ANTONIO MIGUEL

TRÊS ESTUDOS SOBRE HISTÓRIA

E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA DE ENSINO
1993

Trabalho apresentado como exigência parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação, na área de concentração METODOLOGIA DO ENSINO, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Lafayette de Moraes.

Comissão Julgadora:

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendido por Antonio Miguel e aprovada pela Comissão Julgadora em ______ 30/11/93.

Data:

Assinatura:

RESUMO

Os "Três Estudos sobre História e Educação Matemática" tomam como objeto de investigação o problema da relação entre a história, e mais particularmente a história da matemática, e a Educação Matemática. Eles têm o propósito de explicitar e fundamentar três pontos de vista pessoais a respeito de três possíveis formas dessa relação se manifestar.

Uma primeira forma diz respeito às possibilidades de se recorrer à história como um recurso pedagógico adicional, isto é, como um meio potencialmente rico para se promover o ensino-aprendizagem da matemática. O objetivo do primeiro Estudo é o de resgatar a própria história dessa forma de relação através do levantamento, detalhamento e análise dos diferentes papéis pedagógicos atribuídos à história por matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos que, de modo direto ou indireto, acabaram expressando suas posições em relação a essa questão.

Mas se o primeiro Estudo preocupa-se com a importância da história na Educação Matemática, o segundo aponta para a necessidade de um resgate da Educação Matemática na história. É essa uma segunda forma em que se pode manifestar o problema da relação entre história e Educação Matemática. Trata-se agora de recorrer à história e à filosofia da Matemática e da Educação na tentativa de reconstituir os paradigmas de Educação Matemática na história. A análise a que foram submetidos os textos básicos desse estudo revelou a existência dos oito seguintes paradigmas de Educação Matemática: o Paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico, o Paradigma do Formalismo

SUMÁRIO

2º ESTUDO - A CONSTITUIÇÃO DO PARADIGMA DO FORMALISMO PEDAGÓGICO CLÁSSICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3º ESTUDO - NÚMEROS IRRACIONAIS: UM ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO-TEMÁTICO

AGRADECIMENTOS

Ao professor Lafayette de Moraes, pela leitura paciente e criteriosa das várias versões destes Estudos, pelas sessões de orientação e pelas cartas repletas de comentários e alternativas.

Aos professores componentes da banca examinadora - Lafayette de Moraes, Amélia Domingues de Castro, Eduardo Sebastiani Ferreira, Sérgio Lorenzato, Ernesta Zamboni, Enid Abreu Dobranszky, Lucila D. T. Fini e Márcia Regina Ferreira de Brito - que dedicaram consideráveis parcelas de seus dias já profissionalmente excessivos, para realmente examinar e propor justos reparos e sugestões às muitas páginas que compõem estes Estudos.

À professora Maria Carolina Bovério Galzerani pelo incentivo e apoio, pelas oportunas conversas sobre história e pelas esclarecedoras leituras recomendadas.

À professora Ema Luiza Beraldo Prado, com quem invisivelmente dialoguei durante a redação destes Estudos.

Aos colegas da área de Educação Matemática do DEME - os professores Maria Ângela Miorim e Dario Fiorentini - pelas reflexões e questões levantadas em nossos frequentes momentos de inquietação em relação aos nossos trabalhos de tese.

Ao professor Manoel Amaral Funcia, pelas inúmeras e sensatas sugestões referentes ao estudo histórico-pedagógico sobre os números irracionais.

À Luciane M. de Oliveira pela prontidão e competência demonstradas no trabalho de digitação e diagramação destes Estudos.

À Claúdia, que por ter consciência disso tudo, proporcionou-me o estímulo e o apoio emocional necessários.

À Fernanda, que por não ter conquistado ainda a consciência necessária, tolerou tudo isso.

Pedagógico Enciclopédico, o Paradigma do Ativismo Pedagógico, o Paradigma do Formalismo Pedagógico Estrutural, o Paradigma do Falibilismo Pedagógico, o Paradigma Cultural e o Paradigma Histórico. Tendo em vista, porém, a amplitude e complexidade desse empreendimento, o segundo Estudo toma como objeto de investigação apenas o modo como se constituiu o Paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico, à luz das quatro seguintes categorias de análise: a concepção de matemática subjacente ao paradigma, a concepção dos fins da Educação Matemática e dos valores a serem por ela promovidos, a concepção do modo como o aprendiz tem acesso ao conhecimento matemático e a concepção do método de ensino de matemática.

Finalmente, o terceiro Estudo - que constitui-se numa proposta fundamentada referente a um terceiro modo da história relacionar-se com a Educação Matemática - tem o propósito de apresentar e discutir um estudo histórico-pedagógico-temático sobre os números irracionais. Trata-se agora de mostrar como a história pode operar em um nível temático bastante específico da matemática e revelar todo o seu potencial cultural, humano e educativo mais amplo.

ABSTRACT

The object of investigation of "Three studies about History and Mathematical Education" is the relation between History - and particularly the History of Mathematics - and Mathematical Education. The aim is to clearly express and establish three personal points of view concerning three possible forms in which that relationship may appear.

The first form deals with the possibilities of using History as an aditional pedagogic resource, that is, a potentially rich means of promoting the teaching and learning of Mathematics. The objective of the first study is to recover the very story of this form of relation by raising, detailing and analysing the different pedagogic roles attributed to History by Mathematicians, math historians and mathematical educators who, directly or indirectly, have expressed their positions regarding this matter.

While the first study concerns the importance of History in Mathematical Education, the second points out to the necessity of recovering Mathematical Education in History. That is another way of manifesting the problem of the relation between History and Mathematical Education. The question now is to evoke History and both Mathematics and Educational Philosophy in an attempt to remake the Mathematical Education paradigms in History. The analysis into which the basic texts of this study have been submitted has revealed the existence of the following eight paradigms of Mathematical Education: the paradigm of Classical Pedagogic Formalism; the paradigm of Enciclopaedic Pedagogic Formalism; the paradigm of Pedagogic Activism; the

paradigm of Structural Pedagogic Formalism; the paradigm of Pedagogic Falibilism; the Cultural paradigm and the Historical paradigm. In regard to the wideness and complexity of this enterprise, the second study will only deal with the investigation of the way the Classical Pedagogic Formalism Paradigm has been constituted in the light of four analytic categories as follows: the conception of mathematics underlying the paradigm; the conception of the aims of Mathematical Education and of the values it is supposed to promote; the conception of the way the learner can acquire mathematical knowledge and the conception of the teaching method in Mathematics.

Finally, the third Study - which constitutes a proposal based upon a third way of History relating itself to Mathematical Education - has the purpose of presenting and discussing a thematic-pedagogic-historical study on irrational numbers. The goal is to show how History can operate in a rather specific thematic level of Mathematics and reveal all its widest cultural, human and educational potential.

"A essência da Razão, em suas formas mais primitivas, é a sua avaliação de relances de novidade, de novidade imediatamente realizável, e de novidade que é considerada ao nível do desejo, mas não ainda ao nível da ação. Na vida estabilizada não há lugar para a Razão ... A Razão é a função que enfatiza a novidade... Podemos entender a ordem, porque nos recônditos de nossa própria experiência existe um elemento contrastante, que é anárquico." (Whitehead, 1988, p. 11 e p. 17)

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Três estudos sobre história e educação matemática. É este o título deste trabalho de pesquisa. Gostaria de, nestas considerações preliminares, tecer alguns comentários a respeito das circunstâncias que me levaram a ele. Isto é, de buscar no tempo as articulações necessárias à composição de um conjunto de fatos que pudessem justificar a motivação e os esforços empreendidos para sua elaboração.

Inicialmente, o curso do professor Casemiro. Evolução da Educação Brasileira. Faculdade de Educação - UNICAMP. Primeiro semestre de 1979. Encontrei neles - no curso e no professor - a motivação necessária à minha primeira incursão histórica. Houve um produto. A evolução do ensino secundário público de matemática no Brasil. Uma monografia. Já na introdução, era o futuro a direcionar os passos incertos pelos labirintos do passado. O ensino da matemática continuava não andando bem em nosso país. Quais as razões desse fracasso reiterado? Que rumo deveremos tomar daqui para a frente? Deveremos buscar respostas e alternativas unicamente dentro dos estreitos limites da pedagogia da matemática, através da renovação de conteúdos e métodos? Eram as minhas perguntas. A história colocava-se, então, como o horizonte ilimitado e azul. Um receptáculo de respostas.

Enquanto receptáculo, aparecia-me como algo capaz de conter. Um continente, portanto. Um continente a ser explorado. Um território novo onde poder-se-ia demarcar as novas fronteiras da pedagogia da matemática. Sentimos a necessidade de desenvolver nossa análise à luz das transformações históricas da sociedade brasileira e do nosso sistema educacional em particular, evidenciando em cada etapa o significado social e político de nossas atitudes, de nossos métodos e do conteúdo daquilo que ensinamos. Isso também aparecia na introdução. O horizonte ilimitado e azul da história, o nosso continente, era o Brasil. E o Brasil era uma ilha. E de fato, era. A matemática era universal. A Educação Matemática também. Mas isso não importava. Era preciso romper com o que estava feito. Mal feito. Com o tudo igual. Com aquilo que havia se imposto e se instalado menos pela razão que pelo hábito. Romper com aquilo que o hábito havia tornado natural. Pensando nisso, hoje, lembro-me de Pascal. "Dizem que o hábito é uma segunda natureza. Quem sabe se a natureza não é apenas um primeiro hábito?". E também de Proust do "Em busca do tempo perdido". "Cessando, assim, a influência anestésica do hábito, punha-me então a pensar e a sentir: coisas tão tristes". Mas um professor de matemática, no Brasil, no início da década de 80, não tinha tempo de correr em busca do tempo perdido. O clima impelia-nos para o futuro. O futuro exigia mudanças. Ruptura com o passado. Um passado-fantasma de quase 20 anos de idade que era preciso exorcizar. A monografia do professor Casemiro ficou de lado. Não esquecida. Aguardando motivação para ser retomada.

Em vez dela surgiu o "Era uma vez... aquela matemática". Dissertação de mestrado. 1984. Mas, no "Era uma vez..." mal se falava de "aquela matemática". Ou melhor, falava-se mal e pouco daquela matemática. Daquela educação matemática que, para ser superada, ou mesmo desafiada, precisava, antes, ser compreendida. Mas preferi exorcizá-la a compreendê-la. Compreendê-la significava constituí-la no tempo. Isto é, contar a "nossa" história: a "dela", mas que é, ao mesmo tempo, a "minha" leitura dela.

As epígrafes introdutórias aos capítulos do "Era uma vez..." já anunciavam o tom do trabalho. De um lado, o Lenin materialista do "a dialética das coisas gerando a dialética das idéias" num momento em que parecia-me, não impossível, mas inconveniente, que a dialética das idéias gerasse também a dialética das coisas. O Lenin dinâmico que apontava para "a necessidade de expressar o movimento na lógica dos conceitos, num momento em que os nossos conceitos estavam involuntariamente enclausurados. De outro lado, um Lakatos "quasi-empírico" e liberal bombardeando o "céu formalista" da matemática com os projéteis impuros das "incertezas terrestres". Era a indignação político-epistemólogica diante das "teorias matemáticas-serafins", voluntariamente alheias às necessidades e apelos humanos. O Lefebvre do "Lógica formal/Lógica dialética" completava o tripé sobre o qual uma nova didática da matemática poderia construir-se. "A lógica serve a todas as classes (assim como o faz a língua). Todavia, ela só é 'neutra' enquanto é vazia; e na medida em que, implicando a possibilidade de pensar, não seja um pensamento." Do mesmo modo, "as matemáticas não são neutras quando entram na prática social, quando se prestam a determinadas pessoas e não a outras". O "Era uma vez..." foi isso. Uma reflexão voluntária sobre a possibilidade de uma didática da matemática do "por-se a serviço de". Que revelava uma matemática "do serve para". De uma matemática que opunha-se, conscientemente, àquela do Euclides-professor-em-Alexandria que mandou seu escravo dar três moedas a um estudante que, inocentemente, perguntou-lhe: para que serve o estudo da geometria? Esse era o lado pragmático do "Era uma vez..." Hoje, vejo-o menos como um voltar as costas ao passado que como um desvio que gerou desdobramentos no sentido de possibilitar a redação de vários textos didáticos de matemática para o ensino de 1º grau, ao longo de toda a década de 80. Um desvio que me chamou novamente a atenção para a importância da história.

Dois outros fatores, na década de 80, contribuíram para isso.

Um deles foi a participação no "grupo de história" organizado pelo professor Eduardo Sebastiani Ferreira. Os participantes? A Ema L.B. Prado, a Marineuza Gazetta, a Beatriz D'ambrosio, a Maria Queiroga, o Nelson, a Maria Ângela Miorim, o Mário, o Marcelo. Não sei se esqueci alguém. Traduzíamos. Líamos, Discutíamos. Por ali passaram o Struik, o Victor Byers, o Grattan-Guiness, o Philiph Jones, etc. Nova literatura. Novos problemas. Novas reflexões dialogando com as velhas. Por que estudar história da matemática? Em que se fundamenta o princípio genético? Por que a história da matemática deveria constituir-se numa "ferramenta" para o ensino? O curso ministrado pelo professor Eduardo na Faculdade de Educação foi também um momento importante. Possibilitou-me dar um passo além na reflexão que já vinha desenvolvendo sobre o ensino dos números irracionais com base na história. Um processo de ensino-aprendizagem no qual as dissonâncias cognitivas seriam provocadas pelas dissonâncias históricas. As "dissonâncias" me levaram a Léon Festinger e também a toda uma literatura sobre os conflitos cognitivos. Busca de fundamentação psicológica ora na psicologia social, ora na psicologia genética.

A epistemologia de G. Bachelard mostrou ser também um ponto de referência. Bachelard e o seu "axioma do Primado teórico do erro". O significado de uma idéia só nos é acessível na medida em que aparece sobre um fundo de erros mais profundos. Isto é, na medida em que essa idéia é recolocada no interior do campo das ilusões imediatas. "A verdade é o término de uma polêmica". "A experiência é precisamente a lembrança dos erros retificados". "O ser puro é um ser desiludido". Essas idéias estimulavam-me. Ainda que o axioma do Primado Teórico do erro não fizesse referência explícita à historicidade. Ainda que funcionasse mais como um guia metodológico que como um reforço à crença de que a história poderia constituir-se em fundamento ao ensino-aprendizagem. Mas como entender que "a verdade só adquire pleno sentido no término de uma polêmica", se não se recupera a polêmica em seu processo histórico? Como entender que "a experiência é a lembrança dos erros retificados" senão como apelo à retomada do processo histórico e dos "erros" da humanidade na busca de verdades cada vez mais objetivas? Como entender o "ser desiludido" senão como aquele que, contrariamente exposto à verdades já aparadas e infalíveis, aparou por si próprio as arestas através de um processo construtivo? Não foi por acaso que Bachelard afirmou que as intuições são muito úteis: elas servem para ser destruídas". Essa afirmação, quando transposta para o plano da metodologia do ensino da matemática, revestia-se de um enorme significado. Revelava o papel dialético que as intuições poderiam e deveriam desempenhar no processo de ensino-aprendizagem. Elas seriam, ao mesmo tempo, úteis e inúteis. Necessárias e desnecessárias. É através dessa dialética do evidenciar para destruir que se pode passar a um estágio cognitivo superior de apreensão de uma idéia. As intuições não são nem desnecessárias por aparecerem como ameaças aos padrões atuais de rigor e nem necessárias por serem inevitáveis. Elas são necessárias para poderem ser superadas. Pois só se pode tomar consciência do caráter não rigoroso dos raciocínios intuitivos na medida em que se toma consciência das contradições que eles engendram.

Paralelamente a isso, um outro fato, na década de 80, contribuiu para o surgimento dos "Três Estudos sobre História e Educação Matemática". A herança do professor Lafayette. Nós, professores da área de educação matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP, herdamos, após a aposentadoria do professor Lafayette, dois cursos da Licenciatura em Matemática. História da Ciência I e História da Ciência II. Hoje, Fundamentos da Metodologia do Ensino da Matemática I e II. As inúmeras discussões travadas entre Ângela e eu. Tentativas de reorganização dessas disciplinas. Os planos de cursos sucediam-se uns aos outros e revisavam-se mutuamente. Nunca nos sentíamos satisfeitos. Ainda não estamos. Essa herança obrigou-me, particularmente, a mergulhar de cabeça na história. A história não era mais um continente. Era um oceano. E os fatos eram os peixes. Não os peixes mortos expostos na banca do comerciante. Foi o que aprendi com E.H. Carr. "Os fatos assemelham-se aos peixes que nadam no oceano imenso e muitas vezes inacessíveis; o que o historiador apanhará depende em parte do acaso, mas sobretudo da região do oceano que tiver escolhido para a sua pesca e da isca de que se serve. Estes três fatores são, evidentemente, determinados pelo tipo de peixes que se propõe apanhar. Em geral, o historiador obterá o tipo de fatos que deseja encontrar". As leituras se sucediam. E Barraclough confirmava. "A história que nós lemos, embora baseada em fatos, não é, para dizer a verdade, absolutamente factual,mas uma série de julgamentos aceitos". Era a negação da história quebra-cabeça, cuja transparência e objetividade estariam asseguradas à medida que fôssemos completando as lacunas com novos fatos-peças. Era a recusa da concepção positivista da história - a história-compilação - que acreditava na possibilidade de se chegar àquilo que realmente aconteceu através do acúmulo máximo de fatos irrefutáveis e objetivos extraídos de documentos cuja autenticidade era inatacável. Essa era a história do século XIX. Eu estava no final do século XX. Ao mesmo tempo em que sentia a necessidade de conhecer a história, isto é, as diferentes reconstituições dos diferentes historiadores, sentia que também era necessário conhecer as filosofias da história. Mas eu era apenas um professor-pescador de posse de algumas histórias da matemática e da educação do tipo "fatos-peixes mortos" tentando fazer com que futuros professores de matemática, que desconheciam esses "fatos-peixes mortos" se banhassem no oceano vivo e em movimento da história.

A década de 80 foi também, portanto, um pouco dessa luta contra o ignorar para poder compartilhar. Luta que teve, que tem e que terá de ser travada por todo Prometeu que decida roubar aos deuses o segredo do fogo. É o que constitui a condição humana. Mas esse é só o primeiro momento dessa luta. Momento ao qual resolvi dar o nome de pesquisa. Mas os Prometeus não param por aí. A continuidade é a dimensão pedagógica da luta: o revelar aos homens os mistérios acumulados do fogo. Dessa imensa fogueira que constitui a aventura humana. Foi a compreensão da natureza dessa luta que me levou a acreditar que toda pedagogia é necessariamente histórica e que toda história é necessariamente pedagógica. Compreendi também que a Matemática não é parte dessa aventura humana do mesmo modo como uma caixa menor está contida numa maior. E se o fosse não seria a mais importante. Ela não é também a fonte que alimenta a chama. Ela é o espelho que teria a estranha propriedade de refletir a chama sob infinitos ângulos e de, portanto, invertê-la. De restituir à chama a capacidade e o poder de vê-la às avessas. De conhecer-se. É a autoconsciência da chama. Mathema, em grego, significa aprendizagem. Whitehead teve a genial percepção desse fato quando recorreu ao Hamlet de Shakespeare para situar a verdadeira posição da matemática na história do pensamento humano. Ela não seria o Hamlet do Hamlet. Mas a essencial, fascinante e louca Ofélia. "Tenho ouvido falar também,e muito, de como vos pintais. Deus vos deu uma face, e fabricais outra para vós; vós saracoteais, vós andais lentamente, vós falais imitando as crianças, vós apelidais as criaturas de Deus,e fazeis vossa malícia passar por ignorância". É a forma como Hamlet via Ofélia. Para Whitehead "o propósito da Matemática é a sublime loucura do espírito humano". Para Cantor, a essência da matemática é a sua liberdade. Daí, o esforço humano para libertar-se da realidade ter de, para sempre, pagar o alto preço do aniquilamento da razão. A morte da louca e sublime Ofélia é também a falência da razão. Daí, o carater realmente fantástico e fantasticamente real do discurso matemático. Isso tudo trouxe-me repentinamente à memória o quadro de Millais, "a morte de Ofélia", no qual o corpo sem vida e transparente de Ofélia, rodeado de flores ninfáceas, parece dissolver-se na água. Essa imagem me fez lembrar do poema "Lições sobre a água" de Antonio Gedeão:

"Este líquido é água.
Quando pura,
é inodora, insípida e incolor.
Reduzida a vapor,
sob tensão e a alta temperatura,
move os êmbolos das máquinas que, por isso,
se denominam máquinas de vapor.

É um *bom* dissolvente.
Embora com exceções, mas de um modo geral
dissolve tudo bem, ácido, bases e sais.
Congela a zero graus centesimais
e ferve a 100, quando à pressão normal.

Foi neste líquido que numa noite cálida de Verão,
sob um luar gomoso e branco de camélia,
apareceu a boiar o cadáver de Ofélia
com um nenúfar na mão.

A água que trouxe à tona o cadáver de Ofélia é a mesma água daquele imenso oceano de peixes que é a história,e por onde navegaram ousados e etéreos Prometeus, fictícios ou reais, expulsos do paraíso e condenados a viverem eternamente na consciência da humanidade. As "lições" da história são as lições do exílio. Lembrei-me de Victor Hugo. "Dois exilados - pai e filho - estão numa ilha deserta cumprindo longa pena. Numa manhã, sentados em frente à casa, o filho pergunta: 'Que pensas deste exílio?' 'Será longo...' responde o pai. 'E como ocupá-lo?' continua o jovem. O velho, sereno, diz apenas: 'Olharei o oceano e tu?' Faz-se um longo silêncio antes da resposta do jovem: 'Eu traduzirei Shakespeare'. Shakespeare: o oceano."

Estes Estudos são dedicados a todos os pescadores de todos os oceanos.

"Houve quem dissesse um dia que as gerações dos homens são como a das folhas, passam umas e vêm as outras.
Está na nossa mão desmentir o significado pessimista dessa frase.
Só figuram de folhas caídas, para uma geração, aquelas gerações anteriores cujo ideal de vida se concentrou egoisticamente em si e que não cuidaram de construir para o futuro pela resolução, em bases largas, dos problemas que lhes estavam postos, numa elevada compreensão do seu significado humano.
Essa concentração egoísta tem um nome - traição, e, se hoje trairmos, será esse o nosso destino - ser arredados com o pé, como se arreda um montão de folhas mortas.
E não queiramos que amanhã tenham de praticar para conosco esse gesto, impiedoso nas justiceiro, exatamente o mesmo que hoje nos vemos obrigados a fazer para com aquilo que, do passado, é obstáculo no nosso caminho."
(Caraça, 1978b, pp. XI-XV)

1. INTRODUÇÃO

1.1. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O PRIMEIRO ESTUDO

Certamente, o problema da relação entre a história, e mais particularmente a história da matemática, e a educação matemática não é novo. Já se pode afirmar que ele tem a sua própria história, tal a insistência com que é posto e recolocado desde o momento em que se teve uma clara consciência de sua importância. Os Estudos que ora apresentamos têm, na verdade, o propósito de explicitar e fundamentar três pontos de vista pessoais a respeito de três possíveis formas dessa relação se manifestar.

Uma primeira forma diz respeito às possibilidades de se recorrer à história como um recurso pedagógico adicional, isto é, como meio auxiliar, potencialmente rico, para se promover e repensar o ensino-aprendizagem da matemática.

Uma preocupação nesse sentido já se fazia presente na obra "Eléments de Geometrie" do matemático francês do século 18 - Alexis Claude Clairaut - publicada em 1741, com o objetivo de facilitar a tarefa daqueles que deveriam iniciar-se no estudo da geometria. O próprio Clairaut tinha consciência de que essa obra constituía-se em um curso preparatório aos Elementos de Euclides. Ao constatar, na introdução de sua obra, que a causa da dificuldade enfrentada pelos principiantes no início de um curso de geometria era a forma como esta ciência era ensinada, em fiel conformidade com a metodologia euclidiana, para a qual os alunos não tinham maturidade suficiente para poderem acompanhar, Clairaut propõe um outro caminho para o ensino da geometria baseado na história. Nesse sentido, acreditava que sua obra seguisse, em grandes traços, um caminho semelhante àquele percorrido pela humanidade na aquisição dos conceitos e leis matemáticas, isto é, semelhante à forma como o próprio Clairaut reconstituía esse caminho.

Por volta da segunda metade do século XX, a conhecida professora italiana Emma Castelnuovo, na introdução de sua obra "Geometria Intuitiva", declarava ter-se inspirado nos Eléments de Clairaut a fim de propor um novo caminho para o desenvolvimento do ensino da geometria na escola elementar, baseado também no desenvolvimento histórico dessa ciência. Faz, entretanto, um reparo às reflexões de Clairaut a fim de justificar a defesa daquilo que chama "uma visão mais ampla da história". Este "mais amplo" não deve, porém, ser entendido no sentido de adoção de uma concepção diferenciada da história em relação àquela defendida por Clairaut, mas no de uma ampliação cronológica da história da geometria para que pudesse abarcar também a pré-história humana, período em que a professora acredita terem-se originado as primeiras formas e noções geométricas. O caminho seguido por Castelnuovo, como ela própria o define, é "construtivo, não-descritivo ... com uma orientação não-euclidiana", isto é, no sentido de uma metodologia não-euclidiana, mas que "também mostra uma lógica verdadeiramente construtiva porque, ao seguí-la, refazemos o trabalho levado a cabo pela humanidade" (Castelnuovo, 1966, p. VII).

A forma como procura operacionalizar essa crença no plano pedagógico, mais particularmente no plano do ensino da geometria, é linear e mecanicista uma vez que faz corresponder, segundo uma ordem exclusivamente cronológica, determinados tópicos geométricos a determinados períodos de tempo e, desse modo, a hierarquia de tópicos assim estabelecida passa a ser vista como a seqüência pedagógica ideal.

Entre Clairaut e Castelnuovo e após Castelnuovo até os nossos dias é significativo o número de matemáticos e educadores matemáticos que recolocam esse problema da história como recurso pedagógico.

A utilização do chamado "princípio genético" para justificar o recorrer à história com tal objetivo talvez tenha sido a fundamentação ao mesmo tempo mais antiga e mais freqüente por parte desses matemáticos e educadores.

A obra de Clairaut atesta-nos, surpreendentemente, que esse "princípio genético" foi utilizado no campo da educação matemática antes mesmo da sua formulação explícita no fim do século XIX por parte de Ernst Heinrich Haeckel, como complemento biológico da teoria da evolução, sob o nome de "hipótese da recapitulação" ou "paralelismo ontofilogenético".

No campo da psicologia esse princípio revestiu-se de uma acepção particular: aplica-se à comparação do desenvolvimento do indivíduo com a evolução de sua própria espécie, das quais essa espécie poderia ser considerada uma linhagem.

Mas o mais surpreendente, entretanto, não é a antecipação, ainda que não-consciente, de Clairaut em relação à formulação explícita do princípio genético, mas o fato de uma fundamentação da "necessidade" de se recorrer à história com base nesse princípio continuar a ser utilizada até os dias de hoje, mesmo após as contundentes críticas que recebeu por parte de antropólogos, sociólogos, psicólogos e historiadores.

Nesse sentido, afirma Merani, (1972, p. 120), "para manter a tese da recapitulação no plano psicológico, é necessário aceitar o pressuposto metafísico de uma memória social hereditária como faz Jung, para sustentar a doutrina do inconsciente coletivo". Além disso, continua, "para ver repetidas nos estágios do desenvolvimento psicológico da criança as etapas psíquicas ancestrais da espécie, seria necessário supor uma evolução uniforme e contínua do gênero humano. Sabemos, por outro lado, que cada tipo social oferece uma origem irredutível e que os diversos tipos sociais (no plano psicológico equivale a dizer mentais) correspondem a linhas históricas que necessariamente nem sempre se encontram" (Merani, 1972, p. 120).

Ainda que o princípio genético, apesar de criticável, exerça o seu fascínio e se no campo da psicologia e psicopedagogia experimentais inexistam quaisquer tipos de apoio sobre os quais o princípio genético e suas múltiplas formas de interpretação possam se sustentar, isso não traz, necessariamente, como conseqüência a declaração da impotência da história para a educação matemática. Isso equivale a perguntar, por um lado, se mesmo com base em uma fundamentação precária, surgiram ou estão surgindo alternativas viáveis e interessantes de articulação entre história e educação matemática. Por outro lado, seria possível perguntar se existem outras formas de "justificar" o recorrer à história.

Essa primeira forma de relação entre história e

Educação Matemática - que acredito ser ao mesmo tempo a mais antiga e a mais difundida entre nós - constitui-se em objeto de investigação do primeiro Estudo que compõe este trabalho. O nosso esforço nesse primeiro Estudo dirige-se no sentido de resgatar a própria história dessa forma de relação, através do levantamento, detalhamento e análise dos diferentes papéis pedagógicos atribuídos à história por matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos que, de modo direto ou indireto, acabaram expressando suas posições em relação a essa questão.

As questões básicas que deverão orientar essa recuperação podem ser formuladas do seguinte modo: quais as razões pedagógicas apontadas pelas propostas desses diferentes autores para justificar o recorrer à história no plano do ensino-aprendizagem da matemática? Que conjunto de idéias essas propostas oferecem para o enfrentamento da questão referente ao como recorrer à história para se ensinar matemática?

As propostas que serão objeto de análise neste primeiro Estudo não são homogêneas. Algumas delas são textos (artigos extraídos de revistas internacionais ou nacionais, súmulas contidas em anais de encontros e congressos nacionais ou internacionais de Educação Matemática) escritos com o propósito explícito de estabelecer relações entre a história e o ensino-apredizagem da matemática. Outras (artigos, capítulos de livros, referências esparsas contidas nas obras de matemáticos, educadores, historiadores da matemática e educadores matemáticos) não têm o propósito explícito de estudar uma tal relação, mas é possível extrair delas consequências para o estudo dessa relação, ainda que essas consequências não sejam unívocas e nem necessariamente aquelas que o próprio autor extrairia, caso tivesse tido a intenção de fazê-lo.

Esse é um dos sentidos em que falamos de não-homogeneidade das propostas. O outro, que talvez decorra do primeiro, relaciona-se ao fato de que essas propostas não têm, todas, a mesma estrutura organizacional. Nesse sentido, algumas apresentam sugestões e justificativas bastante genéricas, mas não as operacionalizam; outras fazem exatamente o inverso. Em outras ainda, nas quais o discurso apresenta-se mais afastado da problemática ligada à prática pedagógica escolarizada, essas sugestões e justificativas podem, no máximo, ser inferidas. Em todo caso, a avaliação positiva ou negativa das propostas não está mecanicamente associada ao fato delas estarem mais ou menos operacionalizadas, mas ao fato de aproximarem-se ou afastarem-se daquilo que chamamos de referencial crítico de relacionamento entre história e ensino-aprendizagem da matemática, ao qual faremos referência no terceiro Estudo que compõe este trabalho.

Finalmente, partindo de um pressuposto ao nível da metodologia da pesquisa histórica, de que o estudo de um empreendimento na história é mais completo (e talvez mais objetivo) quando se leva em consideração não apenas os argumentos das pessoas que acreditaram e/ou acreditam na sua validade e necessidade, mas também daquelas que apresentaram ou apresentam restrições e críticas no sentido de desacreditá-lo, procuramos também levantar e analisar aquelas "propostas" (no sentido negativo) que apresentam obstáculos e resistências para se levar adiante um empreendimento dessa natureza.

1.2. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O SEGUNDO ESTUDO

Mas não se pode compreender suficientemente bem ou pelo menos não se pode avaliar de forma conseqüente a importância da história na educação matemática sem que se resgate, de algum modo, a educação matemática na história. Essa é uma outra forma em que se pode manifestar o problema da relação entre história e educação matemática, sobre a qual focalizaremos a nossa atenção no segundo dos três Estudos que constituem o nosso trabalho.

Trata-se agora de recorrer à história e à filosofia da matemática e à história e à filosofia da educação na tentativa de reconstituir alguns aspectos da história e da filosofia da educação matemática.

Não compartilhamos, entretanto, da ilusão positivista de reconstituir esta história tal como ela realmente aconteceu, o que significa afirmar que essa reconstituição não se faz sem pressupostos de naturezas diversas, isto é, que toda reconstituição é, na verdade, uma nova constituição, uma nova leitura.

Nesse aspecto, filiamo-nos ao ponto de vista de G. Duby para quem "o historiador, na medida em que só pode chegar a uma parte da realidade, preenche forçosamente com aquilo que imagina os vazios que se lhe apresenta. A necessidade de preencher provisoriamente os vazios leva-nos, sem dúvida, a sublinhar a relatividade de qualquer construção histórica. De fato, a exigência de coerência interna do discurso e a preocupação de administração da prova provocam o constante deslocamento da fronteira que separa a ciência da ficção" (apud Léon, 1983, p.

35).

Mas é preciso delimitar o nosso empreendimento através da consideração de que aquilo que pretendemos fazer no segundo Estudo é apenas uma pequena parte de um programa mais amplo de pesquisa que, devido a sua amplitude, apresenta-se como uma perspectiva futura de trabalho que se coloca em continuidade com esse segundo Estudo, e cujas características básicas serão delineadas a seguir.

Uma primeira característica desse programa mais amplo de pesquisa é que ele não tem a pretensão de reconstituir a educação matemática na história num grau de amplitude e detalhamento eruditos que estaria além de nossos esforços e interesses, mas, fundamentalmente, aqueles distintos (mas nem sempre radicalmente distintos) conjuntos de idéias coerentemente articuladas que, irresistivelmente (e irreversivelmente?) acabaram por condicionar a nossa forma de pensar a prática educativa em matemática e de organizá-la no sentido de operacionalizar os ideais a ela subjacentes. Nesse programa, designaremos esses conjuntos de idéias coerentemente articuladas de "paradigmas", palavra que, a partir do "Estrutura das Revoluções Científicas" de Thomas S. Kuhn passou a compor, não sem alguns debates, o dicionário de termos técnicos utilizados por filósofos, sociólogos e historiadores da ciência.

Margaret Masterman, por exemplo, apontou 21 sentidos diferentes que Kuhn atribui à palavra "paradigma" em seu "The Structure of Scientific Revolutions", ainda que nem todos esses sentidos sejam incompatíveis entre si. Masterman classifica esses 21 sentidos em três grupos: os "paradigmas metafísicos" ou "metaparadigmas" onde o sentido de "paradigma" aproxima-se mais de uma entidade metafísica do que científica; os "paradigmas sociológicos" onde "paradigma" adquire o sentido de "conjunto de hábitos científicos tanto intelectuais, verbais, comportamentais, quanto mecânicos e tecnológicos" e os "paradigmas de artefato" ou "paradigmas de construção" onde "paradigma" adquire os sentidos de "verdadeiro manual ou obra clássica", "algo fornecedor de instrumentos" (Masterman, 1973, pp. 72-108).

No posfácio acrescido em 1969 por Kuhn à sua obra, ele afirma, em resposta a Masterman, que as diferenças encontradas por ela em relação aos sentidos do termo "paradigma" devem-se a "incogruências estilísticas" que poderiam ser eliminadas com relativa facilidade (cf. Kuhn, 1982, p. 226). Segundo Kuhn, uma vez eliminadas essas incogruências, restariam dois sentidos distintos da palavra "paradigma": um sentido amplo e propriamente sociológico, pelo qual "paradigma" designaria o conjunto de crenças, valores, técnicas, etc. partilhados pelos membros de uma comunidade determinada, e um sentido restrito, porém mais profundo, pelo qual "paradigma" designaria "realizações passadas dotadas de natureza exemplar" (Kuhn, 1982, p. 218).

Em nosso programa de pesquisa, a palavra "paradigma" reveste-se desses dois sentidos assinalados por Kuhn, referidos, é claro, à educação matemática.

Uma segunda característica desse programa é que, nele, falaremos dos paradigmas de educação matemática numa certa ordem, e uma primeira advertência deve ser feita no sentido de que não se retire, como conseqüência dessa forma de exposição adotada, a conclusão de que um paradigma que sucede a outro na exposição tenha definitivamente deposto o anterior no sentido de fazer cessar as suas influências sobre a forma de pensar e se praticar a educação matemática. Ao contrário, acreditamos que um paradigma nunca depõe totalmente o anterior, embora possa deter uma certa hegemonia em relação ao anterior (ainda que seja bastante difícil localizar em que âmbitos e com que intensidade essa hegemonia se exerce); por outro lado, o surgimento do novo paradigma faz com que o anterior passe por reformulações, por transformações internas a fim de ajustar-se ou firmar-se, quer para diferenciar-se do novo, quer para identificar-se com ele, o que faz com que tenha sentido falar-se em fusão de paradigmas. Em decorrência dessa primeira advertência, seria mais adequado se falar em convivência quase sempre não pacífica e diferenciada de paradigmas diversos[1] naqueles setores que têm tempo, acesso e recursos materiais e intelectuais para pensarem e produzirem educação matemática em sua totalidade provisória, e falar em convivência quase sempre difusa de paradigmas entre aqueles setores mais amplos envolvidos quer com a difusão, quer com a captação dessa produção. Uma segunda advertência que devemos fazer em virtude dessa forma de exposição, é que um paradigma que sucede a outro não deve ser encarado como superior ao anterior. Nesse sentido, não é adequado, no nosso modo de ver, encarar a "sucessão" de paradigmas sendo presidida pela noção de progresso.

Tendo em vista que o objeto de nossa investigação nesse programa amplo de pesquisa é o modo como se constituíram os

---

[1] Falamos de convivência não-pacífica e diferenciada de paradigmas diversos. Na terminologia de Kuhn, porém, isso significa afirmar a existência de pontos de vista incomensuráveis relativos a uma mesma situação. Esta é a razão pela qual, segundo ele, "escolas guiadas por paradigmas diferentes estão sempre em ligeiro desacordo" (Kuhn, 1982, p. 146).

paradigmas de educação matemática na história, a questão que naturalmente se coloca é a seguinte: o que viria a constituir um paradigma em educação matemática ou, em outras palavras, em função de que critérios poderíamos afirmar que estaríamos em presença de paradigmas distintos?

É claro que essa questão não admite uma única resposta uma vez que essas respostas seriam, inevitavelmente, relativizadas em função das diferentes perspectivas teóricas e/ou práticas que estariam na base de um tal estudo, em função dos pontos de vista dos diferentes investigadores, das diferentes formas de se penetrar no problema, etc. Mas essa variedade de respostas não se constitui em obstáculo para o estudo do problema. Ao contrário, aponta para a necessidade de explicitação dos critérios de constituição dos paradigmas e de justificação dessa escolha.

Nesse sentido, no nosso modo de entender, os critérios constitutivos de paradigmas de educação matemática situam-se em quatro dimensões que, necessariamente, estão subjacentes a toda prática pedagógica em matemática:

1) A dimensão epistemológica: concepção de matemática.
2) A dimensão teleológico-axiológica: concepção dos fins da educação matemática e dos valores a serem por ela promovidos.
3) A dimensão psicológica: concepção da forma como se dá o acesso ao conhecimento matemático por parte de quem aprende, isto é, concepção da relação sujeito-objeto de conhecimento, apreendida em seu aspecto psicológico.
4) A dimensão didático-metodológica: concepção do método de ensino da matemática.

Será com o olhar orientado por essas quatro categorias que haveremos de interrogar o passado e o presente na tentativa de constituição dos paradigmas.

A possibilidade de percepção de respostas históricas diferenciadas associadas a essas categorias obriga-nos a efetuar um detalhamento no interior de cada uma delas a fim de melhor caracterizá-las.

No nosso modo de entender, a caracterização da concepção de matemática subjacente a um paradigma deveria constituir-se através de respostas a questões como as seguintes:

1) Qual é o status do conhecimento matemático?[2]

2) Qual é o objeto da matemática?[3]

3) Em que sentido pode-se falar da existência de seres matemáticos?

4) O conhecimento matemático é um reflexo fiel ou mesmo aproximado das leis do mundo físico, ainda que esse reflexo não

---

[2] Algumas respostas possíveis a essa questão seriam:
1) O conhecimento matemático sempre esteve pronto e acabado e vai sendo gradativamente descoberto, isto é, é um conhecimento ahistórico (no sentido de não haver influência da história humana na sua constitução e no julgamento do seu valor cognitivo), atemporal (no sentido da variável "tempo" não interferir no valor cognitivo desse conhecimento, tornando-o obsoleto e/ou retificável) e pré-existente (no sentido de sua existência estar assegurada de uma vez por todas, independentemente de condicionamentos de qualquer natureza).
2) O conhecimento matemático é uma invenção humana condicionada apenas pela forma da própria mente humana operar (postulando-se, evidentemente, a existência de uma tal forma e talvez, a de um determinismo de caráter biológico).
3) O conhecimento matemático é uma construção humana condicionada unicamente por fatores sociais, isto é, externos a toda atividade matemática propriamente dita (postulando-se, é claro, uma dicotomia internalista-externalista na constituição do conhecimento matemático).

[3] Algumas respostas possíveis a essa questão seriam:
1) São os objetos singulares do mundo físico.
2) São entidades imaginárias, fictícias, criadas pela mente.
3) São entidades produzidas para responder aos problemas colocados pelos diversos serores da atividade humana no sentido de produzir e assegurar a existência humana.
4) São entidades ideais geradas por operações mentais como abstração e generalização.

seja total ou imediato?[4]

5) O conhecimento matemático é falível (no sentido de que produz verdades retificáveis) ou infalível?[5]

6) Existem várias matemáticas ou uma única? O que garantiria a unidade da matemática? É aceitável a postulação da unidade da matemática com base no ideal de sistematização dedutiva?

7) O que garante a aceitação dos resultados obtidos pela matemática?[6]

8) O conhecimento matemático é universal ("objetivo" num primeiro sentido) isto é, válido para qualquer pessoa, de qualquer contexto social?

9) O conhecimento matemático é "neutro" (objetivo num segundo sentido), isto é, o seu *valor cognitivo* independe do ponto

---

[4] Essa questão nos remeteria à necessidade de um posicionamento pela existência ou não de uma especificidade da matemática em relação às ciências naturais que passaria, é claro, pela especificação dos diferentes tipos possíveis de relação. Uma resposta afirmativa a ela significaria que a matemática compartilharia com as ciências naturais o fato de ter uma parte ou aspectos do mundo físico a explicar. Uma questão análoga a essa poderia ser também levantada em relação às ciências humanas e sociais.

[5] A opção pela infalibilidade do conhecimento matemático nos remeteria ainda à necessidade de decidirmos por uma infalibilidade absoluta ou relativa. No primeiro caso, estaríamos afirmando que a matemática produz verdades absolutas e/ou eternas e/ou necessárias, o que nos levaria à necessidade de explicar o que imporia ao conhecimento matemático esse caráter de necessidade e de eternidade. A evidência? Que tipo de evidência (experimental, formal, mística, etc.)? No segundo caso, estaríamos afirmando que a matemática produz verdades relativas, mas necessárias no interior de um certo sistema.
A opção pela falibilidade do conhecimento matemático nos obrigaria a apontar os fatores que estariam na base da revisão do conhecimento já estabelecido e a decidir pela existência ou não de um limite para essa revisão.

[6] Algumas respostas possíveis a essa questão seriam:
1) O indutivismo metodológico (isto é, pelo fato desses resultados poderem ser provados com base em uma lógica indutiva, ainda que a indução não seja a "lógica" dos processos de descoberta matemática.
2) O dedutivismo metodológico (isto é, pelo fato desses resultados poderem ser provados dedutivamente, ainda que a dedução não seja a "lógica" dos processos de descoberta matemática).
3) O convencionalismo (isto é, pelo fato desses resultados estarem baseados em uma sintaxe comum a todas as línguas).
4) A tradição e o hábito.
5) O consenso advindo da comunidade matemática que transforma o processo subjetivo de criação individual no processo objetivo de aceitação compartilhada (matemática institucionalizada).

de vista pessoal ou de classe?

10) O conhecimento matemático é "neutro" (num segundo sentido), isto é, uma vez produzido pode ser utilizado para mistificar a realidade, ocultar a verdade ou para atender os interesses de uma minoria, ou ainda, para o atingimento de objetivos e execução de programas eticamente reprováveis (como por exemplo: promover a desigualdade, a injustiça, a exploração, a produção de meios de destruição da natureza, da vida, etc)? Poderiam esses mesmos fatores estar na base da própria produção do conhecimento matemático?

Para a caracterização da dimensão teleológico-axiológica da educação matemática subjacente a um determinado paradigma pode-se recorrer a questões do tipo:

1) Quais os fins que a educação matemática deveria procurar atingir? Que valores promover e quais reprimir?

2) Esses fins e valores são eternos e imutáveis ou variam de época para época e de contexto para contexto? Se variam, em função de que variam?

3) Esses fins e valores são universais, no sentido de serem igualmente "bons" para todos os seres humanos? Para todas as pessoas de um mesmo contexto? Para todas as classes sociais? Ou serão sempre contestáveis por alguns? No caso de não serem universais, seria legítimo buscar o "acordo social" através deles?

4) A quem compete o estabelecimento dos fins e valores a serem alcançados através da educação matemática? Ao Estado? Aos administradores escolares? Aos professores? Aos alunos? À comunidade escolar? À comunidade dos matemáticos?

As questões caracterizadoras da dimensão psicológica dos paradigmas de educação matemática são do tipo: como o aprendiz adquire o conhecimento matemático? Esse conhecimento é inato? É construído? Se construído, que fatores condicionam essa construção? Essa construção é solitária ou interativa? Se interativa, é a interação com o mundo físico, social ou ambos que propicia essa construção? Que fatores intervêm nesse processo construtivo e como ele se dá? Essa construção é meramente cumulativa ou passa por mudanças qualitativas? Essa construção é necessariamente progressiva? É estrutural? Que relação existe (se é que existe) entre o processo de aquisição do conhecimento matemático e o processo de aquisição da linguagem? Entre esse processo e a história? Entre esse processo e o contexto social?...

Finalmente, algumas questões que poderiam, a nosso ver, caracterizar a dimensão didático-metodológica subjacente aos paradigmas de educação matemática seriam:

1) Como se processa a relação aluno-conhecimento matemático-professor na aquisição de tal conhecimento? Qual é o papel do aluno? E do professor?
2) Como se aprende matemática? Pode-se ensinar matemática? Ensinar e aprender matemática é diferente de ensinar e aprender outro conhecimento qualquer?
3) Qual o papel dos conteúdos no ensino-aprendizagem da matemática? Em função de que critérios eles devem ser selecionados? Quem deveria selecioná-los?
4) Quais métodos são mais adequados para o desenvolvimento desses conteúdos?
5) Que relação existe (se é que deve existir) entre fins,

valores, conteúdos e métodos?

6) Os métodos de ensino-aprendizagem são "neutros" (no sentido de não veicularem valores, determinadas formas de comportamentos, determinados hábitos mentais, determinadas crenças, determinadas atitudes em relação à produção e ao desenvolvimento do conhecimento matemático, etc.)?

7) Há relação entre o processo histórico de produção do conhecimento matemático e o processo de ensino-aprendizagem?

É claro que, para que um paradigma se constitua, não é possível e nem necessário que responda a todas as questões levantadas em cada uma das dimensões, isto é, não é preciso que explique todos os fatos e problemas com os quais pode ser confrontado.

É preciso porém, que pelo menos inicialmente, exista, no interior do paradigma, um esforço "sincero" no sentido de apontar para um esboço de respostas ou de pelo menos mostrar-se como "promessa de sucesso" como afirmaria Kuhn. É esse aspecto "sincero" do paradigma que lhe garante integridade e aparência de racionalidade. Mas esse aspecto, por si só, não garantiria a constituição de um paradigma. É necessário ainda que, por um lado, ele revele o seu poder de fascinação, isto é, o seu caráter persuasivo e, por outro, o seu caráter aberto e plástico. Sem persuasão, isto é, na ausência de uma capacidade interna para a atração de um grupo duradouro de adeptos, um paradigma, fechar-se-ia em si mesmo e não teria chances de difundir-se. Sem plasticidade e elasticidade, isto é, na ausência de uma capacidade de mostrar-se suficientemente aberto, tornando possível o levantamento de novos problemas ou de novas respostas aos problemas "já resolvidos" - o que possibilitaria que novos partidários pudessem dar continuidade ao desenvolvimento de sua problemática interna - um paradigma poderia, no máximo, ter vivido mas não sobrevivido. Não tendo sobrevivido não teria tido história. Obedecidas tais condições, são, portanto, as respostas diferenciadas a pelo menos algumas das questões referentes a cada uma das quatro dimensões a que nos referimos que constituem os paradigmas. Entretanto, para estarmos em presença de paradigmas distintos, não é necessário que haja respostas diferenciadas em todas as quatro dimensões. Partimos do pressuposto de que é suficiente a existência de respostas diferenciadas a pelo menos algumas questões de pelo menos uma das dimensões, com a condição de que tal alteração tenha tido ressonâncias na comunidade de educadores e, mais particularmente, na comunidade de educadores matemáticos, isto é, entre as pessoas que pesquisam e/ou realizam a educação matemática em qualquer nível.

Com base nesse referencial teórico e na leitura particular que fizemos do "material de base", isto é, livros, teses e artigos de história e filosofia da matemática e de história e filosofia da educação e de manuais didáticos utilizados no ensino da matemática, identificamos 8 paradigmas, sendo os quatro últimos aqueles que despertam maior interesse na atualidade:

- Paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico
- Paradigma do Formalismo Pedagógico Enciclopédico
- Paradigma do Ativismo Pedagógico
- Paradigma do Formalismo Pedagógico Estrutural
- Paradigma do Falibilismo Pedagógico

- Paradigma do Construtivismo Pedagógico
- Paradigma Cultural
- Paradigma Histórico.

Embora em nosso programa amplo de pesquisa tenhamos o propósito de estudar todos esses paradigmas, no segundo Estudo que compõe este trabalho nossa atenção estará voltada apenas para a constituição e caracterização do paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico.

1.3. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O TERCEIRO ESTUDO

Finalmente, no terceiro e último Estudo temos o propósito de apresentar e discutir um estudo histórico-pedagógico-temático sobre os números irracionais. Trata-se, agora, de mostrar como a história pode operar em um nível temático bastante específico da matemática e revelar todo o seu potencial cultural, humano e educativo mais amplo. É o que estamos caracterizando como um terceiro modo da história relacionar-se com a Educação Matemática.

Acreditamos ser importante a inclusão desse último Estudo uma vez que a ausência de estudos histórico-pedagógico-temáticos no campo da educação matemática, que se apresentem de forma relativamente operacionalizados, tem reforçado apenas a realização e perpetuação de debates relativos aos modos de se recorrer à história com fins pedagógicos, que permanecem ao nível de generalidades abstratas e, conseqüentemente, não trazem à prática pedagógica uma real contribuição.

Nesse sentido, um estudo histórico-pedagógico-temático deve ser, antes de mais nada, uma reconstituição histórica do tema tendo em vista o seu ensino-aprendizagem em um contexto definido. Deve ser também uma reconstituição histórica de temas historicamente afins, isto é, que mostrem estar em íntima conexão com o desenvolvimento do tema central. No caso do tema central "números irracionais", alguns temas historicamente afins são, por exemplo, o teorema de Pitágoras, o problema da incomensurabilidade, o método indireto de prova, etc. Mas um estudo histórico-pedagógico-temático não se esgota nisso. Deve apresentar também pressupostos e justificativas de caráter histórico, psicológico, epistemológico e socio-político que possam fundamentar um projeto pedagógico dessa natureza, isto é, de um projeto que vise à articulação da história e do ensino-aprendizagem da matemática.

Poderia parecer questionável que um empreendimento dessa natureza pudesse ou devesse ser tarefa de educadores matemáticos e não de historiadores, matemáticos ou de historiadores da matemática.

Embora o desenvolvimento de estudos relativos a esse empreendimento de natureza interdisciplinar não esteja fechado a quaisquer desses profissionais, acreditamos que o educador matemático, pelo fato de ter o seu olhar orientado, em última instância, ao fato pedagógico, reúna melhores condições iniciais necessárias, ainda que não suficientes, para o desempenho efetivo de atividades de pesquisa que visem a tal propósito.

Além disso, como assinala Zúñiga (1987, p. 14), "o desenvolvimento de uma maior intervenção da história da matemática no seu ensino revela a existência de modificações na percepção que se tem da natureza da matemática ... É também previsível que seja precisamente no ensino da matemática onde se busque fazer essas modificações. A educação coloca de uma maneira prática a maioria dos problemas epistemológicos centrais e exige soluções concretas (que serão sempre sujeitas à crítica, ao erro e à correção). A Educação converte-se em um especial fator dinâmico no desenvolvimento das reflexões epistemológicas e filosóficas em geral. Não seria estranho, então, pensar nas comunidades de educadores matemáticos como o meio social mais adequado para construir importantes modificações na percepção da natureza da matemática e o melhor instrumento humano para avançar a compreensão e desenvolvimento renovador da matemática".

1.4. RELEVÂNCIA DA PESQUISA E CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS

Atualmente não são poucas as dúvidas e as hesitações que se apresentam aos professores com relação à tomada de decisões nos diferentes momentos da educação matemática escolarizada. Qual o significado e a importância da educação matemática na formação do cidadão? Quais fins pretendem-se alcançar? Que valores promover? Que conteúdos selecionar? As hesitações não param por aí. Elas situam-se também nos domínios dos métodos e da avaliação, na busca do significado e do sentido, isto é, da relevância social e do significado político de todo o processo educativo.

Nesse sentido, acreditamos que a pesquisa que estamos empreendendo com os seus desdobramentos em nosso programa mais amplo, possa lançar alguma luz e trazer alguma contribuição no sentido de compreender a situação atual da educação matemática através da interrogação e do exame de seu passado. E não só isso, mas que também possa mostrar como esse passado está presente mais do que nunca na situação atual e que não será por mera negação mecânica dele que haveremos de encontrar respostas viáveis e significativas, mas através da sua compreensão e domínio.

Mas a importância da história não se restringe a isso. Se ela é, por um lado, instrumento de compreensão e avaliação acreditamos também que ela possa ser instrumento de superação e re-orientação das formas de ação, isto é, de transformação. É para essa provável e modesta contribuição que o primeiro e terceiro Estudos apontam.

1º ESTUDO

A HISTÓRIA E O ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

"Pai, diga-me lá, para que serve a história?"
Era assim que um rapazinho meu parente próximo interrogava, há poucos anos, um pai historiador... O problema que levanta, com a perturbante retitude dessa idade implacável, é nada mais nada menos do que o da legitimidade da história.
(MARC BLOCH, Apologie pour l'histoire ou Métier d'historien)

"História é besteira, disse Henry Ford, cujo próprio modelo T já é história".
(D.J. STRUIK, Por que estudar história da Matemática?)

1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Ao longo das páginas que compõem este Estudo tentaremos levantar, detalhar e analisar os diferentes papéis pedagógicos atribuídos à história por matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos que, de modo direto ou indireto, acabaram expressando suas posições em relação a essa questão. Esse levantamento não tem a pretensão de ser exaustivo. O seu alcance acha-se delimitado pela quantidade e natureza dos textos que conseguimos recolher ao longo dos anos em que nossa pesquisa transcorreu.

É útil esclarecer também que acabamos desistindo de nossa intenção inicial de categorizar essas posições, tal a diversidade com que elas se manifestaram após a leitura analítica do material de base, constituído por artigos presentes em revistas nacionais ou internacionais, súmulas contidas em anais de encontros e congressos nacionais ou internacionais de Educação Matemática, capítulos de livros e referências esparsas contidas nas obras de matemáticos, educadores, historiadores da matemática e educadores matemáticos. Devido a isso, acabamos optando por uma exposição personalizada dessas posições, que procurasse refletir o mais fielmente possível essa diversidade. É claro que, devido a essa opção, e tendo em vista a nossa intenção de zelar pela quebra de monotonia do ensaio, alguns autores - mesmo dentre aqueles que constituíam o nosso material de base - foram voluntariamente excluídos. Tomamos o cuidado, entretanto, para que, por um lado, essa exclusão pessoal não implicasse a eliminação de um ponto de vista diferenciado ou original em relação à questão estudada e, por outro, que essa exclusão não tivesse por base critérios que viessem a privilegiar apenas os "apologistas" da história. É claro que esse cuidado não elimina totalmente a subjetividade da seleção, que deverá tornar-se mais aguda por ocasião das inferências que acabamos efetuando e do tratamento analítico a que submetemos o material de base.

2. FELIX KLEIN E A HISTÓRIA COMO GUIA METODOLÓGICO

O posicionamento de Felix Klein (1849-1925) em relação à importância da história da matemática para o ensino dessa disciplina, encontra-se no volume 1 de sua obra "Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint", na página 268 da tradução inglesa de 1945. A primeira edição (em alemão) desta obra apareceu em 1908.

No prefácio à primeira edição alemã desta obra, Klein assim se expressava em relação ao seu objetivo: "O novo volume que ofereço ao público matemático, e especialmente aos professores de matemática de nossas escolas secundárias, deve ser encarado como uma primeira continuação das leituras 'Uber den mathematischen Unterricht an den hoheren Schulen' ('Sobre o Ensino de Matemática nas Escolas Secundárias'), em particular de 'Die Organisation des mathematischen Unterrichts' ('A Organização da Instrução Matemática') de Schimmack e minha, que foram publicadas no ano passado por Teubner. Nesta época nossa preocupação centrava-se nos diferentes modos pelos quais o problema da instrução podia ser apresentado aos matemáticos. Nesta obra, minha preocupação é com os desenvolvimentos dos conteúdos da matéria de instrução".

Mas por que razão Klein haveria de falar sobre história, ainda que de forma marginal, numa obra dessa natureza, que buscava trabalhar especificamente o conteúdo matemático? Ele próprio esclarece isso nesse mesmo prefácio: "Finalmente, em relação ao método de apresentação que se segue, será suficiente dizer que eu procurei aqui, como sempre, combinar a intuição geométrica com a precisão das fórmulas aritméticas, e que deu-me um prazer especial seguir o desenvolvimento histórico de várias teorias a fim de compreender as marcantes diferenças nos métodos de apresentação quando confrontados com os demais métodos presentes na instrução atual" (Klein, 1945, prefácio).

Essa última passagem do prefácio da obra citada é particularmente esclarecedora uma vez que, através dela, percebe-se que, para Klein, a história só intervem no exato momento em que ele se propõe a dirigir ao leitor algumas palavras sobre o método de apresentação dos conteúdos. É nesse momento que declara ter-se deixado guiar por um indefinido "prazer especial" em confrontar o método de produção das teorias matemáticas, tal qual pode ser inferido pela análise do desenvolvimento histórico das mesmas, com os métodos por meio dos quais essas mesmas teorias são pedagogicamente apresentadas.

A percepção e confirmação da existência dessa dissonância entre método de produção e métodos de transposição didática dos conteúdos matemáticos, leva Klein à seguinte tentativa de superação: "Ao concluir esta discussão sobre a teoria dos conjuntos, devemos novamente colocar a questão que acompanha as nossas palestras: Quanto disso se poderá usar nas escolas? Do ponto de vista da pedagogia matemática, temos naturalmente que protestar contra a apresentação de tais coisas abstratas e difíceis muito cedo aos alunos. Com o fim de dar uma expressão precisa à minha própria opinião sobre esse ponto, gostaria de apresentar a lei biogenética fundamental, segundo a qual o indivíduo, em seu desenvolvimento, atravessa, de forma abreviada, todas as fases do desenvolvimento da espécie. Essas idéias tornaram-se hoje em dia parte e parcela da cultura de todos. Levando em conta a capacidade natural da juventude, o ensino deveria guiá-la para idéias mais elevadas e, finalmente, para formulações mais abstratas, e, ao fazê-lo, deveria seguir o mesmo caminho ao longo do qual a raça humana tem buscado desenvolver o conhecimento, desde seu estado original e simples até às formas mais elevadas. É necessário formular esse princípio frequentemente, pois sempre existem pessoas que, à maneira dos eruditos medievais, começam sua instrução com as idéias mais gerais, defendendo este método como o 'único método científico'. E, ainda assim, esta justificativa se baseia em tudo, menos na verdade. Instruir cientificamente só pode significar induzir a pessoa a pensar cientificamente, mas de forma alguma confrontá-la, desde o começo, com uma sistemática fria e cientificamente aprimorada.

Um obstáculo natural na disseminação desse método natural e verdadeiramente científico de instrução, é a falta de conhecimento histórico que quase sempre se faz sentir. A fim de combater isto, insisti em introduzir observações históricas em minha apresentação. Ao fazê-lo, acredito que deixei claro o modo como todas as idéias matemáticas surgiram lentamente e o modo como elas, quase sempre, apareceram primeiro em forma um tanto preliminar e, somente depois de longo desenvolvimento, se cristalizaram e adquiriram a forma definitiva tão familiar na apresentação sistemática.

É o meu mais sincero desejo que esse conhecimento possa exercer uma influência duradoura sobre o caráter de seu próprio ensino" (Klein, 1945, prefácio).

As observações de Klein nos levam a concluir que a dimensão pedagógica da história aparece-lhe vinculada à questão da seleção de métodos adequados de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Além disso, o modo como tenta superar a dissonância entre método histórico de produção do conhecimento e métodos de ensino-aprendizagem, consiste em atribuir ao primeiro a qualidade de "método natural e verdadeiramente científico de instrução". Isso porque, o "método medieval" subjacente a todo tipo de formalismo pedagógico em educação matemática é incapaz de traduzir-se em instrumento que possa verdadeiramente promover e estimular o pensamento científico. Apenas o método histórico seria potencialmente adequado para se atingir o ideal pedagógico de levar a juventude a "pensar cientificamente", o que se traduz no objeto e no objetivo de toda educação verdadeiramente científica.

O ponto de vista de Klein choca-se, portanto, ao dos "pedabobos" - termo criado por Jorge Dias de Deus para referir-se àqueles que "tentam criar uma oposição entre ensino e investigação, como se o melhor ensino não fosse a prática da investigação científica" (Deus, 1986, pp. 172-73). Que método pedagógico, senão o histórico, teria o poder de melhor revelar essa prática da investigação matemática?

Entretanto, como se não lhe bastasse ter tido a percepção de caracterizar a cientificidade do método de ensino em função da legitimidade dos ideais subjacentes ao ato pedagógico, Klein, não conseguindo escapar à avassaladora influência positivista de finais do século XIX, sente a necessidade de ir além e "fundamentar" o seu ponto de vista recorrendo ao princípio genético.

3. HENRI POINCARÉ E A HISTÓRIA COMO INSTRUMENTO DE CONSCIENTICAÇÃO EPISTEMOLÓGICA

Na obra do eminente matemático e filósofo Henri Poincaré (1854-1912) pode-se também encontrar uma rápida referência ao papel da história no ensino da matemática. Ela aparece no livro "Science et Méthode", publicado em 1908, que reune diversos estudos que se relacionam mais ou menos diretamente com questões de metodologia científica. Mais particularmente, essa referência aparece no Capítulo II do livro citado, cujo título é "Les Définitions Mathématiques et L'enseignement". A questão central sobre a qual Poincaré busca refletir nesse capítulo é: por que as crianças frequentemente não conseguem compreender aquelas definições que satisfazem os matemáticos?

Para que tal questão possa ser tratada satisfatoriamente, Poincaré é obrigado a considerar outras que lhe são vizinhas, tais como o papel dos padrões atualizados de rigor e da intuição no ensino da matemática e o significado da compreensão da demonstração de um teorema. E é exatamente nesse momento que a história intervem. O recorrer à história é, para ele, mais uma concessão necessária que o professor deve fazer ao aluno devido à sua imaturidade psicológica e, nesse sentido, é quase inevitável que se sacrifiquem os padrões atualizados de rigor, não para abandoná-los, mas para que, no momento adequado, possam ser recuperados de forma consciente por parte do aprendiz. De fato, a seguinte passagem parece apoiar esse nosso ponto de vista: "Sem dúvida, é duro para um professor ensinar aquilo que não lhe satisfaz inteiramente; mas a satisfação do professor não é a única coisa que deve ser levada em consideração no ensino; deve-se também preocupar com o espírito do aluno e com aquilo que se quer que ele se torne... Mais tarde, quando o espírito do aluno, familiarizado com o raciocínio matemático, estiver amadurecido, as dúvidas nascerão por si só e então a demonstração será bem vinda. Ela será um estímulo às novidades, e as questões se colocarão sucessivamente à criança assim como elas se colocaram sucessivamente aos nossos antepassados, até que somente o rigor perfeito possa satisfazê-la. Não é suficiente duvidar de tudo, é preciso saber porque se duvida" (Poincaré, 1947, pp. 134-136).

A última frase dessa passagem parece atestar a importância dada por Poincaré, não à inculcação na mente do aluno dos padrões atualizados de rigor a qualquer preço, mas ao fato de, no ensino da matemática, recorrermos a procedimentos que estimulem a formação da consciência da necessidade de se submeter a esses padrões. Cabe à história desempenhar esse papel pedagógico conscientizador. De forma abreviada, poderíamos dizer, portanto, que, com Poincaré, a função didática da história assume uma dimensão psicológica que consiste na possibilidade de se trazer para o plano da consciência do aprendiz a necessidade de submissão aos padrões atualizados de rigor, tanto no modo de se enunciar as definições, as propriedades e teoremas, quanto no modo de se encaminhar o raciocínio dedutivo presente nas demonstrações. A função didática da história é psicológica, mas o objetivo que se busca é estritamente epistemológico. Caracterizamos essa função didática como psicológica e não psicanalítica, pois estamos utilizando a palavra consciência, do modo como o faz Vygotsky, "para indicar a percepção da atividade da mente - a consciência de estar consciente -" e, sendo assim, "não-consciência" não é sinônimo de "inconsciência", termo este que, no sentido freudiano, aparece como resultado da repressão (Vygotsky, 1987, p. 78).

Mas por que razão os padrões atualizados de rigor presentes nos julgamentos epistemológicos do matemático de ofício não estão já presentes nos julgamentos cognitivos do aprendiz? E por que razão atribuir à história a função de persuadir o aprendiz a desconfiar de seus padrões de rigor e substituí-los por outros mais sutis e atualizados? Eis o argumento de Poincaré: "Os zoólogos afirmam que o desenvolvimento embrionário de um animal resume em um tempo bastante curto toda a história de seus anscestrais de tempos geológicos. Parece que o mesmo pode ser dito a respeito do desenvolvimento da mente. O educador deve fazer com que a criança passe novamente por onde passaram os seus ascendentes; mais rapidamente mas sem omitir etapas. Por essa razão, a história da ciência deve ser o nosso primeiro guia" (Poincaré, 1947, p. 135).

A possibilidade da história exercer uma função conscientizadora, assenta-se, portanto, na aceitação consciente, mas não questionada, do princípio genético, uma vez que o "status" postulacional desse princípio é elevado à condição de teorema.

Entretanto, seria legítimo perguntar se desvencilhando-se do princípio genético como forma de "fundamentar" uma suposta função conscientizadora da história no plano pedagógico - e mais tarde veremos que isso é necessário - teríamos ainda alguma razão para a manutenção dessa proposta.

A consideração dessa questão exige que penetremos no domínio da psicologia do desenvolvimento cognitivo, a fim de tentarmos localizar aí alguns elementos para uma eventual resposta.

Encontramos na obra de Vygotsky, particularmente na parte que ele dedica ao estudo do desenvolvimento dos conceitos científicos na infância, e na obra de Piaget, referências explícitas à questão do modo como a criança atinge a consciência e o domínio dos seus próprios pensamentos. Partindo das evidências oferecidas pelas primeiras obras piagetianas para a aceitação da ausência de percepção consciente das relações no pensamento infantil, ainda que a criança manipule essas relações de forma irrefletida e espontânea, Vygotsky procura explicitar o modo como Piaget explica a ocorrência desse fato. Piaget invoca para isso duas leis psicológicas: a lei da percepção formulada por Claparède e a lei da transferência ou do deslocamento. Segundo a lei de Claparède, a conquista gradativa da consciência é diretamente proporcional aos obstáculos que enfrentamos para nos adaptar a uma situação. Piaget recorre a essa lei para justificar o seu ponto de vista de que, devido às deficiências da lógica infantil e aos fracassos decorrentes dos reiterados conflitos que em função dessas deficiências se estabelecem no relacionamento entre a criança e o adulto, coloca-se à criança a necessidade de tomar consciência de seus conceitos. Mas, teria essa necessidade por si só o poder de provocar mudanças no desenvolvimento? Piaget, percebendo a não-suficiência da lei de Claparède para responder essa questão, complementa-a com a lei da transferência, segundo a qual "tornar-se consciente de uma operação mental significa transferí-la do plano da ação para o plano da linguagem, isto é, recriá-la na imaginação de modo que possa ser expressa em palavras" (Vygotsky, 1987, p. 76). O fato dessa transferência reproduzir as memas dificuldades que ocorrem no plano da ação explicaria, então, o lento progresso da criança no sentido da conquista do pensamento consciente.

Vygotsky, entretanto, tenta aprofundar ainda mais a questão assinalando que, embora as duas leis invocadas por Piaget consigam "responder por que a criança em idade escolar não é consciente dos seus conceitos", elas não conseguem "explicar como se atinge essa consciência" (Vygotsky, 1987, p. 77).

A solução proposta por Vygotsky consiste em buscar no mecanismo de generalização o fator fundamental do tornar-se consciente. De fato, diz ele: "Ao perceber alguns dos nossos próprios atos de uma forma generalizante, nós os isolamos da nossa atividade mental total, e assim nos tornamos capazes de centrar a nossa atenção nesse processo como tal, estabelecendo uma nova relação com ele... Parece-nos óbvio que um conceito possa submeter-se à consciência e ao controle deliberado somente quando começa a fazer parte de um sistema. Se consciência significa generalização, a generalização, por sua vez, significa a formação de um conceito supra-ordenado que inclui o conceito dado como um caso específico".

É por essa razão, argumenta ele, "que os estudos de Piaget mostraram que a introspecção começa a se desenvolver durante o período escolar... O aprendizado escolar induz o tipo de percepção generalizante, desempenhando assim um papel decisivo na conscientização da criança dos seus próprios processos mentais. Os conceitos científicos, com o seu sistema hierárquico de inter-relações, parecem constituir o meio no qual a consciência e o domínio se desenvolvem, sendo mais tarde transferidos a outros conceitos e a outras áreas do pensamento. A consciência reflexiva chega à criança através dos portais dos conhecimentos científicos" (Vygotsky, 1987, pp. 79-80).

Poderia parecer que a explicação fornecida por Vygotsky a respeito do problema da tomada de consciência por parte da criança de seus processos mentais tivesse sido ignorada por Piaget.

Entretanto, no apêndice da edição italiana de 1966 da obra "Pensamento e Linguagem" de Vygotsky - no qual Piaget tece alguns comentários sobre as observações críticas feitas por Vygotsky às obras "A linguagem e o pensamento da criança" e o "Raciocínio da criança" - podemos encontrar algumas considerações de Piaget que permitem dar continuidade à polêmica:

"Pareceria, segundo Vygotsky (embora eu não conheça o resto de sua obra), que o fator principal deva ser procurado na 'generalização das percepções', sendo o processo de generalização suficiente, por si mesmo, para levar as operações mentais à consciência. Nós, por outro lado, estudando o desenvolvimento espontâneo das noções científicas, fomos levados a considerar como fator central o processo mesmo da construção das operações, que consiste em ações interiorizadas que se tornam reversíveis e se coordenam em modelos de estruturas sujeitos a leis bem definidas. O processo de generalização é apenas o resultado desta elaboração de estruturas, e estas estruturas derivam não das percepções, mas das ações totais. O próprio Vygotsky se avizinhava de tais soluções quando pensava que o sincretismo, a justaposição, a insensibilidade à contradição e outras características do nível de desenvolvimento que hoje chamamos pré-operatório (preferindo-o à pré-lógico) eram todas devidas à falta de um sistema, porque a organização de sistemas é de fato a conquista essencial que assinala a passagem da criança ao nível do raciocínio lógico. Mas estes sistemas não são simplesmente produto das generalizações; eles são estruturas operatórias diferenciadas e múltiplas, cuja elaboração gradual por parte da criança apreendemos seguindo-a passo a passo." ("Pensiero e Linguaggio", L.S. Vygotsky. Firenze, Giunti, 1966, Apêndice. Tradução de Agnela da Silva Giusta).

Podemos agora retomar a questão geradora desse desvio. Se as explicações fornecidas por Piaget e Vygotsky (que na verdade não se contrapõem mas se complementam) merecerem credibilidade, então, elas parecem sugerir-nos uma conclusão inevitável que inverteria o ponto de vista de Poincaré a respeito da potencialidade pedagógica da história. De fato, se devemos ver nos processos de elaboração de estruturas e de organização de sistemas, dos quais o mecanismo da generalização é apenas um produto final, os fatores de engendramento do pensamento consciente, e se os conceitos científicos, notadamente os matemáticos, comportam, talvez, mais do que quaisquer outros, o poder de ativar esses processos e esse mecanismo no ato de cognição, que sentido teria a proposta de Poincaré de buscar apoio à produção do pensamento consciente num domínio do conhecimento no qual essa produção não se processa em primeira instância?

4. MORRIS KLINE E OS PAPÉIS ÉTICO-AXIOLÓGICO E UNIFICADOR DA HISTÓRIA

Morris Kline, eminente professor de matemática do Instituto Courant de Ciências Matemáticas da Universidade de Nova York, e um dos grandes historiadores desssa ciência, também percebeu a importância pedagógica da história para o ensino-aprendizagem da matemática. O seu ponto de vista a esse respeito aparece em passagens do artigo "A Proposal for the High School Mathematics Curriculum" de 1966, no livro "O Fracasso da Matemática Moderna" de 1973 e no prefácio de sua obra científica "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", publicada em 1972.

Nessas três referências, o papel pedagógico da história não se constitui em objeto central de reflexão, mas insinua-se, sempre, como um argumento para a defesa de uma abordagem intuitiva da matemática na escola em contraposição a uma abordagem dedutiva. De fato, com a intenção de contrapor-se à abordagem dedutiva que o movimento da matemática moderna estendeu da geometria aos demais campos da matemática elementar, isto é, à Aritmética, à Álgebra e à Trigonometria, Kline, após uma breve incursão pela história da matemática, manifesta-se do seguinte modo: "Que podemos inferir dessa história? Parece claro que os conceitos que têm o sentido mais intuitivo, os números inteiros, frações e conceitos geométricos, foram aceitos e utilizados primeiro. Os menos intuitivos - números irracionais, números negativos, números complexos, o uso de letras para coeficientes gerais e conceitos do cálculo - exigiram muitos séculos, quer para serem criados, quer para serem aceitos. Além disso, quando foram aceitos, não foi a lógica que induziu os matemáticos a adotá-los, mas os argumentos por analogias, o sentido físico de alguns conceitos e a obtenção dos resultados científicos exatos. Em outras palavras, foi a evidência intuitiva que induziu os matemáticos a aceitá-los. A lógica sempre viera muito depois das criações..." (Kline, 1976, p. 58).

Além da constatação de que os conceitos e teorias matemáticas passam por um processo transformacional ao longo do qual um tratamento intuitivo e ingênuo dos mesmos sempre antecede uma abordagem formalizada, Kline observa também que esse processo não ocorre de forma harmoniosa e linear, embora a transposição didática desse processo, do modo como ela acontece nos cursos regulares de matemática, demonstrem o contrário: "Os cursos regulares de matemática são mistificadores num aspecto fundamental. Eles apresentam uma exposição do conteúdo matemático logicamente organizada, dando a impressão de que os matemáticos passam de teorema a teorema quase naturalmente, de que eles podem superar qualquer dificuldade e de que os conteúdos estão completamente prontos e estabelecidos... As exposições polidas dos cursos não conseguem mostrar os obstáculos do processo criativo, as frustações e o longo e árduo caminho que os matemáticos tiveram que trilhar para atingir uma estrutura considerável" (Kline, 1972, IX).

A percepção dessa contraposição entre a sua leitura da história da matemática e o modo como ela é exposta nos cursos regulares, leva Kline a estabelecer uma esperada e convicta analogia entre o histórico e o pedagógico: "Não há muita dúvida de que as dificuldades que os grandes matemáticos encontram são precisamente os tropeços que os estudantes experimentam e de que nenhum esforço para eliminá-los com verbosidade lógica pode ser bem sucedido. Se os matemáticos levaram um milênio desde o tempo em que a matemática de primeira classe pareceu chegar ao conceito de números negativos - e levaram - e se levaram outro milênio para aceitarem os números negativos - como realmente levaram - podemos ter certeza de que os estudantes terão dificuldades com números negativos. Mais ainda, os estudantes terão que dominar essas dificuldades da mesma maneira como os matemáticos o fizeram, acostumando-se gradativamente aos novos conceitos, trabalhando com eles e aproveitando-se de todo apoio intuitivo que o professor possa reunir" (Kline, 1976, p. 60).

Mas que razões Kline nos oferece para o estabelecimento dessa analogia? Por que os obstáculos enfrentados pelos matemáticos no passado deverão ser também os obstáculos a serem enfrentados pelo aprendiz no presente?

Novamente, invoca-se o princípio genético como forma de sustentação dessa analogia e como modo de estabelecimento de uma identidade entre obstáculos históricos e obstáculos cognitivos.

Mas para os fins que temos em vista neste ensaio, importa-nos não apenas a busca das razões profundas da necessidade de se recorrer à história, mas também a identificação das funções pedagógicas que estão na base desse recorrer.

Pelo que já foi exposto, fica claro que, para Kline, uma dessas funções é a desmistificação metodológica da didática da matemática, na medida que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo é normalmente exposto não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido. Cabe à história, portanto, estabelecer essa consonância cuja legitimidade pedagógica assenta-se no fato de que a percepção por parte do aprendiz dos erros, das lacunas e das hesitações dos grandes matemáticos pode gerar nele o desenvolvimento de atitudes positivas, desejáveis tanto na formação do futuro pesquisador quanto na formação do cidadão, quais sejam, a coragem necessária para o enfrentamento dos problemas que lhe estiverem postos e a persistência e tenacidade na busca de soluções satisfatórias para os mesmos (cf. Kline, 1972, p. IX). Com Kline, portanto, a desmistificação metodológica da didática da matemática, via método histórico, reveste-se de uma dimensão ético-axiológica, uma vez que ela tem como propósito estimular o desenvolvimento de valores ainda que estritamente vinculados à forma de apreensão dos conhecimentos já produzidos e à forma de produção de novos conhecimentos.

Mas, poderia parecer que uma consequência inevitável do papel desmistificador a ser cumprido pelo método histórico fosse a quebra da unidade da matemática, na medida que a defesa dessa unidade, tradicionalmente, sempre veio associada à crença no ideal de sistematização dedutiva da matemática. Não é essa, porém, a visão de Kline. Ao contrário, ele retira esse privilégio sempre concedido às apresentações didáticas de estilo dedutivo-formal para atribuí-lo àquelas baseadas no método histórico: "Os cursos usuais apresentam segmentos da matemática que parecem ter pouca relação entre si. A história pode fornecer uma perspectiva para a matéria como um todo e relacionar os conteúdos dos cursos não apenas uns com os outros como também com o corpo, com o núcleo principal do pensamento matemático" (Kline, 1972, p. IX).

Nessa perspectiva, chega até mesmo a condicionar a relevância da existência das especialidades à eventual contribuição que elas possam trazer para a manutenção da unidade interna do conhecimento matemático: "Além disso, a matemática, a despeito de sua compartimentalização em centenas de campos, é uma unidade que possui seus problemas e objetivos principais. Essas várias especialidades seriam estéreis a menos que possam contribuir com tal tarefa. Talvez, o modo mais adequado para se combater os perigos que envolvem o nosso objeto fragmentado, seja adquirir algum conhecimento das conquistas passadas, das tradições e dos objetivos da matemática, de modo que se possa direcionar a pesquisa nessa área para caminhos promissores. Assim disse Hilbert: 'A matemática é um organismo para cuja força vital a indissolúvel união das partes é uma condição necessária'" (Kline, 1972, pp. VII-IX).

Desse modo, a percepção e a manutenção da unidade da matemática, tanto no plano pedagógico quanto ao nível da pesquisa acadêmica, são vistas por Kline como algo desejável, e essa seria uma outra função didática do método histórico.

A citação de Hilbert é sintomática. Nela, estão presentes a concepção da matemática como "organismo", a noção de "força vital" e a idéia de "harmonia" entre o todo e suas partes. São noções e expressões tomadas de empréstimo à biologia, área de conhecimento que, no século XIX, foi elevada à categoria de ciência-modelo e fonte de inspiração às demais.

A idéia de "transformação", extraída do contexto da teoria da evolução de Darwin, torna-se uma idéia-chave para a abordagem e para a explicação de todos os tipos de "fenômenos", fossem eles pertencentes ao domínio das ciências naturais ou das ciências sociais e humanas.

Mas como conciliar a concepção axiomática da matemática, que é, por sua própria natureza, fechada, acabada, não dotada de "força vital", com uma concepção organicista, em cuja base está a noção de transformação no tempo e, portanto, a idéia de historicidade?

A possibilidade dessa conciliação assenta-se na postulação de uma "harmonia" interna ao organismo-sistema, isto é, na crença de que o sentido da transformação do organismo-sistema não deverá trazer-nos surpresas a ponto de gerar contradições incontroláveis que venham a destruir a unidade do sistema. É a concepção de história interna com rumo pré-estabelecido. É a história evolutiva sem surpresas do século XIX. No limite superior da teoria da evolução, o homem. No limite superior da evolução das teorias matemática ingênuas, a axiomatização necessária e a manutenção da unidade interna do edifício como um todo.

Só no ano de 1980, Morris Kline publicaria o seu "Mathematics - the loss of certanty". Mas, nessa obra, não se fala mais em pedagogia. Nem em princípio genético.

5. O PRINCÍPIO GENÉTICO E A ILUSÃO ARCAICA

Tendo em vista a frequente recorrência por parte dos matemáticos dos séculos XIX e XX ao princípio genético como um modo aparentemente sensato de justificar a importância pedagógica da história, parece-nos necessário neste momento proceder a uma breve discussão a respeito da legitimidade desse argumento.

É clara a origem positivista desse princípio, uma vez que ele nada mais é que uma extensão da lei dos três estados - segundo a qual o modo de investigação e de explicação dos fenômenos a que recorrem tanto o indivíduo quanto a espécie humana, passam sucessivamente por três estágios sequenciados: o teológico, o metafísico e o positivo - que Auguste Comte, sem qualquer originalidade, toma de empréstimo a Condorcet e St. Simon (cf. Habermas, 1982, p. 93). Não foi preciso esperar, portanto, o surgimento em 1858 do livro onde Charles R. Darwin (1809-1882) desenvolveu a sua teoria da evolução pela seleção natural para explicar a mudança das espécies, e nem o polêmico tipo de desdobramento que os morfologistas do final do século XIX pretenderam associar a essa teoria[1], para que Comte efetuasse uma extensão metafórica para o terreno da Filosofia da História e da Educação[2], do conceito de evolução, subjacente ao princípio da mutabilidade das espécies, defendido por biólogos e filósofos de finais do século XVIII, dentre eles Buffon, Kant, Erasmus Darwin e Lamarck.

De fato, em seu "Curso de Filosofia Positiva" de

---

[1] Segundo Ronan, "da década de 1860 a 1880, foram envidados grandes esforços na área da morfologia - o estudo das formas dos seres vivos - para tentar encontrar relações evolutivas entre as espécies e entre os membros de uma determinada espécie. Os morfologistas queriam encontrar uma unidade básica por trás das formas comuns, descobrir antepassados comuns para dois ou mais grupos de organismos e construir árvores genealógicas que indicassem a história do desenvolvimento de um animal em particular. Seu líder foi o grande defensor do darwinismo, Ernst Haeckel (1834-1919)..., que interessou-se profundamente pela anatomia comparada de homens e animais. Isso o levou a construir uma árvore ou linhagem para o homem e a sugerir que, durante seu desenvolvimento, o embrião atravessa os mais importantes estágios adultos de seus ancestrais dessa linhagem evolutiva - o que se tornou conhecido como 'lei biogenética' de Haeckel. Mas, devido a um impasse, ao encerrar o século XIX, os biólogos mais jovens se revoltaram contra essa concepção e começaram a tentar obter respostas para um novo conjunto de questões" (Ronan, 1987, Vol. IV, p. 79).

[2] Segundo Rosemberg, durante o século XIX, a ciência criou muitas palavras e conceitos por intermédio dos quais passaram-se a ser "explicados" alguns dos problemas humanos universais, tais como a existência de pessoas pobres e ricas, sãs e enfermas etc, e dentre os quais o darwinismo social é apenas o mais conhecido. Ao mesmo tempo, por exemplo, usaram-se metáforas derivadas da Física e da Eletrofisiologia para explicar a variedade das capacidades humanas. Dese modo, tendo por base o reconhecimento da natureza elétrica do impulso nervoso por parte dos cientistas de meados do século XIX - dentre eles, Helmholtz -, parecia quase necessária a conclusão de que a força nervosa poderia sr identificada com a força vital, e que esta última deveria ter natureza elétrica. A extensão metafórica desse reconhecimento não só mostrou-se adequada para "explicar" a origem das enfermidades em geral, através da concentração dessa força nervosa em determinada direção ou órgão, como também para "explicar", particularmente, a loucura, a neurose e a psicose através da diferença hereditária das quantidades de força nervosa entre as pessoas e, devido a isso, da maior ou menor capacidade delas resistirem às pressões sociais externas (cf. Rosenberg, 1966, pp. 284-286).

1830, para "justificar" a legitimidade de uma metodologia científica que, como diz Habermas, "põe, em lugar do sujeito da teoria do conhecimento, o processo técnico-científico como sujeito de uma filosofia cientificista da história" (Habermas, 1982, p. 94), Comte antecipa e estende metaforicamente para o plano educacional, a lei biogenética de Haeckel do seguinte modo: "Essa revolução geral do espírito humano pode ser facilmente constatada hoje, duma maneira sensível embora indireta, considerando o desenvolvimento da inteligência individual. O ponto de partida sendo necessariamente o mesmo para a educação do indivíduo e para a da espécie, as diversas fases principais da primeira devem representar as épocas fundamentais da segunda. Ora, cada um de nós, contemplando sua própria história, não se lembra de que foi sucessivamente, no que concerne às noções mais importantes, *teólogo* em sua infância, *metafísico* em sua juventude, e *físico* em sua virilidade? Hoje é fácil esta verificação para todos os homens que estão ao nível de seu século" (Comte, 1978, p. 5, grifos do autor).

Além disso, percebe com clareza os dois modos pelos quais uma ciência pode ser apresentada àqueles que deverão dominá-la, não escondendo a sua preferência por aquele que denomina "caminho histórico" - expressão operacionalizada da extensão metafórica da lei biogenética de Haeckel para o plano didático, isto é, o princípio genético: "Toda ciência pode ser exposta mediante dois caminhos essencialmente distintos: o caminho *histórico* e o caminho *dogmático*. Qualquer outro modo de exposição não será mais do que sua combinação. Pelo primeiro procedimento, expomos sucessivamente os conhecimentos na mesma ordem efetiva segundo a qual o espírito humano os obteve realmente, adotando, tanto quanto possível, as mesmas vias. Pelo segundo, apresentamos o sistema de idéias tal como poderia ser concebido hoje por um único espírito que, colocado numa perspectiva conveniente e provido de conhecimentos suficientes, ocupar-se-ia de refazer a ciência em seu conjunto. O primeiro modo é evidentemente aquele pelo qual começa, com toda necessidade, o estudo de cada ciência nascente, pois apresenta a propriedade de não exigir, para a exposição dos conhecimentos, nenhum novo trabalho distinto daquele de sua formação. Toda a didática se resume, então, em estudar sucessivamente, na ordem cronológica, as diversas obras originais que contribuíram para o progresso da ciência" (Comte, 1978, p. 27, grifos do autor).

É por essa razão que Comte não esconde a sua simpatia pela Geometria da Clairaut, escrita, segundo ele, com base na ordem cronológica de desenvolvimento dessa ciência, o que constitui para o positivismo a preocupação fundamental de toda didática. De fato, no posfácio escrito por José Feliciano, contido na tradução brasileira de 1892 dos Elementos de Geometria de Clairaut, esse ponto de vista de Comte aparece explicitamente: "Inaugurando com este monumento de clareza a série de tentativas para trasladar a vernáculo as obras mathematicas da Bibliotheca Positivista, tive sobretudo em mira aprender e facilitar a meus naturaes o estudo da base lógica, imprescindível à iniciação encyclopedica. No dizer de Augusto Comte, é o melhor tratado didactico sobre a geometria preliminar, e pode ser comprehendido sem outro auxílio ... Mas para melhor, para decisivamente caracterizar o valor de Clairaut, é bastante citar as phrases que lhe dedica o Mestre dos mestres: 'Estre preambulo (à geometria preliminar) deve naturalmente começar por uma homenagem especial ao grande geômetra já citado como sendo o único que aperfeiçou o ensino mathematico antes do advento do positivismo. O principal constructor da mecanica celeste não desdenhou abrir sua nobre carreira elaborando o melhor tratado didactivo sobre a geometria preliminar'" (Clairaut, 1892, p. 197 e p. 205).

Mas, se como mostramos, o princípio genético constituiu-se numa extensão metafórica da lei dos três estados, a primeira questão que devemos colocar-nos refere-se à legitimidade dessa própria lei. A análise dessa questão requer que nos situemos no terreno comum da teoria do conhecimento e da filosofia da história pois, como assinalam Bourdé e Martin, "enquanto que Hegel entrevia a marcha do Espírito segundo os três momentos da dialética, Comte imagina a progressão do espírito humano por etapas, segundo um ritmo igualmente ternário mas essencialmente diferente em cada uma delas" (Bourdé e Martin, 1983, p. 71). Através da lei dos três estados, "o positivismo exibe-se, portanto, como uma nova filosofia da história" (Habermas, 1982, p. 92). Mas, como assinala Habermas, "esta lei do desenvolvimento possui manifestamente uma forma lógica não correspondente ao *status* das hipóteses nomológicas das ciências experimentais: o saber que Comte reivindica para interpretar o significado do saber positivo não está, ele mesmo, subsumido sob as condições do espírito positivo" (Habermas, 1982, p. 92). Essa contradição é também percebida por Kopnin, para quem essa lei não passa "da mais típica construção da filosofia naturalista, na qual todo o desenvolvimento intelectual da humanidade foi encarado por um princípio especulativamente criado. E quando se compara o sistema hegeliano de desenvolvimento das categorias lógicas, que incluem a riqueza da realidade objetiva, com esse frágil esquema, as simpatias ficam evidentemente do lado do grande alemão" (Kopnin, 1972, p. 127).

Mas, o questionamento da lei biogenética de Haeckel e do princípio genético como expressão de sua extensão metafórica não perderia a sua validade, ainda que procurássemos desvinculá-los da lei dos três estados e do ponto de vista histórico-filosófico do positivismo comtiano. Nesse caso, devemos recorrer a uma linha de argumentação distinta da anterior, uma vez que essa desvinculação exigiria a crítica a uma crença que se insere no domínio comum da psicologia e da antropologia. De fato, essa desvinculação, que implica a consideração do problema das relações entre o pensamento primitivo e o pensamento infantil, não só é possível como também foi realmente estabelecida por psicanalistas e psicólogos como Freud, Blondel e Piaget, sendo que, todos eles, em maior ou menor grau e prudência, deixaram-se seduzir pelo esquema de se querer "ver nas sociedades primitivas uma imagem aproximada de uma mais ou menos metafórica infância da humanidade, cujos estágios principais seriam reproduzidos também, por sua parte no plano individual, pelo desenvolvimento intelectual da criança"[3] (Lévi-Strauss, 1976, pp. 126-127). Sedução

[3] Freud, por exemplo, acreditava que as teorias sexuais das crianças representam uma herança filogenética. Blondel estabeleceu um paralelismo entre a consciência primitiva, a consciência infantil e a consciência mórbida, acreditando serem essas realidades intercambiáveis. Piaget, por sua vez, principalmente em suas primeiras obras, admite um certo paralelismo entre a ontogênese e a filogênese ainda que, ao mesmo tempo, procure restringir e amenizar essa crença afirmando que o *conteúdo* do pensamento da criança jamais poderia ser considerado um produto hereditário da mentalidade primitiva, porque, segundo ele, a ontogênese explica a filogênese tanto quanto o inverso. (cf. Lévi-Strauss, 1976, pp. 126-127).

essa a que Lévi-Strauss atribui o sugestivo nome "ilusão arcaica".

Precavermo-nos contra esse tipo de sedução exigiria apenas, diz-nos Lévi-Strauss, admitir o fato "muito simples de não existirem somente crianças, primitivas e alienadas, mas também - e simultaneamente - crianças primitivas e alienados primitivos. E há igualmente crianças psicopatas, primitivas e civilizadas". Além disso, no que se refere às sociedades primitivas, acrescenta que "é supérfluo assinalar que elas contêm, tal como a nossa, crianças e adultos, e que o problema das relações entre as duas idades não se apresenta aí de maneira diferente. As crianças primitivas diferem dos adultos primitivos do mesmo modo que estas diferenças existem entre os civilizados ... Sem dúvida, a criança não é um adulto. Não é tal nem em nossa sociedade nem em nenhuma outra, e em todas está igualmente afastada do nível de pensamento do adulto, de tal modo que a distinção entre pensamento adulto e pensamento infantil recorta, se é possível dizer, na mesma linha, todas as culturas e todas as formas de organização social. Não é possível estabelecer nunca coincidência entre os dois planos, mesmo quando se escolhem exemplos tão afastados quanto quisermos no tempo e no espaço. A cultura mais primitiva é sempre uma cultura adulta, e por isso mesmo incompatível com as manifestações infantis que se podem observar na mais evoluída civilização" (Lévi-Strauss, 1976, pp. 127-131).

Além de apresentar um argumento contrário ao equivalente psicológico da lei biogenética de Haeckel, Lévi-Strauss tenta ainda - e a meu ver de forma conclusiva - apontar as razões pelas quais nos tornamos, com facilidade, vítimas dessa "ilusão arcaica": "Quando comparamos o pensamento primitivo com o pensamento infantil e vemos aparecerem tantas semelhanças entre ambos, somos portanto vítimas de uma ilusão subjetiva, que se reproduziria sem dúvida para os adultos de qualquer cultura que comparasse suas próprias crianças com adultos pertencentes a uma cultura diferente. O pensamento da criança, sendo menos especializado que o do adulto, oferece, com efeito, sempre a este não somente a imagem de sua própria síntese, mas também a de todas as que se podem realizar em outros lugares e sob outras condições... As analogias entre o pensamento primitivo e o pensamento infantil não se fundam portanto sobre um pretenso caráter arcaico do primeiro, mas somente na diferença de extensão que faz do segundo uma espécie de ponto de encontro, ou centro de dispersão, para todas as sínteses culturais possíveis. Compreendemos melhor as estruturas fundamentais das sociedades primitivas comparando-as com as atitudes sociais de nossas próprias crianças. Mas os primitivos não deixam de empregar o mesmo procedimento e de nos comparar com as crianças deles. É que, de fato, as atitudes infantis oferecem, também para eles, a melhor introdução ao conhecimento de instituições estrangeiras, cujas raízes se misturam, somente nesse nível, com as suas próprias... Para o primitivo as atitudes do civilizado correspondem pois ao que chamaríamos atitudes infantis, exatamente pela mesma razão que nos leva a achar em nossas próprias crianças esboços de atitudes que encontram na sociedade primitiva uma imagem completa e desenvolvida" (Lévi-Strauss, 1976, pp. 133-134).

Finalmente, gostaríamos de retomar aqui o legítimo argumento de Merani, a que fizemos referência na introdução deste trabalho, segundo o qual a defesa da tese da recapitulação no plano psicológico traria como consequência necessária a sustentação do questionável pressuposto metafísico da existência de uma memória social hereditária, como o fez Jung ao estabelecer a doutrina do insconsciente coletivo. De fato, ao fazermos nossa a crítica de Lévi-Strauss à aceitação desse pressuposto, situamo-nos ao lado dos que acreditam em sua superfluidade: "Em suma, onde há convergência entre o pensamento da criança e as representações históricas é muito mais fácil explicar estas últimas pelas leis gerais da mentalidade infantil do que invocar uma hereditariedade misteriosa. Por mais que se remonte na história ou na pré-história, a criança sempre precedeu o adulto, e é possível além disso supor que quanto mais primitiva é uma sociedade, mais duradoura é a influência do pensamento da criança sobre o desenvolvimento do indivíduo, porque a sociedade não está então em condições de transmitir ou de constituir uma cultura científica" (Lévi-Strauss, 1976, p. 129).

Diante de tudo o que foi dito a respeito da lei biogenética e de suas extensões metafóricas, julgamos não apenas desnecessário como extremamente problemático recorrer a elas como meio de fundamentar qualquer empreendimento que vise a relacionar história e ensino-aprendizagem no campo da Educação Matemática.

6. A HISTÓRIA COMO FONTE DE MOTIVAÇÃO

Na literatura específica referente à questão que estamos considerando neste ensaio há um número expressivo de matemáticos que recorrem à categoria psicológica da motivação para justificar a necessidade de se recorrer à história no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Hassler, num texto escrito no final da década de 20, já expressava essa convicção afirmando que "o conhecimento da história dos processos matemáticos que estão sendo aprendidos pelo aluno despertará o interesse deles pelo conteúdo do ensino" (Hassler, 1929, p. 166). Antes dele, Simons já utilizava o mesmo argumento: "a história da matemática e as recreações despertam e mantém o interesse pela matéria" (Simons, 1923, p. 95). Também Wiltshire insiste nesse mesmo ponto de vista: "para que possa haver interesse por um certo processo é necessário ter algum conhecimento de sua história e do benefício que se pode obter desse conhecimento" (Wiltshire, 1930, p. 504).

Nesses textos americanos que aparecem na revista "The Mathematics Teacher", nas décadas de 20 e 30, pode-se perceber um certo otimismo ingênuo em relação às potencialidades pedagógicas da história. O poder quase mágico que teria a história de modificar a atitude de um jovem estudante em relação à matemática revela-se no seguinte relato de um episódio presenciado por um pregador, e que no texto de Simons adquire a força de um argumento a favor da história: "Um garoto não conseguia compreender a aritmética, não podia entender como 1/2 poderia estar contido em 1/4 se 1/2 é maior do que 1/4. Um novo professor chega à cidade, um daqueles professores que se interessam por seus alunos enquanto indivíduos. Ele percebeu que o garoto gostava de história e então emprestou-lhe um livro de história da Matemática. O garoto leu esse livro com ávido interesse e sua atitude em relação à matemática mudou-se completamente. Ele passou a gostar dela e a achá-la simples e fácil" (Simons, pp. 94-95).

Nesses textos, o poder motivador da história é atestado e exaltado em função da adoção de uma concepção lúdica ou recreativa da mesma. É a história-anedotário vista como contraponto momentâneo necessário aos momentos formais do ensino, que exigem grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz: "Em todo trabalho devem existir momentos de recreação. Em período de esforço mental concentrado é repousante ter um recesso através da mudança na natureza do pensamento. O orador público bem sucedido faz isso e sua fala é pontuada com brincadeiras ou histórias. Ele não deixa que sua conferência se torne consativa ou maçante através da exigência de muita concentração sobre um tema pesado. Uma parte considerável das aulas de matemática geralmente é dedicada à resolução de problemas, mas isso, dia após dia, acaba tornando-se monótono. Alguns professores enriquecem o seu ensino através de ilustrações dos vários usos da matemática. Em acréscimo a isso, todo professor pode e deve armazenar em sua mente, prontas para serem usadas, as histórias dos grandes matemáticos" (Hassler, 1929, p. 169).

A história-anedota de carater estritamente factual adquire também, na visão de Simons, uma função didática de "relax" - a recompensa repousante merecida e necessária pelo esforço estafante requerido pela aprendizagem da matemática; a matemática exige o pensamento e a seriedade, enquanto que a história alivia a tensão e conforta: "Do mesmo modo que em uma conferência a tensão deve ser abrandada... a fim de que o conferencista possa continuar e produzir a impressão que ele deseja causar, o relaxamento que quebra uma certa monotonia inerente à Álgebra formal e à geometria pode ser alcançado através de uma anedota ou incidente históricos... Parece inteiramente legítimo, simplesmente para distrair uma classe, e como recompensa por alguma realização especial, a leitura, em Álgebra, de uma história como o 'A, B, C' de Stephen Leacock ou partes de um livro como 'Flatland' de Abbott, em geometria" (Simons, 1923, p. 97).

A busca de esquemas motivadores às aulas de matemática via utilização da história desloca-se, mais recentemente, de um plano no qual eles são entendidos de forma meramente episódica e externa ao conteúdo do ensino - como ilustram os textos a que nos referimos acima - para outro em que essa motivação aparece vinculada e produzida no ato cognitivo da solução de um problema. Nesse sentido, através de uma das propostas surgida nas várias sessões do 5º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME-5, Adelaide, 1984), passou-se a veicular a idéia de que a matemática pode ser desenvolvida pelo estudante mediante a resolução de problemas históricos e através da apreciação e análise das soluções apresentadas a esses tais problemas no passado. Subjacente a essa proposta está o pressuposto de que se a resolução de um problema constitui-se, por si só, numa atividade altamente educativa e motivadora, o fato desse problema poder vincular-se à história elevaria, quase que automaticamente, o seu potencial motivador. Deste modo, de acordo com Booker, "a ênfase recairia mais sobre o processo do pensamento matemático do que meramente sobre o produto final dos pensamentos matemáticos de matemáticos mais antigos" (Booker, 1988, p. 229).

Já no 4º ICME (Berkeley, Califórnia, 1980) essa tendência, que poria ênfase na natureza intrinsecamente motivadora do problema histórico, começava a manifestar-se. Nessa ocasião, Humphreys, profesor do Minneapolis Community College em Minnesota, ao depositar uma grande expectativa no poder motivador dos problemas históricos, deixa também transparecer em seu pronunciamento o mesmo otimismo ingênuo presente nos textos das décadas de 20 e 30: "É comum, por exemplo, os estudantes que se iniciam no estudo da álgebra, sentirem aversão pelos 'word problems'. A inclusão dos seguintes problemas (o autor refere-se a três problemas extraídos da 'Antologia Grega', datados por volta de 500 d.C., encontrados na obra clássica de Howard Eves - 'An Introduction to the History of Mathematics') em uma tarefa de casa fará com que os estudantes automaticamente passem a gostar dos 'word problems'" (Humphreys, 1980, p. 397).

Também Meserve, professor da Universidade de Vermont, durante o 4º ICME, manifestava o caráter pedagogicamente pertinente da associação das duas tendências em Educação Matemática - a que punha em destaque a necessidade da história e aquela que via na resolução de problemas o enfoque didaticamente eficiente para a aprendizagem da matemática: "Para mim, a história da matemática é útil, antes de mais nada, como um auxílio para a compreensão de tópicos que já fazem parte do currículo. Matemática desenvolvida a partir de técnicas de resolução de problemas práticos" (Meserve, 1980, p. 398). E cita como exemplos: a possibilidade de exploração pedagógica do modo como os egípcios construiam um quadrado cuja área é igual ao dobro da área ocupada por um quadrado qualquer dado; a possibilidade de visualização geométrica de modelos aritméticos e identidades algébricas por parte do estudante, tendo por base o estudo pitagórico dos números figurados e a resolução de uma equação quadrática por meio do completamento de quadrados geométricos, do modo como o faziam hindus e árabes.

Dentre os defensores da utilização da história no ensino via resolução de problemas históricos, Swetz parece ter ido além dos demais, quer no sentido de preocupar-se em fornecer razões para fundamentar a posição que defende, quer no sentido de não encarar a motivação como algo que se processa inevitavelmente em função do simples fato do problema ser qualificado de "histórico".

A sua opção por essa forma de se incorporar a história ao ensino-aprendizagem decorre do fato de não acreditar que a mera inclusão de comentários históricos a respeito da vida ou do trabalho de um matemático particular favoreça de fato a aprendizagem dos conceitos que estejam sendo ensinados. Se isso, para alguns professores, significa enriquecimento, para Swetz, representa apenas a "inclusão de mais conhecimento factual em um currículo já abarrotado" (Swetz, 1989, p. 370).

Para Swetz, os problemas históricos motivam porque:

1) possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados;

2) constituem-se em veículos de informação cultural e sociológica;
3) refletem as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos;
4) constituem-se em meio de aferimento da habilidade matemática de nossos antepassados;
5) permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Para ilustrar o primeiro desses itens, Swetz considera a discussão em torno de problemas babilônicos cujas soluções são dadas através da técnica do completamento de um quadrado geométrico. O segundo item é ilustrado com problemas antigos cujas soluções nos permitem, por exemplo, inferir a altura do mastro de um navio egípcio do período de 250 a.C., o comprimento de um filão de pão no século XV etc. Os exemplos que Swetz nos fornece relacionados com o terceiro item vão desde aqueles que refletem as necessidades práticas das sociedades da Antiguidade - como o cálculo de taxas, a construção de paredes e diques, os preços de mercadorias, o armazenamento de grãos, a construção de muralhas quadradas ou circulares em torno de uma vila -, até aqueles que nos indicam as preocupações básicas na época do Renascimento italiano - como os problemas de constituição de sociedades, cujas soluções requeriam o emprego de proporções e equações. O quarto item é ilustrado com problemas como, por exemplo, aquele que aparece no tablete babilônico de Susa (2000 a.C.) que nos solicita determinar o raio de um círculo no qual está inscrito um triângulo isósceles de lados 50, 50 e

60. Finalmente, Swetz exemplifica a analogia a que se refere no quinto item através da comparação entre o processo babilônico de extração de raízes quadradas e os processos iterativos de cálculo que estão na base das atuais operações computacionais.

Uma vez levantadas e analisadas as posições daqueles que optaram por buscar na categoria da motivação o motivo fundamental para a utilização pedagógica da história da matemática em seu ensino-aprendizagem, cumpre-nos perguntar: qual a legitimidade dessa busca? A história de fato motiva? Em caso afirmativo, o que estaria na base da explicação desse seu misterioso potencial motivador?

Parece-nos que o argumento ao mesmo tempo mais simples e mais trivial que se contrapõe à existência desse suposto potencial motivador da história manifesta-se na consideração de que, se fosse esse o caso, o ensino da própria história seria automotivador. Não é isso porém o que atestaria qualquer professor de história que se defronta em seu cotidiano - e talvez de forma mais incisiva e com menor índice de retorno em relação aos seus colegas de outras matérias - não apenas com o desinteresse de seus alunos por essa disciplina, como também com a enorme dificuldade de fazer-lhes compreender a sua importância, a sua natureza, os seus objetivos e os seus métodos.

Podemos, porém, levantar um argumento mais técnico contra esse suposto potencial motivador recorrendo ao terreno da Psicologia, particularmente a uma de suas áreas específicas que tem por objeto de estudo e pesquisa a motivação. O que nos tem revelado, em linhas gerais, o desenvolvimento desses estudos, segundo Evans, é a existência de uma mudança qualitativa dentro desse campo, que se traduz na passagem de um enfoque mecanicista para um enfoque cognitivo da motivação. Da "imagem de um organismo impelido e pressionado por forças e hábitos" no interior do enfoque mecanicista, passa-se à "imagem alternativa de um organismo capaz, dentro das limitações de sua espécie, de absorver informações provenientes de sua fisiologia interna, de seu meio físico e, sobretudo no homem, de seu ambiente social" (Evans, 1976, p. 100). Ou então, como assinala Herriot, cada vez mais nos afastamos de uma "concepção dos organismos como sendo impelidos por impulsos ou atraídos por incentivos. As idéias de impulsos aprendidos, baseados em necessidades biológicas, deram lugar a teorias que enfatizam ser o nosso comportamento determinado pelo modo como nos percebemos a nós mesmos e percebemos o nosso meio-ambiente" (Evans, 1976, p. 7).

É fácil perceber, porém, que é dentro de um enfoque mecanicista da motivação que se situam os autores cujos pontos de vistas analisamos. E um mecanicismo, acrescentaríamos, centrado no objeto do conhecimento e não no sujeito. É a história que teria o estranho poder de atrair. É a história a fonte de onde emanariam os impulsos que se constituiriam em reforços automaticamente e invariavelmente positivos para o sujeito.

A vinculação estabelecida, por alguns autores que consideramos, entre história e problema não os coloca em melhor situação, pois o aspecto motivador de um problema não reside no fato de ser ele histórico ou até mesmo de ser problema, mas no maior ou menor grau de desafio que esse problema oferece, no modo como esse desafio é percebido pelo aprendiz, no tipo de relações que se estabelecem entre esse desafio e os valores, interesses e aptidões socialmente construídos por ele etc.

Portanto, se a história, podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma, parece-nos que a categoria motivação constitui-se numa instância problemática de justificação para a incorporação da história no ensino.

7. ZÚÑIGA E AS TRÊS FUNÇÕES DA HISTÓRIA

A característica mais marcante da posição de Zúñiga em relação ao problema que estamos estudando neste ensaio é que, para ele, o debate referente à função didática da história não pode ser desvinculado daquele que diz respeito à natureza mais profunda da matemática, isto é, às considerações de caráter filosófico-metodológicas desse campo do conhecimento (cf. Zúñiga, 1987a, p. 18). Poderíamos ir mais longe e afirmar que a sua percepção da importância da história para o ensino da matemática é uma decorrência quase que necessária do seu interesse pela filosofia da matemática e do modo particular dele posicionar-se nesse terreno.

Em sua opinião, trata-se de efetuar um ajuste entre aquilo que chama de a "natureza última" da matemática e o modo como se deve encaminhar o ensino dessa área de conhecimento. É a epistemologia que se constitui em instância normativa para a metodologia do ensino da matemática. Mas qual epistemologia da matemática o seu ensino deveria tomar como referência? Teriam todas essas epistemologias, igualmente, o poder de revelar a importância da história para o ensino? A essa segunda questão Zúñiga responde negativamente e a referência (Zúñiga, 1987a, pp. 7-19) constitui-se no esforço mais significativo empreendido por ele para demonstrar-nos as razões pelas quais as várias concepções de matemática que se manifestaram ao longo da história, em maior ou menor grau, não poderiam ter gerado desdobramentos pedagógicos que justificassem uma maior intervenção da história da matemática em seu ensino.[4]

Segundo Zúñiga, todas essas concepções podem e devem, atualmente, ser questionadas e, embora não exista ainda uma nova visão da matemática que as substitua, as velhas categorias dicotômicas tomadas de empréstimo às clássicas teorias do conhecimento, tais como aquelas do "a priori/a posteriori", do "analítico/sintético" etc., devem ser abandonadas e substituídas por novas idéias e métodos e por novas atitudes filosóficas (cf. Zúñiga, 1987a, p. 14 e p. 18).

Mas, que idéias estariam na base de uma nova atitude no plano da filosofia da matemática e por que razões deveríamos dar crédito a elas?

Segundo Zúñiga, são três essas idéias fundamentais:

1) a diversidade teórica das matemáticas, isto é, ruptura com o postulado da existência de uma unidade entre os campos distintos da matemática;

---

[4] As concepções que Zúñiga levanta são as cinco seguintes: a convencionalista ou sintática, elaborada pelo Círculo de Viena, a axiomática, a platônica, a construtivista e a empirista clássica (cf. Zúñiga, 1987a).

2) a defesa do caráter empírico das matemáticas;

3) a defesa de que o conhecimento resulta de uma síntese dialética de três fatores funcionalmente importantes: o sujeito, a sociedade e o objeto material.

No que se refere à primeira dessas idéias, a dificuldade de se manter a visão que postula a unidade da matemática é, segundo ele, uma consequência dos trabalhos de Kurt Gödel, realizados na década de 30 de nosso século. "Poderíamos dividir a moderna história das matemáticas em duas etapas: antes de Gödel e depois de Gödel" (Zúñiga, 1988, p. 30). Desde então, segundo ele, "a matemática não pode mais ser considerada um corpo teórico sólido, seguro, único, absoluto e verdadeiro" (Zúñiga, 1987a, p. 15). Além disso, como decorrência do trabalho de Paul Cohen - que estabelece a existência de axiomáticas diferentes e não isomórficas, segundo se admita ou não a hipótese do contínuo -, a prática matemática aparece multi-fragmentada. Ela nos aparece menos como unidade e inter-relação e muito mais como um complexo constituído de regiões autônomas no interior das quais as noções, os métodos e as regras revestem-se de um sentido especial e local.

No que se refere à segunda das idéias acima expostas, que afirma o caráter empírico das matemáticas, Zúñiga a defende identificando a matemática como uma ciência natural cujo objeto, porém, não é do mesmo tipo daqueles que as ciências ordinariamente chamadas naturais possuem. Isso porque o objeto das matemáticas não existe por si só e nem faz parte de uma instância física do real. Ele só se manifesta no seio da relação epistemológica mutuamente condicionada que se estabelece entre o sujeito epistêmico e o objeto. Além disso, não são os aspectos particulares dessa manifestação os visados pelas matemáticas, mas apenas aqueles que provocam no sujeito a abstração do geral. Daí, o "compartimento" do real a que as matemáticas se referem é aquele ao qual se aplica, de algum modo, a categoria do geral.

Finalmente, no que diz respeito à terceira das idéias fundamentais que estariam na base de uma nova atitude em filosofia da matemática, a novidade introduzida por Zúñiga é a referência ao social enquanto fator epistemólogico condicionante da relação sujeito-objeto no ato do conhecimento. Ainda que tanto o sujeito epistêmico quanto o objeto sejam por ele considerados dinâmicos e ativos (embora não da mesma forma) no seio dessa relação, o contexto social tem o poder não só de influir substancialmente no modo do sujeito agir, como também de modificar a realidade do objeto. Além disso, é o social enquanto fator epistemológico que imprime ao processo do conhecimento uma dimensão histórica.

São essas três idéias que acabamos de expor e detalhar que, segundo Zúñiga, justificariam a importância da história para o ensino da matemática. De fato, assinala ele: "Ao assumir o caráter empírico das matemáticas manifesta-se a necessidade de introduzir a história concreta em seu ensino. A opinião que afirma a diversidade das matemáticas coloca-nos a necessidade de estabelecermos uma aproximação mais concreta e respeito desses corpos teóricos. Ao mesmo tempo, ao assinalar o papel ativo do sujeito, em uma relação dialética que não elimina nem o objeto e nem o social, torna-se importante recorrer aos momentos históricos de construção individual para se desenvolver adequadamente o ensino-aprendizagem" (Zúñiga, 1987a, p. 18).

Mas além de realçar esse poder, que só a história teria, de fazer emergir uma nova atitude pedagógica em Educação Matemática, que ao mesmo tempo revelasse e se ajustasse a uma nova e revolucionária filosofia desse campo do conhecimento, cuja adequabilidade e legitimidade apenas essa mesma história poderia sustentar, Zúñiga atribui a ela pelo menos mais duas outras funções didáticas: "A participação da história dos conteúdos matemáticos como recurso didático é imprescindível. O desenvolvimento histórico não só serve como *elemento de motivação* mas também como *fator de melhor esclarecimento do sentido dos conceitos e das teorias estudadas*. Não se trata de fazer uma referência histórica de duas linhas ao iniciar um capítulo, mas de realmente usar a ordem histórica da construção matemática para facilitar uma melhor assimilação durante a reconstrução teórica. Isso é central. Os conceitos e noções da matemática tiveram uma ordem de construção histórica. Esse decurso concreto põe em evidência os obstáculos que surgiram em sua edificação e compreensão. Ao recriar teoricamente esse processo (obviamente adaptado ao estado atual do conhecimento) é possível revelar seu sentido e seus limites. A história deveria servir, então, como o instrumento mais adequado para a estruturação do delineamento mesmo da exposição dos conceitos. É provável também que com uma aproximação dessa natureza seja possível satisfazer as exigências de um sentido vetorial do concreto ao abstrato. Com isso não se quer dizer que se deve reproduzir mecanicamente a ordem de aparição histórica dos conceitos matemáticos; sem dúvida, todas as ciências possuem certa lógica interna que se dá a partir de sínteses teóricas importantes e que se deve assimilar no ensino-aprendizagem. Só se coloca a necessidade de buscar um equilíbrio verdadeiramente dialético entre esse lógica interna e a história de sua evolução conceptual, enfatizando a importância do segundo" (Zúñiga, 1988, p. 34, grifos nossos).

Portanto, além da história como fator de motivação, também a história como instrumento de uma dupla revelação: do sentido dos conceitos e da natureza última da matemática. São essas, segundo Zúñiga, as três funções que a história pode e deve cumprir.

8. JONES E A HISTÓRIA COMO INSTRUMENTO DE EXPLICAÇÃO DOS PORQUÊS E COMO FONTE DE OBJETIVOS PARA O ENSINO

São múltiplas as funções pedagógicas da história assinaladas por P.S. Jones, notadamente em seu artigo "A história da matemática como ferramenta de ensino", capítulo I do livro "Historical Topics for the Mathematics Classroom" (1969).

Segundo ele, uma utilização adequada da história, desde que associada a um conhecimento atualizado da matemática e de suas aplicações, poderia levar o estudante a perceber:

1) que a matemática é uma criação humana;
2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática;
3) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e o mundo físico e matemática e Lógica;
4) que necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de idéias matemáticas;
5) que a curiosidade estritamente intelectual, isto é, que aquele tipo de conhecimento que se produz tendo como base a questão "O que aconteceria se...?", pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias;
6) que as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;
7) a natureza e o papel desempenhado pela abstração e generalização na história do pensamento matemático;
8) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Embora Jones, no artigo citado, não apenas levante esse conjunto de objetivos - que, segundo ele, seria desejável que estivessem presentes na formação do homem contemporâneo -, como também indique, em correspondência com eles, um conjunto de temas específicos da matemática cujo tratamento histórico adequado poderia levar à sua concretização, é na possibilidade de desenvolvimento de um ensino da matemática baseado na compreensão e na significação que ele acredita realizar-se a função pedagógica fundamental da história.

É claro que, subjacente a todo processo de ensino-aprendizagem que visa à compreensão e à significação, está o levantamento e a discussão dos porquês, isto é, das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios, procedimentos etc. por parte do estudante.

Jones acredita que existem três categorias de porquês que deveriam ser levadas em consideração por todos os que se propõem a ensinar matemática: os "porquês cronológicos", os "porquês lógicos" e os "porquês pedagógicos".

Os "porquês cronológicos" são aquelas explicações cuja legitimidade não se caracteriza como uma necessidade lógica. Ao contrário, são razões de natureza histórica, cultura, casual, convencional ou de outro tipo qualquer que estão na base de sua aceitação. Exemplos disso seriam as respostas que poderíamos dar a questões do tipo: por que há 60 segundos em um minuto? Por que o zero se chama zero ou o seno se chama seno? Por que uma circunferência possui 360 graus?

Os "porquês lógicos" são aquelas explicações cuja aceitação baseia-se na decorrência lógica de proposições previamente aceitas ou no desejo de compatibilizarmos entre si duas ou mais afirmações não necessariamente compatíveis. Exemplos disso seriam as respostas que poderíamos dar a questões do tipo: porque o produto de dois números negativos é um número positivo? Por que a raiz quadrada de dois é igual a dois elevado ao expoente um meio? É claro também que, nessa categoria, incluem-se todas as questões relativas à compreensão da natureza de um sistema axiomático.

Finalmente, os "porquês pedagógicos" são aqueles que não se incluem em quaisquer das categorias anteriores, isto é, são aqueles procedimentos operacionais que geralmente utilizamos em aula e que se justificam mais por razões de ordem pedagógica do que históricas ou lógicas. Exemplo disso seria a resposta que um professor poderia dar à questão: por que você ensina a extrair o maior divisor comum entre dois números pelo método das subtrações sucessivas e não pelo da decomposição simultânea ou outro qualquer? As razões invocadas pelo professor poderiam ser, por exemplo: porque é um processo de fácil justificação, porque é um processo cuja compreensão exige poucos pré-requisitos etc.

Essa categorização poderia sugerir-nos que a história só interviria como instrumento auxiliar na explicação da primeira categoria de porques, isto é, dos porques cronológicos. Não é isso, porém, o que pensa Jones. Para ele, a história não só pode como deve ser o fio condutor que amarraria as explicações que poderiam ser dadas aos porquês pertencentes a qualquer uma das três categorias. É na defesa dessa possibilidade que se revela o poder da história para um ensino-aprendizagem da matemática baseado na compreensão e na significação.

9. A HISTÓRIA COMO INSTRUMENTO NA FORMALIZAÇÃO DE CONCEITOS

Da literatura específica que conseguimos resumir para constituir o núcleo documental básico para a composição deste Estudo podemos destacar também, além daquelas que já assinalamos, uma outra função pedagógica da história da matemática: a de instrumento na formalização de conceitos.

Essa posição é defendida pelos professores que compõem o Seminário de História e Educação Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas[5].

Mas como o grupo chegou a essa conclusão, isto é, por que razão a história pode e deve desempenhar um papel formalizador em Educação Matemática? Antes de mais nada é preciso explicitar o que o grupo entende por formalização, uma vez que, no meu modo de entender, o grupo afasta-se do significado que usualmente é atribuído a esse termo em matemática e filosofia da matemática e adota uma concepção personalizada, de caráter pragmático, da formalização. De fato, esclarece-nos o grupo de professores, "o significado de formalizar que assumimos neste trabalho não está relacionado a este conceito de formalização como produto final, mas tomamos por formalizar *o processo de traçar caminhos para se chegar a um determinado fim*, ou seja, quando o indivíduo é capaz de determinar esses caminhos, essa foi

---

[5] Os professores que atualmente integram esse Seminário que existe desde 1988, são: Eduardo Sebastiani, Ema L. Beraldo Prado, Maria Q. A. Anastácio, Roseli de A. Garcia, Ademir D. Caldeira, Jackeline R. Mendes e Mauro D. da Silva.

realizada" (Sebastiani et al., 1992, pp. 31-32, grifos meus).

Esse modo de conceber o termo permite ao grupo afirmar a existência de diferentes níveis de formalização de um conceito que ocorrem nas diferentes etapas do processo de construção do conhecimento pelo sujeito.

Mas, se a formalização não constitui apenas uma parte (geralmente a final) do processo cognitivo de elaboração e reelaboração dos conceitos, mas dele participa em sua integralidade, e se o grupo parte do pressuposto de que a aprendizagem da matemática deve ocorrer com compreensão e significação, então, é natural considerar os momentos de formalização como condicionadores da obtenção de uma aprendizagem significativa. Por outro lado, o grupo constata que, no desenvolvimento histórico da matemática, os fatores "forma e rigor levaram os matemáticos a dar roupagens diferentes a conceitos..." (Sebastiani et al., 1992, p. 38), isto é, conduziram a diferentes formalizações de um mesmo conceito. São, portanto, essas diferentes formalizações de um mesmo conceito que devem constituir-se em objeto de ensino-aprendizagem. Logo, apresenta-se como legítimo para o grupo o estabelecimento de um paralelismo entre as formalizações nessas duas instâncias - a histórica e a cognitiva - sendo as formalizações históricas o instrumento que promove e dá sentido à realização das formalizações cognitivas.

10. GERDES E A HISTÓRIA COMO INSTRUMENTO DE RESGATE DA IDENTIDADE CULTURAL

Gerdes jamais referiu-se explicitamente à necessidade de "uso" da história no ensino. Entretanto, no meu modo de entender, foi quem mais contribuiu para que essa questão pudesse ser enfocada sob um novo ponto de vista, ao mesmo tempo original e não-linear. Isso porque, a história da matemática não lhe aparece nem como um ponto de partida e nem como algo pronto e acabado que pudesse se constituir em objeto de uso e abuso por parte dos educadores.

A sua preocupação fundamental incide sobre o papel a ser desempenhado pela matemática no processo de reconstrução, em bases novas, do sistema educacional moçambicano, após a extinção do regime colonial imposto a este país por Portugal. A imagem da matemática criada e difundida pelo colonizador, apresentava-a como "uma criação e capacidade exclusiva dos homens brancos; as capacidades matemáticas dos povos colonizados eram negadas ou reduzidas à memorização mecânica; as tradições africanas e índio-americanas ficaram ignoradas ou desprezadas" (Gerdes, 1991, p. 62). Daí, o baixo desempenho em matemática por parte das crianças, o bloqueio psicológico, a aversão e a impopularidade desse saber especialmente para os filhos de camponeses e operários; daí, também, a atribuição à Educação Matemática do perverso e dicriminador papel de filtro educacional mais eficiente de seleção da elite social. Para Gerdes, a reversão desse quadro passa pela necessidade de eliminação não só desse bloqueio psicológico como também de um bloqueio cultural. Ou melhor, a eliminação do bloqueio cultural constitui-se em condição necessaria para a superação do bloqueio psicológico: "é necessário encorajar a compreensão de que os povos africanos foram capazes de desenvolver matemática no passado, e portanto - reganhando confiança cultural - serão capazes de assimilar e desenvolver a matemática de que necessitam" (Gerdes, 1991, p. 62).

Trata-se pois de proceder à incorporação no currículo das tradições matemáticas e, para isso, se faz necessário, antes de mais nada, reconhecer o caráter matemático dessas tradições através da ampliação do que normalmente se entende por matemática. Mas essa ampliação não é suficiente. O problema crucial consiste no empreendimento de reconstrução dessas tradições, visto que "muitas delas foram - como consequência da escravatura, do colonialismo... - destruídas. Poucas ou quase nenhumas fontes escritas (no caso de Moçambique) podem ser consultadas" (Gerdes, 1991, p. 63). A necessidade dessa reconstrução impõe-lhe o dever de fazer-se historiador a fim de desvelar o que chama de "matemática oprimida" - isto é, aqueles elementos matemáticos presentes na vida diária das massas populares e que não são reconhecidos como matemáticos pela ideologia dominante - ou então, "descongelar" o pensamento matemático que se encontra oculto ou "congelado" em técnicas antigas (Gerdes, 1991, p. 29).

Mas se quase tudo está perdido, ou melhor, foi destruído, qual metodologia deverá guiar-nos nesse processo de reconstrução? Gerdes caracteriza-a do seguinte modo: "... olhamos para as formas e padrões geométricos de objetos tradicionais como cestos, esteiras, potes, casas, armadilhas de pesca, etc, e colocamos a questão: Por que estes produtos materiais possuem a forma que têm? Para responder a esta questão, aprendemos as técnicas de produção usuais e tentamos variar as formas. Resultou que a forma destes objetos não é quase nunca arbitrária, mas geralmente representa muitas vantagens práticas e é, muitas das vezes, a única solução possível ou a solução ótima de um problema de produção. A forma tradicional reflete experiência e sabedoria acumuladas. Constitui não só conhecimento biológico e físico acerca dos materiais que são usados, mas também conhecimento matemático, conhecimento acerca das propriedades e relações dos círculos, retângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares, cones, perâmides, cilindros, etc" (Gerdes, 1991, p. 63).

Embora Gerdes nunca o tenha feito, é possível estabelecer uma analogia entre a tarefa que ele se impõe enquanto historiador da matemática frente aos desmandos do colonialismo e aquela atribuída por Benjamim ao historiador crítico ou dialético no quadro de sua filosofia da história. De fato, a tarefa do historiador não é, para Benjamim, a de "resgatar, sob o peso das camadas de sentido sedimentadas pela tradição, as outras histórias, as outras promessas e alternativas truncadas ao longo do processo histórico? ... O historiador dialético não é para ele o messias que vem libertar os oprimidos históricos de todos os tempos, através do resgate da tradição dos vencidos?" (Filho, 1989, p. 43 e p. 67). Do mesmo modo que "o principal objetivo de Benjamin é a salvação alegórica da memória involuntária, soterrada pelo processo de transmissão (a historiografia das classes dominantes) da obra histórica" (Filho, 1989, p. 67), o projeto de Gerdes tenciona salvar a memória dos processos originais de produção do saber matemático desaparecidos ou soterrados (voluntariamente?) pelo irreversível e crescente movimento de abstração e generalização de idéias, métodos e teorias.

Pode-se inferir da obra de Gerdes que é apenas a história produzida com tais objetivos e metodologia que possui um valor pedagógico. De fato, afirma ele: "O artesão que imita uma técnica conhecida, não está, geralmente a fazer (muita) matemática. Mas o(s) artesão(s) que descobriu (descobriram) a técnica, fez (fizeram) matemática, estava(m) a pensar matematicamente. Quando os alunos são estimulados a *reiventar* uma tal técnica de produção, estão a fazer e a aprender matemática. Eles só podem ser estimulados neste assunto se os próprios professores estão conscientes da existência da matemática escondida, estão convencidos do valor cultural, educacional e científico da redescoberta e exploração da matemática escondida, estão conscientes do potencial de descongelamento desta matemática congelada" (Gerdes, 1991, p. 63, grifo do autor).

Para Gerdes, portanto, apenas uma história cultural da matemática - isto é, uma etnohistória - terá a capacidade de contribuir para a recuperação da identidade cultural africana, uma vez que confia que é a exploração pedagógica dessa etnohistória da matemática, isto é, que é a sua reivenção por parte do aluno, o fator gerador da auto-confiança social e cultural, condição indispensável para o despertar da imaginação.

Mas em que se baseia o seu confiar nessa auto-confiança? Em que se fundamenta a sua crença de que a reivenção pedagógica da história cultural da matemática teria o poder de produzir auto-confiança, isto é, de extinguir um bloqueio que se processa a nível psicológico? Embora Gerdes não coloque a si próprio essa questão, penso ser problemático tomá-la como um postulado psico-pedagógico na medida que parece óbvio o seu caráter não-óbvio, o que o obrigaria a empenhar-se na busca de evidências para sua eventual aceitação.

11. OBSTÁCULOS À UTILIZAÇÃO PEDAGÓGICA DA HISTÓRIA

Mas nem todos os matemáticos e educadores matemáticos que, em algum momento, procuraram refletir e expressar as suas opiniões em relação à questão que estamos estudando, posicionaram-se de forma otimista a respeito das potencialidades pedagógicas da história. Dentre eles destacam-se Andre Lichnerowicz, Edwin E. Moise, I. Grattan-Guinness e Victor Byers. Procuraremos agora explicitar os seus argumentos e as eventuais alternativas por eles propostas.

Lichnerowicz parte de uma constatação que, segundo ele, constitui-se na dificuldade essencial do ensino da matemática. Trata-se da necessidade de conciliar duas exigências aparentemente opostas: por um lado, é necessário que esse ensino esteja, em todos os níveis, em consonância com as possibilidades intelectuais de nossos alunos, mas, por outro lado, existe também a necessidade de iniciá-los no espírito científico contemporâneo. Lichnerowicz propõe-se a pensar exclusivamente sobre a segunda dessas exigências, e a urgência dessa iniciação ao espírito científico contemporâneo deve-se à profunda defasagem existente entre a matemática que é ensinada na escola elementar e secundária e aquela que é ensinada na Universidade. Mas em que consiste essa defasagem? Trata-se, no fundo, segundo ele, de um choque de concepções uma vez que o ensino pré-universitário da matemática é tributário da concepção de matemática procedente dos gregos, enquanto que, na Universidade, a matemática é ensinada por intermédio de uma concepção não-clássica desenvolvida nos últimos 100 anos através de trabalhos revolucionários. A eliminação dessa defasagem, vista por ele como desejável, só pode ocorrer através de uma ruptura com esse ensino tradicional demasiadamente atrelado à história: "Não me inspira confiança um ensino de tipo histórico. Inclino-me a crer que nosso ensino é, atualmente, demasiado histórico e que a concepção de matemática que ele transmite é precisamente aquela que foi contemporânea dos conhecimentos que pretende ensinar" (Piaget et al., 1968, p. 59).

Se para Zúñiga, como vimos anteriormente, a condição para o ajuste entre a educação matemática e uma concepção epistemológica adequada à natureza da matemática contemporânea era exatamente a introdução do elemento histórico no ensino, para o Lichnerowicz dos anos 50, era esse elemento mesmo que constituía-se no obstáculo fundamental para esse ajuste.

Essa diversidade de pontos de vistas não se explica unicamente através da adoção de concepções diferenciadas de matemática por eles mas, sobretudo, pelo modo como Lichnerowicz concebe a relação história-matemática. O "histórico" é entendido como "não-contemporâneo". Além disso, de acordo com a leitura que ele faz do desenvolvimento da matemática no tempo, o contemporâneo, ainda que seja produzido por intermédio de uma reinterpretação radical do histórico, é superdimensionado em relação a ele; mais que isso, parece justificar a sua superfluidade. Então, se o histórico é visto como epistemologicamente supérfluo, porque obsoleto, um ensino de tipo histórico jamais teria a possibilidade de iniciar os pré-universitários no espírito da matemática contemporânea. De fato, segundo Lichnerowicz, "a dificuldade essencial, o obstáculo fundamental para um ensino de tipo histórico reside no fato de que é uma característica da matemática repensar integralmente seus próprios conteúdos, e nisso reside inclusive uma condição essencial de seu progresso. Não pode dar-se, segundo creio, de uma vez para sempre, uma concepção suficiente da aritmética elementar ou da geometria elementar, uma concepção que bastaria afinar-se com as experiências da psicologia humana. Ao contrário, *devido à unidade da matemática*, o esclarecimento das noções primeiras e dos teoremas experimenta notáveis modificações. O que antes era quase o ponto de partida de um caminho de investigação, converte-se agora, à luz de uma óptica nova, em um simples exercício, e vice-versa" (Piaget et al., 1968, p. 60, grifos nossos).

Se para Zúñiga a análise histórica do desenvolvimento da matemática conduz à defesa da fragmentação desse campo de investigação, característica essa que, para ser pedagogicamente explorada, exige a introdução do elemento histórico no ensino, para Lichnerowicz, a crença na unidade da matemática, associada àquela da superioridade epistemológica do ponto de vista contemporâneo em relação aos que lhes antecederam no tempo, destrói qualquer pretensão pedagógica a um recorrer à história.

O argumento da opção pelas abordagens atualizadas da matemática, em razão da defesa da superioridade lógica e epistemológica das concepções contemporâneas em relação àquelas que cronologicamente lhes antecederam, foi também utilizado, na década de 60, por Edwin E. Moise, matemático da Universidade de Harvard. Para apoiá-lo, Moise recorre à discutível distinção radical entre as tradições literárias e artísticas e as tradições matemáticas: "A matemática não tem tradições comparáveis àquelas da literatura e da arte: algumas das suas melhores partes desenvolvidas no passado estão mortas, pelo menos em um sentido estilístico. Sendo assim, a tarefa de um aluno de cálculo é entender o cálculo e, para isso, não é necessário e nem suficiente que ele entenda Newton" (Moise, 1965, p. 411).

Tanto a referência de Moise à morte estilística quanto a de Lichnerowicz à reinterpretação radical do histórico no desenvolvimento da matemática sugerem-nos que o ponto de vista de ambos baseia-se naquele expresso em 1869 pelo matemático e historiador da matemática alemão, Hermann Hankel: "Na maior parte das ciências uma geração destrói o que a outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo discurso para a antiga estrutura" (Byers, 1982, p. 63).

O ponto de vista de Hankel só parece ser contestável caso admitamos uma distinção radical entre conteúdo e forma no âmbito da matemática. Seria possível desse modo, como o faz Crowe (1975), ilustrar e justificar a ocorrência de mudanças qualitativas em setores como o da linguagem simbólica, o dos padrões de rigor e o da metamatemática, ou como o faz Grabiner

(1972), que admite a ocorrência de revoluções no plano da natureza da verdade matemática, das proposições passíveis ou não de serem demonstradas e da natureza da própria matemática. Pode-se, em contrapartida, argumentar a favor do ponto de vista de Hankel, através da acumulação de exemplos que mostram, que a maioria dos núcleos temáticos da matemática passaram, de fato, por sucessivas reinterpretações tornando-se mais genéricos, mais abstratos e mais rigorosos. É o caso, por exemplo, da reinterpretação feita por Hilbert, no século 19, da geometria euclidiana clássica, em função da descoberta de falhas lógicas na obra de Euclides. Poderíamos citar ainda o caso das sucessivas reinterpretações da trigonometria motivadas não mais por razões de ordem estritamente lógicas, mas pela percepção de que o antigo corpo de conhecimentos trigonométricos, quando adequadamente estendido e ampliado, constituía-se num instrumento útil para o enfrentamento de problemas colocados à matemática por outros campos do conhecimento científico.

Assim, enquanto a trigonometria foi vista apenas como um instrumento para o agrimensor, e suas lei identificadas apenas como leis da agrimensura, a palavra "seno" só podia ser entendida e definida como a razão entre o lado oposto a um ângulo agudo e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Mais tarde, quando a astronomia grega, que concebia os planetas movendo-se em órbitas circulares, mostrou ser necessária a determinação dos comprimentos das cordas dos círculos em função dos comprimentos dos arcos correspondentes, percebeu-se que a trigonometria poderia ser levada da terra ao céu e ser vista também como um instrumento para o astrônomo e, em decorrência disso, a palavra seno passou a ser entendida e definida como a razão entre a ordenada e o raio vetor determinado por um ângulo central. Porém, quando a Física, a partir do século XVII, resolveu incorporar ao domínio da ciência o problema do movimento, abrindo novos campos de investigação tais como o estudo das cordas vibrantes, dos impulsos elétricos, das ondas de rádio, das ondas sonoras e luminosas e, em decorrência disso, revelou à matemática a necessidade de se fornecer subsídios conceituais à pesquisa quantitativa relacionada com as funções periódicas, percebeu-se que a trigonometria poderia prestar-se igualmente bem a essa tarefa, e a palavra seno passa a ser definida, de modo funcional e dinâmico, como a ordenada de um ponto que se movimenta sobre uma circunferência de raio unitário. Esse trajeto percorrido pela palavra seno em particular, e pelas funções trigonométricas em geral, passando sucessivamente de instrumento do agrimensor a instrumento do astrônomo e do físico apresentou, porém, um limite, atingido a partir do momento em que ela se converte em um instrumento do matemático. A característica fundamental da última etapa desse processo de generalização e abstração ascendentes consiste no desligamento das funções trigonométricas das idéias de triângulo, círculo e razões e de sua redução a conjuntos de pares ordenados de números, através de artifícios tais como o de resumir séries infinitas. Na última etapa de seu itinerário histórico a palavra seno é definida, portanto, como o limite de uma série infinita correspondente a um número complexo substituído nessa série (cf. Jones, 1969 e Watanabe, 1980, pp. 69-77).

Mas é preciso ressaltar que a aceitação do ponto de vista epistemólogico de Hankel poderia conduzir-nos a duas atitudes pedagógicas opostas em relação ao papel da história no ensino da matemática, ambas baseando-se na inferência de um sentido definido para o curso do desenvolvimento histórico da matemática. Se esse sentido é o da abstração e generalização crescentes, o cronologicamente posterior contém, com maior dose de rigor e com maior potencialidade de aplicação, as elaborações antecedentes. Daí, as abordagens atualizadas são tidas como pedagogicamente mais adequadas por serem, ao mesmo tempo, mais rigorosas, mais práticas e didaticamente mais eficazes, pois conduzem-nos aos objetivos visados mais rapidamente e com menos esforço. É essa a conclusão que tanto Lichnerowicz quanto Moise preferem extrair do ponto de vista de Hankel. A segunda passagem do texto de Moise atesta-nos a sua preferência: "Também ouvimos a regra de que o particular deveria preceder o geral. Geralmente, isso conduz a resultados racionais mas aqui, novamente, há exceções. O modo mais fácil que conheço para ver que o número 5 tem uma raiz cúbica é observar (de algum modo) que a função cúbica é contínua e que, então, deve tomar todos os valores entre 0 e 8. Não vejo vantagem em especificar o teorema do valor médio para o qual esse argumento recorre; seu habitat natural, tanto logica como psicologicamente, é o conjunto das funções contínuas nos intervalos" (Moise, 1965, p. 411).

Uma atitude pedagógica oposta a essa, também assentada no ponto de vista de Hankel, consiste em colocar em dúvida a possibilidade de se penetrar de forma compreensiva e significativa nas abordagens contemporâneas partindo-se delas mesmas. Nesse sentido, se para Lichnerowicz as abordagens contemporâneas são re-interpretações radicais do histórico, seria legítimo remeter-lhe a pergunta: como pode o aprendiz re-interpretar algo que ainda não interpretou em primeira instância? Por que conceder essa oportunidade apenas aos construtores históricos dos conceitos e teorias e sonegá-la aos seus aprendizes da atualidade?

Se para Moise o passado matemático está morto em sentido estilístico, pode-se remeter-lhe as perguntas: que razões estariam na base das decisões dos matemáticos das novas gerações que os obrigam a mudar de estilo? E se esses diferentes estilos aplicam-se, aparentemente, a algo que permanece, como podem os aprendizes da atualidade legitimar significativamente o estilo contemporâneo se não o confrontaram com os diferentes estilos que o precederam e nem apreenderam o núcleo fundamental daquilo que permanece e ao qual esses diferentes estilos se aplicam em última instância?

Mas a difusão desse estilo pedagógico que conscientemente ou não desobrigou-se da historicidade recebeu uma motivação decisiva num momento específico da história. Essa motivação deveu-se, como acusou Grattan-Guinness, à influência exercida pelos cursos ministrados e impressos na École Normale e na École Polytechnique de Paris[6], no final do século XVIII, fato esse que acabou contribuindo para a reorganização da Educação Matemática em todo o mundo ocidental. Diz ele: "A criação da

---

[6] "Na École Normale, o regulamento prescrevia a tomada em estenografia de todos os cursos e debates e um protocolo minucioso envolvia o ritual a seguir para a leitura das provas e para a composição impressa do texto. Assim, o texto devia estar disponível antes de toda sessão de debates. Previa-se a distribuição desses cursos, não somente aos alunos, mas a todos os departamentos e até aos 'cônsules da República francesa no estrangeiro'. Na École Polytechnique não imprimia-se essa estenografia, mas constituía-se uma obrigação contratual que o professor redigisse um curso. No espaço de alguns anos, estava-se em presença, na França, de um número bastante grande de cursos estruturados" (Dhombres, 1980, pp. 346-47).

École Polytechnique em 1794 e a fundação da École Normale em 1795 foram modelos especialmente importantes para a prática educativa da ciência em toda a Europa, e o escrever livros-textos baseados em cursos ministrados em tais instituições converteu-se em um procedimento standard... Com o objetivo de apresentar aos estudantes, de uma maneira inteligível, os componentes básicos do mundo em expansão, os professores e autores de livros-textos, que nem sempre se destacavam na investigação, tinham a intenção de apresentar, da melhor forma possível, o essencial do ramo particular da matemática em questão, de uma maneira ao mesmo tempo rigorosa e breve. Esse estilo de apresentação tinha a vantagem de acumular a máxima quantidade de conhecimentos matemáticos já consolidados em um espaço determinado, evitando que livros, por si sós já volumosos, se tornassem impossíveis de ser lidos devido ao seu tamanho. Contudo, também tinha como consequência que a matemática parecia caber, completa e perfeita, nas páginas impressas, e assim, embora resultasse, talvez, clara na forma, permanecia, em grande medida, não-motivada e, portanto, tornava-se difícil para o estudante compreendê-la sob esse ponto de vista. Dito de outra maneira, nessa tradição de ensino da matemática, a maior ênfase era posta na acumulação de conhecimentos matemáticos, no amontoado de "fatos" que uma teoria matemática contém, sem deter-se demasiadamente na consideração do crescimento do conhecimento matemático mesmo, nem na compreensão do porque uma teoria matemática tomou a forma que tomou, mas simplesmente no fato de que tem o conteúdo que de fato tem" (Grattan-Guinness, 1984, pp. 12-13).

Mas, ao mesmo tempo em que Grattan-Guinness busca e localiza na história as razões da supremacia das abordagens lógicas em relação às históricas em Educação Matemática, e defende, em outro texto, que o conteúdo é menos importante que o espírito metodológico no qual esse conteúdo é apresentado, não deixa de apontar os obstáculos que se colocam à utilização pedagógica da história.

O primeiro deles diz respeito à ausência de literatura disponível e adequada sobre a história da matemática anterior aos dois últimos séculos, tendo em vista que a maior parte daquilo que usualmente é ensinado de matemática em nossas escolas pertence a esse período (cf. Grattan-Guinness, 1973, p. 445).

Byers também concorda com Grattan-Guinness a esse respeito quando afirma que "escrever uma boa história da matemática escolar é, provavelmente, mais difícil que escrever a história da matemática babilônica" (Byers, 1982, p. 62). Acrescenta, porém, uma outra observação referente à natureza da literatura histórica disponível que a torna particularmente imprópria à utilização didática. Trata-se de uma característica específica dos manuscritos e das publicações matemáticas de destacarem unicamente os resultados matemáticos e ocultarem a forma de sua produção e, devido a isso, exatamente aquilo que poderia ter alguma importância pedagógica - isto é, os aspectos não-lógicos subjacentes aos processos de descoberta - estão irremediavelmente perdidos e cuja reconstituição constitui-se num empreendimento extremamente complexo, mesmo para um historiador profissional (cf. Byers, 1982, p. 62).

Acreditamos, porém, que esse argumento, embora legítimo, deveria ser encarado menos como uma barreira instransponível às iniciativas pedagógicas que busquem uma vinculação entre a história e a educação matemática, e mais como um estímulo à continuidade das investigações nesse sentido. Isso porque, as "lacunas" ou os "silêncios" apontados por Byers não se colocam como problema exclusivo aos historiadores da matemática, mas constituem parte integrante do trabalho de qualquer historiador de ofício e, talvez, não sejam os mais impermeáveis às reconstituições. De fato, assinala Carr, "a história tem sido vista como um enorme quebra-cabeças com muitas partes faltando. Mas o principal problema não consiste em lacunas. Nossa imagem da Grécia do século V a.C. é incompleta, não porque tantas partes se perderam por acaso, mas porque é, em grande parte, o retrato feito por um pequeno grupo de pessoas de Atenas. Nós bem sabemos como a Grécia era vista por um cidadão ateniense; mas não sabemos praticamente nada de como era vista por um espartano, um coríntiano ou um tebano - para não mencionar um escravo ou outro não-cidadão residente em Atenas. Nossa imagem foi pré-selecionada e predeterminada para nós, não tanto por acaso mas porque pessoas estavam imbuídas de uma visão particular, consciente ou inconscientemente..." (Carr, 1987, p. 16).

Um segundo obstáculo à utilização pedagógica da história é apontado por Grattan-Guinness. Embora admita a falsidade da distinção comumente feita entre matemática e história da matemática - pois, para ele "há somente problemas matemáticos e eles têm uma história" (Grattan-Guinness, 1973, p. 446) -, discorda, com razão, do ponto de vista de que a introdução do elemento histórico no ensino seja capaz de torná-lo mais fácil.

Ao contrário, o caminho histórico é, tanto para ele quanto para Byers, muito mais árduo uma vez que o estudante, se confrontado com os problemas originais e com as soluções que historicamente lhes foram propostas, dispenderia um tempo e um esforço sem precedentes tentando reconstituir um contexto que não lhe é familiar. Em vista disso, conclui que "se um livro-texto sobre algum ramo da matemática fosse escrito em uma linha histórica, ele seria o livro mais difícil do mercado" (Grattan-Guinness, 1973, p. 446). Em contrapartida, acrescenta que o que se perde em tempo e energia ganha-se em significado, sentido e criatividade. Isso porque, no caminho histórico "está o mundo real de idéias, visto em gênese, desenvolvendo-se e deteriorando-se, mais do que uma imitação artificial na qual o problema central é removido. Este é o sentido em que a aprendizagem é 'mais fácil': um sentido pessoal no qual o estudante põe em relevo o trabalho criativo e imita a descoberta individual dos resultados" (Grattan-Guinness, 1973, p. 446).

Mas se a história é, para Grattan-Guinness, um elemento que dificulta mas ao mesmo tempo esclarece e dá sentido, um elemento que torna o processo de aprendizagem árduo e moroso mas ao mesmo tempo criativo e natural, a questão que se coloca no plano pedagógico é: como fazer a opção? A resposta de Grattan-Guinness é que, em nível universitário, a história não só pode como deve estar presente na abordagem dos conteúdos do ensino. Não se trata, acrescenta ele, de fazer da "história da matemática" uma disciplina à parte como se ela fosse um ramo separado da matemática, mas encará-la como parte essencial de todos os ramos (cf. Grattan-Guinness, 1973, p. 446 e p. 449). Porém, nos demais níveis de ensino, sobretudo na educação primária, a história é, para ele, inútil se encararmos a sua utilização do modo como foi proposta para o nível universitário. Nesses demais níveis, a alternativa que propõe é aquilo que chama de "história satírica".

Em que consiste a proposta pedagógica da "história-satírica"? Trata-se, para ele, de imitar o desenvolvimento de um determinado tema ou teoria omitindo os contextos históricos nos quais ela se desenvolve. A proposta da história-satírica é, portanto, a da história cronológica descontextualizada de um tema.

Embora Grattan-Guinness não nos tenha fornecido um exemplo operacionalizado da sua proposta de história-satírica é possível estabelecer uma analogia entre ela e aquilo a que Lakatos denomina "história destilada". É essa "história destilada" que Lakatos coloca deliberadamente na base de sua proposta de um enfoque heurístico para o ensino-aprendizagem da matemática, por acreditar ser ele, contrariamente ao enfoque euclidiano ou dedutivista, o único capaz de promover a constituição de um pensamento independente e crítico: "Alguns manuais declaram não esperar que o leitor tenha qualquer conhecimento anterior, apenas certa maturidade matemática. Isso não raro quer dizer que esperam seja o leitor dotado pela natureza com a 'capacidade' de tomar um argumento euclidiano sem qualquer interesse fora do comum no estofo problemático, na heurística por trás do argumento. Ainda não se compreendeu suficientemente que a atual educação científica e matemática é um foco de autoritarismo e que é a pior inimiga do pensamento independente e crítico. Embora em matemática esse autoritarismo siga o padrão dedutivista ... em ciência ele age através do padrão indutivista" (Lakatos, 1978, pp. 185-186).

Após apontar os perigos subjacentes a uma Educação Matemática que se processe segundo o enfoque dedutivista, Lakatos tenta demarcar as fronteiras de seu projeto heurístico: "Os formalistas, quando falam da descoberta, discriminam o contexto da descoberta e o contexto da justificação. 'O contexto da descoberta é deixado à análise psicológica, ao passo que a lógica se ocupa da justificação' (Reichenbach). Opinião semelhante pode ser encontrada em R. B. Braithwaite e mesmo em K. R. Popper. Popper, quando dividindo os aspectos da descoberta entre psicologia e lógica de tal modo a não deixar lugar para a heurística como campo independente de investigação, obviamente não tinha então compreendido que sua 'lógica da descoberta' era mais que o esquema estritamente lógico do progresso da ciência. Essa a origem do título paradoxal de seu livro, a tese que parece ter duas faces: (a) não existe lógica do descobrimento científico - tanto Bacon como Descartes estavam errados; (b) a lógica do descobrimento científico é a lógica de conjecturas e refutações.A solução desse paradoxo está à mão:(a) não existe lógica infalibilista do descobrimento científico, que leve infalivelmente a resultados; (b) existe uma lógica falibista do descobrimento que é a lógica do progresso científico. Mas Popper, que lançou a base dessa lógica do descobrimento, não estava interessado na meta-questão do que era a natureza de sua investigação e não compreendeu que isso nem era psicologia nem lógica, mas disciplina independente: a lógica do descobrimento, heurística" (Lakatos, 1978, p. 187).

A genial ilustração do enfoque heurístico em ação é fornecida por Lakatos em sua tese a respeito da história da fórmula de Euler-Descartes: V - A + F = 2. Embora o núcleo desse estudo de caso, como afirma o próprio Lakatos na introdução de seu "Provas e Refutações", fosse o de desafiar o formalismo matemático - o que situa esse trabalho no campo da história e filosofia da matemática -, as suas implicações pedagógicas são óbvias. A forma de apresentação desse estudo de caso, além disso, deixa transparecer ainda mais as intenções pedagógicas tácitas de Lakatos: o cenário é uma sala de aula imaginária; professor e alunos imaginários interessados pelo problema real do estabelecimento de uma relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) dos poliedros. "Em vez de matemática esqueletizada e fossilizada", nos dizem Davis e Hersh, "apresenta a matemática crescendo a partir de um problema e uma conjectura, com uma teoria adquirindo forma sob nossos olhos, no calor do debate e da discordância, a dúvida cedendo lugar à certeza e em seguida a novas dúvidas" (Davis e Hersh, 1985, p. 388).

Mas que papel desempenha a história nesse enfoque heurístico baseado no método de provas e refutações?

A resposta a essa questão, que Lakatos não se coloca, pode ser inferida através de uma passagem contida no apêndice 2 da tradução brasileira do "Proofs and Refutations", na qual Lakatos faz referência ao estilo hegeliano no qual se expressa seu enfoque heurístico: "A linguagem hegeliana que emprego aqui seria capaz, segundo penso, de descrever de modo geral os vários desenvolvimentos em matemática. (Ela tem, contudo, seus perigos como seus atrativos). A concepção hegeliana de heurística subjacente à linguagem é aproximadamente essa. A atividade matemática é atividade humana. Certos aspectos dessa atividade - como de qualquer atividade humana - podem ser estudados pela psicologia, outros pela história. A heurística não está interessada primordialmente nesses aspectos. Mas a atividade matemática produz matemática. A matemática, esse produto da atividade humana, 'aliena-se' da atividade humana que a esteve produzindo. Ela se converte num organismo vivo, em crescimento, que *adquire certa autonomia da atividade que a produziu*; ela revela suas próprias leis autônomas de crescimento, sua própria dialética. O autêntico matemático criativo é precisamente uma personificação, uma encarnação dessas leis que só se podem compreender na ação humana. Sua encarnação, porém, raramente é perfeita. A atividade dos matemáticos humanos, tal como aparece na história, é apenas, uma tosca concretização da dialética maravilhosa de idéias matemáticas" (Lakatos, 1978, pp. 189-190, grifos do autor).

Como se percebe, a função da heurística é a de por a nu "a dialética maravilhosa de idéias matemáticas", coisa que a história só consegue concretizar de modo imperfeito. No enfoque heurístico, portanto, cabe à história apenas o papel secundário de fornecer o substrato real e bruto a ser destilado a fim de se obter como produto aquilo que é estritamente indispensável para o afloramento do jogo dialético, puro e sutil, das idéias. A esse produto Lakatos denomina "reconstrução racional da história" ou "história destilada".

Essa dicotomia que Lakatos estabelece entre história real e história destilada e o papel de destaque dado à segunda em relação à primeira aparecem explicitamente no último parágrafo da Introdução de seu "Provas e Refutações": "A forma dialogada (do estudo de caso) deve refletir a dialética do caso; significa conter uma espécie de *racionalidade reconstruída ou história "destilada". A verdadeira história aparecerá nas notas de pé de página, a maioria das quais, portanto, deve ser tomada como parte orgânica deste ensaio*" (Lakatos, 1978, p. 18, grifos do autor).

Uma outra passagem é significativa para ilustrar não apenas essa dicotomia como também a sua crença positivista de estar realmente reconstruindo, nas notas de pé de página, a história verdadeira. Trata-se da nota de rodapé 141 referente à uma manifestação feita pelo aluno Pi a respeito de poliedros não-simples ou poliedros com faces circundantes: "Assim, a declaração de Pi, embora correta heuristicamente (isto é, verdadeira numa história racional da matemática), é historicamente falsa. (Isto não nos deve preocupar: a história real é frequentemente uma caricatura de suas reconstruções racionais)" (LAKATOS, 1978, p. 115).

Pondo de lado a natureza hegeliana do método de provas e refutações subjacente ao enfoque heurístico, tanto a história destilada de Lakatos quanto a história satírica de Grattan-Guinness, têm por propósito comum - ainda que por razões diversas em ambos os autores - a ênfase pedagógica nas idéias, nos processos e nos métodos matemáticos, desligados voluntariamente do contexto de sua produção, ainda que tal contexto desempenhe um papel de fundamental importância para a constituição da sátira e da destilação.

Embora Grattan-Guinness não nos apresente um argumento sequer para justificar as razões pelas quais uma história cronológica descontextualizada de um tema devesse ser encarada como a sequência pedagógica ideal, tenta convencer-nos da inutilidade e ineficácia de uma história contextualizada nos níveis elementares. O seu argumento psicológico apresenta-se como um terceiro e sério obstáculo à utilização pedagógica da história: "mesmo pondo de lado os inevitáveis assuntos técnicos envolvidos, as crianças têm pouco ou nenhum sentido do progresso histórico, pelo menos não o possui para os temas científicos que elas associam com as coisas imediatas" (Grattan-Guinness, 1973, p. 449).

Em certo sentido o argumento de Grattan-Guinness é irrefutável e a sua justa apreciação exige que nos desloquemos do campo da educação matemática para o da educação histórica, uma vez que, subjacente a ele, está a polêmica questão referente ao momento adequado para o início escolar do aprendizado da história.

Antes de mais nada devemos observar que o aparente contra-argumento de que o momento do início da aprendizagem escolar da história não é um problema de natureza estritamente psicológica, mas fundamentalmente social, por estar ele primordialmente vinculado à necessidade que tem o país de que seus cidadãos adquiram conhecimentos relativos à história nacional, não se aplica à questão levantada por Grattan-Guinness. Isso porque, o que está em jogo em seu argumento não é se a criança pode recitar mecanicamente um conhecimento estereotipado de fatos históricos isolados, mas se ela é capaz de deslocar-se de seu contexto atual e adquirir uma real compreensão do passado histórico pois, caso contrário, em que se basearia a crença de que as crianças e adolescentes poderiam aprender significativamente a matemática via história, se a compreensão da própria história acha-se, de partida, comprometida?

Podemos, é claro, tecer algumas considerações a favor do argumento de Grattan-Guinness e que põem em destaque as dificuldades que a criança tem de superar para a construção do universo histórico. Afirma-nos Malrieu que "só os fatos de que tenhamos sido contemporâneos nos aparecem, depois do seu escoamento, como verdadeiramente históricos, dado que eles fazem parte de nossas lembranças e porque se vincula à sua evocação a nostalgia do irremediavelmente desaparecido" (in Legrand, 1974, p. 151). Então, se é por intermédio de um mecanismo baseado na transferência afetiva que se abre ao próprio adulto a possibilidade de exame e apreciação do passado histórico, isto é, se é através de seu passado pessoal que o adulto adquire a real dimensão desse passado é bastante razoável esperar que a criança não poderá ter a ele acesso senão tardiamente pois, de certo modo, a criança não tem passado, isto é, terá de constituí-lo através da co-participação social e do enraizamento nas estruturas sociais (cf. Legrand, 1974, pp. 151-52).

Além disso, um outro obstáculo se interpõe à conquista infantil do passado enquanto dimensão universal. Trata-se da incapacidade de dominar a duração, isto é, de ordenar os eventos sucessivos ou simultâneos. Isso decorre do fato da criança sentir-se impotente para desvencilhar-se do evento vivido e compará-lo com outros ou com algum outro tomado como referência ou, em outras palavras, deve-se ao fato dela viver no instante presente e no futuro. Esse obstáculo só pode ser superado por ela quando "o próprio presente for concebido como engendrando continuamente o passado", isto é, quando "for capaz de religar numa mesma intuição eventos simultâneos e ordenar linearmente eventos sucessivos" (cf. Legrand, 1974, p. 153).

Acreditamos, porém, que esses obstáculos não devam constituir-se em fatores impeditivos à iniciação da construção do pensamento histórico ainda na escola elementar. Mais que isso, pensamos que somente essa iniciação escolar pedagogicamente adequada constitui-se na condição necessária, ainda que não suficiente, à superação gradativa desses obstáculos. Pois, se assim não fosse, isto é, se essa superação pudesse ocorrer de modo espontâneo, seria de se esperar que esse universo histórico estivesse franqueado ao adulto. Porém, afirma-nos Legrand, "essas observações que delimitam as dificuldades que a criança terá de vencer na construção de seu universo histórico nos induzem igualmente a certa humildade, pois que o próprio adulto está longe de havê-la suplantado" (Legrand, 1974, p. 152). Do mesmo modo como as experiências acumuladas pelo adulto num espaço vivido não o conduzem, necessariamente, às leis geométricas subjacentes a um espaço concebido; do mesmo modo como as frequentes percepções de regularidades por parte do adulto, induzindo-o à generalizações, não o conduzem, necessariamente, às leis de transformação subjacentes à álgebra simbólica, assim também a simples presença da possibilidade de transferência afetiva e domínio da duração pelo adulto não o conduz, infalivelmente, ao pensamento histórico.

Então, se a intervenção pedagógica é necessária tanto à construção do pensamento matemático quanto do histórico, e se ambos os tipos de pensamento se defrontam com obstáculos de natureza distinta à sua constituição isolada, julgamos não haver razões adicionais, como as levantadas por Grattan-Guinness, à construção solidária desses campos do conhecimento humano por parte do aprendiz. Em outras palavras, vemos na construção solidária não uma superposição catalizadora das dificuldades específicas a cada campo distinto, mas a possibilidade de instauração de uma reciprocidade esclarecedora e superadora.

Mas, se para Grattan-Guinness a história satírica impõe-se como única alternativa diante dos obstáculos que se colocam à utilização da história nas aulas de matemática, Byers prefere tirar a conclusão de que um tal empreendimento "está fora do alcance da maioria dos professores" (Byers, 1982, p. 62). Entretanto, não infere dessa impossibilidade que a história seja inútil na formação dos professores de matemática. Ao contrário, existiriam para ele algumas atitudes desejáveis do professor diante da matemática, só atingíveis mediante um estudo sistemático da história dessa disciplina. Duas dessas atitudes são destacadas por Byers: a percepção por parte do professor da unidade da matemática e da interação dialética existente entre forma e conteúdo ao longo do desenvolvimento dessa área de conhecimento. O fato de Zúñiga, como vimos, ver, por intermédio da história, a desagregação e a fragmentação da matemática, não impede Byers de extrair dela a lição oposta: "não há dúvida de que a matemática possui uma unidade inerente, não obstante, é igualmente evidente que, em última instância, a unidade da matemática está na sua história" (Byers, 1982, p. 63).

12. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Além de levantar e analisar alguns argumentos que tornam discutível e problemática a utilização pedagógica da história nas aulas de Matemática, tentamos, ao longo das páginas deste Estudo, caracterizar também a diversidade de opiniões que procuram estimular o recorrer a esse procedimento, através da consideração não exaustiva das funções pedagógicas atribuídas à história. As principais funções que os textos revelaram vêem na história:

1) uma fonte de motivação para o ensino-aprendizagem (História-Motivação);
2) uma fonte de seleção de objetivos para o ensino-aprendizagem (História-Objetivo);
3) uma fonte de métodos adequados de ensino-aprendizagem (História-Método);
4) uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica nas aulas de matemática (História-Recreação);
5) um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino (História-Desmistificação);
6) um instrumento na formalização de conceitos matemáticos

(História-Formalização);

7) um instrumento para a constituição de um pensamento independente e crítico (História-Dialética);

8) um instrumento unificador dos vários campos da matemática (História-Unificação);

9) um instrumento promotor de atitudes e valores (História-Axiologia);

10) um instrumento de conscientização epistemológica (História-Conscientização);

11) um instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva (História-Significação);

12) um instrumento de resgate da identidade cultural (História-Cultura);

13) um instrumento revelador da natureza da matemática (História-Epistemologia).

Após a análise desses diferentes pontos de vista e a crítica que fizemos ao modo como geralmente se tenta justificar alguns deles isoladamente, e tendo em vista ainda a ausência de projetos histórico-pedagógicos que, tentando operacionalizá-los, acompanhem através de estudos qualitativos analíticos o modo como os estudantes respondem a tais iniciativas, parece-nos que devemos encarar com prudência a suposta importância pedagógica da história. Entre as opiniões extremadas que tentam nos convencer que a história tudo pode ou que a história nada pode, parece-nos mais adequado assumir uma posição intermediária que acredita que a história - apenas quando devidamente reconstituída com fins pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático - pode e deve desempenhar um papel subsidiário em Educação Matemática. Isso porque, - apesar da constatação reiterada de que a matemática que se apresenta nos currículos oficiais e nos manuais didáticos é, lamentavelmente, concebida como algo que produziu resultados mas que não tem história, enquanto que, como assinala Rogers, "o currículo de história continua a ignorar uma parte significativa de nossa cultura científica e matemática" (Rogers, 1983, p. 401) -, nem a história da matemática escrita sob o ponto de vista do matemático, nem as breves e episódicas referências à matemática que aparecem nas obras dos historiadores conseguem realçar aqueles elementos e aspectos que poderiam, eventualmente, trazer uma real contribuição aos professores que têm a intenção de planejar as suas aulas lançando mão de tal recurso.

Uma provável explicação para essa defasagem existente entre as histórias da matemática escritas na perspectiva do historiador de ofício e do matemático de ofício baseia-se nas expectativas e modos diferenciados com que o matemático e o historiador encaram a relação passado-presente. De fato, assinala Grabiner, "a visão que o historiador tem tanto do passado como do presente é bastante diferente da do matemático. O historiador está interessado pelo passado em sua total riqueza e vê qualquer fato atual como condicionado por uma cadeia complexa de causas em um passado quase que ilimitado. O matemático, em vez disso, está orientado na direção do presente, e na direção da matemática passada principalmente porque ela conduz à importante matemática atual... A história da matemática, quando escrita pelos matemáticos, tende a ser técnica, a focalizar o conteúdo de trabalhos específicos... O mais surpreendente é que, mesmo em se tratando de questões estritamente técnicas, o historiador pode ver as coisas de maneira diferente da do matemático" (Grabiner, 1975, pp. 439-440).

Em função de tal observação é preciso admitir que não existe uma única história da matemática - isto é, que a matemática pode ser historizada através de várias reconstituições, sendo que, pedagogicamente, dependendo dos fins que se têm em vista, algumas são mais pertinentes e esclarecedoras que outras - que estaria aí disponível, pronta e acabada, e de cujos "ensinamentos", - constantes, imparciais e imperiosos - se pudesse "usar" e abusar.

É por isso que acreditamos que, para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Tais histórias, no meu modo de entender, tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros, determinados problemas e métodos e não outros, a enfatizar a reconstituição, não tanto dos resultados matemáticos, mas dos contextos epistemológico, psicológico, sócio-político e cultural de sua produção, contribuindo, desse modo, com a explicitação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas. Algumas questões levantadas por Swetz para ilustrar a relação dinâmica entre matemática e sociedade, e que essas histórias poderiam tomar como base de suas investigações, seriam: "Por que foi justamente na Grécia clássica que teve origem a matemática dedutiva? Por que a emergência do capitalismo mercantil na Itália do século XIV produziu um renascimento matemático? Como a invenção da imprensa afetou o crescimento e a difusão de idéias matemáticas? A competência matemática de uma nação depende de sua riqueza? A guerra muda a natureza da atividade matemática de um país?" (Swetz, 1984, p. 61).

Inúmeros outros aspectos deveriam também ser visados por essas histórias da matemática pedagogicamente orientadas, tais como aqueles assinalados por Winchester em relação à ciência em geral: "os problemas conceptuais envolvidos na formação de um novo campo de pesquisa ou no avanço de um domínio antigo, as inúmeras dificuldades de interpretação, construção de teorias, abandono de teorias ou os problemas morais e estéticos que se apresentam no processo" (Winchester, 1989).

No que se refere particularmente aos problemas morais e éticos, é desastroso que a educação científica e matemática tenha se isentado em relação à sua problematização, restringindo-se à abordagem técnica aparentemente neutra dos "fatos" científicos ou matemáticos. Uma história da matemática pedagogicamente orientada poderia prestar grande auxílio para os professores intencionados em contrapor-se a uma tal tendência tecnicista do ensino, pois poderia explorar e revelar que "armas nucleares, desde o Fat Man e Little Boy, que arrasaram Hiroxima e Nagasaki, até o MX e o Cruise de nossos dias, são objetos matemáticos. Estão saturados de matemática de ponta a ponta. É triste dizer isso, mas poderiam ser vistos como o apogeu de uma grande parte da matemática de nossos tempos e de tempos passados", como nos atestam Davis e Hersh, uns dos raríssimos matemáticos que ousaram incluir em sua obra um capítulo intitulado "A Matemática e a Ética" (Davis e Hersh, 1988, p. 275).

O resgate dos aspectos estéticos inerentes a algumas demonstrações, soluções de problemas, métodos e processos também poderia subsidiar uma Educação Matemática de tendência não-tecnicista, possibilitando o desenvolvimento de atividades vinculadas ao domínio afetivo e que estimulem a imaginação e a criatividade. Nesse sentido, é útil considerar aqui a comparação estabelecida por Swetz entre o trabalho educativo que poderia ser realizado através da exploração dos objetos de arte de um museu e a apreciação por parte dos estudantes das soluções apresentadas por nossos antepassados para o enfrentamento de determinados problemas matemáticos: "Através desse exame dirigido e minucioso, uma pintura ou escultura torna-se um testemunho de seus gênios criadores e oferece alguma compreensão do período em que o artista viveu e trabalhou. Aprendizagem ocorre. Essa aprendizagem é tanto cognitiva quanto afetiva. Assim também ocorre com os problemas matemáticos da história. Em um certo sentido, eles são trabalhos de arte intelectuais e pedagógicos que testemunham uma forma do gênio humano se expressar" (Swetz, 1989, p. 376).

Somente uma história pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, esclarecedora e dinâmica, vindo substituir as enfadonhas histórias evolutivas das idéias matemáticas, quase sempre desligadas das necessidades externas e/ou internas que estiveram na base de sua origem e transformação, poderia subsidiar uma prática pedagógica em matemática que cumprisse, efetivamente, as funções didáticas atribuídas à história pelos autores citados neste Estudo.

Dentre essas funções, gostaria de deixar registrada a minha preferência pelo ponto 11 que destacamos anteriormente, isto é, por uma História-Significação.

Entretanto, é preciso esclarecer que por História-Significação estamos entendendo algo que vai além das propostas de "história-satírica" e de "história-destilada" a que se referem Grattan-Guinness e Lakatos. Isso porque, se a história-satírica é capaz de mostrar o surgimento e as transformações a que foram submetidas as idéias matemáticas, e a "história-destilada" consegue, além disso, revelar - através do desvelamento das idas e vindas, dos avanços e recuos e do confronto racional, engenhoso e sutil de idéias - a dinamicidade e a dialética inerente a essa história transformacional de carater intelectual, a história-significação exige ainda a inserção dessa dialética numa dimensão propriamente social, que não se traduz na busca dos fundamentos sociais desse jogo puramente intelectual de idéias construído *a priori*, mas em mostrar como ele pode constituir-se e produzir-se a partir de determinadas condições sociais, que não se reduzam necessariamente à instância econômica ou a outra qualquer do real[7].

---

[7] Esse modo de conceber a história intelectual como história social das idéias nao é novo e nem original. Ele já se colocava, como assinala Chartier, pelos historiadores que fundaram a "escola" dos Annales, notadamente Bloch e Febvre: "Desembaraçando-se das etiquetas que, pretendendo identificar os pensamentos antigos, os mascaram na realidade, a tarefa dos 'historiadores do movimento intelectual' (como escreve Febvre) é acima de tudo reencontrar a originalidade, irredutível a qualquer definição 'a priori', de cada sistema de pensamento, na sua complexidade e nas suas mudanças... O esforço para pensar a relação das idéias (ou das ideologias) e da realidade social através de categorias que não as da influência ou do determinismo é a segunda preocupação expressa por Febvre já antes de 1914... Delas é testemunho este texto de 1909 acerca do proudhonismo: 'Não existem, no sentido próprio do termo, teorias criadoras, porque desde o momento em que uma idéia, por muito fragmentária que seja, se realizou no domínio dos fatos, da maneira mais imperfeita que se queira, não é a idéia que se conta a partir de então, é a instituição colocada no seu lugar, no seu tempo, incorporando uma rede complicada e móvel de fatos sociais, que produzem e sofrem regularmente mil ações diversas e mil reações'. Ainda que os processos de 'encarnação' das idéias sejam indubitavelmente mais complexos do que Febvre deixa aqui supor, o fato é que ele afirma claramente a sua vontade de romper com toda uma tradição histórica intelectual (figura invertida de um marxismo simplificado) que deduzia de alguns pensamentos voluntaristas o conjunto dos processos de transformação social. Para Febvre, o social não poderia, de modo nenhum, dissolver-se nas ideologia que têm por objetivo moldá-lo... Contra a história intelectual da época, a crítica é, portanto, dupla: porque isola as idéias ou

De fato, para que a história da matemática possa efetivamente desempenhar o papel auxiliar na promoção de uma aprendizagem significativa, não podemos jamais nos esquecer de que a rede de significações que envolve as idéias matemáticas é, ela própria, uma construção social, uma vez que não só a atividade matemática, como toda atividade humana, é uma experiência social construtora de significados.

Dentro desse enfoque, o argumento levantado por Grabiner em apoio à importância pedagógica da história, parece-nos convincente e esclarecedor: "ver a matemática passada em seu contexto histórico ajuda a ver a matemática atual em seu contexto filosófico, científico e social e também, a ter uma melhor compreensão do lugar da matemática no mundo" (Grabiner, 1975, p. 443).

Muitos poderiam ainda perguntar: mas por que é necessário que a matemática seja vista dessa forma pelo estudante? Não seria suficiente que ele simplesmente aprendesse a utilizar as descobertas feitas pelos matemáticos através dos tempos?

É claro que, em última instância, o desejo que se expressa no argumento de Grabiner, e do qual compartilho, representa uma opção político-pedagógica, bem como o desejo que a ele se opõe. E, nesse sentido, qualquer tentativa de justificá-lo deve, ela própria, revestir-se de uma dimensão político-teleoló-

---

os sistemas de pensamento das condições que permitiram a sua produção, porque os separa radicalmente das formas de vida social, essa história desencarnada institui um universo de abstrações onde o pensamento surge como não tendo limites, já que sem quaisquer dependências... A uma história intelectual das inteligências sem rédeas e das idéias sem suporte opõe-se uma história das representações coletivas, das utensilagens e das categorias intelectuais disponíveis e partilhadas em determinada época" (Chartier, 1990, p. 33-34 e pp. 40).

gica. Cidadãos matematicamente educados com base numa metodologia histórica que promova o pensamento independente e crítico e a autonomia intelectual é que estarão melhores preparados para propor, analisar, discutir e votar por medidas emancipadoras referentes ao papel a ser desempenhado no contexto das sociedades atuais pelas ciências em geral e pela matemática em particular. É por essa razão que a matemática, pedagogicamente humanizada - porque tecida através dos fios que a ligam a todos os tempos e a todas as culturas - pode e deve constituir a formação do cidadão educado do século XXXXX... O nosso desejo, como também o expresso em 1958 por George Sarton em relação à educação científica em geral, é que, pelo menos, o limite de XXXXX... exista e seja finito: "... Uma parte considerável de nossos cientistas (mesmo aqueles que mais se distingem) são técnicos e nada mais. Nosso apelo é pela humanização da ciência, e a melhor maneira de fazer isso é contando a sua história. Se formos bem sucedidos, os homens de ciência deixarão de ser meros técnicos e tornar-se-ão homens educados" (In: Swetz, 1984, p. 62).

2º ESTUDO

A CONSTITUIÇÃO DO PARADIGMA DO FORMALISMO PEDAGÓGICO CLÁSSICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

1. FORMALISMO FILOSÓFICO E FORMALISMO PEDAGÓGICO

De certo modo, o sonho de Bourbaki foi o sonho de Descartes, que foi o sonho de Euclides, que foi o sonho de Platão, que foi o sonho de Pitágoras e de todos os que sonharam, continuam sonhando ou sonharão os sonhos deles.

Isso porque, existe entre eles não uma identidade, mas uma linha de continuidade epistemológica cuja resistência milenar acabou por difundir universalmente um determinado modo de se conceber a Matemática - o modo do "formalismo filosófico" - que, com algumas variações, está na base de alguns estilos de se ensinar matemática - os estilos dos formalismos pedagógicos.

Comecemos caracterizando o que chamamos de "formalismo filosófico". No nosso modo de entender, são formalistas filosóficos todos os que, em filosofia da matemática, sustentam o ideal de sistematização dedutiva da matemática e uma certa atitude em relação à natureza do conhecimento matemático.

O ideal de sistematização dedutiva traduz-se na crença de que os conhecimentos matemáticos, em sua totalidade, podem (e devem) ser organizados em um sistema dedutivo contendo termos primitivos, definições, regras de inferência, axiomas e teoremas, de modo que os axiomas e teoremas estejam relacionados dedutivamente (cf. Losee, 1985, pp. 33-36).

No que se refere à natureza do conhecimento matemático, consideramos formalistas filosóficos tanto aqueles que conferem aos axiomas de um sistema dedutivo o caráter de verdades evidentes e/ou necessárias (necessárias porque evidentes ou evidentes porque necessárias) como os que os consideram afirmações eletivas, a cuja escolha impõe-se, apenas, a obediência aos critérios de manutenção da consistência do sistema e de completude, isto é, que não deixe de ser demonstrável como teorema aquilo que deveria ser um teorema do sistema (cf. Barker, 1976, pp. 125-126). Duas são as atitudes que os formalistas poderiam assumir perante os teoremas do sistema: ou são verdades absolutas decorrentes do caráter "evidente" ou "necessário" dos axiomas, ou são verdades relativas, que variam em função do conjunto de axiomas selecionados. Em ambos os casos garante-se a infalibilidade do conhecimento matemático porque obtido e assentado na metodologia igualmente infalível do dedutivismo.

Por sua vez, entendemos o "formalismo pedagógico", num sentido bastante amplo, como aquele estilo de prática educativa em matemática que extermina, consciente ou inconscientemente, o significado e o sentido do conhecimento que busca transmitir, gerando nos estudantes a sensação de que "o único sentido de um ato está no próprio ato" (Davis e Hersh, 1988, p. 311). Nesse sentido, pode-se buscar, como o fazem Davis e Hersh (1988, p. 298), as primeiras manifestações do formalismo no comentário de Isaías (século VIII a.C.) de que "o ato de jejuar havia se afastado do significado ético do ato"[1].

Entretanto, quando dizemos que o formalismo pedagógico extermina o significado e o sentido do conhecimento

---

[1] Esse comentário, que aparece nos versículos 6 e 7 do capítulo 58 do Livro de Isaías, é o seguinte:
"Seria este o jejum que eu escolheria: que o homem um dia aflija a sua alma, que incline a sua cabeça como um junco, e estenda debaixo de si saco e cinza? Chamarias tu a isto de jejum e dia aprazível ao Senhor?
Porventura não é este o jejum que escolhi? que soltes as ligaduras da impiedade, que desfaças as ataduras do jugo? e que deixes livres os quebrantados, e despedaces todo o jugo?" (Bíblia Sagrada, Editora Vida, 1981, p. 819).

que busca transmitir, queremos com isso enfatizar duas coisas diferentes: que, por um lado, não dá a devida importância ao sistema de relações ligadas àquele conhecimento, que se constituiu objetivamente no decorrer do processo histórico-social e que, por outro, marginaliza aqueles aspectos subjetivos - porque ligados à situação dada e com as vivências afetivas do sujeito - que aquele conhecimento adquire no decorrer do processo de interação do indivíduo com o seu contexto social atual.

A lingüística clássica não fazia distinção entre significado e sentido. Somente a partir do final da década de 60 de nosso século é que o conceito de significado desdobra-se em "significado referencial" da palavra, isto é, ligado a determinadas categorias lógicas, e "significado social-comunicativo", isto é, ligado ao processo de comunicação. Entretanto, no campo da psicologia, essa distinção é mais antiga. Ela já aparece no livro clássico do soviético L.S. Vygotsky, "Pensamento e Linguagem", publicado pela primeira vez em 1934 (cf. Luria, 1986, pp. 44-46). Tomamos essa distinção no mesmo sentido em que a toma Vygotsky e que Luria (1986, p. 45) ilustra da seguinte maneira, ainda que aplicando-a a uma palavra e não ao contexto mais amplo da ação:

"A palavra 'carvão' possui um **significado** objetivo determinado. É um objeto preto, a maioria das vezes de origem vegetal, resultado da calcinação de árvores, com uma determinada composição química em cuja base está o elemento carbono. No entanto, o **sentido** da palavra 'carvão' designa algo completamente diferente de pessoa para pessoa e em circunstâncias diversas. Para a dona de casa, a palavra 'carvão' designa algo com a qual acende o samovar e do qual precisa para acender a estufa. Para o cientista, o carvão é um objeto de estudo, ele separa a parte do significado desta palavra que lhe interessa - a estrutura do carvão, suas propriedades. Para o pintor, é instrumento com o qual pode fazer um esboço provisório do quadro. E, para a menina que sujou seu vestido branco com carvão, esta palavra tem um sentido desagradável, é algo por causa do qual sofre."

A expressão "objeto plano" possui um **significado** objetivo determinado em geometria euclidiana que faz com que possamos classificar os objetos em planos ou não-planos de acordo com a existência ou não de um plano que contenha todos os pontos do objeto considerado. Entretanto, o **sentido** que as crianças atribuem a essa expressão, quase sempre, não coincide com esse significado. Para elas um objeto pode, ora ser considerado plano, ora não-plano dependendo da posição que esse objeto ocupa no espaço. Ou então, decidem pela planicidade ou não-planicidade de um objeto em função de seu contorno, identificando "contorno não retilíneo" com "não-planicidade". Seria até mesmo possível identificar nas concepções "espontâneas" das crianças, vários níveis de planicidade entre os objetos do espaço (cf. Miguel, 1984, pp. 113-120).

Embora as diferentes versões do formalismo filosófico, da forma como o estamos caracterizando, tenham se constituído historicamente mais por razões de ordem estritamente metodológica ou mesmo político-epistemológica e, portanto, independentemente de quaisquer motivações pedagógicas, a analogia que estabelecemos entre o formalismo filosófico e o formalismo pedagógico não é arbitrária. Isso porque se, pedagogicamente, o formalismo dissocia a ação do seu significado e do seu sentido, o mesmo não faz o formalismo filosófico ao "fechar-se na sua 'torre de marfim' do formulário matemático, excluindo como não pertinentes os problemas do 'significado', do 'valor', da natureza das leis matemáticas, e excluindo também, como problema específico, a relação da matemática com o mundo físico"? (Manno, s/d, p.275)

Os estilos de prática educativa dos formalismos pedagógicos em matemática, em todos os graus de ensino, têm-se caracterizado - e com mais vigor a partir de finais do século XVIII, quando o ideal educacional de universalização do ensino difunde-se por quase todo mundo ocidental - pela ênfase na quantidade de conhecimento a ser transmitido, pela presença massiva de processos, técnicas, regras, fórmulas e algoritmos no que se refere ao ensino de Aritmética e da Álgebra, pela preocupação obsessiva com o rigor da exposição desligada da tentativa de busca da consciência da necessidade do rigor no que se refere ao ensino de Geometria, pelo esfacelamento do conteúdo em compartimentos incomunicáveis, pela dominância do detalhismo, pela quase ausência de aplicações do conhecimento matemático a outras áreas científicas e tecnológicas e pela neutralidade do conhecimento matemático e, conseqüentemente, pela recusa de apresentá-lo em sua dinâmica histórico-social.

Além do mais, esses estilos de prática educativa tornaram-se hegemônicos não porque refletissem fielmente o modo pelo qual a matemática constituiu-se e constitui-se na vida real, isto é, como um fazer humano baseado em significações partilhadas, manifestas ou tácitas, mas, fundamentalmente, por terem-se filiado, teimosamente, ao modo como o formalismo filosófico e suas variações concebem a matemática, o qual, conscientemente ou não, transcendentalizou e desfigurou essa prática social, remetendo-a para além dos limites do mundo humano. Daí, as noções de ordem, uniformidade de raciocínio, a lógica bivalente do tudo ou nada e a "lógica" do descompromisso que têm sido introjetadas na mente de professores e estudantes.

Conseqüentemente, o ensino dessa "disciplina" (e este termo é sintomático) passou a justificar-se pela crença reacionária e militaresca - mas nem por isso, ou justamente por isso, menos "eficaz" - em seu poder disciplinador da mente humana, sendo um tal objetivo atingível - após um desligamento compulsório do produto do conhecimento do seu processo de produção, e, conseqüentemente, da destruição de sua rede de significações - através do treino, do exercício e da repetição obediente.

O propósito deste segundo Estudo é mostrar o modo como se constituiu o paradigma do formalismo pedagógico clássico que, cronologicamente, antecedeu os demais paradigmas no curso do desenvolvimento histórico.

Essa constituição, como já assinalamos anteriormente, deverá assentar-se nas quatro categorias que orientarão o nosso estudo: a concepção de matemática, a concepção dos fins da Educação Matemática e dos valores a serem por ela promovidos, a concepção do modo como o aprendiz tem acesso ao conhecimento matemático e a concepção do método de ensino de matemática.

2. A CONCEPÇÃO DE MATEMÁTICA SUBJACENTE AO PARADIGMA DO FORMALISMO PEDAGÓGICO CLÁSSICO

É legítimo buscar, como o faz Zúñiga (1987, p. 11), as raízes da concepção de matemática inerente ao paradigma do formalismo pedagógico clássico[2] na Antiguidade Clássica, onde dois fatores contribuíram significativamente para a sua constituição.

O primeiro desses fatores foi a leitura que alguns filósofos gregos, sobretudo Platão, fizeram do desenvolvimento da matemática, praticamente omitindo, ou pelo menos subestimando consideravelmente, a etapa pré-euclidiana da matemática que não tinha um caráter dedutivo-axiomático.

O segundo fator apontado por Zúñiga diz respeito ao impressionante empreendimento euclidiano de sistematização axiomática dos conhecimentos matemáticos até então produzidos.

Entretanto, acredito que, mais do que dois fatores isolados, seria preciso estabelecer um laço de continuidade político-epistemológica, por um lado entre a leitura platônica e a cosmologia pitagórica e por outro, entre a leitura platônica e o empreendimento euclidiano.

O primeiro elo dessa cadeia é consubstanciado pela

---

[2] Zúñiga não utiliza a expressão "formalismo filosófico" e sim as expressões "paradigma racionalista" e "paradigma axiomático-formalizante", não assimilando, porém, um ao outro. Ele esclarece que o paradigma axiomático-formalizante pode ser estudado independentemente do racionalismo. Isto porque, nem todo pensador racionalista afirmou esse paradigma (cf. Zúñiga, 1987, p. 11).

"Teoria das Formas" de Platão[3] quando interpretada como uma resposta de cunho político-epistemológico no sentido de restaurar, sutilmente, a cosmologia pitagórica que havia caído num total descrédito após a crítica de Zenão de Elea à teoria pitagórica das mônadas[4] e após o escândalo provocado pela descoberta das grandezas incomensuráveis por Hipasus de Metapontum.

---

[3] Caraça (1978a, p. 185) caracteriza da seguinte maneira a "Teoria das Formas" de Platão: "... a realidade não está nas coisas sensíveis, está nas Idéias ou Formas: bom, belo, justo, grandeza, força, etc.: as coisas sensíveis não são mais que imagens ou cópias das Formas; a verdade não pode, portanto, adquirir-se pelo exame, por meio dos sentidos, do universo exterior sensível, mas apenas pelo pensamento puro, pela atividade da alma isolada do corpo; este não faz mais do que pertubá-la, impedi-la de pensar".
A seguinte passagem do Fédon - um dos grandes diálogos da maturidade de Platão, onde se pode encontrar os traços fundamentais de sua Teoria das Formas - é sugestiva no sentido de condicionar o caminho de acesso à verdade ao apartamento da realidade material e à abstração do corpo e dos sentidos:
Sócrates: Quando é que, portanto, a alma atinge a verdade? Não há dúvida que quando ela procura encarar qualquer questão com a ajuda do corpo, ele a engana radicalmente.
Simmias: Dizes a verdade.
Sócrates: Não é, por conseqüência, verdade que é no ato de raciocinar que a alma, se alguma vez o consegue, vê manifestar-se plenamente a realidade dum ser?
Simmias: Sim.
Sócrates: E sem dúvida, ela raciocina nas condições ótimas precisamente quando nenhuma pertubação lhe advém de lado nenhum, nem do ouvido, nem da vista, nem duma dor, nem dum prazer, mas quando, pelo contrário, ela está o mais possível isolada em si própria, mandando passear o corpo,e quando, quebrando tão radicalmente quanto puder, toda a relação, todo o contato com ele, ela aspira ao real.
Simmias: É exatamente assim!
Sócrates: Não é verdade que é nesse estado que a alma do filósofo faz ao máximo abstrações do corpo e lhe foge, enquanto procura isolar-se em si próprio?
Simmias: Manifestamente!"
Extraído de (Caraça, 1978a, pp. 183-184)

[4] Restou-nos dessa crítica apenas alguns argumentos de Zenão de Eléa, conservados por Aristóteles. Como se sabe, Zenão de Eléa foi discípulo de Parmênides que esteve inicialmente ligado à escola pitagórica mas que, posteriormente, dela desligou-se procedendo a um exame crítico de todas as noções e concepções filosóficas dessa escola. Conservando as principais caraterísticas do pensamento idealista de Parmênides - unidade,. homogeneidade, continuidade, imobilidade e eternidade - Zenão atacou a teoria pitagórica das mônadas da seguinte maneira: "Como querem que a reta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa a afirmação fundamental de que todas as coisas têm um número. Com efeito, entre dois corpúsculos 1 e 2, deve haver um espaço - se estivessem unidos, em que se distinguiriam um do outro? - e esse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores dimensões concebíveis; logo, entre esses dois corpúsculos posso intercalar um corpúsculo 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3, e outro entre 3 e 2, nas mesmas condicões. Posso repetir o raciocínio indefinidamente e fico, portanto, com a possibilidade de colocar entre 1 e 2 quantos corpúsculos quiser. Qual é então o número que pertence ao segmento que vai de 1 a 2?" (Caraça, 1978a, pp. 77-78)

A possibilidade de estabelecimento desse primeiro elo também é vista como legítima por Whitehead (1964, p. 33) para quem: "As especulações filosóficas de Pitágoras chegaram até nós através do pensamento de Platão" sendo "o mundo platônico das Idéias a forma refinada e aperfeiçoada da doutrina pitagórica de que o número constitui a base do mundo real". Aritóteles já via com clareza essa ligação quando, em sua **Metafísica** (987 b 9-13 e 1078 b 9-12) dizia que "Platão atribuia às Idéias o mesmo tipo de função que os pitagóricos atribuiam aos números e que, posteriormente, identificou as Idéias com os números".

Entretanto, como afirma Ross (1989, pp. 191-92), "Aristóteles não declara que a teoria das Idéias tenha brotado dos conceitos pitagóricos; diz que ela os seguiu ou que esteve de acordo com eles, não que estes tenham procedido daquela. Não apresenta Platão com o pensamento ocupado com número na primeira forma de sua teoria ideal. Assinala sim a afinidade que havia entre o papel desempenhado pelos números na teoria pitagórica e o desempenhado pelas Idéias na teoria platônica, mas não insinua que uma derivava da outra. Quando fala que a doutrina platônica, na maioria dos aspectos, segue a pitagórica, provavelmente esteja pensando, sobretudo, na teoria posterior das Idéias-números". Segundo Ross,, "só no Timeu e no Filebo poderemos ver que a teoria pitagórica de que "todas as coisas são números" havia começado a influir na teoria das Idéias. Influência cujo máximo alcance será a já tardia teoria das Idéias-números... Não resta dúvida a grande influência que teve o pitagorismo sobre Platão neste último período. Não só encontramos o "limite" e o "ilimitado" do Filebo entre os primeiros princípios que admitiram alguns pitagóricos, como também encontramos nessa lista a unidade e a pluralidade (o Uno e a "díada indefinida" de Platão), assim como a bondade associada ao limite e à unidade, e a maldade ao ilimitado e à pluralidade, tal como aparecem em Platão" (Ross, 1989, pp. 192-93).

Mas, para que fosse possível manter a cosmologia pitagórica - ainda que de forma travestida sob o tema de que "as Idéias governam o mundo" - baseada fundamentalmente na crença de que "os números governam o mundo" e, simultaneamente, retirá-la do atoleiro de contradições que ela parecia levantar, Platão, inspirando-se na filosofia eleática, recorreu a um recurso duplamente eficaz: o de desmaterialização das mônadas pitagóricas e, conseqüentemente, o de desmaterialização de toda a matemática e de desmaterialização do mundo material, encarado apenas como uma sombra imperfeita do mundo real e perfeito das Idéias.

Mas o recurso platônico foi duplamente eficaz pois a sua intenção não era apenas a de salvar a teoria pitagórica, de restituir-lhe a qualquer preço o seu caráter "científico". Mas assim procedendo, ele visava também recuperar a confiança popular que deu, por algum tempo, sustentação à dominação política de caráter conservador exercida pela escola pitagórica. O que estava em jogo não era mais a ciência, mas o poder. É com razão, portanto, que Upinsky (1989, pp. 78-79) afirma que Platão "serviu-se dos irracionais como um trampolim para fundamentar o coroamento supremo de sua doutrina - a dialética..., deu um impulso e uma fundamentação decisiva a esse método (a maiêutica socrática), lançando as bases da dialética como ciência sistemática de analogia geométrica. Ele deu à arte de discutir um rigor implacável e permitiu, sem perder o equilíbrio e sem vertigem, passar das quantidades (números) às idéias, passando de uma idéia à outra "geometricamente"... Para Pitágoras, "os Números governam o mundo" e para Platão, "as Idéias governam o mundo", geometricamente".

É por essa razão que o mundo das Idéias de Platão não está ligado a nenhum sonho ou fantasia inconseqüente. Ao contrário - como o demonstram a sua durabilidade e a sua capacidade de recuperação ao longo do tempo - a "genial" idéia da desmaterialização assegura-lhe a estabilidade e a invulnerabilidade para sair-se vitorioso em qualquer discussão, uma vez que pode-se por entre parênteses qualquer realidade.

Talvez, uma das evidências mais esclarecedoras das intenções político-ideológicas de Platão e da pouca contribuição que deu ao desenvolvimento da própria matemática esteja registrada ironicamente nos períodos históricos subseqüentes: se por um lado, um dos melhores matemáticos que lhe foi contemporâneo - Eudoxo - tenha sido seu discípulo, mas que para se sobressair teve que romper em muitos aspectos com a rigidez da metodologia platônica, por outro lado, "Plutarco nos transmitiu um imenso catálogo de homens de Estado que Platão espalhou através do mundo helênico" (Upinsky, 1989, p. 253).

Mas, para o propósito que aqui temos em vista, isto é, o da caracterização e constituição da concepção de matemática inerente ao paradigma do formalismo pedagógico clássico, importanos não apenas as motivações políticas e ideológicas da leitura platônica do conhecimento matemático mas, sobretudo, indagar sobre a possibilidade epistemológica mesma dessa leitura. Como foi possível essa leitura platônica do conhecimento matemático? O que equivale a perguntar: qual a legitimidade desse processo de desmaterialização da matemática e do mundo material? Ou, em outras palavras, como foi possível o surgimento da concepção da matemática como ciência teórica e dedutiva, baseada em "princípios" (termo usado pelos gregos tanto para as definições quanto para os axiomas) fundamentais e não mais numa coleção de prescrições de natureza prático-empírica?

Talvez, o ponto de partida dessa mudança de atitude em relação ao conhecimento matemático tenha sido a tentativa de unificação, por parte dos primeiros pitagóricos, das ciências da forma e do número, isto é, da geometria e da aritmética.

Provavelmente, os pitagóricos vislumbraram essa possibilidade de unificação olhando o céu com olhos diferentes daqueles com que caldeus, egípcios e mesmo os jônicos o olharam. Desde tempos remotos, a observação do céu e do movimento dos astros teve propósitos exclusivamente práticos, tais como a possibilidade de orientação marítima costeira, de construção de calendários, de previsão das enchentes dos rios e de determinação das épocas de plantio e colheita.

O olhar pitagórico do céu - uma dentre outras formas possíveis de olhares do novo tipo de homem que surgiu nas colônias gregas da Ásia Menor e da Itália, na passagem do século VII para o século VI a.C.[5] - desviando-se aparentemente dos problemas

---

[5] D.J. Struik (1989, p. 72) explica do seguinte modo o surgimento desse novo tipo de homem: "As cidades que surgiam ao longo da costa da Ásia Menor e no continente grego já não eram centros administrativos de um despotismo oriental. Eram cidades comerciais, onde os antigos senhores feudais, proprietários de terras, tinham de lutar contra uma classe de mercadores independentes e politicamente conscientes. Durante os séculos VII e VI a.C., esta classe mercantil ganhou influência e teve de lutar com os pequenos comerciantes e artesãos, o **demos**. Como resultado, deu-se a ascensão da polis grega, ou

terrestres e da totalidade da esfera celeste em movimento, imobilizou-se contemplativa e abstratamente sobre o fragmento, ou melhor, sobre a estrutura do fragmento, buscando aí novos elementos explicativos da totalidade.

Desse modo, uma constelação, por exemplo, passa a ser vista não mais como um mero conjunto de estrelas com tais e tais propósitos, mas como uma estrutura definida por uma forma (a disposição das estrelas na abóbada celeste) e pela quantidade de pontos-estrelas necessária à constituição daquela forma. É claro que o artifício técnico subjacente a essa concepção de unificação é a noção de "ponto", ou melhor, a percepção da possibilidade de se conceber uma forma geométrica como conjunto de pontos materiais, isto é, pontos de extensão não-nula, e de, subseqüentemente, estabelecer uma correspondência entre essa forma geométrica e um número natural que traduzisse a quantidade de pontos necessária à composição dessa forma.

Mas esse modelo de unificação da aritmética e da geometria não teria, por si só, levado ao surgimento da matemática teórica se não tivesse suscitado questionamentos e críticas. Essas críticas, como vimos, partiram dos filósofos eleáticos,

---

seja, a cidade-estado autônoma, fato que constitui uma experiência social nova completamente diferente da das antigas cidades-estados da Suméria e de outros países orientais".
A explicação de B.J. Caraça (1978a, p. 65) é a seguinte: "Não é em qualquer local e sob quaisquer condições que pode esperar-se o aparecimento de tais esboços científicos... A ciência só desponta em estado relativamente adiantado da civilização, estado que, como diz S. Taylor, permita *'a todos viver e a alguns pensar'*. Essas condições parecem ter sido realizadas pela primeira vez, no que diz respeito ao mundo ocidental, nas colônias gregas da Ásia Menor, no dobrar do século VII para o século VI antes de Cristo. O comércio, principalmente de vinho, azeite e têxteis, produzira aí um florescimento econômico sensível. Por outro lado, ligado à civilização comercial, encontra-se um conjunto de condições de vida - facilidade e necessidade de viajar, contato com povos diferentes, etc. - que a tornam mais própria para o desenvolvimento científico do que a civilização agrária, a qual é, de sua natureza, pesada, opressiva, fechada".

principalmente de Zenão de Elea. Mas seria um erro concluir, como o fazia grande parte dos historiadores da matemática até meados deste século, notadamente P. Tannery, que em decorrência desse ponto de atrito localizado, existissem divergências de base profundas entre pitagóricos e eleáticos. Quem nos faz essa advertência é o historiador húngaro A. Szabó em seu penetrante artigo "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms". A tese principal que defende nesse artigo é que foi a influência decisiva do racionalismo eleático sobre as idéias pitagóricas que originou a matemática teórica. Descreveremos com algum detalhe a sua linha de raciocínio pois ela nos permite esclarecer não apenas a ligação existente entre a cosmologia pitagórica e a teoria platônica como também a ligação entre esta última e o empreendimento euclidiano.

Szabó (1960) parte da análise das conjecturas até então existentes sobre o nascimento da matemática téorica: as conjecturas de Kolmogorov, de Van der Waerden e de Kurt von Fritz. O ponto de vista de Kolmogorov é o de que a mudança qualitativa no desenvolvimento da matemática deve ser atribuída ao avançado desenvolvimento sócio-político do estado grego e à sua vida cultural. Isso, por sua vez, fez com que o desenvolvimento da dialética, isto é, da arte da disputa e do embate de idéias, atingisse um grau mais elevado, dando origem ao nascimento do pensamento filosófico independente da religião, o qual, por sua vez, colocou à matemática novas tarefas.

O ponto de vista de Van der Waerden é o de que os gregos teriam chegado à idéia de dedução e à necessidade de demonstração no momento em que se viram obrigados a avaliar as diferentes prescrições que constituíam o conhecimento matemático herdado dos egípcios e babilônios, prescrições essas que nem sempre podiam ser conciliadas, como era o caso, por exemplo, das diferentes regras para o cálculo da área do círculo.

A conjectura de Kurt von Fritz é que a matemática teórica surgiu como decorrência do impacto que teve sobre essa área do conhecimento o desenvolvimento da lógica aristotélica. Esse ponto de vista parece bastante convincente uma vez que, segundo Fritz, a estrutura de uma demonstração matemática é análoga àquela subjacente à arte do confronto de idéias entre dois oponentes (cujo refinamento conduziu ao surgimento da lógica aristotélica).

O exame dessas três conjecturas leva Szabó a fazer as seguintes considerações:

1) Essas conjecturas não se excluem mutuamente embora nenhuma delas fundamente necessariamente as outras.
2) Essas explicações permanecem na esfera de generalidades abstratas, isto é, carecem de concretude.
3) Nenhuma delas pode ser confirmada por dados históricos, isto é, nenhuma delas pode ser elevada do nível de pura possibilidade ao nível mais alto de persuasiva probabilidade histórica.

Em vista disso, Szabó prossegue sua busca definindo qual deve ser o programa natural a ser seguido quando se investiga as origens da matemática teórica. Para ele, esse programa constitui-se de duas etapas:

1) Como se deu o desenvolvimento histórico da demonstração matemática e do conceito de evidência.

2) Qual foi a origem dos "princípios" na matemática grega.

Em relação à primeira dessas etapas, o raciocínio de Szabó é o seguinte: "Euclides usa lógica estrita na construção de suas demonstrações porque em sua época a validade de um teorema era **mostrada** por meio da lógica. Aquilo que ele queria dizer por 'demonstratio' ('desenvolvimento') era expresso em grego pelo verbo δείκνυμι (deiknymi). Conseqüentemente, esse verbo em Euclides é o termo técnico para 'desenvolvimento lógico'. Mas como os gregos interpretavam a '**demostratio**' antes dessa época? Através de vários argumentos Szabó conclui que a técnica de demonstração na matemática grega antiga era a simples **visualização**. Diz que os antigos pitagóricos consideravam a geometria como ἱστορίη[6], isto é, como uma ciência inseparável da **visão** e que, por volta da época de Platão, os gregos ainda tinham consciência do antigo significado do verbo δείκνυμι, isto é, '**concretamente visível**'. Disso decorre imediatamente que a passagem da concepção primitiva para a concepção euclidiana da 'demonstratio' deve ter sido provocada por uma tendência anti-ilustrativa e anti-empírica da ciência grega. Onde buscar as razões para o surgimento dessa tendência e da sua ligação com o desenvolvimento da ciência dedutiva grega? Através da verificação da surpreendente freqüência da demonstração indireta nas provas dos teoremas do LIVRO VII dos Elementos de Euclides (dos 36

[6] É interessante observar que o termo utilizado pelos gregos antigospara designar 'história' é o mesmo que o utilizado pelos antigos pitagóricos para designar 'geometria', qual seja, ἱστορίη ou 'historie'. A razão dessa coincidência deve-se ao fato de que a palavra grega 'histor' significa 'testemunha' no sentido de 'aquele que vê'. O historiador seria, portanto, aquele que testemunhou o acontecimento com seus próprios olhos e, nesse sentido, tanto a geometria quanto a história compartilhariam a concepção da visão como fonte essencial de conhecimento (cf. Le Goff in Enciclopédia Einaudi, verbete "História", p. 159).

teoremas que aí aparecem, o método da demonstração indireta é aplicado a 15 deles) e no conjunto dos 17 teoremas (6 deles demonstrados indiretamente) que constituem a teoria dos números pares e ímpares (que se sabe terem pertencido à aritmética pitagórica), Szabó levanta a conjectura de que foi devido ao uso da demonstração indireta que a matemática se transformou em uma ciência dedutiva e sistemática. Mas ele não se contenta com isso e continua a interrogar: qual foi a origem da demonstração matemática indireta? Para responder essa questão apresenta nova conjectura: 'A questão da origem da forma indireta de demonstração em matemática seria para sempre insolúvel se quiséssemos deduzí-la de formas de pensamento matemático historicamente mais primitivas que ignoravam esse processo de demonstração. A forma indireta de demonstração não foi criada por matemáticos, nem foram eles os primeiros a usá-la; os pitagóricos do sul da Itália tomaram-na, já pronta, dos filósofos eleáticos que também ali viveram por volta do início do século V a.C. ... Não há dúvida que, de acordo com o nosso conhecimento atual, o método de demonstração indireta foi primeiramente usado entre os gregos por teoremas que aí aparecem, o método da demonstração indireta é aplicado a 15 deles) e no conjunto dos 17 teoremas (6 deles demonstrados indiretamente) que constituem a teoria dos números pares e ímpares (que se sabe terem pertencido à aritmética pitagórica), Szabó levanta a conjectura de que foi devido ao uso da demonstração indireta que a matemática se transformou em uma ciência dedutiva e sistemática. Mas ele não se contenta com isso e continua a interrogar: qual foi a origem da demonstração matemática indireta? Para responder essa questão apresenta nova conjectura: 'A questão da origem da forma indireta de demonstração em matemática seria para sempre insolúvel se quiséssemos deduzí-la de formas de pensamento matemático historicamente mais primitivas que ignoravam esse processo de demonstração. A forma indireta de demonstração não foi criada por matemáticos, nem foram eles os primeiros a usá-la; os pitagóricos do sul da Itália tomaram-na, já pronta, dos filósofos eleáticos que também ali viveram por volta do início do século V a.C. ... Não há dúvida que, de acordo com o nosso conhecimento atual, o método de demonstração indireta foi primeiramente usado entre os gregos por Parmênides. Eram os eleáticos que provavam suas afirmações através da prova da impossibilidade da tese contrária. Foram Parmênides e os eleáticos que, claramente, fizeram da ausência de contradição o critério de verdade de uma afirmação" (Szabó, 1960, pp. 45-46).

Essa última conjectura permite a Szabó explicar a conexão orgânica existente entre forma indireta de demonstração e tendência anti-empírica e anti-ilustrativa em matemática. Isso porque, na filosofia eleática esses dois fenômenos eram inseparáveis, uma vez que os filósofos eleáticos usavam o método de demonstração indireta para provar apenas aqueles teoremas que flagrantemente feriam a experiência do senso comum. Não foi Zenão quem provou indiretamente a impossibilidade do movimento que a experiência e a ilustração mostravam ser real?

Finalmente, Szabó acrescenta que os matemáticos da antiguidade acabaram apropriando-se do método indireto de demonstração e incorporando a atitude anti-empírica e anti-ilustrativa, não por razões metafísicas ou estéticas, mas pelo fato deles abrirem novos horizontes e possibilitarem-lhes reconhecer o fenômeno da incomensurabilidade que, de outra forma, poderia ter permanecido desconhecido por eles.

Em relação à segunda etapa de seu programa de investigação, isto é, à explicação da origem dos princípios (definições, postulados e noções comuns) na matemática grega, a pergunta central que orienta a investigação de Szabó é: "como se descobriu, no curso do desenvolvimento histórico, que a matemática como um todo devia basear-se sobre tais afirmações não provadas?" A opção feita por ele é a de traçar, em primeiro lugar a origem dos princípios da Aritmética e depois os da Geometria. Isso porque, antes da geometrização da matemática grega devido à descoberta das quantidades irracionais, a Aritmética, com muita probabilidade, era considerada mais importante que a Geometria e o reconhecimento desta última como disciplina matemática não aconteceu sem alguns debates. Isso porque, a palavra com a qual os antigos pitagóricos designavam a geometria (ἱστορίη) devia referir-se a uma espécie de conhecimento empírico de origem visual.

Uma vez justificada a opção, Szabó inicia o exame dos princípios da Aritmética euclidiana investigando a série de teoremas referentes aos números pares e ímpares presentes no Livro VII dos Elementos. Como dificilmente se pode aceitar que a distinção entre números pares e ímpares não tenha sido precedida pela colocação da questão "o que é número?", Szabó conclui que a definição de número é parte integrante e essencial dessa série de teoremas. Mas qual é a definição euclidiana de número? "Um conjunto composto de unidades". Logo, a definição de "unidade" não pode também ser omitida da teoria dos números pares e ímpares.

Mas o que é o "um" para Euclides? "Um é a unidade em relação à qual cada coisa é dita ser una". Como essa definição concisa é aparentemente ininteligível, Szabó tenta esclarecê-la recorrendo à seguinte passagem do Livro VII de "A República" de Platão: "... sem dúvida, sabes como são aqueles entendidos neste estudo (os matemáticos), se intentamos, num raciocínio, dividir a 'unidade', riem de nossa atitude e não a admitem; pelo contrário, se tu a divides,eles a multiplicam porque temem que a unidade venha a aparecer não como unidade, mas como uma multiplicidade de partes ... Supõe agora ... que alguém lhes perguntasse, 'ó sábios admiráveis, que números são esses sobre os quais vós falais? Onde estão estas unidades cuja existência vós postulais, considerando-as perfeitamente iguais e indivisíveis?' Que pensas que responderiam? Na minha opinião, responderiam que falam de números que podem ser concebidos, mas que não podem ser manuseados de nenhum outro modo". (Tradução de P. Shorey, London-Cambridge, Mass., 1959, vol. II, pp. 165-167)

De acordo com essa passagem, a unidade é indivisível embora, na prática, toda unidade pudesse ser dividida como o atestavam os mercadores, arquitetos e engenheiros gregos. Mas, para Szabó, essa passagem é instrutiva num outro sentido. Ela fornece uma explicação inequívoca da razão pela qual os matemáticos consideravam o "um" como indivisível: o temor de que a unidade apareça não como unidade, mas como multiplicidade de partes. Pois se o "um" fosse divisível, então, ele não seria apenas "um", mas também o seu contrário, isto é, "não-um", ou seja, muitos. Portanto, foi a contradição gerada no pensamento pela idéia do "um" ser divisível que levou à conclusão de que ela não poderia ser verdadeira. O contrário é que deveria ser verdadeiro. Essa é a razão pela qual os antigos aritméticos gregos proibiam o uso de frações na teoria dos números.

Conclui-se, portanto, que a aparentemente insignificante definição euclidiana de "um" é, na realidade, o teorema final de uma seqüência de idéias. Ela é, na realidade, a conclusão de uma demonstração indireta.

Além disso, a forma como Platão enfatiza as seguintes idéias: "o um é indivisível", "ele existe apenas em pensamento", "cada um é em si mesmo completamente uniforme e não possui partes", continua Szabó, nos leva imediatamente a associá-las com as idéias de Parmênides. Isso porque, Parmênides caracterizou o "ser" como tendo exatamente as mesmas características. Não é acidental que na filosofia eleática o "ser" e o "um" sejam, de fato, conceitos idênticos.

A conclusão a que chega Szabó é que o problema decisivo que exigiu a elaboração de todas as definições aritméticas importantes presentes na introdução do Livro VII dos Elementos de Euclides - isto é, as definições de "um", de "número", de "número par", de "número ímpar", de "parte", de "número primo", de "número composto" - foi o debate filosófico em torno do dogma eleático da indivisibilidade do ser. Isso porque, os pitagóricos da primeira metade do século V a.C., desejando manter o princípio da não-contradição presente no espírito da doutrina eleática, acabaram criando o conceito abstrato de "muitos" através da definição de "número". Além disso, a fim de resolverem sem qualquer contradição o novo problema da divisibilidade, introduziram definições dicotômicas como as acima citadas.

Mas a influência da doutrina eleática não se restringiu à constituição dos princípios aritméticos. Ela se fez sentir, posteriormente, também no campo da geometria. Entretanto, se no terreno da Aritmética os princípios eleáticos puderam amoldar-se com relativa facilidade, devido ao fato dos números poderem ser tratados como conceitos mentais e também por ser fácil evitar a visualização concreta nas demonstrações aritméticas, bastando para isso substituir as pedras por segmentos de reta para representarem os números, o mesmo não acontecia no terreno da geometria. Isso porque, afirma Szabó, as figuras geométricas eram muito menos abstratas que os números (o triângulo, por exemplo, é, necessariamente, mais concreto que o número ímpar). Além disso, era mais difícil eliminar o método ilustrativo da demonstração geométrica que da aritmética. No domínio dos números, estava claro que sendo o "um" indivisível e sendo o número definido como "um conjunto composto de unidades", qualquer quantidade definida podia ter apenas um número finito de divisores. Ao eliminar o tipo de divisão que podia ser realizada "ad infinitum", os pitagóricos eliminaram simultaneamente da Aritmética aquilo que era considerado inexprimível, irracional ou, em outras palavras, contraditório. Contudo, no campo da geometria, a dificuldade residia no fato de que tanto a matéria quanto o espaço pareciam ser infinitamente divisíveis. Daí, a conclusão necessária de que não há nada, nem na matéria, nem no espaço, que pudesse ser chamado "o menor". A definição euclidiana de "ponto" ilustra as dificuldades encontradas em aplicar os princípios eleáticos à geometria. "Ponto é aquilo que não tem partes". Esta é a primeira definição dos Elementos de Euclides. Do mesmo modo que no livro sobre Aritmética a primeira definição determina o menor componente, isto é, o "um", os livros sobre Geometria introduzem, por definição, aquilo que é "o menor" em geometria, isto é, o ponto. Essas duas definições podem ser comparadas. Assim como, fiel ao espírito da filosofia eleática, um "não-número" não pode ser dispensado para se conceber os números, também em geometria, o ponto, embora não sendo uma quantidade geométrica, não pode ser dispensado para se conceber as quantidade geométricas.

A afirmação de que o "ponto não tem partes" é proveniente de Zenão de Eléa que falava de "extensão sem partes". A "extensão sem partes", na terminologia de Zenão, quando referida ao espaço, denotava o mesmo que a palavra "agora" que ele usava em relação ao tempo. Zenão dividia o curso do tempo em momentos ("agoras") sem duração. Era esse o modo como ele provava a contraditoriedade dos conceitos de movimento, tempo e espaço. Para os eleáticos esses conceitos podiam ser percebidos por nossos sentidos mas não podiam ser aceitos pelo pensamento sem incorrer em contradição. Mas, se insistirmos na exigência de não-contraditoriedade, devemos qualificar nossa experiência sensorial de errônea. Foi essa a opção feita pelos eleáticos. No caso particular do espaço, ou reconhecemos a sua existência da forma como é experienciado por nossos sentidos e, nesse caso, devemos negar a existência do ponto, ou aderimos estritamente ao princípio de consistência e negamos a existência do espaço. Mas, se negamos a existência do espaço, não pode haver nenhuma ciência a respeito do espaço, isto é, não pode haver geometria. Daí, o esforço dos primeiros pitagóricos em construir uma geometria sem contradições como havia sido construída a Aritmética, ter levado a um beco sem saída. "Linha é um comprimento sem largura". Essa é a segunda definição presente no Livro I dos Elementos de Euclides. Quando comparada com a definição de "número" não se pode deixar de perguntar: porque a linha não é definida como o número em Aritmética? Se um número é um "conjunto composto de unidades" porque a linha não é uma "soma de pontos"? Para Szabó, os antigos evitaram uma tal definição porque ela acabaria realçando ainda mais o caráter contraditório dos fundamentos da geometria. Pelo fato de reconhecerem muito cedo a influência das definições para a fundamentação teórica de uma ciência dedutiva é que os matemáticos da antiguidade foram induzidos a enunciar postulados e axiomas.

Após a análise de Szabó percebe-se claramente a dimensão do projeto platônico. Ele não inventou a desmaterialização. Tomou-a de empréstimo aos eleáticos. Mas, se na perspectiva racionalista radical dos eleáticos a afirmação da racionalidade do real traz como conseqüência a exclusão de tudo quanto se possa revelar inacessível ao pensamento, na perspectiva racionalista moderada de Platão, o primado do inteligível sobre o sensível não traz como conseqüência a negação do sensível. Elimina-se a contradição, desdobrando-se o real: o real sensível e o real inteligível. É neste último, isto é, é no mundo das Idéias, onde habita o conhecimento matemático. E por habitar esse mundo é que o conhecimento matemático é caracterizado por Platão como atemporal e não-espacial e, portanto, não passível de desenvolver-se ou retificar-se. Não que Platão negasse a existência do tempo e do espaço como o fizeram os eleáticos. Mas, ao fazer do tempo um produto da inteligência divina, isto é, algo gerado pela **atividade** do demiurgo, concebeu-o como uma entidade que, contrariamente às Idéias, pertencia ao mundo sensível, este também, obra do demiurgo. A seguinte passagem do Timeo é ilustrativa dessa concepção platônica do tempo: "Quando o pai que havia produzido o mundo o viu por-se em movimento e viver, santuário trazido à existência para os deuses eternos (as estrelas e os planetas) alegrou-se e, sentindo-se muito contente, pensou, todavia, em fazê-lo mais parecido com seu modelo. E como o modelo é o ser vivente, que é eterno, procurou que o universo se parecesse o mais possível com ele também nesse aspecto. Ora, a natureza do ser vivente é eterna, caráter impossível de se conferir por completo a uma coisa produzida. Então, pensou como fazer uma imitação móvel da eternidade. Assim, ao mesmo tempo que organizava o céu, da eternidade que permanece na unidade fez uma imitação perpétua e móvel segundo o número, à qual damos o nome de tempo". (Timeo 37 c6-d7)

Não estando o conhecimento matemático situado na esfera do mundo sensível, não estava, portanto, submetido à influência do tempo. No que se refere ao espaço, Platão não o concebia como obra do demiurgo, mas como algo que o demiurgo devia necessariamente considerar como um dado. Porém, esse espaço era entendido como receptáculo das **cópias das idéias** e não das próprias idéias. Conseqüentemente, o conhecimento matemático não era o reflexo das propriedades ou das relações entre os objetos espacialmente configurados, isto é, os objetos sensíveis. É por essa razão que o resultado do confronto da muito citada opinião de Marc Bloch de que "a história é a ciência dos homens no tempo" - se é que ela ainda tem algum poder de atrair adeptos - com a concepção platônica da matemática seria: não há intersecção entre a ciência matemática e a história, uma vez que esta ciência não é nem um produto humano (pois não chega nem mesmo a ser algo produzido) e nem está submetida à influência do tempo.

Entretanto, foi com esse olhar platônico transcendental, para cuja constituição foram fundamentais as contribuições do pitagorismo e do eleatismo, que Euclides olhou a produção matemática de seus antecessores e, ocultando tanto os seus produtores quanto as condições sob as quais se processou essa produção, escreveu os seus 13 famosos livros intitulados "Os Elementos" que viriam a exercer uma poderosa influência nos mais diversos setores da atividade humana: na administração, nas finanças, na economia, nas atividades bélicas, no Direito, nas ciências e nas ideologias, na evolução da própria matemática e, particularmente, na educação matemática.

Com Euclides chegamos ao último elo da cadeia que constituiu a concepção de matemática do paradigma do formalismo pedagógico clássico.

Embora seja possível olhar para essa produção euclidiana com diversos olhares, citemos dois deles - o de Upinsky e o de Struik - que evidenciam a ideologia subjacente a essa concepção.

"Depois de Pitágoras - filósofo, mago, profeta e místico, Platão, político, ideólogo e dialético - aparece Euclides, fundador da metodologia técnica do Poder. O encadeamento lógico tanto é necessário entre Pitágoras, Platão e Euclides, como entre os princípios, constituindo um programa político e uma metodologia técnica de execução." (Upinsky, 1989, p. 87)

Mas o caráter descompromissado e neutro do empreendimento euclidiano é apenas aparente, genialmente aparente.

De acordo com Upinsky (1989, pp. 88-89), "Sua obra apareceu como um simples método técnico, sem conotação filosófica, política ou espiritual; suas formulações são isentas de qualquer afetividade, qualquer emoção e qualquer coisa que se pareça com um julgamento moral, estético ou qualificativo; não é possível encontrar asserções mais 'ascéticas' do que as de Euclides... Nada menos do que uma grande ilusão! Euclides codificou seus ritos, porém, não nos impondo, ele nos leva imperceptivelmente a celebrar o culto de Pitágoras e o de Platão... Seus Elementos devem ser entendidos como uma liturgia com seus seres ideais, suas fórmulas e suas regras. Os seres ideais, objetos de culto, são os pontos, os segmentos, as retas e os triângulos, os quadrados, os cubos..., figuras rígidas, angulosas, frias e intemporais que chamamos 'figuras geométricas'. Eles representam as estruturas do mundo novo. Para obtê-lo se torna necessário partir das formas e dos seres, não levando em conta senão o limite espacial externo, depois de simplificar ao máximo, esvaziando de sua substância, torná-los rígidos e achatados, a fim de transformá-los em 'figuras' planas, pois só têm direito à cidadania, neste olimpo, os seres achatados. O próprio espaço é visto como um plano; redução do espaço ao plano, do plano à reta e da reta ao ponto... Porém, para que estas estruturas ideais, figuras perfeitas e divinas, pudessem ter vida e existir, necessária se tornava uma técnica de construção. Euclides nos deu métodos e definições que parecem provir da arte de construir e que assim nos permitem atingir este objetivo. Ele codificou a arte de demonstrar dos pitagóricos... Enfim, para fazer deste conjunto um todo coerente, para ligar entre si os elementos, para hierarquizá-los e para fazer com que se possa passar de um para outro, Euclides os amarrou a um único centro permitindo o acesso ao 'um' ideal. Esse centro, esse nó do poder de que dependem todas as figuras geométricas é constituído por cinco axiomas e, cinco postulados... Constatamos também que os Elementos constituem um modelo de centralização. Fazendo reviver, pela prática, parte do espírito pitagórico, Euclides formalizou o sistema do poder plano. Codificando o governo dos pontos, Euclides (teria consciência?) criou um modelo de poder em que os homens ávidos de poder serão tentados a se inspirar".

De forma menos acalorada, Struik (1985, p. 202) também constatou essa íntima conexão entre a filosofia política platônica e o empreendimento técnico euclidiano: "Na escola de Alexandria encontramos um enfoque mais técnico, não metafísico, para a matemática, porém não devemos nos esquecer de que Proclus, setecentos anos depois de Euclides, ainda considerava Os Elementos, que pareciam não ter qualquer conotação filosófica, uma introdução à filosofia de Platão, especialmente para o entendimento do Timaeus, a cosmogonia de Platão, baseada nos poliedros regulares, uma idéia que ainda chegou a impressionar Kepler... ou o Timaeus é um chapéu velho, um fantástico sem sentido, ou ele é uma contribuição séria para a compreensão da filosofia de Platão e do papel que a matemática nela desempenha".

E entre ambos e a cosmologia pitagórica: "Um **arithmos**, diz Euclides, é uma multitude de unidades chamadas **mônadas** ... Razões são relações entre grandezas e não são elas próprias **arithmos**. Esse tipo de matemática, na qual círculos e esferas, bem como sólidos regulares, têm um papel excepcional como figuras de perfeição, foi intimamente tecida na filosofia pitagórico-platônica ... A matemática não somente entra na epistemologia e ontologia dessa filosofia, mas também tem valores éticos e religiosos. As harmonias da corda vibrante conduziram às harmonias das esferas e são dominadas pelas harmonias dos **arithmos**" (Struik, 1985, p.201).

Mas é preciso estar atento e evitar reducionismos. Se por um lado é possível constatar e por em evidência o fio ideológico de coloração nitidamente eleático-pitagórico-platônica com que se tece a obra euclidiana, seria, por outro lado, uma falha irreparável ignorar o seu núcleo objetivo. Nesse sentido, não podemos nos esquecer que "Os Elementos de Euclides são, antes de mais nada, uma teoria das grandezas geométricas definidas a partir de dados empíricos, e a leitura dos Elementos apresentaria aspectos incompreensíveis se não se admite esse ponto de vista. A problemática euclidiana não é a de construir a geometria 'a priori' mas, a partir de dados iniciais, colocar em funcionamento a máquina dedutiva que lhe permita descobrir as **verdades geométricas** ... e diferentemente ao que se encontra nos textos matemáticos contemporâneos, as coisas (que são expressas pelas definições) são anteriores ao nome; trata-se de nomear aquilo que existe e não de fazer existir pelo fato de se nomear" (Bkouche, 1982, pp. 14-15).

Esse ponto de vista de Bkouche interessa-nos particularmente porque, ao ressaltar um dos elementos diferenciadores das abordagens axiomáticas antiga e contemporânea, permite-nos ir além na caracterização da concepção de matemática do paradigma do formalismo pedagógico clássico.

Um primeiro ponto a se dar destaque é que, diferentemente das abordagens axiomáticas contemporâneas, nas quais os entes primitivos só adquirem significações por meio dos axiomas que os ligam, na abordagem axiomática euclidiana, os princípios (definições, postulados e axiomas) que fundamentam a matemática, além de terem uma base experimental, aplicam-se a objetos realmente existentes, definidos explicitamente com palavras claras e distintas. Nesse sentido, "sendo Euclides, como bom grego, visual nato, não **pede**[7], isto é, não postula nada daquilo que esteja dado imediatamente à intuição geométrica ... a construção não é para

---

[7] Bacca (1944, pp. XXIII-XXIV) assinala que a palavra "postulado" significava, para o heleno clássico, "petição". Assim, quando Euclides notou que "certas proposições não podiam ser suficientemente aclaradas por meio de outras perfeitamente evidentes e manifestas, "<u>pediu</u>" ( ) que se lhe concedessem como se fossem claras e manifestas, afim de poder tratá-las e encadeá-las ao sistema total de proposições geométricas evidentes, dignas de serem vistas e formuladas proposicionalmente por um raciocínio encadeado pela evidência e luminosidade intríseca das proposições verdadeiras".

ele um meio de fazer existir os objetos geométricos para depois investigar as propriedades que se possam 'deduzir' da construção, sem ter que construí-las. A construção não é uma 'prova de existência' pois, para ele, o critério de existência é o da 'existência visível', imediata ou não; e se a coisa não estiver imediatamente visível, o procedimento que emprega não é pura e simplesmente uma construção, mas uma construção que torne possível uma visão" (Bacca, 1944, pp. LXXIV-LXXV).

Um segundo ponto a destacar, decorrente da distinção anterior, é a concepção de evidência subjacente ao paradigma do formalismo pedagógico clássico. Segundo ela os princípios não necessitam de demonstração por serem evidentes. Mas por que são evidentes? Diferentemente da axiomática contemporânea, para a qual o conceito de evidência (se é que ele existe) refere-se à caracterização daquelas afirmações em relação às quais se pode mostrar que sua negação implica uma contradição (Scholz, 1980, p. 13), para a axiomática antiga os princípios são evidentes ou por estarem baseados na experiência ou por se constituírem nas únicas opções perceptíveis resultantes da conciliação entre experiência e razão.

Um terceiro ponto a ser realçado diz respeito ao modo como se concebem as proposições no paradigma do formalismo pedagógico clássico. Se para a axiomática contemporânea não há, a rigor, proposições uma vez que não há objetos definidos explicitamente dos quais se possam formular predicados que resultem numa proposição verdadeira ou falsa, na axiomática antiga as proposições não só enunciam um conteúdo como também decidem pela veracidade ou falsidade desse conteúdo, tendendo a eliminar da ciência toda afirmação da qual não conste seu valor-verdade (Bacca, 1944, pp. XXXVII-LXXXVIII). Isso porque, fiel aos princípios eleáticos, toda a filosofia grega é guiada pelo pressuposto de que a razão deve afirmar a verdade e negar o falso dando, conseqüentemente, forma de proposições afirmativas àquelas que expressam o que as coisas são e a forma de proposições negativas àquelas que não expressam o que as coisas são (Bacca, 1944, p. XVIII).

Um quarto ponto que devemos salientar é que a axiomática subjacente ao paradigma do formalismo pedagógico clássico pode ser interpretada, em sua quase totalidade, como uma "física teórica", isto é, uma "física do espaço" (Bkouche, 1982, p. 18). Ela é, na realidade, o reflexo do mundo físico, ainda que Euclides se esforce o máximo possível para ocultar esse fato e tente permanecer fiel ao dogma platônico de ser o mundo físico o reflexo imperfeito do mundo das Idéias. É por essa razão que nos Elementos, embora "tudo que se afirme seja empiricamente verdadeiro, a experiência nunca é invocada como uma justificação (Blanché, 1987, p. 9).

É nesse sentido que seria legítimo falar de um empirismo euclidiano sobreposto a um racionalismo euclidiano, o que revela o caráter epistemológico dual do empreendimento euclidiano: empírico no que se refere ao seu conteúdo e racional no que diz respeito ao método de justificação do valor cognitivo das proposições. Ou, como afirma Blanché (1987, p.15), "um teorema da geometria (euclidiana) é simultaneamente uma informação sobre as coisas e uma construção da inteligência, uma lei da física e o elemento de um sistema lógico, uma verdade da experiência e uma verdade racional".

Talvez tenha sido essa possibilidade de dupla leitura do conhecimento matemático, isto é, uma concepção fisicista sobreposta a uma concepção estritamente teórica que tenha originado na Grécia Clássica, a cisão desse campo do conhecimento em dois compartimentos radicalmente distintos: uma matemática pura e uma matemática aplicada.

Entretanto, essa sobreposição de concepções, por razões menos de ordem técnica que ideológicas, tomou entre os gregos, a forma de oposição, de dicotomia: de um lado a Aritmética (entendida como ciência teórica dos números) e a Geometria (em sua concepção teórica racional) consideradas ciências nobres, e de outro a Logística (ou cálculo numérico) e a Geodésia (ou geometria prática) consideradas conhecimentos vulgares.

Essa dicotomia que perpassa o terreno da matemática era o reflexo de uma outra, de maior amplitude: aquela existente entre teoria e atividade prática produtiva.

A concepção filosófica moderna de que o homem só se humaniza através do trabalho, isto é, através da transformação do mundo material, era estranha ao pensamento grego, embora não lhe fosse desconhecida a atitude não-depreciativa em relação ao trabalho produtivo e às artes mecânicas como atestavam o Hesíodo de "Os trabalhos e os dias"e alguns sofistas como Pródico (Vázquez, 1968, p. 17 e p. 24). Entretanto, era hegemônica a concepção negativa da relação teoria-prática - defendida preponderantemente por Platão e Aristóteles - segundo a qual o homem só se aperfeiçoa "através da isenção de qualquer atividade prática material e, portanto, separando a teoria e a contemplação, da prática" (Vázquez, 1968, p. 17).

Essa exaltação (e redução) do homem como ser teórico é própria de uma sociedade cuja produção está orientada exclusivamente ao atendimento das necessidades dos cidadãos da polis. Daí a oposição entre trabalho intelectual e trabalho físico. Daí a superioridade do espiritual sobre o material. Daí o desdém pelas aplicações práticas da aritmética e da geometria.

Ressaltemos, finalmente, um quinto e último aspecto caracterizador da concepção de matemática inerente ao paradigma do formalismo pedagógico clássico: a convicção de que o sistema de verdades geométricas é único. São pelo menos dois os pressupostos relativos à teoria do conhecimento em que se assenta essa convicção. O primeiro refere-se à adoção da concepção clássica da verdade, isto é, da concepção de verdade como correspondência ou adequação. De acordo com essa concepção a verdade é propriedade do ser e sendo uno o ser de cada coisa, o conhecer passa a ser o ato de identificar-se com esse unitário ser das coisas. É a clássica fórmula aristotélica: "Não és branco porque te consideramos corretamente branco; ao contrário, é por seres branco que temos razão no que afirmamos".

Essa concepção de verdade relativa ao conhecimento em geral, quando aplicada ao conhecimento geométrico em particular, resulta nas seguintes crenças:

- os seres geométricos só podem ser o que são de uma única maneira;
- o modo como os seres geométricos manifestam o que são e também as suas propriedades é também unitário num duplo sentido: primeiro porque devem manifestar o que são e segundo porque

não podem mudar o tipo de manifestação como acontece com certos corpos, como a água, que podem passar por diversos estados (Bacca, 1944, pp. X-XIII).

Conseqüentemente, o ser uno dos objetos geométricos, não podendo estar em diversos estados, só pode ser verdadeiro de uma única maneira. Daí ser uno o sistema de verdades geométricas.

O segundo pressuposto em que se assenta essa convicção refere-se à forma clássica de se conceber a relação sujeito-objeto no ato do conhecimento, que se caracteriza por uma "falta de espontaneidade criadora do sujeito" ou de "passividade receptora pura" do sujeito frente ao objeto.

No caso particular do conhecimento geométrico, essa "falta de espontaneidade criadora" do sujeito é revelada pelo caráter limitado do procedimento de construção na obra euclidiana. De fato, as construções euclidianas "limitam-se a reproduzir as mesmas coisas dadas à intuição contemplativa dos objetos - construir retas iguais a outras dadas, construir figuras, ângulos iguais a outros dados, etc. - e assim, a reta e o círculo, a régua e o compasso, foram seus instrumentos naturais para construções geométricas, ou melhor, para a servil cópia do real dado imediatamente" (Bacca, 1944, pp. XIV-XV). Logo, "se o entendimento de cada sujeito se sente passivo frente ao ser e à verdade das coisas e se essas coisas não lhe apresentam senão um só tipo de verdade ôntica, isto é, se só se lhe manifestam de uma só maneira, o entendimento não poderá ver senão uma só verdade e, ao formulá-la, só nos dará um único sistema de proposições básicas ou axiomas" (Bacca, 1944, p. XIV).

3. A DIMENSÃO TELEOLÓGICO-AXIOLÓGICA SUBJACENTE AO PARADIGMA DO FORMALISMO PEDAGÓGICO CLÁSSICO

Uma vez caracterizada a concepção de matemática subjacente ao paradigma do formalismo pedagógico clássico, passemos ao exame de nossa segunda categoria de análise.

No terreno educacional as castas egípcias dominantes já haviam percebido que a perpetuação dessa dominação passava necessariamente pela promoção da separação entre instrução e trabalho, pela exclusão da maioria da população à participação educativa e pela submissão dos ideais educativos à formação de quadros destinados ao desempenho eficaz das tarefas político-administrativas (Manacorda, 1989, pp. 9-40). Fiel a essa forma de se conceber os fins educativos, a educação matemática cumpria significativo papel na formação do escriba em suas múltiplas especializações. O conteúdo matemático presente nos papiros de Rhind, de Moscou e Anastasi I, atesta-nos o caráter exclusivamente pragmático da instrução matemática presente nessa formação e a natureza invariavelmente algorítmica e repetitiva do método de ensino. São problemas relativos ao cálculo das superfícies dos campos, dos volumes dos edifícios e recipientes de armazenagem de grãos de cereais, das dosagens para a cerveja, dos impostos a serem pagos pelos súditos, etc., quase todos acompanhados pelo conselho didático do "Faze assim em todos os casos semelhantes, como te foi sugerido por este exemplo" (Manacorda, 1989, p. 34; Gillings, 1982).

De certo modo, os gregos mantiveram alguns dos aspectos da educação egípcia, mas no que se refere particularmente à educação matemática, deram origem a uma nova concepção, de caráter não-pragmático, dos fins a serem atingidos por intermédio dela. Do mesmo modo como foram os primeiros na história a perceberem a possibilidade de uma nova forma de se conceber o conhecimento matemático (uma matemática teórica fundada em princípios) também foram os pioneiros no sentido de vislumbrarem uma nova finalidade para o seu ensino, além da orientação pragmática já cristalizada.

Que a percepção da possibilidade de estabelecimento de novos fins educativos a essa ciência estava subordinada à possibilidade de se concebê-la de forma diferente, atesta-nos uma passagem do "Catálogo dos Geômetras" (5º século d.C.) de Proclo no qual se preservou um pequeno extrato da mais antiga história da matemática grega (obra perdida) escrita por Eudemo, discípulo de Aristóteles, no 4º século a.C.. Lê-se aí que Pitágoras havia mudado o objetivo da geometria ao dar-lhe uma forma que permitiu a ela tornar-se parte da educação das pessoas livres. Se atentarmo-nos para o fato de que na concepção da sociedade escravagista antiga a prática, isto é, a praxis, não é digna de um homem livre, devendo este engajar-se apenas na contemplação, isto é, na teoria (Szabó, 1960, p. 31), seremos forçados a admitir que somente o surgimento desta nova forma de se conceber a geometria, que rompia com a tendência empírica e ilustrativa até então hegemônica, foi capaz de elevá-la à categoria de algo digno de ser ensinado. Entretanto, é a pedagogia platônica que melhor ilustra e sistematiza essa alteração de rumo relativa aos fins da educação matemática e aos valores a serem promovidos por intermédio dela. É a teleologia e a axiologia subjacentes à concepção platônica de educação matemática que deverá integrar-se ao paradigma do formalismo pedagógico clássico. Sem dúvida, essa concepção tem como fonte inspiradora os ensinamentos dos pitagóricos, notadamente os do matemático e estadista Arquitas de Tarento, "o modelo vivo para a educação matemática dos governantes de Platão" (Jaeger, s/d, p. 848).

Contudo, do mesmo modo como interrogamo-nos sobre a possibilidade de surgimento da matemática teórica, podemos também interrogarmo-nos sobre a possibilidade de surgimento da ideologia política conservadora de Platão, à qual estão vinculados as suas idéias pedagógicas, o seu ideal educativo e, mais particularmente, o papel atribuído à educação matemática.

Em certo sentido, o contexto histórico caracterizado pela decadência de Atenas após ter saído derrotada das guerras do Peloponeso, irá favorecer o aparecimento e a difusão da ideologia política platônica e do ideal educativo a ela subjacente. A avaliação feita por Platão deste momento histórico e a sua intenção de conter este estado de deterioração, fazem com que ele acabe estabelecendo uma suposta correlação positiva entre vida democrática e decadência.

Sendo a democracia o reino da opinião e sendo a política, para Platão, uma questão de saber e não de opinião, argumentava que a democracia era um caminho aberto ou à demagogia ou à tirania.

"Para Platão, a linguagem é eivada de armadilhas, sortilégios e perigos. A multidão, maravilhada pela palavra de um orador, pode, em conseqüência, votar cegamente contra o interesse público. É por isso que os sofistas, que ensinam a arte de seduzir e de persuadir por meio de palavras, constituem um alvo permanente para Platão" (Piettre, 1989, p. 23).

De fato, assinala Daros (1987, pp. 544-545), "Platão advertia que a sociedade de seu tempo tinha preferências pela vida democrática, pela discussão crítica e livre, estabelecida pelos sofistas. Em seu modo de ver, isto representava uma degeneração social e propugnou, como reação, um governo aristocrático com pensadores aristocráticos e idealistas como ele, os únicos que possuíam a verdade acerca da natureza do homem e da coisa pública".

Vê-se, portanto, que do mesmo modo como o surgimento da matemática teórica não poderia ser explicado sem se levantar a hipótese da existência de uma tendência anti-empírica e anti-ilustrativa, também o surgimento da doutrina pedagógica platônica não seria explicável senão como uma reação a uma tendência pedagógica de natureza pragmática que tivesse tido ou estivesse tendo ampla difusão e aceitação entre os gregos. No caso, essa tendência era representada pela antiga educação sofístico-retórica que, surgida no século V a.C., "havia criado sólidas raízes na vida espiritual dos gregos. Reforçando esse ponto de vista, Jaeger (s/d, p. 316) assinala que "do ponto de vista histórico, a sofística é um fenômeno tão importante como Sócrates e Platão. Mais: não é possível concebê-los sem ela".

O aspecto dessa contraposição que aqui nos interessa diz respeito aos fins e valores da educação. A esse respeito, existia entre os sofistas a convicção comum de que a educação não só devia, como podia, realizar no homem a "arete" política[8]. Embora o conceito de "arete" estivesse desde o início dos tempos homéricos vinculado à questão educativa, ele foi sofrendo alterações com o desenvolvimento histórico que vão desde a mais antiga concepção e a destreza dos guerreiros ou lutadores, isto é, a uma forma de heroísmo entendido como ação moral indissociada da força, até à concepção política de "arete" que entende o homem vinculado a um Estado jurídico (Jaeger, s/d, p. 24 e p. 311).

Foi o movimento educacional da sofística que reivindicou, pela primeira vez, o ideal educativo de uma **arete política baseada no saber.** A possibilidade mesma de se colocar tal revindicação relaciona-se com a mudança que se opera no Estado na época do imperialismo de Péricles, em que "a racionalização da educação política não passa de um caso particular da racionalização da vida inteira que, mais do que nunca, se baseia na ação e no êxito" (Jaeger, s/d, p. 326).

A educação pragmática dos sofistas veio preencher sob medida essa exigência, e uma vez que os dotes oratórios eram indispensáveis para assegurar o êxito nas assembléias e nos tribunais, toda a educação política, isto é, aquela que visava à formação do cidadão, deveria basear-se fundamentalmente na arte da retórica - falar, discorrer ou demonstrar a veracidade de uma tese tão bem quanto a verdade da tese contrária.

Esse tipo de pragmatismo traz implicações no plano da

---

[8] "Tanto em Homero como nos séculos posteriores, o conceito de 'arete' é freqüentemente usado no seu sentido mais amplo, isto é, não só para designar a excelência humana, como também a superioridade de seres não humanos; a força dos deuses ou a coragem e rapidez dos cavalos de raça. Ao contrário, o homem vulgar não tem 'arete' e, se o escravo descende por acaso de uma família de alto estirpe, Zeus tira-lhe a metade da 'arete' e ele deixa de ser quem era dantes. A 'arete' é o atributo próprio da nobreza" (cf. Jaeger, s/d, pp. 23-24).

teoria do conhecimento, mais particularmente na questão referente à concepção da verdade. Ele pode levar-nos à defesa do relativismo - como de fato, o fez Protágoras - para quem não havia verdade que se impusesse ao homem em qualquer domínio do conhecimento, aí incluídas a moral e a política, uma vez que é o homem a medida da verdade e do valor. Ou então, pode obrigar-nos a aceitar a tese do ceticismo radical, como de fato o fez Górgias, para quem o verdadeiro era tudo aquilo que se conseguia convencer como sendo verdadeiro, uma vez que não existia qualquer verdade absoluta (Piettre, 1989, p. 14).

É contra essa concepção pragmática de educação defendida pelos sofistas e suas implicações no plano da teoria do conhecimento que deverá insurgir-se Platão. A questão central que surge dessa contraposição, que Platão coloca a si próprio e tenta superar através do Sócrates platônico de seus diálogos, é a de como empregar as palavras, não para seduzir ou convencer, mas para descobrir a verdade. E só aqueles que possuem a totalidade da verdade devem, segundo ele, possuir também a totalidade do poder. Estabelece-se assim, por um lado, uma conexão entre verdade e poder, uma vez que só o homem moralmente perfeito pode ser um perfeito cidadão. Mas o território da verdade não se atinge pelo caminho das certezas fáceis derivadas do testemunho dos sentidos ou do senso comum das opiniões. Ao contrário, ele localiza-se no limite superior de uma longa e penosa trajetória a ser percorrida pela inteligência, isto é, pela razão. Somente situando-se no interior desse terreno bem delimitado é que se pode "contemplar o bem". Essa "contemplação", entretanto, não se confunde com misticismo ou uma espécie qualquer de intuição misteriosa, mas deve ser entendida como sinônimo de saber, isto é, de ciência.

Conseqüentemente, é a contemplação do bem - que coincide ao mesmo tempo com o grau máximo de conhecimento, critério de verdade desse conhecimento e fonte de toda moralidade e perfeição - que constitui o objetivo da ciência das idéias, isto é, da dialética e a finalidade suprema da educação. Desse modo, além do vínculo estabelecido entre verdade e poder, isto é, entre as dimensões científica e política da educação, a teleologia e axiologia platônicas aglutinam num todo indissociável os aspectos ético e estético do ato educativo, uma vez que o ato individual de elevar-se culturalmente no sentido da contemplação do bem é tido, simultaneamente, como bom e belo, isto é, é eticamente elogiável e esteticamente agradável.

Em decorrência desta concepção dos fins educativos podemos afirmar como o faz Marrou (1973, p. 111) que, em Platão, "o ideal em função do qual se informa o discípulo é um ideal de sabedoria mais do que de eficiência prática ... a norma não é mais o sucesso, mas a verdade: daí o valor conferido ao **saber verdadeiro, fundado em rigor demonstrativo**, cujo símbolo é a verdade geométrica que o Ménon oferece como exemplo" (grifos nossos).

De forma coerente com esse ideal educativo, as matérias de estudo não têm para Platão um valor prático; elas se constituem exclusivamente em meios de disciplina mental; não são senão veículos para se desenvolver a capacidade de pensamento através do uso do método dialético.

A matemática não escapa a essa regra. Entretanto, no

Livro VII de "A República", na seção que tem por objetivo refletir sobre a natureza das ciências mais indicadas à formação do filósofo, o Sócrates platônico, após referir-se à matemática como aquela ciência capaz de fazer com que "a alma saia de um dia escuro como a noite e entre em um dia verdadeiro" e "a ciência que arrasta a alma do vir-a-ser para o ser", induz Glauco a aceitá-la como um conhecimento indispensável para aquela formação, pelo fato dela possuir uma qualidade adicional: "a de não ser inútil para os guerreiros" (Platão, 1989, p. 57).

Percebe-se, portanto, que Platão, no seu intento de demonstrar a importância pedagógica da matemática serve-se, com perspicácia, do duplo estatuto epistemológico dessa ciência apelando para seu aspecto "puro" quando se trata de tornar visível o seu poder de "conversão das almas" e para o seu aspecto "aplicado" quando se trata de por em evidência a função desse conhecimento para a ação política eficaz.

O fato de Platão referir-se, nesse momento, ao aspecto bélico e não a qualquer outro tipo de aplicação da matemática, para tornar mais persuasiva a relação que busca estabelecer entre essa ciência e a ação política, mostra-nos uma vez mais a sua habilidade dialética. Isso porque, como tencionava formar o filósofo, isto é, os dirigentes da polis, e sendo estes recrutados entre os guardiões ou guerreiros[9], o aspecto bélico era o que possuía um maior potencial de sensibilização.

Além disso, Platão sabia que "o desenvolvimento da

---

[9] "Guardião é, geralmente empregado como sinônimo de guerreiro e de soldado. Mas possui também um sentido mais amplo: o filósofo, recrutado entre os guerreiros, é também um guardião da Cidade,pois vela pela sua ordem e pelo seu bem" (Piettre, 1989, p. 63).

ciência da guerra no século IV a.C. requeria um conhecimento cada vez maior das matemáticas" (Jaeger, s/d, p. 840), tornando essa ciência, particularmente a ciência dos números[10], um instrumento indispensável para estrategistas e governantes.

Mas o fato de Platão referir-se à matemática aplicada e, mais particularmente, à aplicação da matemática à ciência da guerra é, como diz Jaeger (s/d, p. 841) "uma mera concessão feita à cultura dos governantes por ele visada". Isso porque, para Platão, o verdadeiro valor pedagógico da matemática não está em seu conteúdo, mas em seu método, uma vez que somente essa forma rigorosa e perfeita de se raciocinar pode constituir-se em prelúdio à dialética, à ciência das idéias.

A matemática é a intermediária natural entre o mundo sensível e o mundo das idéias pois o método que legitima as suas verdades "nos revela um mundo ordenado, medido, hierarquizado e harmonioso, que nos impele a conceber um mundo distinto da realidade sensível, superior em retidão e beleza ... revela-nos a existência de realidades verdadeiras e não-sensíveis e que só são verdadeiras por não serem sensíveis" (Piettre, 1989, pp. 28-29).

Platão não somente exalta e sobrevaloriza a dimensão lógica do conhecimento matemático, como também tem clareza da originalidade de seu ponto de vista pedagógico uma vez que afirma que, antes dele, jamais essa ciência havia sido ensinada com tal finalidade. Desse modo, "transcendendo as preocupações utilitárias, Platão confia às matemáticas um papel antes de tudo prope-

[10] Segundo a lenda, a ciência dos números foi criada por Palamedes, herói que combateu na guerra de Tróia. Foi Palamedes quem ensinou Agamémnon a usá-la para fins estratégicos e táticos. Platão, ironizando esse ponto de vista, dizia que Agamémnon não sabia nem mesmo contar os seus dedos. Como esperar dele que contasse os contingentes de seu exército? (Jaeger, s/d, p. 840).

dêutico: elas devem, não mobiliar a memória com conhecimentos úteis, mas formar uma 'teste bien faicte', ou seja, um espírito capaz de receber a verdade inteligível, no sentido em que a geometria fala de um arco 'capaz' de um ângulo dado" (Marrou, 1973, p.124).

Portanto, de acordo com a doutrina platônica, ensinavam-se e estudavam-se as disciplinas matemáticas não por seus valores intrínsecos ou utilitários, mas como meios de elevação espiritual no sentido de conhecimento da natureza da verdade absoluta, a fim de se atingir a disciplina suprema (Manacorda, 1989, p. 57).

Nesse sentido, com o passar do tempo, a conquista da disciplina mental - invenção da pedagogia platônica - passa a constituir a finalidade atribuída à educação matemática no interior do paradigma do formalismo pedagógico clássico. É com razão, portanto, que Blanché (1987, p. 10) afirma que, entre os gregos, "quando se ensina geometria às crianças não é tanto para ensinar verdades, mas antes para lhes **disciplinar o espírito**, pois a prática da geometria criaria e desenvolveria o **hábito do raciocínio rigoroso**" (grifos nossos). Antes dele, porém, L. Brunschvicg (1972, p. 84) já havia percebido isso com clareza quando afirmava que "Euclides, para as numerosas gerações que se alimentaram de sua substância, foi talvez não tanto um professor de geometria, mas antes um professor de lógica".

Foi, portanto, com a concepção platônica da finalidade atribuída à educação matemática que aparece, pela primeira vez na história dessa área de conhecimento, um primeiro modo de ruptura entre forma e conteúdo matemático, sendo a ênfase posta sobre o primeiro elemento desse par tensional. A ênfase na forma, no sentido de ênfase no método aristotélico-euclidiano de se reproduzir o conteúdo matemático já produzido de outra forma, foi a razão do aparecimento histórico do primeiro tipo de formalismo em educação matemática.

4. AS DIMENSÕES PSICOLÓGICA E DIDÁTICO-METODOLÓGICA SUBJACENTE AO PARADIGMA DO FORMALISMO PEDAGÓGICO CLÁSSICO

Mas se para Platão a finalidade pedagógica da matemática era a de constituir-se em meio de elevação espiritual, qual o método de ensino a seguir? Como fazer o aprendiz alcançar a disciplina suprema e ter acesso ao terreno das verdades absolutas que habitam o mundo das Idéias?

O método em que se baseia a ação pedagógica que se pode inferir dos diálogos platônicos é o da dialética socrática. Esse método, baseia-se antes de mais nada e fundamentalmente na palavra, isto é, no dominio da arte de argumentar oralmente.

Na seguinte passagem do "Mênon" de Platão, é o próprio Sócrates que atesta essa primeira característica de seu método.

Mênon: - "Segundo tua definição, figura é o que sempre tem uma cor. Seja! Mas se alguém dissesse que não sabe o que é cor e permanecesse desse modo na mesma ignorância a respeito da figura, que poderias dizer?"

Sócrates: - "Que ela é verdadeira e, se tivesse que tratar com um desses homens hábeis e disputadores que vivem a procurar brigas e disputas (Sócrates refere-se aos sofistas), eu lhe diria apenas: 'Dei a explicação que melhor me pareceu. Se te parece que não falo certo, deves tomar a palavra e convencer-me do contrário'. Todavia, quando dois bons amigos, como eu e tu conversam, a resposta deve ser dada com maior doçura e mais de acordo com o espírito da conversão. O que caracteriza esse espírito, segundo penso, consiste, não em só dizer a verdade, mas fundamentar as respostas unicamente naquilo que o próprio interlocutor reconhece saber. Segundo este espírito é que vou procurar, contigo, resolver a questão." (Platão, s/d, "Mênon", pp. 48-49).

Essa primeira característica do método pedagógico socrático era comum ao método empregado pela maioria dos sofistas. Entretanto, a dialética socrática possuía ainda uma característica adicional que a tornava extremamente original: o estabelecimento de uma relação dialógica entre o mestre e o aprendiz. Esse diálogo constituía-se de dois momentos articulados: o da ironia, no qual buscava-se trazer ao plano da consciência o erro do interlocutor, e o da maiêutica, no qual tentava-se fazer com que o interlocutor acreditasse que a verdade procurada estava adormecida no interior de si próprio.

A etapa da ironia tem notória semelhança com o método da demonstração indireta utilizado pelos matemáticos e, provavelmente, Sócrates deve ter percebido o valor pedagógico desse método.

Qualquer que seja a questão a ser investigada, o mestre, num primeiro momento, simula uma situação de ignorância e contenta-se em levantar perguntas aparentemente ingênuas sobre o tema. De início, o aprendiz responde com segurança, mas à medida que a conversação prossegue ele acaba chegando a uma situação desconcertante e até mesmo absurda em função do hábil encaminhamento dado pelo mestre ao diálogo. Em seguida, o mestre traz ao nível da consciência o postulado que gerou as conclusões contraditórias e que, justamente por isso, deve ser prontamente rejeitado e substituído por outro.

Como se nota, a preocupação pedagógica subjacente a esse método é menos a de transmissão de um conhecimento já pronto ao aprendiz do que a de estimular a capacidade de pensar.

Mas se a etapa da ironia da dialética socrática se inspirou do domínio da própria matemática e daí extraiu o seu fundamento, o mesmo não se pode dizer em relação à etapa da maiêutica.

A etapa da maiêutica do método socrático assenta-se na famosa teoria da reminiscência de Platão - o que mostra que o pitagorismo exerceu também influência sobre a sua doutrina pedagógica. Segundo essa teoria, da forma como Platão a expõe no Mênon, o vir a conhecer identifica-se com recordar, uma vez que a alma, antes de habitar este mundo de aparências em que vivemos e que por estar aprisionada por um corpo, está submetida a enganar-se freqüentemente devido às ações desorientadoras dos sentidos, teria pré-existido num ambiente puro, imaterial e imutável, no qual esteve em contato direto com a eterna e autêntica realidade das verdades geométricas. Daí, para se por novamente em contato com elas, era suficiente um simples esforço para se recordar o que se havia caído em esquecimento.

A palavra "verdade" em grego - aletheia - põe a nú e confirma-nos essa caracterização platônica do conhecimento como aquilo que sobrevive à memória, uma vez que o seu significado é o oposto de "esquecimento" (lèthè em grego) (Marizot, 1982, p. 157)

Percebe-se, portanto, que o pressuposto de natureza psicológica em que se baseia essa primeira versão da teoria platônica da reminiscência é que "o conhecimento é adquirido por reintegração progressiva de lembranças de uma existência anterior" (Mugler, apud Michel, 1959, p. 50).

Essa existência anterior, entretanto, está ainda submetida ao domínio do tempo.

Porém, mais tarde, no Timeu, Platão fornece uma segunda versão da teoria da reminiscência que assenta-se agora num novo pressuposto psicológico: o de que "o conhecimento é adquirido por antecipação intuitiva de uma realidade que se subtrai ao domínio do tempo" (Mugler, apud Michel, 1959, p. 50).

Entretanto, não foi o método dialético platônico-socrático o método pedagógico dominante na Antiguidade. Ao contrário, devido à sua originalidade e ao seu caráter revolucionário, numa época em que aprender ainda era sinônimo de "saber de cor", acabou exercendo pouca influência na educação antiga, particularmente na educação matemática (Assa, 1977, p. 76).

De fato, com o passar do tempo, a ênfase em educação matemática, como em toda educação, é posta mais no rigor da proposta operacionalizada que ilustre um terceiro modo da história relacionar-se com a Educação Matemática. Além disso, no meu modo de entender, quando, pedagogicamente, nos situamos voluntariamente no interior do paradigma histórico - que de modo algum influenciou a formação dos professores e dos estudantes de matemática que aí estão - a questão que se coloca é menos de viabilidade que de necessidade; é menos de viabilidade que de abertura de novos horizontes e perspectivas.

Uma vez que a questão para a qual nos voltaremos será a de constituição de uma proposta, a parte restante do esforço que faremos neste Estudo deverá direcionar-se no sentido da fundamentação histórico-epistemológica, psico-pedagógica e sócio-política dessa proposta operacionalizada.

Antes, porém, de apresentarmos o estudo histórico-pedagógico-operacionalizado, exporemos e comentaremos, de forma breve, alguns pressupostos de caráter geral que o fundamentam e, após isso, tentaremos mostrar como esses pressupostos operam de modo específico na fundamentação do estudo sobre os números irracionais.

2. PRESSUPOSTOS GERAIS SUBJACENTES AO ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO-TEMÁTICO

Um primeiro pressuposto de natureza histórico-metodológica que orientou a reconstituição do tema diz respeito à opção que fizemos por uma "história-problema" em oposição a uma história de caráter estritamente factual, isto é, em oposição àquilo que os historiadores chamam de "história-narrativa" ou "história-crônica".

É claro que denunciar os limites da história factual, como tão bem o fizeram L. Febvre e M. Bloch, não significa negar abusivamente que "os acontecimentos façam parte de maneira determinante do trabalho do historiador", como ressalva Lardreau (Lardreau, 1989, p. 56). Porém, reduzir a intencionalidade específica da ciência histórica ao desejo de saber o que se passou é, como afirma Aron, "assimilar o historiador ao cronista" e encarar o conhecimento histórico como "uma simples acumulação de fatos" (Aron, 1983, pp. 60-61). Mas, continua Lardreau, "Febvre e Bloch renovaram bem mais os estudos históricos lutando pela história-problema. Não apenas descrever, mas resolver; ou, pelo menos, por problemas" (Lardreau, 1989, p. 51). Subjacente a essa opção pela história-problema está, é claro, não a concepção de história como a ciência do passado, mas aquela que a encara como "um diálogo do presente com o passado, no qual o presente toma e conserva a iniciativa" (Aron, 1983, p. 17). Isso porque, como sugere o argumento epistemológico de Le Goff, "não há realidade histórica acabada, que se entregaria por si própria ao historiador". (Le Goff, 1990, p. 31-32), ou então, como reforça o argumento psicológico de Bloch, "porque a natureza do nosso entendimento inclina-o muito menos a querer saber do que a querer compreender, donde resulta que só são autênticas, em seu entender, aquelas ciências que logram estabelecer entre os fenômenos ligações explicativas" (Bloch, s/d, p. 16).

Esses argumentos reforçam nossa convicção da necessidade de se proceder a uma reconstituição racional do passado, isto é, a convicção de que "o espírito deve intervir e elaborar um mundo inteligível a partir do dado bruto" (Aron, 1983, p. 18). Isso equivale a afirmar a mútua subordinação entre história e epistemologia, uma vez que é esta última que fornece, ainda que de modo implícito, os elementos orientadores por meio dos quais o historiador constrói o seu discurso racional.

Bachelard percebeu com profundidade essa interação necessária entre história e epistemologia quando afirmou que "a epistemologia ensina-nos uma história científica tal como deveria ter sido ... e situa-nos, então, num *tempo lógico*, nas razões e nas consequências bem colocadas, num tempo lógico que não mais tem as delongas da real cronologia" (Bachelard, 1977, p. 114. grifos do autor).

Esse mesmo componente subjetivo no modo de se conceber a história evidencia-se, com finíssima sensibilidade, no "sou quem falhei ser" e no "somos quem nos supusemos" de Fernando dade de se proceder a uma reconstituição racional do passado, isto é, a convicção de que "o espírito deve intervir e elaborar um mundo inteligível a partir do dado bruto" (Aron, 1983, p. 18). Isso equivale a afirmar a mútua subordinação entre história e epistemologia, uma vez que é esta última que fornece, ainda que de modo implícito, os elementos orientadores por meio dos quais o historiador constrói o seu discurso racional.

Bachelard percebeu com profundidade essa interação necessária entre história e epistemologia quando afirmou que "a epistemologia ensina-nos uma história científica tal como deveria ter sido ... e situa-nos, então, num *tempo lógico*, nas razões e nas consequências bem colocadas, num tempo lógico que não mais tem as delongas da real cronologia" (Bachelard, 1977, p. 114. grifos do autor).

Esse mesmo componente subjetivo no modo de se conceber a história evidencia-se, com finíssima sensibilidade, no "sou quem falhei ser" e no "somos quem nos supusemos" de Fernando Pessoa, que não apenas incorpora ao plano da historicidade o elemento imaginário, isto é, os sonhos, as representações, os projetos não realizados, como também eleva essa outra face oculta da história à dimensão de "verdadeira história".

Mas essa subjetividade não é irrestrita uma vez que, como assinala Lardreau, "se há um número indefinido de discursos possíveis é também verdade que há um número indefinido de discursos que os vestígios tornam impossíveis" (Lardreau, 1989, p. 39).

Afirmar a subjetividade do discurso histórico é não negar a possibilidade de se dar asas à imaginação e de se legimitar os nossos sonhos, mas é também a exigência de estabelecimento de um limite cuja superação nos faria penetrar no terreno da ficção e da fantasia. Esse limite não diz respeito a um eventual ponto de demarcação entre o discurso verdadeiro e os discursos falsos. Esse limite é a necessidade de fundamentação de qualquer discurso que os vestígios tornam possível. Como diz Lardreau, "o historiador sonha, mas trata-se de um sonho rigoroso, controlado, regulado, em suma, de um sonho condicionado" (Lardreau, 1989, p. 46)[3] .

No nosso modo de entender, portanto, o pressuposto da história-problema implica necessariamente numa reconstituição racional do processo histórico de elaboração de um conceito o que, por sua vez, exige uma análise epistemológica desse processo. Mas uma análise epistemológica desse processo não se confunde com uma mera reconstituição autônoma e descontextualizada do processo evolutivo de um conceito. Qual é, então, o propósito último dessa análise? O desvelamento da trama complexa de intenções, de expectativas, de resistências e revezes, de opções e atos dos atores espacio-temporalmente situados que intervieram no

---

[3] Isso significa que a inteligibilidade do discurso deve construir-se em função dos vestígios. Isso porque, como esclarece-nos Chartier, "é demasiado simples a oposição que pretende pôr em contraste as explicações sem relato e os relatos sem explicações: a compreensão histórica é construída no e pelo próprio relato, pelos seus ordenamentos e pelas suas composições. Há, porém, duas maneiras de entender uma tal asserção. Ela pode significar, antes de mais, que a encenação em forma de intriga é em si mesma compreensão - e, portanto, que existem tantas compreensões como intrigas construídas e que a inteligibilidade histórica só se avalia em função da plausibilidade oferecida pelo relato. 'Aquilo a que se chama explicação é apenas a maneira do relato se organizar em intriga compreensível', escrevia Veyne, considerando ao mesmo tempo que contar é sempre dar a compreender, e, consequentemente, explicar em história não é mais do que desvendar uma intriga. Todavia, a proposta que liga narração e explicação pode ter um outro sentido, se elaborar os dados colocados na intriga como vestígios ou indícios que permitem a reconstrução sempre submetida a controle, das realidades que os produziram. O conhecimento histórico é assim inscrito num paradigma do saber que não é o das leis matemáticas nem tão pouco o dos relatos verossímeis. A encenação em forma de intriga deve ser entendida como uma operação de conhecimento que não é da ordem da retórica mas que considera fulcral a possível inteligibilidade do fenômeno hsitórico, na sua realidade esbatida, a partir do cruzamento de seus vestígios acessíveis" (Chartier, 1990, pp. 82-83).

processo. Encontramo-nos, portanto, perante a história do imaginário uma vez que trata-se de por em destaque o papel desempenhado pela imaginação dos homens no campo histórico. O que implica a aceitação tácita do pressuposto de que a história cria o imaginário assim como esse imaginário pode criar o fato histórico. Trata-se, pois, de conceder um papel histórico aos sonhos e às ilusões, como afirmava Hiuzinga, um dos precursores da história do imaginário: "Ilusões! Mas não vêem que essas ilusões são a matería da história?". É isso que entendemos ser a tarefa da análise epistemológica - que em termos fenomenológicos se traduz no desvelamento "dos conteúdos intencionais das experiências vividas pelos atores" (Aron, 1983, p. 25) - e que, por essa razão, eleva-se à dimensão de análise sócio-psico-epistemológica do processo histórico de elaboração de um conceito. É esse o sentido do processo. É essa a sua racionalidade possível. Pois não há reconstituição racional, isto é, que faça sentido, não há história quando se exclui o tempo e o homem. "Ciência dos homens no tempo": assim Bloch define a história (Bloch, s/d, p. 29). "O bom historiador", continua ele, "assemelha-se ao monstro da lenda. Onde farejar carne humana é que está a sua caça" (Bloch, s/d, p. 28).

Um segundo pressuposto, de natureza psico-pedagógica, que orienta o nosso estudo histórico-pedagógico operacionalizado diz respeito a nossa opção por uma concepção construtivista não-radical de ensino-aprendizagem que acredita que o progresso cognitivo, isto é, que a compreensão das novidades no terreno do saber matemático, se dá através de superações dialéticas de "dissonâncias cognitivas" induzidas.

A expressão "dissonância cognitiva" apareceu pela primeira vez na literatura psicológica na obra de Leon Festinger intitulada "Teoria da Dissonância Cognitiva", publicada em 1957.[4]

Segundo Festinger, ocorre uma dissonância cognitiva para um indivíduo sempre que ele se veja submetido a duas ou mais cognições ou conhecimentos que lhe apareçam como incompatíveis entre si. O conflito cognitivo e emocional gerado por essa incompatibilidade motiva o indivíduo a buscar meios que lhe permitam escapar desse estado psicológico tensional. É esse, ao mesmo tempo, o núcleo e o axioma básico da teoria de Festinger: o estado de dissonância, por ser psicologicamente incômodo, é também motivador. O motivo? A busca de coerência.

A teoria de Festinger, do mesmo modo que motivou a realização de inúmeras pesquisas em psicologia social, foi também alvo de inúmeras críticas. Segundo Mugny e Carugati "o que subsiste dessa abordagem é não só a idéia de que o conflito possa ser fonte de uma atividade criadora (posto que o indivíduo é levado a elaborar uma forma ou outra de regulação) mas, sobretudo, que a dissonância cognitiva resulta de uma incompatibilidade de conhecimentos que são de natureza fundamentalmente social"

[4] A teoria de Festinger foi, seguramente, inspirada na de Fritz Heider a quem se atribui a origem das teorias de consistência. Heider foi quem formulou o "princípio do equilíbrio segundo o qual "as nossas atitudes em relação às pessoas e aos objetos a elas ligados se influenciam mutuamente no sentido de obter-se um estado de harmonia entre os componentes da relação interpessoal". Na mesma época, no livro denominado "Self-Consistency" (1945), Prescott Lecky refere-se também à mesma temática defendendo que a busca de consistência é a principal fonte de motivação para a pessoa atender à necessidade de manter a unidade e a integridade do organismo. Embora a teoria de Festinger tenha surgido no campo da psicologia social, as idéias nela contidas foram aplicadas em outras áreas da psicologia. Geiwitz, por exemplo, a inclui dentro das teorias não-freudianas da personalidade e Madsen dentre as teorias da motivação pelo fato de Festinger trabalhar com uma variável (a dissonância cognitiva) que, sob o ponto de vista psicológico, diz respeito tanto a problemas de personalidade quanto aos de motivação. Embora Festinger, ao elaborar sua teoria, não tivesse nenhum propósito educativo, são claras as implicações de natureza pedagógica de seu trabalho (cf. França, 1987, pp. 1-3).

(Carugati, F. e Mugny, G. in Mugny, 1991, p. 58).

Esse papel positivo desempenhado pelo conflito cognitivo está também na base da nova teoria piagetiana da equilibração[5], proposta como modelo descritivo e explicativo do desenvolvimento cognitivo.

De fato, Rolando Garcia, no posfácio do "Les Formes élémentaires de la dialectique" (Piaget, 1980, p. 233) - obra pertecente à fase em que a teoria piagetiana desloca-se do paradigma estrutural para o sistêmico - reconhece explicitamente o papel fundamental que a dialética desempenha no processo cognitivo: "Os filósofos clássicos não haviam suspeitado que de análises ao mesmo tempo sociogenéticas e psicogenéticas poderiam

---

[5] Foi em 1957 que Piaget propôs sua primeira teoria bastante elaborada da equilibração. Uma espécie de necessidade lógica probabilista estava, então, subjacente à explicação do processo que conduzia à integração de esquemas disjuntos no desenvolvimento cognitivo. Segundo LERBET (1990, p. 6), é preciso lembrar que essa "lógica probabilista estrita é coerente com o estruturalismo construtivista: as estruturas se integram para produzir novas estruturas mais abstratas segundo relações harmoniosas como as que Piaget estabeleceu entre percepção e inteligência". Mas essa primeira teoria da equilibração, continua Lerbet (1990, p. 7), "parece não ter 'funcionado' senão para fornecer a coerência fundamental à parte genética e estritamente estruturalista de sua obra até o final dos anos 50". Mas é no início da década de 70, ao dar-se conta do papel desempenhado pelas contradições no desenvolvimento da tomada de consciência, que os trabalhos de Piaget sofrem uma grande transformação dando origem a uma nova versão da teoria da equilibração.
A necessidade e a natureza dessa transformação não apenas insinuam-se nos títulos das obras dedicadas à primeira e segunda versões da teoria - respectivamente "Lógica e Equilíbrio" e "A Equilibração das Estruturas Cognitivas" -, como também são percebidas e explicadas pelo próprio Piaget no prefácio da segunda obra citada:
"Esta obra constitui uma completa reformulação do volume II dos Études d'Epistémologie Génétique, que se intitulava Logique et Équilibre. Realmente, os modelos então utilizados mostraram-se, claramente, insuficientes e convinha, pois, retomar o problema em seu conjunto, tanto mais que ele domina todas as questões do desenvolvimento do conhecimento. A idéia central é que este não procede nem da experiência única dos objetos, nem de uma programação inata pré-formada no sujeito, mas de construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas. Neste caso, os mecanismos a invocar só podem ser aqueles das regulações que conduzem, então, não a formas estáticas de equilíbrio, mas a reequilibrações melhorando as estruturas anteriores. É por isso que falaremos de equilibração enquanto processo e não somente de equilíbrios, e sobretudo de equilibrações "majorantes" que corrigem e completam as formas precedentes de equilíbrio"(Piaget, 1976, p. 7).
Nessa nova versão, "a equilibração procede de regulações que podem ser positivas, negativas ou ambas quando a situação é muito complexa, porque, se toda regulação é uma reação a uma perturbação, a recíproca não se verifica senão parcialmente" (LERBET, 1990, p. 8).

resultar uma teoria do conhecimento estável e coerente. Não era mais possível não reconhecer à dialética um papel intrínseco na teoria do conhecimento, na medida que o processo cognitivo não pode ser concebido senão como uma série de etapas, e a passagem de uma à seguinte nada mais sendo que a superação de uma situação conflitual".

Portanto, o modelo de desenvolvimento cognitivo adotado pela nova teoria piagetiana da equilibração pode ser considerado dialético - uma vez que o progresso cognitivo resulta de superações de conflitos ou contradições - desde que, porém, se entenda a palavra "contradição" como "contradição dialética" e desde que não se entenda "contradição dialética" no sentido hegeliano mas sim, como nos adverte Piaget, como fusão, em uma totalidade nova, de dois sistemas até então distintos e separados, *mas de modo algum opostos um ao outro*. Isso porque, afirma Piaget, "não se 'supera' uma contradição lógica ou formal, mas suprimimo-la ou descartamo-la por correção local ou mudando de teoria. Não existe, com efeito, lógica de superação, e se se pode e se deve falar de 'superações dialéticas' em múltiplos domínios, é porque a contradição dialética está mais próxima daquelas do pensamento natural do que aquelas da lógica formal" (Piaget, 1974, p. 154).

Desse modo, "a 'contradição' dialética aparece como uma noção cujo significado permanece psicogenético, sociogenético ou histórico, e não inerente às estruturas operatórias que tendem a um estado de fechamento" (Piaget, 1976, p. 20).

Em conformidade com essa advertência, utilizaremos no estudo histórico-pedagógico-temático a expressão "dissonância apresentação que no conteúdo, mais na memorização e na recitação que no pensamento e na imaginação, mais na imitação dos grandes mestres que no exercício da autonomia intelectual.

Assim, Euclides passa a ser o grande mestre para a educação matemática, o modelo a ser imitado. Mas essa hegemonia do método pedagógico baseado na imitação, repetição e memorização compreende-se pelo modo como na Antiguidade concebeu-se a relação sujeito-objeto no âmbito da teoria do conhecimento. Os povos antigos não conseguiram conceber essa relação a não ser de forma mecanicista. Adotaram, portanto, o ponto de vista daquilo que K. Popper chamou de a "teoria da consciência-recipiente", segundo a qual, na relação cognitiva, o sujeito comporta-se de forma passiva, receptiva, contemplativa e cujo papel restringe-se a registrar, através de seu aparelho perceptivo, os estímulos vindos do exterior. Nesse sentido, o conhecimento nada mais é do que o reflexo ou cópia do objeto (Schaff, 1983, p. 73). Aristóteles tornou clássica essa concepção empírico-mecanicista da relação cognitiva quando afirmou que a mente assemelhava-se a uma placa de cera intacta ("tabula rasa") na qual a experiência escreve.

Quando se olha sob esse prisma o próprio método pedagógico de Sócrates, percebe-se uma contradição entre a sua convicção de que cabia ao sujeito trazer ao nível da consciência o conhecimento que ele próprio já possuía e a forma surpreendentemente passiva como esse sujeito se comporta quando Sócrates coloca o seu método em ação. De fato, os interlocutores de Sócrates nos diálogos de Platão, limitam-se, quase sempre, a responder afirmativa ou negativamente as hábeis questões levantadas pelo mestre. "Sim, é natural"; "não é de se surpreender, absolutamente"; "Falas com propriedade"; "Sim"; "Tens razão"; "É verdade"; "Não, por Zeus"; etc. São com frases desse tipo que Glauco "dialoga" com Sócrates no Livro VII de "A República". No fundo, o "diálogo" é um monólogo pois é o mestre quem tenta imprimir na mente-tábula-rasa do aprendiz-interlocutor um conhecimento que foi construído pelo mestre e que o aprendiz acredita estar sendo construído por si próprio.

É legítimo, portanto, concluir que o método de ensinar matemática que constitui o paradigma do formalismo pedagógico clássico enfatiza a exposição, a imitação, a repetição e a memorização. Isso porque, nesse paradigma, o desenvolvimento cognitivo é concebido como acúmulo progressivo de átomos de informação imprimidos de fora sobre uma mente inicialmente vazia. Por sua vez, essa forma de se entender o desenvolvimento cognitivo sustenta-se numa concepção epistemológica empírico-mecanicista da relação sujeito-objeto no ato de conhecimento.

3º ESTUDO

NÚMEROS IRRACIONAIS: UM ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO-TEMÁTICO

Ah, quem escreverá a história do
que poderia ter sido?
Será essa, se alguém a escrever
a verdadeira história da Humanidade.
O que há é só o mundo verdadeiro,
não é nós, só o mundo.
O que não há somos nós, e a verdade
esta aí.

Sou quem falhei ser.
Somos todos quem nos supusemos
a nossa realidade é o que não
conseguimos nunca.

Fernando Pessoa

1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Neste terceiro e último Estudo temos por propósito apresentar um estudo histórico-pedagógico que tenha por objeto os número irracionais.

A razão de nossa escolha ter recaído sobre esse tema deve-se ao fato de, tradicionalmente, as passagens dos textos didáticos de matemática para a escola secundária referentes a ele reduzirem-se, invariavelmente, a um amontoado de regras de operar com radicais para as quais, na maioria das vezes, não se apresentam justificativas convincentes e que acabam por constituir-se, aos olhos dos estudantes, em conhecimentos pouco úteis, pouco desafiadores e desligados dos demais temas presentes nos programas de matemática.

Esse modo já clássico, estéril e nunca questionado de se "transpor didaticamente"[1] essas páginas do saber matemático contrasta, porém, com a elevada dosagem de imaginação, sutileza e ousadia que impregnaram sua produção histórica.

Uma didática construtiva da matemática - da qual este Estudo pretende ser uma ilustração - que tenha por convicção fundamental que a construção do conhecimento, no plano pedagógico, deva estar assentada numa análise sócio-psico-epistemológica de seu processo produtivo e, portanto, histórico, jamais poderia aceitar pacificamente esse contraste.

Assim sendo, parte do esforço que faremos neste

---

[1] A expressão "transposição didática" foi criada por Y. Chevallard para caracterizar o processo de transformação pelo qual deve passar o conhecimento matemático para que possa ser objeto de ensino. Para maiores detalhes, consultar a obra "La transposition didactique" de Y. Chevallard, 1985, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Estudo direciona-se no sentido de superação desse contraste. O resultado desse trabalho parcial é apresentado sob a forma daquilo que resolvemos chamar de "estudo histórico-pedagógico-operacionalizado" (EHPO). Para escrevê-lo imaginamos como público-alvo alunos de oitavas séries de nossas escolas de 1º grau, que tiveram a oportunidade de estudar matemática do modo como ela se apresenta no conjunto de fascículos intitulados "Tópicos de Ensino de Matemática"[2].

Embora esse estudo histórico-pedagógico-operacionalizado tenha passado por três reelaborações sucessivas desde o surgimento de sua primeira versão em 1988, em função dos comentários e sugestões feitos por alguns professores das redes pública e particular de Campinas que utilizavam algumas dessas versões em sala de aula, e também em função de novas pesquisas históricas sobre o tema feitas por mim, não temos por propósito, neste Estudo, fazer referência à forma como os professores e alunos interagiram com as diferentes versões dessa proposta operacionalizada. Embora essa dimensão prático-metodológica tenha desempenhado implicitamente um papel fundamental na elaboração da versão do estudo histórico-pedagógico-operacionalizado que ora apresentamos, uma análise dessa natureza exigiria um outro tipo de investigação que, embora relevante, não nos dispusemos a fazer neste trabalho.

Nossa intenção, portanto, é a de constituir uma

[2] Esse conjunto de fascículos, dos quais sou um dos co-autores, é um trabalho que vem sendo desenvolvido desde 1982 junto a alguns professores da rede pública e particular da cidade de Campinas, que os utilizam como material de apoio em suas aulas. Os fascículos, escritos num estilo construtivo, cobrem a maior parte do conteúdo matemático que é geralmente desenvolvido de 5ª a 8ª série do ensino de 1º grau e são re-escritos sempre que se acumule um conjunto significativo de sugestões pertinentes, vindas dos professores ou dos próprios autores. Ver referência (MIGUEL et al., 1993).

cognitiva" em vez de "contradição", uma vez que ela é suficientemente ampla para abarcar não apenas os casos em que o conflito cognitivo decorre de uma inconsistência lógica, como também outros casos em que ele decorre, por exemplo, da incompatibilidade de hábitos culturais, do confronto de valores ou da incompatibilidade entre um fato singular e aquilo que a experiência passada parece confirmar, etc. (cf. Festinger, 1975, p. 22).

Dissonâncias decorrentes de inconsistências lógicas seriam, por exemplo, acreditar simultaneamente que o sol encontra-se mais próximo da Terra do que a lua e que possa haver eclipse do sol, ou acreditar que a diagonal de um quadrado de lado unitário existe e pode ser medida e que não existe um número que satisfaça a equação $d^2 = 2$. Exemplo de dissonância decorrente de incompatibilidade de hábitos culturais seria uma pessoa perceber-se comportando-se de modo atípico em um jantar de cerimônia (cf. Festinger, 1975, p. 22). Uma dissonância gerada por confronto de valores seria, por exemplo, uma pessoa utilizar, sem permissão, o dinheiro - cuja guarda lhe foi confiada - a ser empregado em uma causa social que acredita ser justa, para satisfazer vaidades e caprichos de seu amante, como o fez a condessa do filme "Sedução da Carne" de Visconti. Dissonância decorrente da incompatibilidade entre um fato singular e aquilo que a experiência passada parece confirmar seria, por exemplo, acreditar que o sol gira em torno da Terra e deparar-se com fatos que atestem o contrário. Ou então, acreditar que entre dois segmentos de reta quaisquer sempre existe um segmento que os divide, simultaneamente, em partes iguais e deparar-se com uma prova da existência de segmentos incomensuráveis.

Uma outra advertência a ser feita diz respeito ao fato de que esse caráter dialético do desenvolvimento cognitivo presente na nova versão da teoria piagetiana da equilibração - e que tentaremos imprimir também ao desenvolvimento do tema trabalhado no estudo histórico-pedagógico operacionalizado - não é exclusivo a ponto de envolver todos os momentos desse desenvolvimento. O próprio Piaget reconhecia esse fato quando dizia que "há, portanto, em todo desenvolvimento cognitivo, uma alternância entre as fases dialéticas e as fases discursivas, de forma que nem tudo se reduz às primeiras" (Piaget, 1980, p. 214). Garcia (in Piaget, 1980, p. 238) também reconhece isso quando procura interpretar a afirmação de Piaget de que "a dialética constitui o aspecto inferencial de toda equilibração": "Isso significa que a dialética não intervem em todas as etapas do desenvolvimento cognitivo, mas somente no curso do processo de equilibração. Assim, devemos distinguir cuidadosamente entre o estado de equilíbrio correspondente a um momento não dialético da evolução e os processos dialéticos que permitem a construção de quadros conceituais novos".

Precisamos agora esclarecer o que entendemos por uma concepção construtivista não-radical de ensino aprendizagem. Esse esclarecimento comporta dois aspectos que, embora interdependentes, estão em conformidade com os dois modos pelos quais o qualificativo "não-radical" pode associar-se à expressão "concepção construtivista": um aspecto psico-pedagógico e outro epistemológico.

No plano psico-pedagógico, "não-radicalidade" é sinônimo de "não-espontaneísmo". Nesse sentido, um construtivismo pedagógico se diz não-radical quando acredita que a informação (venha ela através dos livros, dos textos, do professor, de outros alunos, ou de outra fonte qualquer) e que a interferência das pessoas (enquanto agentes produtores de idéias, conjecturas, planos, conflitos, etc.) envolvidas direta ou indiretamente no ato pedagógico, desempenham um papel positivo na construção do conhecimento por parte dos estudantes. Mais que isso, que a construção do conhecimento não é nem uma construção estritamente individual e nem uma construção social que se reduziria apenas ao âmbito das relações interpessoais que ocorrem na sala de aula. Ela é um diálogo cujos interlocutores são também os produtores históricos daquele conhecimento.

Além disso, o acesso do aprendiz a esse conhecimento, isto é, a essa rede de significações sócio-historicamente construídas, não está franqueado exclusivamente pelas possibilidades abertas pelo processo de maturação, o que nos leva a admitir que todo processo de construção é necessariamente solidário, isto é, não-solitário.

Essa solidariedade, por sua vez, traz como necessidade a transmissão do conhecimento, a menos que acreditássemos que o aprendiz, de posse exclusivamente de seus próprios construtos, pudesse misteriosamente chegar às mesmas conclusões, isto é, fazer as mesmas opções que nossos antepassados fizeram no enfrentamento dos problemas que se evidenciaram no processo de construção do conhecimento que respondesse satisfatoriamente às exigências que os colocaram. Essa coincidência seria pelo menos surpreendente. E para que fosse, além de surpreendente, aceitável, restaria aos construtivistas radicais a obrigatoriedade de explicar-nos, de modo convincente, as razões de ocorrência dessa coincidência, isto é, por que razão a construção individual ou inter-individual do conhecimento tenderia, necessariamente, a atingir os mesmos resultados de sua construção histórico-social.

Resulta disso que, para o construtivismo não-radical, construção e transmissão não são palavras que se excluem mutuamente e que construtivismo pedagógico não é sinônimo de não-transmissionismo ou de não-diretividade.

Resulta disso também que, para o construtivismo não-radical em educação matemática, a verdade não é algo que possa ser objeto de negociação na sala de aula. Isso porque, uma vez que a produção-construção do conhecimento matemático tende para um significado estável - porque objetivamente compartilhado, em seu limite, por uma comunidade científica reciclável cujos laços de solidariedade desconhecem as fronteiras de espaço e tempo -, que é, simultaneamente, o objeto e o objetivo-limite de toda construção pedagógica, a noção de verdade construtiva, diferentemente do modo como a entendem as pedagogias não-diretivas, baseadas ou não na concepção falibilista radical da matemática, não está necessariamente associada com o subjetivismo e o relativismo. Nesse sentido, o construtivismo pedagógico não-radical em educação matemática, embora admita o caráter provisório e provisoriamente retificável do conhecimento matemático ao nível da sua re-elaboração escolar, não associa, no plano epistemológico, provisoriedade e retificabilidade com impossibilidade de objetividade, isto é, não compartilha com a concepção falibilista a tese da inexistência, em matemática, da última instância de justificação.

Esse último parágrafo requer um esclarecimento que passa por um certo grau de detalhamento daquilo que estamos chamando de concepção falibilista radical da matemática e das críticas que a ela podem ser remetidas.

A concepção falibilista da matemática foi proposta por Imre Lakatos (1922-1973) numa série de quatro artigos publicados pelo British Journal for Philosophy of Science, em 1963. Em 1976 esses artigos tornaram-se o livro "Proofs and Refutations", publicado três anos após a morte de Lakatos.

Segundo a concepção falibilista radical da matemática, não existe verdade absoluta e infalível na matemática informal, isto é, no conhecimento matemático não-sistematizado ou significativo; nem nos axiomas, nem nos teoremas e nem nas provas. Essas "verdades", transitórias e retificáveis (ainda que há longo prazo), estão sujeitas ao método de provas e refutações e, consequentemente, a prova matemática está aberta à crítica quanto qualquer outra teoria científica. Nesse sentido, o conhecimento matemático assemelha-se às ciências naturais. Alguns dos principais argumentos dessa concepção são:

1) A prova matemática nunca se separa do contexto significativo e, consequentemente, contém suposições implícitas. Como não podemos livrar-nos completamente dessas suposições implícitas, então, a prova é sempre refutável e retificável mediante a aprensentação de contra-exemplos. Qualquer tentativa de justificá-la completamente conduz à regressão ao infinito;
2) Através do aumento do rigor da análise da prova sempre pomos em questão aquilo que foi previamente aceito como induvitável,

isto é, a análise lógica e rigorosa da prova põe em questão a validade do que se quer provar;

3) Os critérios de rigor são historicamente mutáveis. Se eles evoluem, então, não faz sentido afirmar o rigor definitivo de uma prova (cf. Perminov, 1988).

Esses argumentos da concepção falibilista da matemática podem, porém, ser prontamente refutados. É o que faz Perminov num artigo entitulado "On the Reliability of Mathematical Proofs" (Perminov, 1988). Em relação ao primeiro argumento falibilista, Perminov concorda com Lakatos no que se refere à afirmação de que a prova não está livre de pressupostos implícitos e de refutação por um contra-exemplo. Mas o principal problema, segundo Perminov, é se nós podemos ou não livrar-nos completamente de tais pressupostos implícitos levantando contra-exemplos sem total formalização da teoria. Perminov acredita que Lakatos responde negativamente essa questão pelo fato de identificar todos os tipos de intuição presentes em uma prova com intuição empírica, o que o leva a considerar qualquer significação como perigosa e enfraquecedora da validade do raciocínio. Pelo fato da significação em matemática diferir da significação em ciências naturais, até um certo grau de evolução a prova matemática é purificada mediante a eliminação de todas as suposições implícitas, exceto daquelas apoditicamente confiáveis. Mas estas, por serem autoritárias em relação à Lógica, isto é, por serem apenas explicáveis mas não refutáveis mediante análise lógica, não podem dar origem a contra-exemplos.

Em relação ao segundo argumento falibilista, Perminov concorda com Lakatos no que se refere ao fato de qualquer conteúdo intuitivo em matemática poder ser conceptualizado e explicado e da evolução da matemática conduzir, cada vez mais, à profunda conceptualização daquilo que é intuitivo e aceito como imediatamente válido. Porém, a possibilidade de conceptualizar o intuitivo não significa que possamos corrigir ou rejeitar seu conteúdo. É por essa razão que, ao efetuarmos a análise lógica da Aritmética nós não rejeitamos as verdades elementares praxeologicamente aceitas. A formalização lógica da teoria só é considerada adequada se não distorcer o conteúdo presente nessa teoria. Embora a análise lógica seja relevante e adquira perfeição, ela não tem o direito de rejeitar aquilo que foi aceito como provado com base em considerações significativas (intuitivas). Em matemática existe aquilo que se pode chamar "instância última de justificação", instância essa que não pode ser mudada por meio da crítica lógica ou epistemológica. O erro de Lakatos em querer relativizar essa instância, em querer submetê-la à dependência da análise profunda da prova provem, mais uma vez, da consideração do intuitivo como inevitavelmente não-válido.

Em relação ao terceiro argumento falibilista, Perminov discorda de Lakatos no que se refere ao fato de que um novo critério de rigor seja capaz de eliminar resultados matemáticos obtidos antes de sua aceitação. Isso porque os critérios lógicos são secundários quando comparados com os conteúdos da matemática e são introduzidos apenas sob a condição de preservar os conteúdos conquistados. Dificilmente, acrescenta Perminov, pode-se assumir que a definição de novos critérios de rigor classificaria como incompletos ou incorretos os teoremas da Aritmética, o teorema fundamental de Álgebra ou a prova de que o axioma das paralelas não se deriva dos outros axiomas da geometria. Apesar de ninguém defender a possibilidade de uma tal revisão, geralmente, em especulações filosóficas a respeito da matemática, acabamos por concordar com o fato de que "nada é absoluto" e, consequentemente, assumimos implicitamente a possibilidade dessa revisão. Essa divergência entre a atitude prática e a perspectiva filosófica geral na matemática contemporânea provem, afirma Perminov, da transferência não-crítica de proposições metodológicas provenientes das ciências naturais para a esfera da matemática.

No plano pedagógico, porém, a perspectiva filosófica apresentada pela concepção falibilista da matemática rapidamente associou-se a um tipo de construtivismo espontaneísta, justamente pelo fato de compartilhar com as pedagogias não-diretivas o postulado da relatividade do conhecimento.

Mas há um segundo modo pelo qual o qualificativo não-radical pode associar-se à expressão "concepção construtivista". Segundo Kilpatrick (apud Lerman, 1989), são duas as hipóteses sobre as quais se assenta a concepção construtivista da aprendizagem. A primeira hipótese afirma que o conhecimento não é algo que o sujeito cognoscente recebe passivamente do ambiente, mas algo que é construído ativamente por ele. A segunda hipótese afirma que o conhecimento é um processo adaptativo que organiza o mundo experiencial do sujeito sendo que, através desse processo, o sujeito cognoscente não descobre um mundo pré-existente e independente da mente de quem conhece. De acordo com Lerman (1989, p. 211), aqueles que admitem ambas as hipóteses são chamados "construtivistas radicais", enquanto que os que admitem apenas a primeira delas denominam-se "construtivistas não-radicais" ou "moderados", sendo que tanto o construtivismo moderado quanto o radical têm suas raízes na epistemologia genética de Piaget.

A primeira hipótese é compartilhada tanto por construtivistas (sejam eles radicais ou moderados) quanto pelos materialistas dialéticos. De fato, segundo Wartofsky, "tanto Piaget quanto Marx rejeitam o projeto de estabelecer uma teoria essencialista do conhecimento que chega a formas de cognição fixas, universais e necessárias sobre a base de uma análise filosófica da natureza do conhecimento. Por razões intelectuais e históricas diferentes, tanto Piaget quanto Marx criticam a chamada construção filosófica "especulativa" ... e optam por considerar a atividade cognitiva humana em termos de sua gênese prática e de suas condições materiais... Além disso, Piaget compartilha com Marx a ênfase sobre a "atividade do sujeito" na aquisição do conhecimento que tem a sua mais rica fonte no pensamento de Hegel. O que tanto Piaget quanto Marx rejeitam é aquela forma de empirismo que concebe a consciência como um recipiente passivo sobre o qual o mundo externo imprime um conteúdo... Além disso, ambos rejeitam a noção idealista de consciência como uma atividade de mera reflexão sobre seu próprio conteúdo ou como limitada por estruturas a priori, fixas e inatas. Se as estruturas cognitivas ou modos de cognição não são nem inatos ou a priori e nem simplesmente a posteriori como os resultados indutivos da experiência, elas devem ser *construídas*: isto é, elas devem ter a sua gênese na atividades do sujeito em interação com um ambiente. É este o teorema fundamental das epistemologias piagetiana e marxista" (Wartofsky, 1982, pp. 473-474).

Se a aceitação da primeira hipótese é algo relativamente tranquilo, o mesmo não ocorre em relação à segunda. Essa segunda hipótese, porém, contém, na realidade, duas afirmações não necessariamente interdependentes, uma vez que acreditar que o conhecimento seja um processo adaptativo que organiza o mundo experiencial do sujeito não implica a crença na tese anti-realista de que o mundo não existe sem o sujeito, isto é, de que o mundo objetivo seja, na realidade, uma mera construção subjetiva. A nosso ver, a segunda parte da segunda hipótese deve ser prontamente rejeitada uma vez que ela nos conduz ao solipsismo. E seria desnecessário, porque ocioso, recuperar aqui os inúmeros argumentos levantados pelos materialistas, a começar por Lenine em seu "Materialismo e Empiriocriticismo", contra essa forma extremada de idealismo.

No início da década de 80, porém, a leitura personalizada da obra de Piaget feita por Ernst von Glasersfeld, possibilitou uma nova maneira de fundamentar o construtivismo que recorre, simultaneamente, às criticadas teses do idealismo subjetivo e do instrumentalismo.

A leitura de Glasersfeld tenta estabelecer uma conexão entre construtivismo, a tese anti-realista característica do idealismo subjetivo, a rejeição da concepção clássica de verdade e a defesa da possibilidade da existência do conhecimento objetivo tendo por base a concepção de verdade como viabilidade, característica do instrumentalismo epistemológico.

A fim de entendermos o modo como Glasersfeld estabelece essa conexão, vamos descrever, com base nas referências (Glasersfeld, 1982) e (Glasersfeld, 1989), e utilizando suas próprias palavras, a sua linha de raciocínio.

O seu ponto de partida é a crítica que remete ao modo como os psicólogos tradicionais procedem à leitura da obra piagetiana. Ao enfatizar o aspecto interacionista do desenvolvimento cognitivo e ao entender de modo equivocado os conceitos básicos da teoria piagetiana do conhecimento (os conceitos de "esquema de ação", "assimilação", "acomodação" e "adaptação"), a leitura feita por esses psicólogos acaba, inevitavelmente, por confirmar que a interação provê o organismo inteligente com "conhecimento" e que esse "conhecimento", através de outras interações, torna-se mais elaborado na medida em que refletiria o ambiente de forma mais acurada. Esse tipo de leitura, consequentemente, não rompe com a tradicional concepção de conhecimento como uma representação mais ou menos adequada do ambiente.

Esse tipo de interpretação, segundo Glasersfeld, estaria em desacordo com o modo como o próprio Piaget concebia o conhecimento. De fato, não era o próprio Piaget que insistia em afirmar que o conhecimento não deve ser entendido como um quadro ou uma cópia da realidade? Não é dele a seguinte passagem extraída de "A Epistemologia Genética"?

"Para se fazer uma cópia, temos antes que conhecer o modelo que estamos copiando, mas de acordo com essa teoria do conhecimento o único modo de conhecer o modelo é copiá-lo, de modo que caímos em um círculo vicioso que nos impossibilita saber se nossa cópia do modelo é ou não parecida com ele".

Entretanto, continua Glasersfeld, qualquer realista mistificaria essa passagem por meio de uma advertência convencional de que o quadro do mundo de um organismo cognitivo seria necessariamente incompleto ou distorcido em vez de considerá-la como a defesa de que o conhecimento, por sua própria natureza, não pode ter qualquer correspondência icônica com a realidade ontológica.

Quando Piaget reitera que a inteligência é essencialmente uma função adaptativa, Glasersfeld não só concorda com isso mas acrescenta que essa adaptabilidade do conhecimento não pode ser determinada através de sua comparação com a realidade e de quão próximo o conhecimento está dela. A partir disso, infere que esse critério piagetiano da adaptabilidade, tanto biológica quanto cognitiva, é o sucesso, seja esse sucesso considerado em termos de sobrevivência ou em termos de compreensão. Propõe, em seguida, a substituição do termo "adaptação" por "viabilidade" e explicita o modo como o ambiente se revela para o organismo, tanto ao nível biológico quanto cognitivo, isto é, como a soma dos obstáculos com os quais o organismo pode operar. As atividades e operações do organismo são ditas "viáveis", isto é, "bem sucedidas", quando elas não são impedidas por obstáculos. Disso decorre que o organismo só estabelece "contato" com o ambiente quando suas ações e operações falham, isto é, quando são mal sucedidas.

Essa inferência, isto é, esse modo de interpretar o desenvolvimento cognitivo como função adaptativa, leva Glasersfeld a concluir que a concepção epistemológica mais compatível com o trabalho de Piaget é aquela defendida pelo instrumentalismo uma vez que, de acordo com a sua interpretação, as estruturas cognitivas, isto é, os esquemas de ação, os conceitos, regras, teorias e leis são avaliados primariamente pelo critério do sucesso e o sucesso deve ser, em última instância, entendido em termos dos esforços do organismo para obter, manter e estender o seu equilíbrio interno em face das perturbações. É preciso acrescentar, porém, que, segundo Glasersfeld, a teoria da cognição de Piaget envolve um duplo instrumentalismo: um ao nível sensório motor e outro ao nível da abstração reflexiva. No primeiro nível, os esquemas de ação seriam instrumentais pelo fato de auxiliarem o organismo a atingir metas na interação que estabelece com seu mundo experiencial. No segundo nível, os esquemas operatórios seriam instrumentais pelo fato de auxiliarem o organismo a atingir uma rede conceptual coerente que refletiria a linha de conduta de ação e do pensamento que, no nível da experiência atual do organismo, aparece como viável. Glasersfeld chama o primeiro instrumentalismo de "utilitário" e o segundo de "epistêmico" e acrescenta que o instrumentalismo epistêmico exige uma mudança radical na concepção de conhecimento, que elimina a concepção paradoxal de verdade que necessita um teste ontológico para sempre inatingível. No que se refere particularmente ao conhecimento científico, o fato dele possibilitar-nos agir no mundo não justificaria a crença de que ele fornece um quadro do mundo que corresponda a uma realidade absoluta. Esse ponto de vista, porém, não reforçaria a afirmação dos céticos de que não podemos atingir um conhecimento seguro sobre o mundo. Para Glasersfeld, o tipo de interpretação pragmática do construtivismo que ele oferece visaria a superar o pessimismo dos céticos não através da negação de que o conhecimento objetivo seja impossível, mas mudando o próprio conceito de conhecimento. Em vez de pressupor que o conhecimento seja uma "representação" daquilo que existe, o construtivismo pragmático ou radical encara-o como um mapa daquilo que, à luz da experiência humana, se torna factível.

É fácil perceber um aspecto paradoxal nesse construtivismo pragmático ou radical defendido por Glasersfeld. Esse paradoxo revela-se a partir do momento em que ele tenta contornar as consequências desagradáveis geradas pela introdução do idealismo subjetivo como forma de fundamentar o construtivismo. Gruender (1989, p. 175) percebeu isso com clareza e por essa razão fazemos nossa a sua crítica ao construtivismo radical:

"... precisamos perguntar se esse plano para escapar da morte solipsística dos 'sujeitos cognoscentes' possuidores 'meramente' de seus próprios construtos, que têm valor de 'conhecimento' em virtude do fato de os sujeitos os terem construído e os achado 'viáveis', é um plano bem sucedido. Este plano, acredito eu, é um movimento na direção correta embora, para alcançar o seu objetivo tenha que cortar pela raiz o subjetivismo radical, por falar em sobrevivência em um ambiente. Do ponto de vista de um idealista subjetivo consistente, as concepções de 'ambiente' e de 'sobrevivência' nesse ambiente soam suspeitosamente de modo parecido com alguma forma de realismo. Mais resumidamente, as duas abordagens são incompatíveis. Se as crianças estivessem presas apenas em seus próprios construtos, que elas consideram viáveis, estariam radicalmente desligadas de seu ambiente e não existiriam bases para a consideração de chances de sobrevivência delas nesse ambiente. Por outro lado, se elas estivessem de algum modo, interagindo com seu ambiente, ainda que inadequadamente, elas não estariam fechadas em seus próprios construtos de cuja viabilidade elas fossem os únicos juízes. No primeiro caso, a educação de qualquer tipo seria impossível,... No segundo caso, ela seria provável. Eu não posso acreditar que os construtivistas prefeririam o primeiro caso ao segundo, e que estivessem dispostos, portanto, a colocar o idealismo subjetivo como base de suas recomendações educacionais".

Portanto, no nosso modo de entender, não julgamos que a opção pelo construtivismo metodológico em educação matemática necessite, para ser fundamentada, descartar a tese do realismo epistemológico. Contudo, não devemos pensar que a mera adoção da tese do realismo epistemológico e do ponto de vista interacionista nos colocaria numa situação de tranquilidade e conforto. Isso porque a tese realista mais simples e tradicional que sustenta que a verdade objetiva é o limite da correspondência entre nossas teorias e o mundo real, que existe independentemente de nosso conhecimento dele, depara-se com um duplo problema: em que sentido essa correspondência se estabelece? e como essa correspondência se desenvolve historicamente?

Segundo Wartofsky (1982, p. 487) "a solução oferecida por Piaget ao problema da existência de uma norma de verdade objetiva e da veridicidade da ciência é a de remeter a questão de volta à natureza do próprio conhecimento enquanto construção que cria suas próprias normas em seu desenvolvimento... A verdade é uma norma imanente que emerge na evolução da prática cognitiva. Ela é não apenas uma abstração reflexiva (reflective abstraction), mas também uma abstração refletida (reflected abstraction), enquanto uma estrutura normativa de pensamento".

A solução soa-nos insatisfatória uma vez que poderíamos continuar perguntando com base em que o conhecimento criaria suas próprias normas ou, em outras palavras, de onde se origina a necessidade de criação de normas?

De acordo com Wartofsky (1982, p. 487), "para Piaget, a gênese da norma remonta, em última instância, ao caráter adaptativo da própria vida biológica. É a sequência de 'transcedências' a partir da adaptação ao nível da evolução biológica até ao nível da auto-regulação cognitiva (que é possibilitada pela transcedência dos mecanismos biológicos de adaptação), que fornece o único ponto de referência para uma teoria da verdade objetiva... O recurso utilizado por Piaget é, portanto, situar o empreendimento epistemológico como um todo no interior da estrutura de uma teoria da vida orgânica, enquanto um sistema de sucessivas equilibrações adaptativas em termos de estruturas que se transformam como consequência da atividade dos organismos, uma atividade que constantemente ultrapassa (ou é levada a ultrapassar) os limites de qualquer equilíbrio dado. Ao nível da atividade cognitiva, o 'real' pode ser objeto de conhecimento somente se essa 'realidade' é ela mesma uma construção, não um dado. Mas é apenas ao nível das estruturas lógico-matemáticas que uma tal construção é possível, uma vez que apenas com elas a construção atinge o nível das estruturas transformacionais que podem servir de 'modelos isomórficos possíveis' que excedem os limites da experiência contingente, e que têm a característica de necessidade que Piaget identifica com o conceito de verdade e com o conhecimento científico".

Finalmente, Wartofsky (1982, pp. 489-490) caracteriza do seguinte modo o "realismo" piagetiamo: ele não se baseia nem no apelo a alguma base transcendental do conhecimento, nem nos critérios definidos pelo programa do convencionalismo radical, uma vez que a escolha dos modelos isomórficos possíveis que poderiam caracterizar a necessidade de criação de normas de verdade objetiva não está baseada sobre critérios de gosto ou conveniência, como por exemplo, sobre o critério estético de simplicidade ou elegância ou sobre o critério da economia, eficiência ou familiariedade. Esse "realismo" também não apela, como o queria Glasersfeld, aos critérios presentes no programa do pragmatismo, uma vez que se a escolha dos modelos isomórficos estivesse baseada exclusivamente na eficiência prática de tais modelos para produzir os resultados desejados ou antecipados, isto não seria ainda, para Piaget, uma medida do "real" mas apenas uma medida de nosso sucesso para atingir certos propósitos. Consequentemente, se ainda se puder falar em "realismo" piagetiano, "ele se ancoraria em dois contextos polares muito diferentes: a 'realidade' do domínio da natureza, enquanto vida orgânica, em uma das extremidades e a 'realidade' do domínio das construções lógico-matemáticas daquelas possibilidades ideais que seriam modelos 'verdadeiros' (no sentido de dedutivamente necessários de universalmente aplicáveis) de qualquer realidade (construída)" (Wartofsky, 1982, p. 490).

A solução piagetiana peca, a meu ver, por enfatizar o biológico em detrimento do social, isto é, por ver nas predisposições biológicas da atividade do sujeito o motor e o motivo dos processos de auto-regulação, de progressiva equilibração e de gênese das normas da verdade objetiva. Contrariamente a isso, deveríamos entender o sujeito epistêmico da relação cognitiva do modo como Marx o caracterizou, isto é, "como o conjunto das relações sociais", uma vez que o sujeito é *simultaneamente* um ser biológico e social (e não biológico e depois social), produto da evolução da natureza bem como da sociedade. Por outro lado, o objeto, isto é, o mundo objetivo com o qual o sujeito interage já é, desde o início, um mundo social, cultural e historicamente determinado, e não um mundo meramente físico. Nesse sentido, este mundo social, como afirma Wartofsky (1982, p. 505), "não é simplesmente uma continuação da adaptação biológica, nem é o desenvolvimento cognitivo uma extensão de processos epigenéticos". E fazemos nossa a sua conclusão: " essas características propriamente humanas do desenvolvimento cognitivo apresenta uma ruptura distinta com os modos prévios de adaptação... Mas então, deve-se concluir, penso eu, que a única característica que fornece as condições para essa ruptura é a sociabilidade daqueles modos de praxis que geram as estruturas da evolução cultural e social, isto é, a transformação do mundo através de uma praxis social que envolve o uso de ferramentas e da linguagem, e que requer, portanto, aquela interação social que é a condição possibilitadora dos processos de auto-regulação. É esta forma de prática que historicamente introduz as possibilidades de representação, primeiro na objetificação da praxis que os artefatos fornecem, como as representações externas desses modos de ação, e depois na interiorização desses modos de praxis na forma reflexiva de representações internas, e, portanto, na gênese do próprio pensamento" (Wartofsky, 1982, pp. 505-506).

Mas uma didática construtiva da matemática, de cunho histórico-social, não estaria cumprindo integralmente a sua função educativa se se restringisse a explicitar uma fundamentação psico-pedagógica e histórico-epistemológica relativa ao como se trabalhar determinados conteúdos específicos. Isso porque, se ela se detivesse aí, estaria marginalizando uma dimensão de fundamental importância do processo educativo: a dimensão axiológico-teleológica.

Segura (1988, pp. 354-355) percebeu com clareza as implicações de uma tal marginalização quando assinalou que o silêncio a respeito dos fins educativos imposto pela ampla influência do positivismo pedagógico durante o século XX, não apenas polarizou a investigação educacional em torno da questão do como ocorre o processo educativo, mas também acabou por gerar o fenômeno da tecnização da educação, que defendeu a equivocada crença de que o êxito técnico, isto é, que a eficácia de um método ou técnica educativa para atingir o objetivo parcial a que se propõe, oferece a prova absoluta da verdade dos princípios que a sustentam.

Mas é preciso fazer de imediato a advertência de que esses fins e valores subjacentes ao processo educativo devem sempre ser fins e valores sociais. Isso significa que a definição desses fins e valores não se processa nem em função da psicologia, nem da epistemologia e nem em função de uma ética normativa abstrata; mas em função do preparo necessário do cidadão para a vida social e política baseada na convivência plural democrática.

Colocar a questão desse modo significa, por um lado, contestar aquela forma de construtivismo que vê a promoção do desenvolvimento operatório como objetivo último da aprendizagem escolar. Filiando-se a esse mesmo ponto de vista, Coll (1987, pp. 177-178), retomando a crítica de J. Brun, afirma que "essa maneira de proceder equivale a não considerar a natureza essencialmente social do fenômeno educacional; a função da escola e de todo sistema educacional em seu conjunto é transmitir às futuras gerações os conhecimentos e valores que a sociedade considera importantes para sua sobrevivência; os conhecimentos científicos e, certamente, os sistemas de valores são resultados de um empreendimento social e a vontade de transmití-los tem também uma função social; pode-se e deve-se discutir criticamente a seleção que a sociedade realiza do conjunto de conhecimentos elaborados pela humanidade ao longo de sua história; pode-se e deve-se discutir criticamente o sistema de valores que se transmite às novas gerações; mas conceber os objetivos da educação como uma réplica do desenvolvimento supõe uma certa maneira de colocar as relações entre a psicologia e a pedagogia "que reduz a realidade desta última a um sistema teórico autônomo e a desvincula deste modo da realidade social de que emanam em última análise as finalidades da educação".

Por outro lado, a perspectiva aberta pela abordagem histórica e construtiva dos conteúdos matemáticos no sentido de restituir-lhes a sua dimensão axiológico-teleológica, acena com a possibilidade de retirar a matemática de seu isolamento escolar, imposto por uma já habitual abordagem estritamente técnica, tornando-a uma colaboradora a mais no atingimento das metas colocadas por um projeto educativo mais amplo que vise à formação do cidadão.

3. ANÁLISE E FUNDAMENTAÇÃO DO ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO-OPERACIONALIZADO SOBRE OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Uma vez explicitados os pressupostos de caráter geral subjacentes ao estudo histórico-pedagógico temático vamos passar a descrever e a analisar o modo específico como eles se interagem na elaboração do estudo operacionalizado sobre números irracionais. Essa descrição e análise pressupõe, portanto, uma leitura detalhada do estudo histórico-pedagógico operacionalizado que se inicia na página 246.

O estudo histórico-pedagógico operacionalizado inicia-se propositalmente com uma dissonância. Psicologicamente, essa dissonância se expressa dicotomicamente através da negação de um resultado que surge no visor da calculadora a qual, provavelmente, aparece aos olhos dos alunos como um instrumento eletrônico de cálculo acima de qualquer suspeita. Por outro lado, a contestação do resultado vem por parte dos matemáticos que já classificaram "$\sqrt{2}$" como um novo tipo de número. O texto sugere que a explicação dessa dissonância não pode ser dada prontamente através da rapidez dos instrumentos eletrônicos. Há que se fazer um esforço e conhecer um segmento da história da humanidade que deverá conferir significação a essa e outras dissonâncias.

Logo em seguida a essa provocação inicial, o aluno é remetido ao ano 500 a.C., através da leitura da história contada por Jâmblico, história essa que, "se não for verdadeira pelo menos é bem criada" como nos afirma Karlson (1961, p. 89).

A história de Jâmblico constitui-se no meio através do qual fazemos entrar em cena as personagens centrais de nossa história: os pitagóricos.

Essa história pareceu-nos também interessante pelo fato de, nela, um elemento iconográfico desempenhar um papel fundamental. Percebemos que esse elemento iconográfico poderia dar unidade aos diferentes tópicos escolhidos para compor o material referente ao estudo histórico-pedagógico operacionalizado. A razão disso é, ao mesmo tempo, histórica e psico-pedagógica. Histórica pois, como assinala PRICE, "opera não apenas como critério estético, mas como guia para alcançarmos a verdade filosófica das teorias científicas", uma vez que podemos supor que "na história do pensamento científico, houve muitas fases em que uma obscura, mas poderosa tradição escrita correspondeu, em verdade, a esse modo figurativo; a obscuridade se insinua através do difícil processo de buscar traduzir o figurativo para o escrito" (Price, 1976, p. 77).

Além disso, "em setores de pesquisa como a história antiga, devido à relativa raridade das fontes escritas, já tem longa tradição o recurso à iconografia como documento" (Cardoso, 1990, p. 11).

Psico-pedagógica pois parece desejável que um proceso de ensino-aprendizagem de carater construtivo deva ter como ponto de partida um elemento motivador que funcione como guia na construção do conhecimento, como um ponto de referência emblemático que confira um sentido, ainda que inicialmente difuso e misterioso, à trajetória obscura a ser percorrida pelo aprendiz em seu processo de busca. Em outras palavras, um elemento motivador que funcione, como diz Price, como uma "Gestalt que parece forçar o surgimento de uma sensação de necessidade e que, em muitos casos, só pode traduzir-se de modo figurativo" (Price, 1976, p. 77).

Felizmente, o emblema que se mostrou adequado para nos guiar nessa busca tem luz própria suficiente para iluminar os momentos de obscuridade. É uma estrela. A estrela de cinco pontas. O pentagrama ou pentáculo das bruxas.

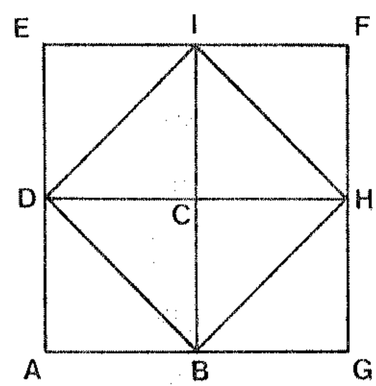
Adequado, pois há grande probabilidade histórica da descoberta de segmentos incomensuráveis ter ocorrido através da comparação entre o lado e a diagonal de um pentágono e não através da comparação entre o lado e a diagonal do quadrado como o supunha a antiga tradição. Esse ponto de vista passou a receber credibilidade a partir de meados da década de 1940, quando foi defendido convincentemente pelo alemão Kurt von Fritz (1945, pp. 242-264).

Parece, entretanto, que antes de Fritz, G. J. Allman já teria afirmado a prioridade do pentagrama, no livro "History of Greek Geometry from Thales to Euclid" (Dublin, 1879).

O fato dessa descoberta tão avessa às características prático-empíricas tanto da matemáica grega da época quanto da de outros povos matematicamente mais desenvolvidos, como o eram egípcios e babilônios, ter ocorrido no período da infância da matemática grega poderia ser um indicador de que algo "concreto", isto é, "visual", estivesse em sua base, fato este que se constituiria em reforço à hipótese do pentágono levantada mais recentemente. Isso porque, os sucessivos pentágonos regulares que são gerados pelo traçado das diagonais do pentágono regular inicial e dos demais que se formam a partir dele, ilustram visualmente a possibilidade de continuidade ilimitada do processo, levando à conclusão quase que inevitável de que a razão entre o lado e a diagonal do pentágono inicial não poderia ser expressa por um número racional.

Entretanto, em uma obra aparecida na década de 70, Knorr tenta contestar o ponto de vista defendido por von Fritz e, de certa maneira, coloca-se em continuidade com a antiga tradição, ao sustentar que "o problema da incomensurabilidade poderia ter surgido como uma consequência imprevista do estudo métrico do quadrado" (Knorr, 1975, p. 28). Tentemos detalhar a conjectura de Knorr.

O seu ponto de partida é a conhecida passagem do diálogo "Menon" de Platão, na qual Sócrates solicita ao escravo de Menon para construir um quadrado cuja área seja igual ao dobro da área de um quadrado dado. Após a tentativa frustada de solucionar o problema dobrando o lado do quadrado dado, o escravo, conduzido habilmente por Sócrates, reconhece que a solução correta é fornecida por um quadrado cujo lado é a diagonal do quadrado dado, como mostra a figura ao lado, onde a área ocupada pelo quadrado BDIH é o dobro da área ocupada pelo quadrado ABCD.



Em seguida, Knorr mostra como a descoberta de segmentos incomensuráveis poderia ter sido feita através da aplicação a essa mesma figura, de alguns teoremas relativos aos números pares e ímpares descobertos pelos pitagóricos. O processo é o seguinte: "suponhamos que se deseje saber quantas vezes o lado BD do quadrado BDIH cabe em sua diagonal DH. Se esses segmentos fossem comensuráveis, então, cada um deles representaria um número, isto é, o número de vezes que uma medida comum caberia em cada um deles. Devemos exigir que esses números não sejam, ambos, pares. Então, os quadrados BDIH e AGFE, sobre os lados BD e AG respectivamente, representam números quadrados.

Observando a figura é óbvio que AGFE é o dobro de BDIH. Então, AGFE representa um número quadrado par. Seu lado AG (que é igual a DH) deve ser, portanto, par. Então, AGFE é divisível por 4. Uma vez que ABCD é um quarto de AGFE, então, ABCD representa um número. O dobro desse número é o número quadrado BDIH. Consequentemente, BDIH e o seu lado BD são números pares. Mas esse fato contraria a hipótese que afirmava não serem os números BD e DH ambos pares. Portanto, esses dois segmentos são incomensuráveis" (cf, Knorr, 1975, pp. 26-27).

Como se percebe, a prova fornecida por Knorr é praticamente análoga àquela que, antigamente, aparecia no Livro X de Euclides como Proposição 117, mas que é, indubitavelmente, uma interpolação segundo Heath (1956, vol. 3, p. 2) e, por essa razão, Heath não a inclui em sua obra citada.

Segundo Boyer, "nessa prova o grau de abstração é tão alto que a possibilidade de ter sido a base da descoberta original da incomensurabilidade tem sido questionada" (Boyer, 1974, p. 54). Se deixarmos de lado a estrutura da prova e atentarmo-nos para os seus aspectos linguísticos, perceberemos, diz von Fritz, que ela "utiliza uma forma de apresentar o argumento em sentenças pequenas e concisas que não têm paralelo na literatura grega do 5º século a.C." (von Fritz, 1945, p. 255). Para fundamentar essa última afirmação, von Fritz compara linguisticamente o texto da prova com os fragmentos de Zenão de Elea e conclui que a linguagem destes últimos, embora apresente também um grau bastante elevado de pensamento abstrato e de raciocínio lógico compacto é, porém, muito mais elaborada, contendo sentenças longas e enfadonhas, ao passo que os escritores de séculos posteriores que fizeram uma avaliação da teoria de Zenão, reproduzem os mesmos argumentos num estilo parecido com aquele utilizado pela prova do apêndice de Euclides (cf. von Fritz, 1945, p. 255).

Além desses argumentos linguísticos contra o fato da prova que aparece no apêndice do Livro X de Euclides e outras análogas (como aquela proposta por Knorr) poderem ter sido a primeira forma de manifestação do fenômeno da incomensurabilidade, von Fritz levanta outros dois que me parecem incontestáveis.

O primeiro deles é que provas dessa natureza, do mesmo modo como o faz Theodoro de Cyrene no Teeteto de Platão, que pertenceu à geração posterior a de Hipasus, utilizam os termos "comensurável" e "incomensurável" como algo já conhecido, o que nos força a concluir que, na época em que esse tipo de demonstração foi elaborado, o fenômeno da incomensurabilidade já era conhecido (cf. von Fritz, 1945, p. 256).

O segundo argumento de von Fritz baseia-se no fato de que seria bastante estranho e, portanto, improvável que os matemáticos gregos antigos se dedicassem, repentinamente, à busca de um número que pudesse expressar a razão entre a diagonal de um quadrado e o seu lado, através de um processo tão elaborado, trabalhoso e abstrato, se eles não tivessem antes uma *suspeita prévia* de que um tal fenômeno como o da incomensurabilidade poderia ocorrer, por já ter ocorrido (cf. von Fritz, 1945, p.

256).

Ninguém se dedica à solução de um problema sem ter conjecturas prévias ou pelo menos suspeita prévia. É claro que, para von Fritz, essa "suspeita prévia" foi a descoberta de Hipasus e, após isso, diz ele, "seria natural que o triângulo retângulo isósceles fosse o primeiro tema das novas investigações dos pitagóricos" (von Fritz, 1945, p. 256).

Entretanto, Knorr acredita que a sua conjectura é mais plausível que a de von Fritz pelo fato dos conhecimentos geométricos elementares subjacentes a ela estarem todos presentes na matemática pitagórica e, mais particularmente, na aritmética pitagórica do século V a.C. Voltaremos, no momento oportuno, a considerar as críticas que Knorr remete ao ponto de vista de von Fritz e as nossas ponderações relativas aos contra-argumentos de Knorr. Por ora, basta assinalar que ambas as conjecturas são historicamente plausíveis e que os argumentos de Knorr contra a conjectura de Fritz não são, no meu ponto de vista, conclusivos, o que faz com que a reconstrução do contexto em que se deu a descoberta da incomensurabilidade permaneça um problema em aberto.

Pedagogicamente, decidimos optar pelo caminho apontado por von Fritz sem, contudo, marginalizar a conjectura do quadrado. Entretanto, a percepção do fenômeno da incomensurabilidade no quadrado aparece no estudo histórico-pedagógico operacionalizado como uma percepção "a posteriori", isto é, desencadeada pelo emblema que coliga indefinidamente pentágonos e pentagramas.

Ao longo dos dois primeiros textos do estudo histórico-pedagógico operacionalizado, tenta-se explorar a polissemia desse emblema. De elemento identificador ou senha ele passa a significar, sucessivamente, o símbolo da boa saúde, o símbolo da aliança entre os homens, o símbolo da vida humana, um protetor físico e um protetor espiritual.[6] E através dessa rede de significações o emblema acaba revelando as suas propriedades políticas, místicas, tecnológicas e... geométricas.

Mas a exploração das propriedades geométricas do pentagrama é bruscamente interrompida pela entrada em cena do anti-herói de nossa história: o apóstata Hipasus de Metapontum. A figura de Hipasus, desde o início, aparece envolvida em mistério e obscuridade, uma vez que tudo que sabemos a seu respeito nos é fornecido pelas poucas considerações "confusas e contraditórias" segundo Knorr, de comentadores que viveram há aproximadamente 700 anos após a época em que se estima ter vivido o próprio Hipasus, e por alguns historiadores da matemática de nosso século que, com base nessas e outras consideraçõs, tentam reconstituir as circunstâncias em que ocorreu o surgimento da incomensurabilidade e o modo como, eventualmente, o nome de Hipasus estaria a ela associado.

Mas onde Knorr vê "confusão e contradição", von Fritz vê consenso e unanimidade no que se refere à questão da pessoa a quem se deve atribuir a descoberta da incomensurabilidade.

Dentre os comentadores antigos, Pappus, por exemplo,

---

[6] Em relação aos dois primeiros significados atribuídos ao pentagrama, isto é, como identificador ou senha e como símbolo de boa saúde, baseamo-nos numa passagem de Luciano e no comentador do "As Nuvens" de Aristófanes, onde se afirma que "o triplo triângulo entrelaçado, o pentagrama", isto é, o pentágono estrelado, era usado pelos pitagóricos como símbolo de identificação entre os membros da escola e era chamado por eles Saúde (cf. Heath, 1981, vol. I, p. 161). O terceiro significado que atribuímos ao pentagrama, isto é, símbolo da aliança entre os homens, encontra-se em Caraça (1978a). O pentágono como símbolo da vida humana encontra-se em Lawlor (1982, p. 58). O pentágono e pentagrama enquanto protetores físicos e espirituais encontram-se em Gerdes (1987, pp. 68-69).

em seu "Comentário ao Livro X dos Elementos de Euclides", afirma que a teoria da incomensurabilidade teve origem na escola pitagórica, sem atribuir uma autoria específica a ela. Mas acrescenta que o membro dessa escola que primeiro divulgou o segredo da incomensurabilidade morreu por afogamento (cf. Knorr, 1975, p. 21 e p. 50).

Esse comentário está de acordo com aquilo que nos conta Jâmblico, de que "a pessoa que descobriu o irracional afogou-se no mar, e que isso foi uma punição divina pelo fato dela ter tornado públicas as doutrinas matemáticas secretas dos pitagóricos" (cf. von Fritz, 1945, p. 244).

O argumento que Pappus nos fornece em apoio ao estabelecimento de uma relação entre a descoberta da incomensurabilidade e a punição impingida ao seu divulgador (seria também o seu descobridor?) é de natureza linguístico-etimológica, uma vez que, segundo ele, os gregos utilizavam dois termos referentes à palavra "incomensurabilidade": " αλογος " (alogos) ou "αρρητος" " (aretos) que significavam, respectivamente, "irracional" e "indizível", isto é, aquilo sobre o qual nada pode ser dito (cf. Knorr, 1975, p. 21). Esse argumento, é claro, apenas explica o que nos diz Jâmblico, jamais o contraria.

Proclus, por sua vez, atribui ao próprio Pitágoras a descoberta da teoria dos irracionais, mas hesita em aceitar que Pitágoras tenha fornecido uma prova do "teorema de Pitágoras". Knorr (1975, p. 21) vê nisso uma contradição na medida em que, segundo ele, o teorema de Pitágoras é um fundamento necessário a qualquer teoria da incomunsurabilidade. Por sua vez, von Fritz vê nesse comentário de Proclus um "desvio da tradição unânime, obviamente devido a uma tradução incorreta (ἀλογων - alogon por ἀναλογων -analogon ou por ἀναλογιῶν - analogion) presente em alguns manuscritos" (cf. von Fritz, 1945, p. 245).

Nas considerações de Jâmblico, Hipasus aparece como o líder de uma seita pitagórica chamada ἀκουσματικοί (aconsmaticoi), que não era considerada como verdadeiramente pitagórica por uma outra seita pitagórica chamada μαθηματικοί (matematicoi). É a primeira vez que se faz referência a uma dissidência interna à escola pitagórica (cf. Knorr, 1975, p. 51). Além disso, Jâmblico estabelece uma relação entre a figura de Hipasus, a descoberta do irracional, a construção do dodecaedro e a morte no mar de um pitagórico ímpio (cf. Knorr, 1975, pp. 21-25). Knorr acredita, porém, que essa relação estabelecida por Jâmblico não merece crédito por ser "inconsistente", "confusa" e "deturpada", acrescentando que Jâmblico não é uma fonte fidedigna na qual se pode buscar fundamentos para a reconstituição da história da antiga teoria da incomensurabilidade (cf. Knorr, 1975, pp. 21-22). Entretanto, não nos apresenta, em contrapartida, uma contra-argumentação convincente.

Jâmblico, em sua obra "De Communi Mathematica Scientia" afirma que os trabalhos realizados por Theodoro de Cyrene e Hopócrates de Chios deram continuidade aos de Hipasus. Devido ao fato de Hipócrates e Theodoro também serem considerados contemporâneos em um fragmento da mais antiga história da matemática de que se tem notícia - a história da matemática de Eudemus de Rhodes -, von Fritz vê nisso uma confirmação do comentário de Jâmblico de que Hipasus pertenceu à geração precedente à de

Theodoro, período em que, acredita ele, ter sido descoberto o fenômeno da incomensurabilidade (cf. von Fritz, 1945, p. 245).

Mais recentemente, Boyer refere-se a Hipasus do seguinte modo: "diz-se ter sido inicialmente um pitagórico, que foi depois expulso da confraria. Uma história diz que os pitagóricos lhe erigiram um túmulo, como se estivesse morto, outra que sua apostasia foi punida pela morte num naufrágio. A causa exata da ruptura não é conhecida, em parte por causa da regra de segredo, mas três possibilidades foram sugeridas. Segundo uma, Hipasus foi expulso por insubordinação política, tendo chefiado um movimento democrático contra a conservadora regra pitagórica. Uma segunda atribui a expulsão a indiscrições relativas à geometria do pentágono ou do dodecaedro, talvez uma construção de uma dessas figuras. Uma terceira explicação mantém que a expulsão foi relacionada com a revelação de uma descoberta matemática de significação devastadora para a filosofia pitagórica - a da existência de grandezas incomensuráveis." (Boyer, 1974, p. 53).

Após esse levantamento e avaliação dos diversos comentários, optamos por alinharmo-nos com o ponto de vista defendido por von Fritz. Por essa razão, no texto 3 do estudo histórico-pedagógico operacionalizado atribuímos explicitamente a Hipasus a descoberta da incomensurabilidade.

Mas, se historicamente a atribuição da autoria de uma descoberta pode ser relevante, pedagogicamente o mesmo não ocorre. Principalmente quando - e este é o nosso caso - o propósito educativo é menos o de estabelecer uma série de considerações factuais desconexas, que o de buscar as significações conceituais e político-filosóficas que estão na base do desenvolvimento orgânico desses fatos. Daí as questões pedagogicamente cruciais levantadas no final do texto 3, que estão na base de um projeto histórico-pedagógico que se pretende problematizador e não meramente factual.

Mas a discussão dessas questões não é feita imediatamente. Ela é adiada temporariamente e coloca-se em pauta uma outra questão, aparentemente desligada do contexto em que, até então, o pensamento do aluno vinha movimentando-se. Trata-se de desafiá-lo a responder se, dados dois quadrados quaisquer, é sempre possível construir um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos dois quadrados dados. Isto é, trata-se de desafiar o aluno a verificar a validade do teorema de Pitágoras, enunciado de um modo geométrico não habitual. O processo construtivo que dá suporte a essa verificação desenrola-se ao longo das oito primeiras atividades do estudo histórico-pedagógico operacionalizado.

Historicamente, esse processo construtivo baseia-se em uma das conjecturas levantadas por Gerdes sobre a pré-história do teorema de Pitágoras. Essa conjectura, que primeiramente apareceu em sua tese doutoral, "Sobre o despertar do pensamento geométrico" (Gerdes, 1987, pp. 147-174), reaparece, de forma resumida, em seu "Pitágoras africano - um estudo em cultura e educação matemática" (Gerdes, 1992, pp. 59-68). Vamos descrever com certo detalhe essa conjectura arqueológico-etnográfica de Gerdes. O seu ponto de partida baseia-se na existência de uma relação entre os trios pitagóricos e o teorema de Pitágoras. Porém, a partir de certo momento histórico, essa relação desapareceu pois esses trios tornaram-se supérfluos aos geômetras, uma vez que o teorema de Pitágoras havia sido generalizado de tal forma que qualquer referência aos trios seria considerada um "retrocesso" no sentido de restringir novamente o campo de aplicação desse teorema a triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros.

Essa hipótese inicial fornece a Gerdes uma pista para a investigação da questão de como o teorema de Pitágoras poderia ter tido a sua origem histórica, o mesmo ocorrendo com o tema "gêmeo" a esse teorema, isto é, com os trios pitagóricos.

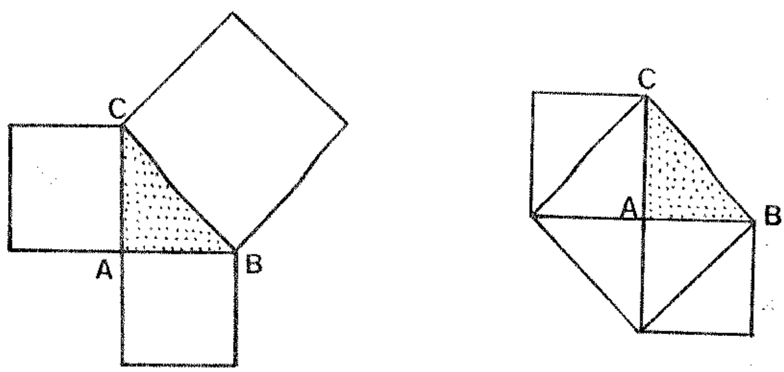
Essa pista consiste na busca de situações onde apareçam, ao mesmo tempo, quadrados, somas de quadrados, ângulos retos e números inteiros.

Uma outra hipótese de partida de Gerdes é que o mais provável é que quadrados geométricos sejam mais antigos que quadrados aritméticos.

Essa segunda hipótese e a pista decorrente da primeira hipótese levam Gerdes a levantar a seguinte questão que dará origem à sua busca: "em que contextos aparecem quadrados geométricos cujas áreas são contáveis?". Uma resposta possível dada por Gerdes é: "ao entrelaçar e ao tecer, ao bordar e ao azulejar".

Entrelaçando-se, por exemplo, de maneira simples e paralela, tiras de plantas de mesma largura, aparecem quadrados decompostos em pequenos quadrados unitários, cujas áreas são fáceis de serem obtidas mediante contagem direta. Porém, através desse padrão paralelo e simples de entralaçamento, obtemos quadrados *mas não ainda quadrados que sejam a soma de dois quadrados*. Mantendo-se, porém, o mesmo padrão de entrelaçamento mas entrelaçando-se agora com tiras de duas cores diferentes, obtém-se o padrão de um tabuleiro de xadrez que, embora permita considerar quadrados como somas, não possibilita ainda considerá-los como somas de quadrados.

A fim de guiar sua investigação, Gerdes introduz uma observação importante: a de que, nas figuras abaixo, que expressam o teorema de Pitágoras, os lados do quadrado maior e os dos quadrados menores não são, em geral, paralelos.



Essa constatação dá motivo para o levantamento de uma nova pergunta: "que padrão de entrelaçamento poderia ter sido modelo para esta posição não-paralela dos três quadrados?" A resposta de Gerdes é: o padrão de entrelaçamento dentado, amplamente difundido através de ornamentos de recipientes de barro, de madeira ou metálicos. Quadrados entrelaçados e dentados são amplamente conhecidos, tanto atualmente quanto em épocas remotas.[7]

Já eram conhecidos no Egito antigo uma vez que aparecem numa pintura de um cesto no túmulo de Rekhmme-Thebes

[7] Alguns dos exemplos dados por Gerdes encontram-se nas páginas 10, 11 e 12 do estudo histórico-pedagógico operacionalizado. Outros exemplos podem ser encontrados em (Gerdes, 1987, pp. 153-155) e em (Gerdes, 1992, pp. 59-60). Entre os Tchokwe (Angola), afirma Gerdes, o padrão é chamado "manda a mbac", isto é, "escudo de tartaruga". Os Ovimbunda (Angola) chamam-lhe "olombungulu", isto é, "estrela", ou "ononguinguinini", ou seja "formigas" ou também "alende", isto é, "nuvens" (Gerdes, 1992, p. 59).

(18ª dinastia, 1475-1420 a.C.).

Uma vez encontrados documentos iconográficos de caráter arqueológico-etnográfico que fundamentam a existência e a difusão do padrão de entrelaçamento dentado, Gerdes mostra, em seguida, de dois modos diferentes, como quadrados entrelaçados e dentados, ou pintados de acordo com o padrão de um tabuleiro de xadrez, representam a soma de dois quadrados lisos. Um desses modos baseia-se na percepção de que, em todo quadrado dentado pintado como um tabuleiro de xadrez, os quadradinhos de cores distintas que o compõem podem ser mentalmente reagrupados em dois quadrados lisos de áreas diferentes mas que ocupam, juntos, a mesma área que a do quadrado dentado xadrez.

Em seguida, Gerdes mostra como o quadrado dentado xadrez particular contendo 7 quadradinhos na diagonal pode transformar-se num único quadrado liso, equivalente ao dentado, quer por via aritmético-geométrica, quer por via estritamente geométrica.

A transformação mediante a via estritamente geométrica, por exemplo, baseia-se na percepção de que, ao serem deslocados no sentido horário os quatro quadradinhos das extremidades das duas diagonais desse quadrado dentado xadrez particular, a fim de completar os "buracos" no tabuleiro, obtem-se o quadrado liso de área 25 e lado 5 e que é equivalente ao dentado. Essa experiência particular com o quadrado dentado cuja diagonal tem comprimento 7 e o quadrado liso cujo lado tem comprimento 5, provavelmente estimulou, afirma Gerdes, a continuação da busca de um único quadrado liso que fosse equivalente a um dentado, para outros casos diferentes do anterior. No processo dessa busca percebeu-se que sempre se poderia obter o quadrado liso equivalente a um dentado qualquer, através de um modo de ligar as quatro extremidades das duas diagonais do quadrado dentado dado. Esse modo aparece no item c da 3ª atividade (p. 16 do EHPO), e a sua legitimidade fundamenta-se na compensação das áreas dos triângulos congruentes pontilhados e não-pontilhados gerados por esse modo de ligar as extremidades das diagonais.

Uma vez exposta, ainda que brevemente, a conjectura arqueológico-etnográfica de Gerdes a respeito da origem histórica do teorema de Pitágoras é preciso tecer alguns comentários que destaquem as razões pelas quais a nossa opção pedagógica incidiu sobre essa conjectura e não sobre as muitas outras existentes.

Antes disso, porém, não se pode deixar de registrar aqui que o próprio Gerdes, quando afirma que "quadrados dentados assumem um valor heurístico para a descoberta desse teorema importante" (Gerdes, 1992, p. 62), já percebe o potencial pedagógico de sua conjectura histórica, embora não tenha desenvolvido mais detalhadamente esse percepção.

No meu modo de entender, considero essa conjectura pedagogicamente interessante, em primeiro lugar, pelo fato dela ressaltar o aspecto da atividade na fundamentação da origem histórica do teorema de Pitágoras, fornecendo, desse modo, uma contribuição valiosa a toda didática da matemática que se pretenda construtiva e que acredite no papel positivo da ação (não necessariamente física) no processo de ensino-aprendizagem. O próprio Gerdes viu com clareza a importância e a necessidade de estudos que busquem compreender a natureza da relação entre a ação definida no plano histórico e a ação definida no nível psicológico-pedagógico, quando levanta e deixa sem resposta a seguinte questão: "Até agora, o aspecto da atividade tem sido demasiado pouco considerado na fundamentação da origem de conceitos matemáticos básicos. Que relação existe entre este salientar histórico desse aspecto da atividade e as posições psicológico-pedagógicas de Vygotsky, Piaget, Freudenthal, Mellin-Olsen e outros, respeitantes ao papel da atividade no ensino (da matemática)?" (Gerdes, 1987, p. 178).

Em segundo lugar, devido ao fato da conjectura de Gerdes assentar-se numa linha de pesquisa histórica de natureza arqueológico-etnográfica e psico-epistemológica uma vez que pretende, claramente, tecer o fio que explicita o significado psico-sócio-lógico que está na base de uma possível reconstituição racional do teorema de Pitágoras. Não é e nem pretende ser a história "positiva" e verdadeira do teorema de Pitágoras... mas a história como ela poderia ter sido. Trata-se, na linguagem de Fernand Braudel, de pesar o possível e o impossível, e não de designar o por que e nem o como. Trata-se de valorizar a atividade social e as condições materiais enquanto meios de produção do conhecimento sem atribuir-lhes, entretanto, um valor de causalidade. De fato, para Gerdes, "a formação de conceitos geométricos mais antigos a partir da atividade social não deve ser considerada absoluta. É importante prosseguir com a investigação - também nas primeiras sociedades humanas - da dialética entre a praxis social e a continuação intramatemática dessa formação... Não se deve esquecer, no entanto, que a atividade social assume esse papel de maneiras diversas e bem diferentes" (Gerdes, 1987, pp. 176-177). A concepção de história setorial que permeia a conjectura de Gerdes assume conscientemente como ponto de partida, e idependentemente de qualquer fundamento transcendental - pois sabe não ser ele necessário - o significado que o trabalho humano teve para o nascimento da geometria. É essa a hipótese e a tese fundamentais que estão na base da plataforma gnosiológico-metodológica de sua pesquisa histórica. Uma hipótese que jamais será tese, embora se esforce assintoticamente para atingir esse objetivo.

Esse programa de investigação histórica insere-se, portanto, numa linha de pesquisa que os historiadores denominam "história da cultura material". Jean-Marie Pesez caracteriza do seguinte modo essa linha de pesquisa histórica que supõe a materialidade associada à cultura: "A cultura material tem uma relação evidente com as injunções materiais que pesam sobre a vida do homem e às quais o homem opõe uma resposta que é precisamente a cultura. No entanto, não é todo o conteúdo da resposta que se acha envolvido pela cultura material. A materialidade supõe que, no momento em que a cultura se exprime de maneira abstrata, a cultura material não está mais em questão... A cultura material faz parte das infra-estruturas, mas não as recobre; ela só se exprime no concreto, nos e pelos objetos. Em suma, trata-se da relação entre o homem e os objetos (sendo aliás o próprio homem, em seu corpo físico, um objeto material), pois o homem não pode estar ausente quando se trata de cultura" (Pesez, in Le Goff, 1990, pp. 180-181).

Por outro lado, afirma Pesez, "se a cultura material se exprime em e por objetos, a arqueologia tem a ver com ela. A arqueologia também pode ser definida como a ciência dos objetos.

Contanto, é claro, que o termo objeto seja entendido de maneira bastante ampla para englobar as construções e a terra revolvida; contanto, também, que se afaste o objeto isolado ou as coleções arbitrárias. A arqueologia desvenda vestígios relacionados a outros elementos, associações de fatos, os mesmos que a cultura material estrutura. Além disso, através dos objetos, é do homem que ela trata. 'As coisas e os homens' também poderia ser o programa da arqueologia" (Pesez, in Le Goff, 1990, p. 204).

É, portanto, devido ao fato da conjectura de Gerdes relativa ao teorema de Pitágoras inserir-se numa linha de investigação que, como assinala o próprio autor, "se baseia nas raízes comuns da etnografia, arqueologia, psicologia, matemática e historiografia, e que toca em questões fundamentais da filosofia como a da relação entre pensar e ser", que a denoninamos de conjectura arqueológico-etnográfica (Gerdes, 1987, p. 175).

E é por ser, simultaneamente, arqueológico-etnográfica e psico-epistemológica - pois, segundo Gerdes (1987, p. 174) "não houve nem saltos, que apenas com a ajuda de estímulos extramatemáticos podiam ser explicados, nem caíram do céu o ângulo reto nem a soma de quadrados que aparecem no teorema de Pitágoras" - que essa reconstituição racional viabiliza, no plano didático, a organização de sequências construtivas (que não coincidem com a sequência cronológica) que poderão motivar e orientar o aprendiz na construção do conhecimento.

Uma sequência construtiva possível é a que aparece ao longo das oito primeiras atividades do estudo histórico-pedagógico operacionalizado.

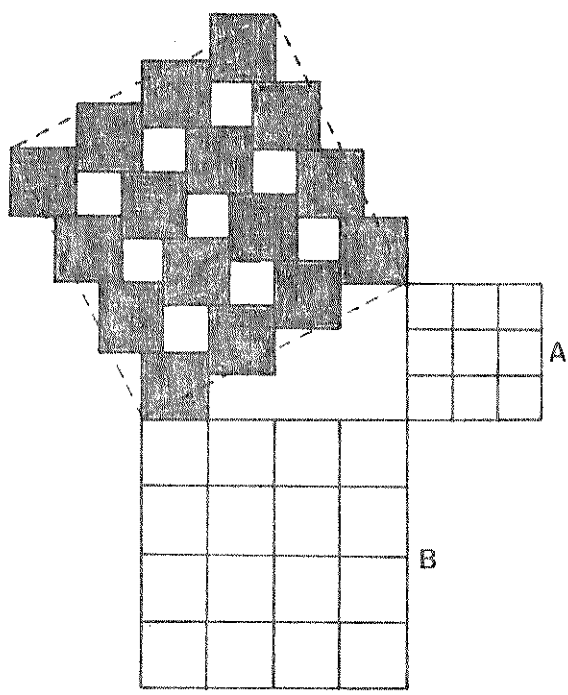
Com base em duas dissonâncias cognitivas tentamos direcionar o pensamento do aluno nos aspectos essenciais da conjectura de Gerdes.

A primeira dissonância ocorre logo nos itens 4 e 5 da 1ª atividade (pp. 9-10 do EHPO). Se nos itens 1, 2 e 3 a construção dos respectivos quadrados cujas áreas sejam iguais à soma das áreas dos quadrados dados é trivial, o mesmo não ocorre nos itens 4 e 5. Psicologicamente, essa dissonância se expressa na percepção por parte do aluno de que a possibilidade de construção do "quadrado-soma" está condicionada à obtenção, via contagem direta dos quadradinhos contidos no interior de cada par de quadrados dados, de um número que seja um quadrado perfeito, isto é, de um número inteiro que possa expressar a área de um quadrado. Tendo em vista a impossibilidade de obtenção de um tal número nos itens 4 e 5, o mais provável é que o aluno, ainda que inseguramente, responda negativamente a pergunta genérica do item b da 1ª atividade. Esse estado de vacilação tende a se intensificar quando no texto 4 do estudo operacionalizado (p. 10) se afirma que os povos antigos responderam afirmativamente a questão que foi objeto de análise na 1ª atividade.

É essa tensão causada pela primeira dissonância - que se expressa na necessidade de opção pela existência ou não-existência do "quadrado-soma" - que deverá motivar a continuidade da busca. Para que essa continuidade ocorra propõe-se abandonar provisoriamente a questão fundamental e passar pela consideração da seguinte questão intermediária: dado um quadrado dentado, é sempre possível construir dois quadrados lisos que, juntos, ocupem a mesma área que a do dentado? É essa questão intermediária que deverá passar a ser objeto de investigação na segunda atividade (pp. 13-16 do EHPO). É fácil concluir que essa primeira questão intermediária admite uma resposta afirmativa.

Uma segunda questão intermediária é levantada e trabalhada nas atividades 3 e 4 (pp. 16-17 do EHPO). Trata-se agora de verificar se, dado um quadrado dentado qualquer é sempre possível obter um único quadrado liso equivalente a ele. É fácil concluir que, dentre as alternativas de ligar os pontos pertencentes às extremidades das diagonais de um quadrado dentado, aquela que é visualizada no item C da 3ª atividade (p. 16 do EHPO) responde corretamente a segunda questão intermediária colocada. Uma vez que através das respostas dadas às duas questões intermediárias chega-se à conclusão de que, dado um quadrado dentado qualquer, é sempre possível construir dois quadrados lisos a ele equivalente e também um único liso a ele equivalente, é fácil inferir que este último quadrado liso é equivalente aos dois lisos obtidos a partir do mesmo quadrado dentado. Este último resultado abre novas perspectivas para se voltar a buscar uma possível solução para a questão fundamental posta pela primeira atividade, e que havia sido provisoriamente abandonada. É esse o objetivo da 5ª atividade (p. 18 do EHPO). É claro que o êxito dessa busca está condicionado à garantia de existência de um quadrado dentado que ocupe a mesma área que as de dois lisos quaisquer dados. A existência desse quadrado dentado para os quatro primeiros itens da 1ª atividade faz crescer a expectativa de infalibilidade do novo método, uma vez que ao resolver com êxito também o item 4 que havia ficado sem solução, mostrou-se mais eficaz que o método da contagem direta empregado anteriormente. Essa expectativa, porém, é logo frustrada pois, ao se tentar construir o quadrado dentado equivalente aos quadrados lisos do item 5 da 1ª atividade (p. 10 do EHPO), uma nova dissonância ocorre: esse quadrado dentado não existe! Essa nova dissonância expressa-se em termos da seguinte opção: dar por encerrada a busca e contentar-se em responder negativamente a questão fundamental (que é o teorema de Pitágoras) ou buscar um novo método de ataque à questão fundamental, que se aplique a todos os casos possíveis. Optar pela primera alternativa seria arriscado uma vez que, sendo o "método do quadrado dentado" mais geral que o "método da contagem direta", sobra sempre a possibilidade de existência de um método ainda mais geral que o do quadrado dentado. Por que, então, interromper a busca? Seria mais prudente tentar buscar um novo método tendo por base as limitações do anterior. A análise das limitações do método do quadrado dentado deve necessariamente passar pela consideração das seguintes questões: em que caso o método falhou? Por quê falhou exatamente nesse caso e não nos outros? Se considerarmos outros casos análogos àquele em que ele falhou e aplicarmos o método a esses novos casos, ele continua falhando? Uma análise dessa natureza conduziria o estudante a perceber a razão pela qual o método do quadrado dentado não se aplica ao item 5 da 1ª atividade. É que um quadrado dentado, da maneira como até então havia sido considerado, só pode ser decomposto em dois quadrados lisos que, juntos, ocupam a mesma área que ele, quando a diferença das medidas dos lados dos dois quadrados lisos for 1 unidade de medida. Portanto, nunca conseguiremos obter um quadrado dentado homogêneo, isto é, composto de quadradinhos iguais, que seja equivalente a dois quadrados lisos, quando a diferença entre os lados desses quadrados lisos for diferente de uma unidade de medida. Essa é a razão pela qual o "método do quadrado dentado homogêneo" falhou para o item 5 da 1ª atividade.

Introduzimos propositalmente a palavra "homogêneo" para sugerir que a superação da dissonância gerada pela percepção da falibilidade do método do quadrado dentado passa pela possibilidade de ocorrer ao estudante a idéia de considerar quadrados dentados heterogêneos, isto é, compostos por quadradinhos de dois tamanhos diferentes, como mostra a figura seguinte, extraída de Gerdes (1992, p. 64).



Essa dissonância é superada, portanto, quando se passa do "método do quadrado dentado homogêneo" ao "método do quadrado dentado heterogêneo". Dados dois quadrados lisos A e B quaisquer, para obtermos um único liso que seja equivalente a ambos mediante o emprego deste último método, devemos dividir os lados dos quadrados A e B em n e n + 1 partes iguais (ou vice-versa) obtendo, em cada caso, n^2 e $(n+1)^2$ quadradinhos de tamanhos diferentes que, dispostos como num tabuleiro de xadrez, produzem o quadrado dentado heterogêneo procurado. Ligando as extremidades das diagonais desse quadrado dentado heterogêneo do mesmo modo como o fizemos para os homogêneos, obtemos o quadrado liso procurado. Eis aí o teorema de Pitágoras em um primeiro grau possível de generalização.

As atividades 6 e 7 (pp. 19-20 do EHPO) têm respectivamente por propósito construir e aplicar um novo método geométrico, que dispensa a construção de quadrados dentados, para se obter um quadrado equivalente a dois quadrados quaisquer dados. Apenas na atividade 8 (p. 21 do EHPO) é que o teorema de Pitágoras deverá aparecer conectado ao triângulo retângulo. A atividade 9 (pp. 22-23 do EHPO) propõe uma série de aplicações desse teorema sob a forma de problemas simples.

O texto 6 (pp. 23-28 do EHPO) tem por objetivo dar continuidade à caracterização da escola pitagórica e levantar, particularmente, algumas razões que a levaram a afirmar abusivamente a crença de que "o número governa o universo".

O propósito da atividade 10 é o de provocar uma nova dissonância cognitiva. O problema da localização exata das placas de sinalização equivale, é claro, à determinação por parte do aluno do maior segmento de reta que caiba simultaneamente nos segmentos KL e PJ. Entretanto, o conhecimento que eventualmente o aluno já possua a respeito de processos algorítmicos de extração do maior divisor comum revela-se, nesse caso, insuficiente uma vez que esses processos, quando aprendidos, limitaram-se ao domínio dos números naturais, isto é, a um domínio discreto. Entretanto, as grandezas a serem comparadas agora são contínuas e o único instrumento que lhe é permitido usar é o compasso. Ainda que o aluno tente "subornar" o enunciado e utilizar uma régua graduada a fim de transformar o problema geométrico em aritmético através da medição dos segmentos, a dissonância persistiria uma vez que, propositalmente, as medidas dos segmentos KL e PJ são expressas por números racionais não-naturais.

O desafio proposto pela atividade 10 tentará motivar a realização, por parte do aluno, da sequência de atividades construtivas seguintes (atividades 11, 12 e 13) que, devidamente discutidas com os colegas e com o professor, lhe fornecerá o conhecimento necessário para retomar a atividade 10 e resolvê-la com êxito.

É claro que essa última dissonância cognitiva e a forma como procuramos superá-la (veja texto 7, p. 30 do EHPO) têm também um fundamento histórico. Embora não se saiba qual o momento exato e quais circunstâncias levaram quais homens a se colocarem pela primeira vez o problema da determinação da maior medida comum entre duas ou mais grandezas contínuas, é indubitável que os artesãos gregos (e antes deles também outros povos?) muito antes do surgimento dos filósofos pré-socráticos e, portanto, antes do advento da ciência e da filosofia, não só se depararam com esse problema como também forneceram-lhe uma solução simples que estava ao alcance de suas mãos: criaram o que chamavam de "regra do polegar" e que, posteriormente, recebeu outros nomes tais como "método da subtração mútua", "método da diminuição recíproca" (antanairesis), "método das subtrações sucessivas", "método das divisões sucessivas", "algoritmo euclidiano da divisão" ou, usando o nome que os gregos lhe davam, "antyphairesis" (cf. von Fritz, 1945, p. 257; Eves, 1976, p. 126; Becker, 1965, p. 91; Knorr, 1975, p. 29).

O algoritmo euclidiano, que não é euclidiano, é descrito na página 30 do EHPO. Euclides desenvolve esse algoritmo na proposição 2 do Livro VII, na proposição 2 do Livro X e na proposição 3 do Livro X (cf. Heath, 1956, vol. 2, p. 298 e vol. 3, pp. 17-22).

Na proposição 2 do Livro VII, o algoritmo é utilizado para a determinação do maior divisor comum entre dois números naturais não-primos entre si; na proposição 2 do Livro X, o algoritmo é utilizado para se demonstrar a inexistência de uma medida comum quando as magnitudes envolvidas são incomensuráveis, e na proposição 3 do Livro X, volta-se a utilizá-lo na determinação da maior medida comum entre duas magnitudes comensuráveis.

O estudante, porém, até o momento, desconhece a existência de magnitudes incomensuráveis, e o propósito da atividade 14 é o de não apenas fazer com que ele tenha a possibilidade de aplicar o método das subtrações sucessivas geométrica e aritmeticamente a segmentos que são comensuráveis, como também o de sondar como o aluno se comporta diante da aplicação desse método à magnitudes incomensuráveis (veja itens f e g da atividade nº 14, p. 31 do EHPO). A reação prevista do aluno nesta atividade de aplicação e de sondagem é que o fenômeno da incomensurabilidade, apesar da provocação, lhe passe despercebido. Isso porque, a forma como ordenamos os itens da atividade 14, sugerindo ao estudante que o método das subtrações sucessivas "funciona", nessa sequência, para a determinação do m.d.c. entre números naturais, números racionais não-naturais e não-periódicos e números racionais periódicos, poderia levá-lo à fácil mas incorreta inferência de que o método poderia ser estendido irrestritamente a quaisquer pares de segmentos de reta. Além disso, nos itens f e g da atividade nº 14, o teste da comensurabilidade poderia ser feito via compasso ou via régua graduada. A percepção por parte do aluno do desconforto provocado pela utilização do compasso, gerando diferenças sucessivas cada vez menores e impossibilitando, dessa forma, uma tomada de decisão, poderia fazer ocorrer-lhe a idéia de substituir o compasso por uma régua graduada e aritmetizar o problema que, inicialmente, tinha um carater geométrico. Ao proceder desse modo, o aluno, inevitavelmente, chegaria à conclusão errônea de que lado e diagonal do quadrado e lado e diagonal do pentágono seriam pares de segmentos comensuráveis. Mas esse "erro" previsto é um "erro" construtivo. É a nossa vista que o torna uma resposta possível. E não somente possível, mas adequada. É uma ilusão provocada pela crença no poder da visão na tomada de decisões sobre questões pertencentes ao domínio racional. Mas a percepção da existência de segmentos incomensuráveis jamais poderia surgir no plano histórico como também no plano cognitivo se algo não viesse desafiar essa ilusão. É essa a "utilidade" pedagógica da ilusão. Ela presta-se para ser destruída, pois é através dessa destruição que o novo conceito, até então inexistente, aparece. E aqui aparece também um exemplo vivo da aplicação pedagógica do "axioma do primado teórico do erro" de G. Bachelard. O significado de uma idéia só nos é acessível na medida em que aparece sobre um fundo de erros mais profundos. Isto é, na medida em que essa idéia é recolocada no interior do campo das ilusões imediatas. A "lembrança dos erros retificados" é que faz com que um novo elemento seja incorporado ao campo semântico que envolve o conceito a ser aprendido. No caso específico de nosso estudo, o conceito a ser aprendido é o de número irracional e o novo elemento que faz parte do campo semântico que envolve este conceito é a percepção da *existência* de segmentos incomensuráveis. Mas a incorporação desse novo elemento ao campo semântico implica que ele seja subtraído de um domínio inacessível à visão. A sua retirada desse campo de invisibilidade é a condição pedagógica necessária que assegura a sua *existência*, isto é, a concessão de sua cidadania no campo semântico.

O objetivo do texto 8 da página 31 do EHPO é o de provocar uma nova dissonância necessária para "transportar" o "ghost" (o "monstro" de Lakatos) do campo de invisibilidade ao campo semântico, isto é, ao plano da consciência. Histórica e pedagogicamente, atribuímos essa tarefa à figura lendária de Hipasus. No texto nº 8 ele ressurge da obscuridade para trazer à *luz*, ao campo de visibilidade, a descoberta de segmentos incomensuráveis. Mas não basta contrariar o senso comum. É preciso também "mostrar", que a negação faz sentido. Mas esse "mostrar" que implica um "convencer" não poderia recorrer a procedimentos dedutivos abstratos muito sofisticados que nem estavam disponíveis no conjunto de conhecimentos matemáticos da época e nem teriam o poder de persuasão necessário para desafiar o senso comum. Esse mostrar deveria impor-se menos pelo rigor que pela sutileza. E nesse sentido, para que o poder da visão pudesse ser desafiado e para que esse desafio pudesse receber alguma credibilidade por parte de um grego antigo - um tipo visual nato segundo Bacca - esse "mostrar" não poderia romper radicalmente com o elemento visual. O poder da vista deveria ser destruído com algo visível. Aí reside a força da "prova" de Hipasus. Além de ter que ser matematicamente aceitável ela teria também de ser uma "prova" pedagógica. A punição de Hipasus é a prova do êxito pedagógico de sua prova. Daí a possibilidade do seu aproveitamento didático na atualidade. A atividade 16 do estudo histórico-pedagógico operacionalizado tem por objetivo fazer com que o estudante, através da aplicação do método das subtrações sucessivas à rede de pentágonos e pentagramas chegue à conclusão, de uma forma provavelmente análoga àquela empregada por Hipasus, da possibilidade de existência de segmentos incomensuráveis. A atividade 15 que a antecede procura simplesmente preparar o terreno para isso, uma vez que tenta fazer com que o aluno perceba essa rede de pentágonos e pentagramas como uma composição de infinitos triângulos isósceles cada vez menores, fato indispensável para que se possa compreender por que razão o método das subtrações sucessivas propaga-se indefinidamente nessa rede, jamais ocorrendo uma diferença nula entre os segmentos comparados.

Entretanto, como já asinalamos anteriormente, o fato da primeira percepção histórica do fenômeno da incomensurabilidade ter ocorrido através da rede de pentágonos e pentagramas foi posta em dúvida, recentemente, por Knorr.

Vamos considerar agora os seus argumentos.

Em primeiro lugar, Knorr afirma que von Fritz e Heller defendem a tese de que os pitagóricos descobriram o fenômeno da incomensurabilidade quando perceberam que a "anthyphairesis" entre dois segmentos em média e extrema razão[8] necessariamente continuava ao infinito (Knorr, 1975, p. 29).

Em seguida, Knorr considera os argumentos que von Fritz levanta em defesa dessa tese: a importância que o pentagrama tinha para a escola pitagórica e a importância que a secção áurea tem para a construção do dodecaedro regular, que Jâmblico havia associado em suas considerações com a primeira divulgação do irracional (cf. Knorr, 1975, p. 30).

Finalmente, Knorr contra-argumenta do seguinte modo:

1) "que a divisão de um segmento em média e extrema razão, da forma como é dada na proposição 11 do Livro II dos Elementos de Euclides, requer o uso do teorema de Pitágoras em sua forma geral, enquanto que a reconstrução feita por ele, isto é, por Knorr (ver pp. 201-202 deste trabalho), necessita apenas de um caso particular intuitivamente óbvio desse teorema" (cf. Knorr, 1975, p. 31).
2) "que a construção do pentágono através de meios formalmente aceitáveis - isto é, pelos procedimentos contidos na proposição 11 do Livro II e nas proposições 10 e 11 do Livro IV -

[8] Dizemos que dois segmentos de reta A e B estão em média e extrema razão quando o maior deles (digamos A) é igual à média proporcional entre o menor e a soma de ambos, isto é, quando $A^2 = B.(A+B)$. A proposição 5 do Livro XIII dos Elementos de Euclides afirma que se A e B estão em média e extrema razão, sendo A o maior dos segmentos, então, os segmentos A+B e A também estarão em média e extrema razão. Uma prova atual dessa propriedade da secção áurea é a seguinte:

Se A e B ($A > B$) estão em média e extrema razão, então, $A^2 = B.(A+B)$. Adicionemos $A.(A+B)$ a ambos os membros dessa igualdade. Então, $A.(A+A+B) = (A+B)^2$. Logo, A+B e A estão em média e extrema razão.

Analogamente, subtraindo AB de ambos os membros da igualdade, chegaríamos à conclusão de que B e A-B estão, também, em média e extrema razão. Esse último fato nos permite concluir que a "antyphairesis" sempre produz duas magnitudes que estão na mesma média e extrema razão. Logo, esse processo, para magnitudes que estejam nessa razão, continua indefinidamente (cf. Knorr, 1975, p. 29 e p. 54).

exige uma perícia impressionante, o que não se pode facilmente afirmar que existisse nos primeiros estágios da pesquisa geométrica. Seria estranho, embora admitidamente possível, que a existência de magnitudes incomensuráveis fosse descoberta inicialmente no contexto dessas elaboradas construções, quando o mesmo poderia ter sido obtido através da simples construção do quadrado" (Knorr, 1975, p. 31).

3) "que não há nenhuma manifestação na literatura grega de qualquer uso da 'anthyphairesis' para *provar* (grifos dele) a incomensurabilidade de segmentos em média e extrema razão" (Knorr, 1975, p. 31).

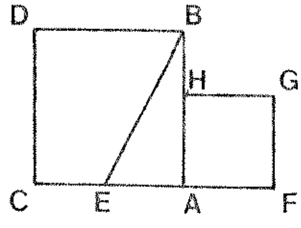
Inicialmente, vamos considerar conjuntamente o primeiro e terceiro contra-argumentos de Knorr, uma vez que ambos insistem em associar à tese de von Fritz a pressuposição do conhecimento por parte dos primeiros pitagóricos não apenas do processo geométrico de divisão de um segmento de reta em média e extrema razão, da forma como aparece na proposição 11 do Livro II dos Elementos[9], como também do processo interativo de produção

---

[9] Euclides enuncia do seguinte modo a proposição 11 do Livro II: "Dividir uma reta de modo que o retângulo compreendido pela reta toda e por uma de suas parte seja igual ao quadrado da parte restante". É claro que esse enunciado equivale à determinação de um ponto H pertencente ao segmento de reta AB, de medida $\underline{a}$, de modo que $x(x+x-a) = (x-a)^2$, onde $AH = x$ e

$HB = x - a$. Essa equação é equivalente a essa outra: $x^2 - ax - a^2 = 0$, cuja raiz positiva é $x = a.(\sqrt{5} - 1)/2$. É claro também que o ponto H divide o segmento AB em média e extrema razão pois, por definição, H divide AB em média e extrema razão se $AB/AH = AH/HB \Rightarrow a/x = x/x-a \Rightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$, equação essa idêntica à anterior. Utilizando terminologia e notação atuais, o processo euclidiano para a determinação do ponto H é, fundamentalmente, o seguinte:

<u>1º Passo</u>: Construir sobre AB, o quadrado ABCD.
<u>2º Passo</u>: Determinar o ponto médio E de AC.
<u>3º Passo</u>: Traçar EB e prolongar CA até F, tal que EF = EB.
<u>4º Passo</u>: Completar o quadrado AFGH.
<u>Conclusão</u>: O ponto H divide AB em média e extrema razão.



Uma justificativa atual do processo é mostrar que os passos dessa construção infinita de segmentos em média e extrema razão, da forma como ele aparece na proposição 5 do Livro XIII de Euclides.

É claro que se essa pressuposição fosse necessária, a conjectura de Knorr tornar-se-ia mais plausível que a de von Fritz, uma vez que, como ele próprio esclarece, a conjectura do quadrado requer apenas o uso de um caso particular do teorema de Pitágoras, ao passo que a proposição 11 do Livro II, como vimos, exigiria não apenas o emprego desse teorema em sua forma geral como também um processo geométrico de resolução de equações quadráticas da forma $x^2 + ax = a^2$. A utilização por parte dos primeiros pitagóricos de um método algébrico, ainda que puramente verbal, de resolução desse tipo de equação, tal como se encontrava na matemática babilônica é, segundo Boyer, improvável. Isso porque, quando a é um número racional, não há um número racional x que satisfaça essa equação (cf. Boyer, 1974, p. 38). Além disso, continua Boyer, "se pudéssemos saber que tipo de solução, se é que tinham alguma, os pitagóricos adotavam para o problema da seção áurea, avançaríamos bastante no esclarecimento do nível e das características da matemática pré-socrática" (Boyer, 1974,p. 38).

Entretanto, o que Knorr não considera é o fato de que a conjectura do pentágono de von Fritz, embora recorra à aplicação da "anthyphairesis" a segmentos que sempre estão em média

---

equivalem à determinação geométrica da raiz positiva da equação quadrática $x^2 + ax - a^2 = 0$. De fato, como ABCD é um quadrado (passo 1), e AB = a, então, AC = a. Então AE = a/2, pois E é ponto médio de AC (passo 2). Logo, o triângulo ABE, retângulo em A, tem os catetos AB e AE medindo a e a/2, respectivamente. Então, pelo teorema de Pitágoras, temos: $EB^2 = a^2 + (a/2)^2$. Daí, $EB = a\sqrt{5}/2$. Como, por construção (passo 3), EF = EB, então, $EF = (a/2)\sqrt{5}$. Como A está entre E e F, AF = EF - AE. Daí, AF = EB - AE. Logo, $AF = a/2(\sqrt{5}-1)$. Como, por construção (passo 4), AFGH é um quadrado, então, AH = AF. Logo, $AH = a/2.(\sqrt{5} - 1)$, como queríamos demonstrar.

e extrema razão, não precisa, para se manter, assumir necessariamente como pré-requisito um processo geométrico de divisão de segmentos em média e extrema razão. Os únicos pré-requisitos necessários, como acentuam o próprio von Fritz (1945, p. 259) e P.S. Jones (1956a, pp. 125-126), eram o teorema atribuído a Tales de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, o fato de que ângulos inscritos em arcos iguais são iguais, além, é claro, do método das subtrações sucessivas. Uma vez que todos esses fatos já estavam incorporados ao conhecimento matemático antes mesmo que os primeiros pitagóricos começassem a dar as suas contribuições, "não há qualquer motivo para não se acreditar", assinala von Fritz, "que Hipasus fosse capaz de demonstrar a incomensurabilidade do lado com a diagonal de um pentágono regular" (von Fritz, 1945, p. 259). Além disso, continua von Fritz, "que as provas desses teoremas, do modo como elas eram dadas na metade do século V a.C., não estivessem de acordo com a concepção euclidiana de uma prova satisfatória não é relevante. Pois a questão não é se Hipasus poderia dar uma demonstração cujos passos teriam satisfeito Euclides ou Hilbert, mas se ele foi capaz de encontrar uma prova que poderia ser considerada absolutamente convincente ao nível da teoria matemática alcançado em seu tempo e, quanto a isso, não pode haver dúvida que ele o tivesse conseguido" (cf. von Fritz, 1945, p. 259). Nesse sentido, como percebeu com clareza Jones, a prova de Hipasus, além dos conhecimentos de natureza propriamente matemática que ela exige, assenta-se sobre um fato psicológico, pois a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do pentágono é quase visualmente evidente (cf. Jones, 1956a, p. 125). É por essa razão que, historicamente, "seria impossível descobrir a incomensurabilidade aplicando o método das subtrações sucessivas da forma como os artesãos o faziam: medindo com paus ou com cordas" (von Fritz, 1945, p. 257).

É por essa razão também que, pedagogicamente, o aluno não poderia perceber a existência de segmentos incomensuráveis meramente olhando para um quadrado e para uma de suas diagonais, ou observando um pentágono e uma de suas diagonais, ou até mesmo aplicando diretamente o método das subtrações sucessivas, de forma empírica, como o faziam os antigos artesãos, ainda que se substituam os paus e as cordas por segmentos de reta, compasso ou régua. A incomensurabilidade só se deixa revelar quando exploramos com ferramentas abstratas um domínio geométrico (a rede de pentágonos e pentagramas que insinua visualmente a infinidade do processo). E dentre essas ferramentas abstratas, a divisão de um segmento em média e extrema razão não é necessária como acredita Knorr.

O segundo contra-argumento de Knorr merece uma avaliação mais detalhada uma vez que coloca em dúvida a possibilidade de os antigos pitagóricos terem tido conhecimento de um processo "formalmente aceitável" de construção do pentágono regular. E por "formalmente aceitável", Knorr entende a forma como Euclides constrói o pentágono regular na proposição 11 de seu Livro IV.[10]

---

[10] O processo utilizado por Euclides na proposição 11 de seu Livro IV é fundamentalmente o seguinte:

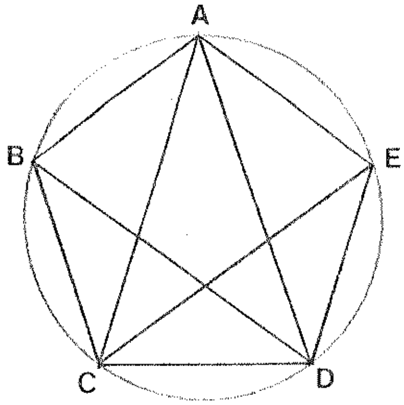
<u>1º Passo</u>: Inscrever na circunferência ao lado um triângulo isósceles ACD cujos ângulos da base ACD e CDA sejam iguais

Embora o processo euclidiano de construção do pentágono regular não seja em si mesmo complicado quando se conhece de antemão um processo para a construção do triângulo isósceles com ângulos 36°, 72° e 72°, se levarmos em consideração o conjunto de proposições que o fundamentam, será difícil não concordar com Knorr que ele requer uma "impressionante perícia". Essa fundamentação exige o uso de 12 proposições que aparecem nos Elementos de Euclides: as proposições 35, 37, 41, 43 e 47 do Livro I; as proposições 6 e 11 do Livro II; as proposições 32, 36 e 37 do Livro III e as proposições 2 e 10 do Livro IV (cf. Aaboe, 1984, p. 67-87). Por outro lado, um argumento levantado por Heath em apoio ao fato de que o método utilizado por Euclides na proposição 11 do Livro IV estava muito próximo daquele utilizado pelos pitagóricos, é o de que Euclides utilizou-o com o propósito de tornar explícita, isto é, visível, a conexão entre pentágono e pentagrama, uma vez que, com exceção do segmento BE, o pentagrama aparece por inteiro no diagrama referente a essa proposição (cf. Heath, 1956, vol. 2, p. 191). Que essa explicitação da conexão pentágono-pentagrama não era necessária basta atentar para o fato de que Euclides poderia ter construído o pentágono de forma mais natural se tivesse feito uso direto do ângulo de 108°, obtendo-o através dos ângulos do triângulo isósceles de 36°, 72° e 72°, já construído na proposição 10 do Livro IV. Ou então, se tivesse

---

ao dobro do ângulo CAD (Proposição 2 e 10 do Livro IV).

2º Passo: Bissectar os ângulos ACD e CDA, respectivamente, pelos segmentos de reta CE e DB (Proposição 9 do Livro I) e traçar os segmentos AB, BC, DE e EA. (cf. Heath, 1956, vol. 2, pp. 100-101)



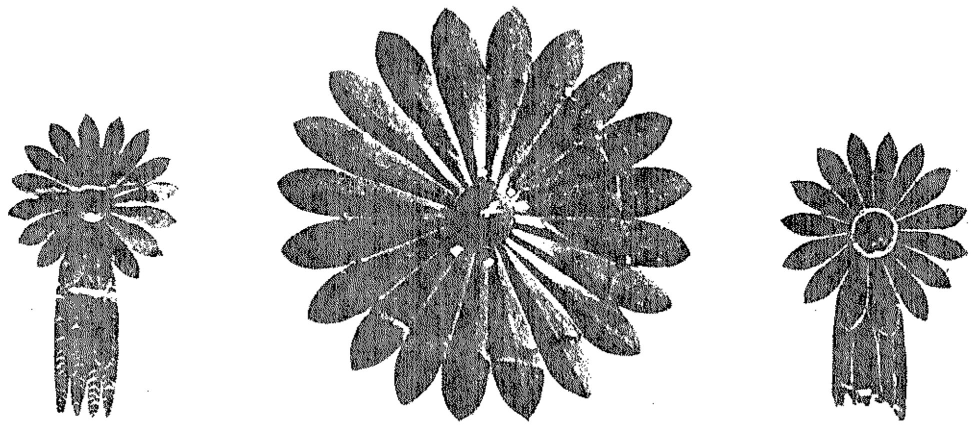
feito uso direto do ângulo de 36° desse mesmo triângulo, e construído um decágono regular inscrito no círculo dado e, em seguida, ligado alternadamente cinco dos dez pontos do círculo dividido em 10 partes iguais pelo ângulo de 36° (cf. Heath, 1956, vol. 2, p. 101).

Talvez, esse e outros argumentos levantados por Heath não sejam suficientemente fortes para abalar o segundo contra-argumento de Knorr. Vamos, portanto, considerar uma linha de argumentação distinta da anterior. Ela se baseia no fato central de que a construção do pentágono, ou pelo menos o conhecimento de uma construção por parte dos primeiros pitagóricos, não precisava, necessariamente, ter sido aquela dada "formalmente" por Euclides. Um outro caminho, menos restrito que aquele platônico-euclidiano que exige o uso exclusivo da régua sem escala e do compasso no traçado das figuras geométricas, poderia ter sido anteriormente trilhado. Talvez, esse caminho tenha sido aquele sugerido por Gerdes e que aparece descrito no estudo histórico-pedagógico operacionalizado (veja p. 6). "O protetor de dedo obtido desta maneira é pentagonal e regular, não porque um Deus ou alguém o desejou antes, não porque um pitagórico o tenha podido imaginar, mas porque isso resultou da atividade humana: na interação entre o problema - como evitar os arranhões? - a primeira sugestão para a sua solução - produzir um dedal - e as possibilidades materiais. Para debulhar os grãos de cereal na ilha indonésia de Roti, serve-se de um protetor de dedo, feito com folhas da planta Lontar. No indicador e no polegar põe-se, em cada um deles, um dedal deste tipo pentagonal-regular" (Gerdes, 1987, p. 69). A conjectura de Gerdes, assentado-se no fato de que a tomada de consciência da forma pentagonal foi um produto necessário da atividade humana produtiva, opõe-se, portanto, tanto às conjecturas de tipo empirista que defendem o surgimento das formas pentagonal e pentagonal estrelada através da observação direta das faces de cristais de forma dodecaédrica e de estrelas do mar respectivamente, como também às conjecturas de tipo platônico segundo as quais essas e outras formas teriam pré-existido, desde sempre, idependentemente do mundo objetivo.

Gerdes vai além e tenta, ainda que a grosso modo, situar cronológica e geograficamente essa percepção da forma pentagonal dentre o conjunto de formas caóticas presentes no mundo objetivo: "O problema aqui resolvido apareceu já muito cedo na história humana: uma economia de recolecção nasceu, durante o paleolítico posterior e mesolítico, em algumas regiões geográficas limitadas, onde se verificava uma presença massiva de plantas silvestres. Assim, é inteiramente possível que a solução através do dedal pentagonal-regular derive desse período. Se fosse esse o caso, suscitaria menos surpresa, que o pentágono regular aparecesse já nas tábuas de escrita cuneiforme babilônicas" (Gerdes, 1987, pp. 69-70).

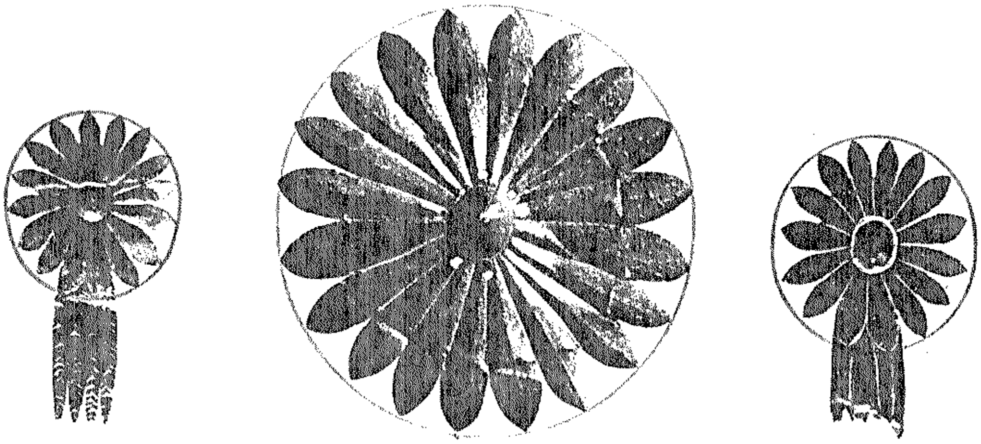
Os tabletes babilônicos a que Guerdes se refere foram encontrados em 1936 na cidade de Susa, a uns 300 km de Babilônia, e demonstram, como afirma Jones, que os babilônicos, em matéria de geometria teórica, foram além do que anteriormente se conhecia (cf. Jones, 1957, p. 165). Em um desses tabletes aparece a comparação entre as áreas e os quadrados dos lados do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono regular, do hexágono regular e do heptágono, ainda que este último polígono, como hoje o sabemos, não seja construível com o uso exclusivo de régua e compasso. No caso particular do pentágono, a razão dada entre sua área e o quadrado de seu lado é, em notação decimal, 5/3 ou 1,66..., o que está correto a dois algarismos significativos. Com base nisso, seria difícil aceitar que uma cultura que chegou a estabelecer relações quantitativas entre as partes de polígonos regulares, dentre eles o pentágono, não tivesse chegado também a especular sobre processos para construí-los.

Ainda que não tenham chegado até nós quaisquer evidências escritas sobre esses processos, podemos inferí-los recorrendo a fontes iconográficas. A foto abaixo nos mostra exemplares de joalheria de um túmulo em Tepe Gawra, um local situado a 22,5 km a leste do Tigre, não longe de Nínive, posteriores ao ano 3.000 a.C.



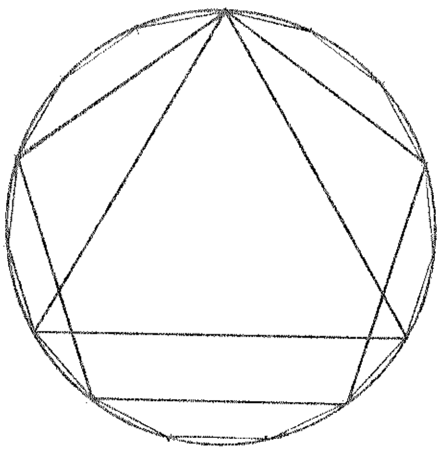
Essas rosetas, em ouro, eram provavelmente utilizadas como ornamento para cabeça ou roupagens (cf. Mallowan, 1971, pp. 81-82).

O fato que nos chama imediatamente a atenção nessas rosetas é a simetria e precisão no traçado de suas pétalas. Quando buscamos inscrever essas rosetas em círculos, da forma como o fizemos abaixo, é difícil não nos convencermos de que os babilônios dispunham de um processo de divisão da circunferência em partes iguais, uma vez que salta aos olhos a congruência dos arcos determinados pelos pontos em que as pétalas tocam a circunferência.



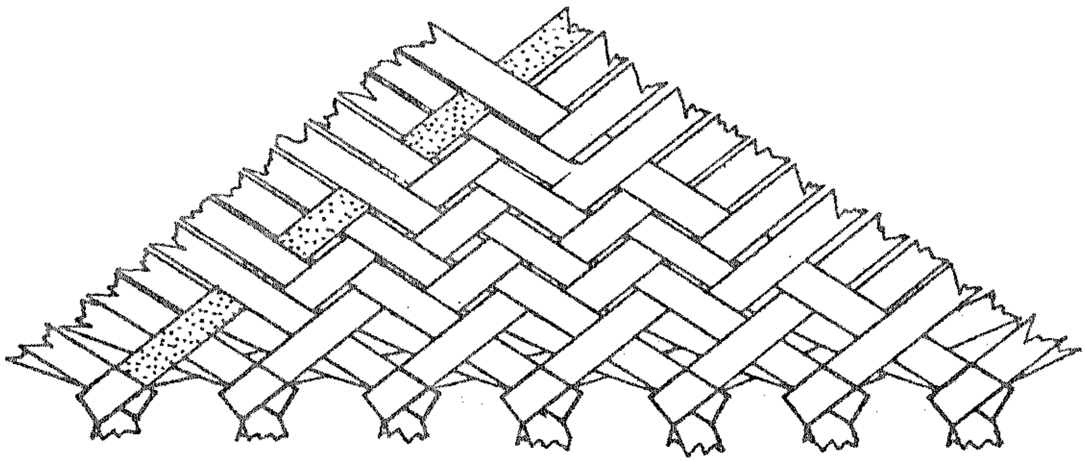
Da direita para à esquerda as rosetas possuem 16, 20 e 15 pétalas respectivamente. Ainda que uma roseta de 16 pétalas pudesse ter sido construída trivialmente através de sucessivas bissecções do círculo, o que teria também possibilitado a construção do quadrado, do octógono regular e do polígono de 16 lados, o mesmo não acontece com as outras duas rosetas. Qualquer que tenha sido o processo utilizado para a divisão da circunferência em 20 e 15 partes iguais, isso traria necessariamente como consequência o conhecimento de um processo de divisão da mesma em 5 partes iguais, o que implica no conhecimento de um processo para a construção do pentágono regular.

No primeiro caso, quem divide uma circunferência em 20 partes iguais, já dividiu-a automaticamente em 10 e 5 partes iguais. No segundo caso, a construção do quindecágono regular (polígono de 15 lados) exige a construção de um arco medindo 24° (360:15). O triângulo equilátero inscrito em uma circunferência, divide-a em 3 arcos de 120°. Um pentágono regular inscrito nessa-mesma circunferência, divide-a em 5 arcos de 72°. A diferença entre esses dois arcos fornece um arco de 48°, que bissectado, produziria o arco de 24° desejado. Aliás, é exatamente isso o que sugere o diagrama abaixo, que aparece na última proposição (proposição 16) do Livro IV dos Elementos de Euclides, que se refere ao processo de inscrever em um círculo dado, uma figura de 15 ângulos, que seja ao mesmo tempo equilátera e equiangular (cf. Heath, 1956, vol. 2, p. 110).



Se a forma pentagonal, como mostramos, já havia adquirido o status de "boa forma", passando a compor o domínio das formas geométricas autônomas há milênios antes do surgimento dos primeiros pitagóricos, o mesmo pode ser dito em relação ao pentagrama ou polígono estrelado de 5 pontas. Quer esta última forma tenha adquirido a sua autonomia através da simples percepção de seu surgimento por meio do traçado das 5 diagonais de um pentágono regular, quer através de um processo de produção de artefatos[11] análogo à conjectura levantada por Gerdes para o surgimento da forma pentagonal, quer através de outro processo qualquer, o fato incontestável é que essa autonomia foi conquistada também em tempos bastante remotos. É o que nos atesta, por exemplo, o trabalho cerâmico à esquerda e ao alto da foto abaixo, no qual aparece vivamente estampado o desenho de um pentagrama. Nessa foto (Mallowan, 1971, p. 80) aparecem quatro cerâmicas suméricas, pintadas e trabalhadas na roda, da fase Jemdet Nasr, isto é, do final do período de Uruk (de 3.500 a.C. a 2.900 a.C.)[12]. Os desenhos geométricos e policromos, a negro e verme-

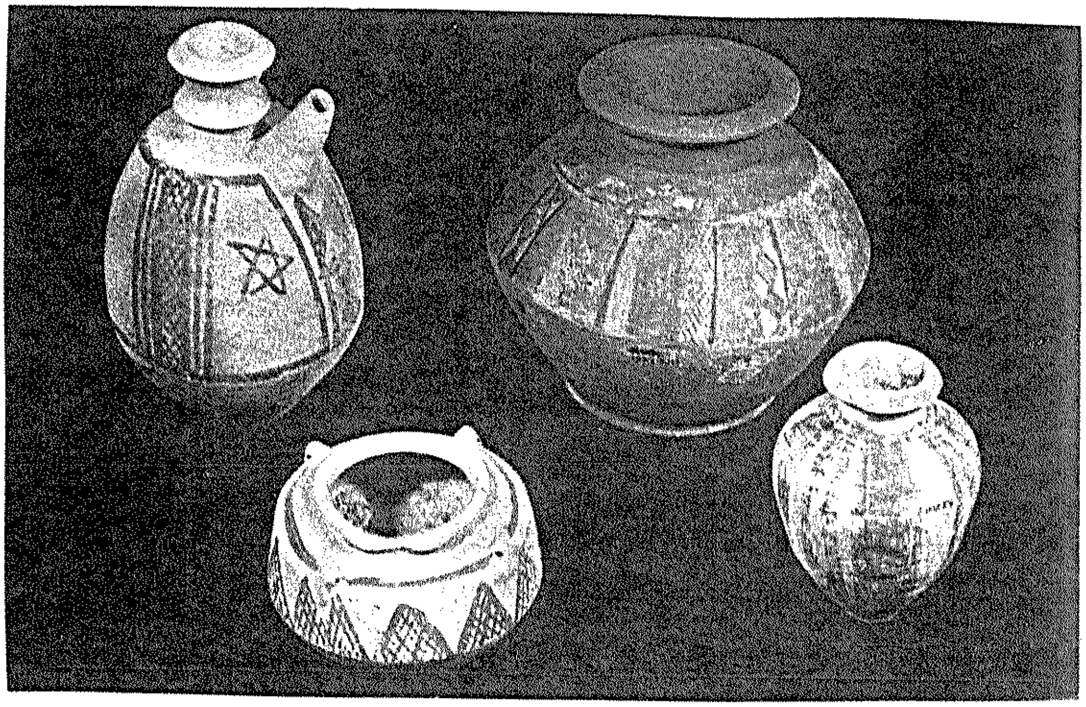
[11] Do mesmo modo como a forma pentagonal poderia ter surgido da atividade humana produtiva, a forma pentagonal estrelada poderia também ter surgido nesse contexto. É o que sugere Gerdes em (1987, pp. 99-101 e pp. 198-199). Gerdes busca apoio para essa conjectura através do modo como as etnias Tsonga do sul de Moçambique confeccionam as carteiras de uso a tiracolo, chamadas "huama" ou "funeco", para o que partem de dois pares de tiras de palmeira que são atadas pentagonalmente uma à outra como se vê na figura abaixo.



"O pentágono do nó", explica Gerdes, "é, quando achatado, semi-regular, com ângulos, de 108°, 90°, 90°, 126° e 126°. Porém, encontra-se escondido nele o *pentágono regular* e o *pentagrama*. Se se entrelaçar, ao jogar, um tal nó de duas tiras da planta, relativamente largas e finas e se colocar em frente à luz, então, aparecem, ao mesmo tempo, um pentágono regular e um pentagrama quase completo. Encontra-se aqui um nascimento alternativo do pentagrama?" (Gerdes, 1987, pp. 198-199).

[12] A cidade de Uruk (a Erech do Antigo Testamento e a atual Warka) encontra-se num braço do Eufrates meridional, na Suméria, território que, depois de 2.000 a.C., se chamava Babilônia. Aqui, em meados do 4º milênio a.C., a arte, a arquitetura, muitas espécies diferentes de tecnologia e, eventualmente, a metalurgia começaram a manifestar um desenvolvimento sem precedentes (cf. Mallowan, 1971, p. 13).

lho, são característicos desse período.



Além disso, antes do surgimento dos pitagóricos, "um belo e completo pentagrama pode ser visto em um vaso de Aristophus, que supõe-se pertencer ao século sétimo antes de Cristo, que foi encontrado em Caere na Itália e que encontra-se atualmente no museu de Roma" (cf. von Fritz, 1945, p. 259 e Heath, 1981, vol. I, p. 162). Outros achados em Micenas, incluem ornamentos de forma pentagonal (Heath, 1981, vol. I, p. 162).

De tudo o que foi dito a respeito das formas pentagonal convexa e estrelada e das evidências que foram levantadas atestando o conhecimento que tinham delas os povos que viveram na região da mesopotâmia há milhares de anos antes de Cristo, e levando ainda em consideração o fato de Pitágoras ter viajado pela Babilônia, de onde evidentemente absorveu não apenas conhecimentos matemáticos como idéias místicas e religiosas, é razoável supor que os primeiros pitagóricos não apenas conheciam essas formas como também dispunham de um processo, ainda que não formal ou euclidiano, de construção dessas figuras, o que enfraquece consideravelmente o segundo contra-argumento de Knorr à conjectura de von Fritz.

O esforço que empreendemos para, de algum modo, imaginar a "pré-história" da noção de incomensurabilidade e para tornar plausível a conjectura de von Fritz deve-se ao fato de que, como assina Bachelard, "essa pré-história poderia servir vantajosamente de indução pedagógica" (Bachelard, 1977, p. 102). Esse esforço, portanto, nada tem a ver com a tentativa de se "provar" a anterioridade cronológica da conjectura do pentágono em relação à do quadrado para inferir desse fato a necessidade de uma organização sequencial dos conteúdos, no plano didático, que obedecesse rigidamente essa suposta sequência cronológica. Não existe, a nosso ver, uma relação de subordinação entre sequência cronológica e sequência pedagógica. Isso porque, a análise psico-epistemológica do desenvolvimento histórico e não esse desenvolvimento em si, que é o que nos interessa pedagogicamente, nos revela uma história não como ela realmente foi, mas como deveria ter sido.

A riqueza pedagógica gerada pela argumentação de Hipasus, quer quando aplicada ao pentágono, quer quando aplicada ao quadrado, não reside na discussão da anterioridade cronológica de qualquer um desses casos em relação ao outro, mas na possibilidade de exploração didática do conjunto de cognições aparentemente contraditórias produzidas pela aceitação de sua legitimidade.

Modernamente, essa dissonância histórica exprime-se, para o caso do quadrado, através do fato de por um lado podermos visualizar a solução geométrica da equação $x^2=2$ e, por outro lado, não dispormos de método algum que nos possibilite chegar a uma solução aritmética racional dessa equação.

Muitas possibilidades de se contornar essa dissonância poderiam ser apresentadas tais como:

1) renunciar à possibilidade de sempre podermos expressar a medida de um segmento através de um número;
2) admitir a possibilidade da existência de equações que só possam ser resolvidas por via geométrica e não aritmética;
3) buscar novos métodos na esperança de se achar um valor racional exato ou aproximado para a equação $x^2=2$;
4) admitir a possibilidade de se aceitar contradições na matemática;
5) manter a harmonia do edifício matemático e ampliar o conceito de número, isto é, aceitar a existência de novos números que não sejam racionais.

Discutir com os alunos os desdobramentos de cada uma dessas possibilidades de se contornar a dissonância é uma tarefa didática altamente relevante. Entretanto, a opção pela melhor possibilidade ou o conhecimento do modo como essas opções se modificaram até culminar naquela atualmente aceita pela comunidade matemática, é algo que, a rigor da palavra, não pode ser construído pelo estudante. Trata-se, na realidade, de uma "informação" a ser-lhe fornecida. Mas de uma "informação" com aspas, uma vez que ela tem como suporte toda uma construção prévia capaz de torná-la significativa, isto é, compreensiva. Uma "informação construtiva" - ainda que isso soe paradoxal - porque transmitida num momento do processo construtivo que posibilita, para usar um termo de Ausubel, a sua "ancoragem".

De fato, é claro que os alunos não poderiam advinhar que os gregos optaram pelas duas primeiras possibilidades de se contornar a dissonância, isto é, que preferiram supor que a Geometria era mais poderosa que a Aritmética, e que acabaram desenvolvendo, por intermédio do caminho aberto pela teoria das proporções de Eudoxo, a complexa teoria das grandezas incomensuráveis, da qual o Livro X dos Elementos de Euclides costitui-se no mais belo e aperfeiçoado exemplo.

É claro que não poderiam advinhar também que, ainda que os gregos tivessem optado pelas duas primeiras possibilidades, não faltaram aqueles que, quer por razões de caráter prático ou de caráter político-ideológico, preferiram optar pela terceira possibilidade, isto é, pela busca de valores aritméticos aproximados ou exatos para as raízes quadradas.

No primeiro caso, o caráter legítimo dessa busca assentava-se na necessidade imposta pelos cálculos astronômicos, o que torna viável a afirmação da existência de um uso inconsciente do número irracional por parte dos astrônomos babilônicos, que dispunham até mesmo de um método notável para extração de raízes quadradas (ver Apêndice 1), antes mesmo do levantamento do problema da natureza desses números por parte dos gregos. A continuidade dessa tradição, mesmo após a descoberta das grandezas incomensuráveis e mesmo após o Livro X de Euclides, é atestada pelos inúmeros métodos desenvolvidos pela Logística grega, tais como o método de Heron de Alexandria e o de Theon Alexandrino (ver Apêndices 3 e 4) para a busca de valores aproximados para as raízes quadradas, e também pela matemática renascentista, como ilustra o método de Bombelli (1572) para extração de raízes quadradas (ver Apêndice 5), baseado no uso sistemático de frações contínuas.

No segundo caso, o caráter ilegítimo da busca - porque assentado na ilusão de que se poderia atingir um valor racional exato para as raízes quadradas - e seu aspecto claramente ideológico - porque baseado na insistência, para usar a expressão irônica de Dantzig, de alguns "pitagóricos conservadores" em manter a crença de que para tudo havia um número, mesmo após os desdobramentos da descoberta de Hipasus - não impediram o surgimento de um método interessante para a obtenção de valores aproximados para as raízes quadradas, como o atesta o método de Theon de Smirna (ver Apêndice 2).

Finalmente, é claro que os alunos não poderiam também advinhar o modo como, no século 19, o matemático alemão Richard Dedekind propôs uma real superação da dissonância produzida pela descoberta de Hipasus, com base na opção pela quinta possibilidade anteriormente exposta e através da postulação daquilo que qualifica como o "banal e trivial critério do corte de uma reta".

Mas por que razão essa trivialidade banal escapou ao sutil espírito dos gregos? Por que razão, em pleno século XX, o sutil espírito de Bertrand Russell fazia o seguinte comentário irônico a respeito do modo como Dedekind procedeu a essa superação?: "o método de 'postular' o que queremos oferece muitas vantagens; são as mesmas do roubo sobre o trabalho honesto.

Deixemo-las aos outros e prossigamos em nossa faina honesta" (Russell, 1974, p. 74).

O estudo histórico-pedagógico operacionalizado que apresentamos para onde Dedekind parou, embora a polêmica a respeito da legitimidade lógica da solução fornecida por ele pudesse, é claro, ser continuada como atestam as palavras acima de Russell. Só que essa continuação implicaria em elevar a discussão a um nível de sutileza lógica que estaria fora do alcance dos estudantes para os quais o estudo se dirige.[13]

Outras dissonâncias de menor relevo aparecem ao longo do estudo histórico-pedagógico operacionalizado, como é aquela presente no item f da 25ª atividade (p. 48 do EHPO), necessária à introdução do conceito de raiz cúbica e à discussão de sua natureza irracional, ou então, aquela presente no item 8 da 29ª atividade (p. 53 do EHPO), necessária à discussão das diferentes formas de representação de um número irracional.

Não podemos deixar de registrar também, a dívida que o nosso estudo histórico-pedagógico operacionalizado tem para com o modo como Caraça desenvolve a problemática relacionada aos números irracionais nos "Conceitos Fundamentais da Matemática". Recorremos a ela devido a sua afinidade com o modo como entendemos deva constituir-se uma didática construtiva da matemática.

É preciso assinalar finalmente que, ao longo do desenvolvimento do estudo histórico-pedagógico operacionalizado, são várias as oportunidades abertas ao professor para o trabalho de problematização de valores junto aos estudantes. Questões como

---

[13] O leitor poderá encontrar a continuidade dessa polêmica consultando as referências: (Russell, 1974, pp. 66-78) e (Rosenfeld, 1927).

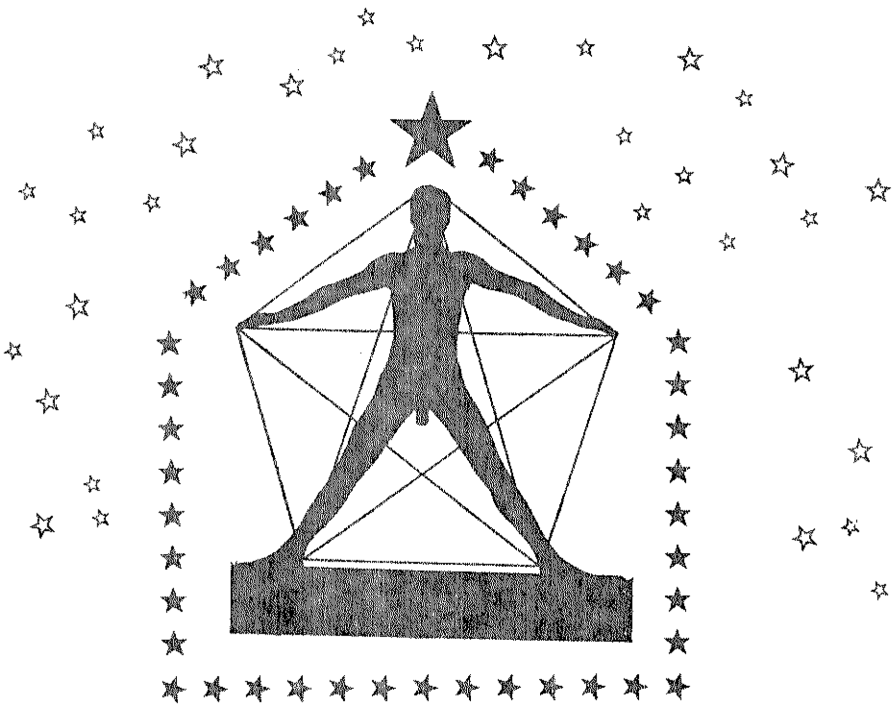
as seguintes poderiam ser levantadas e discutidas, comparando-as com situações da atualidade:

- Como avaliar a figura de Hipasus? Seria ele um traidor por ter revelado um segredo?
- A segregação de conhecimentos é uma atitude legítima?
- O conhecimento é um instrumento de poder? Por que razões?
- A atitude dos pitagóricos diante da descoberta de Hipasus é uma atitude condizente com o espírito científico?
- Existia algum núcleo de bom senso nas crenças dos pitagóricos?
- O clima social, político e cultural de um país exerce algum papel no tipo de conhecimento que é produzido? Que fatores poderiam acelerar ou retardar a produção de novos conhecimentos?
- Existem conhecimentos inúteis?
- O desenvolvimento da ciência sempre traz benefícios às pessoas e melhoria de suas condições materiais e espirituais de existência? Etc.

É claro que estaria fora de cogitação um tratamento maniqueísta dessas e de outras questões. Problematizá-las junto aos estudantes significa mostrar que a escola, e em particular a matemática, podem contribuir não apenas para a formação de técnicos e ocupantes de postos no mercado de trabalho, mas também para a formação de pessoas que poderão contribuir para o aperfeiçoamento da democracia, para a preservação da vida, para a melhoria de sua qualidade e para a restituição da dignidade de todos os seres humanos.

4. ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO-OPERACIONALIZADO SOBRE OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Números Irracionais



ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Pegue uma calculadora. Acione a tecla "2".

Acione em seguida, a tecla " $\sqrt{\ }$ " . O número que apareceu no visor foi 1,1442136.

Foi fácil calcular a raiz quadrada de 2 não é mesmo? Mas esse número não é a raiz quadrada de dois. Estranho? Mistério?

Os matemáticos, hoje, chamam os números desse tipo de números irracionais.

Você não imagina a incrível aventura humana que está por trás desses números e que as máquinas não podem contar. Vamos conhecê-la?

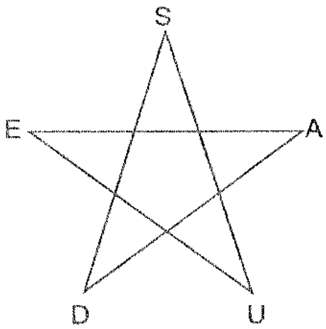
1. O caminho das estrelas

Certa noite, por volta de 500 anos antes do nascimento de Cristo, um viajante chegava a uma estalagem grega, para ali passar a noite.

Durante a noite, o viajante sentiu-se muito mal.

O dono da estalagem fez o máximo possível para ajudá-lo a restabelecer-se. Mas nada do doente melhorar.

O viajante, percebendo que iria morrer sem ter possibilidade de pagar o dono da estalagem pelos seus esforços, pediu uma lousa. Com a mão trêmula, desenhou nela a figura abaixo: uma estrela de cinco pontas ou pentagrama. Em seguida, pediu ao dono da estalagem que deixasse a lousa fixada à porta de seu estabelecimento.



Logo depois o viajante morria.

Um certo dia, um outro viajante que passava identificou o sinal na estalagem. Entrou, perguntou ao dono sobre a origem do desenho e ouvindo a resposta, recompensou o estalajadeiro por sua caridade.

Conhecemos hoje esta história através de um historiador e matemático romano, que acrescenta que os dois viajantes pertenciam à escola do grande sábio grego chamado Pitágoras, nascido no ano 581 a.C. Os pitagóricos, eram geralmente pessoas ricas da sociedade de sua época. Envolviam-se nas atividades políticas, religiosas, filosóficas e matemáticas e o emblema dessa escola era o pentagrama ou pentágono estrelado.

Mas por que uma estrela? Não se sabe ao certo, mas durante o século VI a.C., em certas regiões do mundo grego, intensificou-se a vida religiosa. Dentre as religiões, uma delas, que acreditava na imortalidade da alma e na transmigração da alma através de vários corpos, acabou se difundindo bastante. Essa religião era o orfismo e, segundo ela, a alma das pessoas, por sua própria natureza, aspiraria a retornar à sua pátria celeste, isso é, às estrelas. Isso através da ajuda de um Deus libertador chamado Dionísio.

Pitágoras modificou essa religião, colocando no lugar de Dionísio nada mais nada menos que a própria matemática. Isso mesmo. O pitagorismo fez da matemática a via de salvação da alma; o único meio de conduzí-la das trevas terrenas às estrelas. Talvez seja essa a razão da adoção da estrela como símbolo da escola.

Mas não se deve entender ao pé da letra a expressão "Salvação da Alma" e o termo "Estrela". Isso porque, era da escola pitagórica de onde saiam os principais conselheiros políticos daquela época. Os pitagóricos - políticos por excelência - foram os primeiros a perceberem com clareza, que a matemática constituía a chave de acesso aos segredos do universo. E utilizaram-na não apenas para compreender os números e as figuras, mas também para governar os próprios homens, de acordo com uma política conservadora e reacionária.

Sabe-se que na antiguidade, era bastante difundida e aceita a crença de que apenas os membros das classes dirigentes possuíam alma. Assim, apenas a algumas almas estaria destinado o caminho das estrelas.

2. Pentagramas, pentágonos e os maus espíritos

O pentagrama era também considerado pelos pitagóricos o símbolo da boa saúde e da aliança entre os homens. Os cinco ângulos das pontas da estrela eram provavelmente designados por cinco letras do alfabeto grego que formavam a palavra SAÚDE. Além disso, para muitos povos da antiguidade, o pentagrama tinha um significado místico. Na Idade Média era utilizado para proteger os homens dos maus espíritos.

À primeira vista, um emblema como esse, uma simples estrela, parece um tanto quanto banal e sem interesse.

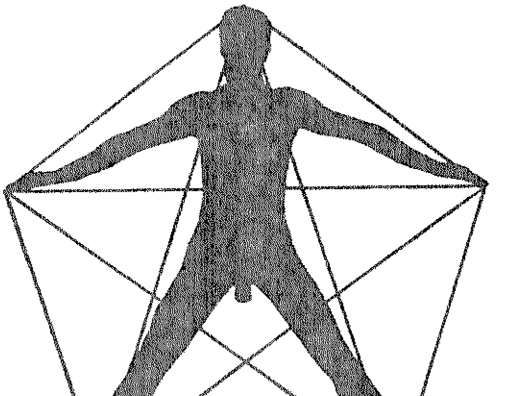


ILustração: Lawlor, R. _ 1982, p. 58

Mas se você ligar com uma régua os vértices dessa estrela, indicados pelas letras S, A, U, D, E, você notará que acabou traçando um PENTÁGONO, isto é, um polígono de 5 lados. Mais que isso. Meça todos os lados desse pentágono. O que você observa? Meça também todos os ângulos internos desse pentágono. O que você observa?

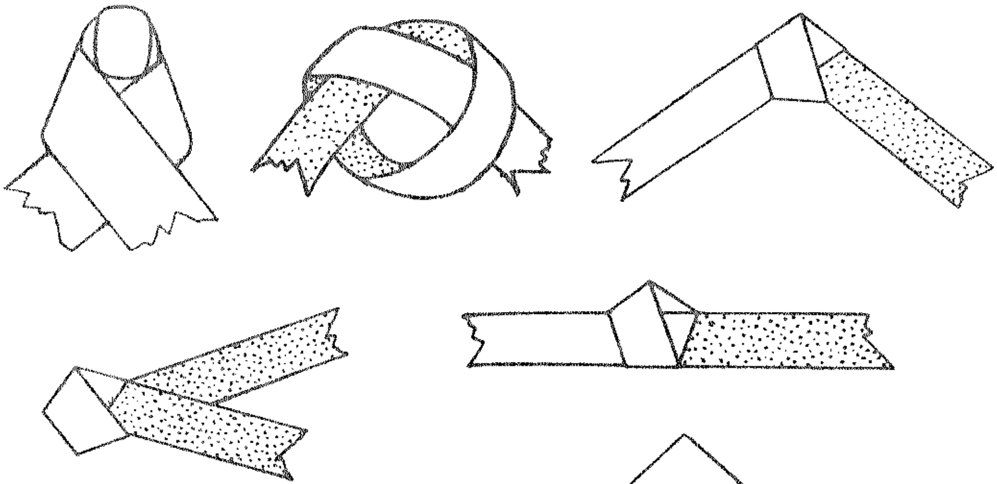
Um pentágono que possui todos os lados e todos os ângulos congruentes é chamado de PENTÁGONO REGULAR.

O pentágono regular foi também uma forma geométrica bastante explorada pelos povos da antiguidade. Esta forma significava o símbolo da vida, mais particularmente, o símbolo da vida humana, como mostra a figura anterior, que relaciona o corpo humano com o pentágono e o pentagrama (formado pelas diagonais do pentágono).

A insistência sobre o pentágono e o pentagrama está associada à crença de certos povos antigos, principalmente os egípcios, que representavam a estrela como tendo cinco pontas, de que o rei, após a morte, tornava-se uma estrela.

Atualmente, levantou-se uma hipótese para explicar a relação que os povos antigos faziam entre a forma pentagonal e o seu poder de proteção. Em tempos muito remotos, nos trabalhos de colheita de cereais como o milho, o trigo, etc. e de debulhamento das espigas, os camponeses inventaram uma forma bem prática de proteger seus dedos contra os cortes e arranhões. Entrelaçavam uma tira de planta para formar um dedal, como mostram as figuras seguintes.

Utilizando uma tira de papel, construa também um dedal.



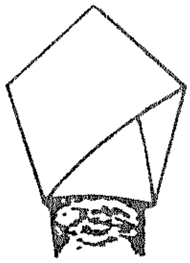


ILustração: Gerdes, P. _ 1987, pp. 68–69

Percebeu? O pentágono, de PROTETOR FÍSICO passou, com o tempo, a ser considerado também um PROTETOR ESPIRITUAL.

Volte à figura da página 4 e prolongue todos os lados do pentágono que você traçou, em ambos os sentidos, até que esses prolongamentos se cruzem dois a dois. Que figura se formou?

Ligue, novamente, os vértices dessa nova figura. Que figura se formou? É, parece que a estrelinha banal começa a se torrnar uma figura interessante. Para além de seus poderes místicos, parece que vale também a pena explorar suas PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS. Foi o que fizeram os pitagóricos. Por ora, teremos que abandonar a estrelinha. Mas futuramente, ela voltará a brilhar.

3. A descoberta de Hipasus e a ira dos deuses

Os pitagóricos comprometiam-se à severa obediência e faziam um sagrado juramento de jamais revelar um segredo. As lendas nos contam, porém, que Hipasus de Metapontum, um pitagórico que viveu por volta de 500 a .C., foi o primeiro a descobrir a existência dos números irracionais e que, mais tarde, ele perdeu-se e morreu no mar como punição dos deuses, pelo fato de ter revelado a sua descoberta para outras pessoas.

As lendas acrescentam ainda, que as pessoas que divulgaram os números irracionais morreram, todas, num naufrágio porque o inexprimível (aquilo que não se pode exprimir), o informe (aquilo que não tem forma), deve ser mantido em absoluto segredo e os corpos das pessoas que os divulgaram devem permanecer eternamente boiando nas ondas do mar.

Conta-se ainda, que os pitagóricos expulsaram Hipasus de sua escola e ergueram um túmulo a ele, como se estivesse morto.

Existem muitas histórias parecidas com essa na literatura mitológica. A primeira forma de explicação dos fenômenos que acontecem na natureza, surgida nas sociedades muito antigas, é o mito. O mito é muitas vezes uma história com personagens sobrenaturais, os deuses. Conta-se por exemplo, que Prometeu (personagem da antiga mitologia grega) roubou dos deuses o segredo do fogo e o revelou aos homens. Zeus castigou-o, mandando Hefaístos acorrentá-lo a uma montanha, onde uma águia devorava continuamente seu fígado.

Como castigo aos homens, os deuses criaram a mulher: Pandora, com uma caixa que, aberta, espalhou entre os homens todos os sofrimentos. Prometeu depois foi libertado por Hércules. A história de Adão e Eva também é parecida.

Pelo fato de terem comido o fruto da Árvore da Sabedoria foram expulsos do Paraíso por Deus.

Como você está notando, a divulgação dos conhecimentos para todos os homens sempre provocou a ira dos "deuses". Tanto antigamente quanto hoje em dia. Isso porque a posse do conhecimento significa poder sobre os homens que não o possuem.

Mas como diz o professor Landes, "Adão e Eva perderam o paraíso por terem comido o fruto da Árvore da Sabedoria: mas não perderam a sabedoria. Prometeu foi punido, e também toda a humanidade, pois Zeus enviou Pandora, com a caixa dos males, para anular as vantagens do fogo; mas Zeus nunca obteve o fogo de volta".

Da mesma forma, Hipasus foi punido por ter revelado ao mundo a descoberta dos irracionais. Mas exatamente por isso, devido à sua ousadia, outros homens puderam conhecer sua descoberta e aperfeiçoá-la ao longo do tempo. Mas por que razão a ousadia de Hipasus provocou o ódio dos pitagóricos?

Qual o significado da descoberta de Hipasus? Como fez essa descoberta? Porque as lendas se referem aos irracionais como "inexprimíveis", "informes"?

É o que você saberá ao estudar esta unidade.

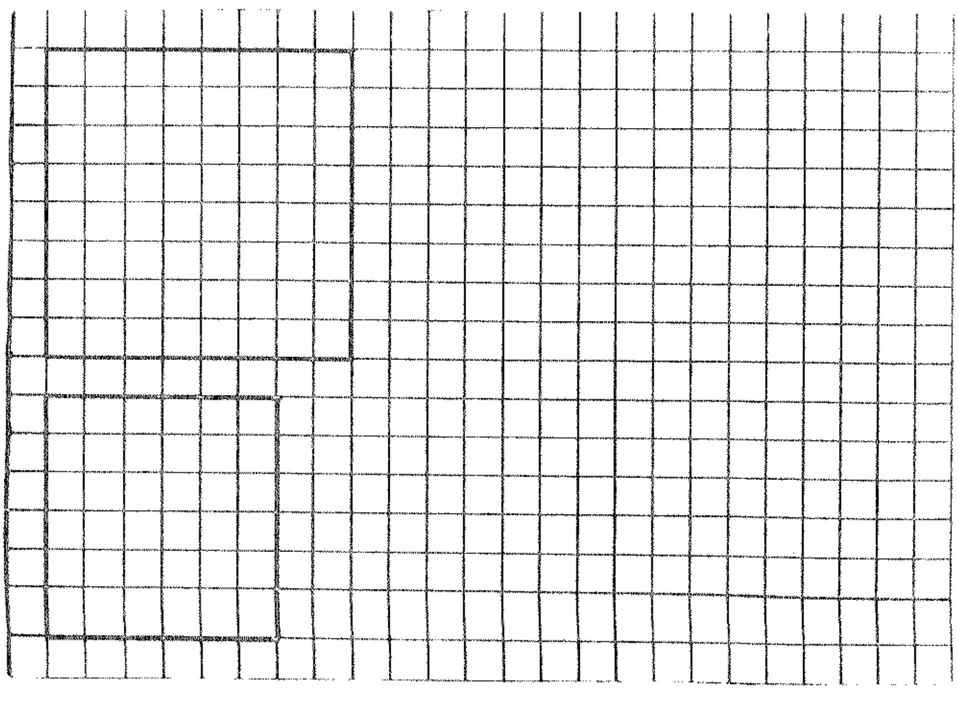
Estudando-a, você também poderá provar o sabor do fruto proibido. Você quer?

O objetivo das atividades seguintes é fazer com que você verifique se, dados dois quadrados quaisquer, é sempre possível construir um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos dois quadrados dados.

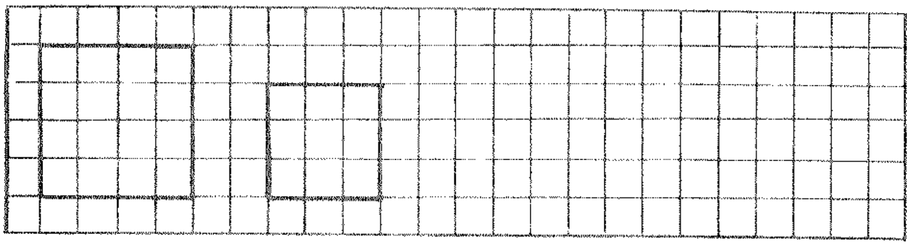
1ª ATIVIDADE

a) Para cada par de quadrados seguintes, construa à direita um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados.

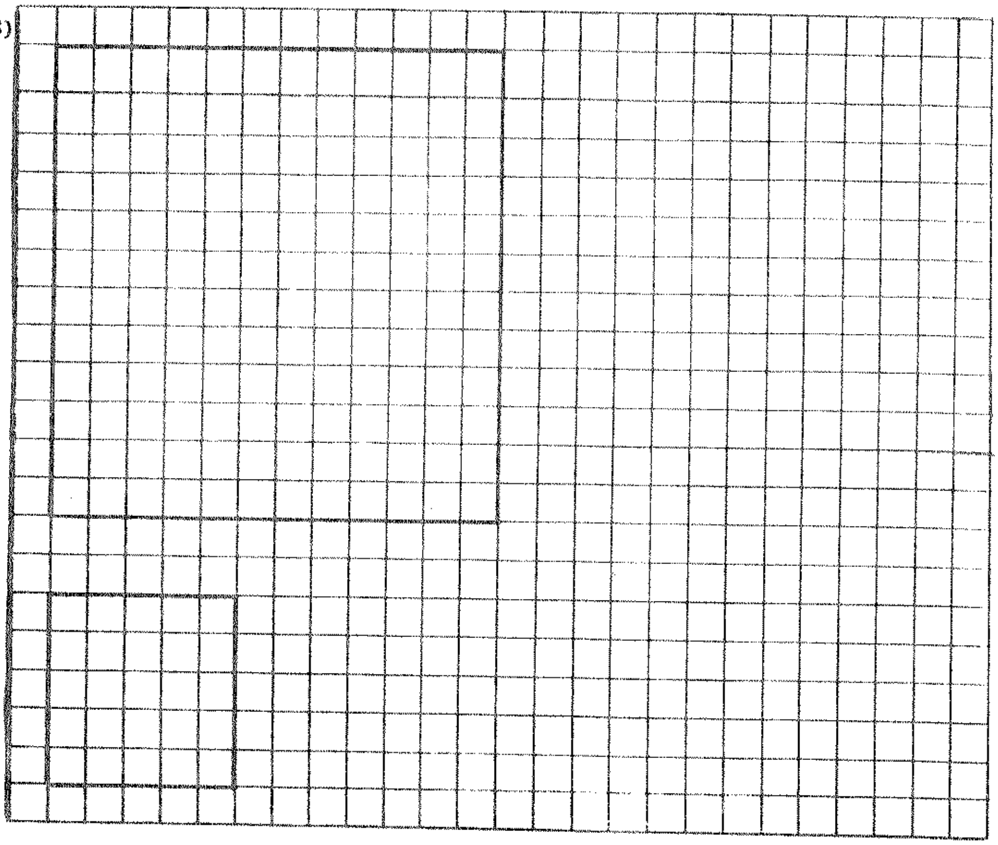
1)



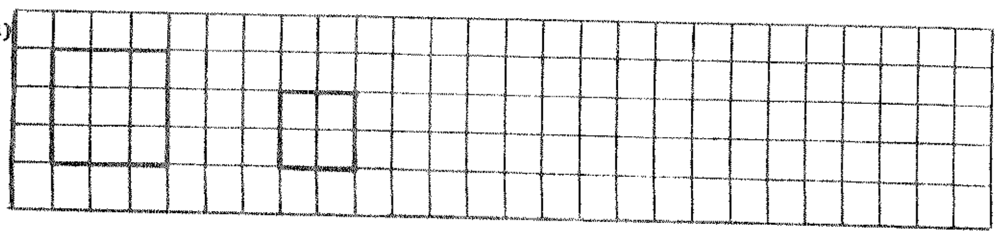
2)



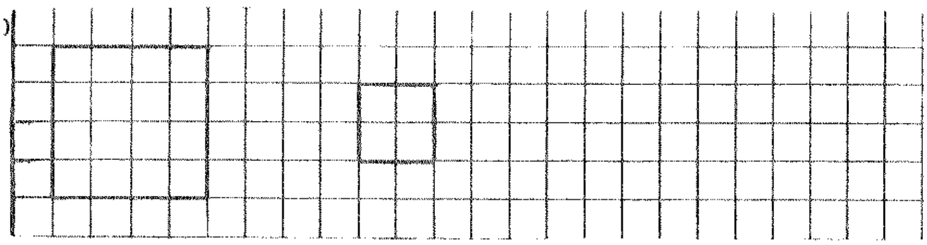
3)



4)



5)



b) Você acha que é possível construir um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas de dois quadrados quaisquer? Justifique sua resposta.

4. Povos antigos e quadrados dentados

Não se sabe exatamente quando, onde e nem como foi feita essa descoberta... mas os povos antigos deram uma resposta afirmativa à questão anterior; isto é, afirmaram que é sempre possível construir um único quadrado que ocupe a mesma área que a de dois quadrados dados, juntos.

Mas será que essa afirmação é realmente verdadeira? Será que os povos antigos realmente tinham razão?

A seqüência de atividades seguintes tem o objetivo de fazer com que você possa verificar se essa afirmação é ou não verdadeira.

O caminho que iremos seguir baseia-se nos trabalhos do professor moçambicano Paulus Gerdes e este, por sua vez, parte da observação dos trabalhos de cestarias, cerâmicas, bordados e padrões ornamentais de povos muito antigos e atuais. Alguns desses padrões estão desenhados a seguir.

Fig. 1

Anatólia - 6º milênio A.C.

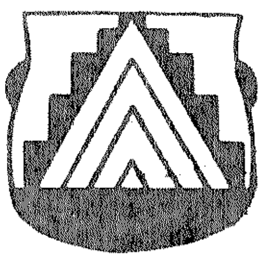


Fig. 2

Padrão de Bordado Inca

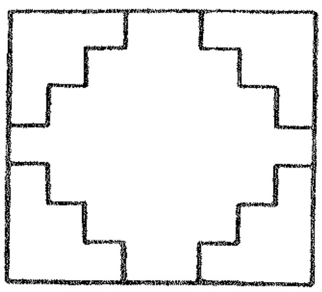
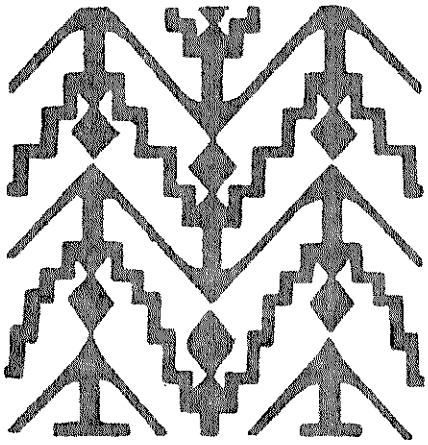


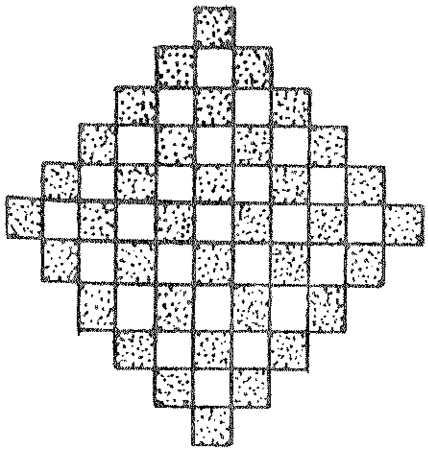
Ilustração: Gerdes, P. - 1987, pp. 153-55

Fig. 3



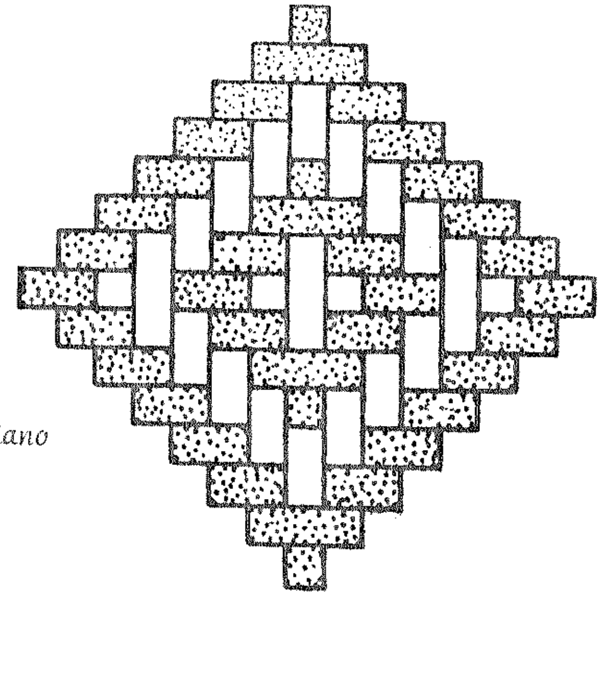
ornamento de uma tigela iraniana - 3000 A.C.

Fig. 4



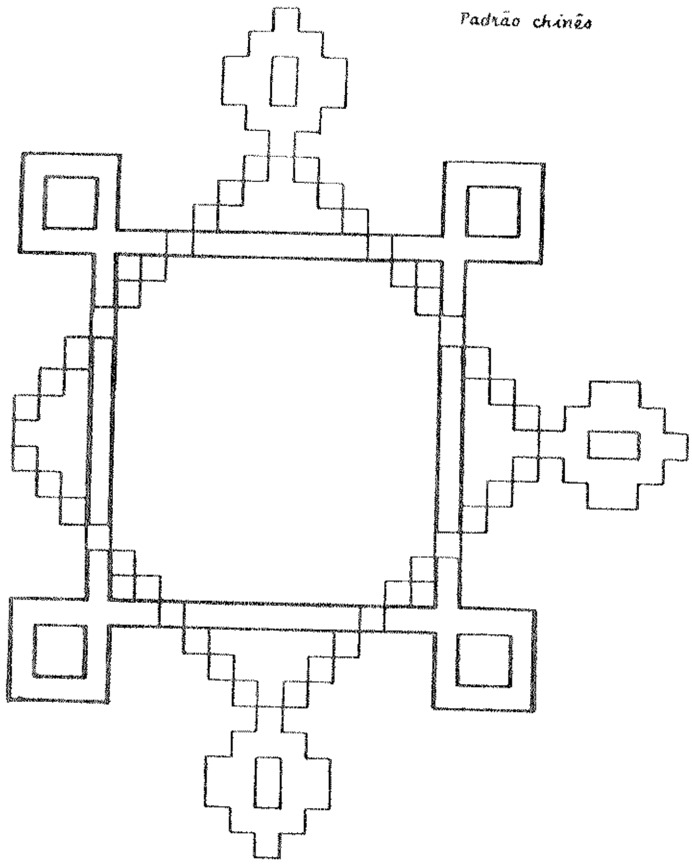
Padrão de azulejos a 4 cores - Argélia 1339

Fig. 5



Padrão angolano

Fig.6



Uma coisa comum que se observa em todos esses padrões é a presença de quadrados na composição de cada um. Uma outra coisa que se nota, em quase todos eles, é que o contorno desses padrões tem sempre a forma de uma escadinha com muitos ou poucos degraus. Vamos, então, partir dessas observações. Vamos chamar de quadrado dentado, qualquer quadrado cujos lados tenham a forma de uma escadinha, composta de vários degraus ou dentes. Por exemplo, o quadrado dentado da figura 4 deste texto possui 6 dentes. Observe que o interior desse quadrado dentado é composto de quadradinhos dispostos em linhas e colunas.

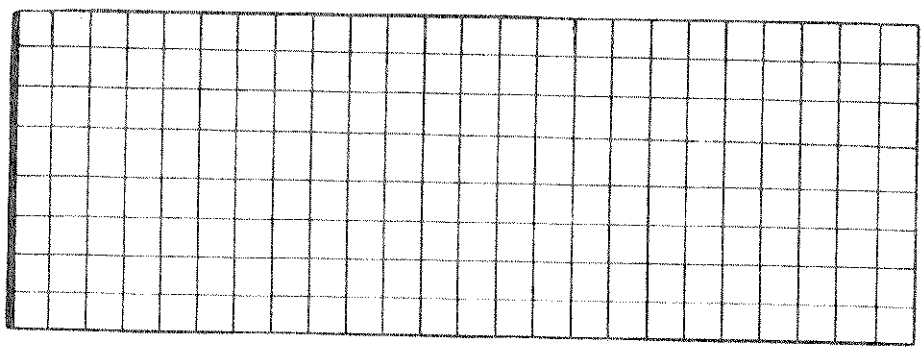
A linha ou coluna de um quadrado dentado que possui o maior número de quadradinhos é a diagonal do quadrado dentado. Logo, a figura 4 é um quadrado dentado de 6 dentes, cuja diagonal possui 11 quadradinhos.

Desenhe na rede quadriculada seguinte:

1) Um quadrado dentado de 3 dentes.

2) Um quadrados dentado de 2 dentes.

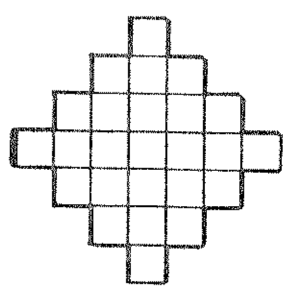
Quantos quadradinhos existem nas diagonais de cada um desses quadrados dentados?



2ª ATIVIDADE

Observe o quadrado dentado de quatro dentes desenhado a seguir. Utilizando duas cores diferentes (vermelho e preto), pinte todos os quadradinhos que compõem esse quadrado dentado como se ele fosse um tabuleiro de xadrez.

Chame o quadrado dentado assim obtido de "quadrado dentado xadrez de quatro dentes".

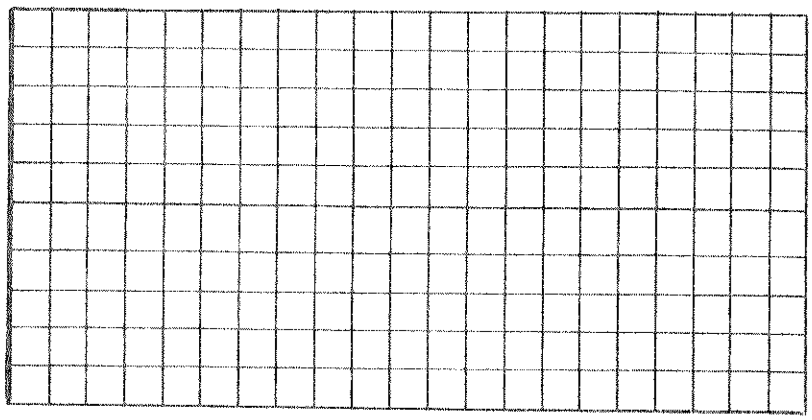


a) Quantos quadradinhos você pintou de vermelho?

b) Quantos quadradinhos você pintou de preto?

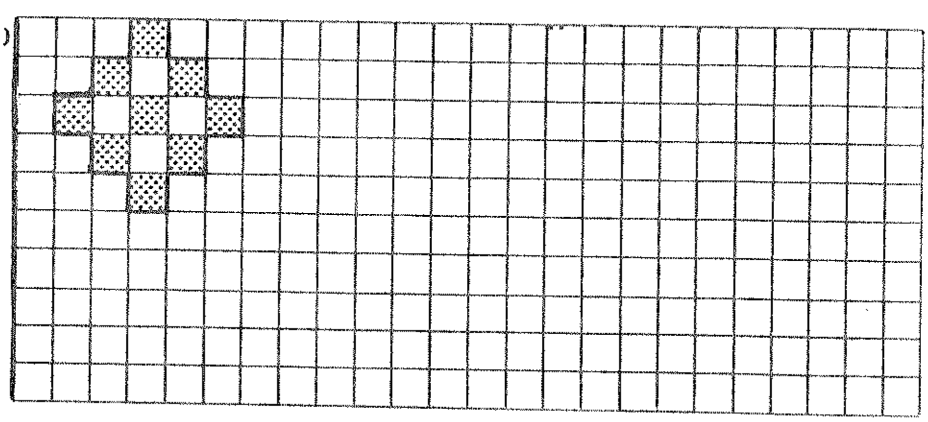
c) Tomando o quadradinho como unidade de área, qual é a área ocupada pelo quadrado dentado xadrez?

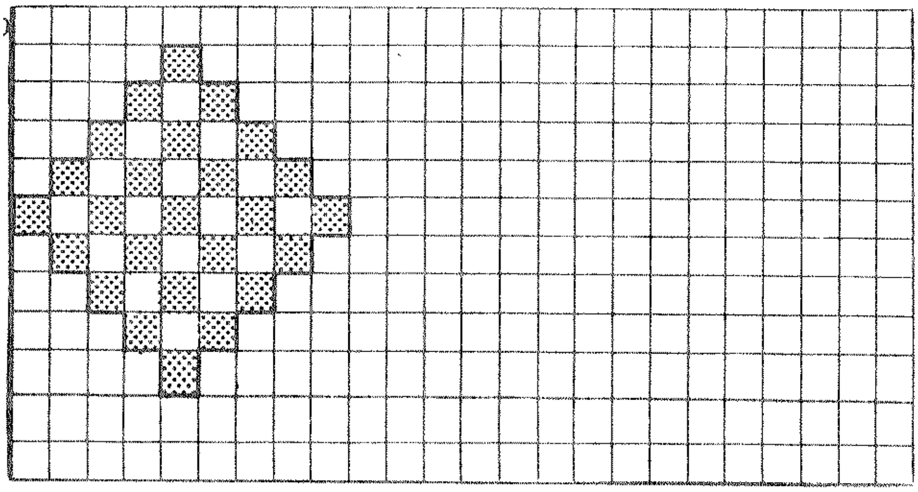
d) É possível construir dois quadrados lisos, um deles contendo só quadradinhos vermelhos e o outro só quadradinhos pretos que ocupem, juntos, a mesma área ocupada pelo quadrado dentado xadrez? Em caso afirmativo, construa-os na rede quadriculada seguinte.

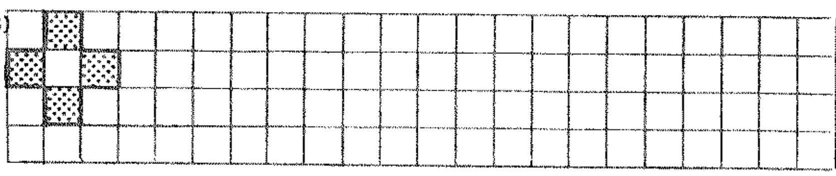


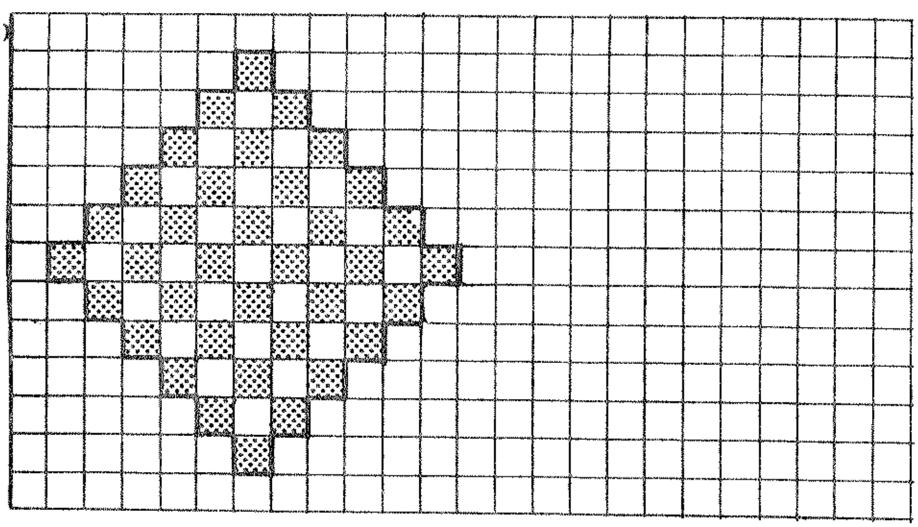
e) Transforme, se possível, cada um dos quadrados dentados xadrez seguintes em dois quadrados lisos que ocupem, juntos, a mesma área que a do quadrado dentado correspondente.

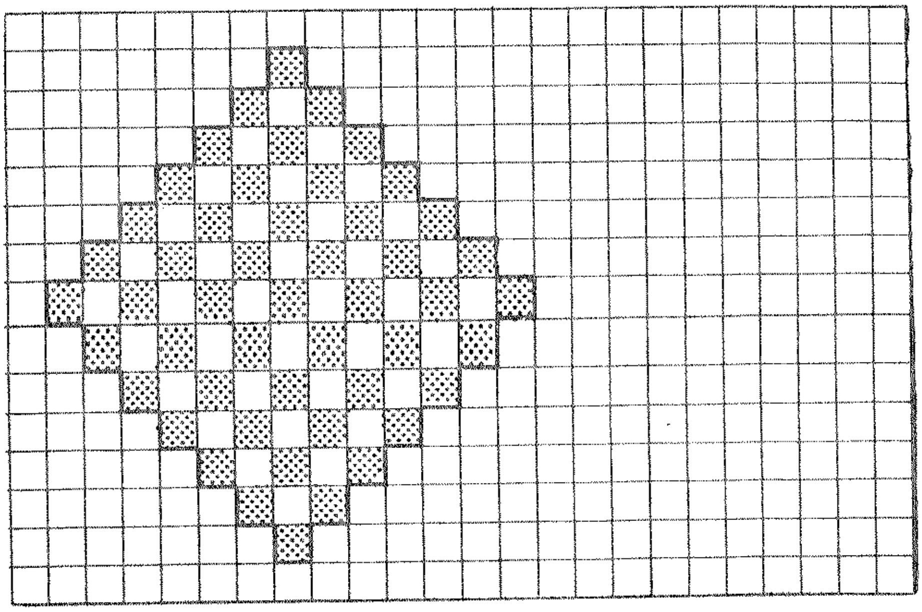
1)



2)


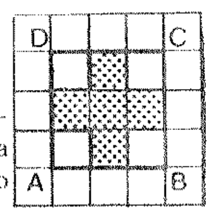
3)


4)


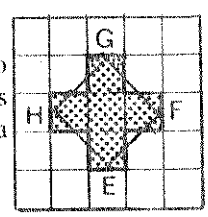
5)


f) dado um quadrado dentado qualquer, é sempre possível transformá-lo em dois quadrados lisos que ocupem juntos a mesma área que a do quadrado dentado?

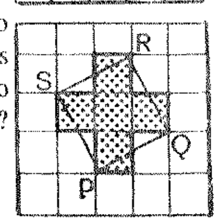
3ª ATIVIDADE



a) Observe o quadrado dentado de dois dentes, inscrito no quadrado liso ABCD ao lado, cujo lado possui a mesma medida que a diagonal do quadrado dentado. Quem ocupa maior área: o quadrado dentado ou o quadrado liso? Explique por que.



b) Observe o quadrado dentado de dois dentes, e o quadrado liso EFGH onde E, F, G e H são pontos médios dos lados dos quadradinhos das extremidades das duas diagonais do quadrado dentado. Quem ocupa maior área: o quadrado dentado ou o quadrado liso? Por quê?

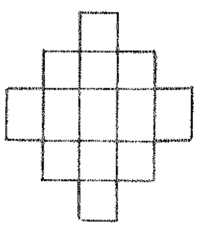


c) Observe o quadrado dentado de dois dentes e o quadrado liso PQRS onde P, Q, R e S são vértices dos quadradinhos das extremidades das duas diagonais do quadrado dentado, ligados conforme a figura ao lado. Quem ocupa maior área: o quadrado dentado ou o quadrado liso? Por quê?

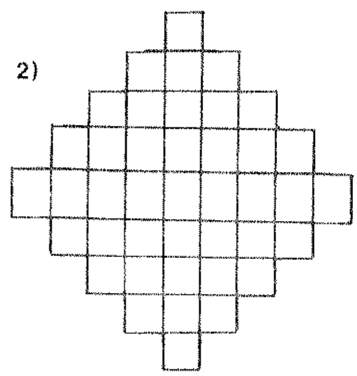
4ª ATIVIDADE

a) Considere os quadrados dentados de 3, 5, 4 e 6 dentes abaixo. Para cada um deles trace um quadrado liso que ocupe a mesma área que eles. Explique porque essas áreas são iguais.

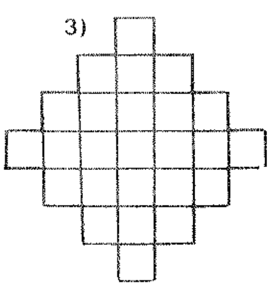
1)



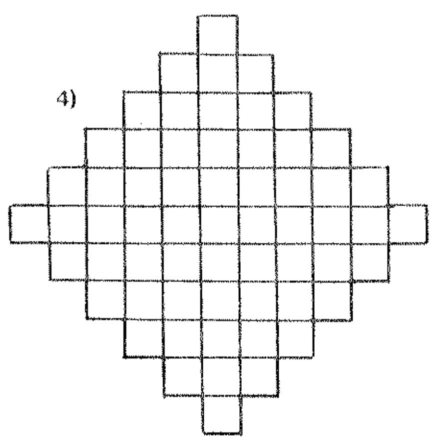
2)



3)



4)



b) Dado um quadrado dentado com um número qualquer de dentes,é sempre possível construir um quadrado liso que ocupe a mesma área que ele? Como?

5ª ATIVIDADE

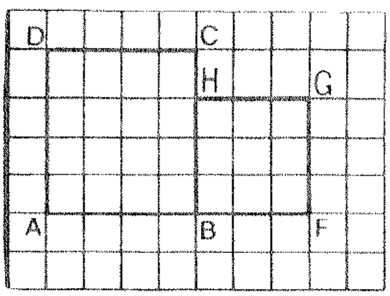
O objetivo desta atividade é fazer com que você continue verificando se, dados dois quadrados lisos, é sempre possível construir um único quadrado liso que ocupe a mesma área que ambos. Para isso, tente construir um quadrado dentado que ocupe a mesma área que a dos dois lisos juntos. Em seguida, transforme esse quadrado dentado em um único quadrado liso de mesma área que o dentado.

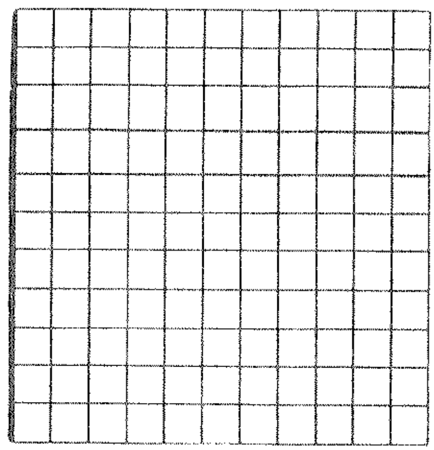
Utilizando esse método, resolva novamente os 5 itens da 1ª atividade. Ele funciona para todos os casos?

O objetivo das atividades seguintes é fazer com que você aprenda , tendo por base o método anterior, um novo método que permita transformar dois quadrados lisos quaisquer num único quadrado liso equivalente a ambos.

6ª ATIVIDADE

Considere os quadrados lisos ABCD e BFGH seguintes.

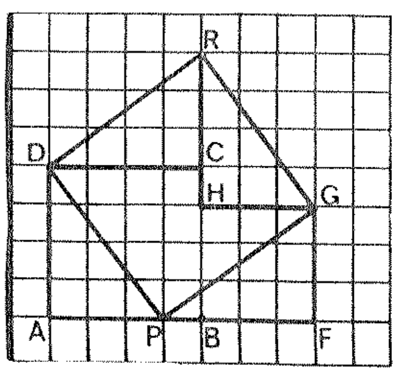




a) Construa na rede quadriculada acima o quadrado dentado cuja área equivale às áreas dos quadrados ABCD e BFGH juntos.

b) Sobre esse quadrado dentado construa o quadrado liso cuja área equivale às áreas dos quadrados ABCD e BFGH juntos.

c) Na figura seguinte, o quadrado PGRD costruído no item anterior, está sobreposto aos quadrados ABCD e BFGH, de modo que o maior número possível de vértices do quadrado PGRD pertence aos lados dos quadrados ABCD e BFGH. Além disso, o segmento BH, que não aparece na figura, foi prolongado de modo a obter o segmento HR. Analisando a figura responda:



1) Após a sobreposição, quantos vértices do quadrado PGRD pertencem aos lados dos quadrado ABCD e BFGH? Quais são eles?

2) Após a sobreposição, qual é a relação que existe entre os segmentos AP e BF?

3) Os triângulos APD e HGR ocupam a mesma área? Justifique sua resposta.

4) Os triângulos FGP e CRD ocupam a mesma área? Justifique sua resposta.

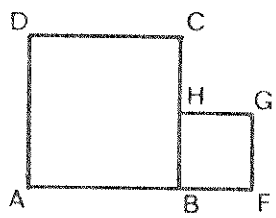
5) O polígono AFGHCD ocupa a mesma área que o quadrado PGRD? Justifique sua resposta.

6) Descreva um método de se decompor o polígono AFGHCD (obtido pela justaposição dos quadrados ABCD e BFGH) de modo que as partes assim obtidas cubram exatamente o quadrado PGRD.

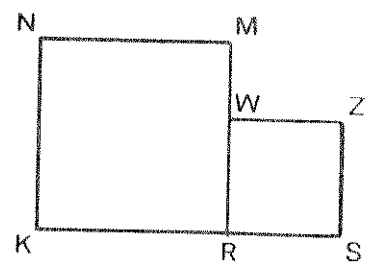
7ª ATIVIDADE

Utilizando apenas régua e compasso e o método descrito na atividade anterior, costrua diretamente o quadrado cuja área é a soma das áreas de cada par de quadrados seguintes:

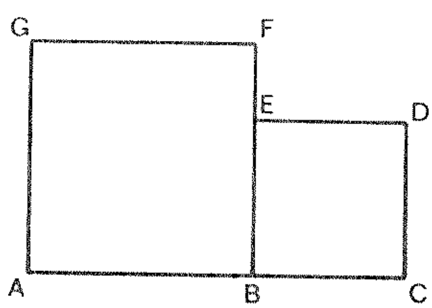
a)



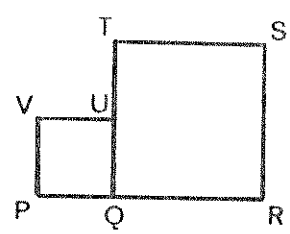
b)



c)



d)

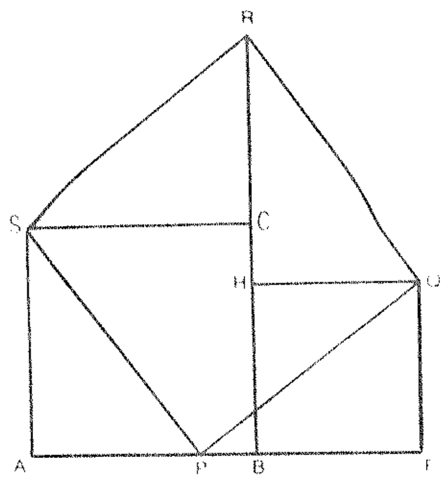


d) Construa dois quadrados quaisquer e o quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos dois quadrados construídos.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você verifique, utilizando o método anteriormente aprendido, se as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa desse mesmo triângulo.

8ª ATIVIDADE

Como você já sabe, a figura ao lado representa o método de dissecção de dois quadrados para se obter um único quadrado equivalente a ambos.



a) Explique porque o triângulo APS é um triângulo retângulo.

b) Quantos quadrados existem na figura?

c) Qual é o quadrado da figura cujo lado possui a mesma medida que a do cateto AP do triângulo APS?

d) Qual é o quadrado cujo lado possui a mesma medida que a do cateto AS do tiângulo APS?

e) Qual é o quadrado cujo lado possui a mesma medida que a da hipotenusa PS do triângulo APS?

f) Observando a figura, explique por que é verdadeira a afirmação de que, num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os seus catetos.

5. O Teorema de Pitágoras que não é de Pitágoras

A afirmação anterior, que você comprovou ser sempre verdadeira, de que num triângulo retângulo qualquer, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, é conhecida atualmente pelo nome de Teorema de Pitágoras.

Mas sabe-se, hoje, que é bastante improvável que Pitágoras ou outro pitagórico a tenha descoberto.

Essa relação, pelo menos para alguns triângulos retângulos, já era conhecida pelos babilônicos e provavelmente, pelos egípcios e outros povos há milhares de anos antes de Pitágoras.

Mas é provável que os pitagóricos tenham dado a primeira prova de que essa afirmação era válida para qualquer triângulo retângulo.

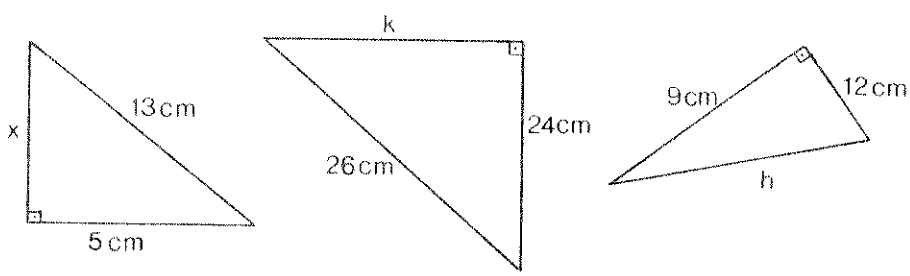
E os povos antigos realmente tinham razão, pois o "Teorema de Pitágoras" é equivalente à afirmação de que é sempre possível construir um único quadrado que ocupe a área que a de dois quadrados dados, juntos.

9ª ATIVIDADE

a) A área do quadrado construído sobre um dos catetos de um triângulo retângulo é $9cm^2$ e a área do quadrado construído sobre o outro cateto é $16\ cm^2$. Determine a área do quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo retângulo e a medida de cada um de seus lados.

b) A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é $100\ cm^2$ e a área do quadrado construído sobre um de seus catetos é $36\ cm^2$. Determine a área do quadrado construído sobre o outro cateto desse triângulo retângulo e a medida de cada um de seus lados.

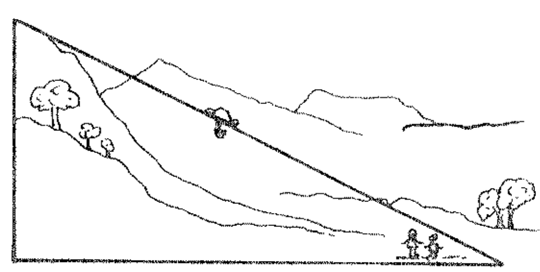
c) Determine, para cada triângulo retângulo abaixo, a medida do lado desconhecido.



d) Dois ciclistas partem de um mesmo local, sendo que um deles segue por uma estrada retilínea para o norte e o outro por uma estrada retilínea a leste. Determine a distância que os separa depois de duas horas, sabendo que pedalam a uma velocidade constante de 9km/h e 12km/h respectivamente.

e) Uma escada de 3,75 m de comprimento está apoiada em uma parede e seu pé dista 2,25 m da parede. A que altura do chão a escada chega?

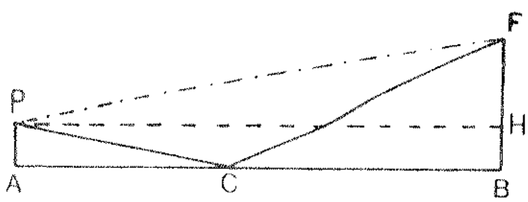
f) Na época de colheita de forragens, alguns povos que vivem em montanhas amarram e soltam os feixes de feno numa roda-polia, que desliza até o vale por um cabo de ferro, como na figura abaixo. Sabendo que o desnível entre o ponto do qual a polia é solta o o ponto mais baixo que ela atinge é de 1600 m e que a distância horizontal é de 3000 m, qual deve ser o comprimento do cabo?



Castelnuovo, E. _ 1966, p. 204

g) Numa cidade localizada a 2100 m de altitude (ponto C da figura), partem dois teleféricos: um em direção ao pico F de uma montanha e o outro em direção ao pico P de uma outra montanha. Os pontos F e P têm, respectivamente, altitudes 2900m e 2275m e os trajetos CF e CP têm, respectivamente, comprimentos iguaisa 1000m e 625m. Que comprimento teria o trajeto PF de um teleférico que unisse diretamente os pontos P e F?

Castelnuovo, E. – 1966 – p. 204



h) Verifique se o teorema de Pitágoras é válido para triângulos que não sejam retângulos. Para isso, construa numa folha de papel pelo menos um triângulo obtusângulo e um acutângulo e compare as áreas dos quadrados construídos sobre seus lados.

6. O número governa o universo

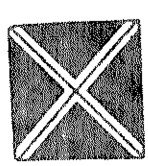
Pela atividade anterior você deve ter sentido a força do Teorema de Pitágoras. Os povos antigos também a sentiram. Isso porque ele aplicava-se na construção de habitações, na arquitetura, na agrimensura, na construção de canais, na abertura de túneis, na astronomia, etc.

Devido, justamente, às inúmeras aplicações materiais, os homens antigos também levaram o Teorema de Pitágoras para o domínio das artes.

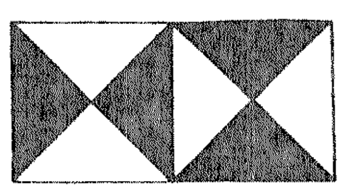
Retrataram-no através de seus desenhos, pinturas e tapeçarias.

Explique porque os trabalhos a seguir podem representar casos particulares do Teorema de Pitágoras.

Padrão de cerâmica Halaf
6º milênio A.C.



BOOUINO FASSO



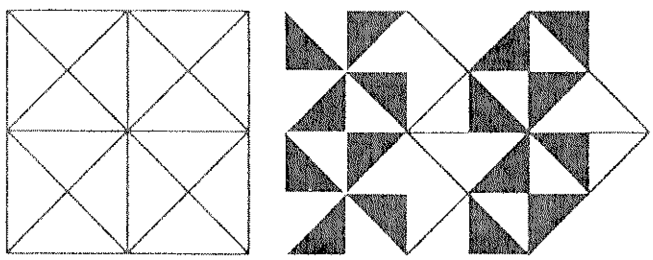


ILustração: Gerdes . P. - 1987 -pp.148-49

E como não poderia deixar de acontecer, levaram-no também ao plano religioso, atribuindo-lhe um significado místico. Nas religiões antigas era bastante comum combinar vários deuses a fim de se obter um único deus. Assim como, para fins místicos, era familiar entre eles atribuir valores numéricos a cada letra do alfabeto e determinar o valor de uma palavra através da soma dos valores das letras que a compõem, é bastante provável que identificassem os deuses com quadrados e a determinação do "valor" de um deus através da soma das áreas dos quadrados que representassem os deuses geradores daquele deus.

Em um dos livros sagrados dos hindús, por exemplo, acha-se escrito que "no começo Rishis criou 7 pessoas separadas que eram identificadas com quadrados" e depois acrescenta: "Façamos destas 7 pessoas uma única pessoa!".

Sabe-se também que os egípcios sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 unidades era um triângulo retângulo e associavam os catetos desse triângulo com seus deuses Osíris (o deus morto que gerou um filho no mundo dos mortos) e Ísis (mulher de Osíris) e a hipotenusa, com o deus em forma de falcão chamado Hórus (filho de Osíris e Ísis), cuja encarnação era o faraó que governava o povo egípcio

Entre os gregos, o Teorema de Pitágoras foi relacionado com o casamento.

Mas se as palavras podiam ser reduzidas a números e, através destes, fazer prognósticos a respeito das vidas das pessoas, se os próprios deuses podiam ser reduzidos a números, através da comparação que o Teorema de Pitágoras estabelecia entre eles, não foi difícil a partir dessas crenças, levantar e defender uma outra crença bem mais audaciosa: "Tudo na natureza se reduz a números".

"A tudo corresponde um número e tudo pode ser explicado através do número".

Foi essa a bandeira erguida por Pitágoras e defendida pelos pitagóricos, que encararam essa crença como uma verdade absoluta. Você deve estar achando bastante estranha essa afirmação de que tudo é número. Mas as pessoas que viveram na época de

Pitágoras também a acharam. Conta-se que, certo dia, alguém pediu a um pitagórico chamado Eurytos, para lhe provar que o homem é um número. O que fez Eurytos? Pegou uns pedacinhos de pedra e com eles formou o contorno de um homem. Em seguida, colocou um a um os pedacinhos de pedra sobre o contorno, contou-os: 1, 2, 3,... chegando a um número. Por exemplo, 666. Disse então, esse homem é 666!

Você deve estar pensando... Mas seria Eurytos assim tão imbecil para não perceber que o homem é "muito mais" do que um número por maior que este possa ser? É claro que tanto Eurytos quanto os pitagóricos não eram assim tão ingênuos. Como entender então os seus propósitos? É claro que ele não queria dizer que o homem é apenas um número. Mas, na guerra, na economia, na política é possível que ele considerasse os homens como quantidades limitadas, assim como são as figuras e os números. Não é esse o segredo do poder? Segundo um matemático de nossa época, é necessário ver nesses pitagóricos os ancestrais de nossos tecnocratas frios, distantes, impessoais, desumanos. O homem, para esses tecnocratas, não passa de uma matrícula, de um número, de uma informação: nome, sobrenome, data e local de nascimento, endereço. Os tecnocratas, com seus cálculos, não fazem o mesmo que Eurytos com suas pedrinhas?

A crença de que "tudo é número", portanto, não havia caído do céu. Ela tinha objetivos políticos claros; um deles sendo o de conduzir o homem e a política por simples manipulação baseada no número e na figura.

Para isso, Pitágoras acaba identificando o ponto da geometria com o número da aritmética. Daí por diante, vê um ponto quando se fala do número 1, e imediatamente imagina o número 3 quando vê 3 pontos. Estranha associação não é mesmo? Como Pitágoras chegou a ela?

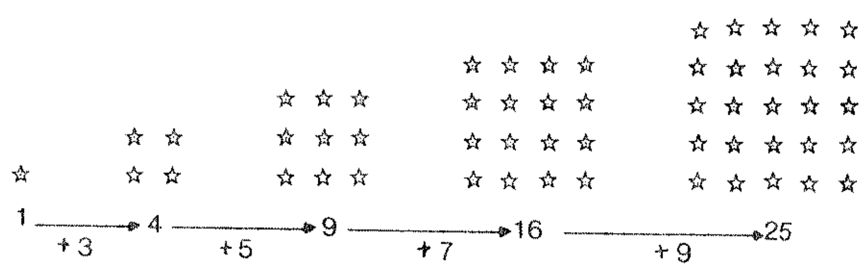
Foi observando as estrelas do céu que ele teve a idéia de identificar pontos e números. Ele verificou que uma constelação como a Ursa Maior, por exemplo, é representada, por simples pontos de estrelas. Veio-lhe, então, naturalmente, a ambição de representar toda forma por uma figura. E reduzindo toda figura a uma constelação de pontos, é claro que toda forma geométrica se reduziria a um conjunto de pontos. Em seguida, Pitágoras observa que a forma da constelação podia ser definida por dois aspectos: um deles dizia respeito ao número de estrelas (conceito de números-pontos) e o outro dizia respeito à estrutura da constelação (conceito de figuras-pontos). Dessa forma chegou à noção de números figurados. Assim, o 3 será o triângulo, o quatro o quadrado, o cinco o pentágono e assim por diante.

Mas além do teorema que leva seu nome, Pitágoras, trabalhando com esses números figurados (as estrelas-pontos), acabou descobrindo relações matemáticas que reforçaram ainda mais a crença de que "tudo é numero". Uma dessas descobertas afirmava que os triângulos equiláteros cada vez maiores, construídos com pontos-estrelas, podem ser obtidos a partir dos menores, e que essa construção podia ser expressa através de uma soma de números. Para compreender essa descoberta, observe as formações triangulares seguintes:

Se você comparar essa seqüência de "números triangulares", isto é, a seqüência 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. com a seqüência dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... você observará que: a soma dos dois primeiros números naturais é igual ao segundo número triangular, isto é, 1 + 2 = 3; a soma dos três primeiros números naturais é igual ao terceiro número triangular, isto é, 1 + 2 + 3 = 6, e assim por diante.

Daí, para obter o segundo triângulo da série, basta acrescentar 2 pontos ao primeiro; para se obter o terceiro, basta acrescentar 3 pontos ao segundo e assim por diante.

De forma semelhante, os pitagóricos falavam em "números quadrados". Observe os quadrados abaixo, construídos com pontos isolados:



Os pitagóricos descobriram que um quadrado qualquer da série poderia ser obtido, somando-se um número ímpar de pontos ao quadrado anterior.

Como se não bastasse isso, os pitagóricos descobriram a existência de uma relação entre os números triangulares e os números quadrados. Descobriram que a soma de dois números triangulares consecutivos é sempre igual a um número quadrado, isto é, a um quadrado perfeito.

Exemplo:

3 + 6 = 9 = 9

Seguindo um raciocínio semelhante para os demais polígonos regulares (pentágonos, hexágonos, etc.) os pitagóricos concluíram que o domínio das formas geométricas, isto é, a geometria, também era governado pelos números e que todos os objetos do mundo físico, eram constituídos de pontos e diferiam apenas na aparência, na forma, isto é, no arranjo espacial desses pontos, mas tudo, no fundo, era número.

Todas as descobertas dos pitagóricos pareciam reforçar essa crença. Mas uma delas acabou dando o arremate final. Ela se deu no domínio da música.

Se você pressionar com o dedo exatamente o ponto médio de uma corda de um violão, a nota emitida pela corda assim pressionada está a uma oitava acima da nota que essa mesma corda emitiria se não fosse pressionada em ponto algum. Em outras palavras, dividindo um pelo outro os comprimentos dos segmentos formados na corda, depois e antes de ser pressionada, a fim de que ela emita sons em intervalos de oitava, obtemos a fração $\frac{1}{2}$.

Para que a corda emita sons em intervalos de quinta (de dó a sol, de sol a ré, de ré a lá, etc.), basta dividí-la em três partes iguais e pressioná-la a uma distância equivalente a 2 dessas partes, isto é, dividindo um pelo outro os comprimentos dos segmentos formados na corda, depois e antes de ser pressionada, a fim de que ela emita sons em intervalos de quinta, obtemos a fração $\frac{2}{3}$. E assim por diante.

Pronto! Os números governavam até mesmo os sons. A harmonia musical é número. Tudo no universo é harmonia e número. Haveria algo que pudesse destruir essa harmonia? De por abaixo essa crença?

10ª ATIVIDADE

Suponha que os segmentos de retas KL e PJ abaixo representem dois trechos de uma mesma estrada.

Esses segmentos devem receber placas de sinalização, em toda a sua extensão, de modo que:

1) as distâncias entre as placas, em ambos os trechos, sejam iguais;

2) as placas, em ambos os trechos, sejam colocadas à maior distância possível uma da outra.

Utilizando apenas um compasso tente determinar, em ambos os segmentos, os pontos onde essas placas devem ser colocadas.

K ———————————————————————————— L

P —————————————————— J

O objetivo das atividades seguintes é fazer com que você aprenda um método para achar um segmento de reta que caiba um número inteiro de vezes em dois segmentos quaisquer dados.

11ª ATIVIDADE

Considere os segmentos MN e PQ abaixo. Utilizando um compasso para transportar segmentos execute os itens seguintes.

M ——————————————————— N

P ——————— Q

a) Extraia o segmento PQ do segmento MN o maior número possível de vezes.

b) Após a subtração anterior existiu alguma sobra?

c) O segmento PQ é divisor do segmento MN? Por quê?

d) O segmento PQ é divisor de si próprio? Por quê?

e) O segmento PQ é *divisor comum* de $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$? Por quê?

f) Poderia existir um segmento maior do que $\overline{PQ}$ que também fosse divisor comum de $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$? Por quê?

g) Qual é o segmento que é o *maior divisor comum* de $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$?

12ª ATIVIDADE

Considere os segmentos EF e GH abaixo. Utilizando um compasso para transportar segmentos execute os itens seguintes.

E ____ F

G ________________ H

a) Extraia o segmento GH do segmento EF o maior número possível de vezes.
b) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra?
c) O segmento GH é divisor do segmento EF? Por quê?
d) Tome no compasso o segmento IF correspondente à sobra encontrada no item a.
e) Extraia o segmento IF do segmento GH o maior número possível de vezes.
f) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra?
g) O segmento IF é divisor do segmento GH? Por quê?
h) O segmento IF é divisor do segmento EF? Por quê?
i) O segmento IF é *divisor comum* de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$? Por quê?
j) Existe um segmento maior do que $\overline{IF}$ que também seja divisor comum de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$? Por quê?
k) Qual é o segmento que é o m.d.c. (maior divisor comum) de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$?

13ª ATIVIDADE

Considere os segmentos AB e CD abaixo. Utilizando um compasso para transportar segmentos execute os itens seguintes.

A ____ B

C ______________________ D

a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes.
b) Após a subtração anterior existiu alguma sobra?
c) O segmento CD é divisor do segmento AB? Por quê?
d) Tome no compasso o segmento EB correspondente à diferença encontrada no item a.
e) Extraia o segmento EB do segmento CD o maior número possível de vezes.
f) Após a subtração anterior existiu alguma sobra?
g) O segmento EB é divisor do segmento CD? Por quê?
h) Tome no compasso o segmento FD correspondente à sobra encontrada no item e.
i) Extraia o segmento FD do segmento EB o maior número possível de vezes.
j) A subtração anterior deixou alguma sobra?
k) O segmento FD é divisor do segmento EB? Por quê?
l) O segmento FD é divisor do segmento CD? Por quê?
m) O segmento FD é divisor do segmento AB? Por quê?
n) O segmento FD é divisor comum dos segmentos AB e CD? Por quê?
o) Existe um segmento maior que $\overline{CD}$ que seja também divisor comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$? Por quê?
p) Qual é o segmento que é o m.d.c. entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?
q) Volte à atividade 29 e resolva o problema da colocação das placas de sinalização nas estradas KL e PJ.

7. O Método das Subtrações Sucessivas

Nas atividades de 11 a 13 você verificou que para encontrar o segmento que seja o maior divisor comum entre dois segmentos dados fazemos o seguinte:

1) Subtraimos o segmento menor do segmento maior o maior número possível de vezes. Caso essa diferença seja zero, isto é, caso o segmento menor caiba um número exato de vezes no maior, então, o m.d.c. entre eles será o segmento menor.

2) Caso a diferença anterior não seja zero, isto é, caso haja sobra, subtraímos o segmento correspondente a essa sobra do segmento menor, o maior número possível de vezes. Caso o segmento correspondente a essa sobra caiba um número exato de vezes no segmento menor, então, o m.d.c. entre os segmentos dados será essa primeira sobra encontrada.

3) Caso isso não se verifique repete-se o processo até encontrar uma diferença zero.

Esse método de determinação do segmento maior divisor comum entre dois segmentos dados, chamado *método das subtrações sucessivas*, já era conhecido e utilizado há muito tempo antes de Cristo.

Esse método também se aplica para a determinação do maior divisor comum entre dois ou mais número naturais.

Sempre que for possível encontrar o maior divisor comum entre dois segmentos, eles serão chamados de SEGMENTOS COMENSURÁVEIS, pois é possível expressar a medida de um deles utilizando o outro como unidade de medida.

14ªATIVIDADE

a) Utilizando o método das subtrações sucessivas e as barrinhas amarela e marrom, mostre geometricamente e aritmeticamente que dois segmentos de reta cujas medidas são 4u e 6u , são comensuráveis. Diga também qual é a medida do maior segmento que cabe exatamente em ambos ao mesmo tempo.

b) Utilizando as barrinhas dourada e amarela, faça o mesmo para mostrar que dois segmentos cujas medidas são 10u e 4u são comensuráveis. Qual é o m.d.c. entre ambos? Qual é a medida do maior quando se usa o menor como unidade?

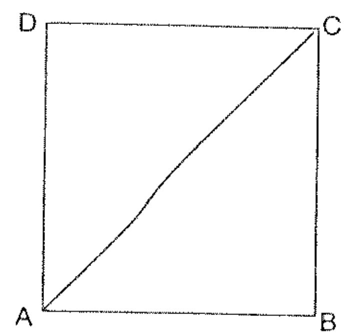
c) Utilizando compasso e calculadora, mostre geometricamente e aritmeticamente que dois segmentos de medidas 2,2u e 1,3u são comensuráveis. Qual é o m.d.c. entre ambos? Qual é a medida do maior quando se usa o menor como unidade? Expresse essa medida em fração e número decimal.

d) Faça o mesmo para mostrar que dois segmentos de reta cujas medidas são $\frac{3}{4}$u e 0,666...u são comensuráveis. Diga qual é o m.d.c. entre ambos. Expresse em fração e em número decimal, a medida do maior desses segmentos, quando se utiliza o menor como unidade.

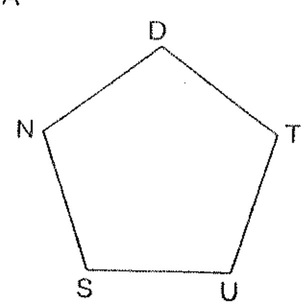
e) Trabalhando com as barrinhas coloridas, dê vários exemplos que mostrem que é verdadeira a seguinte afirmação:

Se a e b são dois segmentos comensuráveis e d um segmento que cabe um número inteiro de vezes em ambos, então, d cabe também um número inteiro de vezes em todos os segmentos obtidos ao se aplicar o método das subtrações sucessivas aos segmentos a e b.

f) Considere o quadrado ABCD ao lado. Você acha que o lado desse quadrado e a sua diagonal AC são segmentos comensuráveis? Por quê?



g) Considere o pentágono regular ao lado. Você acha que o lado desse pentágono e a sua diagonal DS são segmentos comensuráveis? Por quê?



8. A volta da estrela

Ao executar a atividade anterior você sentiu que o método das subtrações sucessivas, pelo menos no seu aspecto aritmético, é bastante eficiente. Mas você notou também que esse método, quando empregado geometricamente, deixa bastante a desejar.

Isso porque, na maioria dos casos, quando a diferença entre os segmentos vai se tornando muito pequena, é muito difícil, senão impossível , tomar esses segmentos no compasso ou na régua.

Mas os gregos antigos não possuíam calculadoras e nem um sistema de numeração que lhes permitisse efetuar cálculos rapidamente. Trabalhavam apenas com uma régua sem escala e um compasso e, por essa razão, aplicavam o método das subtrações sucessivas em sua versão geométrica. Mas mesmo assim chegaram a uma conclusão que, talvez, você também tenha chegado ao executar a atividade anterior: a de que qualquer par de segmentos são sempre comensuráveis. Os pitagóricos também assim pensavam e isso estava de acordo com a crença que tinham de que tudo poderia ser expresso por números.

Mas Hipasus de Metapontum, um pitagórico que dirigiu a escola pitagórica logo após a morte de Pitágoras, por volta de 500 anos a.C., abalou os alicerces dessa escola, quando divulgou entre os gregos a descoberta de SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS.

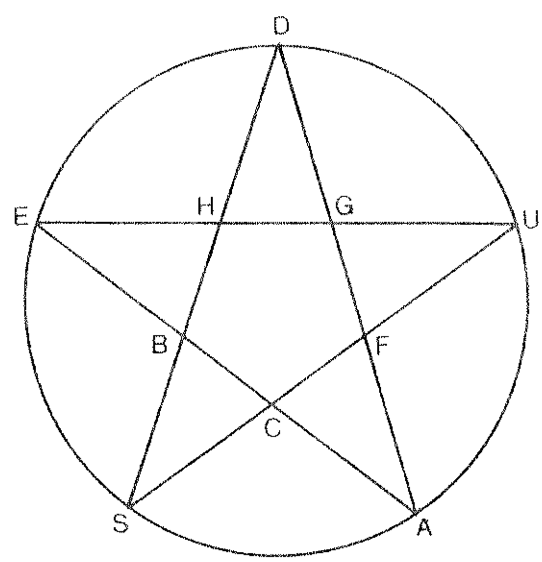
Isso significa que, dados dois segmentos de reta, nem sempre é possível achar um terceiro segmento que caiba um número inteiro de vezes nos dois primeiros.

Você deve estar pensando de que maneira Hipasus teria feito uma tal descoberta, tão chocante! Você quer entender?

Então, já é hora de nossa estrela, que foi abandonada no início deste estudo, voltar a brilhar.

15ªATIVIDADE

Considere a estrela de cinco pontas abaixo, inscrita numa circunferência. Os vértices S, A, U, D, E da estrela foram obtidos, dividindo-se a circunferência em cinco partes iguais.



a) Qual é a medida dos arcos SA, AU, UD, DE, e ES?

b) Utilizando uma régua, trace os segmentos SA, AU, UD, DE e ES. Qual é o nome do polígono obtido?

c) Considere 3 pontos diferentes de uma circunferência. Se um deles for vértice de um ângulo e os lados desse ângulo passarem pelos outros dois pontos, então, o arco situado no interior desse ângulo é chamado arco inscrito nesse ângulo.

1) Nomeie todos os ângulos da figura ao lado nos quais o arco SA está inscrito.

2) O arco SA está inscrito no ângulo ACS? Por quê?

3) Nomeie todos os ângulos da figura nos quais o arco ES está inscrito.

4) Nomeie todos os ângulos da figura nos quais o arco SD está inscrito.

5) Utilizando um transferidor meça todos os ângulos nos quais o arco SA está inscrito. Que relação existe entre a medida de cada um desses ângulos e a medida do arco neles inscrito?

d) Pinte de azul os triângulos SCA, AFU, UGD, DHE e EBS e de vermelho os triângulos SCB, AFC, UGF, DHG e EBH da figura.

e) Sem utilizar transferidor, anote na figura as medidas de todos os ângulos que têm vértice nos pontos S, A, U, D, E, B, C, F, Ge H. Explique como você determinou essas medidas.

f) Explique por que todos os triângulos pintados de azul são isósceles e congruentes.

g) Explique por que todos os triângulos pintados de vermelho são isóceles e congruentes.

h) Explique porque o polígono BCFGH é um pentágono regular, isto é, um pentágono que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

i) trace todas as diagonais do pentágono BCFGH e verifique que uma nova estrela e um novo pentágono se formaram. Explique porque todos os novos triângulos que se formaram são isóceles.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você verifique, utilizando o método das subtrações sucessivas, que o lado DE e a diagonal DS do pentágono SAUDE são segmentos incomensuráveis.

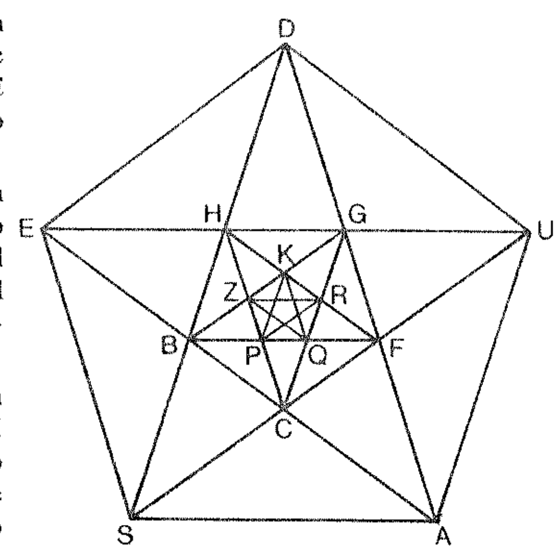
16ª ATIVIDADE

Considere a série de pentágonos e pentagramas da figura seguinte. As afirmações seguintes são todas verdadeiras. Observando a figura tente justificar cada uma delas.

Afirmação 1: A diferença entre as medidas da diagonal DS e do lado DE do pentágono SAUDE é igual à medida da diagonal CH do pentágono HGFCB.

Afirmação 2: A diferença entre as medidas do lado DE do pentágono SAUDE e da diagonal CH do pentágono HGFCB é igual à medida do lado HB do pentágono HGFCB.

Afirmação 3: A diferença entre as medidas da diagonal CH do pentágono HGFCB e do lado HB desse mesmo pentágono é igual à medida da diagonal ZQ do pentágono PQRKZ.



Afirmação 4: Se existir um segmento de medida x que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do pentágono SAUDE, então, x deverá caber um número inteiro de vezes nos lados e nas diagonais de todos os pentágonos da figura e de todos os pentágonos cada vez menores que pudermos imaginar.

Afirmação 5: Mas esse segmento x não existe, isto é, sua medida é zero. Logo, o lado e a diagonal do pentágono SAUDE são segmentos incomensuráveis.

9. A queda de uma crença

O mesmo raciocínio desenvolvido por você nas duas atividades anteriores deve ter sido, provavelmente, utilizado por Hipasus para convencer os seus contemporâneos da existência de segmentos incomensuráveis. Mas essa prova não teve apenas uma importância matemática. Ela teve também conseqüências filosóficas e políticas, pois ela se chocava com a crença pitagórica de que para tudo existia um número. Mas que número haveria para expressar a medida da diagonal de um pentágono quando se usa o seu lado como unidade de medida?

Segundo Hipasus, não haveria número algum! E isso os pitagóricos não poderiam aceitar. Agora, podemos entender a causa do ódio que os pitagóricos sentiram por Hipasus, porque ergueram-lhe um túmulo sem que estivesse morto e porque expulsaram-lhe da escola.

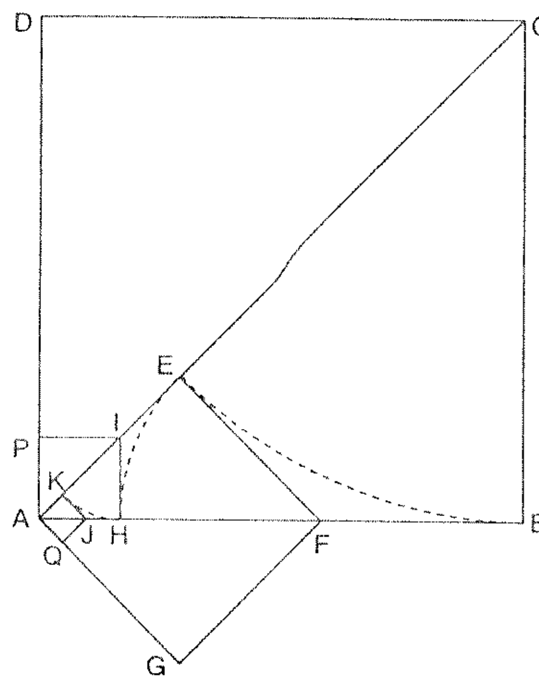
Você deve estar perguntando: mas o que há de mal em se desmentir uma crença? Acontece que essa crença dava sustentação à dominação política exercida pela escola pitagórica. E a queda dessa crença abria a possibilidade das pessoas questionarem essa dominação. O que estava em jogo não era mais a ciência, mas o poder. Um poder do qual os pitagóricos não queriam abrir mão. O caráter aristocrático e fechado da escola pitagórica já havia motivado uma revolta popular na cidade de Crotona na qual parece ter perdido a vida o próprio Pitagóras. Agora já não havia mais nem menos um motivo "científico" para manter essa dominação.

Como disse um matemático da atualidade, "pela primeira vez na história da humanidade, um contra-poder matemático vem desestabilizar um poder que se fundamentava na matemática". É claro que esse contra-poder foi a descoberta de Hipasus.

Mas, como se não bastasse isso, a descoberta de Hipasus iria abalar também aquilo que os pitagóricos julgavam ter sido a sua maior e mais bela descoberta: o Teorema de Pitágoras. Ao executar as atividades seguintes você saberá porque.

17ª ATIVIDADE

O objetivo desta atividade é o de verificar, pelo método das subtrações sucessivas, se o lado BC e a diagonal AC do quadrado ABCD ao lado, são ou não segmentos comensuráveis. O quadrado AEFG, foi construído de tal modo que a medida de seu lado é igual à diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado ABCD. O quadrado AHIP foi construído de tal modo que a medida de seu lado é igual à diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado AEFG. O lado do quadrado AQJK é igual à diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado AHIP.



Diga se cada uma das afirmações seguintes é ou não verdadeira, e justifique suas respostas.

Afirmação 1: A diferença entre as medidas da diagonal AC e do lado BC do quadrado ABCD é igual à medida do lado AE do quadrado AEFG.

Afirmação 2 : A diferença entre as medidas dos lados BC do quadrado ABCD e do lado AE do quadrado AEFG é igual à medida da diagonal AF do quadrado AEFG.

Afirmação 3: $m(\overline{AF}) - m(\overline{EF}) = m(\overline{AH})$

Afirmação 4: $m(\overline{AE}) - m(\overline{HI}) = m(\overline{AK})$

Afirmação 5: Se existir um segmento de medida x que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do quadrado ABCD,então, x deverá caber um número inteiro de vezes nos lados e nas diagonais de todos os quadrados da figura e de todos os quadrados cada vez menores que pudermos imaginar.

Afirmação 6: Mas esse segmento x não existe, isto é, sua medida é zero. Logo, o lado e a diagonal do quadrado ABCD são segmentos incomensuráveis.

18ªATIVIDADE

Considere novamente o quadrado ABCD da atividade anterior.

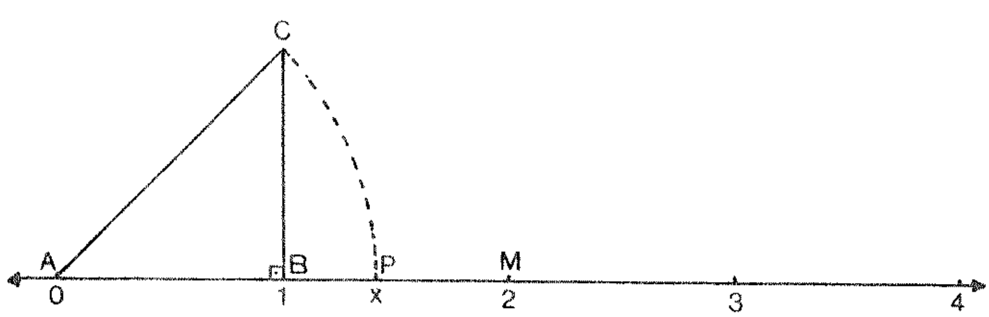
a) Qual é a medida da diagonal desse quadrado, se seu lado mede 1u ?

b) Utilizando uma calculadora, verifique se a resposta que você deu no item anterior verifica o Teorema de Pitágoras. Caso não satisfaça, tente outras respostas e tente levantar alguma explicação para o que está acontecendo.

10. Uma lacuna na reta

Parece que ao executar a atividade anterior você se deparou com um problema sério! Vamos retomá-lo e tentar compreender a natureza dessa dificuldade. Qual é a medida da diagonal AC do quadrado ABCD cujo lado mede 1u ? Ou, o que dá no mesmo: qual é a medida da hipotenusa AC do triângulo retângulo isósceles ABC, cujos catetos medem 1u?

É claro que não podemos duvidar da existência de um tal triângulo, uma vez que podemos construí-lo com régua e compasso. E se esse triângulo existe, deve também existir algum número que represente a medida da hipotenusa AC. Mas, que número é esse? Vamos chamá-lo de x. Utilizando um compasso, podemos transportar a medida da hipotenusa AC para a reta numérica como mostra a figura abaixo:



Percebemos então, que o número x, que expressa a medida da hipotenusa, corresponde ao ponto P da reta numérica. O número x, portanto, deve ser maior que 1 e menor que 2. Ou melhor, deverá ser maior que 1 e menor que 1,5 pois P está situado à esquerda do ponto médio do segmento BM. A partir daí, não podemos mais dizer com certeza qual é o valor de x, pois existem infinitos números racionais (sob a forma de fração ou de número decimal) situados entre 1 e 1,5. Entretanto, como o triângulo ABC é retângulo, podemos calcular o valor de x através do Teorema de Pitágoras.

Então, $x^2 = 1^2 + 1^2$. Portanto, $x^2 = 2$.

Como determinar o valor de x nessa equação?

Basta perguntar qual é o número que multiplicado por si mesmo produz 2. E aí, a dificuldade geométrica se transforma numa dificuldade aritmética.

Já sabemos que $1 < x < 1,5$.

Como 1,4 está entre 1 e 1,5, suponhamos que $x = 1,4$.

Como $1,4 \cdot 1,4 = 1,96$, então, x deve ser maior que 1,4 e menor que 1,5. Continuando esse processo de cerco ao número x, chegamos às seguintes conclusões:

1) $x > 1,41$ pois $1,41^2 = 1,9881$

2) $x > 1,414$ pois $1,414^2 = 1,999396$

3) $x > 1,4142$ pois $1,4142^2 = 1,999616$

4) $x > 1,41421$ pois $1,41421^2 = 1,9999899$

5) $x > 1,414213$ pois $1,414213^2 = 1,9999984$

6) $x > 1,4142135$ pois $1,4142135^2 = 1,9999998$

Você deve estar pensando que se continuasse esse processo com máquinas calculadoras mais potentes, talvez até com computadores, chegaríamos à seguinte alternativa: ou o processo teria um final, isto é, conseguiríamos encontrar um número cujo quadrado fosse exatamente 2, ou então, o processo não teria fim. Na primeira hipótese, x seria um número racional finito e na segunda hipótese *x* seria um *número racional periódico*.

Acontece, entretanto, que as mais potentes máquinas de que dispomos atualmente não poderiam chegar a nenhuma dessas duas alternativas. Isso porque, você já provou que *a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis*. Essa afirmação geométrica equivale à seguinte afirmação algébrica: *não existe número racional algum que satisfaça a equação* $x^2 = 2$. Isso significa que mesmo que uma máquina possuísse infinitos dígitos (o que seria impossível) jamais chegaria a um número cujo quadrado fosse exatamente 2.

Essa foi uma outra conseqüência terrível da descoberta de Hipasus. Isso porque, a linha reta numerada para os gregos antigos, e também para os pitagóricos, era *contínua*. Isso significava para eles que era possível subdividir os intervalos entre os números inteiros em um número qualquer de partes iguais e sempre existia um número fracionário (ou a razão entre dois inteiros) em correspondência com cada um desses pontos de subdivisão. Mas que número fracionário poderia estar em correspondência com o ponto P da figura anterior? Nenhum. Havia um "buraco" na reta. A reta não seria mais contínua?

11. A reação silenciosa: aliança entre os homens?

Ao fazer as atividades anteriores, você deve ter sentido o mal estar causado pela descoberta de Hipasus entre os pitagóricos.

Ela não apenas desmentia a crença de que para tudo existia um número, como também parecia gerar uma série de questões aparentemente contraditórias.

Se os segmentos incomensuráveis realmente existem, então, será que devemos aceitar tranqüilamente que a medida de certos segmentos não possam ser expressos através de números?

Mas isso não parece absurdo, já que é possível construir, ver e medir aproximadamente a diagonal de um quadrado e a diagonal de um pentágono?

Mas, por outro lado, porque qualquer valor numérico que se atribua à diagonal de um quadrado, ele nunca satisfaz o Teorema de Pitágoras?

O Teorema de Pitágoras seria realmente verdadeiro?

Mas ele já não havia sido provado anteriormente?

Diante dessas conseqüências, não seria de se estranhar que a primeira reação dos pitagóricos diante do fenômeno da incomensurabilidade fosse a de esconder o caso. Onde só havia a ganhar com o debate público, os pitagóricos instituíram como norma, pelo contrário, o segredo e o silêncio.

Mas esse silêncio não durou muito tempo. A partir de então, vários ataques foram feitos às crenças pitagóricas, seus membros se dividiram e a escola caiu no descrédito. E que ironia!

Tudo por causa de uma simples estrela, que era o emblema da escola e simbolizava nada menos que a ALIANÇA ENTRE OS HOMENS.

Mas não bastava fazer críticas às crenças pitagóricas. Era preciso também explicar as causas das contradições geradas pelos conhecimentos que eles produziram.

Os gregos conseguiram fazer isso?

12. A solução de Dedekind

Não. Os gregos não conseguiram explicar as contradições geradas pelo fenômeno da incomensurabilidade. Procuraram conviver com elas. Simplesmente aceitaram o fato de não existir número algum para expressar a medida de certos segmentos. Criaram o termo "rhetos" (que significa racional) para os pares de segmentos comensuráveis e o termo "arrhetos" (não-racional ou irracional) para os pares de segmentos incomensuráveis. E como os números racionais não davam conta de expressar as medidas de todas as grandezas que podiam ser construídas com régua e compasso, acabaram optando pela conclusão de que o domínio das figuras, isto é, a geometria, era muito mais amplo e rico que o domínio dos números, isto é, que a aritmética. Acabaram separando esses dois ramos da matemática e desenvolveram o estudo das grandezas incomensuráveis apenas no domínio geométrico.

O grandioso e promissor ideal pitagórico de que tudo poderia ser expresso por números foi abandonado.

Mas você não deve pensar que essa opção tomada pelos gregos fosse a única possível. Ela tem uma explicação histórica. É que o "clima" político da cidade de Atenas por volta de meados do século V a.C. acabou sendo mortal para o desenvolvimento da ciência. Atenas, que tinha sido metrópole da arte, da filosofia e da ciência gregas, acaba optando pelo caminho do imperialismo, isto é, pelo desejo de expandir-se através da dominação de outras cidades gregas e de outros povos. O clima cultural, antes intenso, acaba sendo substituído por preocupações de origem militar e cívica. A matemática, a partir de então, não teria mais o aspecto crítico de tempos anteriores. Uma prova de que a opção dos gregos não era a única possível, foi que o ideal pitagórico deveria renascer 20 séculos depois, na cabeça de um grande sábio italiano Galileu Galilei que disse: "o livro da natureza está escrito em linguagem matemática e sem o auxílio desta linguagem, é impossível compreender uma só palavra".

Uma outra prova de que essa opção não era única e nem mesmo necessária foi dada pelo matemático alemão, Richard Dedekind em um ensaio denominado "Continuidade e Números Irracionais", aparecido em 1872. Vejam bem, apenas no século XIX!

Neste ensaio, Dedekind observa que:

1) Existem mais pontos na linha reta do que números racionais;

2) Então, o conjunto dos números racionais não é adequado para explicarmos aritmeticamente a continuidade da reta;

3) Logo, é absolutamente necessário criar novos números para que o domínio numérico seja tão completo quanto a reta, isto é, para que possua a mesma continuidade da reta.

A partir dessas observações, Dedekind diz:

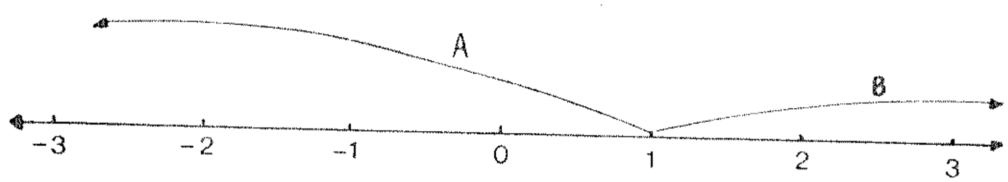
"Por muito tempo pensei em vão sobre isso, mas finalmente achei o que buscava. Consiste no seguinte: se todos os pontos de uma reta são divididos em duas classes, de modo que qualquer ponto da primeira fique à esquerda de qualquer ponto da segunda classe, então, existe um e apenas um ponto que separa os pontos em duas classes.

Não creio estar enganado em pensar que todos aceitarão imediatamente a verdade dessa afirmação. Além disso, a maioria de meus leitores ficará desapontada ao saber que através dessa observação banal será revelado o segredo da continuidade. Fico satisfeito por todos acharem o princípio acima óbvio, pois sou totalmente incapaz de dar qualquer prova de que ele é correto, nem creio que alguém tenha esse poder."

(Caraça, B.J. – 1978a, p.60)

Como foi visto, para que o domínio dos números seja tão completo quanto o de pontos da reta é preciso que a cada corte da reta corresponda sempre um único número.

Exemplo 1: Considere um corte (A, B) na reta numérica racional de modo que à classe A pertençam todos os números racionais menores ou iguais a 1 a à classe B, todos os racionais maiores que 1.



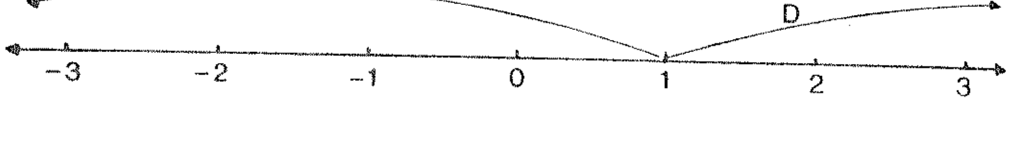
(A, B) define um corte pois separa todos os números racionais em duas classes de modo que não há nenhum número racional que pertença ao mesmo tempo a ambas as classes. Observe que 1 (o elemento de separação entre as classes A e B)pertence à classe A mas não pertence à classe B.

Neste caso, dizemos que (A, B) define o *numero real 1*, que é também um *número racional*.

Exemplo 2: Considere um corte (C, D) na reta numérica racional de modo que à classe C pertençam todos os racionais menores que 1 e à classe D, todos os racionais maiores ou iguais a 1.

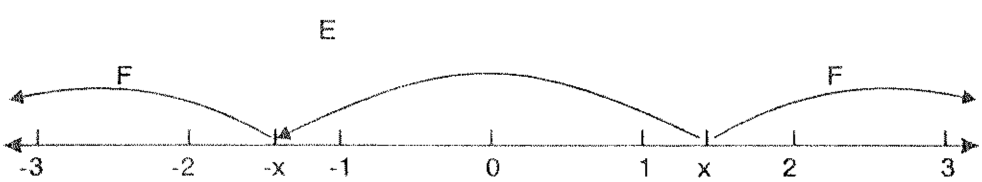
(A, B) define um corte sobre Q. Observe que agora, 1 (o elemento de separação entre as classes A e B) pertence à classe D mas não à classe C.

Neste caso, dizemos que (C, D) também define o número real 1.



Exemplo 3: Considere um corte (E, F) na reta numérica racional de modo que à classe E pertençam todos os números racionais cujo quadrado é menor que 2 e à classe F, todos os racionais cujo quadrado é maior que 2.

Observe que (E, F) define um corte sobre Q, pois qualquer número racional, ou pertence à classe E ou pertence à classe F. Além disso, não existe nenhum racional que pertença a ambas as classes ao mesmo tempo.



Observe também que x (o elemento de separação entre as classes E e F) não pertence nem à classe E, nem à classe F. Então, x não é um número racional. Ele será um *número real irracional.*

Observe que o que faz Dedekind não é nada mais do que *ampliar o domínio numérico* que era conhecido pelos gregos (o domínio dos números racionais), juntando aos números racionais uma nova categoria de números — os números irracionais —que vêm preencher os "buracos" cuja existência os gregos já haviam constatado. Ao conjunto dos números racionais e irracionais, Dedekind dá o nome de conjunto dos números reais e à reta contendo os racionais e irracionais de reta numerada real.

É costume escrever o número x, definido pelo corte (E, F) acima da seguinte maneira: $\sqrt{2}$, o que se lê assim : raiz quadrada de 2. O sinal $\sqrt{\ }$ lê-se *radical* e o 2 é o *radicando.*

Agora, é possível afirmar que a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário é $\sqrt{2}u$, ou então, que o número que satisfaz à equação $x^2 = 2$ é $x = \sqrt{2}$.

Logo, o número cujo quadrado é 2 é o número irracional $\sqrt{2}$. Então,podemos escrever: $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Observe que, se para definir um número racional $\frac{a}{b}$ precisamos utilizar dois números naturais a e b, agora, para definir um número real, precisamos utilizar duas classes com infinitos números racionais.

Costuma-se indicar pela letra R o conjunto de todos os números reais.

19ª ATIVIDADE

Para cada número real a seguir, faça o seguinte:

1) diga entre quais números inteiros consecutivos ele se encontra;

2) utilizando uma calculadora, verifique se as respostas dadas ao item 1 estão corretas;

3) caracterize-o através de um corte sobre o conjunto dos números racionais;

4) diga se ele é um número real racional ou irracional.

a) $\sqrt{3}$	b) $\sqrt{10}$	c) $\sqrt{87}$	d) $\sqrt{2,5}$	e) $\sqrt{9/10}$
f) $\sqrt{1000}$	g) $\sqrt{1650}$	h) $\sqrt{100}$	i) $\sqrt{25/49}$	j) $\sqrt{450}$

20ª ATIVIDADE

Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o que se pede em cada item seguinte. Sempre que a resposta for um número irracional, expresse-o através de um radical. Utilizando uma calculadora, e sem acionar a tecla " $\sqrt{x}$ ", dê uma aproximação racional até a casa dos décimos para cada um desses números irracionais.

a) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1cm e 2cm?

b) Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo lado mede 2cm?

c) Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos lados perpendiculares medem 2cm e 3cm?

d) Quanto mede a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4cm?

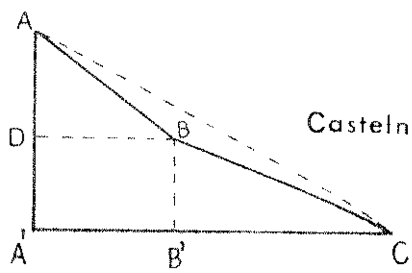
e) Calcule o perímetro de um losango cujas diagonais medem 10 cm e 24 cm.

f) Um teleférico transporta vagões carregados de pedra, desde uma mina situada em uma localidade A, a 2100m de altitude, até uma localidade b a 1500m de altitude (veja figura a seguir). O teleférico foi prolongado em um ramo BC, para poder transportar material a uma fábrica C, situada a 1000m de altitude. Os ramos AB e AC do teleférico têm inclinações diferentes em relação à horizontal A'C.

Sabendo que a distância horizontal A'C é de 2km e B'C é de 1,2km determine:

1) Os comprimentos dos ramos AB e BC do teleférico.

2) Que quantidade de cabo de aço deveria ser utilizada se as localidades A e C fossem ligadas mediante um único ramo.



Castelnuovo, E. – 1966 – pp.204–05

21ª ATIVIDADE

Utilizando o teorema de Pitágoras, resolva os problemas abaixo:

a) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1cm e $\sqrt{2}$ cm?

b) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1cm e $\sqrt{3}$ cm?

c) Quanto mede a diagonal de um quadrado cuja aresta mede $\sqrt{2}$ cm?

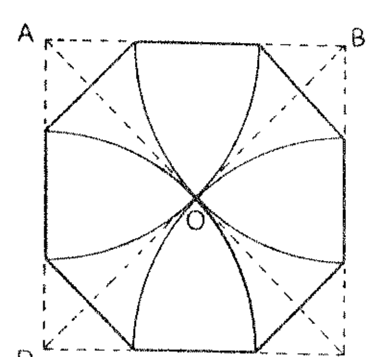
d) Quanto mede a diagonal de um cubo cuja aresta mede 1cm ?

e) Quanto mede a diagonal de um perelelepípedo cujo comprimento é 5 cm, cuja largura é $\sqrt{2}$ cm e cuja altura é 2 cm ?

f) Quanto mede a altura de uma pirâmide reta de base quadrada, sabendo que a aresta da base mede 2 cm e que uma aresta não pertencente à base mede 5 cm.

g) Na prática, para se traçar um octógono regular, por exemplo, para se fazer de um quadrado de madeira um octógono regular que sirva de superfície de uma mesa, procede-se da meneira indicada na figura ao lado.

Com centro em A e raio AO, descreve-se um arco de circunferência. Com centro em B e raio em BO, decreve-se outro arco de circunferência e o mesmo se faz para os vértices C e D. Demonstre que todos os lados do octógono assim obtido são iguais e determine a medida do lado desse octógono, supondo que o lado AB do quadrado mede 60cm.



Castelnuovo, E. 1966 – p.207

h) Divida os lados de um quadrado em 3 partes iguais e ligue os pontos de subdivisão consecutivos de modo a obter um octógono.

1) Demonstre que o octógono assim obtido não é regular.

2) Determine o perímetro desse octógono, supondo que o lado do quadrado meça 12cm.

22ªATIVIDADE

a) Considere o segmento u abaixo. Utilizando esquadro e compasso construa:

u

1) um segmento AB cuja medida seja $\sqrt{2}\,u$.

2) um segmento CD cuja medida seja $\sqrt{3}\,u$.

3) um segmento EF cuja medida seja $\sqrt{4}\,u$.

4) um segmento GH cuja medida seja $\sqrt{5}\,u$.

5) um segmento IJ cuja medida seja $\sqrt{6}\,u$.

6) um segmento KL cuja medida seja $\sqrt{7}\,u$.

7) um segmento MN cuja medida seja $\sqrt{10}\,u$.

b) Utilizando o segmento u como unidade de medida, construa uma reta numérica e transporte nela os pontos correspondentes a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$ e também os pontos correspondentes a $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{4}, -\sqrt{5}, -\sqrt{6}, -\sqrt{7}, -\sqrt{8}, -\sqrt{9}, -\sqrt{10}$.

23ª ATIVIDADE

Coloque V ou F nas afirmações seguintes, conforme sejam elas verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas, com exemplos ou contra-exemplos.

a) ( ) A raiz quadrada de um número natural pode ser um número natural.

b) ( ) A raiz quadrada de um número racional é sempre um número racional.

c) ( ) A raiz quadrada de um número negativo é sempre um número negativo.

d) ( ) A raiz quadrada de um número negativo é sempre um número positivo.

e) ( ) A raiz quadrada de um número real é sempre um número real.

f) ( ) A raiz quadrada de um número real positivo é sempre um número real positivo.

13. O conceito de raiz quadrada

Ao empregar o teorema de Pitágoras na resolução de problemas você sempre acaba determinando a medida x de um segmento desconhecido, através de uma equação do tipo $x^2 = k$, onde k é um número conhecido. Para achar o valor de x, você pergunta : que número elevado ao quadrado produz k? Ou o que dá no mesmo, que número multiplicado por si mesmo produz k? Após a introdução do conceito de número irracional e do símbolo $\sqrt{\ }$, você, talvez tenha acabado identificando as perguntas acima com extrair a raiz quadrada de um número. Daí, se $x^2 = k \Rightarrow x = \sqrt{k}$

Mas essa identificação, na resolução de equações, é apenas parcialmente correta. Vejamos porque.

Considere a equação $x^2 = 4$. É claro que tanto 2 quanto — 2 são soluções dessa equação.

Da mesma forma, na equação $x^2 = 2$, tanto $\sqrt{2}$ quanto $-\sqrt{2}$ são soluções da mesma.

Este detalhe, talvez tenha passado despercebido porque os problemas que você resolveu eram problemas geométricos e não tem sentido dar respostas negativas para medidas de segmentos. Então, o correto seria escrever:

se $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$
se $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm 1{,}4142...$
Logo, se $x^2 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$

Entretanto, não seria correto afirmar que $\sqrt{4} = \pm 2$ ou que $\sqrt{2} = \pm 1{,}4142...$

Isso porque, se quisermos encarar a radicação como uma nova operação sobre um conjunto numérico, o resultado dessa operação, isto é, a raiz, deve sempre *ser um único número desse conjunto numérico.*

Feitos esses esclarecimentos, podemos definir raiz quadrada.

Chamamos de raiz quadrada de um número a, real e positivo, ao número real e positivo b que elevado ao quadrado produz o número a, isto é, $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$.

24ª ATIVIDADE

Ao tentar extrair as raízes quadradas dos números racionais abaixo, você notará que algumas são racionais, outras irracionais e outras inexistentes.

Quando elas forem racionais, escreva o seu valor, quando forem irracionais, dê sua aproximação racional por falta até a casa dos décimos e quando forem inexistentes, escreva $\notin \mathbb{R}$, isto é, não pertence ao conjunto dos números reais.

1) $\sqrt{1}$	2) $\sqrt{-1}$	3) $\sqrt{0}$
4) $\sqrt{4}$	5) $\sqrt{9}$	6) $\sqrt{-4}$
7) $\sqrt{16}$	8) $\sqrt{25}$	9) $\sqrt{100}$
10) $\sqrt{125}$	11) $\sqrt{4/81}$	12 $\sqrt{49/64}$
13) $\sqrt{32}$	14) $\sqrt{36}$	15) $\sqrt{-17}$
16) $\sqrt{1/4}$	17) $\sqrt{-1/4}$	18) $\sqrt{22}$
19)$\sqrt{38}$	20) $\sqrt{0{,}01}$	21) $\sqrt{144}$
22) $\sqrt{1{,}69}$	23) $\sqrt{904}$	24) $\sqrt{6{,}4}$
25) $\sqrt{1{,}21}$	26) $\sqrt{6{,}4}$	27) $\sqrt{0{,}36}$
28) $\sqrt{0{,}1}$	29) $\sqrt{9{,}6}$	30) $\sqrt{-49}$

14. A lenda do Apolo hiperbóreo

Para darmos continuidade ao nosso estudo, vamos retornar à Grécia antiga. Vamos entrar na cidade de Delfos, situada numa região montanhosa, no fundo de uma garganta sombria. Era este o lugar mais santo de toda a Grécia. Diziam os poetas que Júpiter — o pai de todos os deuses — querendo conhecer o centro da terra, fizera partir do nascente e do poente, duas águias que acabaram se encontrando em Delfos.

Homens, mulheres e crianças vinham de longe para aí saudarem Apolo — o deus da luz.

Para a religião do orfismo, Dionísio e Apolo eram revelações diferentes de um mesmo deus. Dionísio representava a verdade mística e Apolo personificava a mesma verdade, aplicada à vida terrestre e à ordem social.

Inspirador da poesia, da medicina e das leis, ele era a ciência que se atingia por meio da adivinhação, a beleza que se atingia pela arte, a paz que se atingia pela justiça e a harmonia da alma e do corpo que se atingia pela purificação.

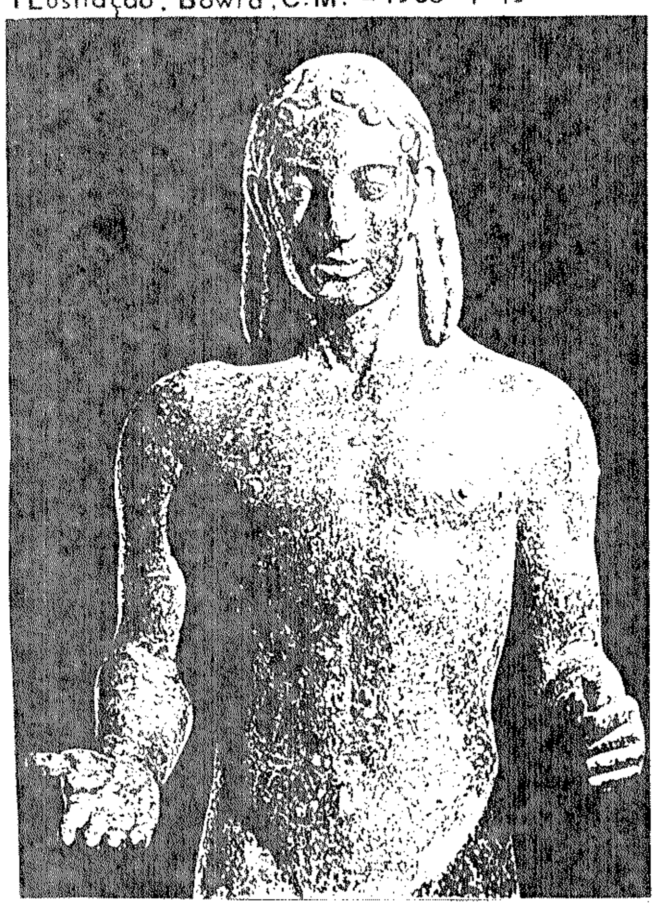
A foto da página seguinte, é o deus Apolo, uma estátua fundida em bronze há 2400 anos, que perdeu-se 400 anos depois e foi redescoberta em 1959.

Os sacerdotes da época procuravam fazer o povo compreender tudo o que esse deus representava, através de uma lenda. Segundo essa lenda, a cidade de Delfos estava mergulhada em trevas. Isso porque uma mostruosa serpente habitava essa região. Apolo surge da noite de Delfos. Todas as deusas saúdam o seu nascimento. Ele caminha, pega seu arco e sua lira. Seus cabelos agitam-se no ar. O mar agita-se e toda ilha resplandece num banho de esplendores e de ouro. É a presença da luz divina que cria a ordem e a harmonia.

Apolo atinge com suas flechas a mostruosa serpente, saneia o país e funda um templo, que representa a imagem dessa luz divina sobre as trevas e sobre o mal.

Nas antigas religiões, a serpente representava, ao mesmo tempo o círculo fatal da vida e o mal que dele resulta.

ILustração: Bowra, C.M. - 1983 - p.19



Entretanto, é da compreensão e da dominação dessa vida que se pode obter o conhecimento e a sabedoria.

Apolo, matador da serpente, é o símbolo do aprendiz, que aprende a dominar a natureza através da ciência. Por essa razão, é também o deus do intelecto, o educador dos homens e sente prazer em estar na companhia deles.

Mas, continua a lenda, quando chega o outono, Apolo regressa à sua pátria, isto é, ao país dos hiperbóreos. Esse é o povo misterioso que habita o país das almas luminosas e transparentes, que vivem na eterna aurora de uma felicidade perfeita. Todas as primaveras Apolo regressa a Delfos. Mas só é visível aos iniciados, isto é, às pessoas que já possuem algum conhecimento. Na sua brancura hiperbórea, surge Apolo sobre um carro, puxado por dois cisnes melodiosos. Vem habitar o seu templo, onde há um altar de forma cúbica, onde uma sacerdotisa transmite as respostas e os conselhos desse deus aos anseios e aflições do povo. É justamente a forma cúbica do altar de Apolo que tem a ver com a continuidade de nosso estudo.

25ª ATIVIDADE

Utilizando cubinhos iguais como unidade de volume, responda:

a) É possível construir um cubo utilizando exatamente 8 desses cubinhos? Em caso afirmativo, diga qual é o volume e qual é a medida da aresta desse cubo.

b) É possível construir um cubo utilizando exatamente 27 desses cubinhos? Em caso afirmativo, diga qual é o volume e qual é a medida da aresta desse cubo.

c) Quantos cubinhos são necessários para se construir um cubo cuja aresta meça 4 unidades?

d) Quanto mede a aresta de um cubo cuja construção foi feita com 1000 cubinhos?

e) É possível construir um cubo utilizando 2 desses cubinhos, não sendo permitida a subdivisão desses cubinhos em partes? Em caso afirmativo, diga quanto mede a aresta desse cubo?

f) É possível construir um cubo de papel que ocupe exatamente o mesmo volume que 2 desses cubinhos? Em caso afirmativo, diga quanto deve medir a aresta desse cubo e como poderá ser construído.

15. Com a peste... novos irracionais

Provavelmente, ao tentar responder o último item da atividade anterior, você chegou à conclusão de que não é possível construir com papel, um cubo que ocupe um volume de 2 unidades. Felizmente, você não é nem foi a única pessoa a pensar assim. Um problema semelhante a esse na Grécia antiga, muitos anos antes de Cristo, permaneceu insolúvel por muitos séculos na história da humanidade. Apenas no século XIX foi dada uma resposta satisfatória a esse problema.

Este problema talvez tenha se originado da profunda impressão causada pela morte de Péricles, um dos grandes estadistas gregos.

A foto seguinte é de Péricles, primeiro cidadão de Atenas, austero, aristocrata, soldado e estadista, mostrado com seu capacete de guerra. Péricles dominou os negócios da cidade de Atenas, de 460 a 429 a.C.

ILustração: Bowra, C.M. - 1983 - p.105

Péricles foi vítima de uma peste que matou aproximadamente 1/4 da população de Atenas. Diz a lenda que um conjunto de pessoas foi enviada ao templo de Apolo hiperbóreo para perguntar como a peste poderia ser combatida. A resposta foi que o altar de Apolo, que era de forma cúbica, deveria ser duplicado. Os atenienses, obedientemente, dobraram as arestas do altar, mas isso não adiantou para afastar a peste.

Mas é claro que, ao procederem daquela maneira, eles acabaram multiplicando o volume do altar por 8 e não por 2.

Mas porque razão esse problema permaneceu insolúvel por tanto tempo?

Vamos chamar de x a aresta do cubo cujo volume deve ser 2 unidades. Então, poderemos escrever: $x^3 = 2$. O mesmo problema ficou reduzido ao seguinte: qual é o número que elevado ao cubo produz 2? É claro que esse número não pode ser natural, mas deve estar compreendido entre 1 e 2, pois se x= 1, então, $x^3 = 1$ e se x= 2, então, $x^3 = 8$.

Para x= 1,5 temos $x^3 = 3{,}375 > 2$

Para x= 1,2 temos $x^3 = 1{,}728 < 2$

Para x= 1,3 temos $x^3 = 2{,}197 > 2$

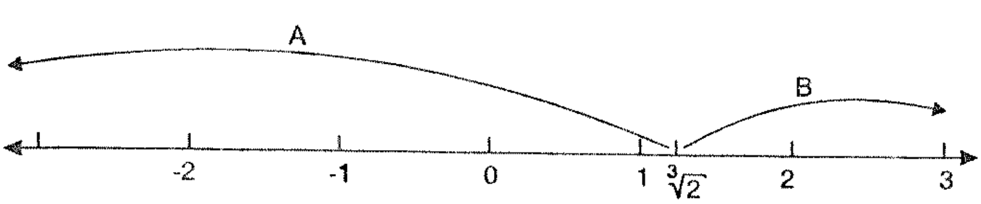
Então, x deverá estar compreendido entre 1,2 e 1,3.

Note que o processo acima é parecido com aquele empregado na busca da diagonal de um quadrado de lado unitário, lembra-se?

Você poderia então perguntar: terá essa busca um limite ou x deverá ser também um número irracional?

Não deu outra. O número x, que representa a medida da aresta do cubo procurado, é realmente um número irracional. Foi esta a razão do problema ter permanecido insolúvel por tanto tempo.

Esse número irracional poderia ser caracterizado por um corte (A, B) sobre o conjunto dos números racionais de modo que à classe A pertençam todos os números racionais cujo cubo seja menor que 2 e à classe B pertençam todos os racionais cujo cubo seja maior que 2.



Na forma de radical esse número é indicado assim: $\sqrt[3]{2}$ e lê-se raiz cúbica de 2.

É claro que esse número poderia ser indicado na forma de decimal infinito e não-periódico: $\sqrt[3]{2} \cong 1{,}259$ (aproximação por falta) onde 2 é o radicando; 3 o índice do radical e 1,259 a raiz aproximada.

Logo, $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$. Mas $(1{,}259)^3 \neq 2$, pois 1,259 é apenas uma aproximação da raiz cúbica de 2. Mas, é possível construir um cubo, cujas arestas meçam $\sqrt[3]{2}$? Devemos voltar brevemente a esta questão.

16. Raízes cúbicas, quartas, ... n-ésimas

Como você observou, a solução do problema de Delfos nos conduziu a um número irracional com índice diferente de 2, isto é, conduziu-nos à extração de uma *raiz cúbica* e não a uma raiz quadrada. Na história da humanidade, outros problemas surgiram que colocaram aos homens a necessidade de se extrair raízes com *índice superior a 2*. Daí, a necessidade de se ampliar a operação de radiciação e de podermos falar de extração de raízes cúbicas, quartas, quintas, ..., raízes n-ésimas (de índice n qualquer).

Mas qual o significado que devemos atribuir a tais raízes?

Exemplo 1: Calcular a raiz cúbica de 27 é o mesmo que responder: Qual é o número que elevado ao cubo produz 27 ? Logo, $\sqrt[3]{27} = 3$ pois $3^3 = 27$.

Exemplo 2 : Calcular a raiz quarta de 16 equivale a responder: qual é o número que elevado à quarta potência produz 16 ? Logo, $\sqrt[4]{16} = 2$ pois $2^4 = 16$.

Exemplo 3: Calcular a raiz quinta de -32 equivale a responder: qual é o número elevado à quinta potência produz -32 ? Logo, $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$.

Exemplo 4: Calcular a raiz cúbica de 5 equivale a responder: qual é o número que elevado ao cubo produz 5 ? Neste caso, a raiz deverá ser um número irracional, pois 5 não é um cubo perfeito. Só podemos atribuir a ela um valor racional aproximado. Logo, $\sqrt[3]{5} \cong 1{,}709$ (aproximação por falta)

26ª ATIVIDADE

Ao tentar extrair as raízes dos números racionais seguintes, você notará que algumas são racionais, outras irracionais e outras são inexistentes.

Quando elas forem racionais, escreva o seu valor, quando forem irracionais, dê sua aproximação racional por falta até a casa dos décimos, e quando forem inexistentes, escreva $\notin R$, isto é, não pertence ao conjunto dos números reais.

1) $\sqrt[3]{0}$	2) $\sqrt[4]{0}$	3) $\sqrt[3]{0}$
4) $\sqrt[100]{0}$	5) $\sqrt[3]{1}$	6) $\sqrt[4]{1}$
7) $\sqrt[100]{1}$	8) $\sqrt[3]{-1}$	9) $\sqrt[4]{-1}$
10) $\sqrt[5]{-1}$	11) $\sqrt[37]{-1}$	12) $\sqrt[50]{-1}$
13) $\sqrt[3]{64}$	14) $\sqrt[3]{-64}$	15) $\sqrt[4]{81}$
16) $\sqrt[3]{1000}$	17) $\sqrt[3]{100}$	18) $\sqrt[4]{-16}$
19) $\sqrt[3]{-8}$	20) $\sqrt[5]{32}$	21) $\sqrt[5]{30}$
22) $\sqrt[3]{50}$	23) $\sqrt[3]{8/27}$	24) $\sqrt[4]{16/81}$
25) $\sqrt[4]{-16/81}$	26) $\sqrt[3]{0{,}001}$	27) $\sqrt[3]{-0{,}008}$
28) $\sqrt[3]{2{,}7}$	29) $\sqrt[3]{7}$	30) $\sqrt[3]{10}$

27ª ATIVIDADE

a) Explique por que razão não se pode atribuir significado a:

1) radicais cujo índice seja zero
2) radicais cujo índice seja 1
3) radicais cujo índice seja um número inteiro negativo
4) radicais de índice par e radicando negativo

b) Explique que restrições devemos impor aos números n, p e q, para que a igualdade $\sqrt[n]{p} = q$ tenha significado.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você perceba que é possível obter uma regra prática para se transformar duas potenciações simultâneas de uma certa base, numa única potenciação desta mesma base.

28ª ATIVIDADE

Transforme cada potenciação simultânea seguinte numa multiplicação de potenciações. Em seguida, transforme essa multiplicação de potenciações numa única potenciação cuja base seja igual às bases dos fatores.

a) $(2^2)^2$ b) $(3^4)^3$

c) $(3^2)^2$ d) $[(-2)^3]^5$

e) $(2^2)^3$ f) $[(\frac{1}{2})^2]^3$

g) $(2^3)^2$ h) $(4^3)^3$

i) $(10^3)^2$ j) $[(\frac{2}{3})^2]^5$

k) $(10^4)^2$ l) $[(0{,}4)^2]^2$

29ª ATIVIDADE

a) Com base na atividade anterior, enuncie a regra prática para se transformar duas potenciações simultâneas de uma certa base, numa única potenciação desta mesma base.

b) Aplicando a regra enunciada no item a desta atividade, transforme cada potenciação simultânea a seguir, numa única potenciação cuja base seja igual à base da potenciação indicada nos parênteses:

1) $(5^2)^5$ 2) $[(-5)^7]^4$

3) $(3^7)^2$ 4) $[(-7)^7]^3$

5) $(5^{10})^{10}$ 6) $[(-\frac{2}{5})^7]^8$

7) $(10^3)^{10}$ 8) $[(\frac{1}{3})^9]^9$

c) Determine o valor de x em cada potenciação simultânea seguinte:

1) $(3^2)^x = 3^{16}$ 2) $[(\frac{1}{3})^9]^x = (\frac{1}{3})^{243}$

3) $(5^x)^7 = 5^{14}$ 4) $(2^x)^1 = 2^0$

5) $(10^x)^{10} = 10^{100}$ 6) $(2^x)^1 = 2$

7) $(3^x)^3 = 3^{30}$ 8) $(2^x)^2 = 2$

17. Formas de representação de um número irracional

Ao tentar resolver o último item da atividade anterior, você, talvez, tenha sentido alguma dificuldade. A razão disto se deve ao fato de que, até o momento, o expoente de uma base sempre ter sido um número inteiro. Entretanto, isto não é uma necessidade. É claro que na igualdade $(2^x)^2 = 2$, não existe para x número natural algum que possa torná-la verdadeira. Poderiamos, entretanto, substituir x pelo número racional $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

Isto porque, $\frac{1}{2} . 2 = 1$ ou então $0{,}5 . 2 = 1$, o que torna a igualdade verdadeira.

Logo, $(2^{1/2})^2 = 2$ ou $(2^{0,5})^2 = 2$

Qual é a importância deste fato?

É que, tendo consciência dele, você conseguirá perceber a existência de uma nova forma de representar números irracionais, isto é, de representá-los através de potenciações cujos expoentes são números fracionários.

Exemplo 1: Como $(2^{1/2})^2 = 2$ e $(\sqrt{2})^2 = 2$, então, $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

Mas como existem infinitas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, todas iguais ao número decimal 0,5, então, podemos escrever:

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} = 2^{2/4} = 2^{3/6} = 2^{4/8} = 2^{5/10} = \ldots = 2^{0,5} = 1,414235\ldots$$

Exemplo 2 : Como $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ $(2^{1/3})^3 = 2$, então $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$. Mas como existem infinitas frações equivalentes a 1/3, todas iguais ao número decimal periódico 0,333 ..., então, podemos escrever :

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = 2^{3/9} = 2^{4/12} = 2^{5/15} = \ldots = 2^{0,33\ldots} = 1,259\ldots$$

30ªATIVIDADE

a) Escreva cada radical seguinte de duas maneiras: como uma potenciação de expoente fracionário irredutível e como uma potenciação de expoente decimal.

1) $\sqrt{7}$	2) $\sqrt{9}$	3) $\sqrt[3]{11}$
4) $\sqrt[3]{5}$	5) $\sqrt[4]{9}$	6) $\sqrt[7]{3,5}$
7) $\sqrt{3/5}$	8) $\sqrt[3]{-2/7}$	9) $\sqrt{3^3}$

10) $\sqrt[3]{2^2}$ 11) $\sqrt[3]{2^5}$ 12) $\sqrt[5]{7^3}$

13) $\sqrt{0,8^3}$ 14) $\sqrt{(3/8)^7}$ 15) $\sqrt[6]{(1/5)^2}$

16) $\sqrt[6]{10^8}$ 17) $\sqrt[8]{10^6}$ 18) $\sqrt[20]{(6/7)^{10}}$

19) $\sqrt{2^2}$ 20) $\sqrt[3]{2^3}$ 21) $\sqrt[4]{2^4}$

22) $\sqrt{5^2}$ 23) $\sqrt[10]{7^{10}}$ 24) $\sqrt[7]{(3/10)^7}$

b) Escreva na forma de radical as seguintes potências de expoentes fracionários.

1) $6^{1/2}$ 2) $15^{1/3}$ 3) $20^{1/4}$

4) $(-7)^{1/5}$ 5) $2^{1/50}$ 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}$

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$ 8) $(2,9)^{1/7}$ 9) $2^{0,1}$

10) $3^{2/3}$ 11) $2^{5/2}$ 12) $5^{3/5}$

13) $3^{0,7}$ 14) $7^{1,2}$ 15) $6^{2,4}$

16) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3,2}$ 17) $\left(\frac{2}{5}\right)^{0,333...}$ 18) $10^{0,6}$

19) $10^{0,666...}$ 20) $2^{1,5}$ 21) $2^{1,555...}$

22) $2^{6/3}$ 23) $3^{8/4}$ 24) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10/5}$

31ª ATIVIDADE

Determine o valor de x nas igualdades seguintes:

a) $2^{1/2} = 2^{x/8}$ b) $2^{3/4} = 2^{9/x}$ c) $5^{1/3} = 5^{x/30}$

d) $\sqrt{3} = \sqrt[x]{3^2}$ e) $\sqrt{5} = \sqrt[x]{5^8}$ f) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[x]{2^3}$

g) $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[x]{3}$ h) $\sqrt[20]{5^2} = \sqrt[10]{5^x}$ i) $\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^x}$

32ª ATIVIDADE

Sabendo que a regra prática para a determinação de potenciações simultâneas é válida também para expoentes racionais transforme cada potenciação simultânea seguinte, numa única potenciação cuja base seja igual à base da potenciação indicada nos parentêses. Em seguida, expresse cada resultado na forma de radical.

a) $(2^{1/2})^{1/2}$ b) $(3^{1/2})^{1/5}$

c) $(2^{2/3})^{1/7}$ d) $[(2^{1/5})]^{2/3}$

18. Radiciações simultâneas

Toda vez que desejamos extrair raízes de raízes estamos em presença de radiciações simultâneas.

Exemplo 1 : Determine a raiz quadrada da raíz quadrada de 2.

temos: $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{1/2}} = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{1/2} = \sqrt[4]{2}$

Exemplo 2 : Determine a raíz cúbica da raíz quadrada de 2.

temos: $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{1/2}} = (2^{1/2})^{1/3} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{\sqrt{2}}$

33ª ATIVIDADE

Encontre um único radical para expressar o resultado das seguintes radiciações simultâneas:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{2}}$ b) $\sqrt{\sqrt{10}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{5}}$ e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{7}}}$

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você aprenda um processo para construir, com régua e compasso, segmentos de reta cujas medidas sejam expressas por radicais cujos índices são potências de base 2.

34ª ATIVIDADE

Considere o segmento abaixo como unidade de medida.

u

a) Trace um segmento de reta AB cuja medida seja igual a 1u.

b) A partir do ponto B trace um segmento de reta BC, que esteja situado no prolongamento de $\overline{AB}$ no sentido de A para B, e cuja medida seja igual a 2u.

c) Determine o ponto médio M do segmento de reta AC.

d) Com centro no ponto M trace uma semi-circunferência cujo raio seja igual a $\overline{MA}$.

e) Trace um segmento de reta BP, que seja perpendicular ao diâmetro $\overline{AC}$, de modo que o ponto P pertença à semi-circunferência traçada.

f) Trace os segmentos de reta $\overline{PM}$, $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ e explique porque razão o triângulo APC é um triângulo retângulo.

g) Mostre que a medida do cateto $\overline{BP}$ do triângulo retângulo PBM é igual a $\sqrt{2}$u.

h) Utilizando esse mesmo processo, verifique que se as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e BC fossem iguais a 1u e 3u respectivamente, então, a medida do cateto $\overline{BP}$ seria igual a $\sqrt{3}$u.

i) Utilizando esse mesmo processo verifique que se as medidas dos segmentos AB e BC fossem iguais a 2u e 3u respectivamente, então, a medida de $\overline{BP}$ seria igual a $\sqrt{6}$u.

j) Quais devem ser as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ para que a medida do cateto $\overline{BP}$ seja igual a $\sqrt{5}$u?

k) Utilizando esse mesmo processo, verifique que se a medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ fossem iguais a a unidades e b unidades respectivamente, então, a medida do cateto $\overline{BP}$ seria igual a $\sqrt{a \cdot b}$ unidades.

l) Utilizando a conclusão do item anterior, complete a tabela seguinte:

m ($\overline{AB}$)	m ($\overline{BC}$)	m ($\overline{BP}$)
1	2	
2	3	
		$\sqrt{5}$
3	7	
		$\sqrt{10}$
1	$\sqrt{2}$	
1	$\sqrt{3}$	
1	$\sqrt[4]{2}$	
		$\sqrt[8]{5}$
1	$\sqrt[8]{7}$	

m) Utilizando o processo desta atividade e a mesma unidade de medida, construa segmentos de reta cujas medidas sejam : $\sqrt{6}$u; $\sqrt[4]{2}$u; $\sqrt[4]{3}$u e $\sqrt[8]{2}$u.

35ª ATIVIDADE

a) Seguindo os passos abaixo você estará construindo um segmento de reta cuja medida é $\sqrt[3]{2}$ u . Considere o segmento u abaixo como unidade de medida.

u

1) Trace dois segmentos de reta perpendiculares AO e BO, que se interceptem no ponto O, de modo que:
m ($\overline{AO}$) = 1u e m ($\overline{BO}$) = 2u

2) Prolongue $\overline{BO}$ no sentido de B para O e $\overline{AO}$ no sentido de A para O.

3) Utilizando 2 esquadros e uma régua, trace os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, de forma que:

$\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$; $C \in \overrightarrow{AO}$; $D \in \overrightarrow{BO}$; $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ e $\overline{AD} \perp \overline{CD}$

b) Utilizando o fato demonstrado na atividade anterior para os triângulos BCD e ACD, mostre que m ($\overline{OD}$) = $\sqrt[3]{2}$ u

c) Utilizando o mesmo processo descrito nesta atividade, construa segmentos de reta cujas medidas sejam:

$\sqrt[3]{3}$ u ; $\sqrt[3]{5}$ u ; $\sqrt[3]{4}$ u ; $\sqrt[9]{2}$ u e $\sqrt[9]{5}$ u.

Utilize como unidade de medida o segmento u anterior.

d) Utilizando os segmentos construídos nesta atividade e o processo geométrico da atividade anterior, construa segmentos de reta cujas medidas sejam $\sqrt[6]{2}$ u e $\sqrt[6]{5}$ u.

19. O cubo de volume 2 e o preconceito platônico

Ao exercitar a atividade anterior, você construiu um segmento de reta cuja medida é $\sqrt[3]{2}$ u.

Agora sim, podemos responder à questão colocada pelo oráculo de Apolo para acabar com a peste, lembra-se?

Se podemos construir um segmento cuja medida é $\sqrt[3]{2}$ u, é claro que podemos também construir um cubo cujo volume é 2 u.

Sabemos que no século IV a.C., para que fosse possível efetuar os cálculos para o lançamento de projéteis por uma catapulta, era necessário a extração de uma raíz cúbica. Um matemático grego desconhecido resolveu esta questão geometricamente, de forma parecida com aquela feita por você na atividade anterior. Só que em vez de utilizar 2 esquadros e uma régua, construiu um dispositivo mecânico constituído por dois braços paralelos que concorriam perpendicularmente a um terceiro braço, sendo que um desses braços era móvel.

Acontece que tanto a forma como construímos um segmento de medida $\sqrt[3]{2}$ quanto essa proposta pelo matemático grego, não seriam aceitas como solução do problema colocado pelo oráculo. Isso porque, talvez por influência do filósofo Platão, as construções geométricas só eram perfeitas e só podiam ser aceitas se fossem feitas apenas com régua sem escala e compasso! Jamais se poderia admitir o uso de dispositivos mecânicos na geometria. Aceitar isso, segundo a visão elitista de Platão, seria "contaminar" a nobre e pura geometria com as rudes ferramentas utilizadas pelos trabalhadores braçais.

Acontece que, se se aceitassem as restrições impostas por Platão, o problema da duplicação do cubo jamais teria tido uma solução. E isso só foi demonstrado no século XIX... tempo mais que suficiente para que todos os atenienses morressem contaminados!

Se dependesse de Platão, a peste jamais teria terminado. Mas terminou. Sem que as ordens de Apolo tivessem sido cumpridas.

O objetivo de atividade seguinte é fazer com que você compreenda o significado da adição algébrica de números reais irracionais, tendo por base a sua representação geométrica.

36ª ATIVIDADE

a) Utilizando a mesma unidade de medida das atividades 30 e 31, construa uma reta numérica e determine nela os pontos correspondentes aos números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$. Para isso, utilizando um compasso, transporte para essa reta esses segmentos já construídos nas atividades anteriores.

b) Determine nessa reta numérica os pontos correspondentes aos irracionais: $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt[3]{2}$, $-\sqrt[3]{3}$ e $-\sqrt[3]{5}$

c) Utilizando o compasso para efetuar adição e subtração de segmentos de reta, coloque V ou F nas afirmações seguintes, conforme sejam elas verdadeiras ou falsas.

1) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

2) ( ) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2+3} = \sqrt[3]{5}$

3) ( ) $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$

4) ( ) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3-2} = \sqrt[3]{1} = 1$

5) ( ) $1 + \sqrt{2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

6) ( ) $1 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+2} = \sqrt[3]{3}$

7) ( ) $\sqrt{3} - 1 = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$

8) ( ) $\sqrt[3]{3} - 1 = \sqrt[3]{3-1} = \sqrt[3]{2}$

9) ( ) $0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

10) ( ) $0 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$

11) ( ) $0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

12) ( ) $0 + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

13) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

14) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 . \sqrt{2}$

15) ( ) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2 . \sqrt[3]{2}$

16) ( ) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} = 3 . \sqrt[3]{3}$

17) ( ) $-\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{5}$

18) ( ) $-\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2 . \sqrt{2}$

19) ( ) $-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = -2 . \sqrt[3]{2}$

20) ( ) $-\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = -3 . \sqrt{2}$

20. Adição algébrica de números reais-irracionais

Na atividade anterior, você verificou geometricamente o significado da adição algébrica de números reais. Verificou que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$, isto é, que a soma das raízes quadradas de dois números é diferente da raiz quadrada da soma desses dois números. Isso é válido também, para radicais de qualquer índice. Na maioria das vezes não podemos colocar a adição de dois irracionais sob a forma de um único radical. Isso só pode ser feito quando os radicais tiverem o *mesmo índice* e o *mesmo radicando*.

Exemplos: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 . \sqrt{2}$

$3 . \sqrt[3]{5} + 4 . \sqrt[3]{5} = 7 . \sqrt[3]{5}$

$-2 . \sqrt{3} - 3 . \sqrt{3} + \sqrt{3} = -4 . \sqrt{3}$

Nestes casos, conservamos o radicando e o índice do radical e somamos algebricamente os coeficientes dos radicais que estão sendo adicionados. Essa mesma conclusão pode ser transferida para a adição algébrica de números reais-irracionais, dados sob a forma de potenciação com expoente racional.

Exemplos: $2^{1/2} + 3^{1/2} \neq (2+3)^{1/2}$, isto é, $2^{1/2} + 3^{1/2} \neq 5^{1/2}$

$2^{1/2} + 2^{1/2} = 2 . 2^{1/2}$

$3 . 5^{1/3} + 4 . 5^{1/3} = 5^{1/3} . (3 + 4) = 5^{1/3} . 7 = 7 . 5^{1/3}$

$-2 . 3^{1/2} - 3 . 3^{1/2} + 3^{1/2} = 3^{1/2} . (-2 - 3 + 1) = -4 . 3^{1/2}$

Você verificou também que a adição algébrica de um número real-irracional com um real-racional diferente de zero, não pode ser posta sob a forma de um único radical.

Exemplos: $1 + \sqrt{2} \neq \sqrt{3}$

$$\frac{1}{2} + \sqrt[3]{2} \neq \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} + 2}$$

Essa conclusão transfere-se também para o caso do real-irracional estar sob a forma de potenciação de expoente racional.

Exemplos: $1 + 2^{1/2} \neq 3^{1/2}$

$$\frac{1}{2} + 2^{1/3} \neq \left(\frac{5}{2}\right)^{1/3}$$

37ª ATIVIDADE

Efetue as adições algébricas seguintes:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{7} + 2 . \sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

c) $5 . \sqrt{3} - 8 . \sqrt{3} + \sqrt{3}$

d) $1 + \sqrt{6} - 3 - 5 . \sqrt{6}$

e) $3 . \sqrt{5} + 2 . \sqrt{5} - 5 . \sqrt{5}$

f) $2 + \sqrt{3} - \sqrt{5} - (3 - \sqrt{3} + \sqrt{5})$

g) $- 2 . \sqrt{13} - 3 . \sqrt{13} - 8 . \sqrt{13}$

h) $\sqrt[3]{2} + 3 . \sqrt[3]{2} - 5 . \sqrt[3]{2}$

i) $\sqrt[4]{2} - 3 . \sqrt[4]{2} + 2 . \sqrt[4]{2}$

j) $1 + \sqrt[5]{2} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[5]{2} - \sqrt[4]{3}$

k) $3 + \sqrt{2} - \sqrt[3]{7} + 8 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{7}$

l) $\sqrt[9]{7} - \sqrt[7]{3} - 4 + \sqrt[9]{7} + \sqrt[7]{3} + 1$

m) $2^{1/2} + 3^{1/2} - 2 . 2^{1/2} - 5 . 3^{1/2}$

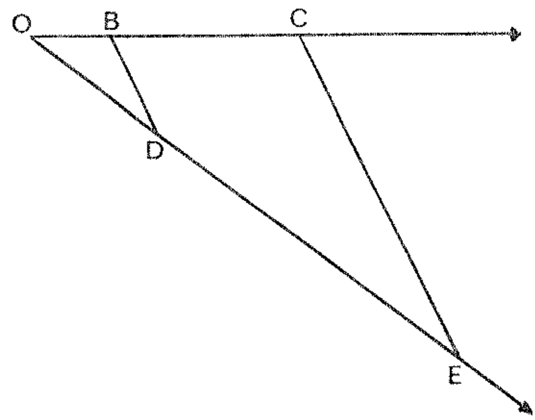
n) $7 . 5^{1/2} + 1 - 3 . 5^{1/2} - 2 + 3 . 3^{1/3}$

o) $3 . 5^{1/2} - 2 . 5^{1/2} - 7 . 5^{1/2} + 1$

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você compreenda o significado da multiplicação de números reais irracionais, tendo por base a possibilidade de se interpretar geometricamente essa operação.

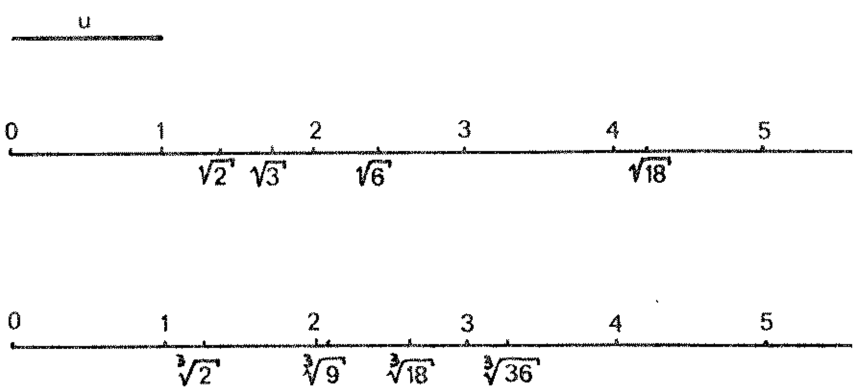
38ªATIVIDADE

a) A figura ao lado representa duas semi-retas ($\overline{OC}$ e $\overline{OE}$) de mesma origem, formando um ângulo qualquer diferente de 180^0. A medida de $\overline{OB}$ é 1u, a medida de $\overline{OD}$ é 2u e a medida de $\overline{BC}$ é 2,5 . Traçou-se um segmento paralelo BD e, pelo ponto C, traçou-se um segmento paralelo a $\overline{BD}$, obtendo-se o ponto E. Utilizando um compasso, verifique que a medida do segmento DE é igual ao produto das medidas dos segmentos OD e BC.



b) Utilizando o mesmo processo do item anterior, mostre que quaisquer que sejam as medidas racionais dos segmentos BC e OD, sendo OB o segmento unitário, a medida do segmento DE é sempre igual ao produto das medidas dos segmentos BC e OD.

c) Considere a unidade u e os números irracionais localizados nas retas numeradas abaixo.



Utilizando o processo geométrico aprendido no item a desta atividade e as retas numeradas acima, verifique que as multiplicações abaixo foram feitas corretamente:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ 2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18}$

3) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{18}$ 4) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{36}$

d) Com base nos resultados anteriores, escreva uma regra para multiplicar números irracionais na forma de radical de mesmo índice.

39ª ATIVIDADE

Efetue as multiplicações:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$ b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{8}$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ f) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{5}$

g) $\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[9]{21}$ h) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

i) $2^{1/5} \cdot 3^{1/5}$ j) $3^{1/2} \cdot 5^{1/2} \cdot 10^{1/2}$

k) $2^{2/3} \cdot 5^{1/3}$ l) $5^{3/4} \cdot 2^{1/4}$

m) $\sqrt{0{,}5} \cdot \sqrt{3{,}2}$ n) $\sqrt{1/3} \cdot \sqrt{6}$

40ª ATIVIDADE

Reduzindo os radicais seguintes ao mesmo índice efetue as multiplicações:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

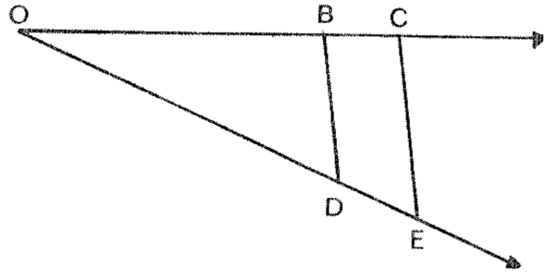
c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5}$

e) $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt[8]{1{,}2}$ f) $\sqrt[3]{1/2} \cdot \sqrt[6]{3/2}$

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você compreenda o significado da divisão de números reais irracionais, tendo por base a possibilidade de se interpretar geometricamente essa operação.

41ª ATIVIDADE

a) Mostre que, se na figura ao lado $m(\overline{BC}) = 1u$ e $\overline{CE} \,//\, \overline{BD}$, então, quaisquer que sejam as medidas racionais de $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$, a medida de $\overline{DE}$ é sempre igual ao quociente entre as medidas de OD e OB.



Obs: mostre isso através de exemplos numéricos.

b) Utilizando o processo geométrico acima e as retas numeradas da atividade 35, verifique que as divisões abaixo foram feitas corretamente

1) $\sqrt{6} : \sqrt{2} = \sqrt{3}$	2) $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$
3) $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2}$	4) $\sqrt[3]{36} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$

c) Com base nos resultados anteriores, escreva uma regra para dividir números irracionais na forma de radical de mesmo índice.

42ª ATIVIDADE

Efetue as divisões seguintes:

a) $\sqrt{18} : \sqrt{6}$	b) $4^{1/3} : 2^{1/3}$	c) $\sqrt{2,5} : \sqrt{0,5}$
d) $\sqrt{32} : \sqrt{8}$	e) $3^{2/5} : 2^{3/5}$	h) $\sqrt{2/3} : \sqrt{5/7}$
f) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$	g) $\sqrt{5} : \sqrt[5]{5}$	m) $\sqrt[3]{1/5} : \sqrt[3]{1/10}$
i) $\sqrt[6]{16} : \sqrt[6]{5}$	j) $\sqrt{3} : \sqrt[4]{4}$	
k) $\sqrt[5]{30} : \sqrt[5]{17}$	l) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[5]{2}$	
n) $3^{1/2} : 5^{1/2}$	o) $\sqrt[6]{7} : \sqrt{3}$	

21. Simplificação de números irracionais

Você já sabe que existem infinitas maneiras de se representar um número irracional sob a forma de potenciação de expoente fracionário.

Exemplo: $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = 2^{3/9} = 2^{4/12} = \ldots$

Mas como $2^{2/6} = \sqrt[6]{2^2}$; $2^{3/9} = \sqrt[9]{2^3}$; $2^{4/12} = \sqrt[12]{2^4} \ldots$,

então, podemos afirmar que existem também infinitas maneiras de se representar, sob a forma de um radical, um mesmo número irracional.

Assim, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[12]{2^4} = \ldots$

Neste caso, dizemos que $\sqrt[3]{2}$ está na forma irredutível e daí, todos os demais radicais que são iguais a ele poderão ser simplificados.

Mas como podemos reconhecer se um número irracional, dado sob a forma de radical, é ou não irredutível?

Para isso, em primeiro lugar, devemos decompor em fatores primos o seu radicando. Em seguida, para que ele seja irredutível, as duas condições seguintes deverão ser obedecidas:

1) Os expoentes de *todos* os números primos que aparecem na decomposição do radicando deverão ser menores que o índice do radical do número irracional;

2) Não pode haver nenhum divisor comum entre o índice do radical e os expoentes dos números primos que aparecem na decomposição do radicando.

Exemplo 1: $\sqrt[9]{8}$ não é irredutível pois $\sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3}$. Embora 3 seja menor que 9, existe o número 3 que é divisor comum de 3 e de 9.

Para simplificar este radical até a forma irredutível fazemos assim:

$$\sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = 2^{3/9} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$$

Exemplo 2 : $\sqrt[4]{36}$ não está na forma irredutível pois:

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2}.$$

Embora 2 seja menor que 4, existe o número 2 que é divisor comum entre 2 e 4. Para tornar este radical irredutível fazemos assim:

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 . 3^2} = \sqrt[4]{2^2} . \sqrt[4]{3^2} = 2^{2/4} . 3^{2/4} = 2^{1/2} . 3^{1/2} = (2 . 3)^{1/2} = 6^{1/2} = \sqrt{6}$$

Exemplo 3: $\sqrt{8}$ não está na forma irredutível pois, $\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$ Para tornar este radical irredutível, fazemos assim:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 . 2} = \sqrt{2^2} . \sqrt{2} = 2^{2/2} . \sqrt{2} = 2 . \sqrt{2}$$

43ª ATIVIDADE

Sempre que possível, simplifique os seguintes radicais até a forma irredutível.

a) $\sqrt[6]{8}$
b) $\sqrt[3]{2^4 . 5^3}$
c) $\sqrt[3]{27}$
d) $\sqrt{216}$
e) $\sqrt[8]{16}$
f) $\sqrt{3^5 . 5^6}$
g) $\sqrt[5]{12}$
h) $\sqrt{72}$
i) $\sqrt{18}$
j) $\sqrt{42}$
l) $\sqrt[3]{125}$
m) $\sqrt{4a^2 . b}$
n) $\sqrt[3]{32}$
o) $\sqrt{3x^3 . y^2}$
p) $\sqrt{15}$
q) $\sqrt[3]{27x^3 . y^4}$
r) $\sqrt{12}$
s) $\sqrt{b^2 : 4a^2}$
t) $\sqrt[3]{24}$
u) $\sqrt{4x^2y/3a^2}$
v) $\sqrt{2^4 . 5^3}$
w) $\sqrt{x^2 . y^2}$

44ª ATIVIDADE

Resolva os seguintes problemas:

a) Considere um triângulo equilátero de lado k. Determine uma equação que lhe permita calcular a medida da altura h desse triângulo em função do lado.

b) Com o auxílio da equação encontrada no item a, determine a medida da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

c) Determine a área e o perímetro do triângulo do item b.

d) As diagonais de um losango medem 10 cm e 24 cm. Determine o perímetro do losango.

e) Calcule a altura de um triângulo isósceles sabendo que os lados congruentes medem 25 cm cada um e a base do triângulo tem 14 cm.

f) O lado de um losango mede 17 cm e uma das diagonais tem 30 cm. Determine a medida da outra diagonal.

g) Um trapézio retângulo de 15 cm de altura tem as bases medindo 10 cm e 18 cm. Determine a medida do lado oblíquo às bases.

h) Considere um triângulo equilátero de lado k Determine uma equação que permita calcular a área desse triângulo em função do lado apenas.

i) Com o auxílio da equação encontrada no item h, determine a área de um triângulo equilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

j) Chamamos de geratriz de um cone reto a qualquer segmento de reta que tem uma extremidade no vértice do cone e a outra num ponto qualquer da circunferência da base. Determine uma equação que lhe permita calcular a medida da geratriz de um cone reto em função da altura h do cone e do raio r da circunferência da base.

k) Com o auxílio da equação encontrada no item j, determine a medida da geratriz de um cone reto cujo raio da base é 2cm e cuja altura é 5cm.

l) Determine uma equação que lhe permita calcular a aresta a, não pertencente à base, de uma pirâmide reta de base quadrada em função da aresta m da base e da altura h da pirâmide.

22. Para que servem os números irracionais?

Sempre sobra a pergunta: para que servem os números irracionais? Para que estudá-los? Jamais nos deparamos na nossa vida diária com uma situação onde precisaremos expressar os resultados das medições com números possuindo infinitas casas decimais. Bastarão algumas casas apenas. É claro que em problemas de caráter geométrico eles deverão aparecer, como vimos, para expressar as medidas de diagonais de quadrados, de alturas de pirâmides, etc.

Mas na prática, sempre que necessitarmos dessas medidas, precisaremos apenas de respostas aproximadas.

Mas a verdade é que não há ciência que seja totalmente inútil. Muitas vezes, na história das ciências, descobertas aparentemente inúteis prepararam o caminho para outras descobertas úteis.

Faraday, um físico inglês do século passado, descobriu várias leis relacionadas com fenômenos elétricos e magnéticos. Leis aparentemente inúteis. Quando perguntaram-lhe para que serviam aquelas descobertas, Faraday respondeu, inteligentemente, com outra pergunta: para que serve uma criança que acabou de nascer?

Mais tarde, as descobertas de Faraday foram empregadas para construção de geradores de energia elétrica, forma de energia cujas vantagens apenas o homem de nosso século pode desfrutar.

O físico Rutherford, ao contrário de Faraday, ironizava as pessoas que sonhavam que um dia, com base na teoria da relatividade de Einstein (até então sem nenhuma aplicação), poderiam extrair a poderosa energia armazenada nos núcleos atômicos. Entretanto, sabemos hoje que esse sonho tornou-se realidade. A energia nuclear mostrou-nos tanto seus doces como seus amargos frutos: a bomba lançada sobre a cidade de Hiroxima que matou milhares de pessoas, os acidentes nucleares, o lixo atômico, etc.

O matemático inglês Hardy pensava que a teoria dos números em que trabalhava não servia para nada. Entretanto, hoje essa "inútil" teoria aplica-se à teoria dos códigos secretos e não secretos, isto é, à ciência militar com seus segredos e suas espionagens.

Esses exemplos poderiam se multiplicar.

E os números irracionais? Há para eles alguma perspectiva de aplicação?

Existe uma velha questão, que até os nossos dias a ciência busca resolver, a de saber se o tempo flui de modo contínuo (sem interrupções) ou se o faz descontinuamente, isto é, por instantes separados. Os relógios digitais da atualidade apoiam a segunda hipótese, mas a verdade é que estamos tão perto de resolver a questão como o estavam os velhos gregos, quando a grande moda em matéria de relógios era a clepsidra, um relógio de água que apoiava a primeira hipótese, isto é, a idéia do fluxo contínuo do tempo.

Poderia a matemática auxiliar os cientistas nesta questão? A principal razão que obriga os cientistas a saber o que os matemáticos têm a dizer sobre isso é que o modelo quantitativo da continuidade é uma linha reta numerada.

É uma linha ao longo da qual os matemáticos dispõem os números, seus conhecidos do estudo da Aritmética. Deste modo, todo e qualquer ponto é rotulado com um número, de modo que não há qualquer intervalo não rotulado.

A mais primitiva linha numerada não é contínua. Nela figuram só os números inteiros 1, 2, 3, 4, etc., que, colocados a intervalos regulares, deixam obviamente falhas não rotuladas. A primeira linha numerada contínua foi a dos gregos antigos, na qual os intervalos entre os números inteiros eram interminantemente subdivididos e postos em correspondência com os números fracionários, aparentemente sem deixar nenhum ponto por rotular. Essa linha foi chamada de "linha numerada racional" porque ao conjunto dos números inteiros e fracionários chamavam os gregos "números racionais", por serem números que podiam ser expressos pela razão (ou quociente) de números inteiros. Para Pitágoras, a linha numerada racional representava o modelo ideal de continuidade até que no século VI a.C., os próprios pitagóricos acabaram por descobrir buracos no seu modelo e isso você já sabe porque.

A descoberta dos números irracionais, que os próprios pitagóricos acabaram por ocultar, implicava que a linha numerada racional não era, afinal das contas, o modelo da continuidade.

Nos séculos que se seguiram, os números irracionais foram aceitos pelos matemáticos como um mal necessário: necessário porque a sua aplicação nas descontinuidades da linha numerada racional permitiu criar outra reta numerada "mais contínua"; e um mal porque era ainda pouco claro como aplicar os números irracionais à linha numerada racional.

Havia muitos exemplos de números irracionais, mas não se dispunha, para esses números, de uma definição matematicamente aceitável. Pareciam não se relacionar logicamente com os números racionais, isto é, não se conhecia nenhuma receita para se obter números irracionais a partir dos racionais. Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind encontrou um processo aceitável para relacionar os irracionais com os racionais, dando o nome de "linha numerada real" ao novo modelo de continuidade, por alusão ao hábito que os matemáticos traziam desde o século XVI de chamar "números reais" ao conjunto de racionais e irracionais.

Algumas décadas depois, outro matemático alemão, Georg Cantor,fez uma descoberta que iria acabar de vez com os preconceitos em relação à aceitação da linha numerada real. Com essa descoberta confirmou-se que, embora haja uma infinidade de números racionais, como os gregos suspeitavam, há ainda mais números reais. Confirmou-se ser a linha numerada real, de algum modo, "mais contínua" do que a racional. Veja só o que isso significa!

Na linha numerada racional, os números vizinhos encontram-se *infinitamente juntos*, mas na linha real os números vizinhos encontram-se *mais do que infinitamente juntos*. Mesmo com espelhos, isso será para nós uma ilusão impossível de criar. Considere dois espelhos um em frente do outro. Ao olhar para um deles vemos uma imagem refletida da outra. Imagine que cada imagem é um ponto na reta numerada.

Aproxime agora um pouco os dois espelhos. As imagens repetidas serão comprimidas e o espaço entre elas diminuirá. A distância entre os pontos numa linha numerada racional corresponderá à distância entre as imagens quando os dois espelhos estiverem infinitamente próximos ou, em outras palavras, quando os espelhos se tocam. Mas a distância entre os pontos numa reta numerada real deverá corresponder à distância entre as imagens quando os dois espelhos estiverem *mais próximos do que quando se tocam*, o que só pode acontecer se os dois espelhos se interpenetrarem, como Alice, que entrou no espelho.

Voltemos à questão do tempo. Já não basta saber se o tempo é contínuo mas, se o for, temos que apurar se é "racionalmente contínuo" ou "realmente contínuo".

Caso seja o tempo algo descontínuo, isto deverá significar que o que quer que seja no universo se desenrola como nas fitas de cinema, imagem por imagem. E significa também que a existência temporal é uma sucessão de tiquetaques momentâneos, cuja aparência de continuidade é mera ilusão, como a criada pelo cinema.

Se o tempo é contínuo, então, coloca-se a questão de a sua continuidade ser a de uma linha numerada racional ou real. Qualquer dessas hipóteses é impossível de ser verificada por medição direta. Mas já é possível apurar algumas coisas por experiências indiretas. Uma maneira bem simples é a de verificar se números racionais sozinhos bastam para descrever quantitativamente os vários fenômenos naturais.

E aí estamos novamente em presença do antigo, mas persistente ideal pitagórico de tudo querer quantificar, de descobrir números ou leis matemáticas por trás de todos os fenômenos. A ciência de nosso século tem dado provas da força desse ideal. Descobriu que bastam os números racionais para explicar o movimento das cargas elétricas num fio condutor, para caracterizar cada espécie de planta ou animal através do número de cromossomas presentes em suas células, para fixar o número atômico de um elemento químico, etc.

Entretanto, os cientistas descobriram também que, talvez, os números racionais não são suficientes para descrever todos os fenômenos. Só em física existem mais de uma dúzia de constantes, como a velocidade da luz por exemplo, que foram medidas até a nona casa decimal, sem que esses números apresentassem periodicidade em seus dígitos. Isso poderia indicar que esses números seriam irracionais. Mas não se pode ter certeza. Isso porque essas medições não podem ser feitas até o infinito.

Mas é justamente essa "propriedade desagradável" dos números irracionais, de não poderem ser detectados, que começa a ter uma aplicação atualmente. Eles começam a ser utilizados para se detectar falhas no funcionamento de computadores.

De tudo o que foi dito podemos concluir que ao descobrir os números irracionais, os matemáticos criaram uma possibilidade que não pode ser comprovada por qualquer medição que se possa imaginar. Isso nos faz lembrar das palavras de um matemático da atualidade: "em matemática, este poder da imaginação humana de nos embalar em sonhos de muito pormenor é levado constantemente aos mais extremos limites racionais".

E poderíamos acrescentar: e até mesmo ultrapassar as fronteiras do racional.

E aí chegamos até a olhar com outros olhos a velha crença pitagórica de fazer da matemática o único meio de salvação das almas... de fazê-las retornar às estrelas...

Valeu estudar os irracionais? Ou isto foi uma atitude irracional?

Obs: Esse texto foi extraído do livro "Pontes para o infinito" de Michael Guillen, pp. 41 - 50 e foi adaptado para fins didáticos.

APÊNDICE 1

O MÉTODO BABILÔNICO PARA EXTRAÇÃO DE RAÍZES QUADRADAS

Sabe-se que os matemáticos mesopotâmicos foram hábeis no desenvolvimento de processos algorítmicos, entre os quais um para extrair a raiz quadrada, frequentemente atribuído a homens que viveram mais tarde, como o sábio grego Arquitas (428-365 a.C.) ou a Heron de Alexandria (100 d.C.). Ocasionalmente, esse processo é chamado "algoritmo de Newton".

Descrição do processo: Seja determinar o número $x = \sqrt{a}$

1º Passo: Toma-se o maior número inteiro cujo quadrado é menor que a. Chama-se de a_1 a essa primeira aproximação de $\sqrt{a}$ por falta.

2º Passo: Determina-se o quociente $b_1 = a/a_1$. Assim, b_1 é uma segunda aproximação de $\sqrt{a}$, por excesso.

3º Passo: Determina-se a média aritmética entre as duas aproximações anteriores, isto é, determina-se $a_2 = (a_1 + b_1)/2$. Desse modo, a_2 é uma terceira aproximação por excesso de $\sqrt{a}$.

4º Passo: Determina-se o quociente $b_2 = a/a_2$. Assim, b_2 é uma quarta aproximação de $\sqrt{a}$, por falta.

5º Passo: Determina-se a média aritmética entre a_2 e b_2, isto é, $a_3 = (a_2 + b_2)/2$. Desse modo, a_3 é uma quinta aproximação por excesso de $\sqrt{a}$. E assim sucessivamente.

Uma justificativa atual do processo

1) Como a_1 é o maior inteiro cujo quadrado não excede a, então, temos que : $a_1^2 < a$, isto é, $a_1 < \sqrt{a}$

2) Temos que mostrar que $b_1 > \sqrt{a}$.

Como $b_1 = a/a_1$, então, $a_1 = a/b_1$. Substituindo esse valor de a_1 na desigualdade do item 1, vem: $a/b_1 < \sqrt{a} \Rightarrow a/\sqrt{a} < b_1 \Rightarrow a.$ $\sqrt{a}/a < b_1 = b_1 > \sqrt{a}$.

3) Temos que mostrar que: $a_2 = (a_1 + b_1)/2 > \sqrt{a}$

Como $b_1 = a/a_1 \Rightarrow a = a_1\ b_1 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{a_1\ b_1}$

Como a média geométrica entre dois números é sempre menor que a média aritmética entre os mesmos, então, temos:

$\sqrt{a_1\ b_1} < (a_1 + b_1)/2$

Logo, $\sqrt{a} < (a_1 + b_1)/2$

O cálculo de $\sqrt{a}$ pelo método babilônio

1º Passo: $a = 2$ e $a_1 = 1$ pois 1 é o maior inteiro cujo quadrado é menor que 2.

2º Passo: $b_1 = 2/1 = 2$ (aproximação por excesso)

3º Passo: $a_2 = (a_1 + b_1)/2 = (1 + 2) : 2 = 3:2 = 1,5$ (aproximação por excesso)

4º Passo: $b_2 = a/a_2 = 2 : 1,5 = 1,33...$ (aproximação por falta)

5º Passo: $a_3 = (a_2 + b_2)/2 = (1,5 + 1,33...) : 2 = 2,833... : 2 =$
$= 1,41666...$ (aproximação por excesso).

E assim sucessivamente.

APÊNDICE 2

O MÉTODO DE THEON DE SMIRNA PARA EXTRAÇÃO DE RAÍZES QUADRADAS

(Extraído de Dantzig, T., 1970, pp. 99-100)

É possível constatar nos escritos dos geômetras gregos secundários como Heron de Alexandria (séc. I d.C.) e Theon de Smirna (neoplatonista e neopitagórico da primeira metade do século II d.C.) a existência de valores aproximados para números irracionais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. Entretanto, não existe menção quanto ao método de obtenção de tais valores. Como na maioria dos casos as aproximações são excelentes, os historiadores da matemática tentaram levantar conjecturas sobre os métodos empregados: uma delas afirma que os matemáticos gregos tinham conhecimento das séries infinitas; outra, diz que eles tinham conhecimento das frações contínuas. T. Dantzig levanta, porém, uma outra conjectura que, segundo ele, tem o mérito de não presumir que os gregos eram versados em métodos modernos. Segundo Dantzig, como a prova euclidiana da irracionalidade de $\sqrt{2}$ era, para o matemático grego médio, exótica demais para ser convincente, pode ter havido entre alguns pitagóricos "conservadores", a convicção de achar um valor racional para $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc... apesar da demonstração. O número 2 pode ser representado por um número infinito de frações, que têm por denominador um quadrado perfeito:

$$2 = 2/1 = 8/4 = 18/9 = 50/25 = 72/36 = 128/64 = 200/100 = \ldots$$

Se $\sqrt{2}$ fosse um número racional, "avançando-se" bastante, encontrar-se-ia, finalmente, uma fração cujo numerador também fosse um quadrado perfeito. É claro que tal numerador jamais foi obtido, mas em contrapartida, encontrou-se uma excelente aproximação para $\sqrt{2}$. Na verdade, 266/144 = 2 enquanto 289/144 = $(17/12)^2$. Isso dá para $\sqrt{2}$ a aproximação dada por Theon de Smirna que foi: 1 5/12 = 1,4166... que difere do valor real, em menos de 1/7 de 1%. Em apoio a essa conjectura, verificamos também que, como valor aproximado de $\sqrt{2}$ por falta, os pitagóricos conheciam a fração 7/5, correspondente de 1,4; e este valor, de que Aristarco se serviu num célebre problema astronômico, podia ser obtido, facilmente, pela tábua dos quadrados. Verifica-se, de fato, que: $49/25 = (7/5)^2$ é a única fração possível, de termos quadrados menores que 100, cujo numerador difere do dobro do denominador, de 1 unidade por falta; 49/25 é, portanto, em números simples inferiores a 100, o quadrado perfeito mais próximo de 2, por falta, e a sua raiz quadrada é 7/5.

APÊNDICE 3

O MÉTODO DE HERON DE ALEXANDRIA PARA EXTRAÇÃO DE RAÍZES QUADRADAS

Lê-se em P. Tannery, traduzindo um fragmento das "Métricas" de Heron: "Visto que o número 720 não tem raiz racional, obteremos uma raiz com diferença mínima, como segue: Sendo 729 o quadrado mais próximo de 720, este quadrado tem por lado 27, divido 720 por 27, obtendo assim 26 2/3. Junto-lhe 27, resulta então 53 2/3, cuja metade é 26 1/2 1/3; por isso, a raiz mais aproximada de 720 é 26 1/2 1/3".

Notemos que este processo de cálculo equivale a considerar a primeira aproximação da raiz quadrada de um número B qualquer como sendo: $\beta = 1/2\ (b + B/b)$ onde b é o inteiro cujo quadrado mais se aproxima de B.

Podemos, porém, expressar o valor de β de outra maneira. Como b é o inteiro cujo quadrado mais se aproxima de B, então, $B = B^2 + r$, onde r é a diferença entre os quadrados de b e B. Então, $\beta = (b + (b^2 \pm r)/b)/2$ ou $\beta = b/2 + (b^2 \pm r)/2b$ ou

$\beta = (b^2 + b^2 \pm r)/2b$ ou $\beta = 2b^2 \pm r/2b$ ou $\beta = b \pm r/2b$

Os gregos sabiam que essa aproximação β é sempre uma aproximação por excesso de $\sqrt{B}$ e que a aproximação $\beta' = b \pm r/2b \pm 1$ é sempre uma aproximação por falta de $\sqrt{B}$.

O cálculo de $\sqrt{2}$ pelo método de Heron

<u>1ª aproximação</u>: Temos que B = 2. Como 1 é o inteiro cujo quadrado mais se aproxima de B, então, temos: b = 1 e r = 1. Logo,

$\beta = b + r/2b = 1 + 1/2 = 3/2 = 1{,}5$ (aproximação por excesso)

<u>2ª aproximação</u>: Temos que: $\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\beta + \frac{B}{\beta}\right)$. Como B = 2 e $\beta = 1,5$, então, β_1 = (1,5 + 2 : 1,5)/2 = 1,41666... (aproximação por excesso e correta até a 2ª casa decimal).

<u>3ª aproximação</u>: Temos que: $\beta_2 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \frac{B}{\beta_1}\right)$. Como B = 2 e β_1 = 1,41666..., então, β_2 = (1,4166... + 2 : 1,4166...)/2 = = 1,4142157 (aproximação por excesso e correta até a 5ª casa decimal).

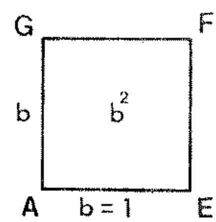
Observe-se que o método de Heron é quase idêntico ao método babilônio.

APÊNDICE 4

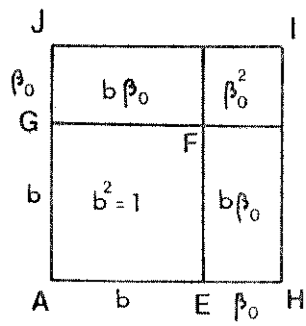
MÉTODO DE THEON ALEXANDRINO PARA EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA DE 2

Objetivo: Determinar a medida do lado do quadrado cuja área é B =2, através de aproximações sucessivas.

1º Passo: Construir o maior quadrado de lado inteiro, cuja área seja menor que B = 2.

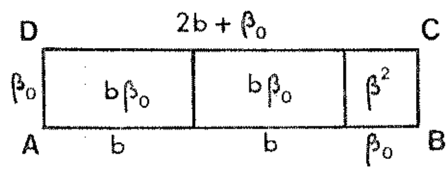


2º Passo: Construir um segundo quadrado AHIJ, de lado b_0, através de um acréscimo de um valor β_0 aos seus lados.



$AH = b_0 = b + \beta_0$

- Para que a área do quadrado AHIJ seja 2, é necessário que a área r do gnômon EHIJGF seja 1, isto é, r = 1.
- Podemos re-arranjar os dois retângulos e o quadrado que compõem o gnômon EHIJGF de modo a formarem um único retângulo equivalente a essas três partes. Um dos lados desse retângulo será β_0 , enquanto que o outro será $2b + \beta_0$. É claro que se dividíssemos a área r desse retângulo por $2b + \beta_0$, obteríamos β_0 como quociente.



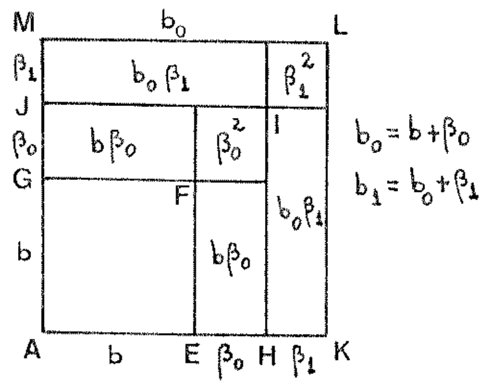
$2b\beta_0 + \beta_0^2 = r$

Mas se dividirmos essa área r por 2b (menor que $2b + \beta_0$) obteremos um número maior que β_0 . Logo, $\beta_0 < r/2b$.

- Como r = 1 e b = 1, então, $\beta_0 < 1/2$, isto é, $\beta_0 < 0,5$.

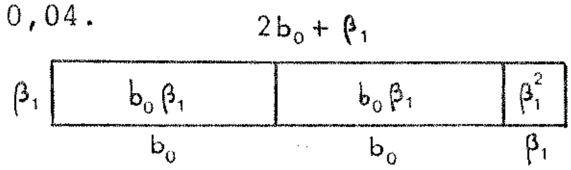
Suponhamos que $\beta_0 = 0,4$. Mas, se $\beta_0 = 0,4$, então, a área do gnômon EHIJGF $= 2b\beta_0 + \beta_0^2 = 0{,}96$. Como $0{,}96 < 1$, então, existe um segundo gnômon de área r_0 e $r_0 = r - (2b\beta_0 + \beta_0^2)$, isto é, $r_0 = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

3º Passo: Construir um terceiro quadrado AKLM, de lado $b_1 = b_0 + \beta_1$, através do acréscimo de um valor β_1 aos lados do quadrado AHIJ.



- Para que a área do quadrado AKLM seja 2, é necessário que a área r_0 do gnômon HKLMJI seja 0,04, isto é, $r_0 = 0{,}04$.

- Mas $\beta_1 < r_0/2b_0$ pois



- Como $r_0 = 0{,}04$ e $b_0 = b + \beta_0 = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$, então $\beta_1 < 0{,}04 : 2{,}8$, isto é, $\beta_1 < 0{,}014285$.

- Suponhamos que $\beta_1 = 0{,}01$. Mas, se $\beta_1 = 0{,}01$, então, a área do gnômon HKLMJI $= 2\ b_0\ \beta_1 + \beta_1^2 = 0{,}0281$.

- Como $0{,}0281 < 0{,}04$, então, existe um terceiro gnômon cuja área é $r_1 = r_0 - (2\ b_0\ \beta_1 + \beta_1^2)$, isto é, $r_1 = 0{,}04 - 0{,}0281$, ou $r_1 = 0{,}0119$. Logo, $\sqrt{2} = b + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots$ ou $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

APÊNDICE 5

O MÉTODO DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS PARA EXTRAÇÃO DE RAÍZES QUADRADAS

Seja x um número real positivo. Se a_0 é sua parte inteira, então, $x = a_0 + 1/x_1$, onde $x_1 > 1$. Se x_1 é inteiro, ponhamos $x_1 = a_1$. Se x_1 não for inteiro, seja a_1 sua parte inteira, isto é, $x_1 = a_1 + 1/x_2$. Portanto, $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}$

Se x é racional, então, ele pode ser escrito sob a forma de uma fração contínua limitada. Se x é irracional, ele só pode ser escrito sob a forma de uma fração contínua ilimitada.

A idéias de fração contínua é muito antiga e pode ser encontrada já na China antiga, na Grécia do século II e na Índia do século I. Sua teoria moderna começa todavia, na época de Fermat e atinge seu apogeu com os trabalhos de Lagrange e Legendre, no final do século XVIII. Entretanto, em 1572 Bombelli, em sua "Álgebra", já desenvolvia $\sqrt{2}$ pelo método das frações contínuas. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, podemos por: $\sqrt{2} = 1 + 1/y$. Calculando y nesta equação temos: $y = 1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$. Como $\sqrt{2} = 1 + 1/y$ então, $y = 1 + 1/y + 1$ ou $y = 2 + 1/y$. Então, $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}$. Logo, as aproximações de $\sqrt{2}$ são dadas por:

$f_1 = 1 + 1/2 = 1,5$ $\qquad f_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1,4$

$$f_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1/2}} = 1,4166...$$

$$f_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 1,41379...$$

A série: 1, 1 + 1/2, 1 + 2/5, 1+ 5/12, 1 + 12/29, 1 + 29/70, 1 + 70/169, ... converge para $\sqrt{2}$. É uma série alternada:
$1 < 1 + 2/5 < 1 + 12/29 < 1 + 70/169 < 2 < 1 + 29/70 < 1 + 5/12 < 1 + 1/2$

Este método se aplica a todos os números da forma $\sqrt{n}$, bem como a todos os números positivos que sejam soluções de uma equação de 2º grau. Euler demonstrou que toda solução irracional positiva de uma equação racional de 2º grau, pode ser representada por uma fração contínua periódica simples (numeradores iguais a 1). Lagrange demonstrou o recíproco. As frações contínuas periódicas jogam o mesmo papel em relação às equações de 2º grau que as frações decimais periódicas em relação às equações de 1º grau. O estudo do desenvolvimento de π em fração contínua foi feito por Lambert em 1761. Liouville utilizou frações contínuas para mostrar a existência de números transcedentes.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática.** Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

AEBLI, H. **Didática Psicológica.** 2ª edição; São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1974.

ALEKSSANDROV, A.D. e outros. **La Matematica: su Contenido, Métodos y Significado.** Madrid : Alianza Univesidad, 1985.

ALMEIDA, J.R. Peres de. **História da Instrução Pública no Brasil (1500-1889).** Trad. por Antonio Chizzotti, São Paulo : EDUC, Brasília-DF : INEP/MEC, 1989.

ARON, R. **Dimensiones de la conciencia histórica.** Fondo de Cultura Económica, México, 1983, 1ª edição.

ASSA, Janice. A antiguidade. In: **Tratado das Ciências Pedagógicas**, organizado por Maurice Debesse e Gaston Mialaret, São Paulo : Editora Nacional : Ed. da Universidade de São Paulo, tomo 2, capítulo 1, 1977.

AUZIAS, J.M. **A Antropologia Contemporânea.** São Paulo : Editora Cultrix, 1978.

BACCA, Juan David García. **Introduccion filosofica a los elementos de Geometria de Euclides.** Unversidade Nacional Autonoma de México, 1944.

BACHELARD, G. **O Racionalismo Aplicado.** Zahar Editores : Rio de Janeiro, 1977.

BARABASHEV, A. Empiricism as a Historical Phenomenon of Philosophy of Mathematics. In: **Revue Internationale de Philosophie**, vol. 42, nº 167 - 4/1988, 509-517.

BARKER, S.F. **Filosofia da Matemática.** 2ª edição, Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1976.

BARRACLOUGH, G. **A História.** (2 volumes), Lisboa : Livraria Bertrand, 1980.

BECKER, O. **O Pensamento Matemático: sua grandeza e seus limites.** São Paulo : Editora Herder, 1965.

BIDWELL, J. No math is an island! In: **The Australian Mathematics Teacher**, vol. 46, nº 4, 1990, pp. 8-11.

BIRKHOFF, G. e BENNETT, M.K. Felix Klein and is "Erlanger Program". In: **History and philosophy of modern mathematics**, edited by William Aspray and Philip Kitcher. 2ª edição, USA :University of Minnesota Press, 1988, pp. 145-176.

BKOUCHE, R. e outros. **La Rigueur et le Calcul: Documents Historiques et Epistemologiques.** Paris : CEDIC, 1982.

BLANCHÉ, R. **A axiomática.** 2ª edição, Lisboa : Editorial Presença, 1987.

BLOCH, M. **Introdução à História.** Publicações Europa-América Ltda, 5ª edição, s/d.

BLOOR, D. Polyedra and the Abominations of Leviticus. In: **The British Journal for the History of Science**, vo. II, nº 39, 1978, pp. 245-272.

BOOKER, G. Insight from past solutions: using the history of Mathematics in Problem Solving. In: **Anais do 2º Congresso Latino-Americano de História da Ciência e da Tecnologia.** Org.: Ubiratan D'Ambrosio. pp. 229-231, São Paulo, 1988.

BORGES, A.C. **Geometria prática popular.** 29ª edição, Rio de Janeiro : Livraria Francisco Alves, 1942.

BORTOLETTO, M.A. A Educação do Guerreiro em "A República" de Platão. In: **Revista de Pedagogia**, nº 23, Ano XIII - Vol. XIII, 1967, pp. 155-168.

BOTÍA, A.B. Desarrollo Moral y Educacion Moral: La Perspectiva Cognitiva-Formalista. In: **Revista Española de Pedagogía**, Ano XLV, nº 177, julio - septiembre, 1987.

BOWRA, C.M. **Grécia Clássica.** Livraria José Olympio Editora S.A., Rio de Janeiro, 1983.

BOURBAKI, N. La Arquitectura de las Matematicas. In: LE LIONNAIS, F. **Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático**, Buenos Aires : Eudeba Editorial Universitária.

BOURDÉ, G. e MARTIN, H. **Les écoles historiques.** Paris : Editions du Seuil, 1983.

BOUTROUX, P. **L'Idéal Scientifique des Mathematiciens: Dans L'Antiqueté et dans les Temps Modernes.** Paris : Libraîrie Félix Alcan, 1920.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Trad. por Elza F. Gomide, Edgar Blucher, São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRAUDEL, F. **Escritos sobre a História.** Trad. J. Guinsburg e Tereza Cristina Silveira da Mota, Ed. Perspectiva S.A., São Paulo, 1978.

________. **História e Ciências Sociais.** 5ª edição, Lisboa : Editorial Presença, 1986.

BRUNET, P. La Vie et L'oeuvre de Clairaut. In: **Revue D'Historie des Sciences et de Leurs Applications**, Tome IV, nº 2, Avril/-June, 1951, pp. 109-153.

BRUNSCHVICG, L. **Les Étapes de La Philosophie Mathématique.** Paris : Blanchard, 1972.

BUNT, L.N.H.; JONES, P.S.; BEDIENT, J.D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics.** New York : Dover Publications Inc., 1988.

BYERS, V. Why study the history of mathematics? In: **Inst. J. Math. Educ. Sci. Technol**, 13(1):59-66, 1982.

CAJORI, Florian. History of the exponential and logarithm concepts. In: **American Mathematical Monthly**, vol 20, 1913, pp. 5-15.

CARAÇA, B. de Jesus. Resposta a uma Crítica. In: **Revista Vértice**, fásciculo 5, nº 22 a 26, fevereiro de 1946, contido in (CARAÇA, 1978b, pp. 299-308), 1946.

________. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 7ª edição, Lisboa, 1978a.

________. **Bento de Jesus/Conferências e outros Escritos.** 2ª edição, Lisboa, 1978b.

CARDOSO, C.F.S. **Uma Introdução à História.** 6ª edição, São Paulo : Editora Brasiliense S.A.

________. Iconografia e história. In: **Resgate**; Revita Interdisciplinar de Cultura do Centro de Memória da Unicamp, nº 1, 1990, pp. 9-17, Campinas/SP.

CARR, E.H. **Que é História.** 5ª edição, Rio de Janeiro : Paz e Terra, 1987.

CASSIRER, E. **El Problema del Conocimiento en la Filosofia y en la Ciencia Modernas.** México : Fundo de Cultura Econômica, 1953.

________. **La philosophie des lumiéres.** Paris : Librairie Athème Fayard, 1970.

CASTELNUOVO, E. **Geometria Intuitiva.** Trad. por R.R. Mercadal, Barcelona : Editorial Labor, 1966.

CASTRO, F.M. de Oliveira. A Matemática no Brasil. In: **As Ciências no Brasil**, vol. I, Fernando de Azevedo, São Paulo, s/d.

CHARLOT, B. **A Mistificação Pedagógica.** Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1979.

CHARTIER, R. **A História Cultural - entre práticas e representações.** DIFEL - Difusão Editorial Ltda, Lisboa, 1990.

CHESNEAUX, J. **Hacemos tabla rasa del passado?** 9ª edición, México : Siglo Veintiuno Editores, 1987.

CLAIRAUT, A.C. **Elementos de Geometria.** Trad. por J. Feliciano, São Paulo : Empreza Bibliópola Ed., 1892.

CLEMENTS, D.H. e BATTISTA, M.T. Constructivist Learning and Teaching. In: **Aritmetic Teacher**, vol. 38, nº 1, Septembre, 1990, pp. 34-37.

COBB, P. Experiential, Cognitive, and Antropological Perspectives in Mathematics Education. In: **For the Learning of Mathematics 9**, 2, June 1989, Quebec, Canadá.

COLL, C. As contribuições da psicologia para a educação: teoria genética e aprendizagem escolar. In: **Piaget e a Escola de Genebra.** Org. Luci Banks Leite. Colab. Ana Augusta de Medeiros. Cortez Editora. São Paulo, 1987.

COMÊNIO, J.A. **Didática Magna.** Trad. de Nair Fortes Abu-Merhy, Rio de Janeiro : Edição Organizações Simões, 1954.

COMTE, A. **Curso de Filosofia Positiva; Discurso sobre o espírito positivo; Discurso preliminar sobre o conjunto do positivismo; Catecismo povitivista.** Trad. por José Arthur Giannotti e Miguel Lemos. São Paulo : Abril Cultural, 1978.

CROWE, M.J. Ten "Laws" Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics. In: **Historia Mathematica**, 2:161-166. 1975.

________. Ten Misconceptions about Mathematics and Its History. In: W. Aspray e P. Kitcher (eds.) **History and Phlosophy of Modern Mathematics**, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI, 1988.

DAVSON-GALLE, P. History and philosophy of science - mixture or compound?: the dangers of a prevailing view of philosophy of science for education. In: **Proceedings of the First International Conference**, Florida : Ed. Dan E. Herget, 1989, pp. 113-127.

D'AMBROSIO, U. Mathematics and society: some historical considerations and pedagogical implications. In: **International Journal of Mathematical Education, Science and Thechnology.** vol. 11, nº 4, pp. 479-488, 1980.

________. **Sócio-Cultural Bases for Mathematics Education.** Campinas : Ed. UNICAMP, 1985.

________. (org.) **História da Ciência e da Tecnologia.** São Paulo : Nova Stella, 1989.

DANTZIG, T. **Número, a Linguagem da Ciência.** Trad. por S.G. Paula, Rio de Janeiro : Zahar, 1970.

DAROS, W.R. Dos Tipos de Sociedad y de Aprendizage en la Conception de Carlos Popper. In: **Revista Española de Pedagogía**, Año XLV, nº 178, out-dez., 1987.

DAVIS, Philip J. e HERSH, R. **A Experiência Matemática.** Rio de Janeiro ; Francisco Alves, 1985.

________. **O Sonho de Descartes.** Trad. por Mário C. Moura, Rio de Janeiro : Livraria Francisco Alves Editora S.A., 1988.

DEBESSE, M. e MIALARET, G. **Tratado das Ciências Pedagógicas.** São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1974.

DESANTI, J. e outros. **Las Nociones de Estructura y Génesis.** tomo II: Matemática y Biologia, Buenos Aires : Ediciones Nueva Visión, 1975.

DESCARTES, R. Meditações (1941). Trad. por J. Guinsburg e Bento Prado Júnior, In: **Os Pensadores**, São Paulo : Editora Abril S.A., 1973, pp. 91-150.

DEUS, J.D. **Ciência: curiosidade e maldição.** Lisboa : Gradiva, 1986.

DHOMBRES, J. L'enseignement des Mathematiques par la "Méthode Révolutionnaire": Les leçons de Laplace à L'ecole Normale de l'an III. In: **Revue D'histoire des Sciences**, Tom XXXIII, nº 4, octubre, 1980, pp. 315-348.

DIEUDONNÉ, J.A. Should we teach "modern" mathematics? In: **American Scientist**, jan-fev., vol. 61, nº 1, 1973, pp. 16-19.

DITTRICH, A.B. As experiment in teaching the history of Mathematics. In: **The mathematics teacher**, vol. 66, nº 1, January, 1973, pp. 35-38.

DUARTE, N. **A Relação entre o Lógico e o Histórico no Ensino da Matemática Elementar.** Dissertação de Mestrado, Centro de Educação e Ciências Humanas, UNESP, São Carlos, 1987.

DUCRET, J.J. **Jean Piaget Savant et philosophe**, vol I, Geneve, Paris : Libr. Droz, 1984.

DUHEN, P. Salvar os Fenômenos: ensaios sobre a noção de Teoria Física de Platão a Galileo. Trad. por Roberto de A. Martins, In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Suplemento 3/1984, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Universidade Estadual de Campinas.

DUBY, G. e LARDREAU, G. **Diálogos sobre a Nova História.** Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1989, 1ª edição.

EKELAND, I. **O Cálculo e o Imprevisto.** São Paulo : Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1987.

ESPINOZA, M. Les Mathématiques et la Nature. In: **Archives de Philosophie 51**, 1988, pp. 177-193.

EVANS, P. **Motivação.** Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1976.

EVES, H.W. **An Introduction to the History of Mathematics**, fourth edition, U.S.A., 1976.

FAZENDA, I. **Metodologia da Pesquisa Educacional.** São Paulo : Cortez Editora, 1989.

FEHR, W.F. (org.) Educação Matemática nas América. In: **Relatório da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática**, Lima, Peru, 4-12 de dezembro de 1966, São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1969.

FESTINGER, L. **Teoria da Dissonância Cognitiva.** Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1975.

FILHO, L. **Introdução ao estudo da escola nova.** 11ª edição, São Paulo : Melhoramentos, 1974.

FILHO, M.Z. **A crise da razão histórica.** Campinas : Papirus Editora, 1989.

FINLEY, M.I. **Uso e Abuso da História.** São Paulo : Martins Fontes, 1989.

FRAENKEL, A.A. Filosofia da Matemática. In: **A Filosofia no século XX**, 3ª edição, Lisboa : Fundaçao Calouste Gulbenkian, 1983, pp. 321-344.

FRANÇA, C.A.V. **Educação Consonante: Inferências educacionais da teoria da dissonância cognitiva.** São Paulo, EPU, 1987.

FREGE, G. Os Fundamentos da Matemática. In: **Os Pensadores**, Trad. por Luís Henrique dos Santos, São Paulo : Abril Cultural, 1983, pp. 187-276.

FRITZ, K.V. The Discovery of Incomensurability by Hippasus of Metapontum. In: **Annals of Mathematics**, vol. 46, nº 2, April, 1945.

GABAGLIA, E. de Barros R. **Elementos de Álgebra.** F.I.C., 1921.

GADAMER, H.G. e outros. **História e Historicidade.** Lisboa : Gradiva, 1988.

GARDER, A.O. The history of mathematics as a part of the history of mankind. In: **The mathematics teacher**, may 1968, vol. LXI, nº 5, pp. 524-527.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico.** Tese doutoral, Universidade Eduardo Mondlane, 1987.

________. **Etnomatemática: cultura, matemática, educação.** Maputo, Moçambique, Instituto Superior Pedagógico, 1991.

________. **Pitágoras africano - um estudo em cultura e educação matemática.** Instituto Superior Pedagógico. Maputo, Moçambique, 1992.

GLAS, E. Testing the philosophy of mathematics in the history of mathematics. Part II: The similarity between mathematical and scientific growth of knowledge. In: **Stud. Hist. Phil. Sci.**, vol. 20, nº 2, 1989, pp. 157-174.

GLASERSFELD, E. An Interpretation of Piaget's Constructivism. In: **Revue Internationale de Philosophie**, 36º Année, 143-143, 1982, Fasc. 4, pp. 612-635.

________. Cognition, Construction of Knowlwdge, and Teaching. In: **Synthese**, 80:131-140, nº 1, July-1989.

GÓMEZ, D.S. El Educador y los Valores Sociales. In: **Revista Española de Pedagogia**, Ano XLV, nº 175, enero-marzo de 1987.

GOODMAN, N.D. Mathematics As an Objetive Science. In: **The American Mathematical Monthly**, vol. 86, nº 7, Ago-Set/1979, pp. 540-551.

GRABINER, J.V. **Is Mathematicam Truth Time-Dependent?** 1974.

________. The Mathematician, The Historian, and the History of Mathematics. In: **Historia Mathematica**, 2:439-447, 1975.

GRANGER, G.G. **Filosofia do Estilo.** São Paulo : Editora Perspectiva S.A., 1974.

GRATTAN-GUINNESS, I. Not from Nowhere: History and Philosophy Behind Mathematical Education. In: **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.**, 4:421-453, 1973.

________. On the Relevance of the History of Mathematics to Mathematical Education. In: **Int. J. Math. Educ. Scien. Technol.**, 9(3):275-285, 1978.

________. **Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910 - Una Introducción Historica.** Madrid : Alianza Editorial, 1984.

GRUENDER, D.C. Some Philosophical Reflection on Constructivism. In: **Proceedings of the First International Conference**, Florida : Dan. F. Hergt, 1989, pp. 170-176.

GUILLEN, M. **Pontes para o Infinito: o lado humano das Matemáticas.** Lisboa : Gradiva 1987.

GUILLINGS, Richard J. **Mathematics in the time of the pharaohs.** New York : Dover Publications Inc.

HABERMAS, J. **Conhecimento e interesse.** Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1982.

HAIDAR, M. de Lourdes. **O Ensino Secundário no Império Brasileiro.** São Paulo : Ed. USP/Editorial Grijalbo Ltda, 1972.

HASSLER, J.O. The use of Mathematical History in Teaching. In: **The mathematics Teacher**, março de 1929.

HEATH, T.L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**, 3 volumes, New York : Dover, 1956.

________. **A History of Greek Mathematics**, vols I e II, New York : Dover, 1981.

HEINEMAN, F. Teoria do Conhecimento. In: **A Filosofia no Século XX**, 3ª edição, Lisboa : Fundação Calouste Gulbenkian, 1983.

HERSH, R. Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. In: **Advances in Mathematics**, vol. 31, nº 1, jan-1979.

HINTIKKA, J. e REMES, U. A Análise Geométrica Antiga e Lógica Moderna. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciências**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas, nº 4/1983, pp. 28-47.

HOCQUEGHEM, M.L. e outros. **Histoire des Mathematiques Pour Les Colleges.** 2ª edición, Paris : Editions CEDIC, 1980.

HUMPHREYS, W. **Use of the hitory of mathematics in the mathematics curriculum. Proceedings of the Fourth International Congess on Mathematical Education**, pp. 396-398. Birkhäuser, Boston, Inc, 1983. U.S.A.

JAEGER, W. **Paidéia - a formação do homem grego.** São Paulo : Herder, s/d.

JAHNKE, H.N. The relevance of philosophy and history of science and Mathematics for mathematical education. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, pp. 444-497. Birkhäuser, Boston, Inc, 1983. U.S.A.

JONES, P.S. Irrationals or Incomensurables I: their discovery, and a "logical scandal". In: **The Mathematics Teacher**, February, 1956(a), pp. 123-127.

________. Irrationals or Incomensurables II: the Irrationality of 2 and aproximations to it. In: **The Mathematics Teacher**. March, 1956(b), 49:187-191.

________. Irrationals or Incomensurables III: the Greek Solution. In: **The Mathematics Teacher.** April, 1956(c), pp. 282-288.

________. The History of Mathematics as a Teaching Tool. In: **Historical topics fon the Mathematics Classroom**, Washington, D.C. : National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

________. Recent discoveries in Babylonian Mathematics 1: zero, pi, and polygons. In: **The Mathematics Teacher.** v. 50, nº 3, pp. 162-65, 1957.

KANT, I. **Crítica da razão pura.** Trad. por Valério Rohden e Udo Baldur Moosburger, 2ª edição, São Paulo : Abril Cultural, 1983.

________. **Rèflexions sur l'éducation.** Traduction, Introduction et notes por A. Philomenko, seconde éditions, Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 1974.

KAZIM, M.M. The use of history of Mathematics in the Teaching of Mathematics in secondary education. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, pp. 402-404. Birkhäuser, Boston, Inc, 1983, U.S.A.

KEMPINER, A.J. The Cultural Value of Mathematics. In: **The Mathematics Teacher**, vol. XXII, nº 3, March, 1929, pp. 127-145.

KIRK, G.S. e RAVEN, J.E. **Os Filósofos Pré-Socráticos.** 2º edição, Lisboa : Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from a Advanced Standpoint.** vol. 1 e 2, New York : Dover, 1945.

KLINE, M. A proposal for the high school mathematics curriculum. **The Mathematics Teacher**, April 1966, pp. 322-334.

________. **Mathematical thought from ancient to modern times.** New York : Oxford Universty Press, 1972.

________. **O Fracasso da Matemática Moderna.** São Paulo : Ibrasa, 1976.

________. **Mathematics: The Loss of Certainty.** New York : Oxford University, 1980.

KNORR, W.R. **The Evolution of the Euclidean Elements: A study of the Theory of Incomensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry.** Boston, USA : D. Reidel Publishing Company, 1975.

KOPNIN, P.V. **Fundamentos lógicos da ciência.** Editora Civilização Brasileira S.A., Rio de Janeiro, 1982.

KUHN, T.S. Notas sobre Lakatos. In: **Critica y Conocimiento**, Barcelona, Espanha : Ediciones Grijalbo S.A., 1975.

________. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. São Paulo : Editora Perspectica, 1982.

LACHAUD, G. Waht we get from the history of Arithmetic. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, pp. 449-450. Birkhäuser, Boston, Inc, 1983, U.S.A.

LACROIX, S.F. **Éléments de Géométrie**. Gauthier-Villars, 1872.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações**. Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1978(a).

________. **Matemática, Ciencia e Epistemología**. Madrid : Alianza Editorial s.a., 1978(b).

________ e MUSGRAVE, A. **A Crítica e o Desenvolvimento do Conhecimento**. São Paulo : Editora Cultrix, 1979.

LAWLOR, R. **Sacred geometry - philosophy and practice**. Thames and Hudson Ltda, London, 1982.

LE GOFF, J. e NORA, P. **História: novos problemas**. 2ª edição, Rio de Janeiro ; Francisco Alves, 1979.

________. **Para um novo conceito de Idade Média, Tempo, Trabalho e Cultura no Ocidente**. Lisboa : Editorial Estampa, 1980.

________. **Reflexões sobre a História**. Lisboa : Edições 70, 1986.

________. **A história nova**. São Paulo : Martins Fontes, 1990.

LEGRAND, L. **Psicologia aplicada à educação intelectual**. Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1974.

LEIBNIZ, G.W. Os Princípios da Filosofia Ditos A Monadologia. Trad. por Marilena de Souza Chauí Berlinck, In: **Os Pensadores XIX**, São Paulo : Editora Abril, 1974(a), pp. 61-73.

________. Discurso de Metafísica. Trad. por Marilena de Souza Chauí Berlinck, In: **Os Pensadores XIX**, São Paulo : Editora Abril, 1974(b), pp. 75-110.

LEITE, L.B. (org.) **Piaget e a Escola de Genebra**. São Paulo : Cortez Editora, 1987.

LÉNINE, V.I. **Materialismo e Empiriocriticismo**. 2ª edição, Lisboa : Editorial Estampa, 1975.

LÉON, A. **Introdução à história da educação**. Lisboa : Publicações Dom Quixote, 1983.

LERBET, G. Actualité de Jean Piaget. **Revue Française e Pédago-- gie**, nº 92, juillet-août-septembre, 1990, pp. 5-14.

LERMAN, S. Constructivism, Mathematics and Mathematics Education. In: **Educational Studies in Mathematics**, 20:211-223, 1989.

LÉVI-STRAUSS, C. **As Estruturas Elementares do Parentesco.** São Paulo : Vozes, 1976.

LIBÂNEO, J.C. **Fundamentos Teóricos e Práticos do Trabalho Docente: estudo introdutório sobre pedagogia e didática.** Tese de Doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1990.

LOCHHEAD, J. e DUFRESNE, R. Helping students understand diffi-- cult science concepts through the use of dialoques with history. In: **The history and philosophy of science in science teaching. Proceedings of the first International Conference.** Florida : Ed. Dan. E. Herget, 1989, pp. 221-229.

LOSEE, J. Introducción Histórica a la Filosofía de la Ciencia. 4ª edição, Madrid, Espanha : Alianza Editorial S.A., 1985.

LURIA, A.R. **Pensamento e Linguagem: as últimas conferências de Luria.** Porto Alegre : Artes Médicas, 1986.

MALLOWAN, M.E.L. **Mesopotâmia e Irão.** Editorial Verbo, Lisboa, 1971.

MANACORDA, M.A. **História da Educação.** São Paulo : Cortex Editora, 1989.

MANNO, A.G. **A Filosofia da Matemática.** Lisboa : Edições 70. s/d.

MARIMON, M.M. Ciencia y Construcción del Pensamiento. In: **Enseñanza de las Ciencias**, vol. 4, nº 1, marzo 1986, Universidad de Valencia, Espanha, 1986.

MARIZOT, J. Platon et les mathématiques. In: **La rigueur et le Calcul, Documents Historiques et Epistemologiques**, Groupe Inter-Irem D'Epistemologie, Paris : Editions CEDIC, 1982, pp. 153-172.

MARROU, H. **História da Educação na Antiguidade.** São Paulo : Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1973.

MASTERMAN, Margaret. A natureza do paradigma. In: **A crítica e o desenvolvimento do conhecimento**, org. Imre Lakatos e Alan Musgrave, São Paulo : Editora Cultrix, 1979, pp. 72-108.

MAY, K. O. What is good History and who should do it? In: **Historia Mathematica**, 2:449-455, 1975.

MERANI, A.L. **Psicologia Infantil.** Rio de Janeiro : Editora Paz e Terra, 1972.

MESERVE, B. The history of Mathematics as a pedagogical tool. Proceedings of the Fovrth International Congress on Mathematical Education, pp. 398-400. Birkhäuser, Boston, Inc, 1983, U.S.A.

MICHEL, P.H. As matemáticas. In: **História Geral das Ciências**, tomo I, 2º volume, capítulo II, org. René Taton, São Paulo : Difusão Européia do Livro, 1959.

MIGUEL, A. **Era uma vez... aquela matemática.** Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1984.

________; FUNCIA, M.A.; MIORIM, M.A.; NACARATO, A.M. **Tópicos de ensino de Matemática**, 16 fascículos. Delta Xis Editora Ltda, Campinas, 1993.

MOISE, E.E. Activity and Motivation in Matematics. In: **Mathematical Education Notes**, abril - 1965, 407-412, 1965.

MONROE, P. **História da Educação.** 10ª edição, São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1972.

MUGNY, G. **Psychologie sociale du développement cognitif.** 2ª édition, Peter Lang S.A., 1991, Paris.

NIZZA DA SILVA, M.B. **Cultura no Brasil Colônia.** Petrópolis : Vozes, 1981.

NORDON, D. **Les Mathématiques Pures N'existent Pas!** 2ª édición, France : Editions Actes Sud, 1981.

PERMINOV, V. On the Reliability of the Mathematical Proofs. In: **Revue Internationale de Philosophie**, vol. 42, nº 167, 4/1988, pp. 500-508.

PIAGET, J. e outros. **La Enseñanza de las Matematicas.** Madrid, Espanha : Aguilar S.A., 1968.

________ e GRAISSE, P. **Tratado de Psicologia Experimental.** vol. V, Rio de Janeiro : Forense, 1969.

________. **A Epistemologia Genética.** Editora Vozes, 2ª edição, 1973. Rio de Janeiro.

________ e outros. **La enseñanza de las matemáticas modernas.** Selección y prólogo de Jesús Hernândez, Madrid : Alianza Editorial, 1986.

________. **O Estruturalismo.** São Paulo : Difusão Européia do Livro, 1970.

________. **Recherches sur la contradiction - Les relations entre affirmations et négations.** Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

________. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas.** Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1976.

________. **El Comportamiento, Motor de la Evolución.** Buenos Aires : Ediciones Nueva Visión, 1977.

________. **Les formes élémentaires de la dialectique.** Éditions Gallimard, 1980, Paris.

________ e GARCIA, R. **Psicogénesis e História de la Ciencia.** México : Ediciones Siglos Veintiuno Editores, 1982.

PIETTRE, Bernard. **Comentários ao livro VII da República de Platão.** Trad. por Elza Moreira Marcelina, Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1989.

PIMM, D. Why the history of Mathematics should not be rated x - the need for an appropriate epistemology of mathematics for mathematics education. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, pp. 450-452. Birkhäuser, Boston, Inc, 1983, U.S.A.

PLATÃO. **Mênon.** Trad. por Jorge Paleikat, Rio de Janeiro : Editora Tecnoprint S.A., s/d.

________. **A República livro VII.** Trad. por Elza Moreira Marcelina, Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1989.

POINCARÉ, H. **Science et Méthode.** Paris : E. Flamarion, 1947.

POIRIER, J. **História da Etnologia.** São Paulo : Editora Cultrix, 1981.

POLYA, G. **Mathematical discovery.** New York : John Wiley & Sons. Inc. 1981.

POMIAN, K. **L'Histoire de la Science et L'Historie de L'Histoire.** In: Annales, 30e Année, nº 5, set/out, 1975, pp. 935-952.

PONCE, A. **Educacion y Lucha de Clases.** Buenos Aires : Editorial Cartago, 1974.

POPPER, K.R. **Conjecturas e refutações.** Trad. por Sérgio Bath, Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1972.

PRADO, E.L.B. **História da Matemática: um estudo de seus significados na educação matemática.** Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP - Rio Claro, 1990.

PRICE, D.S. **A ciência desde a Babilônia.** São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

RAYMOND, P. **A História e as Ciências.** Porto : Rés Editora Ltda, 1979.

RESNIK, M.D. Mathematics from the estructural Point of View. In: **Revue Internationale de Philosophie**, vol. 42, nº 167, 4/1988. pp. 400-424.

RIBEIRO, M.L.S. **História da Educação Brasileira.** São Paulo : Cortez e Moraes Ltda, 1978.

RIZZO DE OLIVEIRA, Eliézer. O Exército e o Positivismo: identidade política. In: **Revista Pro-Posições**, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, nº 2, 1990, pp. 22-29.

ROBINSON, R. A Análise na Geometria Grega. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciências, UNICAMP - Campinas, nº 4/1983, pp. 5-27.

ROCHA E SILVA, M. **O Mito Cartesiano e outros Ensaios.** São Paulo : Editora Hucitec, 1978.

ROGERS, L. The Mathematics Curriculum and the history of Mathematics. Proceedings of the Fouerth International Congress on Mathematical Education, pp. 400-402, Birkhäuser, Boston, Inc, 1983, U.S.A.

RONAN, C.A. **História Ilustrada da Ciência.** Volumes I, II, III, IV. Círculo do Livro S.A. SΓo Paulo. 1987.

ROSENBERG, C.E. Las teorias cientificas y el pensamiento social. In: BARNES, B. (org.) **Estudios sobre sociología de la ciencia.** Alianza Editorial S.A. Madrid, 1980.

ROSENFELD, L. Le Probléme Logique de la Définition des nombres Irrationnels. In: **Isis**, 9, 1927, 345-48.

ROSSI. P. **Os Filósofos e as Máquinas.** São Paulo : Companhia das Letras, 1989.

ROSS, W. David. **Teoria de las Ideas de Platon.** 2ª edición, Madrid : Edicione Cátedra S.A., 1989.

ROWELL, J.A. Piagetian Epistemology: Equilibration and the Teching of Science. In: **Syntese**, 80:141-161, July, 1989.

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia Matemática.** Rio de Janeiro : Zahar, 3ª edição, 1974.

SAGHER, Y. What Phythagoras could have done. In: **The American Mathematical Monthly**, vol. 95, nº 2, fev-1988.

SARUP, M. **Marxismo e Educação.** Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1980.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia.** São Paulo : Cortez Editora, 1983(a).

________. Tendências e Correntes da Educação Brasileira. In: **Filosofia da Educação Brasileira**, Rio de Janeiro : Civilização Brasileira, 1983(b).

SCHAFF, A. **História e Verdade.** 2ª edição. Lisboa : Editorial Estampa, 1983.

SCHILK, J.M. e outros. Problem-solving and construction of scientific knowledge: a case study in epistemology. In: **The history and philosophy of science in science teaching**. Proceedings of the First International Conference. Flórida : Ed. San E. Herget, 1989, pp. 322-331.

SCHOLZ, H A axiomática dos antigos. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas - SP, 1 (1980) pp. 5-20.

SCHURÉ, E. **Os grandes iniciados - Pitágoras.** Martin Claret Editores, São Paulo, 1986.

SCRUTON, R. **Introdução à Filosofia Moderna: de Descartes a Wittgenstein.** Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1982.

SEBASTIÁ, J.M. El Constructivismo: um marco teórico problemático. In: **Enseñanza de las Ciencias**, vol. 7, nº 2, mayo, Barcelona, Espanha, 1989.

SEBASTIANI, E. The Genetic Principle and the Ethmomathematics. In: C. Keifel (ed.) **Mathematics, Education, and Society**, UNESCO, Paris, 1989.

________ et al. O uso da história da matemática na formalização de conceitos. In: BOLEMA - Especial nº 2 - pp. 26-41, 1992, Rio Claro, SP.

SEGURA, M.A.V. Reflexiones Acerca de dos Equivocos de la Epistemologia Pedagogica Contemporanea. In: **Revista Española de Pedagogía**, ano XXLVI, nº 180, mayo-agosto, 1988.

SEINDENBERG, A. The Origin of Mathematics. In: **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 18, nº 4, 1978, pp. 301-342.

SÉRGIO, A. Nota a um Passo de uma Introdução a Berkeley. In: **Revista Vértice**, Fascículo 4, nº 17 a 21, novembro de 1945, artigo contido em (CARCAÇA, 1978b, pp. 343-348).

SILVA, G.B. **A Educação Secundária.** São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1969.

SIMONS, L.G. The place of the History and Recreations of Mathematics in Teaching Algebra and Geometry. In: **The Mathematics Teacher**, vol. XVI, nº 2, february 1923, pp. 94-101.

SMOGORZHERVSKI, A.S. **Acerca de la Geometria de Lobachevski.** Moscou : Editorial Mir, 1978.

SNAPPER, E. As três crises da Matemática: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. In: **Humanidades**, julho/setembro, vol. II, nº 8, 1984.

STAROBINSKI, J. **1789: Os Emblemas da Razão.** São Paulo : Companhia das Letras, 1988.

STERNINE, A. **Sobre a obra de V.I. Lénine "Materialismo e Empiriocriticismo".** Moscou : Edições Progresso, 1988.

STEIN, H. Logos, logic and logistiké: some philosophial remarks on nineteenth - century transformation of mathematics. In: **History and philosophy of modern mathematics**, 2ª edição. Editd by Willian Aspray and Philip Kitcher. USA : University of Minnesota Prees, 1988, pp. 238-259.

STRUIK, D.J. Por que estudar a história da Matemática? In: **História da Técnica e da Tecnologia**, Ruy Gama, Trad. por Célia Regina A. Machado e Ubiratan D'Ambrosio, São Paulo : T.A. Queiroz/Editora da Universidade de São Paulo, 1985, pp. 191-215.

________. **História concisa das matemáticas.** Lisboa : Gradiva, 1989.

SUCHODOLSKI, B. **A Pedagogia e as Grandes Correntes Filosóficas.** 2ª edição, Lisboa : Livros Horizonte Ltda, 1978.

SWETZ, F.J. Seeking Relevance? Try the History of Mathematics. In: **Mathematics Teacher**, 77 (1):54-62, jan. 1984.

________. Using Problems from the History of Mathematics in classroom Instruction. In: **Mathematics Teacher**, 82(5):370-377, may-1989.

SZABÓ, A. The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms. In: **Scripta Mathematica**, vol. XXVII, nº 1, 1960 (parte 1) e **Scripta Mathematica**, vol. XXVII, nº 2, 113-139 (parte 2).

THON, R. "Modern" Mathematics: an Educational and Philosophic Error? In: **American Scientist**, vol. 59, nov./dez., 1971, pp. 695-699.

UPINSKY, A. **A Pervensão Matemática - o olho do poder.** Rio de Janeiro : Francisco Alves, 1989.

VÁSQUEZ, A. S. **Filosofia da Praxis.** Rio de Janeiro : Editora Paz e Terra, 1968.

VEGA, E.M. Epistemologia y Enseñanza de la Matemática. In: **Educación Matemática**, vol. 1, nº 2, agosto 1989, pp. 12-16.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo : Martins Fontes, 1987.

VIOTTI DA COSTA, E. O Problema da Motivação no Ensino da História. In: **Revista de Pedagogia**, jan./junho, Ano IX, vol. IX, nº 16, 1963.

VLASTOS, G. **O Universo de Platão.** Trad. do francês por Maria Luiza Monteiro Salles Coroa, Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1987.

VUYK, R. **Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1965-1980**, tomos I e II. Madrid : Alianza Editorial, 1984.

WALLON, H. **Psicologia e educação da infância.** Lisboa : Edito--rial Estampa. 1975

WARTOFSKY, M.W. Piaget's Genetic Epistemology and the Marxist Theory of Knowledge. In: **Revue Internationale de Philosophie**, 36e Année, 142-143, Fasc. 4, pp. 470-507.

WATANABE, R.G. Trigonometria. In: **Subsídios para a implementação da proposta curricular de matemática para o 2º grau.** Volume 1. pp. 69-77. Secretaria de Estado da Educação - São Paulo - CENP, 1980.

WATHERHOUSE, W.C. Why Square Roots are Irrational. In: **The American Mathematical Monthly**, vol. 93, nº 3, março 1986.

WHITEHEAD, A. N. **Science and the Modern World.** 13ª edição, New York : The Macmillan Company, 1964.

________. **A Função da razão.** 2ª edição. Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1988.

WILDER, R.L. **Evolution of Mathematical Concepts.** New York : John Wiley e Sons, 1968.

________. Hereditary Stress As A Cultural Force in Mathematics. In: **Historia Mathematica**, vol. 1, 1974.

WILPERT, P. **A Filosofia da Época Patrística.** In: HEINEMANN, 1983, pp. 117-156), 1983.

WILTSHIRE, B. History of Mathematics in the Classroon. In: **Mathematics Teacher**, vol. XXIII, nº 8, December, 1930, pp. 504-508.

WINCHESTER, I. History, Science and Science Teaching. In: **Editorial da Revista Interchange**, vol. 20, nº 2.

WHEATLEY, G.H. Constructivist perspectives on science and mathematics learning. In: **Science Education**, 75(1):9-21, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

YACKEL, E. e outros. Experience, problem solving, and discourse central aspects of constructivism. In: **Arithmetic Teacher**, vol. 38, nº 4, December, 1990, pp. 34-35.

ZÚÑIGA, A.R. Algumas Implicaciones de la Filosofia y la Historia de las Matematicas en su Enseñanza. In: **Revista Educación**, 11(1):7-19, Costa Rica, 1987(a).

________. Fundamentos para una Nueva Actitud en la Enseñanza Moderna de las Matematicas Elementales. In: **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, volume 8, nº 2, outubro, 1987-(b).

________. Ideologia y Matemáticas en America Latina. In: **Segundo Congresso Latinoamericano de História de las Ciencias y la Tecnologia**, São Paulo, Brasil, fev. 1987(c).

________. **La Filosofia de las Matematicas - Análisis de textos en secundaria**. Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1ª Edición, 1988.

________. **Matemáticas y filosofía: estudios logicistas**. San José : Editorial de Universidad de Costa Rica, C.R., 1990.