UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
TESE DE DOUTORADO

O NÃO RESGATE DAS GEOMETRIAS

ELIANE SCHEID GAZIRE

ORIENTADOR:
PROFESSOR DR. SÉRGIO APPARECIDO LORENZATO

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Eliane Scheid Gazire e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 20 / 12 / 00

Assinatura: ______________

Comissão Julgadora:

____

Maria Angela Miorim

____

____

2000

CATALOGAÇÃO NA FONTE ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

G259n

Gazire, Eliane Scheid.
O não resgate das Geometrias / Eliane Scheid Gazire. -- Campinas, SP : [s.n.], 2000.

Orientador : Sérgio Aparecido Lorenzato.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Analfabetismo. 3. Professores - Formação. I. Lorenzato, Sérgio Aparecido. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Tese apresentada, como exigência parcial para obtenção do Título de Doutor em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Professor Dr. SÉRGIO APARECIDO LORENZATO

DEDICATÓRIA

À minha mãe, companheira e amiga de todas as horas.

A Luciana, Edinho e André, cujo estímulo e apoio constantes ajudaram-me a chegar até aqui.

A meu pai, Pedro, e à minha avó, Maria, pela presença constante. (*In memoriam*)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Sérgio Aparecido Lorenzato pela orientação, compreensão e amizade.

Ao Professor Reginaldo Naves de Souza Lima coordenador do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNI-BH, que permitiu e incentivou a realização da pesquisa com os professores/alunos do curso.

Aos professores/alunos do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNI-BH, que contribuíram para a realização deste trabalho com empenho e atenção através de seus depoimentos.

Aos professores: Drª Maria Ângela Miorim, Dr. Dario Fiorentine, Drª Maria do Carmo Domite, que fizeram parte da banca do Exame de Qualificação, pelas críticas e sugestões.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Educação da Unicamp, pela amizade .

Ao Professor José Maria Malta Lima, pela revisão de Português.

A Liliana Vieira, pela digitação deste trabalho.

A Paulo Scheid Gazire pelas ilustrações e revisão final do trabalho.

Ao CNPQ, por ter me beneficiado com uma ajuda financeira durante dois anos do curso.

ÍNDICE

PARTE 2 – O ENSINO DE GEOMETRIA

PARTE 3 O NÃO RESGATE DAS GEOMETRIAS

RESUMO

Este trabalho investiga as causas do não resgate da Geometria no Ensino Fundamental e Médio.

Elas foram estabelecidas com base:

a) no estudo da evolução histórica da Geometria;

b) no estudo da história de seu ensino;

c) na análise da pesquisa realizada com professores/alunos do curso de pós-graduação em Educação Matemática (*lato sensu*).

A partir daí, foi apresentada uma perspectiva para o resgate da Geometria nas nossas escolas.

Do estudo histórico da Geometria e do seu ensino emerge uma compreensão surpreendente: os vários olhares que se pode ter para ela (o do indígena, do africano, do egípcio, do árabe, do grego, do homem moderno etc.), a vastidão de seu alcance e a profundidade de sua atuação. Esses vários olhares, a sua extensão e a sua profundidade são tais que fica claro o quanto a Geometria é complexa. Essa complexidade é de tal porte que possivelmente se deveria dizer "*Geometrias*" em lugar de "*Geometria*". Tudo isso mostra que é quase impossível para um ser humano se conscientizar de tantos aspectos.

Como os professores não passam por cursos de Geometria, aliás, nem cursos introdutórios lhes são oferecidos, a situação deles se caracteriza por um estado que denominamos analfabetismo geométrico. Tal estado é piorado ou complicado porque na maioria das vezes, eles têm opiniões muito vagas sobre o que é Geometria. Daí se concluir que o resgate só poderá ser realizado através de dois fatos: a existência de uma proposta com peso de autoridade suficiente para ser aceita e uma liderança carismática que empolgue a todos.

ABSTRACT

This work investigated the causes which kept Geometry away from the Primary and Secondary School Teaching Programs. This causes were established based on:

a) The study of the Geometry's historical evolution;

b) The study of its teaching's history;

c) The analysis of the research done with teacher's/students from the Mathematics Education graduation course (*lato-sensu*).

From that point, it was given a perspective in order to rescue Geometry to our schools.

From the study of Geometry's history and its teaching comes up a surprising comprehension: the several ways of looking at it (the Indian's, the African's, the Egypt's, the Arabic's, the Greek's, the modern man's, etc.) , the wideness of its range and the depth of its action. These several ways of looking, its wideness of range and depth are such that shows clearly how much Geometry is complex. This complexity is of such scope that possibly it should be called "Geometries" instead of "Geometry". All of that shows that it is almost impossible for a human being to be conscious of so many aspects.

As the teachers do not attend Geometry courses, and by the way not even introductory courses are offered to them, their situation is in a stage that we call geometric analphabetism. This state gets worse or complicated because most of the time they have many vague opinions about what Geometry is. For those reasons one can conclude that the rescue can only be accomplished by two facts: the existence of a proposal with enough authority to be accepted and a charismatic leadership that excites everybody.

"θυε ναο αδεντρε εστεσ πορτοεσ

θυεμ ναο χονηεχε α γεομετρια"

"que não adentre estes portões

quem não conhece a geometria"

inscrição no portal de entrada da

Academia de Platão

INTRODUÇÃO

1 TRAJETÓRIA

1.1 Lembranças do Passado

"Tem dias que a gente se sente
Como quem partiu ou morreu
A gente estancou de repente
Ou foi o mundo então que cresceu
A gente quer ter voz ativa
No nosso destino mandar
Mas eis que chega a roda viva
E carrega o destino pra lá ."

(Roda Viva, Chico Buarque)

Fizemos, no COLÉGIO PIO XII, um colégio católico, de irmãs Salesianas (congregação italiana), a 1ª e a 2ª séries do ginásio. A 3ª e 4ª séries do ginásio, no COLÉGIO NOSSA SENHORA DA PIEDADE. É também um colégio católico, porém, de uma congregação de irmãs brasileiras.

Em 1966, iniciamos o 2º Grau no mesmo colégio. Naquela época, no curso de 2º Grau, podia-se escolher entre o Clássico, o Científico ou o Normal (Habilitação para o Magistério no curso primário). Escolhemos o curso Normal[1]. Encantava-nos a idéia de ser professora.

É interessante lembrar que, naquela época, a maioria das moças ainda optava pelo curso normal, pois esse oferecia inúmeras vantagens como ressalta WEREBE (1994: 192):

---

[1] Os professores para as séries iniciais do ensino de 1º grau, antigo primário, eram formados na escola normal de grau colegial ou na escola normal de grau ginasial de quatro séries. A primeira, que se seguia ao curso ginasial, tinha três séries anuais. A segunda conferia o diploma de regente de ensino primário. Fiz a escola normal, grau colegial.

> *"De fato, além de ser, pela constituição do seu currículo, considerado apropriado para a formação das futuras 'esposas e mães', confere um diploma profissional que, numa eventualidade, pode ser útil, funcionando como 'seguro de vida', e abre a possibilidade de ingresso no ensino superior. Por outro lado, a escola normal foi sempre considerada 'fácil', atraindo também as alunas pouco propensas aos estudos."*

No nosso caso, não buscávamos um curso mais fácil, mas nos atraía muito a idéia de logo poder começar a trabalhar.

Como toda escola católica, o Colégio Piedade preconiza uma filosofia integral de vida: desenvolver a inteligência e formar o caráter, ou seja, "educar". Sendo assim, o curso tinha características bem interessantes: enfatizava em seu currículo tanto a parte teórica dos conteúdos como a parte prática. Estudava-se Português, Matemática, Literatura Infantil, Literatura Portuguesa e Brasileira, Biologia, Filosofia, Psicologia e Sociologia. Líamos muito: Camões, Padre Antônio Vieira, Graciliano Ramos, Machado de Assis, entre outros. Lembramos-nos até hoje dos estudos de Psicologia nos livros de Paul Osterieth, de Biologia nos livros do José Guerra, de Matemática nos livros de Carlos Galante e Oswaldo Sangiorgi. Ler nas aulas de Sociologia "Brasil Terra de Contrastes", de Roger Bastide, foi o ponto de partida para começarmos a sentir um grande interesse em conhecer e entender o Brasil.

Pela manhã, tínhamos aulas teóricas de leitura, discussões e aulas expositivas. No período da tarde, desde o 1° ano, começávamos a assistir às aulas nas turmas do curso primário do próprio colégio.

No 1° ano, fazíamos o estágio de observação. Ia para as classes da 1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries e observava o trabalho do professor. No 2° ano, fazíamos o estágio de participação. Além de observar as aulas, ajudávamos os professores em alguns trabalhos como corrigir exercícios nos cadernos, prestar assistência a alunos que apresentavam dificuldades na realização das tarefas, confeccionar cartazes, etc. No 3º ano, fazíamos o estágio de regência. Nesse momento, era hora de começarmos a enfrentar, sozinhas, a sala de aula.

Além de darmos aula no próprio colégio, no 3º ano, também tínhamos contato com escolas públicas. Saíamos do colégio para fazermos estágio de regência em outras escolas.

Esse longo contato com as crianças, com a rotina das aulas, com o trabalho do professor, propiciou-nos uma idéia bem concreta de manejo de classe e de sala de aula que funcionava observando regras, normas e executando tarefas.

As aulas de Didática seguiam à risca o Sumário de Didática Geral de Luiz Alves de Mattos, livro básico que dominou a Didática em todo o Brasil durante um longo tempo, influenciando a prática pedagógica em quase todas as escolas. Até hoje o faz. Na sua pesquisa de Mestrado "O conteúdo atual da Didática: um discurso da neutralidade científica", OLIVEIRA (1988) verificou que o Sumário está entre os seis livros mais citados pelos professores de Didática entrevistados por ela. E SOARES (1990) acrescenta:

> *"Uma análise do conteúdo ideológico do Sumário parece-me - dada a influência que teve e ainda tem na formação dos professores no Brasil - extremamente importante. Desvendaria a ideologia liberal-pragmatista, os princípios da Escola Nova e o mito da neutralidade dos métodos e técnicas de ensino, que informam, sem que sejam explicitados, a Didática proposta pelo autor. E que informam, portanto, pela influência do Sumário acima apontada, a prática pedagógica de grande número de professores nas escolas brasileiras (sem que eles tenham disso consciência)."*

O uso de recursos didáticos e de material concreto era muito difundido nessa época: confeccionamos muitos cartazes, quadros de pregas, flanelógrafo, quadros seriados. Nas aulas de Didática de Matemática e Didática de Linguagem, elaboramos cadernos que eram verdadeiros manuais de orientação para o professor trabalhar com esses conteúdos no curso primário. Todos com muita ilustração, mostrando as etapas para se desenvolver cada conteúdo.

Terminamos o Curso Normal com a idéia de que estamos pronta: somos uma professora. É o fim de uma jornada, o início de outras.

1.2 Onde Tudo Começou

"Não se descobrem terras novas sem se consentir em perder de vista primeiro e por muito tempo qualquer praia."
(Os Moedeiros Falsos, GIDE [1869 -1951])

1969. Recém-formada no Curso Normal, depois de muita procura, conseguimos um lugar para lecionar: Escolas Combinadas São Rafael. Era esse o nome da escola. Ficava num bairro afastado do centro de Belo Horizonte. A primeira informação que obtivemos da diretora, em sua casa, foi que existiam, no bairro, duas outras escolas, uma estadual e outra municipal. Eram muito boas e por isso selecionavam as crianças. Após a seleção, as que sobravam vinham para as Escolas Combinadas.

Tudo acertado... Ficou decidido que, no dia seguinte, deveríamos começar a dar as aulas. A diretora avisava que ia trabalhar com uma turma da 1ª série. Naquela noite, mal conseguimos dormir. Mil expectativas, mil interrogações: como será a escola? O que vamos ensinar para as crianças?... Começamos a nos lembrar de todas as técnicas e métodos que os professores de Didática haviam me ensinado. Concluímos, então: "Fizemos um ótimo Curso Normal, sabemos alfabetizar, vai ser muito fácil".

No dia seguinte, fomos para a escola. Tomamos um ônibus e chegamos à rua indicada. Perguntamos a um garoto:

- Onde fica a escola?

O menino diz:

- Lá embaixo, pode ir seguindo, é naquela casinha ali.

Tomamos um grande susto. Casinha?... Sim, era uma casinha, no final da rua. Tinha três quartos. Um deles com uma porta para a cozinha, onde era feita a merenda. Chegando até a secretaria, uma parte do quarto maior separada por um biombo, a orientadora explica:

- A sua turma vai ter aula ali, naquele galpão ao lado da igreja, do outro lado da rua. Você vai trabalhar com a 1ª série PL, 1ª série especial, em que os alunos têm, no mínimo, 3 anos de repetência. É uma turma muito ruim, mas é a única que sobrou".

Fomos até o galpão. Qual não foi a nossa surpresa!... Não havia carteiras nem quadro-negro. Estavam, ali, 20 crianças sem nada nas mãos. Ficamos assustadas. Pensamos: O que vamos fazer? Como vamos trabalhar com essas crianças? Se já estavam naquela escola há mais de 3 anos, não deviam agüentar mais escutar:

"Eu sou o Palhaço
Esta casa é minha
Minha casa é de palha".
(Pré-livro: Os Três Porquinhos).

Na verdade, escutar porque não sabiam ler. Não conseguiam nem decorar os fatos fundamentais. Além do mais, como iríamos dar aula sem quadro-negro, sem carteira, sem material? Tentei me acalmar.

Refeita do susto, iniciamos a conversa com as crianças, ou melhor, começamos a escutá-las; era a única coisa que podíamos fazer. Ouvimos o máximo que pudemos. Elas não gostavam de escola, tinham medo de se expressar, falavam pouco e sempre de cabeça baixa. Percebemos que ali nunca poderíamos ser a professora que nos ensinaram a ser. Naquele dia, começamos a aprender a ser professora. Aquelas crianças estavam nos mostrando uma realidade que não conhecíamos. Percebemos que, impondo as coisas, não conseguiríamos nada. E também que, de alguma forma (não sabíamos qual), teríamos que fazer tudo diferente do que nos ensinaram.

Era um desafio. Principiamos a criar alternativas de trabalho. Aquilo que tínhamos aprendido não nos mostrava soluções concretas. As pessoas as quais procurávamos diziam que não nos preocupássemos, que as crianças não aprendiam mesmo e só iam à escola por causa da merenda. Que não ficássemos apreensivas, pois, como nossa turma era especial, o rendimento dos alunos em nada influenciaria na nossa produtividade. E a produtividade era medida pelo índice de aprovação de alunos exigido pela Secretaria de Estado da Educação.

Diante disso, o jeito era agir buscando, experimentando, tentando, errando. Construímos, nós e as crianças, um mimeógrafo de gelatina. Os materiais de que precisávamos eram todos conseguidos por eles. Papel, qualquer um servia, desde o Minas Gerais que é o jornal oficial do Estado, utilizado para cartazes que as próprias crianças faziam, até pedaços de folhas de qualquer cor e tamanho. As meninas ficavam encarregadas de cortá-las, desamassá-las e guardá-las. Materiais para os trabalhos de Matemática eram conseguidos por dois meninos considerados os mais levados da escola. Catavam pauzinhos de picolé na rua, lavavam e colocavam todos eles em uma caixa. O mesmo era feito com tampinhas de refrigerantes.

Perto da escola havia uma árvore que produzia uma fava arredondada. Os meninos decidiram que aquilo seria ótimo para trabalhar nas aulas de Matemática. Subiram na árvore e pronto: estava resolvido mais um problema.

Cada vez mais, nós e as crianças ficávamos envolvidos em tudo. Tentávamos acertar, buscávamos naquelas crianças soluções para as nossas estratégias de ação. Começamos a perceber que a única forma de conseguirmos algum resultado era deixarmos as crianças agirem. Não sabíamos muito o que fazer, só tínhamos certeza de uma coisa: a forma de atuar não era, de maneira alguma, nada do que tínhamos aprendido. Trabalhamos muito naquele ano. Foi maravilhoso!

Até hoje nos lembramos de tudo o que acontecia lá. Aquelas crianças que, segundo os professores da escola, não aprendiam nada, não sabiam nada, me ensinaram muita coisa. Foram elas que nos fizeram questionar, pela primeira vez, a escola, o professor, o ensinar e o aprender. Até então, simplesmente achávamos que para sermos professor bastava imitar os modelos que encontráramos ao longo de nossa vida escolar: dominarmos bem o conteúdo para repeti-lo seguindo as várias técnicas e métodos didáticos que devia usar. Ali, toda essa estrutura foi abalada... não era nada daquilo.

Até 1970, continuamos lecionando nas Escolas Combinadas do Bairro São Rafael. A cada dia, a cada instante, era um aprendizado novo. Nesses dois anos, utilizamos muitas estratégias que tivemos que criar para poder fazer com que aquelas crianças aprendessem. A partir de 1971, começamos a trabalhar como professora alfabetizadora no Colégio Nossa Senhora da Piedade, onde havia feito o Curso Normal. Alfabetizar crianças, para nós, tinha muito de mágica. O método mais utilizado na alfabetização, naquela época, era o global... fase do conto, sentenciação, palavração, até chegar à silabação. Aplicávamos todo aquele método como tinha aprendido, com todas as regras e normas que apareciam nos manuais para o professor. Mas uma coisa muito nos intrigava: por que as crianças, passando por todas aquelas etapas, não aprendiam a ler numa época determinada por nós? Mas, de repente, o que acontecia? Era como um explodir: de um dia para o outro, a criança começava a ler. Mais uma inquietação, um novo questionamento: como esses processos de aprendizagem acontecem nas crianças?

Nas aulas de Matemática, as mesmas dúvidas: o que sucedia com aquelas crianças, quando memorizavam fatos ou resolviam problemas? Seria preciso cantar os fatos para decorá-los? O uso de exercícios padronizados era necessário e conveniente? A apresentação de problemas, com sua respectiva solução, os tornava resolvedores de problemas? A resolução de exercícios e de problemas era um treinamento ou, na verdade, era apenas um adestramento? Todas essas ações deflagravam, de fato, uma aprendizagem de Matemática?

Nessa época, começamos a ter um grande interesse pelas questões relativas ao aprendizado da Matemática. Isso acontece porque, trabalhando com alunos de 5ª a 8ª séries, através de aulas particulares, percebemos o grande problema que é, para eles, aprender a Matemática escolar. Começamos a ter consciência de que no nosso sistema educacional existe uma forte tendência para substituir a compreensão do aluno pela compreensão do professor. Em decorrência desse fato, vamos ter um ensino voltado para a memorização a partir de repetição, ou seja, o clássico modelo:

mostrar para repetir ➔ repetir para decorar ➔ decorar para entender

Havia, de fato, entre os professores de Matemática mais conceituados, a crença de que *"Matemática é mais fácil de decorar que poesia e, uma vez decorada, é mais fácil de ser entendida"*.

Como diz FREUDENTHAL (1981):

> *"[...] predominância da errada perspectiva de substituir o insight do aluno pelo insight do professor ou o insight do matemático adulto. Sendo assim, nesse esquema, a origem do insight do aluno é impedida de acontecer. Portanto a retenção do insight é gravemente comprometida por: treino prematuro, treino em demasia, treinar por treinar."*

Mas, o que fazer? Como criar contextos apropriados para a aprendizagem da Matemática?

Não sabemos. Ficamos confusa. Buscamos alguma saída nos livros de Matemática mais usados na época, mas não encontramos. Começamos então a criar algumas estratégias para fazer com que nossos alunos aprendam: algumas dão certo, outras não. Vamos tentando.

Nessa época, começamos a dar aulas particulares para um aluno de 5ª série que nos traz o livro adotado na sua escola: *Matemática para o Ensino Fundamental*[2]. Esse livro tinha estrutura totalmente diferente dos textos de Matemática utilizados nas escolas da época.

Na apresentação do livro, os autores ressaltavam: [3]

> *"Objetivamos, nessa coleção, dar ao aluno de 11/15 anos uma visão da Matemática atual accessível ao nível de compreensão, despertar-lhe o gosto pela Matemática e ensinar-lhe a linguagem matemática atual. Tivemos sempre em mente desenvolver o raciocínio e o senso crítico do aluno, levando-o à criatividade. Para conseguir isto, a obra foi feita com as atenções voltadas para a idéia central da aprendizagem: o aluno trabalha e o mestre orienta."*

Esse fato nos chama muito a atenção, pois mostra uma nova postura, diferente da que conhecíamos, para se ensinar Matemática. Começamos, então, a estudar toda a estrutura dessa obra. Vemos que:

- as noções básicas de Conjunto, Relações e Funções são utilizadas em todas as lições;
- as noções geométricas ensinadas a partir de transformações (funções).

Aqui, um grande choque. No curso de magistério quase não tivéramos contacto com Geometria. Nossas experiências geométricas se resumiam ao reconhecimento de algumas formas e de algumas características

---

2 *Matemática para o Ensino Fundamental* era uma coleção destinada à 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do Curso Fundamental. Seus autores eram os professores Reginaldo Naves de Souza Lima e Maria do Carmo Vila, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. A obra seguia os programas aceitos pelo PREMEN (Programa de Ensino Médio Nacional) de Minas Gerais. Rio Grande do Sul e Espírito Santo, havendo sido experimentada nas Escolas Polivalentes de Minas Gerais. Foi publicada em abril de 1972.

3 Apresentação feita pelos autores no livro de 5ª série, publicado em abril de 1972.

de figuras planas, e a alguns cálculos de perímetros, áreas e volumes, mas, na verdade, na sua forma mais aritmética do que geométrica.

Quanto ao aspecto didático, no livro são utilizados

- estorietas em quadrinhos na apresentação de cada unidade;
- cores como elementos de aprendizagem e conteúdo;
- *cartoons* como elemento catalisador de aprendizagem;
- exercícios num caderno à parte, sob a forma de estudo dirigido, para que o aluno trabalhe diretamente sobre o texto.

A forma de apresentação e organização da Matemática nesse livro nos dá uma idéia de que o conteúdo que tínhamos aprendido até então era praticamente nada em relação ao que víamos agora. Vislumbrar uma nova alternativa para trabalhar com a Matemática nos fascina. Decidimos, então, fazer o curso de Licenciatura em Matemática.

1.3 Em Busca de um Caminho

"Ouça um bom conselho
Que eu lhe dou de graça
Inútil dormir que a dor não passa
Espere sentado
Ou você se cansa
Está provado, quem espera nunca alcança.
Ouça meu amigo, deixa esse regaço,
Brinque com meu fogo, venha se queimar.
Faça como eu digo, faça como eu faço,
Aja duas vezes antes de pensar.
Corro atrás do tempo, vim de não sei onde
Devagar é que não se vai longe.
Eu semeio o vento na minha cidade
Vou pra rua e bebo a tempestade."

(Bom conselho, Chico Buarque, 1972)

Em 1975, prestamos vestibular para o Curso de Matemática do Instituto Cultural Newton Paiva Ferreira. O grupo de professores que o coordenava[4] tinha idéias bem inovadoras para um curso de Licenciatura. Por isso, o vestibular dessa instituição era bem diferente do usual. Na prova, havia um texto de Matemática, criado por um dos responsáveis. Após sua leitura, devíamos responder questões que exigiam interpretação, análise e justificativas sobre o texto. Além disso, passamos por uma pequena prova de conhecimentos específicos de Matemática ginasial e colegial. Essa era menos importante e só existia por exigências legais.

Esse vestibular objetivava selecionar quem fosse capaz de ler, analisar e interpretar textos matemáticos, uma vez que a maioria das disciplinas não era ensinada por meio de aula expositiva.

Constatou-se que, enquanto a Escola manteve esse tipo de vestibular, os alunos selecionados expressaram um grau de aceitação profissional do magistério que era nitidamente superior aos alunos selecionados pelos processos tradicionais que a Escola voltou a adotar posteriormente.

Conseguimos ser aprovada no vestibular. Começamos a fazer o curso de Matemática. Paralelamente ao curso, continuávamos a trabalhar com a 1ª série. Além da 1ª série, a diretora da escola destinou-nos uma turma de 7ª série, em que começamos a dar aulas de Matemática. Era muito trabalho: de manhã, aulas na 7ª série; à tarde, aulas na turma de 1ª série; à noite, freqüentávamos o curso de Matemática.

Em 1976, abandonamos a turma de 1ª série nos dedicamos ao curso de Matemática e às aulas de Matemática para 7ª e 8ª séries.

Fazer um curso de Matemática era um grande desafio para nós. Como vínhamos do Normal, tínhamos visto menos Matemática do que os outros colegas que vinham do Científico. Mas aceitamos o desafio. Estudávamos e

---

[4] Os professores que coordenavam o curso de Matemática eram todos da Universidade Federal de Minas Gerais e já haviam participado de experiências educacionais inovadoras como a do Colégio Universitário da UFMG, do PREMEM, etc.

estudávamos muito. Gostávamos tremendamente do curso. Era completamente diferente dos outros cursos de Licenciatura existentes em Belo Horizonte. Primeiro, porque o grupo que o organizou, ou seja, o grupo de professores e coordenadores, tinha uma idéia diferente de como teria que ser um curso de Matemática para futuros professores de Matemática. Na própria seleção, o que eles buscavam eram professores em potencial. Estudamos Teoria dos Conjuntos no livro do Papy em francês; lemos Fundamentos de Matemática no livro *Fundamentos de Matemáticas Universitárias* de Allendoerfer e Oakley, em espanhol; Álgebra no livro de Florence Lavaglia, Merritt Elmore, Donald Conway, em inglês; Fundamentos de Geometria nos livros de Edwin Moise e Floyd Downs, em espanhol; Cálculo com Geometria Analítica em Louis Leithold; Física trabalhamos com o clássico do Halliday.

Os textos eram bem atuais para a época, tínhamos contato com outras línguas e já trabalhávamos de uma forma bem diferente. Nossas atividades eram em grupos e praticamente não havia aula expositiva, mas éramos orientada e auxiliada nos meus estudos. Fizemos muitas instruções programadas, estudos de textos e até um curso de Álgebra Moderna todo ele dentro do Plano Keller. Foi realmente interessantíssimo.

Esse curso de Matemática foi de um grande impacto para nós e para a maioria de meus colegas. Para nós, particularmente, fazia com que começássemos a encontrar algumas respostas para os nossos questionamentos e aumentava ainda mais a nossa angústia, a nossa ansiedade em saber como deveria ser realmente um professor de Matemática. Paralelamente, continuávamos a ser professora do 1º grau, em que trabalhava com alunos de 7ª série.

No último período de Matemática, fomos fazer o Estágio na Universidade Federal de Minas Gerais: na Escola de 1º grau do Centro Pedagógico. Trabalhamos durante 6 meses como estagiária.

Na época, dar aulas no Centro Pedagógico era bem diferente das outras Escolas. Trabalhamos com professores que já tinham algumas tendências e alguns pontos de vista diferentes com relação ao ensino de Matemática.

Em 1977, terminamos o curso de Matemática e o estágio na Universidade Federal. Logo em seguida, fazemos um concurso para professora de Estatística no Instituto Cultural Newton Paiva Ferreira. Somos aprovada e começamos a lecionar em março, no curso de Psicologia, a disciplina Estatística. No mês de abril, fazemos um concurso na Universidade Federal de Minas Gerais para sermos professora de Matemática no Centro Pedagógico da Universidade. Somos aprovada e passamos a dividir o nosso tempo: durante o dia, trabalhamos como professora colaboradora do Centro Pedagógico da Universidade Federal e, à noite, com Estatística no curso de Psicologia do Instituto Cultural Newton Paiva Ferreira.

1.4 Um Sonho que Acontece

"Agora não pergunto mais, pra onde vai a estrada
Agora não espero mais, aquela madrugada
Vai ser, vai ser, vai ter de ser, vai ser, faca amolada
Um brilho cego de paixão, e fé, faca amolada."
(Fé Cega, Faca Amolada, Milton Nascimento)

1978. Começamos a lecionar na Escola de 1º Grau do Centro Pedagógico da UFMG e no curso de Psicologia do Instituto Cultural Newton Paiva Ferreira. Ambas as atividades são muito interessantes; ao mesmo tempo em que lecionamos para adultos, na Faculdade, damos aulas também para crianças e adolescentes no Centro Pedagógico.

No Centro Pedagógico, o trabalho como professora aplicadora da Proposta AME (Atividades Matemáticas que Educam) é desafiante[5]. A Proposta

---

[5] A metodologia e todas as atividades desenvolvidas no Projeto AME são de autoria dos professores Reginaldo Naves de Souza Lima e Maria do Carmo Vila, do Departamento de Matemática da UFMG.

AME foi iniciada em 1976, quando o Departamento de Matemática da UFMG enviou os professores Reginaldo Naves de Souza Lima e Maria do Carmo Vila, para o Centro Pedagógico, para cooperarem com os professores de Matemática dessa Escola.

Esse trabalho, que não se baseou em teorias educacionais usualmente adotadas, cresceu com os experimentos em salas de aula do CP e tomou características bem marcantes por serem nitidamente bem diferentes dos procedimentos tradicionais de ensino de Matemática.

Nesta proposta, a dialética

não é o usual: explicação ➔ aprendizagem,
mas atividade ➔ aprendizagem.

Sendo assim, as tarefas sugeridas pelo professor, aliadas às atividades dos alunos, contribuem para a aprendizagem.

Sob esse enfoque, ensinar Matemática não é uma transmissão de informações nem um adestramento em linguagem Matemática, como se essa fosse uma língua estrangeira.

Ensinar Matemática é deflagrar idéias matemáticas na cabeça do aluno. Isso é conseguido através de desafios postos na forma de situação-problema. Mergulhados nessas situações problemáticas, o aluno, conduzido por perguntas adequadas, é desafiado a resolvê-las, utilizando seu próprio referencial e suas próprias tentativas. Esse desafio é o responsável pelo deflagrar de idéias.

Para viabilizar essa proposta, professor e aluno trabalham de maneira não usual, ou seja:

- não há aulas expositivas;
- raramente se usam quadro-negro e giz;
- o aluno não recebe informações;

- o professor não explica as lições, mas apresenta tarefas que são situações problemáticas; essas, em forma lúdica, permitem ao aluno encontrar padrões que lhe dão oportunidades de matematizar conceitos matemáticos;
- o ponto de partida é o referencial do aluno: ou seja, os pontos de referência que ele tem da situação apresentada;
- é explorada a ação natural do aluno como ser dinâmico e ativo;
- são dados totais respeito e atenção ao desenvolvimento do aluno e às suas estratégias de pensamento.

O professor determina tarefas para os alunos realizarem. À medida que o aluno as realiza e as vivencia, o professor o interroga sobre as experiências que ele teve ali e o leva a verbalizá-las.

Para vivenciar essas experiências que serão, em seguida, transformadas em Matemática - procedimento denominado MATEMATIZAÇÃO -, o aluno é exposto, pelo professor, a três tipos de ações denominadas:

- atividades corporais;
- atividades de manipulação simples;
- atividades de manipulação com registro.

Ao expor os alunos a todas essas atividades, constatávamos que todos, sem exceção, passavam a gostar de Matemática, ainda que essa não fosse a sua disciplina favorita. Além disso, verificamos que, no mínimo, os alunos conseguiam o seu alfabetismo em Matemática.

Em seguida, o aluno é levado a textos que foram criados com a finalidade de continuar a tarefa de aprendizagem. Esse tipo de procedimento recebeu o nome de LEITURA ANALÍTICA, por causa das características que adota:

- leitura realizada em voz alta por um dos alunos;

- correção do ritmo, entonação e ênfase realizada pelo professor;
- re-leitura pelo mesmo aluno e análise do que se pede;
- realização, por todos os alunos, da tarefa pedida;
- correção, no quadro, realizada por um dos alunos;
- debate, por todos os alunos, para análise e julgamento da correção;
- apresentação de resoluções diferentes, para apreciação dos demais.

A partir da 3ª série, o aluno dá um passo a mais denominado CALCULOGIA, que visa a dois objetivos:

1. Dar a ele eficiência e rapidez nos cálculos elementares (aritméticos e algébricos).
2. Tornar sua mente mais flexível.

Esses dois objetivos impõem à Calculogia dois tipos de tarefas, ambas com características próprias e diferentes. Além disso, não é simples algoritmia e não trabalha com listas de exercícios tão comuns no ensino tradicional. Pode, inclusive, até exigir materiais para a manipulação. Resulta, da Calculogia, a memorização dos fatos numéricos (a denominada tabuada), que tem características próprias na Proposta AME, jamais sendo a memorização realizada através de cantilenas rítmicas. É um trabalho basicamente visual. Reparar que o visual é essencial para a imagem mental.

Os alunos, da 5ª série em diante, não efetuam atividades corporais e, a partir da 7ª série, dependendo do tipo de aluno, realizam LEITURA POR TÓPICOS, que significa estudar em vários livros, sob a orientação do professor.

Os alunos são encorajados a fazer perguntas, a analisar erros, propor soluções diferentes e a participar das discussões em classe. A cada aluno é dada ampla liberdade para a resolução dos desafios, ou seja, nunca é obrigado a seguir um modelo imposto pelo professor. Dessa forma, tem possibilidades de inovar.

Obtém-se, assim, uma aprendizagem significativa traduzida por maior disposição para resolver situações-problema e pelo crescente desenvolvimento de uma atitude de reflexão crítica.

Participamos de toda a evolução dessa proposta, inicialmente como professora aplicadora, ou seja, discutíamos com os coordenadores as atividades a serem trabalhadas na sala de aula, aplicávamo-las aos alunos e depois voltávamos para discutir o que acontecera. As atividades eram reformuladas, novos materiais produzidos e novamente aplicados nas salas de aula.

Era um trabalho que muito nos interessava e realmente a ele nos dedicamos com afinco. Era o que buscávamos, tanto em termos de forma de trabalhar, como de idéias de como agir. Crescemos muito como pessoa e em termos profissionais, pois o Projeto AME fazia com que cada vez mais enxergássemos as crianças, a Matemática, o aprender Matemática de uma forma completamente diferente da usual. Dava-nos coragem e vontade de experimentar, pesquisar, analisar, questionar e estudar.

A aplicação dessa proposta apresentava resultados surpreendentes tanto em termos de aprendizagem matemática como no desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática, por parte de alunos e professores aplicadores da proposta.

Encontramos algumas reações contrárias à Proposta por parte de alguns pais que achavam, na verdade, que as crianças deveriam sofrer para aprender. Para eles, o estudo da Matemática só pode ser sofrido; caso contrário, não é Matemática válida. Acreditam que esse sofrimento é abençoado pois traz crescimento, ainda que não resulte em aprendizado. Mas não desistíamos; íamos em frente; a Proposta continuava.

O trabalho com a Proposta AME se estendia também ao CECIMIG (Centro de Treinamento de Professores de Ciências de Minas Gerais), órgão ligado à UFMG. Lá, participávamos de cursos com os criadores da Proposta, estudávamos, pesquisávamos sobre o que acontecia nas salas de aula do Centro Pedagógico. Realmente já era um grupo que se dedicava à Educação Matemática.

No CECIMIG, começamos a participar, como docente, dos cursos de Treinamento de Professores de Escolas Municipais e Estaduais no interior do Estado e até em outros Estados. Eram treinamentos, encontros, cursos de reciclagem e aperfeiçoamento.

Começamos, então, a ter consciência do inadequado preparo dos nossos professores e da situação de desamparo, em que vivem, na rotina das salas de aula. Tornamos-nos o que hoje se denomina "professor-pesquisador". Para que isso acontecesse, foi necessária a vivência de situações práticas de sala de aula, estudos e discussões.

Por tudo isso, não acreditamos que os professores brasileiros se tranformarão em professores-pesquisadores apenas conhecendo a definição do termo, a filosofia de sua atuação em sala de aula e o incentivo de que devem ser professores-pesquisadores.

Nessa época, alguns projetos do governo federal procuram atender a zona rural. Dentre esses, foi elaborado pelo MEC, em 1977, o Edurural, com o objetivo de promover a expansão e a melhoria do ensino rural.[6] Concretizado em 1980, o programa foi aplicado em todo o Nordeste. Participamos das ações em Maceió e Imperatriz, no Maranhão. Constatamos uma situação difícil: professores leigos, despreparados mas com muita vontade de aprender. E nos perguntamos: esses treinamentos ajudam realmente ao professor?

No CECIMIG, o grupo de Matemática já questionava as estratégias usualmente adotadas para treinamento de professores. Desde 1974, o grupo já

---

6 Esse projeto deveria integrar-se às ações do Banco Mundial que financiou um terço dos custos do mesmo. A avaliação do programa, feita pela Universidade Federal do Ceará com a colaboração da Fundação Carlos Chagas de São Paulo, revelou que *"nada se alterou no panorama educacional da região"* e que *"nem mesmo os conteúdos mínimos, previstos para cada uma das séries investigadas, eram dominados pelos alunos"* (SILVA et al., 1993: 7).

havia constatado que o treinamento de professores feito a partir de cursos de 20 horas, 40 horas, etc., não levava a resultados promissores. O professor voltava para a sua escola, chegava até a tentar algumas inovações, mas, depois de um ou dois meses de trabalho, voltava ao tradicional. Não tendo com quem trocar ou discutir as novas idéias, tudo se torna uma barreira para ele.

Com isso, começamos a fazer uma modalidade diferente de atendimento a professores. Só atendíamos a escolas que, em crise, estivessem interessadas em buscar novas alternativas, novas formas de trabalhar com Matemática. As pessoas vinham até o CECIMIG, buscavam a nossa ajuda. Fazíamos, então, uma palestra inicial na escola e, a partir do interesse desse grupo, e se todos os professores, supervisores, orientadores da escola estivessem de acordo, começávamos a dar assessoria, mensalmente, a esse grupo. E esse trabalho veio acontecendo até o ano de 1995. Atendemos várias escolas do Estado de Minas, fora do Estado de Minas Gerais e constatamos que essa modalidade de ajuda, ou essa modalidade de preparo do professor em serviço é a que forneceu maiores possibilidades de alteração na prática do ensino de Matemática na escola de 1º grau.

O que aprendemos com tudo isso? É impossível resgatar tudo o que ocorreu durante esse trabalho, mas cremos ser possível detectar alguns resultados:

1. **A mudança na escola só ocorre se todos, sem exceção, a buscam:** A cumplicidade entre os professores na aplicação de propostas inovadoras faz com que os sucessos e fracassos de cada um se completem na busca de razões para a execução do novo trabalho, nas indagações que os levam à necessidade de estudar. Se um só dos professores não aceita as mudanças, ele se torna um foco de discórdia e é inevitável, mais cedo ou mais tarde, o fracasso da inovação.

2. **A base da mudança consiste em o professor largar o quadro e o tablado**. De fato, o professor não é ator e sua atuação não é declamar

um texto. Querendo manter a analogia com o teatro, o trabalho do professor se aproxima mais daquele do diretor do espetáculo: atores seriam os alunos.

3. **A mudança só poderá ocorrer se os professores tiverem acompanhamento e orientação por algum tempo**. É necessário não esquecer que todo professor só conheceu aulas em que o trabalho consiste em declamar e escrever o conteúdo, preocupar-se com a disciplina e cobrar resultados. Isso desde o primeiro dia em que freqüentou uma sala de aula (como aluno na 1ª série).

Como romper este cerco, sem ajuda? E exigem que criem a partir do nada. A situação piora para aqueles que trabalham de manhã, à tarde e à noite. Tudo mais complicado ainda pelo baixo índice de seus salários. Logo, é importante fornecer-lhes exemplos ou fontes de exemplos.

4. **Uma proposta tem várias leituras, ou seja, encontramos:**

- professores que tomaram a proposta como receita, tornando-se apenas aplicadores, não conseguindo solucionar sozinhos os problemas que o cotidiano da sala de aula lhes apresenta;
- professores que aplicaram, por um tempo, a proposta e depois voltaram a trabalhar com o livro didático mas com uma nova postura;
- professores que adotaram integralmente a proposta e depois de dois a três anos de trabalho se tornavam independentes. Alguns chegaram até a criar novas alternativas de atuação;
- professores que não adotaram a proposta e não tiveram nenhuma curiosidade em conhecê-la e experimentá-la. Esses professores são aqueles completamente contrários a qualquer possibilidade de mudança na escola, não aceitam de maneira alguma trabalhar com

qualquer que seja a proposta inovadora. Entre estes há, inclusive, aqueles que fazem o maior teatro de adoção, inventam atuações de alunos... mas, na verdade, nada fazem.

É necessário reconhecer que a conquista da autonomia no trabalho é um processo longo que exige muitas buscas e muita flexibilidade para se adaptar a cada ano.

5. **O maior adversário para qualquer alternativa de mudança na atuação do professor é a extrema simplicidade de seu trabalho na sala de aula**. Nesse, ele cuida de apenas quatro variáveis:

a) declamar e escrever o texto do conteúdo;
b) cuidar para que se façam ordem e silêncio na sala;
c) levar os alunos a treinarem o que ele declamou;
d) cobrar do aluno a repetição daquilo que declamou.

É importante observar que essas quatro atividades são facílimas e realizá-las em sala de aula configura-se para todos (pais, direção, professores e alunos) como uma aula. O pior é que outra atividade acrescentada a essas jamais é aceita como uma situação que possibilite a aprendizagem.

Em 1983, no CECIMIG, elaboramos o Projeto "Treinamento Não-Convencional em Serviço de Professores de Matemática e Didática de Matemática das Escolas de Magistério de 1º Grau de Minas Gerais", integrando o Subprograma "Educação para a Ciência", da CAPES.[7]

---

7 Subprojeto "Treinamento Não-Convencional, em Serviço, de Professores de Matemática e de Didática de Matemática das Escolas de Magistério de 1º Grau de Minas Gerais" integrava o Subprograma "Educação para a Ciência", da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). O Subprojeto era administrado pela Fundação de Desenvolvimento da Pesquisa (FUNDEP) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e executado pelo Centro de Treinamento para Professores de Ciências de Minas Gerais (CECIMIG) com o apoio da Secretaria de Estado da Educação (SEEMG) e coordenação geral do professor Reginaldo Naves de Souza Lima, coordenação pedagógica da professora Maria do Carmo Vila e avaliação da professora Eliane Scheid Gazire.

O Subprojeto tinha por objetivo criar lideranças, aperfeiçoar professores de Matemática, professores de Didática de Matemática de Escolas de Magistério de 1º Grau (Escolas Normais) e técnicos de Delegacias de Ensino de Minas Gerais, através de treinamento não-convencional, em serviço.

Parte do treinamento era realizada através de Encontros de Trabalho que aconteciam mensalmente em quatro cidades-núcleos: Montes Claros, Governador Valadres, São Sebastião do Paraíso e Belo Horizonte. Cada ENCONTRO DE TRABALHO era dirigido por duas pessoas da equipe do projeto: um que era o líder responsável pelo núcleo, e o outro que era um dinamizador. Cada núcleo teve, portanto, um mesmo líder durante todo o projeto. Já o dinamizador era um dos dez professores que trabalhavem no Centro Pedagógico com a Proposta AME e podiam variar de núcleo a cada encontro.

O treinamento pretendia possibilitar aos cursistas a aplicação de materiais instrucionais não usuais dentro de novas técnicas e novos métodos, a aquisição de novas posturas diante de seus alunos e uma visão diferente desse aluno.

Enquanto participavam do treinamento, os referidos professores aplicavam em suas salas de aula os materiais instrucionais estudados durante os Encontros e os estudados à distância. Para tanto, tinham à sua disposição todo o material necessário para o trabalho com seus alunos.

Na etapa subseqüente do Projeto, os cursistas funcionavam, dentro de sua região, como multiplicadores junto aos professores das séries iniciais do 1º grau, levando-lhes práticas educacionais para suprirem as lacunas e as distorções de sua formação profissional.

Conseguimos com esse Projeto a formação de lideranças em algumas regiões de Minas Gerais. E elas continuaram como é o caso do grupo de professores da Escola Normal de Montes Claros que, naquela época, participavam do treinamento e hoje atuam no CEFAM (Centro de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério) e na UNIMONTES (Universidade Federal de

Montes Claros). Criaram até um grupo de Educação Matemática que desenvolve projetos de capacitação de professores de Matemática, assessoram a Superintendência de Ensino do Estado, na região, promovendo cursos, implantando propostas de ensino inovadoras e, inclusive, cursaram pós-graduação.

O grande mérito do Projeto foi aliar reflexões, discussões de textos e materiais instrucionais com a prática dos professores.

Como aduz PIMENTEL (1991: 19):

> *"[...] um professor, que tem um conhecimento sobre sua prática, sabe quais são os meios, porque os meios são aqueles, e como utilizá-los. Se não domina o conhecimento, permanece no fazer, não chegando ao compreender. E o fazer, na prática do professor, fica reduzido a uma técnica: o sujeito sabe como faz, mas não sabe porque faz. Daí, a importância de que ele construa um conhecimento teórico relacionado à sua prática."*

A maior dificuldade que enfrentamos foi a rotatividade dos cursistas. Todos eram de Escolas Estaduais em que é comum, anualmente, a troca de professores. Conseqüentemente, os novos professores que assumiam as aulas caracterizavam-se como participantes de um grupo iniciante a ser atendido pelo Projeto.

A CAPES, na avaliação do Projeto, acrescenta:[8]

> *"É nosso parecer que se trata de uma proposta inovadora que durante sua realização alcançou um efeito multiplicador inédito. Na verdade, chega a antecipar, de certa forma, a proposta de rede de integração e disseminação que se constitui na proposta de continuidade do SPEC."*

---

8 Parecer da Comissão de Avaliação do PADCT (Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico) - SPEC (Subprograma de Educação para Ciência). PI 087/86. Brasília, 2-6 de maio de 1988.

e examinando os materiais instrucionais utilizados nos treinamentos constata:

> *"Quanto aos materiais enviados, foi suficientemente esclarecido pelo coordenador que não se trata de 'coleção de material didático', mas de instrumentos que servem à dinamização da interação aluno x conteúdo da aprendizagem."*

E conclui também:

> *"dada a constante reformulação a que se propõe a equipe do projeto, a recomendação de considerar a possibilidade de entrosamento com o projeto de pesquisa a ser desenvolvido por alunos de cursos de pós-graduação em Educação Matemática ou em Psicologia da Aprendizagem."*

Paralelamente a essas atividades com o grupo de professores, lecionávamos à noite, no Instituto Newton Paiva, a disciplina Estatística para alunos dos cursos de Psicologia e Pedagogia. Nesse trabalho, uma constatação nos assusta: para aqueles estudantes a Matemática é difícil e enfadonha. A maioria deles estava ali porque imaginava que não teriam, no curso, de aprender qualquer disciplina relacionada com Matemática. Para eles, Matemática era um pesadelo. Naquele momento, o pesadelo era nosso, pois, como poderíamos ensinar Estatística em tal situação?

Como dizem DAVIES & HERSCH (1989: 16)

> *"Há na vida e na obra do professor de matemática uma estranha contradição. Estudou matemática por decisão própria. Adora deixar-se perder por esse mundo ideal de clareza e precisão. Nada o satisfaria mais que convidar outros a unirem-se a ele. Para quem ama a matemática, ensiná-la deveria ser um prazer... é triste dizer, mas as coisas não são exatamente assim. Muitos dos alunos das classes de matemática encontram-se nelas por obrigação. É freqüente que lhes sejam insípidas; muitos deles têm grandes dificuldades para aprender sequer um pouquinho. Que professor de matemática poderá se*

> *esquecer da primeira vez que apresentou em classe uma questão particularmente elegante, que transcendia os fatos e problemas básicos do livro texto? Terminada a exposição, alguém levanta a mão: 'Isto vai cair no exame final'?"*

Começamos então a buscar estratégias diferentes para trabalhar com esses grupos: primeiro tentamos desmitificar esse tabu da Matemática e pesquisar em que situações de suas vidas profissionais vão utilizar a Estatística.

Trabalhamos dois anos com esses cursos. Logo em seguida, começamos a lecionar Fundamentos de Matemática, Fundamentos de Geometria e Metodologia de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática.

É um curso de Licenciatura noturno onde a maioria dos alunos não tinha, na verdade, como maior interesse, o magistério. Muitos deles estavam ali, porque não haviam passado no vestibular de Engenharia.

As maiores dificuldades acontecem nos cursos de Fundamentos de Geometria. Todos eles têm as mesmas queixas: aprenderam pouca ou quase nenhuma Geometria no 1º e 2º Graus. Por isso o curso os assusta.

Reencontramos esses alunos no curso de Metodologia de Matemática. É interessante notar que alguns, mesmo anteriormente afirmando que não iriam lecionar, já se encontram trabalhando em escolas estaduais e particulares.

Inicialmente, o curso se configura como algo de pouca importância. Acreditam que, para ensinar Matemática, basta dominar os conteúdos matemáticos. Começamos, então, a fazer um trabalho aliando teoria e prática na tentativa de colocá-los frente a questões de aprendizado da Matemática.

Em 1983, fomos eleita vice-diretora da Escola de 1º Grau do Centro Pedagógico da Universidade Federal de Minas Gerais - CPUFMG. Após exercermos o cargo durante três meses, assumimos a direção em substituição à diretora eleita.

Anteriormente já havíamos passado por experiências que nos faziam ter vários olhares para a Escola:

- como professora do curso primário, de 5ª à 8ª séries, do 2º grau de Escola pública e particular e do próprio Centro Pedagógico;
- como secretária da Associação de Pais e Mestres do Colégio Nossa Senhora da Piedade, que nos fez ver a tentativa de envolvimento mútuo entre a Escola e a comunidade imediatamente ligada a ela: pais e professores;
- como participante dos Projetos do CECIMIG, assessorando Escolas públicas, particulares, cooperativas, em Belo Horizonte, no interior do Estado de Minas Gerais e até fora do Estado.

Já havíamos passado por vários momentos que nos faziam crer que a escola não era nada do que idealizávamos. Supúnhamos, como descrevem EZPELETA & ROCKWELL (1989: 9):

> *"Momentos de perplexidade diante da resistência das escolas na assimilação dos programas educacionais de que participávamos. Momentos repetidos em que o anedótico revelava bem mais a vida da escola do que o sistemático. Momentos em que se tornava palpável a intenção política por trás dos discursos técnicos sobre a escola. Momentos e situações que alimentavam a insatisfação com as formas usuais de falar da prática escolar."*

Mas agora, a situação era outra. Estávamos diante de uma Escola com características bem diferentes das outras. Como diretora do CPUFMG, temos a oportunidade de ver a Escola de uma maneira mais abrangente, fora da sala de aula.

O Centro Pedagógico começou a funcionar há 25 anos, quando o Colégio de Aplicação, que oferecia os cursos Ginasial, Clássico e Normal (Magistério) transforma-se em Centro Pedagógico. Criam-se, então, as séries iniciais do 1° Grau e incorpora o Colégio Técnico - COLTEC. Assim, o Centro Pedagógico passa a oferecer o ensino de 1° Grau e cursos profissionalizantes que faziam parte do COLTEC, com a finalidade de servir de campo de estudos e pesquisas para alunos da UFMG, conforme Decreto Federal n. 6.237, de 28 de fevereiro de 1968 e Estatuto da UFMG n. 47, § 1°, de 6 de novembro de 1968.

A Escola de 1° Grau do Centro Pedagógico fica situada no Campus da UFMG num local privilegiado, uma grande área verde, sem muros e portões. Um lugar livre, aberto, desprovido de limites que normalmente caracterizam um estabelecimento de ensino. Suas instalações são amplas e confortáveis.

O corpo docente da Escola constitui-se de professores pertencentes à carreira de 1° e 2° graus da UFMG, nela lotados e de professores da carreira de 3° grau, oriundos dos diversos departamentos dos Institutos da UFMG, que optaram por trabalhar no CPUFMG. Todos os professores que lecionam nas séries iniciais do ensino fundamental têm curso superior: Pedagogia, Psicologia, Letras, Ciências Físicas e Biológicas, Educação Física, Matemática, Música ou Teatro.

O número de alunos por sala de 1ª a 8ª séries não excede a 30. E são. ao todo, cerca de 720 alunos.

A Escola tem um currículo mínimo, organizado pelos professores de cada núcleo[9]. Esse currículo é, basicamente, o mesmo adotado pelas escolas das redes estadual, municipal e particular do Estado de Minas Gerais.

O processo de seleção para o ingresso na Escola de 1° Grau – CPUFMG – é feito na 1ª série. Ao longo dos anos, esse processo sofreu várias alterações; mas em todas elas previa-se sempre a seleção de um número de crianças provindas de diferentes camadas sociais.

---

9 Em 1993, o Centro Pedagógico implementou uma mudança em nível setorial, ou seja, foram organizados núcleos de ensino. Os núcleos ficaram assim constituídos: Núcleo Básico - professores de 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental que lecionam as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática: Núcleos de Matemática, Língua Portuguesa, Línguas Estrangeiras, etc. agrupam os professores de 3ª a 8ª séries.

Hoje, depois de muitas discussões, e por considerar o processo seletivo através de provas e testes anti-democráticos e desgastantes, instituiu-se o sorteio. As crianças sorteadas são submetidas a um teste de leitura. Tanto as alfabetizadas como as semi-alfabetizadas e as não-alfabetizadas são misturadas de forma a configurar três turmas heterogêneas de 1ª série.

A direção do Centro Pedagógico é uma gestão colegiada, ou seja, formada por um diretor, um vice-diretor e pelo CPA (Colegiado Pedagógico e Administrativo) constituído pelos chefes de setores (Matemática, Português, Geografia, História, Ciências, Educação Artística, Técnicas Comerciais, Educação Física) e pelos representantes das seções administrativas.

A experiência como diretora do Centro Pedagógico nos fez refletir muito sobre o significado e o papel da escola no mundo hoje, bem como o papel da Matemática nessa escola. Assustada, constatamos que, mesmo sendo aparentemente uma escola diferente, o Centro Pedegógico vivia muitas das dificuldades e dos problemas de ordem pedagógica vivenciados pelas outras escolas.

Questões e mais questões nos vieram à cabeça:

- por que as crianças que entravam na escola, na 1° série, e apresemtavam problemas de aprendizagem, ao saírem na 8ª série, continuavam com aqueles problemas e, inclusive, tinham ainda acrescentado a eles mais alguns?

- por que o Centro Pedagógico, sendo um centro de pesquisas, tinha dificuldades de implantar propostas inovadoras de ensino?

- por que o Centro Pedagógico, tendo oportunidade de explorar novas propostas de ensino e ser modelo para o sistema educacional, sempre se curvava diante das pressões que o forçavam a acompanhar os modelos tradicionais existentes na comunidade?

Todo esse trabalho fazia com que cada vez mais sentíssemos necessidade de estudar, de pesquisar, de organizar teoricamente a nossa prática.

Por isso, cada vez mais a idéia de fazer um curso de Mestrado nos atraía.

Esperamos ansiosamente a criação do primeiro Mestrado em Educação Matemática no país. Fizemos a seleção em 1983. Começamos a freqüentar, em 1984, o curso da UNESP, de Rio Claro.

1.5 Novos Caminhos

> *"A toda hora rola uma estória*
> *que é preciso estar atento.*
> *A toda hora um movimento*
> *que muda o rumo dos ventos."*
> (Paulinho da Viola)

Fazer o mestrado em Rio Claro foi outra fase muito boa na nossa vida. Era tudo com que sonhávamos: chegar a um mestrado, e, principalmente, um mestrado em Educação Matemática. Fomos, então, aluna da primeira turma do primeiro mestrado de Educação Matemática no Brasil. Foi uma seleção dura. Eram 80 candidatos para 10 vagas. Fomos selecionada. Assim, participamos de um grupo muito interessante porque eram dez pessoas vindas de vários Estados do Brasil.

Afastamo-nos das atividades no Centro Pedagógico da UFMG e do Instituto Cultural Newton Paiva Ferreira. Continuamos participando somente do Projeto de Treinamento de Professores de Matemática e Didática de Matemática das Escolas de Magistério de 1º Grau de Minas Gerais, financiado pela CAPES. Uma vez por mês, vínhamos a Belo Horizonte, depois íamos até São Sebastião do Paraíso, uma cidade do interior, onde coordenávamos um dos grupos do Projeto. Em seguida, voltávamos para Rio Claro.

Nossa tese de mestrado foi sobre resolução de problemas, tema totalmente novo no Brasil. Na verdade, ainda não existia nenhuma literatura em português sobre resolução de problemas. Fomos orientada pelo Professor Dr. Luiz Roberto Dante que, nessa época, era o coordenador do mestrado de Rio Claro. Foi realmente um tempo em que os nossos questionamentos aumentaram, cresceu a nossa necessidade de busca e a nossa vontade de pesquisar.

Entre esses questionamentos dois se destacavam:

1. Por que, na escola de 1ª à 4ª série, as professoras tinham pouco ou quase nenhum conhecimento de Geometria?

2. Por que os professores de 5ª à 8ª séries, apesar de terem cursado licenciatura de Matemática, davam pouca atenção à Geometria?

1.6 Viver desse Sonho, o Encantamento, a Fantasia

"Se procurar bem,
você acaba encontrando
não a explicação (duvidosa)
mas a poesia (inexplicável)
da vida.
(Carlos Drummond de Andrade)

1987. Voltamos para Belo Horizonte. Reassumimos o cargo de professora no Centro Pedagógico da UFMG.

Continuamos também assessorando escolas de 1º Grau fora da Universidade, na aplicação do Projeto AME.

Começamos a atuar como docente no curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, em nível de Especialização, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte - FAFI/BH.

Atuamos também como professora do curso de Pós-Graduação em Psicopedagogia, trabalhando com a disciplina Intervenção Psicopedagógica em Matemática, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Belo Horizonte, no CEPEMG (Centro de Estudos e Pesquisas Educacionais de Minas Gerais) e na PUCMG (Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais).

O curso de Educação Matemática tem uma modalidade um pouco diferente das usuais. Trabalhamos com várias disciplinas que são denominadas "Tópicos". Lecionamos Tópicos de Geometria Moderna e Tópicos de História da Matemática. É um trabalho bem inovador, em que se tenta colocar, para os professores, possibilidades de mudanças dentro das escolas de 1º e 2º graus do Estado de Minas Gerais, com relação ao ensino de Matemática.

Nas primeiras turmas, a grande dificuldade foi que os professores que procuravam o curso não tinham idéia do que é Educação Matemática. Na verdade, a maioria deles queria aumentar seus conhecimentos do conteúdo matemático que tinham aprendido no curso de licenciatura.

A partir do terceiro ano de funcionmamento, essa clientela mudou radicalmente. Quem nos procura atualmente é o professor de 1º e 2º graus, buscando ajuda para melhorar seu desempenho na sala de aula. É o professor que se sente desamparado, sem recursos e possibilidades de fazer com que seus alunos gostem de Matemática e a aprendam. Sendo assim, as turmas formadas se interessam em observar, discutir e analisar o que está acontecendo com o ensino de Matemática nas suas escolas e estudar as possibilidades de alterar as suas práticas.

Nos cursos de Psicopedagogia, a clientela é constituída basicamente de pedagogas. Constatamos freqüentemente que, para a maioria dessas professoras, a Matemática escolar foi, não uma fonte de satisfações, mas um período de frustrações e atitudes negativas com relação à mesma. Por isso, em suas escolhas escolares e profissionais, preferem evitar um novo encontro com a Matemática.

Nesses cursos, começamos a orientar monografias. É um novo trabalho que nos mostra uma perspectiva diferente para influenciar o ensino de Matemática no 1° Grau. Vemos essa possibilidade porque o aluno da pós-graduação, quando escolhe o tema da sua pesquisa, em geral, busca um problema que vivencia na Escola. Com isso, tem a oportunidade de analisar tal problema de uma outra perspectiva, com um outro olhar, possibilitando, assim, a reflexão mais profunda e sistemática da situação. Desse modo, ele começa a vislumbrar algumas saídas para alterar o seu trabalho na Escola, com os alunos.

1.7 Novos Estudos

"Por tanto amor, por tanta emoção
A vida me fez assim
Doce ou atroz, manso ou feroz
Eu caçador de mim

Nada a temer
Senão esquecer o medo
Abrir o peito à força
Numa procura.
Fugir à armadilha da mata escura.
Longe se vai sonhando demais
Mas onde se chega assim
Vou descobrir o que me faz sentir
Eu caçador de mim."

(Caçador de mim, Luis Sá)

1992. Continuamos o trabalho no Centro Pedagógico, treinamento de professores, assessoria de escolas, aulas na pós-graduação... mas continuam as inquietações, os questionamentos, as buscas.

O desejo antigo de fazer o Doutorado aumenta. Fazemos a seleção na UNICAMP e somos aprovada para freqüentar o Doutorado em Educação, na Área de Concentração em Metodologia de Ensino de Matemática. Em 1993, começamos a freqüentar os cursos. Começam as idas a Campinas, pois como faltavam apenas seis meses para nos aposentarmos, não somos liberada pela UFMG e nem temos direito à bolsa. Continuamos a lecionar no Centro Pedagógico e na pós-graduação. Todos os domingos viajamos para Campinas; às segundas e terças-feiras fazemos os cursos na UNICAMP.

Em julho de 1993, aposentamos-nos na UFMG. Em 1994, somos beneficiada com uma bolsa do CNPq pela UNICAMP.

A possibilidade de cursar disciplinas bem variadas e poder escolhê-las é um dos pontos altos do Doutorado. Fizemos os cursos de Teoria do Conhecimento, Tópicos Especiais em Metodologia de Ensino, Matemática e Ensino, Atividades Orientadas de Pesquisa, História da Matemática[10]. Participamos também de um grupo de estudos[11] durante dois anos, o que muito nos ajudou a levantar e perceber as questões mais importantes da pesquisa.

Pesquisa. Esse se torna agora o ponto mais relevante de todo o nosso caminhar. É hora de repensar toda a prática vivida durante esses 25 anos e formalizá-la sob os olhos da pesquisa.

O tema escolhido para a tese de Doutorado é o abandono da Geometria. A Geometria é a área em que atuo há vários anos, do 1º grau à Universidade.

---

[10] Foram professores no curso: Hermas Gonçalves Arana, Maria Cecília Rafael Góes, Corinta Maria Grisolia Geraldi, Sérgio Aparecido Lorenzato, Roseli Pacheco Schetzler e Ubiratan D'Ambrósio.

[11] O grupo de estudos era liderado pela professora Rosei Pacheco Sheltzer, contando também com a participação das professoras: Maria Cecília Góes, Maria Luiza Smolka e Corinta Geraldi.

2 BUSCAS

"Matemática é:
difícil de entender,
difícil de aprender,
difícil de ensinar
e difícil até de ter livro".
(Livreiro de Montes Claros)[12]

A trajetória de vida descrita anteriormente nos fez ter um olhar de inquietude e busca diante dos vários problemas encontrados.

No Curso de Magistério que freqüentáramos, não tivemos contacto com Geometria. A não ser um pouco nos cálculos de perímetro, área e volume. Na verdade, mais Aritmética que Geometria. Por quê?

Só viríamos aprender Geometria na Licenciatura e isso ocorreria através do livro de Moïse e Downs. Quais as diferenças em relação a outros (como o de FIC ou o de FTD) que seguiam uma denominada "orientação euclidiana" que parecia ser a mais usada no Brasil na época? Ou, então, quais as diferenças em relação aos livros de Geometria do professor Mário de Oliveira, os mais afamados em Belo Horizonte, e que seguiam as chamadas "orientações de Hilbert"? Eram Geometrias diferentes? Por que escolheram, para nós, exatamente aquela?

Dentro desses contextos descritos, um particularmente nos tem acompanhado por esses 25 anos e, além disso, gerado uma angústia enorme. É o do abandono do ensino da Geometria:

- nos Cursos de Magistério de Ensino Fundamental;

---

[12] Ministrando Tópicos de Geometria no curso de Pós-Graduação de Matemática na UNIMONTES (Universidade Estadual de Montes Claros), apresentamos para os alunos uma bibliografia básica de Geometria e de Educação Matemática, salientando a importância da aquisição de tais títulos. No intervalo da aula, alguns alunos foram até o livreiro que expunha seus livros nos corredores da Universidade e solicitaram alguns livros. Ao escutar o pedido, o livreiro não teve dúvidas, respondeu com a citação em epígrafe.

- nos Cursos Fundamental e Médio;
- na Licenciatura de Matemática.

Durante a segunda metade deste século, a Geometria parece estar progressivamente perdendo sua posição no ensino de Matemática, na maioria dos países. Os sintomas desse abandono podem ser encontrados em pesquisas de âmbito nacional e internacional. Freqüentemente, a Geometria é completamente ignorada, ou, então, apenas alguns itens ligados a ela são incluídos. Nesse caso, as questões tendem a limitar-se a certos fatos sobre figuras simples e suas propriedades e a abordagem é relativamente pobre.

O mais assustador é que a situação do despreparo dos professores da 1ª à 4ª séries do Ensino Fundamental continua a mesma. Confirma essa afirmação a pesquisa: *"Os porquês Matemáticos dos alunos e as respostas dos professores"* (LORENZATO, 1993: 3).

Essa é uma pesquisa realizada com 255 professores de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental, todos com cerca de 10 anos de experiência de magistério. Eles foram submetidos a oito questões (propostas por alunos) referentes à Geometria plana euclidiana (conceitos de ângulos, paralelismo, perpendicularidade, círculo, perímetro, área e volume). Foram obtidas 2040 respostas erradas, isto é, o máximo possível de erros e mais: somente 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos.

Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles, PEREZ (1991) e PAVANELO (1993), confirmam a lamentável realidade do abandono do ensino da Geometria no Ensino Fundamental e Médio no Brasil.

No seu artigo "Por que não ensinar Geometria?", LORENZATO (1983: 3) descreve o quadro do total abandono do ensino de Geometria e levanta as seguintes causas:

- Quanto aos professores.
  a) Muitos não possuem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas.

b) Muitos dão exagerada importância ao livro didático, quer devido à sua má formação, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos.

- Quanto ao livro didático, a Geometria é apresentada.
  a) Em uns, como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações da natureza histórica ou lógica;.
  b) Em outros, reduzida a meia dúzia de fórmulas banais do mundo físico.
  c) Quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade de ela não ser estudada por falta de tempo letivo.

> *"Assim, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada as outras partes da própria Matemática a Geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, tem recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula."* (LORENZATO, 1993: 4)

- Quanto ao currículo, ele (entendido diminutamente como conjunto de disciplinas) dá:
  a) À Geometria, uma fragilíssima posição (quando consta desse currículo).

> *"Ora, como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico."* (LORENZATO, 1993: 4)

  b) Aos formandos, ao término de seu curso, o direito de ensinar Matemática ou Didática da Matemática (em Licenciatura, em Ciências, em Matemática, em Pedagogia e em Formação para o Magistério).

- Quanto aos programas e guias curriculares, eles, com raríssimas exceções, colocam a Geometria:
    a) Como complemento ou apêndice.
    b) De modo fortemente fragmentado, por assunto ou por série.
    c) Rigidamente separada da Aritmética e da Álgebra.

> *"Isto parece não ser grave, pois a maioria dos professores segue, na verdade, o livro didático e não a proposta curricular; no entanto os editores exigem que os autores de livros sigam as propostas curriculares. Dessa forma, os guias curriculares afetam indiretamente o ensino da Geometria em sala de aula."* (LORENZATO, 1993: 4)

- Quanto à Matemática Moderna, ela tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria, pois, antes de sua chegada no Brasil, embora nossos alunos a detestassem, havia um ensino geométrico que era marcantemente lógico-dedutivo e com demonstrações. Após sua passagem, a sua proposta de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior. Isto criou assim uma lacuna em nossas práticas pedagógicas, a qual perdura até hoje.

Mundialmente, a situação é equivalente, como se deduz da Conferência "Perspectivas para o Ensino de Geometria no Século XXI", organizado pela International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), realizada, na cidade de Catânia (Sicília) na Itália, em outubro de 1995.

A conferência fez parte de um número restrito de eventos temáticos denominados ICMI Study, que têm por finalidade estudar tendências, apontar necessidades e fazer recomendações que, em sua maioria, são consideradas na elaboração de currículos nacionais e incorporadas em projetos experienciais e em materiais didáticos. No documento de chamada para o encontro, é dada uma atenção especial à crise pela qual passa o ensino de Geometria. Os motivos levantados para tal crise são:

- *"De aproximadamente 1960 a 1980, uma pressão geral ocorria sobre os prazos no ensino de tópicos tradicionais, graças à introdução de novos tópicos no currículo da Matemática (por exemplo: Probabilidade, Estatística, Informática, Matemática Discreta)."*
- *"Ao mesmo tempo, a carga horária dedicada à Matemática nas escolas diminuiu."*
- *"O 'Movimento da Matemática Moderna' contribuiu – ao menos indiretamente – para o declínio do papel da Geometria euclidiana, favorecendo outros aspectos da Matemática e outros pontos de vista sobre seu ensino (por exemplo: teoria dos conjuntos, lógica, estruturas abstratas)."*
- *"O declínio envolveu, particularmente, o papel de aspectos visuais da Geometria - tridimensional e bidimensional - e todas aquelas partes que não cabiam na teoria de espaços lineares, como, por exemplo, o estudo de secções cônicas e outras curvas dignas de nota."*
- *"Mais recentemente, houve uma volta para conteúdos tradicionais da Matemática, com ênfase especial em atividades de proposição e resolução de problemas. Contudo, tentativas de restaurar a Geometria euclidiana clássica - que antes era o campo principal da Geometria escolar em muitos países - não tiveram, até agora, muito sucesso."*
- *"Em cursos tradicionais sobre Geometria euclidiana, o material era normalmente apresentado aos alunos como um produto pronto de atividade matemática. Assim sendo, não é aceitável em currículos em que se espera dos alunos uma participação ativa no desenvolvimento de seu conhecimento matemático."*

- *"Na maioria dos países, a porcentagem de jovens em escolas secundárias aumentou muito rapidamente nas últimas décadas. Assim sendo, a forma tradicional do ensino de Geometria Abstrata para uma minoria selecionada tornou-se tanto mais difícil quanto inadequada para as expectativas da maioria dos estudantes da nova geração."*

- *"A necessidade de mais professores causou um declínio de sua preparação universitária, especialmente com respeito a campos mais complexos da Matemática, em particular a Geometria."*

- *"Uma vez que professores mais jovens aprenderam Matemática através de currículos que negligenciavam a Geometria, falta-lhes uma boa formação nesse campo, o que os incentiva a negligenciar o ensino dessa aos seus alunos."*

Tendo em vista o panorama exposto, este trabalho tem o propósito de

Explicitar porque, até hoje, não se conseguiu resgatar o ensino de Geometria em nossas escolas de Magistério de Ensino Fundamental e em nossas escolas de Ensino Fundamental e Médio, uma vez que já são vinte os anos de omissão.

Para isso, se articula em três momentos:

Num primeiro momento, são buscadas as origens de algumas manifestações geométricas. Nessa busca, vamos aos primórdios das civilizações, numa tentativa de descobrir se as origens da Geometria seriam as causas das dificuldades desse resgate que não ocorreu após vinte anos de abandono. Em seguida, é apresentado um panorama das várias idéias geométricas de Euclides e de como elas foram difundidas em outras culturas;

seriam essas idéias e essas difusões as causas das dificuldades de resgate? Também foram procuradas possíveis causas no modo como essas culturas desenvolveram idéias geométricas próprias (se isso aconteceu). Teria a Geometria, durante esses séculos, sofrido transformações violentas? Essas transformações (se existiram) seriam as causas de falta de resgate?

Num segundo momento, é apresentada uma visão da evolução do ensino da Geometria. O propósito é o mesmo: descobrir se a falta de resgate é culpa do ensino da Geometria, conforme foi realizado durante esses séculos. Essa trajetória histórica é iniciada com a análise da utilização dos Elementos de Euclides como texto didático e sua influência até os nossos dias, na Geometria de nossas escolas e. as reações que esse uso acarretou. São analisados vários outros enfoques de Geometria surgidos, bem como sua validade. Não são esquecidos os motivos excêntricos da falta de ensino de Geometria nos Cursos Normais de Magistério.

Num terceiro momento, são apresentados os empecilhos atuais para o resgate almejado do Ensino da Geometria e são analisados caminhos que sugerem elementos para a sua efetivação.

PARTE 1

A GEOMETRIA

CAPÍTULO 1

MANIFESTAÇÕES GEOMÉTRICAS

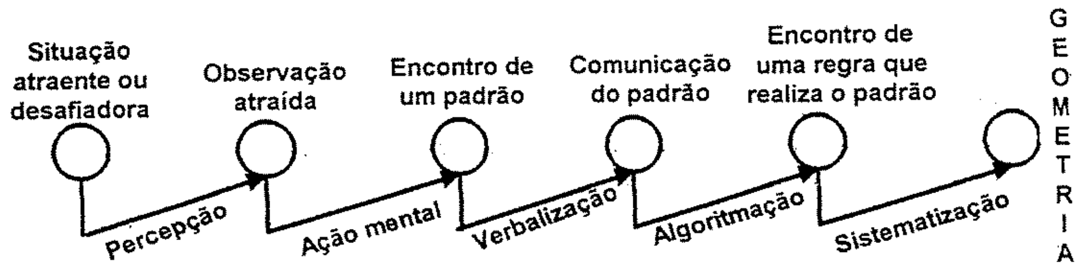
De onde vem a Geometria? Como surgiu? Onde e quando ela apareceu? Com qual aspecto se manifestou? Devemos pensar em uma ou em várias origens?

Evidentemente são da natureza as primeiras manifestações de formas. Embevecido nesse verdadeiro mundo de formas e tendo os sentidos que tem e as razões que usa, seria inevitável que o homem nelas reparasse. Pelos mesmos motivos, seria normal que alguém observasse pontos comuns nessas formas e, de posse desses pontos comuns, que se descobrisse um padrão. Encontrado esse padrão, será que ele deixaria de comunicar aos demais essa curiosidade? É provável, então, que, a partir daí, se procurasse registrar, reproduzir ou até modificar o padrão descoberto. Chegado a esse ponto, o homem então se encaminhava para o "mundo geométrico".

Se aconteceu assim, já se pode imaginar que ocorresse a busca de regras para a reprodução desses padrões. De posse dessas regras (ou algoritmos), o homem passou a aplicá-las. Por isso, nas civilizações antigas, em várias de suas atividades – como agricultura, arte, arquitetura, astronomia, religião, militarismo, etc. – é possível perceber essas ações algorítmicas que tranqüilamente muitos considerariam geométricas. Essas ações podem, inclusive, ser detectadas em tempos mais remotos como nos do começo da idade da pedra, o paleolítico.

Quando, após milênios, o homem tiver acumulado uma soma invejável de experiências em padrões, regras e aplicações, fatalmente ele procurará sistematizar todo esse conhecimento. Na história, isso ocorreu na Grécia antiga, que se tornou o berço da Geometria formal.

Em resumo:



Inicialmente, conforme as opiniões dos especialistas, os homens viviam em condições pouco diferentes das dos animais e suas principais energias eram orientadas para processos básicos de sobrevivência. Entre esses, sobressaiam o de recolherem alimentos, o de se comunicarem uns com os outros e o de conseguirem habitação. Para realizar cada um desses processos, viam-se, muitas vezes, obrigados a fazer instrumentos típicos. Nos últimos tempos do paleolítico, segundo a visão desses cientistas, os homens enriqueceram suas habitações com utensílios, estatuetas e pinturas. As pinturas encontradas em cavernas pré-históricas da França e da Espanha com mais de 15000 anos revelam uma notável compreensão da manifestação bidimensional dos objetos no espaço. As casas, as estatuetas e os utensílios revelam, também, uma notável aplicação dessas manifestações de formas.

Poucos progressos foram feitos até se dar a transição de simples recolha de alimentos para a sua produção, da caça e da pesca para a agricultura. Essa foi uma transição fundamental, uma revolução na qual a atitude do homem perante a natureza deixou de ser passiva para se tornar ativa. Dá-se, então, o início de um novo período da idade da pedra, o neolítico.

Em todos esses períodos, tornou-se necessário, por exemplo, medir o comprimento, a área ou o volume de certos objetos. Quase sempre, os padrões utilizados eram de acesso imediato e, por isso, muitas vezes grosseiros. Em geral, provinham de partes do corpo humano, o que deu origem a unidades de medida como o dedo, o pé, o passo, o palmo, a polegada, etc.

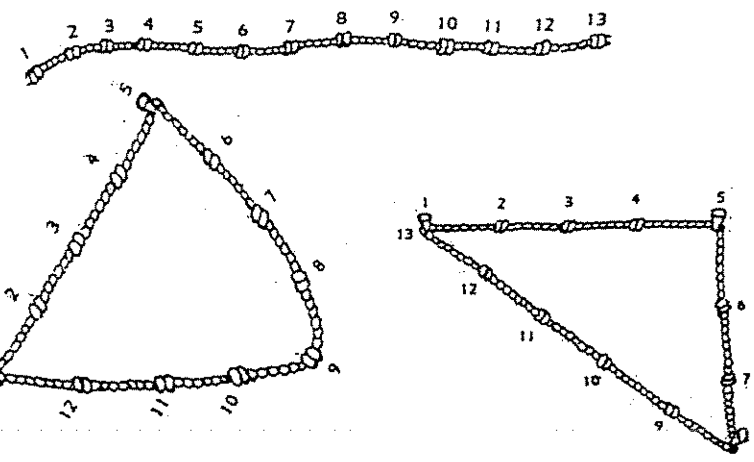
O homem, desde o neolítico, tem revelado uma forte atração para os padrões que futuramente serão considerados geométricos. A pintura das cerâmicas, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos e fibras e, mais tarde, o fabrico de metais induziam noções de simetria, de curva e de plano e, também, de relações espaciais.

Nos rituais dos povos antigos, podemos encontrar muitas realizações idênticas. Os textos mais antigos dos hindus que chegaram até nós são os *Sulvasutras* que foram compostos provavelmente entre os séculos V e I a.C. São tratados que fixam as regras de construção e de orientação dos altares (*vêdi*) e dos edifícios (*agni*) destinados ao ritual dos sacrifícios védicos. Acreditava-se que a eficácia do ritual se assentava na exata observância dessas regras, nas formas e nas proporções exigidas pelo culto e de acordo com o objetivo pretendido.

O instrumento fundamental utilizado nessas construções é o cordel (*sulua* ou *rajju*) feito de cânhamo e bambu, enquanto *sulva* (ou *sulba*) refere-se às cordas usadas para medidas e <u>sultra</u> significa um livro de regras ou aforismos relativos a um ritual ou ciência. Daí, *Sulvasutras* – tratados dos Cordéis

Segundo ZIMMERMANN (1980), muitas das construções geométricas que estão no *Sulvasutra* baseiam-se no conhecimento de diversos casos particulares de triângulos retângulos (com lados medindo 3-4-5, 5-12-13, 7-24-25, etc.). Essa regra não é formulada como um teorema, mas como uma prescrição para o bom desenrolar do ritual, uma regra de construção.

A medição de terras foi a situação problemática que induziu os egípcios a visualizar padrões geométricos. Possivelmente há cinco ou seis mil anos, os egípcios desenvolveram um esquema empírico de agrimensura do solo. A idéia básica nasceu da necessidade de se evitar que o transbordamento anual do rio Nilo desfizesse todas as suas subdivisões de terras. Tendo um governo centralizado e necessitando assegurar uma taxação eqüitativa e evitar disputas, as fronteiras entre as terras tinham de ser restabelecidas depois de cada inundação. O método de agrimensura tinha que ser, por isso, necessariamente prático e simples. Usavam simplesmente uma corda cheia de nós.



Como a marcação de áreas requeria um método seguro para a construção do ângulo reto, usavam uma corda dividida em treze partes iguais. Quatro unidades formavam um lado de um triângulo, três o outro e mais cinco constituíam a hipotenusa. Esse método, que persiste até hoje, foi utilizado quando se iniciou a construção de túmulos e templos. Foi assim a origem da história da "cordagem do templo". A partir dessa técnica, era relativamente simples a tarefa de esboçar retângulos e outras figuras geométricas mais complexas.

Na arquitetura grega, do Partenon foi tão bem planejado que incorporava todas as medidas significativas. Sua dimensão foi meticulosamente registrada por Francis Crammer Penrose, um arquiteto inglês que mediu o templo com uma precisão que considera até mesmo um milésimo do pé inglês. Penrose constatou que o Partenon não foi construído com linhas retas, mas utilizou curvas matemáticas sutis, na sua estrutura. Penrose constatou também que existem similaridades essenciais entre as estruturas geométricas do Partenon e da Grande Pirâmide. As elevações das fachadas do Partenon foram determinadas pela Seção Áurea e os lados foram baseados no fator π. O professor Stecchini calculou que os desvios mínimos encontrados nas bases tanto do Partenon quanto da Grande Pirâmide foram cometidos deliberadamente e não eram resultados de pequenos erros de cálculo. Na sua opinião, a relação entre Φ e π na extremidade e no lado do Partenon é um paralelo daquela que existe entre a face norte da Pirâmide (Φ) e o lado oeste (π).

A largura das fachadas do Partenon era tal, que indicava um segundo de um grau no equador. Assim, as partes individuais da estrutura, todas comensuravelmente proporcionais a todo o edifício, eram proporcionais às dimensões da própria Terra.

Assim como destaca PENNICCK (1980: 65)

> *"A harmonia divina, assim engendrada, integra o edifício com o cosmos. Ele se torna parte integrante da harmonia global do mundo e é, dessa maneira, um receptáculo perfeito para adoração. A necessidade tríplice de um templo funcional - orientação, geometria e medida - estão presentes no Partenon e em qualquer outro edifício verdadeiramente sagrado plantado em qualquer canto da Terra. Esse grau de integração não é conseguido por meio de nenhum outro método."*

A Geometria impregnou toda a vida grega que, dela, possuía uma gama invejável de padrões, a maioria já verbalizada sob a forma de regras. Fácil, então, para o espírito grego, sentir-se desafiado para sistematizar tudo isso. Por isso, é comum situar na Grécia a origem de todo o pensamento matemático. Como coloca D'AMBRÓSIO (1991)

> *"De fato, a presença do estilo de pensamento grego na evolução da ciência na Europa, representado sobretudo pela lógica subjacente à Geometria como explicada por Euclides, é inegável. Mas esse conhecimento, que evolui há milhares de anos e que constitui o conhecimento moderno, é resultado de um elaborado processo de dinâmica cultural na qual muitos povos contribuíram com seus distintos modos de pensar."*

Na civilização Inca, a presença de manifestações geométricas é ressaltada no artesanato. As meninas aprendiam desde cedo a fiar e tecer.

Usavam plantas para tingir a lã de alpaca. O tecido produzido era geralmente liso, em geral entremeado por uma risca ou desenhos geométricos simples.

Os Incas desconheciam o torno do oleiro, por isso toda a sua louça de barro era feita a mão, colocando tiras de barro em espiral uma sobre a outra, até atingir a forma pretendida. Os potes e vasos eram cozidos no forno e em seguida pintados com motivos geométricos repetidos.

Arte e simetria são uma constante na civilização africana:

> *"Simetrias na arte africana — padrões decorativos que aparecem em tecidos de ráfia dos Bakuba (Zaire), em objetos de bronze do Benin, em tecidos 'adire' dos Yoruba (Nigéria), em tecidos 'adinkra' (Ghana), em pipas de Begho (Ghana), em pastas entrelaçadas dos Gitonga (Moçambique), etc. — foram analisadas por vários matemáticos."* (GERDES, 1995:)

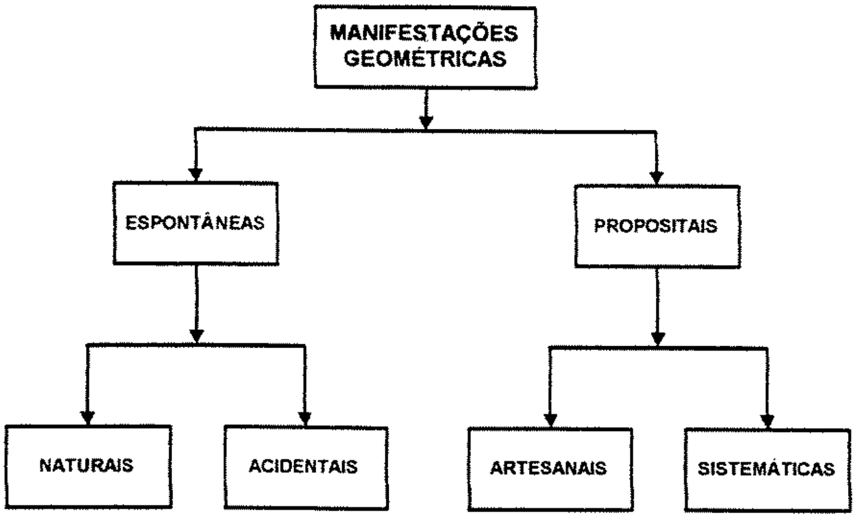
Foram estudadas por GERDES (1995) muitas manifestações. São, entre elas, as seguintes:

1. De simetria nas cestarias africanas;

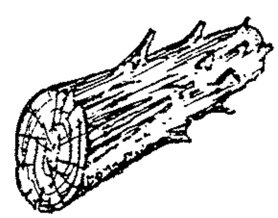
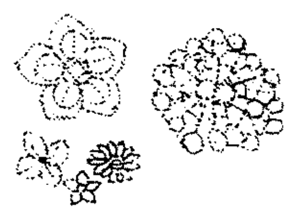
2. De outros padrões incorporadas no artesanato feminino.

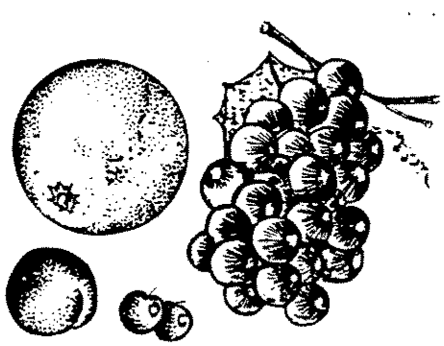
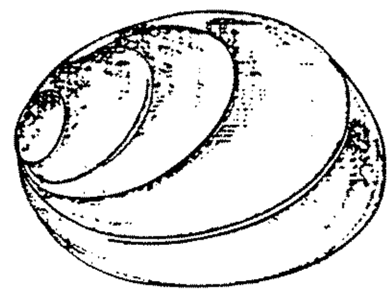
O trabalho etnográfico que hoje se faz com algumas tribos brasileiras mostra um material matemático muito rico. Pela riqueza do artesanato destes índios, pode-se perceber que vários padrões estão incorporados na sua cultura, como, por exemplo, simetria, paralelismo, perpendicularidade, ângulos, figuras geométricas planas, etc.

Seria fugir dos objetivos deste trabalho multiplicar os exemplos daquilo que o ser humano fez no passado. Por isso, o esquema a seguir procura resumir tudo o que poderia ser dito:

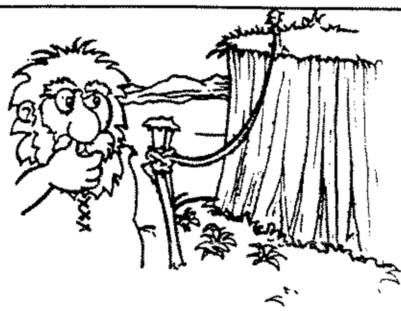
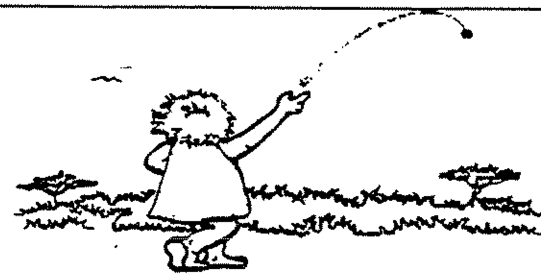


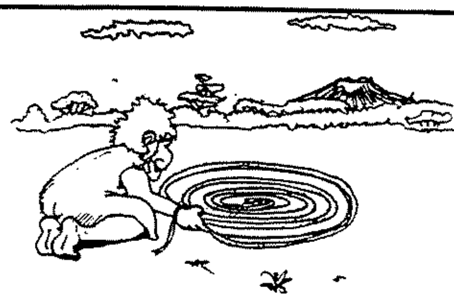
MANIFESTAÇÕES NATURAIS. São aquelas formas da natureza que induzem padrões. São encontradas, por exemplo, nos reinos mineral, vegetal e animal e nos corpos celestes.

Troncos de árvores sugerem cilindros.	A maioria dos cristais, folhas e flores ilustram a idéia de simetria.
	

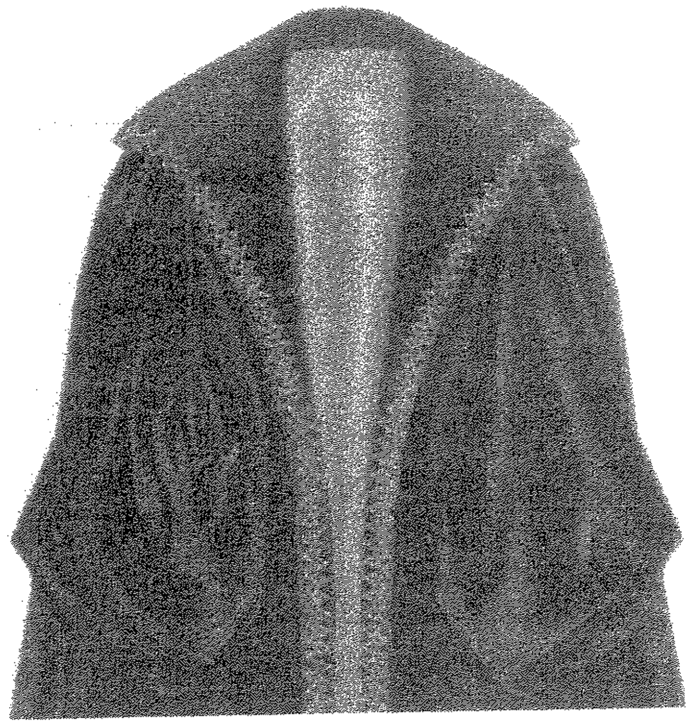
Muitas frutas e seixos são esféricos.	Figuras sobre certas conchas sugerem a idéia de famílias de curvas.
	

MANIFESTAÇÕES ACIDENTAIS. São aquelas ações humanas que não visam a atividades geométricas, mas cujos resultados induzem padrões geométricos.

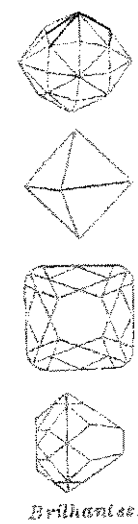
Uma corda pendurada pelas pontas forma uma catenária.	Uma pedra arremessada descreve uma parábola.
	

Uma corda enrolada forma uma espiral.	Uma pedra arremessada provoca, na superfície de um lago, círculos concêntricos.
	

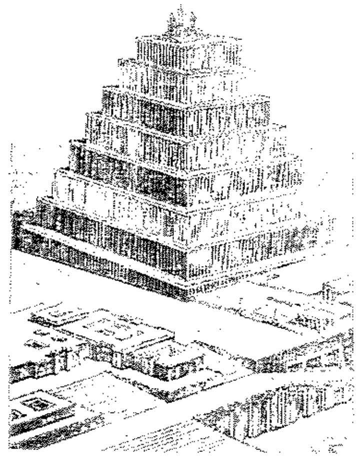
MANIFESTAÇÕES ARTESANAIS. São aquelas formas geradas por atividades humanas que usam regras (algoritmos) que constroem padrões. São encontradas nc trabalho dos artesãos (pinturas, desenhos, esculturas, tecelagem, música, etc.).



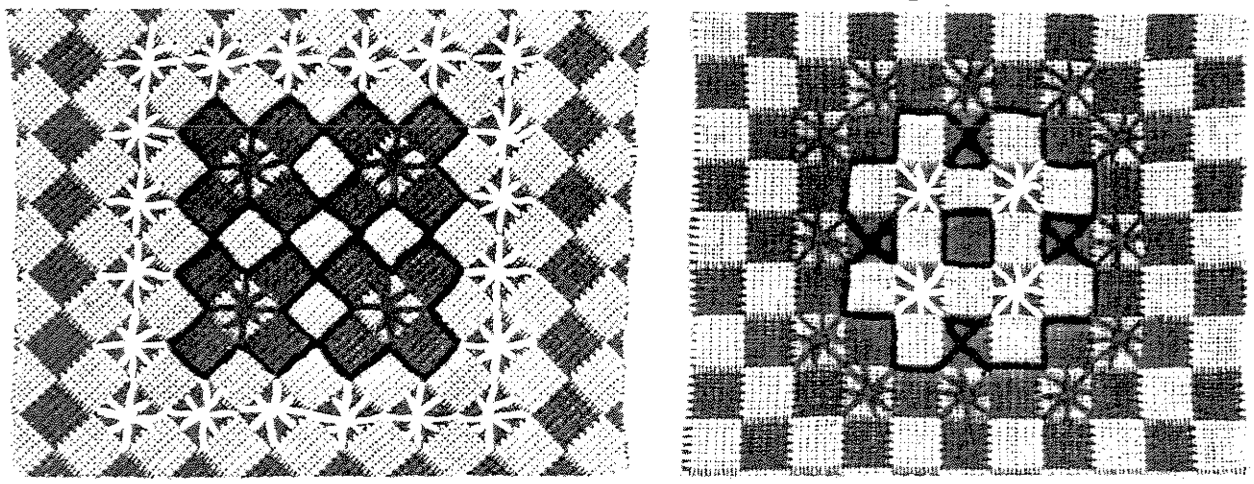
Capa medieval com arremate decorativo na gola



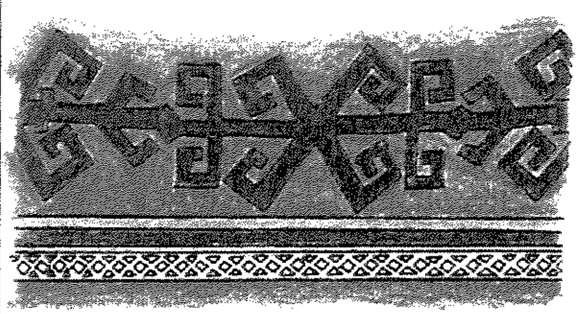
BRILHANTES



Templo em escada no palácio de Sargon

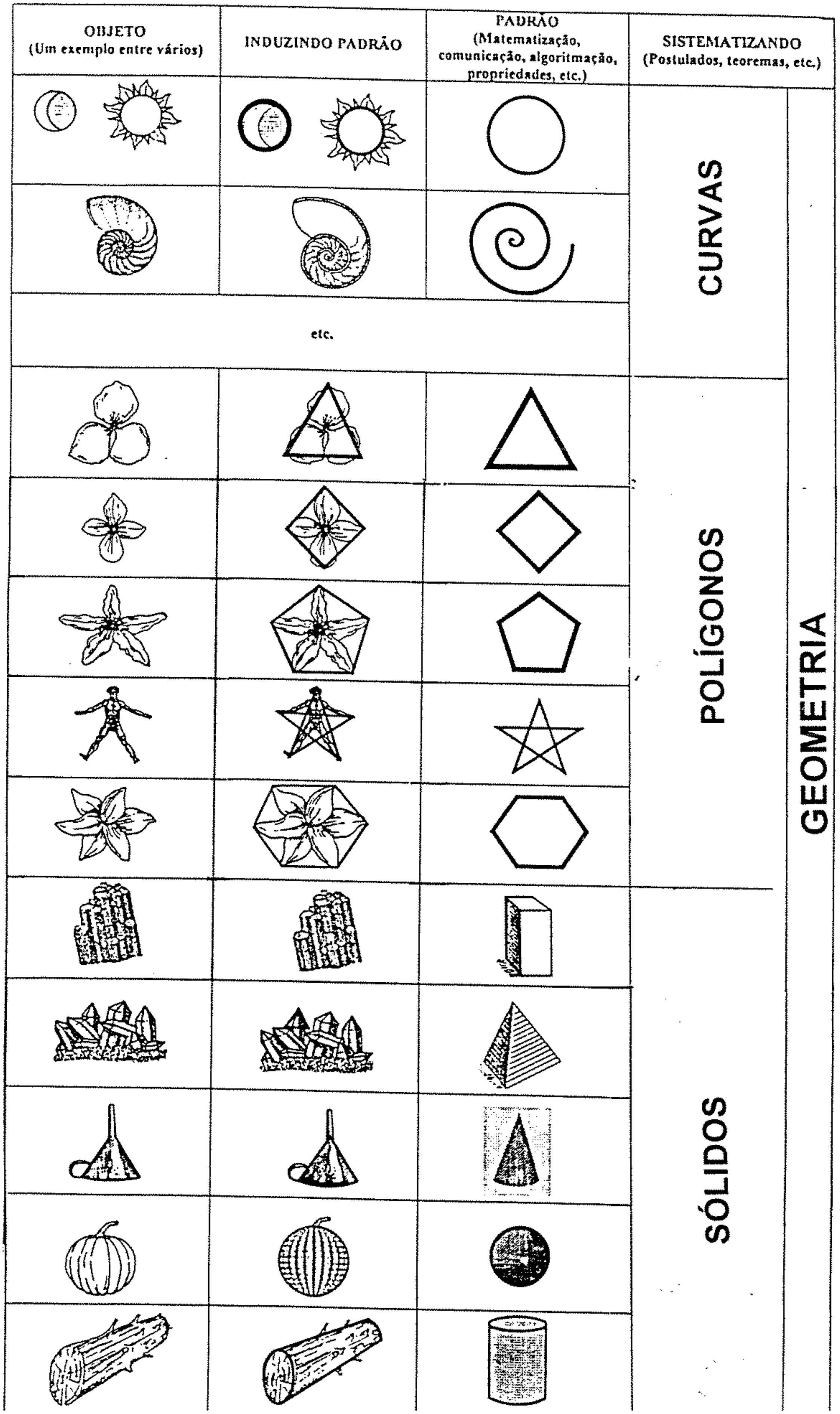


Bordados

	
Elemento decorativo indiano	Vaso persa (5000 a.C.)

Nessas manifestações – naturais, acidentais e artesanais – existem inúmeros tesouros e sugestões para o aprendizado da geometria que, sendo adequado, pode levar o aluno ao seu conhecimento matemático.

MANIFESTAÇÕES SISTEMÁTICAS. O espírito filosófico grego, encontrando tanto o reconhecimento empírico de padrões (sugeridos acima) quanto o conhecimento de uso dos algoritmos para reprodução desses padrões, deu um espírito matemático à Geometria.


OBJETO
(Um exemplo entre vários)
INDUZINDO PADRÃO
PADRÃO
(Matematização, comunicação, algoritmação, propriedades, etc.)
SISTEMATIZANDO
(Postulados, teoremas, etc.)
etc.
CURVAS
POLÍGONOS
SÓLIDOS
GEOMETRIA

As manifestações geométricas artesanais têm oferecido caminhos interessantes e ricos para propostas de ensino de Geometria. Podemos destacar as tendências que privilegiam os trabalhos multiculturais como é o caso da Etnomatemática.

CAPÍTULO 2

AS IDÉIAS GEOMÉTRICAS

O desenrolar dos acontecimentos levou a vida do homem da simplicidade à complicação. Desde o início, ainda nômade, certos fenômenos e certas disposições já atraiam a sua mente. A quantidade e a forma estão entre eles. A sua constância e a sua facilidade de aparecimentos levaram o homem a nelas se concentrar. Eram os primeiros passos na Matemática.

Da vida de nômade, caçador e simples buscador de alimentos, ele passou a viver em cidades, a se organizar em agrupamentos, com todas as dificuldades que isso pode acarretar. Surgiram, então, para o homem, outras atividades que lhe trouxeram problemas diferentes que não puderam ser desprezados e exigiram, de muitos, novas atitudes e novos enfrentamentos. Quem era pensador começou a conjeturar sobre o novo: os agrupamentos, sua organização, sua hierarquização e a vida neles. Conjeturas sobre este último item – a vida nos agrupamentos – levaram o ser humano a pensar sobre a moral, a estética, a natureza da inteligência, o mecanismo do raciocínio, a lógica e o critério de certeza. Simultaneamente, sentiu necessidade de organizar aquelas idéias matemáticas que começaram na sua vida nômade e que, agora, se ampliavam.

A Geometria – que nos interessa particularmente aqui – apareceu cedo na Antigüidade, provavelmente a partir de descobertas de padrões em objetos, que alguns visionários se esforçaram por comunicar e reproduzir. E também a partir de necessidades práticas de construir objetos, comparar medidas e, até, por necessidades artesanais, etc.

Os mais simples conceitos e proposições geométricos já eram conhecidos no antigo Egito e na Babilônia (princípios do segundo milênio antes de Cristo). Naqueles tempos, as proposições geométricas eram formuladas como regras. Segundo a Enciclopédia Soviética[1], algumas dessas proposições já eram apresentadas com provas lógicas primitivas, mas a maioria, sem provas.

Cerca de 12 séculos antes de Cristo, os reinos micênicos – cuja estrutura era agrária, patriarcal e gentílica — ruíram ao não conseguirem resistir às invasões dóricas. Tentando salvaguardar suas tradições, fogem e emigram para as ilhas e costas da Ásia Menor onde fundam cidades como Mileto e Éfeso que se tornarão grandes centros econômicos e culturais. Ao intensificar as relações com outros povos, vão ficando cada vez mais distantes as velhas tradições remanescentes dos micênios. Simultaneamente, revivia na Grécia o espírito religioso amparado pelos tiranos que procuravam derrubar a aristocracia. Os aristocratas se colocavam como descendentes dos deuses antigos e aqueles, então, adotaram a prática de fazer a expansão de cultos populares e estrangeiros. Entre eles, o de maior difusão foi a religião órfica que, sob a forma de poemas e músicas, pregava a metempsicose e, através do deus Dionísio, o libertador, oferecia a libertação dessa cadeia de reencarnações.

Com essas modificações vão surgindo novas mentalidades. Até que, no decorrer do século VII a.C., essas mentalidades vão oferecendo ao homem imagens explicativas dotadas de alta racionalidade. Essas, aos poucos, conduzem à rejeição e à substituição da visão mítica da realidade.

Segundo BOYER (1998)

> *"Os gregos não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa como passar à frente de seus predecessores; mas a tudo que tocavam davam mais vida."*

---

[1] Encyclopaedia of Mathematics – An updated and Annotated translation of Soviet Mathematical Encyclopedia Kluwer Academic Publishers Coproducto Housdor Young Inequalities, 1995. p. 829.

Essa ação culminaria no século VI a.C., com o surgimento da **ESCOLA JÔNICA,** de Tales, e da **ESCOLA PITAGÓRICA**, de Pitágoras.

Um dos aspectos fundamentais da mentalidade que marcou toda a civilização grega e foi, talvez, a maior responsável por toda a sua grandeza, deve-se a Tales: a necessidade imperiosa de se criticarem todas as teses que forem propostas e a possibilidade de reformulação e correção delas.

> *"À estabilidade dos mitos arcaicos e à estagnação das esparsas e assistemáticas conquistas da ciência oriental, os gregos, a partir de Tales, propõem uma nova visão de mundo cuja base racional fica evidenciada na medida mesma em que ela é capaz de progredir, ser repensada e substituída."*[2]

Pitágoras realizou uma modificação fundamental na via de salvação da religiosidade órfica: no lugar do deus Dionísio, colocou a Matemática. O resultado surpreendente conseguido pela escola pitagórica foi o surgimento de inúmeros matemáticos de alto nível que produziu.

Com a mentalidade iniciada por Tales, de crítica, correção e reformulação, foram surgindo, após o Pitagorismo, outras escolas de pensamento. No quadro abaixo, é colocada uma relação delas. Alerta-se que, simultaneamente, surgem personalidades isoladas e importantes que não se ligam às escolas. Na análise que empreenderemos, interessar-nos-ão as contribuições geométricas.

---

[2] OS PRÉ-SOCRÁTICOS – Fragmentos, Doxografia e Comentários. São Paulo: Abril Cultural, 1978. p. XXI. (Coleção Os Pensadores)

QUADRO 1 – PRINCIPAIS ESCOLAS FILOSÓFICAS

PREDOMÍNIO DO PROBLEMA	ESCOLA:		CARACTERÍSTICAS	ASTRÔNOMOS, FILÓSOFOS OU MATEMÁTICOS
COSMOLÓGICO	JÔNICA	PRÉSOCRÁTICA	Colocou o princípio primordial das coisas na matéria única (água).	Tales, Anaximandro, Anaxímenes e Héráclito
	PITAGÓRICA		Colocou o princípio primordial das coisas no número.	Pitágoras, Hipaso, Hipócrates, Arquitas, Timáridas, Filolau
	ELEÁTICA		Refutou o politeísmo e o antropomorfismo, admitiu existir um único Deus e colocou o princípio primordial no ser. Idealista. Negação do múltiplo e do movimento.	Xenófanes (fundador), Parmênides, Zenão, Empédocles
	ATOMÍSTICA		Colocou o princípio primordial das coisas nos átomos. Caracterizou um materialismo mecânico.	Leucipo, Demócrito
ANTROPOLÓGICO	SOFISTA		Relativista, subjetivista e céptica, desenvolveu a gramática (distinguindo as partes do discurso); com hábeis retóricos.	Protágoras (jônico, o fundador), Górgias (eleata — idealista), Antifonte, Brisson, Hípias.
	SOCRÁTICA	SOCRÁTICA	Empregava o diálogo em que as perguntas se multiplicavam a fim de obter, por indução, dos casos particulares e concretos, um conceito geral do objeto em questão; não julgava produzir as idéias, mas sim tirá-las donde estavam, ajudá-las a nascer (maiêutica). Ocupava-se da moral.	Sócrates e seus discípulos: a) fiéis — Antígonos, Xenofonte; b) independentes — Fédon (criador da escola de **Eretria**), Aristipo (criador da escola **Cirenaica** ou **Hedonista**), Antístenes (criador da escola **Cínica**), Euclides de Megara (criador da escola **Erística** ou **Megárica**).
	PLATÔNICA		A teoria das idéias foi o centro de sua filosofia: foi por aí que tentou operar a síntese doutrinal dos sistemas anteriores, principalmente jônicos, eleatas e pitagóricos.	Platão, Eudóxio, Leodomante, Leão, Teeteto, Espeucipo, Felipe Opúncio, Senócrates, Aristóteles
	ARISTOTÉLICA		Não admitia idéias inatas; todos os conhecimentos vêm de sensações: nada existe no entendimento que, antes, não tenha estado nos sentidos.	Aristóteles, Eudemo, Tirtamo (o Teofrasto — o divino orador).
	ESTOICISMO	PÓS-SOCRÁTICA	Panteísmo materialista. Ideal de austera virtude.	Zenão de Cítio
	EPICURISMO		Materialismo. Moral do prazer.	Epicuro
			Geometria	Euclides de Alexandria (375? — ?a. C.).
			Mecânica Racional, Matemática Aplicada	Arquimedes (287 — 212 a. C.)
			Geometria	Apolônio de Perga (250 — 170 a. C.)

O importante é que, entre o século VII antes de Cristo e o primeiro depois de Cristo, a Grécia acumulou um tesouro em:

1. Relações métricas entre polígonos, círculos, áreas e volumes.
2. Proporções e semelhanças de figuras.
3. Seções cônicas.
4. Problemas de construções geométricas.
5. Provas lógicas relativamente rigorosas de teoremas geométricos.

> *"Que foram os gregos que acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica é quase universalmente admitido hoje, mas permaneceu a grande questão de saber se esse passo foi dado por Tales ou por outro mais tarde – talvez dois séculos mais tarde até. Quanto a esse ponto não se pode fazer um juízo definitivo sem que apareça nova evidência sobre o desenvolvimento da matemática grega."* (BOYER, 1998:)

O filósofo neoplatônico Proclus (410-485 a.C.), nas páginas iniciais do seu *Comentário sobre o Livro I de Euclides*, in *Comentários sobre Antigos Geômetras*, incluiu o chamado "Sumário Eudemiano" que é um resumo supostamente baseado no trabalho de Eudemo de Rodes, discípulo de Aristóteles que viveu por volta de 320 a.C. e que escreveu uma História da Matemática. Essa obra se perdeu, mas, antes de desaparecer, alguém resumiu uma parte dela. O original desse resumo também se perdeu, mas informações contidas nele foram utilizadas por Proclus.

Segundo o Sumário Eudemiano de Proclus, a Geometria grega parece ter começado com o trabalho de Tales de Mileto na primeira metade do século VI a.C. Foi Tales, um dos sete sábios da Antigüidade, quem trouxe a Matemática do Egito para a Grécia. A lenda conta que ele estudou ciências nos santuários egípcios e caldeus.

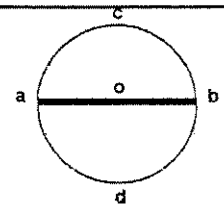
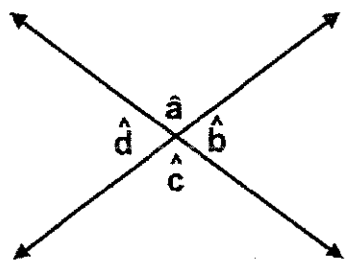
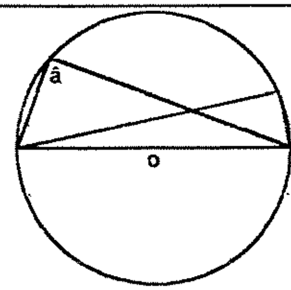
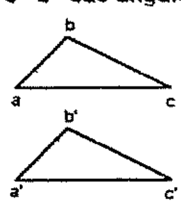
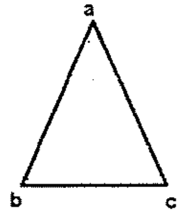
A sua celebridade proveio de ter predito um eclipse central do sol que os cálculos astronômicos fixam no ano 585 a.C. Tales é considerado como um dos criadores da Física, da Astronomia e da Geometria. A ele se atribui o cálculo da duração do ano em 365 dias e dos intervalos dos solstícios aos equinócios; verificou não ser uniforme o circuito da Terra entre os solstícios e estabeleceu o diâmetro do Sol como sendo a 720ª parte do Zodíaco, mas acreditava ser a Terra um disco achatado.

Considerado como sendo o primeiro a tratar a Geometria como ciência abstrata, diz-se que ultrapassou os conhecimentos empíricos da época ao encontrar as relações entre as linhas geométricas e ao deduzir umas das outras. É dado como o descobridor de várias propriedades do triângulo esférico.

Lendário, dificilmente se pode afirmar que tudo isso (e muito mais) seja verídico em sua vida que transcorreu no período de 624-548 a.C., aproximadamente. Vem de Proclus a citação (na verdade, de terceira mão e de quase mil anos depois) que coloca o sábio de Mileto como o primeiro matemático e o primeiro cientista. Tales fundou a Escola Jônica (século VII a.C.) que foi a mais antiga escola filosófica de que se tem notícia. Mas ele e seus contemporâneos foram simples e diretamente ao imediato, ao universo exterior, e puseram a questão científica sob uma forma teológica materialista e narrativa. Foi com ele e sua escola que se iniciou a ruptura do pensamento com as tradições mitológicas.

O certo, parece, é que Tales foi um grande negociante, além de filósofo, matemático e cientista.

Segundo o Sumário Eudemiano, são contribuições suas à Geometria os seguintes teoremas:

#	ELEMENTOS PRINCIPAIS	ILUSTRAÇÃO	PROPOSIÇÃO
a)	CÍRCULO / DIÂMETRO	 $\overset{\frown}{acb} \equiv \overset{\frown}{adb}$	Todo diâmetro bisseca seu círculo.
b)	ÂNGULOS O-POSTOS PELO VÉRTICE		Os ângulos opostos pelo vértice são isométricos.
c)	ÂNGULOS DE UM SEMICÍRCULO		Os ângulos inscritos num semicírculo são retos.
d)	PROPRIEDADE ALA DE TRIÂN-GULOS ISOMÉ-TRICOS	$\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos retos  $\hat{a} \equiv \hat{a}'$ $\overline{bc} \equiv \overline{b'c}$ $\hat{c} \equiv \hat{c}'$ => $\Delta abc \equiv \Delta a'b'c'$	Se dois triângulos têm dois ângulos e o lado comum respectivamente isométricos, então esses dois triân-gulos são isométricos.
e)	ÂNGULOS DA BASE DE TRIÂN-GULO ISÓSCELES	 Δabc é isósceles $\overline{ab} \equiv \overline{ac}$ => $\hat{b} \equiv \hat{c}$	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são isométricos

Nesse período sobressaíram os seguintes matemáticos, discípulos ou não de Tales:

GEÔMETRAS	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
MAMERCO discípulo de Tales	a) era irmão do poeta Stesicoro b) ocupou-se da Geometria
ANAXIMANDRO Filósofo grego nascido em Mileto, discípulo de Tales, viveu aproximadamente de 610 a.C. a 547 a.C.	a) a introdução do gnomon – relógio de sol – na Grécia, instrumento com o qual, nos solstícios, se observavam as alturas máxima e mínima do Sol acima do horizonte b) idealizou uma esfera para representar a Terra e parece ter sido o autor das primeiras cartas geográficas.
ANAXÍMENES Filósofo grego nascido em Mileto, discípulo de Anaximandro, viveu na segunda metade do século VI a. C.,	a) em oposição a Tales (para quem a água era a origem de todas as coisas) e Anaximandro (para quem a matéria era não especificada, infinita), concebia o Cosmos como um animal vivente, dotado de respiração e, por isso, considerava o ar como princípio de todas as coisas b) aperfeiçoou o gnomon criado por seu mestre

Nesse trajeto evolutivo, que culminaria com a criação do modelo geométrico euclidiano, destaca-se, após Tales, o nome de Pitágoras (também citado no Sumário Eudemiano) considerado como sendo o continuador da sistematização da Geometria iniciada por Tales cerca de 50 anos antes.

O caráter muito antigo da filosofia pitagórica é uma fonte intransponível de dificuldades por não existirem relatos originais de sua vida e de sua obra. Os dados sobre Pitágoras são envoltos em mistérios e lendas.

O que parece certo é que ele nasceu na ilha Egéia de Samos por volta de 520 a.C., viajou muito pelo mundo antigo – Egito, Babilônia e Índia – e, voltando à Grécia, encontrou em sua cidade uma sociedade intolerante e conservadora. Isso o levou a Crotona, na Itália, que, naquela época, era parte da Magna Grécia.

Consta que, em Crotona, organizou uma escola na qual mantinha ensinamentos secretos: **A IRMANDADE PITAGÓRICA.** O que se sabe dela com certeza é apenas sua existência. As notícias sobre sua organização são muito posteriores, sendo impossível discernir o verdadeiro do lendário. Apesar de seu aspecto secreto, permitiam que interessados ouvissem as palestras do mestre. Cultivavam a física, a matemática, a astronomia, a medicina e a música, não só por seu valor científico, como também como meio de purificação e elevação moral e espiritual. Praticavam a ginástica, a astrologia. Consideravam o nome do mestre sagrado e sua autoridade era suficiente para acabar qualquer disputa. Como já se disse, era pouco provável que vivessem em comunidades ou em celibato (Pitágoras, inclusive, se casou com Teano). Acreditavam em metempsicose (doutrina segundo a qual a alma pode habitar sucessivamente corpos diversos, homens, animais ou vegetais; transmigração, reencarnação) e sua meta filosófica e espiritual seria libertar a alma dessas sucessões de reencarnações.

Para que se reconheça a extensão da contribuição matemática dos Pitagóricos, é importante saber que, anteriormente a eles, os povos civilizados – embora tenham ido além da simples contagem e fossem capazes de cálculos complexos e de construções arquitetônicas sofisticadas – encaravam a Matemática apenas como ferramenta para resolver problemas práticos. Os cálculos eram feitos a partir de receitas que seguiam cegamente porque sempre davam certo. O por que davam certo era irrelevante.

Com os Pitagóricos, os números deixaram de ser meros objetos para se calcular ou contar. Eles foram sendo apreciados por suas próprias características, pelos relacionamentos que apresentavam entre si e pelos padrões que permitiam formar.

Os Pitagóricos proclamavam ligações dos números com a natureza quando observaram que os fenômenos naturais são governados por leis e que essas podem ser descritas por formulações matemáticas.

Isso Pitágoras (ou os Pitagóricos) descobriu a partir da relação fundamental entre a harmonia da música e a harmonia dos números. Após essa e outras descobertas, ele (ou eles) concluiu que os números estavam ocultos em tudo, das harmonias musicais até as órbitas planetárias e, então, proclamou: "Tudo é número". Por outro lado, notou também que a existência dos números independia do mundo concreto, das percepções dos sentidos e das opiniões. Por isso, foi considerado um dos primeiros e principais cientistas.

Além de iniciar a teoria dos números e descobrir as grandezas incomensuráveis, Pitágoras (ou sua Irmandade, nada é claro, aqui) foi o primeiro a demonstrar que o teorema que leva o seu nome é verdadeiro para todo e qualquer triângulo retângulo. Embora conhecido dos chineses e dos babilônios e usado por eles, esses povos não sabiam que o teorema era verdadeiro para todo triângulo retângulo.

> *"According to our best evidence (1925) the familiar proposition that bears his name was known, as already stated in India, China and Egypt before his time, and all that can be claimed for him in relation to it is that he may have given the earliest demonstration of its truth.*
> *[...] traditional stories of discoveries made by Thales or Pythagoras must be discarded as totally unhistorical."* (SWETZ, [s.d.]: 68)

Segundo a maioria dos autores que escreveram sobre Pitágoras e sobre os Pitagóricos, há uma série de descobertas matemáticas que são imputadas a eles:

1. **Prova do Teorema de Pitágoras.** Parece que eles, os pitagóricos demonstraram o teorema e seu recíproco.

2. **Médias.** Os pitagóricos examinaram as médias
   a) aritmética,
   b) geométrica,
   c) harmônica
   e as relações ente elas.

3. **Números perfeitos e números amigos.** Os pitagóricos se interessaram enormemente pelos números perfeitos, isto é, números, como 6 e 28, que são a soma de seus divisores próprios.

Os números perfeitos sempre atraíram a atenção dos matemáticos e dos místicos, pois, em muitas culturas, já se observara que Lua orbita a Terra em 28 dias e acreditavam que Deus tinha criado o mundo em seis dias.

Em *A Cidade de Deus*, S. Agostinho (354-430) escreve:

> *"O número seis é perfeito em si mesmo e não porque Deus criou todas as coisas em seis dias. O inverso é mais verdadeiro, Deus criou todas as coisas em seis dias porque este número é perfeito. E continuaria perfeito mesmo que o trabalho de seis dias não existisse."*[3]

No Livro IX dos Elementos de Euclides, está a prova de que qualquer inteiro positivo n da forma

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

é perfeito desde que

$$2^m - 1 \quad \text{seja primo.}$$

A prova é devida, provavelmente, ao pitagórico Arquitas (428-347 a.C.).

4. Sólidos Regulares. Pitágoras, provavelmente, conhecia quatro desses sólidos regulares: cubo, tetraedro, octaedro e icosaedro. Foi seu discípulo Hipaso (470 a.C.) quem descobriu o dodecaedro. Como as atividades matemáticas da comunidade provavelmente não interessavam ao povo em geral, uma descoberta dessa dificilmente passaria despercebida. Diz uma lenda que Hipaso recusou atribuir a descoberta ao Mestre e outra diz que e-le, além dessa recusa, levou o conhecimento para fora da Irmandade, pelo que os deuses o teriam castigado, fazendo-o morrer num naufrágio. Por certo, a descoberta (impossível de esconder e difícil de ter a paternidade

---

[3] SANTO AGOSTINHO. A cidade de Deus. [s.n.t.]

abafada) e sua morte, logo em seguida, contribuíram para ampliar a lenda sobre os segredos da Irmandade.

5. **A irracionalidade de $\sqrt{2}$.** Inicialmente, os pitagóricos anunciavam que todas as coisas são números. Isto porque supunham que um corpo era uma pluralidade de pontos e o número uma pluralidade de unidades. Assim, todos os pares de comprimentos eram comensuráveis, ou seja, tinham uma medida comum. Significava isso que as medidas deles eram números inteiros (diríamos, hoje, números naturais) e que as razões entre elas seriam razões entre inteiros (razões que, hoje, denominamos números racionais). Repentinamente, aplicando o teorema (dito) de Pitágoras, a um triângulo retângulo de lados unitários, descobrem que o quadrado da hipotenusa é 2. Mas não encontram, entre seus números, um que seja raiz de 2. Como dizemos hoje, $\sqrt{2}$ é um número irracional, um número indizível, *alogos*, como diziam os pitagóricos. A prova disso está em Aristóteles (Prior Analytics, 41a, 23-30).
   Segundo as lendas, a descoberta dos irracionais produziu nos pitagóricos uma angústia metafísica, já que tais números (*alogos*) não tinham as características dos outros números. Com isso, a concepção cosmológica vigente ruiu. O conhecimento desses números indizíveis (irracionais) permaneceu por muito tempo entre os pitagóricos como um conhecimento esotérico.

6. **Números figurados.** Os pitagóricos se interessaram muito pelos números figurados — aqueles que podem ser representados por figuras poligonais de pontos (ou pedras). Observando seqüências dessas figuras, os pitagóricos descobriram que

   a) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$;

   b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

   c) $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$.

Entre os membros da Irmandade Pitagórica que contribuíram para a Matemática, ressaltam:

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
HIPASO DE METAPONTE grego do fim do século 6 a. C. e do inicio do século 5, um dos primeiros discípulo de Pitágoras.	a) afastou- se da seita e teria fundado a *seita dos matemáticos* que teria preocupações mais científicas do que filosófico-místicas; b) foi ele quem tornou público o conhecimento dos números irracionais, fato decisivo para o desenvolvimento da matemática; c) uma lenda afirma que teria sido expulso da Irmandade por ter divulgado os segredo da invenção do dodecaedro, a inscrição deste na esfera e a descoberta dos números Irracionais. Como morreu num naufrágio, surgiu a lenda de que os deuses o teriam castigado.
HIPÓCRATES DE QUIOS grego, aproximadamente 440 a.C., discípulo de Pitágoras.	a) o primeiro Elementos de Geometria, uma tentativa de sistematização; b) o emprego de letras nos pontos principais das figuras, a fim de facilitar as demonstrações e mesmo as descrições das figuras; c) descobertas relativas ao círculo que estão no Livro III de Euclides; d) o estudo de dois problemas da Antigüidade: a quadratura do círculo e a duplicação do cubo que o tornaram conhecido.
TEODORO DE CIRENE fins do século V a. C. e meados do século VI a.C., discípulo de Pitágoras	a) considerado o mestre de Platão em Matemática; b) famoso por suas pesquisas sobre as grandezas incomensuráveis, segundo nos refere Platão no Teéteto.
ARQUITAS DE TARENTO 428 — 365 a.C. discípulo de Pitágoras. (designado como o "ultimus pythagoreorum")	a) conhecia a geração dos cones e dos cilindros; b) foi o primeiro a obter as médias proporcionais mediante um curva de dupla curvatura, mostrando, assim, que a escola de Pitágoras empregava o conceito de lugar geométrico; c) atribui-se a ele a invenção do parafuso e da roldana; d) foi por intermédio dele que Platão e Eudóxio de Cnidos, em suas viagens de estudo à Magna Grécia, adquiriram conhecimento da escola de Pitágoras.
TIMÁRIDAS DE PAROS discípulo de Pitágoras	a) a definição de unidade como quantidade terminante (limitada); b) o nome de retilíneos dado aos números primos; c) é identificado por Cantor como discípulo imediato de Pitágoras.
FILOLAU do século V a. C., originário de Crotona ou Tarento, discípulo de Pitágoras.	a) matemático e astrônomo; b) interessou-se pelo poliedros regulares; c) tinha teorias cosmogônicas que colocavam o fogo no centro e na periferia do universo;

Diz-se que Pitágoras foi o primeiro que aplicou o termo *mathematiké* ao que se entende por Matemática como um ramo do saber. Antes dele, a palavra *mathematiké* era usada de maneira muito geral – o aprendizado de qualquer habilidade.

De acordo com Pitágoras, o elemento primordial para explicar o mundo não é a natureza tangível como cria, por exemplo, Tales, mas um ente racional a saber: o número. Por outro lado, o número não é a causa do cosmos, mas constitui a essência das coisas. Com essa base, avança seriamente na empresa de construir a Matemática como uma ciência, o que veio a suscitar vários problemas em seu desenvolvimento.

Pitágoras não chegou a uma rigorosa dedução, porém, em tudo que fez, percebe-se uma certa intenção demonstrativa. Simultaneamente, procura precisão nas definições dos termos matemáticos.

De todas essas afirmações (lendas ou não), ressalta um fato inquestionável: Pitágoras (ou os Pitagóricos) conseguiu (ou conseguiram) obter a formação de muitos matemáticos. Como? Para quê? Algum dia, encontraremos respostas para essas duas perguntas?

Provavelmente, o conhecimento de formas naturais, acidentais e artesanais tenha insuflado neles o desafio de encontrar, nelas, relações, propriedades e qualidades. Encontradas essas, a verbalização, a comunicação e o registro são, naturalmente, os passos seguintes. Encontra-se, assim, um conjunto cognitivo próximo do sistemático.

Após os pitagóricos, os eleatas tiveram papel importante na sistematização geométrica que influenciaria Euclides. Contemporânea da Escola Pitagórica, a Escola Eleata foi fundada (fins do século VI a.C.) em Eléia, colônia jônica na Itália, por Xenófanes. Tinha por princípio fundamental a unidade e a imutabilidade do ser. Pertenceram a essa Escola: Parmênides, Zenão e Melisus.

Parmênides compôs uma obra literária em versos, da qual nos chegaram alguns fragmentos. Acreditava na esfericidade da terra.

Proclus atribui a Parmênides de Eléia (513 a.C.) a definição euclidiana de ponto:

"Aquilo que não tem partes".

Zenão de Eléia (495-435 a.C.) foi discípulo de Parmênides, em companhia do qual visitou Atenas nos anos 455-450 a.C. Em Atenas, apresentou seus quatro paradoxos:

- Aquiles e a Tartaruga,
- Flecha que Voa,
- Dicotomia,
- Estádio.

Com eles, defendia o ser único e indivisível, de seu mestre Parmênides, contra o ser múltiplo, descontínuo e móvel composto de infinitos indivisíveis.

Os argumentos de Zenão combatem a nova modalidade de número do pitagorismo, após o descobrimento dos incomensuráveis (irracionais), quando revelaram a existência de quantidades não comensuráveis com a unidade e a existência de números que não eram soma de unidades nem razão de inteiros. Para resolver essa dificuldade, os Pitagóricos usaram o método infinitesimal, subdividindo infinitas vezes a extensão. Mas isso equivalia a alterar o caráter do pitagorismo inicial.

Com isso, abriu-se uma porta para Zenão que põe às claras as contradições que implicam o querer conceber as grandezas contínuas como compostas por um número infinito de partículas indivisíveis. Na verdade, Zenão propunha demonstrar que, se a doutrina do ser único contínuo e imóvel de Parmênides parece inconcebível, mais inconcebível é a do ser múltiplo, descontínuo e móvel composto de infinitos indivisíveis.

Os argumentos de Zenão têm a seguinte forma:

Rejeição do infinito
outras considerações (incluindo a continuidade do espaço)
Nenhum movimento

Que é logicamente equivalente à forma:

Movimento
outras considerações (incluindo a continuidade do espaço)
Aceitação do infinito

Os argumentos de Zenão apresentados nesses paradoxos podem, hoje, ser interpretados como críticas dirigidas às concepções pitagóricas para demonstrar os absurdos a que eram levados na consideração dos corpos como soma de pontos, do movimento como soma de passagens de um lugar a outro e do tempo como soma de instantes. Portanto, derrubando o conceito pitagórico de mônoda e a concepção de espaço descontínuo a ele associado, Zenão força a reformulação das noções pitagóricas de unidade e espaço.

Como se observa, havia uma atmosfera propícia para o desenvolvimento de atividades culturais. Entre essas, a Matemática foi cultivada por alguns nomes ilustres que não pertenciam a uma escola determinada. Desses, citamos Anaxágoras de Clazomena e Oenópides.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
ANAXÁGORAS DE CLAZOMENA (500-428 a.C.)	a) célebre pensador, fundou em Atenas uma Escola onde, principalmente em Astronomia, professava idéias que estavam em contradição com aquelas até então admitidas; b) é certo que foi o primeiro que explicou a verdadeira causa dos eclipses e das fases da Lua, embora ainda admitisse que os astros fossem discos sutilíssimos, suspensos e movendo-se no espaço; c) embora a contribuição de Anaxágoras ao progresso da Matemática seja desconhecido, seu saber foi atestado por Proclus; d) segundo Plutarco, na prisão, Anaxágoras escreveu sobre a quadratura do círculo.
OENÓPIDES DE QUIOS (sabe-se que era um pouco mais jovem que Anaxágora de Clazomena)	a) há notícias de sua obra através de Eudemo de Proclus; b) parece ter descoberto a obliqüidade eclíptica (notável feito em astronomia); c) em Geometria, investigou o problema do traçado de uma perpendicular a uma reta dada por um ponto fora dela (com uso de régua e compasso).

Além desses, após os eleatas, vem a Escola Atomística, fundada por Leucipo, o famoso criador da teoria atômica grega. Segundo ela, todos os corpos e substâncias são formados por um agregado de partículas indivisíveis – os átomos, *ατομος* – tendo, entre elas o vazio. Não são, como no Ocidente, centro de forças, energias. Dessa Escola, veremos Demócrito, filósofo, físico e moralista.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
DEMÓCRITO DE ABDERA nascido por volta de 460 a.C., pertenceu à Escola Atomistica estabelecida em Trácia	a) viajou muito: Atenas, Egito, Mesopotâmia e, talvez, Índia; b) teve, na sua época, grande reputação como geômetra, embora, hoje, seja conhecido como filósofo da Química; c) dentre as obras que escreveu, que estão hoje perdidas, são citadas: ▪ Da Arquitetura, ▪ Sobre os Números, ▪ Sobre a Geometria, ▪ Sobre os Irracionais, ▪ Sobre o Pitagorismo, ▪ Sobre Ética.

A seguir, surge a Escola Sofista, fundada por Protágoras de Abdera (480-410 a.C.), apontado como um adversário dos matemáticos. Estando bem informado sobre a Matemática e chamando a atenção para o caráter abstrato de seus primeiros elementos, indiretamente contribuiu para o seu progresso. Nessa Escola, sobressaíram, também, Antifonte, Brisson e Hípias.

Os sofistas Antifonte Brisson de Heráclea, como Anaxágoras, também se ocuparam do problema da **quadratura do círculo:**

ANTIFONTE	BRISSON
tentou resolvê-lo, inscrevendo polígonos regulares cujo número de lados aumentasse indefinidamente, formando uma progressão geométrica de razão 2, e, erradamente, concluiu que, se a construção prosseguisse até o infinito, o polígono acabaria por confundir-se com o círculo.	tentou resolvê-lo, circunscrevendo polígonos ao mesmo tempo que ins-crevia, concluindo grosseiramente que, traçando um polígono de perímetro compreendido entre os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, o novo polígono era igual ao círculo.

Conforme vemos, nenhum dos dois filósofos teve a idéia de considerar o **círculo como limite destes polígonos,** não chegando, dessa forma, a tirar as conclusões que seria de esperar do emprego desse processo de demonstração.

É certo que Brisson, quando considerou simultaneamente polígonos inscritos e circunscritos, lançou uma idéia da maior importância na teoria métrica das curvas.

Não resta dúvida hoje, de que das considerações de Antifonte e de Brisson foi que Arquimedes, mais tarde, foi levado à **medida do círculo** e também a muitos outros resultados, tão difíceis de serem imaginados, como importantes.

Dentre os sofistas, além de Antífonte e Brisson, Hípias de Eléia dirigiu a instrução de seus alunos para a Matemática e, especialmente, para a Geometria.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS
HÍPIAS DE ELIS (420 — ? a. C.)	a) considerado como um distinto cultor da Aritmética; b) mais conhecido como o inventor da curva chamada **quadratriz ou trissetriz,** que permite efetuar a trisseção do ângulo ou, mais geralmente, permite dividir um ângulo numa razão dada qualquer; c) a curva de Hípias é geralmente chamada de **quadratriz,** porque pode ser usada para quadrar o círculo. É a primeira curva conhecida que se define cinematicamente. d) admite-se que Hípias sabia desse método de quadratura, porém não podia prová-lo.

Após a Escola Sofista, despontarão Sócrates e seus discípulos, dos quais consideraremos Platão e o seu discípulo, Aristóteles.

Sócrates (470-399 a.C.) foi aluno de Pródico e do geômetra Teodoro de Cirena. Embora não tenha se interessado pela Matemática, esse grande filósofo moralista foi um **raciocinador de grande força**, que sabia usar até ao extremo o princípio da contradição e, por isso, chegava sempre a confundir e convencer o seu interlocutor. Era um cultor do **método indutivo** e do **princípio das definições** (também da determinação científica do conceito) e, devido a isso, contribuiu muito para o desenvolvimento do raciocínio da ciência e, notadamente, da Matemática.

No século IV a.C., foi criada em Atenas a Academia, que se tornou um centro de estudos por excelência. Fundada por Platão (429-347 a.C.), ficava num local que originalmente era um campo de esportes ao ar livre situado nos limites da cidade. Esse nome, "Academia", deriva de um herói local – Academo ou Hecademo – que, aí, possuía um santuário. A influência da Academia foi marcante em todo o pensamento grego e, portanto, na sua Matemática. Embora a contribuição pessoal de Platão à Matemática seja modesta, ele, como centro da atividade matemática da época, era quem guiava e, também, quem inspirava o seu desenvolvimento e o seu progresso.

Duas frases famosas mostram o elevado conceito que a escola platônica tinha pela Matemática e do papel que ela desempenhava, tanto na harmonia do universo como na formação humana. Indagado sobre a ocupação de Deus, Platão respondeu:

"Deus geometriza constantemente".

Na porta de sua Academia, mandou afixar:

"Não entre se ignora Geometria".

Platão considerava a Matemática como possuindo quatro ramos: Aritmética, Geometria, Estereometria e Astronomia. Mas tal divisão era simples conveniência didática, pois todas as demonstrações, no final, deveriam ser "mero geométrico" porque o conhecimento de Geometria era condição fundamental para ser admitido na Academia conforme a frase escrita nos portões de entrada. E, de fato, na maioria de seus diálogos, a Geometria aparece sempre como elemento importante nas considerações filosóficas.

Platão teve inúmeros mestres, entre os quais citamos: Crátilo, da Escola Jônica, discípulo de Heráclito, e, depois, Sócrates. Com este último, Platão teve íntima ligação durante muito tempo e, do ensino dele, Platão fez uma apresentação em sua obra *Diálogos*.

Quem converteu Platão à Matemática não foi Sócrates, mas certamente Arquitas, um amigo a quem ele visitou em 388 a.C., na Sicília.

Nas doutrinas de sua escola filosófica, Platão procurou conciliar o idealismo de Pitágoras e de Parmênides, com a filosofia de Sócrates, colocando as **idéias** na base da existência e da ação, aquilo que os pitagóricos atribuíam, exclusivamente, aos números.

Grande número das definições, axiomas e postulados que figuram nos ELEMENTOS de Euclides são atribuídos à Escola de Platão. É o caso, por exemplo, das definições de **ponto**, de **linha,** de **superfície** e de **volume** que eram da Escola Platônica e foram adotadas por Euclides quase sem modificações. Diferem, completamente, da Escola de Pitágoras, que definia o ponto como **unidade tendo posição.**

Segundo HEATH (1921), a questões de Geometria estudadas por Platão foram:

- Poliedros regulares e semi-regulares;
- Construção dos poliedros regulares;
- Médias geométricas entre dois quadrados;
- Médias geométricas entre dois cubos;
- Duplicação do quadrado;
- Duplicação do cubo.

No Timeu, aparecem os sólidos:

- tetraedro, ligado ao fogo;
- hexaedro, ligado à terra;
- octaedro, ligado ao ar;
- icosaedro, ligado à água;
- dodecaedro, ligado ao universo.

Platão e sua Escola sabiam serem esses cinco poliedros os únicos regulares. A verdade parece ser que a demonstração desse fato já fosse conhecida e que ele a aperfeiçoou e incorporou ao seu acervo.

Como contemporâneos e discípulos de Platão, podemos citar Eudóxio (o mais célebre matemático e astrônomo do seu tempo) e Aristóteles.

Eudóxio (408-355 a.C.), que nasceu em Cnido, foi, além de grande astrônomo, o mais notável dos matemáticos de seu tempo. A obra de Eudóxio em Matemática foi tão significativa que cabe a ela a palavra "reforma".

Eudóxio, matemático, astrônomo, filósofo, médico e legislador, foi classificado de **ilustre** pelos antigos e de **divino** por Eratóstenes. Graças à liberalidade de amigos, conseguiu Eudóxio receber em Atenas as lições dos **sofistas** e da Escola de Platão. Na Sicília, estudou a Medicina com Filistron e a Geometria com o grande Arquitas, e, finalmente, no Egito, completou os seus estudos de Astronomia com os sacerdotes.

Em 386, fundou em Cizica uma Escola que teve como discípulos célebres matemáticos, como os irmãos Menecmo e Dinostrato. Em Atenas, ouviu as lições de Platão, com quem colaborou.

É certo que foi Eudóxio o primeiro investigador matemático puro. Sua teoria dos incomensuráveis, apresentada em forma geométrica em OS ELEMENTOS de Euclides, fez inteligível o mistério dos irracionais e só foi superada nos fins do século 19, depois que Dedekind, Cantor e Weierstrass construíram uma teoria rigorosa dos números irracionais.

Se acrescentarmos a tudo isso, o **método de exaustão** e o postulado conhecido com o nome de **postulado de Arquimedes,** teremos então a medida de Eudóxio, esse colosso da Matemática grega, de quem se conhece muitas outras contribuições matemáticas. É bem provável que seja devida a Eudóxio a maior parte das proposições do Livro V de OS ELEMENTOS de Euclides.

Escreveu Proclus:

> *"Eudóxio de Cnido, um pouco mais jovem do que Leão e camarada dos discípulos de Platão, **aumentou** o número dos teoremas gerais, acrescentou **três novas proporções** às três antigas e, servindo-se da **análise,** fez progredir quanto Platão tinha empreendido sobre **seções.**"*

Também Arquimedes, na carta que dirigiu a Dositeu, e que precede o 1° Livro do seu **Tratado da esfera e do cilindro,** informa que Eudóxio descobriu os dois teoremas seguintes:

1. O volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma, da mesma base e da mesma altura da pirâmide.
2. O volume de um cone é a terça parte do volume de um cilindro, da mesma base e da mesma altura do cone.

É de Eudóxio o enunciado base para o **método de exaustão**, que hoje é conhecido pelo nome de **axioma de Eudoxio-Arquimedes:**

> *"Dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), existe sempre um múltiplo da menor que supera a maior."*

Sabemos hoje que a origem da noção de limite está ligada às especulações geométricas de Eudóxio de Cnido, cujo método de exaustão, empregado com muita freqüência por Arquimedes, é uma das raízes do calculo infinitesimal na Antigüidade.

Discípulo famoso de Eudóxio, Menecmo criou as cônicas, ou seja, as colocou como geradas por secções de cones retos, agudos e obtusos. Essas cônicas já eram usadas empiricamente como elemento de desenhos (que evidenciavam que o círculo inclinado aparecia como tal) e na ourivesaria (onde as formas ovaladas eram apreciadas. Menecmo as usou para solucionar o famoso problema da duplicação do cubo e o das médias proporcionais a ele relacionadas). Menecmo foi mestre de Alexandre o Grande.

Além de Eudóxio, houve outro discípulo de Platão que muito contribuiu para o desenvolvimento da Geometria: Aristóteles (385- 322 a.C.).

Nascido em Estagira, Aristóteles com 17 anos foi para Atenas, tornando-se discípulo de Platão; permaneceu na Academia por vinte anos, até a morte do mestre. Além disso, como Menecmo, foi mestre de Alexandre, o Grande, pois em 342 a.C, foi convidado pelo rei Felipe II que lhe confiou a tutela de seu filho.

Em 335 a.C, Aristóteles fundou em Atenas uma Escola denominada Peripatética, uma vez que dava as aulas caminhando com seus alunos pelos jardins do ginásio denominado Liceu.

Embora, antes de tudo, fosse um filósofo e um biólogo, Aristóteles sempre esteve a par das atividades matemáticas e contribuiu de modo profundo, principalmente ao dar estrutura e forma definitivas à **lógica**, e também por suas constantes alusões, em sua grandiosa obra, a conceitos e a teoremas matemáticos. Além disso, preocupou-se muito com os paradoxos de Zenão e, baseado no senso comum, procurou refutá-los.

O conjunto das questões matemáticas das quais se ocupou Aristóteles estão classificadas por Heath sob os títulos seguintes:

1. Primeiros Princípios.
2. Demonstrações Diferentes das de Euclides.
3. Proposições Inexistentes em Euclides.
4. Curvas e Sólidos.
5. Contínuo e o Infinito.
6. Mecânica.

Em 323 a.C., com a morte de Alexandre, Aristóteles foi obrigado a fugir de Atenas, pois a população começou a perseguir todos os que tivessem contribuído de algum modo com o antigo domínio dos macedônios. Por esse motivo, retirou-se para a cidade de Cálcis, na Eubéia, onde veio a falecer.

Entre os discípulos de Aristóteles, destacou-se Eudemo de Rodes.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
EUDEMO DE RODES (350-290 a.C.), natural de Rodes, discípulo de Aristóteles	a) os fragmentos das obras de Eudemo que chegaram ate nós são documentos preciosos para a história da ciência antiga, pois foi matemático, e historiador das ciências. b) amigo de Teofrasto, escreveu vários trabalhos sobre: • Filosofia das Ciências; • Historia da Aritmética; • Historia da Geometria (seis livros); • Historia da Astronomia. c) colaborou com Aristóteles em algumas de suas obras, como a *Ética* e a *Metafísica*.

Estava aberto, a partir de então, o caminho para a organização euclidiana da Geometria.

As informações a respeito de Euclides são muito escassas. Sabe-se que nasceu por volta do ano 300 a.C., mas ignora-se o local do nascimento.

Euclides foi provavelmente educado em Atenas e passou os primeiros anos de sua vida intelectual nessa cidade. Recebeu sua formação na Academia, a principal escola matemática da época. Parece que o caos político de Atenas, após a morte de Alexandre Magno, foi o motivo que levou Euclides até Alexandria, no Egito, a fim de colocar-se sob a proteção de um governo seguro, num país em que os governantes tivessem as Ciências na devida consideração.

Alexandria abriu-lhe as portas; viveu ali sob o reinado de Ptolomeu I Sotere e talvez também de Ptolomeu II Filadelfo.

Os *Elementos*, a obra principal de Euclides, chegaram até nós através de numerosas transcrições, sobretudo de copistas árabes. Estas transcrições freqüentemente alteraram algumas palavras, mas nunca o conteúdo das proposições e dos teoremas, cujo fio lógico não pôde ser destruído. Esta obra é composta por 13 livros com um total de 465 proposições, sendo 93 problemas e 372 teoremas. Os seis primeiros livros são sobre Geometria plana elementar, os três últimos versam, principalmente, sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo.

Elementos de Euclides		
Livro		Características
Geometria Pla	**Livro I**	O livro I contém uma lista de: **23 definições** **5 postulados** **5 noções comuns ou verdades lógicas**. São demonstradas 48 proposições.
	Livro II	O livro II contém **14 proposições**, sendo que: **a)** as **10 primeiras** são álgebra geométrica grega da Escola Pitagórica e que traduzem geometricamente as propriedades algébricas elementares das somas e produtos; **b)** as **quatro últimas** proposições compreendem: ▪ os problemas importantes de dividir uma reta em média e extrema razão; ▪ quadrar qualquer figura poligonal; ▪ a generalização do teorema de Pitágoras para triângulos acutângulos e obtusângulos.
	Livro III	O livro III contém **37 proposições**, nas quais figura a teoria ▪ **do círculo,** ▪ **das linhas,** ▪ **dos ângulos no círculo,** ▪ terminando por um grupo de proposições que foram a base da teoria da **potência de um ponto em relação a um círculo**.
	Livro IV	No livro IV figuram **16 proposições**, nas quais estão **as construções pitagóricas, com régua e compasso**, de polígonos regulares de **3**, **4**, **5**, **6** e **10** lados.
	Livro V	No livro V figuram **26 proposições** que tratam da **teoria das proporções** (numa exposição magistral, de acordo com Eudóxio, cujos resultados se aplicam a todas as grandezas , sendo, portanto, verdadeiros tantos para os números como para as grandezas geométricas).
	Livro VI	No livro VI figuram **35 proposições** ▪ as propriedades gerais das proporções (demonstradas no livro V) aqui são aplicados às figuras geométricas (fazendo surgir, assim, a teoria dos triângulos e polígonos semelhantes); ▪ as construções que dão a terceira, a quarta e a média proporcionais; ▪ solução geométrica das equações do 2° grau.

Aritmética	**Livro VII**	O livro VII inicia-se com algumas **definições** baseadas na notação pitagórica.
	LivroVIII	O livro VIII também trata da **aritmética** (ou mais exatamente da teoria dos números).
	Livro IX	O livro IX também trata da **aritmética.**
	<u>Livro X</u>	O livro X, o mais extenso e o mais difícil de todos, contém: **115 proposições** em que: ▪ **expressões irracionais** são estudadas em forma geométrica, como as quadráticas da forma: $\sqrt{(7 + 2\sqrt{6})}$; ▪ há teoremas equivalentes aos processos para **racionalizar denominadores de frações** da forma: $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$ e $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

	Livro	**Características**
Geometria Sólida	**Livro XI**	O livro XI trata da **<u>geometria sólida</u>**.
	<u>Livro XII</u>	No livro XII são colocadas ▪ **as definições;** ▪ **os teoremas relativos** às retas no espaço aos planos no espaço ao paralelepípedo ao método da exaustão para calcular o volume das pirâmides.
	<u>Livro XIII</u>	O livro XIII é todo dedicado aos **poliedros regulares**. (Na **última proposição**, de número 18, vem a demonstração de que há apenas cinco poliedros regulares convexos).

Além de *Os Elementos*[4], Euclides escreveu muitas outras obras, sendo que algumas se perderam e, outras, chegaram até nós.

---

[4] Algumas versões de *Os Elementos* de Euclides vêm acrescidas dos Livros XIV e XV, que tratam ainda dos **poliedros regulares**. O Livro XIV é atribuído a Hipsícles de Alexandria (século II a.C.) e condensa a matéria de modo rigoroso e elegante. O Livro XV, que é bem inferior ao anterior, parece ter sido escrito por Isidoro Mileto, arquiteto das catedral de Santa Sabedoria, em Constantinopla, e que viveu na metade do século V. Esse livro é mais imperfeito e muito menos cuidadoso que o anterior e também estuda os poliedros regulares.

<table>
<tr><th colspan="3">OUTRAS OBRAS DE EUCLIDES</th></tr>
<tr><td rowspan="4">OBRAS QUE NÃO SE PERDERAM</td><td>Divisão de Figuras</td><td>Nela, aparecem problemas que tratam da divisão de figuras limitadas por retas ou círculos em partes que tenham relações preestabelecidas entre si com outras figuras dadas. Divisão por uma ou mais retas.</td></tr>
<tr><td>Os Dados</td><td>É uma obra elementar, destinada a facilitar as aplicações e a fornecer os instrumentos auxiliares do método analítico, servindo, assim, de complemento aos seis primeiros livros de Os Elementos e também de guia para análise dos problemas de Geometria, a fim de descobrir provas.
Em Os dados, figura quase uma centena de proposições em que se procura demonstrar como, partindo de certos dados, ficava determinada uma figura.</td></tr>
<tr><td>Os Fenômenos</td><td>É um tratado elementar de Astronomia, que inclui proposições de demonstrações geométricas dos fenômenos do nascimento e ocaso de bom número de estrelas.</td></tr>
<tr><td>A Óptica</td><td>Faz uma exposição matemática dos fenômenos da propagação da luz, incluindo proposições simples sobre a perspectiva, fundamentadas no fato de que os raios visuais são retilíneos.</td></tr>
<tr><td>OBRAS QUE SE PERDERAM</td><td colspan="2">a) Os Lugares Geométricos em Superfície
b) As Seções Cônicas
c) Os Porismas[5]</td></tr>
</table>

A estrutura axiomática da Geometria euclidiana coloca a demonstração de um teorema mediante uma cadeia de raciocínios dedutivos. Na base dessa construção, situa-se um certo número de afirmações não deduzidas de outras, não mais filiadas logicamente a proposições anteriores. São as proposições aceitas sem prova: os postulados e os axiomas.

---

5 Várias tentativas têm sido feitas no sentido de reconstruir *Os Porismas*, tendo opinado M. Chasles que, de acordo com uma idéia de Poncelet, *Os Porismas* compreendem um grande número de proposições sobre as transversais e as divisões homográficas, admitindo-se que essa obra tenha mesmo representado uma antiga aproximação da geometria analítica.

Durante cerca de dois milênios, a Geometria euclidiana manteve-se como uma organização racional, intocável e inatacável no rigor e na rígida ...ridade. Aparentemente, ela fornecia à consciência a única descrição possível do espaço físico. As relações existentes nesse espaço, ou passíveis de existência, só podiam ser concebidas em termos euclidianos. A compreensão de qualquer acontecimento físico exigia o sistema euclidiano como pano de fundo.

Apesar da tendência puramente geométrica dessa obra, muitos dos teoremas lá expostos estabeleceram resultados hoje considerados algébricos.

A Geometria euclidiana foi rigorosamente construída, e como tal, converteu-se em modelo para toda a Matemática. Os treze livros que compõem os *Elementos* de Euclides sintetizam todo o conhecimento matemático até então acumulado. Com esta construção, Os *Elementos* se tornaram o sonho metodológico de todas as ciências. De fato, o pensamento científico em busca de uma sistematização encontrou no método axiomático o modelo perfeito. Como colocam PIAGET & GARCIA (1993: 91):

> *"Sem dúvida, a Geometria é, nas matemáticas gregas, o ramo que deu prova de uma tal perfeição que se transformou, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Dois mil anos após Euclides, ela será para Newton o modelo para toda a construção de uma teoria científica e os seus Princípia inspirar-se-ão neste modelo."*

Os *Elementos* de Euclides representam, de um modo perfeito, o tipo de Geometria que vai dominar todo o período compreendido entre a Antigüidade e a época moderna.

Proclus fala de Euclides (*apud* PIAGET & GARCIA, 1993: 91):

> *"[...] aquele que reuniu os Elementos, pôs em ordem muitas coisas deixadas por Eudoxo, aperfeiçoou o que Theaetetus tinha começado e demonstrou*

> *rigorosamente aquilo que antes dele tinha sido vagamente demonstrado [...].”*

Vemos, assim, que Euclides se preocupou em ordenar, sistematizar e completar os trabalhos dos seus antecessores, como, também, que ele teve um êxito extraordinário em sua empreitada, servindo, inclusive, de modelo para muitas atividades científicas. .

A influência de Euclides, no entanto, não se fez sentir apenas na Matemática e na metodologia científica. Alguns filósofos se serviram desse método. Entre eles, podemos citar B. Spinosa, autor de *Ethica, More Geometrico Demonstrata*. A grande unidade do pensamento euclidiano jamais foi abalada pelo preenchimento de pequenas lacunas, ou mesmo pelas várias adições e desenvolvimento. Para muitos, ele representava a ordem eterna e imutável das verdades; num certo sentido, para esses, a Geometria euclidiana apresentava-se como se fosse o esqueleto do próprio pensamento humano.

Após Euclides, surgiu a figura ímpar de Arquimedes. Nascido em Siracusa, matemático e inventor, Arquimedes, ao contrário de matemáticos de sua época ou posteriores, não se considerava diminuído ao admitir que muitas de suas descobertas e soluções se originavam da observação ou da experimentação. Para ele, se uma relação geométrica podia ser evidenciada mais rapidamente através de uma série de experimentos, por que não realizá-los? Dentro dessa concepção, propôs problemas geométricos novos para cuja resolução recorreu a métodos originais, muitas vezes, de caráter físico.

Embora aceitasse ser perfeitamente válido trabalhar e concluir a partir da observação empírica, Arquimedes só se dava por satisfeito com a tarefa realizada, depois de obter uma explicação teórica rigorosamente válida à luz dos postulados, definições e teoremas precedentes.

Na sua opinião, como deixa claro nas reflexões reunidas em *O Método*, o processo empírico de investigação tinha tanto valor quanto a dedução produzida estritamente pelo raciocínio lógico. Raciocínio lógico, indução empírica ou simples experimentação eram apenas meios de alcançar o resultado: esse é que valia.

> *"Para mim, algumas coisas ficaram claras através do método concreto, para, em seguida, serem demonstradas geometricamente, porque aquele método não fornece verdadeira demonstração. É mais fácil chegar à demonstração quando se tem algum conhecimento prévio concreto do que a partir do desconhecido".*[6]

As informações sobre a vida de Arquimedes são pouco precisas. Teria nascido por volta de 287 a.C., filho do astrônomo Fídias. Estudou em Alexandria no Egito, onde encontrou Conon de Samos, matemático. Outro que se tornou seu protetor foi Hierão, tirano de Siracusa. A morte de Arquimedes coincide com o massacre que se seguiu à tomada de Siracusa pelo cônsul romano Marcelo, em 212 a.C.

Desenvolveu o método da exaustão (herdado de Eudoxo e Euclides), no estudo das figuras geométricas. Arquimedes foi um matemático que se dedicou especialmente à Geometria. Não deixava, entretanto, de buscar verdades físicas, principalmente na Mecânica, e não sentia qualquer inibição em procurar uma utilidade prática para as suas descobertas. Estudou o equilíbrio dos sólidos, o funcionamento da alavanca, o movimento dos corpos celestes e organizou a mais completa coleção na Antigüidade de figuras planas com centros de gravidade perfeitamente localizados.

Essa simplicidade de raciocínio e essa humildade na busca dos conhecimentos é que levaram Arquimedes à solução de um problema que preocupava os matemáticos da época: determinar o valor da razão existente entre os comprimentos do círculo e do diâmetro.

Ao contrário de outros que procuravam resolver a questão através de cálculos ou da construção geométrica (com régua e compasso), Arquimedes

---

[6] Arquimedes e PHODOS, 287-212 a.C.

recorreu ao velho sistema de medir figuras. Se um triângulo é inscrito num círculo, sua área é claramente menor que a do círculo; por outro lado, será maior a área do triângulo circunscrito. A duplicação do número de lados leva a um hexágono inscrito de área menor que a do círculo e a um hexágono circunscrito de área maior. Em ambos os casos, as duas áreas estavam mais próximas da área do círculo que as áreas dos triângulos. Arquimedes, com régua, compasso e os métodos já desenvolvidos, foi duplicando o número de lados de ambos os polígonos até obter figuras de 96 lados. Verificou que as áreas respectivas, embora se aproximassem sempre mais da área do círculo, eram sempre um pouquinho menores ou um pouquinho maiores. Mas o valor de aproximação comum às duas era a área do círculo. Em outras palavras, percebeu que quando os lados dos polígonos chegassem ao tamanho de um ponto, círculo e polígono se confundiriam, ou seja, que o círculo era o limite das duas séries de polígonos. Assim, pelo processo de aumentar e diminuir duas séries de polígonos, Arquimedes acabou por verificar que a relação entre círculo e diâmetro, ou π,

$$\text{era menor que } 3\frac{1}{7} \text{ e maior que } 3\frac{10}{71}.$$

um valor muito aproximado do nosso conhecido 3,1416....

Tudo na natureza sugeria a Arquimedes relações, descobertas e demonstrações matemáticas. Da aplicação da Geometria à Astronomia, ele obteve os relógios solares, chegou a uma medição bastante precisa do diâmetro aparente do Sol e à construção de modelos mecânicos reproduzindo movimentos solares. Toda a obra de Arquimedes demonstra a preocupação em divulgar suas descobertas, mesmo as mais difíceis ou inusitadas. No *Arenáceo*, por exemplo, utilizou regras que equivalem à aplicação dos logaritmos, que só vieram a ser utilizados sistematicamente vinte séculos depois.

OBRAS DE ARQUIMEDES		
#	OBRAS	CARACTERÍSTICAS
	Da Esfera e do Cilindro	Esta obra consta de dois livros: Livro I e Livro II, sendo que as definições do Livro I, que acompanham uma breve carta a Dositeo são em número de 6
2	*Dos Conóides e dos Esferóides*	O tratado dos Conóides e Esferóides contém um total de 40 Proposições e é, em certo sentido, uma continuação da obra Da Esfera e do Cilindro.
3	*Das Espirais*	Contém 28 proposições relacionadas com as propriedades da curva que hoje conhecemos com o nome de Espiral de Arquimedes e cuja equação polar é $r = K\theta$
	Da Medida do Círculo	É um dos mais breves escritos de Arquimedes, compreendendo apenas três proposições. É também considerado como um dos mais importantes. A primeira proposição demonstra, por exaustão, que "a superfície **s** do círculo é igual à superfície de um triângulo retângulo cujos catetos são respectivamente a periferia **c** e o raio **r** da circunferência do mesmo círculo". A segunda proposição estabelece que "a superfície do círculo está para o quadrado construído sobre o diâmetro, aproximadamente como 11 para 14". Na terceira proposição, Arquimedes demonstra que "o comprimento **c** de um círculo é igual ao triplo do diâmetro, aumentado de uma parte do diâmetro compreendida entre 1/7 e 10/71 do mesmo diâmetro".
5	*Quadratura da Parábola*	Neste livro, Arquimedes demonstra, na Quadratura da Parábola, a equivalência de um segmento de parábola com um triângulo, aparece o primeiro exemplo de quadratura de uma figura mistilínea. Para demonstrar essa equivalência, Arquimedes empregou o método hoje denominado "passagem ao limite".

#	OBRAS	CARACTERÍSTICAS
6	*Arenário*	Este trabalho, além de ser uma crítica a uma metáfora poética de Píndaro "inumeráveis como areias do mar", perseguia também uma finalidade de ordem didática, pois era dedicado a Geleão, filho do Tirano de Siracusa. Arquimedes explica inicialmente que o objetivo do Arenário era: 1°) demonstrar que o número de grãos de areia do mar não é infinito; 2°) que esse número de grãos de areia do mar pode expressar-se mediante um número, e assim se propõe a dar um nome, não somente a esse número, como também a outro muito maior: o número de grãos de areia necessários para cobrir todo o universo.
7	*Do Equilíbrio dos Planos*	Esta obra contém, sob um ponto de vista geométrico, os princípios fundamentais da Estatística, a determinação matemática do centro da gravidade do paralelogramo, do triângulo e do trapézio e a teoria do equilíbrio das alavancas.
8	*Do Equilíbrio dos Corpos Flutuantes*	Esta obra apresenta as bases científicas da Hidrostática com o famoso princípio de Arquimedes e as condições de equilíbrio dos conóides parabólicos flutuantes.
9	*Do Método Relativo aos Teoremas Mecânicos ou o Método*	Este escrito esteve perdido desde os primeiros séculos de nossa era até sua redescoberta em 1906. Trata-se de uma longa carta dirigida a Eratóstenes na qual Arquimedes expõe um método de investigação, por ele empregado na determinação de muitos dos resultados geométricos ou mecânicos, cuja demonstração realiza admiravelmente em seus escritos puramente científicos.
10	*Ostomachion*	É outro dos escritos de Arquimedes que foram reconstruídos nos últimos tempos. É um problema geométrico que consiste no seguinte: uma série de 14 figuras poligonais, que, em conjunto, devem completar um retângulo, pois cada uma delas deve ter uma relação com o total.
11	*O Problema dos Bois*	É um problema que se conhece mediante um epigrama dirigido por Arquimedes a Erastóstenes, contendo quarenta e quatro versos, que começa como se segue: "Calcule, oh, amigo! o número de bois do sol, operando com cuidado, se possuis alguma ciência". Este problema é um desafio aos matemáticos para resolver um sistema de equações indeterminadas com oito variáveis.

Arquimedes escreveu também:

a) Lemas de Arquimedes

b) Sólidos Semi Regulares

c) Círculos Tangentes.

...e muitos outros escritos que estão perdidos.

Com Arquimedes, a Matemática grega atingiu o seu apogeu.

Mais que seus avanços teóricos, impressionaram a imaginação popular da época os resultados obtidos com a construção de diversas máquinas, entre as quais, por exemplo, a balança hidrostática e a rosca-sem-fim (que utilizou para elevação de águas). A partir daí, foram-lhe atribuídas as mais mirabolantes invenções. Arquimedes teria sido, por exemplo, o idealizador dos célebres **espelhos ustórios** usados durante o cerco de Siracusa. Com tais espelhos, os defensores da cidade queimavam à distância os navios romanos, concentrando sobre eles os raios solares.

Provavelmente, em verdade, seus conhecimentos de Mecânica devem ter adiado eficazmente a queda da cidade, tanto que ela, por três anos, conseguiu resistir ao cerco dos romanos.

Assim, Arquimedes viveu dedicando-se, sucessiva ou simultaneamente, à Matemática, Física, Engenharia, Geometria, Astronomia e a seus inventos.

Um pouco mais jovem que Arquimedes, destacou-se também, nessa época, Eratóstenes de Cirene, famoso pela vasta cultura e erudição.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS
ERATÓSTENES a) grego, nascido em Cirene (Cirenaica) cerca de 273 ou 276 a. C. b) morreu em Alexandria em 194 a.C.	a) astrônomo, geógrafo poeta e matemático; b) chamado (mais ou menos em 236 a.C.) por Ptolemeu III Evérgeta, assumiu a direção da Biblioteca de Alexandria, manteve-se no cargo até sua morte; c) dos cinqüenta (aproximadamente) trabalhos que lhe são atribuídos, apenas alguns fragmentos vieram ter às nossas mãos; d) nas matemáticas, ele imaginou um processo de pesquisa dos números primos; e) resolveu o problema da duplicação do cubo com o auxilio de um instrumento de sua invenção; f) sua obra essencial trata de geodésia e de geografia matemática, ciências das quais pode ser considerado o verdadeiro criador: • devemo-lhe principalmente a primeira determinação precisa do comprimento do círculo terrestre; • escreveu igualmente um trabalho sobre as estrelas; • estabeleceu uma cronologia da Grécia antiga; g) interessou-se por problemas filológicos.

De Apolônio de Perga (250-170 a.C.), considerado como um dos maiores matemáticos do período Alexandrino, são escassas as notícias sobre sua vida. Sabe-se que, quando jovem, foi a Alexandria, onde aprendeu Matemática com os discípulos de Euclides. Sabe-se, também, que, com seus insuperáveis estudos sobre as seções cônicas, isto é, curvas (circunferências, elipse, hipérbole, parábola) que se obtêm cortando um cone circular por um plano em diferentes inclinações, continuou e aperfeiçoou os trabalhos de Euclides.

Apolônio conhecia as obras de Euclides e de Arquimedes, mas seu trabalho possui muitas idéias originais e de qualidade. Seu Tratado de Seções Cônicas era dividido em oito livros, dos quais sete foram conservados, os quatro primeiros em grego e os três restantes por uma tradução árabe. Do oitavo livro, totalmente perdido, só existem algumas informações através de Pappus.

LIVROS DE APOLÔNIO		
	LIVROS	CARACTERÍSTICAS
ELEMENTOS DA TEORIA DAS CÔNICAS	Livro I	O livro I contem a geração das três cônicas e das seções opostas, bem como as suas principais propriedades, expostas de modo mais completo e geral do que aquele que foi apresentado pelos seus antecessores.
	Livro II	O livro II refere-se aos diâmetros e aos eixos das seções e às assíntotas, elementos que têm uma importância ainda maior e essencial pelos **diorismas;** nesse mesmo livro estão dadas as definições de diâmetros e de eixos.
	Livro III	O livro III reúne muitos teoremas notáveis, úteis pela síntese e pelo diorisma dos lugares sólidos e são, em sua maioria belos e novos. "Depois de os ter escrito, ocorreu-me que Euclides não tinha obtido a síntese do lugar geométrico relativo a três e quatro retas, mas só uma parte dela e, ainda assim, não com muita felicidade; e que, também não era possível completar bem essa síntese sem aquilo que descobri".
	Livro IV	O livro IV ensina de quantos modos se podem interceptar duas cônicas, uma cônica e um círculo, e muitas outras coisas que eram totalmente evitadas pelos predecessores, isto é, em quantos pontos duas seções opostas encontram uma cônica, um círculo, ou outras duas seções opostas.
CONSIDERAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR	Livro V	O Livro V trata amplamente dos máximos e mínimos.
	Livro VI	O Livro VI trata das cônicas iguais e semelhantes.
	Livro VII	O Livro VII trata dos teoremas relativos aos diorismas.
	Livro VIII	O Livro VIII contém problemas sobre as cônicas com condições diorísticas que os limitam.

Séculos depois, esses estudos profundos de Apolônio sobre as seções cônicas foram úteis para Kepler em seus trabalhos de Astronomia.

Apolônio, além do tratado das Cônicas, ainda escreveu outras obras geométricas:

- Da Seção de Razão.
- Da Seção de Espaço.
- Da Seção Determinada.
- Os Contatos.
- As Intercalações.
- Os Lugares Planos.
- Sobre o Problema de Delos.
- Sobre a Quadratura do Círculo, etc.

Apolônio é, hoje, considerado o iniciador dos fundamentos da **Geometria de Posição.**

Após Euclides, Arquimedes e Apolônio, surgem vários matemáticos que, aproveitando a herança deixada pelos três, começam a publicar trabalhos e a demonstrar teoremas.

Entre os contemporâneos de Apolônio, destaca-se Nicomedes.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
NICOMEDES nasceu a 150 a.C.	a) é o célebre inventor da **conchóide**; b) a conchóide pode ser traçada com toda a facilidade, mecanicamente, por meio de um instrumento simples imaginado por Nicomedes; c) a importância da conchóide reside no fato de que com ela seria possível resolver os dois mais famosos problemas da antigüidade: • a trisseção do ângulo; • a duplicação do cubo (Problema de Delos).

Não resta dúvida de que a conchóide, já tão célebre, adquiriu nova importância, quando Viète (século 16) observou que todos os problemas, cuja solução depende de uma equação do 3° grau, têm solução por seu intermédio.

Acrescentando-se a isso o fato de que Newton (século XVII), generalizando o seu emprego, demonstrou que qualquer questão geométrica do 3° ou 4° graus se pode resolver com essa curva, é claro que ela adquiriu então uma importância muito maior do que aquela que lhe foi atribuída por seu ilustre inventor, na Antigüidade.

Outros que se destacaram, do século II a.C. ao século I d.C., são:

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
DIOCLES grego do século II a.C.	a) Segundo Eutócio, o inventor da **cissóide,** curva que ele usou para a resolução do problema da duplicação do cubo; b) segundo ainda Eutócio, Diocles resolveu, mediante seções cônicas, a equação cúbica de Arquimedes, relativa ao problema da divisão de uma esfera em duas partes, tendo entre si uma relação dada.
PERSEU matemático grego , século II a.C.	Estudou as curvas chamadas **espíricas,** curvas que são seções do sólido gerado pela rotação dum círculo ao redor de uma de suas cordas, ou de uma de suas tangentes ou, inclusive, em torno de um eixo exterior (toro), seções feitas por um plano paralelo ao eixo da rotação geradora da superfície. Essas curvas, de forma muito singular, não foram objeto de nenhuma pesquisa ulterior.
ZENODORO geômetra grego, século II a.C	a) ocupou-se das figuras isoperimétricas; b) demonstrou que "entre todas as figuras planas do mesmo perímetro, o círculo é a que possui maior superfície"; c) estendeu sua conclusão também para a esfera.
HÍPSIDES	a) conhecido como autor de um livro adicional aos elementos de Euclides: Livro XIV; b) chegou até nós, em grego e em árabe, o trabalho "Ascensões": ▪ que trata do cálculo do tempo gasto na ascensão de um signo do zodíaco; ▪ onde aparece pela primeira vez, na Grécia, a divisão do zodíaco de 360 graus.
DIONISODORO	a) apresentou uma solução (diferente da de Diocles) para o problema da equação cúbica de Arquimedes; b) estudou o toro sobre o qual (segundo Heron) dedicou um tratado.
POSIDÔNIO (estóico)	a) dedicou-se à Astronomia por cujos trabalhos ficou conhecido; b) na Matemática, influenciado pelas Escolas de Megara e dos Estóicos, preocupou-se: ▪ com o aspecto crítico de análise aos princípios matemáticos; ▪ em combater muito as investidas que Zeno (da Escola de Epicuro) fazia aos Elementos de Euclides.
GEMINO (natural de Rhodes)	a) autor de um tratado enciclopédico onde se concentrava todo o conhecimento matemático da cultura grega até a época (73—67 a. C.): ▪ vazado em linguagem crítica e muito minuciosa; ▪ conhecido apenas a partir de referências de outros autores, em particular Proclus e an-Nairizi (célebre comentarista árabe do século X d.C.) b) Criticou o 5º postulado de Euclides que julgava poder ser demonstrado.

GEÔMETRA	CONTRIBUIÇÕES GEOMÉTRICAS PRINCIPAIS:
HIPARCO (século II a.C., natural de Nicéia, na Bitínia)	a) considerado um dos maiores astrônomos da cultura helênica; b) de sua vasta obra, chegou até nós seu tratado *Comentário sobre o Phaenomena de Eudóxio e Arato* (que parece anterior à suas célebres descobertas de Astronomia); c) descobriu a precessão dos equinócios; d) retomou os cálculos de Aristarco sobre o ano solar e deu resultados de notável precisão que diferem dos atuais de menos de um segundo; e) fez catálogo de estrelas; f) melhorou sensivelmente os instrumentos de observação usados em sua época; g) construiu uma tabela de corda que é equivalente a uma tabela de senos, dando, para cada ângulo tabelado, o valor da corda correspondente; h) fez uso constante, em seus trabalhos, daquilo que hoje denominamos trigonometria esférica.
MENELAU DE ALEXANDRIA viveu em fins do século I e princípios do século II d.C.	a) sua obra *Sphaerica* da qual restam três livros em árabe, estabelece as bases da Geometria para uso das gerações posteriores; b) no Livro I, encontramos pela primeira vez a definição precisa de triângulo esférico; c) no Livro II, só se trata de Astronomia; d) no Livro III, retoma-se o estudo da Trigonometria e. aí, encontramos o célebre teorema de Menelau.
HERÃO DE ALEXANDRIA mecânico e físico grego, viveu em Alexandria no século I d.C.	a) deixou numerosas obras, mas poucas chegaram até nós. Podem ser lidas em edições modernas: *Opera omnia, Mecânicas, Pneumáticas;* b) possuiu certas noções de óptica sobre a reflexão da luz e conhecia certos fenômenos de hidráulica e de pneumática; c) utilizou seus conhecimentos para construir órgãos, autômatos e diversos artifícios mecânicos que alcançaram grande popularidade; d) dos trabalhos geométricos de Herão o mais importante é *A Métrica*, em três livros que foram descobertos, em 1896, em Constantinopla por R. Schone.

A MÉTRICA de HERÃO	
LIVRO	**CARACTERÍSTICAS**
Livro I	O livro I trata da medida da área de quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, vários outros quadriláteros particulares, polígonos regulares desde o triângulo eqüilátero até o dodecágono regular, círculos e segmentos, elipses, segmentos parabólicos e da superfície de cilindros, cones, esferas e zonas esféricas. Nesse livro, encontra-se também a dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados.
Livro II	ocupa-se de mensuração de volumes de cones, cilindros, paralelepípedos, prismas, pirâmides, troncos de cones e de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros (anéis cilíndricos), os cinco sólidos regulares e alguns prismatóides.
Livro III	O livro III aborda o problema da divisão de certas áreas e volumes em partes que estão entre si numa razão dada.

Como podemos observar, a sistematização efetivada pelos gregos fez com que o conhecimento geométrico passasse a ser utilizado em várias áreas como astronomia, navegação, etc. com novas possibilidades.

Essa movimentação:

... ➔ aplicação prática ➔ sistematização ➔ aplicação prática ➔ ...

caracteriza-se como uma enorme flexibilização do conhecimento geométrico.

É lamentável que, no ensino, se comece por essa etapa.

CAPÍTULO 3

A DIFUSÃO DAS IDÉIAS GEOMÉTRICAS DE EUCLIDES

Qualquer um que lê a história antiga observa claramente que o grego foi um povo que não conseguiu tornar-se nação. Transparece claramente, na sua história, que o individualismo de suas cidades e as guerras constantes entre elas foram as doenças causadoras do fato citado. Esse povo, entretanto, elaborou uma civilização ímpar, da qual somos grandes devedores.

"[...] salvo as forças cegas da natureza, tudo o que evolui na vida da humanidade é de origem grega" (Maine, historiador, citado por Indro Montanelli).

Provavelmente essa declaração exagerada se deva a uma admiração incontida por tudo aquilo que os gregos inovaram.

Naquilo que diz respeito ao que nos interessa, os gregos criaram um verdadeiro monumento a Geometria Euclidiana. Essa obra foi tão admirada [illegible] estrutura chegou a ser considerada uma representação da estrutura do próprio pensamento humano.

Como essa obra varou os séculos e chegou até nós? Por algumas razões, das quais citaremos:

1. A escola de Alexandria (onde Euclides lecionou) formou muitos matemáticos e cientistas brilhantes (como Arquimedes) que souberam admirar e divulgar essa obra. Entre esses divulgadores, podem ser citados: **Pappus de Alexandria, Teon de Smirna, Sereno, Teon de Alexandria. Proclus, Simplício** e **Eutócio de Ascalon.**

2. A verdadeira fixação que os gregos tinham, desde a conquista dórica, pelo oriente e o completo desinteresse pelo Ocidente. Com isto, e passando praticamente despercebida, Roma cresceu a ponto de Emílio Paulo deportar

para lá cerca de mil intelectuais gregos e de Múmio transferir todas as obras de arte de Corinto.

Sobre esse texto, disseram os romanos:

"Graecia capta ferum victorem cepit..."

ou seja,

"A Grécia vencida, venceu o bárbaro conquistador".

3. As conquistas árabes.

4. Os encrenqueiros: aqueles matemáticos que, não concordando com Euclides, quiseram corrigi-lo. A maioria das críticas, conforme se verá no capítulo seguinte, corroboraram o verso da cantiga brasileira:

   "Atirou no que viu, acertou no que não viu".

5. As críticas plausíveis. Como se verá, no capítulo seguinte, só no século 18 d.C., foram encontradas críticas adequadas de: Gauss, Bolyai, Lobatchevski, Peano, Pasch, Pieri, Veblen, Hilbert e outros.

3.1 Os Cronistas

Quem são e que fizeram os divulgadores, historicamente conhecidos como os "Cronistas"?

MATEMÁTICO	COMENTÁRIOS
PAPPUS DE ..ANDRIA ..al do século IV d.C.)	a) conhecido por sua obra Coleções Matemáticas , em 8 volumes (o 1° e metade do 2° não chegaram até nós). Nela, oferecia uma análise sucinta das obras mais difíceis dos antigos; b) Pappus acrescentou, a essas obras dos antigos, um grande número de proposições de sua lavra: ▪ quadratura de uma superfície curva; ▪ teoremas notáveis sobre teorias das transversais; ▪ esboços sobre a teoria da involução; ▪ o "problema de Pappus", hoje conhecido como teorema de Guldin (enunciado no prefácio de seu livro VII).

MATEMÁTICO	COMENTÁRIOS
TEON DE SMIRNA (século II d.C.)	Dele, são conhecidos: ▪ *Comentários sobre Platão*, nos quais se notam as influências neo-pitagoricas; ▪ um livro sobre astronomia, o qual foi baseado em obra peripatética.
SERENO D'ANTISSA (século II ou IV d.C.)	Restam dele: a) dois pequenos tratados que se encontram na edição de "Apolônio de Perga", de que Sereno tinha comentado as Cônicas: ▪ Sobre a Secção do Cilindro; ▪ Sobre a Secção do Cone; b) um fragmento dos seus Lemas, inserido na *Astronomia* de Theon de Smirna.
TEON DE ALEXANDRIA (final do século IV d.C.)	a) conhece-se pouco de sua vida; b) a célebre Hipatia foi sua filha; c) escreveu: ▪ *Comentário sobre os Elementos de Euclides*; ▪ *Escolios sobre Arato publicados com as obras deste*; ▪ uma continuação do *Cânon Real de Ptolomeu*; ▪ uma Tábuas Manais Astronômicas; ▪ *Comentários* (em onze livros) sobre o Almagesto de Ptolomeu.
PROCLUS (412/485 d.C.).	a) neoplatônico; b) originário de Xanto, Lícia, foi novo para Alexandria; c) discípulo de Orion, Leonas, Heron e Siriano (que lhe apresentou o Timeu e alguns escritos de Arquimedes); d) aos 40 anos, sucedeu Siriano à frente da escola de Atenas, onde ficou por mais de 30 anos; e) fez prevalecer um misticismo inspirado na prática da magia, nos mistérios de Eleusis e nas doutrinas caldéias (iniciado que foi por Asclepigenia, filha de Plutarco) e levou longe essas prática; f) foi autor de: ▪ *Comentário sobre Parmênides*; ▪ *Comentários sobre Timeu* (muito célebre); ▪ *Comentários sobre antigos Geômetras*; g) os fragmentos das suas obras foram publicados, no século 19, com o título: *Procli philosophi platonici opera*.

MATEMÁTICO	COMENTÁRIOS
SIMPLÍCIO Nasceu na Cilicia a 500 d.C.	a) discipulo de Amonio e de Damascio, fez parte dos últimos ecléticos que ensinaram em Atenas; b) após o encerramento da escola (pelo decreto de Justiniano) refugiou-se na Pérsia; c) em 532, voltou a Atenas; d) escreveu: ▪ *Comentários sobre as Categoria de Aristóteles*; ▪ *Comentários sobre o Tratado de Coelo de Aristóteles*; ▪ *Comentários sobre o Tratado da Alma de Aristóteles*; ▪ *Interpretação do Manual de Epicteto*; ▪ alguns textos importantes de Empédocles, Diógenes de Apolonia, etc.
EUTÓCIO D'ASCALON (início do século VI d.C.)	a) geômetra grego; b) deixou dois "Comentários": ▪ sobre Apolônio — foi colocado por Halley na edição, por este feita, das obras de Apolônio; ▪ sobre Arquimedes: foi publicado em Basiléia em 1544 e continha noções exatas sobre os processos usados na Escola de Alexandria para os cálculos numéricos.

3.2 Roma e uma nova concepção

Em pleno século I d.C., Roma chegava ao seu auge, pois dominava a Babilônia, o Egito, a Grécia e a Judéia. Ao mesmo tempo, permitida pela tolerância religiosa e cultural romana, florescia a cultura grega nas suas principais academias, Atenas e Alexandria.

Depois de Proclus, Atenas teve seu ocaso e, após Teon, Alexandria entra em declínio. Acusados de pagãos pelos cristãos, os acadêmicos gregos reagem com os trabalhos esotéricos mágicos (por exemplo, de Proclus) e com a cultura grega (por exemplo, Hipatia, assassinada pelos cristãos).

Embora houvesse traduções, para o latim, de os *Elementos de Euclides*, esses não eram de interesse para os romanos que davam certa importância à Aritmética de Nicômaco e à Grande Obra (ou Almagesto) de Ptolomeu, mas davam maior importância à Geografia de Ptolomeu.

A verdade é que certos tipos da cultura grega (Filosofia e Geometria) não interessavam aos romanos que cultivavam outros (Geografia e inventos de Arquimedes) que diziam respeito à sua expansão e à sua política. O propósito dos romanos era eminentemente prático e utilitarista, por isso, pouco cultivaram a ciência. Para eles, essa e as técnicas tinham por finalidade o prover a vida com as comodidades necessárias a fim de torná-la confortável e com o melhor padrão possível.

No tratado de arquitetura de Vitrúvio, *De Architectura*, lê-se:

> *"A geometria é também de grande assistência para o arquiteto e, em particular, ela nos ensina o uso da régua e do compasso com os quais podemos planejar corretamente os edifícios e depois traçar, no canteiro de obras, com precisão, os ângulos retos e usar corretamente o nível e o fio de prumo. Com auxílio da ótica, a iluminação adequada pode ser feita com vista nos pontos cardeais. É verdade que a aritmética nos ajuda a calcular o custo total e o dimensionamento da obra, mas as difíceis questões de simetria são resolvidas pelas teorias geométricas e seus métodos práticos."*

Com o surgimento de um novo modelo acadêmico os mosteiros, acabaram o espaço e o interesse pela cultura grega, fortemente marcada pelo seu politeísmo e por sua reação ao Cristianismo.

No ocidente, o interesse pela cultura grega só será reavivado durante o Renascimento, nas academias de cultura clássica.

3.3 Os Árabes

É costume usar o termo *árabes* para designar toda uma corrente de pensadores orientais, que prestaram serviços, não só à história do pensamento filosófico, como às ciências em geral.

A desconsideração romana pela cultura grega levou à dispersão de filósofos e de suas obras e, evidentemente, da cultura para regiões distantes dos romanos e por eles não dominadas. A partir do século VI d.C., isso passou a significar o mundo islâmico.

O primeiro centro-núcleo foi a escola persa de Jundichapur, que recebeu os cristãos nestorianos e neoplatônicos, impossibilitados de ficar no Ocidente, devido ao decreto de Justiniano, em 529, fechando as escolas de filosofia pagã. Logo, em sua expansão, os árabes entraram em contacto com os hindus, os chineses e os judeus, cujos conhecimentos incorporaram aos dos gregos.

Um século e meio depois, iniciando o período da sabedoria árabe, o califa Harum-al-Raschid estimulou as traduções gregas, o elemento que mais influiu na formação do pensamento filosófico. Esse é um fenômeno que antecipa de quatro séculos e com efeitos bem semelhantes aquilo que acontecerá no século XII, no Ocidente.

No século IX, as traduções desenvolveram-se de tal forma, que Bagdá passou a ser considerada uma espécie de ***escritório de tradutores***. Nesse século, o árabe culto possuía em sua língua a obra quase completa de Aristóteles, com os comentários de Alexandre, Porfírio, etc., e muitos diálogos de Platão. Não se limitaram os árabes a traduzir; interpretaram e desenvolveram aspectos seus nas doutrinas que expunham.

No século XII, predominam os árabes da Espanha muçulmana: Avempace e Averróis.

Ao lado da corrente filosófica, de influência grega, desenvolveu-se a chamada filosofia dos judeus, caracterizada na cabala, forma judia da mística neoplatônica. A cabala veio inspirada do *Talmude,* e foi na Espanha e no Marrocos que tomou aspecto de filosofia judaica. Seus maiores nomes: Avicebrão e Maimônides.

Nos fins do século XI, começou o ocaso da cultura árabe. A nota mais alta que ela legou à posteridade, como um princípio de saber, foi a de grande respeito pela ciência.

A decadência começou em 847 e o ímpeto da cultura islâmica se estancou no século XII.

No pensamento islâmico, podem ser distinguidos três momentos:

1. Na corte de Medina (632-661)
2. Na corte de Damasco (661-750)
3. Na corte de Bagdá (750-847).

No ocidente, há uma idéia geral de que "não existe ciência árabe". Isto quer afirmar que aos árabes faltava originalidade, que eram falhos de uma grande teoria cientifica nova. Realmente, não assimilaram as partes mais altas da ciência grega, ficando aquém no manejo das teorias que dela tomaram emprestado. Nesse sentido, não há, tampouco, ciência ocidental em toda a Idade Média. A verdade é que foram os sábios árabes de Bagdá, Damasco, do Cairo e da Espanha que transmitiram ao Ocidente a parte de ciência antiga que a Idade Média conheceu. Por outro lado, enriqueceram-na de pormenores. tornaram-na mais acessível, juntaram-lhe as práticas tomadas aos hindus, multiplicaram as observações astronômicas, geodésicas, meteorológicas, médicas, descobriram fatos novos, principalmente algorítmicos e aperfeiçoaram os instrumentos de observação e de medida.

SARTIAUX (p. 52), em sua obra *Moyen age*, e RUSSEL (p. 19), em *Panorama*, magistralmente resumiram, nessas citações, todo esse desenvolvimento cultural dos árabes.

"Se os árabes não atingiram o nível dos gregos, os ocidentais, antes do século XIV, não alcançaram o dos árabes".

"Os árabes foram mais experimentais do que os gregos, especialmente em química. Esperavam transmutar os metais em ouro, descobrir a pedra filosofal e preparar o elixir da vida".

Foi a notação hindu dos números que substituiu a notação romana; o erro de chamarem àquela notação *números árabes* decorreu da ação direta que tomaram a filosofia e a ciência árabes na Europa e o serviço que prestaram à cultura européia. Sob a influência dos árabes, espalhou-se o sistema de numeração decimal. Parece fora de dúvida que os árabes tiveram papel preponderante, se não na invenção, pelo menos na introdução do zero no Ocidente.

Devemos aos árabes a descoberta e universalidade dos textos de Euclides e o único trabalho completo que se conhece de Apolônio de Perga: *Sobre a divisão em partes proporcionais.*

A investigação matemática árabe parece ter começado em princípios do século IX. Nessa época, em Bagdá, o movimento de tradução das grandes obras helenísticas chegou ao seu apogeu.

As características principais desse empreendimento são que as traduções foram:

1. Realizadas por matemáticos de primeira ordem.

2. Fundamentadas nas pesquisas mais avançadas da época.

Assim:

O MATEMÁTICO	TRADUZIU PARA O ÁRABE
AL – HAJJAJ IBN MATAR	a) *Os Elementos de Euclides* (duas vezes). b) *O Almagesto* de Ptolomeu.
HILAL IBN HILAL AL - HIMSE	*Cônicas de Apolônio* (os quatro primeiros livros).
THABIT IBN QORRA	*Cônicas de Apolônio* (os livros V a VII).
QÚSTA IBN LUGA	*As Aritméticas de Diofante* (por volta de 870) motivado por uma pesquisa que já existia sobre análise indeterminada.

No mesmo século, foram traduzidas para o árabe várias obras de Arquimedes, Pappus e Diofanto de Alexandria.

Os matemáticos árabes, fascinados pelas grandes conquistas dos gregos na Geometria, se sentiam fortemente estimulados para o seu estudo e o seu aprendizado. Conseguido isso, partiram decisivamente para o desenvolvimento de novos métodos de ataque aos problemas geométricos. O resultado foi a grande algebrização da Geometria, de modo que problemas estudados pelos gregos com métodos geométricos eram transformados pelos árabes em equações algébricas.

Precisamente no século IV, na Academia (casa da sabedoria) de Bagdá, al-Kwarizmi redigiu um livro que se caracterizou pela novidade do tema e do estilo. Em suas páginas, sob o titulo *O livro da Álgebra e do al-muqabala,* a álgebra surge pela primeira vez como disciplina matemática distinta e independente. O acontecimento foi crucial, conforme reconheceram seus próprios contemporâneos, principalmente, pelas extraordinárias possibilidades que oferecia: era ao mesmo tempo algorítmico (já que o autor enunciava processos de cálculo) e demonstrativo.

Em al-Kwarizmi, o objeto algébrico era tanto um número como uma quantidade irracional ou uma magnitude geométrica. Essa nova combinação de dois procedimentos, o demonstrativo e o aplicado, impressionaram os filósofos da época.

Nunca será demais enfatizar que, na concepção e no estilo, al-Kwarizmi não se baseava em nenhuma tradição anterior conhecida. Desde então, com essa álgebra, abriram-se imensas perspectivas para a Matemática e para as aplicações de suas disciplinas umas às outras. Se a álgebra possibilitou tais aplicações, essas, por sua vez, modificaram incessantemente a Matemática depois do século IX.

Matemáticos árabes do século IX ao século XI d.C.

Os sucessores de al-Kwarizmi empreenderam progressivamente a aplicação da aritmética à álgebra, da álgebra à aritmética, de cada uma dessas à trigonometria, da álgebra à teoria euclidiana dos números, da álgebra à geometria, da geometria à álgebra. Tais aplicações conduziram à criação de novas disciplinas, ou, pelo menos, de novos capítulos da ciência matemática.

Já se viu que a partir do século IX o panorama da Matemática se transformou e seus horizontes se ampliaram. De inicio, assistiu-se à expansão da aritmética e da geometria helenísticas. Por outro lado, no seio dessa matemática helenística criaram-se campos não helenísticos; ocorre que as relações entre as antigas disciplinas já não eram as mesmas, e muitos outros agrupamentos haviam se produzido. Essa modificação das relações é capital quando se deseja entender a história da Matemática. Assim, as novas relações que se estabeleceram entre a álgebra e a geometria deram origem a novas técnicas de grande importância.

O MATEMÁTICO	CARACTERÍSTICAS
ALMAHANI (Mohamed ibn Isa Abú Abdallah al Mahani) - Viveu no século IX d.C. Faleceu entre 874 a 884 d.C.	a) pertencia à Escola de Bagdá; b) era um eminente astrônomo; c) dentre seus trabalhos matemáticos, destaca-se seu estudo sobre os célebres problemas que Arquimedes tratou no seu 2º livro (*Tratado da Esfera e do Cilindro*); d) são também atribuídos a Almahani vários comentários sobre os livros V e X dos Elementos de Euclides.
AL-KINDI (Yaqub ibn Ishaq ibn al- Sabbah al- Kindi) Faleceu por volta de 873 d.C.	a) foi considerado o mais eminente filósofo da época; b) sua influência chegou até a Europa onde era conhecido como "filósofo dos árabes"; c) escreveu sobre astronomia, ótica e aritmética.
TABIT IBN QUORRA (Tabit ibn Qorra ibn Mervan Abu-Hasan al-Harrani) (826 / 901 d.C.) Era natural de Harranna, Mesopotâmia.	a) era médico conhecido em Bagdá; b) ficou mesmo famoso pelos seus trabalhos em filosofia e Matemática; c) absorveu melhor do que ninguém as idéias de al-Kwarizmi; c) assentou sobre bases seguras e definitivas o programa de algebrização da Geometria.
ALBATEGNIUS _(Mohamed ibn Jabir ibn Sinan Abu Abdallah- al-Battani) a) Natural de Battan na Síria. b)A data de seu nascimento é incerta. c)Faleceu em 929 d.C.	1) Distinguiu-se: a) pelos seus trabalhos em astronomia b) pelas inúmeras tabelas que construiu das linhas trigonométricas. 2) Essas suas tabelas é que disseminaram pela Europa as primeiras noções de Trigonometria. 3) Usa o seno e suas propriedades em suas obras astronômicas e, em particular, em seu "Tratado sobre as Estrelas", traduzido para o latim e divulgado na Europa no século 12 d.C. por Platão de Tivoli, sob o título "De Scientia Stellarum". 4) Construiu também uma tabela de cotangente, grau por grau, e fazia uso constante da trigonomentria esférica cujas fórmulas lhe eram bem conhecidas.

O MATEMÁTICO	CARACTERÍSTICAS
AL-FARRABI; (Mohammed ibn Mohamed ibn Tarkhan ibn Auzlag Abu Masr al- Farrabi). a) a data de seu nascimento é incerta; b) morreu em Damasco por volta de 950 d.C.; c) era natural de Farab no atual Turquestão.	a) é mais conhecido como filósofo; b) suas idéias influenciaram de modo notável os pensadores europeus do século XI; c) suas teorias e comentários sobre os filósofos gregos foram adaptadas às necessidades da escolástica sofrendo, assim, sérias distorções; d) do ponto de vista da história da matemática, Al-Farrabi é importante pelos seus valiosos comentários à obra de Euclides.
ABU' L WEFA: (Mohammed ibn Mohammed ibn Yahya ibn Ismail ibn al-Abbas Abu'l Wefa al Buzjani) a) nasceu em 940 d.C. em Buzdschan, pequena cidade nas montanhas da região persa de Korasan; b) faleceu em torno de 998 d.C. em Bagdad.	a) contribuiu particularmente para a Astronomia ▪ com os seus inúmeros comentários ao Almageste; ▪ com a construção de Tabelas; ▪ com observações próprias; ▪ com o uso da Trigonometria esférica. Nesses estudos atingiu grande proeminência. b) em seus trabalhos, encontram-se definições precisas: ▪ do seno da corda; ▪ do seno reverso, ou *sinos versus*, como se indicava na Idade Média o valor do raio menos o cosseno, isto é, "*sinus versus* de φ"=1- cos φ, e suas tabelas para cada 15'; c) era-lhe familiar a manipulação das entidades trigonométricas; d) o uso da tangente e das tabelas correspondentes também se deve ao trabalho deste grande astrônomo; e) na trigonometria esférica, ele substitui o uso do teorema de Menelao pelo "teorema dos senos". f) notabilizou-se pelo seu estudo de instrumentos astronômicos nos quais fez inúmeras modificações e aperfeiçoamentos importantes.

A construção de tabelas das funções trigonométricas sempre teve grande importância para a astronomia, desde as mais antigas civilizações, particularmente no Oriente Médio e na Mesopotâmia onde o céu é de uma claridade e beleza sem par.

MATEMÁTICO	CARACTERÍSTICAS
([illegible] [illegible]d Abderranman ibn Ahmed ibn Yunis Abu 'l Hasan al- Sadafi); a) a data de seu nascimento é incerta; b) faleceu por volta de 1009 d.C.	a) viveu no Cairo sob o dominio dos Fatimidas, facção dissidente do Islamismo, representado na época por al-Hakim, que reinou de 996 a 1021 d.C.; b) era notável como astrônomo e contribuiu também para o progresso da trigonometria e a construção de tabelas; c) independentemente de Abu'l Wefa, introduziu a tangente trigonométrica como quociente do seno e do cosseno e estudou suas propriedades.
AL- BIRUNI (Mohammed ibn Ahmed Abu'l Rihan Al- Biruni) a) nasceu em Khawarezm em 973 d.C. b) faleceu na Índia em 1048 d.C.	a) transferiu-se para o Afeganistão e daí para a Índia, quando sua pátria foi invadida por Mahmud de Ghazna; b) famoso como astrônomo e sábio pelos seus conhecimentos científicos, filosóficos e literários; c) são de grande valor suas referências e comentários a trabalhos, hoje perdidos, de astrônomos e matemáticos gregos e hindus; d) segundo Neugebauer, o total das obras de Al-Biruni alcança o número de 180, verdadeira mina de informações.
AVICENA (Al-Hosein ibn Abdallah ibn al-Hasan ibn Ali Abu Ali al-Sheich al- Rais ibn Sina). a) nasceu em 980 d.C. em Safar; [illegible] em 1037	a) foi muito importante para os escolásticos pelos seus comentários de Aristóteles; b) para a Matemática são valiosos os seus comentários sobre Euclides; c) interessou-se também pela teoria dos números.

O MATEMÁTICO	CARACTERÍSTICAS
AL-KARKHI (Mohamed Abu Bekr ibn al-Hasan al Karkhi) Faleceu por volta de 1029.	a) Foi um dos últimos matemáticos da escola de Bagdá. b) Um de seus primeiros trabalhos de importância é sobre aritmética e intitula-se **Kafi fil Hirab** que, literalmente, significa **livro de satisfações.** O título deve ser entendido no sentido algébrico: "Tal fórmula é **satisfeita** por esses valores". c) Aí encontramos as regras usuais das operações elementares com nítida influência hindu ou grega e certas identidades como $\frac{(a+b)^2}{2}-\frac{(a-b)^2}{2}=ab$ d) A grande obra de AL-KARKHI, é seu tratado de álgebra intitulado **Fakhri**, em honra ao seu protetor Abu Galib", cujo nome usual era Fakhr al- Mulk. e) Nesta obra são tratadas as equações de 1° e 2° graus, biquadradas no estilo de Al- Khowarizmi, com demonstrações geométricas. d) É notável também, nela, seu tratamento de problemas indeterminados. e) Esse tratado de álgebra era grandemente considerado pelos seus contemporâneos, mas até hoje pode ser admirado como uma das obras primas do gênio árabe.
MOHAMMED IBN AL LEIT; Viveu na passagem do século X d.C. para o século XI d.C.	Preocupou-se com: a) o problema da trissecção do ângulo; b) a construção de polígonos regulares de sete e nove lados por métodos geométricos e algébricos.
MANSUR IBN ALI	Escreveu sobre: a) instrumentos astronômicos; b) o Almageste de Ptolomeu.
HAMID IBN AL- KHIDR	a) descobriu que não tem soluções inteiras a equação $x^3 + y^3 = z^3$ b) antecipou-se, assim, às idéias de Euler e de outros matemáticos europeus.

Sem nenhuma justificativa teórica, os matemáticos do século X iniciaram uma dupla tradução anteriormente inconcebível: a dos problemas geométricos para a língua da álgebra e a dos problemas algébricos para a língua da geometria. Foi assim que eles expressaram algebricamente problemas concretos que não podiam ser resolvidos com uma régua e um compasso, como a trissecção do ângulo, as medianas e o heptágono regular. Por outro lado, ante a dificuldade de resolver com radicais a equação de terceiro grau, alguns algebristas, que também eram geômetras — como Abu al-Jud ibn al-Leith — foram levados a traduzir essa equação para a linguagem da geometria, o que lhes permitiu aplicar ao estudo da equação a técnica da interseção das curvas.

A primeira tentativa de proceder a essa dupla tradução deveu-se a al-Khayam (c. 1048-1131). Procurando superar a pesquisa ligada a uma determinada forma de equação cúbica, al-Khayam elaborou uma teoria das equações algébricas de grau inferior ou igual a três e, ao mesmo tempo, propôs um novo modelo de redação dessas equações. Estudou então as equações de terceiro grau, com a ajuda das curvas cônicas e, para elaborar essa nova teoria, viu-se obrigado a conceber de maneira mais aprimorada as novas relações entre a álgebra e a geometria, antes de formulá-las. A teoria das equações pareceu, desde então, ainda que timidamente, superar as diferenças entre as duas disciplinas.

Em seu célebre tratado de álgebra, al-Khayam conseguiu obter os resultados transcendentais atribuídos equivocadamente a Descartes: uma solução geral de todas as equações de terceiro grau pela interseção de duas cônicas e. por outro lado, um cálculo geométrico que se torna possível graças à definição de uma unidade de comprimento, um conceito fundamental.

Meio século após al-Khayam, seu sucessor, Sharaf al-Din al-Tusi, deu um novo passo. Para demonstrar a existência do ponto de interseção de duas curvas, aquele matemático propôs os problemas de localização e separação das raízes da equação e estudou as condições de sua existência,

Ao contrário do que comumente se coloca, "que aos árabes faltam originalidade e criatividade", vê-se que coube a eles introduzir, pela primeira vez na história, um fato marcante e que poucos observaram: dar flexibilidade e versatilidade às disciplinas matemáticas. Eles colocaram. sobre cada uma delas, vários olhares, várias perspectivas.

CAPÍTULO 4

CONTESTAÇÕES ÀS IDÉIAS GEOMÉTRICAS DE EUCLIDES

A difusão da obra de Euclides não ocorreu somente no mundo clássico. Como vimos no capítulo anterior, vários povos sofreram influência da obra de Euclides.

Em 1533, foi feita em livro a primeira edição grega de *Os Elementos de Euclides*. Em seguida à edição desse texto, as traduções em todas as línguas modernas se multiplicaram incessantemente. Até o fim do século passado, a quantidade de edições dessa obra matemática suplantou a de qualquer livro conhecido (inclusive a *Divina Comédia*), perdendo apenas para a quantidade de edições da Bíblia.

Mas por maior que tenha sido o respeito que a construção de Euclides mereceu, isso não impediu que a obra do grande geômetra sofresse críticas, mesmo durante a Antigüidade Clássica.

Na Antigüidade, havia uma desconfiança de que o seu 5ª postulado fosse uma proposição suscetível de demonstração. Por isso, não é de se espantar que se fizessem tentativas de demonstrá-lo. Muitas delas ficaram célebres.

Entre os gregos encontram-se tentativas de:

Ptolomeu (século II d.C.)

Proclo (século V d.C.).

Na Idade Média, vários geômetras árabes e ocidentais tentaram a demonstração.

Em1693, Wallis, admitindo a existência de um triângulo, semelhante a um triângulo dado, com área tão grande quanto se quiser (aceitando, portanto, um postulado equivalente ao de Euclides), julgou ter resolvido a questão, não percebendo que sua demonstração encerrava uma petição de princípio.

Também foram notáveis os trabalhos críticos de Saccheri (século XVIII), assim como os dos geômetras Lambert, D'Alembert, Laplace e Legendre.

As críticas vieram mostrar que o sistema de Euclides continha algumas imperfeições:

a) Clavius notou a ausência de um postulado garantindo a existência da quarta proporcional;

b) Leibnitz, por sua vez, apontou o fato de que Euclides admite sem justificação que duas circunferências, cada uma das quais passando pelo centro da outra, têm ponto comum;

c) Gauss atraiu a atenção sobre o papel desempenhado pela noção de um ponto situado entre dois outros, noção essa que não é definida.

Isso tudo levou, no período entre 1860 a 1885, a diversas revisões parciais dos fundamentos da Geometria especialmente por Helmholtz, Meray e Houel que procuraram eliminar algumas de suas falhas. Meray, inclusive, procurou solução colocando a Geometria unificada, sem particioná-la em Geometria Plana e Geometria Espacial.

A Geometria, então, começou a ser reestudada quanto ao rigor da apresentação. Apareceram os trabalhos axiomáticos de

- MORRIS PASCH, em 1882,
- GIUSEPPE PEANO, em1889,
- MARIO PIERI e outros membros do grupo Formulaire (um grupo antecessor ao de Bourbaki), em 1899,
- DAVID HILBERT, em 1899,
- OSWALD VEBLEN, em 1904.

Apareceram, também nessa época, os primeiros livros de Geometria construídos com base em fundamentos rigorosos. Exemplos são os livros de:

- GIUSEPPE VERONESE, em 1891,
- GINO FANO, em 1892,
- ELIAKIM HASTINGS MOORE, em 1896.

Todos esses trabalhos, conseqüências do processo evolutivo da Matemática em atenção aos novos padrões de rigor dedutivo, apresentaram novas formulações axiomáticas da Geometria.

Pasch, ao contrário de Hilbert e sua escola (os trabalhos de Hilbert têm inspiração nos de Pasch), considera como conceitos fundamentais os de ponto, segmento e região plana finita, por meio dos quais define reta, plano e espaço. Seguem a escola de Pasch, se bem que com ligeiras modificações na ordenação dos conceitos, Peano, Schur, Rey Pastor e outros (os conceitos básicos de Peano e Rey Pastor, por exemplo, são, exclusivamente, os de ponto e segmento).

Um importante axioma dos sistemas de Hilbert (se A, B, C forem pontos não colineares e *r* uma reta do plano (ABC), que não contenha A, B nem C, e se r contiver um ponto de AB, deverá conter, também, um ponto de AC ou de BC) deve-se a Pasch e permite, como se diz, estabelecer a ordenação dos pontos do plano e do espaço. Pasch foi o primeiro geômetra a apresentar *(Vorlesungen uber neure Geometrie*, Leipzig, 1882) um sistema de axiomas para a fundamentação racional da Geometria Euclidiana.

Pasch consegue, já em 1822, definir todos os termos a partir de 4 termos primitivos (ponto, segmento, plano, pode ser sobreposto a). Partindo dessas bases, Peano reduziria mais tarde (1889) esses termos a 3 (ponto, segmento, movimento).

A axiomática de Pieri (divulgada pela obra *Della Geometria Elementare Come Sistema Ipotetico* Astratto, Turin, 1899) é fundamentada nos conceitos primitivos de *ponto* e *deslocamento.*

Admite a existência de pontos, como pertencentes a uma classe que possui, pelo menos, dois elementos distintos, e o conceito de deslocamento como correspondência biunívoca entre pontos, tal, que o produto de dois deslocamentos é um deslocamento.

Os axiomas são em número de quatorze e constroem, como os demais sistemas (de Hilbert, Peano, Pasch,. . .), a Geometria Euclidiana.

O trabalho mais famoso foi o de HILBERT, ao indicar um sistema dedutivo para a Geometria Euclidiana que influenciou não somente a Geometria, mas toda a Matemática e a ciência do século XX.

Embora os trabalhos acima citados fossem do mesmo nível de rigor, o de HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig-1899), foi o mais completo, tendo apresentado, quanto ao sistema utilizado de postulados, discussões relativas à consistência, independência e categoricidade e, inclusive, apontado novas Geometrias pela alteração do sistema original, bem como as conseqüências algébricas dos teoremas de Desargues e de Pappus de Alexandria.

Devido à fama do autor e a esses aspectos apontados da obra ou, ainda, por ser a formulação mais parecida com a de Euclides, enfim, talvez por todos esses motivos juntos, foi que marcou época originando uma quantidade enorme de variantes.

Oswald Veblen, matemático norte-americano, numa notável monografia, *The foundalions of Geometry,* New York, 1924, reformula os fundamentos da Geometria Euclidiana com um conjunto de três noções primitivas e 16 axiomas (ou postulados).

As noções são: ponto, ordem de três pontos e congruência de pares de pontos.

De toda obra de Euclides, o objeto de maior número de refutações foi o quinto postulado.

5° POSTULADO	
Redação segundo Euclides	Redação atual
Se uma reta secante a duas outras forma ângulos de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas, se prolongadas suficientemente, encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.	Por um ponto exterior a uma reta, há uma única paralela a esta reta.

Esse postulado era considerado menos intuitivo e de redação mais complicada que os outros quatro. Os argumentos das críticas baseavam-se na idéia de que esse postulado poderia ser obtido a partir dos demais, ou seja, ele seria um teorema da teoria.

Após 2000 anos de esforço em vão, muitos matemáticos começaram a mostrar sinais de cepticismo. Passaram a duvidar que fosse possível existir uma tal demonstração. Deve ser observado que a persistência mostrada por tantos matemáticos era devida ao fato de que eles viam a não comprovação do postulado das paralelas como uma chocante falha da Geometria.

No entanto, como mais tarde se mostrou, o quinto postulado não é uma conseqüêmcia lógica dos demais; e, o que é importante, ele é indispensável para a construção da Geometria de Euclides. Assim, todas as tentativas de prová-lo redundaram em fracasso.

A esse respeito foi Gauss quem primeiro compreendeu que eram inúteis as tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides, a partir dos outros quatro. Podia-se, entretanto, construir um sistema geométrico completamente diverso, simplesmente refutando o quinto postulado de Euclides e propondo outro em seu lugar.

Foi talvez Gauss o primeiro a ter uma concepção clara da Geometria "não-euclidiana". O pensamento o atingiu como sendo algo tão revolucionário que ele não o tornou público. Em 1829, ele escreveu a BESSEL (*apud* MECHKOWSKI. 1964: 32):

> *"Poderá passar muito tempo antes que eu leve a público minhas investigações sobre esse assunto; na verdade, isto talvez não aconteça enquanto eu viver, pois temo pelo grito dos estúpidos, se explicitar meus pontos de vista."*

Desse modo, poder-se-ia chegar a uma nova Geometria diferente, mas não menos válida que a de Euclides, seja do ponto de vista lógico, seja do ponto de vista das suas aplicações à física. Gauss nunca publicou nada a respeito desses trabalhos, mas na sua correspondência se encontra o germe das novas Geometrias que partem de um sistema de axiomas diferentes dos de Euclides: as chamadas Geometrias não Euclidianas.

Não foi Gauss o único a chegar a essa conclusão. Patético é o trabalho dos Bolyai, pai e filho, que podemos avaliar pela correspondência entre os dois. Ressalte-se, também, que a mentalidade da época não estava preparada para as mudanças propostas. Tal afirmação é bem ilustrada pelos seguintes excertos da carta que o matemático húngaro Wolfgang Bolyai escreveu ao seu filho JOHANN (*apud* MECHKOWSKI, 1964: 31): *"É inacreditável que esta escuridão obstinada, esta eclipse eterna, esta falha na Geometria, esta nuvem eterna sobre a verdade virginal possa durar"*.

Ao mesmo tempo o pai está horrorizado pelo pensamento de que seu filho esteja atraído pelo problema das paralelas. Wolfgang BOLYAI (*apud* MECHKOWSKI, 1964: 32) escreve:

> *"Você não deve tentar esta abordagem das paralelas. Conheço esse caminho em toda a sua extensão. Atravessei esta noite sem fim, que extinguiu toda a luz e alegria de minha vida. Suplico-lhe, esqueça a ciência das paralelas [...]. Pensei que me sacrificaria em benefício da verdade. Estava pronto para me tornar o mártir que removeria a falha da Geometria e a devolveria purificada à humanidade. Tive um trabalho monstruoso, enorme; minhas criações são muito melhores do que as dos outros mas ainda não atingi completa satisfação. Nesse caso é verdade que 'si paullum a summo discessit, vergit ad imum'. Eu desisti quando vi que nenhum homem pode chegar ao fim desta noite. Desisti,*

> *inconsolável, compadecido por mim e por toda a humanidade."*

E ainda uma vez mais:

> *"Admito que esperei pouco do desvio de suas linhas. Parece-me que estive nessas regiões; que viajei passando por todos os recifes deste Mar Morto infernal e que sempre voltei com o mastro quebrado e a vela rasgada. A ruína de minha disposição e minha queda vem desta época. Impensadamente arrisquei minha vida e minha felicidade - aut Caesar aut nihil."* (BOLYAI *apud* MECHKOWSKI, 1964: 32)

Em 1823, Johann Bolyai poderia dizer a seu pai que se esforçou para fazê-lo desistir do seu interesse no problema, que ele havia tido sucesso. É o teor de sua carta:

> *"Estou decidido a publicar um trabalho sobre paralelas assim que eu puder organizá-lo, completá-lo, e a oportunidade chegar. Ainda não fiz a descoberta, mas o caminho que tenho seguido quase que certamente me guiará ao meu objetivo, uma vez que esse objetivo é possível. Não o tenho mas encontrei coisas tão magnificentes que fiquei perplexo. Seria eternamente penoso se essas coisas se perdessem e você, meu querido pai, há de admiti-lo quando as vir. Tudo o que posso dizer agora é que criei do nada um mundo novo e diferente. Tudo o que tenho lhe mandado até agora é como uma casa de cartas comparada com uma torre."* (BOLYAI *apud* MECHKOWSKI, 1964: 32)

Seu pai aconselhou-o a publicar seus resultados o quanto antes. O comentário de Johann Bolyai é o que se segue:

> *"Ele me aconselhou que, se eu tivesse sido realmente bem sucedido, deveria rapidamente fazer um pronunciamento público por duas razões. Uma razão é que a idéia poderia facilmente passar a outra pessoa que iria então publicá-la. Outra razão, uma que parece válida o suficiente, é que*

> *quando o tempo é oportuno para certas coisas, essas coisas aparecem em diferentes lugares como violetas voltando-se para a luz no começo de primavera. E uma vez qu? a busca científica é como uma guerra, a qual não se sabe quando será substituída pela paz, é dever, se possível, ganhá-la; pois, aqui, a preeminência vem para aquele que é o primeiro."* (BOLYAI *apud* MECHKOWSKI, 1964: 33)

Em 1829, Johann Bolyai anunciava ao pai a concepção de uma nova teoria das paralelas. Os princípios dessa "Ciência Absoluta do Espaço" foram publicados em 1832/33, como apêndice de um livro de Wofgang Farkas Bolyai. Quando ele o enviou a Gauss, recebeu uma resposta desanimadora: ele já tinha desenvolvido as mesmas idéias. Isso desencorajou Johann a quaisquer pesquisas posteriores. Os princípios da Geometria de Johann Bolyai eram idênticos aos da "Geometria Imaginária" de Lobatchevski. O matemático russo fez a primeira apresentação de sua teoria em 1826, na Universidade de Kazan, mas publicou-a somente em 1829. Durante toda a vida tentou complementá-la e divulgá-la mas não foi compreendido a não ser por Gauss, que, no entanto não tornou público o seu reconhecimento. Somente dez anos após a morte de Lobatchévski, as Geometrias não Euclidianas começariam a ser aceitas.

A Geometria não-Euclidiana, descoberta independentemente por Lobatchevski, Bolyai e Gauss, foi batizada por Félix Klein (1849-1925) com o nome de Geometria Hiperbólica. Nesse sistema geométrico, por um ponto exterior a uma reta passam infinitas retas paralelas à mesma. Mas todos os outros postulados da Geometria euclidiana são conservados, conseqüência da impossibilidade de se provar o postulado das paralelas recorrendo a outros postulados. Admitida a independência do postulado das paralelas, foi possível construir novos sistemas geométricos consistentes: os sistemas não-euclidianos. A demonstração da consistência da Geometria Hiperbólica não necessita do juízo quantitativo de um grande número de teoremas: basta a utilização de "modelos" não-euclidianos, que satisfaçam todos os postulados de Euclides, exceto o das paralelas. O mais simples desses modelos foi concebido por Félix Klein: o plano é formado por todos os pontos interiores a um círculo — na região exterior, a Geometria não estará finida; as "retas" são as cordas do círculo. Nesse modelo, o quinto postulado de des é substituído pelo de Lobatchevski:

Tomando-se uma reta qualquer ab (ou seja, uma corda ab) e um ponto exterior a ela, qualquer outra corda que passe por este ponto e não intercepte ab é uma reta paralela a ab.

O estabelecimento da Geometria Hiperbólica abriu caminho à construção de novas Geometrias e um outro modelo não-euclidiano foi elaborado por Henri Poincaré (1854-1912).

Nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica, a reta é infinita. O matemático alemão B. Riemann (1826-1866) elaborou uma Geometria consistente, na qual as "retas" são curvas finitas fechadas. Uma Geometria assim pode ser construída sobre uma superfície esférica; as "linhas retas" serão os círculos máximos da esfera, aqueles cujo centro coincide com o centro da esfera. No sistema de Riemann, por um ponto exterior a um círculo máximo, não é possível traçar nenhuma "reta" paralela ao mesmo: dois círculos máximos sempre se interceptam. A distância entre dois pontos quaisquer num mundo descrito por essa Geometria é medida ao longo dos arcos de círculo máximo que ligam ambos os pontos.

A descrição não-euclidiana do espaço foi e vem sendo aplicada a diversos ramos da física – da microfísica à óptica, da teoria do campo unificado à teoria geral da propagação ondulatória.

Em 1827, Möbius tentou estabelecer uma hierarquia das Geometrias, mas lhe faltava uma linguagem adequada. Quarenta e cinco anos mais tarde, de posse dessa linguagem necessária, no caso, a linguagem de grupos, Klein conseguiu a proeza com o seu famoso Programa d'Erlangen.

Um trabalho interessante, que nos leva longe da Geometria euclidiana conhecida, é o das Geometrias Finitas ou Geometrias Modulares. Como o nome sugere, são Geometrias nas quais o espaço em qualquer dimensão contém um número finito de pontos. Em 1906, Veblen e Bussey, matemáticos americanos, apresentaram definições gerais que permitiam caracterizar as Geometrias Finitas.

Mas as criações de novas Geometrias não euclidianas pela negação de postulados não param aí. Seja mais um exemplo o da Taxi-Geometria.

Por séculos, todos entendiam o que significava "distância entre dois pontos". Para que, então, definir "distância"? Quando, no início do século, os trabalhos de Fréchet e Hausdorff generalizaram a idéia de espaço, e distância foi definida como uma função especial, os matemáticos criaram novos tipos de distância e, hoje, é possível colocar elementarmente, ao alcance até de crianças, uma Geometria inteiramente não usual: a Taxi-Geometria.

Nessa Geometria, a distância entre dois pontos é medida sobre dois segmentos sucessivos e perpendiculares, um horizontal e outro vertical, cada um deles colocado sobre um dos pontos. É a imitação do trajeto percorrido por um táxi entre dois pontos de uma cidade em cujo traçado as ruas se cruzam em ângulo reto.

Mas durante esses crescimentos, ocorreram idéias tolas. Contemos uma para ilustrar.

No século XIV, Oresmo propôs uma interpretação geométrica na qual, aquilo que ele chamava de extensão era representado em abscissa e a intensidade da extensão considerada, em perpendiculares traçadas por cada abscissa.

Com essa representação, ele foi capaz de estudar movimentos: colocava o tempo em abscissas e a intensidade da velocidade nas perpendiculares; o espaço percorrido seria a área da figura situada sob a reta que representa o movimento.

Lamentavelmente, faltava a Oresmo uma linguagem matemática para o que fazia: o seu gráfico não tinha o sentido que hoje damos e as distâncias nele indicadas não exprimiam propriedades matemáticas precisas, mas apenas transmitiam uma impressão: seus gráficos eram uma representação figurada e, por isso, além de representarem movimentos, calor e temperatura, podiam representar a brancura, o gosto e as virtudes.

Felizmente, René Descartes e Fermat apresentaram uma linguagem matemática que permitiu, a partir dela, criações sérias que deram origem a um tipo correto: a Geometria: a Analítica.

Mas a Geometria Analítica não foi a única novidade surgida. As reorganizações tentadas (e obtidas) da Geometria de Euclides trouxeram novas axiomaticas e a apresentação de novos elementos primitivos (no lugar de pontos, retas e planos): pontos e segmentos ou pontos e transformações ou vetores ou números complexos ou matrizes ou círculos, etc.

Com essas criações e essas novas linguagens foram aparecendo várias Geometrias: Geometria Absoluta, Geometria Afim, Geometria Projetiva, Geometria Analítica, Geometria Vetorial, Geometria de Transformações, Geometria Diferencial, Geometria Integral, etc.

Um grande benefício que o estudo não euclidiano trouxe para a Geometria foi a certeza de que é possível criar Geometrias diferentes e que, com procura adequada, é possível encontrar um modelo físico para esta Geometria que surgiu.

Essa certeza de que é possível criar Geometrias diferentes e de que é possível encontrar um modelo físico para elas (o que não significa necessariamente construir "materiais concretos") terá, no futuro, uma ressonância profunda no ensino das Matemáticas, servindo, inclusive, como alternativa à aula expositiva. Votaremos ao assunto em capítulo futuro

PARTE 2

O ENSINO DE GEOMETRIA

CAPÍTULO 5

O CENÁRIO HISTÓRICO DO ENSINO DE GEOMETRIA

> *"Por que a intuição geométrica ainda continua vital, mesmo nos domínios que aparentemente não têm ligação com a Geometria? Evidentemente porque a intuição geométrica nos pode sugerir o que é importante, interessante e accessível e nos pode acautelar contra o desvio no deserto imenso dos problemas, das idéias e dos métodos."* (FREUDENTHAL, 1956)

Após as críticas à Geometria Euclidiana feitas na parte anterior, ocorre à mente uma pergunta talvez natural: Como a Geometria se coloca na Matemática contemporânea? Uma ótima descrição do estado atual da Geometria, o modo como é encarada nos vários níveis do universo matemático é feita por FREUDENTHAL (1956):

> *"No sistema bourbakista, ela não existe; nas revistas matemáticas, aquilo que se chama geometria corresponde apenas a cinco por cento do total das dissertações das pesquisas matemáticas; nos programas da universidade, ela não é nem mencionada e os pesquisadores, que poderiam ser considerados geômetras, evitam este termo, pois ele parece fora de moda."*

Apesar desse desprezo atual, como realça Freudenthal, a Geometria permeia toda a Aritmética, toda a Álgebra e toda a Análise, e, lá, funciona muitas vezes como elemento acautelador. Isso nos faz lembrar do Barão de Itararé quando disse que um pai pode cuidar perfeitamente de quatro ou cinco filhos, mas quatro ou cinco filhos não conseguem cuidar de um pai. Hoje, ela está afastada do cenário matemático e, onde se mantém, é considerada apenas um simples ramo da Álgebra Moderna. Como diz BOURBAKI

> *"Constata-se que o papel importante da geometria clássica no desenvolvimento da Matemática é indiscutível. Hoje, contudo, para o matemático profissional, a mina se esgotou, porque nela não existe mais problema de estrutura susceptível de ressoar sobre outras partes da Matemática."*

A partir daí, surgem muito naturalmente algumas questões:

- Como transcorreu, durante esses séculos todos, o ensino e a aprendizagem da Geometria?
- Já abandonada pelos matemáticos profissionais, a Geometria deveria ser considerada uma inutilidade e, portanto, afastada das escolas?
- Como é feito, hoje, o ensino da Geometria? Do modo que deveria ser?

Como já dissemos anteriormente, a primeira apresentação organizada e completa da Geometria foi realizada por Euclides, em 300 a.C. No seu famoso livro *Elementos*, sistematizou os estudos realizados por vários grandes sábios gregos que o precederam, constituindo um conjunto de conhecimentos lógicos e abstratos. Sua grande importância consiste em haver estabelecido, de modo claro, que o ideal da Geometria é alcançar um encadeamento lógico perfeito das propriedades peculiares às diversas figuras geométricas. Considerada modelo de raciocínio dedutivo e descrição perfeita do espaço, a obra euclidiana passou a ser usada durante séculos, geralmente algo modificada mas sem perder sua feição lógico-abstrata, como livro-texto para principiantes em Geometria.

O livro de Euclides seguramente não tem em suas origens quaisquer preocupações com a aprendizagem. Sendo assim, nunca foi adequado para este fim. Como enfatiza CARMO ([s/d]: 3):

> *"Um dos maiores mal-entendidos do ensino da Matemática proveio da adoção dos livros de Euclides, ou de pequenas modificações deles, no ensino da Geometria. De início, devemos absolver Euclides de toda e qualquer culpa no caso. Euclides escreveu os seus livros com uma finalidade metodológica e não didática. A formalização global, por ele obtida, do volume de fatos geométricos conhecidos até então foi uma obra de gênio, melhor compreendida por filósofos e pensadores do que por jovens estudantes. Em oposição a Arquimedes, que usava uma combinação de formalização local e métodos heurísticos e cujas técnicas de pesquisas continham o germe de uma forma de ensino mais efetiva, a obra de Euclides foi tomada como um modelo didático. As conseqüências desastrosas deste fato se fazem sentir até hoje."*

Continuando, o mesmo autor esclarece:

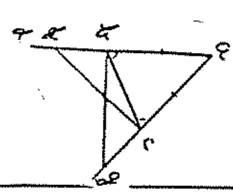
> *"Queremos deixar bem claro que a contribuição metodológica de Euclides é enorme. Pela primeira vez mostrava-se a possibilidade de uma formalização global que, embora com defeitos, levantava a esperança de se estender a idéia de formalização a toda a Matemática e, quem sabe, à própria Ciência. Hoje parece cada vez mais claro que a formalização absoluta da Matemática é um ideal inatingível que deve ser abandonado. Seja como for, formalizações locais relativamente amplas tiveram um sucesso considerável na Mecânica, em certos ramos de Física Teórica, na Álgebra, etc., e a inspiração para isto se deve indiscutivelmente a Euclides."* (CARMO, [s.d.]: 3)

Como exemplo desse mal entendido, podemos citar a teoria da semelhança. Como é apresentada na obra de Euclides, não utiliza distância e é baseada na idéia de proporcionalidade atribuída a Eudóxio. Isso mostra o alto grau de abstração matemática atingida nos *Elementos* e a genialidade do autor contornando a insuficiência de recursos matemáticos da época. Resultado: em vez dos conhecimentos geométricos tornarem-se agradáveis para os estudantes, transformaram-se em um tormento para eles e seus professores.

Ainda hoje, apesar dos esforços de alguns estudiosos e pesquisadores para romperem com a tradição, praticamente o panorama não mudou, pois o ensino da Geometria em sua feição clássica atravessou o tempo e, ainda hoje, é praticamente a única trabalhada na escola.

Na verdade, usar no ensino uma obra com tais características foi um dos maiores equívocos da história da educação.

Para se ter uma ilustração desse absurdo, nada melhor do que a famosa *pons asinorum* ou "ponte dos asnos". Tal era o nome que se dava, durante a Idade Média, à 5ª proposição dos Elementos de Euclides. Segundo a lenda, só os bons em Matemática conseguiam aprender esse teorema. Os [illegible] eram os asnos que não conseguiam atravessar a ponte. Para muitos, o diagrama da proposição parecia uma ponte sobre cavaletes.

PONTE DOS ASNOS	
	Nos triângulos isósceles, os ângulos da base são iguais entre si e, se se prolongam os lados congruentes, os ângulos abaixo da base também serão iguais entre si.

Uma das reações mais importantes contra a utilização dos **Elementos** de Euclides para a introdução dos estudos de Geometria foi manifestada por Alexis Claude Clairaut (1713-1765) através da obra *Eléments de Geométrie*, fato esse relatado por GLAESER (1985) em seu livro *À propos de la Pédagogie de Clairaut.*

Alexis Claude Clairaut, matemático e astrônomo francês, nasceu e morreu em Paris. Filho de um professor de Matemática, aprendeu a ler, aos quatro anos de idade, diretamente nos *Elementos* de Euclides. Com a idade de 12 anos, causou admiração da Academia de Ciências, pela elaboração de um memorial sobre curvas.

Nessa ocasião, Fontenelle – Secretário Perpétuo da Academia das ências na França – concedeu a Clairaut um certificado em nome da mia, atestando que esse trabalho era inteiramente obra pessoal de os 18 anos, a Academia de Ciências, abrindo uma exceção, admitiu Cla... um de seus membros.

1736, foi enviado à Lapônia, juntamente com Maupertius, para medir um grau de meridiano, operação que, ao contrário do que afirmava Jaime Cassim, evidenciou o achatamento da Terra.

Em astronomia, estudou o problema dos três corpos, e, se bem que a princípio tenha incidido em alguns erros, retificou-se completamente em sua *Théorie de la Lune*. Essa obra, premiada pela Academia de São Petersburgo, apresentou, em sua segunda edição, em 1765, as tábuas do movimento lunar que tiveram merecido crédito durante mais de um século. Dedicou-se também ao estudo de cometas e o seu trabalho mais importante foi sua *Predição da Volta do Cometa*.

De todos os livros escritos por CLAIRAUT, os *Elementos de* ...*ria* (1741) e os *Elementos de Álgebra* (1746) são particularmente ...vos na história da didática da Matemática e na visão do ensino através da Resolução de Problemas.

É bom salientar que, até o século XVIII o conteúdo contído nos livros acima citados jamais era ensinado a alunos menores de 20 anos. Além disso, Clairaut nunca ensinou em uma sala de aula e seus livros, portanto, não visavam atender a jovens colegiais. Os dois livros podem ser qualificados como manuais matemáticos, mas certamente não como manuais didáticos. Foram escritos para servir à instrução da Marquesa de Chatelel (1706-1749). Portanto, os dois manuais eram destinados a um público composto de adultos desocupados e esclarecidos. Sendo assim, seus livros apresentavam uma doutrina pedagógica claramente formulada, baseada nos seguintes princípios:

1. Não enfadar o aluno sob nenhum pretexto, mesmo que para isso seja preciso sacrificar aspectos essenciais do assunto tratado.

2. Minimizar o rigor lógico para não cansar o auditório com uma axiomática rígida demais.

3. Fazer todas as exposições através de exemplos concretos.

4. Tornar heurístico o ensino

5. Renunciar à exposição dogmática e seguir o verdadeiro desenrolar da descoberta. Uma vez que o histórico da descoberta nem sempre era conhecido, Clairaut imaginava caminhos que os sábios poderiam seguir para solucionar determinado problema.

No primeiro parágrafo do prefácio de sua obra, *Éléments de Geométrie*, Clairaut (1892) manifesta sua posição contrária à introdução do estudo da Geometria através dos **Elementos** de Euclides, o que considera como sendo a principal causa das dificuldades encontradas pelos estudantes para aprender Geometria.

> *"Ainda que a geometria seja uma ciência abstrata, é mister todavia confessar que as dificuldades experimentadas pelos que começam a aprendê-la procedem as mais das vezes de maneira por que é ensinada nos elementos ordinários. Logo no princípio se apresenta ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares, que só lhe parecem anunciar um estudo árido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espírito sobre objetos mais interessantes, e sendo além disso difíceis de conceber, acontece comumente que os principiantes se fatigam e se aborrecem antes de terem uma idéia clara do que lhes queira ensinar."* (CLAIRAUT, 1892: IX)

Na virada do século, ocorreu na Itália um movimento que procurava afastar-se ainda mais da aplicação dos Elementos de Euclides ao ensino. Nele, procurava-se a fusão entre o ensino da Geometria plana e o ensino da Geometria no espaço. Um dos precursores desse trabalho foi Mahistre, com sua obra *Les Analogies de la Géométrie élémentaire.*

Em 1874, M.Ch. Méray, professor da Faculdade de Ciências de Dijon, publica o livro *Nouveaux éléments de Géométrie.*[1]

> *"Desconhecendo o livro de Mahistre, Méray fez uma obra fantástica, principalmente se se considerar que era precursora. Dividida em capítulos pequenos, a obra não guarda a mínima semelhança com os Elementos de Euclides: o paralelismo é tratado com base no movimento de translações e a perpendicularidade com a noção de rotação; a medida dos segmentos, a medida dos ângulos, o estudo dos triângulos, as áreas, os volumes precedem dois capítulos que jogam um papel importante no pensamento do autor: a semelhança (precedida da homotetia) e as diversas simetrias. Os triedros, os círculos, os polígonos regulares, as superfícies (cilíndricas, cônicas, de revolução e esféricas) terminam o livro, seguido de notas suplementares. Nos detalhes, como no conjunto, o livro é claro, conciso e agradável, fornecendo uma instrução sólida e extensa."*

KLEIN, em 1872, formula o Programa de Erlanger que é, sem dúvida, a reformulação mais clara e concisa da Geometria jamais realizada. Esse Programa se refere à parte escrita apresentada por Klein quando de sua contratação como novo professor da Universidade de Erlangen. Era uma das exigências da Universidade; a outra era uma conferência pública sobre educação matemática. Isso, aos 23 anos de idade.

Os conceitos de Klein têm como ponto de partida a noção de grupo de transformação de espaço, o que lhe permite introduzir distinções precisas entre os diferentes tipos de Geometrias existentes. O grupo principal de transformações do espaço está constituído pelo conjunto de todas as

---

[1] A citação é um resumo da apreciação que C.-A. Laisant fez, em 1901, da obra de Méray, no artigo *Une exhumation géométrique*", na revista L'Enseignement Mathématique.

transformações que mantêm invariáveis as propriedades geométricas das figuras. Diversos grupos de transformações caracterizam as diferentes geometrias, permitindo estudar os entes que as integram desde o ponto de vista das propriedades invariáveis nas transformações de cada grupo. As geometrias ficam subordinadas a um grupo único, do que chegam a ser casos particulares.

Dieudonné, prefaciando o livro *Le programme d'Erlangen de Klein* 1974) indica que

> *"[...] a grande originalidade de Klein é ter concebido a relação entre uma geometria e o seu grupo destruindo os papéis destas duas entidades, sendo, portanto, o grupo o objeto primordial e os diversos espaços sobre os quais ele opera evidenciando diversos aspectos da estrutura de grupo."*

E continua o autor de *Le programme d'Erlangen de Klein*, (1974)

> *"Há transformações do espaço que não alteram em nada as propriedades geométricas das figuras. Em contrapartida, estas propriedades são, com efeito, independentes da situação ocupada no espaço pela figura considerada, da sua grandeza absoluta, e finalmente também do sentido em que estão dispostas as suas partes. Os deslocamentos do espaço, as suas transformações por semelhança e por simetria não alteram, por isso, as propriedades das figuras, ou não alteram mais do que as transformações compostas pelas precedentes. Designaremos por grupo principal de transformações do espaço o conjunto de todas estas transformações; as propriedades geométricas não são alteradas pelas transformações do grupo principal. A recíproca é igualmente verdadeira: as propriedades geométricas são caracterizadas pela sua invariância relativamente às transformações do grupo principal. Com efeito, se se considerar um instante o espaço como não podendo deslocar-se, etc., como uma multiplicidade fixa, cada figura. possui uma individualidade própria; propriedades que ela possui como indivíduo, apenas aquelas que as*

> *transformações do grupo principal não alteram, são propriamente geométricas."*

Chega, assim, a uma profunda reformulação da Geometria:

> *"Como generalização da geometria, coloca-se, assim, a seguinte questão geral: Considerando uma multiplicidade e um grupo de transformações desta multiplicidade, estudar os seres que, sob o ponto de vista das propriedades, não são alterados pelas transformações do grupo."*

Esclarecendo esta definição:

> *"Dada uma multiplicidade e um grupo de transformações desta multiplicidade; desenvolver a teoria das invariantes relativas a este grupo."* (KLEIN, 1974: 7)

Chega-se assim ao fim do processo que começa com Monge e que é tematizado por Poncelet e Chasles: a introdução da noção de transformação em geometria.

George D. Birkhoff (1884-1944)[2] propôs à Geometria um tratamento dedutivo com uma apresentação rigorosa, baseando-se num conjunto de fatos simples e intuitivos sobre medidas de distância e ângulo e utilizando o sistema numérico de reais para o seu desenvolvimento. O tipo de tratamento métrico, proposto por Birkhoff em 1930[3], para a escola secundária, foi reapresentado como sistema postulacional em forma matemática rigorosa em

---

[2] BIRKHOFF, G.D. *The origin, nature and influence of relativity*. [s.l.]: MacMillan, 1925.

[3] BIRKHOFF, G.D., BEATLEY, R. *A new approach to elementary Geometry*. Fifth Year Book of the National Council of Teachers of Mathematics, 1930. (Reproduzido em: George David Birkhoff, Collected Mathematical Papers, v. III, American Mathematical Society, 1950).

1932[4]. Inicialmente não teve inicialmente a popularidade que merecia e, somente trinta anos depois, começou a atrair a atenção de professores e matemáticos. O motivo para tal resistência parece ter sido a forma axiomática revolucionária demais para a época, tendo em vista a tradicional apresentação euclidiana. Na verdade, a formulação era inconveniente para o ensino. Esse fato explica a não aceitação, mais tarde, do livro de Birkhoff para a escola secundária *Basic Geometry*[5], em 1940, praticamente a mesma formulação de 30, com a inclusão de apenas mais um postulado. Ao que tudo indica, é a partir de 1959, com o artigo de Maclane[6], evidenciando as vantagens do tratamento, que os matemáticos e professores universitários começam a se alertar sobre a excelência do método. Nesse artigo, Maclane aperfeiçoa o sistema de Birkhoff numa forma equivalente à original de 32 e, inclusive, indica outras possíveis variantes. Mesmo assim, mas nenhuma dessas formulações é adequada à iniciação elementar. Em 1960, quando foi apresentada outra variante do sistema, convenientemente ajustada ao ensino básico, pela organização educacional norte-americana "School Mathematics Study Group" (S.M.S.G.)[7], é que se inicia a lenta mas firme penetração do método no ensino secundário dos Estados Unidos. É aí que se desenrola toda a história dessa axiomática. Isso esclarece a ainda escassa bibliografia para estudo universitário e também explica por que nos demais países e, em particular, no Brasil, esse tratamento não penetrou nas universidades e, em conseqüência, nas escolas. A adaptação e uso desse método para estudo nos cursos de Matemática se torna possível,

---

[4] BIRKHOFF, G.D. A set postulates for plane Geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, v. 33, p. 239-345, 1932.

[5] BIRKHOFF, G.D., BEATLEY, R. *Basic Geometry*. [s.l.]; Scott Foresman, 1940. (2.ed. 1941; 3.ed. 1959).

[6] MACLANE, S. Metric postulates for plane Geometry. *The American Mathematical Monthly*, v. 66, p. 543-555, 1959.

[7] SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Geometry*. [s.l.]: Yale University Press, 1960. (2.ed. 1961).

quando são lançadas as obras de MILLMAN & PARKER: *Geometry - A metric approach with models*[8] e KELLY & MATTHEWS: *The non-Euclidean, hyperbolic plane*[9], ambas em 1981, e da segunda edição de MARTIN: *The foundations of Geometry and the non-Euclidean plane*[10], publicada em 1982. Todas especificamente indicadas para licenciatura e bacharelado para uma introdução à Geometria pelo adequado nível de rigor e conveniente apresentação didática.

Como referência para o ensino de 2º grau, podemos citar apresentação do livro, já conhecido entre nós, de MOISE & DOWNS[11], ou da referida variante proposta pelo S.M.S.G.

Em MOISE[12], são construídas a Geometria Euclidiana tridimensional e o plano hiperbólico utilizando a idéia de Birkhoff. Apresenta uma comparação entre os tratamentos sintético de Euclides/Hilbert e o métrico tipo régua-transferidor, onde se evidenciam a rapidez e vantagens dessa formulação.

Relacionado a esse tratamento, a proposta de CHOQUET[13], apresenta uma axiomática "mista" dos enfoques sintético e vetorial. Trata-se de uma formulação para a faixa dos 13-16 anos, objetivando atender a transição do estudo intuitivo anterior para o tratamento vetorial aconselhável, segundo o autor, a partir dos 17 anos. Embora as reiteradas preocupações com a aprendizagem elementar, a formulação, satisfatória matematicamente, de modo algum é adequada ao nível de idade indicado, cabendo as mesmas restrições

---

[8] MILLMAN, R.S., PARKER, G.D. *Geometry* - A metric approach with models. [s.l.]: [s.ed.], 1981.

[9] KELLY, P., MATTHEWS, G. *The non-Euclidean, hyperbolic plane*. [s.l.]: s.ed.], 1981.

[10] MARTIN, G.E. *The foundations of Geometry and the non-Euclidean plane*. [s.l.]; Intext, 1975. (2.ed., Springer, 1982).

[11] MOISE, E.E., DOWNS JR., F.L. *Geometria moderna*. [s.l.]: Edgar Blücher, 1971.

[12] MOISE, E.E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. [s.l.]: Addison Wesley, 1963. (2.ed. 1974).

[13] CHOQUET, G. *L'enseignement de la Géométrie*. [s.l.]; Hermann, 1964.

feitas acima para o uso prematuro do enfoque vetorial. Aliás, DIEUDONNÉ (1969), na sua obra *Linear Algebra and Geometry*, assim se expressa:

> *"[...] a notável engenhosidade de tal sistema é testemunha do grande talento do autor, mas a meu ver, o sistema é totalmente inútil e nocivo".*

A outra formulação proposta no final do livro, com fundamentação do tipo métrico, é ainda inadequada para o ensino elementar. O livro de Choquet, bem como o de Dieudonné citados, são textos excelentes e obrigatórios na formação do professor pelo rigor formal e, em especial, o segundo, pela conveniente ligação com a Matemática avançada que propicia. Sem, entretanto, nenhuma possibilidade de penetração no ensino elementar.

Discussões em congressos, publicação de trabalhos pedagógicos e pronunciamentos seguidos de autoridades no assunto, surgiram nos últimos trinta anos[14]. No caso particular da Geometria, no entanto, à exceção da proposta feita em 1960 pelo S.M.S.G. nos Estados Unidos, recomendando o tratamento métrico, nenhuma foi adequada àquele nível da educação. Na verdade, a partir dos anos cinqüenta, a tônica das recomendações foi a eliminação da Geometria de Euclides e o encaixe dos estudos geométricos nos conjuntos e estruturas dentro da visão formalista de Bourbaki. A Geometria, como toda a Matemática elementar, devia refletir o espírito unificador da Matemática contemporânea. E a solução para essa disciplina foi o tratamento vetorial, ajustando-se às idéias de Klein, e ardorosamente defendido por Dieudonné.

Ninguém ignora o papel e o poder da Álgebra Linear como uma das teorias mais eficientes e centrais da Matemática, eficaz quanto às generalizações (R^n, C^n, Espaços de Hilbert, etc.), e ainda com as vantagens da manipulação algébrica. Mas, tendo em vista o ensino elementar, não é difícil compreender o motivo da inadequação desse tratamento para o estudo inicial

---

[14] FEHR, H.F., CAMP, J., KELLOGG, H. *The revolution in School Mathematics*, Phase II. O.E.A.: [s.ed.], 1971.

da Geometria. Na verdade, a idéia de levar à escola elementar um assunto tão complexo não tem cabimento nem do ponto de vista matemático, muito menos ainda quanto ao aspecto de aprendizagem. Isso porque impõe uma formulação geométrica, que é sofisticada, resultado de longa manipulação técnica formal, encobrindo toda a raiz intuitiva inicial do assunto. A distância entre essa iniciação e o produto formal é tão grande que impede qualquer ligação na mente do aluno. Sendo assim, que esse enfoque não conseguiu penetrar no ensino elementar, apesar das tentativas, feitas por matemáticos franceses, belgas, suíços e poloneses. A impossibilidade de adaptação desse tratamento é tão flagrante que os autores de livros didáticos se viram obrigados a continuar na "formulação clássica". Em suma, o desenvolvimento da Geometria pela Álgebra linear só é indicado na universidade.

Todas essas apresentações da Geometria, vistas nesta parte, foram tentativas de adequá-la ao ensino. Não obtiveram resultado, porque todas elas enfatizavam apresentações ou transmissões de aspectos abstratos e formais de alguma Geometria.

Podemos destacar no Brasil na década de 70 o Projeto de Novos Materiais para o Ensino que privilegiou o ensino de Geometria com a unidade "Geometria Experimental", justificado da seguinte forma:

> *"A escolha do tópico **Geometria Experimental** baseou-se na idéia de que este é um tema altamente integrador. Com efeito, a Geometria, sobretudo a do Espaço, com caráter acentuadamente métrico, enriquecida com experiências do tipo Arquimedes, incluindo informações variadas sobre sólidos e líquidos, é um campo riquíssimo para o exercício de aprender a pensar sem sacrificar as aplicações práticas da Matemática."*[15]

A unidade Geometria Experimental era composta de:

- três livros para os alunos;

---

[15] PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Projeto: Financiado com recursos do projeto prioritário nº 34 do Plano Setorial de Educação 1972-1974. (Diretor: Ubiratan D'Ambrósio)

- um livro de orientação para os professores;
- material para o trabalho do aluno.

As unidades eram destinadas a alunos de 3ª, 4ª e 5ª séries do ensino fundamental e as atividades se caracterizavam por:

> *"• propor atividades de real significado para o aluno, fazendo com que a aprendizagem seja fortemente auto-motivadora;*
> *• colocar o aluno em interação com objetos concretos orientando-os gradativamente para as análises lógicas;*
> *• tornar a aprendizagem mais objetiva e natural, facilitando-se assim a formação de um ambiente em que o aluno sinta que pode experimentar, pode cometer erros, pensar por si mesmo, escolher métodos para solucionar uma situação-problema e, sobretudo, pode contar, quando necessário, com a orientação de uma pessoa mais experiente, o professor;*
> *• iniciar as atividades questão desafiadora, onde o conceito a ser trabalhado está inerente;*
> *• após a colocação da situação-problema, os alunos devem fazer a sua análise crítica, procurando prever possíveis soluções, que serão, posteriormente, confrontadas com os resultados obtidos durante a realização de experiências. O texto procura orientar as atividades, de modo a não ser demasiadamente diretivo, evitando apresentar conclusões a que o aluno possa chegar por seus próprios meios, não limitando sua criatividade, além de procurar ser suficientemente flexível, para atender às tendências de cada aluno;*
> *• durante a realização das experiências, o professor só deverá intervir quando solicitado. Poderá, também, quando sentir necessidade, seguir este ou aquele caminho. Deverá, ainda, orientar os alunos para que idealizem e executem novas experiências relativas aos assuntos abordados."*[16]

Podemos dizer que esse material e suas idéias influíram para a criação de muitos projetos para o ensino de Geometria no país.

---

[16] Características colocadas na página 1 do livro do professor.

CAPÍTULO 6

GEOMETRIA NAS ESCOLAS DE MAGISTÉRIO

> *No período de 1962 a 1965, eu estava na escola primária, mais precisamente no Grupo Escolar Duque de Caxias, na cidade de Juiz de Fora, em Minas Gerais.*
>
> *Naquela ocasião, os meninos tinham aulas de geometria enquanto as meninas iam aprender puericultura, bordados, tricô, [...]*
>
> *Não esqueço a revolta que sentia por não poder participar das aulas daqueles desenhos estranhos e indecifráveis. Às meninas estava predestinado o futuro de mães e donas de casa.*
>
> *Eu queria mais... Não me achava inferior intelectualmente aos meninos. Um dia, iria descobrir o significado daqueles desenhos, com certeza [...]"* (Tereza Cristina O. Costa, maio 2000)[1]

O ensino para crianças nas séries iniciais tem sido o campo de ação de cursos bem específicos em nossa Educação. Podemos dizer que esses cursos contribuíram para incrementar esse ensino ao mesmo tempo em que são influenciados por ele. Sendo assim, o entendimento de um projeto de ensino nesses cursos depende da compreensão do correspondente projeto de ensino nas séries iniciais. Isso, tanto nos aspectos relativos às suas funções sociais, como também aos seus aspectos políticos e pedagógicos. É fácil constatar que a formação de professores de nível superior também se relaciona bastante com o ensino nesses cursos. Tanto o licenciado em Matemática, como o especialista em educação (egressos dos cursos de Pedagogia) atua na formação do professor desses cursos. As inter-relações que aí se criam influenciam em grande parte qualquer projeto de ensino elementar.

---

[1] Tereza Cristina O. Costa, hoje engenheira civil e professora de Matemática, na época, era nossa aluna de Pós-Graduação na UNIBH.

Esses cursos, graças a determinadas leis, têm sofrido modificações em seus objetivos e em sua denominação. O campo de ação desses curso também tem passado por alterações em seus objetivos e em sua denominação.

CURSO NORMAL	**→**	**CURSOS DE HABILITAÇÃO DE MAGISTÉRIO DE 1º GRAU**	**→**	**CURSO NORMAL SUPERIOR**
	LEI n. 4024/61		**LDB LEI n. 5692/71**	
CURSO PRIMÁRIO	**→**	**CURSO DE 1º GRAU**	**→**	**CURSO FUNDAMENTAL DE 1ª À 4ª SÉRIES**

Além disso:

a) Os Cursos Normais eram desenvolvidos em Escolas Normais.

b) Os Cursos de Habilitação de Magistério de 1º Grau eram profissionalizantes e de habilitação para o 2º Grau.

Os Cursos Normais Superiores são destinados à formação de docentes de Nível Superior para a Educação Infantil e para a educação nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Serão desenvolvidos nos IES (Institutos de Ensino Superior).

Se nos prendermos ao Curso Normal, concluiremos que ele sempre foi, na verdade, um curso profissionalizante, pois abria a seus egressos um mercado de trabalho relativamente definido. A professora geralmente era portadora, por assim dizer, do saber necessário ao então Curso Primário, hoje séries iniciais do Ensino Fundamental. Pode-se dizer que ela dominava as técnicas de ensinar; ou seja, na sua prática o "como fazer" assumia importância maior do que "o que fazer". É a predominância da Técnica sobre o Conteúdo.

Essa especificidade do Curso Normal foi se perdendo na medida em que se transformou em habilitação de 2º Grau como qualquer outra habilitação. Dessa forma, podemos facilmente constatar que:

> *"[...] essa equivalência foi inicialmente interpretada como vantajosa, uma vez que aparentemente completava a obra de instrumentos legais anteriores – principalmente a Lei 4024/62- no sentido de eliminar as barreiras entre a normalista e a Universidade. Mas sua conseqüência, a médio prazo, parece ter sido contrária: o curso assumiu caráter propedêutico, recebendo ao mesmo tempo todo o impacto negativo sofrido pela política de profissionalização do 2º Grau."* (BRASIL, p. 14)

Das habilitações do 2º Grau, o Magistério continua sendo considerado fraco em conteúdo científico, ao mesmo tempo em que, a cada dia, perde as suas características básicas em relação aos aspectos instrumentais que permitem capacitar o professor a viabilizar o ensino no 1º Grau.

Antes do aparecimento das Escolas Normais no Brasil, algumas informações sobre o ensino de Matemática na escola elementar do País são interessantes e curiosas, embora altamente perniciosas em alguns pontos:

a) Uma Lei Geral de 15 de outubro de 1827 estabelece as diretrizes que devem nortear a criação das escolas elementares em todo o País. Determinava a Lei:

> *"Em todas as cidades, vilas e lugares populosos, haverá escolas de primeiras letras que forem necessárias; os presidentes de província em conselho, e com audiência das respectivas câmaras municipais, enquanto não tiverem exercício os conselhos gerais, nomearão o número e a localidade das escolas, podendo extinguir as que existiam em lugares pouco populosos e remover os professores delas para as que se criarem onde mais aproveitáveis, dando-se conta à Assembléia Geral para a final Resolução."*

b) O Artigo 6º dessa Lei dispunha sobre que conhecimentos essa escola elementar transmitiria. Para os meninos, ele declara que:

> *"Aos meninos, os professores ensinarão a ler, as quatro operações de Aritmética, prática de quebrados decimais e proporções, as noções mais gerais da Geometria prática, a gramática da língua nacional e os princípios da moral cristã e da doutrina da religião Católica e Apostólica Romana, proporcionados à compreensão dos meninos, preferindo para as leituras a Constituição do Império e a História do Brasil [...]".*

c) Esse mesmo artigo, para as meninas, declara que:

> *"Às meninas, as mestras além do declarado no Art. 6º, com exclusão das noções de Geometria, e limitando a instrução da Aritmética só às suas quatro operações, ensinarão também as prendas que servem à economia doméstica."*

Essa legislação restringe, portanto, o ensino de Aritmética nas escolas de meninas às quatro operações. As professoras são desobrigadas do ensino de geometria, surgindo, assim, uma diferenciação curricular entre escolas masculinas e femininas, já que a Geometria só integrava o currículo das escolas para os meninos. É interessante salientar que

> *"Esse fato também irá diferenciar as remunerações recebidas pelo professor e pela professora apesar de a lei consagrar a igualdade de salários, o ensino da geometria constituía o critério para se estabelecerem salários diferenciados".*(NOVAES, 1984: 19)

Os professores que trabalhavam nas escolas primárias dessa época ainda não freqüentavam Escolas Normais brasileiras, pois essas ainda não existiam.

A Lei Orgânica do Ensino Normal, regulamentada no Decreto-Lei 8530, de 2 de janeiro de 1946, na sua organização curricular e determinada pelo Artigo 7º, prevê o ensino de Matemática do seguinte modo:

- nos Cursos Normais de 1º ciclo (formação de regentes de ensino primário) ela vai ser ministrada nas 1ª, 2ª e 3ª séries, ficando ausente na 4ª série. Nesta série, porém, ela vai ser enfocada na Disciplina Didática e Prática de Ensino;

- nos Cursos Normais de 2º ciclo (formação de professores primários) ela vai aparecer somente na 1ª série, ficando ausente nas 2ª e 3ª séries. Será trabalhada na Disciplina Metodologia do Ensino Primário de 2ª e 3ª séries.

Com a *Lei 4024/61*, a estrutura do Curso Normal foi praticamente mantida. A Matemática vai aparecer no currículo, da seguinte forma:

- na Escola Normal de grau Ginasial, nas quatro primeiras séries;

- na Escola Normal de grau Colegial, na 1ª e 2ª séries; e na Didática, na 3ª série.

A *Lei Federal 5692/71* prevê, no Parecer 45/72, um currículo da seguinte forma:

(a) um núcleo comum obrigatório em âmbito nacional, dito Educação Geral:

"[...] que terá como objetivo básico a formação integral do futuro professor e deverá, a partir do 2º ano, oferecer os conteúdos dos quais ele se utilizará diretamente em sua tarefa de educador";

(b) uma parte de Formação Especial

"[...] que dará o mínimo necessário à habilitação profissional e constará de Fundamentos de Educação, Estrutura e Funcionamento do Ensino de 1º Grau e Didática incluindo a Prática de Ensino".

Portanto, na estrutura curricular proposta pela Lei 5692/71, a inovação que se apresenta em relação à Matemática é justamente a sua integração tanto no Núcleo Comum (ficando inserida na Educação Geral), como na parte de Formação Especial quer como disciplina instrumental, quer como componente específico de Habilitações Profissionais.

A estrutura curricular proposta é bem flexível, possibilitando assim que os Conselhos Estaduais de Educação e os estabelecimentos de Ensino reorganizem seus próprios currículos, acrescentando ou remanejando conteúdos já previstos (Anexo 1).

Por isso, a Matemática nos Cursos de Habilitação para o Magistério terá uma carga horária variando de escola para escola. Em algumas escolas, onde funciona o curso com duração de três anos, a Matemática poderá ser trabalhada nas seguintes séries:

1ª série – Conteúdo matemático referente ao Núcleo Comum, ou seja, é dado o conteúdo geral de todo o curso de 2º Grau.

2ª série – Matemática Instrumentalizada, ou seja, é desenvolvido o conteúdo de Matemática das séries iniciais (1ª à 4ª série do 1º Grau).

3ª série – Não aparece o conteúdo específico de Matemática, apenas na disciplina Didática Geral são reservadas algumas aulas para a Didática da Matemática.

Em escolas onde funciona o curso com duração de quatro anos, podemos encontrar a seguinte estrutura:

1ª série – Conteúdo matemático referente ao Núcleo Comum, ou seja, é dado o conteúdo geral de todo o curso de 2º Grau.

2ª série – Matemática Instrumentalizada, ou seja, é desenvolvido o conteúdo das séries iniciais (1ª à 4ª série do 1º Grau).

3ª e 4ª séries – Não aparece o conteúdo específico de Matemática, são reservadas algumas aulas para a Didática de Matemática.

Ou ainda:

1ª e 2ª séries – Matemática Instrumentalizada, ou seja, é desenvolvido o conteúdo das séries iniciais (1ª e 4ª séries do 1º Grau).

3ª e 4ª séries – Aparece apenas a Didática de Matemática.

Podemos perceber, por essa pequena descrição, que a flexibilidade prevista na lei faz com que a Matemática ocupe um grau de importância ou de valor dependendo de critérios pessoais de escolas e professores, fazendo com que não haja um consenso em relação ao papel da Matemática nesses Cursos.

O Parecer 853/71 que fixa os objetivos e a amplitude do núcleo comum determina como objetivo do ensino das Ciências (Matemática e Ciências), no artigo 3º item b, observando que esse ensino visará *"nas ciências, ao desenvolvimento lógico e à vivência do método científico e suas aplicações"*.

Com base nesse Parecer, cada Estado fixa os objetivos gerais do Ensino da Matemática, que são encontrados nos Guias Curriculares ou Programas de Ensino.

O Parecer 853/71 determina que, nos Cursos de Habilitação para o Magistério, na Matemática, na parte de Formação Especial

> *"[...] dever-se-á enfocar sua estrutura básica conduzindo o professor a realizar todo o encadeamento de ações para que possa futuramente levar o educando com apoio de situações concretas a compreender as estruturas da realidade e suas relações, deixando em segundo plano a aquisição de mecanismos puramente utilitários para a solução de problemas práticos."*

Com base nesse Parecer, cada Estado fixa os objetivos específicos da Matemática, no Curso de Habilitação para o Magistério de 1º Grau.

A flexibilidade dada pela Lei 5692/71, quanto ao currículo, gerou uma série de problemas em relação ao ensino de Matemática nos cursos de Habilitação para o Magistério, tais como:

- algumas escolas trabalham mais com o conteúdo de Matemática comum ao 2º grau;

- outras colocam grande ênfase no desenvolvimento do conteúdo das séries iniciais (1ª à 4ª séries).

Dessa forma, percebe-se que não existe um consenso geral sobre o corpo de conhecimentos matemáticos que é necessário para a formação adequada do professor de 1º grau.

Podemos perceber que as várias reformas sofridas pelo Curso Normal contribuíram para a descaracterização desse curso como uma instância adequada para a formação do professor de 1º Grau.

Examinando os currículos desses cursos, isso é claramente constatado, pois o Curso Normal contava com um maior número de disciplinas de instrumentação pedagógica. Esse fato fica ainda mais flagrante depois da última reforma de ensino de 1º e 2º graus, quando a Lei 5692/71 determina que a 1ª série de todos os cursos de 2º Grau seja integrada. Dessa forma, o Curso Normal, que anteriormente contava com três séries específicas para a preparação do professor, passa, na realidade, a ser um curso com duração de três anos em que apenas nas duas últimas séries o aluno é preparado para exercer a profissão. Houve, na verdade, um aumento de disciplinas, acarretando a redução da carga horária para o desenvolvimento da área de instrumentalização pedagógica.

Com esse aumento de disciplinas, em detrimento da qualidade do ensino, é de se esperar que o curso não atenda a parte de Educação Geral e não prepare para o trabalho.

Com essa estrutura, pode-se prever que os alunos dos Cursos Normais terão, assim, limitadas suas chances de entrada na Universidade. É interessante salientar que, anteriormente, a Lei Orgânica 8530/46 era responsável pela limitação que impunha a estudantes normalistas, ao permitir a entrada desses em apenas alguns cursos da Faculdade de Filosofia. Hoje, a própria estrutura do curso faz essa discriminação.

Várias pesquisas têm mostrado que o Curso Normal vem sofrendo um processo de esvaziamento que se reflete diretamente na competência do profissional por ele formado. Têm constatado que

> *"[...] a clientela atual desse curso é proveniente de famílias operárias. Algumas alunas são operárias buscando o Magistério cientes de que, nele, as exigências quanto ao desempenho acadêmico serão menores que nos outros cursos de 2º Grau."* (NOVAES, 1984: 20)

A questão do ensino de Matemática, nesse contexto, fica então reduzida a um ensino basicamente prático, em que a ênfase é dada no "como fazer", sendo que, na maioria das vezes, o conteúdo a ser ministrado é determinado exclusivamente pelo conteúdo que deve ser trabalhado nas séries iniciais. Isso foi evidenciado quando citamos anteriormente alguns exemplos da forma como a Matemática é trabalhada nos cursos normais.

Como a Matemática está inserida no currículo, tanto na parte de Formação Geral como na parte de Formação Especial, podemos estabelecer o seguinte quadro: de um lado, o professor de conteúdo, trabalhando com uma Matemática divorciada da realidade do aluno, na forma de um produto pronto, acabado. Do outro, o professor de Didática de Matemática, apresentando um "como fazer" desvinculado desse conteúdo trabalhado.

Pode, assim, ficar estabelecida uma dicotomia conteúdo/ metodologia que torna cada vez mais inviável o ensino de Matemática.

Todas essas considerações mostram como as leis relativas ao Magistério do Ensino Fundamental contribuíram para que as professoras de 1ª à 4ª séries se tornassem completamente despreparadas com relação aos conteúdos matemáticos e, de uma certa forma, alienados do ensino de Geometria.

PARTE 3

O NÃO RESGATE DAS GEOMETRIAS

CAPÍTULO 7

PROFESSORES X GEOMETRIA

> *A geometria é um conteúdo difícil de ser abordado. Os alunos têm muitas dificuldades de aprender e o professor de ensinar.*
>
> (Depoimento 138)

Ao lecionarmos a disciplina "Tópicos Modernos de Geometria" no Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, na UNI-BH, Centro Universitário de Belo Horizonte, logo no primeiro dia de aula do primeiro curso, constatamos vários fatos interessantes referentes à maioria dos professores ali presentes.

Embora lecionassem Matemática já há alguns anos, vários deles se portavam, diante de um curso de Geometria, como a maioria dos alunos de cursos fundamentais e médios: tinham medo do curso que freqüentavam.

Além de declarar explicitamente esse medo, confessavam que tinham pouca base em Geometria.

Como um reforço a esse quadro negro, revelavam que eram incapazes de se lembrarem em quais livros de Geometria haviam estudado.

Assim, três pontos ressaltavam a fragilidade daqueles professores para com a Geometria:

- tinham medo do curso que freqüentavam;
- tinham pouca base em Geometria;
- eram incapazes de lembrar em quais livros de Geometria haviam estudado.

Numa tentativa de amenizar sua fragilidade – o abandono do ensino de Geometria –, debitavam a responsabilidade dessa ação prejudicial à sua formação e atuação profissionais, especificamente:

1. À Universidade que não os havia preparado convenientemente.

2. À Escola que não lhes dava condições de trabalho na Geometria por causa da:

- falta de material adequado;
- redução das aulas indicadas para o desenvolvimento desse conteúdo;
- exigência de ênfase nos assuntos algébricos.

Do nosso curso de especialização, esperavam aprender:

- a Geometria necessária;
- como ensinar tal conteúdo aos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

De fato, nesses últimos 20 anos, ministrando cursos de treinamento, de especialização e fazendo visitas a Escolas, temos observado uma grande contradição dos professores.

Sempre dizem que foram mal preparados na Universidade, que têm pouco conhecimento de Geometria e que desconhecem a existência de recursos adequados para trabalhar com ela.

Mas esses mesmos professores, diante de novos enfoques sobre os conteúdos e perante novas alternativas de apresentação, são extremamente resistentes a alterações em suas aulas.

Quantos deles seguiram cursos que apresentaram possibilidades para a aquisição de conhecimentos mais sólidos e que os colocaram a par de novas metodologias e de novos materiais!

Apesar de tudo isso, continuavam extremamente resistentes a alterações em sua prática pedagógica e a ensinarem Geometria.

Mas o que mais nos assustou naquele curso foi que vários professores que ali estavam, há dez anos atrás, em cursos que ministramos, já tinham a mesma desculpa para não ensinar em Geometria: a falta de preparo, por culpa da Universidade. No entanto, apesar de terem tido oportunidades de mudar esse quadro através dos cursos que freqüentaram, continuavam com a mesma ação: não ensinavam Geometria.

Nossas inquietações em relação ao ensino de Geometria, que há muito nos acompanhavam, naquele momento se tornaram muito fortes e seguiram nova direção. Decidimos fazer com que aqueles alunos se tornassem sujeitos de uma pesquisa. Procuramos então:

1. Explicitar que idéias aqueles professores tinham da Geometria e do seu ensino.

2. Analisar a influência que essas idéias tinham na prática pedagógica desses professores.

3. Descobrir porque esses professores, que tinham o discurso e a consciência do abandono da Geometria, não conseguiam resgatá-la.

7.1 Procedimentos Metodológicos

a) OS INSTRUMENTOS UTILIZADOS

Utilizaram-se, em duas sessões distintas, três questionários respondidos por escrito pelos professores.

Na primeira seção, os professores receberam os seguintes questionários:

Questionário 1 - dados relativos à formação acadêmica do professor, e à sua atuação profissional (onde leciona, e que conteúdos leciona).

Questionário 2 - dados relativos à formação do professor em Geometria no curso superior e fora dele.

Esses dois questionários tinham por objetivo identificar a formação acadêmica dos professores pesquisados, bem como a situação profissional de cada um deles.

Na segunda seção, responderam a três questões. (Ver ANEXO 1)

Questão 1 - opinião do professor sobre a importância do ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio.

Questão 2 - análise de uma afirmativa (comentário de uma situação sobre a ausência do ensino de Geometria na prática escolar).

Questão 3 - descrição da forma de atuar do professor na sala de aula ao desenvolver conteúdos de Geometria.

Com essas três questões tentamos identificar os posicionamentos dos professores sobre a utilização de Geometria no Ensino Fundamental e Médio. Isso foi realizado através:

a) das análises da relação entre as opiniões manifestadas sobre esse ensino,
b) da sua ausência na Escola,
c) da atuação de cada um deles na sala de aula.

b) O CONTEXTO E OS SUJEITOS

Participaram dessa pesquisa 200 professores, alunos da disciplina Fundamentos Modernos de Geometria, do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática (*lato sensu*) da UNI-BH, Centro Universitário de Belo Horizonte.

Dos 200 professores, 181 tinham graduação em Matemática, dez tinham curso de Engenharia, quatro de Administração de Empresas e cinco tinham curso de Pedagogia. Desses alunos, 161 lecionavam Matemática em Escolas de Ensino Fundamental e Médio. Apenas 27 deles freqüentaram, depois de formados, algum curso de Geometria, conforme mostra o QUADRO 1.

QUADRO 1

FORMAÇÃO DOS PROFESSORES

Escola Superior	Número de Professores	Curso Superior seguido pelos professores				Fez outros Cursos de Geometria?		Leciona no Ensino Fundamental e Médio?	
		Matemática	Engenharia	Administração	Pedagogia	Sim	Não	Sim	Não
UNIVERSIDADES FEDERAIS	29	20	7	1	1	3	26	24	5
UNICENTROS	139	137	0	1	1	23	116	114	25
FACULDADES	32	24	3	2	3	1	31	23	9
TOTAL	200	181	10	4	5	27	173	161	39

Para analisar a formação em Geometria desses professores duas questões foram propostas:

1. Que Geometria você estudou?
2. Em quais livros de Geometria você estudou?

É interessante observar que:

a) 39% desses professores não lembraram em quais livros de Geometria haviam estudado durante a graduação.
b) 2% afirmaram que não haviam estudado em nenhum livro.
c) 6% deles disseram que havia, estudado em apostilas sem autores.
d) 36% citaram ou nomes de autores ou títulos de livros.
e) Apenas 17% conseguiram indicar o nome do livro com o respectivo autor.

Os livros lembrados foram:

QUADRO 2

LIVROS RELACIONADOS PELOS PROFESSORES

LIVROS	AUTORES	COLEÇÃO
▪ Geometria	Aref Antor Neto Nilton Lapa José Luiz Pereira Sampaio Sidney Luiz Cavalcante	▪ Noções de Matemática – (Volume 5)
▪ Geometria Analítica ▪ Geometria Plana ▪ Geometria Espacial	Gelson Iezzi	Fundamentos de Matemática Elementar (Volumes 7, 9,10)
▪ Geometria no Plano ▪ Exercícios e Problemas de Geometria no Espaço	Alberto Nunes Serrão	
▪ Geometria Elementar	A.V. Pogorélov	
▪ Geometria Analítica do Espaço	Edson Durão Júdice	
▪ Lições de Geometria Racional	Mário de Oliveira	
▪ Áreas e Volumes ▪ Geometria Analítica e Polinômios	Antônio dos Santos Machado	▪ Matemática: Temas e Metas (Volumes 4 e 5)
▪ Elementos de Geometria (FIC)	Frère Ignace Chaput	
▪ El Cálculo Con Geometria Analítica	Louis Leithold	

7.2 Análise dos Instrumentos

No questionário 3, pudemos constatar que, ao responderem a questão 1,

"Qual a importância do ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio?",

os professores foram unânimes em dizer que a Geometria se distingue como a disciplina mais apropriada para desenvolver a criatividade e a capacidade de raciocínio do aluno.

Alegaram que, pela beleza de suas construções e demonstrações, ela desperta o interesse do aluno pela Matemática.

Consideraram que, uma vez que a Geometria lida com formas geométricas que estão presentes no universo, o aluno, ao estudá-la, vai saber lidar com essas formas no dia-a-dia.

Acreditavam, também, que a Geometria permite relacionamentos com outras áreas e que facilita o aprendizado da Álgebra.

Para eles, a Geometria desenvolve a noção de espaço e medidas.

As formas de expressão dos professores sobre a importância do ensino de Geometria foram agrupadas em cinco categorias conforme mostra o QUADRO 3.

QUADRO 3
IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO Declararam que: "A Geometria...
Espacial	... desenvolve a noção de espaço e medidas" ... organiza o espaço" ... desenvolve a visão espacial" ... estuda as formas e objetos" ... dá a noção de espaço" ... favorece a noção de posição, lugar e suas propriedades"
Raciocínio Lógico	... desenvolve o raciocínio lógico" ... agiliza o raciocínio lógico"
Abstração	... trabalha com a capacidade de abstração" ... desenvolve a abstração" ... ajuda em outros raciocínios abstratos"
Relacionamentos com outras áreas	... desenvolve várias áreas do conhecimento" ... é utilizada no cálculo fundamental" ... amplia conhecimentos" ... é útil para o cálculo de áreas, perímetros e volumes" ... é importante para aplicação prática no ensino da Álgebra" ... é útil no cotidiano" ... é aplicada na Aritmética, Álgebra e Trigonometria" ... ajuda na compreensão de fatos reais do cotidiano"
Criatividade	... desenvolve a criatividade"

Na questão 2, do questionário 3, ao comentarem a afirmativa, aduzem:

> *"A Geometria é um tema apresentado por currículos de Matemática do mundo inteiro. Isso porque ela é, reconhecidamente, um assunto importante para a formação matemática dos indivíduos. Mas apesar disso, cada vez mais os professores deixam de abordar esse importante conteúdo em suas classes."*

As respostas apresentaram uma incrível semelhança com tendências a dizer que:

1. Existem professores existem que não gostam de trabalhar com Geometria.

2. Os professores deixam para trabalhar no final do ano, logo não têm tempo de ministrar todo o conteúdo.

3. Os professores aprenderam pouco ou nada de Geometria nos cursos de Licenciatura.

4. Os professores têm medo de trabalhar com a Geometria.

5. Os professores foram acostumados a trabalhar só com a Álgebra.

As formas de expressão dos professores sobre o abandono do ensino de Geometria foram agrupadas em cinco categorias conforme mostra o quadro 4.

QUADRO 4
ABANDONO DA GEOMETRIA

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO Declararam que: "Os professores abandonaram o ensino de Geometria
Falta de gosto	... porque não gostam de trabalhar com Geometria;"
Falta de tempo	... porque deixam para trabalhar no final do ano e, em conseqüência, não têm tempo para lecionar a Geometria;" ... porque a Geometria sempre aparece no final do livro-texto"
Falta de preparo adequado	... porque é difícil o entendimento da Geometria, quando está relacionada com uma série de demonstrações, axiomas, na maioria das vezes abstratos, sem sentido concreto. A geometria parece estar distante da realidade do aluno e do próprio professor. ... porque aprenderam pouco ou nada de Geometria nos cursos de Licenciatura" ... por falta de conhecimento sobre os conteúdos de Geometria ... alguns, por comodismo, outros porque, realmente, não a dominam ... porque a Geometria é um conteúdo difícil de ser abordado. Os alunos têm muitas dificuldades de aprender e o professor de ensinar ... porque os professores, principalmente os de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental, não estão preparados para ensinar Geometria"
Medo	... porque, a meu ver, a Geometria não é bem dada nas universidades; nós não somos bem preparados para trabalhar com esse conteúdo. Daí o medo e a indiferença dos professores ... porque a falta de base do professor está afastando da sala de aula esse tópico. O medo de ensinar errado é muito evidente e, assim, no pensamento do professor, é melhor não ensinar ... porque a maioria dos professores tem "medo" de dar essa matéria, deixando para o fim do ano, se der tempo de iniciar o tema

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO
Preferência pela Álgebra	... porque enfatizam muito os aspectos algébricos, reduzindo os problemas geométricos a meros exercícios de Álgebra" ... porque fomos acostumados com a Álgebra ... ... porque os currículos têm dado prioridade ao ensino da matemática algébrica. ... porque o professor de Matemática está muito ligado à álgebra, acredita ser a matemática puramente números e não idéias

Para a questão, 3 do questionário 3,

"Como você desenvolve os conteúdos de Geometria nas turmas em que você leciona?",

é importante salientar a amostra dos indivíduos pesquisados. São 200 professores que, em relação à questão, assim se expressam:

QUADRO 5

PROFESSORES QUE TRABALHAM COM GEOMETRIA

<table>
<tr><td rowspan="3">200
Professores relacionados</td><td colspan="2">19,5%
não lecionam</td></tr>
<tr><td rowspan="2">80,5%
lecionam</td><td>21%
não trabalham com Geometria</td></tr>
<tr><td>59,5%
trabalham com Geometria</td></tr>
</table>

Como se comportam os 119 que trabalham com Geometria, segundo as respostas dadas à questão 3, do questionário 3?

As respostas mostram que, em suas aulas, os professores, costumam:

1. Dar aulas expositivas.

2. Utilizar o livro didático para a resolução de problemas e exercícios.

3. Levar materiais concretos (sólidos geométricos) para mostrar aos alunos, acreditando, assim, facilitar a visualização deles.

4. Projetar vídeos ou slides, sendo que alguns utilizam retroprojetor.

5. Pôr os alunos para trabalharem com dobraduras.

6. Utilizar desenho geométrico em substituição à Geometria.

As formas de expressão dos professores sobre como desenvolvem os conteúdos de Geometria nas turmas em que lecionam foram agrupadas em oito categorias conforme mostra o QUADRO 6.

QUADRO 6

O DESENVOLVIMENTO DOS CONTEÚDOS

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO Declaram: "Em minhas aulas
Livro texto	... orientando pelo livro-texto, resolução dos exercícios propostos no livro texto; resolução de questões do vestibular de várias Universidades ... apenas com o livro didático, exercícios e trabalho em grupo ... leitura do texto com os alunos, discussão das palavras desconhecidas, comentários sobre o conteúdo apresentado ... com a ajuda do livro didático, com trabalhos em grupo ... uma pequena leitura no livro texto, explicações e cálculo
Desenho geométrico	... uso muito técnicas de desenho Geométrico ... eu leciono desenho Geométrico, onde desenvolvo toda a parte teórica ... são desenvolvidas através do desenho geométrico e na maioria das vezes paralelamente aos conceitos algébricos

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO
Aula expositiva	... aulas expositivas, composição e resolução de problemas clássicos e do cotidiano do aluno ... como trabalho com Física, apenas utilizo das definições e relações geométricas ... costumo introduzir a geometria com exemplos do dia-a-dia que lembram: ponto, reta e plano ... procuro mostrar os conceitos básicos e para que o aluno não aprenda a "decorar" fórmulas e sim compreendê-las ... na forma tradicional: quadro e giz. ... de maneira tradicional, aplico a matéria no quadro e tento explicá-la da melhor maneira possível e procuro aplicar bastante exercícios para o aluno fazer ... dando os conceitos e definições básicas, mostrando a situação no desenho e fazendo as demonstrações ...dando uma demonstração, fazendo associação com o mundo físico e a partir daí buscar abstrair o máximo possível ... abordando algo que o aluno consiga relacionar, estabeleço regras e relações, dando exemplos, demonstro e convenço o aluno sobre o assunto em questão

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO
Material concreto	... trabalho com cartolinas e materiais (canudinhos, linhas, folhas, etc.) ... trabalho com material concreto: barbante, palitos, compasso, esquadro ... trabalho com palitos de picolé, canudos e desenhos para ensinar figuras planas, ângulos, etc. ...lanço mão de cartolina para representar planos, agulhas de tricô, para representar retas, a própria sala de aula para representar interseção de planos ... os alunos calculam áreas das carteiras, da borracha e até mesmo da sala, janelas, etc. ... quando trabalho Geometria Espacial, utilizo material concreto (prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas) Para o estudo da área, essas figuras são planificadas dando assim mais idéias da área lateral e área de base ...dobraduras desenhos ... infelizmente só dobraduras (geometria espacial) ... desenvolvo os conteúdos com atividades práticas, dobradura, desenhos, sem formalização ... procuro sempre trabalhar com dobraduras, algum material concreto ... trabalho com dobraduras

CATEGORIAS	FORMAS DE EXPRESSÃO
Visualização	... Parto da prática, quando trabalho com a 5ª, 7ª ou 8ª. Visualizando o concreto chega-se ao abstrato ... utilizo materiais do dia a dia para visualizarem as figuras e através de dobraduras entre outros ... começo com jogos e brincadeiras, depois experiências visuais diferentes, peço aos alunos que expressem suas conclusões ... procuro trabalhar, inicialmente com objetos concretos através da observação de suas características Em seguida, procuro fazer com que meus alunos façam abstrações baseadas em suas observações. Dessa forma, espero que meus alunos, com minha orientação cheguem a conclusões próprias
Projeções (de videos, slides e retroprojetores)	... com discussão do livro-texto, com figuras planas e sólidas, projeções de slides ... procuro inicialmente falar sobre a parte histórica daquilo que estou introduzindo, apresento fitas de vídeo que me ajudam a explorar o assunto e coloco algumas questões que despertam a curiosidade do aluno ... levar o aluno a identificar a forma e a figura, na escola, na sala, em casa; trabalhar com caixas, dobraduras e filmes ... trabalho com dobraduras, construções geométricas, retroprojetor, filmes, textos históricos
Instrumentos geométricos	... desenvolvo no quadro com auxílio de compasso e esquadro

7.3 Algumas Conclusões

Analisando as respostas dadas pelos professores às três questões propostas,

1. Qual a importância do ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio?

2. Comentário sobre a afirmativa: *"A Geometria é um tema apresentado por currículos de Matemática do mundo inteiro. Isso porque ela é, reconhecidamente, um assunto importante para a formação matemática dos indivíduos. Mas apesar disso, cada vez mais os professores deixam de abordar esse importante conteúdo em suas classes"*.

3. *"Como você desenvolve os conteúdos de Geometria nas turmas em que você leciona?"*,

constatamos, neles, uma imensa fragilidade:

- Reconhecem que o seu desconhecimento de Geometria é uma das causas do abandono dessa matéria no Ensino Fundamental e Médio e, simultaneamente, responsabilizam as Faculdades e Universidades pelo seu despreparo. Eis alguns desses depoimentos que reproduzimos o mais fielmente possível, sem nos preocuparmos com a correção da forma.

> *"Geralmente, o conteúdo de Geometria está no final dos livros, os professores não estão bem preparados para ensinar Geometria, principalmente professores de 1ª à 4ª série. Todos esses fatores contribuem para que a Geometria deixe de ser ensinada nas escolas e para que as pessoas tomem um verdadeiro 'pavor' dessa matéria."* (Depoimento 163)

> *"Não é bem assim, o professor não deixa de abordar, ele não é bem preparado nos cursos de graduação e, além disso, a Geometria tem um conteúdo muito*

grande, devendo ser estudada em um tempo muito curto." (Depoimento 180)

"Penso que a parte de Álgebra e Cálculo que é exigida, principalmente no vestibular, tem pressionado o cumprimento do programa de Matemática, eliminando cada vez mais a Geometria.
Acrescente-se a isso o fato de que os próprios professores (como eu) não têm, em sua formação acadêmica, nada ou muito pouco de Geometria, que sustente a convicção de sua importância, principalmente relacionada às diversas áreas e assuntos da Matemática." (Depoimento 200)

"Ao meu ver, a geometria não é bem dada nas universidade; nós não somos preparados (bem preparados) para trabalhar com este conteúdo. Daí o medo e a indiferença dos professores." (Depoimento 108)

"Nós, professores, não percebemos a real importância do ensino de geometria para o ensino fundamental e médio, sem contar a formação deficiente que acumulamos na nossa vida acadêmica quando se trata de conteúdo, que precisa de uma maior dedicação, novas estratégias de ensino, para não acontecer com nossos alunos o que conosco aconteceu, preferimos abandonar, ou simplesmente ensinar o mínimo. Precisamos de maior empenho e dedicação para o ensino da geometria." .(Depoimento 123)

"Os professores deixam de abordar esse conteúdo, talvez por não terem visto com detalhes e com maior profundidade quando eram estudantes e por isso, às vezes, possuem um certo despreparo para lecionar tal conteúdo, tornando-o, por isso cada vez mais distantes das salas de aula." (Depoimento 128)

"Os professores, em sua grande maioria, não tiveram uma boa iniciação em sua 'vida geométrica' e nem preparação nos cursos de graduação (alguns) para lecionar geometria. Para a grande maioria, matemática é apenas álgebra. Infelizmente os alunos já estão assimilando esta exclusão e 'odiando' sem

> *conhecer a parte mais bonita e interessante da matemática."* (Depoimento 68)
>
> *"É inegável a importância e universalidade da geometria, mas apesar disso ela é abandonada porque o professor não tem uma boa formação, aí fica tudo muito complicado."* (Depoimento 155)

- Alegam falta de tempo para trabalhar com a Geometria e adiam o mais possível o início das aulas desse conteúdo.

> *"Deixamos de abordar geometria por não dominarmos o assunto, não ter tempo para fazer cursos, e principalmente, porque, trabalhando com álgebra (7ª série), onde os alunos possuem tanta dificuldade, acaba não sobrando tempo."* (Depoimento 109)
>
> *"Existem professores que não chegam neste conteúdo até de conveniência, pois não gostam de dar esta matéria; alguns porque não têm conhecimentos suficientes para transmitir, outros porque não tiveram informações corretas e não interessam em aprender. No próprio colégio onde trabalho, tenho um colega que nunca chega na parte de Geometria, e não gosta de trabalhá-la junto com Álgebra."* (Depoimento 173)
>
> *"No início, quando nos formamos, deixamos de abordar Geometria por falta de tempo. Trabalhamos em escola estadual e enfrentamos greve quase todo ano."*
>
> *"Mais para a frente, deixamos de abordar o assunto pelos motivos anteriores e também por falta de preparo."* (Depoimento 191)
>
> *"Normalmente, a geometria é deixada de lado pela falta de preparo do professor que normalmente não domina esse conteúdo, substituindo-o, portanto, por conteúdo de sua área de domínio, que em muitos casos é delongado para que não seja possível entrar na Geometria. Quando abordada, em muitos casos, tem uma versão mais algébrica do que se desejaria."* (Depoimento 4)

> *"Muitos professores alegam que não ensinam a geometria por ela estar sempre no final do livro, e não a trabalham paralelamente com a álgebra, mas acho mesmo que não a trabalham por terem dificuldades no conteúdo e não terem sido preparados adequadamente."* (Depoimento 5)

> *"Devido à formação de professores que é deficiente nesta área, os conteúdos de geometria vão sendo sempre deixados para o final do curso e, na maioria das vezes, não dá tempo para que estes conteúdos sejam trabalhados com os alunos."* (Depoimento 49)

> *"Penso que, por diversos motivos, não é dado esta ênfase ao estudo de geometria, talvez até mesmo porque muitos 'educadores' não tenham domínio suficiente para trabalhar o assunto. E, assim, a geometria é sempre deixada para depois, e o que se diz é: não deu tempo...* "(Depoimento 63)

> *"Como todos os outros professores, deixando para o final do ano, onde estou cansado, a turma também, e alguns alunos já estão aprovados. Assim, o rendimento é mínimo, mas os programas de matemática são tão extensos que eu trabalho o ano todo e não acho outro lugar para geometria."* (Depoimento 155)

- São unânimes em afirmar que a Geometria desenvolve o raciocínio dos alunos, mas, nas salas de aula, aplicam um modelo de transmissão/ recepção no qual quem raciocina e quem faz é o professor, não o aluno.

> *"Importância do ensino da Geometria no Ensino Fundamental e Médio.*
> *- Desenvolve o raciocínio do aluno.*
> *- Ajuda o seu senso crítico.*
> *- Aumenta a capacidade de percepção das coisas.*
> *- Facilita o aprendizado nos conteúdos que serão abordados.*
> *- Faz com que o aluno tenha uma visão das coisas que estão ao seu redor."* (Depoimento 170)

"Num primeiro momento coloco em destaque os pré-requisitos para o assunto que será abordado. Em seguida, exercícios de recordação com correção e comentários.
Para a Geometria sólida, faço uma recordação das áreas das figuras planas e exercícios. Faço a apresentação dos sólidos que serão estudados com construções e através de material em acrílico. A partir de tal introdução, as demais aulas serão sempre expositivas, isto é, com cuspe e giz." (Depoimento 170)

"Além de seu valor como instrumental, a Geometria desenvolve a capacidade de abstração, a relação de fatos e análise. Essas questões são de maior importância na formação do cidadão e, além do mais, aguça seu senso crítico." (Depoimento 63)

"Quando lecionei, desenvolvi alguns conteúdos sem criatividade nenhuma, isto é, da forma que aprendi. Foi mais a nível dogmático, que a nível de entendimento." (Depoimento 63)

"A Geometria de uma maneira geral é importante para desenvolvermos problemas da vida prática. Gostaria de compreendê-la melhor." (Depoimento 72)

"Leciono através de aulas expositivas. Este é o segundo ano que leciono na 7ª série e o 1º na 8ª. Tenho a preocupação de me aprofundar mais no assunto." (Depoimento 72)

"A Geometria desenvolve o raciocínio abstrato do aluno. Com o estudo da Geometria, o aluno passa a raciocinar melhor porque o mesmo aprende a visualizar uma situação problema e, muitas vezes, não precisa nem esboçar o desenho para enxergar as possibilidades de resposta." (Depoimento 81)

"Eu apresento a geometria dando os conceitos e definições básicas, mostrando a situação no desenho e fazendo as demonstrações e, os mais espertos conseguem até desenvolvê-las sozinhos." (Depoimento 81)

- Têm a concepção de que aprender é repetir, é seguir modelos, ou adestrar (aquilo que ainda não se sabe).

> *"Preparo aula anteriormente.*
> *- Explico a parte teórica.*
> *- Resolvo exercícios.*
> *- Passo exercícios para os alunos resolverem."* (Depoimento 197)

> *"Iniciando com a História da Geometria:*
> *- Mostrando a importância e aplicabilidade.*
> *- Quando possível, trabalho com material concreto.*
> *- Aula expositiva."* (Depoimento 186)

> *"1º) Leio com os alunos o conteúdo do livro.*
> *2º) Explico o 'necessário', no quadro.*
> *3º) Dou exercícios.*
> *4º) Tiro dúvidas.*
> *5º) Avalio."* (Depoimento 198)

> *"*1ª leitura das definições;*
> **Comentários;*
> ** Alguma aplicação no dia-a-dia;*
> ** exercícios."* (Depoimento 118)

> *"Aulas expositivas e, composição e resolução de problemas clássicos e do cotidiano do aluno. Busco também mostrar a geometria através de construções e figuras existentes (reais e abstratas)."* (Depoimento 131)

> *"Uma pequena leitura no livro texto, explicações e cálculos".* (Depoimento 135)

> *"Abordando algo que o aluno consiga relacionar, estabeleço regras e relações, dando exemplos, demonstro e convenço o aluno sobre o assunto em questões."* (Depoimento 99)

- Vêem o uso de materiais instrucionais apenas como motivação do aluno, não como recurso de aprendizagem.

> *"Da maneira 'tradicional' (que eu não gosto muito), passando a matéria no quadro acompanhando o livro texto.*
> *Tentando colocar mais valia com giz colorido, numa tentativa de um trabalho diferente, já que até agora não me via com muitas opções."* (Depoimento 169)

> *"Mostro as figuras, induzindo a formação de conceitos, construções e reconhecimento. Aplico exercícios, teóricos e práticos, relacionando a Geometria com a Álgebra."* (Depoimento 178)

> *"Tenho pouco tempo que leciono mas já ensinei um pouco da geometria para eles. Trabalhei com palitos de picolé, canudos e desenhos para ensinar figuras planas, ângulos, etc."* (Depoimento 105)

- Falam da aplicação da Geometria na vida diária, mas utilizam, nas suas aulas, apenas listas de exercícios prontos, impostos, formais e completamente desligados da vida e da realidade.

> *"Porque Geometria representa uma matemática do dia-a-dia. São as medidas, as formas geométricas, as semelhanças entre figuras.*
> *Grande parte dos problemas são resolvidos com mais facilidade se são tratados de forma geométrica."* (Depoimento 165)

> *"Há muitos anos que eu não trabalho com Geometria. Quando eu tive oportunidade, acho que fiz errado. Foram aulas expositivas, com exercícios feitos pelos alunos, do mesmo jeito que aprendi quando era estudante."* (Depoimento 165)

- Alegam que o conteúdo de Geometria vem sempre no final do livro, nunca sobrando tempo para abordá-lo.

> *"Nosso sistema de ensino; cobra de nossos alunos através de seleções, concursos e outros, o conhecimento algébrico, fazendo com que o ensino*

> *matemático dê ênfase aos cálculos algébricos."* (Depoimento 51)

> *"Na maioria das vezes, os professores preocupam-se em dar álgebra e aritmética, por acharem mais fácil de ensinar. A carga horária também é pequena para dar muito conteúdo. Seria conveniente que nas escolas, existisse um professor para matemática e outro específico para geometria".* (Depoimento 80)

> *"Os currículos têm dado prioridade ao ensino da matemática algébrica. Para tentar entender essa questão, talvez seja necessário rever os objetivos da escola. Uso excessivo de fórmulas, longas listas de exercícios com exemplos. Todo o ensino voltado para o vestibular. Não há, como prioridade, a necessidade de desenvolver aptidões nos alunos, no que a geometria seria de considerável ajuda."* (Depoimento 106)

> *"Geralmente professores deixam o conteúdo de geometria para o final do ano, mas como não dá tempo de terminar os conteúdos da álgebra, deixam de abordar assuntos geométricos."* (Depoimento 44)

- Enfatizam a extensão dos conteúdos de Álgebra como sendo a causa do abandono do ensino de Geometria.

> *"A maior culpa deste acontecimento é o livro didático, que coloca a parte da geometria no final, portanto como a maioria dos professores seguem o livro na ordem que lhe é apresentado, quando chega a parte da geometria o ano letivo já acabou!!!"* (Depoimento 30)

> *"Quase sempre os professores ficam presos a livros, e os livros trazem na maioria das vezes a geometria no final. E também pelo despreparo do próprio professor."* (Depoimento 32)

> *"Geralmente os professores seguem à risca o livro didático e deixam por último o conteúdo. Preferem também os algebrismos e a parte de cálculo. Sendo*

> *assim, praticamente os conteúdos de geometria não são vistos."* (Depoimento 74)
>
> *"Inexplicavelmente, deixa-se a geometria para 2º plano. Nos livros didáticos, é sempre o último capítulo e é comum ouvirmos a frase: 'se der tempo, eu dou'. Mas não conseguem enxergar que a geometria poderia facilitar o ensino da álgebra, expandindo a capacidade de raciocínio do aluno."* (Depoimento 75)
>
> *"A geometria normalmente vem no final dos livros, o que faz com que esta parte as vezes fique a desejar."* (133)
>
> *"Deixam de abordar pelo fato desse conteúdo estar sempre nos capítulos finais do livro texto. Com isso em certas turmas não dá tempo de ensinar todo conteúdo. Com isso o ensino fica prejudicado."* (Depoimento 148)
>
> *"Os livros didáticos incentivam o abandono do estudo da geometria quando a colocam no final do curso e muitas vezes por falta de 'tempo' a geometria não é contemplada."* (Depoimento 156)

Cada semestre, ao lermos os depoimentos, uma tristeza imensa se apoderava de nós por constatar o grande desamparo em que esses professores se encontravam. Desamparo que parecia se aprofundar cada vez mais, a cada nova leva de professores que chegavam.

Terminado cada curso, essa tristeza imensa se transformava em angústia profunda pela certeza de que não iriam mudar. E nos perguntávamos:

"Por que? Por que não conseguem ensinar Geometria? Fizeram um curso no qual receberam conteúdos geométricos comprovadamente apropriados para crianças e jovens, conteúdos que esses conseguem aprender. E nem assim criam coragem para aplicá-los em seus alunos. Por quê?"

Aos poucos um imenso volume de causas foi se amontoando à nossa frente:

- falta de conteúdo geométrico adequado em cursos de licenciatura;
- livros didáticos inadequados, que transformaram a Geometria em puro algebrismo;
- resistência de pais para quem a Matemática se reduz à Aritmética e à Álgebra e que, por isso, julgam ser o ensino da Geometria uma pura perda de tempo;
- ...ção usual de que Geometria é cálculo de perímetro, área e volume;
- a concepção medíocre de que ensinar Geometria se reduz a mostrá-la em sua representação concreta (paredes, janelas, mesas, etc.);
- a utilização de materiais concretos e jogos apenas para motivar (conquistar) os alunos, esquecendo-se de que eles podem ser importantes no corpo da aula, pois podem levar os alunos a vislumbrarem o padrão matemático adequado para uma verdadeira aprendizagem;
- a dificuldade que os professores têm para ver que cada assunto geométrico tem uma vasta gama de perspectivas sob as quais pode ser encarado;
- a concepção simplista que adotam ao fazer um curso de Geometria: encontrar "receitas".

Muitas e muitas outras causas surgiam em nossa mente para reforçar a nossa convicção de que não mudariam. Tudo isso só aumentava nossa busca de algo que pudesse ser feito para que mudassem.

Essa nossa procura nos esclareceu muitas coisas quando nos conscientizamos do problema ao conseguir enuncia-lo assim:

1. POR QUE, ATÉ AGORA, NÃO SE RESGATOU O ENSINO DA GEOMETRIA?
2. COMO RESGATAR O ENSINO DA GEOMETRIA?

É o que se verá no próximo capítulo.

CAPÍTULO 8

ANALFABETISMOS NA GEOMETRIA

"[...] embora haja uma vasta diferença entre nós no que respeita aos fragmentos que conhecemos, somos todos iguais no infinito da nossa ignorância". (POPPER, 1972: 57)

Quase ao finalizar o capítulo anterior, afirmamos:

"Cada semestre, ao lermos os depoimentos, uma tristeza imensa se apoderava de nós por constatarmos o grande desamparo em que esses professores se encontravam. Desamparo esse que parecia se aprofundar cada vez mais, a cada nova leva de professores que chegavam. Terminado cada curso, essa tristeza imensa se transformava em angústia profunda pela certeza de que não iriam mudar."

Essa angústia aparecia sempre que participávamos de cursos de Geometria para professores. Nesses cursos, eles queriam receitas:

— "Como trabalhar com meus alunos?".

Mas ao saírem dali, nada mudava. E comprovávamos mensalmente esse fato nas visitas que faziam às suas escolas: não ensinavam Geometria.

Todas essas angústias eram reforçadas pelos professores/alunos dos cursos da UNI-BH. Mas, após o curso, também não mudavam, e novamente tínhamos a confirmação disso nas visitas às suas escolas.

Por que não alteravam a sua prática escolar? Por que não conseguiam resgatar a Geometria, embora sonhassem fazer isso?

É verdade que a Geometria foi afastada do ensino, mas tal fato isto aconteceu há muitos anos. Muitos já apontaram várias causas para esse problema. Não vamos repeti-los aqui.

O lógico, então, após o seu afastamento, seria o seu retorno. Ou o retorno da Geometria seria indesejável?

Após essa pergunta, resolvemos buscar uma resposta para nós mesmas. E a resposta veio nas palavras de DIEUDONNÉ (1981: 5) na ICME 4 (International Comission on Mathematical Instruction 4) (BERKELEY, 1980), quando declarou que a Geometria,

> *"[...] escapando de seu estreito confinamento tradicional [...], tem revelado seus poderes ocultos e sua extraordinária versatilidade e adaptabilidade, tornando-se, assim, um dos instrumentos mais universais e úteis dentre todos os campos da Matemática."*

Que mais poderíamos dizer?

Nada. Mas a resposta de Dieudonné transformou nosso problema em outro: Se a Geometria é um instrumento tão universal e útil, por que ainda não se fez o resgate dela?

Era incrível que a resposta estava à nossa frente e não a enxergávamos, porque a encarávamos com outros olhares. De fato, em todas as turmas da UNI-BH, com as quais trabalhamos, os professores/alunos perguntavam:

— "Onde podemos fazer cursos de Geometria para aprendermos o que e como ensinar esse conteúdo para os nossos alunos?"

— "Onde podemos encontrar livros e materiais didáticos para usarmos em nossas aulas?"

— "Por que não aprendi isto até hoje?"

— "Onde você descobre esses livros?"

— "Como se faz para receber essas revistas de Educação Matemática?".

Perguntas e mais perguntas idênticas eram feitas. Ao respondermos ao óbvio, apenas procurávamos ser úteis.

Subitamente, diante de tais perguntas, vislumbrávamos algo diferente do usual: ao invés de despertar em nós o desejo de atender os pedidos, as palavras dos alunos nos trouxeram à mente as imagens dos nossos primeiros alunos, aqueles das Escolas Combinadas São Rafael. Diante dessa recordação, perguntávamos atônitos: "Que está acontecendo?"

Certo dia, então, aconteceu o nosso despertar.

Os nossos professores/alunos se mostravam tão desamparados em relação à Geometria quanto os nossos antigos alunos das Escolas Combinadas diante das leituras e das contas.

A partir desse instante, entendemos o que estava acontecendo e a resposta saltou-nos à compreensão: "Nossos professores/alunos eram incapazes de trabalhar no resgate da Geometria".

Ao chegarmos a essas conclusões, certos acontecimentos nos mostraram a possível generalidade dessa incapacidade.

Convidados por várias escolas para assessorar a elaboração de propostas político-pedagógicas, pudemos constatar que os professores, embora discutindo e refletindo sobre o cotidiano da Matemática nas suas escolas, eram extremamente limitados para alterar suas aulas: o cotidiano da escola os pressiona para que se mantenham na postura tradicional e tudo isso reforçado pela sua incapacidade de trabalhar nas mudanças necessárias.

EZPELETA & ROCKWELL (1986: 25) já afirmaram:

> *"Num âmbito como o escolar, os sujeitos costumam integrar práticas e saberes que provêm de outros âmbitos e excluir de sua prática cotidiana elementos que pertencem ao domínio escolar. Assim, o conhecimento que um professor desenvolve ao trabalhar com um grupo de crianças incorpora necessariamente elementos de outros domínios de sua vida. Ao mesmo tempo, sua prática se afasta necessariamente dos modelos recebidos no quadros de formação docente, os quais pertencem à própria instituição escolar. Esses tipos de cruzamentos e de rupturas tornam difícil estabelecer o que de fato constrói a escola."*

E POPPER (1972: 57) ressaltou:

> *"Acredito que valeria a pena tentar aprender algo sobre o mundo, mesmo que, ao fazê-lo, descobríssemos apenas que não sabemos muita coisa. Esse estado de ignorância conhecida poderia ajudar-nos, em muitas das nossas dificuldades. Vale a pena lembrar que, embora haja uma vasta diferença entre nós no que respeita aos fragmentos que conhecemos, somos todos iguais no infinito da nossa ignorância."*

Vale a pena ressaltar, aqui, a expressão de Popper colocada no período acima: *"Esse estado de ignorância conhecida poderia ajudar-nos, em muitas das nossas dificuldades"*, porque ela nos esclareceu que a incapacidade dos professores de trabalhar com Geometria não era um **estado de ignorância conhecida**. Eles não sabiam que não conheciam Geometria.

Esse estado de desconhecimento, que não é um **estado de ignorância conhecida,** é denominado **analfabetismo**.

Atualmente, o termo alfabetização, por causa das novas tecnologias, está sendo substituído gradativamente pela noção de alfabetismo. Não só para melhor traduzir o conceito em inglês de *literacy*, como para dar a idéia mais ampla da ação de alfabetizar. Essa implica avanços na compreensão e no domínio de códigos, seu manejo na sociedade e na prática social. Inclui, no significado do termo, as necessidades básicas de aprendizagem no domínio da escrita, da leitura, da aritmética e da resolução de problemas, seja nas competências adquiridas em sistemas não-formais, seja nas experiências pessoais em contextos cotidianos de aprendizagem (inclusive nas novas tecnologias).

Segundo WERTHEIN (1990), a Conferência Mundial de Educação para Todos, de 1990, teve influência marcante na definição de *"alfabetismo"*. É dele o seguinte texto:

> *"A introdução de novas tecnologias está desmistificando a escrita como código único. E está conduzindo à noção de 'alfabetismos' ou*

'analfabetismos' - plural - para designar a referência a múltiplos códigos e à multiplicidade de significações que pode adquirir o 'alfabetismo' em diferentes culturas e com variados níveis de exigência. Na verdade, somos todos analfabetos de um modo ou de outro, perante os diferentes tipos de informação e de comunicação."

Esse novo enfoque valoriza as aprendizagens ativas, o aporte cultural de cada pessoa e de cada comunidade e incentiva a solidariedade e a cooperação na luta pela erradicação do analfabetismo.

Ressaltamos, aqui, a concordância de dois posicionamentos:

POPPER	WERTHEIN
"Vale a pena lembrar que, embora haja uma vasta diferença entre nós no que respeita aos fragmentos que conhecemos, somos todos iguais no infinito da nossa ignorância".	**"Na verdade, somos todos analfabetos de um modo ou de outro, perante os diferentes tipos de informação e de comunicação".**

1 OS ANALFABETISMOS GEOMÉTRICOS

Uma vez percebido que, atualmente, a causa do não resgate da Geometria se devia ao analfabetismo, era natural perguntar:

Que fatores contribuem para o analfabetismo geométrico?

Ao identificá-los, escolhemos nomeá-los e apresentá-los de modo a relacionar cada motivo com a pesquisa realizada e com a experiência de vida desenvolvida.

1.1 Ciclo Vicioso

Por trás dos comportamentos, procedimentos e, principalmente, convicções de muitos professores, parece haver uma compulsão que poderia ser explicitada do seguinte modo:

HOJE, FAÇO COM AS PESSOAS AQUILO

QUE FIZERAM COMIGO NO PASSADO.

(*E, O QUE É PIOR, FAÇO COMIGO MESMO*)

Se um professor, sistematicamente, não ensina Geometria, o provável será que seu aluno (futuro professor) também não o faça. Se este aluno resolver ensiná-la, suas dificuldades para fazê-lo serão enormes.

Isto é ilustrado no esquema abaixo:

O mau professor	→	prepara mal seu aluno que	→	no futuro, se torna mau professor que	→	prepara mal seu aluno que

Nos seus depoimentos, os professores:

a) expressam claramente o ciclo vicioso.

> *"Acredito que devido à obscuridade dos professores, faz com que a apresentação da geometria seja superficial. E como professores é que formam professores, isto se torna um círculo vicioso, pois cada vez mais a Geometria fica mais distante dos professores, provocando assim uma distância maior de abordagem, porque não existe o domínio e compreensão da matéria."* (Depoimento 36)

> *"Acredito que essa falta de interesse dos professores em abordar tal assunto se deve ao fato de não se aprofundar muito no assunto (falta de interesse) e durante a sua vida escolar os seus professores também não aprofundarem. Mas é chegada a hora de acabar com este círculo vicioso através de nós, professores, estudando, utilizando livros para-didáticos, trabalhos com jogos, etc."* (Depoimento 39)

b) relatam as suas experiências como alunos no Curso Fundamental e Médio, as quais confirmam esse ciclo vicioso.

> *"Quando era aluno do Ensino Fundamental, percebia que muitas vezes o professor não chegava a abordar a Geometria não sei se pela falta de domínio do conteúdo ou simplesmente pela localização deste conteúdo nos livros didáticos (sempre no final)."* (Depoimento 53)

> *"Isto acontece, pois, muitas vezes, nem o próprio professor teve a oportunidade de estudar a Geometria e, quando teve, a viu de forma decorada e sem sentido."* (Depoimento 114)

c) enfatizam o fato de o professor não ter estudado Geometria.

> *"Muitos professores, por não terem estudado Geometria, 'não sabem' a matéria e a deixam muitas vezes de lado."* (Depoimento 116)

> *"A Geometria pode estar em currículos, mas muitas vezes não em sala de aula. Quando estava na 7ª série, um professor de matemática substituiu uma professora por licença médica. Foi uma excelente aula (conceito, reta, ponto, plano, etc). Nunca me esquecerei. Depois só voltei a estudar Geometria no 2º ano do 2º grau e posteriormente na faculdade. É pouco estudada."* (Depoimento 118)

d) confirmam que o ciclo vicioso provoca a não valorização da Geometria.

> *"Acredito que este é um fato cultural que é repassado de modo quase inconsciente pelos professores. Ou seja, como os nossos professores não creditavam à Geometria seu real valor, também nós não a valorizamos devidamente."* (Depoimento 147)

1.2 Aula Expositiva, a Imitação

O processo mais usado pelo ser humano em sua própria aprendizagem é a IMITAÇÃO. Sujeito a um único tipo de ensino, a tendência será, no futuro, o professor agir exatamente como agiram com ele. Dificilmente conseguirá trabalhar diferentemente.

Ora, o ensino tradicional enfatiza a transmissão do saber construído e organizado pelo professor. As aulas são geralmente uma explanação sobre os conteúdos apresentados no livro-texto adotado. Ao aluno cabe decorar fórmulas e algoritmos e aplicá-los em exercícios padronizados. Provavelmente esse será o caminho seguido pelo professor, pois foi assim que ele aprendeu.

Isso pode ser ilustrado pela seguinte figura:

A CORRIDA DE REVEZAMENTO

Nos seus depoimentos, os professores:

a) declaram que lecionam da forma como aprenderam, sem criatividade.

> *"Quando lecionei, desenvolvi alguns conteúdos sem criatividade nenhuma, isto é, da forma que aprendi. Foi mais em nível dogmático, que em nível de entendimento."* (Depoimento 63)
>
> *"Leciono através de aulas expositivas. Este é o segundo ano em que leciono na 7ª série e o 1º na 8ª. Tenho a preocupação de me aprofundar mais no assunto."* (Depoimento 72)

b) reconhecem que nem todos os seus alunos aprendem com aula expositiva.

> *"Eu apresento a Geometria dando os conceitos e definições básicas, mostrando a situação no desenho e fazendo as demonstrações e os mais espertos conseguem até desenvolvê-las sozinhos."* (Depoimento 81)

c) o modelo transmissão-recepção é enfatizado na aula expositiva.

> *"Como o assunto vem no final dos livros didáticos, à medida que eu vou expondo os assuntos anteriores, tento mostrar ao aluno, sua aplicação na geometria."* (Depoimento 83)
>
> *"Desenvolvo o conteúdo de maneira tradicional, aplico a matéria no quadro e tento explicá-la da melhor maneira possível e procuro aplicar bastante exercícios para o aluno fazer."* (Depoimento 123)

1.3 Influência do algebrismo e da aritmética

É muito forte a idéia de que a Matemática se compõe apenas de cálculos aritméticos e de manipulação de símbolos algébricos. Tão forte que está se tornando quase um arquétipo na mente humana. Tão forte e arraigado que já domina o dia-a-dia da sala de aula, aceito pelos professores e aturado pelos alunos. Fora de sala de aula, a situação é idêntica: é como os pais encaram a Matemática, é como a querem para seus filhos. Por isso, quando algum professor procura romper com essas idéias, é praticamente proibido de fazê-lo pelos pais dos alunos.

Assim, não é de se estranhar que o uso de idéias geométricas possa trazer algumas dificuldades para os professores e seja um dos obstáculos ao resgate da Geometria.

Nos seus depoimentos, os professores:

a) mostram a falta de conhecimento da relação existente entre a Álgebra e a Geometria.

> *"Para trabalhar Geometria é necessário conhecimento de Álgebra, talvez seja por esse motivo que se inicia ensinando Álgebra e destinando menos tempo para Geometria."* (Depoimento 144)

b) enfatizam a importância do algebrismo.

> *"Sempre há um conceito errado de que trabalhar com Álgebra é suficiente para aprendermos Matemática. Acredito que os professores ainda pensam que, se o aluno sabe fazer contas mirabolantes, sabe Matemática, deixando morrerem os conceitos, a base que a Geometria pode proporcionar a seus alunos."* (Depoimento 8)

> *"Nosso sistema de ensino cobra de nossos alunos através de seleções, concursos e outros, o conhecimento algébrico, fazendo com que o ensino*

> *matemático dê ênfase aos cálculos algébricos."* (Depoimento 51)
>
> *O professor de Matemática está muito ligado à álgebra, acredita ser a Matemática puramente números."* (Depoimento 90)

c) acham mais fácil trabalhar com a Álgebra e a Aritmética do que com a Geometria.

> *"Na maioria das vezes, os professores preocupam-se em dar Álgebra e Aritmética, por acharem mais fácil de ensinar. A carga horária também é pequena para dar muito conteúdo. Seria conveniente que nas escolas existisse um professor para Matemática e outro específico para Geometria."* (Depoimento 80)
>
> *"Muitos são os professores que se sentem inseguros com o ensino da Geometria, principalmente nas 7ª e 8ª séries do 1º grau. Muitos professores estendem demasiadamente o estudo da Álgebra para não haver tempo de ensinar Geometria. Apesar de isto ser uma verdade, eu percebo, principalmente entre os professores mais novos, uma preocupação até em dividir as aulas do ano inteiro com Álgebra e Geometria para ter mais tempo para as duas. Já participei desta experiência e observei que os alunos ficam mais interessados e desenvolvem mais o raciocínio para a álgebra."* (Depoimento 81)
>
> *"Muitas vezes o professor não valoriza ou/e não domina o assunto e substitui este tempo com questões aritméticas."* (Depoimento 99)

d) a ojeriza pela Geometria é tão nítida que sugerem que se coloque um professor diferente para a Geometria. Alguns propõem separar as aulas de Geometria das aulas de Matemática (sic), como se Geometria não fosse Matemática.

"Seria conveniente que nas escolas existisse um professor para Matemática e outro específico para Geometria." (Depoimento 80)

"A Geometria devia, ao meu ver, ter seu estudo separado dos demais conteúdos e ter seu currículo reformulado devido a seu grau de importância dentro da Matemática." (Depoimento 70)

1.4 Livro Didático e Programas.

A falta de destaque dado à Geometria pelos livros didáticos e pelos programas de ensino reforça, e muito, no professor, as justificativas para o abandono da Geometria.

Nos seus depoimentos, os professores

a) confirmam e reconhecem que a Geometria é freqüentemente encontrada no final do livro didático:

"Geralmente o conteúdo de Geometria vem no final dos livros não dando a devida importância que o conteúdo merece." (Depoimento 101)

"Os livros didáticos incentivam o abandono do estudo da geometria quando a colocam no final do curso e, muitas vezes, por falta de 'tempo' a Geometria não é contemplada." (Depoimento 156)

b) levantam algumas conseqüências do fato de a Geometria vir no final do livro didático:

"Os próprios livros já vêm com os conteúdos geométricos nas últimas unidades e geralmente essas unidades sempre são dadas nos últimos bimestres, os mais curtos. Por esse motivo, a Geometria é sempre dada com muita pressa e nós, professores, acabamos por deixar muitas coisas importantes passar em

branco ou pulamos partes para economizar tempo. Acaba que a Geometria vira uma máquina de fórmulas e o próprio aluno não compreende nada." (Depoimento 162)

c) destacam algumas causas dessa situação.

"Talvez porque os professores também não saibam como abordar a Geometria, distribuindo-a, inserindo-a no conteúdo anual, uma vez que ela normalmente é abordada no final dos livros e às vezes, ou talvez, na maioria das vezes, nem seja mencionada com a desculpa de não ter dado tempo." (Depoimento 153)

"A Geometria é realmente muito importante, porém não adotamos um conteúdo básico dentro de um plano de curso, raramente conseguimos adequar a geometria a esse planejamento. Para os professores que lecionam com o auxílio de livro-texto, Geometria é abordada, geralmente, nos finais desses livros, o que é prejudicial à apresentação da matéria." (Depoimento 73)

d) tentam até algumas estratégias para minimizar o problema

"Alguns professores alegam que é porque o assunto de Geometria vem nos últimos capítulos do livro didático e aí não dá tempo de ensinar. No meu caso, estou trabalhando com uma turma de 6ª série. Como são seis aulas por semana, estou tentando conciliar o conteúdo de Geometria com os outros assuntos. Então eu acho que não existe motivo para deixar de ensinar a Geometria." (Depoimento 83)

1.5 Material Didático

Para muitos professores, o material didático é apenas um elemento motivador a ser usado em sala de aula e não um deflagrador de idéias matemáticas. Outros, inclusive, consideram que ver o material nas mãos do professor é suficiente para o aluno aprender. Estas idéias, aliás, são bastante difundidas entre os professores de Matemática (fatos que descobrimos através de relatos em encontros profissionais).

Nos seus depoimentos os professores:

a) enfatizam as observações e visualização de figuras

> *"Procuro trabalhar, inicialmente, com objetos concretos através da observação de suas características. Em seguida, procuro fazer com que meus alunos façam abstrações baseadas em suas observações. Dessa forma, espero que meus alunos, com a minha orientação, cheguem a conclusões próprias."* (Depoimento 97)

> *"Neste ano, estou lecionando em turmas de 2º ano e ainda não estamos estudando o conteúdo da Geometria, mas eu já tive a oportunidade de começar (um pouco) em turmas de 5ª séries, em 1998. Utilizava materiais do dia-a-dia para visualizar as figuras e através de dobraduras entre outros."* (Depoimento 117)

> *"Parto da prática, quando trabalho com a 5ª, 7ª ou 8ª. Visualizando o concreto, chega-se ao abstrato."* (Depoimento 115)

b) na sua maioria, pensam que material didático para ensinar Geometria se constitui só de sólidos.

> *"Só tive uma oportunidade de trabalhar Geometria espacial, quando procurei colocar os alunos em contato com sólidos geométricos, inclusive nas avaliações."* (Depoimento 90)

> *"Quando trabalho Geometria Espacial, utilizo material concreto (prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas). Para o estudo da área, essas figuras são planificadas, dando assim mais idéia de área lateral e área de base. Através do concreto, chegamos com*

mais facilidade à resolução de problemas." (Depoimento 80)

c) mostram uma tendência para reduzir os trabalhos de Geometria apenas a medições e a cálculos com fórmulas geométricas.

"Trabalho com cálculo de áreas de figuras planas e volume. Os alunos calculam áreas das carteiras, da borracha e até mesmo da sala, janelas, portas etc. Todo ano, promovemos uma 'semana da Matemática' quando a Escola nos permite transitar com os alunos no pátio para fazermos medições e cálculo das áreas das quadras, dos pátios etc..." (Depoimento 153)

1.6 Falta de Bibliografia

Geralmente o professor não dispõe de bibliografia adequada que o ajude a efetuar o seu trabalho na sala de aula ou porque não possui poder aquisitivo ou porque os livros não existem em língua portuguesa. Além disso, muitos não têm o hábito de ler ou de freqüentar bibliotecas. E muitas vezes não sabem como usar os recursos dos poucos livros que lhes chegam às mãos como, por exemplo, usar o índice remissivo de um livro.

Temos observado que muitos professores nos cursos de pós-graduação oferecem resistência à leitura.

Um colega, certa vez, ouviu a seguinte declaração de um desenhista:

"Nós, desenhistas de histórias em quadrinhos, somos obrigados a ler muito, para estarmos informados de vários assuntos sobre os quais não temos outros procedimentos de acesso. Lamentavelmente, no outro extremo, estão os professores que, segundo meu julgamento, são os profissionais que menos lêem; e, entre os professores, os de Matemática são os que lêem menos."

Relembraremos, aqui, aquilo que já foi abordado no Capítulo 7:

É interessante observar que

1. 39% desses professores não lembraram em quais livros de Geometria estudaram durante a graduação.
2. 2% afirmaram que não estudaram em nenhum livro.
3. 6% deles estudaram em apostilas sem autores.
4. 36% citaram ou nomes de autores ou títulos de livros.
5. Apenas 17% conseguiram indicar o nome do livro com o respectivo autor.

Nossas editoras publicam, e muito pouco, alguns livros denominados "*paradidáticos*", os quais nem todo professor conhece. Elas declaram interesse em publicar livros só para alunos.

1.7 Complexidade da Geometria

Ao procurar causas dos analfabetismos na Geometria, observamos que a complexidade daquilo que comumente se chama de Geometria é tão grande, e ela pode ser encarada de tantos pontos de vista, cada um com olhares tão diversificados, que é difícil para um ser humano conscientizar-se de todos eles. Na verdade, não se deveria falar de Geometria, mas de **GEOMETRIAS.**

Por exemplo, ela poderia ser encarada assim:

Geometria como Ciência do Espaço o que possibilita identificarmos, segundo o ponto de vista: Geometria Euclidiana, Afim, Projetiva, Descritiva, Geometria não-Euclidiana, Geometria Combinatória, etc.

A Geometria como método de representações visuais de conceitos e de processos: gráficos, grafos, diagramas, histogramas, etc.

A Geometria como teoria formal.

A Geometria como instrumento para aplicações: computação gráfica, processamento e manipulação de imagens, reconhecimento de padrões, robótica etc.

A Geometria encarada segundo suas abordagens: manipulativa, intuitiva, dedutiva, analítica, vetorial, matricial, complexa, finita, transformacional etc.

A complexidade é tal que, por exemplo:

- a Geometria, em sua abordagem de transformação, pode ser tratada sob dois aspectos segundo cuide preferencialmente das transformações ou privilegie os objetos envolvidos nas mesmas;
- a Geometria, em sua abordagem Euclidiana, pode ser encarada sob várias axiomáticas: de Euclides, de Pasch, de Hilbert, de Veblen, de Peano etc.

Não se poderia deixar de fora o aspecto tecnológico. Na Geometria, há uma longa tradição no uso de instrumentos para construções geométricas. Muitos problemas desafiadores surgiram então: construção de um polígono de 17 lados, quadratura do círculo, trissecção de ângulo, duplicação do cubo etc.

Não é de espantar, portanto, que os computadores entrem nesse jogo. Hoje não mais se faz desenho técnico a mão com instrumentos de desenho. Em vez disso, usam-se *softwares*, *plotters* etc. A partir daí, foi possível chegar-se à construção de realidades virtuais (construção imaginária de paisagens, de seres imaginários etc.) ou de figuras maravilhosas (fractais).

E que dizer dos *softwares* planejados especialmente para fins didáticos? Podem simular as construções com régua e compasso tradicionais, ou as transformações usuais. Lamentavelmente, nem assim a Geometria foi resgatada pela escola.

A partir dessas perspectivas, deverão surgir muitos estudos que procurarão levar o computador a influir na educação da Geometria ou na própria Geometria.

Organizando as causas dos analfabetismos na Geometria

Até aqui, analisamos vários fatos que descobrimos nos depoimentos dos professores e que caracterizam seu analfabetismo geométrico.

Eles podem ser colocados num esquema como se segue.

Ciclo vicioso	**Complexidade da Geometria**	**Falta de Bibliografia**

Influência do algebrismo e da aritmética	**Livro didático e programas**	**Material didático**	**Aula Expositiva, a Imitação**

Em seguida, surge, naturalmente, a questão: há soluções para o problema do resgate do ensino da Geometria?

2 SOLUÇÕES

Apresentado o lado caótico da problemática do ensino da Geometria, é quase inevitável a questão: "que caminhos seriam plausíveis para resgatar o ensino da Geometria?"

Tal resgate somente se tornará possível se os dois aspectos educacionais seguintes forem atendidos:

a) a existência de propostas de ensino;
b) o surgimento de uma liderança.

2.1 A existência de propostas é essencial

Se observarmos na história o desenvolvimento de temas matemáticos, constataremos que eles seguem – **sempre** – uma seqüência: eles crescem e se desenvolvem através de dois níveis – de idéias e de linguagem –

com uma tendência de chegarem a um nível de expansão, quase sempre iniciado pelo subnível de algoritmo.

Quanto ao nível de idéias na Geometria, ele foi bem explorado no Capítulo 1, que trata das manifestações geométricas, portanto, é desnecessário retomá-lo aqui.

É muito fácil imaginar que a falta de novas idéias, para um tema matemático, trará como resultado o seu estancamento. O que, talvez, poucos tenham percebido é que a falta de uma linguagem adequada para um tema pode trazer problemas para o seu desenvolvimento. Basta relembrar a história de Oresmo tratada no Capítulo 4.

Além disso, a adoção de certo tipo de linguagem pode encaminhar o conteúdo para uma direção, enquanto a adoção de outra linguagem pode encaminhá-lo para direção diferente. Assim, a Geometria sujeita às linguagens lógicas se desenvolve no sentido axiomático (euclidiano ou não), enquanto aquela que adota a linguagem das transformações segue outro caminho, na verdade, dois caminhos, como já vimos.

É bom relembrar, aqui, que o conteúdo matemático pode se apresentar através de várias linguagens.

A importância da linguagem se acresce pelo fato de que uma boa notação possibilita, às vezes, o aparecimento de *algoritmos*. Ora, a criação de algoritmos tem um valor inestimável na Matemática. Muitas vezes, eles se convertem em procedimentos tão práticos que tornam os cálculos e os raciocínios estereotipados de modo que podem ser aplicados quase que mecanicamente.

Esses dois aspectos – idéias e linguagens – correspondem, respectivamente, ao vislumbre de padrões e à sua apresentação.

Com o passar do tempo, chega-se à **SISTEMATIZAÇÃO**. Na Geometria, ela ocorreu historicamente, quando substituiu o empirismo egípcio e babilônico pela sistematização grega.

A sistematização acontece quando a mente humana está de posse de muitos dados empíricos e não mais aceita que basta ver para crer.

Isto foi belamente expresso por BICUDO (1998: 118)

> *"Disso resultou não bastar mais ver para crer; para crer era preciso provar. O mudo sensível era mutável e ilusório. Havia mister de aprender o estável por trás da mudança, a unidade que se escondia na multiplicidade, o eterno no perecível. Substituir o olho do ver, órgão dos sentidos, pelo olho do compreender, órgão do entendimento, a razão."*

Mas há uma nova etapa: a **FLEXIBILIZAÇÃO.** Nela, surge um mundo de atividades e de aplicações para esse conhecimento sistematizado.

Os árabes, tidos apenas como meros repetidores, foram, na verdade, geniais, pois podem ser considerados os criadores da etapa seguinte: a **VERSATILIDADE.** Nessa, os conhecimentos matemáticos são vistos dentro de novas perspectivas e com novos olhares. A eles devemos muito, pois foram os primeiros a fazerem esse rebuliço nas Matemáticas.

Como já escrevemos no Capítulo 3 e, aqui, repetimos em honra aos árabes tão injustamente denegridos:

> *"os sucessores de al-Kwarizmi empreenderam progressivamente a aplicação da Aritmética à Álgebra, da Álgebra à Aritmética, de cada uma destas à Trigonometria, da Álgebra à teoria euclidiana dos números, da Álgebra à Geometria, da Geometria à Álgebra. Tais aplicações conduziram à criação de novas disciplinas, ou, pelo menos, de novos capítulos da ciência matemática."*

Assim pensando, esquematizamos essa trajetória do desenvolvimento das Matemática como segue:

<table>
<tr><th colspan="6">ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DAS MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><th>NÍVEL DE IDÉIAS</th><th>NÍVEL DE LINGUAGENS</th><th colspan="4">NÍVEL DE EXPANSÃO</th></tr>
<tr><td>VISLUMBRE</td><td>APRESENTAÇÃO</td><td rowspan="2">ALGORITMAÇÃO</td><td rowspan="2">SISTEMATIZAÇÃO</td><td rowspan="2">FLEXIBILIDADE</td><td rowspan="2">VERSATILIDADE</td></tr>
<tr><td colspan="2">MATEMATIZAÇÃO</td></tr>
</table>

No aprendizado da Geometria, essas etapas devem ser obedecidas. Se não for possível levar o aluno ao máximo de conhecimento geométrico, pelo menos as duas etapas iniciais não podem ser deixadas de lado.

Todo o fracasso do ensino das Matemáticas se reduz à não obediência ao seu caminho natural de desenvolvimento.

De fato, as Matemáticas são ensinadas a partir de algoritmos e não a partir de vislumbres de padrões (a serem realizados pelos alunos, corretamente conduzidos pelo professor). E as Geometrias, como já vimos, foram ensinadas a partir da sistematização e não a partir de vislumbres.

Por tudo isso, afirmamos que o resgate começará quando houver uma proposta dentro dessas condições e que seja aceita por um número suficiente de profissionais. Evidentemente, uma tal proposta deverá fazer o aluno percorrer um caminho equivalente ao caminho natural de desenvolvimento da Matemática. Além disso, ela deveria oferecer ao aluno vários olhares (em períodos diferentes) para cada assunto marcante.

Para exemplificar o que queremos dizer, suponhamos dois assuntos geométricos: polígonos e áreas. Hoje, sugeriríamos um desenvolvimento através do Ensino Fundamental (de 1ª à 8ª séries) e Médio (de 1ª à 3ª séries) assim:

aprendizado de áreas das figuras	tangram ➔ transformações (de figuras) ➔ varreduras ➔vetores ➔

aprendizado de polígonos	posicionamentos corporais ➔ montagens (canudinhos de jornais, palitos, canudinhos etc.) ➔ tangram ➔ desenho geométrico ➔ transformações (de figuras) ➔ vetores ➔

Em cada passo do desenvolvimento, não esqueceríamos o vislumbre, a linguagem etc.

Pode ser que amanhã tenhamos outra visão e outros argumentos. O importante é ter em mente que, atualmente, poucos professores seriam capazes de seguir qualquer caminho sugerido, uma vez que a maioria se encontra mergulhada no analfabetismo.

Seja qual for a proposta de se acabar com o analfabetismo considerado, para prosseguir em frente e resgatar a Geometria, não se pode cometer nela a falha gritante das ações burocráticas:

Acredita-se, em geral, que todas as pessoas aprendam de um modo único e que esse modo é igual para todos. O burocrata crê ser possível fazer alguém aprender algo através de leis, decretos, processos, metodologias ou programas.

2.2 A existência de lideranças é importante

Um dos aspectos mais importantes a se considerar na tentativa de resgate da Geometria no Ensino Fundamental e Médio, é a necessidade de lideranças que assumam a direção de um movimento de resgate da Geometria.

Essa liderança teria que:

- Ter um domínio amplo do conteúdo da Geometria, pois, no atual quadro de *analfabetismo*, só líderes *alfabetizados* teriam a chance de resgatá-la.

- Implantar, em todo o país, num caráter emergencial, esse trabalho de alfabetização geométrica para que os professores fossem envolvidos por ele.

- Influir nos IES para que assumam o papel de fundamental importância que é a construção de uma cultura geométrica na formação dos seus alunos, futuros professores.

- Colocar no mercado editorial livros e materiais didáticos que agucem a curiosidade e a possibilidade do professor de fazer experiências geométricas.

- Promover encontros, seminários, congressos com temas específicos de *alfabetização* em Geometria.

- Implementar novas tecnologias.

Acreditamos que os IES não podem cometer, na recuperação dos professores, o erro que as Universidades vêm passando de geração a geração:

1º) desconectar conteúdo e metodologia pelo uso de professores diferentes para cada ação;

2º) acreditar que metodologia só pode ser apresentada após o conteúdo;

3º) deixar para os licenciandos, futuros professores, a tarefa de fazer aquilo que seus professores (mestres ou doutores) não fizeram: *"encontrar um ponto optimum que equilibre conteúdo e sua apresentação"*.

Todas as dificuldades apresentadas aqui são ocasionadas pelo analfabetismo em Geometria. Enquanto esse não for anulado, as dificuldades continuarão.

Ao analisar os vários depoimentos, ocorreu-nos uma observação que julgamos oportuna: nenhum professor fez considerações sobre as novas tecnologias.

O pouco que manifestaram nesse campo foi declarar usos esporádicos de vídeos, slides e retroprojetores.

Mas as soluções podem vir através de algo que até agora não foi considerado: as inovações tecnológicas.

A nós, ocorre o seguinte. Há uma promessa de, em futuro próximo, acontecer o surgimento de televisão de alta resolução à qual os sonhadores debitam a esperança de se tornar interativa.

Podemos, então, imaginar a seguinte fantasia. Programas de Geometria seriam criados para serem apresentados por artistas famosos. Com a possibilidade de interação, os alunos poderão apresentar questões específicas. Como questões seriam levantadas com antecedência, os programas gravados trariam as respostas às perguntas possíveis.

Com tais gravações, a escola transformaria os professores em monitores que cuidariam da disciplina e da complementação das aulas: leituras, resolução de exercícios etc.

Será bom? Será ruim?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *"O futuro só vem se a gente o fizer. Se a gente o fizer transformando o presente. O futuro não está ali na esquina às escondidas, esperando pela nossa chegada, para nos surpreender e para nos fazer dizer: 'Olha o fato aqui! Estava se escondendo de mim'. O futuro só vem se a gente construir. Se a gente transformar o presente com vistas ao perfil, ao sonho ou à utopia."* (FREIRE, 1998: 45)

O estudo que acabamos de fazer tenta contribuir para o resgate do ensino de Geometria nas nossas escolas de Ensino Fundamental e Médio.

Estabelecendo como base:

- O estudo da evolução histórica da Geometria.
- O estudo da história de seu ensino.
- A análise da pesquisa realizada com professores e alunos do curso de pós-graduação em Educação Matemática (*lato sensu*),

pudemos chegar a três constatações que julgamos importantes.

1. Do estudo histórico da Geometria, emergem compreensões surpreendentes:
   a) O reconhecimento de que existem vários olhares possíveis para a Geometria (o do indígena, do africano, do egípcio, do árabe, do grego, do homem moderno etc.), bem como várias perspectivas sob as quais pode ser analisada ou estudada;
   b) A vastidão de seu alcance e a profundidade de sua atuação. Esses vários olhares, o seu alcance e a sua profundidade são tais que fica claro o quanto a Geometria é complexa. Essa complexidade é de tal porte que possivelmente se deveria dizer *Geometrias* em lugar de *Geometria*. Tudo isso mostra que é quase impossível para um ser humano se conscientizar de tantos aspectos.
   c) A descoberta de que os vários conteúdos da Matemática (logo, da Geometria) foram desenvolvidos sempre dentro de um esquema.

Partindo da observação de que todo aprendizado humano segue seu caminho natural (natação, andar de bicicleta, direção de automóveis etc.), permitimo-nos concluir que o mesmo deveria acontecer na Geometria.

2. Do estudo histórico do seu ensino, observamos que a apresentação de uma Geometria sistematizada não conseguiu influir para que ela permanecesse nos currículos escolares.

3. Da pesquisa, concluímos que o professor não resgata a Geometria porque:
   a) ... é vítima de um ciclo vicioso:

      não aprendeu Geometria → não ensina Geometria

   b) ... tem dificuldades de romper com os procedimentos tradicionais da aula expositiva.
   c) ... de um modo geral, só enxerga Geometria em assuntos que possibilitam algebrismos e cálculos (provavelmente por tê-la aprendido assim).
   d) ... como existem várias perspectivas para cada conteúdo das Geometrias, e o professor não possui informações sobre elas (só enxerga Geometria para algebrismos e cálculos), faltam-lhe alternativas para mudanças.
   e) ... tem uma opinião sobre Geometria, baseada em frases que ouve dizer sobre os seus benefícios, mas nunca os experimentou nem pessoalmente, nem em seus alunos. Essas opiniões formam um discurso vazio.
   f) ... segue textos didáticos não adequados que colocam a Geometria no fim, o que fará coincidir a apresentação dela com o período menor de aulas e contribuirá para a sua não apresentação.
   g) ... não tem ao seu alcance uma bibliografia adequada que o coloque em contacto com o conhecimento geométrico. Além disso, essa falta de bibliografia faz com que ele não saiba utilizar livros diferentes dos didáticos.

h) ... usa inadequadamente o material concreto, pois apenas o mostra aos alunos (para entusiasmá-los ou para descrever suas propriedades através de explanação).

i) ... sabe que qualquer mudança que fizer para ensinar mais Geometria poderá até ser reprimida pelos pais que não aprenderam Geometria e crêem que Matemática é número e, além disso, sempre pressionam por causa de concursos e vestibulares.

j) ... não encontra lideranças ou autoridades de peso – IES ou Educadores altamente influentes – que desbravem caminhos para ele e consigam encorajá-los a trilhar esses caminhos.

Tais motivos caracterizam e identificam, no professor, um analfabetismo em Geometria e evidenciam que esse analfabetismo sempre impossibilitará a ele o resgate dela.

Mas, principalmente, caracterizam e identificam que o professor de Matemática se encontra completamente desamparado em suas tarefas: pelos cursos que freqüenta nas Universidades, pela classe editorial, pelos programas estaduais ou municipais (sempre desacompanhados de preparação e orientação adequadas e necessárias).

BIBLIOGRAFIA

ARTIN, E. Puntos de vista extremados sobre la enseñanza de la Geometria. In: PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. et al. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Universidad, 1980. Cap. 16. p. 260-263.

BARBOSA, J.L.M. Geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro; Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

BECKMANN, Peter. A history of PI. New York: Academic Press, 1964.

BIRKHOFF, G.D. A set postulares for plane Geometry, based on scale and protractor. Annals of Mathematics, v. 33, p. 239-345, 1932.

BIRKHOFF, G.D., BEATLEY, R. A new approach to elementary Geometry. Fifth Year Book of the National Council of Teachers of Mathematics, 1930. (Reproduzido em: George David Birkhoff, Collected Mathematical Papers, v. III, American Mathematical Society, 1950)

BIRKHOFF, G.D., BEATLEY, R. Basic Geometry. [s.l.]: Scott Foresman, 1940. (2.ed. 1941; 3.ed. 1959)

BIRKHOFF. G.D. The origin, nature and influence of relativity. [s.l.]: MacMillan, 1925.

BLUMENTHAL, Leonard M. A modern view of Geometry. San Francisco: W.M. Freeman and Company, 1961.

BOLD, Benjamin. Famous problems of geometry and how to solve them. New York: Daver Publications, Inc., 1969.

BOURBAKI, N. Élements d'histoire des Mathematics. Paris: Herman, 1969.

BOYARD, Aluízio P. A reforma do ensino. Brasília: Lisa, 1975.

BOYER, C.B. História da Matemática. São Paulo: Ed. Edgard Blucher Ltda., 1974.

BRASIL. Lei Geral de 15 de outubro de 1927. Estabelece as diretrizes e bases que devem nortear a criação de escolas elementares no País.

BRASIL. Decreto-Lei nº 8530, de 2 de janeiro de 1946. Estabelece dirterizes gerais da organização dos Cursos Normais.

BRASIL. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Estabelece as diretrizes e bases para o ensino primário e secundário.

BRASIL. Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa as diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus.

BRASIL. Parecer nº 349, de 6 de abril de 1972. Fixa as diretrizes e bases para a Habilitação Específica de 2º grau, para o exercício do Magistério em 1º grau.

BRASIL. Parecer nº 45/72, do Conselho Federal de Educação. Determina o currículo mínimo para o ensino de 1º e 2º graus.

BRASIL. Parecer nº 853/71. Fixa o núcleo comum para os currículos do ensino de 1º e 2º graus, definindo-lhes os objetivos e a amplitude.

BREJON, Moisés. Estrutura e funcionamento do ensino de 1º e 2º graus – Leituras. 3.ed. São Paulo: Pioneira, 1973.

BUNT, Lucas N.H., JONES, Phillips, BEDIENT, Jack D. The historical roots of elementary Mathematics. New York: Dover Publications, Inc., 1988.

CARMO, Manfredo P. Considerações sobre o ensino da matemática. Palestra proferida no IMPS, p. 3. (Mimeo.)

CASTELNUOVO, E. Geometría intuitiva. Trad. Rafael Romero Mercadal. Barcelona: Editorial Labor, 1966.

CASTELNUOVO, E. La matematica: la geometria. Itália: La Nuova Italia Editrice, 1979.

CHABERT, J. La prehistoire des geometries non euclidiennes; ou l'histoire du Cinquième Postulat. [s.l.]: Université de Picardie, 1987.

CHAGAS, Valnir. O ensino de 1º e 2º graus. Antes, agora, depois. 4.ed. São Paulo: Saraiva, 1984.

CHASLES, M. Aperçu historique des méthodes en Géometrie. Paris: Gauthier-Villars et fils, imprimeurs libraries, 1889.

CHOQUET, G. Lénseigment de la Géometrie. [s.l.]: Hermann, 1964.

CHOQUET, Gustave. Introduction al libro La enseñanza de la Geometria. In: PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. et al. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Universidad, 1980. Cap. 17. p. 264-269.

CLAIRAUT, Alexis Claude. Elementos de Geometria. São Paulo: Empresa Bibliópola-Editora, 1892. p. IX.

COOLIDGE, J.L. A history of geometrical methods. Oxford: Clarendon Press, 1940.

COSTA, Amoroso M. As idéias fundamentais da Matemática e outros ensaios. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1971.

COUTINHO, Lázaro. Convite às geometrias não euclidianas. Rio de Janeiro: [s.ed.], 1989.

COXETER, H.S.M. Introduction to Geometry. New York: John Viley, 1961.

D'AMBRÓSIO, U. Tempo da escola e tempo da sociedade. In: SERBINO Raquel Volpato, RIBEIRO, Ricardo, BARBOSA, Raquel Lazzari Leite, GEBRAN, Raimunda Abou (org.). Formação de professores. São Paulo: Ed. UNESP, 1998. p. 239-250.

DAVIS, P.S., HERSH, R. A experiência matemática. 4.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DIEUDONNÉ, J. Linear Algebra and Geometry. [s.l.]: Heman, 1969.

DIEUDONNÉ, J. Prólogo del libro Álgebra Lineal y Geometria elemental. In: PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. et al. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Universidad, 1980. Cap. 18. p. 270-284.

ENCYCLOPAEDIA of Mathematics – An updated and annotated translation of Soviet Mathematical Encyclopedia Kluwer Academic Publishers Coproduct Housdor Young Inequalities, 1995. p. 829.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

EVES, Howard. Tópicos de história da Matemática. Geometria. São Paulo: Atual Editora, 1994.

EZPELETA, J., ROCKWELL, E. Pesquisa participante. São Paulo: Cortez Ed., 1989.

FEHR, H.F., CAMP, J., KELLOGG, H. The revolution in School Mathematics, Phase II. OEA: [s.ed.], 1971.

FIORENTINI. Daria; MIORIM, M. Ângela, MIGUEL, Antônio. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. Pró-Posições, v. 4, n. 1 (10), mar. 1993.

FREIRE, P. Novos tempos, velhos problemas. In: SERBINO Raquel Volpato, RIBEIRO, Ricardo, BARBOSA, Raquel Lazzari Leite, GEBRAN, Raimunda Abou (org.). Formação de professores. São Paulo: Ed. UNESP, 1998. p. 41-47.

FREITAG, Bárbara. Escola, estado e sociedade. São Paulo: Moraes, 1984.

FREUDENTHAL, Hans. Recension de Álgebra Lineal y Geometria elemental de Jean Dieudonné. In: PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. et al. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Universidad, 1980. Cap. 19. p. 285-290.

FREUDENTHAL, Hans. Majors problems of Mathematics education. Education Studies in Mathematics, v. 12, n. 2, p. 133-150, maio 1981.

FREUDENTHAL, Hans. Perspectivas da Matemática. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

FREUDENTHAL, Hans. The role of geometrical intuition in modern Mathematics. ICSU, Review of World Science, n. 6, 1964.

GERDES, P. Sobre o despertar do pensamento geométrico. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1992.

GERDES, Paulus. Etnomatemática. Cultura, matemática, educação. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GLAESER, Georges. A propos de la pedagogie de Clairaut. Vers une Nouvelle Orientation dans l'Histoire de l'Education. Recherches en Didactique des Mathématiques.[s.l.]: [s.ed.], 1985. p. 332-344.

GRATAN, GUINNES (eds.). Companion encyclopaedia of the history of Philosophy of the Mathematical Sciences. London: Routledge. 1994.

HEAT, Sit Th. A history of great mathematic. Oxford: [s.ed.], 1921.

HILBERT, D., COHN-VOSSEN, S. Geometry and the imagination. New York: Chelsea Publishing Company, 1952.

ITARD, Jean. Essais h'histoire des Mathematiques. Paris: Librairie A. Blanchard, 1984.

JOSEPH, George G. The crest of peacock. Non-European roots of Mathematics. New York: I.B. Tauris & Co., Ltd., 1991.

KELLY, P., MATTHEWS, G. The non-Euclidean, hyperbolic plane. [s.l.]: [s.ed.], 1981.

KLEIN, Felix. Le programme d'Erlangen. Paris: Gauthier-Villars, 1974.

KRYGOWSKA, A.Z. El processo de matematización en la enseñanza. In: PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. et al. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Universidad, 1980. Cap. 10. p. 187-195.

LAISANT, C.A. Une exhumation géometrique. In: L'Enseignement Mathématique. [s.l.]: [s.ed.], 1901. p. 98-105.

LORENZATO, S. Os "por quês" matemáticos dos alunos e as respostas dos professores. Pró-Posições, v. 4, n. 1 (10), mar. 1993.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria. A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 4, 1995.

MACLANE, S. Metric postulates for plane Geometry. The American Mathematical Monthly, v. 66, p. 543-555, 1959.

MARTIN, G.E. The foundations of Geometry and the non-Euclidean plane. [s.l.]: Intext, 1975. (2.ed. Springer, 1982)

MELLO, Guiomar Namo. Magistério de 1º grau. Da competência técnica ao compromisso político. 4.ed. São Paulo: Cortez, 1984.

MELLO, Guiomar N., MAIA, Eny M., BRITTO, Vera N.V. As atuais condições de formação do professor de 1º grau: algumas reflexões e hipóteses de investigação. Cadernos de Pesquisa, São Paulo: Fundação Carlos Chagas, p. 71-78, maio 1973.

MESCHKOWSKI, Herbert. Noneuclidean Geometry. New York: Academic Press, 1964.

MIGUEL, A. Três estudos sobre história e educação matemática. Campinas: [s.ed.], 1993. (Tese, Doutorado)

MIGUEL, A., FIORENTINI, D., MIORIM, M.A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? Pró-Posições, São Paulo: Cortez. v. 3, n. 1 (7), p. 39-54, 1992.

MILLMANN, R.S., PARKER, G.D. Geometry – A metric approach with models. [s.l.]: [s.ed.], 1981.

MIORIM, M.A. O ensino de Matemática: evolução e modernização. Campinas: [s.ed.], 1995. (Tese, Doutorado)

MIORIM, Maria Ângela, MIGUEL, Antônio, FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. Revista Zetetiké, ano I, n. 1, p. 19-39, 1993.

MOISE, E.E. Elementary geometry from an advanced standpoint. [s.l.]:Addison Wesley, 1963.

MOISE, E.E., DOWNS JR., F.L. Geometria moderna. [s.l.]: Edgar Blücher,1971.

NELSON, D., JOSEPH, G., WILLIAM, J. Multicultural Mathematics. Teaching Mathematics from a global perspective. Oxford, New York: Oxford University Press, 1993.

NISKIER, Arnaldo. A nova escola. 7.ed. Rio de Janeio: Bloch Educação, 1974.

NOT, Louis. O estudo dos seres geométricos. In: ----. As pedagogias do conhecimento. São Paulo: Difel, 1979. p. 304-317.

NOVAES, Eliana M. Professora primária: mestra ou tia. São Paulo: Cortez, 1984.

OLIVEIRA, Maria Rito Neto Sales. O conteúdo da didática: um discurso da neutralidade científica. Belo Horizonte: UFMG, 1988.

OLIVEIRA, Mário. A evolução do pensamento matemático na Grécia. Belo Horizonte: Ed. Gráfica da Fundação Cultural de Belo Horizonte, 1985.

OS PRÉ-SOCRÁTICOS – fragmentos, doxografia e comentários. São Paulo: Abril Cultural, 1978. p. XXI. (Coleção Os Pensadores)

PAVANELLO, R.M. O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. Campinas: Unicamp, 1989. (Dissertação, Mestrado)

PAVANELLO, R.M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. Revista Zetetiké, Campinas, n. 1, 1993.

PEREZ, Geraldo. Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de Geometria para as camadas populares. Campina: Unicamp, 1991. (Tese, Doutorado)

PEREZ, G. A realidade do ensino de Geometria no 1º e 2º graus no Estado de São Paulo. A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 4, 1995.

PERRIN, E. La methode de M. Meray: pour l'enseignement de la Géometrie. In: L'Enseignement Mathématique. [s.l.]: [s.ed.], 1903. p. 441-446.

PIAGET, J., GARCIA, R. Psicogênese e história das ciências. [s.l.]: Publicações Dom Quixote, [s.d.]. p. 91.

PIMENTEL, Maria Auxiliadora M. O modelo construtivista e o ensino-aprendizagem da leitura e escrita – questões conceituais. Caderno AMAE, Belo Horizonte, p. 19-31, 1991.

PINTO, Myrthes da F. Um aspecto da qualificação do pessoal docente primário. Presidente Prudente (SP): Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Presidente Prudente, 1968. (Dissertação, Mestrado)

PITOMBEIRA, J.B. Os elementos de Euclides. Caderno da RPM, Sociedade Brasileira de Matemática, v. 5, n. 1, 1994.

POPPER, Karl R. Conjecturas e refutações. 4.ed. Brasília: Editora Universitária de Brasília, 1972.

REIS FILHO, C. dos. A educação e a ilusão liberal. São Paulo: Cortez. 1981.

REVUZ, André. El lugar de la Geometria en la Educación Matemática. In: PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. et al. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Universidad, 1980. Cap. 20. p. 291-297.

ROMANELLI, Otaíza D. História da educação no Brasil. 3.ed. Petrópolis: Vozes, 1982.

SADER, Benno. Educação brasileira: valores formais e valores reais. São Paulo: Pioneira, 1977.

SALGADO, Maria Umbelina. O papel da Didática na formação do professor. Revista ANDE, São Paulo, ano I, n. 4, 1982.

SCHOOL Mathematics Study Group. Geometry. [s.l.]: Yale University Press, 1960. (2.ed. 1961)

SERBINO Raquel Volpato, RIBEIRO, Ricardo, BARBOSA, Raquel Lazzari Leite, GEBRAN, Raimunda Abou (org.). Formação de professores. São Paulo: Ed. UNESP, 1998.

SOARES, Magda. Metamemóia – Memórias. Travessia de uma educadora. São Paulo: Cortez Editora, 1990.

STACKEL, Paul, ENGEL, Friedrich. Gauss, les deux Bolyai et la Géometrie non Euclidiene. Paris: Gauthier-Vollars et Fils, 1897.

STRUIK, Dirk J. História concisa das matemáticas. Lisboa: Ciência Aberta, Gradiva, 1992.

SWETZ, Frank J. Kao. II. Was Pitthagoras chinese? National Council of Teacher of Mathematics. Pennsylvania: The Pennsylvania State University Press, [s.d.]. p. 67.

TAHAN, M. A lógica na matemática. São Paulo: Edição Saraiva, 1966.

TAHAN, M. O problema das definições em Matemática: erros, dúvidas e curiosidades. São Paulo: Edição Saraiva, 1965.

VERA, Francisco. Breve história de la geometria. Buenos Aires: Editorial Losada S.A., 1948.

VERA, Francisco. Breve história de la Geometría. Buenos Aires: Editorial Losada, 1948.

WARDEN, B.L. Van der Waerden. Science awakening. Holanda: P. Noorclhoff Ltd., 1954.

WEREBE, Maria José Garcia. 30 anos depois. Grandezas e misérias do ensino no Brasil. São Paulo: Ática, 1994.

ANEXO

UNI-BH – CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BELO HORIZONTE

CURSO: PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISCIPLINA: FUNDAMENTOS MODERNOS DE GEOMETRIA

PROFESSORA: ELIANE SCHEID GAZIRE

PESQUISA

(Questionários 1, 2 e 3)

NOME: ____

DATA: ___/___/___

UNI-BH – CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BELO HORIZONTE

CURSO: PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISCIPLINA: FUNDAMENTOS MODERNOS DE GEOMETRIA

PROFESSORA: ELIANE SCHEID GAZIRE

Questionário 1

Por obséquio, responda as seguintes questões:

1. Em que escola se graduou?

2. Em que curso?

3. Quando?

4. Em que Estado?

5. Onde leciona?

6. Quais conteúdos leciona?

UNI-BH – CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BELO HORIZONTE

CURSO: PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISCIPLINA: FUNDAMENTOS MODERNOS DE GEOMETRIA

PROFESSORA: ELIANE SCHEID GAZIRE

Questionário 2

1. Que Geometria você estudou no curso de graduação?

2. Em quais livros de Geometria você estudou?

3. Você já fez outros cursos de Geometria? Quais? Quando?

UNI-BH – CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BELO HORIZONTE

CURSO: PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISCIPLINA: FUNDAMENTOS MODERNOS DE GEOMETRIA

PROFESSORA: ELIANE SCHEID GAZIRE

Questionário 3

Questão 1

Qual a importância do ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio?

Questão 2

"A Geometria é um tema apresentado por currículos de Matemática do mundo inteiro. Isso porque ela é, reconhecidamente, um assunto importante para a formação matemática dos indivíduos. Mas apesar disso, cada vez mais os professores deixam de abordar esse importante conteúdo em suas classes."

Questão 3

Como você desenvolve os conteúdos de Geometria nas turmas que você leciona?