UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

AS RELAÇÕES ENTRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE CÁLCULOS MENTAIS E ESCRITOS E OS NÍVEIS DE CONSTRUÇÃO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

KAREN HYELMAGER GONGORA BARICCATTI

2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

AS RELAÇÕES ENTRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE CÁLCULOS MENTAIS E ESCRITOS E OS NÍVEIS DE CONSTRUÇÃO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Autor: Karen Hyelmager Gongora Bariccatti
Orientador: Rosely Palermo Brenelli

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Karen Hyelmager Gongora Bariccatti e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 25/02/2010

Assinatura: ....

Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

____

2010

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP
Bibliotecária: Rosemary Passos – CRB-8ª/5751

Bariccatti, Karen Hyelmager Gongora.
B239r As relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas / Karen Hyelmager Gongora Bariccatti. – Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientadora : Rosely Palermo Brenelli.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Construtivismo (Educação). 2. Cálculos. 3. Cognição. 4. Algoritmos. I. Brenelli, Rosely Palermo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

09-351/BFE

Título em inglês : The relationship between the strategies of resolutions of mental and written calculations and levels of construction of the arithmetic operations
Keywords : Constructivism (Education); Calculation; Cognition; Algorithms
Área de concentração : Psicologia, Desenvolvimento Humano e Educação
Titulação : Doutora em Educação
Banca examinadora : Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli (Orientadora)
Profª. Drª. Regina Célia Grando
Profª. Drª. Lia Leme Zaia
Profª. Drª. Orly Zucatto Mantovani de Assis
Profª. Drª. Lucila Diehl Tolaine Fini
Data da defesa: 25/02/2010
Programa de Pós-Graduação : Educação
e-mail : karenhg@utfpr.edu.br

Para Reinaldo, meu marido, e nossos filhos Rafael, Bruna e Luiz Eduardo.

Quando a gente pensa que sabe todas as respostas, vem a vida e muda todas as perguntas.

Érico Veríssimo

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade do alcance de mais esta conquista.

À minha família, principalmente aos meus pais, a quem eu reconheço como os responsáveis por todas as minhas conquistas.

À minha irmã Hellenice, meu cunhado Fernando e meu sobrinho Fernando, pelo apoio e acolhimento afetuoso em sua casa, sempre que precisei.

Ao meu marido Reinaldo pelo apoio, compreensão pelas minhas ausências e sugestões valiosas no decorrer do trabalho.

Aos meus filhos Rafael, Bruna e Luiz Eduardo, pela existência em minha vida, por seu carinho e alegria em todos os momentos.

À querida professora Dra. Rosely Palermo Brenelli, por seu dinamismo, dedicação e por suas palavras de confiança e amizade ao longo desses anos. Sua valiosa contribuição como orientadora, a tornou um referencial em minha vida.

Às professoras Dra. Orly Z. M. de Assis, Dra. Regina Célia Grando e Dra. Lucila Fini, pela leitura crítica do trabalho, desde a qualificação.

À professora Lia Leme Zaia pela valiosa contribuição na análise da tese e presença em minha defesa.

A todos os meus professores da Faculdade de Educação da Unicamp, que, de certa forma, estão presentes neste trabalho.

Aos funcionários da Faculdade de Educação, principalmente Gi, Rita e Nadir e a todos da biblioteca pela colaboração em todos esses anos.

A todos os professores, funcionários e alunos das escolas de Toledo, que fizeram parte desta pesquisa.

Ao professor Dr. Miguel A.U. Opazo, pelo auxílio nas análises estatísticas.

Aos colegas Wilson, Renata e Maria José, pela amizade e contribuições importantes ao longo desses anos.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo apoio e confiança na realização deste trabalho.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

A presente pesquisa analisou as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos, em estudantes que cursavam a terceira e a quinta série do Ensino Fundamental. Além disso, fundamentada no construtivismo de Jean Piaget, identificou níveis de construção das operações aritméticas, em situações que envolviam igualação de quantidades e construção de diferenças (interdependência entre adições e subtrações) e situações de multiplicação e associatividade multiplicativa, o que possibilitou, então, verificar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Os participantes desta pesquisa foram alunos de escolas municipais e estaduais da cidade de Toledo-PR, totalizando vinte alunos (N=20) da terceira série e vinte (N=20) alunos da quinta série. Os dados da pesquisa foram obtidos pelo envolvimento dos estudantes na resolução de cálculos mentais e escritos de adição, subtração, multiplicação e divisão e situações de provas piagetianas, por meio de encontros individuais. Após a análise qualitativa e quantitativa dos dados, pôde-se afirmar a correlação entre a resolução de cálculos e o nível de construção das operações aritméticas. A construção de interdependências entre as operações de adição e multiplicação também pôde ser verificada. Assim, os estudantes que apresentaram níveis mais avançados nas provas piagetianas, alcançaram mais acertos nas resoluções e o uso de estratégias mais sofisticadas, como as de decomposição dos algarismos e de recuperação automática dos resultados. Tal uso de estratégias foi observado com maior frequência em cálculos mentais. Nos cálculos escritos, a maior influência foi a dos algoritmos comumente ensinados na escola. Tais resultados de cálculos mentais e de cálculos escritos foram identificados como independentes da série dos estudantes e dependentes dos níveis cognitivos. No caso das adições e das subtrações houve um aumento linear de 10% de acertos para cada um dos níveis investigados e para as multiplicações e divisões, o aumento foi de 16% de acertos entre os níveis cognitivos.

Palavras-chave: 1.Construtivismo. 2.Cálculos. 3.Cognição. 4.Algoritmos.

ABSTRACT

This research examined the strategies for solving mental calculations and written by students who attended the third and fifth grade of elementary school. Furthermore, based on constructivism of Jean Piaget, identified levels of development of arithmetic in situations involving equalization of quantities and construction of differences (interdependence between addition and subtraction) and situations of multiplication and multiplicative associativity, which allowed, then, examine relationships between the strategies for solving mental and written calculations and the levels of construction of the arithmetic operations. The participants in this study were students from state and municipal schools of the city of Toledo-PR, a total of twenty students (N = 20) of the third series and twenty (N = 20) students in fifth grade. The survey data were obtained by the students' involvement in the resolution of mental and written calculations of addition, subtraction, multiplication and division situations and Piagetian proof, through individual meetings. After quantitative and qualitative analysis of data, could be confirmed the correlation, between the resolution of calculations and the level of construction of arithmetic operations. The construction of interdependencies between the operations of addition and multiplication can also be observed. Thus, students who had higher levels of Piagetian proof, reached more items in the resolutions and the use of more sophisticated strategies, such as the decomposition algorithm and retrieval of the results. Such use of strategies was observed more frequently in mental calculations. In the written calculations, the greater influence was of the algorithms commonly taught in school. These results were identified as independent of the grade of the students, which was confirmed by testing the null hypothesis, which showed strong similarity between the mean scores and their standard deviations for the third and fifth grades, in the cognitive levels. In the case of additions and subtractions was a linear increase of 10% of correct answers for each of the levels investigated and multiplications and divisions, the increase was 16% of correct answers between the cognitive levels.

Keywords: 1. Constructivism. 2. Calculations. 3. Cognition. 4. Algorithms.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Fonte: Quino, 1993

Todo conhecimento deve possuir um frescor e uma novidade perpétuos, uma inocência sempre renascente, sem a qual o contato de nosso espírito com o real deixa de ter sentido. O verdadeiro conhecimento deve descobrir o universo em cada instante, como se nos fizesse assistir ao seu nascimento.

Louis Lavelle

As discussões e a apresentação de propostas para o ensino e a aprendizagem da matemática não são recentes. Tais discussões, no Brasil, intensificaram-se com o movimento escolanovista nas décadas de 1930 e 1940, que buscou acompanhar o cenário internacional da época. No entanto, o ideário de tal movimento, o qual preconizava uma matemática mais concreta e significativa para o aluno, de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo, não chegou a ser disseminado em todo o país para, dessa maneira, influenciar e/ou alterar a metodologia tradicional das salas de aula. De acordo com Fiorentini (1995, p. 5), até o final da década de 1950, no Brasil, o ensino de matemática foi caracterizado pela "ênfase às idéias e formas da matemática clássica, sobretudo ao modelo euclidiano e à concepção platônica de matemática", salvo raras exceções. Nas décadas de 1960 e 1970, prevalecendo uma visão behaviorista de aprendizagem, configura-se uma maneira tecnicista de conceber a matemática e a ênfase recai sobre o treino de habilidades estritamente técnicas, o apego a fórmulas e definições. Assim, o rigor e a precisão da linguagem matemática são valorizados "como se a matemática não tivesse relação com interesses políticos e sociais" (Fiorentini, 1995, p.16). A partir da década de 1980, começam a surgir novos questionamentos sobre o ensino da matemática e as primeiras linhas de pesquisa de uma comunidade nacional de investigação da Educação Matemática. Tais questionamentos seguem até a atualidade, no sentido de que ainda se busca um ensino significativo, transdisciplinar, de caráter investigativo, motivador, ligado a aspectos culturais e sociais na área matemática.

Para Piaget (1977), o ensino, em todas as suas formas, abarca três problemas centrais, "cuja solução está longe de ser alcançada e dos quais se pode indagar como serão resolvidos senão com a colaboração dos mestres ou de uma parte deles" (p.10). Observa-se a atualidade desses problemas, a seguir descritos.

O primeiro problema central é formulado pela questão: qual é o objetivo desse ensino? Acumular conhecimentos úteis? (Mas em que sentido são úteis?) Aprender a aprender? Aprender a inovar, a produzir o novo em qualquer campo tanto quanto no saber? Aprender a controlar, a verificar ou simplesmente repetir?

O segundo problema refere-se aos objetivos do ensino: escolhidos esses objetivos (por quem ou com o consentimento de quem?), resta determinar, ainda, quais são os ramos (ou detalhe dos ramos) necessários, indiferentes ou contraindicados para atingi-los: os da cultura, os do raciocínio e, sobretudo (o que não consta de um grande número de programas), os ramos da experimentação, formadores de um espírito de descoberta e de controle ativo?

Como problema final, ressalta o autor: escolhidos os ramos, resta conhecer suficientemente as leis do desenvolvimento mental para encontrar os métodos mais adequados ao tipo de formação educativa desejada.

A partir desses problemas, principalmente em relação ao terceiro - conhecer suficientemente as leis do desenvolvimento mental – retomam-se as orientações teóricas e os principais constructos de Piaget, tanto em seus aspectos mais gerais do desenvolvimento cognitivo, como no sentido das construções das operações aritméticas. Disso decorre a elaboração do primeiro e segundo capítulos do presente estudo, em que foram resgatadas algumas tendências do ensino da matemática e explicado o conhecimento lógico-matemático, segundo o referencial piagetiano.

Ao descrever, analisar e explicar as estruturas cognitivas e os mecanismos que possibilitam o conhecimento, Piaget envolveu investigações no âmbito do desenvolvimento cognitivo, social, afetivo, visto que são construções paralelas, indissociáveis e irredutíveis. Em particular atenção, Piaget evidenciou a gênese da noção de quantidade (1941), lógica (1959), número (1981), tempo (1946a), movimento e velocidade (1946b), espaço (1956), geometria (1960), probabilidade (1950), entre outras. Investigou, também, os mecanismos da abstração (1977a), da contradição (1978a), da dialética (1980), da tomada de consciência (1977b), do possível e do necessário (1981,1983), do fazer e do compreender (1978), do processo de equilibração (1977c), dentre tantos outros aspectos teóricos que poderiam ser destacados.

Um marco importante, dentre tantas contribuições, e que parece sempre atual, é sua preocupação com a Educação Matemática. Conforme Piaget (1972), a orientação dada a essa educação depende do sentido epistemológico que o desenvolvimento psicológico recebe, bem como a aquisição das operações e das estruturas lógico-matemáticas. Assim, Piaget (1972) afirma que seria justificável colocar a ênfase nas explicações do professor, na "transmissão de verdades" prontas, e insistir na utilização da linguagem axiomática, sem muita preocupação a respeito das idéias das crianças, se "o platonismo está certo ao considerar que as entidades matemáticas existem independentemente do sujeito, ou se o positivismo lógico está correto ao reduzir as entidades matemáticas a uma sintaxe e a uma semântica gerais" (p.8).

No entanto, em seu posicionamento epistemológico, Piaget considera que existe uma espontânea e gradual construção das estruturas lógico-matemáticas elementares em função do desenvolvimento global da inteligência; o resgate de como se processa esse desenvolvimento global, portanto, deve ser uma preocupação da Educação Matemática.

Um tema também recorrente, no presente estudo, é o fato de coexistirem aspectos igualmente importantes no desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático: a lógica e a matemática, que deveriam fazer parte do sistema educacional com a mesma intensidade. A lógica, enquanto fator que mantém o "fechamento" e manutenção das estruturas e a matemática, que resulta de uma construção de "aberturas" a todos os possíveis do pensamento. Cabem, aqui, algumas considerações e preocupações que orientaram a formulação do problema desta pesquisa.

A primeira consideração é o apego excessivo no campo dos formalismos e das abstrações no trabalho com a área matemática. Nesse sentido, a matemática é apenas lógica e formal, sem prever os processos iniciais de pré-lógica e de intuição do pensamento. Uma segunda consideração versa sobre a necessidade de se considerar o caráter dialético do campo matemático. É necessário, pois, analisar o posicionamento de Piaget (1980) ao considerar que a matemática é a disciplina que produz o maior número de superações por síntese e que mais constrói seus próprios conteúdos. Ele também considera que os matemáticos se apegam às suas conquistas, uma vez asseguradas, e não aos processos que conduziram a elas. A dialética lógico-matemática, portanto, deve ser situada no campo da invenção e da heurística, mais que no campo das estruturas concluídas.

Já em 1956, na Conferência Internacional de Instrução Pública (Bureau Internacional de Educação e Unesco), na Recomendação nº 43 (O ensino das Matemáticas nas Escolas secundárias), as preocupações estão presentes e são ressaltadas por Piaget (1977). Estão expressas, a seguir, as recomendações:

Importa:

a) levar o aluno a formar as noções e descobrir por si mesmo as relações e as propriedades matemáticas, em vez de lhe ser imposto um pensamento adulto, já acabado;

b) assegurar a aquisição das noções e dos processos operatórios antes de introduzir o formalismo;

c) só confiar o automatismo às operações assimiladas.

É indispensável:

a) fazer que o aluno inicialmente adquira a experiência dos seres e das relações matemáticas, e iniciá-lo, em seguida, no raciocínio dedutivo;

b) estender progressivamente a construção dedutiva das matemáticas;

c) aprender a formular os problemas, a pesquisar dados e a explorar e apreciar os resultados;

d) dedicar-se, de preferência, à investigação heurística dos problemas do que à imposição doutrinária dos teoremas;

É preciso:

a) estudar os erros dos alunos e ver neles um meio de conhecer seu pensamento matemático;

b) treinar na prática o controle pessoal da autocorreção.

Diante de importantes considerações já expressas, esta pesquisa centraliza sua preocupação na coexistência de posturas didáticas diferentes para o tratamento de conceitos matemáticos e de estratégias de cálculos das operações aritméticas no sistema educacional. É bastante difundida a visão de que os conceitos numéricos são construídos pelas crianças e várias pesquisas têm ressaltado esse aspecto de construção do conhecimento (Assis, 1976; Rangel, 1992; Brenelli, 1993, 1996; Kamii & Devries, 1995, 2005; Lopes, 2002; Nunes & Bryant, 1997; Guimarães, 1998; Brito, 2001; Taxa & Fini, 2001; Pauleto, 2001; Nogueira, 2002). Por outro lado, os procedimentos de cálculos, sejam escritos ou mentais, são vistos ainda, no espaço escolar, como conteúdos para serem observados e empiricamente retidos. Assim, a ênfase recai no ensino de "como fazer" para resolver as adições, as subtrações, as multiplicações, as divisões. Logo, ensinam-se as regras a serem memorizadas. Torna-se uma visão bastante reduzida da matemática concebendo-a como uma repetição de cálculos e fórmulas e a realização infindável de exercícios; segundo Caraça (2002), seria como "tomar uma lista de nomes de pessoas pelas próprias pessoas, esquecendo os mundos que por trás delas se escondem" (p.11).

A tradição escolar mantém o distanciamento entre conteúdo e forma: o conteúdo - no caso, as operações aritméticas - é distanciado da forma de sua representação em sistemas simbólicos, o que consolida a concepção de que, para a realização dos algoritmos convencionais, pouco deve ser compreendido, apenas memorizado. Segundo Panizza (2006),

> ...o risco é considerar que os conceitos são motivo de construção, que estão ligados ao sentido, à compreensão, enquanto os mecanismos estão desprovidos de sentido e se pode ter acesso a eles pela observação sensorial. É assim que, em algumas correntes de ensino, coexistem uma concepção construtivista do ensino de conceitos matemáticos e uma concepção empirista em relação aos sistemas simbólicos (...) Particularmente, falta integrar à sala de aula os resultados de pesquisas que mostram propostas didáticas e que apresentam uma hipótese construtivista em relação com ambos os aspectos da educação matemática (p. 30).

Nesse sentido apontado pela autora, de apresentar hipóteses construtivas para os conceitos e para a compreensão dos algoritmos, insere-se este estudo. Para tanto, formulou-se como o problema da pesquisa a indagação de quais seriam as estratégias apresentadas em cálculos mentais e escritos por estudantes de diferentes séries do Ensino Fundamental, e que relações podem ser estabelecidas entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas.

Após tal delineamento do problema da pesquisa, buscou-se o resgate, na literatura, de concepções diferenciadas sobre a relação entre a resolução de cálculos mentais e escritos e os processos construtivos; tal resgate encontra-se presente no terceiro capítulo. Dessa forma, os estudos de Vergnaud (1988, 1991, 1996), Duval (1993), Brousseau (1983), Charnay (1994), Chavallard (1992) e D'Amore (2005), em uma perspectiva teórica da Didática da Matemática francesa, foram incorporados à pesquisa para a compreensão dos diferentes sentidos que as representações dos objetos matemáticos podem adquirir. Outro grupo de estudiosos foi importante no estudo por investigarem a resolução de cálculos mentais e escritos em diferentes níveis escolares, além de quantificarem os acertos e erros dos estudantes, identificarem as melhores estratégias de resolução e a influência de aspectos como o senso numérico, a idade, a complexidade dos cálculos para a fluência e exatidão nessas resoluções (Shane, 2004; Barrouillet & Lepine, 2005; Lefreve *et al.*, 2004; Jackson *et al.*, 2005; Mallofeeva *et al.*, 2004; Sally & Coral, 2005; Johansson, 2005 e Lucangeli et al., 2003).

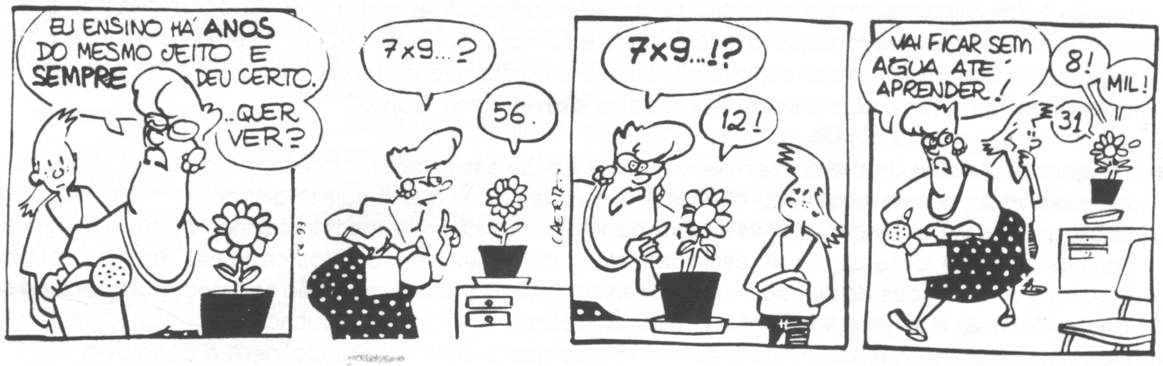
O quarto capítulo evidenciou os objetivos da pesquisa e os participantes da terceira e quinta séries que realizaram os cálculos mentais e os escritos, além das provas piagetianas selecionadas na pesquisa. A primeira prova piagetiana selecionada investigou a relação entre as adições e subtrações (igualação de quantidades e construção de diferenças), de acordo com a obra "As formas elementares da dialética" (1980); a segunda prova selecionada envolveu situações de multiplicação e associatividade multiplicativa, conforme a obra "O possível e o necessário-evolução dos necessários na criança" (1983). Vale ser ressaltada a opção pela manutenção dos participantes de terceira e quinta séries, visto que em estudos anteriores (Bariccatti, 2003; Bariccatti & Brenelli, 2006), constataram-se significativas diferenciações nos desempenhos dessas séries. Nesses estudos anteriores, foram analisados e comparados os níveis de construção de interdependências entre as adições e as subtrações em quarenta e oito estudantes com rendimentos escolares diferenciados em matemática. As condutas dos estudantes de terceira e quinta séries com rendimento insatisfatório em matemática não diferiram, demonstrando o início das construções das "adições e subtrações relativas", termo utilizado por Piaget (1980), em que estão presentes sínteses de operações de sentidos contrários. Os alunos com rendimento escolar satisfatório na quinta série apresentaram níveis superiores de construção das interdependências entre as operações, o que confirma a relação dessa construção com os conteúdos trabalhados no currículo escolar da respectiva série.

Dessa forma, foi mantida a prova piagetiana que envolve situações sobre a dialética entre as adições e as subtrações, já citada, pela possibilidade de correlação com os aspectos envolvidos na resolução de cálculos escritos e mentais de adição e subtração. Foi incluída a prova da multiplicação e associatividade da multiplicação pela possibilidade de investigação em conjunto com as resoluções de multiplicações e divisões mentais e escritas. As igualações solicitadas na prova sobre a dialética da adição e da subtração podem ser observadas na prova da multiplicação e associatividade multiplicativa, sob a forma de novas questões qualitativamente superiores.

Os dados foram apresentados e analisados qualitativamente e quantitativamente, no quinto capítulo, atendendo aos três objetivos formulados na pesquisa. Assim, estão expressos os totais de acertos e erros cometidos pelos estudantes da terceira e quinta séries nas resoluções das operações aritméticas, igualmente expressas, as estratégias de resolução dos cálculos mentais e escritos e, por último, as relações entre tais resoluções e os níveis de construção das operações aritméticas. O capítulo final discute os resultados da pesquisa e tece algumas considerações finais visando contribuir para a aprendizagem da área matemática.

Capítulo 1

AS TENDÊNCIAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA



A teoria de Piaget, ao apresentar um sujeito que constrói seu conhecimento em constante interação com os objetos, reafirma novos paradigmas que a atualidade vem ressaltando, como a busca da construção de uma aritmética baseada na compreensão e não nos automatismos adquiridos por treinos excessivos e repetições de fórmulas. Tal teoria é consagrada, segundo Macedo (2001), a dois propósitos, a saber: descrever e explicar as estruturas psicológicas que possibilitam o conhecimento (no sentido científico) e descrever e explicar os processos que direcionam para estruturas cada vez mais elaboradas quanto a essa tarefa de "conhecer".

Assim, busca-se rever, neste capítulo, os principais processos e as estruturas que possibilitam o conhecimento, ressaltando que as orientações metodológicas e as posturas didáticas para o ensino-aprendizagem da matemática podem decorrer do sentido epistemológico que o desenvolvimento psicológico recebe. Uma ênfase maior será dada, neste estudo, ao sentido epistemológico do desenvolvimento psicológico; no entanto, entende-se que os sentidos socioculturais, políticos, teleológicos e históricos são igualmente importantes na determinação das orientações metodológicas e posturas didáticas assumidas para o ensino de matemática. Buscaram-se exemplos, dessas diversas orientações metodológicas, direcionados para as resoluções de cálculos mentais e escritos, foco também desta pesquisa.

A partir dessa reflexão, pode-se dizer que as posturas mais tradicionais que enfatizam as explicações do professor, sem valorizar as idéias das crianças sobre os fenômenos, estão coerentes com o posicionamento do platonismo e do positivismo lógico (Piaget, 1972). De acordo com Imaguire (2005), compreende-se o platonismo enquanto uma concepção filosófica que afirma a existência de entidades abstratas, ou seja, "entidades que não são materiais, como os objetos físicos, nem espaço-temporais, como eventos ou processos, nem mentais, como representações ou sentimentos" (p.11). Segundo o platonismo matemático[1], os objetos matemáticos são entidades abstratas, como números e funções, independentes do conhecimento. Um matemático é um cientista empírico no sentido de descobrir os objetos que já existem e não podem mais ser inventados e também não são criados por meio de provas que os demonstrem.

O positivismo lógico também almejava uma unidade metodológica para a investigação dos dados naturais e sociais e, nesse sentido, postulava que os fenômenos estavam regidos por uma lei invariável que atendia a dois princípios: o primeiro princípio é o do empirismo, segundo o qual um enunciado ou um conceito só será significante e passível de verificação na medida em que possua uma base empírica, fundada na experiência; o segundo princípio determina que os conceitos só serão aceitos como científicos se forem passíveis de exata formulação na linguagem da lógica (Oliveira, 2002). Tais visões (do platonismo e do positivismo lógico) não se coadunam com o posicionamento epistemológico de Piaget, retomado a seguir, pelo fato de o platonismo considerar que as entidades matemáticas existem independentes do sujeito e o positivismo lógico considerar que as entidades matemáticas possam ser reduzidas a uma sintaxe e uma semântica gerais (Piaget, 1971; 1972).

O foco na aquisição do conhecimento, segundo uma concepção mais tradicional, possui um movimento unilateral, do professor para o aluno; a ênfase recai nas exposições orais repetitivas e tediosas de definições e regras, procedimentos e nomenclaturas com nenhuma (ou

---

[1] O termo platonismo matemático foi usado primeiramente por Paul Bernays, em 1935, na obra "Sur le platonisme dans les mathématiques".

quase nenhuma) preocupação com a descoberta ou construção de conceitos. O percurso do aprendizado poderia ser resumido na seguinte movimentação: cabe ao professor “transmitir” os conhecimentos; os estudantes, atentos, escutam e anotam em seu caderno as informações e exemplos de exercícios resolvidos, resolvem uma série de novos exercícios para fixação e são avaliados na prova. Assim, as crianças somente resolvem os problemas se previamente o professor lhes ensinou todas as contas, a escrita dos números, as fórmulas, enfim, os procedimentos canônicos, pré-determinados.

Tal movimentação foi apresentada por Santos (2002) como a metáfora da “leitura do romance” visto que, ao lermos um romance policial, começaríamos do último capítulo, no qual o assassino já é revelado ao leitor. Dessa mesma forma, nas aulas de matemática, ao invés do interesse na construção de conceitos pelos alunos, o professor já parte da definição desse conceito, contando de início “quem é o culpado do crime”, o que reforça a idéia de que os alunos não possuem nenhum conhecimento anterior ou prévio que possa ser relacionado aos conteúdos a serem ensinados.

Mesmo que na atualidade ainda sejam observadas posturas tradicionais que privilegiam o posicionamento do platonismo e do modelo euclidiano, sua forte influência no ensino de matemática ocorreu até o final da década de 50. Para Fiorentini (1995, p. 6), os livros didáticos brasileiros anteriores a essa década “parecem reproduzir implicitamente o modelo euclidiano e assim partem de elementos primitivos e definições” para prosseguir com a teoria e, depois, seguem os exercícios de aplicação. Nesse sentido, os livros didáticos brasileiros seguem os modelos internacionais, como o exemplo abaixo retirado do livro sobre Aritmética e Geometria do autor Gillet-Damitte, inspetor de uma escola francesa, publicado em 1888:

PEQUEÑA

ENCICLOPEDIA DE LAS ESCUELAS

ARITMÉTICA

Y

GEOMETRÍA

POR

GILLET-DAMITTE

Inspector que fué de Instrucción primaria en Francia,
Oficial de Instrucción pública.

PARÍS

LIBRERÍA DE HACHETTE Y C^{ia}

79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1888

ARITMÉTICA

CAPÍTULO I.

CAPÍTULO II.

CAPÍTULO III.

CAPÍTULO IV.

CAPÍTULO V.

CAPÍTULO VI.

CAPÍTULO VII.

CAPÍTULO VIII.

CAPÍTULO IV

DE LA ADICIÓN Ó SUMA

31. Si tenéis en un bolsillo 4 fr., y 3 en un ropero, ¿cuánto tenéis en totalidad?

Para responder á esa cuestión, juntáis, reunís, agregáis los números 4 y 3, diciendo 4 y 3 valen 7. Habéis hecho, en consecuencia, una *adición* ó *suma*.

La adición es una operación mediante la cual se reunen varios números de la misma especie, en uno solo, que se denomina suma ó total.

En el ejemplo anterior, 3 y 4 son los *sumandos*, y 7 la suma.

El signo de la adición es +, y sirve para indicar de manera abreviada que precisa agregar un número á otro, por ejemplo, 4 á 3. Entonces se escribirá 4 + 3. Después se pone el signo *igual á* = 7.

TABLA DE SUMAR

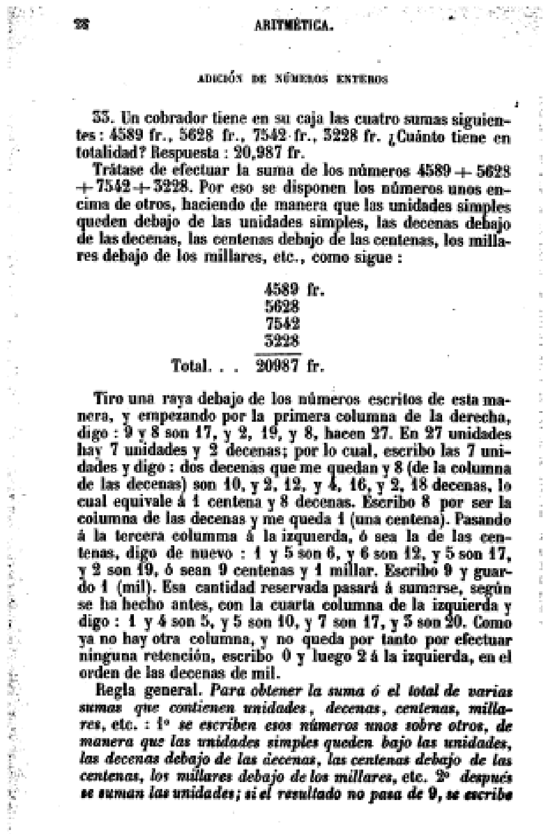
32. Para facilitar la suma, conviene aprender de memoria qué cifras se obtienen adicionando dos á dos los nueve números enteros. Para tal fin es sumamente útil la *tabla de sumar*.

Línea horizontal

Línea vertical

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Usos de esa tabla. — Sean los números 7 y 8 aquellos cuya suma se desea conocer. Tómese 7 en la primera columna vertical á la izquierda y 8 en la primera columna superior horizontal, y bájese la vista á lo largo de la columna vertical donde se encuentra 8, hasta la sección horizontal en que está colocado el 7. Allí veréis 15, que es, en efecto, la suma de 7 + 8.



22 ARITMÉTICA.

ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

33. Un cobrador tiene en su caja las cuatro sumas siguientes: 4589 fr., 5628 fr., 7542 fr., 3228 fr. ¿Cuánto tiene en totalidad? Respuesta : 20,987 fr.

Trátase de efectuar la suma de los números 4589 + 5628 + 7542 + 3228. Por eso se disponen los números unos encima de otros, haciendo de manera que las unidades simples queden debajo de las unidades simples, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, los millares debajo de los millares, etc., como sigue :

$$\begin{array}{rr} & 4589 \text{ fr.} \\ & 5628 \\ & 7542 \\ & 3228 \\ \hline \text{Total. . .} & 20987 \text{ fr.} \end{array}$$

Tiro una raya debajo de los números escritos de esta manera, y empezando por la primera columna de la derecha, digo : 9 y 8 son 17, y 2, 19, y 8, hacen 27. En 27 unidades hay 7 unidades y 2 decenas; por lo cual, escribo las 7 unidades y digo : dos decenas que me quedan y 8 (de la columna de las decenas) son 10, y 2, 12, y 4, 16, y 2, 18 decenas, lo cual equivale á 1 centena y 8 decenas. Escribo 8 por ser la columna de las decenas y me queda 1 (una centena). Pasando á la tercera columma á la izquierda, ó sea la de las centenas, digo de nuevo : 1 y 5 son 6, y 6 son 12, y 5 son 17, y 2 son 19, ó sean 9 centenas y 1 millar. Escribo 9 y guardo 1 (mil). Esa cantidad reservada pasará á sumarse, según se ha hecho antes, con la cuarta columna de la izquierda y digo : 1 y 4 son 5, y 5 son 10, y 7 son 17, y 3 son 20. Como ya no hay otra columna, y no queda por tanto por efectuar ninguna retención, escribo 0 y luego 2 á la izquierda, en el orden de las decenas de mil.

Regla general. *Para obtener la suma ó el total de varias sumas que contienen unidades, decenas, centenas, millares, etc. : 1° se escriben esos números unos sobre otros, de manera que las unidades simples queden bajo las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, los millares debajo de los millares,* etc. 2° *después se suman las unidades; si el resultado no pasa de 9, se escribe*

Figura 01: Explicações sobre adição no livro de Aritmética e Geometria, publicado em 1888. Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62213k.image.r=aritm%C3%A9tica.f32.langPT. Acesso em 12/06/2009, traduzido para o espanhol, do original francês.

Observa-se que a explicação sobre o que é adição vem logo no início do capítulo e, apesar de apresentar um fato da realidade para essa operação, ele não é o foco do texto. O sinal da adição já é expresso, bem como a tabela da adição para memorização; na página seguinte, é explicada a disposição das unidades, dezenas e centenas em uma adição e sua forma de resolução e, no final do capítulo, estão os exercícios. Diante de uma preocupação fundamentalista, na época, em que tudo deve ser demonstrado logicamente, a geometria ganha um destaque especial; nota-se, então, que é o outro tema do livro. No caso do Brasil, assiste-se a um ensino dual que garante à classe dominante da época um ensino rigoroso, de formação do "espírito", disciplinador da mente. Para outras classes sociais, menos privilegiadas, a ênfase é dada ao cálculo e a abordagem é de uma "matemática mais mecânica e pragmática", principalmente em cursos técnicos (Fiorentini, 1995, p.7).

A avaliação escolar, na concepção tradicional, segue a lógica até aqui mencionada e ressalta as respostas certas e a reprodução de modelos passados pelo professor; saber matemática é somente ter domínio dos procedimentos formais. O erro deve ser evitado e se por acaso apareceu, culpam-se os estudantes que “não prestaram atenção na aula” ou o professor que “não explicou direito a matéria”. Na verificação da aprendizagem, os alunos são rotulados por décimos de diferença, existindo alunos 8,3, alunos 4,2, dentre outros exemplos. A recuperação é a de notas, ao invés de conceitos. Logo, o aluno se esforça para tirar a média sete, no caso, sem preocupar-se, na maioria das vezes, se os conteúdos foram bem compreendidos e construídos.

A influência do positivismo lógico, com seus dois principais princípios: o do empirismo e da exata formulação de conceitos pela linguagem da lógica, esteve presente no Brasil em momentos distintos. O princípio do empirismo esteve presente a partir da década de 20, época em que, conforme Fiorentini (1995), surge uma tendência em oposição à escola clássica tradicional, é a tendência empírico-ativista, para a qual o conhecimento matemático emerge do mundo físico e é extraído pelo homem por meio dos sentidos. Seguindo ideários da Escola Nova, os representantes brasileiros desse movimento disseminam concepções de uma matemática mais pragmática e influenciam os livros didáticos e diretrizes metodológicas, como pode ser constatado nos dois primeiros anos do programa de matemática de 1926 do Colégio Pedro II, quando aparece a Aritmética. Para o primeiro ano, recomenda-se no Programa “um caráter acentuadamente prático”. Na seção “Noções Preliminares”, aparecem os elementos do primeiro tópico: “Numeração. Numeração falada; numeração escrita. Numeração romana. As quatro operações fundamentais. Provas. Exercícios de cálculo mental. Problemas” (Vechia & Lorenz, 1998, p. 251).

O livro de Euclides Roxo, em edição de 1928, gerou propostas curriculares para o ensino de matemática, unificando as áreas de Aritmética, Álgebra e Geometria na disciplina Matemática.

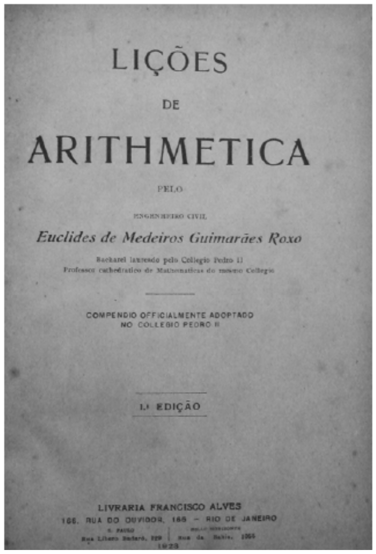


Figura 02: Capa do livro de Euclides Roxo, Lições de Arithmetica, edição de 1928.

A finalidade da educação, na vertente empírico-ativista, é o desenvolvimento das potencialidades individuais a partir de manipulação de objetos, visualização e resolução de problemas. Em oposição à tendência clássica tradicional, cujo centro de gravidade é o conteúdo, o centro de gravidade desloca-se "ao aluno e às atividades e/ou problemas heurísticos" (Fiorentini, 1995, p. 12).

O princípio da aplicação da exata linguagem da lógica nos conceitos esteve mais fortemente presente na década de 60, com a tendência formalista moderna. No Brasil, tal tendência enfatizou e valorizou a unidade e a estruturação lógica da matemática, em consonância com a tendência internacional de reformulação curricular dessa área, conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM). O documento elaborado pelo GEEM (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática) intitulado "Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio", faz sugestões quanto aos números inteiros, operações fundamentais, propriedades e sistemas de numeração. A seguinte recomendação é feita: "A idéia de conjunto deveria ser a dominante; as propriedades das operações com os números inteiros devem ser ressaltadas como início das estruturas matemáticas. Lembrar a importância de outros sistemas de numeração, além do decimal." (GEEM, 1965, p. 91).

Aliadas ao movimento MMM, começam a ser disseminadas as ideias da corrente tecnicista norte-americana que, "pretendendo otimizar os resultados da escola e torná-la eficiente e funcional, aponta como soluções para os problemas do ensino e aprendizagem o emprego de técnicas especiais de ensino e de administração escolar" (Fiorentini, 1995, p. 15). Dessa forma, o centro de gravidade desloca-se do professor/conteúdos, do aluno/atividades, para os objetivos instrucionais, os recursos e as técnicas de ensino. Ao entender a aprendizagem enquanto mudança de comportamento por meio de estímulos e respostas, como o *behaviorismo* apregoava, a tendência tecnicista formulava que, para o alcance de um objetivo instrucional, bastava a redação correta desse objetivo, a realização da sequência de atividades formulada por especialistas, o treino de técnicas e modelos de exercícios para que esse objetivo fosse alcançado e finalizado passando-se, assim, ao próximo objetivo.

As tendências do ensino de matemática até agora mencionadas, e de acordo com a descrição de Fiorentini (1995): formalista clássica, empírico-ativista, formalista moderna e tecnicista, vêm de encontro ao que queremos apresentar sobre a teoria piagetiana. Como retoma Becker (2005), a afirmação "A humanidade é a obra dela mesma", do filósofo italiano do século XVIII, Gianbattista Vico, foi realizada pela obra de Piaget. Assim, entende-se que nada está pré-formado ou será totalmente imposto ao indivíduo, como concebem as visões aprioristas, empiristas, tecnicistas, mais precisamente as visões do platonismo e do positivismo lógico, já retomadas. A partir disso, entende-se que o desenvolvimento mental está em construção dialética constante, cada vez mais móvel e mais estável. Portanto, majorante, com equilíbrios novos e melhores tanto em sua estrutura qualitativa, como no aumento de seu campo de atuação. Há um aumento, também, na organização motora, verbal e mental, um aumento na compreensão do real e na possibilidade de ações reversíveis, associativas, com maior plasticidade.

O enfoque construtivista de Piaget

Ao explicitar os fatores que intervêm na construção de estruturas (classificação, partição, seriação, deslocamento, grupo, redes, dentre outras estruturas importantes para o campo matemático), Piaget (1970) enumera quatro fatores que permitem o conhecimento. O primeiro é de ordem biológica, como a maturação do sistema nervoso e endócrino que atua no desenvolvimento cognitivo, mas não é o fator determinante desse desenvolvimento; é uma "condição de possibilidades" de atuação no meio. O segundo fator refere-se às experiências físicas e lógico-matemáticas, em que o conhecimento físico provém da ação sobre os objetos e observação de suas propriedades e transformações, já o conhecimento lógico-matemático caracteriza-se pelas relações lógicas construídas pelos sujeitos. O terceiro fator do desenvolvimento cognitivo é designado como transmissão educativa e interações sociais, que envolvem as informações recebidas e as trocas de pontos de vista entre crianças ou entre crianças e adultos e que, sendo desafiadoras, são fontes importantes de conflitos, gerando níveis mais elevados de desenvolvimento.

O quarto fator aparece coordenando e regulando os fatores maturação, experiência, transmissão e interações sociais: a equilibração. Para Piaget (1977b), esse fator é um "processo que leva de certos estados de equilíbrio aproximado para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e reequilibrações"(p.13). O processo de equilibração comporta dois principais postulados: O primeiro refere-se ao processo de assimilação, no qual os esquemas incorporam elementos do meio exterior compatíveis com a sua natureza. O segundo refere-se ao fato de esses esquemas de assimilação necessitarem de uma acomodação aos elementos assimilados. Logo, modificações são feitas considerando as suas particularidades sem contudo, perder sua continuidade ou seu poder de assimilação anterior.

Diante disso, o desenvolvimento cognitivo processa-se por reações ativas do sujeito às perturbações do meio, uma busca constante de um novo equilíbrio, quando o estado de equilíbrio anterior, entre os processos de assimilação e acomodação, não é mais suficiente para garantir as interações entre o sujeito e o objeto.

Quando se trata, então, da aquisição do conhecimento, nunca se encontra um ponto de parada no desenvolvimento cognitivo, o qual não está pré-formado; cada desequilíbrio provoca sempre a busca de equilíbrios mais estáveis, novos problemas vão sendo levantados na medida em que os estados de equilíbrio se consolidam e as estruturas cognitivas estão envolvidas constantemente em diferenciações e integrações em sistemas sempre mais complexos. A partir dessas colocações, cabe destacarem-se as diversas formas de equilibração presentes no desenvolvimento mental.

Em primeiro lugar, de acordo com Piaget (1977b), está equilibração entre a assimilação desses esquemas de ação e a acomodação dos esquemas aos objetos. Ao mesmo tempo em que os objetos são necessários para o desenvolvimento das ações, estas, conferindo significado aos objetos, podem transformá-los. Como já foi ressaltado, existem conflitos entre o sujeito e os objetos se a estrutura que o sujeito possui não puder se acomodar às características do objeto, ou quando as previsões feitas pelos sujeitos não forem confirmadas.

A segunda forma de equilibração é aquela que assegura a interação entre os subsistemas quando são utilizados diferentes esquemas para se atingir uma mesma finalidade. Muitas vezes, ocorrem também conflitos entre os subsistemas pela falta de coordenação entre eles.

A terceira forma envolve o equilíbrio da diferenciação e da integração das relações entre os subsistemas e a totalidade, a conservação do todo e das partes. Cada esquema modificado diferencia-se de outros e precisa ser integrado ao sistema total, que sofrerá alterações nessa integração.

Além das três formas de equilibração, os desequilíbrios são compreendidos por Piaget (1974a) como fontes de progresso do conhecimento, encaminhando os sujeitos a ultrapassarem os estados em que atualmente se encontram para novas direções. A principal razão desses desequilíbrios encontra-se na ausência de simetria entre as afirmações e as negações, centrando-se as crianças, nos anos iniciais do desenvolvimento, nos aspectos positivos dos objetos, nas afirmações, mais que nas negações. Tais considerações são importantes para a área matemática ao constatarmos que as crianças, nas séries iniciais do ensino fundamental, centram-se nas adições, conseguem resolvê-las com mais acertos que nas subtrações (Piaget, 1974b; Nunes & Bryant, 1997; Kamii, 1995; Kamii & DeVries, 2001). As negações são construídas pelos sujeitos marcando um processo mais demorado e complexo, dada sua natureza formal. Progressivamente, a negação é integrada no sistema operatório, em que está presente, principalmente, a reversibilidade do pensamento, resultando na compreensão de que a escolha da aplicação de um sistema implica na não aplicação de outro. Tal consideração é essencial para a compreensão das interdependências entre as operações aritméticas e a resolução de cálculos mentais e escritos, foco do presente estudo.

Inserido nesse processo mais geral de equilibração está um dos mecanismos que assegura as construções de novidades pelos sujeitos: a abstração reflexiva, termo designado por Piaget (1977a) que comporta dois aspectos inseparáveis: o "*réfléchissement*", uma projeção para um patamar superior do que foi retirado do patamar inferior; a "*réflexion*", uma ação mental de reconstrução e reorganização, sobre o patamar superior, do que foi transferido do patamar inferior, havendo sempre, portanto, um resgate das conquistas anteriores. Esses aspectos permitem novos caminhos e novas combinações que admitem a elaboração de estruturas cada vez mais ricas e complexas. "Daí resultam novas combinações que podem conduzir à construção de novas operações montadas sobre as precedentes, o que constitui a marcha habitual do progresso matemático (exemplo na criança: uma reunião de somas engendra uma multiplicação)" (Piaget, 1983, p. 42).

Vale ser destacado que a abstração reflexiva não é restrita à leitura de observáveis do objeto, ela implica na coordenação das ações dos sujeitos. No caso do conhecimento lógico-matemático,"é a ação de reunir que permite o conhecimento de uma soma como totalidade lógica ou numérica" (Piaget, 1977a, p. 72). Para as séries iniciais de escolarização, é uma importante implicação, visto que prevê a ação das crianças sobre os objetos. Deste modo, não são suficientes apenas as verbalizações dos professores sobre o que é adicionar, subtrair, por exemplo. Em outro momento, Piaget (1972) ressalta que o matemático, ainda pouco acostumado a implicações da Psicologia, pode "temer que todo exercício concreto seja um obstáculo à abstração, ao passo que o psicólogo está habituado a distinguir cuidadosamente a abstração a partir dos objetos (fonte de experiência física, estranha à Matemática) e a abstração a partir das ações, fonte da dedução e da abstração matemática" (p. 48).

A abstração reflexiva, quando presente nas diversas fases do desenvolvimento cognitivo e nos diversos momentos de construção do conhecimento, é uma das fontes do conhecimento lógico-matemático. Os estudos de Lopes & Brenelli (1997; 2002) e Guimarães & Brenelli (2001) ressaltaram, respectivamente, a importância da abstração reflexiva na resolução de problemas de subtração, nos problemas aditivos e na construção da noção de multiplicação.

O processo de regulação explica como a equilibração e as reequilibrações ocorrem no desenvolvimento cognitivo, segundo Piaget (1977b). A regulação é uma reação a uma perturbação, não caracterizada quando uma perturbação provoca a repetição da ação, sem modificações. Existem regulações que compreendem *feedbacks* negativos, relativos à resistência dos objetos. Há obstáculos que desencadeiam insucessos ou erros e, quando o sujeito se torna consciente deles, os corrige, mudando o que está errado.

Outra classe de regulações compreende *feedbacks* positivos, reforços, conservações do que é adequado; é relacionada com esquemas de assimilação já ativados pelo sujeito. Ocorre na presença de lacunas, quando as condições para a conclusão de uma ação não são suficientes ou quando falta um conhecimento na resolução de um problema. Segundo Piaget (1977b), as regulações por *feedback* negativo conduzem à compensação, sendo que o sujeito, ao corrigir e/ou modificar sua ação, pode fazê-lo por meio de uma ação, em sentido contrário, que anula a perturbação inicial (inversão) ou pode neutralizar a ação, diferenciando o esquema para o acomodar-se ao elemento perturbador (reciprocidade).

Como a reversibilidade é preparada por níveis de compensação diferentes, é importante definir as três fases em que a compensação ocorre, conforme forem ou não perturbadoras para o sujeito e conforme os procedimentos utilizados por estes sujeitos. A compensação α (Alfa) compreende uma pequena perturbação próxima do ponto de equilíbrio do sistema, alcançada por uma simples modificação introduzida pelo sujeito em sentido inverso ao da perturbação colocada inicialmente. São parcialmente compensadoras, e o equilíbrio que daí resulta é muito instável. Se a perturbação é mais forte ou é implicitamente considerada mais forte pelo sujeito, ele anulará a perturbação, pondo-a de lado ou afastando-a.

A fase de compensação β (Beta) integra no sistema o elemento perturbador do meio exterior, não anulando ou rejeitando o elemento novo e, sim, modificando o sistema até tornar assimilável o fato inesperado. Ocorrem modificações que podem, ainda, sofrer compensações parciais, mas são superiores ao tipo α (Alfa), sendo compensações essencialmente conceituais, modificando o sistema inicial. Nas compensações do tipo γ (Gama), o sujeito consegue antecipar as variáveis, perdendo o caráter de perturbação, já fazendo parte das transformações virtuais do sistema e alcançando um equilíbrio móvel e mais estável.

Nesse momento, um conceito igualmente importante na teoria de Piaget é a dialética que está presente nas diversas conquistas dos alunos no campo matemático. Comumente, assistimos a uma preocupação com o ensino linear das operações aritméticas elementares: primeiro as adições, depois as subtrações, as multiplicações e as divisões em etapas fragmentadas, apesar de as construções processarem-se em estruturas de conjunto, envolvendo a interdependência entre elas. Entende-se muitas vezes que cada item deve ser ensinado de forma bem separada de outros itens; deve-se ensinar os números aos poucos, um a um e na ordem: não se pode ensinar o 9 enquanto não se ensinou o 8, como se os conteúdos não estivessem interligados. Por ensino dos números, geralmente, entende-se principalmente a escrita convencional, um dos aspectos do ensino na área da aritmética, portanto, ao se ensinar o número 8, a exigência é da escrita de linhas inteiras do algarismo. Nessa lógica, cortam-se, pintam-se desenhos, são feitas colagens de oito elementos e esgotados os recursos com oito elementos, “podemos passar para o ensino do algarismo 9”.

Encontra-se na gênese do processo dialético a “implicação entre ações e operações”, o que acarreta transformações nas ações para possibilitar outras novas transformações consistindo, portanto, na construção de interdependências entre significações sustentadas por construções operatórias ou pré-operatórias. É necessário, pois, analisar as palavras de Piaget (1980): “os matemáticos falam muito pouco de dialética, enquanto sua disciplina é, sem dúvida, a que produz o maior número de superações por síntese e a que mais constrói seus próprios conteúdos” (pp. 41-42).

Ainda conforme o autor o autor, no decorrer do desenvolvimento cognitivo, assiste-se a alternâncias de fases de “construções dialéticas” e fases de “exploração discursiva”, quando o sujeito pode proceder por dedução a partir de sistemas de conhecimento equilibrado. A sequência tese-antítese-síntese, definição corrente de dialética, segundo Piaget, também pode envolver outros fatores, visto ser possível uma construção dialética sem uma contradição a ser superada. A construção da noção do número é um exemplo em que dois subsistemas distintos se coordenam (inclusão e ordem serial), tornando-se interdependentes, formando uma nova síntese.

Vale destacar que o processo dialético não se confunde com qualquer atividade cognitiva sem uma distinção. É definido, de maneira geral, como o “aspecto inferencial” do processo de equilibração, do processo de construção de conhecimentos, que implica na formação de estruturas. O que é retirado das estruturas, sem modificações ou enriquecimentos, envolve as inferências discursivas. Assim, pode-se ainda definir que o *aspecto causal* é caracterizado pela efetuação das operações e as reações a seus resultados constatados por leituras pseudoempíricas dos acertos e dos erros, e o *aspecto inferencial* consiste nas implicações entre meios e fins, entre regras ou ações, em que se pode completar ou substituir as que são conhecidas por outras a experimentar, com antecipação de resultados e manifestação de suas razões em caso de problemas novos para resolver e problemas a ultrapassar.

O processo dialético dá lugar a círculos ou espirais: progressos em um sistema conduzem à reorganização de outro sistema, o que repercute também, qualitativamente, no primeiro sistema, assim compondo passos proativos e retroativos. De acordo com Ferreiro (2001), vale salientar que o pensamento dialético de Piaget está presente em seu modelo de equilibração:

> Todo esquema em funcionamento necessita do objeto assimilável para sua própria conservação (nesse sentido, os esquemas são concebidos em direta prolongação dos órgãos ao nível biológico); um objeto não assimilável imediatamente constitui uma perturbação; os mecanismos de regulação atuam tentando compensar a perturbação. O modo mais efetivo de compensação é precisamente aquele que consegue tornar assimilável o elemento inicialmente perturbador, o que exige uma modificação do próprio esquema (por diferenciação, integração, estabelecimento de novas relações antes ignoradas etc) e a realização de uma reequilibração (Piaget, 1977b, p. 135).

Conforme Piaget (1980), algumas características podem ser evidenciadas em situações dialéticas: a primeira, de caráter mais geral, envolve a construção de interdependências entre sistemas, como A e B, opostos ou estranhos e, a partir de sua reunião, formam uma nova totalidade T. A análise das equalizações, fato ressaltado nas composições aditivas, é um exemplo em que ocorre a coordenação de duas operações, adição de elementos em um conjunto, implica a subtração em outro conjunto. Conforme o mencionado:

> Se toda adição + X sobre um ponto de um sistema qualquer implica a subtração – X em outra região, essa implicação apesar de sua evidência uma vez construída, não preexiste absolutamente à sua elaboração prova em si de que durante longos estágios a adição + X é concebida como uma produção ex nihilo, por falta de compreensão das conservações (Piaget, 1980, p.201).

Uma segunda característica é relativa às interdependências entre as partes de um mesmo objeto: a cada aproximação dos objetos com o objetivo de conhecê-los, ocorre um recuo deste, pelas particularidades de cada situação e problemas que podem ser levantados. Como terceira característica, têm-se as “superações”, geradas por uma nova interdependência e que levam a uma nova totalidade, transformando a totalidade anterior num subsistema. A quarta característica refere-se às circularidades ou espirais que intervêm na construção das interdependências. A última característica, de relativização dos subsistemas, mesmo sendo de caráter isolado e parecerem absolutas nas situações analisadas, estão em relação de interdependência com outros subsistemas.

No estudo de Piaget sobre "As formas elementares da dialética" (1980), o termo "elementares" não se apresenta como sinônimo de simples, já que na relação sujeito-objeto, na busca de descoberta do real, a dialética está presente e de forma variada, podendo ser destacada em três tipos: na reconstituição das propriedades descobertas nos objetos, tornando-as solidárias; no procedimento em direção à exteriorização, inseparável do processo de interiorização; na síntese das formas e conteúdos, criando "modelos". O gerador destas interdependências, como aponta Piaget (1981; 1983), o "motor" comum, está envolvido com as relações estreitas entre o "possível" e o "necessário", que possibilita a formação de estruturas operatórias e do real. São duas modalidades descritas na construção de esquemas de ação, como aponta Piaget (1981; 1983). Uma delas são os "possíveis" pelos quais a criança compreende o objeto ou sua forma, mesmo que circunstancial, e supõe a criação de diferentes meios, procedimentos e diferenciações, numa dada situação. A busca de compreensão dos objetos prevê, muitas vezes, a diferenciação dos esquemas. Se a solução encontrada não é suficiente, é preciso fazer de outra forma, encontrar novas saídas para os problemas que os objetos colocam, "ousar ir além dos limites" (Macedo,1994, p. 8). Outra modalidade é o "necessário" pelo qual a criança estende suas ações, coordenações no espaço e no tempo, formando novos esquemas integrados no sistema. "Estender significa poder abstrair das formas dos objetos, um conteúdo comum a eles" exige a coerência para o sistema.

Ainda sobre a aquisição do conhecimento, Piaget (1974a; 1978b) define os três níveis em que ele pode ocorrer. Em um primeiro momento pode ser designado por um "fazer" (*réussir*) uma ação material, sem conceituação, um sistema de esquemas com saberes elaborados visando atingir os fins propostos, atingir o êxito. O segundo nível do conhecimento é o da conceituação, que retira seus elementos dos esquemas de ação por meio das tomadas de consciência. O terceiro nível é o das abstrações refletidas, envolvendo operações sobre operações em segunda potência. Esses dois últimos níveis de conhecimento englobam o "compreender", que é o domínio em pensamento das razões das ações, resolvendo possíveis problemas que surgem ou explicando sucessos. Pesquisas atuais, que investigam o conceito de divisão e retomam o processo de tomada de consciência de Piaget em crianças de fases iniciais de escolarização (Ferreira & Lautert, 2003;

Moro, 2005), indicam a dificuldade do alcance da conceituação da divisão e o apego das crianças aos esquemas de adição já construídos para resolverem os problemas de divisão.

Na crescente adaptação do sujeito ao meio, está presente um sistema cognitivo aberto no sentido das trocas com o meio - como já fora apresentado anteriormente pelos processos de aquisição do conhecimento - e um sistema fechado em ciclos preservando a conservação do próprio sistema (Piaget, 1977b). Tal sistema é composto por estruturas, definidas como um conjunto de poder dedutivo, como possibilidades de coordenação de ideias. Um esquema é uma coordenação de ação, um saber fazer, que garante aos sujeitos a assimilação dos objetos às suas estruturas. Um conjunto de esquemas irá compor uma estrutura, como um conjunto de estruturas fará a composição de um sistema cognitivo.

Uma estrutura apresenta as características de totalidade, transformação e autorregulação. Por totalidade ou conservação, compreende-se que a relação entre os elementos nunca resulta em um elemento estranho ao conjunto, a propriedade de conjunto é mantida. A transformação garante a relação dinâmica entre os elementos da estrutura, consistindo em propriedades estruturantes e estruturadas. A autorregulação acarreta a conservação e o fechamento do sistema, visto que nunca uma estrutura é regulada por outra.

Conforme afirma Piaget (1967), existem estágios que marcam o aparecimento de estruturas sucessivamente construídas, ocorrendo a aparição em cada estágio de estruturas originais, definindo formas particulares de equilíbrio. No caso das operações, são necessárias mudanças qualitativas que permitam à criança operar em pensamento para compreender situações, por exemplo, envoltas em estruturas multiplicativas. Como o foco do trabalho envolve a investigação dessas mudanças qualitativas no desenvolvimento mental, será feita uma retomada das estruturas originais de cada estágio desse desenvolvimento.

Existem estruturas totalmente programadas, como é o caso da maturação sexual, manifestando-se em determinadas épocas do desenvolvimento orgânico. Há também estruturas parcialmente programadas, como as do sistema nervoso, dependentes, em grande parte, do meio externo para seu desenvolvimento e construção, além das estruturas nada programadas, estruturas mentais, específicas do acesso ao conhecimento.

Num primeiro estágio (do nascimento até aproximadamente dois anos), a inteligência sensório-motora, prática, que atua no imediatamente presente, é constituída por estruturas de ritmos, regulações diversas e pelo princípio da reversibilidade por meio do esquema do objeto permanente. De acordo com Piaget (1947; 1977; 1972), essas três principais estruturas: ritmos, regulações e operações caracterizam as etapas do desenvolvimento intelectual do ser humano. A estrutura de ritmo assegura as interações das crianças com o meio, principalmente no começo da vida, incluindo os reflexos, os movimentos espontâneos, cíclicos e globais do organismo. Nas regulações (já caracterizadas na página 19), as retomadas das ações são modificadas pelos resultados das ações anteriores, ocorrendo a correção dos aspectos necessários (*feedback* negativo) ou mantendo os aspectos que levaram ao êxito (*feedback* positivo). No momento em que as regulações alcançam a possibilidade de reversibilidade por inversão e por reciprocidade, as ações transformam-se em operações, o que será melhor explicitado na página seguinte.

Desenvolvem-se nas crianças, no período da inteligência sensório-motora, as coordenações motoras na direção do "grupo dos deslocamentos", e as regulações da percepção em busca "da construção do objeto" (espaço, tempo, causalidade). É um estágio fundamental para as posteriores conquistas no desenvolvimento humano, estando implícitos todos os processos posteriores de equilibração, na "lógica" dos movimentos e da percepção.

Com o advento da função semiótica, estrutura-se a inteligência representativa, de natureza pré-lógica, possibilitando que um objeto seja substituído no pensamento por uma representação simbólica, mas ainda não existe um conhecimento objetivo. Assim, ocorre uma assimilação deformante da realidade pela parcialidade de coordenação dos esquemas. É a construção da "experiência mental" que, aos poucos, substitui as "experiências físicas" e possibilita a construção das operações. Para Lima (1984), encontra-se no desenvolvimento infantil, de um lado, o conhecimento presentativo (compreensão do real) e o conhecimento procedural (mecanismos de resolver problemas e de atingir um objetivo) e, de outro, o pensamento simbólico pré-lógico, ligado à expressão dos desejos, e o pensamento lógico-matemático, a serviço da objetividade.

Por volta dos 6 aos 7 anos, ocorrem mudanças qualitativas que permitem à criança operar em pensamento, superando a fase intuitiva anterior, tornando-se capaz de atuar sobre objetos, o que significa que suas ações são interiorizadas, reversíveis, agindo em sistemas de conjunto. A reversibilidade alcançada nesse período apresenta-se sob duas formas irredutíveis e não relacionadas pela criança: a inversão e a reciprocidade. Com a inversão, é possível a ação de combinar toda operação com seu inverso de tal maneira que ambos se anulem mutuamente, ela está presente principalmente nas estruturas de classes. A reciprocidade é a característica das estruturas de relação. A lógica conquistada nesse período ainda é elementar porque depende de processos espaço-temporais ligados à manipulação dos objetos concretos. Essas relações lógicas obedecem às leis do funcionamento mental e, segundo o modelo teórico de Piaget (1946a), são análogas às do grupo matemático, assim denominadas por *agrupamento*. Piaget sintetiza as leis do *agrupamento* próprias dessa fase:

1) dois elementos quaisquer de um agrupamento podem ser compostos entre eles dando origem a um novo elemento do mesmo agrupamento. Assim, duas relações como A>B e B>C podem ser reunidas numa relação A>C, o que exprime a coordenação possível das operações e o raciocínio de um modo geral;

2) toda transformação, no âmbito do raciocínio, é reversível. No pensamento matemático, cada operação direta de um grupo comporta uma operação inversa (a subtração comporta a adição, por exemplo). Pode-se, com esta possibilidade, levantar hipóteses e depois afastá-las, percorrer um caminho e refazê-lo no sentido inverso. Tal capacidade, portanto, é imprescindível para a compreensão da aritmética, bem como de fenômenos no âmbito da história e da ética, no sentido de manter uma palavra dada e ser coerente com os próprios princípios; depende também do raciocínio;

3) a composição das operações é associativa; um mesmo resultado, portanto, pode ser alcançado por caminhos diferentes. Para muitas pessoas, o funcionamento mental que comporta essa propriedade associativa permanece inconsciente;

4) uma operação combinada com sua inversa é anulada. Tal afirmativa é válida também no momento em que uma hipótese é levantada, é rejeitada e os dados iniciais do problema podem ser recuperados. Para Piaget (1971), "demonstra-se em aritmética a identidade de todas as classes nulas, ao passo que uma ausência de batatas não equivale à de espinafres" [2] (p. 82);

5) se no campo numérico uma unidade somada a ela mesma dá origem a um novo número, como em 1+1=2, no campo de um raciocínio qualitativo um elemento repetido não se transforma: há uma tautologia, como em maçã+maçã=maçã.

[2] Uma curiosa história é apresentada por Piaget: um chefe de cozinha, um pouco rigoroso em lógica, recusava servir um "bife sem batatas" porque justamente naquele dia não as tinha, mas oferecia, como consolo a seu cliente, um "bife sem espinafres" porque, na verdade, dispunha de espinafres na ocasião.

A possibilidade de raciocinar sobre hipóteses inicia-se por volta dos onze anos, no nível de operatoriedade formal, quando a reversibilidade por inversão e a reversibilidade por reciprocidade estão coordenadas em um sistema de conjunto único de estrutura de grupo. Ocorre a possibilidade de pensamento com manejo de hipóteses e o raciocínio sobre proposições; nesse nível, o pensamento torna-se hipotético-dedutivo. Nos agrupamentos estavam presentes as inversões e as reciprocidades, mas ainda não compostas entre si, fato agora possível com as operações de composição, a comutatividade entre implicações, exclusões, conjunções e incompatibilidades reunidas em sistema único caracterizado pelas leis de reticulado e do grupo das quatro transformações INRC: a Identidade (I), a Inversão (N), a Reciprocidade (R) e a Correlatividade (C) (Piaget, 1972).

Os estudos de Piaget ressaltam que o processo de construção das operações aritméticas exige das crianças passos lentos, complexos e progressivos. Segundo o autor (1981), a adição e a subtração formam um sistema de operações relacionado com a construção do número, compondo um processo de aritmetização, partindo de ações iterativas mais elementares acrescentando elementos +1 +1 +1... e retirando –1 –1 –1 ... até as crianças chegarem a operações reversíveis. Para a compreensão das adições e subtrações operatórias, as crianças necessitam, por conseguinte, estabelecer, como já fora mencionado, a simetria entre as afirmações e as negações: ao mesmo tempo que elementos são retirados de um conjunto, são somados a outro, fato de alcance complexo e tardio no processo de desenvolvimento cognitivo.

Contudo, pela rapidez que alguns temas são desenvolvidos no sistema escolar, acredita-se que alguns conceitos e, principalmente, os procedimentos de cálculo das operações aritméticas são adquiridos imediatamente após a explicação do professor e resolução de alguns exercícios. Assim, observa-se que a educação infantil prioriza o ensino dos conteúdos que serão necessários para os alunos da primeira série e, dessa forma, seguem as outras séries. Logo, pensando em como “melhor preparar os alunos”, pulam etapas importantes da construção de conceitos pela pressa que os temas são desenvolvidos. Resta ao professor uma semana para o trabalho com as frações, uma semana para desenvolver o tema sobre os números decimais, por exemplo. Espera-se que conceitos que evoluíram durante séculos sejam tratados em curtos períodos de tempo, apenas com verbalizações do professor.

Referindo-se a essa *pressa,* ressalta Piaget (1996)

> ...o insucesso escolar em tal ou qual ponto decorre de uma passagem demasiado rápida da estrutura qualitativa dos problemas (por simples raciocínios lógicos, mas sem a introdução imediata das relações numéricas e das leis métricas para a esquematização quantitativa ou matemática (no sentido das equações já elaboradas) usadas habitualmente pelo físico (....) mesmo no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico) (Piaget, 1996, p. 14).

Em outra obra, Piaget (1998) reforça sua preocupação com “ensaios educacionais apressados”

> A construção matemática procede por abstrações reflexivas (no duplo sentido de uma projeção sobre novos planos e de uma reconstrução contínua precedendo as novas construções), e é deste processo fundamental que um número grande demais de ensaios educacionais apressados pretendem se abster, esquecendo que toda abstração procede a partir de estruturas mais concretas (Piaget, 1998, p. 221).

Piaget também considera, nesse mesmo texto, que “uma iniciação à matemática moderna não pode ser confundida com uma entrada de chofre em sua axiomática”. Uma axiomática terá sentido no momento que estiver presente uma tomada de consciência ou de reflexão retroativa baseadas em construções proativas anteriores. As crianças manipulam operações das mais variadas ordens, como esquemas de comportamento e de raciocínio, muito antes de serem esquemas de reflexão. Nesse sentido, uma gradação, segundo Piaget, é indispensável para passar da ação ao pensamento representativo e do pensamento operatório à reflexão sobre esse pensamento e, por última conquista, a passagem dessa reflexão à axiomatização propriamente dita.

Em uma conferência sobre o ensino de Matemática, em 1973, Piaget , citado por Smole (2005), já apresentava a dificuldade na alteração de crenças, concepções e ações dos professores, em especial o de Matemática:

> É efetivamente difícil a um professor de matemática, cujo espírito é abstrato por definição, situar-se na perspectiva fundamentalmente concreta de seus jovens alunos(...). Quando não se conhecia como o aluno aprende, quando se obrigava os alunos a resolver uma grande quantidade de problemas frequentemente absurdos, nos quais era necessário realizar numerosos cálculos com dados numéricos ou métricos, a única maneira de ter êxito com os alunos consistia em proceder em duas etapas sucessivas, uma puramente qualitativa referida unicamente à estrutura lógica do problema, para então passar a considerar dos dados numéricos ou métricos com as dificuldades suplementares dos cálculos. Nos programas de matemática moderna esse problema é menos agudo, posto que elas são mais qualitativas, fundamentalmente qualitativas. Mas o problema pode continuar quando o professor deseja de pronto, ou muito cedo, apresentar as noções e operações de modo já formalizado. Nesse caso me parece inevitável partir do qualitativo concreto, da representação ou da lógica que corresponde àquilo que é natural para o aluno, deixando a formalização para mais tarde, como uma coroação e sistematização das noções previamente adquiridas (Piaget, 1973, apud Smole, 2005, p. 41).

Vale ser destacada a dificuldade do ensino-aprendizagem das operações aritméticas, exemplificada no trecho datado do final do século XV pelo autor Almeida, citado por Dynnikov (2003). Há um diálogo entre um mercador alemão e um matemático da cidade de Nuremberg, assim expresso:

> Sinto-me velho, tenho um filho a quem gostava de passar o negócio, mas o rapaz não sabe ler nem escrever. Ler, logo aprenderá. Mas fazer contas é que é o diabo. Que pode fazer por ele? O aritmético respondeu: Se quer que eu ensine o seu rapaz a fazer contas de somar e subtrair, traga-o cá, porque em semanas ou poucos meses fica apto; se quiser que ele aprenda a multiplicação, isso vai levar mais tempo mas tudo se arranja. Agora se se trata de fazer contas de dividir, então siga o meu conselho: mande-o para a Itália porque lá é que ensinam bem (Dynnikov, 2003,p. 7).

Enquanto o diálogo reforça a idéia da dificuldade na aprendizagem da divisão, em séculos anteriores, a concepção que sobressai na visão tradicional da matemática é de um caráter imediatista do ensino e assimilação automática dos conteúdos. Assim, a fala dos professores é recorrente: "Acabei de explicar, como é que ele não aprendeu?"

Como afirmam Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o fato de que se ensine matemática na escola responde a uma necessidade ao mesmo tempo individual e social. Dessa forma, a presença da matemática na escola é uma consequência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades que surgem na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade. Constata-se uma inversão nessa subordinação por meio da crença de que as únicas necessidades sociais matemáticas são aquelas derivadas da escola. Entende-se, ainda, que a matemática é feita para ser ensinada e aprendida, que o ensino formal é imprescindível em toda aprendizagem matemática e que a única razão pela qual se aprende matemática é porque é ensinada na escola.

O desafio colocado pelos autores é recuperar o valor social da matemática, superando seu valor apenas escolar, como um fim em si mesmo, e responder a questão: "o que fazer para que os alunos se coloquem como matemáticos diante de questões matemáticas que lhe são propostas na escola e para que assumam, eles mesmos, a responsabilidade por suas respostas?" Para essas questões, é necessária a contribuição de tendências socioetnoculturais, histórico-críticas e sociointerativas.

As pesquisas que ressaltam o valor social da matemática e os aspectos socioculturais da Educação Matemática iniciam-se, no Brasil, na década de 60. Tais pesquisas destacam os aspectos sociais e de diferenças culturais para compreender o fracasso escolar de crianças, que lidam muito bem com situações cotidianas que envolvem a matemática e fracassam na escola ao lidarem com situações semelhantes. Nesse sentido, seguem as pesquisas de Ubiratan D'Ambrosio, na Etnomatemática, que, de acordo com Fiorentini (1995), trazem uma nova visão de matemática e de Educação Matemática de feição antropológica, social e política, situando as atividades humanas em contextos socialmente determinados: "a Matemática, por exemplo, só adquire validade e significação no interior de um grupo cultural - que tanto pode ser uma comunidade indígena, uma classe de alunos ou até uma comunidade científica- onde se encontra presente nas diferentes práticas socioculturais" (p. 25).

As tendências histórico-críticas e sociointerativas entendem que a matemática é um conhecimento historicamente em construção, produzido nas e pelas relações sociais, com uma linguagem própria, simbólica, a qual se atribui diversos significados (Fiorentini, 1995). Destarte, as pesquisas com esses enfoques entendem que a resolução de cálculos mentais e escritos não pode ser restrita a exercitação e treinos desses cálculos. Tais pesquisas reforçam a participação dos estudantes na atribuição de diferentes sentidos para os objetos matemáticos, além de considerarem a construção histórica lenta e não-linear dos algoritmos e das diversas estratégias de resolução das operações.

Novos desafios seguem na atualidade e as diversas contribuições das tendências do ensino de matemática já expressas são necessárias para a compreensão dos resultados obtidos por estudantes nas avaliações nacionais. Em 2005, no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), os resultados foram preocupantes. Esse sistema, desde 1995, testa as competências em Língua Portuguesa e Matemática em uma amostra de estudantes de quarta e oitava séries do ensino fundamental e terceira série do ensino médio no Brasil. Os resultados são apresentados em uma escala de desempenho que descreve, em cada nível, as competências e habilidades que os alunos são capazes de demonstrar por meio de resolução de problemas.

Para cada disciplina, a escala é única e permite apresentar, em uma mesma métrica, os resultados de desempenhos dos estudantes nas séries e anos de aplicação dos testes. Pela escala, pode-se verificar que percentual de alunos já possui as competências e habilidades desejáveis para cada uma das séries avaliadas, quantos ainda estão em processo de construção, quantos abaixo do nível que seria desejável para a série e quantos acima do nível esperado.

Nível de proficiência – escala Saeb/97	Matemática	Língua Portuguesa
	Ciclo e nível de ensino	Ciclo e nível de ensino
100	Não significativo	Até a metade do 1º ciclo do Ens.Fund.
175	Até a metade do 1º ciclo do Ens.Fund.	Até o final do 1º ciclo do Ens.Fund.
250	Até o final do 1º ciclo do Ens.Fund.	Até o final do 2º ciclo do Ens.Fund.
325	Até o final do 2º ciclo do Ens.Fund.	Até o final do Ens. Médio
400	Até o final do Ens. Médio	Além do final do Ens. Médio

Quadro 01: Relação entre níveis de proficiência e ciclos dos níveis de ensino
Fonte: http:www.race.nuca.ie.ufrj.Br/cea/andreadc/relatoriosaeb/3.1html , consulta em 13/04/2008

O quadro acima e o gráfico a seguir estabelecem relações entre os momentos dos ciclos escolares (e os desempenhos mínimos ou básicos que eles correspondem) e os níveis de proficiência da escala do SAEB.

SAEB, Médias de Proficiência, Brasil, 1995-2005 (INEP)

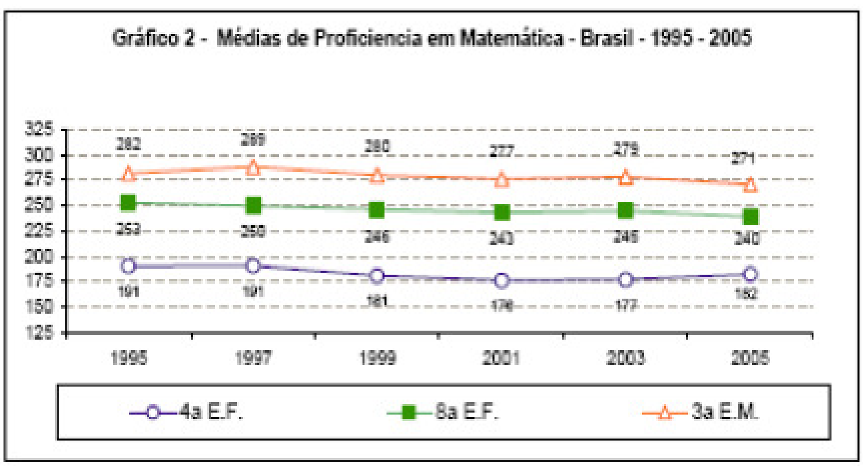


Figura 03: Gráfico com médias de proficiência em matemática
Fonte: SAEB, 2005

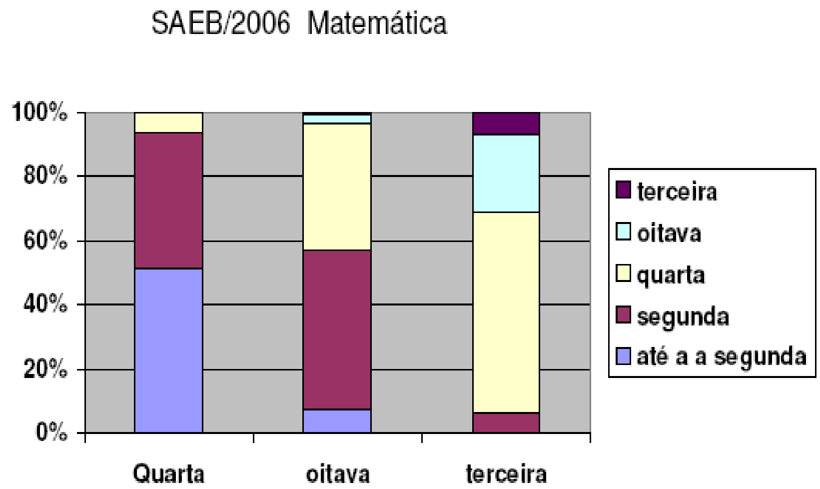


Figura 04: Gráfico com percentual de escalas de desempenho em matemática
Fonte: SAEB, 2006

Pela análise dos gráficos e do quadro 1, pode-se identificar que, na quarta série, metade dos alunos ainda está em um nível inferior à segunda série do ensino fundamental, e menos de 10% têm o nível esperado para esta série. Na oitava série, mais de 50% ainda estão no nível equivalente à segunda série ou inferior e só uma pequena proporção, inferior a 5%, têm o nível esperado para a série. Segundo o Ministério da Educação, em matemática, a média 239,38 (média nacional para a 8ª série da rede urbana) indica que o estudante consegue, entre outras ações, localizar dados em tabelas mais complexas, identificar gráfico de colunas correspondentes a números positivos e negativos, converter medidas de peso e calcular o perímetro e área de figuras. Alunos com essa média também têm desenvolvidas as capacidades descritas em níveis mais baixos da escala do SAEB, como a de calcular resultados de subtrações complexas, ler horas em relógios de ponteiros e digital, estimar medida de comprimento usando unidades não-convencionais e reconhecer a decomposição em dezenas e unidades de números naturais.

Na terceira série do ensino médio, 70% estão em um nível equivalente à quarta série ou inferior e outros 25%, aproximadamente, estão no nível correspondente à oitava série com menos de 10% do nível apropriado. A maior parte dos estudantes apresentou uma formação inadequada em matemática para as respectivas séries. Esses dados oficiais são preocupantes e determinam que muitas mudanças ainda são esperadas na área matemática.

No momento em que a história dos algarismos é retomada, e seu valor social é resgatado, percebe-se uma conquista lenta e não linear, nem abstrata. Segundo Ifrah (1989), longe de serem os vetores de uma sociedade técnica e estatística, os números foram “suportes de sonho, de fantasia, de especulação metafísica, objeto da literatura, sondas do futuro incerto ou, pelo menos, do desejo de predizer. Os algarismos são uma substância poética, permeados de humanidade” (pp. 12-13).

Como ilustração, o quadro a seguir de Tropfke (1980) apresentado no livro “Geschichte der Elementarmathematik”, mostra as diferentes notações para as operações de adição e de subtração ao longo de vários séculos. Os símbolos que comumente são utilizados em situações cotidianas e que foram disseminados com a descoberta de imprensa passaram por várias civilizações, por vários autores e significados.

Autor/Nacionalidade	*Época*	*Adição*	*Subtração*
Columbia-Algorismus	Século XIV	7	m
Blockbuch	Século XV		m̄q
Regiomontan	Entre 1463 e 1471		l̄9
Codex de Dresden	1481	+	– —
Widman (livro impresso)	1489	+	—

Fonte: Tropfke, 1980, p. 206

Figura 05: Representações da adição e da subtração em diversos séculos

Podemos destacar conquistas em vários séculos para as notações escritas. O primeiro registro da cruz (X) para indicar a operação de multiplicação foi encontrado no século XVI e sua autoria foi dada a William Oughtred, em 1637. O uso do ponto para indicar a multiplicação é atribuído a Leibniz. O símbolo (÷) para indicar a operação de divisão foi usado por John Pells (1610-1685), e os dois pontos (:) por Johnsons, em 1633, na obra “Aritmetik”. O traço para indicar a divisão apareceu, pela primeira vez, em 1202, no “Livro do ábaco”, de Leonardo de

Pisa. O sinal de igual (=) começou as ser utilizado por Robert Recorde, em 1557 (Dynnikov, 2003).

Em suma, as tendências do ensino da matemática já apresentadas (a tradicional, a empírico-ativista, a formalista moderna e a tecnicista) não privilegiam essa “vivacidade histórica” da matemática e sua condição humana, e insistem na repetição. Pode-se, então, sintetizar que ensinar consiste em explicar e aprender consiste em repetir (ou exercitar) o ensinado até reproduzi-lo com total fidelidade. Nesse sentido, compreende-se que o conhecimento entra pelos olhos, imitando, copiando, observando fatos, fenômenos e técnicas. Deve-se receber o estímulo necessário para evocar a resposta esperada, e a correta é sempre a esperada, principalmente quando o tema é o de resolução de cálculos mentais e escritos. Para Piaget, o conhecimento lógico-matemático não existe de forma acabada, como são dadas *a priori* as características físicas dos objetos e o conhecimento social. Assim sendo, faz-se necessário um resgate de como o conhecimento lógico-matemático é construído pelas crianças, fato descrito no próximo capítulo.

Capítulo 2

O conhecimento lógico- matemático na perspectiva de Piaget

Fonte: Quino, 1993

Piaget admite que os conhecimentos físico, social e lógico-matemático dependem, para serem adquiridos, de uma estrutura lógico-matemática subjacente. Smole (2005) exemplifica tal necessidade ao afirmar que não há uma razão aparente para os nomes dos números serem ditos em uma certa ordem; são derivados de um conhecimento social, arbitrário. A criança, no entanto, só repetirá a sequência correta dos algarismos até se convencer de que nenhuma pessoa os diz de outro modo e constatar uma regularidade. Da mesma forma, para identificar como verde uma folha, o que se caracteriza por seu caráter físico, a criança precisará trabalhar com afirmações e negações, identificando o que não é verde, inclusive outras folhas. Assim, considera-se importante um resgate de características desse conhecimento lógico-matemático antes de serem apresentados os resultados de pesquisas atuais sobre esta temática.

No capítulo anterior, foram expostos os principais processos e as estruturas que desencadeiam o conhecimento lógico-matemático, tais como: o processo de equilibração, a abstração reflexiva, a dialética, a tomada de consciência, dentre outros. Com base na análise de diversas obras de Piaget e colaboradores ("A Gênese do Número na Criança", 1981; "Para onde vai a Educação?" 1996; "Psicologia e Pedagogia", 1977; "A situação das ciências do homem no sistema das ciências", 1976; "A Epistemologia Genética", 1971), salienta-se que alguns aspectos dessas obras são relevantes e complementares para a compreensão do conhecimento lógico-matemático e da construção das operações aritméticas, foco desse estudo e, portanto, retomados.

> A matemática, do grego mátheema (ciência), distingue-se por seu aspecto formal e abstrato e por sua natureza dedutiva. Em contrapartida, sua construção liga-se a uma atividade concreta sobre os objetos para a qual o aluno necessita da intuição como processo mental. A partir desse tipo de elaboração, a matemática é mais construtiva que dedutiva e, se não fosse assim, certamente que se transformaria em uma ciência memoralística, longe de seu caráter de representação, explicação e previsão da realidade (Huete & Bravo, 2006, p. 15).

Um primeiro aspecto do conhecimento lógico-matemático que deve ser considerado é justamente o fato que dois elementos distintos estão em sua composição: a lógica e a matemática. Como ressalta a citação, a matemática tem seu aspecto formal e dedutivo, mas o seu caráter de construção é o que mais deve ser destacado; caso contrário, dependeria apenas de conceitos a serem memorizados e, desse fato, decorre a compreensão mais tradicional de que esses conceitos existem independentes de os sujeitos os construírem. A lógica é um elemento que mantém o "fechamento" e a manutenção das estruturas e a matemática é resultado de uma construção de "aberturas" a todos os possíveis do pensamento.

> Mas, se a lógica é a inteligência, a inteligência não é, apenas, a lógica. O processo construtor não é a lógica (a lógica é o resultado final...). As estruturas lógicas são "fechamentos", ao longo do processo geral de construção (o processo de construção é um fenômeno dialético: não existe uma lógica dialética, mas uma dialética da lógica). Contudo o processo construtor (dialético) vai ganhando maior abertura à medida que o pensamento vai se operacionalizando, até abrir-se para todos os possíveis, quando o desenvolvimento atinge o pensamento hipotético-dedutivo (o máximo de "fechamento" dedutivo corresponde, pois, ao máximo de "abertura" dialética) (Piaget,s/d, apud Lima, 1984, p. 115).

Outro aspecto relevante é o fato de a lógica e de a matemática serem trabalhadas nas escolas de forma desigual. Lima (1984) ressalta, ainda, que é estranho o preconceito no sistema escolar a respeito da lógica e da matemática, em relação à lógica não ser o objeto de preocupações pedagógicas e a matemática ser a "pedra no caminho" da maioria dos alunos. Uma das razões, apontadas pelo autor, sobre a causa desse preconceito é a pouca estimulação do pensamento dialético, que se apoia na possibilidade de errar, em combinações mais originais, em paralelo ao estímulo ao pensamento lógico, mais disciplinado, mais difícil e rigoroso. Entretanto, as relações lógicas estão presentes em quaisquer comportamentos que visem conhecer e interpretar o mundo e já aparecem nos primeiros conjuntos de operações que as crianças utilizam, tais como nas classificações, seriações, correspondências. Piaget (1976) expõe que as estruturas lógicas derivam de construções progressivas e cada vez mais ricas, que se reorganizam e seguem por vários patamares até alcançarem a formalização, mas não são pré-formadas e remontam até as organizações nervosas e sensório-motoras. Tais estruturas lógicas avançam para a possibilidade de realização de operações sobre operações e pode-se falar, nessa etapa, em operações lógico-matemáticas autônomas e bem diferenciadas das ações matemáticas com sua dimensão causal (Piaget, 1971).

Ao discutir os três "problemas principais e bastante clássicos" da epistemologia das matemáticas, Piaget (1971) formula alguns questionamentos a partir dos quais constata-se que os itens contemplam novamente o duplo caráter: de construção e de rigor, próprios da área. O primeiro problema é o de compreender por que a epistemologia das matemáticas é indefinidamente fecunda, a partir de conceitos ou axiomas pouco numerosos e relativamente pobres; o segundo, por que ela se impõe de maneira necessária e se mantém, portanto, constantemente rigorosa, apesar do seu caráter construtivo, que poderia ser uma fonte de irracionalidade. E, por fim, por que se harmoniza com a experiência e as realidades físicas, apesar de sua natureza inteiramente dedutiva.

A fecundidade da matemática caracteriza-se um problema ao mesmo tempo genético e histórico-crítico, a partir da compreensão de que as novidades engendradas nesse campo não são *descobrimentos*, tendo em vista que não são dadas de antemão ao sujeito, nem são totalmente *invenções*, visto que uma invenção comporta grande margem de liberdade, e as relações ou estruturas matemáticas se caracterizam por sua necessidade de constituição ao sistema cognitivo (Piaget, 1971). Assim, a dimensão genética deve considerar o que dizem os matemáticos e o que a análise dos estágios do desenvolvimento cognitivo revela: as raízes psicológicas e biológicas das construções matemáticas.

As novidades incessantemente desenvolvidas na área são atribuídas à possibilidade de introduzir indefinidamente operações sobre operações (consideração dos matemáticos). Alguns exemplos podem ser destacados, como é o caso do número inteiro, enquanto síntese da inclusão de classes e da ordem serial, da multiplicação, enquanto adição de adições, e o processo de abstração reflexiva. Em todos esses exemplos ocorrem também novas coordenações no que é extraído das formas anteriores de construção (análise dos estágios do desenvolvimento cognitivo).

Em relação ao rigor e à necessidade da matemática, Piaget (1971) ressalva que "a fecundidade e a necessidade caminham sempre juntas, apesar de ser um aspecto notável e quase paradoxal" (p.80). Se sua fecundidade é garantida pela multiplicação de suas estruturas, a necessidade na matemática resulta das leis de composição internas ou externas das estruturas, em virtude dos fechamentos que resultam de sua autorregulagem.

A questão sobre o relacionamento da matemática com a experiência e a realidade física é apresentada por Piaget (1971) na seguinte formulação: "na realidade tudo parece ser matematizável, senão sempre no sentido da medida, pelo menos no dos isomorfismos e das estruturações" (p. 83). Mesmo crianças menores já apresentam indícios das "três estruturas-mães" que os matemáticos (Bourbarki) identificaram, confirmando o processo de logicização também das ações. O conceito de número e as conquistas das operações aritméticas são conhecimentos de dupla natureza (empírica e dedutiva), resultantes da atividade e coordenação de ações da criança.

Na obra de Piaget "Psicologia e Pedagogia" (1977), são discutidos aspectos importantes da Didática da Matemática que, ainda na atualidade, são focos de preocupações expressas em estudos de centros de pesquisas, em publicações nessa área da didática e em documentos e medidas governamentais. O problema central do ensino das matemáticas, apresentado pelo autor, é o do ajustamento recíproco das estruturas operatórias espontâneas próprias da inteligência e do programa ou dos métodos relativos aos domínios matemáticos ensinados. Na obra "Para onde vai a Educação?" (1996), além dessas preocupações com a área matemática, algumas questões mais gerais e também atuais estão expressas, tais como a do papel do ensino pré-escolar, a do significado real dos métodos ativos, a da utilização dos conhecimentos psicológicos adquiridos acerca do desenvolvimento da criança e do adolescente e a do caráter interdisciplinar necessário às iniciações em todos os níveis de ensino.

Assim, para o autor, ensinam-se as matemáticas mais modernas por meio de métodos mais tradicionais por não se desvendar a relação existente entre as estruturas matemáticas e as estruturas operatórias espontaneamente construídas no curso do desenvolvimento mental. Assiste-se a fracassos mais ou menos sistemáticos de alunos quando se trata da matemática, não em outros campos e, para Piaget (1977), fica "difícil pensar que as pessoas bem dotadas na elaboração e na utilização das estruturas lógico-matemáticas espontâneas da inteligência sejam carentes de qualquer vantagem na compreensão de um ensino que incide exclusivamente sobre o que se pode tirar de tais estruturas" (p. 26).

Uma das razões dessa dificuldade apontada por Piaget reside no fato de o ensino de matemática envolver uma reflexão sobre as estruturas do pensamento por meio de uma linguagem técnica, que comporta um "simbolismo muito particular e exige um grau mais ou menos alto de abstração" (p. 45). Para as crianças, tais estruturas de ações e de operações que dirigem seu raciocínio não constituem, ainda, objeto de reflexão.

Sobre a existência de uma aptidão para a matemática, Piaget (1977) ressalta que é relativa à maneira pela qual essa área é ensinada nas escolas, e não se confunde com a própria inteligência. Muitas vezes, a aptidão é vista como uma compreensão e domínio da própria linguagem matemática em oposição às estruturas por ela descritas, ou como a velocidade de abstração é vinculada a um simbolismo, sem reflexão sobre as estruturas naturais. Piaget (1996) retoma essas idéias ao afirmar que em seus estudos sobre a formação das operações lógico-matemáticas, em mais de 120 pesquisas realizadas, não conseguiu levantar dados sistemáticos sobre uma aptidão para a área matemática, visto que "todos os colegiais, das mais variadas idades, e de nível intelectual médio ou superior à média, revelaram a mesma capacidade de iniciativa e de compreensão" (p. 14). Outro argumento é que indivíduos com níveis aquém do esperado fornecem maus resultados, mas em todas as áreas, e não especificamente no campo da matemática. Disso decorre como hipótese de que as "aptidões" consistem na capacidade dos estudantes em se adaptarem ao tipo de ensino que lhes é fornecido.

Como a matemática é concebida como uma disciplina dedutiva, impasses ou incompreensões no processo, os quais acarretam dificuldades na sequência dos encadeamentos e problemas de adaptação em um ponto que a criança apresentar, refletirão nas próximas aquisições nessa área. Tal fato envolve os complexos afetivos que são reforçados pelas pessoas que cercam a criança e, porventura, poderão bloquear uma iniciação à matemática que poderia ser totalmente diversa (Piaget, 1977). Assim, exige-se um formalismo acentuado já nos anos iniciais de contato com a matemática, no espaço escolar, o que ocasiona seguidos fracassos e desmotivações e pouca estimulação de seu caráter de originalidade e construção.

2.1. A construção da noção de número

Outro fator a ser considerado, sobre o conhecimento lógico- matemático, é a importância de um acompanhamento da construção de variadas categorias, das mais simples às mais complexas, do nascimento à adolescência, em vários domínios, tais como: a noção de tempo, do número, da origem da idéias do acaso, da velocidade, entre outras.

No acompanhamento da construção do número, Piaget (1981) fez estudos sobre as operações quantificantes, operações elementares de correspondência ou de igualização. Nesse sentido, superou as pesquisas e as práticas escolares que relacionavam o número somente às questões empíricas de recitação de séries, colagens de quantidades e escritas de algarismos. O conhecimento numérico não está terminado, de forma a ser transmitido automaticamente a outras pessoas de um sentido de fora para dentro. Assim, a cada geração, constatamos a originalidade de sua criação; e as crianças continuam repetindo, por exemplo: 1, 2, 3, 8, 5, 23 por mais que alguém insista na sequência correta.

Sobre a conservação das quantidades e invariância dos conjuntos, assiste-se a uma gradual e progressiva construção de ordem extensiva, superando a quantificação intensiva, perceptiva e qualitativa. Na correspondência termo a termo cardinal e ordinal, parte-se do caráter perceptivo e intuitivo das fases iniciais de construção para o alcance da noção de conservação.

A descoberta das composições aditivas e multiplicativas, pelas crianças, completa a construção do sistema numérico (Piaget & Szeminka, 1981). Existe uma primeira fase na composição aditiva em que as crianças não estabelecem uma inclusão permanente entre o todo e as partes, as totalidades ainda não constituem classes lógicas; ocorrem partições qualitativas, e não a composição aditiva das partes: B=A+A' e A=B-A'. Efetuar operações inversas, tanto quanto diretas, e combinar análises e sínteses são ações impossibilitadas pela irreversibilidade do pensamento infantil na fase inicial. Superando a fase pré-lógica a criança consegue incluir, seriar e enumerar.

Foram investigadas por Piaget (1981) duas situações em que a criança deveria igualizar quantidades desiguais, permitindo novas investigações sobre a relação aditiva parte-todo e entre as partes entre si. Na primeira situação, a criança deveria igualizar bombons recebidos na forma (4+4) com a forma (7+1).

Em fases iniciais, as crianças têm dificuldade na compreensão que 7>4 em compensação 1<4, e que essas desigualdades se compensam. Na primeira fase, a criança não concebe uma coleção em relação à outra: ao mesmo tempo em que se acrescentam elementos em uma coleção, retira-se de outra, a totalidade numérica 8 ainda não resulta de uma composição aditiva. Na segunda fase, intuitivamente concebe uma coleção em relação à outra: realizando tateios empíricos para igualizar, consegue realizar constatações corretas com relação às partes, mas conclusões inexatas em relação ao todo.

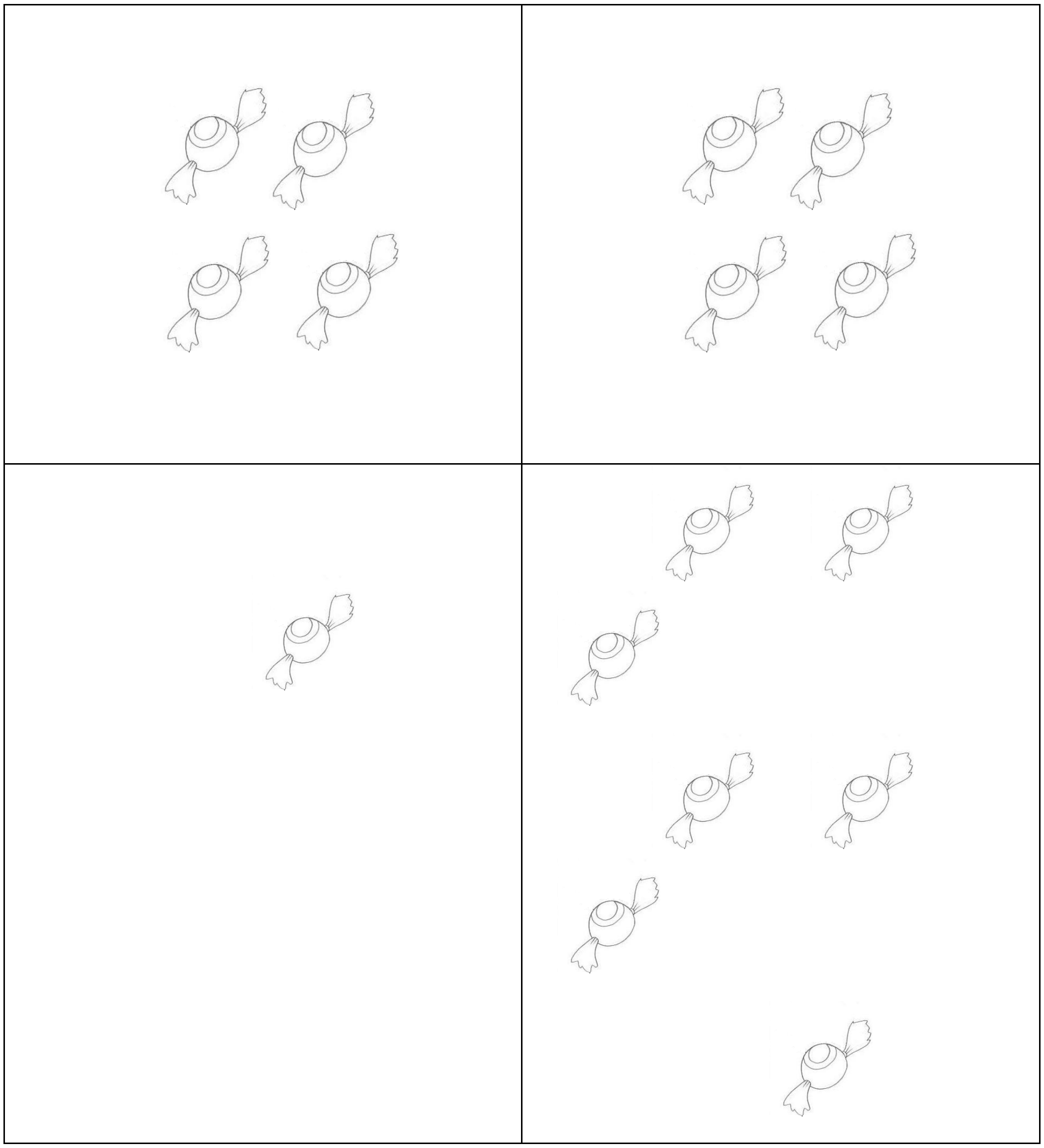


Figura 06: Situação de igualização de quantidades

Somente na terceira fase consegue a correspondência e composição operatória. O aumento de uma coleção só se torna uma adição se esse crescimento é colocado em reciprocidade com a subtração de outra coleção. Logo compreende que uma coleção, que perdeu 3 elementos, é compensada pela coleção menor, que ganhou os mesmos 3 elementos.

Uma segunda situação de igualização envolve coleções de 8 e 14 elementos, suscitando a realização de subtrações e adições combinadas. Na primeira fase, a criança ainda não compreende que o acréscimo ao monte A' requer a diminuição no monte A que possui 14 elementos. Ela realiza transferências empíricas sem um sistema organizado, fazendo comparações globais, retira alguns elementos da coleção maior e acrescenta a coleção menor. Na segunda fase, existe intuitivamente a compreensão desse equilíbrio, sem antecipação dos resultados e da compensação necessária, utilizando muitas vezes de construções figurais para igualar as coleções. Em um terceiro momento, existe a reversibilidade e correta transferência de elementos, procedendo por correspondências unívocas e recíprocas.

2.2. A construção das operações aritméticas

A adição só é compreendida em termos operatórios, segundo Piaget, quando vai além de enumerações verbais e envolve o mecanismo geral de igualização de diferenças: consegue-se fazer repetir 2+2=4, 2+3=5, 2+4=6 etc, mas só se obtém uma assimilação real se o sujeito é capaz de conceber uma adição do tipo 6 como uma totalidade, englobando as parcelas 2 e 4 a título de partes, e de situar as diversas combinações possíveis num grupo de composições aditivas (Piaget, 1981, p. 261).

Uma terceira situação experimental busca a análise da composição aditiva, estabelecendo a comparação, entre si, das partes de um determinado todo, de que forma a criança, partindo de uma soma, constrói duas coleções iguais (metades). Primeiramente, a criança não concebe a igualdade entre o todo e a soma das partes e nem a equivalência durável entre as duas metades. Na segunda fase, ocorre a construção de duas partes iguais por comparações qualitativas de figuras, com comparações de reuniões ou de dissociações intuitivas. Em um terceiro momento, ocorrem as comparações aditivas, igualdade durável entre as partes consideradas como unidade e a igualdade de sua soma em relação ao todo proposto inicialmente.

As adições e subtrações simples e relativas foram estudadas por Piaget (1980) na obra “As formas elementares da dialética”, por meio de experimentos de igualização de quantidades e construção de diferenças. Tal experimento constitui um mecanismo de investigação, nessa pesquisa, sobre as interdependências entre adições e subtrações, fato descrito no quarto capítulo. As crianças, em um primeiro nível de respostas, realizam falsas implicações resultantes de correspondências figurais entre colunas de elementos. Em níveis seguintes, realizam adições e subtrações simples ao acrescentar e retirar elementos das colunas e, nos níveis finais, alcançam a identidade dos contrários ao compreender que uma transferência de elementos entre colunas é, ao mesmo tempo, uma adição e uma subtração (adição e subtração relativa).

Sobre a composição multiplicativa, Piaget (1981) realiza experimentos que objetivam estudar a correspondência biunívoca entre diversas coleções e a passagem das relações de equivalência para a multiplicação aritmética. Assim que as crianças estabelecem a equivalência durável entre duas coleções, estão aptas a compor relações multiplicativas: "as operações de ordem multiplicativa em jogo na própria correspondência são, assim que constituídas, explicitadas sob a forma de multiplicação propriamente dita" (p. 281). A composição das relações de equivalência que engendra a multiplicação evolui em três fases: de uma fase inicial de fracasso da própria correspondência e da composição das equivalências, para uma fase intermediária de correspondência termo a termo sem equivalência durável, culminando na terceira fase de correspondência e coordenações imediatas.

A multiplicação numérica evolui de uma primeira fase em que não existe a correspondência termo a termo entre duas coleções, não há a compreensão que duas coleções são correspondentes se correspondem a uma terceira coleção, são realizadas comparações globais entre as coleções. Na fase seguinte, a multiplicação é resolvida por tentativas fundadas na intuição; a criança resolve as situações propostas por intermédio da correspondência entre as coleções até que, aos poucos, ela chegue a ser múltipla. Na terceira fase, a multiplicação é numérica.

Outro experimento de Piaget, para a análise das construções sobre a multiplicação, também apresenta situações em que as crianças precisam igualizar quantidades; nesse caso, estuda-se principalmente a associatividade da multiplicação. A técnica apresentada está na obra “O possível e o necessário - evolução dos necessários na criança” (1983). Ela engloba quatro situações envolvendo multiplicando, multiplicador e produto, assim composta por: número de pacotes X número de grãos por pacote = o todo. Mais especificadamente: situação 1 da multiplicação, situação 2 da associatividade, situação 3 da associatividade comutativa e situação 4 de repetição de correspondências injetivas. O experimento também é utilizado nesta pesquisa e, assim, pretende-se acompanhar como estão relacionadas a construção de adições (simples e relativas) e as multiplicações, bem como suas operações inversas.

Piaget (1983) afirma que, em seu princípio, a multiplicação parece reduzir-se a uma adição de adições que são sintetizadas em uma composição simultânea, como no exemplo de 3X4=12 sendo reduzido a 3+3+3+3 ou 4+4+4, o que comporta também adições internas das próprias parcelas, como 3=1+1+1 e 4= 1+1+1+1. "No caso da adição simples a determinação do todo não exige a igualdade, nem das partes nem mesmo dos elementos A multiplicação é, pois, mais complexa e comporta quantificações implícitas mais numerosas" (Piaget, 1983, p. 73). Tais considerações mostram que existem continuidades no desenvolvimento de processos aditivos e multiplicativos, basicamente centradas na idéia de multiplicação enquanto soma de parcelas iguais. Outros aspectos de ruptura, entretanto, estão presentes e precisam ser analisados e trabalhados nas escolas. Um aspecto interessante é o fato de que nem sempre, ao multiplicarmos, ficamos com maiores quantidades, como é o caso da multiplicação de números racionais; é uma ruptura que nem sempre é evidenciada nas salas de aula.

Piaget também estudou a inversão das operações aritméticas a partir do ponto de vista da abstração reflexiva, e constatou que as relações de inversão que caracterizam a adição e a subtração são primeiramente construídas, e as da multiplicação e da divisão são assimiladas com bastante lentidão pelas crianças. Foram utilizadas três provas para análise da inversão das operações aritméticas: a da árvore, a do cubo e a do cálculo. Na prova da árvore, os sete pedaços de madeira podem ser seriados em função de suas áreas de secção. Na prova do cubo, os oito pequenos cubos são questionados sobre sua ordem e pede-se uma comparação entre essa construção e a da árvore. Na prova do cálculo, a partir dos 7-8 anos, pede-se para a criança registrar um número n de dois algarismos, contornado por uma linha redonda; depois, por escrito, acrescenta-se a esse número o 3, dobra e acrescenta-se mais 5. Pergunta-se, então, se o conhecimento do número terminal n` é necessário para reencontrar n e por quê. Pergunta-se sobre a ordem das operações e faz-se comparar o cálculo com a construção da árvore.

No primeiro nível de respostas das crianças, há dificuldade para construir a árvore e para perceber a diferença entre o caso do cubo e da árvore. No nível seguinte, há sucesso nas construções da árvore e do cubo, tendo consciência da ordem necessária à construção, bem como da inversão de sentido que ocorre na demolição, sem ainda admitir que as ordens direta e inversa tenham semelhança operatória.

No nível IIA as crianças compreendem a necessidade de proceder por operações inversas, sem a percepção, ainda, de que as operações não são comutativas, que é preciso conservar a ordem ao invertê-la. Apenas no último nível realizam a ligação entre n e n´, que é resultado de uma abstração reflexiva de patamar superior, atingindo as razões necessárias. Na comparação geral das três provas, constata-se que as séries de adições e de subtrações correspondem à construção do cubo e as operações heterogêneas correspondem à montagem da árvore.

Todas essas considerações feitas sobre o conhecimento lógico-matemático, a partir da teoria de Piaget e colaboradores, forneceram possibilidades de investigações e implicações importantes para o ensino de matemática, o que será destacado a seguir a partir de pesquisas atuais que envolvem a resolução de cálculos mentais e escritos e a construção das operações aritméticas elementares.

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DE CÁLCULOS MENTAIS E ESCRITOS

Fonte: Quino, 1993

Ao analisar-se as pesquisas nacionais e internacionais, desenvolvidas na atualidade, sobre a temática da resolução de cálculos mentais e escritos e o desenvolvimento das operações aritméticas, é possível afirmar que importantes contribuições podem ser agregadas a este estudo. Dessa perspectiva, ressalta-se, inicialmente, os estudos de Vergnaud (1988, 1991, 1996), Duval (1993), Brosseau (1983), Charnay (1994), Chavallard (1992), D´Amore (2005), os quais apresentam os sentidos que a matemática adquire para as crianças no momento em que é solicitado a elas que encontrem os resultados de situações-problema e, assim, apresentam as diversas possibilidades de representar um mesmo objeto matemático. Mesmo que a tradição escolar não dê o devido reconhecimento a essas representações construídas pelos alunos desde os anos iniciais, faz-se necessário o resgate da complexidade desses sistemas simbólicos. Os autores, ao refletirem o aspecto de construção do conhecimento, evidenciam elementos sobre a posição epistemológica de Piaget, já mencionados em capítulos anteriores, e reforçam a ideia de que o conhecimento não deriva de um processo linear, facilmente identificável; ele é complexo, demorado, composto por avanços e retrocessos, continuidades e rupturas, emerge de um sistema de utilizações e representações que caracterizam a pragmática humana.

Em linhas gerais, as principais contribuições desses autores da didática francesa serão aplicadas no momento em que forem analisadas as resoluções de cálculos por estudantes de terceiras e quintas séries e acompanhadas as suas diversas representações, os diversos sentidos que os alunos estabelecem para os objetos matemáticos, e também a possibilidade de mudanças de sentidos do conhecimento, para então acompanhar os procedimentos que os alunos aceitam e que rejeitam. Além disso, será verificado o acesso a cálculos automáticos, em níveis mais avançados e o estabelecimento de interdependência entre as operações e as propriedades das operações presentes nas resoluções solicitadas aos alunos.

Outro grupo de estudiosos contribui no presente estudo ao acompanhar o desenrolar de cálculos mentais e escritos das quatro operações elementares da aritmética em estudantes de diferentes níveis escolares. Tal grupo quantificou os acertos ou erros dos estudantes, evidenciou os melhores procedimentos de resolução e a influência de fatores que podem existir, como o senso numérico, a memória, o tempo de respostas e o fator idade na resolução dos cálculos (Shane, 2004; Barrouillet & Lepine, 2005; Lefrevre *et. al.*, 2004; Jackson *et. al.*, 2005; Mallofeeva *et. al.* ,2004 ; Sally & Coral, 2005, Johansson, 2005). Os estudos de Lucangeli *et. al.* (2003), ao identificarem procedimentos de cálculos escritos e mentais em todas as operações aritméticas em estudantes de terceiras e quintas séries, serviram como referência para a elaboração de um protocolo que será utilizado na pesquisa.

3.1 Os diferentes sentidos das representações dos objetos matemáticos

> O verdadeiro problema que se apresenta no ensino da matemática não é o rigor, mas o da construção do *sentido.* (Piaget, Choquet e outros citados por Huete e Bravo, 2006)

Os processos aditivos e multiplicativos foram investigados por Vergnaud (1982, 1983,1988,1990,1991) em inúmeros trabalhos, que muito contribuíram para a compreensão desse aspecto da matemática, não obstante sua contribuição não é restrita a essa única área. Tais processos estão inseridos em sua Teoria dos Campos Conceituais que, de forma geral, pode ser definida como um conjunto informal e heterogêneo de situações, problemas, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, em que o processo de apropriação de conhecimento pelo sujeito requer um domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, ou seja, de sentidos diferentes. Eles decorrem de fatores tais como a experiência, a maturidade e a aprendizagem (Vergnaud,1982). A teoria pode ser expressa simbolicamente por **S I R,** em que **S** representa o conjunto de situações que dá significado ao objeto em questão, **I** representa o conjunto de invariantes que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto e **R,** o conjunto de representações simbólicas que permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades.

Para o autor, não é possível estudar um conceito de forma estanque, as operações de multiplicação e divisão, por exemplo, são dependentes, fato também evidenciado por Piaget ao propor a investigação das interdependências entre as adições e as subtrações em seu estudo sobre a dialética.

É importante a investigação da construção dessas estruturas nos sujeitos, a partir de diversas situações e análises de diferentes procedimentos, em que diferentes representações simbólicas estão presentes. Um exemplo é o campo conceitual das estruturas multiplicativas que consiste em todas as situações que podem ser analisadas, como problemas de proporções simples e múltiplas para os quais geralmente é necessária uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação das operações. Para Vergnaud (1988, 1990), nesse campo conceitual da multiplicação ainda estão presentes conceitos matemáticos como função linear, não-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, taxa, número racional, entre outros. Analogamente, o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto de situações que envolvem adições, subtrações ou a combinação de tais operações.

Assim, pela análise dos diferentes procedimentos utilizados pelas crianças, por exemplo, na resolução de adições, Vergnaud (1996) percebe que as propriedades associativa e comutativa funcionam de maneira implícita e são, portanto, "teoremas em ato"(p.47). A noção de "teorema em ato" é expressa pela seguinte formulação: *é uma proposição que é considerada como verdadeira por um sujeito individual para uma certa categoria de situações variáveis.* Os alunos conhecem em ato as propriedades comutativa e associativa da adição e aplicam-nas em situações como: 5+ 21 (5+1 +20= 6 +20=26), buscando diferentes sentidos para suas realizações.

> O sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente, são os esquemas, isto é, os comportamentos e sua organização. O sentido da adição para um sujeito individual é o conjunto de esquemas que pode ser colocado em prática para tratar as situações que são enfrentadas e que implicam a idéia de adição, é também o conjunto de esquemas que pode ser colocado em prática para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e da linguagem que representam a adição (Vergnaud, 1991, p. 68).

Coaduna-se com essas reflexões Panizza (2006), quando ressalta que o professor, ao reconhecer esses conhecimentos em ato nos alunos, começa a visualizar o papel fundamental que possui no processo de aprendizagem dos conceitos, dos algoritmos e das representações convencionais de seus alunos. Ele pode partir dos conhecimentos que os alunos possuem e planejar intencionalmente oportunidades para que eles mostrem representações e procedimentos não-convencionais, estabeleçam a validade dos mesmos, analisem os que são pertinentes, abandonem uns, escolham outros. Disso decorre que os professores abandonem a "ilusão pedagógica", termo designado por Vergnaud (1990, p.22), quando descreve a atitude do professor que acredita que o ensino consiste na apresentação organizada, clara, rigorosa das teorias formais e, tão logo que tais medidas são tomadas, os alunos aprendem.

Dessa perspectiva, Vergnaud (1991), além de ressaltar os vários sentidos que o conhecimento sobre adição é alcançado pelos sujeitos individuais, também reforça a ideia de que as relações aditivas caminham além da concepção de transformação comumente trabalhada nas escolas, como no exemplo: *tenho 10 balas, ganhei 5 de um amigo, com quantas balas ficarei agora?* Os problemas aditivos podem ser classificados em seis esquemas ternários fundamentais:

<u>Primeira categoria</u>: duas medidas se compõem para dar lugar a uma medida.

<u>Segunda categoria</u>: uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma medida.

<u>Terceira categoria</u>: uma relação une duas medidas.

<u>Quarta categoria</u>: duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação.

<u>Quinta categoria</u>: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para dar lugar a um estado relativo.

Sexta categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo.

Os problemas multiplicativos podem ser definidos, segundo Vergnaud, em três aspectos: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporção múltipla. São categorias a serem trabalhadas pelo sistema educacional, em uma relação quaternária, além da "conhecida" soma de parcelas iguais ou relações ternárias.

> Podem se distinguir duas grandes categorias de relações multiplicativas: definimos assim as relações que comportam uma multiplicação ou uma divisão. A mais importante delas, que se utiliza para a introdução da multiplicação no ensino fundamental e que forma a trama da grande maioria dos problemas de tipo multiplicativo, é uma relação quaternária, e não uma relação ternária; por isso, não está bem representada na escrita habitual da multiplicação: a xb=c, já que essa escrita não comporta mais que três termos. Estamos, por isso, obrigados a reexaminar completamente a noção de multiplicação (Vergnaud, 1991, p. 197).

Para Duval (1993), no trabalho com as representações dos objetos matemáticos, é necessário que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma delas. Entende-se que, na apropriação de um conceito matemático, caminha-se além de sua nomeação, pois pelo menos três motivos peculiares à área matemática determinam essa superação. O primeiro motivo próprio da área é que cada conceito matemático possui referências a não-objetos; portanto, os conceitos não se apoiam na realidade concreta. O segundo motivo é a necessidade, visto que não existem objetos a serem visualizados, de representações desses conceitos matemáticos. Por último, para o autor, a Matemática trabalha com objetos mais que com conceitos.

Um exemplo seria o trabalho com o numeral **3** ou a escrita **três**, que é a representação desse objeto matemático. Dentre as variadas possibilidades de representação simbólicas, icônicas e língua escrita, é preciso que o aluno reconheça o três, por exemplo, em cada uma delas.

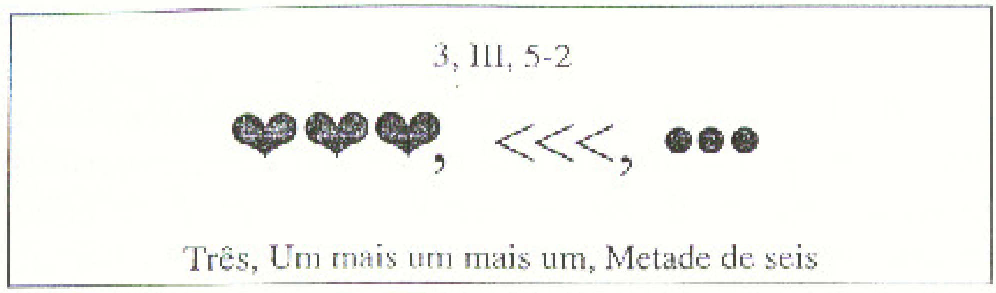


Figura 07: Diversas representações do número três
Fonte: Ponte e Serrazina, Didáctica da Matemática do 1º Ciclo, Universidade Aberta, 2000

O aluno pode escolher mudar de sentido, mudar a maneira de fazer um cálculo, por exemplo, de forma implícita ou explícita, sem suporte exterior ou com suporte nos dedos, por escrito, o que o possibilita resolver a operação utilizando dos recursos disponibilizados no momento. Como o sistema escolar não valoriza essas resoluções mais pessoais, aos poucos os alunos perdem a capacidade de criar vários sentidos e passam a identificar o objeto com uma única representação e o conteúdo com sua única forma.

Em Duval (1993), a identificação do objeto com sua representação é inevitável, é um paradoxo presente na área matemática, pois:

> ...de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, por outro lado, somente por meio de representações semióticas é possível uma atividade sobre objetos matemáticos. Esse paradoxo pode constituir um verdadeiro círculo vicioso para a aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam deixar de confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles apenas podem estabelecer relações com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, a não ser por meio de representação semiótica, torna a confusão praticamente inevitável. E, ao contrário, como podem esses indivíduos adquirir o domínio dos tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se ainda não possuem uma apreensão conceitual dos objetos representados? Esse paradoxo é ainda mais forte ao se identificar atividade matemática e atividade conceitual e ao considerar as representações semióticas como secundarias ou extrínsecas. (Duval, 1993, apud D´Amore, 2005)

Tal paradoxo é representado por D´Amore (2005, p. 51) no esquema abaixo:

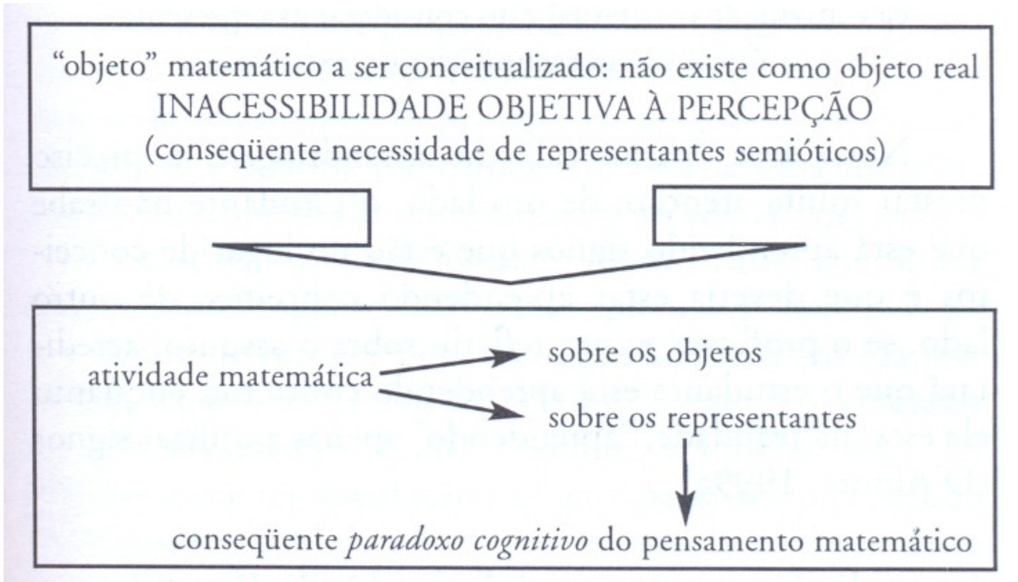


Figura 08: Esquema da identificação do objeto matemático com sua representação

D´Amore (2005) ainda completa que "de um lado o estudante não sabe que está aprendendo signos matemáticos que estão no lugar de conceitos e que deveria estar aprendendo conceitos; de outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acredita que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade, aprendendo apenas a utilizar signos"(p. 52). O autor reforça essa ideia com as palavras de Vygotsky, em "Pensamento e Linguagem" (1962), cuja impossibilidade do ensino direto de conceitos está clara:

> Como sabemos, a partir das investigações sobre o processo da formação dos conceitos, um conceito é mais do que a soma de certas conexões associativas formadas pela memória (...) é um autêntico e complexo ato de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já tiver atingido o nível necessário(...). O desenvolvimento dos conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais (atenção, memória, lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar).... A experiência demonstra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso, geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio.(Vygotsky, 1962 apud D´Amore, 2005, p. 57).

Assim, ao aprender matemática, os alunos são colocados diante de um mundo conceitual, simbólico e, sobretudo, representativo. Eles terão de decidir, então, qual uso farão do mediador simbólico, isto é, do registro de representação escolhido ou imposto pelas circunstâncias sociais.

É a capacidade de utilizar vários registros de representação simbólica que influencia a construção de conceitos. Nesse momento, D´Amore (2005) retoma os termos *noesis* como sendo a aquisição conceitual de um objeto e *semiosis* a representação realizada por meio de signos. Os estudantes, ao decidirem mudar o registro semiótico, também devem mudar a representação semiótica utilizada: não existe *noesis* sem *semiosis*, além da *semiosis* ser o primeiro passo para o alcance da *noesis*. Essas considerações podem ainda ser assim expressas: os estudantes representam um conceito em um dado registro, conseguem tratar tais representações no interior de um mesmo registro e fazem a conversão de um dado registro para outro. São aspectos indissociáveis do processo de aprendizagem, visto que é próprio do pensamento humano o uso de diversos registros de representação semiótica, bem como a criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos demarcarem o progresso do conhecimento em várias áreas.

Sobre a questão da representação, Kamii e Joseph (2005, pp. 25-26) afirmam que, no pensamento empírico, é correto dizer que o símbolo (+) representa a adição, o 2, em 23, representa o vinte e que o Material Dourado representa o sistema cuja base é dez. Contudo, essas afirmaçõe,s na teoria de Piaget, estão incorretas, pois as representações são as ações dos seres humanos sobre os objetos. Assim, os símbolos não representam; é sempre o homem que usa o símbolo para representar sua ideia e, caso esteja em um nível baixo de abstração construtiva, usa símbolos em um nível igualmente baixo de abstração. Quando atingir um nível mais alto de abstração construtiva, começará a usar os mesmos símbolos em níveis mais altos.

Para Panizza (2006), existem posturas didáticas diferentes no trabalho com alguns conceitos matemáticos e com as representações dos algoritmos convencionais de cálculo. Os conceitos matemáticos, como o sistema numérico, por exemplo, são trabalhados visando uma concepção construtiva do conhecimento, enquanto os sistemas simbólicos são considerados numa vertente empirista. Assim, o sistema educacional não considera a dificuldade dos alunos para efetuarem as operações e mantém o objetivo único de ensinar os conteúdos mais difíceis aos alunos: os algoritmos convencionais de cálculo, por meio de treinos e busca de memorização de como se faz para dividir ou multiplicar, por exemplo.

Segundo a autora (2006), falta integrar à sala de aula os resultados de pesquisas que mostrem propostas didáticas e apresentem uma hipótese construtiva em relação aos aspectos da educação matemática de forma geral, de conceitos e de algoritmos convencionais, “uma vez que identificam processos de aprendizagem mediante os quais ambos participam dialeticamente um do outro" (p. 30). Outra posição que o sistema escolar veicula, de acordo com Panizza (2006), e que precisa ser revista, é a concepção segundo a qual resolve-se um problema compreensivelmente, raciocinando e utilizando conceitos, ou resolve-se o problema mecanicamente, operando sobre símbolos. A possibilidade de ter acesso automaticamente a um conhecimento não depende de sua natureza (conceitual ou simbólica), mas do nível de conhecimento no qual a pessoa se situa ao enfrentar a situação-problema. Dificilmente, em fases iniciais de aprendizagem, os mecanismos ou os conceitos estão disponíveis na mente de forma automática.

Assim, a autora ressalta, ainda, que o professor deve ater-se ao fato de essas formas automáticas de conhecimento, além de não estarem disponíveis em fases iniciais de aprendizagem, não surgem por indicações "mágicas" de como resolver as operações, sem um fundamento. Pode acontecer de o professor conhecer explicitamente o algoritmo da multiplicação, por exemplo, mas ter "esquecido" a maneira como o mecanismo de cálculo incorporou as propriedades das operações que o justificam. E as formas de resolução na lousa parecem realmente "mágicas": vai um, desce um zero, porque multiplica-se a dezena, agora soma. As crianças acompanham as indicações de como fazer, mesmo não compreendendo os motivos de tais realizações. Finalizando, Panizza (2006) sugere que o professor considere a forma de funcionamento dos diferentes sistemas simbólicos e as possibilidades de representação e de cálculo que oferecem, compreendendo como os algoritmos convencionais de cálculo incorporam as propriedades das operações. Na verdade, os algoritmos convencionais contêm todo o saber já incorporado em sua resolução, mas não mostram aquela que está construindo essas noções. Deve-se considerar, também, a interpretação dos procedimentos e representações em termos de conhecimento que os alunos põem em prática ao executar as diversas maneiras de conhecer (implícitas, conscientes, explícitas), como constitutivas dos conhecimentos.

Para Brousseau (1986), os diferentes sentidos do conhecimento matemático derivam, primeiramente, da concepção que o conhecimento se constrói por meio da ação de um aluno diante de situações desafiadoras, que lhe provoquem desequilíbrios. Assim, diante de situações novas, muitas vezes os conhecimentos já adquiridos pelo aluno mostram-se insuficientes para enfrentar os novos problemas. O aluno, então, utiliza de seus conhecimentos anteriores, submete-os à revisão, modifica-os, rejeita-os, completa-os, redefine-os ou descobre novos contextos de utilização. A partir dessas considerações, é possível ressaltar a semelhança com o posicionamento teórico de Piaget e todo o processo da equilibração, em que estão presentes desequilíbrios e reequilibrações, e com a dialética e a abstração reflexiva ao ressaltar os passos proativos e retroativos no desenvolvimento cognitivo. Brousseau também utiliza o termo aprendizagem por adaptação quando o aluno é desafiado a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de resolução de um novo problema.

Assim, o sentido de um conhecimento se define

> ...não somente pelo conjunto de situações em que este conhecimento é realizado como teoria matemática, não somente pelo conjunto de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que retoma (Brousseau, 1986, p. 56).

A interação desenvolvida por um aluno em uma situação de ensino é um processo dialético que descarta a ilusão de uma construção linear do conhecimento, no sentido de uma sequência que vá do mais simples ao mais complexo. Brousseau (1986) diferencia, nessas interações, as *situações didáticas* e as *situações adidáticas*. Nas primeiras, estão presentes as relações entre professores, alunos e saberes específicos, e ocorrem sistematicamente para o desenvolvimento do processo de ensino e para a aprendizagem, por exemplo, de conteúdos de matemática. Nas *situações adidáticas,* existem fenômenos da aprendizagem que não são determinados por aspectos sistemáticos e, dessa forma, o aluno coloca em funcionamento conhecimentos em construção que não estão previstos nos contextos de ensino; ocorrem, portanto, na ausência de professores.

Nas *situações didáticas,* Brousseau (1986) apresenta o conceito de contrato didático, assim definido:

> Em uma situação de ensino, preparada e realizada por um professor, o aluno tem, em geral, como tarefa, de resolver um problema (matemático) que lhe é apresentado, mas o acesso a essa tarefa é feito através da interpretação das perguntas colocadas, das informações fornecidas, das obrigações estabelecidas que são constantes da maneira de ensinar do professor. Esses hábitos (específicos) do professor esperados pelo aluno e os comportamentos do aluno esperados pelo professor constituem o contrato didático. (Brousseau, 1986, apud D´Amore, 2005, p.71).

Entende-se, nesse contexto, que os diferentes sentidos das representações dos objetos matemáticos, desenvolvidos pelos alunos, podem ser desencadeados por expectativas já pré-definidas em um contrato didático pelo professor, pela escola, pela concepção de Matemática vigente na sociedade e pela repetição de modalidades. D´Amore (2005) exemplifica tais questões, começando pela concepção de escola: o aluno considera como função da escola dirigir e avaliar seus comportamentos e atividades; logo, se é solicitado escrever livremente sobre determinado conceito, o aluno o fará considerando uma definição "correta", segundo critérios que acredita ser o esperado pelo professor e não propriamente os que ele considera correto. A concepção de matemática atua no contrato didático, em um segundo exemplo, quando o estudante considera que em matemática devem ser feitos cálculos. Assim, mesmo se um problema não exige um cálculo, podendo ser expresso com palavras, o aluno sente-se desconfortável e arruma maneiras de expressar algum cálculo e uma resposta formal. O terceiro exemplo, de repetição de modalidades, ocorre caso um professor trabalhe resolução de exercícios na lousa toda segunda-feira; a partir disso, o aluno supõe que toda segunda será assim e estranha alguma alteração, a mesma estranheza do aluno caso o professor só pergunte nas provas fatos recém trabalhados, e solicite em uma prova assuntos mais remotos.

Tais exemplos citados, gerados a partir de um contrato didático firmado nas salas de aula, explicam alguns comportamentos que até então eram caracterizados como inexplicáveis, frutos de desinteresses dos alunos, não compreensão dos temas, falta de motivação, entre outras explicações. Os estudos de Adda, 1987, Sarrazy, 1995 e D´Amore, 1993, citados por D´Amore (2005) acrescentam ao contrato didático o *Efeito idade do capitão,* no qual são fornecidos aos alunos os dados sobre um barco (cor, comprimento do casco, altura do mastro etc) e pede-se a idade do capitão. Os alunos, em sua grande maioria, nas pesquisas realizadas, conseguem calcular a idade do capitão adicionando os elementos do barco, ou seja, não realizam a ruptura do contrato didático, entendendo que sempre é possível e deve-se ter uma resposta para as situações apresentadas e, como fora mencionado no segundo exemplo, se a aula é de Matemática, cálculos devem ser realizados.

O sentido de um conhecimento, na concepção de Charnay (1994), implica a construção de um nível *sintático* (interno) que permite a compreensão de uma determinada noção, por exemplo, a organização e regularidade da série numérica, o funcionamento do algoritmo, entre outros; e um nível *semântico,* que permite o reconhecimento do tipo de problemas que esse nível interno resolve e quais não consegue resolver. Como Brousseau, o autor afirma que o aluno deve ser capaz não somente de repetir ou de refazer, mas também de ressignificar, em situações novas, seu conhecimento, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas. Nesse sentido, também afirma que os conhecimentos não são empilhados, acumulados, mas passam de estados de equilíbrio a estados de desequilíbrio no transcurso dos quais os conhecimentos anteriores são questionados.

Na reorganização, os novos saberes podem questionar os saberes anteriores, por exemplo, o estudo dos decimais deveria levar o aluno a questionar a ideia de que a multiplicação aumenta os valores, ideia que não é válida nos decimais. Tal reorganização dos saberes é denominada por Bachelard (1996), citado por Pais (2001), como um *obstáculo epistemológico,* visto que os saberes se encontram muitas vezes estabilizados no plano intelectual e dificultam a evolução da aprendizagem no âmbito escolar. Os primeiros *obstáculos* são aqueles provocados pelas primeiras experiências sensíveis, realizadas sem maiores reflexões e críticas e, no espaço escolar, podem estar associados à forma simplificada com que os conteúdos são apresentados nos livros didáticos. Outro *obstáculo* pode ser pela generalidade, ou seja, uma tentativa apressada de generalizar uma ideia presa ao pensamento pré-reflexivo, sem rigores metodológicos.

Quanto à sua natureza, um obstáculo pode ser ontogenético, ligado às dificuldades que os estudantes possam apresentar e à falta de maturidade para alcançar a compreensão dos conteúdos. Podem ser de natureza didática, voltados à escolha de estratégias e metodologias utilizadas pelo professor, que são eficazes para alguns alunos e não para a totalidade da sala, além de provocarem o desenvolvimento de modelos intuitivos. Trabalha-se que as multiplicações sempre aumentam os resultados, depois há dificuldade na compreensão de valores reduzidos, como em 0,4 x 0,3. Ainda existem os obstáculos de natureza epistemológica relativos à própria natureza do assunto trabalhado, sua evolução histórica, as rupturas, as mudanças de entendimento dos conceitos matemáticos.

O termo *sujeito didático* é designado por Chevallard (1992), o aluno é considerado o autor de seu processo de aprendizagem e, diante de situações que o professor apresenta, realiza uma busca dentro de tudo o que sabe, coloca em jogo as ferramentas que possui para decidir aquilo que é mais pertinente. Esse sujeito compreende que o saber é um meio de solucionar, de prever, de antecipar resultados, de realizar e de controlar as estratégias que utiliza para resolver as situações que lhe são apresentadas. O aluno passa também a aceitar sua responsabilidade no processo, entendendo que o resultado obtido foi decorrente da escolha que fez, diante de diferentes possibilidades e, assim, a relação de causalidade entre suas decisões e o resultado obtido se fortalece.

3.2 O cálculo mental e a aprendizagem dos conceitos matemáticos

Estudos recentes têm investigado as diferentes estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos em situações escolares com crianças em diferentes idades. Por cálculo mental compreende-se a utilização de diversos invariantes lógico-matemáticos também presentes no uso de algarismos escritos, como as propriedades associativa, distributiva e comutativa, no momento de evocação de uma resposta (Correa, 2004). Assim, longe de ser sinônimo de memorização mecânica de fatos numéricos, o cálculo mental destaca-se pela articulação de procedimentos para a obtenção de resultados exatos ou aproximados. Parra e Saiz (1996) diferenciam o cálculo automático ou mecânico (uso de um algoritmo ou de um material) e o cálculo pensado ou refletido e, dessa forma, o define

> Entenderemos por cálculo mental o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para obter resultados exatos ou aproximados. Os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números (Parra e Saiz, 1996, p. 89).

As autoras, ao constatarem a pouca teorização sobre o cálculo mental e sua relação na construção dos conhecimentos matemáticos, destaca algumas hipóteses didáticas para seu ensino na escola primária. A primeira hipótese é a de que as aprendizagens no terreno do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas. Parra e Saiz (1996, p. 196) assim exemplificam as relações numéricas que podem ser desencadeadas em 24:

20+4, se temos que dividi-lo por 4, por 2 ou por 10;

12+12, se se quer a metade;

25-1, se se quer multiplicar por 4;

21+3, se se quer saber que dia da semana será 24 dias mais tarde;

próximo a 25%, se se quer fazer uma estimativa em um problema de porcentagem;

6X4, se se quer prever quantos pacotes de seis sabonetes podem ser feitos...

A segunda hipótese é a de que o cálculo mental aumenta o conhecimento no campo numérico. Quando o cálculo passa a ser objeto de reflexão, é possível que o estudante analise os dados, estabeleça relações, tire conclusões, seja capaz de fundamentá-las, confirme sua hipótese de várias maneiras, reconheça as situações que não funcionam, estabeleça os limites do que encontrou. Como terceira hipótese, o trabalho com o cálculo mental habilita para uma maneira de construção do conhecimento que favorece uma melhor relação do aluno com a matemática. Assim, vai além de técnicas arbitrárias em que os alunos sentem-se fora do processo de construção do conhecimento e passam a interagir mais pessoalmente em todo esse processo.

A quarta hipótese é a de que o trabalho de cálculo pensado deve ser acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático. Nesse sentido, o cálculo mental é uma via de acesso para a compreensão e construção de algoritmos e sua ferramenta de controle; entende-se, portanto, "que um bom domínio do repertório aditivo é condição necessária, porém não suficiente para a aquisição do algoritmo da soma" (Parra & Saiz, 1996, p. 200).

Os resultados positivos sobre o trabalho com o cálculo mental em escolas também foram apresentados nas pesquisas de Butlen e Pezard (1992, 2000), Gómez (1995), Lethielleux (2001), Anselmo & Planchette (2006). De acordo com Sanches, Baptista & Marzola (2008), esse cálculo se apoia nas diferentes maneiras de calcular e na possibilidade de eleger a melhor maneira para a resolução de cada uma das situações. É um recurso que estimula as crianças a agirem com mais segurança na resolução de situações-problema, uma vez que elas compreendem melhor as técnicas usuais de cálculo escrito, tornam-se mais autônomas. Para as autoras, o cálculo mental é um importante recurso pedagógico ainda pouco explorado pelas escolas.

Boulay, Le Bihan e Violas (2004) diferenciam duas funções do cálculo mental: a social e a pedagógica. Por função pedagógica entende-se que o cálculo mental permite a construção e o reforço dos conhecimentos relativos à estruturação dos números e suas propriedades, amplia a capacidade de elaboração de estratégias originais, além de auxiliar na resolução de situações-problema. A função social evidencia-se na utilização de cálculos no dia-a-dia, na necessidade de diversificação de estratégias de cálculos mais complexos e na utilização de cálculos aproximados.

A importância do cálculo mental para a aprendizagem de conceitos matemáticos, nos anos iniciais do ensino fundamental, é destacada por Guimarães e Freitas (2008) ao investigarem as contribuições de práticas regulares de cálculo mental para a ampliação e a construção de novos procedimentos na aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos. Por meio de um levantamento de pesquisas sobre esse tema, destacam que o cálculo mental não é muito estimulado pelas escolas brasileiras e, dessa forma, deixam de ser aproveitados os espaços de construção de novos esquemas de ação, os espaços de múltiplas interações em sala de aula, de desenvolvimento de habilidades como a atenção, a memória, a concentração, o que amplia o repertório de cálculos dos alunos e agiliza o seu uso. O professor, ao identificar que invariantes operatórios são mobilizados pelas crianças, nas situações-problema que envolvam o cálculo mental, pode atuar diretamente sobre eles.

Apesar de ser pouco estimulado pelas escolas brasileiras, o cálculo mental é evidenciado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1997), nos seguintes trechos: “Com relação às operações, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando diferentes tipos: exato e aproximado, mental e escrito” (p.47).

No primeiro ciclo, o objetivo é: “desenvolver procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados” (p.49).

Nos conteúdos conceituais e procedimentais: “cálculos de adição e subtração, por meio de estratégias pessoais e algumas técnicas convencionais. Cálculos de multiplicação e divisão por meio de estratégias pessoais”. (p.49)

No segundo ciclo, ressalta-se: “a resolução das operações com números naturais, por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos. Ampliação do repertório básico das operações com números naturais para o desenvolvimento do cálculo mental e escrito”(p.52)

Critérios de avaliação: realizar cálculos mentalmente e por escrito, envolvendo números naturais e racionais e comprovar os resultados, por meio de estratégias de verificação. Espera-se que o aluno saiba calcular com agilidade, utilizando-se de estratégias pessoais e convencionai, distinguindo as situações que requerem resultados exatos ou aproximados. É importante também avaliar a utilização de estratégias de verificação de resultados, inclusive as que fazem uso de calculadoras (p.76).

Pelo aspecto do cálculo, adição e subtração também estão intimamente relacionados. Para calcular mentalmente 40-26, alguns alunos recorrem ao procedimento subtrativo de decompor o número 26 e subtrair primeiro 20 e depois 6; outros pensam em um número que devem juntar a 26 para se obter 40, recorrendo, nesse caso, a um procedimento aditivo (p.78).

O Currículo Básico para a Escola Pública Municipal - Educação Infantil e Ensino Fundamental (anos iniciais), editado em 2007 pela Associação dos municípios do oeste do Paraná AMOP, não destaca o cálculo mental como elemento a ser desenvolvido nas escolas. No quarto ano, ao apresentar o trabalho com as operações, assim redige o documento: *adição, subtração, multiplicação (pela unidade e dezena) e divisão (pela unidade e dezena), utilização de algoritmos (p.57).*

As pesquisas apresentadas anteriormente não descartam o trabalho com os cálculos escritos e com os algoritmos já nas séries iniciais; no entanto, para os autores Ralston, Kamii e Joseph, esse ensino chega a ser prejudicial. Para Ralston (1999), há uma diferença a ser considerada na aritmética de papel e lápis (APL) e na aritmética mental. O autor propõe que a última substitua o cálculo escrito ao melhorar o sentido numérico, possibilitar tanto a organização mental em um processo de raciocínio não-trivial, como a variedade de estratégias possíveis para a execução de cálculos. Ele propõe ainda que, caso não se acabe com a aritmética de lápis e papel, o que a seu ver seria o ideal, deve-se adiá-la para séries mais adiantadas.

As autoras Kamii e Joseph (2005) ressaltam, como Ralston, o caráter prejudicial do ensino dos algoritmos. Em suas investigações com crianças de segunda série, constataram que o ensino desses algoritmos faz com que as crianças desistam de pensar e “desensinam” o valor posicional, impedindo que as crianças desenvolvam o senso numérico. Elas defendem a reinvenção da aritmética pelas crianças, substituindo o que as escolas ensinam sobre as adições, subtrações, multiplicações e divisões. As crianças constroem conceitos numéricos por meio de seu próprio pensamento, sem qualquer instrução, a partir do momento que sujeitam as relações já feitas a novas relações.

Além dos estudos sobre as diferentes estratégias de cálculos, podem ser evidenciados os estudos que ressaltam o papel da memória e o desempenho em aritmética, sugerindo que o tempo de resposta se modifica em função dos cálculos e do tamanho dos problemas, sendo que situações como 2+2= apresentam um tempo de resposta mais rápido que outros cálculos, por exemplo. (Shane, 2004; Barrouillet & Lepine, 2005; Jackson *et. al.*, 2005).

No desenvolvimento das operações aritméticas, também estão sendo avaliados o fator do senso numérico (Malofeeva *et. al.*, 2004; Sally; Coral, 2005) e o papel da habilidade de conhecer corretamente a sequência numérica e sua relação com o desempenho em aritmética, já que saber contar é um procedimento de resolução que aumenta a habilidade no cálculo, a criança descobre regularidades nas sucessões e pode desencadear estratégias mais novas e precisas para resolver problemas matemáticos (Johansson, 2005).

3.2.1 Estudos sobre a adição

Os estudos de Nunes & Bryant (1997) com crianças em fases iniciais de escolaridade indicam uma progressiva compreensão das operações de adição e subtração, o que engloba a compreensão da situação do problema, as invariáveis da adição e da subtração e as operações de pensamento que precisam ser entendidas pelas crianças no momento de resolução de um problema específico. Para o nível pré-escolar, o número é relacionado com uma medida do tamanho dos conjuntos e a compreensão da adição/subtração como aumento/redução de quantidades. Os tipos de problemas e de sinais que utilizam ainda são reduzidos e o sucesso na resolução de problemas incide na possibilidade de manipulação de objetos. A partir de 5 até 7 anos, as crianças começam a dominar propriedades dessas operações como a composição aditiva dos números e, para resolverem somas e subtrações, conservam um algarismo e contam a partir dele. A propriedade de inversão das operações e a comutatividade permitem que problemas com o elemento inicial desconhecido (notadamente mais difícil) possam ser resolvidos.

Os problemas que envolvem transformação são mais facilmente resolvidos, como em "tenho 5 doces, ganhei 4, com quantos doces fiquei?', com um nível maior de dificuldade, conseguem resolver "Joe tinha algumas bolinhas de gude. Então Tom lhe deu mais cinco bolinhas. Agora Joe tem oito bolinhas. Quantas bolinhas Joe tinha no começo?" Os problemas também podem envolver relações estáticas parte-todo: "Cinco dos peixes que Martin tem em seu aquário são amarelos e três são vermelhos. Quantos peixes ele tem no total no aquário?" Além de envolverem situações de comparação, como em: "Joe tem oito bolinhas e Tom tem cinco. Quem tem mais?" (fácil resolução) e "Quantas bolinhas Joe tem a mais que Tom?" (difícil resolução).

Lopes e Brenelli (2002) investigaram as relações entre a construção dialética das operações de adição e de subtração e a resolução de problemas aditivos, conforme os propostos por Vergnaud. Os procedimentos mais complexos e mais elaborados, bem como os maiores percentuais de respostas escritas corretas só foram encontrados nas crianças que atingiram níveis mais evoluídos na prova de problemas de igualação de quantidades e construção de diferenças.

As interdependências entre as operações aritméticas e o rendimento escolar em matemática foram analisados por Bariccatti e Brenelli (2003, 2006), em 48 estudantes de terceiras e quintas séries do Ensino Fundamental. Os resultados revelaram que, para as terceiras séries, o fator desempenho satisfatório ou insatisfatório em matemática não ocasionou diferenças entre os grupos na construção das interdependências. Elas utilizam mais as condutas de "adição e subtração simples" e estavam em fases iniciais de construção das adições e subtrações relativas. Para a quinta série, o grupo com rendimento satisfatório em matemática apresentou níveis mais complexos na interdependência entre adições e subtrações, exigindo sínteses entre operações de sentidos contrários. Tal fato demonstra a relação entre a compreensão de conteúdos na quinta série e a construção da interdependência entre as operações aritméticas. Se as estruturas não estão presentes em um nível operatório, os estudantes apresentam lacunas, como foi observado no grupo de quinta série com rendimento insatisfatório.

Outras pesquisas também têm destacado a relação entre adições e subtrações, a dificuldade de compreensão dessa relação nas séries iniciais e a pouca divulgação dessa relação no espaço escolar (Demby, 1993; Baroody, 1999; Onuchic & Botta, 1998).

3.2.2 Estudos sobre a subtração

Os estudos de Lopes (1997) analisaram a relação entre os diferentes níveis de abstração reflexiva e a resolução de problemas de subtração. Somente os participantes com níveis de abstração mais evoluídos foram capazes de solucionar os problemas mais complexos de subtração, aqueles que pedem, em seu enunciado, os estados iniciais e as transformações. Foram investigadas 12 crianças de segundas e terceiras séries do ensino fundamental que apresentaram diferenciados desempenho e compreensão em situações que envolviam operações de adição e subtração. Lopes utilizou a prova de "Inversão das operações aritméticas", proposta por Piaget, para análise do nível de abstração reflexiva dos sujeitos. No entanto, as crianças, mesmo com níveis superiores na abstração, não alcançaram êxito em todos os problemas, visto que estiveram centradas em determinadas "pistas" no enunciado do problema e deixaram de analisar a sua estrutura.

De acordo com Busquets (1994), apesar da simplicidade que os processos de adição e subtração possam aparentar, existem grandes dificuldades a serem superadas: estabelecer uma ordem sequencial dentro de um processo (relação parte-todo), tomar consciência da ação que causou a transformação do estado inicial, verificar as relações causais desse processo, encontrar a sua expressão verbal, utilizar a simbolização gráfica e uso espontâneo dos signos aritméticos. Assim, para a compreensão da sequência aditiva ou de subtração de elementos, é necessária uma abstração, uma interiorização coordenada e reflexiva dos esquemas de ação.

3.2.3 Estudos sobre a multiplicação

A passagem das estruturas aditivas para as estruturas multiplicativas foi investigada por Moro (2004) em situações de igualação de quantidades e construção de diferenças, conforme as provas piagetianas, e por meio dos significados das notações realizadas pelas crianças, nas proposições de Vergnaud sobre os campos conceituais. Os participantes da pesquisa foram 12 crianças de 6,4 a 9,5 anos de idade, provenientes de escolas da periferia urbana de duas grandes áreas metropolitanas, foram agrupados em tríades. A análise dos dados de ordem qualitativa e microgenética foi realizada com a identificação das características centrais das notações produzidas, das interpretações das crianças sobre elas e com a descrição, em categorias principais, dos tipos de notação segundo sua significação no processo de elaboração estudado.

Como resultados, foram encontradas as presenças de desenhos, algarismos e escritas alfabéticas como principais categorias de notação das crianças. Os diferentes tipos de notação evoluíram desde níveis menos avançados, com a composição e identificação das duas parcelas não equivalentes de uma adição; para um segundo nível, com as notações de igualização das parcelas não equivalentes e um último nível com as notações produzidas da repartição das coleções em 2, 3 e 4 partes iguais.

Outro estudo de Moro (2005), "Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir", objetivou descrever concepções infantis da divisão por partição e identificar níveis de tomada de consciência de relações desse tipo de divisão. Para os seis alunos investigados (7 e 8 anos), o processo foi favorecido por tarefas que alternam momentos de repartir e produzir notações interpretadas a respeito.

Os estudos de Taxa e Fini (2001) objetivaram analisar o desempenho e os procedimentos de estudantes de séries iniciais do ensino fundamental, em problemas verbais aritméticos de estrutura multiplicativa. Foram compostos três grupos de vinte sujeitos assim divididos: grupo 1 - crianças que não haviam aprendido multiplicação na escola (7 - 8, 5 anos); grupo 2 - crianças que estavam aprendendo a multiplicação (8 - 9, 5 anos); grupo 3 - crianças que já haviam aprendido multiplicação (10 e 12 anos). As crianças foram submetidas a provas clássicas piagetianas para a investigação do desenvolvimento cognitivo. Para investigar a solução dos problemas verbais aritméticos, foram utilizados sete problemas usualmente encontrados em livros didáticos. Os problemas de estrutura multiplicativa eram do tipo isoformismo de medidas e permitiam a utilização de objetos que ilustravam as situações. Foram identificadas três estratégias de cálculo: contagem, estratégia aditiva e estratégia multiplicativa. As estratégias de contagem foram as mais utilizadas, com procedimentos pessoais, em detrimento dos procedimentos mais tradicionais ensinados nas escolas.

Com o objetivo de apresentar as relações existentes entre a abstração reflexiva e a construção da noção de multiplicação, destacando o papel da intervenção pedagógica via jogos de regras, foi proposto o estudo de Guimarães (1998). Foram estudados dezessete alunos de terceira série por intermédio de provas de construção de múltiplos comuns, de acordo com a teoria de Piaget (1983), e provas de multiplicação e divisão aritmética, de acordo com as propostas por Granell (1983). Os resultados permitiram inferir que os sujeitos evoluíram em um aspecto investigado (abstração reflexiva ou a noção de multiplicação) após a intervenção com jogos de regras. Um novo estudo foi proposto pela autora (2004), com o objetivo de verificar as relações existentes entre os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização e sua influência em situações que envolvam problemas de estrutura multiplicativa, após situações lúdicas com o jogo de argolas. Foram trinta sujeitos com idades entre 8 e 11 anos selecionados de terceiras e quartas séries, com níveis diferenciados de construção da noção de multiplicação. A análise estatística demonstrou uma associação significativa entre os níveis de construção das noções de multiplicação. Na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, o percentual maior de acerto concentrou após a participação em atividades lúdicas. Foi confirmada a relação entre a construção da noção de multiplicação e a construção da generalização.

Com enfoques diferenciados das pesquisas mencionadas até o momento, encontram-se as investigações de Lin e Kubina Jr. (2005). Duas questões centrais motivaram o estudo: como alunos de quinta série executarão fatos básicos de multiplicação e problemas com multidígitos, em termos de precisão e fluência? Que relações existem entre o desempenho nos fatos básicos da multiplicação e na resolução de problemas mais complexos? Ao analisarem 156 alunos de distritos da Pensilvânia, em três sessões que envolviam aspectos de precisão e fluência na multiplicação, destacaram como resultados que os estudantes alcançaram níveis mais altos de precisão e mais baixos na fluência. Assim, os alunos alcançaram níveis mais altos na precisão em situações com resoluções de um único dígito, como 3x8, por exemplo, e níveis ligeiramente inferiores em operações com mais dígitos. Eles não apresentaram fluência nas resoluções com um ou mais dígitos. As frequências mais altas na fluência não estavam associadas com níveis mais altos de precisão em situações mais complexas. Tais situações apresentam, como pré-requisitos, as resoluções de multiplicações por um dígito, adições mais complexas e a compreensão do valor lugar.

3.2.4 Estudos sobre a divisão

Os estudos desenvolvidos no Brasil, na atualidade, concentram-se basicamente na investigação sobre a divisão partitiva e divisão por quotas, o que será brevemente retomado:

Na divisão partitiva, é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, com o objetivo de encontrar o tamanho de cada parte. Por exemplo:

Tenho 20 balas para distribuir para quatro crianças. Quantas balas receberão cada criança?

Na divisão por quotas, é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas. Por exemplo:

Tenho 20 balas e quero colocá-las em pacotes com cinco balas cada um. Quantos pacotes conseguirei formar?

Lautert e Spinillo (2002) investigaram as relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. Oitenta crianças de 5 a 9 anos resolveram problemas de divisão (por quotas e de partição) e responderam a pergunta "O que é dividir?" em uma entrevista clínica. As crianças foram classificadas de acordo com o número de acertos nos problemas. Os dados indicaram que as crianças já instruídas sobre a divisão tiveram mais acertos nas divisões partitivas. A ideia de quotas é mais rara. Para as autoras, a criança que domina a linguagem matemática, aplicando-a aos princípios que governam a divisão, e que resolve apropriadamente os problemas, está em um nível de conhecimento mais elaborado, do que a criança que sabe a linguagem, e não resolve corretamente, ou que resolve corretamente os problemas, e não sabe a linguagem.

Ferreira e Lautert (2003), com um estudo de caso, investigaram a tomada de consciência a partir do conceito de divisão. Fundamentadas na teoria piagetiana, apresentam cinco momentos de tomada de consciência da divisão de um estudante de seis anos. Parte-se de uma ausência de consciência da totalidade dos elementos; uma consideração da totalidade dos elementos, sem tomada de consciência do resto; o surgimento de conflito cognitivo como possibilitador da tomada de consciência das relações entre os termos; a resolução do conflito a partir de um esquema cognitivo já existente-ausência de tomada de consciência do resto e representação do termo resto, sem tomada de consciência das relações desse com os demais. Mesmo com as inadaptações promovidas pelos experimentadores, a criança não atingiu a conceituação, nível final da tomada de consciência.

Correa, Meireles e Curvelo (2004) examinaram as estratégias de resolução oral de tarefas de divisão partitiva e por quotas por crianças de 6 a 9 anos, com diferentes níveis de escolaridade. O resultado aponta que o desempenho das crianças foi influenciado pelo tamanho do dividendo e do divisor. As estratégias de dupla contagem e o uso de fatos multiplicativos foram mais utilizados nas tarefas de divisão por quotas, enquanto procedimentos baseados no uso de adições repetidas, e partição de quantidades foram mais utilizados nas tarefas de divisão partitiva.

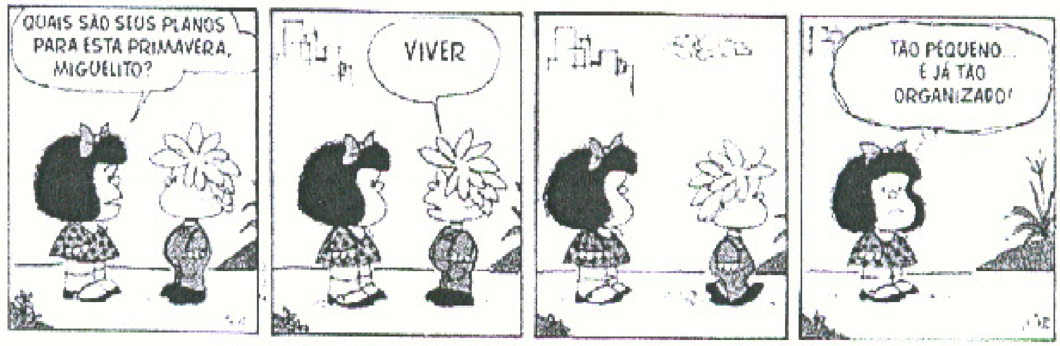
Os estudos de Lucangeli *et. al.* (2003) serviram como referência para a elaboração de um protocolo presente na página 98. O objetivo do estudo foi o de analisar as estratégias utilizadas por crianças de diferentes idades, em problemas com multidígitos que envolvem as quatro operações básicas, em cálculos mentais e escritos. A amostra incluiu 200 estudantes de terceira para quinta série, de diferentes escolas do norte da Itália, com idades que variavam de 8,3 a 10,2. As crianças foram testadas individualmente, por meio de um teste de avaliação de habilidade de cálculo, num total de 24 problemas (Anexo I), e suas respostas foram classificadas em diferentes estratégias. Para cálculos de adição e subtração mentais, foram observadas as estratégias de contagem nos dedos (COF), contagem mental (CON), estratégias de decomposição (1010 e N10), algoritmo mental (MA), formação de 10 unidades (C10) e cálculos automáticos (AUTO). As estratégias de multiplicação mental foram de diferentes operações (DO), algoritmo mental (MA) e cálculos automáticos (AUTO). A divisão com cálculo mental apresentou as mesmas estratégias da multiplicação. As estratégias de adição, subtração e multiplicação escritas que foram observadas referem-se às de tabulações escritas (CAR+), sem a presença de tabulações (CAR-) e cálculos automáticos (AUTO). Os resultados indicaram que a estratégia de adição mental mais eficaz e mais utilizada foi a 1010, da terceira para a quinta série. A segunda mais utilizada foi a de algoritmo mental (MA), mas não atingiu o critério de eficácia, entendido como 75% de acerto. Na subtração mental, a estratégia MA foi a mais utilizada, mas não atingiu também a eficácia, o que só ocorreu na terceira série com a contagem nos dedos (COF) e na quinta série com a contagem mental (CON).

As estratégias observadas na adição escrita atingiram o critério de eficácia, e da terceira para a quinta série observou-se um decréscimo da estratégia CAR+ e um consecutivo aumento da estratégia CAR-. Na subtração e multiplicação escrita, houve um aumento progressivo da estratégia CAR- com a presença de eficácia nessa estratégia e na AUTO. Na multiplicação e divisão mental, os cálculos foram resolvidos com a estratégia MA alcançando o critério de eficácia. Para a resolução dos cálculos escritos de divisão, a estratégia mais utilizada envolveu o algoritmo da divisão DIV, principalmente pela quinta série, e estiveram muito próximos do critério de eficácia com 74% de acertos. Para os autores da pesquisa, os algoritmos ensinados na escola são eficazes para os cálculos escritos a partir da terceira série e, no caso da subtração, a partir da quarta série. O algoritmo da divisão é o mais complexo. No caso do cálculo mental, esses mesmos algoritmos aprendidos não são bem sucedidos no momento das resoluções; observa-se o uso de estratégias elementares de contagem nos dedos até as mais sofisticadas que exigem o conhecimento da composição e propriedades de decomposição dos números. Constataram que a opção por uma estratégia está relacionada à experiência adquirida com ela e à frequência de sua utilização.

Nesse sentido, diante das questões colocadas na atualidade, que evidenciam o caráter construtivo das resoluções de cálculos mentais e escritos, propõe-se um estudo que possa contribuir para elucidar mais elementos desse caráter construtivo. Dessa forma, em um primeiro momento, procuramos apresentar as estratégias utilizadas por estudantes ao resolverem as adições, as subtrações, as multiplicações e as divisões. Em um segundo momento, buscamos identificar níveis de construção das operações aritméticas e, por fim, estabelecer relações entre essas estratégias e esses níveis de construção. O próximo capítulo apresenta, com maiores detalhes, todo o delineamento da pesquisa.

Capítulo 4

Delineamento da Pesquisa



Fonte: Quino, 1993

4.1 OBJETIVOS

A presente pesquisa tem por objetivos:

4.1.1 Analisar as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos, em crianças que frequentam as terceiras e quintas séries do Ensino Fundamental.

4.1.2 Identificar níveis de construção das operações aritméticas em situações que envolvam igualação de quantidades e construção de diferenças e, situações da multiplicação e da associatividade multiplicativa.

4.1.3 Verificar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas nas provas de igualação de quantidades e construção de diferenças e de multiplicação e associatividade multiplicativa.

4.2 PROBLEMA

Como problemas centrais da pesquisa, evidenciamos as seguintes questões:

4.2.1 Quais seriam as estratégias apresentadas em cálculos mentais e escritos por estudantes de diferentes séries do Ensino Fundamental?

4.2.2 Que relações podem ser estabelecidas entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas?

4.3 HIPÓTESE

Como hipótese da presente pesquisa pode-se considerar que níveis mais adiantados na construção de interdependências entre adições e subtrações estão relacionados com a compreensão de processos associativos da multiplicação e da compreensão da divisão. Apenas as crianças com níveis que apresentem as adições e subtrações relativas compreenderiam os processos associativos da multiplicação e compreenderiam processos da divisão e se justificariam corretamente nos cálculos mentais e escritos. Existe, pois, uma correspondência entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas.

4.4 JUSTIFICATIVA

As discussões sobre o ensino e a aprendizagem na área da Matemática não são recentes. Tais discussões apontam, principalmente, para a importância de novos meios para o ensino da Matemática, visando à superação de visões tradicionais, em que predominam a técnica, a memorização de fórmulas e o apego excessivo à verbalização pelo professor.

Os resultados de avaliações de rendimento escolar em Matemática, tanto em âmbito internacional, como nacional, geralmente apontam baixos índices de aproveitamento, portanto, têm-se um campo de pesquisa importante para a compreensão dos processos de construção de conhecimento matemático pelos estudantes, bem como, a possibilidade de implicações educacionais que superem alguns aspectos das dificuldades apresentadas pelos resultados das avaliações.

A presente pesquisa destaca sua relevância para a compreensão da relação entre as estratégias de resolução de cálculos escritos e mentais e os processos de construção das operações aritméticas, visando contribuir para o campo da psicopedagogia e para a área de aprendizagem da matemática. A crença, em que os processos de resolução de cálculos mentais e escritos são essencialmente técnicas para se observar e memorizar, ainda é recorrente apesar de muitos pesquisadores terem ressaltado o aspecto construtivo do conhecimento.

Neste sentido, a presente pesquisa buscou resgatar este caráter construtivo na resolução de cálculos, investigando mais especificamente, estudantes de terceira série, momento inicial do trabalho com as operações aritméticas e cálculos mentais e escritos, e estudantes de quinta série, que podem apresentar níveis diferenciados nessas construções. Entendendo-se que o conhecimento é um processo não linear, nem passivo, o benefício da pesquisa aos participantes, incide no envolvimento em situações-problema e atividades que tanto compõem o currículo escolar, como situações específicas de Piaget e colaboradores no campo epistemológico de investigação.

O Comitê de Ética em Pesquisa da Faculdade de Ciências Médicas da Unicamp –CEP, em seu parecer, menciona que o projeto atendeu todos os dispositivos das Resoluções 196/96 e complementares e aprovou sem restrições o protocolo de pesquisa, bem como o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, assim como todos os anexos incluídos na pesquisa. O parecer do CEP tem como numeração: 171/2007 e CAAE: 0668.0.000.146-07.

4.5 MÉTODO

4.5.1 Participantes

Os participantes desta pesquisa foram quarenta alunos, vinte que frequentavam a terceira série (N=20) e vinte que frequentavam a quinta série (N=20), provenientes de três escolas públicas da cidade de Toledo, PR. A amostra, de natureza justificada, foi composta por estudantes que aceitaram participar da pesquisa e possuíam autorização para tal, de ambos os gêneros, com idades entre 8;6 a 10;2 na terceira série e 10;6 a 13;2 na quinta série.

O Quadro 02 apresenta a descrição geral dos participantes da terceira série e o Quadro 03 apresenta a descrição geral dos participantes da quinta série.

Nome	Idade	Gênero
TAH	8;6	FEMININO
DAN	8;8	FEMININO
GAD	8;8	MASCULINO
MAR	8;11	FEMININO
CAR	8;7	FEMININO
GAP	8;7	FEMININO
EDA	9;2	MASCULINO
GAH	9;4	MASCULINO
HEN	8;7	MASCULINO
EDU	8;8	MASCULINO
DIH	8;8	MASCULINO
HEJ	8;8	MASCULINO
PAU	10;2	FEMININO
WEL	9;3	MASCULINO
VIN	9;2	MASCULINO
SUE	9;2	FEMININO
ALL	9;5	MASCULINO
THA	8;9	FEMININO
MAT	9;2	MASCULINO
FER	9;6	MASCULINO

Quadro 02: Descrição geral dos participantes da terceira série

Nome	Idade	Sexo
FER	11;0	FEMININO
JAQ	11;0	FEMININO
CAM	11;7	FEMININO
CAR	11;0	FEMININO
JOA	10;8	FEMININO
FAB	11;1	MASCULINO
DRI	10;10	FEMININO
FER	11;4	MASCULINO
RAF	10;8	MASCULINO
LUA	11;0	MASCULINO
LEO	10;6	MASCULINO
KAT	11;2	FEMININO
CLE	11;6	MASCULINO
JAQ	12;5	FEMININO
JOI	12;3	FEMININO
JES	12;2	FEMININO
LEI	11;5	FEMININO
TAL	11;1	FEMININO
GUI	11;3	MASCULINO
LUA	13;2	FEMININO

Quadro 03: Descrição geral dos participantes da quinta série

4.5.2 Instrumentos e materiais

Para a resolução dos cálculos mentais e escritos foram utilizadas folhas sulfite e caneta esferográfica (Anexo I). Na prova de Igualação de Quantidades e Construção de Diferenças (Piaget e colaboradores, 1980/1996) foram utilizadas sementes e fichas coloridas (Anexo II).

Para a prova da Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (Piaget, 1983) foram utilizados brinquedos representando um carneiro e um pato, grãos de sementes soltos e em pacotes (Anexo III). Para o registro das resoluções das situações-problema: câmeras digitais, filmadora, lápis/caneta e papel.

4.5.3 Procedimento de coleta de dados

O procedimento de coleta de dados iniciou com o contato e a autorização da Prefeitura Municipal (Apêndice A), do Núcleo de Educação (Apêndice B), por escrito. A seguir, foram buscadas as autorizações das direções de escolas municipais e estaduais (Apêndice C). Obtida a anuência e a colaboração da equipe pedagógica dessas escolas, fez-se um contato com as salas de terceira e quinta séries e direcionou-se um convite à participação na pesquisa e entrega de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os pais dos estudantes confirmarem essa participação e a autorizarem. Após a autorização dos pais, iniciou-se a pesquisa nos horários semanais pré-estabelecidos pela escola.

Os estudantes realizaram primeiramente as situações-problema, como as propostas por Lucangeli *et al*, 2003 (Anexo I), com acompanhamento pela pesquisadora, por meio de anotações e gravações em vídeo. Foram, por volta de três a quatro sessões, de aproximadamente 50 min, para a coleta de dados das resoluções das operações aritméticas. Cada estudante foi testado individualmente. Enquanto eles estavam envolvidos nas resoluções dos cálculos, respondiam a seguinte pergunta: “Você poderia me dizer como resolveu esse cálculo?” As informações repassadas oralmente à pesquisadora e o comportamento não-verbal observado foram registrados nos protocolos de cada um dos estudantes, visando a classificação das estratégias utilizadas nos cálculos. A seguir, foram propostas as situações da prova de igualação de quantidades e construção de diferenças aos estudantes (Anexo II), em uma sessão e, em um novo encontro, foram propostas as situações da prova da multiplicação e da associatividade multiplicativa (Anexo III). As informações obtidas nas provas piagetianas foram registradas em protocolos individuais para a identificação dos níveis cognitivos dos estudantes nessas provas.

4.5.4 Procedimento de análise dos dados

Os dados foram analisados em momentos distintos, diante dos objetivos apresentados na pesquisa. O início da coleta dos dados ocorreu no segundo semestre letivo. As resoluções de cálculos mentais e escritos das diversas operações aritméticas foram analisadas em atendimento ao primeiro objetivo proposto no estudo. A seguir, foram analisadas as respostas dadas às situações da igualação de quantidades e construção de diferenças e, a análise das situações da multiplicação e associatividade multiplicativa resolvidas pelos estudantes, em atendimento ao segundo objetivo do estudo. Os dados recolhidos nas resoluções de cálculos e nas provas piagetianas foram, então, analisados de acordo com o terceiro objetivo da pesquisa, que procurou verificar as relações entre esses aspectos.

Resolução de cálculos mentais e escritos

Para a análise dos dados, no que se refere à resolução de cálculos mentais e escritos, foram utilizadas as categorias propostas por Lucangeli *et al*, 2003 e criado um protocolo de pesquisa. Dessa forma, foram quantificados os acertos e os erros dos estudantes em cada uma das operações aritméticas e o tipo de estratégia utilizada nessas resoluções. Com maiores detalhes, estão expostas, a seguir, tais estratégias consideradas pelos estudantes:

1-Estratégias de cálculos mentais (adição e subtração):

COF= contagem nos dedos. A criança começa por um algarismo, geralmente o maior deles, na operação, e muda até acrescentar ou retirar o menor algarismo, contando em seus dedos unidade após unidade. É frequente o procedimento de contar alto e com ritmo nos movimentos dos dedos das mãos.

CON= contagem mental a partir de um algarismo. É uma estratégia com um nível levemente mais alto de dificuldade, em que a criança é capaz de operar com números de forma representativa, embora ainda movimentos corpóreos possam ocorrer.

1010 ou estratégia de decomposição. As crianças separam os números em unidades e dezenas, somando ou subtraindo-os separadamente, como observado em: [77+49= (70+40)+(7+9); 77-42=(70-40)+(7-2)].

N10= somente o segundo operador é decomposto em unidades e dezenas, como em: [77+49= (77+10+10+10+10)+9; 52-28=(52-10-10)-8].

MA= algoritmo mental . A criança frequentemente resolve os cálculos mentalmente, depois os representa por escrito, movendo da direita para a esquerda para completar os resultados.

C10= formação de dez unidades. A criança forma múltiplos de dez e realiza as operações com maior facilidade, como em: [43+6= (43+7) -1; 43-7= (43-3)-4].

AUTO= cálculos automáticos (recuperação de resultados). A criança resolve automaticamente os cálculos por um processo de recuperação das respostas da memória.

2-Estratégias de cálculos mentais (multiplicação):

DO= operações diferentes. Transformação das multiplicações em adições: cálculos mais simples são solucionados adicionando o multiplicando várias vezes como indicado pelo multiplicador, como em: [31X3= 31+31+31; 31X3= (30+30+30)+3].

MA= algoritmos mentais. A criança frequentemente resolve os cálculos mentalmente, depois os representa por escrito, movendo da direita para a esquerda para completar os resultados.

AUTO= cálculos automáticos (recuperação de resultados). A criança indica a resolução dos cálculos automaticamente, recuperando-os da memória.

3-Estratégias de cálculos mentais (divisão):

DO= operações diferentes. Transformação das divisões em multiplicações: a criança indica como resolveu a divisão, considerando o divisor como elemento para multiplicar por determinado número e obter o dividendo, como em: (120: 4=? → 4X?=120).

MA= algoritmos mentais. A criança indica como imaginou uma divisão na mesma estrutura formal usada nas execuções por escrito.

AUTO= cálculos automáticos (recuperação de resultados). A criança indica a resolução dos cálculos automaticamente, recuperando-os da memória.

4-Estratégias de cálculos escritos (adição, subtração e multiplicação)

CAR+= tabulando com uma escrita contínua das operações. A criança muitas vezes necessita escrever os números na sequência da contagem 1 a 1, para encontrar os resultados.

.

CAR- = uso de algoritmos. A criança resolve a tabela de resultados, mas não os escreve, embora possa recuperar estes resultados nos dedos. Considera-se principalmente a utilização dos algoritmos convencionais.

AUTO= cálculos automáticos (recuperação de resultados). A criança indica a resolução dos cálculos automaticamente, recuperando-os da memória.

5-Estratégias de cálculos escritos (divisão):

DIV= esta estratégia envolve a aplicação do algoritmo específico da divisão, sem que a criança utilize a transformação no processo da multiplicação.

DO= operações diferentes. Transformação em problemas de multiplicação: algumas crianças necessitam transformar a divisão na correspondente multiplicação, durante a execução da operação e também mais tarde, na verificação final da resposta.

AUTO= cálculos automáticos. A criança indica a resolução dos cálculos automaticamente, em problemas mais simples de divisão, recuperando-os da memória.

Com o intuito de organização dessas estratégias já evidenciadas, criou-se um protocolo de análise de cada um dos estudantes, o que está registrado, a seguir.

Protocolo de análise das categorias de cálculos mentais e escritos

CÁLCULOS MENTAIS			CÁLCULOS ESCRITOS	
ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO	MULTIPLICAÇÃO	DIVISÃO	ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO/ MULTIPLICAÇÃO	DIVISÃO
COF: contagem nos dedos. **CON**:contagem mental a partir de um algarismo **1010**: decomposição **N10**: decomposição **MA**: algoritmo mental **C10**: formação de dez unidades **AUTO**: cálculos automáticos	**DO**: operações diferentes **MA**: algoritmo mental **AUTO**: cálculos automáticos	**DO**: operações diferentes **MA**: algoritmo mental **AUTO**: cálculos automáticos	**CAR+**: tabulando com uma escrita contínua das operações **CAR-**: uso dos algoritmos **AUTO**: cálculos automáticos	**DIV:** algoritmo de divisão **DO**: operações diferentes **AUTO**: cálculos automáticos

Prova da Igualação de quantidades e construção de diferenças

Para análise da construção das interdependências entre as adições e as subtrações, partiu-se do experimento de Piaget, Henriques e Maurice (1996) sobre a igualação de quantidades e construção de diferenças, presente na obra *As formas elementares da dialética.* Assim, as respostas dos participantes foram classificadas e a elas atribuídos níveis, de acordo com os do estudo de Piaget:

Nível IA- a igualação de elementos resulta de falsas implicações, em que os participantes estabelecem, principalmente, as correspondências figurais entre as colunas. Há ilusão de igualações devido aos sentidos contrários das ações. Ainda algumas crianças excluem, neste nível a conservação do todo, acreditando haver menos elementos quando os elementos das colunas eram apertados, do que quando os elementos eram espaçados.

Nível IB – início das interações entre as adições e as subtrações, em que as crianças recorrem à caixa reserva de elementos para igualar as coleções desiguais ou introduzir as diferenças em coleções iguais. Realiza "adições ou subtrações simples", acrescentando ou retirando elementos.

Nível IIA – início da adição e subtração relativas. As crianças, a partir de constatações ou experiências mentais, compreendem que uma transferência consiste em acrescentar elementos a outro conjunto final e também retirar elementos do conjunto inicial.

Nível IIB – começam as coordenações entre adições absolutas e relativas e as crianças realizam a construção de diferenças. Alcançam a "identidade dos contrários": os mesmos elementos que são tirados de um conjunto são acrescentados a outro.

Nível III – realizam-se composições complexas, novas, integradas no sistema constituído anteriormente, com sínteses entre operações de sentidos contrários.

Prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa

A prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa foi estudada por Piaget e colaboradores e está presente na obra**:** *O possível e o necessário -evolução dos necessários na criança* (1983). Com base nesse estudo, foram classificadas as respostas dos participantes da pesquisa e a essas respostas foram atribuídos níveis, de acordo com o estudo de Piaget. Tal estudo evidencia a técnica que consiste em quatro situações envolvendo multiplicando, multiplicador e produto, composta por: número de pacotes X número de grãos por pacote = o todo, mais especificadamente (situação 1 da multiplicação, situação 2 da associatividade, situação 3 associatividade comutativa e situação 4 de repetição de correspondências injetivas). Os níveis definidos por Piaget e utilizados na presente pesquisa foram:

Nível IA- os participantes são capazes de centrar-se nas diferentes variáveis (número de pacotes X número de grãos por pacote = o todo) mas, manipulam somente uma variável de cada vez, portanto, as composições necessárias às soluções multiplicativas não estão evidentes ainda.

Nível IB- tentativas de relacionamentos entre as variáveis e início de relação entre continente e conteúdo (Pacotes X grãos), apresentando certas soluções exatas, mesmo que o problema não foi inteiramente resolvido.

Nível IIA- estabilização das relações entre os três sistemas: partes, todo e elementos; o todo não é mais somente dado pela soma total dos grãos, iniciando a relação multiplicativa e associativa, chamada pelo autor por “vicariança quantitativa”.

Nível IIB- antecipação da determinação que um mesmo todo pode ser distribuído em continentes diferentes cujo número está em função inversa ao de seus contidos.

Nível III- parte-se de um mesmo todo que se conserva e reparte-se em distribuições desiguais de tal forma que, o produto das partes ou pacotes pelos grãos, permanece constante.

Partindo-se da quantificação do número de acertos e erros dos estudantes nos cálculos mentais e escritos, das estratégias utilizadas nessas resoluções dos cálculos e da identificação dos níveis de construção das operações aritméticas, foi realizada a análise qualitativa dos dados. Nesse sentido, estão presentes na análise dos dados, a descrição detalhada da realização dos cálculos mentais e escritos, as diferentes formas de resolução desses cálculos, os comentários sobre os cálculos mais difíceis e a análise dos erros.

Por fim, com o intuito de verificar as relações entre a realização dos cálculos e os níveis identificados nas provas piagetianas, foram realizadas descrições de tais relações e aplicações de testes estatísticos, a seguir detalhados. Os dados da pesquisa foram, então, organizados em quadros em que constavam a série, a operação aritmética e os resultados dos cálculos e dos níveis de construção nas provas piagetianas, de cada um dos participantes. Os protocolos foram organizados como no quadro, a seguir, o qual exemplifica a organização dos dados de cada um dos estudantes na relação estabelecida entre as operações de adição e subtração e os dados obtidos na prova piagetiana de Igualação de quantidades e construção de diferenças. Um quadro semelhante foi criado para a análise dos dados das operações de multiplicação e divisão e os dados da prova piagetiana da multiplicação e associatividade multiplicativa.

	Adição				Subtração				Prova 1
	Mental	estratégia	escrita	estratégia	mental	estratégia	escrita	estratégia	Nível:
Aluno:	43+6=☑ ☒		47+15=☑ ☒		43-7=☑ ☒		80-26=☑ ☒		
total☑	55+7=☑ ☒		239+106=☑ ☒		52-28=☑ ☒		104-28=☑ ☒		
total☒	76+49=☑ ☒		4329+3783=☑ ☒		51-16=☑ ☒		4329-3783=☑ ☒		

☑ acertos ou
☒ erros
Prova 1- Igualação de quantidades e construção de diferenças

A partir desses dados, organizados nos quadros, foi calculado o valor médio de acertos e o desvio padrão de cada um dos níveis da prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças e da prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa, para a terceira série e para a quinta série, separadamente. Foi atribuído um ponto para cada acerto e zero para os erros. Questionou-se, então, se a média de acertos do nível IB, por exemplo, da terceira série era igual ao nível IB da quinta série. Assim, para verificar essa igualdade ou não, entre os níveis das duas séries, foi aplicado o teste T de *Student* e verificada a hipótese nula.

Teste T

$$t = \frac{x_2 - x_1}{s_{12}}$$ em que: x_2, x_1 são os valores médios amostrais de acertos e s_{12} é o desvio padrão médio.

Hipótese nula

Se em valor absoluto $t_{tab} > t$, a hipótese nula é aceita

Confirmada a hipótese nula, foi obtido novamente o valor médio amostral e o desvio padrão, agrupando os níveis de ambas as séries com uma população maior. Em seguida, foi feito o teste T e verificada a hipótese nula de cada um desses níveis. Para finalizar, foi possível checar a evolução da média de acertos entre os níveis, por meio de um gráfico em que constavam os valores médios e os níveis nas provas piagetianas e o ajuste da reta que une os valores médios entre os níveis.

Diante de todo esse contexto, da aplicação para os participantes (N=40) de resoluções de cálculos mentais e escritos das operações aritméticas, das situações das provas piagetianas de Igualação de quantidades e construção de diferenças e da Multiplicação e associatividade multiplicativa e dos dados obtidos em tais aplicações, foi estabelecida a análise dos resultados constante no próximo capítulo e enfatizadas as relações entre as resoluções desses cálculos e a construção das operações aritméticas.

CAPÍTULO 5

Análise dos Resultados

Fonte: Quino, 1993

A análise qualitativa e quantitativa dos dados, descrita a seguir, foi organizada para o alcance dos objetivos propostos neste trabalho. Assim, as análises das operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão, com cálculos mentais e escritos iniciaram com a apresentação, em tabelas, do percentual de acertos e de erros da terceira série e da quinta série. Na sequência, esses acertos e erros foram descritos e as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos foram apresentadas. Em outra etapa, estão presentes os resultados das provas piagetianas e a identificação dos níveis de construção das operações aritméticas. No caso das adições e subtrações estão descritos os resultados dos participantes na prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças. Para as multiplicações e as divisões, os resultados descritos são os da prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa. Ao serem apresentados esses resultados das provas piagetianas foi possível, então, uma análise dos dados das diversas operações aritméticas que os incluíssem. Por último, verificaram-se as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas.

5.1 Adição

5.1.1 Adições com cálculos mentais (43+6; 55+7; 76+49)[3]

Tabela 01 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas adições com cálculos mentais

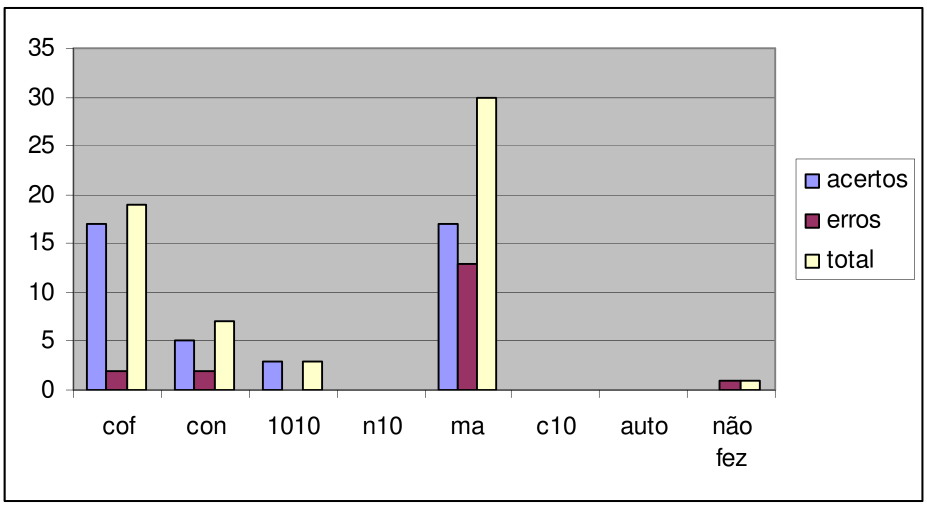
Cálculo mental		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Adição	43+6	19 (95%)	1 (5%)	20 (100%)	0 (0%)
	55+7	14 (70%)	6 (30%)	17 (85%)	3 (15%)
	76+49	9 (45%)	11 (55%)	10 (50%)	10 (50%)

Os resultados das adições com cálculos mentais estão organizados na Tabela 01. Constata-se que a proporção de acertos reduz, nas duas séries, conforme são apresentadas situações mais complexas na adição. Em 43+6, uma parte dos estudantes de terceira e quinta séries iniciou a adição pelas unidades (3+6) totalizando nove e acrescentou as dezenas, nesse caso, a contagem nos dedos foi um recurso que garantiu o resultado correto. Também, grande parte dos estudantes, conservou a parcela 43 e continuou a contagem acrescentando mais seis unidades. Em 55+7, o total das unidades é doze, assim os estudantes deveriam adicionar mais uma dezena, obtendo-se o resultado 62; os erros observados foram no cálculo com resultados 61 ou 63, bem próximos ao resultado correto. A forma de resolução mais utilizada pelos estudantes foi a de conservar a parcela 55 e continuar a contagem nos dedos até o 62. Em 76+49, temos acréscimos nas unidades e dezenas; nesse caso, a forma de resolução mais utilizada foi a estratégia de algoritmos mentais (MA), em que os estudantes armam mentalmente a operação iniciando por 6+9 unidades e a seguir, 7+4 dezenas. Os erros mais observados foram nos cálculos obtendo-se totais como 119, 108, 128, 145, entre outros, e não o correto 125.

A operação 43+6 foi resolvida com acerto por dezenove estudantes de terceira série e uma resolução incorreta. A operação 55+7 foi resolvida corretamente por quatorze alunos e apresentando erros, por seis alunos. A operação 76+49 foi resolvida com acerto por nove estudantes e com erro, por onze.

[3] Estratégias de cálculos mentais nas adições e subtrações: COF (contagem nos dedos); CON (contagem mental a partir de um algarismo); 1010 (decomposição); N10 (decomposição); MA (algoritmo mental); C10 (formação de dez unidades); AUTO (cálculos automáticos)

A análise das respostas dos estudantes de terceira série, para as adições com cálculos mentais propostas, identifica as estratégias de uso dos algoritmos mentais (MA) e de contagem nos dedos (COF), como as mais utilizadas. A essa análise, pode-se adicionar o Gráfico 01, que ilustra a distribuição das estratégias utilizadas pelos participantes de terceira série. Os acertos totalizaram dezessete utilizações da estratégia MA e dezessete da estratégia COF. Foram contabilizadas cinco utilizações corretas da estratégia de contagem mental a partir de um algarismo (CON) e três utilizações da estratégia de decomposição 1010, como em 76+49= (70+40)+(6+9). Os erros na utilização das estratégias totalizaram treze utilizações da estratégia MA, duas utilizações da estratégia COF, duas da CON e um estudante não conseguiu resolver a adição. As estratégias N10, C10 e AUTO não foram utilizadas pelos estudantes da terceira série.



Cof- contagem nos dedos

Con- contagem mental

1010- decomposição

N10- decomposição

Ma- algoritmo mental

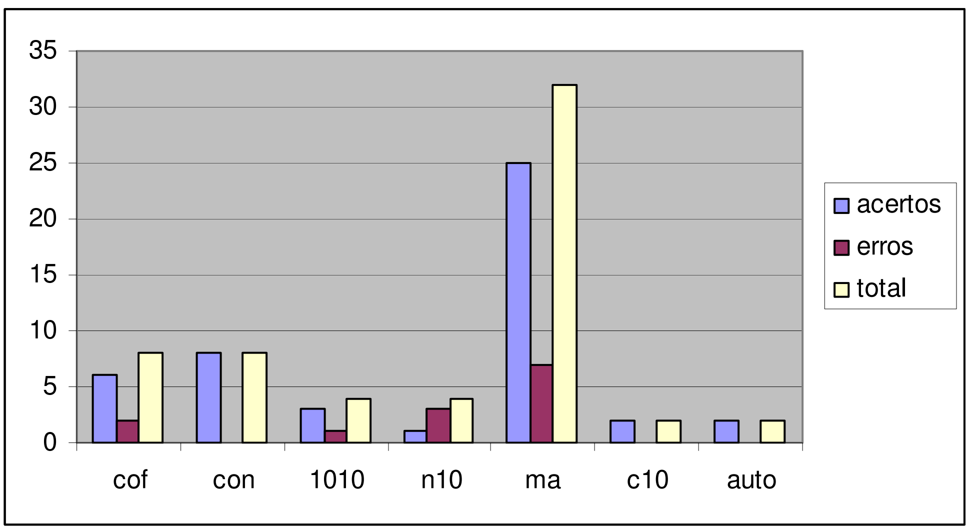
C10- formação de dez unidades

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 01: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas adições com cálculos mentais

No caso da quinta série, a operação 43+6 foi resolvida com acerto por todos os alunos. A operação 55+7 foi resolvida corretamente por dezessete alunos e com erros, por três alunos. A operação 76+49 foi resolvida com a mesma proporção de dez acertos e dez erros.

A análise das respostas dos estudantes de quinta série para as adições com cálculos mentais propostas, identifica a utilização de estratégias de algoritmos mentais (MA), de contagem mental (CON) e contagem nos dedos (COF) como as três mais utilizadas. Os acertos totalizaram quarenta e sete operações resolvidas, com as seguintes estratégias: vinte e cinco utilizações da estratégia MA, oito da estratégia CON e seis da estratégia COF, além de três utilizações corretas da estratégia 1010. Dois estudantes resolveram a adição com a estratégia C10, de formação de dez unidades, como em 76+49=(76+50)-1, outros dois utilizaram a de recuperação automática de resultados AUTO e uma utilização da estratégia N10, como no exemplo 76+49=, em que a segunda parcela é decomposta (76+10+10+10+10)+9. Os erros no uso das estratégias totalizaram treze utilizações, assim distribuídas: sete utilizações da estratégia MA, três utilizações da estratégia N10, duas da COF e uma da estratégia 1010. O Gráfico 02 ilustra os resultados anteriormente descritos.



Cof- contagem nos dedos

Con- contagem mental

1010- decomposição

N10- decomposição

Ma- algoritmo mental

C10- formação de dez unidades

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 02: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas adições com cálculos mentais

5.1.2 Adições com cálculos escritos (47+15; 239+106; 4329+3783)[4]

A Tabela 02 apresenta a totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e quinta séries nas adições com cálculos escritos. Constata-se um percentual elevado no número de acertos para as duas séries.

Tabela 02 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas adições com cálculos escritos

Cálculo escrito		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Adição	47+15	17 (85%)	3 (15%)	18 (90%)	2 (10%)
	239+106	17 (85%)	3 (15%)	18 (90%)	2 (10%)
	4329+3783	16 (80%)	4 (20%)	18 (90%)	2 (10%)

Como resultado das adições com cálculos escritos, foi observado na operação 47+15, um total de dezessete acertos e três erros; em 239+106 foram também dezessete acertos e três erros e em 4329+3783 foram dezesseis acertos e quatro erros. A estratégia CAR-, de utilização do algoritmo da adição, foi a mais utilizada pelos estudantes de terceira série, totalizando quarenta e sete acertos e nove erros. A estratégia CAR+ foi utilizada com acerto por três alunos e com erro por um aluno. Tais resultados estão expressos no Gráfico 03. Um exemplo de utilização da estratégia CAR+ é o de EDU (8;8 da terceira série), em que está presente a representação do total dos algarismos, para a adição deles.

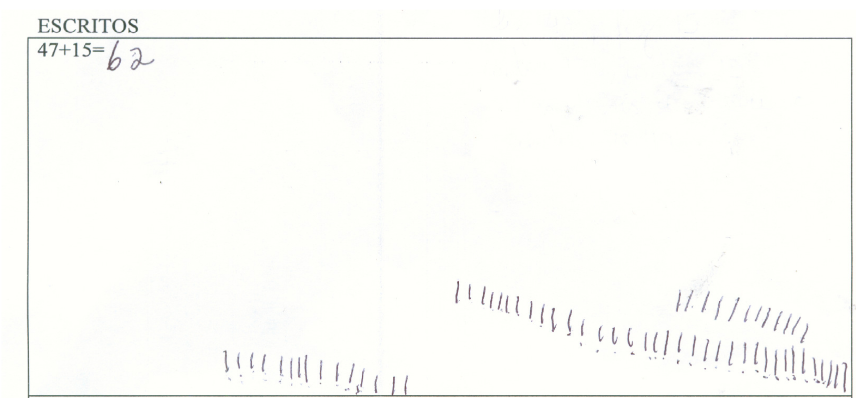
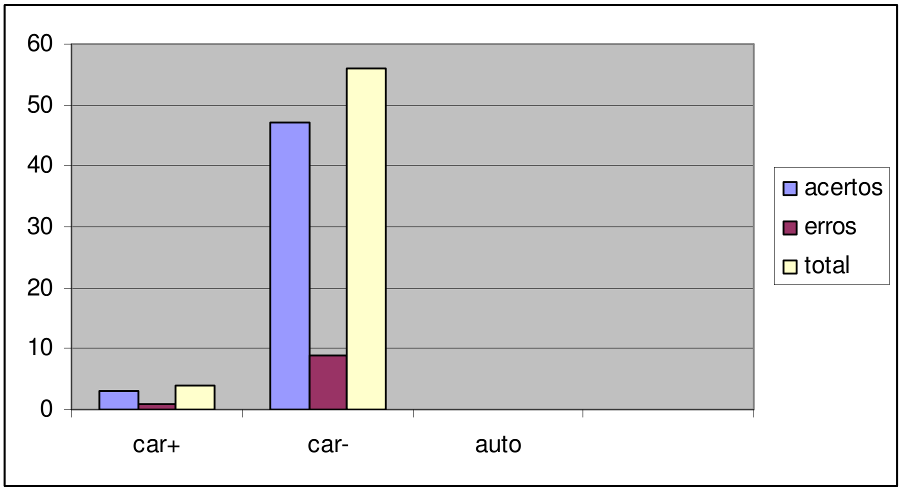


Figura 09: Exemplo de utilização da estratégia CAR+ na adição

Não foi observada a utilização da estratégia AUTO, de recuperação automática dos resultados, pelos estudantes de terceira série.

[4] Estratégias de cálculos escritos nas adições e subtrações: CAR+ (tabulando com uma escrita contínua das operações); CAR- (uso de algoritmos); AUTO (cálculos automáticos)



CAR+ escrita contínua das operações

CAR- uso de algoritmos

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 03: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas adições com cálculos escritos

Para a quinta série, os resultados na adição escrita foram em 47+15, um total de dezoito acertos e dois erros; em 239+106 foram também dezoito acertos e dois erros e o mesmo total em 4329+3783. A estratégia CAR- foi a única utilizada pelos estudantes de quinta série, o que pode ser ilustrado pelo Gráfico 03, com a totalização de cinquenta e quatro acertos e seis erros. A resolução do estudante CAR (11;0 da quinta série) é um exemplo dessa estratégia.

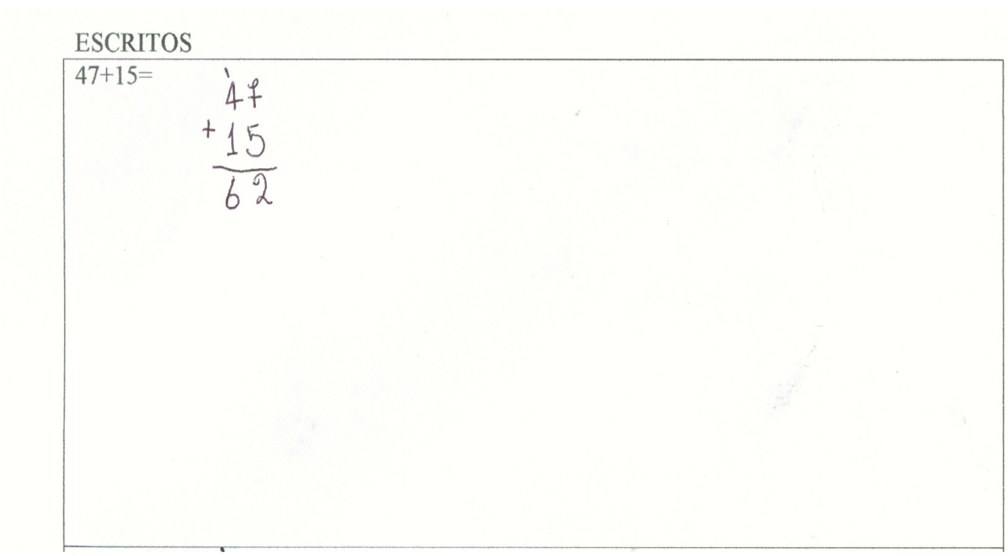
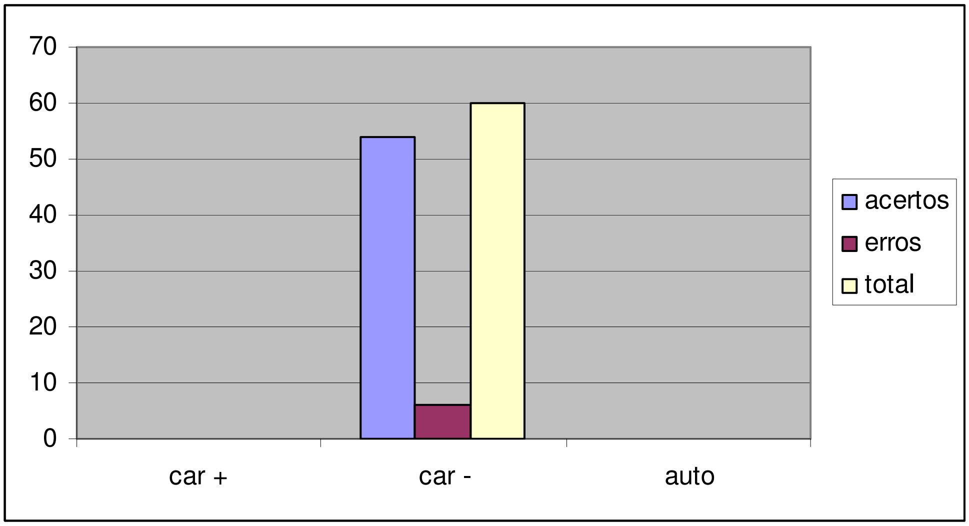


Figura 10: Exemplo de utilização da estratégia CAR- na adição



CAR+ escrita contínua das operações

CAR- uso de algoritmos

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 04: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas adições com cálculos escritos

5.2 Subtração

5.2.1 Subtrações com cálculos mentais (43-7; 52-28; 51-16)[5]

Os resultados para a subtração com cálculos mentais estão expressos na Tabela 03. Observa-se que os resultados são semelhantes para as duas séries e, no caso da terceira subtração proposta, a quinta série apresentou resultados inferiores aos da terceira série.

Tabela 03 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas subtrações com cálculos mentais

Cálculo mental		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Subtração	43-7	13 (65%)	7 (35%)	13 (65%)	7 (35%)
	52-28	7 (35%)	13 (65%)	6 (30%)	14 (70%)
	51-16	10 (50%)	10 (50%)	7 (35%)	13 (65%)

As subtrações foram resolvidas pelos estudantes de terceira série com a totalização de treze acertos e sete erros, em 43-7. A possibilidade de acompanhar a resolução dessa

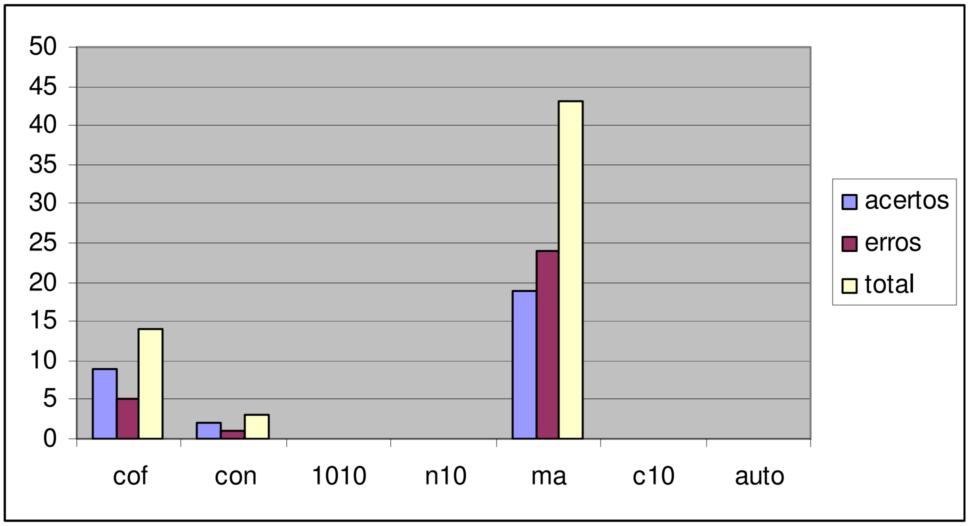
[5] Estratégias de cálculos escritos nas adições e subtrações: CAR+ (tabulando com uma escrita contínua das operações); CAR- (uso de algoritmos); AUTO (cálculos automáticos)

subtração com a contagem nos dedos, garantiu uma maior proporção de acertos. O mesmo não ocorreu em 52-28, que apresentou sete acertos e treze erros, existindo dificuldades no momento dos estudantes serem solicitados a subtrair tanto as unidades, quanto as dezenas. Tais erros ocorreram pela utilização da propriedade comutativa, que é existente na adição, mas não produz acertos na subtração; é inexistente nesse caso. Assim, os estudantes aplicaram essa propriedade e resolveram no caso das unidades de 52-28, por exemplo, pela ordem inversa 8-2 e o resultado mais encontrado foi 36 e não o correto 24.

Algoritmo mental	Resolução da 3ª série	Resolução correta
$\begin{array}{r} - \; 52 \\ 28 \\ \hline \end{array}$	2-8=? 8-2=6 50-20=30 Total $\longrightarrow$ 36	2-8=? 12-8=4 40-20=20 Total $\longrightarrow$ 24

Em 51-16 foram dez acertos e dez erros nas resoluções. Os estudantes aplicaram o mesmo raciocínio apresentado na subtração anterior e resolveram 6-1=5 e 50-10=40, então, o resultado mais comum foi 45 e não o correto 35. Vale ser ressaltado que essas duas últimas subtrações resolvidas pelos estudantes da quinta série apresentaram mais erros do que as resolvidas pelos estudantes da terceira série. Em alguns momentos de resolução da subtração, os estudantes resolviam 2-8=6 ou 1-6=5, sem observarem que o cálculo estava errado.

As estratégias MA, de algoritmo mental e COF, de contagem nos dedos, foram as mais utilizadas nas resoluções das subtrações, como na situação das adições com cálculos mentais. Um total de dezenove estudantes da terceira série utilizou a estratégia MA e nove a de COF, de forma correta. Apenas dois estudantes usaram a contagem mental CON para resolver a subtração, também corretamente. A estratégia MA foi utilizada por vinte e quatro estudantes de forma incorreta, a COF por cinco estudantes e a CON por um estudante. Não foram observadas as utilizações das estratégias 1010, N10, C10 e AUTO pelos estudantes da terceira série. Tais resultados podem ser observados no Gráfico 05.



Cof- contagem nos dedos

Con- contagem mental

1010- decomposição

N10- decomposição

Ma- algoritmo mental

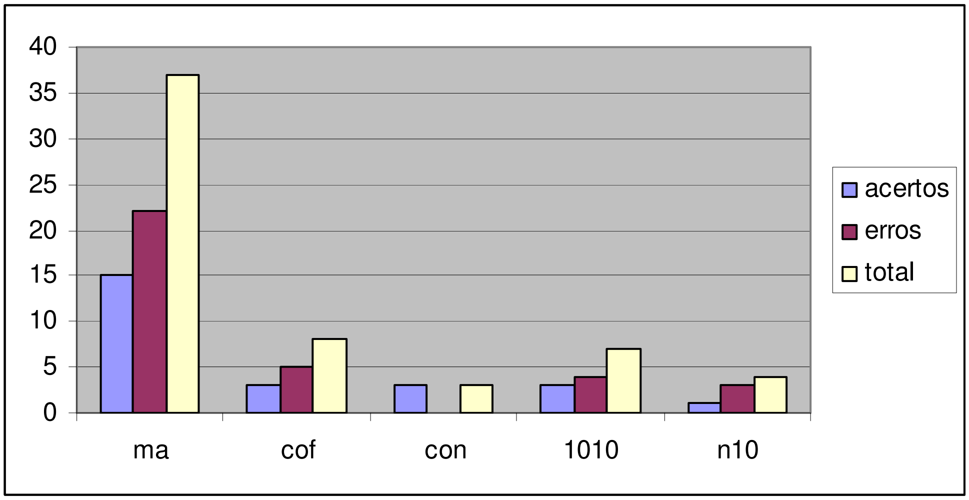
C10- formação de dez unidades

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 05: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas subtrações com cálculos mentais

A subtração 43-7, resolvida pelos estudantes de quinta série, totalizou treze acertos e sete erros. Já em 52-28 foram seis acertos e quatorze erros. Em 51-16, foram sete acertos e treze erros nas resoluções.

As estratégias MA (algoritmo mental) e COF (contagem nos dedos) foram as mais utilizadas nas resoluções das subtrações. De um total de vinte e seis resoluções corretas, quinze estudantes utilizaram a estratégia MA e quatro a de COF, três utilizaram a estratégia CON (contagem mental) e três a 1010 (decomposição em unidades e dezenas) e um estudante, a estratégia N10 (decomposição do segundo operador). A estratégia MA foi utilizada com erros por vinte e dois estudantes da quinta série, a COF por cinco estudantes, a 1010 por quatro, a N10 por três estudantes da quinta série, totalizando trinta e quatro utilizações incorretas. Não foram observadas as estratégias C10 e AUTO nas resoluções das subtrações. Esses resultados podem ser visualizados no Gráfico 06.



Cof- contagem nos dedos

Con- contagem mental

1010- decomposição

N10- decomposição

Ma- algoritmo mental

C10- formação de dez unidades

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 06: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas subtrações com cálculos mentais

5.2.2 Subtrações com cálculos escritos (80-26; 104-28; 4329-3783)[6]

Tabela 04 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas subtrações com cálculos escritos

Cálculo escrito		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Subtração	80-26	13 (65%)	7 (35%)	16 (80%)	4 (20%)
	104-28	9 (45%)	11 (55%)	11 (55%)	9 (45%)
	4329-3783	10 (50%)	10 (50%)	11 (55%)	9 (45%)

As subtrações com cálculos escritos, para a terceira série, apresentaram como resultado treze acertos e sete erros, em 80-26. Em 104-28 foram nove acertos e onze erros. No caso da subtração 4329-3783 foram dez acertos e dez erros. Observa-se, pela Tabela 04,

[6] Estratégias de cálculos escritos nas adições e subtrações: CAR+ (tabulando com uma escrita contínua das operações); CAR- (uso de algoritmos); AUTO (cálculos automáticos)

que os resultados das duas séries nas subtrações estão bem próximos, principalmente nos dois últimos casos.

Como observado nas adições escritas, a estratégia CAR-, de utilização do algoritmo da subtração, foi a mais utilizada. Tal consideração pode ser visualizada no Gráfico 07, em que trinta e um dos estudantes de terceira série utilizaram corretamente a estratégia CAR- e vinte e oito a utilizaram com erros. Apenas uma aluna, DAN (8;8 da terceira série), utilizou corretamente a estratégia CAR+, após várias tentativas de resolução.

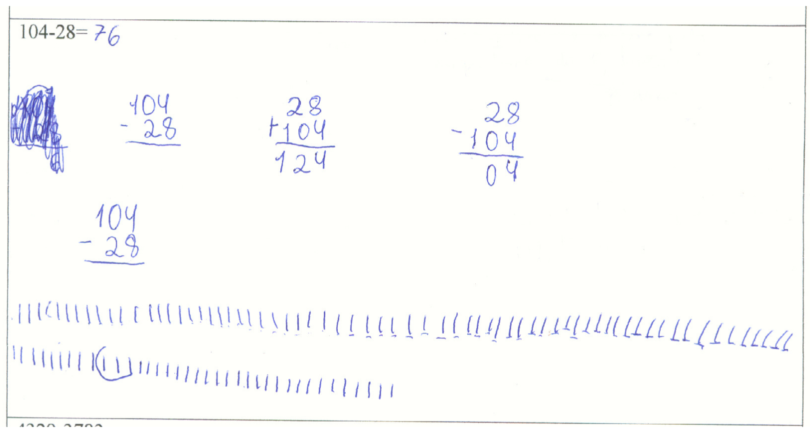
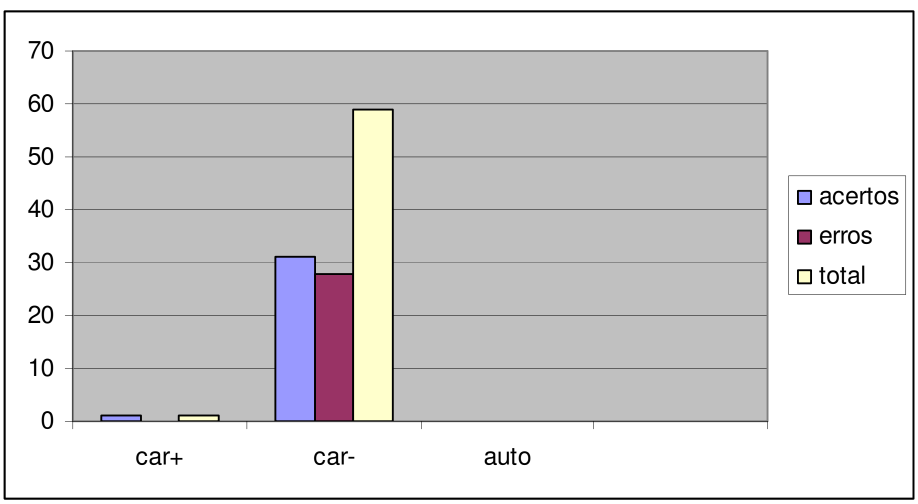


Figura 11: Exemplo de utilização da estratégia CAR+ na subtração

Nenhuma utilização da estratégia AUTO, de recuperação automática dos resultados, foi observada na terceira série.



CAR+ escrita contínua das operações

CAR- uso de algoritmos

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 07: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas subtrações com cálculos escritos

Os erros na resolução da subtração mais observados foram, como no caso da subtração mental, da utilização da propriedade comutativa, impossível de ser aplicada nessas resoluções. Nesse sentido, para alguns estudantes é possível, no momento de resolver 80-26, a inversão das unidades 0-6=? para 6-0=6, bem como é possível resolver a subtração 0-6 e obter o resultado 6, como o observado em GAD (8;8 da terceira série).

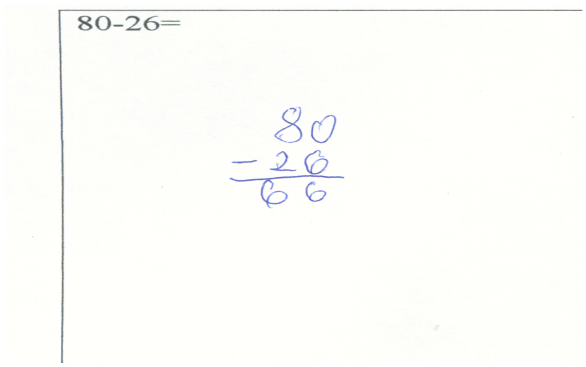


Figura 12: Exemplo de erro na resolução da subtração com cálculo escrito

Outro erro observado foi o de adicionar os algarismos, mesmo que sejam solicitados a subtrai-los, como é o exemplo de EDU (8;8 da terceira série). Constata-se que os estudantes centram-se nos aspectos positivos dos observáveis, nas afirmações, mais do que nas negações, centram-se, portanto, nas adições, conseguem resolvê-las com mais acertos, do que nas subtrações, como já fora apresentado em pesquisas de Piaget (1974b); Nunes & Bryant (1997); Kamii (1995) e Kamii & DeVries (2001).

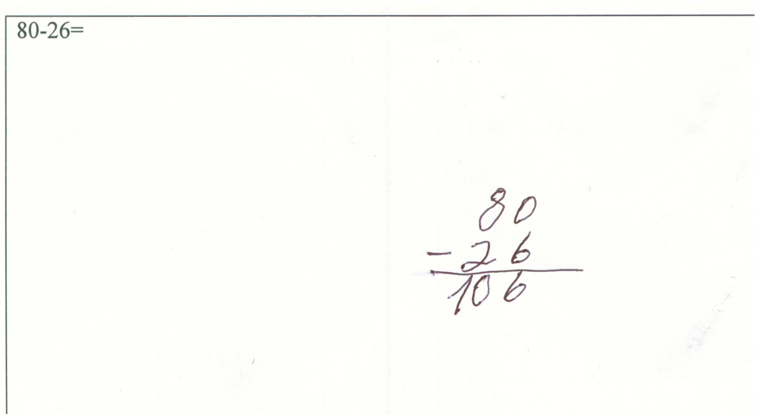


Figura 13: Exemplo de resolução incorreta da subtração com cálculo escrito, por meio da adição

Os resultados das resoluções das subtrações com cálculos escritos, na quinta série, foram os seguintes: em 80-26, dezesseis acertos e quatro erros; em 104-28 foram onze acertos e nove erros, e em 4329-3783 também foram onze acertos e nove erros.

Como observado nas adições escritas, a estratégia CAR- foi a mais utilizada também nas subtrações, com acerto por trinta e sete dos estudantes de quinta série e, com erro, por vinte e dois estudantes. Tais resultados também podem ser observados no Gráfico 08. Apenas um aluno utilizou corretamente a estratégia CAR+. Essas duas estratégias foram utilizadas por FER (11;4 da quinta série).

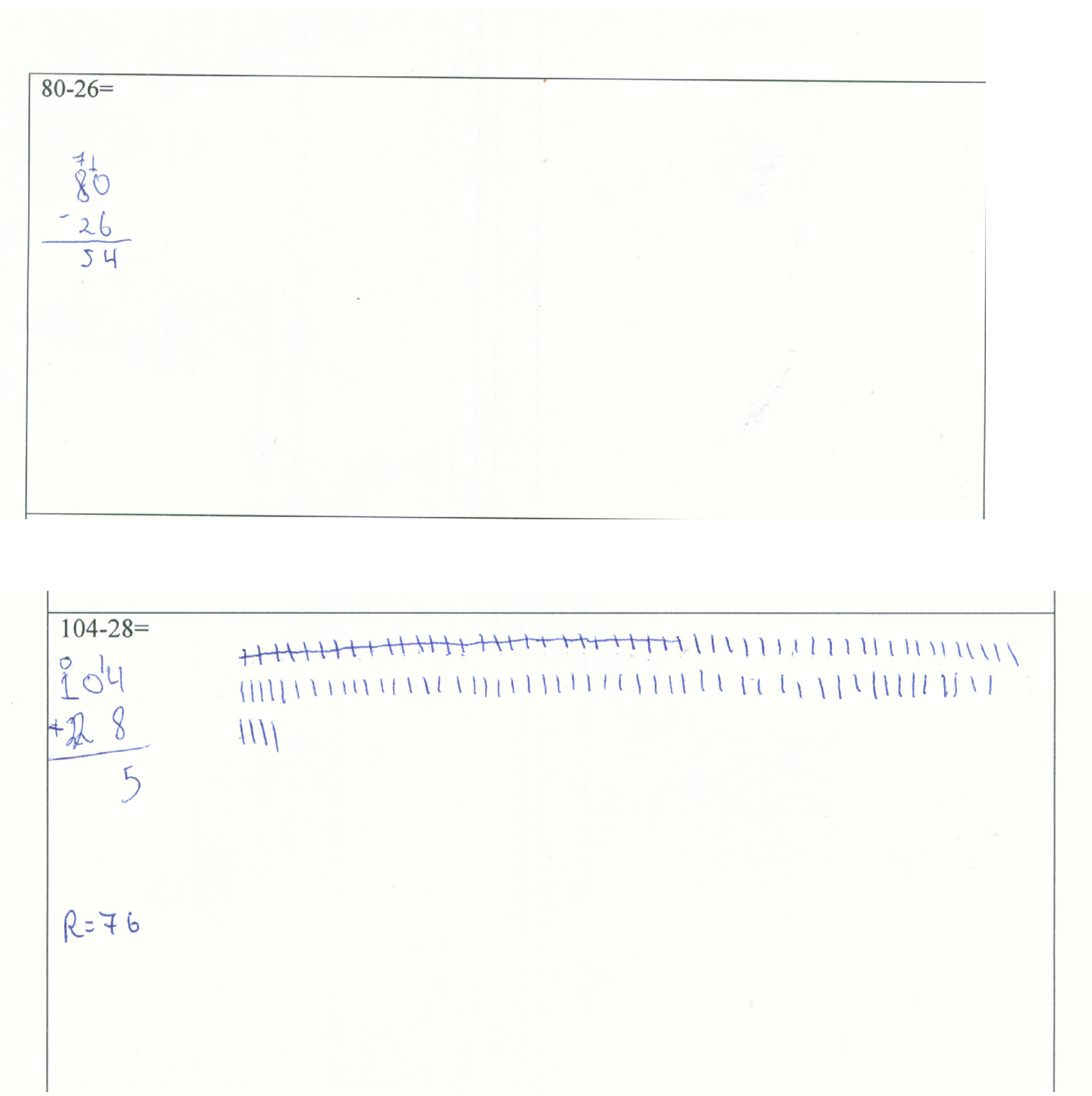
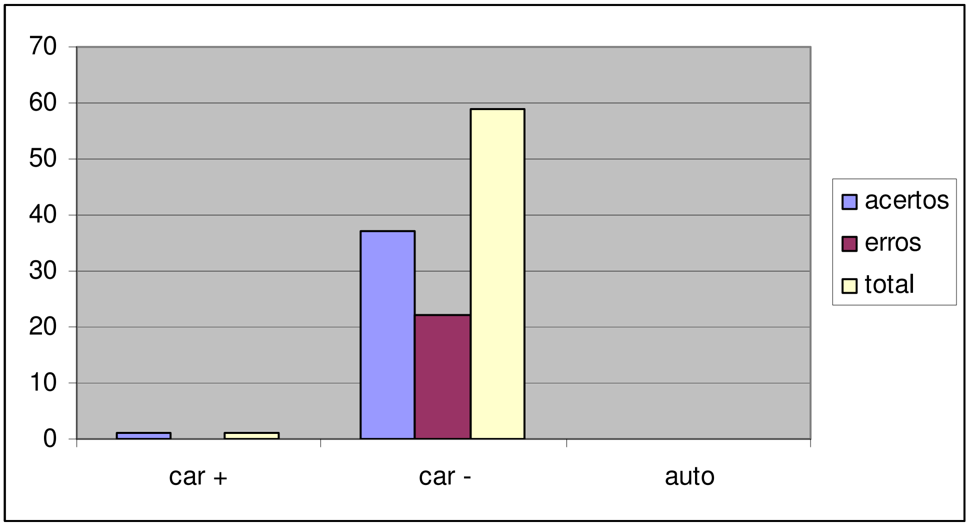


Figura 14: Exemplo de utilização das estratégias CAR- e CAR+ na subtração com cálculo escrito

Nenhuma utilização da estratégia AUTO, de recuperação automática dos resultados, foi observada na quinta série.



CAR+ escrita contínua das operações

CAR- uso de algoritmos

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 08: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas subtrações com cálculos escritos

5.3 Análise da Prova de Igualação de Quantidades e Construção de Diferenças

Como resultados da prova que investiga as interdependências entre as operações de adição e subtração (Prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças), de Piaget e colaboradores (1980) identificou-se um total de doze alunos da terceira série que apresentou respostas no nível IB. Nesse nível, iniciam-se as relações entre as adições e as subtrações, e assim são denominadas "adições ou subtrações simples", em que as crianças acrescentam ou retiram elementos nas situações, sem a total compreensão da inter-relação entre essas operações. Para o nível IIA, foram identificados seis estudantes que já iniciaram a compreensão das adições e subtrações relativas. Nesse caso, a partir de constatações ou experiências mentais, eles compreendem que uma transferência consiste em acrescentar elementos a outro conjunto final e também retirar elementos do conjunto inicial. Para o nível IIB, um total de dois estudantes já alcançou a identidade dos contrários, em que há dialética em acrescentar os mesmos elementos que são retirados de outro conjunto e igualizar quantidades com compensações antecipadas. Esses resultados podem ser visualizados no Gráfico 09.

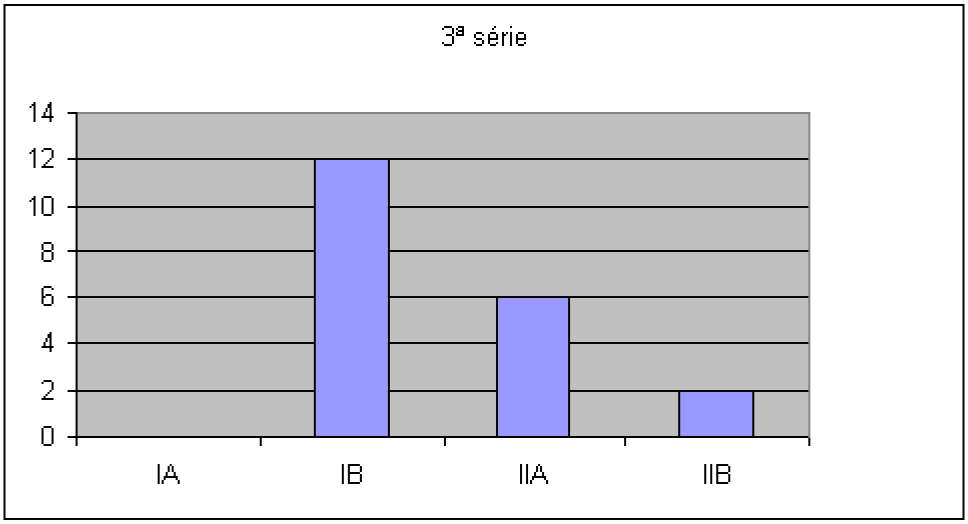


Gráfico 09: Distribuição dos participantes da terceira série, na prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças

No caso da quinta série, foram identificados dois estudantes no nível IB, seis estudantes no nível IIA e doze estudantes no nível IIB na prova de igualação de quantidades e construção de diferenças de Piaget. Observa-se no Gráfico 10, a inversão do gráfico anterior, em que mais estudantes já alcançaram a identidade dos contrários e conseguem compreender as interdependências entre as operações.

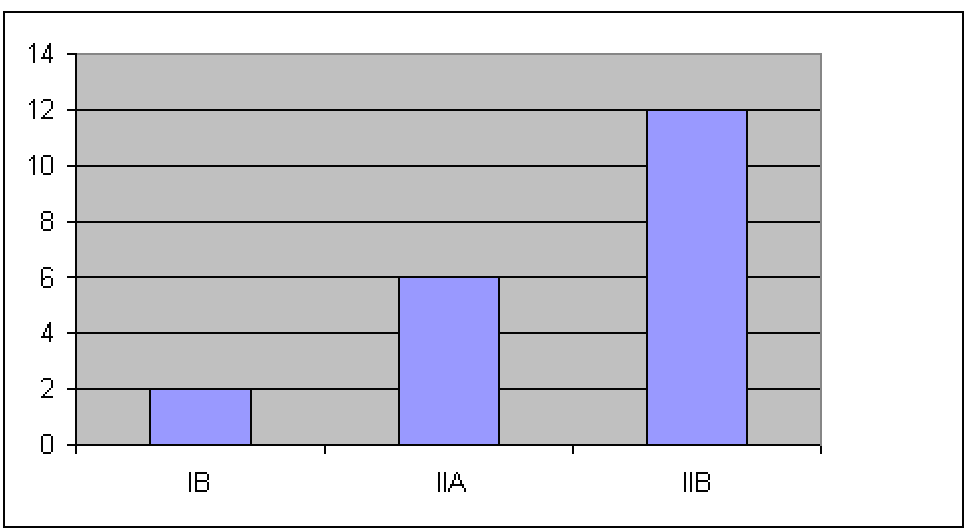


Gráfico 10: Distribuição dos participantes da quinta série, na prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças

5.4 Adição com cálculo mental e escrito

Estudos têm evidenciado o papel da recuperação automática dos resultados da memória, considerando-a como uma das estratégias mais complexas (Parra, 1996; Shane, 2004; Barrouillet e Lepine, 2005; Jacksson *et al*, 2005). Existem vários modelos de estruturas cognitivas envolvidas na elaboração dos cálculos, apresentados na literatura. No entanto, todos esses modelos hipotetizam que o sistema de resolução de cálculos se baseia na recuperação de processos (Lucangeli *et al*, 2003). No caso da adição com cálculo mental investigada, apenas dois estudantes da quinta série utilizaram a estratégia de recuperação automática de resultados (AUTO). E, apesar da adição com cálculo mental apresentar um índice elevado de acertos, esses foram decorrentes da elaboração de contagem nos dedos e contagem mental da sequência numérica, nas adições mais simples.

Quando exigia-se a adição de unidades e dezenas, como em 76+49, a estratégia de algoritmos mentais (MA) foi a mais utilizada pelas duas séries, além de outras estratégias mais complexas, como as estratégias de decomposição (1010 e n10). Constata-se que a quantidade de acertos reduz, nesse caso das adições, entretanto, as estratégias utilizadas são mais elaboradas ao exigirem processos cognitivos de memória visual, memória espacial e compreensão dos processos de decomposição e composição de unidades e dezenas. Tais estratégias foram mais utilizadas por estudantes que encontravam-se nos níveis IIA e IIB na prova de igualação de quantidades e construção de diferenças de Piaget.

Na adição com cálculo escrito, pôde-se acompanhar a influência da aprendizagem dos algoritmos ensinados no sistema escolar sendo a estratégia CAR-, desses algoritmos, utilizada pela grande maioria dos estudantes da terceira série e por todos os estudantes da quinta série. Apenas quatro alunos da terceira série apoiaram seus cálculos na contagem escrita, utilizando a estratégia CAR+ e nenhum estudante utilizou a recuperação automática dos resultados. A média de acertos para as adições com cálculos escritos foi superior para os estudantes que encontravam-se nos níveis IIA e IIB na prova de igualação de quantidades e construção de diferenças de Piaget. As estudantes da terceira série do nível IIB acertaram todas as adições com cálculos escritos que foram propostas, como o exemplo de CAR (8;7)

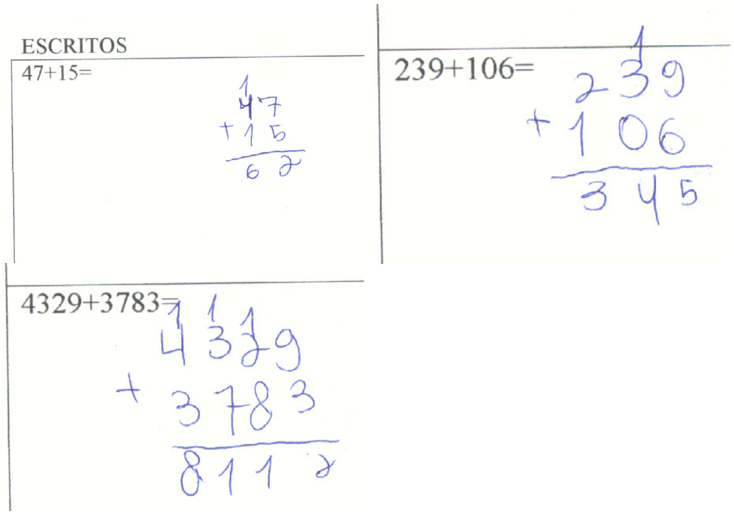


Figura 15: Resolução de adições com cálculos escritos por estudante no nível IIB

Essa mesma aluna, nas situações de igualação de quantidades, utilizava o procedimento de antecipação dos resultados e, assim, quando foi solicitada a igualar as quantidades 3 e 5 primeiramente adicionou os elementos e calculou 5+3=8 e realizou a divisão das colunas em quatro elementos cada uma, transferindo um elemento da fileira com 5, para a outra fileira com 3. O mesmo ocorreu no momento de igualar 1/5/9 quando adicionou todos os elementos, dividiu-os em três colunas de cinco elementos cada uma, após transferir as fichas entre as fileiras. Os estudantes do nível IB não utilizaram o procedimento de antecipação dos resultados e centraram-se em retirar e acrescentar elementos, características das “adições e subtrações simples” termo designado por Piaget (1996). Tais estudantes também centravam-se, no momento de construir diferenças, nos elementos que eram transferidos para a coluna seguinte e então, desconsideravam a interdependência entre adicionar elementos e subtraí-los ao mesmo tempo. O estudante GAH (9;4, nível IB na prova de igualação de quantidades e construção de diferenças) apresentou duas soluções incorretas, das três adições propostas:

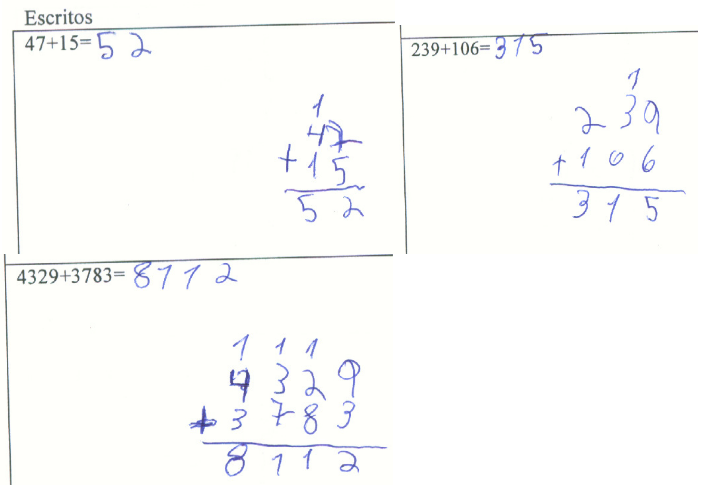


Figura 16: Resolução de adições com cálculos escritos por estudante no nível IB

Quando foi solicitado a igualar as quantidades 3 e 5, GAH fez várias tentativas. Primeiramente acrescentou três elementos ficando com 6 e 5. Quando questionado sobre a igualdade das colunas, acrescentou mais uma ficha na coluna com cinco elementos. Sobre outras possibilidades de igualação, GAH somente acrescentou elementos da caixa reserva e não realizou transferências de elementos. Ao igualar 1/5/9, o fez por meio de acréscimos de oito fichas na primeira fileira e quatro na segunda, para chegar ao mesmo total da terceira fileira e não apresentou outras possibilidades de igualação.

5.5 Subtração com cálculo mental e escrito

Para a resolução das subtrações com cálculos mentais mais simples, os estudantes procederam, como no caso das adições, apoiando seus cálculos na contagem com os dedos, retirando os elementos solicitados nas operações. Tais estratégias elementares garantiram os acertos em 65% das resoluções de terceira e quinta séries. Quando as subtrações exigiam cálculos nas unidades e dezenas, observa-se que a média de acertos reduz de forma acentuada, chegando a índices de 30% para a quinta série. Contrariamente a concepção de que em séries mais adiantadas os índices de acertos seriam maiores, os resultados para a subtração mental revelaram mais acertos na terceira série. Constata-se que, se a aprendizagem dos cálculos dependessem apenas de treinos e exercitações, a quinta série deveria ter resultados superiores, pois teve a possibilidade de "exercitar" por mais tempo tais cálculos. Os resultados demonstraram a complexidade da compreensão da operação de subtração, enquanto uma construção mais tardia e dependente de outros elementos do sistema de numeração. Para alguns estudantes é possível utilizar a propriedade comutativa e realizar da mesma forma, por exemplo, 6-0=6 e inverter para 0-6=6 ou, mais preocupante ainda, é a realização automática do cálculo 0-6=6. Essa realização automática foi mais observada na quinta série, portanto foi automatizada uma forma incorreta de resolução. Tal automatização foi menos observada na turma da terceira série.

As subtrações com cálculos escritos apresentaram como estratégia de maior utilização a de CAR-, com o emprego do algoritmo ensinado no espaço escolar. Assim, os estudantes iniciaram os cálculos pelas unidades e depois passaram aos cálculos das dezenas. A grande maioria dos estudantes acompanhava os cálculos com expressões verbais, tais como: “zero menos seis não dá, empresto do oito, fica sete, ali... agora dez menos seis dá quatro e sete menos dois dá cinco”. A caneta também acompanhava todos os movimentos que estavam sendo pronunciados.

Na análise das subtrações com cálculo escrito, foram observadas as substituições dessas operações e assim, alguns estudantes da terceira série, ao invés de subtrair, realizavam a operação adicionando os algarismos. Tais resoluções apenas foram observadas em estudantes no nível IB na prova de igualação de quantidades e construção de diferenças que apresentaram como procedimento principal, o de adições e subtrações simples, sem a interdependência entre as operações. Esse nível IB também caracterizou os estudantes que mais apresentaram erros nas resoluções das subtrações. O exemplo de KAT (11;2 , quinta série, nível IB na prova de igualação de quantidades e construção de diferenças), com o acerto de apenas uma operação de subtração, representa a média de acertos nesse nível.

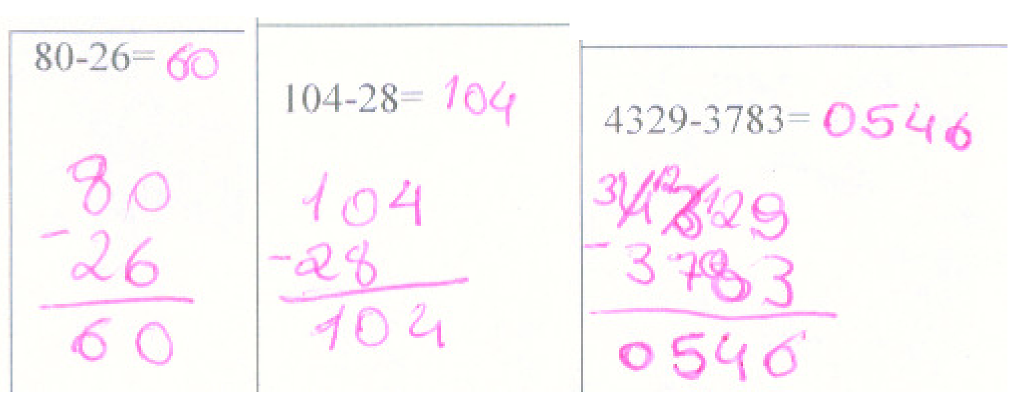


Figura 17: Resolução de subtrações com cálculos escritos por estudante no nível IB

5.6 Multiplicação

5.6.1 Multiplicação com cálculos mentais (18X2; 31X3; 57X5)[7]

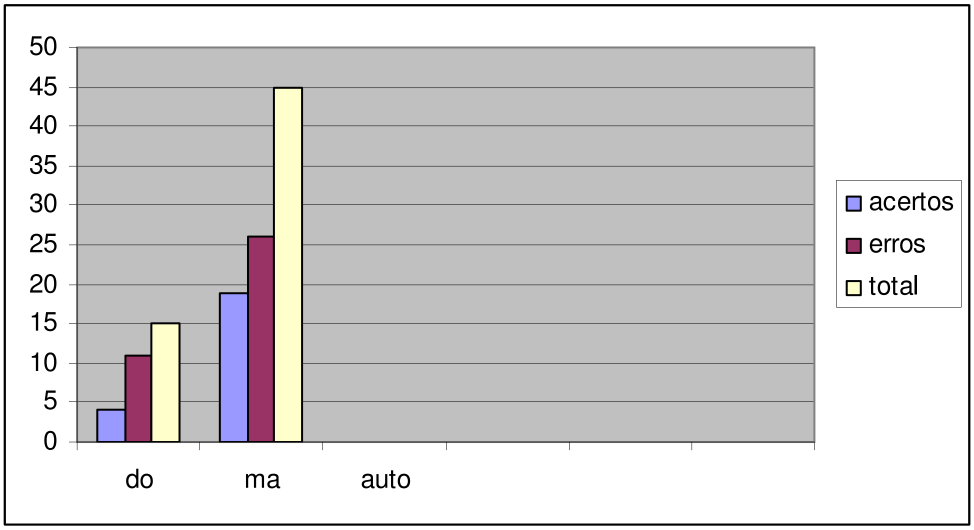
Tabela 05 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas multiplicações com cálculos mentais

Cálculo mental		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Multiplicação	18x2	9 (45%)	11 (55%)	12 (60%)	8 (40%)
	31x3	9 (45%)	11 (55%)	14 (70%)	6 (30%)
	57x5	5 (25%)	15 (75%)	7 (35%)	13 (65%)

Para as multiplicações com cálculos mentais, os estudantes de terceira série apresentaram os seguintes resultados: em 18X2 foram nove acertos e onze erros, em 31X3 também foram observados nove acertos e onze erros e, em 57X5 foram cinco acertos e quinze erros. O percentual de acertos da terceira série foi inferior ao da quinta série como pode ser visualizado na Tabela 05.

A estratégia, para resolução da multiplicação com cálculo mental, mais utilizada pelos estudantes de terceira série foi a de algoritmo mental (MA), utilizada com acerto por dezenove alunos e de forma incorreta por vinte e seis alunos. Por intermédio do Gráfico 11 esses resultados podem ser visualizados. A estratégia de operações diferentes (DO) foi utilizada com acerto por quatro estudantes e onze a utilizaram de forma incorreta. Como exemplo dessa utilização incorreta, foi a tentativa de resolver a multiplicação utilizando a soma, assim em 18X2, os estudantes somaram mentalmente 18+18 e diziam 26 esquecendo-se do acréscimo na dezena. A estratégia AUTO, de recuperação automática dos resultados, não foi utilizada pelos estudantes da terceira série.

[7] Estratégias de cálculos mentais nas multiplicações: DO (operações diferentes); MA (algoritmos mentais); AUTO (cálculos automáticos)



Do- operações diferentes

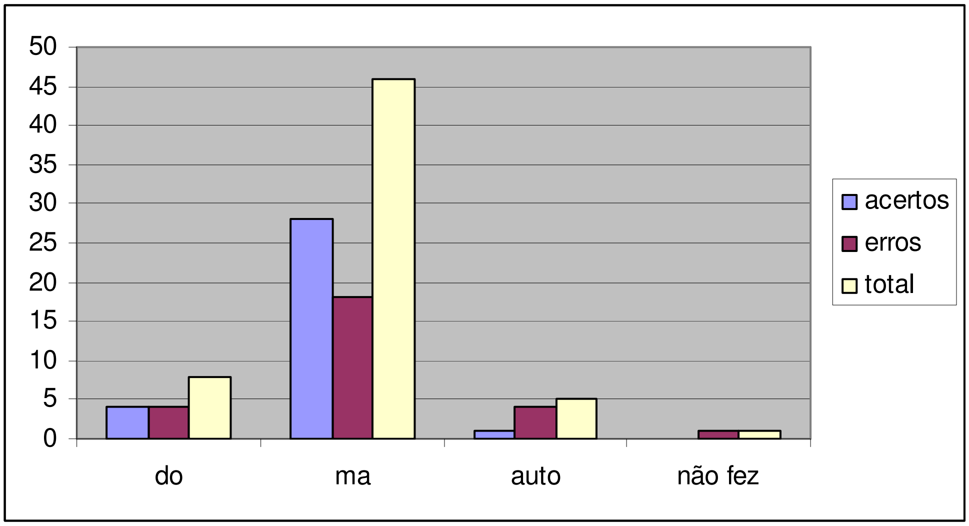
Ma- algoritmo mental

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 11: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas multiplicações com cálculos mentais

Os resultados da multiplicação com cálculo mental para a quinta série foram em 18X2, doze acertos e oito erros, em 31X3 foram observados quatorze acertos e seis erros e, em 57X5 foram sete acertos e treze erros.

A estratégia para resolução da multiplicação com cálculo mental mais utilizada pelos estudantes de quinta série foi a de algoritmo mental (MA), com vinte e oito utilizações corretas, como pode ser constatado pelo Gráfico12. A estratégia de operações diferentes (DO) foi utilizada com acerto por quatro estudantes e a estratégia de recuperação automática dos resultados (AUTO), foi utilizada apenas por um aluno. A totalização dos erros alcançou vinte e sete resoluções, assim distribuídas: dezoito da estratégia MA, quatro DO, quatro AUTO e um aluno não conseguiu resolver a operação proposta.



D0- operações diferentes

Ma- algoritmo mental

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 12: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas multiplicações com cálculos mentais

No caso da multiplicação com cálculo mental, ao utilizarem o algoritmo mental (MA) em 18X2, os estudantes da terceira e da quinta série preferiram resolver as unidades primeiramente 2x8=16 e o erro mais comum no cálculo foi o de desconsiderar a dezena a mais resultante dessa multiplicação e o produto obtido chegava a 26 e não a 36. No caso da multiplicação 31X3, o erro mais encontrado foi o de inversão dos resultados, portanto, os estudantes afirmavam que o produto era 39, não o correto 93. A resolução incorreta de 57X5 mais observada foi a de considerar o produto das unidades 5X7=35 e das dezenas 5X5=25 separadamente, e depois somá-las obtendo o total 60, não consideravam, portanto, a soma correta das dezenas que são 250.

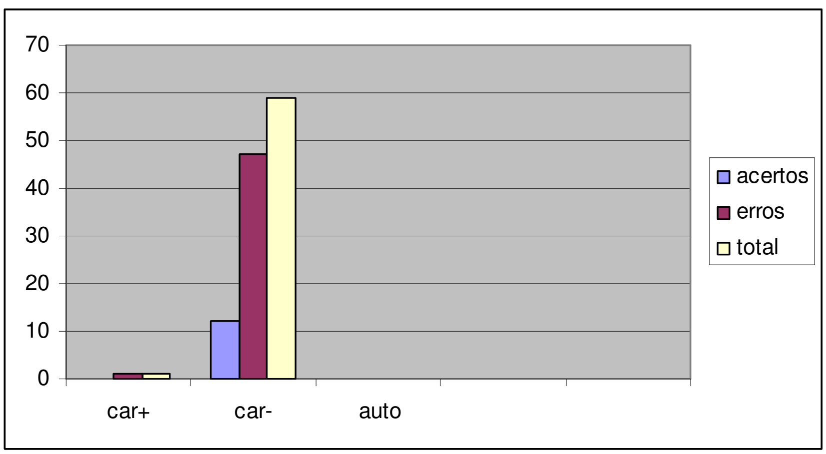
5.6.2 Multiplicação com cálculos escritos (255X18; 492X7; 134X9)[8]

No caso da multiplicação com cálculos escritos, constata-se um percentual superior de acertos para o grupo da quinta série, como pode ser observado na Tabela 06. A multiplicação com cálculo escrito 255x18 apresentou apenas dois acertos e dezoito erros para a turma da terceira série, em 492x7 foram quatro acertos e dezesseis erros e, em 134x9, foram sete acertos e treze erros.

Tabela 06 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas multiplicações com cálculos escritos

Cálculo escrito		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Multiplicação	255x18	2 (10%)	18 (90%)	10 (50%)	10 (50%)
	492x7	4 (20%)	16 (80%)	8 (40%)	12 (60%)
	134x9	7 (35%)	13 (65%)	12 (60%)	8 (40%)

A estratégia CAR-, de utilização do algoritmo da multiplicação, foi a mais utilizada pelos estudantes de terceira série, de forma correta por doze alunos e de forma incorreta por quarenta e sete alunos. Apenas um aluno utilizou a estratégia CAR+ e de forma incorreta.



CAR+ escrita contínua das operações

CAR- uso de algoritmos

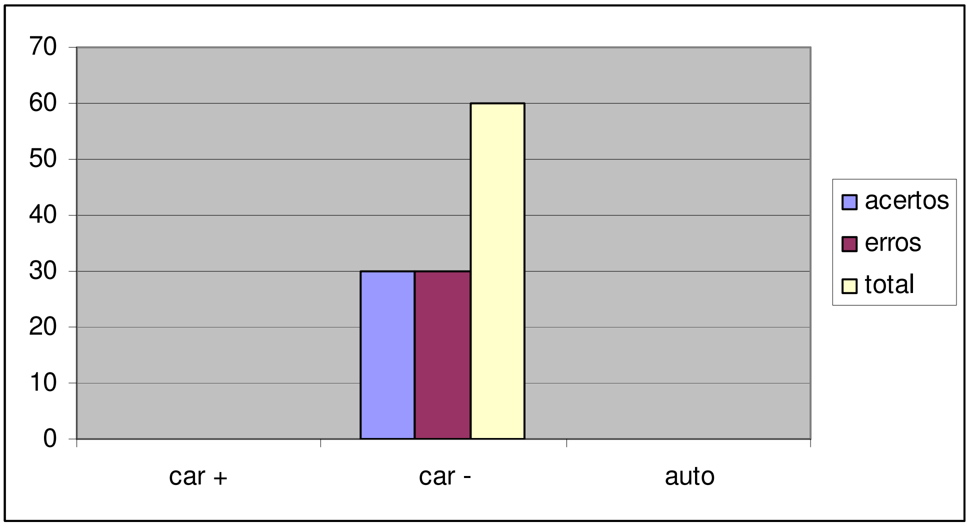
Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 13: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas multiplicações com cálculos escritos

8 Estratégias de cálculos escritos nas multiplicações: CAR+ (tabulando com uma escrita contínua das operações); CAR- (uso de algoritmos); AUTO (cálculos automáticos)

No caso da quinta série foram observados dez acertos e dez erros em 255x18, em 492x7 foram oito acertos e doze erros e, em 134x9 foram doze acertos e oito erros.

A estratégia CAR- foi a única estratégia utilizada pelos estudantes de quinta série, o que pode ser confirmado pelo Gráfico 14. Ela foi utilizada de forma correta por metade da turma, portanto, por trinta alunos e, de forma incorreta, pela outra metade da turma.



CAR+ escrita contínua das operações

CAR- uso de algoritmos

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 14: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas multiplicações com cálculos escritos

5.7 Divisão

5.7.1 Divisão com cálculos mentais (66÷3; 120÷4; 81÷9)[9]

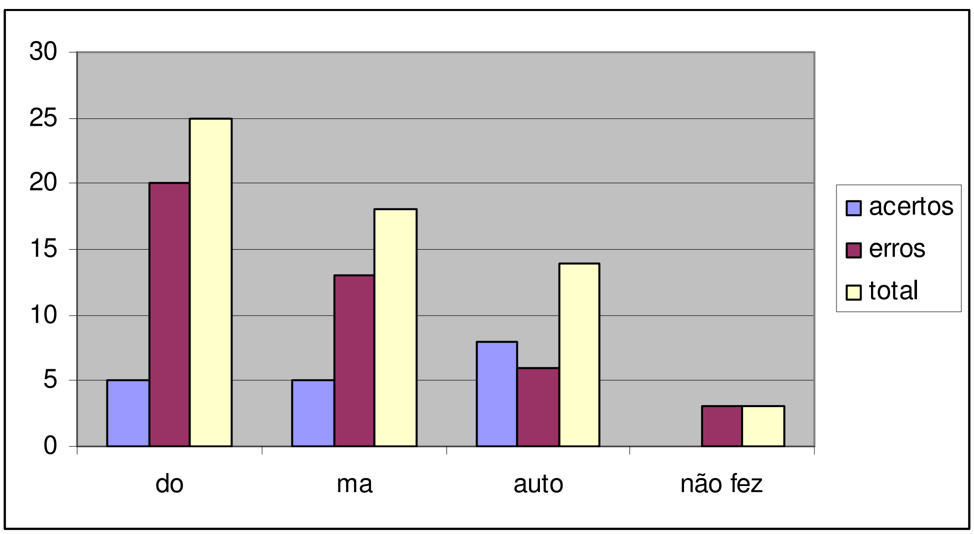
Constata-se que os resultados da divisão com cálculos mentais foram superiores, no percentual de acertos, para o grupo da quinta série. A tabela 07 apresenta tais resultados. No caso da terceira série, no momento em que resolveram a divisão 66÷3 foram observados seis acertos e quatorze erros, em 120÷4 foram cinco acertos e quinze erros e, em 81÷9 foram sete acertos e treze erros.

[9] Estratégias de cálculos mentais nas divisões: DO (operações diferentes); MA (algoritmos mentais); AUTO (cálculos automáticos)

Tabela 07 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas divisões com cálculos mentais

Cálculo mental		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Divisão	66÷3	6 (30%)	14 (70%)	12 (60%)	8 (40%)
	120÷4	5 (25%)	15 (75%)	10 (50%)	10 (50%)
	81÷9	7 (35%)	13 (65%)	13 (65%)	7 (35%)

A estratégia mais utilizada de forma correta, pelos alunos de terceira série, para resolução da divisão foi a de recuperação automática de cálculos (AUTO), com acerto por oito alunos e de forma incorreta por seis alunos. Tais resultados estão organizados no Gráfico 15. A estratégia de algoritmo mental (MA) foi utilizada por cinco alunos de forma correta e por treze alunos de forma incorreta. A estratégia de utilização de operações diferentes (DO) foi utilizada por cinco alunos de forma correta e por vinte alunos de forma incorreta. Tais utilizações incorretas devem-se principalmente pela utilização de totais equivocados das multiplicações, como em 81÷9=8 porque (9X8=81) ou 81÷9=7 porque (9X7=81). Um total de três alunos da terceira série não conseguiu resolver as operações.



D0- operações diferentes

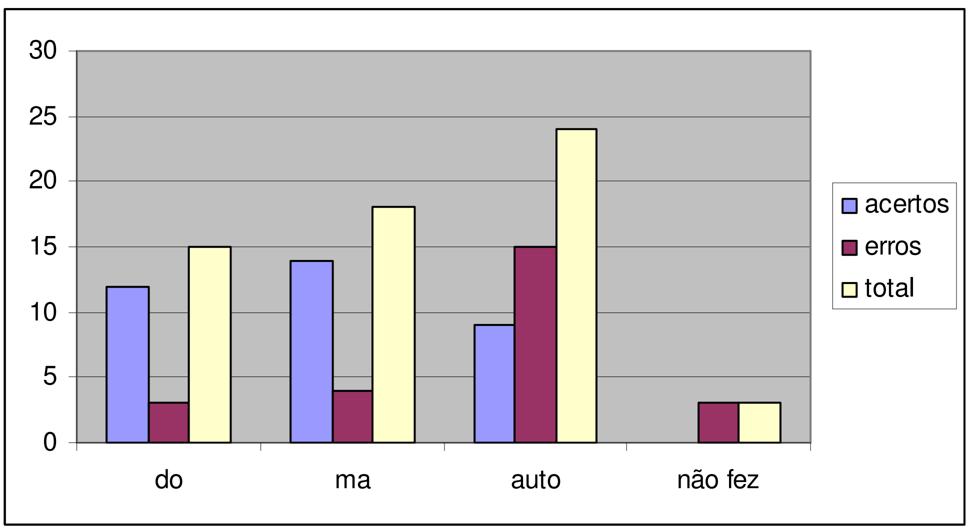
Ma- algoritmo mental

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 15: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas divisões com cálculos mentais

Os resultados das divisões com cálculos mentais para a quinta série apresentaram a seguinte configuração: na operação 66÷3 foram observados doze acertos e oito erros, em 120÷4 foram dez acertos e dez erros e, em 81÷9 foram treze acertos e sete erros.

A estratégia utilizada de forma correta, pelos alunos de quinta série, para resolução da divisão foi a de algoritmo mental (MA), com quatorze utilizações; em seguida a estratégia DO, de operações diferentes, com doze utilizações e de recuperação automática do resultado (AUTO) com nove, assim totalizando trinta e cinco acertos. A essas análises, podem ser inseridos os resultados do Gráfico 16. Os erros foram mais observados na utilização da estratégia AUTO, com um total de quinze alunos; outros quatro estudantes utilizaram a estratégia MA e três a DO de forma incorreta, além de três alunos da quinta série não conseguirem resolver as operações propostas.



D0- operações diferentes

Ma- algoritmo mental

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 16: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas multiplicações com cálculos mentais

A análise da resolução das divisões com cálculos mentais permite identificar alguns erros mais constantes observados na terceira e na quinta séries, conjuntamente. No caso da divisão 66÷3 os estudantes, de forma automática, diziam que se tratava da metade e o resultado seria 33. Em 120÷4, o erro mais encontrado foi o de afirmarem que seria três ou quatro o resultado, desconsiderando a divisão da unidade 0. A divisão mental proposta

81÷9 teve como principal dificuldade a recuperação automática do cálculo; muitas vezes os estudantes afirmavam que o resultado seria 8 ou 7.

5.7.2 Divisão com cálculos escritos (2050÷45; 288÷12; 7054÷9)[10]

Tabela 08 – Totalização de acertos e de erros dos estudantes da terceira e da quinta série, nas divisões com cálculos escritos

Cálculo escrito		3ª série		5ª série	
		Acertos	Erros	Acertos	Erros
Divisão	2050÷45	1 (5%)	19 (95%)	3 (15%)	17 (85%)
	288÷12	6 (30%)	14 (70%)	12 (60%)	8 (40%)
	7054÷9	2 (10%)	18 (90%)	4 (20%)	16 (80%)

Como pode ser observado na Tabela 08, as divisões com cálculos escritos apresentaram baixo percentual de acertos nas duas séries. As divisões com cálculos escritos resolvidas pela terceira série resultaram em um acerto e dezenove erros em 2050÷45, seis acertos e quatorze erros em 288÷12 e, em 7054÷9 foram dois acertos e dezoito erros.

No caso das divisões com cálculos escritos, nove estudantes da terceira série utilizaram com acerto o algoritmo da divisão DIV e quarenta e quatro com erro. Um exemplo do algoritmo utilizado de forma correta é o de SUE (9;2 da terceira série).

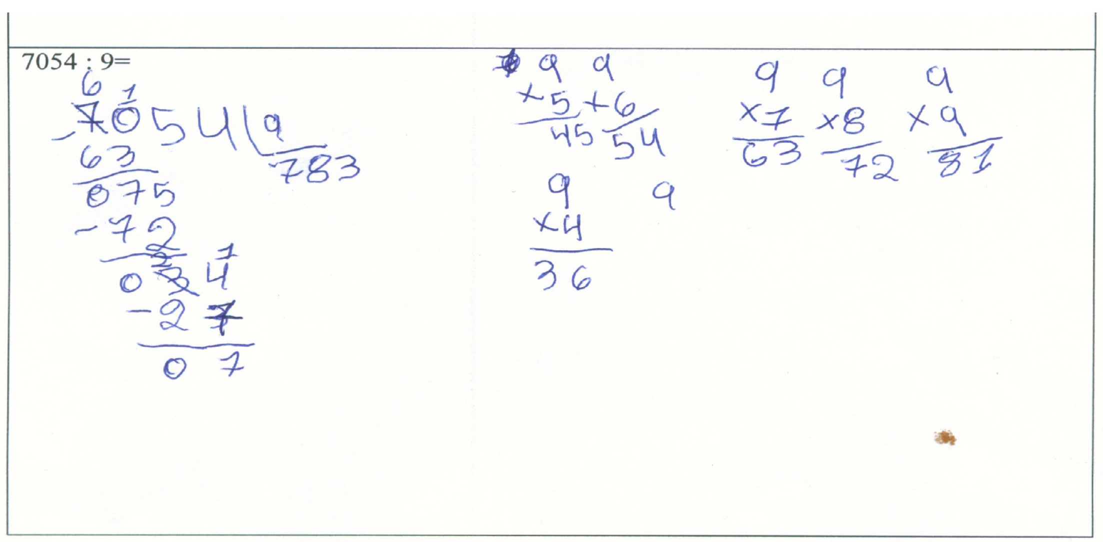


Figura 18: Exemplo de utilização da estratégia DIV

[10] Estratégias de cálculos escritos nas divisões: DIV (uso do algoritmo); DO (operações diferentes); AUTO (cálculos automáticos)

Um exemplo de utilização incorreta do algoritmo na terceira série foi a divisão realizada apenas pela unidade, desconsiderando que o divisor possui dois algarismos, como em PAU (10;2).

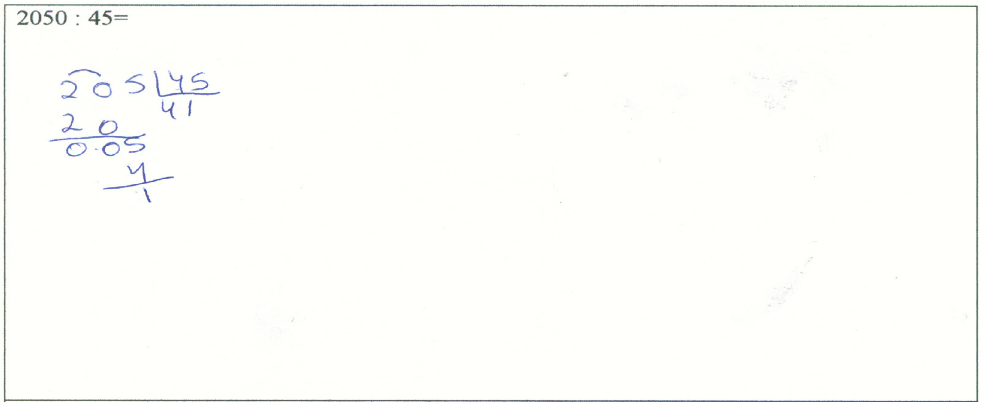


Figura 19: Exemplo de utilização incorreta da estratégia DIV

Observa-se que a estudante fez a divisão da unidade de milhar e da centena (20) apenas pelo 5 do então 45 no divisor, e da dezena 5 pelo 4 do 45 restando1. Foi um recurso utilizado principalmente por estudantes da terceira série que não realizaram na escola anteriormente divisões com a dezena no divisor. Foram observadas sete realizações desse tipo (17,5% do total).

A estratégia de utilização de operações diferentes (DO) foi utilizada por quatro alunos de forma incorreta e três alunos utilizaram a recuperação automática do cálculo (AUTO), de forma incorreta também. Um exemplo de utilização de operações diferentes é o de MAR (8;11 da terceira série) que resolveu a divisão por meio de subtrações.

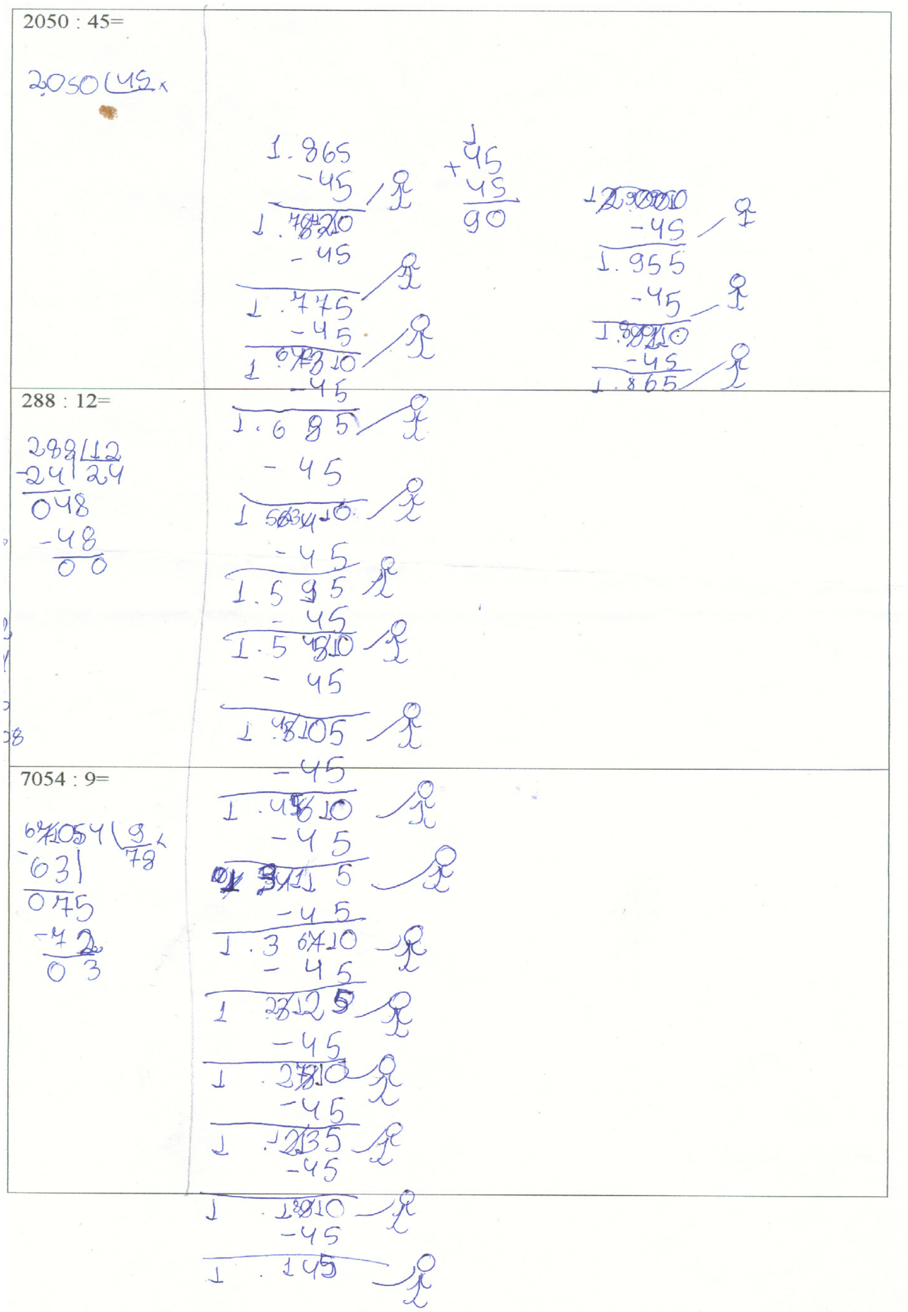
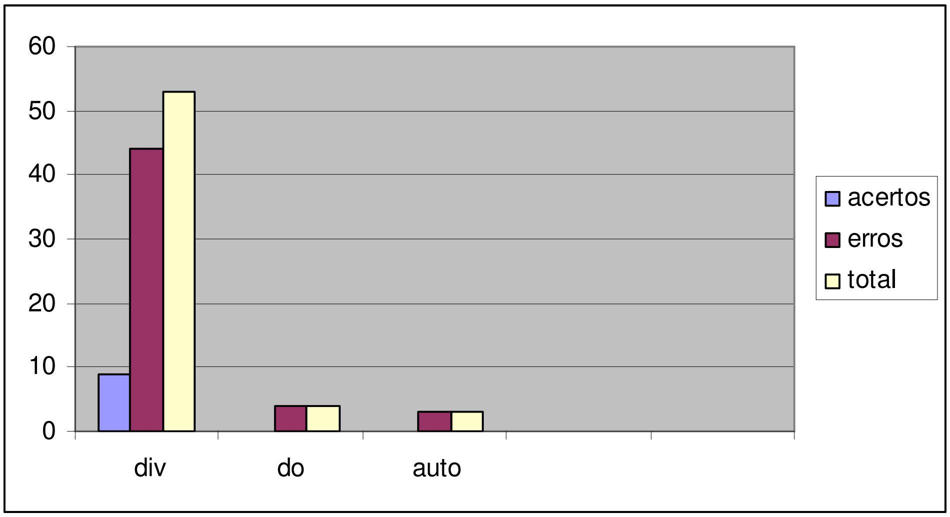


Figura 20: Exemplo de utilização da estratégia DO na divisão

As estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série na divisão com cálculo escrito podem ser visualizadas no Gráfico17.



DIV- algoritmo convencional

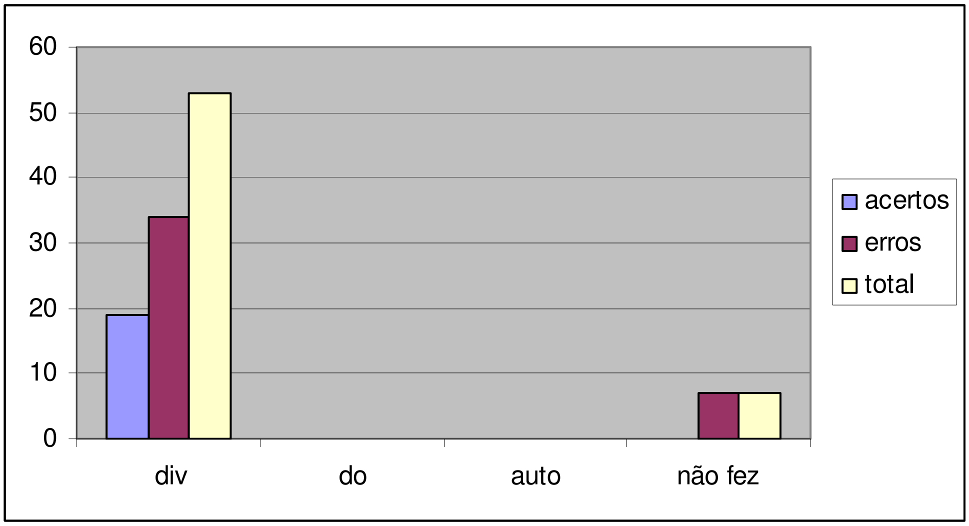
DO- operações diferentes

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 17: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da terceira série, nas divisões com cálculos escritos

Para a quinta série foram observados os seguintes resultados nas divisões escritas: três acertos e dezessete erros em 2050÷45, doze acertos e oito erros em 288÷12 e, em 7054÷9 foram quatro acertos e dezesseis erros.

No caso das estratégias utilizadas, dezenove estudantes da quinta série utilizaram com acerto o algoritmo da divisão (DIV) e trinta e quatro com erro. Não foi observada a utilização das estratégias DO, de operações diferentes e AUTO, de recuperação automática dos resultados. Um total de sete operações não foram resolvidas pelos estudantes da quinta série. Esses resultados podem ser observados por intermédio do Gráfico 18.



DIV- algoritmo convencional

Do- operações diferentes

Auto- recuperação automática dos resultados

Gráfico 18: Distribuição das estratégias utilizadas pelos estudantes da quinta série, nas divisões com cálculos escritos

5.8 Análise da Prova de Multiplicação e associatividade multiplicativa

Na prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa, a qual envolve quatro situações com multiplicando, multiplicador e produto, foram identificados oito estudantes no nível IA para a turma de terceira série. Nesse nível, os participantes são capazes de centrar-se nas diferentes variáveis (número de pacotes X número de grãos por pacote = o todo) mas, manipulam somente uma variável de cada vez, portanto as composições necessárias às soluções multiplicativas não estão evidentes ainda. Para o nível IB foram identificados quatro estudantes que apresentam tentativas de relacionamentos entre as variáveis e início de relação entre continente e conteúdo (pacotes X grãos), apresentando certas soluções exatas, mesmo que o problema não tenha sido inteiramente resolvido. No nível IIA foram oito estudantes com a estabilização das relações entre os três sistemas: partes, todo e elementos; o todo não é mais somente dado pela soma total dos grãos, há o início da relação multiplicativa e associativa. O Gráfico 19 apresenta a distribuição dos estudantes em cada um dos níveis investigados.

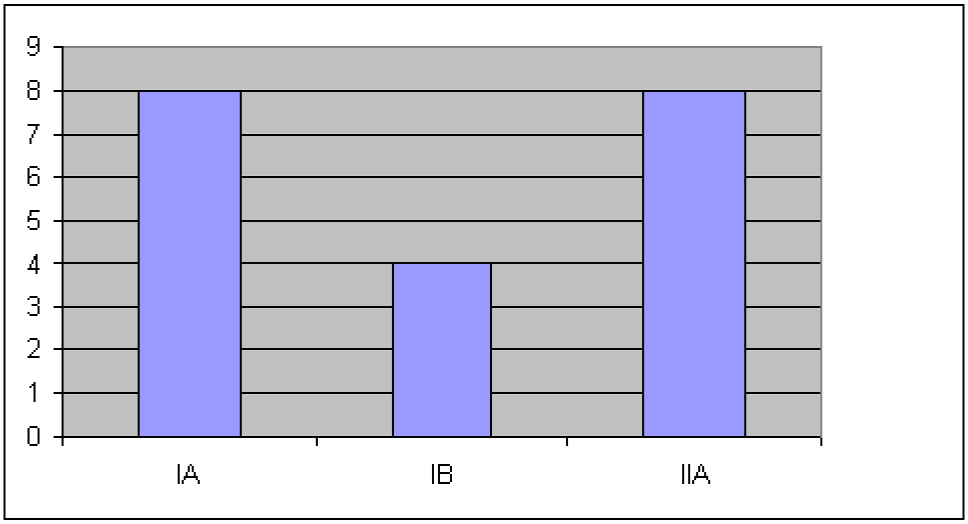


Gráfico 19: Distribuição dos participantes da terceira série, na prova de Multiplicação e associatividade multiplicativa

Para a quinta série o total é de quatro estudantes no nível IB e treze estudantes no nível IIA. No caso do nível IIB foram observados três estudantes que alcançaram a antecipação da determinação que um mesmo todo pode ser distribuído em continentes diferentes, cujo número está em função inversa ao de seus contidos, além de compreender as correspondências injetivas.

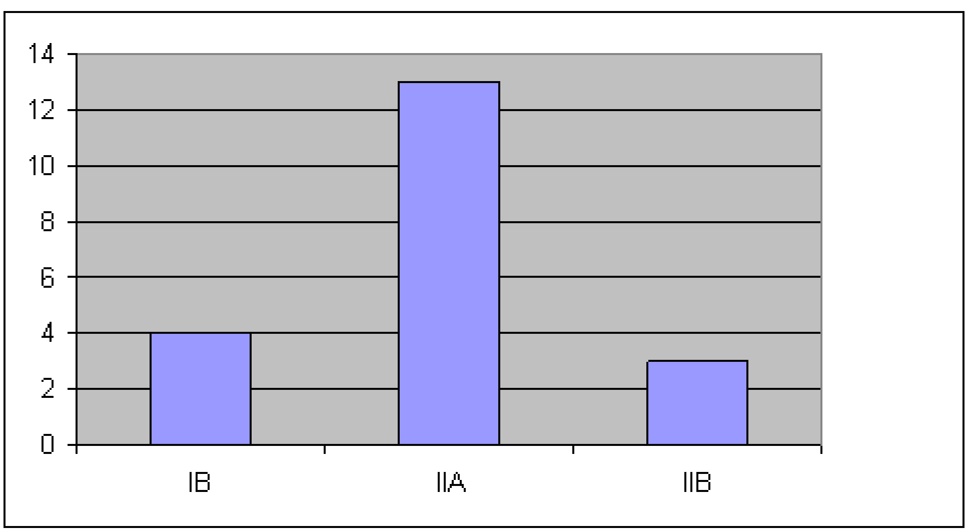


Gráfico 20: Distribuição dos participantes da quinta série, na prova de Multiplicação e associatividade multiplicativa

5.9 Multiplicação com cálculo mental e escrito

Os resultados da multiplicação indicam que os cálculos mentais foram mais facilmente respondidos que os cálculos escritos, sendo que a quinta série conseguiu melhores resultados, com o alcance de 70% de acertos nesses cálculos, em comparação aos 45% (maior índice) de acertos da terceira série. A estratégia de algoritmos mentais MA foi a mais empregada pelos estudantes e a que obteve um percentual maior de acertos. O processo de resolução escrita da multiplicação mostrou-se com alta complexidade, principalmente com dois algarismos a serem multiplicados, conteúdo não ensinado pelos professores de terceira série até aquele momento, na escola. Apesar de, apenas dois estudantes da terceira série, terem realizado corretamente essa multiplicação, os erros foram elucidativos em relação ao processo pelo qual os estudantes desenvolvem a compreensão dessa operação. Como já demonstrara Piaget (1993), o desenvolvimento das multiplicações é muito mais complexo, e assim não pode ser reduzido ao processo de adição de adições, visto que nesse processo de multiplicação, existem composições simultâneas. O interesse do pesquisador, nesse caso, foi o de investigar o caráter genético dessas composições, estabelecendo para as diferentes idades, atribuições de como as crianças lidam com as variáveis: multiplicando, multiplicador e produto e como elas os compõem em diferentes situações. Dessa forma, também investigou a evolução da pseudonecessidade, da pré-necessidade, em que os erros cometidos pelas crianças não são compensados até o momento em que as necessidades passam a se impor para os sujeitos, ao realizarem as relações entre os conteúdos, continentes e o todo, nas multiplicações.

Para Piaget (1983), nas pesquisas sobre a multiplicação, “as dificuldades para o sujeito não dependem dos procedimentos de cálculo, facilmente adquiridos, mas de sua significação em cada situação concreta particular” (p.82). Tal facilidade é aparente e pode ser reduzida à recitação de cálculos e memorização de procedimentos, sem que o sujeito os aplique em novas situações. Convém lembrar, que os procedimentos de cálculo não são tão facilmente adquiridos e são visivelmente aplicáveis para solucionar situações-problema, como as propostas na prova piagetiana da multiplicação e associatividade multiplicativa. Assim, a presente pesquisa buscou aliar tal investigação das composições da multiplicação nas diferentes séries, com as estratégias de resolução mentais e escritas utilizadas pelas crianças.

A pesquisa de Lin e Kubina Jr. (2005) sobre as habilidades envolvidas na resolução da multiplicação com multi-dígitos, serviu como um parâmetro para que o destaque dessas várias habilidades fosse desenvolvido. Dessa forma, por intermédio do exemplo de CAR (11;0, quinta série, nível IIA na prova da associatividade da multiplicação), ao resolver a operação 255x18, discutem-se os vários resultados encontrados na presente pesquisa.

Multiplicação pela unidade- por um dígito
5x8=40

Combinado com

Multiplicação e adição nas dezenas

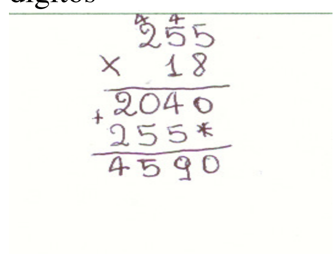
5x8=40

40+4=44

Combinado com

Adição com e sem reagrupamento e valor-lugar da dezena
2040+2550=4590

Multiplicação com multi-dígitos



Observa-se que, para o alcance da correta resolução da multiplicação, os estudantes precisam lidar com várias habilidades. A primeira delas implica na resolução das multiplicações por um algarismo nas diversas ordens do multiplicando. Em segundo lugar, os estudantes precisam considerar as adições com e sem reagrupamento nessas ordens, combinadas com as multiplicações a serem realizadas. A terceira habilidade envolve a compreensão do valor-lugar nas operações e nesse último caso, por exemplo, compreender o porquê do zero ser colocado na segunda parcela, ao multiplicar as dezenas e registrar os resultados. No exemplo acima, a estudante utilizou um asterisco ao considerar as dezenas.

Todas essas habilidades e a dificuldade em lidar-se com elas simultaneamente, foram identificadas na presente pesquisa.

O primeiro passo a ser feito, o da multiplicação por um algarismo aliado ao segundo passo, o da adição combinada com a multiplicação, que acontece na dezena, causou dificuldade em muitos estudantes. Constatou-se que cerca de 22% dos estudantes da terceira série iniciaram corretamente a multiplicação pela unidade e nesse ponto, encerraram o processo. Eles seguiram a resolução com a multiplicação da dezena do multiplicador e depois passaram às centenas. Dos oito estudantes da terceira série que encontravam-se no nível IA na prova de associatividade da multiplicação, quatro apresentaram essa forma de resolução, como a seguir são exemplificados.

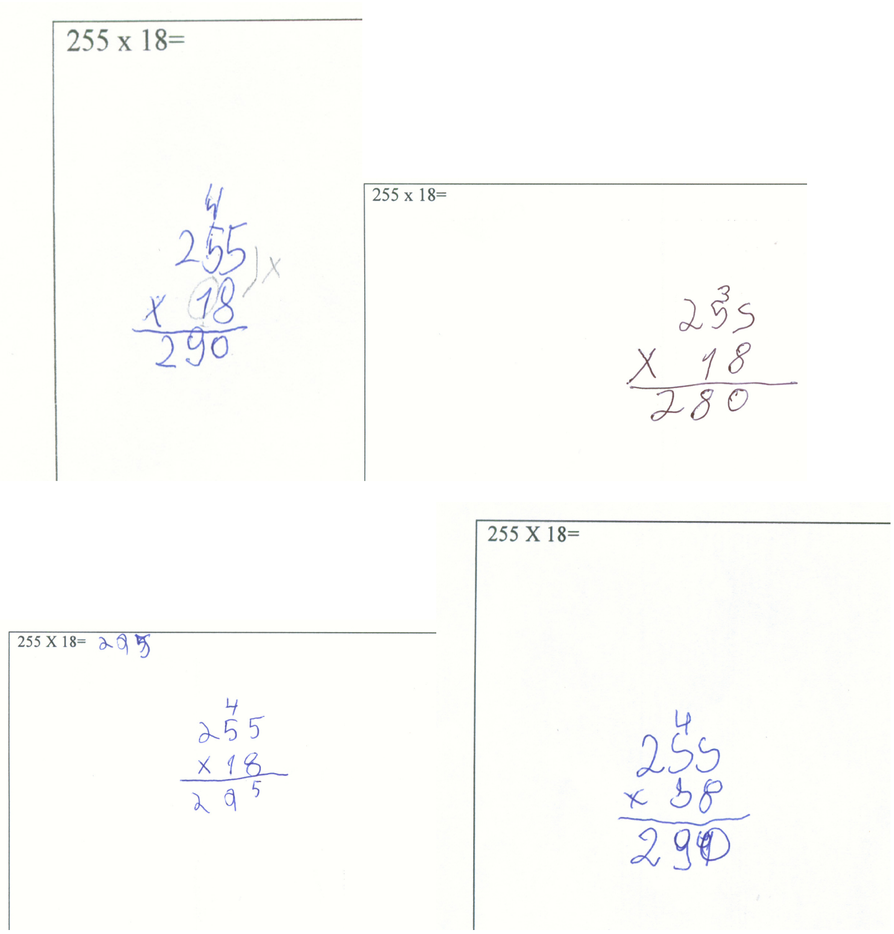
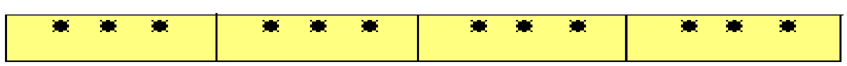


Figura 21: Exemplo de resolução da multiplicação por estudantes do nível IA

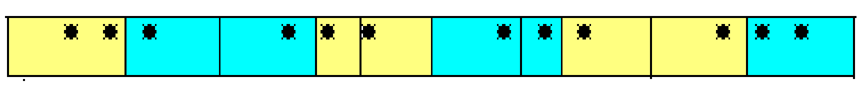
Nesses exemplos, observa-se a multiplicação 5X8=40 (nem todos acertaram), a presença do zero na unidade, compondo o produto e as quatro dezenas acima do cinco. Os estudantes em seguida realizaram a multiplicação da dezena, assim 1X5=5 adicionadas as outras dezenas, totalizaram nove. As centenas foram mantidas. Em tais resoluções fica evidenciado o processo de equilibração que, para Piaget, (1977b), é um "processo que leva de certos estados de equilíbrio aproximado para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e reequilibrações" (p.13). Observa-se que para esses estudantes há um desequilíbrio e no momento que não conseguem lidar com vários elementos dessas operações, retomam as estruturas consolidadas. Fica evidente o fato de o novo conhecimento resgatar os conhecimentos anteriores e assim, o procedimento utilizado para resolver as multiplicações, para os estudantes, é o mesmo da resolução das adições e subtrações: multiplica-se unidade por unidade, dezena com dezena e acrescentam-se as centenas. Nesse caso também fica evidente o papel da abstração reflexiva, termo designado por Piaget (1977a), que comporta dois aspectos inseparáveis. O primeiro refere-se ao "*réfléchissement"* uma projeção para um patamar superior do que foi retirado do patamar inferior. Assim, projetam-se as estruturas multiplicativas, que estão sendo elaboradas pelas crianças. O segundo refere-se a uma "*réflexion",* uma ação mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior, do que foi transferido do patamar inferior, portanto, há sempre um resgate das conquistas anteriores, o que nesse caso, são as conquistas das resoluções das adições e das subtrações. Para lidarem com as situações colocadas no momento de resolução das multiplicações com multi-dígitos, as crianças atingiram estágios de equilíbrio ainda muito instáveis e as compensações apresentadas foram muito próximas ao que foi assimilado na situação.

Para os estudantes do nível IA na prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa que em grande parte, apresentou essas formas de resolução escrita da multiplicação, por meio do resgate do procedimento da adição e da subtração, as relações entre os elementos multiplicando, multiplicador e produto ainda é parcialmente compreendida. Como a multiplicação é composta por simultâneas composições, os estudantes nesse nível, conseguem coordená-las uma de cada vez. A prova de Piaget solicita que sejam considerados o número de grãos por pacote, o número de pacotes e o total de grãos simultaneamente. Nesse ponto inicia-se a dificuldade, como observa-se em DAN (8;8, da terceira série) que, ao ser solicitada a preparar para o Pato (que come 2 grãos de uma vez), a mesma quantidade de grãos que a do Carneiro (que come 3 grãos de uma vez), em que (4x3= ?x?), primeiramente contou os grãos do Carneiro e disse que precisariam de doze. Então, preparou doze pacotes de dois grãos cada um, para o Pato. Ela confundiu a quantidade de grãos que são necessários (doze), com a quantidade de pacotes que são necessários (seis).

Em contraste a tais procedimentos, os estudantes que alcançaram o nível IIA na prova da associatividade, conseguem compreender a relação entre continentes (=futuros multiplicadores) e contidos (=futuros multiplicandos) e, mesmo sem realizar antecipações nos resultados, realizam empiricamente o processo de compensação. Neste sentido, alcançam o processo de multiplicação em ação, sem ainda apresentar esquematizações numéricas. E assim, como nos experimentos do grupo de Genebra, encontramos estudantes, como JOA (10;8 da quinta série) que realizaram a "vicariança quantitativa" ou "bijeções recíprocas excedentes" termos designados por Piaget ao explicar a conduta frequente no nível IIA, de considerar o terceiro grão de cada pacote do Carneiro, como um elemento constitutivo de um para o pacote do Pato. JOA fez a contagem apontando com os dedos nas sementes do Carneiro, já considerando os pacotes com dois grãos cada um, para o Pato. O esquema a seguir exemplifica, portanto, o método das bijeções dos excedentes:



* quatro pacotes do Carneiro



*quatro pacotes do Carneiro transformados em seis pacotes do Pato

Figura 22: Esquematização do método das bijeções dos excedentes

Cerca de 25% dos estudantes pesquisados realizaram a correta multiplicação somente pela unidade (8) e desconsideraram que a operação era composta por dois algarismos, em 255x18. O exemplo de JES (12;2, da quinta série, nível IB na prova da multiplicação e associatividade multiplicativa) demonstra a compreensão parcial do processo de resolução da multiplicação.

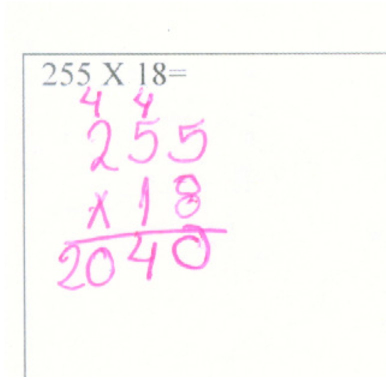


Figura 23: Exemplo de resolução da multiplicação por estudante do nível IB

No nível IB há um início de relacionamento entre o número de pacotes e de grãos em cada pacote. JES inicia a resolução afirmando que para igualar a quantidade do Carneiro e do Pato precisa de quatro pacotes fixando-se apenas na quantidade de pacotes, sem considerar que existem mais grãos nos pacotes do Carneiro. Sendo assim, é necessária a relação inversa: menos grão no pacote do Pato, então, mais pacotes. A estudante observa, a seguir, a não correspondência entre as quantidades de grãos e entrega mais pacotes ao Pato até chegar nos seis pacotes corretos. Em outras situações da prova, afirma que o Pato tem que comer mais pacotes que o Carneiro, mas não consegue antecipar o quanto a mais, nas diversas situações.

A compreensão do valor-lugar, que foi o terceiro elemento apresentado na análise da multiplicação, resultou em um total de 12% dos estudantes pesquisados que apresentaram dificuldades em compreender e utilizar o zero ou outro mecanismo que garanta a casa da dezena que foi multiplicada. Apenas estudantes da terceira série apresentaram tais dificuldades, e assim, o resultado pode ser exemplificado com a resolução de HEJ (8;8, terceira série e nível IB na prova da associatividade da multiplicação).

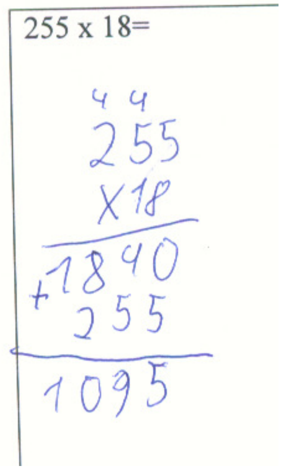


Figura 24: Exemplo de resolução da multiplicação por estudante do nível IB

Observa-se que o estudante considerou apenas a multiplicação por um, desconsiderando que é a dezena a ser multiplicada, em 18, o que resultou em 255 e não o correto 2550, a ser somado depois.

Para finalizar a análise, a resolução correta da multiplicação com multi-dígitos proposta, apresentou 30% de acertos, em sua grande maioria provenientes de estudantes da quinta série que alcançaram os níveis IIA e IIB na prova da associatividade da multiplicação. No caso do nível IIB, foi possível verificar o domínio dos cálculos como um aliado no domínio da compreensão das correspondências entre continentes e contidos e do alcance da relação multiplicadores e multiplicandos. Portanto, os estudantes aplicaram as antecipações e consideraram que, se o Carneiro possui vinte e quatro grãos (2x4x3), é possível repassar para o Pato a mesma quantidade em três fileiras de quatro pacotes, com dois grãos cada um (3x4x2), então realizaram a divisão de 24÷3=8, entendendo que são necessários oito grãos em cada uma das fileiras, o que é possível obter com quatro pacotes de dois grãos. Tais antecipações dos resultados é verificada em várias situações da prova, dentre elas a que propõe a repetição de correspondências injetivas. Nessa situação, os estudantes do nível IIB, compreendem que a diferença entre os pacotes será sempre a mesma, não importando o número de repetições solicitado, portanto, em mil repetições, a diferença será de mil grãos. Para os outros níveis, observa-se que a repetição em mil vezes, torna-se impossível e as crianças, em sua maioria, sorriram e afirmaram que “nossa! não é possível calcular, é muita coisa, não dá pra fazer”. Todos os estudantes afirmaram que o

Carneiro e o Pato não comem o mesmo tanto de sementes, mas para os níveis iniciais foi muito difícil o cálculo de qual seria a diferença entre eles, mesmo em poucas repetições de pacotes.

5.10 Divisão com cálculos mentais e escritos

Os resultados da divisão com cálculos mentais indicaram resultados superiores para a quinta série, com o alcance do índice de 65% de acertos e, para a terceira série, 35% de acertos, considerando-se os maiores índices. A estratégia que garantiu um maior número de acertos, no primeiro caso, foi a de recuperação automática dos resultados (AUTO) e, no segundo caso, a de algoritmos mentais (MA). De forma geral, na resolução da divisão, os estudantes utilizaram estratégias com exigências cognitivas superiores e em consonância a resultados de outras pesquisas (Lucangeli et al, 2003, Brito e Correa, 2004, Campos, 2008), o algoritmo da divisão foi o que apresentou maior dificuldade em sua resolução. Tais dificuldades, de acordo com a literatura, referem-se a muitos fatores que devem ser considerados no momento de sua resolução. O primeiro fator a ser considerado é a diferente ordem em que a divisão é realizada, da esquerda para a direita, enquanto as outras operações são da direita para a esquerda. O segundo fator é que para a resolução da divisão são exigidos outros cálculos simultâneos de subtração e multiplicação. O terceiro fator é a dificuldade em se estimar o quociente, o que por vezes, ocorre por tentativas e erros. Constata-se que a proporção de acertos está relacionada com a complexidade do cálculo, que pode exigir vários reagrupamentos ou exigir o zero como elemento a ser considerado na divisão, o que comumente não foi constatado na pesquisa, assim pode-se considerar um quarto fator.

Dessa forma, foram observados apenas quatro acertos no total, para a divisão com multi-dígitos escrita 2050÷45; para a divisão 7054÷9 foram seis acertos e, em 288÷12, foram dezoito acertos. A análise dos erros, diante de tais dificuldades nas resoluções das divisões, permitiu que algumas considerações sejam feitas, a fim de acompanhar o raciocínio dos estudantes. Em um primeiro momento, os erros poderiam ser considerados apenas para uma classificação dos estudantes e totalização desses erros e acertos. Observou-se que além desses dados, os erros demonstraram uma lógica própria dos estudantes aplicada na resolução das divisões. Tais estudantes utilizaram conhecimentos anteriormente consolidados na resolução de operações como adições e subtrações e os generalizaram para outras resoluções. Dessa forma, na operação 2050÷45, a que apresentou um nível de dificuldade maior, pela presença de dois algarismos no divisor e o zero enquanto elemento a ser considerado na divisão, foram identificadas formas de resolução em comum entre os estudantes. Um total de 17% de estudantes da terceira série dividiu as unidades e as dezenas separadamente, como os exemplos de TAH (8;6), EDA (9;2) e GAP (8;7).

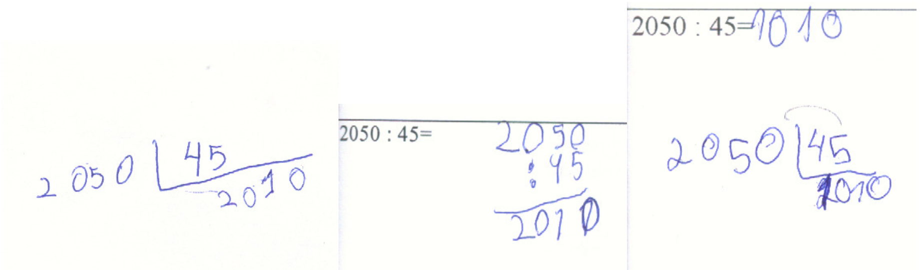


Figura 25: Exemplo de resolução incorreta da divisão, em que as unidades e as dezenas do divisor são consideradas separadamente

Observa-se que os três alunos fizeram a divisão somente pela unidade do divisor e iniciaram pela unidade do dividendo, então procederam 0÷5=0, 5÷5=1, 0÷5=0 e 2÷5=2 e, como total obtiveram 2010 e encerraram a divisão. JOA (10;8) da quinta série apenas realizou a divisão pela dezena do divisor e iniciou pela unidades de milhar, então resolveu: 20÷4=5, depois 5÷4=1 e 10÷4=2, totalizando 512.

Tais dificuldades podem ser classificadas da ordem do primeiro fator a ser considerado na divisão, já explicitado anteriormente, o da ordem diferenciada da esquerda para a direita. No caso de LUA (11;0, quinta série) há um nível anterior na compreensão da divisão. O estudante centrou-se em aspectos afirmativos, visto que realizou a multiplicação, ao invés de dividir os elementos. Começou o cálculo por 2x4=8 e 2x5=10, então escreveu 810 no quociente. Em seguida multiplicou 4x5 e registrou o total 20 e realizou a subtração.

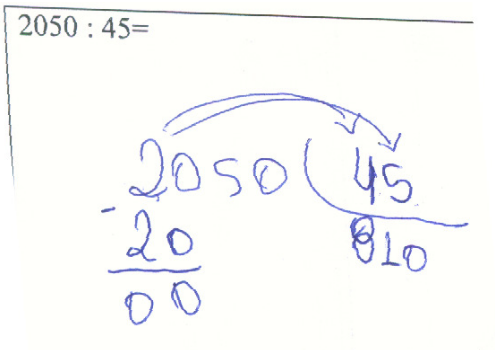


Figura 26: Exemplo de resolução incorreta da divisão, por meio de multiplicações

O segundo fator de dificuldades apontado, o de considerar simultâneos cálculos de subtrações e multiplicações também foi observado, bem como o de estimar qual é o algarismo do quociente. Nesse sentido, observa-se que os estudantes que utilizaram estratégias com cálculos de apoio a tais estimativas foram os que apresentaram um número maior de acertos. Um exemplo é o de FAB (11;1, da quinta série, nível IIA na prova de Multiplicação e associatividade multiplicativa), que acertou a operação.

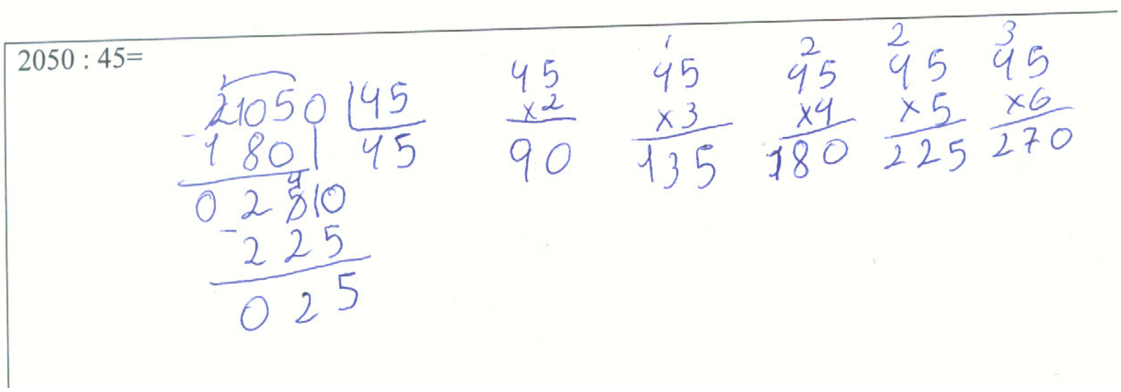


Figura 27: Exemplo de resolução da divisão com cálculos de apoio

Para finalizar, reforça-se a constatação da relação entre os acertos nas resoluções das operações, por meio de cálculos mentais e escritos e os níveis cognitivos apresentados em provas piagetianas. Os testes estatísticos utilizados e a seguir descritos, permitiram afirmar a semelhança na média de acertos das diferentes séries, de acordo com diferentes níveis cognitivos. Portanto, pôde-se acompanhar uma evolução que não dependeu da série em que os estudantes encontravam-se, mas sim de seu nível cognitivo.

5.11 Relações entre as resoluções de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas

Atendendo ao terceiro objetivo da pesquisa buscou-se investigar as relações entre as resoluções de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Primeiramente os dados da pesquisa foram organizados em tabelas em que constavam a série, a operação aritmética e os resultados dos cálculos e dos níveis de construção nas provas piagetianas de cada um dos estudantes. A seguir, seguem os exemplos das tabelas utilizadas na adição/subtração e na multiplicação/divisão.

	Adição				Subtração				1
aluno	mental	estratégia[11]	escrita	estratégia	mental	estratégia	escrita	estratégia	
TAH	43+6=☑	cof	47+15=☑	Car-	43-7=☒	con	80-26=☒	Car-	IB
5☑	55+7=☑	cof	239+106=☑	Car-	52-28=☒	ma	104-28=☒	Car-	5+
7☒	76+49=☒	con	4329+3783= ☑	Car-	51-16=☒	ma	4329-3783=☒	Car-	0-

☑ acertos
☒ erros
Prova 1- Igualação de quantidades e Construção de diferenças

	Multiplicação				Divisão				2
aluno	mental	estratégia	escrita	estratégia	mental	estratégia	escrita	estratégia	
DAN	18x2=☒	do	255x18=☒	Car-	66:3=☑	do	2050:45=☒	div	IA
2☑	31x3=☒	do	492x7=☒	Car-	120:4=☑	ma	288:12=☒	div	0x
10☒	57x5=☒	ma	134x9=☒	Car-	81:9=☒	do	7054:9=☒	div	2:

☑ acertos
☒ erros
Prova 2- Multiplicação e associatividade multiplicativa

[11] Estratégias utilizadas:
Cálculos mentais (adição e subtração): COF (contagem nos dedos); COF (contagem mental a partir de um algarismo); 1010 (decomposição); N10 (decomposição); MA (algoritmo mental); C10 (formação de dez unidades); AUTO (cálculos automáticos)
Cálculos mentais (multiplicação): DO (operações diferentes); MA (algoritmos mentais); AUTO (cálculos automáticos)
Cálculos mentais (divisão): DO (operações diferentes); MA (algoritmos mentais), AUTO (cálculos automáticos)
Cálculos escritos (adição, subtração e multiplicação): CAR+ (tabulando com uma escrita contínua das operações); CAR- (uso de algoritmos); AUTO (cálculos automáticos)
Cálculos escritos (divisão): DIV (algoritmo específico da divisão); DO (operações diferentes); AUTO (cálculos automáticos)

Os dados das tabelas foram então analisados estatisticamente e obtiveram-se os resultados descritos a seguir na Tabela 09, considerando os valores médios de acertos e seus respectivos desvios padrões para a terceira e quinta séries, nas operações de adição e subtração, em situações de cálculos mentais e escritos, nos diferentes níveis da prova piagetina de igualação de quantidades e construção de diferenças.

Tabela 09- Tabela com a média de acertos para as operações de adição e subtração e diferentes níveis na prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças.

			Média de acertos		
Série	Operação	Cálculo	Nível IB	Nível IIA	Nível IIB
3ª Série	Adição	Mental	2,00±0,74	2,17±0,75	2,50±0,71
		Escrita	2,58±0,67	2,50±0,84	3,00±0,00
	Subtração	Mental	1,17±1,19	2,50±0,84	2,00±1,41
		Escrita	1,50±1,38	1,67±1,21	2,50±0,71
5ª Série	Adição	Mental	1,50±0,71	2,33±0,82	2,50±0,52
		Escrita	2,00±0,00	2,67±0,51	2,83±0,39
	Subtração	Mental	2,00±0,00	1,33±1,37	1,17±0,83
		Escrita	1,00±0,00	1,50±0,84	2,25±0,97

Compararam-se os valores obtidos na terceira e quinta séries para cada um dos níveis (IB, IIA e IIB), com cada uma das operações de adição e subtração, em cálculos mentais e escritos e admitindo-se a hipótese nula com 90% e 95% de certeza, pode-se afirmar que os resultados não diferiram. Assim, por exemplo, um estudante da terceira série do nível IB obteve resultados estatisticamente semelhantes aos de estudantes do nível IB da quinta série. É possível constatar nessa tabela que, no nível IB, o desvio padrão é maior (maior oscilação na quantidade de acertos) e o número de acertos é menor; dados opostos ao do nível IIB, em que o desvio padrão é menor (concentração das quantidades de acertos) e o número de acertos é maior.

A Tabela 10 apresenta os dados das operações de multiplicação e divisão para a terceira e quinta séries, também considerando os valores médios de acertos e os seus respectivos desvios padrões. Nesse caso, foram identificados os níveis IA, IB e IIA na prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa, para a terceira série e os níveis IB, IIA e IIB para a quinta série. Portanto, foram comparados os níveis em comum IB e IIA.

Tabela 10- Tabela com a média de acertos para as operações de multiplicação e divisão e diferentes níveis na prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa

			Média de acertos			
Série	Operação	Procedimento	Nível IA	Nível IB	Nível IIA	Nível IIB
3ª Série	Multiplicação	Mental	0,63±1,19	2,00±1,15	1,43±0,98	
		Escrita	0,38±0,74	1,25±0,96	0,71±0,95	
	Divisão	Mental	0,38±0,74	1,00±0,82	1,57±1,13	
		Escrita	0,00±0,00	0,75±0,96	0,86±0,90	
5ª Série	Multiplicação	Mental		1,54±0,88	1,54±0,24	2,33±1,15
		Escrita		0,50±1,00	1,69±1,11	2,00±0,00
	Divisão	Mental		1,75±0,96	1,62±1,12	2,67±0,58
		Escrita		0,75±0,50	0,92±0,86	1,00±1,00

Com 90% e 95% de certeza pode-se afirmar que no teste da hipótese nula, os resultados da multiplicação com cálculo mental, multiplicação com cálculo escrito e divisão com cálculo mental são semelhantes nos níveis testados. Apenas no caso da divisão escrita, 90% de certeza pode confirmar a semelhança.

Após a confirmação de que as médias de acertos não diferiram significativamente em cada um dos níveis das provas piagetianas, foi possível prosseguir a análise estatística dos dados. O passo seguinte foi o de agrupar as séries e continuar a análise dos participantes em cada um dos níveis, os seus valores médios de acertos e desvios padrões. No Gráfico 21 temos os valores médios de acertos, representados pelos símbolos geométricos, para os cálculos de adição e subtração, pertencentes aos estudantes nos níveis IB, IIA e IIB e seus respectivos desvios padrões, representados pelo traço de mesma cor que o símbolo. Podemos verificar que, à medida que alteram os níveis cognitivos, há uma melhora no valor médio de acerto daquele grupo, com exceção da subtração com cálculo mental.

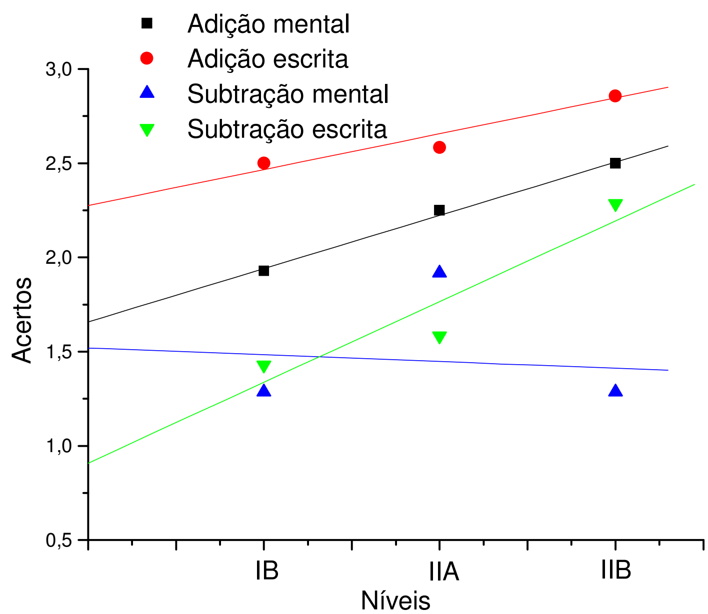


Gráfico 21: Distribuição dos valores médios de acertos e desvio padrão na adição e na subtração, em cada um dos níveis da prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças

De uma forma geral, há um aumento de 10% de acertos nas adições e nas subtrações em cada mudança de nível de respostas na prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças. Os valores desses aumentos, nos níveis, para cada uma das operações investigadas são:

Adição com cálculo mental	9,7%
Adição com cálculo escrito	6,3%
Subtração com cálculo escrito	14,3%

A subtração com cálculo mental não apresentou aumento no percentual de acertos considerando-se a mudança dos níveis da prova piagetiana. Como já fora destacado na página 106 os estudantes da quinta série apresentaram resultados inferiores aos da terceira série nessa operação, pela utilização incorreta dos cálculos automáticos.

Por meio do Gráfico 22 foram expressos os valores médios e desvios padrões para as operações de multiplicação e divisão. Verifica-se, nesse caso, que o aumento das médias de acertos entre os níveis cognitivos é mais acentuado, cerca de 16,7%. De forma mais detalhada em termos de cada uma das operações investigadas, temos o percentual de aumento para:

Multiplicação com cálculo mental	16,9%
Multiplicação com cálculo escrito	18%
Divisão com cálculo mental	23,7%
Divisão com cálculo escrito	10,7%

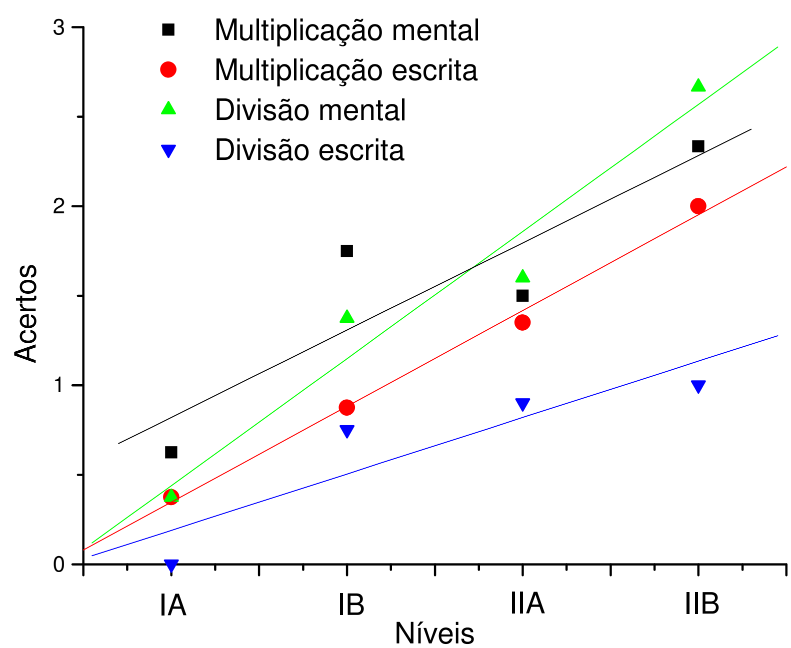


Gráfico 22: Distribuição dos valores médios de acertos e desvio padrão na multiplicação e na divisão, em cada um dos níveis da prova de Multiplicação e associatividade multiplicativa

Diante dos resultados encontrados na pesquisa, pode-se afirmar que existe uma correlação entre a resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis cognitivos apresentados em provas piagetianas. Evidencia-se maior número de acertos em estudantes que apresentaram níveis superiores em tais provas, independente da série que estudam. Também foram observadas correlações entre os níveis cognitivos e as estratégias de resolução dos cálculos, sendo que estudantes que apresentaram níveis mais avançados de compreensão das relações entre as adições e as subtrações e das situações de associatividade da multiplicação também apresentaram estratégias de cálculos mais sofisticadas, como as de decomposição dos algarismos e de recuperação automática dos cálculos. Tais estratégias estiveram presentes principalmente nas situações de cálculos mentais, em que pode-se afirmar que há pouca exigência sistemática na escola. Da mesma forma, foram observadas relações entre os resultados das provas piagetianas. Os estudantes da terceira e quinta série apresentaram níveis superiores (65% e 55% respectivamente) ou equivalentes (35% e 45%) na prova da Igualação de quantidades e construção de diferenças em comparação à prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa. Desse fato decorre o entendimento da construção de interdependências entre as operações aritméticas de adição e de multiplicação. Em níveis em que as crianças iniciam a compreensão das relações entre adições e subtrações relativas, como no nível IIA e alcançam além desse fato, a construção de diferenças, como no nível IIB, observa-se a correspondência desses níveis na prova da Multiplicação. Dito de outra forma, grande parte dos estudantes com níveis IIA e IIB na prova de Igualação de quantidades e construção de diferenças apresentaram também os níveis IIA e IIB na prova de Multiplicação e associatividade multiplicativa. No entanto, em casos de estudantes no nível IB, na prova da Igualação, a maior ocorrência foi a de nível IA na prova de Multiplicação. No caso das resoluções escritas, nota-se maior influência dos algoritmos comumente ensinados na escola, no entanto, tal aprendizagem não apresentou-se tão simples e imediata, constatações presentes nas subtrações, multiplicações e divisões, fatos a serem discutidos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 6

Discussão dos resultados

Fonte: Quino, 1993

Havia um homem[12]
que aprendeu a matar dragões e deu tudo que possuía
para se aperfeiçoar na arte.

Depois de três anos
ele se achava perfeitamente preparado mas,
que frustração, não encontrou
oportunidades de praticar sua habilidade.
(Dsuang Dsi)

Como resultado ele resolveu
ensinar como matar dragões.

(René Thom)

Ensinar como matar dragões...

A sociedade moderna não será operacional com um instrumental intelectual obsoleto que ainda ensine a matar dragões na área matemática; a necessidade é de uma matemática de hoje, que ensine as crianças e os jovens a lidarem com os problemas reais (D'Ambrosio, 2007). Há uma mescla de interpretações quando o tema é o de resolução de

[2] In: D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática-da teoria à prática**. Campinas SP: Papirus, 15ª edição, 2007, p.30

cálculos mentais e escritos e o uso de algoritmos nas escolas; o *ensinar a matar dragões* é uma dessas interpretações. Uma parcela da literatura acredita que as resoluções de cálculos e o desenvolvimento dos algoritmos nas operações aritméticas demandam apenas treinos e cópias de procedimentos passados na lousa pelo professor. Conclui-se, portanto, que há pouca demanda cognitiva, como a visão epistemológica do platonismo e do positivismo lógico fazem acreditar. Nesses termos, o aprender é sinônimo de apenas exercitar, torna-se algo destituído de construção pelas crianças ou adolescentes. Piaget já posicionava-se em obras como "Psicologia e Pedagogia" (1977) e "Para onde vai a Educação?" (1996), afirmando que ensinam-se as matemáticas mais modernas por intermédio de métodos, os mais tradicionais.

É uma visão de ontem para aspectos da matemática que são reais e atuais, pois a vida em sociedade exige que cálculos sejam feitos e sua aprendizagem não é simples ou imediata. Nesse caso, há um desconhecimento das atuais pesquisas que evidenciam as diferentes estratégias de resolução dos cálculos, dos processos metacognitivos presentes e das teorias que já demonstraram o caráter construtivo do conhecimento e da aprendizagem. Diante desse caráter construtivo, colocam-se os problemas centrais da presente pesquisa que buscou investigar, primeiramente, como se apresentam as estratégias das crianças em cálculos mentais e escritos em diferentes séries do Ensino Fundamental e, também, quais relações podem ser estabelecidas entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas.

Para tanto, foi proposta aos estudantes, inicialmente, a realização de operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com cálculos mentais e cálculos escritos. A partir desses dados, foram analisados os acertos e os erros dos estudantes nos cálculos e as estratégias utilizadas na resolução das operações aritméticas básicas. A seguir, foram identificados os diferentes níveis de construção do conhecimento matemático dos estudantes em provas piagetianas de Igualação de quantidades e construção de diferenças e de Multiplicação e associatividade multiplicativa. Em posse desses dados, foi possível investigar as relações entre as resoluções dos cálculos e os níveis de construção das operações aritméticas.

Diante do primeiro problema, os resultados da pesquisa revelaram que a escolha das estratégias para a resolução dos cálculos mentais e escritos estiveram relacionadas à complexidade desses cálculos. Em situações mais simples, que exigiam apenas a adição ou mesmo a subtração de unidades, os estudantes utilizaram estratégias mais elementares, como as de contagem nos dedos (COF) e contagem mental da sequência numérica (CON), o que garantiu um percentual mais elevado de acertos. Quando os cálculos exigiam adições nas unidades e nas dezenas, observou-se a utilização de estratégias mais elaboradas como as de algoritmos mentais (MA), de decomposição de parcelas (N10 e 1010) e a de recuperação automática dos resultados (AUTO). A adição foi a operação em que houve uma maior diversidade no emprego de estratégias, uso de estratégias mais elaboradas e maior número de acertos.

No caso da subtração com cálculo mental, a estratégia de algoritmos mentais (MA) foi a mais utilizada e a que apresentou a maior incidência de cálculos incorretos. Os resultados da multiplicação com cálculos mentais indicaram a estratégia mais utilizada, como a de algoritmos mentais (MA), e o percentual de acertos foi superior ao dos cálculos escritos pela influência do multiplicador proposto, no caso mais simples por um algarismo como 2, 3 e 5. Para as divisões com cálculos mentais, os resultados apontaram a utilização da estratégia de recuperação automática dos resultados (AUTO), para a quinta série, como uma estratégia que permitiu mais acertos. No caso da terceira série, a estratégia de algoritmos mentais (MA) foi a mais utilizada.

De forma geral, foi observado que, apesar de os estudantes terem pouco incentivo nas resoluções por meio do cálculo mental, tendo em vista que na proposta curricular da região oeste do Paraná não há menção sobre essa forma de resolução, eles apresentaram mais acertos e estratégias mais elaboradas do que as escritas. Disso origina-se a indagação da influência positiva que um ensino mais sistemático, que promova tais elaborações pessoais, possa desencadear. Observou-se que os estudantes criaram estratégias próprias, como as de contagem nos dedos, as de montagem de algoritmos mentais baseados nos cálculos escritos que, apesar de não serem propriamente cálculos mentais, permitem a autoria de caminhos para a resolução de um mesmo cálculo. Tal diversidade de caminhos precisa ser discutida em sala de aula, além dos mecanismos próprios do cálculo mental, como a realização de estimativas e aplicação das propriedades das operações aritméticas (associativa e de decomposição).

Em situações de cálculos escritos, a estratégia mais utilizada é a de uso de algoritmos (CAR- e DIV) para a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, evidenciando a forte influência do ensino desses algoritmos no espaço escolar. De forma geral, constatou-se que os estudantes não conseguiram visualizar e aplicar uma variedade no uso de estratégias na resolução das operações com cálculos escritos, além da utilização dos algoritmos convencionais. De acordo com Kamii e Joseph (2005), a tradição pedagógica ao valorizar apenas essa utilização, desenvolve nos estudantes a capacidade de escrever respostas certas, usadas automaticamente, com o objetivo de agradar aos adultos.

Ao nos depararmos com os vários exemplos de resolução das operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com cálculos mentais e escritos, expostos no decorrer dessa pesquisa, pode-se afirmar a presença diante da própria história da construção do conceito de número e suas inúmeras formas de registros, além da representação das quantidades ao longo dessa história. Tais processos de representação estão envoltos em um universo simbólico que precisa ser compreendido e utilizado com maior diversidade pelas crianças. Assim, entende-se que, na aprendizagem de conceitos matemáticos, existem diferentes sentidos das representações dos objetos matemáticos, e essa diversidade de sentidos precisa ser apresentada, discutida e refletida em sala de aula para que o objeto não seja confundido com suas representações, e seja reconhecido em cada uma delas (Brousseau, 1986; Duval, 1993; Charnay, 1994; D'Amore, 2005). Na realização das operações de adição, uma das primeiras conquistas infantis, por exemplo, foram observadas diferentes representações e sentidos que os estudantes participantes da pesquisa utilizaram para resolvê-las: contagem nos dedos, contagem mental, contagem escrita, decomposições e algoritmos. Mesmo no uso dos algoritmos não foram observados processos únicos de resolução, diversidade que precisa ser considerada em sala de aula.

Logo, ao aprenderem matemática, os alunos são colocados diante de um mundo conceitual, simbólico e, sobretudo, representativo. Eles terão de decidir, então, qual uso farão do mediador simbólico, isto é, do registro de representação escolhido ou imposto pelas circunstâncias sociais. É a capacidade de utilizar vários registros de representação simbólica que influencia a construção de conceitos. Assim, diante dessa capacidade D´Amore (2005) retoma os termos *noesis* como a aquisição conceitual de um objeto, e *semiosis* como a representação realizada por meio de signos. Os estudantes, ao decidirem mudar o registro semiótico, também devem mudar a representação semiótica utilizada. São aspectos indissociáveis do processo de aprendizagem, visto que é próprio do pensamento humano o uso de diversos registros de representação semiótica. Além disso, a criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos demarcam o progresso do conhecimento em várias áreas, dentre as quais a matemática.

Durante a realização da pesquisa, observou-se que os estudantes utilizaram a representação com funções diferenciadas: a de semioticidade e a de reflexão sobre os fins e meios propostos, o que define a função instrumental da representação (Inhelder & Cellérier *et. al.*, 1996). Para os autores, os dois aspectos são indissociáveis e complementares: "concorrem para a formação de instrumentos cognitivos que se tornam, para o sujeito, *objetos que ajudam a pensar* (*objects-to-think-with*) (p. 210). Dessa forma, os estudantes acompanharam a realização dos cálculos com gestos, imagens e com a própria linguagem. Os gestos mais observados foram de contagem nos dedos das mãos e pés e apontar com o lápis os algarismos que deveriam ser calculados. Sempre tais gestos foram acompanhados da linguagem: "zero não dá para emprestar, peço pro oito, quarenta e sete, quarenta e oito (...)". Em relação às imagens, ressalta-se sua importância no cálculo mental, pois os estudantes dificilmente conseguiram recuperar automaticamente as respostas, e a estratégia mais efetiva foi a de montagem dos algoritmos mentais, tal como são feitos na resolução em livros e cadernos. O acesso às imagens mentais foi possível pelo acompanhamento das respostas que os estudantes forneciam quando realizavam os cálculos e eram solicitados a explicar como chegaram aos resultados desses cálculos. Quanto ao segundo aspecto da representação, os estudantes também a utilizaram para antecipar, planejar e conferir seus cálculos; sua incidência, portanto, ocorreu tanto sobre os caminhos a tomar quanto sobre os resultados aos quais conduziram. Na resolução das divisões, foi imprescindível a utilização das representações para o planejamento dos quocientes mais adequados aos cálculos.

A diversidade de registros semióticos relaciona-se à construção das operações, às possibilidades e às necessidades. Nesse sentido, Piaget (1983/1985) tem por hipótese que as construções operatórias resultam de uma evolução mais geral e exigem a síntese do possível e do necessário. O possível refere-se aos diversos modos de procedimento, gerando "esquemas de procedimento" para alcançar certos objetivos; destarte, engendram diferenciações. O necessário refere-se àquilo que não poderia ser de outra maneira;

engendram, portanto, a integração do sistema. Durante a realização da pesquisa, nas situações de igualação de quantidades, observou-se que os estudantes conseguiram criar esquemas de procedimentos dos mais variados, principalmente em situações de interdependência das adições e das subtrações: acrescentar elementos ou retirar elementos e realizar a transferência entre as fileiras. Conseguem manter a integração do sistema, pois os mesmos elementos que são retirados de uma fileira são acrescidos em outra.

Em situações de igualação de quantidades na prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa, foram utilizados procedimentos, pela maioria dos estudantes da terceira série, de forma incorreta e com poucas diferenciações. Quando ao estudante era colocada a seguinte questão: "o carneiro recebeu quatro pacotes com três grãos (4x3) e deve-se dar ao pato a mesma quantidade de grãos, lembrando-se que ele come com pacotes de dois grãos", a maior incidência de respostas foi a de considerar apenas o total de pacotes (4) e, com tateios empíricos, continuar a igualar as quantidades. Apresentaram, consequentemente, dificuldades em manter a integração do sistema, no caso, a multiplicação, ao centrarem-se apenas na igualação dos pacotes e desconsiderarem a quantidade de grãos em cada um deles.

No momento de resolução das operações aritméticas com cálculos mentais e escritos, também foram observadas diferentes possibilidades de composição do possível e do necessário. Em situações de cálculos de adição, foram constatados mais acertos, cálculos mais elaborados e diversificados.

Em situações de resolução de subtrações, multiplicações e divisões, entretanto, os estudantes preocuparam-se em utilizar os algoritmos previamente ensinados e apresentaram mais erros e estratégias menos elaboradas. Tal fato é decorrente de um ensino que pouco privilegia a construção de estratégias pelos estudantes reforçando, assim, o campo das pseudonecessidades ao definirem antecipadamente a única forma de resolução de cada uma das operações aritméticas, o que impõe limitações à abertura de novos possíveis.

Deve-se ressaltar que os registros de representação semiótica analisados na pesquisa não têm existência própria e não são utilizados sempre com a mesma conotação. Nesse sentido, Kamii e Joseph (2005, pp. 25-26) afirmam que os símbolos não representam, é sempre o homem que usa o símbolo para representar sua ideia e, caso esteja em um nível baixo de abstração construtiva, usa símbolos em um nível igualmente baixo. Quando atingir um nível mais alto de abstração construtiva, começará a usar os mesmos símbolos em níveis mais altos. No pensamento empírico, então, é correto dizer que o símbolo + representa a adição. Para as autoras, contudo, essas afirmações estão incorretas, na teoria de Piaget, pois as representações são as ações dos seres humanos sobre os objetos.

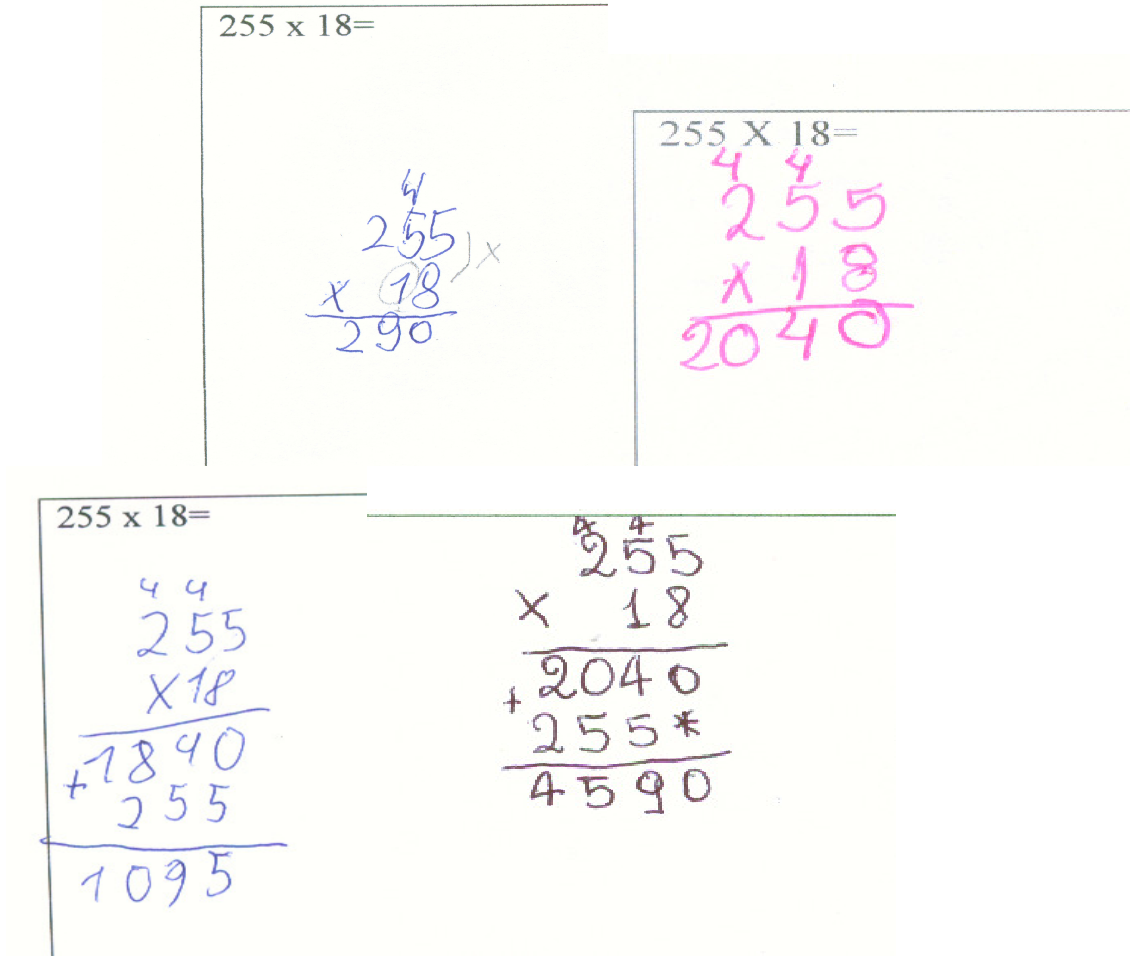
Muitos alunos podem apresentar dificuldades na compreensão dessa abstração em níveis mais altos. Uma das razões dessa dificuldade, apontada por Piaget (1977), reside no fato de o ensino de Matemática envolver uma reflexão sobre as estruturas do pensamento por meio de uma linguagem técnica que comporta um "simbolismo muito particular e exige um grau mais ou menos alto de abstração" (p. 45). Para as crianças, as estruturas de ações e de operações que dirigem seu raciocínio não constituem ainda objeto de reflexão em anos iniciais de escolarização, mas há uma velocidade na associação dessa abstração vinculada a um simbolismo, sem a devida consideração a esse fato. A formação de conceitos foi um tema presente em diversas obras de Piaget e, com maior ênfase em "A formação do símbolo na criança" (1964), fica evidenciado o fato de ser uma construção lenta que remonta aos esquemas sensório-motores, com os primeiros esquemas verbais, evolui para os pré-conceitos, até alcançar os processos operatórios de compreensão das convenções sociais. Entende-se que toda uma gradação é indispensável para passar da ação ao pensamento representativo e uma não menos longa série de transições para a passagem do pensamento operatório à reflexão sobre ele. A última conquista é a passagem dessa reflexão à axiomatização. (Piaget, 1998)

Nessa evolução da conceituação, as abstrações também podem ser diferenciadas: na abstração empírica, a conceituação descreve os dados de observação constatados nas características materiais da ação, e em sua forma reflexiva, a abstração extrai da coordenação da ação "o necessário para construir as coordenações inferenciais que, no nível do conceito, permitem ligar e interpretar esses dados de observação" (Piaget, 1977b, p. 210).

Assim, exige-se um formalismo acentuado já nos anos iniciais de contato com a matemática, no espaço escolar, e a pressa na aquisição desse formalismo ocasiona seguidos fracassos, desmotivações e pouca estimulação de seu caráter de originalidade e construção. Disso decorre que dificuldades na sequência dos encadeamentos e problemas de adaptação em um ponto que a criança apresentar refletirão nas próximas aquisições na área. Tal fato envolve os complexos afetivos reforçados pelas pessoas que cercam a criança e, porventura, poderão bloquear uma iniciação à matemática que poderia ser totalmente diversa (Piaget, 1977). Entende-se que os sentimentos de sucesso ou fracasso resultarão na inibição ou facilitação dos estudantes na aprendizagem da matemática. A estrutura das operações não é afetada (a adição, por exemplo, continuará com as mesmas propriedades); uma criança, entretanto, com reconhecidos sucessos, poderá compreender mais rápido essas propriedades e se interessar em compreender e descobrir novas relações.

Se o ensino dos algoritmos e dos cálculos das operações aritméticas básicas ainda é reduzido à apresentação de fórmulas prontas, mágicas, que funcionam por si só, estamos diante de uma *ilusão pedagógica,* termo adequadamente colocado por Vergnaud (1990), tendo em vista que é uma ilusão acreditar que tal ensino promova a aprendizagem das operações aritméticas. É um entendimento do ensino desvinculado da aprendizagem. Logo, o professor entende que só o fato de ter "ensinado" a forma de resolução de um cálculo, imediatamente todos os alunos "aprenderam" a resolução da mesma forma. Outra *ilusão* é a de acreditar em uma aptidão inata para a matemática. Para Piaget (1977), tal aptidão é relativa à maneira pela qual essa área é ensinada nas escolas e não se confunde com a própria inteligência, pois "todos os colegiais, das mais variadas idades, e de nível intelectual médio ou superior à média, revelaram a mesma capacidade de iniciativa e de compreensão" (p. 14). Outro argumento é que indivíduos com níveis aquém do esperado fornecem maus resultados, mas em todas as áreas, e não especificamente no campo da matemática. Surge, então, a hipótese de que as "aptidões" consistem na capacidade dos estudantes em se adaptarem ao tipo de ensino que lhes é fornecido.

Quando o professor centra-se na forma correta de resolver a operação, realmente a ilusão é a de que todos aprendem da mesma forma, visto como procedem do mesmo modo que o ensinado e fornecem a resposta esperada pelo professor. Quando o professor centrar-se também, por exemplo, nos erros cometidos pelos estudantes, poderá compreender melhor que a aprendizagem dos cálculos não é imediata à sua apresentação. Nesse sentido, os resultados da pesquisa revelaram que, apesar de se tratar da mesma turma de terceira ou de quinta série, a aprendizagem dos cálculos apresenta-se muito diversa. A resolução da operação de multiplicação (255 x 18), com cálculo escrito, no caso, torna-se elucidativa dessa diversidade.



O primeiro exemplo em que o resultado é 290 ilustra a conduta de 22% dos estudantes da terceira série. O segundo exemplo da multiplicação, somente pela unidade, foi observado em 25% dos participantes. No terceiro caso, 12% dos estudantes da terceira série procederam sem considerar a multiplicação pela dezena e registraram 255 ao invés de 2550. O último exemplo ilustra 30% de respostas dos participantes ao resolverem corretamente a operação. A partir desses exemplos, é possível retraçar aspectos da teoria de Piaget, fundamentais na construção do conhecimento matemático.

Voltando-se ao primeiro exemplo, os estudantes utilizaram os conhecimentos anteriores de adição e de subtração e os aplicaram na resolução da multiplicação e, assim, multiplicaram unidade por unidade e dezena por dezena, seguindo a sequência da resolução da adição e da subtração. Tal aplicação também foi observada na resolução das divisões. Dessa forma, realizaram a generalização indutiva, em que há assimilação de novos conteúdos observáveis a um esquema já existente. O universo dos observáveis (resolução das adições e das subtrações) foi ampliado e estendido para além desses efetivamente observados (resolução das multiplicações). Os estudantes constataram pela experiência que "alguns" conteúdos estendem a "todos" os outros conteúdos.

> Ora, numa tal perspectiva, o estudo da psicogênese parece impor a existência de generalizações extencionais (indutivas) fundadas sobre os únicos observáveis (...) quer estas inferências sejam falsas ou corretas, limitam-se a generalizar de "alguns" a "todos" os fatos ou relações constatadas, logo os observáveis a título de conteúdos destas constatações. (Piaget, 1978, p. 220)

Piaget (1984) diferencia esse tipo de generalização, a indutiva, da generalização construtiva, uma vez que, na última, engendram-se novas formas e novos conteúdos, "é dizer, novas organizações estruturais" (p. 188). É o caso da multiplicação, mais complexa que a adição e com quantificações mais numerosas.

A generalização construtiva utiliza-se de diferenciações e integrações nesse processo de construção do novo (multiplicação) a partir do que é conhecido (adição). Desse modo, os estudantes apresentaram dificuldades nas diferenciações e integrações, pois não existe uma simples sobreposição das novas formas e dos novos conteúdos, mas sim uma derivação, em parte, do que já é conhecido para a criação de novidades. No processo de construção de novidades está um dos mecanismos que assegura as construções de novidades pelos sujeitos: a abstração reflexiva, termo designado por Piaget (1977a) que comporta dois aspectos inseparáveis. O primeiro refere-se ao "*réfléchissement",* uma projeção para um patamar superior do que foi retirado do patamar inferior. O segundo refere-se a uma "*réflexion",* uma ação mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior do que foi transferido do patamar inferior; há sempre, portanto, um resgate das conquistas anteriores. "Daí resultam novas combinações que podem conduzir à construção de novas operações montadas sobre as precedentes, o que constitui a marcha habitual do progresso matemático (exemplo na criança: uma reunião de somas engendra uma multiplicação)" (Piaget, 1983, p. 42).

Esse processo, enriquecido pela generalização construtiva e assegurado, então, pela abstração reflexiva, não tem um ponto de parada ou término e, aqui, a imagem do esquema em espiral do desenvolvimento cognitivo proposto por Piaget, a respeito da equilibração majorante, pode ser destacada. No processo de construção do conhecimento, aliado aos fatores de ordem biológica, social e de experiência física e lógico-matemática, está o processo de equilibração, que leva de certos estados de equilíbrio aproximado para outros, qualitativamente diferentes, passando por muitos desequilíbrios e re-equilibrações. Para Brousseau (1986), os diferentes sentidos do conhecimento matemático derivam primeiramente da concepção de que o conhecimento se constrói por meio da ação de um aluno diante de situações desafiadoras, que lhe provoquem desequilíbrios. Assim, diante de situações novas, muitas vezes os conhecimentos já adquiridos pelo aluno mostram-se insuficientes para enfrentar os novos problemas. O aluno, então, utiliza seus conhecimentos anteriores, submete-os à revisão, modifica-os, rejeita-os, completa-os, redefine-os ou descobre novos contextos de utilização. A partir de tais considerações, é possível ressaltar sua semelhança com o posicionamento teórico de Piaget e todo o processo da equilibração (1977b), em que estão presentes desequilíbrios e re-equilibrações, e com a dialética (1996) e a abstração reflexiva (1977a), ao ressaltar os passos proativos e retroativos no desenvolvimento cognitivo. Brousseau também utiliza o termo “aprendizagem por adaptação” quando o aluno é desafiado a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de resolução de um novo problema.

Bachelard (1996) afirma, também em consonância com o posicionamento de Piaget, que os conhecimentos não são empilhados, acumulados, mas passam de estados de equilíbrio a estados de desequilíbrio, no transcurso dos quais os conhecimentos anteriores são questionados. Nessa reorganização, os novos saberes podem questionar os saberes anteriores, por exemplo, o estudo dos decimais deveria levar o aluno a questionar a ideia de que a multiplicação aumenta os valores, ideia que não é válida nos decimais. Para Bachelard (1996), os alunos trazem para a sala de aula conhecimentos empíricos já constituídos e sedimentados pela vida cotidiana, e será necessário considerá-los e até mesmo derrubá-los na aquisição de conceitos mais científicos. Nesse sentido, ele introduz o conceito de obstáculos epistemológicos, que sempre estiveram presentes no desenvolvimento da Ciência e causaram lentidões e conflitos.

> ... é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 1996, p. 17)

Ao transferir para a didática da matemática essas considerações sobre os obstáculos epistemológicos, Brousseau (1983) define três origens em que eles podem ocorrer no espaço escolar: a origem ontogenética surge das limitações das capacidades cognitivas dos alunos; a origem didática deriva das escolhas dos sistemas de ensino; por último, a origem epistemológica relaciona-se a um saber mal adaptado. A possibilidade de uma aplicação pedagógica do conceito de obstáculo epistemológico foi proposta por Astolf (1994) em três etapas. Na primeira, o professor realiza a *localização do obstáculo* e, assim, identifica as representações dos alunos e os mobiliza a expressarem-nas de forma escrita ou gráfica, possibilitando a tomada de consciência dos obstáculos. Na etapa seguinte, a *fissuração do obstáculo,* prevê a produção de desequilíbrios dos conceitos, conflitos colocados por diferentes pontos de vista dos sujeitos. Por fim, a *superação do obstáculo,* em que novos conceitos são elaborados com a presença da ação docente.

Ao considerarmos o segundo exemplo de resolução da multiplicação e alguns exemplos da resolução da divisão, poderíamos afirmar que 25% dos estudantes apresentam erros no cálculo da operação e se esquecem de multiplicar ou dividir pela dezena. O que ocorre não se reduz a erros de cálculo ou "esquecimentos". Seria como acreditar que, no campo das resoluções de cálculos mentais e escritos, estar-se-ia diante de aprendizagens que não necessitem de processos construtivos, são apenas, portanto, técnicas a serem memorizadas. Os resultados da pesquisa não permitiram identificar que obstáculos epistemológicos originaram os erros ou esquecimentos dos estudantes. Constatou-se que a utilização correta e incorreta desses algoritmos ensinados no espaço escolar esteve relacionada ao nível de construção das operações aritméticas. Tal afirmação remete ao segundo problema inicialmente proposto para investigação.

As relações entre a resolução dos cálculos e os níveis de construção das operações aritméticas foram identificadas em diferentes situações. Dessa forma, pode-se afirmar que os níveis evolutivos refletem na resolução dos cálculos. Primeiramente, pode ser destacado que o maior número de acertos nas resoluções dos cálculos foi de estudantes que se encontravam nos níveis IIA e IIB nas provas piagetianas de Igualação de quantidades, construção de diferenças e de Multiplicação e associatividade multiplicativa. No primeiro caso, propõe-se a investigação das interdependências entre as adições e as subtrações, e os estudantes que alcançam o nível IIA já iniciam a compreensão dessa interdependência e realizam as adições e as subtrações relativas, ao transferirem elementos entre as colunas. Como os estudantes alcançam a identidade dos contrários no nível IIB, os mesmos elementos retirados de um grupo são acrescentados em outro grupo, e a construção de diferenças é compreendida. Dessa forma, pode-se afirmar que alcançaram a compreensão da operação da adição. Segundo Piaget, a adição só é compreendida em termos operatórios quando vai além de enumerações verbais e envolve o mecanismo geral de igualação de diferenças: consegue-se fazer repetir 2+2=4, 2+3=5, 2+4=6 etc, mas só se obtém uma assimilação real se o sujeito é capaz de conceber uma adição, da qual 6 como uma totalidade englobando as parcelas 2 e 4, a título de partes, e de situar as diversas combinações possíveis num grupo de composições aditivas (Piaget, 1981, p.261).

Constatou-se também, na pesquisa, que os estudantes, em níveis evolutivos anteriores aos níveis IIA e IIB, logo, em fases de construção da operatoriedade, apresentaram formas incorretas de resolução da subtração. O fato mais observado na terceira série foi o dos estudantes centrarem-se nos aspectos positivos dos objetos, nas afirmações mais do que nas negações; centrando-se, então, nas adições, conseguiram resolvê-las com mais acertos que nas subtrações, como já fora apresentado em pesquisas de Piaget (1974b), Nunes & Bryant (1997), Kamii (1995) e Kamii & DeVries (2001). Dessa forma, mesmo em situações em que eram solicitadas operações de subtração, os estudantes resolveram por meio da adição. Tais erros não podem ser reduzidos a erros de cálculo na subtração, solucionados apenas com um treino maciço em como resolvê-lo. Tal medida não seria suficiente para a compreensão da operação, visto que as negações são construídas pelos estudantes por meio de um processo mais demorado e complexo, dada sua natureza formal. Progressivamente, a negação é integrada ao sistema operatório, onde está presente principalmente a reversibilidade do pensamento, resultando na compreensão de que a escolha da aplicação de um sistema implica na não aplicação de outro sistema, consideração essencial para a compreensão das interdependências entre as operações (Piaget, 1996).

No caso da prova da Multiplicação e associatividade multiplicativa, os estudantes no nível IIA já compreendem a relação entre todo, partes e elementos e iniciam a relação multiplicativa e associativa. No nível IIB, ocorre a antecipação da determinação de que um mesmo todo pode ser distribuído em continentes diferentes, cujo número está em função inversa ao de seus contidos. Assim, os estudantes adquirem a capacidade de realizar uma compensação e uma coordenação de variáveis (multiplicando, multiplicador e produto), com a conservação do todo. Para Granell (1983), essa capacidade de compensação entre variáveis é uma das aquisições fundamentais para a compreensão da multiplicação. Outra aquisição fundamental é a presença do operador multiplicativo que, segundo a autora:

> Enquanto que na soma podemos adicionar sucessivamente 2+2+2+2 e chegar a um resultado final sem levar em conta o número de vezes (número de operações) que se tenha realizado na ação de acrescentar, na multiplicação será necessário levar em conta o número de conjuntos equivalentes que se tem e este número de conjuntos equivalentes representa por sua vez o número de ações, de operações, realizadas; tem-se portanto um operador que nos indica o número de vezes que se repete um determinado conjunto e que se situa pois, como uma variável de nível superior enquanto que representa o número de operações com conjuntos e não só com elementos (Granell, 1983, p. 133).

Outro aspecto que pode ser destacado da relação entre a resolução de cálculos e a construção das operações aritméticas é a utilização de estratégias mais elaboradas por estudantes em níveis como IIA e IIB nas provas piagetianas investigadas. Observa-se também que, nesses níveis, os estudantes utilizam os cálculos das operações como ferramenta para a resolução de situações das provas piagetianas, transferindo, dessa forma, a aprendizagem dos cálculos para novas situações, de forma adequada, principalmente para antecipar os resultados e planejar o que deve ser feito no momento. Como exemplo, a situação em que foi solicitado aos alunos que igualassem três conjuntos com diferentes quantidades de elementos 1/5/9, e os estudantes já calculavam a adição de 1+5+9 e dividiam o total 15 em três colunas. Uma posição qualitativamente diferente de estudantes do nível IB que, por meio de adições e subtrações de elementos, acrescentam e retiram quantidades sem ao certo anteciparem qual a quantidade exata.

Por conseguinte, os estudantes, ao utilizarem a resolução das operações como ferramenta em novas situações, como fora observado na pesquisa, desenvolveram o conhecimento matemático em um nível sintático e semântico. Como diferencia Charnay (1994), a construção em um nível sintático (interno) permite a compreensão de uma determinada noção e, em um nível semântico, permite que o estudante diferencie o tipo de problema que o nível interno resolve e quais não consegue resolver. Pode-se acrescentar que, além de realizar tal diferenciação, o estudante aplica corretamente a noção para resolver a situação com a qual se defronta. Conforme afirma Brousseau (1986), ele deve ser capaz não somente de repetir ou de refazer, mas também de ressignificar em situações novas seu conhecimento, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas.

Piaget (1996) destaca, nessa capacidade para resolver novos problemas, o processo dialético. É definido, de maneira geral, como o aspecto inferencial do processo de equilibração, do processo de construção de conhecimentos, que origina a formação de estruturas. Consiste nas implicações entre meios e fins, entre regras ou ações, em que se pode completar ou substituir as que são conhecidas por outras a experimentar, com antecipação de resultados e manifestação de suas razões em caso de problemas novos para resolver e problemas a ultrapassar. O que é retirado das estruturas, sem modificações ou enriquecimentos, envolve as inferências discursivas e o aspecto causal. Logo, pode-se ainda definir que o *aspecto causal* é caracterizado pela efetuação das operações e as reações a seus resultados constatados por leituras pseudoempíricas dos acertos e dos erros.

A superação desse aspecto causal deriva de construções progressivas e cada vez mais ricas, que se reorganizam e seguem por vários patamares até alcançarem a formalização, mas não são pré-formadas e remontam até as organizações nervosas e sensório-motoras. Tais estruturas lógicas avançam para a possibilidade de realização de operações sobre operações e pode-se falar, nessa etapa, em operações lógico-matemáticas autônomas e bem diferenciadas das ações matemáticas com sua dimensão causal (Piaget, 1971).

Por fim, tal como as inquietações de Piaget:

> Como explicar que a construção de relações novas, ao longo dos processos de equilibração, leve a resultados dos quais a necessidade interna parece supor que eram pré-formados ou predeterminados nas situações anteriores dentro das quais o sujeito não as percebia ainda, ou simplesmente não tomava ainda consciência delas? Em outras palavras, a necessidade final só consiste em levantar o véu que impedia de atingi-la desde o início, ou ela se acompanha de um passo retroativo que enriquece, mas somente depois, o que era inicialmente somente elaboração progressiva de novidades reais e produtivas? (Piaget, 1996, pp. 11-12)

A hipótese da presente pesquisa considerava a interdependência entre as operações aritméticas. Desse modo, acreditava-se inicialmente que crianças com níveis que apresentam as adições e as subtrações relativas compreenderiam os processos associativos da multiplicação, da divisão e se justificariam corretamente nos cálculos mentais e escritos. Os resultados da pesquisa permitiram compreender essas relações entre as operações aritméticas e confirmar tal aspecto de interdependências.

De acordo com o que grande parte das pessoas acredita, pode-se considerar a multiplicação como uma operação mais complexa que a adição, e deve ser inserida no currículo escolar após as crianças dominarem os cálculos aditivos e subtrativos. As afirmações estão corretas; outras considerações, contudo, merecem destaque. Pode parecer, em um primeiro momento, como alertara Piaget, que essas operações já estão predeterminadas nas crianças e torna-se suficiente aguardar que fiquem conscientes com o passar dos anos. Para o autor (1996, p. 201), “nenhuma ação ou operação existe em estado isolado, daí as implicações que as ligam a outras e sem que isso exija a preformação dessas ligações no espírito do sujeito”.

A multiplicação compreende relações mais complexas que a adição, apesar de não poder ser considerada uma construção isolada: alcança-se a primeira e depois chega-se à segunda. Os resultados da pesquisa apontaram que os estudantes construíram essas operações de forma indissociável e paralela. Em níveis iniciais de compreensão da adição e da subtração, níveis IA e IB (fase da adição e subtração simples), em momentos que os estudantes ainda estão vinculados às constatações materiais/físicas de acrescentar ou retirar elementos das fileiras, torna-se muito difícil a compreensão da relação entre as variáveis multiplicando, multiplicador e produto. Observou-se que, ao nível IB na prova de Igualação de quantidades, correspondeu o nível IA na prova da Multiplicação. Já em níveis em que os estudantes alcançaram a compreensão das adições e subtrações relativas (níveis IIA e IIB), observou-se uma equivalência na compreensão das relações multiplicativas e associativas.

Para Piaget (1996), a dialética está presente enquanto processo de construção das operações.

> A ideia que todo conceito contém seu contrário significa, dialeticamente, que a construção de cada conceito implica a de seu contrário, ou pelo menos sua possibilidade. Da mesma maneira, a identidade dos contrários não é uma identidade estática, mas uma implicação recíproca: cada operação implica seu inverso, mas não é seu inverso (Piaget, 1996, p.207)

A utilização de estratégias nos cálculos mentais e escritos, de forma variada e correta, acompanhou a construção dessas interdependências entre as operações aritméticas. Os resultados da quinta série pouco diferiram da terceira série em se tratando de estudante nos níveis iniciais de construção das operações aritméticas. Constatou-se, nesse caso, muita dificuldade na utilização dos algoritmos e na resolução dos cálculos mentais. Portanto, entende-se que mesmo sendo apresentado aos estudantes os cálculos em sequência nas séries: adição, subtração, multiplicação e divisão, será necessário o alcance de níveis operatórios para a correta compreensão e resolução dos cálculos. Em consonância às pesquisas de Piaget (1996), foi demonstrado que a superação dialética supõe um processo transformacional que só pode ser sustentado por construções operatórias ou pré-operatórias.

Nas considerações finais, a seguir, objetiva-se resgatar o papel dos algoritmos no espaço escolar e traçar algumas implicações educacionais desse estudo.

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo que em documentos oficiais e encontros pedagógicos sejam veiculadas as razões fundamentais do uso dos algoritmos no espaço educacional, as observações de muitas práticas reforçam a necessidade de uma definição clara de seu papel nas salas de aula. Nesse sentido, buscou-se um resgate histórico de sua formação e uma ênfase em seu caráter construtivo pelas crianças. Os algoritmos, longe de serem apenas conteúdos técnicos e originários de processos puramente mecânicos, trazem em sua história uma construção gradativa e não linear que acompanhou a difusão do sistema indo-arábico. O termo origina-se do matemático árabe *al-Khowarizmi* e, atualmente, pode ser definido como “uma série finita de regras a serem aplicadas em uma ordem determinada a um número finito de dados para chegar com certeza (quer dizer, sem indeterminação ou ambiguidades) e em um número finito de etapas, a determinado resultado, e isso independentemente dos dados” (Bouvier, *apud* Parra, 1996).

Para o alcance de tal definição, foram vários séculos em que prevaleciam os algarismos romanos (no sistema escolar europeu até por volta do ano de 1.600) e prevaleciam os cálculos por meio de ábacos. O sistema indo-arábico não contou inicialmente com o apoio da igreja - que o considerava impuro - ou com o sistema contábil - que proibiu sua utilização por considerá-lo de fácil falsificação. Assim, a habilidade em realizar cálculos estava restrita a poucos que dominavam os cálculos com ábacos. A difusão dos algoritmos que atualmente utilizamos na adição e subtração, por sua praticidade e rapidez, dentre outros fatores positivos, inicia-se no final do século XV, com sua forma impressa em 1478, na Itália, e por volta do século XVII para os algoritmos da multiplicação e divisão.

Como já demonstrara Parra (2006), os algoritmos historicamente construídos e disponíveis aos alunos contêm todo o saber já incorporado em sua resolução, tal saber no campo das propriedades das operações aritméticas, do valor- lugar, das resoluções com um ou vários dígitos, dos reagrupamentos, mas não está acessível facilmente a quem está construindo essas noções. Pode-se ainda acrescentar que esses algoritmos nem sempre foram utilizados da forma como hoje se apresentam. De acordo com Souza (2004), observam-se diferenças marcantes entre os algoritmos utilizados em outras épocas e os da atualidade, nos aspectos de “disposição espacial dos números que estão sendo operados e do número que representa o resultado da operação; a ordem de se operar com os algarismos que compõem os números que estão sendo operados (da esquerda para a direita, de baixo para cima) e a existência de riscos sobre os algarismos” (p. 23). Segundo a autora, no espaço escolar, ocorre a sedimentação da ideia de que não haveria outra forma de se realizar cálculos por escrito, senão por meio dos algoritmos usuais e, principalmente, os professores não conseguem explicar os mecanismos por eles utilizados, além da explicação das regras "naturais": "sempre foi assim".

É possível acrescentar que, a partir dos resultados, além dos algoritmos incorporarem diversos saberes em suas resoluções, sua compreensão e, por conseguinte, sua resolução correta está relacionada ao alcance de níveis cognitivos que comportem a operatoriedade pelos estudantes. Além disso, o uso dos algoritmos exige processos construtivos de planejamento, estimativa e organização. Os estudantes necessariamente colocam em prática diversas formas de conhecimento (implícitas, conscientes, explícitas); o professor precisa interpretar os procedimentos e as representações utilizadas e dar importância a elas. Para tanto, precisa ter claro que estratégias estão sendo empregadas pelos estudantes e em quais níveis de complexidade podem ser classificadas.

Vale ser destacado, entretanto, que o uso do algoritmo com acerto não pode ser o único determinante para afirmarmos se a criança tem o domínio ou não do conhecimento matemático acerca das operações. Como ressaltam Correa e Spinillo (2004), corre-se o risco de reduzir a matemática ao uso dos algoritmos e, assim, ignora-se que ela serve de modelo para a representação e compreensão do mundo. As operações podem incidir e transformar números, quantidades, grandezas e medidas, fato que o uso dos algoritmos isoladamente pode não incluir. Dessa forma, cabe ao professor estabelecer o equilíbrio entre essas visões sobre o uso dos algoritmos. Eles não podem ser o único elemento trabalhado nas aulas de matemática; o professor não poderá superestimar seu uso; os algoritmos tampouco podem ser considerados como um procedimento inferior; o professor não poderá subestimar seu uso.

Onrubia, Rochera e Barberà (2007), ao diferenciarem os procedimentos algorítmicos e heurísticos, ressaltam:

> Os primeiros levam a uma solução adequada quando se seguem todos os passos prescritos (pense-se na realização de uma raiz quadrada, por exemplo), os segundos não garantem uma correta solução, mas orientam de maneira sistemática o processo para chegar a ela (como em recomendações do tipo “fazer um desenho que ajude a representar o problema”, “decompor o problema em subobjetivos”, etc.). Os procedimentos algorítmicos desenvolvem, preferencialmente, capacidades matemáticas fundamentais baseadas na repetição e implicam sua aplicação a contextos necessários. Por sua vez, os procedimentos heurísticos implicam um maior esforço cognitivo e pedem do aluno um processo de tomada de decisões, não-predeterminadas, como no caso do algoritmos, em função dos resultados parciais obtidos ao longo de sua aplicação (Onrubia, Rochera e Barberà, 2007, p. 330).

Os autores expressam, nessa diferenciação, uma crença bastante difundida de que os algoritmos desenvolvem capacidades matemáticas limitadas e baseadas na repetição de procedimentos, enquanto outros procedimentos, de cunho heurísticos, promovem *um maior esforço cognitivo* e processos metacognitivos. Para Panizza (2006), tal diferenciação: resolve-se um problema compreensivelmente raciocinando e utilizando conceitos, ou resolve-se o problema mecanicamente, operando sobre símbolos, precisa ser revista. A possibilidade de se ter acesso automaticamente a um conhecimento não depende de sua natureza (conceitual ou simbólica), mas do nível de conhecimento no qual a pessoa se situa ao enfrentar a situação-problema, visão com a qual corrobora essa pesquisa, cujos resultados evidenciaram.

Em níveis IA e IB de construção de interdependências entre as operações aritméticas, não foram observados cálculos precisos e as estratégias focaram-se em cálculos de contagem nos dedos, as mais simples. Em níveis IIA e IIB de construção das operações, além desses cálculos manuais, foram observadas estratégias de algoritmos mentais e escritos e estratégias de decomposição, que são mais complexas. Poucos alunos recorreram ao cálculo mental com a recuperação automática dos resultados. Dificilmente, em fases iniciais de aprendizagem, os mecanismos ou os conceitos estão disponíveis na mente de forma automática.

O contato com estudantes na pesquisa, no momento de resolução de operações aritméticas com cálculos mentais e escritos e em situações de provas piagetianas, permitiu serem evidenciadas as principais características do processo de aprendizagem, o que remete a implicações educacionais desse estudo. Uma primeira evidência é o caráter construtivo do processo. Por vezes a ilusão é de os cálculos serem apenas dados para observar e automaticamente transferir o "como fazer" para o caderno. A interdependência entre as operações de adição e de subtração e a multiplicação e associatividade multiplicativa estão em fase de construção pelos participantes, sem ainda uma fase de arremate final, visto que não foram encontrados estudantes no nível III nessas construções.

Diante da diversidade de resoluções com cálculos mentais e diferentes sentidos das representações escritas, pode-se evidenciar que a aprendizagem tem como característica ser pessoal. Por mais que o professor ou o livro didático tenham boas explicações sobre a realização de tais cálculos, os estudantes são os autores do processo e precisam ter sua ação garantida nele. O termo *sujeito didático* é designado por Chevallard (1992), nesse caso, quando o aluno é considerado o autor de seu processo de aprendizagem e, diante de situações que o professor apresenta, realiza uma busca dentro de tudo o que sabe, coloca em jogo as ferramentas que possui para decidir aquilo que é mais pertinente. O sujeito didático compreende que o saber é um meio de solucionar, de prever, de antecipar resultados, de realizar e de controlar as estratégias que utiliza para resolver as situações que lhe são apresentadas. O aluno passa também a aceitar sua responsabilidade no processo, entendendo que o resultado obtido foi decorrente da escolha que fez, diante de diferentes possibilidades e, assim sendo, a relação de causalidade entre suas decisões e o resultado obtido se fortalece.

Considerando também essa diversidade nas resoluções dos cálculos, ressalta-se outra característica da aprendizagem: a de estar envolta em um universo simbólico. Como já fora discutido, tal universo simbólico precisa ser apresentado e discutido em sala de aula para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações, e que sejam reconhecidos em cada uma delas. Cabe ao professor oportunizar atividades de aprendizagem em que essas representações sejam discutidas. Com especial atenção, o cálculo mental deve ser privilegiado no espaço escolar. Mesmo que o currículo escolar não mencione um trabalho sistemático a ser desenvolvido com ele, notou-se que as crianças elaboram estratégias mais diversificadas que as escritas e, muitas vezes, com mais acertos.

Outra característica da aprendizagem é sua globalidade. Nesse sentido, constatou-se a inter-relação entre as aprendizagens dos cálculos, a construção das operações e a relação entre a construção das operações de adição e multiplicação. Para finalizar, pode-se destacar também que a estabilidade é outra característica da aprendizagem. Logo, os estudantes em níveis evolutivos que apresentam a operatoriedade detêm a forma correta de resolução dos cálculos e a aplica nas situações que os exigem. Eles realizam a recuperação automática dos cálculos, o que garante o uso de uma estratégia mais elaborada.

É imprescindível que se mencione a relevância do fator motivacional para que os estudantes realizassem as situações propostas na pesquisa. Mesmo não sendo o foco do trabalho, como um índice a ser mensurado, alguns aspectos podem ser destacados. Percebeu-se que os estudantes sentem-se valorizados quando a eles são propostas questões e suas respostas são alvo de interesse de um adulto, o qual registra seu desempenho. A realização de cálculos mentais e escritos pode parecer, em um primeiro momento, uma atividade que os estudantes não apreciam fazer. No entanto, todos relataram que gostaram de realizar as atividades. Algumas alunas da quinta série pediram para que a pesquisadora preparasse para elas uma pasta como a que foi utilizada na pesquisa, para que pudessem fazer novamente as atividades em casa, e um grupo solicitou que novas atividades de cálculos fossem propostas e, assim, foram marcados outros encontros na escola.

Como fora observado, a relação entre a resolução de cálculos e os níveis cognitivos, identificados em provas piagetianas, possibilitou inferir que, ao se buscar a compreensão dos vários sentidos que as representações dos objetos matemáticos podem adquirir, promoveu evolução nesses níveis cognitivos. Surge, destarte, a indagação sobre a influência positiva que um ensino que promova tais elaborações pode desencadear, a partir disso novas pesquisas podem ser realizadas a fim de confirmar tais considerações. Também, diante dos limites da pesquisa com quarenta estudantes, pode-se estender para uma amostra maior e identificar outras estratégias e níveis diferenciados de resolução, como os já apresentados nesse trabalho. Dessa forma, espera-se contribuir para a compreensão de que, quando conscientemente construído, o ensino das resoluções de operações com cálculos mentais e escritos integra-se ao movimento da conquista matemática, enquanto elemento desencadeador do pensamento e da leitura do mundo.

Uma conquista que não se define pelo...

... saber repetir ou conservar verdades acabadas, pois uma verdade que é reproduzida não passa de uma semi-verdade: é aprender por si próprio a conquista do verdadeiro, correndo o risco de despender tempo nisso e de passar por todos os rodeios que uma atividade real supõe. O conhecimento do fato não tem valor senão em função dos processos de descoberta que permitiram que ele fosse estabelecido (Piaget, 1998, p. 56).

7. REFERÊNCIAS

Anselmo, B.; Planchette, P. (2006). Le calcul mental au collége: nostalgie ou inovation? *Repères IREM*, n.62, pp5-20.

Assis, O.Z.M de.(1976). *A solicitação do meio e a construção das estruturas lógicas elementares na criança.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Tradução de Estela dos Santos Abreu, Rio de Janeiro/BRA: Contraponto. Tradução de: La formation de l'espirit scientifique: contribution a une psychanalyse de la connaissance. Paris/FRA: Librairie Philosofique J.Vrin, 1938.

Bariccatti, K.H.G. (2003). *A construção dialética das operações de adição e subtração no jogo de regras Fan Tan*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Bariccatti, K.H.G. e Brenelli, R.P.(2006). As interdependências entre as operações aritméticas e o rendimento escolar em matemática. *Zetetiké*, v.14, n.26-jul/dez, pp.71-87.

Baroody, A.J.(1999). Chidren's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, v.17, n2, pp.137-175.

Barrouillet, P. e Lepine, R.(2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition problems. *Journal-of-Experimental-Child-Psychology*. v. 91, Jul (3), pp.183-204.

Becker, F. (2005). Um divisor de águas. *Revista Viver Mente e Cérebro***,** Rio de Janeiro, v.1, pp. 24-33.

Boulay, S.; Le Bihan, M. Violas, S. (2004).Le calcul mental. Mathémaques, de <http://jclebreton.ouvaton.org/IMG/doc/Le_calcul_mental.doc>. Acesso em 22 de out. /2008.

Brasília/ MEC/SEF (1997). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : matemática. 142p. de portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf , acesso em 23 de novembro de 2008 .

Brenelli, R.P.(1993.) *Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de* *aprendizagem*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Brenelli, R.P.(1996). *O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas.* Campinas: Papirus.

Brito, M.R.F. de (2001). Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. In: Brito, M.R.F. de. *Psicologia da Educação Matemática-teoria e pesquisa*. Florianópolis: Insular.

Brito, M.R.F. e Correa, J. (2004). Divisão e representação no processo de solução de problemas aritméticos. In: Nelson Antonio Pirola; Fernanda de Oliveira Soares Taxa Amaro. (Org.). Pedagogia cidadã: cadernos de formação. São Paulo, pp. 81-90.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes d'enseignement. In: *Recherches em didactiques des Mathématiques*, 4(2).

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 33-115.

Busquets, M.D. (1994). Lógica aritmética In: ASSIS, M.C.de eASSIS, O.Z.M.de (orgs) *Anais de XI Encontro Nacional de professores do PROEPRE*, Campinas: LPG/ FE,UNICAMP.

Butlen D. e Pezard, M. (2000).Calcul mental et résolution de problémes numériques au début du collége, *Repères-IREM*, n.41, 5-24, Topiques Editions, Metz

Butlen D. e Pezard, M. (1992). Calcul mental et resolution de problemes multiplicatifs, une experimentation du CP au CM2. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.12, n23, pp319-368.

Campos, E.G.J de. (2008). *As dificuldades na aprendizagem da divisão: análise da produção de erros de alunos do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores*. Dissertação de Mestrado, Universidade Católica Dom Bosco, UCDB.

Caraça, B.de J. (2002). *Conceitos Fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva.

Cascavel, (2007). Associação dos Municípios do Oeste do Paraná- AMOP, Currículo Básico para a escola pública municipal-educação infantil e ensino fundamental (anos iniciais).

Charnay R.(1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas In: Parra,C. e Saiz, I (comps). *Didáctica de matemáticas*. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Y. (1992). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, la pensée sauvage*, Grenoble.

Chevallard, Y; Bosch, M.; Gascón, J. (2001). *Estudar* matemáticas- *o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.

Correa, J.; Meireles, E.de S. e Curvelo; C. S.de S. (2000). A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. *Estudos de Psicologia.* (Natal), vol ,n.5, Junho.

Correa, J. (1997). A solução de problemas de adição e subtração por cálculo mental. *Psicologia Reflexão e Crítica*, v.10, pp.71-86.

Correa, J. (2004). A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. *Estudos de Psicologia Natal*, vol.9, n1, jan/apr, pp. 145-155.

D'Amore, B. (2005). *Epistemologia e Didática da matemática*, Ed. Escrituras.

Demby, A. (1993). Use of comprensation for addition-subtaction and multiplication-division by eleven-year-old pupils. *Educational Studies in mathematics*, 24:239-249.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 5, Estrasburgo.

Dynnikov, C. M.S da S. (2003). *Explorando as operações aritméticas com recursos da história da matemática*-Coleção história da matemática para professores. Abril.

Ferreira, S.P.A. e Lautert, S.L.(2003). A tomada de consciência analisada a partir do conceito de divisão: um estudo de caso. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 16(3), p.547-554.

Ferreiro, E. (2001). *Atualidade de Jean Piaget*, Porto Alegre: Artmed.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, ano 3, n. 4.

G.E.E.M-GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA (1965). *Matemática Moderna para o Ensino Secundário.* 2ª ed. São Paulo: L.P.M. Editora, São Paulo.

Gómez, B. (2005).La enseñanza del cálculo mental. *Revista Iberoamericana de educación Matemática*, n.4, pp17-29.

Guimarães, K.P. (1998). *Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação , via jogos de regras:em busca de relações***.** Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Guimarães, K.P. (2004). *Processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Guimarães, S. D., Freitas, J. L. M. (2008).Um olhar sobre o papel do cálculo mental para a aprendizagem de conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental. Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/ Comunicação Científica /Trabalhos /CC79180990100T.rtf >. Acesso em 04 de jun./ 2008.

Granell, C. G. (1983). Processos cognoscitivos en el aprendizage de la multiplicacion In:Montserrat, Moreno (y equipo del Imipae). *La pedagogia Operatória*.Barcelona: Laia Editorial, pp.129-147.

Granell, C. G. (2004). Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: Rodrigo, M. J. e Arnay, J. (org.). *Conhecimento, cotidiano escolar e científico: representação e mudança – A construção do conhecimento escolar* 1. Trad. Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, pp. 15-41

Huete, J.C.S. ; Bravo, J.A.F. (2006).*O ensino da matemática-fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*, Porto Alegre: Artmed.

Ifrah, G. (1989). *Os números- História de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo.

Imaguire, G. (2005). O platonismo de Russell na metafísica e na matemática. *Kriterion*, Belo Horizonte, n111, jun, p.9-28, 2005.

Inhelder, B. e Cellérier, G. (1996).O desenrolar das descobertas da criança. Artmed.

Jackson, N.; Coney, J. et al. (2005). Simple arithmetic processing: The question of automaticity. *Acta-Psychologica*. May Vol 119(1): 41-66.

Johansson, B. S. (2005). Number-word sequence skill and arithmetic performance. *Scandinavian-Journal-of-Psychology*. Apr, Vol 46 (2): 157-167.

Kamii, C. (1995). *A criança e o número*. Campinas: Papirus.

Kamii e Devries. (2001). *La teoria de Piaget y la educacion preescolar*. Madrid:Visor.

Kamii, C. e Joseph, L. (2005). *Crianças pequenas continuam reinventando aritmética***.** Porto Alegre:Artmed.

Lautert, S.L. e Spinillo, A.G. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, set-dez, vol.18, n3, pp. 237-246.

Lefevre, J.A; Shanahan, T.DeStefano, D. (2004). The tie effect in simple arithmetic: An access-based account. *Memory-and-Cognition*. Sep; Vol 32 (6): 1019-1031.

Lethielleux, C. 92001). Le calcul mental au cycle des approfondissements. Paris: Bordas.

Lima, L. de O. (1984). *A construção do homem segundo Piaget- uma teoria da educação*, 3ª ed, São Paulo: Summus editorial.

Lin, F. e Kubina Jr.R. A preliminary investigation of the relationship between fluency and application for multiplication. *Journal of behavioral education*, vol.14, n2, June 2005, pp.73-87.

Lopes, S.V de A. (1997). Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Lopes, S.V. de A e Brenelli, R.P. (2001). A importância da abstração reflexiva na resolução de problemas de subtração. In: BRITO, M.R.F de. *Psicologia da Educação Matemática-teoria e pesquisa*. Florianópolis: Insular.

Lopes, S.V. de A. (2002). *A construção dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação,Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Lucangeli et. al. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *Educational Psychology*, vol 23, no 5, December.

Macedo, Lino de. (1994). *Ensaios Construtivistas*. São Paulo: Casa do Psicólogo.

Macedo, Lino de. (2001). Para uma psicopedagogia construtivista. In: Alencar, Eunice S.de (org.) *Novas contribuições da Psicologia aos processos de ensino e aprendizagem*, São Paulo: Cortez.

Malofeeva, E.; Day, J.; Saco,-Ximena; Young,-L.; C,Dennis. (2004). Construction and Evaluation of a Number Sense Test With Head Start Children. *Journal-of-Educational-Psychology*. Dec; Vol 96 (4): 648-659.

Moro, M. L. F. (2004). Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, Porto Alegre, v. 17, n. 2, pp. 251-266.

Moro, M. L. F. (2005). Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir. *Psicologia:Teoria e Pesquisa*, mai-ago, vol21, n2 pp.217-226.

Nogueira, C.M.I. (2002). *O desenvolvimento das noções matemáticas na criança e suas implicações pedagógicas: o caso particular do número*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, UNESP, Marília.

Nunes, T; Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Oliveira, M. B. de. (2002). Sobre o significado político do positivismo lógico. *Crítica Marxista*, n. 14, pp.73-84.

Onrubia, J.; Rochera, M.e Barberá, E. (2007). O ensino e a aprendizagem da matemática: uma perspectiva psicológica. IN: Coll, César; Marchesi, Álvaro; Palacios, Jesús. *Desenvolvimento psicológico e educação.* Trad. Fátima Murad. 2. ed. – Porto Alegre: Artmed, pp.326-41.

Onuchic, L. R. e Botta, L. S. (1998). Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. *Revista de Educação matemática SBEM*, São Paulo, ano 6, n. 4, pp.19-26.

Pais, L. (2001). *Didática da matemática. Uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte:Autêntica.

Panizza, M.(2006). Reflexões sobre o ensino da matemática. In: Panizza, Mabel. *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais- análises e propostas.* Porto Alegre: Artmed.

Parra, C. Saiz, I. (1996). Didática da Matemática-reflexões psicopedagógicas, Atmed.

Parra, C. (2006). Prólogo. In: Panizza, M. *Ensinar matemática na educação infantile e nas séries iniciais- análises e propostas.* Porto Alegre: Artmed.

Pauleto, C.R.P. (2001). *Jogos de regras como meio de intervenção na construção do conhecimento aritmético em adição e subtração.* Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Phillipson, S.N. (2004). Analogue Equivalents in Number Processing of Simple Arithmetic Sums. *Educational-Psychology*. Apr; Vol 24 (2): 217-229.

Piaget, J.(1941). Lê mécanisme du développement mental et la lois du groupement dês operations. *Archives. Psychology*. Genebra, 28, pp.215-85.

Piaget, J. (1946a). *Le développement de la notion de temps chez l' enfant.* Paris: Presses Univer. France.

Piaget, J. (1946b). *Les notion de movement et de vitesse chez l'enfant*. Paris: Presses Univer. France.

Piaget, J.(1977). Psicologia da inteligência. Rio de Janeiro: Zahar. Originalmente publicado em 1947.

Piaget, J.(1950). Une expérience sur la psychologie du hasard chez l'enfant: le triage au sort des couples. *Acta psychology*, Amsterdam, 7, PP.323-36.

Piaget, J.(1967). *Seis estudos de psicologia.* Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Piaget, J. (1970). *Psicologia e pedagogia.* Rio de Janeiro/São Paulo: Forense.

Piaget, J.(1971). *A Epistemologia Genética*. Rio de Janeiro:Vozes.

Piaget, J.(1972). Comments on mathematical education. In: Developments in mathematical education: proceeding of the *2nd International Congresso in mathematical education,* Exeter, august, 29th, September.

Piaget, J.(1974a). *Recherches sur la contradiction 1-les différentes formes de la contradiction études d'épistemologie génétique***,** 31, Paris: Presses Univer.France.

Piaget, J.(1974b). *Recherches sur la contradiction2- lês relations entre afirmations et negations études d'épistemologie génétique*, 32, Paris: Presses Univer.France.

Piaget, J.(1976). *A situação das ciências do homem no sistema das ciências*. Lisboa: Bertrand.

Piaget, J.(1977a). *Abstração Reflexionante*. Porto Alegre, Artes Médicas.

Piaget, J.(1977b). *A tomada de consciência*. São Paulo: Melhoramentos/EDUSP.

Piaget, J.(1977c). *A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento.* Rio de Janeiro: Zahar.

Piaget, J.(1978a). *Investigaciones sobre la contradiccion.* Madrid: Siglo Vientiuno editores.

Piaget, J.(1978b). *Fazer e compreender*. São Paulo:Melhoramentos/EDUSP.

Piaget, J.(1981). *O possível e o necessário -evolução dos possíveis na criança*. Porto Alegre: Artes médicas.

Piaget, J.(1983). *O possível e o necessário- evolução dos necessários na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J.(1996). *Para onde vai a educação?* Rio de Janeiro: José Olympio. Originalmente publicado em 1972.

Piaget, J.(1980). *As formas elementares da dialética*. São Paulo: Casa do Psicólogo.

.

Piaget, J.(1998). *Sobre a Pedagogia- textos inéditos*. São Paulo: Casa do Psicólogo.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1946). *Da lógica da criança à lógica do adolescente: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais***.** São Paulo: Pioneira.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1956).*The child conception of space*. Londres: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. e Inhelder, B.(1959). *La genèse des structures logiques élémentaires: classifications et séritions* . Neuchâtel:Delachaux et Nestlé.

Piaget J. e Szeminska, A.(1981). *A Gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar.

Piaget, J.; Inhelder, B; Szeminska, A.(1960). *The child's conception of geometry*. Nova York: Basic Books.

Ponte e Serrazina (2000). *Didáctica da Matemática* do 1º Ciclo, Lisboa:Universidade Aberta.

Quino. (1993). *Toda Mafalda-da primeira à última tira*. São Paulo: Martins Fontes.

Rangel, A.C.S. (1992). *Educação matemática e a construção do número pela criança. Uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos.* Porto Alegre: Artmed.

Ralston, A. (1999).Let`s abolish pencil-and-paper arithmetic. *The journal of computer in mathematics and science teaching* 18, n2, pp.173-94.

Sally, K; Coral. (2005).Defining early number sense: a participatory Australian study. *Educational Psychology*. October, v. 25 (5):555-571.

Sanches, P.; Baptista M. e Marzola, R. (2008). *Novas perspectivas para o trabalho com cálculo mental em salas de 2º e 3º ano*, de http://www.escoladavila.com.br/refle_pedag/renata%20patricia%20marilza.pdf, acesso em 12 de outubro de 2008.

Santos, M. C. dos. (2002). Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de Matemática. *Educação matemática em revista*, v.9, n12, pp.11-15.

Shane, P. (2004). Analogue equivalents in number processing of simple arithmetic sums. *Education psychology*, v.24, n.2, pp217-229.

Smole, K.C.S. (2005). Novos óculos para a aprendizagem da matemática. *Revista Viver Mente e Cérebro*. Rio de Janeiro, v.1, pp. 34-41.

Souza, E. da S. (2004). A história como possibilidade de investigar questões pedagógicas do presente:o ensino dos algoritmos das operações aritméticas elementares http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/Comunicacoes_Orais/co0110.doc, acesso em 12 de fevereiro de 2009.

Taxa F.de O.S.; Fini, L.D.T. (2001). Estudo sobre a solução de problemas aritméticos de multiplicação do tipo isoformismo de medidas. In: Brito, M.R.F de. *Psicologia da Educação Matemática-teoria e pesquisa*. Florianópolis: Insular.

Tropfke, J. (1980). *Geschichte der elementarmathematik*. Berlim:Walter de Gruyter.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought envolved in addition and subtracion problems. In Carpenter, T. Moser, J & Romberg, *Addition and subtraction. A cognitive perspective.* Hillsdale, N.J. Lawrence Erbaum, pp.39-59.

Vergnaud, G.(1983). Multiplicative structures. In Lesh, rand Landau, M (Eds) *Acquisition of Mathematics concepts and processes.* New Cork:academia Press Inc, pp.127-174.

Vergnaud, G.(1988). Multiplicative structures. In Hubert H and Behr, M (Eds). *Research agenda in mathematics education.* Number concepts and operations in the midle grades. Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaum, pp.141-161.

Vergnaud, G.(1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), pp.133-170.

Vergnaud, G.(1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vergnaud, G.(1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do Gempa*, 4, pp. 9-19.

Vechia, A.; Lorenz, K.M. (1998). (org.). *Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira: 1850-1951.* Curitiba: Editora do Autor.

Vygotsky, L.S. (1962). *Pensamento e Linguagem*, de http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/vigo.html

8.ANEXO I

Cálculos mentais:

Adição

43+6=

55+7=

76+49=

Subtração

43-7=

52-28=

51-16=

Multiplicação

18x2=

31x3=

57x5=

Divisão

66:3=

120:4=

81:9=

Cálculos escritos:

Adição

47+15=

239+106=

4329+3783=

Subtração

80-26=

104-28=

4329-3783=

Multiplicação

255x18=

492x7=

134x9=

Divisão

2050:45=

288:12=

7054:9=

ANEXO II

Um exemplo elementar de dialética lógico-matemática: problemas de igualação e construção de diferenças (Piaget, Maurice e Henriques 1980/1996)

Técnicas: Dispomos de pequenos objetos idênticos (macarrão ou grãos de feijão) que apresentamos em 2 ou 3 coleções e uma caixa aberta de reserva que chamaremos de X.

Técnica A: Ela coloca problemas de igualação de colunas ou de conjuntos numericamente diferentes e comporta as seguintes situações:

1-3/5 (A/B) a igualar: Apresentamos à criança duas colunas de 3 e 5 elementos respectivamente; a disposição espacial respeita uma correspondência de termo a termo. Pedimos para a criança igualar as duas colunas.

2-3/5/7 (A/B/C) a igualar: Apresentamos à criança 15 elementos dispostos em três conjuntos: 3,5,7; ou, em seguida, outras divisões, tal como 1, 5, 9, e lhe pedimos, como anteriormente, para igualar os três conjuntos.

3-4/4 (A/B) 1 A em B (diferença=2n): Apresentamos à criança 2 colunas de 4 elementos cada uma. Uma vez que a igualdade é reconhecida pela criança, escondemos uma coluna. Deslocamos 1 ou 2 elementos de uma para a outra (da coluna escondida para a coluna descoberta) e perguntamos à criança: “Quantos eu devo pegar da caixa reserva para ter de novo a mesma coisa?”

4-A=B, tornar igual: Apresentamos à criança 2 colunas de 4 elementos cada uma. Pedimos para fazer alguma coisa para que uma das colunas tenha dois elementos a mais que a outra (ou para criar uma diferença de 2 elementos entre as colunas).

Técnica B

1-Idem ao ponto 1 da técnica A.

2-4/4 (A=B) +1X em A: Apresentamos à criança 2 colunas de 4 elementos cada uma; escondemos uma coluna e acrescentamos na outra coluna 1 elemento pego na caixa. (reserva=X).

3-2/4 (A/B) 1 A em B (diferença =2n) como na técnica A.

4-A=B= N escondidos. Mesmo procedimento da técnica A apenas com o número de elementos que compõem a coluna inicial é desconhecido.

5-A=B= n escondidos 1 A em B, 1X em B. Nesta situação, para responder corretamente, trata-se de compor dois tipos de ação: o que consiste em acrescentar a um conjunto de elementos provenientes da caixa (fonte exterior) e o que consiste em deslocar os elementos de uma coluna a outra (transferência interna).

6-C_1, C_2, C_3 escondidos .O experimentador desloca n(=1ou 2) elementos de um dos montes aos dois outros. Pergunta: qual é a diferença entre C_1 e C_2; depois entre C_1 e C_3?

7-A=B, tornar desigual, como na técnica A.

ANEXO III

Prova: Multiplicação e associatividade multiplicativa. (Piaget, Ioanna Berthoud-Papandropoulou e H. Kilcher, 1983)

Técnica

Material: 1 carneiro C, um pato P (brinquedos), um punhado de grãos idênticos.

Situações experimentais:dados de base impostos para as situações I, III, IV : C come três grãos de uma vez (=1 pacote C), P come 2 grãos de uma vez (=1 pacote P).

Situação I: multiplicação (4X3=?X?). O experimentador prepara para C 4 pacotes de 3 grãos. Problema: preparar para P a quantidade de grãos, respeitando o dado de base (P come 2 grãos de uma vez).

Situação II: associatividade (2X (4X3)= (2X4) X3). Dado de base imposto para esta situação: C e P comem 3 grãos de uma vez. O experimentador prepara para C duas refeições de 4 pacotes. Problema: preparar para P a quantidade necessária para comer mas numa só refeição. Variante: o experimentador prepara para C duas refeições de 4 pacotes. Pedimos à criança que prepare para P outro tanto de grãos, arranjados igualmente em duas refeições. Após a constituição da coleção P pedimos à criança um julgamento concernente à igualdade das coleções C e P. A seguir os grãos de P são colocados num monte. Problema: preparar para P a quantidade necessária para uma única refeição a partir dos grãos desse monte.

Situação III: associatividade comutativa (2X4X3) = (3X?X2). O experimentador prepara para C duas refeições de 4 pacotes com 3 grãos cada. Problema: preparar para P outro tanto de grãos, mas para 3 refeições e respeitando o dado de base inicial, ou seja, 3 grãos= 1 pacote C, 2 grãos= 1 pacote P.

Situação IV: repetição de correspondências injetivas. O experimentador e a criança pegam simultaneamente um pacote C (=3 grãos), o outro um pacote P (=2 grãos), isso 6 vezes repetidas. As duas coleções são a seguir escondidas. Problema: julgar se as duas coleções contêm um número igual de grãos. Avaliar numericamente a diferença entre as duas coleções. Generalizar esse julgamento a um número *n* (muito grande) não realizado de repetições da mesma ação.

9. Apêndice A-TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO-MUNÍCIPIO DE TOLEDO-PR

Ao Secretário de Educação.

Solicitamos a autorização junto a esta Secretaria de Educação, para a realização de uma pesquisa envolvendo estudantes de terceira série desta rede de ensino. Para tanto, estamos enviando dados sobre o projeto de pesquisa e nos colocamos a disposição para eventuais dúvidas.

Título do Projeto: “As relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas”.

Pesquisadores responsáveis:

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti (doutoranda), pedagoga na Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR-campus Toledo

Contato: karenhg@utfpr.edu.br

Prof. Dra. Rosely Palermo Brenelli (orientadora), professora do Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, grupo de pesquisa em Psicopedagogia-GEPESP

Resumo: o objetivo da pesquisa é investigar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Serão 20 estudantes de terceira série, escolhidos aleatoriamente em uma escola municipal, a fim de resolverem situações que envolvam cálculos mentais e escritos de adição, subtração, multiplicação e divisão e situações-problema para investigação de níveis de construção das operações aritméticas.

Riscos: esta pesquisa não oferece riscos previsíveis à integridade física, psicológica e social aos entrevistados e ao Município. Garantimos o sigilo absoluto quanto à identificação dos estudantes e escolas.

Custos: não haverá benefícios financeiros de qualquer espécie, nem encargos adicionais relativos a custos e pagamentos.

Toledo, ____ de 2007.

Autorização para a realização da pesquisa:

____

Assinatura do responsável

Apêndice B-**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

NUCLEO REGIONAL DE EDUCAÇÃO-MUNÍCIPIO DE TOLEDO-PR

Ao Chefe do Núcleo de Educação.

Solicitamos a autorização junto ao Núcleo de Educação, para a realização de uma pesquisa envolvendo estudantes de quinta série da rede de ensino deste município. Para tanto, estamos enviando dados sobre o projeto de pesquisa e nos colocamos a disposição para eventuais dúvidas.

Título do Projeto: "As relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas".

Pesquisadores responsáveis:

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti (doutoranda), pedagoga na Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR-campus Toledo

Contato: karenhg@utfpr.edu.br

Prof. Dra. Rosely Palermo Brenelli (orientadora), professora do Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, grupo de pesquisa em Psicopedagogia-GEPESP

Resumo: o objetivo da pesquisa é investigar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Serão 20 estudantes de quinta série, escolhidos aleatoriamente em uma escola estadual, a fim de resolverem situações que envolvam cálculos mentais e escritos de adição, subtração, multiplicação e divisão e situações-problema para investigação de níveis de construção das operações aritméticas.

Riscos: esta pesquisa não oferece riscos previsíveis à integridade física, psicológica e social aos entrevistados e ao Município. Garantimos o sigilo absoluto quanto à identificação dos estudantes e escolas.

Custos: não haverá benefícios financeiros de qualquer espécie, nem encargos adicionais relativos a custos e pagamentos.

Toledo, ____ de 2007.

Autorização para a realização da pesquisa:

____

Assinatura do responsável

Apêndice C-**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

DIREÇÃO DA ESCOLA MUNICIPAL

Prezada diretora.

Sou estudante da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP e estou realizando um estudo sobre “as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas”. Para dar continuidade a este estudo, necessito de sua colaboração para que a pesquisa seja realizada com estudantes da terceira série desta instituição de ensino.

Esclareço a seguir alguns tópicos da pesquisa:

Resumo: o objetivo da pesquisa é investigar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Serão 20 estudantes de terceira série, escolhidos aleatoriamente em uma escola municipal, a fim de resolverem situações que envolvam cálculos mentais e escritos de adição, subtração, multiplicação e divisão e situações-problema para investigação de níveis de construção das operações aritméticas.

Riscos: esta pesquisa não oferece riscos previsíveis à integridade física, psicológica e social aos entrevistados e ao Município. Garantimos o sigilo absoluto quanto à identificação dos estudantes e escolas. A participação dos estudantes na pesquisa é voluntária e sem prejuízo, caso não queiram participar.

Custos: não haverá benefícios financeiros de qualquer espécie, nem encargos adicionais relativos a custos e pagamentos.

Agradeço sua colaboração e me coloco à sua disposição para esclarecimentos de dúvidas.

Pesquisadores responsáveis:

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti (doutoranda), pedagoga na Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR-campus Toledo

Contato: karenhg@utfpr.edu.br

Prof. Dra. Rosely Palermo Brenelli (orientadora), professora do Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, grupo de pesquisa em Psicopedagogia-GEPESP

Toledo, ____ de 2007.

Autorização para a realização da pesquisa:

____

Assinatura do responsável

Apêndice D-**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

DIREÇÃO DA ESCOLA ESTADUAL

Prezada diretora.

Sou estudante da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP e estou realizando um estudo sobre "as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas". Para dar continuidade a este estudo, necessito de sua colaboração para que a pesquisa seja realizada com estudantes da quinta série desta instituição de ensino.

Esclareço a seguir alguns tópicos da pesquisa:

Resumo: o objetivo da pesquisa é investigar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Serão 20 estudantes de quinta série, escolhidos aleatoriamente em uma escola estadual, a fim de resolverem situações que envolvam cálculos mentais e escritos de adição, subtração, multiplicação e divisão e situações-problema para investigação de níveis de construção das operações aritméticas.

Riscos: esta pesquisa não oferece riscos previsíveis à integridade física, psicológica e social aos entrevistados e ao Município. Garantimos o sigilo absoluto quanto à identificação dos estudantes e escolas. A participação dos estudantes na pesquisa é voluntária e sem prejuízo, caso não queiram participar.

Custos: não haverá benefícios financeiros de qualquer espécie, nem encargos adicionais relativos a custos e pagamentos.

Agradeço sua colaboração e me coloco à sua disposição para esclarecimentos de dúvidas.

Pesquisadores responsáveis:

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti (doutoranda), pedagoga na Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR-campus Toledo

Contato: karenhg@utfpr.edu.br

Prof. Dra. Rosely Palermo Brenelli (orientadora), professora do Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, grupo de pesquisa em Psicopedagogia-GEPESP

Toledo, ____ de 2007.

Autorização para a realização da pesquisa:

____

Assinatura do responsável

Apêndice E-**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

PREZADOS PAIS.

Sou estudante da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP e estou realizando um estudo sobre "as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas". Para dar continuidade a este estudo, necessito de sua colaboração, autorizando seu filho (a) a resolver situações que envolvam cálculos mentais e escritos de adição, subtração, multiplicação e divisão e situações-problema para investigação de níveis de construção destas operações aritméticas.

O objetivo da pesquisa é investigar as relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas. Contamos com a participação de 20 alunos de terceira série e 20 alunos de quinta série da rede municipal e estadual de Toledo.

Esclareço que estas atividades serão desenvolvidas na própria escola, em horário habitual de aula. A identificação de seu filho (a), bem como o conteúdo da entrevista serão mantidos em segredo. As imagens gravadas em vídeo não permitirão a identificação dos alunos, apenas acompanharão a realização das atividades. A participação na pesquisa é voluntária e sem nenhum prejuízo, caso não queira participar, também não irá gerar custos. Esta pesquisa não oferece riscos previsíveis à integridade física, psicológica e social aos entrevistados. Aproveito para explicar que essas atividades não fazem parte das atividades escolares, portanto, não irão influenciar a nota de seu filho (a) na escola.

Agradeço sua colaboração e me coloco à sua disposição para esclarecimento de dúvidas.

Karen Hyelmager Gongora Bariccatti
Contato: karenhg@utfpr.edu.br
Telefone: (45)30546207
Comitê de Ética em pesquisa-UNICAMP
Telefone: (19)35218936

Você autoriza a realização da pesquisa com seu filho (a)?

( ) sim **( )não**

Estando de acordo, autorizo meu filho (a) ______________________________

____a participar da pesquisa.

Assinatura do responsável: ____