixar assentado que a visão do ser e do inteligível proporcionada pela ciência dialética é mais clara do que a que nos oferecem as chamadas artes, as quais se baseiam apenas em hipóteses; pois, se bem que os que estudam se vejam obrigados a contemplar os objetos por meio do pensamento e não dos sentidos, como partem de hipóteses e não se elevam até um princípio, te parece que não adquirem conhecimento desses objetos - os quais, no entanto, são inteligíveis quando estão em relação com um princípio. E creio também que à operação dos geômetras e estudiosos das ciências cognatas chamas pensamento e não conhecimento, pois o primeiro é algo que se acha entre a simples crença e o conhecimento.

S.- Compreendeste-me muito bem. E agora demos aos dois segmentos daquela linha reta, com suas quatro subdivisões, os nomes que lhes competem: a inteligência ao mais elevado; o pensamento ao segundo; ao terceiro chamamos crença e ao último, percepção de sombras. E ponhamos-lo em ordem, considerando que cada um deles participa tanto mais da clareza quanto mais participem da verdade os objetos a que se aplica.

G.- Já entendi. Estou de acordo contigo e aceito a ordem que propões. Que vem a ser isso?

S.- Essa coisa tão vulgar que é conhecer o um, o dois e o três. Numa palavra, o número e o cálculo. Ou não é verdade que toda arte e conhecimento se vêem obrigados a participar deles?

Para a segunda educação, resta a Aritmética (pág. 278)

G.- É bem verdade.

S.- Inclusive a ciência militar?

G.- Por certo.

S.- Então Palamades, sempre que aparece nas tragédias, prova que Agamenon era de uma incompetência ridícula como general. Não observaste que afirma ter inventado o número, o que lhe permitiu contar as naves e distribuir pelos diversos postos o exercítos acompanhado diante de Tróia? Daí se infere que antes dele não se havia contado coisa alguma e, portanto, que Agamenon não sabia literalmente dizer quantos pés tinha. Como poderia sabê-lo, se desconhecia os números? Mas, nesse caso, que espécie de general seria ele?

G.- Um esquisito general, não há dúvida, se isso fosse verdade.

S.- É possível negar que o conhecimento da Aritmética seja indispensável a um homem de guerra?

G.- Mais que qualquer outro - para quem queira entender alguma coisa, por pouco que seja, de tática, ou melhor, para quem queira ser um homem.

> *A inteligência é provocada pela contradição do uno e do múltiplo. (pág. 281)*

S.- E a qual dessas classes pertencem o número e a unidade?

G.- Não faço idéia.

S.- Pois reflete um pouco e verás que a resposta está implícita no que precede. Se a unidade é percebida sificientemente e em si mesma pela vista ou por qualquer dos outros sentidos, não se inclui entre as coisas que não atraem para a essência, como dizíamos do dedo; mas, se sempre há algo contrário que seja visto ao mesmo tempo que ela, de modo que não pareça ser antes a unidade que o seu oposto, então já será preciso alcançar uma decisão e a alma em dúvida recorrerá à inteligência para investigar o que seja a unidade em si, e portanto a apreensão da unidade será das que conduzem e fazem com que nos voltemos para a contemplação do ser.

G.- E o que acontece notadamente no caso da unidade, pois vemos a mesma coisa como uma e como infinita multidão.

S.- Sim, e se isso é verdadeiro da unidade não deve ser menos verdadeiro dos demais números.

G.- Claro.

S.- E todo o cálculo e a Aritmética tem por objetivo o número.

G.- Com efeito.

S.- E destarte se revelam aptos para conduzir à verdade.

G.- Sim, extraordináriamente aptos.

S.- Então parecem ser dois os ensinamentos que buscamos. Com efeito, o conhecimento dessas coisas é indispensável ao guerreiro por causa da tática, e ao filósofo pela necessidade.

> *(A Aritmética tem ao mesmo tempo uma utilidade prática e um emprego filosófico) de elevar-se a até a essência emergindo do mar da geração; por isso deve-ser ele um calculador.*

G.- Assim é.

S.- Ora, sucede que o nosso guardião não é menos filósofo do que guerreiro.

G.- De fato.

S.- Então, é esta espécie de conhecimento que conviria implantar por lei, tentando persuardir os que vão exercer as mais altas funções na cidade a que acerquem da Aritmética e a cultivem não como amadores, mas até que cheguem a contemplar a naturez dos números com a ajuda exclusiva da inteligência; não como fazem os comerciantes e revendões, com mira nas compras e vendas, mas pela sua utilidade na guerra e pela maior facilidade com que a própria alma se pode votar da geração para a verdade e a essência.

G.- Dizes muito bem.

S.- E eis aí como, ao falar da ciência dos números, observo quão sutil é ela e quão benéfica para nós sob muitos aspectos, em relação ao que procuramos; isso, sempre que a cultivemos com vistas no conhecimento, e não na mercancia.

G.- Por quê?

(A Aritmética superior não se ocupa com objetos visíveis ou tangíveis, mas com números abstratos.)

S.- Pelo que acabamos de dizer; porque eleva a alma a grandes alturas e a obriga a discorrer sobre os números em si, rebelando-se contra qualquer tentativa de introduzir objetos visíveis ou tangíveis na discussão. Já sabes, creio eu, que os que entendem dessas coisas se riem daqueles que, ao discutir, procura dividir a unidade em si, e não o admitem; pelo contrário se tu a divides, eles a multiplicam, porque temem que a unidade venha a aparecer não como unidade, mas como reunião de várias partes.

G.- Dizes uma grande verdade.

S.- Supõe agora que alguém lhes dissesse: "Ó homens admiráveis! Que números são esses sobre que discorreis, e nos quais as unidades são tais como vós as supondes, isto é, todas elas absolutamente iguais entre si, invariáveis e indivisíveis?" Que pensa que responderiam?

G.- Responderiam, segundo creio, que falam de coisas que só se podem realizar no pensamento, sem que seja possível manuseá-las de qualquer outro modo.

S.- Vês, então meu caro amigo, como esse conhecimento parece ser-nos realmente necessário, já que obriga a alma a usar da inteligência para alcançar a verdade em si?

G.- Sim, não há dúvida que o faz.

S.- E não notaste que os que têm um talento natural para o cálculo também mostram grande vivacidade para compreender todas ou quase todas as ciências, e que mesmo os espíritos tardos, quando foram educados e exercitados nessa disciplina, tiram dela, senão outro proveito, pelo menos o de fazerem-se todos mais atilados do que antes eram?

G.- Realmente, assim é.

S.- E creio, na verdade, que não te seria fácil encontrar muitas ciências que dêem mais trabalho do que esta a quem as aprende e nelas se exercita.

G. Não com efeito.

S. E, por todas essas razões, a Aritética é um ramo de conhecimento que não deve ser abandonado e em que cumpre educar os mais bem dotados.

G. De acordo.

S.- Fica, pois assentado que está será nossa primeira matéria de educação. Mas há uma segunda que se segue a ela e que devemos considerar se acaso nos interessa.

G.- Qual é? Será a Geometria?

S.- Exatamente.

G.- Pois está claro, que nos interessa aquela sua parte que se relaciona com as coisas da guerra. Porque, ao acampar, ao tomar posição, ao cerrar ou estender as fileiras de um exércitos e em qualquer outra manobra militar, quer em combate, quer em marcha, grande será a diferença entre a maneira de proceder do general que é geômetra e a do que não o é.

(As posições práticas da Geometria pouca importância têm em face de sua significação para o filósofo.)

S.- Sim, mas para tais coisas seria suficente uma pequena parte da Geometria e do cálculo. Ora, é justamente a sua porção maior e mais avançada que devemos examinar para ver se tende a facilitar a contemplação da idéia do bem. E dissemos que tendem para esse fim todas as coisas que obrigam a alma a voltar-se para aquele lugar onde reside a absoluta perfeição do ser, aquilo que ela deve contemplar a todo transe.

G.- Dizes bem.

S.- Portanto, se a Geometria nos obriga a contemplar a essência, interessa-nos; se apenas a geração, não nos serve.

G.- Sim, isso é o que afirmamos.

S.- E no entanto, ninguém que tenha algum conhecimento de Geometria, por menor que seja, negará que tal maneira de concebe essa ciência esteja em franca contradição com a linguagem habitual dos geômetras.

G.- Como assim?

S.- Porque só têm em mira a prática e fala sempre de maneira forçada e ridícula, empregando termos como "quadrar","aplicar" e "adicionar". Confundem as necessidades da Geometria com as da vida diária; no entanto, o verdadeiro objeto de toda essa ciência é, segundo creio, o conhecimento.

G.- Evidentemente.

S.- E não é preciso reconhecer também o seguinte?

G.- Quê?

S.- Que ela é cultivada com vistas no conhecimento do que sempre existe, e não do que nasce e perece.

G.- Então, meu nobre amigo, ela atrairá a alma para a verdade e formará mentes filosóficas que dirijam para cima aquilo que agora dirigimos indevidamente para baixo.

S.- Sim, nada mais talhado para produzir esse efeito.

G.- Pois então, mais que em qualquer outra coisa deve-se insistir em que os habitantes de tua Calípolis (a cidade ideal), aprendam Geometria. Porque tampouco são de desprezar as suas vantagens subsidiárias.

S.- Quais?

G.- Não só as de natureza militar, que tu mesmo apontaste, mas também que em todos os ramos de estudos, como demonstra a experência, quem aprendeu Geometria tem uma compreensão infinatamente mais viva.

S.- Sim, por Zeus, a diferença é infinita.

Para finalizar o estudo de Platão e estas discussões metafísicas, cabe aqui ressaltar as contribuições dele ao conhecimento matemático. Deve-se a ele o emprego correto das definições e axiomas, a ponto de se aludir à construção de um sistema formal e lógico das matemáticas. Estimulou o ensino da geometria, em particular a análise dos problemas matemáticos através do conhecido *método redutivo*, que consiste em supor o problema e o resultado, e por regressão, tratar de chegar a uma construção ou a um teorema conhecidos. Esta análise ajudou consideravelmente as demonstrações de proposições e a realização de algumas construções geométricas. No entanto, é com o aparecimento da geometria analítica que esse método tem o seu valor reconhecido. Platão influenciou vários matemáticos como: Theaetetus, Eudoxo de Cnido e o próprio Aristóteles, o qual será o nosso próximo assunto. Sobre os escritos de

Platão, sabe-se que seus sucessores preservaram mas nada fizeram para desenvolver o seu pensamento.

4.2 A Regressão Analítica

Reconhecer que o que está além do número não está além da inteligibidade, substituir a solução exata da geometria onde essa solução não pode se reduzir á forma simples de uma relação aritmética, é alargar a base da ciência, e é transformar sua noção. Tornou-se impossível manter em todo seu rigor, em toda a sua ingenuidade, a identificação que o pitagorismo havia afirmado entre os números e as coisas; mas é igualmente impossível aceitar em toda a sua simplicidade e em toda a sua crueza a oposição estabelecida por Parmênides entre o mundo do ser ou da verdade e o mundo da aparência ou da opinião. Sem nada perder da severidade da dialética com a qual os Eleatas haviam manipulado o princípio de contradição, a filosofia platônica se proporá a reconstituir o sistema orgânico onde todas as ciências encontrarão de agora em diante sua harmonia e a sua unidade. Ela começará então, por seguir através da hierarquia das diferentes disciplinas o progresso de análise, graças o qual a multiplicidade confusa e mutável sensível resulta num sistema de relações inteligíveis.

Nesse sentido, a doutrina platônica da ciência pode parecer calcada sobre a dialética socrática. Sócrates obrigou os homens a considerar suas próprias ações, a confrontá-las com as ações ou discursos de outros homens, a refletir sobre as incertezas de suas máximas e a contrariedade de seus desejos até eles chegarem, através de processos metódicos e convergentes de purificação, a destacar a noção que, por sua própria generalidade, era capaz de imprimir à conduta uma direção racional em conformidade com a natureza verdadeira do homem. Ele tinha por preocupação constante chegar pelo pensamento de seus interlocutores à hipóteses.

A passagem operar-se-á da aritmética do vulgar à aritmética do filósofo. O vulgar não hesita em fazer entrar em um mesmo cálculo duas unidades quantitativamentes diferentes, por exemplo; duas armas, dois bois, duas coisas que seriam ou as maiores de todas ou as menores; mas os filósofos recusaram proceder assim; eles não começariam por afirmar a homogênidade perfeita de cada uma das unidades de uma miríade. O cálculo serve aos interesses da vida privada ou da vida pública, para as vendas ou para as compras, para as necessidades da guerra; mas os cálculos supõem as relações intrísecas dos números. A prática da "Logística" convida o espírito a uma verdadeira conversão, que o eleva acima da esfera do tornar-se, em busca da contemplação da natureza própria dos números, que lhe oferecem o caminho da verdade e do ser. A "Logística" ou a "Aritmética" atinge hipóteses fundamentais, por exemplo: a divisão dos números em pares e em ímpares; e tomando essas hipóteses por ponto de partida, ela alcança racionalmente as proposições que tem por objetivo demonstrar. Os geomêtras se servem das figuras visíveis e fazem delas o assunto de seus raciocínios, mas o objeto verdadeiro de pensamento não são essas figuras mas outras realidades às quais essas figuras se assemelha. Suas demonstrações têm por razão o quadrado e a diagonal em si, não as diagonais ou qualquer outra figura à qual eles dão a representação gráfica ou plástica, e que suscetíveis de projetar uma sombra ou uma imagem na água; todas essas figuras são apenas imgens às quais os geomêtras recorreram em seus esforços para atingir essas realidades que não é possível perceber de outro modo se não pelo pensamento. As hipteses da geometria, por exemplo: a divisão dos ângulos em três espécies,estarão além das representações figuradas, estando mais perto das relações dos números inteiros.

A geometria é suscetível do mesmo progresso; suas aplicações práticas – por exemplo, na arte da guerra, para o estabelecimento do campo de batalha, para a ordem de uma marcha ou de um combate – testemunham as propriedades que possuem as figuras.

Platão se caracteriza fundamentalmente na constituição da análise como procedimento de demostração reconstituindo da proposição enunciada os princípios elementares que permitem estabelecer a exatidão. Eis aqui enfim, uma consideração da qual os historiadores da matemática grega ressaltaram a importância: essa análise, à diferença da análise dos modernos, não é suficiente por ela mesma; os antigos se colocaram,não sobre o terreno da álgebra, onde as proposições se exprimem em geral por equações que são recíproca, mas sobre o terreno da geometria onde elas são ordinárias e hierarquicamente ordenada. Estabelecer que, B sendo verdadeiro, A é verdadeiro, não é demonstrar senão que a verdade de A implica a verdade de B. Por exemplo, pode-se demonstrar através da regressão analítica que os vértices de um triângulo que têm uma base comum e um ângulo de valor constante estão situados num círculo; mas, não se pode inverter a ordem das proposições e colocar que para todos os triângulos de base comum, tendo os seus vértices sobre um círculo, o valor do ângulo no vértice é constante, pois omitiríamos as condições que são necessárias para a validade dessas proposições: – primeiro, o cículo deve passar pelas extremidades das bases; segundo, não se deve considerar senão a parte do círculo situado num único lado da base. De fato, dentro dessa concpção das maneiras de análise usadas pelos antigos, que Pappus evidenciou em sua coletânea de soluções analíticas, a análise é olhada como condunzindo a uma demonstração sintética.

4.3 A Dialética Sintética

Para seguir em seu desenvolvimento a Filosofia de Platão, é preciso ir mais além: - a análise dos matemáticos não é somente relativa à dedução progressiva que ela prepara; ela é além disto relativa a novo esforço de análise, que remonta das hipóteses aos princípios absolutos que as fundamentam. A distinção das ciência e da filosofia se encontra no livro: " A República", tão rigorosa quanto poderá sê-lo mais tarde no positivismo; mas as conseqüências que Platão tira é inversa daquela do positivismo: é a filosofia que é autonôma e não a ciência. Os técnicos tomam por ponto de partida de seus raciocínios hipóteses que eles não crêem que sejam útil de justificar nem por elas mesmas nem por outras, como se elas fossem suficientemente claras para todo mundo. Ou, na medida em que não vá além destas suposições, a matemática não merecerá o nome de ciência; suas noções iniciais serão simples possibilidades. Ela ficará como uma espécie de sonho sem tomada direta sobre a realidade verdadeira.

Separando-se ao mesmo tempo dos Pitagóricos, que colocariam sobre o mesmo plano ciência e filosofia, e de Sócrates, cuja investigação prudente parecia ter parado na determinação da hipótese, Platão engaja a filosofia da matemática em um novo caminho.

A dialética tem por função retomar as hipóteses das técnicas particulares e de as elevar até os seus princícipios; elas tomam posse do incondicional; e de lá, por um caminho inverso da análise, forja uma cadeia ininterrupta de idéias, que suspensas a partir do princípio absoluto, constituirão um mundo completamente independente do sensível. A filosofia matemática de Platão no seu grau mais alto e sob sua forma definitiva será então a dialética, ou, por analogia com a metafísica que deveria suplantar, a metamatemática.

Infelizmente,nós não possuímos as informações diretas e autênticas que nos permitiriam dar da metamatemática propriamente platônica uma exposição sistemática e completa. Sabemos que ela tinha como objetivo os números ideais e, depois deles, as figuras ideais; mas nem Platão nos diz, nem as alusões dos antigos a esta teoria nos fazem compreender, como determinar de uma maneira precisa a natureza de cada um de seus números e de cada uma de suas grandezas.

Para Platão os números são idéias. Nas páginas de Phédon, onde nós temos destacado a teoria da participação, a idéia da *mônada* é alegada para explicar a verdadeira característica dos números: hesita-se em dizer que a adição de um-a-um é suficiente para produzir o número dois, é preciso invocar a participação na essência da mônada. O testemunho de Aristóteles confirma e precisa o texto de Phédon; a idéia de número, ou o número–idéia, está não somente além do número sensível, mas também do número aritmético. Pode haver uma multiplicidade de números semelhantes entre si, tendo apenas uma unidade específica; mas a idéia é o privilégio da unidade verdadeira, que é a unidade numérica da mesma. Para cada número natural até o número dez corresponde uma idéia, cada uma dessas idéias possui uma estrutura interna que lhe é própria, sem que haja de uma para a outra transporte e combinação de unidades homogêneas.

Cabe aqui uma pergunta: que lugar ocupam os números ideais na teoria das idéias? Segundo Teofrasto, os números estão entre as idéias e os princípios. E Platão ensinava que o bem é o número *um*: "os auditores se apressavam na esperança de ouvir falar do que é o bem para os homens, fortuna, saúde, força, em uma palavra a felicidade perfeita; mas foram discursos sobre as matemáticas, sobre os números, sobre a geometria e astronomia com a conclusão de que o bem é um; paradoxos que deixaram os ouvintes desconcertados, e provocando o abandono de alguns em continuar ouvi-lo."

4.4 Números Ideais

Definindo os princípios dos números ideais, definimos os princípios que comandam os sistemas da filosofia platônica. Platão professa que o número "um" é o bem, que o infinito é o mal, como faziam os Pitagóricos. É na combinação do "um" com o infinito que vai consistir todo o desenvolvimento desta filosofia. Enquanto seus predecessores imediatos percorriam de um salto o intervalo que separa o "um" do infinito, Platão proclama no Philèbe a necessidade de marcar na combinação do um e do infinito as etapas intermediárias, de submeter o diverso e o que se move a um princípio de limitação que faça cessar as contrariedades, que introduz a medida e a harmonia pela definição de um número determinado. As noções de proporção e de número não tem mais uma caracterítica puramente matemática, elas não possuem somente esta beleza interna, que é inseparável da ordem intelectual. Platão lhes atribui um valor afetivo, um valor moral. A "Política", distingue expressadamente duas ciência da "medida", uma constituída por processos puramente mecânicos, que ressalta a técnica propriamente matemática, a outra orientada para um ideal de finalidade.

4.5 As Grandezas Ideais

A mesma névoa que envolve a teoria dos números ideais paira sobre a teoria das grandezas ideais, com a qual o platonismo volta às considerações geométricas que contribuiram para a formação da teoria do conhecimento. Segundo Aristóteles, se renunciando à identificação pitagórica do número e do ponto, Platão não tinha mais conservado o ponto propriamente dito senão a título de "convenção" geométrica. Ele o chamava de princípio da linha e até chegou a designar como linha indivisível. Neste sentido, o ponto seria simétrico da unidade que é o princípio do número mais que o número. De fato, com os platônicos, mais específicamente com Xénocrate, a correspondência se estabelece entre a "díade" e o comprimento, entre a "tríáde" e a superfície, entre "tétrade" e o sólido (mais exatamente aqui, tétrade e tetráedro regular).

Não se desconheceria que essa concepção dos números ideais era capital nos ensinamentos de Platão. Aristóteles tirou dos "Discursos sobre a Filosofia" uma passagem realmente marcante: *"o animal em si resulta da idéia do "um", e do comprimento e da largura e da profundidade primeiras, e os outros animais são constituídos de uma maneira semelhantes...De outra maneira, o intelecto é o um, e a ciência é a díade (ela vai seguindo uma única direção para um único resultado); o número da superfície é a opinião, o número do volume, a sensação)."* Contudo, em razão de sua importância essa teoria precisa ser esclarecida. Qual é a relação das figuras ideais com os números ideais? Há identidade, ou simplesmente um paralelismo, transposição da ordem puramente abstrata na ordem espacial? Os platônicos colocaram essas questões, mas parece que se dividiram quanto à solução. Seguindo alguns, a linha em si é somente a "díade"; seguindo outros, existe somente entre a díade e a linha em si uma comunidade de forma: na díade, a idéia se confunde àquilo de que ela é idéia, enquanto que para a linha em si convém separar a idéia da linha, que seria a díade, e a linha propriamente dita. É possível que esta divisão exprima uma dualidade de tendência que é inerente ao platonismo.

4.6 O Platonismo a partir de Platão

A perfeição técnica da matemática, deixou tanto os pitagóricos quanto os platônicos desarmados. A reflexão sobre as noções matemáticas é incapaz de fornecer outra coisa se não as combinações particulares a cada idéia; o número ideal é definido pela conexão das noções geradoras e da noção engendrada: essa é posterior, aquela é anterior. Mas então, o equilíbrio que Platão, num período de sua cátedra, tinha tentado estabelecer entre a tradição de Sócrates e a tradição de Pitágoras, contra o *conceptualismo* e o *matematismo*, vai se romper. Os sucessores de Platão perceberam a impossibilidade de seguir ao mesmo tempo a *pista das matemáticas* e a *pista dos conceitos*.

A escola platônica parecia que não poderia escapar à alternativa: ou a dialética matemática vai se unir ao simbolismo místico do pitagorismo para se perder no ocultismo, na teosofia; ou ela deve se restringir aos princípios rigorosamente determinados de uma ciência positiva, e não teria mais razão para os transformar em realidades separadas. Mas então a matemática cessa de responder às esperanças que haviam colocado nela, ela não é mais o *organum* universal que neste momento reclamava a especulação grega.

O platonismo sob a forma que nós consideramos é uma filosofia matemática no duplo sentido da palavra. De um lado a aritmética e a geometria fornecem a Platão o modelo de descoberta fecunda e de exata demonstração ao qual o pensador deve-se referir para estabelecer uma doutrina do conhecimento verdadeiro. Na direção da conduta individual e na organização da vida coletiva o moralista e o político seguirão de perto os processos que permitirão a proporcionalidade numérica e a dosagem quantitativa. Por outro lado, a universalidade que pertence aos raciocínios matemáticos implica a universalidade dos princípios aos quais, este raciocínio está preso. É preciso justificar esses princípios, enquanto princípios, por uma via direta dos genêros supremos do ser. Platão tira da matemática uma filosofia e fundamenta a matemática sobre uma filosofia.

A dupla característica da filosofia matemática explica o duplo julgamento que a história pronunciou sobre ela, o paradoxo da sua decadência imediata e da sua grandeza durável. Que a função do pensamento seja uma função de resolução, que ela se exerça com a ajuda da ciência dos números e das figuras, e que de grau em grau ela venha a descobrir na estrutura embaralhada dos fenomênos a ordem das relações matemáticas, estas são concepções que refletem idéias platônicas e já que está determinado a reaparecer num futuro próximo da Renascência para tornar-se com Galileu, Descartes e Newton a substância da civilização moderna, é permitido crer que o platonismo é a verdade da filosofia.

Mas essa verdade necessitou de aproximadamente vinte séculos de reflexão para emergir na pureza de sua luz; foi preciso que a psicologia substituisse a teologia e a crítica a dogmatismo, para que o método de análise regressiva que Platão havia introduzido no domínio da reflexão especulativa se tornasse a medida direta do progresso científico, e que se constituísse como um método independente, suficiente para a apropriação da natureza ao espírito.

Num determinado momento do processo dialético, Platão se encontra longe de definir a forma sob a qual a sua doutrina está constituída e se oferece à discussão com seus primeiros auditores. A análise idealista apenas marca a preparação para pesquisa do conhecimento superior que atinge os princípios do ser e do saber, e deduz desses princípios as hipóteses necessárias às combinações do cálculo e às relações métricas. O platonismo prende a parte técnica da matemática, o domínio positivo da ciência, a uma dialética que os ultrapassa e que lhes é estranha. Por isso, não somente o seu fracasso seria inevitável; mas seria inevitável que este fracasso fosse não outra coisa senão a ruína de um sistema particular, que continha um eclipse secular da filosofia de base matemática. O intelectualismo científico de Platão deverá ser apagado diante do intucionismo gramatical; o sujeito da proposição, tornado o ser enquanto ser, será o objeto por excelência do saber, com prejuízo da idéia enquanto número. Aristóteles e o Liceu

5. Aristóteles

5.1 ARISTÓTELES (384 – 322 a.C)

"É pois manifesto que a ciência a adquirir é das causas primeiras, pois dizemos que conhecemos cada coisa somente quando julgamos conhecer a sua primeira causa." *(Aristóteles)*

Aristóteles, nascido em Estagira, na Macedônia, filho de Nicômaco, médico do rei Amintas, pai de Felipe II, aos 18 anos foi para Atenas a fim de estudar na Academia de Platão. Ingressou na Academia, primeiro como discípulo, a seguir como um colaborador e mais tarde tornou-se professor, trazendo como herança de seus antepassados, acentuado interesse pelas pesquisas biológicas. Platão chamava-o de *"Nous"* da Academia, isto é, a inteligência personificada. Lamentou a tendência da Academia (Platão) para transformar a filosofia em matemática e abondonou-a. Após a morte de Platão, tornou-se conhecido por toda a Grécia.

Por volta de 335 a.C., juntamente com Teofrasto fundaram o "Liceu", que se situava nos arredores da cidade, e havia um pequeno santuário consagrado à Apolo e às musas. No Liceu havia um jardim por onde os seus mestres e seus alunos, criaram o hábito de ensinar, caminhando. Daí o nome de Escola Peripatética (peri = arredores e pateo = passear). Ao contrário da Academia, voltada fundamentalmente para as investigações matemáticas, o Liceu transformou-se num centro de estudos dedicados principalmente às ciências naturais. Preocupava-se em ministrar dois tipos de aulas: - uma que colocava questões com certas dificuldades para alunos mais habilidosos e a outra eram questões mais específicas para aqueles que se iniciavam no Liceu. Sabe-se que Aristóteles realizou dois tipos de composições: as endereçadas ao grande público, redigidas em forma mais dialética do que demonstrativa e, os escritos filosóficos eram destinadas aos alunos do Liceu (foram as únicas que se conservaram).

Aristóteles promoveu a separação da filosofia das outras ciências particulares, classificando as ciências em geral de: *-primeira filosofia* (o estudo do ser em geral) e *filosofias segundas* (as diversas ciências particulares: matemática, física, zoologia, astronomia, etc.). Sendo considerado o mais antigo homem de ciência grega no sentido de existirem trabalhos que podem ser estudados na sua forma original.

A obra de Aristóteles é vastíssima e constitue verdadeira enciclopédia que compreende todos os ramos do conhecimento humano; e ao filósofo, que, com um método perfeitamente sistematizado, conseguiu unir o *idealismo socrático-platônico* com um realismo natural e científico, devem-se as teorias sobre o *silogismo*, a lógica científica, a ética, a política, a arte poética, a retórica, a filosofia da arte, o estabelecimento, enfim, em bases científicas, dos estudos relativos às ciências naturais.

Para Aristóteles, a obtenção do conhecimento científico (estabelecimento de conceitos, de universais) se dava em dois níveis: a indução e a dedução (o silogismo).

A indução (...) "é a passagem dos individuais aos universais; por exemplo, o argumento seguinte: supondo-se que o piloto adestrado seja o *mais eficiente, e da mesma forma o auriga adestrado, segue-se que, de um modo geral, o homem adestrado é o melhor na sua profissão. A indução é, das duas "indução e dedução, a mais convincente e a mais clara; apreende-se a mais facilmente pelo uso dos sentidos e é aplicável à grande massa dos homens"(...).*

(Tópicos I, 12.)

Segundo ele, a indução era o primeiro momento para o conhecimento científico, sob o qual se pudesse estabelecer uma ordem a partir de regras gerais, que fossem válidas.

5.2 A obra matemática de Aristóteles

Os escritos de Aristóteles sobre a lógica estão reunidos num conjunto de tratados que épocas posteriores vieram a denominar "Organun". Reúnen-se, nele, seis obras: as Categoriae, De Interpretatione, Analytica Priora, Analytica Posteriora, Tópicos e Refutações aos Sofistas. O resumo do conteúdo de cada obra está assim distribuída:

- as "Categoriae", apresenta os elementos do discurso, os termos da linguagem;
- "De Interpretatione", trata do juízo e da proposição;
- "Analytica Priora"se encontram as provas e os conhecimentos científicos e, na "Analytica Posteriora", se encontram o desenvolvimento do estudo da"Silogística"(ou teoria do silogismo) e a demonstração científica. A demonstração é um silogismo que favorece o conhecimento, e o conhecimento (epistème) é o saber dos princípios, pelas causas, derivando das premissas.
- "Tópicos", que expõem um método de argumentação geral, aplicável em todos os setores, tanto nas discussões práticas quanto no campo científico.
- "Refutações aos Sofistas", que complementam os Tópicos e investigam os tipos principais de argumentos.

As obras de Aristóteles põem à mostra as divergências com as filosofias de Pitágoras e principalmente a de Platão, tanto no que diz respeito ao conteúdo, como quanto ao método. Para podermos compreender isso mais claramente, é importante destacarmos trechos do seu livro Metafísica - Livro I, onde ele expõe críticas as concepções pitagóricas e platônicas, principalmente ao que diz respeito à noção de números.

(...), "os chamados pitagóricos consagraram-se pela primeira vez às matemáticas, fazendo-as progredir, e, penetrados por estas disciplinas, julgaram que os princípios delas fossem os princípios de todos os seres. Como porém, entre estes, os números são, por natureza, os primeiros, e como

nos números julgaram [os pitagóricos] aperceber muitíssimas semelhanças com o que existe e o que gera, de preferência ao fogo, á terra e a água (sendo tal determinação dos números a justiça, tal outra a alma e a inteligência, tal outra o tempo, e assim da mesma maneira para cada uma das outras); além disto, como vissem nos números as modificações e as proporções da harmonia e, enfim, como todas as outras coisas lhes parecessem, na natureza inteira, formadas á semelhança dos números, e os números as realidades primordiais do Universo, pensaram eles que os elementos dos números fossem também os elementos de todos os seres, e que o céu inteiro fosse harmonia e número." (...) (pág.21)

⋮

(...) "Assim, como a década parece números perfeitos e parece abarcar toda a natureza dos números," (...) (pág. 22)

⋮

(...) "Os pitagóricos igualmente falaram em dois princípios, mas com este acrescento que lhe é peculiar: o finito, o infinito e o uno seriam naturezas diferentes, tais como o fogo, a terra ou outra coisa parecida, mas o próprio infinito e o próprio uno são a substância das coisas de que predicam, sendo portanto o número a substância de todas as coisas." (pág. 23)

Para Aristóteles, os pitagóricos receberam duas críticas: trabalharam com definições muito simples e basearam-se em analogias superficiais. Estabeleceram as definições e as aplicaram indiscriminadamente. Como exemplo desta segunda crítica a identificação da dualidade, qualquer que fosse a definição,concluíam logo que a sua essência é a díada (2), o que conduz ao absurdo de todos os duplos: $4, 6, 8, \cdots$, serem o mesmo que dois, isto é, a díada. Isto nos indica que o princípio dos números é a díada. Assim, Aristóteles faz vir à tona três conceitos importantes para a matemática: *os axiomas, as definições e as hipóteses.*

Ainda sobre o livro "Metafísica"- Livro I, onde para Aristóteles, Platão, não chegou até os princípios que pudessem ser considerados de uma maneira universal como princípios do ser, nem saber um caminho que pudesse ser efetivamente percorrido pelo espírito, que fosse composto somente de um número limitado de intervalos.

(...), "Platão, na esteira de Sócrates, foi também levado a supor que o [universal] existisse noutras realidades e nalguns sensíveis. Não seria, pois, possível, julgava, uma definição comum de algum dos sensíveis, que sempre mudam. A tais realidades deu o nome de "idéias", existindo os sensíveis fora delas, e todos denominados segundo elas. É, com efeito, por participação que existe a pluralidade dos sinônimos, em relação às idéias. Quanto a esta "participação", não mudou senão o nome: os pitagóricos, com efeito, dizem que os seres existem à imitação dos números,

Platão, por "participação" mudando o nome; mas o que esta participação ou imitação das idéias afinal será, esqueceram todos de o dizer. Demais, além dos sensíveis e das idéias diz que existem, entre aqueles e estas, entidades matemáticas intermediárias, as quais diferem dos sensíveis por serem eternas e imóveis, e das idéias por serem múltiplas e semelhantes, enquanto cada idéia é, por si singular. (...) (pág.24)

⋮

(...) Se Platão separou assim o uno e os números do mundo sensível, contrariamente aos pitagóricos, e introduziu as idéias, foi por consideração das noções lógicas (os seus predecessores nada sabiam de dialética); (...) (pág. 25)

⋮

(...) É evidente, pelo que precede, que ele somente se serviu de duas causas: da do "que é" e da que é segundo a matéria, sendo as idéias a causa do que é para os sensíveis, e o uno para as idéias."(pág.25)

Platão não determinou de que existe e em que consiste a idéia, como o ser em si, ou como o belo em si se aproximam ou se distinguem do número em si. Para explicar a relação entre os números ideais e os números sensíveis, Platão insere um intermediário, que é o número aritmético. Finalmente, para explicar a relação entre os números ideais e os números aritméticos, ou entre os aritméticos e os sensíveis, é preciso inserir novos intermediários e assim por diante até o infinito.

A obra de Aristóteles será a de constituir um sistema de pensamento que seja ao mesmo tempo universal e definido. Por isso ele rejeita tudo que seja místico ou metafórico, lógico ou dialético, na obra de Platão. Os números são reconduzidos ao seu uso propriamente aritmético; o domínio da matemática é restringido a uma categoria que é um modo particular dentre as afirmações sobre o ser, à categoria da quantidade; concepção que está ligada às noções fundamentais da doutrina: independência assegurada à categoria da qualidade, física separada da matemática, superioridade reconhecida à intuição da substância, da qual Aristóteles faz a base da filosofia primeira, enfim constituição de uma técnica metodológica adequada às exigências da física quantitativa e da metafísica intuitiva.

As bases da teoria matemática,segundo Aristóteles, constrói-se dedutivamente, isto é, pela derivação *(apodeixis)*, que significa sair do geral e chegar ao particular. Assim, Aristóteles desenvolve na "Analytica Priora" sistemáticamente a dedução enquanto que na "Analytica Posteriora", trata da prova do conhecimento. As análises das funções cognoscitivas revelam a estrutura fundamental do processo lógico: reside em derivar um juízo dos outros, isto é, a dedução *(silogísmo)*.

A silogística (teoria da dedução) se converteu no ponto essencial da lógica aristotélica: nela converge tudo o que Aristóteles havia ensinado sobre as estruturas gerais do pensamento dedutivo, a saber, a lógica formal. Esta foi a sua maior contribuição intelectual, porém o próprio tempo se encarregou de mostrar a sua limitação teorética.

5.3 Origem Biológica da Lógica

O objeto desta técnica é a classificação das *espécies* e dos *gêneros* que o método platônico da divisão se propunha instituir, quer dizer, ela toma por base a noção de classe com exclusão da noção de relação. Do platonismo, Aristóteles conserva sobretudo a tradição socrática; ele retorna aos procedimentos do sentido comum que Sócrates havia empregado e que Platão havia transformado e transfigurado ao contato com a realidade matemática; ele não negligencia nenhuma das maneiras de aproximação que permitem, pela observação dos casos particulares pressentir a generalidade da regra: *exemplos, sinais, objeção, redução ao absurdo.* Sócrates havia parado no discurso indutivo; não se preocupava, senão com questões morais; o conceito, uma vez constituído no espiríto do interlocutor, é pela ação que ele alcança novamente o real: a dialética socrática é ao mesmo tempo teórica e prática. Ora, transportados para o terreno da ciência especulativa, os procedimentos regressivos de Sócrates reclamavam o complemento de uma síntese progressiva. Neste aspecto, Platão havia colocado bem o problema; mas se perdeu nas especulações metamatemáticas que não poderiam conduzir a nenhuma solução efetiva. Aristóteles retoma essa questão por outro plano; ele espera que a indução atinja os princípios tais que eles permitam modificar o andamento dos raciocínios e de retornar por uma série finita de articulações aos detalhes das coisas, à realidade dos individuos.

A forma precisa desta indução seria, por outro lado, baseada na observação dos procedimentos, que nos tempos de Aristóteles, e na escola de seu mestre, permitiam constituir a primeira classificação biológica. O silogismo, que durante séculos apareceu como o tipo do raciocínio abstrato e universal, surgiu de uma aplicação do espírito a problemas de ordem concreta e particular.

5.4 O Silogismo e Alguns Tipos Elementares

Aristóteles concorda com Platão ao considerar que só pode haver ciência do universal, assim ele procura apresentar um encadeamento de raciocínio para chegar a uma conclusão. Esse raciocínio seria denominado de silogismo, no qual, determinadas coisas sendo afirmadas, segue-se inevitavelmente uma outra afirmativa. Podemos dizer numa liguagem mais do cotidiano que o silogismo é um argumento *em que, de um antecedente que une dois termos a um terceiro, obtém-se conclusão que une estes dois termos entre si.* Desta forma,

Todos os paulistanos são paulistas

e todos os paulistas são brasileiros;

logo, todos os paulistanos são brasileiros.

Trata-se de um silogismo em que dois termos, paulistanos e paulistas são unidos na conclusão, devido o vínculo que entre eles estabelece o termo "brasileiros". De maneira geral, todo silogismo é composto de três proposições, nas quais *três termos* são comparados dois-a-dois. Estes termos são:

- *o termo maior* (T), assim denominado porque é o que possui maior extensão.
- *o termo menor* (t), assim denominado porque é o que possui menor extensão.
- *o termo médio* (M), assim denominado porque é o intermediário entre o termo maior e o menor.

É natural encontrar as seguintes denominações: as duas primeiras proposições são denominadas *premissas (*maior e a menor), e a terceira, *conclusão*. Dado um silogismo não é difícil reconhecer seus termos:

premissa maior: "Todos os paulistanos (t) são paulistas (M)"

premissa menor: "e todos os paulistas (M) são brasileiros (T)"

conclusão:"logo, os paulistanos (t) são brasileiros (T)"

O termo médio pode aparecer, nas duas premissas, como sujeito ou como predicado. Desta forma, isso gera as chamadas *figuras* do silogismo, mais precisamente quatro figuras. Por exemplo:

1. **Primeira figura.** – O termo médio é sujeito na maior e predicado na menor:

Todo homem (M) é mortal (T).

Ora, Ricardo (t) é homem (M).

Logo, Ricardo (t) é mortal (T).

Podemos também visualizá-lo através de diagramas, por exemplo:

figura 1

$$\begin{array}{c} M\ T \\ t\ M \\ \hline t\ T \end{array}$$

2. **Segunda figura.** – O médio é predicado nas duas premissas:

Todo círculo (T) é redondo (M).

Ora, nenhum triângulo (t) é redondo (M).

Logo, nenhum triângulo (t) é círculo (T).

Podemos também visualizá-lo através de diagramas, por exemplo:

figura 2

$T\ M$

$t\ M$

$t\ T$

3. Terceira figura. – O médio é sujeito nas duas premissas:

A caridade (M) é amável (T).

Ora, a caridade (M) é uma virtude (t).

Logo, alguma virtude (t) é amável (T).

Podemos também visualizá-lo através de diagramas, por exemplo:

figura 3

$M\ T$

$M\ t$

$t\ T$

4. Quarta figura. – O médio é predicado na maior e sujeito na menor:

Ricardo (T) é homem (M).

Ora, todo homem (M) é mortal (t).

Logo, algum mortal (t) é Ricardo (T).

Podemos também visualizá-lo através de diagramas, por exemplo:

figura 4

$T\ M$

$M\ t$

$t\ T$

Há necessidade de ressaltar que esta quarta figura (denominada figura galênica) não é uma figura distinta. Trata-se apenas de uma forma indireta da primeira figura.

O modo do silogismo resulta da disposição das premissas segundo a qualidade e a quantidade, assim, se fixarmos uma figura, os enunciados que nela aparecem podem ser do tipo A, E, I ou O. Cada uma das duas premissas pode ser universal afirmativa (A), universal negativa (E), particular afirmativa (I), particular negativa (O). Representaremos um termo universal por uma das letras x, y, z e um termo particular por: x', y' e z'. As proposições A, E, I e O, poderão, portanto, apresentar as seguintes relações:

$$\begin{array}{ll} \text{A} & x = y' \\ \text{E} & x \neq y \\ \text{I} & x' = y' \\ \text{O} & x' \neq y \end{array}$$

Exemplificando, se as premissas forem A, I e se trata da primeira figura, bastará escrever:

$$\begin{array}{ll} \text{A} & x = y' \\ \text{I} & z' = x' \\ \hline & z' = y' \end{array}$$

De acordo com as relações acima e lembrando que na primeira figura o termo médio é sujeito da maior e predicado da menor, tendo sido a conclusão obtida simplesmente comparando o termo menor com o termo maior. Na conclusão aparece claramente uma proposição I e esse modo legitímo do silogismo é aquele conhecido por "DARII". Claro que existem tantos outros tipos de silogismo, que no momento não nos ajudaria no desenvolvimento de nosso trabalho.

Escolhido o tipo da premissa maior, são quatro possiblidades de escolher o tipo da premissa menor, o que nos dá 4 x 4 = 16 maneiras de escolher as premissas. Relativamente a cada escolha dos tipos das premissas há, outra vez, 4 maneiras de fixar o tipo de conclusão (fixando-a como A, E, I ou O). Portanto, há 16 x 4 = 64 maneiras de escolher os tipos dos enunciados de um silogismo. Sendo quatro as figuras, tem-se, enfim, 64 x 4 = 256 maneiras de escolher os enunciados dos silogismos, ou seja, 256 *modos* do silogismo. Aristóteles não sustenta que a ciência deve ser formada por um conjunto de coerências internas, mas de ser construída pelo encadeamento lógico de verdades, ser ciência da realidade. A lógica aristotélica não oferece somente à filosofia a inapreciável vantagen de tirar as molduras da linguagem de um sistema de conceito distintos e rigorosamente ligados, de fundar pelos séculos, até chegada da crítica cartesiana, a aliança do senso comum e da ontologia. Ela reflete com exatidão os meios preparatórios da ciência da natureza, os procedimentos de classificação que, na zoologia e na botânica, conservarão com tal importância. Toda dedução prática que se subordina a uma lei que passe do universal a um caso particular, está dentro dos moldes do silogismo e é sabido que seu sucesso é incontestável, sendo considerado uma demonstração científica.

Do período que se estende desde Aristóteles até Leibniz no século XVII, os lógicos da Antigüidade, os Medievais e os Pós-Medievais, descobriram muito da importância e significação sobre a lógica.

6. Euclides

6.1 Alexandria

"Pois ele não parecia o filho de um mortal, mas alguém que viesse da semente dos deuses"(...) *(Homero - Ilíada, XXIV)*

Com o surgimento da Academia em Atenas por volta do ano 387 a.C., o milagre grego estava começando. Na verdade, muitos acontecimentos marcaram a Grécia ao longo de vários séculos. A apresentação dos poemas épicos de Homero após quatro séculos e dois séculos após Tales ter introduzido a dedução como significado de verdade. O incentivo dado por Pericles 'as artes e a literatura. Em seguida temos o século das idéias pitagóricos, que, como vimos, contribuiu para o desenvolvimento da matemática, astronomia, geografia e ..., Observamos que no "Theatetus" encontramos vestígio sobre a preocupação pelos números irracionais e que mais tarde aparece no Livro X dos Elementos de Euclides. A "Academia" tida como a primeira instituição da mais alta categoria para o ensino de matemática. Para isso, basta lembrar a citação de Platão: – "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". Como já sabemos, Platão não produziu nada significativo em matemática, mas contribuiu com a formação significativa de alguns matemáticos. Um deles foi Eudoxo, que contribui com a questão dos números irracionais e também ficou conhecido pelo desenvolvimento do "método da exaustão".

Após as conquistas de Alexandre Magno, o centro principal da ciência grega transferiu-se de Atenas para Alexandria. Localizada entre a Ásia, África e a Europa, tornou-se uma das cidades mais importante do mundo. Todas as construções eram de pedras, sobressaindo os Templos de Diana e Ephesus, e havia duas avenidas principais que durante à noite era iluminada por lampeões de óleo. Fundou nos moldes do Liceu, um instituto de pesquisa e ensino: o Museu, dotado de aproximadamente cem professores *todos pagos pelo Estado* contendo jardim zoológico e botânico, de um observatório astronômico, de aulas de dissecação e de uma biblioteca extraordinária. A Biblioteca de Alexandria possuia grande volumes de livros ocupando uma área de aproximadamente 27 m^2.

O Museu e a Biblioteca de Alexandria foram construídos durante o governo de Ptolomeu I. Assim, segundo alguns historiadores, Alexandria tornou-se conhecida mundialmente por sua beleza, por suas maravilhas arquitetônicas e pelo desenvolvimento intelectual no século III-a.C. até a Idade Média.

Da época de Tales até Aristóteles, a matemática foi estudada ocasionalmente. É em Alexandria, que os matemáticos formavam uma comunidade "internacional" cujos membros se dispersavam ao redor do Mediterrâneo. Eles mantinham correspondências, visitando-se uns aos outros ou divulgando suas obras. Apresentavam problemas a seus colegas, resolver os que eram apresentados e criticar as soluções imperfeitas encontradas por outros. Desta forma, alguns matemíticos adquiriram fama e autoridade; em conseqüencia, as publicações eram submetidas a sua apreciação, e eles se encarregavam de divulgá-las junto 'aqueles que julgavam dignos. O desenvolvimento em

Alexandria foi tão notável que cativou muitos sábios da época, Euclides (360 – 275 a.C.) foi um deles.

Se ignora o lugar de nascimento de Euclides e que muito provavelmente foi educado na Academia de Platão. A escola matemática fundada por Euclides, ficou conhecida como *"Primeira Escola de Alexandria*, testemunho das mais vasta orientações culturais da época helenística. A excepcional popularidade de Euclides deve-se dos "Elementos", mas ele escreveu outros como:

- "Datas", que contém 94 proposições de geometria plana (é uma espécie de preparação para o método axiomático);
- "A divisão das figuras", (que se encontra conservada em uma tradução árabe;
- "Aforismo", que contém informações sobre as projeções métricas;
- "Óptica", que contém problemas de agrimensura;
- "Fenômenos", que é uma discrição das esferas celestes.

Há informações que a obra de Euclides - "Elementos", perde em números de edições apenas para a "Bíblia". Os "Elementos"constituem o primeiro sistema das matemáticas que se encontra na história das ciências. O nome "Elementos", deve-se a união das escolas filosóficas de Platão e Aristóteles (talvez Euclides tenha freqüentado a escola de Platão). O que entende-se por elementos (idéias), é tudo o que se permite compreender e explicar analíticamente dos problemas. Segundo Euclides, para compreender as matemáticas, só é possível desde que inicie abordando noções comuns (descobertas por análise) e tornando as deduções cada vez mais complexas (devido a sítese dedutiva).

6.2 A Geometria Euclidiana

No estudo histórico das obras que marcaram a humanidade sobre as concepções filosóficas da ciência, encontram-se: os "Analyticas Priora e Posteriora" de Aristóteles e os "Elementos" de Euclides. As duas obras tiveram o mesmo destino; atravessaram os séculos, desligadas do que poderia precedê-las e do que poderia seguí-las, oferecendo o quadro de um rigor que parecia perfeito, marcando um ponto de perfeição que se desistiria de ultrapassar. Por elas, a razão antiga modelou, em alguma maneira, o pensamento moderno.

Euclides, para as numerosas gerações que se alimentaram de sua substância, talvez tenha sido muito mais um professor de lógica do que um professor de geometria. Para isto, basta observar a forma dedutiva que se encontra nos "Elementos", onde torna-se evidente e consagrada a universalidade de aplicações da qual a lógica de Aristóteles era capaz.

Profundo geômetra e profundo lógico, Leibniz é o testemunho que convém citar para o apoio desta interpretação tradicional. Ele escreve nos "Nouveaux Essais":

"não são as figuras que dão a prova para os geômetras ... A força da demonstração é independente da figura traçada, que é só para facilitar a inteligência do que se quer dizer e fixar a atenção; são as proposições universais, quer dizer, as definições, os axiomas e os teoremas já demonstrados, que fazem o raciocínio e o conteriam quando a figura não existisse. Eis por que, acrescenta Leibniz, um sábio geômetra, como S-cheubeluis, deu as figuras de Euclides sem suas letras que as pudessem ligar com a demonstração que ele une; e um outro como Herlinus, reduziu os mesmos demonstrativos a silogismos e prosiologismos" – *e mais longe: "Existem exemplos muito consideráveis de demonstração fora da matemática, e pode-se dizer que Aristóteles já os deu em suas Analyticas Priora. A lógica é tão susceptível de demonstrações quanto a geometria, e pode-se dizer que a lógica dos geômetras ou as maneiras de argumentar que Euclides explicou e estabeleceu falando das proposições, são uma extensão ou promoção particular da lógica geral".* (Les Étapes de la Philosophie Matheématique, pag. 85.)

Contudo, esta perspectiva tradicional onde a lógica euclidiana aparece como um caso particular da lógica aristotélica, é retificada pelo conhecimento do desenvolvimento do pensamento grego. Longo tempo após dos "Analyticas" de Aristóteles, os "Elementos" de Euclides aproveita a obra das gerações que precederam Aristóteles, não somente a obra técnica de descoberta, mas a obra metodológica de encadeamento e de demontração que, empreendida na escola de Pitágoras, finaliza nas escolas de Eudoxo e de Platão. Quando se extraem dos escritos de Aristóteles as passagens contendo empréstimos ou alusões à terminologia dos matemáticos, reproduzindo suas concepções sistemáticas dos axiomas e definições, convence-se de que a teoria da ciência, à qual se prende a forma euclidiana tinha desde essa época, chegado à maturidade, que ela era capaz de sugerir a idéia de uma combinatória lógica, e de fornecer os meios para realizá-la imediatamente em toda perfeição. A lógica de Aristóteles e a geometria de Euclides se esclarecerão então mutuamente, sem que a segunda em data proceda necessariamente da primeira. As duas surgiram de uma mesma raça e de um mesmo espírito; nas duas o gênio grego inscreveu com tal sucesso seu ideal de harmonia interna que lhes aconteceu de parecer através dos séculos como desrraigados de suas origens históricas, sob o aspecto da verdade eterna.

6.3 As definições de Euclides

Os "Elementos" de Euclides começam por uma série de definições; mas se as definições são os princípios da geometria, não é no sentido forte da palavra "princípio", elas não exprimem as essências das coisas, elas não correspondem às sínteses dos elementos inteligíveis. Não se encontra em Euclides a "definição real" que, segundo a expressão clássica de Leibniz, *"faz ver a possibilidade do definido".Les* Ètapes de la Philosophie Mathématique, pag. 86. Na verdade, as definições euclidianas são "definições nominais", formadas com a única preocupação de levar o máximo de clareza na linguagem, aproximando-se dos dados elementares da experiência.

Assim, é um fato natural que existe um limite a partir do qual a divisão não corresponderia mais a nenhum progresso apreciável; é que o "fisiólgo" chama o "átomo", o que o geômetra chama o "ponto". O ponto é o que não tem parte. Como se concebe o ponto, quer dizer um elemento que não tem comprimento, concebe-se um comprimento que não tem largura, (def. II) ou uma superfície que não tem comprimento nem largura (def. V). Os pontos são considerados como as extremidades das linhas (def. III), e as linhas como as extremidades das superfícies (def. VI).

As definições da linha reta e da superfície plana passaram, a título igual, pelos enigmas insolúveis da profundidade. A linha reta é aquela que está "ex aequo" em todos os seus pontos (def. IV) – o plano é a superfície que está es "ex aequo" para todas as retas que aí estão situadas (def. VII). De fato, segundo Paul Tannery, "essas definições parecem vir da técnica da arte de construir, e só têm assim um valor empírico."

Nas outras definições do livro I a tendência se manifesta a dispor as noções seguindo uma hierarquia de gêneros e espécies, que lembra exatamente a classificação aristotélica. Do gênero ângulos planos (def. VIII); Euclides passa á espécie dos ângulos retilíneos (def. IX); os ângulos retilíneos serão os ângulos retos, obtusos ou agudos (def. X, XI e XII). Para as figuras uma hierarquia da mesma ordem se estabelece; o elemento lógico tirado por abstração da consideração das linhas ou dos espaços chama-se aqui termo. O termo é o que é o limite de qualquer coisa (def. XIII). Tudo o que está confinado em um ou vários termos é uma figura (def. XIV). Há uma figura plana que está compreendida sob uma única linha, todas as retas que são levadas sobre essa linha de um ponto interior da figura são iguais entre elas, a figura é o círculo e o ponto interior é o centro do círculo (def. XV - XVI). As figuras retilíneas têm três lados, quatro lados, etc (def. XIX). Os triláteros são ou equilaterais ou isósceles ou escalenos (def. XX). Outro princípio de divisão para os triláteros retos, triláteros obtusângulos e triláteros acutângulos (def. XXX).

A finalidade da "definições", é requerer fundamentos para a introdução de termos matemáticos que aparecerão. As definições são, no início, de 23, e ao todo, no texto, atingem 120. Assim, seguem-se cinco postulados e cinco axiomas; conjuntamente, formam as hipóteses que formam a base de sua Teoria.

Axiomas

I. *Grandezas iguais a uma mesma grandeza são iguais entre si.*

II. Se a grandezas iguais forem adicionadas grandeza iguais, as somas serão iguais.

III. *Se grandezas iguais forem subtraídas de grandezas iguais, os resultados serão iguais.*

IV. Grandezas que coincidem entre si são iguais.

V. *O todo é maior que suas partes.*

Postulados

Postulemos o seguinte:

I. *É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer.*

II. *É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta.*

III. *É possível traçar um cículo com qualquer centro e raio.*

IV. *Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si.*

V. *Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.*

6.3.1 Os Axiomas

Várias definições do livro I de Euclides são exatamente do tipo que Aristóteles preconisa, elas se fazem pelo gênero e pela diferença. O silogismo de Aristóteles poderia se aplicar tal qual; atingir-se-ia assim uma série de proposições onde se transportaria a espécie dos ângulos obtusos as propriedades genéricas dos ângulos, onde se transportaria para a espécie dos ângulos obtusos, as propriedades genéricas dos ângulos, onde se transformaria em conhecimentos explícitos as verdades implicitamente contidas numa afirmação geral. Há dados empíricos tais com as definições euclidianas, só pode-se aplicar a lógica das classes, e esta só pode seguir em sentido inverso o caminho que a abstração tinha percorrido no início. A comparação de Aristóteles e de Euclides serve para precisar os termos do problema que se coloca a partir das definições. Para passar da lógica de classes à geometria, será preciso proceder a uma dupla elaboração, uma sobre a maneira de dedução, a outra sobre os objetos da ciência; e é para isso que servirão as duas ordens de princípios que nós iremos ver. O primeiro axioma de Euclides poderia ser chamado o princípio do silogismo matemático. As coisas (utilizaremos esta expressão para preservar a fórmula grega) iguais a uma mesma coisa são iguais entre si. O axioma pode-se explicitar sob a fórmula de um silogismo:

$$A = B$$

$$B = C$$

$$C = A$$

Mas a este silogismo não seria possível dar uma forma cuja verdade fosse evidente e nós pudéssemos fazer depender o axioma euclidiano de igualdade? Aplônius pensou desta forma, e eis como ele raciocíniou: já que A é igual a B ocupa o mesmo lugar que ele, e já que B é igual a C ocupa o mesmo lugar que ele, A ocupa o mesmo lugar que C, e por consequência A e C são iguais. No que Proclus, que nos conservou este raciocínio, fazia observar já que, sem perceber, Apolônius joga em sua demonstração com duas hipóteses: a saber que as figuras que ocupa o mesmo lugar são iguais entre si e que as figuras que ocupa o mesmo lugar que uma outra são iguais entre elas. Em outros termos, Apolônius deslocou o campo de evidência: ele liga a igualdade à identidade de medida espacial quando precisamente é uma questão saber se a identidade de medida espacial pode ser assimilada à identidade lógica. Por consequência, quando se decide esta questão pela afirmativa, invoca-se um axioma que estará em uma terminologia diferente o equivalente do axioma de Euclides. Percebe-se com certa facilidade que Apolônius não sentiu a necessidade de explicitar esse axioma, é que ele confiava em sua intuição de geômetra para substituir diretamente umas às outras as linhas ou as superfícies de medidas idêntica, e tirar desta substituição uma definição geral de igualdade. Apreciamos mais o procedimento contrário de Euclides, que consiste seguindo a distinção de Félix Klein em transformar por uma elaboração sábia a intuição ingênua em intuição refinada. Euclides utilisa a princípio a noção abstrata de igualdade a fim de constituir o quadro lógico no qual deverá fazer entrar os raciocínios da geometria. Depois ele determina a condição que permitirá adaptar a este quadro as grandezas que são o objeto próprio da ciência geométrica. **Axioma** *V: "duas grandezas que podem se aplicar uma sobre a outra, que são congruentes, são iguais entre si".*

Da mesma maneira que à forma perfeita e científica do silogismo, imediatamente fundado sobre a evidência do elo entre termos de proposições universais afirmativas, a analítica aristotélica une uma série de formas indiretas, da mesma maneira, ao princípio da igualdade direta, os axiomas II e III unem os casos de igualdade que resultam da adição ou da subtração de elementos já iguais aos elementos iguais entre si.

Por outro lado, o axioma V:**o todo é maior do que a parte**, introduz a consideração da inegualdade; sobre essa desigualdade funde-se uma série de axiomas, onde suspeitou-se das adições posteriores à redação primitiva dos Elementos pelos sucessores de Euclides, e que constituem um corpo de doutrina.

Importante: um conjunto de axiomas deveria apresentar três propriedades:

I. **Completude;***tudo que será utilizado na teoria está apropriamnete contido nos axiomas, de tal forma que não haverá hipóteses tácitas.*

II. **Consistência;***que será impossível deduzir dois teoremas contraditórios.*

III. **Independência;***que nenhum dos axiomas é uma conseqüencia dos outros.*

6.3.2 Os Postulados

Se tal deve ser a lógica da geometria, será preciso que os objetos geométricos, préviamente definidos, sustentem pela maior parte um tratamento que os torne manejáveis por esta lógica, e é isso que são destinadas os três primeiros pedidos, cuja simplicidade corre o risco de dissimular a importância.

I. que seja pedido levar de um ponto qualquer à um ponto qualquer uma linha reta.

II. que seja pedido prolongar em linha reta e em continuidade uma reta limitada.

III. que seja pedido descrever um círculo de centro qualquer e de distância (que dizer, de raio) qualquer.

Pelo primeiro postulado, em verdade Euclides não explicitou a *unicidade* da reta que junta dois pontos dados, a reta torna-se a distância entre dois pontos de tal maenira que a congruência das duas extremidades permitirá colocar a igualdade das duas retas.

Pelo segundo postulado, tornou-se possível a adição de dois elementos geométricos.

O terceiro postulado tem um duplo peso: ele estabelece a existência da figura circular cuja definição indicava somente esta propriedade de ter todos os pontos de sua periferia a igual distância do centro; e desta propriedade ele tira o instrumento por excelência da atividade científica. Traçando de um ponto dado uma circunferência, obtém-se em todas as direções que se queira, uma linha igual; pode-se assim substituir a igualdade estática de superposição a igualdade móvel do raio. Ora, que esses postulados sejam o principal agente da ciência euclidiana, é o que já manifesta a primeira proposição dos Elementos. Esta proposição é um problema: *sobre uma reta dada, construir um triângulo equilátero.* A solução do problema é imediata se cada uma das extremidades da reta descreve-se um círculo tendo por raio o comprimento mesmo dessa reta. Então vê-se sobre a figura, ao menos Euclides admite sem outra explicação, que os dois círculos se encontram; se, em virtude do primeiro postulado, junta-se um dos pontos de encontro às extremidades da reta dada, obtém-se um triângulo que satisfaz as condições do problema. A possibilidade do triângulo equilátero é demonstrado. Em termos modernos diremos que à descrição lógica enunciando o gênero e a espécie, nós acrescentamos um teorema de existência.

O procedimento é absolutamente geral, é fundamentado sobre a metodologia própria à matemática seguindo os "antigos gregos". Aristóteles dizia: *"o geômetra supoe a significação do triângulo, mas faz ver a existência dele.* Assim, sem recorrer hipótese ontológica que era a virtude oculta, ou o vício escondido, da lógica aristotélica, a geometria é capaz de conferir a estas definições nominais uma definição real; é por isso que ela é outra coisa que o instrumento de um raciocínio formal, ela torna-se uma ciência verdadeira.

Ainda não é tudo: no desenvolvimento da geometria métrica, Euclides encontra duas noções que são necessárias para edificar o sistema da geometria plana e que não podem ser consideradas, ao menos com suas características úteis para o geômetra como consequências de verdades já adquiridas; essas noções são as de perpendiculares e de paralelas. Mais exatamente, às duas noções de perpendiculares e de paralelas se juntam dois fatos geométricos que não são susceptíveis de demonstração, que devem ser introduzidos à título de dados naturais, e que fornecerão dois novos postulados.

O primeiro concerne às perpendiculares: *"Todos os ângulos retos são iguais."* Na verdade, parece muito estranho que Euclides formule tal uma proposição, depois de ter definido o ângulo reto com a ajuda da construção que, fazendo cair uma reta sobre uma outra, detrmina dois ângulos adjacentes iguais; é pela igualdade desses dois ângulos que ele chega a conceber a característica específica do ângulo reto. Mas se, como pergunta Zeuthen, fixa-se a atenção sobre a aplicação que é feita deste postulado, Uma possível tradução seria:

- <u>Definição</u>:

1. *Uma unidade é o que em virtude de cada coisa que existe é chamado de* **um**.
2. *Um* **número** *é uma coleção de várias unidades.*
3. *Um número é* **uma parte** *de um número, o menor do maior, quando mede o maior;*
4. *mas* **partes** *quando ele não o mede*
5. *O número maior é um* **múltiplo** *do menor qunado é medido pelo menor.*
6. *Um* **número par** *é aquele que é divisível em duas partes iguais.*
7. *Um* **número ímpar** *é aquele que não é divisível em duas partes iguais, ou é aquele que difere de uma unidade, de um número par.*
8. *Um* **número par-vezes par** *é aquele que é medido por um número par de acordo com um número par.*
9. *Um* **número ímpar-vezes par** *é aquele que é medido por um número par de acordo com um número ímpar.*
10. *Um* **número ímpar-vezes ímpar** *é aquele que é medido por um número ímpar de acordo com um número ímpar.*
11. *Um* **número primo** *é aquele medido por uma unidade apenas.*
12. **Números primos entre si**, *são aqueles que são medidos por uma unidade apenas como uma medida comum.*
13. **Números compostos** *é aquele que é medido por algum número.*
14. **Números compostos entre-si**, *são aqueles que são medidos por algum número, como medida comum.*
15. *Diz-se que um* **número multiplica um número**, *quando aquele que é multiplicado é somado a ele mesmo tantas vezes quantas unidades houver no outro e conseqüentemente resulta em outro número.*
16. *E, quando dois números tendo se multiplicado um ao outro, resultam em algum número, o número resultante é chamado de* **plano**, *e seus* **lados** *são os números que se multiplicaram.*
17. *E, quando três números tendo se multiplicado uns ao outros resultam em algum número, o número resultante é um* **sólido**, *e seus* **lados** *são os números que se multiplicaram.*

18. *Um* **número quadrado** *é igual multiplicado por igual ou, um número que é contido por dois números iguais.*

19. *E um* **cubo** *é igual multiplicado por igual e de novo por igual; ou um número que é contido por três números iguais.*

20. **Números são proporcionais** *quando o primeiro é mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, do segundo, que o terceiro é do quarto.*

21. **Números planos** *e* **números sólidos semelhantes** *são aqueles que têm seus lados proporcionais.*

22. *Um* **número perfeito** *é aquele que é igual a suas próprias partes.*

Comentários:

De acordo com os pitagóricos, "a unidade é o limite entre o número e as partes". Contudo, a definição universalmente conhecida sobre o conceito de números, é enunciada assim: *"o número é uma quantidade de unidades"*, ou, um conjunto de progressão.

Aristóteles, apresenta uma definição de números: "conjunto limitado" ou conjunto (ou combinação) de unidades ou "vários um". A idéia dele era a partir da medida sendo a "unidade", gerar um conjunto mensurável por um. Desde que Euclides a empregou a palavra "unidade" pela primeira vez, e ela é sempre retomada. O genial Euclides, escreve em sua definição sobre "uma parte", o que significa para ele é "um submultiplo", exceto para a substituição de "números" por "grandeza". Em verdade, quando ele sugere "partes", observe que poderíamos simplesmente na linguagem atual substituir pelo termo "fração própria", tal que o submultiplo torne a fração menor que a unidade. Por exemplo; o $2/3$.

A definição dada por Euclides sobre múltiplos é idêntica ao que se encontra em nossos dias. Os números pares e ímpares; ele define que um número par é aquele que é capaz de ser dividido em duas partes iguais sem que sobre uma unidade ao meio; enquanto que os números ípares não podem ser divididos em duas partes iguais, pois há problema sempre em uma unidade. Observe que essa definição está baseada em conceitos populares. Em contraste com essa idéia observamos que os Pitagóricos possuiam uma definição mais usual e mais interessante; "um número par é aquele que admite ser dividido, por uma e algumas operações, em grandes ou em pequenas (partes), ou seja, grande em formas mas pequenos em quantidades; enquanto que os números ímpares são aqueles que não podem tão bem tratados mas são divididos em duas partes não iguais".

Observação: Há também possibilidade de substituir a palavra *quantidade* por pluralidade, conjunto, ... Numerosos autores fizeram objeções a esta definição que quantidade é sinônimo de números. Existe uma relação muito íntima entre os dois conceitos.

6.5 A Importância Filosófica dos "Elementos"

Apresentamos em seções anteriores, algumas informações sobre a constituição dos "Elementos". O estudo que nos propomos fazer aqui é mais específico no sentido literalmente filosófico, ou seja, como é que interpretamos todas as informações que conseguimos de Euclides e sua grandiosa obra.

Os postulados são fatos naturais; e, ao menos nos quatro primeiros livros dos "Elementos", a geometria tem a característica de uma ciência natural, segundo a expressão empregada por Auguste Comte. Os dois primeiros livros têm por instrumento a construção das figuras e sua transformação por traços auxiliares, como objetivo a demonstração da igualdade de superfícies diferentes: retângulos, paralelogramos ou triângulos, o terceiro e o quarto estudam o círculo, e a inscrição dos polígonos regulares no círculo.

Com o quinto livro parece que uma ciência nova começa, que tem por objeto a comparação das grandezas tomadas em geral. O elemento é então a relação das grandezas, e os julgamentos constitutivos da ciência são os que colocam a "similitude" (atualmente é conhecida pelo termo: igualdade) das relações entre duas grandezas, quer dizer que definem proporções. A teoria das proporções tem suas origens na similitude geométrica. O manual de Ahmés mostra como, sem enunciar doutrinas gerais, os egípcios inspiravam-se na prática do sentimento da similitude. Mas nós sabemos que desde o século IV, Eudoxo de Cnido no propósito sem dúvida de escapar aos embaraços que a descoberta dos incomensuráveis tinha acarretado, deu-se a tarefa de extrair do conjunto das verdades então conhecidas da geometria os elementos das teorias das proporções, e de reuní-las em um corpo de dourina autônoma. A obra de Eudoxo explica a ordem dos "Elementos". Euclides separa com cuidado, ao menos na exposição da geometria plana, o que chamaremos geometria métrica direta, e a teoria das proporções. Por um lado nos quatro primeiros livros proibiu-se todo modo de demonstração que implicaria um chamado à similitude geométrica; ele refez, neste ponto de vista, a demonstração tradicional do teorema de Pitágoras. Por outro lado, reservando a similitude dos triângulos, dos paralelogramos, etc, para o livro VI, que segue imediatamente o livro sobre as proporções, parece fazer deste estudo puramente geométrico a aplicação de uma ciência da proporcioalidade em geral. Não é tudo: no livro V, os termos das proporções figuravam por linhas, sem que se reparasse na diferença entre grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. No livro VII, o estudo das proproções é retomado, mas no terreno propriamente numérico: *"as proproções sobre as proporções tomam um novo sentido porque não se trata aqui somente de igualdade das relações, mas também da possilidade de reduzí-las aos menores termos".*

Com o livro X, Euclides aborda os incomensuráveis, ele expoe a classificação dos irracionais fornecidos "pelas construções geométricas...com suas propriedades não somente pela equação do segundo grau e pela equação biquadrada com coeficientes racionais, mas mesmo em parte pela equação tri-quadrada". Este estudo é como uma introdução para a geometria no espaço, a qual estão consagrados os livros seguintes. A determinação dos elementos dos poliedros regulares no livro XIII fornecerá a aplicação da teoria dos irracionais, que foi colocada no livro X. Sob a desordem aparente da exposição, a ciência euclidiana implica uma teoria geral das grandezas, uma *aritmética universal*. Se prolongamos pelo pensamento a história no sentido em que, seguindo nossas idéias modernas, parece-nos naturalmente orientada, nós encontraremos que o desenvolvimento da ciência euclidiana teve por consequência a reação da forma racional e dedutiva sobre o conteúdo ainda inorgânico. Não somente as teorias análogas da geometria plana e da geometria no espaço deveriam naturalmente ser aproximadas. Mas sobretudo, desses livros que tratam sucessivamente das similitudes geométricas, das relações numéricas, das grandezas incomensuráveis, deveria se destacar explicitamente a unidade de que o autor dos "Elementos" não podia ter consciência no momento que ele os dispunha na sequência uns dos outros. Em outros termos, a matéria de uma lógica das relações encontra-se reunida nos "Elementos" de Euclides; e já que nós destacamos, na escolha dos princípios e dos métodos, sua semelhança com os "Analyticas" de Aristóteles, parece que perante a obra em que a lógica das classes se encontra constituída sobre suas bases definitivas, caberia aos continuadores de Euclides estabelecer sob sua forma própria a lógica das relações.

De fato a desordem que nos choca atualmente na obra de Euclides passou despercebido durante séculos. Os "Elementos", onde nós deslindamos como nas catedrais da Idade Média, a contribuição sucessiva das gerações e a diversidade dos estilos, deram a impressão de obra homogênia por excelência. É preciso ir até o século XVII para encontrar uma tentativa de reorganizar os "Elementos", seguindo o verdadeiro sentido da Lógica. Nos "Novos Elementos de Geometria" que foram publicados em 1667, e que são a obra de Arnauld, o primeiro livro é consagrado às "grandezas gerais" e às quatro operações. Somente no livro cinco Arnauld começa a falar da extensão, da linha reta e circular, etc. Ora, como mostra o livro IV da Lógica onde extratos do "Discurso do Método"(e a partir da segunda edição, Regulae) servem de introdução e de base à crítica da ordem seguida por Euclides nos "Elementos", a refundição da geometria elementar é, no espírito de Arnauld, a conseqüência da revolução cartesiana.

Assim, apesar dos "Elementos" (e isso se tornará mais manifesto ainda pela "Estética Transcendental" de Kant, que se acha inteiramente nos limites da ciência euclidiana) serem grandes como filosofia da matemática, a antiguidade não resgatou efetivamente esta filosofia. A matemática ficou no estado de transição e de heterogeneidade que Euclides havia deixado. Descobertas admiráveis que deveriam fazer de Euclides, de Arquimendes, de Apolônius, de Diofante os iniciadores da renascença científica e os educadores do pensamento moderno, a antigüidade não se preocupou em pesquisar aplicando-as à ciência uinversal da natureza ou à análise do pensamento humano. Respeitando os quadros traçados por Aristóteles, sua curiosidade especulativa limitava-se a definir a categoria à qual pertencia o objeto dessas pesquisas.

Tal criatalização, tal esterilização do pensamento geométrico nos parece hoje singular. Na realidade nós somos em relação aos gregos, mais ambiciosos do que eles foram. A idéia de uma lógica que faria sair do espírito humano o conhecimento das coisas, que engendraria a verdade por raciocínio puro, pôde desde o fim da Idade Média, ser sugerida pelo "Organun" Aristotélico; mas vimos que ela é estranha ao pensamento do prórpio Aristóteles. É sobre os dados das classificações naturais, erigidos sem dúvida em entidades metafísicas, que a lógica de Aristóteles se constituiu; ela terá a pretenção de colocar oredem nesses dados, de realçar em virtude do mecanismo dedutivo tudo o que se encontrava implicitamente contido; mas juntar a esses dados, não é de forma alguma dispensá-los.

A geometria grega, que pôde ser tomada por modelo na constituição dos "Analyticas", conserva frente à realidade exterior a mesma atitude que a silogística. Ela não pretende operar sobre os dados imediatos da experiência uma espécie de transmutação que os tornara sememlhantes à natureza da atividade intectual; tal operação estaria em contradição com o realismo da ciência antiga, que subordina sempre as caracteríticas da ciência à natureza do objeto, que não conhece nada que seja a forma pura do pensamento. A elaboração dos princípios da geometria consiste somente em encontrar um ponto de equilíbrio onde a simplicidade da representação espacial e a clareza do encadeamento lógico se encontram, onde a harmonia se estabelece entre a função da imaginação e a função da inteligência, onde o espírito esteja neste estado de graça estético do qual Kant analisou tão finamente as condições na Crítica do Julgamento do Belo.

A geometria dos antigos fica no que chamaríamos um estudo qualitativo da quantidade; é natural que ela não conduza ao estudo quantitativo das qualidades, que é o princípio da ciência moderna. A analogia da lógica formal e da dedução euclidiana, a introdução nos "Elementos" de teoremas sobre as proproções, sobre a teoria dos números, sobre as grandezas irracionais, enfim a correspondência das relações geométricas com as relações de ordem mecânica ou astronômica, nos fazem pressentir, a nós que a conhecemos, a concepção cartesiana da ciência única e universal; no entanto elas não foram suficientes para que após o fracasso do platonismo esta concepção surgisse de novo à luz da reflexão, e se impusesse à consciência intelectual dos gregos. Daí a pouca influência que a geometria é capaz de exercer sobre a física. As categorias do físico são hierarquicamente superiores às do matemático. O matemático contenta-se em desenhar a configuração dos movimentos, seguindo as aparências e sem ter que decidir quais dessas aparências estão em conformidade com a realidade; tal decisão compete ao físico. A tarefa de um não poderia invadir o domínio do outro: o matemático movimenta-se nas hipóteses, os princípios pertencem aos físico.

Esta restrição do horizonte matemático é um dos traços que marcam melhor a característica da ciência antiga em oposição à ciência moderna. Mas a oposição aparecerá numa luz ainda mais viva, quando determinarmos, diante da matemática euclidiana, a fisionomia da matemática, como ela se apresentou no século XVII na escola cartesiana: uma lógica universal chamada para substituir a lógica aristotélica das classes e para restaurar o platonismo sobre uma base positiva. A comparação será tanto mais fácil porque a matemática cartesiana se apresenta, ao menos no princípio, como sendo essencialmente uma geometria.

Conclusão

9.1 Conclusão

"Numerus est multitudo unitatum".

(Euclides)

Após a tentativa de estruturar as Escolas Filosóficas da Grécia Antiga, juntamente com a História da Matemática, através de Tales, Pitágoras, Platão, Aristóteles e Euclides; faremos a seguir alguns comentários.

As questões sobre o significado e existência dentro da Matemática pura, consideramos totamente irrelevante. De certa maneira é justificável. É claro que podemos estudar a matemática dos números sem necessidade de questionamentos sobre a sua natureza ou existência dos números básicos. Uma teoria axiomatizada dos números naturais pode ser encarada como um sistema não-interpretado e pode ser investigada de modo lógico e abstrato. O ponto em questão é quanto ao comportamento do desenvolvimento da teoria quando essa é questionada pelas reflexões acerca da natureza e da existência dos números.

As verdades nas matemáticas, consideradas pelos gregos como uma geometria classificada e organizada, uma artimética fortemente constituída por processos de cálculo que preparam nossas habilidades algébricas, técnicas que permitem construções grandiosas e difíceis. Distinção do fenômeno e da realidade, do que é e do que parece ser, cuja melhor ilustração foi a célebre alegoria da caverna, de Platão : - Toda filosofia não nasce senão de dois motivos - termos maus olhos e espírito curioso? Aristóteles também constitui outra dessas verdades de que se beneficiou a filosofia geral. De um modo geral, os Gregos souberam compreender que existiam precauções necessárias, na busca da verdade. E se limitaram seus esforços à teoria da dedução e da demonstração a-priori.

A teoria dos números como conjunto de conhecimento não se encontra baseado no fato de possuir a forma de um sistema interessante e lógicamente consistente. Depende, também, da existência de algum interessante sentido em que os axiomas da teoria dos números possam ser verdadeiros. Por exemplo; as geometrias não-euclidianas é de interesse e merece a nossa atenção, mesmo se encontrando no plano de estudo de sistema não-interpretado, isto é, mesmo que numca se encontre qualquer interpretação científicamente importante de seus termos primitivos capaz de tornar verdadeiros todos os seus axiomas. Em contraposição, a teoria dos números é ampla e continuamente empregada, tanto na ciência como na vida. Mostrar esse fato, implica em dizer que a teoria admite alguma interpretação que transforma as suas leis em verdades de grande valor quando utilizada como premissas de raciocínios científicos ou de raciocínios comuns. Exemplos para ilustrar esse fato; os números transfinitos de Cantor. Vários filósofos, como Aristóteles, acreditaram que não pode haver, no Universo, um número realmente infinito de coisas. Na defesa dessa idéia Aristóteles empregava a palavra número no sentido comum.

Algumas de nossa perguntas era; o número existe? Responder á essa pergunta no sentido literal, é responder; - Sim! Porque o termo "número" aparece nos teoremas deduzidos dos axiomas", ou, porque os números se revela frutífero para as ciências. Perceba que são apenas respostas vagas sobre a existência de número, mas essas respostas levam a acreditar que número não é algo fictício. Equivalentemente dizer que tais coisas existem, e é o mesmo que assumir a existência de seja o que for que se admita como verdadeiramente real (objetos físicos, dados sensórios ou o Absoluto).

Os gregos foram capazes de compreender os números como entidade empírica, através de problemas socias: medidas de distâncias, áreas, pesos de mercadorias, ... A obra fundamental nesse período, deixada para nós foi a distinção que eles fizeram entre a **logítica** (a técnica de operar com os números) e a **aritmética** (o estudo dos números entre si).

Na cultura grega o conceito de númreos se expressa sob a forma geométrica, diferente do conceito abstrato que nos colocam hoje, disassociado da figura geométrica e da sua essência.

Talvez dessa visão deformadora que recebemos na nossa educação, decorre a grande dificuldade de concebermos o sentido de grandeza comensurável e incomensurável, o sentido de área de uma figura, do sentido de magnitude ou de um segmento, ... que se perderam na história e não são transmitidas aos nossos alunos.

Tales e seus discípulos, deixaram-nos um geometria com resultados consistentes, embora sem haver uma dependência entre esses resultados; leva-nos a acreditar que de certa maneira conheciam alguns princípios básicos para demonstrar teoremas. Para ele, a definição de número é uma coleção de unidades, (unidade aqui, corresponde a um ponto sem posição), ou seja, número é coleção de coisas e a unidade é a entidade geométrica. A palavra "unidade", em grego está associada a palavra mônada, que é a origem e a essência das coisas.

Os Pitagóricos, avançaram no sentido de sistematização, contudo, se depararam com a questão dos incomensuráveis, que de certa forma abalou as estruturas da matemática pitagórica, sendo sanada mais tarde com Eudoxo.

Os números deveriam estar sempre associado a uma figura geométrica, como vimos em Pitágoras através dos números figurados. Pela própria afirmação da Escola Pitagórica: *"todas as coisas são números"*, então a qualquer segmento deve estar associado um número, que o gera, que é a sua alma, ou sua mônada.

Tales e Pitágoras por conhecerem a teoria das proporções e o problema da aplicação de áreas, contribuem através de conteúdo básico da maior parte dos "Elementos" de Euclides, lembrando que esses resultados não eram em geral obtidos por "construções rigorosas" em particular ao que se refere a teoria das proporções. De qualquer forma, percebemos claramente que o conceito de demonstração e a importancia do conceito da figura geométrica estão encaminhados.

A teoria dos números tem uma vantagem sobre a maioria dos outros ramos da matemática: muito dos seus resultados (normalmente não as demonstrações) podem ser entendidos apenas com pouco conhecimento de matemática. A seguir enfatizaremos o exemplo sobre os ternas pitagóricas e o grande teorema de Fermat (1608–1665), que "parece" que após três séculos foi demonstrado recentemente por um matemático inglês Andrew Wiles que atualmente trabalha na Universidade de Princenton (USA), e defendeu a sua tese na Universidade britânica de Cambridge, os seus fundamentos se encontram nos números pitagóricos. Lembrando:

Os números pitagóricos são números naturais **x**, **y**, **z** tais que:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

. Exemplos: 3, 4, 5 e 5, 12, 13. À parte a ordem entre x e y obtemos todos os números pitagóricos deixando que os números p, q, r nas fórmulas

$$z = (p^2 + q^2) \cdot r,$$
$$x = (p^2 - q^2) \cdot r,$$
$$y = 2pqr$$

percorram todos os números naturais, conservando **p** maior que **q**.

Esse fato se encontra provado nos Elementos mas provavelmente era conhecido pelos babilônio e dos assírios, alguns séculos antes. Passar dos números pitagóricos à procura de números naturais x, y, z tais que

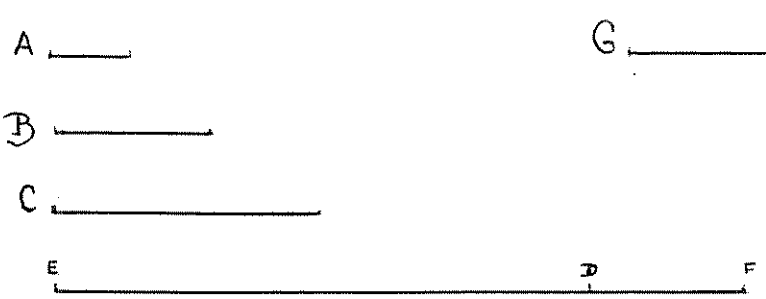
$$x^n + y^n = z^n,$$

onde $n > 2$, não é difícil. O que foi que Fermat fêz com esse resultado do teorema de Pitágoras? Ele enunciou sem demonstração que tais números não existem e a essa afirmação dá-se o nome de Teorema de Fermat. Foi demonstrado para alguns valores de **n**, por exemplo para n = 3. É um problema interessante – se realmente foi demonstrado por "Wiles"– que conseguiu desvendar o enígma matemático de 356 anos (?).

Euclides: *a infinidade dos números primos*

Na demonstração de Euclides de que existe um número infinito de primos, admite-se que basta trabalhar com três primos porque o raciocínio é o mesmo no caso geral. A palavra "mede" significa "divide" e foi pensada geometricamente como a figura indica.

"Os números primos são mais numerosos do que qualquer quantidade pré-estabelecida de primos



Sejam A, B, C os números primos pré-estabelecidos; afirmo que há mais números primos do que A, B, C. Tomemos o menor número medido por A, B, C e chamemos-lhes DE; somemos a unidade DF a DE. Então, EF ou é primo ou não.

(i) *Suponha que EF seja primo; então o encontramos os números primos A, B, C.*

(ii) *Suponha que EF não seja primo; portanto ele é medido pelo número primo G.*

G não é nenhum dos números A, B, C. Pois se possível seja um deles. Ora, A, B, C medem DE; portanto G também medirá DE. Mas ele também mede EF. Portanto G, sendo um número, medirá o restante, a unidade DF, o que é um absurdo. Portanto G, não é nenhum dos números A, B, C, E, por hipótese, ele é primo. Portanto encontramos os números primos A, B, C, G que são mais do que a quantidade pré-estabelecida A, B, C."

Na filosofia platônica, a consideração da técnica intervém na elaboração. A identificação exata que os pitagóricos ao menos em sua forma primitiva (em seu estado puro), haviam estabelecido entre o número e a grandeza, entre o pensamento aritmético e a realidade concreta, se acha rompida na época em que Teodoro de Cirene ensinava matemática a Platão. Os pitágoricos assumiram a postura de que tudo se resume a números, colocando sobre um mesmo plano a realidade numérica e a realidade natural. Assim, eles evidenciam uma semelhança entre os conjuntos de números e os conjuntos das coisas. Em contraposição, segundo Platão, a ciência dos números influencia não as coisas em si mesmas, mas as características das coisas

quando se compreendem as suas determinações. Em um mesmo objeto, seguindo o padrão de medida ou de numeração, se aplicarão diferentes tipos de determinação. Contudo, estes tipos ideais irão em si mesmos se constituindo realidades autônomas, constituindo o plano superior da verdade ou da existência, do qual procede a participação, seja pela presença através da comunicação, seja através de qualquer outra forma ou qualquer outro meio. É através da grandeza que sabemos comparar as coisas para concluirmos que isto é maior que aquilo, ou o contrário.

Para podermos entender o que realmente é a matemática platônica é necessário que antes determinemos de maneira precisa o progresso compreendido pela reflexão de Platão. - Como a reflexão sobre a matemática, tirou uma doutrina do conhecimento que extrapola o domínio matemático, que se estende através da Antigüidade, pois alguns representantes do platonismo observaram aí um germe de uma metodologia universal capaz de ser ligada ao idealismo críticos dos modernos. Por outro lado, com o advento dessa filosofia de início tão brilhante, parecendo ter a matemática absorvido a filosofia, seguiu-se, por um breve espaço de tempo, o desaparecimento da filosofia matemática. Como a ciência das conexões entre as ideias, da ciência real - pode parecer por volta de vinte séculos subordinada à ciência aparente - a ciência de classificações verbais? Esta segunda pergunta não deve ser separada da primeira, pois nós não estaríamos longe de separar os sentidos da matemática platônica se nós não fossemos capazes de satisfazer a essas duas curiosidades.

Através dos "Diálogos" de Platão observamos que a descoberta dos Irracionais não era desconhecida pela doutrina platônica e da ciência. Na introdução de "Theatetus", diálogo destinado à marcar os primeiros graus da análise que remonta da aparência à verdade, Platão recorre aos escritos de seu mestre Theodoro, que estabelece os irracionais de $\sqrt{5}$, de $\sqrt{7}$ e segue até a $\sqrt{17}$ a pesquisa das raízes quadradas dos irracionais.

Ao avaliar o Brasil pelo seu aparelho de Estado e de seu sistema político, o resultado é muito negativo. Na análise sobre a Educação Brasileira é realmente uma tarefa árdua. Trata-se de um país que apresenta muitas disparidades sociais, onde poucos tem muitos e muitos não tem nada devido as corrupções, desempregos,... A Escola e os livros didáticos tem passados para as crianças a imagem de um Grande País, com otimismo. Imagem nada compatível com a realidade dura e cruel que nos é apresentado pelo cotidiano. Ainda somos vítimas de um meio de comunicação como um meio de interesse destes muitos "Brasis". Chegamos ao cúmulo de nos depararmos com a situação das escolas das redes públicas não terem vagas para todos que gostariam de frequentá-la. De um governador que envia à Assembléia Legislativa do Estado, sua tropa de choque, para retirar "Professores em greve" devido a falta de condições de ensino e salarial. Reflexo de um quadro alarmante sobre a década de oitenta, onde a avaliação expulsou do sistema educacional cerca de 55% dos alunos na primeira série e 60 % nem chegam até a oitava série. Neste ritmo, matemáticamente, sómente daqui a mil anos é que teríamos 90 % dos estudantes matriculados completando o segundo grau. Sabendo-se que os "Tigres Asiáticos" já alcançaram. E ainda mais tenebroso é quando nos chegam a "estatísticas" dizendo que um aluno universitário custa 14 vezes mais do que um aluno do ensino fundamental e médio. Se compararmos este dado com os padrões internacionais, observaremos que chegamos a tal absurdos perante as proporções que nos apresentam. Elas oscilam numa proporção bem menor, em média de três a quatro vezes.

Gasta-se muito mal em educação, segundo o Banco Mundial estima que, a cada cem dólares destinados à educação apenas vinte dólares é que chegam às salas de aula. E no Estado de São Paulo, um dos estados que apresenta um índice econômico melhor em relação aos outros estados, encontramos que o salário-base de um professor de primeiro grau, é cerca de cem dólares, ou seja, significa que ele custa ao cofre do estado três vezes menos que um presidiário. Daí temos um quadro de baixos salários, pouca procura, e sua formação um tanto deficiente.

Diante deste quadro, de uma pequena análise da "educação brasileira" pensei em contribuir significamente através dos estudos dos "Gregos", a fim de resgatar dentro de nós aquela poesia que há tempos deixamos de levar para as nossas salas de aulas: - a crença num Brasil melhor! Resgatar a imagem do Professor que consegue passar para seus alunos, esperança num amanhã mais digno, mais honesto ... e o respeito à cidadania.

Coração Civil

(Milton Nascimento & Fernando Brant)

Quero a utopia, quero tudo e mais
quero a felicidade dos olhos de um pai
quero a alegria, muita gente feliz
quero que a justiça reine em meu país

Quero a liberdade, quero o vinho e o pão
quero ser a amizade, quero amor, prazer
quero nossa cidade sempre ensolarada
os meninos e o povo no poder, eu quero ver

São José da Costa Rica, coração civil
me inspire no meu sonho de amor Brasil
se o poeta é o que sonha o que vai ser real
bom sonhar coisas boas que o homem faz
e esperar pelos frutos no quintal

Sem polícia, nem milícia, nem feitiço, cadê poder?
Viva a preguiça, viva a malícia que só a gente sabe ter
Assim dizendo a minha utopia
eu vou levando a vida, eu vou viver bem melhor
doido pra ver o meu sonho teimoso um dia se realizar.

APÊNDICES

Apêndice I

Origens Primitivas

0.1 Origens Primitivas

A matemática, por muito tempo esteve definida pelos conceitos de números, grandezas e formas, embora atualmente sabemos que se tornaram ultrapassados, mas que por outro lado deram origens a diversos ramos da matemática. Encontramos na história da matemática, que os animais superiores, os homens primitivos ou selvagens, as crianças, não são completamente estranhos aos conceitos de números, grandezas e formas; rudimentos de um sentido matemático e que não são propriedades exclusivas da humanidade. Sabemos que, estudos sobre os nossos antepassados, através de grupos humanos que, ainda hoje, apresentam um modo de vida semelhantes aos homens de milhares de anos, os antropólogos concluíram: – "que todos os seres humanos possuem um sentido numérico", isto é, possui a capacidade de distinguir pequenas quantidades. Poderemos observar, por exemplo as aves: – ensine a um papagaio a escolher entre dois montinhos desiguais de semente de girassois, constata-se então que ele com o tempo, distingui: – três e um, três e dois, quatro e dois, seis e três; mas confundirá sempre: cinco e quatro, sete e cinco, oito e seis. Outro exemplo interessante é quando uma criança de aproximadamente de quatorze meses, que esteja brincando com cinco bolinhas de plático de tamanho médio, se escondermos uma delas, a sua reação é de procurar e assim que encontrá-la irá colocá-la juntamente com as outras bolinhas.

Existem uma série de experiencias sobre a capacidade de distinguir pequenas quantidades. Por exemplo, a que se encontra no conhecido livro de *Tobias Dantzig – "Números - a linguagem da ciência", pág. 17*

> *"Um fazendeiro estava disposto a matar um corvo que fez seu ninho na torre de observação de sua mansão. Por diversass vezes, tentou surpreender o pássaro, mas em vão: à aproximação do homem, o corvo saía do ninho. De uma árvore distante, ele esperava atentamente até que o homem saísse da torre e só então voltava ao ninho. Um dia, o fazendeiro tentou um ardil: dois homens entraram na torre, um ficou dentro, e o outro saiu e se afastou. Mas o pássaro não foi enganado: manteve-se afastado até o outro homem saísse da torre. A experiência foi repetida nos dias subseqüentes com dois, três e quatro homens, ainda sem sucesso. Fina;mente cinco homens foram utilizados como anteriormente, todos entraram na torre e um permaneceu lá dentro enquanto os outros quatro saíam e se afastavam. Desta vez o corvo perdeu* a conta. *Incapaz de distinguir entre quatro e cinco, voltou imediatamente ao ninho".*

Assim, com esse exemplo podemos concluir que tanto os homens como os animais, a percepção de pequenas quantidades é limitada, talvez devido a isso, tem-se o início do processo de contagem, e que essa percepção de diferenças de padrões em seus ambientes, apresentada nesses exemplos, conduz nos a acreditar, que de certa forma é semelhante com a preocupação de um matemático com a forma e a relação, e totalmente voltada para os problemas do cotidiano do homem.

Históricamente, observamos que a matemática e a escrita possuem uma relação muito estreita e até simbiótica. Há recentes descobertas arqueológicas que revelaram que os primeiros surgiram para atender à necessidade de calcular, dividir e repartir a riqueza material das sociedades. Assim, há necessidade de que se compreenda o desenvolvimento da escrita quanto da matemática ocorreu simultaneamente, pois as limitações da memória humana seriam muito limitada, não iria conseguir ultrapassar determinados graus de complexidade numérica.

É claro que se observarmos a evolução de dois sistemas de escrita, um ao sul da Mesopotâmia, em meados do quarto milênio a.C., e o outro pouco mais tarde, nas proximidades de Susa, no Irã, vê-se pelos descobrimentos arqueológicos desses últimos decênios que: para que uma sociedade possa criar uma escrita, é preciso que haja necessidades materiais, principalmente em matéria de contabilidade. O material usados para as escritas nestas sociedades eram: tabuinhas de argila, um material praticamente indestrutível, sendo que seus primeiros documentos são atos contábeis. Durante três mil anos a escrita cuneiforme de grafia angulosa, nascida na Mesopotâmia, foi adotada pelos povos sumérios e acádios, hititas, elamitas e huritas, sendo empregada para a transcrição de muitas outras línguas usadas na Antigüidade no Oriente Próximo, onde sobreviveu até o início de nossa era.

Sabemos que históricamente outra civilização surgiu no Egito por volta do final do quarto milênio. Devido o material utilizado ser o papiro (planta que cresce nas margens do Rio Nilo), um material perecível, infelizmente o Egito deixou poucos documentos que a Mesopotâmia.

Após as geleiras retraírem há aproximadamente 10.000 anos, provocando mudanças no clima da Terra, os caçadores nômades da Idade da Pedra se fixaram ao redor nos vales do Rio Nilo, Tigre e Eufrates, dedicando-se à agricultura. Foi então que os agricultores se depararam com problemas de conhecimentos do tempo, das estações do ano, das fases da lua; para que fosse possível controlar melhor as suas plantações, a fim de que pudessem saber quando plantar, quanto de alimento e sementes deveriam armazenar, para saber quando e quanto deveriam pagar de tributos sociais denominados taxas baseado no tamanho da área do terreno e ainda como dividir a herança de terras de modo justo para seus filhos. Os Babilônicos se preocuparam com grandes construções, grandes estruturas de engenharia pelo qual elas ficaram famosas. Foi preciso *contar* a sucessão de dias e de noites para que surgissem os primeiros calendaários (para organizá-lo foi necessário desenvolver o conhecimento de Astronomia e Matemática). Todas essas necessidades da civilização exigiam a noção de número e de uma elaboração do processo de contagem além da noção de *"um"* e *"muitos"*. A noção de número deve ter surgido proporcionalmente ao conceito de singular e plural, porque é muito comum encontrarmos na História Universal que os nossos antepassados só dispunham de três nomes de números, correspondendo respectivamente a: *um*, *dois* e *muitos*. Observe que a maior parte das líguas européia conservaram traços destas limitações, por exemplo:*ter*(em latim) e *thrice*(em inglês) significam tanto *"três vezes"* como *"muitos"*. É possível constatar mais algumas semelhanças entre as palavras latinas *tres* (três) e *trans*(além de), entre as palavras francesas *très* (muito) e *trois* (três).

Cada cultura desenvolveu sua matemática, utilizando uma linguagem e simbologia próprias, capaz de expressar uma mesma idéia matemática: – a idéia de número. O ramo da matemática que se dedica a esse estudo é conhecida por Aritmética, que tem suas raízes no grego *Arithmetike* (Aritmos e Techne= número e ciência, respectivamente). Subjacente à idéia de número está a *correspondência*. Imagine um pastor com necessidade de certificar que não perdeu nenhuma ovelha. O pastor tinha que *contá-las*, ou seja, de comparar conjuntos. A cada ovelha, ele guardou uma pedrinha, e no final da sua jornada ele recolher o seu rebanho, se a cada pedrinha correspondesse a uma ovelha, não teria se extraviado nenhuma.

Ao analisarmos mais profundamente a ação do pastor, percebemos que está baseada na noção de conjunto: "Dados duas coleções não vazias de objetos, A e B; se cada elemento de A corresponder um só elemento de B, e a cada elemento de B corresponder um só elemento de A, diremos que foi estabelecida uma correspondência entre os elementos das duas coleções. Observe que há duas correspondências, uma é a de A para B e a outra de B para A, denominamos de correspondência biunívoca. A quantidade de objetos de "A" é a mesma de "B"; ou seja, as duas coleções são equivalentes.

Foram muitos séculos para que se descobrisse que o dia e a noite e um casal de passarinhos são exemplos do número dois.

Apêndice II

História da escrita e História da notação numérica

	História da escrita	História da notação numérica
30000/20000 a.C.	As primeiras pinturas rupestres.	Os primeiros ossos entalhados da pré-história. As primeiras pinturas rupestres. Surgimento dos algarismos sumérios, " protoelamitas " e hieroglifos egípcios.
3100/2900 a.C.	Surgimento das mais antigas escritas conhecidas (ainda próximas da pictografia) em Sumer, Elam e no Egito.	
2700 a.C.	Surgimento dos signos "cuneiformes" (caracteres em forma de "cunhas") nas tabuletas sumérias.	Surgimento dos algarismos cuneiformes sumérios.
2600/2500 a.C.	Surgimento da escrita hierática egípicia (cursiva abreviada da escrita hieroglífica, empregada ao mesmo tempo que esta última).	Aparecimento dos algarismos hieráticos egípcios.
Segunda metade do III milênio	Os semitas mesopotâmicos tomam de empréstimo os caracteres cuneiformes para anotar sua própria língua.	Os semitas mesopotâmicos tomam de empréstimo os algarismos cuneiformes sumérios, adaptando-os pouco a pouco à base dez.
2400/2300 a.C.	Surgimento da escrita em Ebla.	
2400/2300 a.C.	Surgimento da escrita denominda "proto-hindu" no vale do hindus em Mohenjo Daro, Paquistão.	

Primeira metade do II milênio.	difusão da escrita cuneiforme assírio-babilônica através do Oriente Próximo, tornando-se a escrita diplomática das chancelarias orientais. Surgimento da escrita em Creta (civilização denominada "mi noana").	A numeração decimal cuneiforme assírio-babilônica (sistema comumente usado) suplanta pouco a pouco o sistema sexagesimal sumério e se expande no Oriente Próximo.
1900/1800 a.C.		Surge a mais antiga numeração escrita posicional conhecida dentre os sábios babilônios (sistema de base sessenta e de grafia cuneiforme).
Século XVII a.C.	Primeira tentativa conhecida de escrita alfabética.	
	Um grupo de semitas a serviço dos egípcios no Sinai emprega alguns signos fonéticos derivados dos hieroglifos egípcios (inscrições denomindas "protossinaicas" de Sérabit el Khadim).	
Segunda metade do II milênio		A numeração hierática egípcia chega ao termo de sua evolução.
Séc. XIV a.C.	Surgimento da escrita hieroglífica hitita.	
Séc. XIV a.C.	Surgimento da mais antiga escrita conhecida, inteiramente alfabética, nas tábuas de Ougarit (alfabeto de trinta signos de grafia cuneiforme).	

Final do séc. XIV a.C.	Os mais antigos espécimes conhecidos da escrita chinesa surgem em Xiao Dun (são incrições divinatórias em osso e escamas de tartaruga).	Surgimento dos mais antigos algarismos chineses conhecidos.
Final do séc. XII a.C.	Primeiros espécimes conhecidos do alfabeto linear fenício (prefiguração dos alfabetos modernos).	
Início do I milênio	Difusão da escrita alfabética através do Oriente Próximo e do Mediterrâneo oriental (fenícios, arameus, hebreus, gregos etc.).	Os hebreus tomam de empréstimo os algarismos hieráticos egípcios.
Final do séc. IX, início do séc. VII a.C.	Os gregos concluem o princípio moderno da escrita alfabética, acrescentando vogais às consoantes de origem fenícias.	
Séc. VIII a.C.	Surgimento da escrita "demótica" egípcia (cursiva derivada de um ramo local da hierática, mais abreviada que ela, suplantando-a a partir de então no uso corrente).	
Final do séc. VIII a.C.		As antigas comprovações conhecidas da numeração aramaica.
Sec. VII a.C.	Surgimento da escrita etrusca. Surgimento da escrita latina arcaica.	
Final do séc. VI a.C.		As mais antigas comprovações conhecidas da numeração fenícia.
Segunda metade do I-milênio a.C.		Difusão dos algarismos aramaicos pelo Oriente Próximo (Mesopotâmia, Síria, Palestina, Egito e norte da Arábia).

Séc. V a.C.	A escrita aramaica torna-se o sistema de correspondência internacional do Oriente Próximo suplantando doravante a escrita cuneiforme de origem assírio-babilônica. Surgimento da escrita zapoteca na América Central pré-colombiana.	Surgimento da numeração grega acrofônica em Ática. Surgimento da numeração acrofônica da Arábia do sul nas inscrições sabeítas.
Séc. IV a.C.		Difusão da numeração grega acrofônica pelos Estados do mundo helênico.
Final do séc. IV, início do séc. III a.C.		Os primeiros testemunhos conhecidos da numeração grega alfabética surgem no Egito.
Meados do séc. III a.C.	Surgimento da escrita kharoshti nos éditos do imperiador Asoka (cursiva derivada da escrita aramaica e empregada no noroeste da Índia, Paquistão e Afeganistão). Surgimento da escrita brahmi nos éditos do imperiador Asoka ('e a primeira escrita estritamente hindu conhecida; será origem de todas as outras escritas da Índia).	difusão da numeração aramaica no noroeste da Índia, no Paquistão e no Afenaganistão. Difusão da numeração grega alfabética pelo Oriente Próximo e pelo Mediterrâneo oriental. Surgimento dentre os sábios da Babilônia do primeiro zero conhecido da história.
Séc. II a.C.	Primerios testemunhos conhecidos do hebraico quadrado (escrita hebraica na sua forma moderna, cujas letras, rechonchudas e maciças, derivam das letras cursivas aramaicas). Inscrições das grutas de Nana Ghat (escrita diretamente derivada do sistema brahmi).	Surgimento mais completo dos algarismos brahmi nas inscrições budistas de Nana Ghat (estes algarismos, que constituem a verdadeira prefiguração dos nove números significativos atuais, hindus, árabes e europeus, ainda não são regidos pelo príncipio de posição).

Final do séc. II a.C.		As mais antigas comprovações conhecidas do emprego das letras hebraicas como números.
Séc. II a.C. / séc. II d.C.	Reforma da escrita chinesa e surgimento da grafia lishu (que evoluirá pouco a pouco para a reforma atual).	Surgimento da numerção decimal posicional dos contadores chineses (sistema denominado suan zi ou sistema das "barras numerais"). Mas ela não tem zero.
Séc. I ou II a.C.	Inscriçoes budistas das grutas de Nasik (cujas características são mais ou menos parecidas com as de Nana Ghat).	
Primeiros séculos da era cristã	Um ramo cursivo da antiga escrita aramaica vai pouco a pouco evoluir para dar origem à escrita árabe propriamente dita (cujos primeiros testemunhos formais conhecidos datam do séc. V).	Os algarismos hindus de 1 a 9 ainda não parecem depender da regra numeral de posição.
Final do séc. III, início do séc. IV	Comprovações mais antigas da escrita maia. Surgimento da grafia chinesa denominada Kai-shu (forma atual).	Primeiros exemplos conhecidos do emprego do sistema maia de expressão das datas e das durações temporais em "conta longa" (sistema denominado séries iniciais).
Séc. IV - VI	Surgimento da escrita hindu denominada gupta (da qual derivam todas as escritas da Índia setentrional e algumas do centro da Àsia). Inscrições Pallava, Calukya e Vallabhi (cujo sistema está na origem das escritas hindus meridionais).	Época provável do surgimento do zero e da numeração posicional dos sarcedotes-astrônomos maias.

28 de agosto de 458	Data do Lokavibhaga, um texto jaï em sânscrito que trata de cosmologia. Esta obra constitui a mais antiga comprovação conhecida do emprego de símbolos numéricos em sânscrito, uso que comprova a mais acabada concepção do zero e a regra numeral de posição segundo a base dez.
Aproximadamente ano 510	Dois exemplos do uso dos símbolos numéricos do sânscrito atestados junto ao astrônomo hindu Aryabhata. Este autor alude, ao princípio de posição e ao zero.
aproximadamente ano 575	Os símbolos numéricos em sânscrito são abundantemente empregados (com um zero) pelo astrônomo hindu Varahamihira. A partir desta época, o sistema assim concebido torna-se, aliás, instrumento quase exclusivo dos astrônomos e matemáticos da Índia.
Ano 595	Data do mais antigo documento epigráfico hindu conhecido (trata-se de uma carta de doações de cobre), que atesta o uso dos nove algarismos significativos segundo o princípio de posição. Este novo sistema - cujos signos derivam da antiga notação brahmi e prefiguram os nove algarismos modernos - constitui a primeira numeraçao decimal escrita de estrutura idêntica à nossa.

Ano de 598	Data da mais antiga inscrição em sânscrito do Camboja (a casa 520 saka está aí expressa por meio do zero e dos símbolos numéricos do sânscrito segundo o princípio de posição).
Ano 628/629	O uso da numeração decimal escrita de posição e do signo-zero já perfeitamente estabelecido na Índia: o astrônomo Bhaskhara I emprega não apenas o sistema posicional dos símbolos numéricos em sânscrito, mas ainda o signo-zero e os nove algarismos significativos.
Séc. VII	Aparecimento da numerção siríaca alfabética.
Ano 662	Testemunho do bispo sírio Severo Sebokt a respeito dos métodos hindus de cálculos por meio dos nove algarismos.
Ano 683	A mais antiga inscrição khamer datada por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu segundo o princípio de posição.
Ano 683/686	As mais antigas inscrições redigidas em malaio arcaico e datadas por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu.
Ano 687	A mais antiga inscrição em sânscrito do Champa com uma data expressa em símbolos numéricos segundo o príncipio de posição.

Ano 718/729	Um astrônomo budista de origem hindu fixado na China testemunha o zero e o cálculo por meio dos nove algarismos hindus.
Ano 732	A mais antiga inscrição em sânscrito de Java com uma data expressa em síbolos numéricos com valor de posição.
Ano 760	A mais antiga inscrição vernacular de Java (sistema Kawi) com uma data expressa por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu.
Séc. VIII	Surgimento da numeração árabe alfabética (sistema denominado abjad).
Final do séc. VIII	Surgimento do zero de origem hindu na numeração decimal posicional chinesa ("barras numerais"). Introdução da numeração decimal posicional hindu e do zero em terras do Islã.
Ano 813	A mais antiga inscrição vernacular do Champa datada por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu.
Ano 875/876	As mais antigas inscrição lapidares conhecidas da /ndia, oferecendo menções numéricas expressas por meio do zero e dos nove algarismos significativos nagari.

Séc. IX		Surgimento dos algarismos denominados ghobar entre os árabes do Magred e da Espanha (signos cuja grafi prefigura a dos algarismos europeus da Idade Média e a dos algarismos modernos).
Ano 976/992		Dois manuscritos provenientes da Espanha não mulçumana oferecem a grafia dos nove algarismos sob uma forma próxima do tipo ghobar: trata-se das mais antigas provas européias do uso dos chamados "algarismos arábicos".
Séc. X-XII		Os calculadores europeus efetuam suas operações aritméticas em ábaco de colunas de Gerbert e de seus discípulos:utilizam para isto fichas de chifre marcadas por um dos nove algarismos de origem indo-árabe (apices).
Séc. XII		Introdução do signo zero no Ocidente: os calculadores europeus efetuam suas operações sem colunas, escrevendo os nove algarismos e o zero na areia: é o aparecimento do algorismo. Época a partir da qual os "algarismos arábicos" começam a se estabilizar graficamente.
Séc. XIII-XIV	Aparecimento do "cálculo escrito" à pena em papel por meio dos algarismos na Europa ocidental.	

Séc. XV	Invenção da imprensa na Europa.	Generalização do uso e normalização progressiva dos algarismos "arábicos" na Europa.

Fonte: Os números: história de uma grande invenção

Observação:

– o termo "surgimento" empregado durante todo o desenvolvimento das referências cronológica deve ser entendida como " a época dos primeiros documentos ou testemunhos atualmente conhecidos que comprovam a existência e o uso do conceito ao qual ele se refere".

Apêndice III

Evolução do conceito de número

ANTIGUIDADE

A ÉPOCA	A CONQUISTA		
Séc. VI A.C.	Descoberta dos IRRACIONAIS	Pitágoras	Grécia
Séc. IV A.C.	Primeira Crise no Conceito de INFINIDADE	Zenão, Platão e Aristóteles	Grécia
Séc. III A.C.	Primeira Formulação do Conceito de LIMITE	Arquimedes	Grécia
Primeiros séculos D.C.	Invenção do Símbolo ZERO	Desconhecido	Índia
Primeiros séculos D.C.	Números Negativos	Desconhecido	Índia

RENASCIMENTO DA CIÊNCIA

Séc. XVI D.C.	Primeiro Uso Sistemático das FRAÇÕES CONTÍNUAS	Bombelli	Itália
Séc. XVI D.C.	Primeira Formulação dos NÚMEROS COMPLEXOS	Cardano Bombelli	Itália
Fim do Séc. XVI	Invenção da NOTAÇÃO LITERAL	Vieta	França
1631	Descoberta do TEOREMA DOS FATORES	Harriot	Inglaterra
1635	Formulação do INFINITÉSIMO	Cavalieri	Itália
1638	Primeira Formulação do CONJUNTO INFINITO	Galileu	Itália

IDADE MODERNA

A ÉPOCA	A CONQUISTA	O HOMEM	O PAÍS
1639	Invenção da Geometria COORDENADA	Descartes	França
1654	Primeira Formulção do PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA	Pascal	França
Por volta de 1677	Invenção do CÁLCULO	Newton Leibnitz	Inglaterra Alemanha
Por volta de 1677	Primeiro Uso Sistemático das SÉRIES INFINITAS	Newton Leibnitz	Inglaterra Alemanha
1797	Descoberta de uma Interpretação Geométrica dos NÚMEROS COMPLEXOS	Gauss	Alemanha

SÉCULO DEZENOVE

A ÉPOCA	A CONQUISTA	O HOMEM	O PAÍS
1820	Primeira Formulação da POTÊNCIA de um Conjunto	Bolzano	Alemanha
1825	Descoberta dos Números ALGÉBRICOS não Exprimíveis por Radicais	Abel	Noruega
1843	Invenção dos QUATERNIÕES	Hamilton	Inglaterra
1844	Descoberta dos TRANSCENDENTES	Liouville	França
1844	Primeira Teoria das GRANDEZAS EXTENSIVAS	Grassmann	Alemanha
1867	Primeira Formulação Explícita do PRINCÍPIO DE PERMANÊNCIA de Leis Formais	Hankel	Alemanha
1872	Primeira Teoria Científica dos IRRACIONAIS	Dedekind	Alemanha
1883	Segunda Teoria Científica dos IRRACIONAIS	Cantor	Alemanha
1883	Invenção do TRANSFINITO	Cantor	Alemanha
1897	Descoberta dos ANTINÔMIOS da Teoria dos Conjuntos	Burali-Forti	Itália

A - FILOSOFIA GREGA

	Datas	Filósofos	Escolas e doutrinas
1 Pré-socráticos (1)	640-546	Tales de Mileto (Jônicos)	Físicos que procuram o primeiro princípio (ou matéria primeira das coisas).
	576-480	Heráclito de Éfeso	O real é puro vir a ser.
	570-496	Pitágoras	O real se reduz a números ou combinações de números.
	549-420	Parmênides de Eléia	O vir a ser é pura aparência: o ser é imóvel. (Panteísmo).
	490- ?	Zenão de Eléia	
2	460-371	Demócrito	Atomismo. Materialismo.
	500-428	Anaxágoras	Espiritualismo. (O mundo é governado por uma inteligência).
	485-380	Górgias	
	por 491	Cálicles	O direito deriva da força.
3 Socráticos	470-399	Sócrates	Ensina o método da filosofia e da virtude.
	435- ?	Aristipo de Cirene	Hedonismo.
	440- ?	Antístenes	Fundador da Escola cínica.
	430-347	Platão	Realismo ontológico. (Teoria das idéias)
	384-322	Aristóteles	Realismo moderado. (Teoria do conceito).

(1) A maior parte das datas dos pré-socráticos são apenas aproximativas.

4 Pré-socráticos	360-270	Pirro	Ceticismo universal.
	340-264	Zenão de Citium	Estoicismo
	341-269	Epicuro	Materialismo. Moral do prazer (ataraxia).
	214-129	Carnéadas	Nova-Academia: probabilismo
	330-270	Euclídes de Alexandria	Funda a geometria.
	287-212	Arquimedes	Ciência experimental

B - Filosofia romana

5	95-520	Lucrécio	Atomismo. Materialismo. (Sistema de Epicuro)
	106-44	Cícero	Ecletismo. (Probabilismo)
	? -125	Epíteto	Estoicismo
	após 170d.C.	Sexto Empírico	Ceticismo. Fenomenismo
	205-270	Plotino	Neoplatonismo. (Panteísmo emanatista)
	205-174	Manés	Maniqueísmo (dualismo)
	354-430	S. Agostinho (1)	Neoplatonismo

(1) No período romano, que termina em 430 (ano da tomada de Roma por Alarico), e até a época do renascimento carolíngeo, seria conveniente distinguir a filosofia dos Padres da Igreja (filosofia patrística). O maior nome é então o de SANTO AGOSTINHO. Mas seria necessário citar ainda CLEMENTE DE ALEXANDRIA (150-116), ORIGENES (185-223), TERTULIANO (160-223), o PSEUDO-DENIS o AREOPAGITA (Século V), BOÉCIO (470-525).

Apêndice V

Significado das palavras numéricas

Palavras numéricas de algumas línguas indo-européias mostrando a extraordinária estabilidade das palavras numéricas

	Sânscrito	Grego antigo	Latim	Alemão	Inglês	Francês	Português	Russo
1	eka	en	unus	eins	one	un	um	odyn
2	dva	duo	duo	zwei	two	deux	dois	dva
3	tri	tri	tres	drei	three	trois	tres	tri
4	catur	tetra	quatuor	vier	four	quatre	quatro	chetyre
5	panca	pente	quinque	funf	five	cinq	cinco	piat
6	sas	hex	sex	sechs	six	six	seis	shest
7	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	sete	sem
8	asta	octo	octo	acht	eight	huit	oito	vosem
9	nava	ennea	novem	neun	nine	neuf	nove	deviat
10	daca	deca	decem	zehn	ten	dix	dez	desiat
100	cata	ecaton	centum	hundert	hundred	cent	cem	sto
1000	sehastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	mil	tysiaca

Um sistema quinário típico:

a língua api das Novas Hébridas

	Palavra	Significado
1	tai	
2	lua	
3	tolu	
4	vari	
5	luna	mão
6	otai	mais um
7	olua	mais dois
8	otolu	mais três
9	ovair	mais quatro
10	lua luna	duas mãos

Um sistema vigesimal típico:

a língua maia da América Central

1	hun	1
20	kal	20
20^2	bak	400
20^3	pic	8000
20^4	calab	160.000
20^5	kinchel	3.200.000
20^6	alce	64.000.000

Um sistema binário típico: uma tribo ocidental dos Estreitos Torres

1	urapun	3	okosa-urapun	5	okosa-okosa-urapun
2	okosa	4	okosa-okosa	6	okosa-okosa-okosa

Apêndice VI

Atitudes importantes do Professor de Matemática

ATITUDES IMPORTANTES DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

1. *Orientar a aprendizagem, de modo a permitir que o estudante tenha noção dos métodos e processos matemáticos adquirindo dessa forma condições para abordadr com sucesso quaisquer situações problemáticas, até mesmo aquelas não relacionadas com o conteúdo da programação proposta.*
2. *Orientar e guiar os alunos na aprendizagem e não ser mero formulador de receitas prontas a serem usadas.*
3. *Permitir e incentivar o espírito de iniciativa do aluno, estimulando a reflexão e desenvolvendo a capacidade e investigação e conclusão.*
4. *Valorizar o "***porque***", antes do "***como***".*
5. *Não subestimar a capacidade dos alunos.*
6. *Desenvolver as aulas em um nível adequado à classe mas promovendo o aperfeiçoamento do aluno não só quanto às suas, potencialidades, mas também quanto aos seus conhecimentos.*
7. *Empregar uma linguagem simples, porém clara e precisa.*
8. *Evitar que os termos matemáticos adquiram a conotação que eles possuem na linguagem comum.*
9. *Aperfeiçoar seus conhecimentos no que se refere ao conteúdo e as técnicas.*
10. *Não usar os símbolos lógicos e matemáticos como abreviações taquigráficas.*
11. *Deixar que as crianças manipulem os materiais didáticos e não utilizá-los como simples material demonstrativo.*

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

——— Os Pré-Socráticos: fragmentos doxografia e comentários. 2a Ed.São Paulo: Abril Cutural (Os Pensadores) 1978.

——— Platão: fragmentos doxografia e comentários. 2a Ed.São Paulo: Abril Cultural (Os Pensadores) 1978.

——— Aristóteles: fragmentos doxografia e comentários. 2a Ed.São Paulo: Abril Cultural (Os Pensadores) 1978.

AABOE Asger.. **Episódio da História Antiga da Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática 1984.

ANDERY M. A. e outros. **Para Compreender a Ciência: uma perspectiva histórica.** Rio de Janeiro: Espaço e Tempo; São Paulo: EDUC 1988.

BALL W.W. Rouse. **A short account of the History of Mathematics.** New York: Dover Pubications Inc. 1973.

BARKER Stephen F. **Filosofia da Matemática.** 1ª.Ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores 1969.

BARON Margaret E. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo 1.** vol. 1. Brasília: Editora da Universidade de Brasília 1985.

BECKER Oskar. **O pensamento matemático.** 1ª.Ed. São Paulo: Editora Herder; 1965.

BERNACERRAF P. PUTNAM H. **Philosophy of Mathematics.** New York: Cambridge University Press; 1989.

BLANCHÉ Robert. **A epistemologia.** 1ºEd. Lisboa: Editorial Presença Limitada; 1975.

BLANCHÉ Robert. **A Axiomática.** 1ºEd. Lisboa: Editorial Presença Limitada; 1987.

BOYER Carl B. **História da Matemática.** 1ºEd. São Paulo: Editora Blücher; 1974.

BRUNSCHVICG Léon **Les Ètapes de La Philosophie Mathématique.** 3ºEd. Paris: Press Universitare de France; 1947.

CARAÇA Bento J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 1ºEd. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora; 1984.

CAMPEDELLI Luigi. **Fantasia e logica nella Matemática.** 1ºEd. Roma: Hemus Libraria Editore; 1973.

DANTZING Tobias. **Número: a linguagem da Ciência. 1ºEd. Rio de Janeiro: Zahar Editores; 1970.**

DAVID P. & HERSH R. **A experiência Matemática. 4ºEd. Rio de Janeiro: F. Alves Editora S.A. 1989.**

EDWARDS Carles H. The historical development of the calculus. New York: Springer Verlag New York; 1970.

EVES Howard. An introduction to the history of Mathematics. 5a Ed. Chicago: Saunders College Publishing 1983.

FARRIGTON Benjamin. A ciência grega. 1ºEd. São Paulo: Instituição Brasileira Difusão Cultural S.A.; 1961.

GARDING Lars Encontro com a Matemática. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1981.

HORTA L. H. B.. História da Ciência. Rio de Janeiro: Conselho Nacional de Pesquisas: 1963.

HEATH Thomas L. *The thirteen books of "The Elements"*. vol.II. 1ºEd. Unabridged: Dover Publications, Inc; 1956.

HUISMAN Denis VERGEZ André. *Compêndio Moderno de Filosofia*. vol.II. 1ºEd. Rio de Janeiro: Livraria Freitas Bastos S.A.; 1968.

IFRAH Georges. Os Números: história de uma grande invenção. 2ºEd. Rio de Janeiro: Globo; 1989.

KÖRNER Stephan. Introduccion a la Filosofia de la Matemática. 1ºEd. México: Siglo XXI Editores S.A.; 1967.

LINTZ R.G.. História da Matemática. Campinas: Relatório Interno - 142, IMECC UNICAMP; 1979.

MACHADO Nilson J.. Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da Matemática. São Paulo: Cortez: Autores Associados; 1987.

MANACORDA M. A.. História da Educação: da antiguidade aos nossos dias. São Paulo: Cortez: Autores Associados; 1989.

MASON I.F.. História da Ciência - as principais correntes do pensamento científico. Porto Alegre: Globo; 1962.

MONDOLFO R.. O pensamento antigo. Vol. I. São Paulo: Ed. Mestre Jou; 1971.

ORE Oystein. Invitation to number theory. New York: The Mathemathical Association of America; 1977.

RUSSELL Bertrand. Introdução à Filosofia da Matemática. 1ºEd. Rio de Janeiro: Zahar Editores; 1963.

SMITH D. E.. History of Mathematics. vol.I. New York: Dover Publications Inc.; 1990.

UPINSKY Arnaud A.. A perversão matemática. Rio de Janeiro: F. Alves Editora S.A.; 1989.

VERNANT J.P.. As origens do pensamento grego. 6ºEd. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil S.A.; 1989.