UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

# REPRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE DIVISÃO: UM ESTUDO DOS PROCEDIMENTOS EMPREGADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Autora: Adriana Maria Corder Molinari
Orientador: Profa. Dra. Orly Zucatto Mantovani de Assis

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Adriana Maria Corder Molinari e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 26/02/2010

Assinatura: ......................................

Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

2010

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca**
**da Faculdade de Educação/UNICAMP**
Bibliotecária: Rosemary Passos – CRB-8ª/5751

Molinari, Adriana Maria Corder.
M733r Representação e solução de problemas aritméticos de divisão: um estudo dos procedimentos empregados por alunos do Ensino Fundamental I / Adriana Maria Corder Molinari. – Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador : Orly Zucatto Mantovani de Assis.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Representações. 2. Representação gráfica. 3. Solução de problemas. 4. Divisão. I. Assis, Orly Zucatto Mantovani de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

10-036/BFE

**Título em inglês :** Arithmetic division problem-solving and representation: a study of procedures used by students in elementary school
**Keywords :** Representations; Graphic representation; Problem solving; Division
**Área de concentração :** Psicologia, Desenvolvimento Humano e Educação
**Titulação :** Doutora em Educação
**Banca examinadora :** Profª. Drª. Orly Zucatto Mantovani de Assis (Orientadora)
Profª. Drª. Lia Leme Zaia
Prof. Dr. Ricardo Leite Camargo
Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli
Profª. Drª. Luciene Regina Paulino Tognetta
**Data da defesa:** 26/02/2010
**Programa de Pós-Graduação :** Educação
**e-mail :** dri.molinari@uol.com.br

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, tenho que agradecer a **Deus,** por ter-me iluminado e me concedido serenidade para atravessar o percurso do doutorado;

O agradecimento mais profundo vai para a minha **querida orientadora**, **Profª. Drª. Orly Zucatto Mantovani de Assis**, pelo carinho com que me acolheu em um momento muito difícil deste percurso, pela paciência e pela dedicação com que me orientou; sempre pronta para esclarecer dúvidas e auxiliar nas reflexões. Obrigada pela confiança em mim depositada;

Ao meu marido **Carlos** e a meus filhos **Leonardo, Pedro** e **Isadora,** por terem convivido com momentos de aflições, tensões e distanciamento, que se fizeram necessários, principalmente nos últimos dias de preparo desta tese, quando não pude estar por inteiro com vocês;

À minha irmã **Solange**, cuja amizade e afeto se intensificam a cada dia, pela colaboração e atenção de sempre, ajudando-me na análise e na organização das ideias;

Aos professores **Drª. Rosely Palermo Brenelli** e **Dr. Ricardo Leite Camargo**, pelas valiosas reflexões e sugestões na ocasião do Exame de Qualificação;

À equipe da **Escola Cooperativa de Piracicaba**, especialmente à Claudia, à Inês, à Claudinha, à Ciça e à Mariane, que sempre me receberam com a mais pura afetividade;

Às **crianças** que participaram do estudo e aos seus pais, pelo consentimento à realização desta pesquisa;

À minha mãezinha **Ondina** que, mesmo em seu mundo particular, não pôde contar com minha presença em vários momentos;

Ao meu pai **José** que, se estivesse entre nós, com certeza estaria muito orgulhoso.

# RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi verificar como as crianças de 4º e 5º anos representam graficamente procedimentos de solução de problemas aritméticos de divisão por quotas. Fundamentado na teoria de Jean Piaget, este estudo descreve o processo de construção da operação aritmética de divisão e foi realizado com vinte alunos matriculados no Ensino Fundamental I de uma escola privada, localizada no interior do estado de São Paulo. Participaram dez alunos do 4º ano e dez do 5º, com idade entre 9 e 11 anos. Para verificar as representações dos estudantes, aplicaram-se provas aritméticas de divisão, compostas de seis problemas de divisão por quotas no total, distribuídos em duas sessões: a Prova de Multiplicação e Divisão Aritmética, cuja meta foi avaliar o nível da psicogênese da noção de multiplicação e de divisão dos estudantes, e a Entrevista, cuja meta foi verificar a explicação dos educandos aos procedimentos de solução empregados, bem como a noção de divisão construída. Do ponto de vista da psicogênese da noção do operador multiplicativo, os estudantes incluíram-se nas condutas III, IV, ou em transição entre as condutas III e IV, revelando estarem bem desenvolvidos nessa noção; porém verificou-se que somente 4 dos 20 estudantes, em ambos os anos de escolaridade, estavam de posse do operador multiplicativo; por outro lado, apesar de não apresentarem tal noção construída, a maioria deles demonstrou conhecer as técnicas convencionais de solução de problemas. Os resultados revelaram o emprego de uma diversidade de procedimentos de solução de problemas, que variou do desenho (forma mais elementar de representação) até o algoritmo canônico da divisão (forma mais avançada, do ponto de vista da convenção). A análise qualitativo-quantitativa do estudo mostrou uma variação dos procedimentos de solução em ambos os anos de escolaridade; evidenciou também a inexistência de uma relação necessária entre a complexidade do procedimento de solução e o ano de escolaridade, uma vez que procedimentos mais avançados foram encontrados entre estudantes do 4º ano, assim como procedimentos mais elementares, entre estudantes do 5º ano.

**Palavras-chave:** representação, representação gráfica, solução de problemas, divisão**.**

# ABSTRACT

The goal of this research was to verify how four and five-year-old children graphically represents the procedures of arithmetic quota division problem-solving. Based on the theory by Jean Piaget, this work was accomplished with twenty students enrolled in Elementary School in a private school located in the countryside of São Paulo state. Ten students of 4th grade and 10 students of 5th grade took part in the study, from nine to eleven years old. To verify the students representation, it was applied arithmetic division tests, consisted of six problems of quota division, distributed into two sessions: the Multiplication and Arithmetic Division Test, which goal was to evaluate the level of psychogenesis multiplication and division of students, and the Interview, which goal was to verify the students explanation for the solving procedures applied, as well as the division idea that was built. From the standpoint of the conception of the multiplicative operator psychogenesis, the students were included in the conducts III, IV or in transition between conducts III and IV, or in transition between conducts III and IV, revealing to be well developed in this conception; yet, it was found that only four of the twenty students, in both School grades, possessed the multiplicative operator; however, in despite of they did not reveal this idea built, most of them proved to know the conventional techniques of problem-solving. The results revealed a diversification in the use of the procedures for problem-solving, which alternated from the drawing (most elementary form of representation) to the canonical division algorithm (advanced way, from the convention point of view). The qualitative / quantitative study showed a variation of the solving procedures in both School grades; it also became evident the inexistence of a necessary relationship between the complexity of the solving procedure and the School grade, once the advanced procedures were found among students from 4th grade, as well as more elementary procedures, among students from 5th grade.

**Keywords:** Representations; Graphic representation; Problem solving; Division

## Lista de Ilustrações

## Lista de Quadros

# Sumário

# INTRODUÇÃO

A leitura e a escrita, dois dos principais sistemas representacionais e componentes da matemática escolar, são ensinados às crianças desde o início da escolarização. Porém, há consenso na literatura da área da educação matemática de que seu uso pelas crianças antecede o aprendizado escolar, pois, desde muito pequenas, são cercadas por números no meio em que vivem: eles aparecem em embalagens, listas, catálogos telefônicos, meios de transportes, jogos, enfim, em grande parte dos objetos de seu entorno.

A aquisição da ideia numérica pela criança é consequência da aprendizagem de um conhecimento já existente, que lhe é proposto não somente no processo educativo escolar, mas também no familiar e no social.

As crianças pequenas, muitas vezes, falam a sequência numérica corretamente, contam objetos, escrevem algarismos, indicam sua idade com os dedos da mão, mas isso não significa que tenham domínio dos significados relativos a esses conceitos.

A diferença entre o conhecimento do conceito de número e a quantificação de objetos é que o primeiro ocorre no pensamento da criança, não sendo observável. A segunda, por sua vez, pode ser parcialmente observada no comportamento da criança (KAMII, 1990).

Segundo essa autora, o número é algo que não pode ser ensinado, por se tratar de uma relação que o indivíduo cria mentalmente; ela alerta que há quantidades que podem ser distinguidas pela percepção, as quais Piaget denomina de *números perceptuais* (até quatro ou cinco), não necessitando de uma estruturação lógico-matemática, e as que são denominadas *números elementares* (maiores que quatro ou cinco).

Para que a criança possa trabalhar com a aritmética, é preciso que ela estabeleça relações entre as quantidades e os símbolos numéricos, neste caso, o numeral. Diferenciando os conceitos de número e numeral, Silveira (2001, s/n) esclarece que:

> Número se refere a uma ideia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos, e numeral é toda representação de um número, seja ela escrita, falada ou indigitada, e algarismo é todo símbolo numérico que usamos para formar os números escritos.

Há outras formas de representação, como, por exemplo, quando a criança conta determinados objetos, utilizando os dedos das mãos — o que ela realmente está contando são os objetos; os dedos são utilizados como uma representação de tais objetos.

Estudos de Piaget acerca da gênese da aquisição de conhecimentos possibilitaram a compreensão de que o conhecimento diz respeito a uma construção individual, que supõe a organização de estruturas reguladoras, e, portanto, não pode ser diretamente transmitido. Por tratar-se de uma estrutura mental construída individualmente, a partir da capacidade natural de pensar, o conhecimento matemático não se pode considerar aprendido unicamente a partir do ambiente externo.

As políticas educacionais nacionais determinam uma marcante presença da Matemática no currículo escolar. Isso pode ser constatado pela observação da grande quantidade de aulas destinadas a essa disciplina, implicando sua grande valorização pela escola e pela sociedade como um todo.

Vários estudos têm sido desenvolvidos na área, e seus resultados contribuem para um melhor conhecimento acerca dos processos de aprendizagem e de ensino da Matemática, como, por exemplo, os da Psicologia Educacional aplicada à Matemática, que investigam os processos mentais inerentes aos procedimentos de solução de problemas matemáticos, procurando verificar *o que* as pessoas fazem (em termos de pensamento), quando estão envolvidas em atividades matemáticas, e *como* elas aprendem a pensar matematicamente (BRITO, 2001).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), documento do Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, que orientam a elaboração de propostas de ensino para as escolas brasileiras, destacam dois aspectos básicos no ensino da Matemática: (1) que o aluno seja conduzido a estabelecer relações entre o que observa no mundo real e as representações disso e (2) a relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Salientam a importância da comunicação, orientando os educadores para que estimulem o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática e para que trabalhem, dentre outros recursos, as representações gráficas.

Assim, a expectativa é a de que o presente estudo possa contribuir com propostas curriculares para o ensino da Matemática e as práticas pedagógicas de escolas que priorizam a sistematização e o uso de técnicas, independente de as crianças terem desenvolvido, no nível adequado, o raciocínio lógico-matemático.

É importante enfocar que, como há níveis diferentes de abstração para se compreender os conceitos matemáticos, faz-se necessário considerar a relevância do papel da representação mental na construção de planos e de procedimentos direcionados à solução de problemas.

Com base nesses aspectos, o trabalho tratará da descrição das representações gráficas de crianças, que frequentam o 4º e o 5º anos[1] do Ensino Fundamental I, durante o processo de solução de problemas aritméticos de divisão por quotas.

Em um estudo realizado anteriormente (MOLINARI, 2003), cujo objeto foi a relação entre o desenvolvimento cognitivo e a representação gráfica das quantidades numéricas, foi verificado que a operatoriedade não era necessária para as notações numéricas das crianças, pois os sujeitos do referido estudo, em estágio pré-operatório ou em transição, usaram algarismos (maneiras mais elaboradas de representação gráfica) para representar as quantidades. Já as crianças em estágio operatório concreto utilizaram outras formas de representação das quantidades, que não a numérica (maneiras mais elementares de representação gráfica), demonstrando que cada sujeito apresenta formas particulares de representar graficamente as quantidades numéricas.

Neste estudo, observou-se o paralelismo existente entre o desenvolvimento filogenético e ontogenético dos sistemas representacionais, já que se verificou que as formas de representar graficamente as quantidades, adotadas atualmente pelas crianças, apresentam semelhanças com os sistemas de escrita antigos: elas utilizam desenhos variados e símbolos esquemáticos, antes de chegarem à utilização do número propriamente dito, muito embora o desenvolvimento de um sistema

---

[1] Equivalente à 3ª e 4ª séries no Ensino Fundamental de 8 anos.

representacional mais evoluído não implique, necessariamente, o abandono de outros mais elementares.

Os resultados obtidos com este estudo apresentaram concordância com os dos trabalhos de outros autores, dentre os quais se destacam os de Sastre & Moreno (1980) e de Sinclair (1990), que mostraram uma evolução das condutas representativas em função da idade dos sujeitos, o que colocou a necessidade de se aprofundar o estudo acerca das representações gráficas.

A construção da representação mental tem papel importante na solução de problemas, uma vez que ela estabelece a relação entre a estrutura do pensamento e o procedimento, guiando o processo que conduz à solução. Assim, o objetivo deste estudo é verificar como as crianças representam graficamente durante a solução de problemas de divisão.

Optou-se pela operação de divisão, por se tratar de um componente curricular trabalhado no 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, apesar de a investigação sobre a construção desse conceito ser pouco explorada, segundo Correa (2006). De acordo com essa autora, "pouco ainda se sabe sobre as origens do entendimento inicial do conceito de divisão na criança" (p.185).

No entanto os problemas de divisão, adotados como instrumentos a aplicar neste estudo, abrangerão a *divisão por quotas*, porque, ao contrário da *divisão partitiva*, ela envolve termos relacionais[2] que podem ser melhor compreendidos pelas crianças que ainda apresentam dificuldades em realizar cálculos numéricos com a divisão.

A diferença básica entre a divisão partitiva e a divisão por quotas é que, nesta, "a criança precisa descobrir quantas vezes uma determinada quantidade está contida na quantidade maior", enquanto, na partitiva, "a criança deve repartir uma determinada quantidade em dado número de quotas equivalentes". (CORREA, 2006, p.185-186).

Conforme Nunes et al. (2001), nos problemas de divisão por quotas ou problema inverso, como denominam as autoras, a estratégia de solução adotada pelos alunos é a

---

[2] Os problemas de divisão por quotas demandam maior compreensão da relação inversa – a multiplicação entre quociente e divisor para se chegar ao valor do dividendo – podendo ser solucionados pela operação multiplicativa.

mesma adotada em problemas de multiplicação, nos quais são utilizados os esquemas de *distribuição* e de *correspondência um-a-muitos*.

A capacidade de resolver problemas, utilizando os sistemas convencionais, as técnicas e os exercícios empregando o algoritmo,[3] não assegura que a criança tenha compreendido o verdadeiro significado da operação em questão, assim como conhecer os símbolos convencionais não é suficiente para que a criança se utilize dessas grafias e, consequentemente, do procedimento convencional de cálculo, de maneira apropriada. Esse conhecimento deve ser combinado com outros procedimentos que permitam a compreensão e a utilização dos sistemas convencionais de representação para se chegar à solução do problema.

A criança pode usar várias formas de representação gráfica, assim como os adultos utilizam vários tipos de notações em sua vida cotidiana: na marcação de pontuações de jogos, nos procedimentos de etiquetagem ou na confecção de listas de compras, por exemplo. No entanto, como dito anteriormente, é preciso que ela compreenda que as técnicas convencionalmente utilizadas nas soluções de problemas envolvem um conjunto de regras criadas pelo homem, assim como é fundamental que entenda a natureza do signo numérico, dos símbolos matemáticos e de que maneira eles são combinados para representar os problemas matemáticos. Quando existe domínio desses aspectos, a criança terá possibilidades de passar a operar com as quantidades no papel, de forma sistemática. (MOURA, 1992).

Morgado (1994), estudando as representações durante a solução de problemas, afirmou que a busca de estratégias para a solução do problema, após a interpretação do enunciado, leva o indivíduo a criar uma representação mental do problema, pois “é ela que conduz e determina a solução” (p.19).

Vergnaud (1998) apresenta um esquema de representação que denominou “A metáfora do triângulo”, que pode ser interpretada como uma relação triádica, portanto

---

[3] Algoritmo é uma indicação precisa e delimitada sobre quais operações realizar e em qual sequência resolver qualquer problema de um determinado tipo. Um algoritmo é uma generalização, desde que seja aplicável a todos os problemas de um determinado tipo.Uma das características da matemática é a qualidade algorítmica da solução de muitos de seus problemas. (Krutetskii, 1976, pg. 46).

de interdependência entre a "coisa", a "representação da coisa" e o "símbolo associado com a coisa" (p.168), e aponta a importância do papel da linguagem e dos símbolos para a representação.

Dessa maneira, visando a contribuir para que se construam melhores entendimentos sobre o conceito em questão, empreendeu-se esta pesquisa. Para tanto, delimitou-se o seguinte problema de investigação: **Como crianças de 4º e 5º anos representam graficamente os procedimentos de solução de problemas aritméticos de divisão?**

O objetivo geral deste estudo é verificar quais os procedimentos empregados pelas crianças no processo de solução de problemas de divisão, descrevendo e analisando as representações gráficas escolhidas por elas.

Como objetivos específicos, buscaram-se: a verificação dos tipos de procedimentos empregados pelas crianças para solucionar problemas de divisão por quotas; a avaliação do nível da psicogênese da noção de multiplicação e divisão em que elas se encontram; a verificação da correspondência entre o nível da psicogênese da noção de multiplicação e divisão e o ano de escolaridade dos estudantes; a verificação da correspondência entre os procedimentos de solução empregados e o nível da psicogênese da noção de multiplicação e divisão e a verificação da correspondência entre os procedimentos de solução empregados e o ano de escolaridade.

Este estudo divide-se em quatro capítulos, organizados da seguinte maneira: os dois primeiros apresentam o referencial teórico que norteou a presente pesquisa, bem como a revisão de literatura dos temas que tratam da representação, da solução de problemas e da operação aritmética de divisão, respectivamente. No três últimos, são apresentados o delineamento metodológico, os resultados da pesquisa empírica, sua discussão e as considerações finais.

# CAPÍTULO 1. REPRESENTAÇÃO

O que diferencia o homem de outras espécies são as suas funções mentais superiores, ou seja, sua capacidade de pensar e raciocinar, a linguagem, a memória, a atenção e sua especificidade cognitiva, em outras palavras, sua capacidade de representar mentalmente os objetos e os eventos externos.

Piaget (1990/1998) denomina a capacidade de representar mentalmente como *função simbólica* que, no decorrer do desenvolvimento humano, surge quando as ações sensório-motoras são interiorizadas e aparece o pensamento propriamente dito (no período da inteligência intuitiva).

Tal função consiste na representação de um “significado” (objeto, acontecimento ou esquema motor) qualquer, por meio de um “significante” diferenciado e específico para esse fim. Quando de posse da função simbólica, a criança passa a utilizar-se de meios para representar o que ela conhece do mundo: a imitação, o jogo simbólico, o desenho, a imagem mental[4] e a linguagem.

Para Piaget (1990), entre a inteligência sensório-motora e a representação cognitiva, há quatro diferenças:

> 1ª. As conexões estabelecidas pela inteligência sensório-motora só chegam a ligar percepções e movimentos sucessivos, sem representação de conjunto que domine os estados [...]; 2ª a inteligência sensório-motora tende ao êxito e não à verdade, satisfaz-se com a chegada ao objetivo prático [...]; 3ª [...] só trabalha nas próprias realidades, nos seus indícios perceptivos e sinais motores, e não nos signos, símbolos e esquemas que a elas se referem; 4ª. É, pois, individual, em oposição aos enriquecimentos sociais adquiridos com o emprego dos signos. (p.304).

Para o autor, o pensamento só cessa de traduzir-se em imagens com o pensamento operatório, pois, somente nesse período, o mesmo se torna reversível e a acomodação se generaliza.

---

[4] Inicialmente, a criança evoca espetáculos conhecidos (*imagens reprodutivas*) e, depois, imagina movimentos ou transformações e seus resultados sem ter assistido anteriormente à sua realização (*imagem antecipadora*).

Segundo Delval (2007), os progressos no desenvolvimento psicológico são constituídos por mudanças relacionadas a três fenômenos: mudanças nas condutas, mudanças nos instrumentos intelectuais e mudanças nas representações sobre a realidade, dependendo as últimas "dos instrumentos com que são construídas" (p.90). Constroem-se as representações a partir de conhecimentos anteriores.

Para Delval (2007), a representação é uma atividade intencional, pois são "representações para alguém, sobre algo" (p.90), comportando três elementos:

> a. algo que é representado, que é o objeto designado ou o **significado**;
> b. algo que representa, que é o **significante**, a palavra, a imagem, o diagrama, o gesto;
> c. um **sujeito** para o qual o significante designa o significado (p.91).

Nesse sentido, o autor afirma que a representação é intencional, porque é o sujeito quem estabelece a relação entre o significado e o significante e sempre visa a um fim, como, por exemplo, quando o sujeito deseja algo ou tem uma necessidade; para atingir esse fim, criará uma representação da situação (considerando como pode ser resolvido seu problema) e irá agir sempre em função das representações por ele criadas.

São os fins que originam a ação e são determinados pela representação que o sujeito faz da situação. Delval acredita que as representações têm, em sua origem, um elemento de necessidade, porque são construídas conforme essas necessidades, que se podem tanto relacionar a problemas práticos como a fenômenos subjetivos, como, por exemplo, um problema de origem lógico-matemática.

Portanto, as representações não são sempre conscientes, pois elas não estão prontas e disponíveis em nossa consciência e nem em qualquer outra parte, mas são criadas à medida que se queira satisfazer um desejo ou uma necessidade.

Basta observarmos as crianças, quando são instigadas a dar respostas para algumas solicitações feitas: elas elaboram suas próprias hipóteses — no seu plano de representação — a respeito dos fenômenos do mundo, sejam eles físicos ou psíquicos, sejam naturais.

Como exemplo, uma criança (ISA; 5,7), questionada sobre a origem dos astros[5], deu as seguintes respostas às questões feitas:

> Tinha sol hoje? - *Ele ficava saindo e ficava voltando*...
> Como assim? - *O sol aparecia e depois ele ia embora e aparecia a sombra... depois aparecia o sol e depois aparecia a sombra...*
> E para onde o sol ia? - *Se esconder... atrás da lua... não! atrás da "luvem"... eu não sei direito...*
> De onde aparece o sol? - *De trás da "luvem".*
> Como começou o sol/ como nasceu o sol? - *... não sei*
> Como ele é? - *Redondo... com aquele "negocinho" assim* (gesticula representando os raios) - pede para desenhar.
> O que é esse "negocinho" que você está falando? - *Tem no sol de verdade isto...*
> (Após ter desenhado) São os raios do sol? - *... não sei.*
> Então, ele é redondo? - *Uma bola*.
> Do que ele é feito? - *... como assim, do que ele é feito...* Do que você acha que ele é feito? - *Não sei*.
> Como você acha que ele é? - *Ele é redondo com esses negocinhos.*
> O sol sempre esteve lá onde ele fica?... Onde ele fica? - *Atrás da lua*. *Não! atrás da luvem*.
> E ele sempre esteve lá? - *Sempre não, porque de vez em quando ele aparece*...
> Não é sempre que ele aparece? - *Não, às vezes ela não aparece*. Por que? - *Porque de noite todo mundo vai dormir e também ele vai... não sei...*
> O que acontece com o sol de noite? - *Ele fica na casa dele, daí o céu fica azulzão bem forte... daí, não sei...*
> O céu fica bem azulzão de noite e... - *o céu fica bem escuro e não dá para ver nada... só dá para ver a lua, as estrelas e a luvem. O céu é assim, não preto... azul... sempre o céu é azul. De manhã o céu é um pouquinho mais claro; de noite o céu é escuro, igual tá agora.*
> O que acontece com o sol de noite? - *ele se esconde*. Aonde ele se esconde? - *deve ser atrás das árvores... ah não, atrás da luvem.*
> E as nuvens, do que são feitas? - *de plástico.*
> Elas foram feitas por alguém, ou nasceram sozinhas? - *sozinhas.*
> Como elas foram parar lá? - *as nuvens soltam pedaços... mas elas são grandes...as nuvens também andam, com o vento, porque o vento leva.*
> E a lua, como ela sabe quando é noite? - *porque ela vê.* Mas como ela vê se ela não está viva? - *ela percebe e ela imagina pela cabeça*.
> Ela tem cabeça? - *a cabeça é a estrela.*[6]

---

[5] Investigação realizada em 2000 por esta pesquisadora, a fim de estudar as explicações que as crianças dão sobre a origem dos astros, realizando uma atividade baseada no método clínico de Piaget, que buscou verificar a etapa da progressão da representação em que a criança se encontrava.

[6] Esta criança demonstrou uma tendência animista (a lua "vê" que é noite porque "imagina") em vários momentos e, em outros, uma tendência artificialista (as nuvens são feitas "de plástico"). Portanto, a conclusão é que ela se encontrava em transição entre o primeiro (artificialismo) e a segundo estágio (animismo).

Dos casos artificialistas mais primitivos aos de mito artificialista, a criança passa por várias etapas progressivas na representação.

Nos casos mais primitivos, que antecedem o artificialismo, encontram-se os sentimentos de participação, as relações que fazemos entre nossos atos e os fenômenos que observamos (exemplos: 1. “a lua cresce porque nós crescemos”; 2. “os pais encomendam os bebês”), o que corresponde a um sentimento de ligação (PIAGET, 1926).

Posteriormente, a criança passa a inventar mitos artificialistas e animistas (exemplos: 1. ”a lua cresce porque ela se alimenta”; 2. “os pais fabricam os bebês”) até chegar a uma explicação causal, que vai ocorrer por volta dos 11 anos de idade.

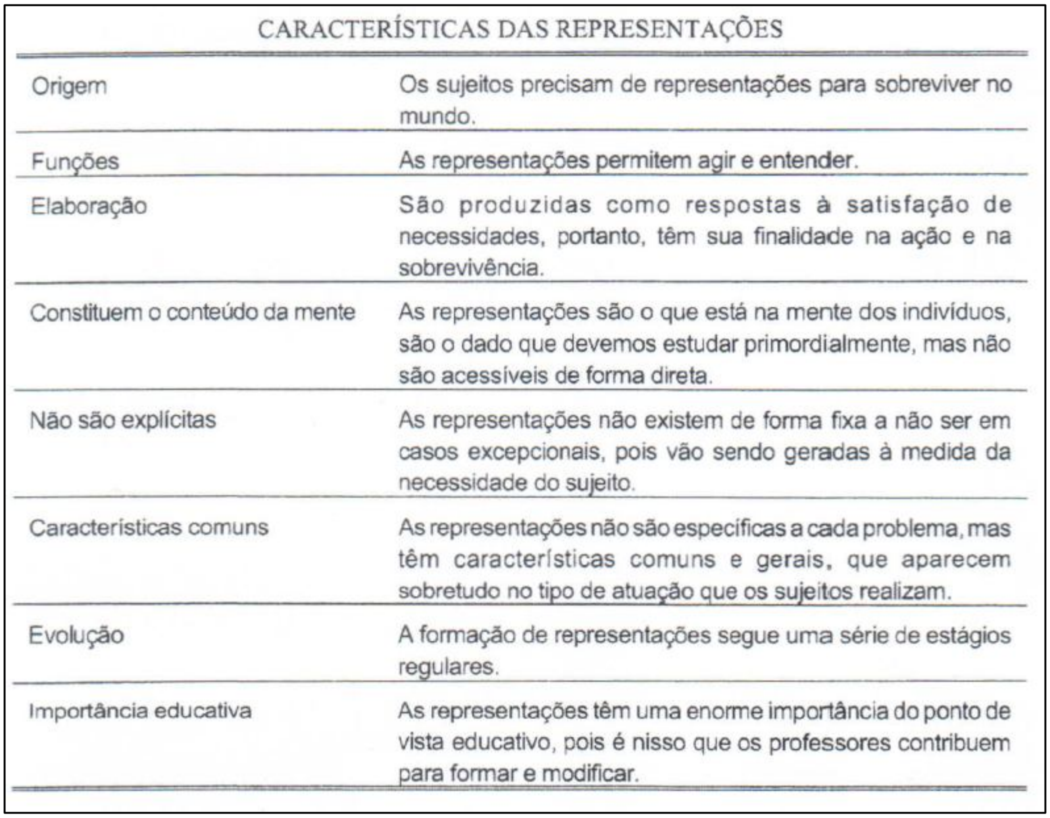
Sobre a origem dos astros, Piaget (1926) afirma que:

> Na verdade, não existem questões absurdas para as crianças. Imaginar de onde saiu o sol não as embaraça mais do que imaginar de onde vêm os rios, as nuvens ou a fumaça... As questões das crianças demonstram, por exemplo, que seu interesse se liga aos problemas relativos aos astros, e a própria maneira como as crianças colocam essas questões indica quais as soluções a que serão levadas por elas próprias (p.207).

As representações são elaboradas na medida em que nos deparamos com algo que precisa ser resolvido; nesse caso dos astros, eram respostas que a criança precisava dar ao adulto que a arguia. Como afirma Delval (2007), “poderia parecer que o sujeito, num momento em que precisasse, combinaria distintos elementos dispostos anteriormente, de acordo com as necessidades do momento” (p.95). Para o autor, a representação é provocada:

> [...] somente no caso em que existam elementos discordantes. Quando vou acender a luz do meu quarto, não preciso pôr em funcionamento uma representação explícita se a luz acende quando aperto o interruptor, pois limito-me a aplicar um esquema que está automatizado em mim; porém, se a luz não acende, então, é quando preciso ativar uma representação. (p.97-98).

O mesmo autor descreve algumas características das representações, conforme o quadro a seguir:



CARACTERÍSTICAS DAS REPRESENTAÇÕES

| | |
|---|---|
| Origem | Os sujeitos precisam de representações para sobreviver no mundo. |
| Funções | As representações permitem agir e entender. |
| Elaboração | São produzidas como respostas à satisfação de necessidades, portanto, têm sua finalidade na ação e na sobrevivência. |
| Constituem o conteúdo da mente | As representações são o que está na mente dos indivíduos, são o dado que devemos estudar primordialmente, mas não são acessíveis de forma direta. |
| Não são explícitas | As representações não existem de forma fixa a não ser em casos excepcionais, pois vão sendo geradas à medida da necessidade do sujeito. |
| Características comuns | As representações não são específicas a cada problema, mas têm características comuns e gerais, que aparecem sobretudo no tipo de atuação que os sujeitos realizam. |
| Evolução | A formação de representações segue uma série de estágios regulares. |
| Importância educativa | As representações têm uma enorme importância do ponto de vista educativo, pois é nisso que os professores contribuem para formar e modificar. |

**Quadro 1. Características das Representações descritas por Juan Delval (2007, p. 97).**

Na perspectiva do autor, do ponto de vista educativo, as representações têm grande importância, pois se pretende, por meio da educação, propiciar, aos sujeitos, que "eles sejam capazes de formar explicações que se adaptem às teorias científicas, que não sejam desmentidas pelos observáveis e que possam utilizar as explicações e os procedimentos de indagações característicos do pensamento científico" (DELVAL, 2007, p.103).

Para o conhecimento matemático, a representação tem papel fundamental, uma vez que os objetos matemáticos não são acessíveis pela percepção, dependendo de sistemas representativos para serem compreendidos.

"Representação é sempre representação de algo" e os conceitos matemáticos estão relacionados à atividade mental das pessoas (TEIXEIRA, 2005, p.19).

De acordo com a autora:

> A aprendizagem de conceitos matemáticos é uma área privilegiada para estudar e compreender o papel das representações na atividade cognitiva, ou seja, como os conceitos matemáticos estão relacionados à atividade mental das pessoas (p.19).

Para Kamii (2005), “representação é o que um ser humano faz. Os símbolos não representam; é sempre um ser humano que usa um símbolo para representar uma ideia” (p.25-26).

Baseada na teoria de Piaget, Kamii diferencia *símbolos* e *sinais*: os primeiros apresentam semelhança com o objeto representado, podem ser inventados e originam-se no pensamento das pessoas. São exemplos de símbolos as figuras e as marcas de contagem. Os sinais, por sua vez, não lembram o objeto representado, são originados nas convenções sociais e, portanto, não podem ser inventados, como os números e outros sinais matemáticos.

Assim, seria incorreto dizer que o “+” representa a adição ou que o “2” em “23” representa “20”. Somos nós que utilizamos esses símbolos para representar e o fazemos nos nossos respectivos níveis de abstração.

A autora, relacionando representação e abstração, esclarece que “as crianças *representam* diferentes ideias em diferentes níveis de *abstração*” e, por isso, a criança que conserva (o número, por exemplo), o faz porque está em um nível de abstração mais elevado. Dessa forma, é contrária à ideia de que materiais concretos ou manipuláveis sirvam de base para o entendimento de sinais matemáticos, uma vez que, como símbolos (por exemplo, as fichas) que são, “a utilidade deles depende das relações que as crianças podem fazer, por meio de abstração construtiva” (KAMII, 2005, p.39).

Indagando sobre o significado do simbolismo numérico para a criança e se ela utiliza o grafismo numérico dentro de um contexto prático e explorando as defasagens entre o nível aparente dos conhecimentos e seu nível real de compreensão, Sastre e Moreno (1976) realizaram uma pesquisa *"Représentations Gráphiques de la Quantité"*[7]

---

[7] Pesquisa realizada na Espanha, publicada originalmente no Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris e, 1976, traduzida por Carmen Scriptori de Souza e publicada nos anais do I Encontro Nacional de Professores do Proepre, em 1984.

na qual mostram a existência de grandes diferenças entre as condutas que a criança aprende espontaneamente, a partir da função estimuladora e reguladora de seu meio ambiente, e as condutas que ela aprende pela transmissão escolar.

Verificaram uma diferenciação progressiva do grafismo e uma evolução das condutas que caminham do desenho até a utilização do algarismo, concluindo que a evolução dessas condutas parece seguir uma linha genética clara.

Assim, no período intuitivo, a criança não usa o algarismo para identificar a igualdade de dois conjuntos, nem constrói um conjunto numericamente igual ao que lhe é apresentado; ela faz uma cópia figural, estabelecendo uma correspondência termo a termo entre os elementos. Nesse caso, ela está adotando um procedimento de representação original que, para as autoras, evidencia um sistema pessoal de representação no qual, primeiramente, o figural se distingue do quantitativo, enquanto este vai, pouco a pouco, sendo construído. Por volta dos dez anos de idade, segundo as autoras, a criança já utiliza o grafismo numérico de imediato, ou seja, nessa idade ela assimila o grafismo adulto ao seu próprio sistema quantitativo.

Outro trabalho sobre essa temática foi realizado por Anne Sinclair e publicado em 1990, com a colaboração de D. Mello e F. Siegrist, intitulado "A notação numérica na criança". A pesquisa teve, como objeto de estudo, a representação escrita numérica e visou a esclarecer como ocorre a construção progressiva do sistema de numeração escrita em crianças pré-escolares. Por meio das notações de coleções de objetos, as autoras também verificaram uma evolução das condutas, de acordo com a idade, que parte de uma *representação global da quantidade* até o aparecimento dos algarismos.

Em um estudo anterior, Molinari (2003), buscando verificar a existência de relações entre o nível de desenvolvimento cognitivo (operatoriedade) e as representações gráficas das quantidades numéricas, não encontrou, na amostra estudada, relações de congruência entre esses dois elementos, o que a fez concluir que, as representações gráficas dependem de experiências pessoais e individuais e de sistemas próprios de representação.

Nesse estudo, foram realizadas atividades de representação gráfica de quantidades numéricas com crianças de ensino infantil e fundamental I e, foi verificada uma variação nas representações gráficas (para quantidades numéricas de bombons) de crianças que se encontravam em estágio pré-operatório, de transição e operatório concreto, como pode ser visto na Figura 1, a seguir:

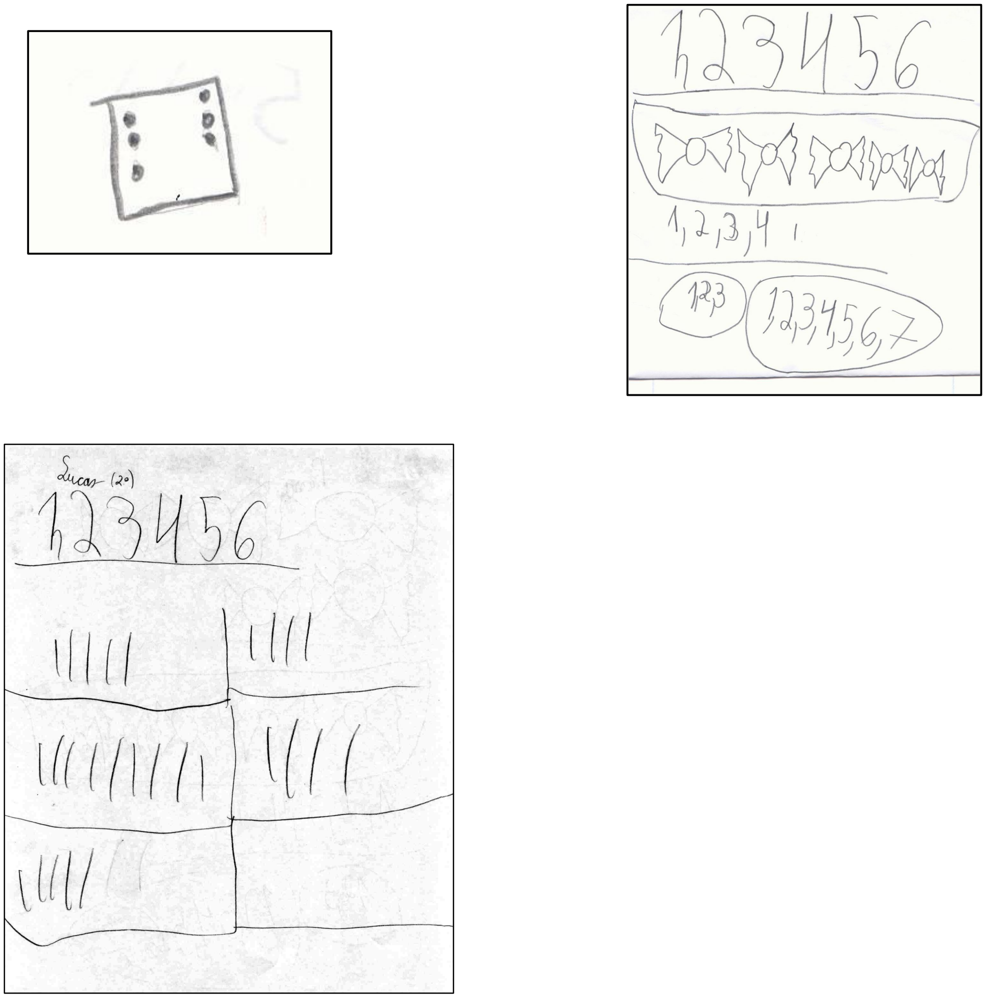


**Figura 1. Representações de crianças entre 6 e 9 anos, para 6 bombons.**

Assim como houve uma evolução dos sistemas notacionais numéricos, ao longo da história da civilização, as crianças manifestam diferentes formas de representar graficamente os números, que evoluem das mais primitivas (desenhos globais) até a representação numérica (que requer um nível maior de abstração).

O estudo de Molinari confirmou a ideia, de Kamii (2005), de que, “quando as crianças representam suas ideias no papel, elas externalizam suas ideias em seus respectivos níveis de abstração” (p. 38). Portanto o significado, atribuído pelo sujeito, aos objetos, dependerá do nível estrutural do atribuidor.

Do ponto de vista da solução de problemas, a representação é antecipadora do fim a se atingir, “ela guia o sujeito na ação procedimental que este vai exercer sobre o real” (MORGADO, 1994, p.12). Assim, a representação é normalmente sujeita a reorganizações para uma construção mais adequada; ela vai sendo reelaborada ao longo da execução do problema (estratégias).

A representação é um elemento cognitivo diretamente relacionado à solução de problemas, uma vez que, para solucionar um problema, o indivíduo, após compreender o enunciado proposto, deverá elaborar uma representação da situação em questão.

Citando Morgado (1994), Fini (2001) esclarece que a representação mental é entendida como a organização e a compreensão da natureza semântica do problema; um quadro organizador de conhecimentos, atualizados através da atribuição de significado. “As crianças têm que construir uma representação das relações que existem entre os dados do problema e a representação de como, trabalhando com eles, podem obter novas informações e respostas à pergunta formulada ou a ser formulada” (p.70).

Assim, a solução de problemas, entendida como busca de estratégias ou alternativas para se atingir um fim, gera um processo de combinações entre vários elementos cognitivos, que precedem a representação, visto que esta irá permitir a transformação da informação linguística em informação matemática; a representação mental irá determinar a construção de um plano para a solução.

Morgado (1994) esclarece algumas funções da representação mental:

> Na resolução de problemas, à construção de uma representação mental inicial incumbem duas funções. A primeira consiste em proporcionar, ao sujeito, uma compreensão, embora muitas vezes incompleta, ou mesmo incorreta, da situação geral, a qual o vai orientar na elaboração de um plano de ação. A segunda consiste em apresentar, ao sujeito, uma visão antecipadora do fim a atingir sem a qual qualquer planificação procedimental se tornaria impossível de realizar [...] a representação mental inicial é, assim, normalmente sujeita a reorganizações que conduzem a uma construção mais adequada da mesma, uma vez que ela pode ser considerada verdadeira ou falsa. Assim, embora

> dependa, em última análise, dos níveis estruturais do sujeito, afina-se e reelabora-se ao longo da execução de um problema ou tarefa, podendo passar a conceder uma nova significação a um observável ou interpretar outro até aí considerado. (MORGADO, 1994, p.12)

A partir de suas investigações sobre a solução de problemas aritméticos, a mesma autora afirma, contrariamente às ideias de Kamii, ser preciso que se incentive o aluno a organizar uma estrutura gráfica ou manipulativa mais ou menos convencional (material concreto e/ou pictórico), que corresponda ao enunciado do problema.

Assim, por meio desta pesquisa, pretendeu-se explorar como se configuram as representações gráficas de crianças, quando envolvidas em situações de solução de problemas aritméticos.

# CAPÍTULO 2. SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando se fala em solução de problemas, algumas pessoas associam-na a problemas matemáticos. Embora esta não seja a única área em que o elemento esteja presente, está fortemente relacionada a ela, uma vez que envolve abstrações e representações, característicos do conhecimento matemático (BRITO, 2006).

A solução de problemas é considerada um dos processos cognitivos mais complexos e há uma indagação frequente no campo da Psicologia, sobre a forma como os seres humanos desenvolvem a capacidade para solucioná-los. Esse processo inicia-se quando o indivíduo se depara com um novo objeto de conhecimento, desencadeando uma motivação que faz com que ele vá em busca de elementos que lhe permitam encontrar uma resposta, ou reorganizar os elementos já existentes em sua estrutura cognitiva, permitindo-lhe chegar ao resultado.

Do ponto de vista do funcionamento cognitivo, ao solucionar problemas, o primeiro passo é criar uma representação do problema em questão.

Chi e Glaser (1992) afirmam que as diferenças individuais nas formas de se solucionarem problemas “estão baseadas em processos cognitivos e organizações mentais que os humanos têm em comum, e que caracterizam suas capacidades para a solução de problemas” (p. 250).

Falar em solução[8] de problemas implica falar em uma nova organização, isto é, uma situação que constitui um problema para o indivíduo denota que, naquele momento do seu processo de desenvolvimento, esse sujeito ainda não tem, disponíveis, em sua estrutura cognitiva, estratégias de solução. Entretanto também pode ser considerada como oportunidade para a ampliação de conceitos, visto que, “durante a solução de problemas, o indivíduo reorganiza os conceitos e princípios já existentes na estrutura cognitiva de forma a atingir um fim desejado” (BRITO, 2006, p.19).

---

[8] A opção em adotar a terminologia *solução* de problemas, ao invés de *resolução*, deve-se a haver certa controvérsia entre autores; alguns apontam que a solução está mais dirigida ao resultado, enquanto a resolução poderia ser entendida como a ação de resolver novamente, podendo ser confundida com uma reprodução. Desta forma, adotou-se para esta pesquisa, o primeiro termo.

Assim, o que é problema para alguns pode não ser para outros, uma vez que se podem encontrar em diferentes estágios de desenvolvimento cognitivo; daí a necessidade de os professores conhecerem seus alunos e como esse desenvolvimento ocorre, para que possam criar situações realmente desafiadoras para eles.

Uma situação é, de fato, um problema para o aluno se ela apresenta um desafio intelectual, pede antecipação, planejamento, representação e elaboração de estratégias de solução. Reforçando essa ideia, Echeverría e Pozo (1998) afirmam que:

> Uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos (p.16).

Esses autores diferenciam *problemas* de *exercícios*, partindo da clássica definição de *problema* como uma situação que precisa ser resolvida e para a qual não se dispõe de um caminho rápido e direto, que leve à solução; já *exercício* nomeia aquelas situações em que se dispõe de mecanismos que levem, de forma rápida, à solução (Echeverría e Pozo, 1998). A diferença básica entre um e outro é que a solução de problemas requer uso de estratégias e tomada de decisões quanto ao procedimento a ser adotado para a solução, enquanto o exercício demanda a execução repetitiva de técnicas já transformadas em rotinas automatizadas (*sobreaprendidas*).

Exercícios também podem ser entendidos como *problemas convencionais*, cujas soluções envolvem a aplicação de um algoritmo e que possuem uma resposta única, numérica, enquanto os verdadeiros problemas podem ser entendidos como *problemas não-convencionais*, que apresentam várias possibilidades de solução, possuem um enunciado mais bem elaborado e que, portanto, exigem uma leitura mais cuidadosa para a elaboração da estratégia mais adequada à solução, estratégia que pode ser variada (STANCANELLI, 2001).

Há, ainda, outros tipos de problemas: problemas que apresentam uma única solução, problemas com mais de uma solução, problemas sem dados numéricos e problemas de lógica, dentre outros.

Em seu livro *A arte de resolver problemas* (2006, primeira versão com o título *How to solv it* de 1977), Polya apresenta quatro fases para a solução de problemas:

*1. Compreensão* do problema, percebendo claramente o que é necessário. Para tal, o enunciado verbal do problema deve ficar bem entendido, assim como o aluno "deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante" (p.5);

*2. Estabelecimento de um plano.* Esse plano pode "surgir gradualmente ou após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante" (p.7);

*3. Execução do plano*, que requer conhecimentos anteriores e concentração no objetivo;

*4. Avaliação da resolução,* reexaminando e reconsiderando o resultado final e o caminho percorrido que tenha levado ao resultado.

Ainda a respeito dessas fases envolvidas no processo de solução de problemas, Polya afirma:

> Cada uma dessas fases tem a sua importância. Pode acontecer que, a um estudante, ocorra uma excepcional ideia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Essas ideias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas alguma coisa muito inconveniente e desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção (2006, p.5).

Mayer (1992) propõe que há duas tarefas básicas envolvidas na resolução de problemas: a primeira delas, a **representação mental do problema**, que compreende a *tradução* e a *integração* do problema e que antecede a segunda, a **solução do problema**, compreendendo o *planejamento* e a *execução* do plano[9].

---

[9] *Tradução* – quando a informação linguística e factual do problema é traduzida numa representação interna
*Integração* – significa juntar as proposições numa representação coerente – o indivíduo tem que possuir algum conhecimento sobre o tipo de problema.
*Planejamento* – envolve o conhecimento estratégico para escolher o procedimento que irá utilizar.
*Execução* – que é a realização da operação. Para tal, é necessário o conhecimento algorítmico.

Esse autor sugere que, para resolver problemas, é necessário possuir conhecimento linguístico, conhecimento semântico, conhecimento do esquema do problema (tipo de problema), conhecimento de estratégias (técnicas) a empregar no processo de solução e conhecimento procedural (como desempenhar a sequência de operações, que equivale ao conhecimento algorítmico). Sendo assim, solucionar problemas não é uma atividade de aplicação, mas uma orientação para a aprendizagem.

Dessa forma, solucionar problemas não requer somente a realização de cálculos com os dados numéricos do problema, ou a aplicação de técnicas aprendidas na escola, mas a interpretação do enunciado, a elaboração e o emprego de estratégia própria para a solução, que leva o sujeito a colocar, em jogo, as estruturas mentais das quais dispõe naquele momento de seu desenvolvimento.

Segundo Kamii (2002), o objetivo do ensino, ao propor problemas às crianças, é levá-las à "lógico-matematização" da realidade, afirmando que "problemas matemáticos estendem o mundo físico e social das crianças para além do aqui e agora" (p. 147).

Embora não se tenha interessado especificamente na solução de problemas, Piaget (1977) trouxe grande contribuição para a educação, ao descobrir que as crianças pensam de forma qualitativamente diferente dos adultos. Ele verificou que, frente à realidade, elas elaboram suas próprias hipóteses e, por meio de assimilações e acomodações, vão reformulando sucessivamente o conhecimento anteriormente construído. Ao interagirem com o que procuram compreender (objeto de conhecimento), as crianças constroem estruturas de pensamento cada vez mais complexas e abrangentes e, conforme se desenvolvem, sua capacidade de conhecer e compreender o mundo amplia-se de forma considerável.

Pode-se dizer que existe uma interação permanente e constante entre o sujeito e o objeto do conhecimento durante a vida de um indivíduo. O objeto a ser conhecido não corresponde a um real absoluto, mas existe em função da ação que o sujeito exerce sobre ele e é por este transformado, ao mesmo tempo em que modifica a estrutura cognitiva daquele que conhece.

Segundo Piaget (1977), as ações constituem o ponto de partida das futuras operações da inteligência e todo conhecimento, incluindo a capacidade de raciocinar logicamente, é construído pelo indivíduo na medida em que ele age sobre objetos e pessoas e tenta compreender sua experiência.

Piaget (*apud* Moreno, 1983) cita o exemplo de um amigo seu, matemático, que aos cinco anos de idade se entretinha, sentado em um jardim, colocando pedrinhas em fileira e contando-as da esquerda para a direita. Ao contá-las da direita para a esquerda, surpreendeu-se ao verificar que o resultado era o mesmo. Foi, então, dispondo-as de maneiras diferentes, sem conseguir modificar o resultado, até que se convenceu de que este independia da forma de ordenação. Acabara de compreender que a ação de reunir – esquema de ação da adição – implica o mesmo resultado, independentemente da ordem dos fatores envolvidos na contagem.

Esse exemplo mostra que o conhecimento lógico-matemático resulta de um processo de invenção, a partir das ações que o indivíduo realiza sobre os objetos, e das abstrações reflexivas[10] que decorrem das coordenações dessas ações. Ao contrário da informação passada em sua forma final, pronta e acabada, esse processo implica uma construção individual, que supõe a organização de estruturas reguladoras, não podendo, portanto, ser diretamente transmitido.

Assim, para que esse processo de descoberta possa ser ativado na criança, propõe-se o trabalho com solução de problemas: resolver problemas para aprender matemática, ao invés de aprender matemática para resolver problemas.

Vejamos a implicação disso para os problemas de divisão aritmética.

## 2.1 A Divisão

Optar pela investigação do conceito de divisão deveu-se a algumas razões, dentre as quais, a incipiência de estudos que investiguem como as crianças

---

[10] Tipo de abstração que consiste na coordenação mental das propriedades existentes entre os objetos. Essa abstração é uma construção verdadeira feita pela mente e não uma observação sobre alguma coisa que já existe no objeto, como ocorre na abstração empírica, na qual tudo o que a criança faz é se concentrar numa certa propriedade do objeto e ignorar outras (KAMII, 1990 e 1995).

representam, mental e graficamente, a operação de divisão e o fato de ela constituir a operação mais difícil de ser aprendida pelos alunos, segundo os professores.

Originalmente, a divisão é definida como uma subtração reiterada de parcelas iguais, o que a torna relacionada àquela operação e a liga às ideias de repartir igualmente e medir (TOLEDO e TOLEDO, 1997).

Para Morgado (1993), na operação de divisão, estão envolvidas duas estratégias, a de subtração repetida e de repartição de quantidades; a autora defende que, para solucionar problemas dessa natureza, as crianças utilizam diversos procedimentos. Segundo ela:

> Subtração repetida consiste em subtrair, ao dividendo, o número de vezes indicadas pelo divisor. Nestes casos, o dividendo é normalmente maior que o divisor e este último é um número inteiro. Exemplo: 25 ÷ 5, são 25 – 5 = 15 – 5 = 10 - 5, logo são 5.
> Repartição de quantidades consiste em averiguar qual o número de vezes que o divisor é contido pelo dividendo. Exemplo: 30 ÷ 5, são 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, logo são 6. (p. 69-70).

Mesmo sendo apontada na literatura (CORREA, 1996; NUNES, BRYANT e MAGINA, 2002; SELVA, 2003) como uma operação que pode ser resolvida, de forma prática, desde o nível pré-escolar, ela impõe alguns obstáculos às crianças mais velhas, no nível fundamental de escolaridade, por requerer algumas competências relativas à coordenação de ações, tornando-se, assim, uma operação complexa. Essa complexidade deve-se às características da operação: requer o uso de regras operatórias; seu cálculo é efetuado na direção contrária à das outras operações aritméticas, o que acarreta a dificuldade no domínio do algoritmo; envolve outras operações, como adição, multiplicação e subtração; pode gerar resto; o quociente pode gerar um número decimal, além de demandar relações entre as partes que a compõem (dividendo, divisor, quociente e resto).

Ferreira & Lautert (2003, p. 550) apontam que as relações entre as partes envolvidas na operação de divisão são complexas, pois requerem:

> [...] compreender que quanto maior (ou menor) o número de partes, menor (ou maior) o tamanho de cada parte, o todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, a soma de todas as partes distribuídas mais o resto constitui o todo inicial e que o resto nunca pode ser maior que o número de partes.

Correa, Nunes e Bryant (1998) afirmam que a divisão, enquanto operação, não é o mesmo que partilha, apesar de esta constituir o esquema de ação que a origina: segundo os autores, quando partilham, as crianças não têm qualquer preocupação a não ser a igualdade das partes, enquanto o conceito de divisão "envolve a compreensão das relações entre os três valores, representados pelo dividendo, pelo divisor e pelo quociente" (p. 321).

As crianças precisam compreender que, quanto maior for o número a ser dividido (divisor), mantendo-se o dividendo constante, menor será o número final (quociente); quanto maior o dividendo, mantendo-se o divisor constante, maior será o quociente.

A divisão insere-se no campo das estruturas multiplicativas, pois requer o raciocínio multiplicativo (relação divisor-quociente) e utiliza o mesmo tipo de estratégia de solução usada nos problemas de multiplicação — o esquema de correspondência ou o esquema de distribuição, entendendo **esquema** como uma "representação em que aparece apenas o essencial daquilo que é representado; os detalhes não aparecem" (NUNES et al, 2001, p. 42). Tais autores explicam que "um esquema de ação é constituído por uma representação da ação em que apenas os aspectos essenciais da ação aparecem: não importam, por exemplo, os objetos sobre os quais a ação foi executada" (NUNES et al, 2001, p.42).

Considerar a ação, e não os objetos envolvidos na ação, constitui o que Gerard Vergnaud chamou de "teoremas em ação"[11]. Por exemplo, quando a criança conta, nos dedos, a quantidade de balas que tinha e com quantas ficou, após ganhar mais um tanto, está contando, na verdade, os dedos, que representam a quantidade de balas. Nesse caso, ela realizou uma ação de juntar, portanto, um esquema[12] de ação.

Nessa perspectiva, o ensino da Matemática deve ser construído a partir da coordenação entre os esquemas de ações, o raciocínio desenvolvido dentro ou fora da sala de aula e as representações matemáticas.

---

[11] "Teoremas em ação são definidos como relações matemáticas levadas em consideração pelos estudantes, quando eles escolhem uma operação ou uma sequência de operações para resolver um problema. São teoremas no sentido convencional do termo, porque a maioria deles não são explícitos." (VERGNAUD, 1988, p.4).

[12] Esquemas são as unidades básicas da atividade prática e mental. (DELVAL, 2007, p. 83).

Enquanto, na adição e na subtração, os esquemas de ação envolvidos são o de *juntar* e o de *retirar*, respectivamente, na multiplicação e na divisão, empregam-se os esquemas de *correspondência um a muitos* e de *distribuição.* (NUNES et al, 2001). Vejamos o exemplo de dois problemas apresentados por esses autores:

Um problema de multiplicação: *Márcio convidou três amigos para sua festa de aniversário. Para cada amigo, ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas de gude precisa comprar?* – há duas variáveis (número de amigos e número de bolas), numa relação constante (5 bolas para cada amigo).

Um problema de divisão: *Márcio tem 15 bolas de gude. Ele vai distribuí-las igualmente entre seus três amigos. Quantas bolas de gude cada um vai ganhar?* — há duas variáveis (número de amigos e número de bolas), em uma relação fixa, mas essa relação fixa não é conhecida, o que impede que ele seja resolvido por correspondência. “De fato, a pergunta nesse problema é exatamente qual a relação que devemos fixar para que o número de bolas por amigo seja constante” ((NUNES et al, 2001, p.82).

Segundo os autores, o esquema de ação utilizado na resolução desse problema (divisão) é o de *distribuir*; para resolver esse problema, as crianças utilizam o esquema de distribuir: pegam 15 bolinhas e distribuem entre os 3 amigos assim — 1 bola para A; uma para B, 1 para C: 1 para A, 1 para B e 1 para C; 1 para A, 1 para B e 1 para C — a relação é constante. Esse tipo de problema é denominado pelos autores como *problema inverso*; já em outros trabalhos, é chamado de *divisão por quotas*, nomenclatura adotada no presente estudo.

Os problemas de divisão podem ser definidos como de dois tipos: *partição* e *quotição*. Em problemas de divisão partitiva, tem-se uma quantidade total que deverá ser distribuída por um número de partes predeterminado, devendo-se calcular o valor de cada parte. Em problema de divisão por quotas, tem-se a quantidade total e o valor de cada quota, devendo-se calcular a quantidade de quotas. Vejamos um exemplo:

> Problema partitivo: O time de futebol da cidade vai levar 756 torcedores para assistir a um jogo no estádio do Morumbi e irão alugar 18 ônibus para isso. Quantos torcedores caberão em cada ônibus?

Problema quotitivo: O time de futebol da cidade vai levar 756 torcedores para assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus deverão ser alugados?

Conforme Correa (1996), a divisão partitiva está relacionada às experiências iniciais da criança que, ao repartir, o faz com base na correspondência um-a-um, pois tudo o que ela deve fazer é “repetir as mesmas ações até que não haja mais elementos a serem partilhados ou haja um número insuficiente para uma nova rodada” (p. 155). Isso pode ser confirmado pela perspectiva teórica piagetiana, uma vez que o esquema de correspondência biunívoca é uma das primeiras ideias matemáticas, surgindo com a contagem. Assim, pode-se esperar que a partição seja vivenciada pela criança em suas primeiras ações de dividir.

Essa autora alerta, porém, que não se deve confundir a ação de repartir com a de dividir, pois a divisão, enquanto operação multiplicativa, requer a coordenação de outras variáveis, como a relação variável entre divisor e dividendo, ou seja, não se trata apenas de separar quantidades, mas de considerar o valor dos conjuntos. Para tanto, é necessário um pensamento um pouco mais avançado, a fim de se coordenarem todas essas relações.

Dessa forma, a divisão por quotas requer esquema mental mais elaborado, o de distribuir, que envolve cálculos mais complexos e a capacidade de estimar resultados, o que representa um avanço qualitativo do pensamento.

Segundo Correa (2006, p.185-1860):

> Na divisão partitiva, a criança deve repartir uma determinada quantidade em dado número de cotas equivalentes. [...]. Na divisão partitiva são conhecidos o valor da quantidade a ser distribuída e o número de cotas para tal distribuição. Resta saber o valor de cada quota. Em suma, o modelo partitivo da divisão poderia ser expresso como: “divida *x* em *y* partes iguais”.
>
> Na divisão por cotas, a criança necessita descobrir quantas vezes uma determinada quantidade está contida na quantidade maior. [...]. Na divisão por cotas, são conhecidos a quantidade total e o valor de cada uma das cotas. Ao contrário da divisão partitiva, procura-se determinar, nesse tipo de problema, o número exato de cotas possíveis. Objetiva-se, portanto, neste modelo, responder à pergunta de quantos *y* há em *x*.

Nunes et al (2001) preferem caracterizar o problema por quota como problema inverso de multiplicação, “porque os alunos resolvem o problema com a mesma estratégia que utilizam para resolver problemas de multiplicação” (p.91). Esses autores fornecem um exemplo:

Problema direto*:* Temos 27 balas para distribuir para três crianças. Todas querem ganhar a mesma quantidade de balas. Quantas balas cada uma vai ganhar?

Problema inverso*:* Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier à festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões, quantos amigos ele pode convidar?

Esses autores explicam que problemas diretos são mais fáceis de solucionar, uma vez que é apresentada, às crianças, uma quantidade para ser distribuída igualmente, enquanto, no problema inverso, são informadas, às crianças, a quantidade e a relação desta por pessoa e o que se quer saber é o número de pessoas. “O que distingue os dois tipos de problemas é a situação descrita: num caso, parte-se de uma correspondência 1 a muitos, no outro, uma situação de distribuição” (Nunes et al, 2001, p.92).

Para Fischbein, Deri, Marino e Nello (1985), o modelo de divisão por quotas pode ser visto como uma subtração repetida, pois ela visa a estabelecer quantas vezes uma determinada quantidade está contida em uma quantidade maior (somente se o dividendo for maior que o divisor e o quociente um número inteiro). Segundo esses autores, “a estrutura do problema determina qual modelo é ativado”.

Além dessa complexidade conceitual, existe uma complexidade gráfica e linguística, apontada por Anghileri (1993), citado por Ferreira e Lautert (2003), quando alerta para as diferentes formas de se representar matematicamente a divisão:

> [...] a expressão verbal 12 dividido por 4, pode ser representada de diferentes formas matemáticas, como por exemplo: 12/4; 12:4. Essas diferentes formas convencionais de se expressar o conceito de divisão provocam dificuldades de compreensão a quem está dando os seus primeiros passos na construção desse conceito matemático, ou seja, na direção do processo de conceituação da divisão (p.550).

O presente estudo foi empreendido na procura de compreender melhor como as crianças representam a operação de divisão.

## 2.2 Representação gráfica da divisão

Compreender e interpretar os sistemas de representação constituem um assunto que tem interessado a diversos estudiosos do desenvolvimento humano, especialmente àqueles que se interessam pelo desenvolvimento cognitivo.

Olivier, Murray e Human (1991), buscando descrever e analisar as estratégias de solução de problemas de divisão em crianças norte-americanas, entre 5 e 9 anos de idade, por meio da observação e da interação social, afirmaram que as crianças inventam “poderosos algoritmos” em detrimento dos algoritmos ensinados na escola; elas preferem usar seus próprios algoritmos, quando lhes é permitido, e a taxa de sucesso quando usam seus próprios algoritmos é significativamente maior do que quando usam algoritmos-padrão.

As estratégias de solução encontradas pelos autores foram: *representação direta* — desenho de ações que foram necessárias à solução; *representação numérica* — uso de algarismos sem emprego da operação, com estimativa repetida (ensaio e erro) e estimativa por ajuste (estimando pelos restos); *subtração*; adição — multiplicação e *transformação* (realizando vários “arranjos” com os números, por exemplo: 4158 ÷ 11

300 x 11 = 3300 e 78 x 11 = 858 / 3300 + 858 = 4158

Verificaram que, mesmo as crianças mais novas, utilizam estratégias sofisticadas de solução para operar com números maiores e que não encontraram dificuldades em operar com problemas de divisão partitiva e por quotas, sugerindo que o ensino da divisão deve se basear em problemas com enunciados (*word problems*).

Os autores concluíram, refutando Fischbein et al (1985), que as crianças mais novas podem resolver tanto problemas de partição como de quotição, intuitivamente, antes de qualquer instrução formal.

Lautert e Spinillo (1999), procurando verificar, por meio de problemas verbais, quais elementos da operação de divisão (termos e procedimentos) são representados por crianças de 5 a 9 anos de idade, e como o são, encontraram algumas categorias de grafismos, baseadas em Hughes (1986): *idiossincrática*, grafismos irregulares, sem relação com a operação; *icônica*, sinais gráficos (traços, riscos etc.), relacionados às quantidades envolvidas; *simbólica*, símbolos convencionais, e *mista*.

Com relação aos termos da divisão representados, as autoras identificaram uma tipologia de condutas: *tipo 1* - sem relação com as quantidades; *tipo 2* - relacionadas ao enunciado, mas sem tentativa de solução; *tipo 3* - com solução por meio de outras operações e tipo 4 - solução através da divisão, tipificando-se as do grupo 3 e 4 como mais evoluídas que as do 1 e 2.

Em seu estudo, as autoras concluíram que a relação entre os grafismos e os procedimentos de solução é influenciada pela instrução e que as crianças menores representaram o que foi dito, enquanto as mais velhas tenderam a representar os procedimentos de solução.

Starepravo e Moro (2005), realizaram um estudo, com crianças de 3ª série, sobre os procedimentos de solução escrita de problemas de compra, envolvendo multiplicação e divisão, propostos oralmente e com o apoio de encartes ilustrativos e ofertas, sem que os estudantes fossem informados de que se tratava de uma atividade de solução de problemas. As autoras analisaram a antecipação da solução, a produção da notação e a interpretação que as crianças deram às suas notações.

Verificaram que as antecipações se manifestaram em diferentes níveis, da antecipação do procedimento à antecipação do resultado por cálculo mental, sendo algumas delas de estimativa de conteúdo qualitativo, mais presente na multiplicação, e de conteúdo quantitativo, mais presente na divisão (nas últimas, em geral, as crianças usaram resultados de um problema anterior).

Algumas crianças antecipam a operação, mas não o procedimento; outras antecipam o procedimento e outras, ainda, antecipam o resultado por cálculo mental.

No entanto a antecipação do procedimento a utilizar não ocorreu nos problemas de divisão, levando as autoras a entender que esses problemas são mais difíceis do que os da multiplicação e atribuem isso ao fato de:

> Na multiplicação, a relação com a adição ser bastante forte para as crianças e a ação de repetição ser mais facilmente representada mentalmente [...]. Já a

> divisão [...] parece trazer uma dupla dificuldade para as crianças: primeiro a operação não mantém a mesma relação direta com a adição; segundo, exige uma inversão no raciocínio multiplicativo. (MORO e STAREPRAVO, 2005, p. 120).

No estudo das autoras, as notações encontradas foram, em sua maioria, "diferentes das ensinadas na escola", creditando-se, a isso, o fato de serem problemas apresentados oralmente, deixando as crianças mais livres para representá-los. As notações variaram entre notações de adição, de multiplicação, de subtração e combinadas, predominando a aditiva nos dois tipos de problemas (multiplicação e divisão). Nos problemas de divisão por quotas, as crianças adicionavam valores unitários até obterem o valor do dividendo.

As autoras observaram que, em problemas de divisão, os procedimentos de solução eram construídos durante o processo de produção da notação; por outro lado, que a notação de divisão aparecia apenas como representação do problema, resolvido pela multiplicação.

As interpretações que essas crianças deram às suas notações foram de conteúdo explicativo (relatando os passos do algoritmo convencional) e de conteúdo avaliativo (fazendo novas tentativas de solução, quando percebiam o emprego de um procedimento inadequado), levando as autoras a concluir que os problemas devem ser usados como situação de aprendizagem e devem ser apresentados antes do ensino das técnicas operatórias.

Selva (2003), procurando investigar o uso de estratégias em solução de problemas de divisão com material concreto (fichas ou lápis e papel), comparou o desempenho de crianças entre 6 e 8 anos de idade e constatou o seguinte: que os melhores desempenhos foram os de crianças das séries mais avançadas e que o maior índice de acerto ocorreu nos grupos que tinham algum material para utilizar como apoio.

As estratégias empregadas pelas crianças desse estudo variaram entre representações concretas (com as fichas), representações gráficas (com lápis e papel) e cálculo mental (sem material) e foram categorizadas da seguinte forma:

1). Representação direta com distribuição de pequenas quantidades — uso da correspondência um-a-um, ou separação dos elementos em grupos de 2 ou 3;

2). Representação direta com formação de grupos (característica de problemas de quotição) — a criança contava fichas ou desenhava marcas em um número correspondente ao valor do dividendo, formando grupos com a quantidade indicada pelo valor do divisor (circulando os grupos quando usavam lápis e papel);

3). Ensaio e erro (mais frequente em problemas de partição e com o uso de lápis e papel) — a criança escolhia várias vezes certo número de elementos para constituir cada grupo, contando o total até chegar ao valor do dividendo, também caracterizado pelo desenho de conjunto de bolinhas;

4). Repetição aditiva, incluindo tanto a repetição aditiva como a repetição subtrativa;

5). Uso imediato de fatos conhecidos, envolvendo multiplicações ou divisões, podendo indicar a memorização da tabuada ou uma compreensão da divisão.

As conclusões da autora foram que a representação direta é mais frequente nas séries mais adiantadas e o uso de objetos de apoio é mais recorrente nas crianças pequenas, mas que objetos concretos que representem numericamente as quantidades podem inibir o emprego de estratégias mentais mais sofisticadas e, sozinhos, não têm quase nenhuma utilidade.

Borba e Selva (2006) investigaram o desempenho de crianças de 3ª e 5ª séries em problemas de divisão com resto diferente de zero, com o objetivo de investigar o efeito de significados atribuídos à divisão e de representações simbólicas na solução de problemas.

Os resultados da pesquisa dessas autoras foram que, das crianças de 3ª série, 69% apresentaram representações pictográficas, através de desenhos, enquanto 31% apresentaram representações algorítmicas ou heurísticas. Na 5ª série, 19% foram representações pictográficas ou por desenho, 69% foram representações algorítmicas e 12% algorítmicas e heurísticas. Ou seja, o algoritmo formal foi mais utilizado pelas crianças da 5ª série.

Algumas crianças utilizavam mais de uma forma de representação o que, na opinião das autoras, “pode auxiliar na resolução de problemas” (p.11), como, por exemplo, usar o algoritmo para resolver um problema de divisão e depois definir o tratamento do resto da divisão por meio de desenhos. Isso, segundo as autoras, pode constituir uma estratégia de solução eficiente.

Observou-se que a maioria dos alunos das duas séries utilizou estratégias adequadas (na partição e na quotição), evidenciando que compreendem igualmente problemas com esses dois significados, apesar de utilizarem procedimentos variados de solução. Além disso, percebeu-se que as crianças dão tratamento ao resto da divisão, de forma independente do tipo de problema, porém, de maneira inadequada, sugerindo que a escola deve trabalhar mais cuidadosamente com esse aspecto, estimulando o uso de estratégias variadas — algorítmicas ou não —, mas sempre baseadas na compreensão.

Nas pesquisas revisadas aqui, procurou-se buscar fundamentação teórica e metodológica para o estudo empreendido, uma vez que se investigam as representações gráficas de crianças em solução de problemas de divisão. Ressalte-se que o interesse do presente estudo não está em verificar se a criança erra ou acerta ao solucionar os problemas, mas que outros elementos podem estar envolvidos em sua representação.

# CAPÍTULO 3. MÉTODO - SUJEITOS, PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS

O objetivo do presente capítulo é apresentar a metodologia deste estudo, que buscou investigar as formas de representação gráfica, pelos alunos de 4º e 5º anos de uma escola privada, da solução de problemas aritméticos de divisão.

O delineamento da pesquisa baseou-se no tipo *ex-post facto* "cujo propósito é verificar a relação entre variáveis" e no qual "o pesquisador não dispõe de controle sobre a variável independente, que constitui o fator presumível do fenômeno, porque ele já ocorreu" (GIL, 2002, p. 49).

Para o desenvolvimento desta pesquisa, optou-se por utilizar o método do exame clínico (PIAGET, 1926). A questão central, elucidada às crianças, era a de que explicassem *como* pensaram para resolver os problemas propostos, por sua vez, resolvidos espontaneamente.

Algumas perguntas foram padronizadas em um roteiro pré-estabelecido e outras foram adaptadas às respostas e às atitudes das crianças, que foram incitadas a justificá-las, favorecendo, assim, uma melhor compreensão das estruturas de pensamento que lhe são próprias.

O método clínico é um procedimento em que se cria um diálogo na situação experimental, mediante o qual a criança tem que decidir sua resposta em função da contra-argumentação do experimentador. É desenvolvido através de interrogatórios, em forma de conversa, e envolve a observação direta, porém ultrapassa a observação pura, uma vez que há interação entre os envolvidos, ou seja, o experimentador participa ao vivo da experiência do sujeito, de maneira a estabelecer-se um diálogo constante entre eles.

O método clínico, também conhecido como "método de exploração crítica" ou "método crítico", é clássico em medicina psiquiátrica, ou em psicopatologia, pois define uma "psicologia clínica", uma vez que as generalizações são feitas a partir dos casos estudados. É como um estudo clínico, ou seja, a cada prova aplicada é como se se fizesse um estudo de caso; ele é "crítico", pois utiliza argumentações contrárias às afirmações do sujeito, captando não apenas a firmeza de suas convicções, mas também seu processo de pensamento e a estrutura característica de certo estágio de desenvolvimento (MANTOVANI DE ASSIS, 1996, p. 262).

É característica desse método não ser padronizado por meio de um vocabulário fixo, pois ele parte de ideias e adapta-se às expressões, às respostas, às atitudes e ao vocabulário do sujeito, ou seja, ele não se limita a perguntas estandardizadas, mas possibilita a livre conversação, que tem a vantagem de poder ser adaptada a cada criança e de permitir que ela reflita sobre suas ações e afirmações, evitando, assim, os inconvenientes do teste. Por ser possível adaptá-lo ao vocabulário da criança, pode-se atribuir, à situação, um caráter de entretenimento, o que favorece sua utilização.

No decorrer do exame, o experimentador leva em conta as hipóteses do sujeito, ao mesmo tempo em que realiza, sem cessar, suas hipóteses; coloca-lhe problemas, fazendo variar as condições em jogo, de modo a controlar as hipóteses do sujeito e suas reações provocadas pela conversa, levando em consideração a qualidade dessas reações (respostas e comportamentos).

A importância desse método é a de que ele se destina a decifrar os domínios do pensamento infantil, possibilitando, ao mesmo tempo, uma sistematização das condutas originais, muitas vezes imprevisíveis, do comportamento da criança.

A fim de verificar e de adequar o emprego da metodologia proposta para o trabalho, foi realizado, em novembro de 2008, um estudo-piloto com 6 estudantes da mesma escola – 3 do 4º ano e 3 do 5º.

A partir da análise dos resultados obtidos no estudo-piloto, os instrumentos para a coleta de dados foram adequados e complementados para a coleta final, acrescentando-se mais um instrumento (Prova da Multiplicação e Divisão Aritmética) e ampliando-se a amostra do estudo para 20 estudantes.

### Caracterização dos sujeitos e do ambiente escolar:

A escola na qual foi realizada a presente pesquisa é uma cooperativa educacional, que atende a alunos de Educação Infantil e Ensino Fundamental I e II. Foi criada em 1992, num período em que se começaram a difundir, principalmente no

Estado de São Paulo, as escolas cooperativas, que tinham como principais objetivos a implementação de um modelo de gestão participativa e de uma proposta pedagógica baseada em princípios construtivistas de educação.

Os alunos dessa escola são oriundos de classe social média e o perfil profissional de seus pais é composto de profissionais liberais, comerciantes, bancários e professores.

Do ponto de vista da estrutura física, possui um espaço simples, pequeno, rústico, acolhedor e com boa área verde. A meta da escola, conforme seu projeto político-pedagógico, é tecer e fortalecer, cotidianamente, laços de solidariedade, amizade, respeito e cooperação, por meio de assembleias de alunos, da representatividade de classe, dos sistemas de eleições para os conselhos representativos, dentre outras ações.

Apresenta características peculiares, diferente de tantas outras, a começar pelas ações administrativas e pedagógicas, estabelecidas em conjunto pelos envolvidos – equipe técnico-pedagógica, corpo docente, funcionários, corpo discente e pais.

Atende a crianças da Educação Infantil, entre 3 e 5 anos, e do Ensino Fundamental do 1º ao 9º anos, com uma média de 15 alunos por classe. A escola adotou, já no início dos anos 90, os Ciclos de Escolaridade e a inclusão de alunos com necessidades especiais. Prioriza vivências em um meio sobre o qual a criança possa agir e interagir com seus pares e com os demais, para que possam discutir, decidir, realizar e avaliar ações cooperativamente, proporcionando, aos alunos, desde cedo, o desenvolvimento de suas capacidades e a participação da vida social em grupo.

De maneira geral, as crianças são bem estimuladas do ponto de vista da aprendizagem escolar; percebe-se que é propiciado, aos alunos, o desenvolvimento da autonomia moral e intelectual, pois, durante a interlocução com a pesquisadora ao longo do estudo, os alunos dialogaram com espontaneidade, fizeram perguntas, questionaram e souberam posicionar-se de maneira crítica e criativa frente às questões a eles propostas.

Do ponto de vista do ensino da Matemática, os alunos são estimulados a pensar sobre os problemas propostos e são priorizadas as formas particulares de representações na solução de situações-problema.

Um dos recursos bem utilizados e explorados pelo grupo de professores da escola são os jogos em grupo, dentre os quais, jogos aritméticos, utilizados com frequência, tais como: quilles, mancala, senha, tan gran, sjoelbak, feche-a-caixa, jogos de dados, de percurso etc. Os alunos jogam, discutem as estratégias, justificam e registram os resultados. O professor participa desses grupos, levantando situações-problema para a classe toda resolver. Diversos jogos são elaborados e confeccionados na própria escola, pelos professores e seus alunos.

Ainda na área da Matemática, a escola conta com uma consultora que tem, por objetivo, orientar os professores a planejar situações de ensino compatíveis com sua proposta pedagógica. Os professores respeitam o processo de construção do conhecimento dos alunos; a organização do ambiente da sala de aula proporciona o trabalho coletivo entre os alunos, incentivando a interação social e as atividades cooperativas; respeitam a atividade das crianças, suas hipóteses de conhecimento e, do ponto de vista da aprendizagem, não exigem dos alunos o rigor conceitual dos conteúdos de ensino, respeitando os seus procedimentos espontâneos. Especialmente na área da Matemática, objeto de estudo desta pesquisa, a professora propõe discussões, momentos de reflexão individual e coletiva e a troca de ideias em duplas e pequenos grupos de alunos.

## 3.1. Sujeitos

Para compor a amostra de sujeitos, do universo de 39 estudantes de 4º e 5º anos, foram eliminados 5 (4 deles por não terem sido autorizados pelos responsáveis a participar do estudo e 1 por já ter participado do estudo-piloto).

Assim, dos 34 restantes, selecionaram-se 20 estudantes, 10 de cada ano de escolaridade, respectivamente. Para compor a amostra, foram aplicados os três primeiros problemas (1ª série) e, após a correção dos mesmos, conforme descrito no item V (infra), foram selecionados os estudantes que obtiveram a melhor nota nos sistemas de correção.

Assim, a composição da amostra configurou-se da seguinte maneira:

| Sujeito | Identificação | Idade | Ano | Sexo |
|---|---|---|---|---|
| E 1 | AMA | 9,6 | 4º | feminino |
| E 2 | AUG | 9,6 | 4º | masculino |
| E 3 | FLA | 9,6 | 4º | masculino |
| E 4 | GUIO | 9,10 | 4º | masculino |
| E 5 | LAUB | 9,10 | 4º | feminino |
| E 6 | LAUR | 9,7 | 4º | feminino |
| E 7 | LUA | 9,7 | 4º | masculino |
| E 8 | MAT | 9,10 | 4º | masculino |
| E 9 | TAI | 10,3 | 4º | feminino |
| E 10 | THI | 9,11 | 4º | masculino |
| E 11 | BEA | 10,8 | 5º | feminino |
| E 12 | BIA | 11,2 | 5º | feminino |
| E 13 | BRU | 10,7 | 5º | feminino |
| E 14 | GUIS | 11,1 | 5º | masculino |
| E 15 | JOA | 10,10 | 5º | masculino |
| E 16 | JHU | 10,9 | 5º | feminino |
| E 17 | JUL | 11,3 | 5º | feminino |
| E 18 | LUC | 10,7 | 5º | masculino |
| E 19 | PED | 10,5 | 5º | masculino |
| E 20 | VAN | 10,3 | 5º | feminino |

**Quadro 2. Composição da amostra de sujeitos, por idade, ano de escolaridade e gênero.**

## 3.2 Instrumentos

Para a coleta de dados, a partir da seleção da amostra de sujeitos, foram utilizados os seguintes materiais:

I. **Prova aritmética de divisão,** composta por um conjunto de seis problemas de divisão por quotas, com números inteiros e sem resto, que foram solucionados com lápis e papel, sendo três na 1ª série de problemas (1ª etapa da coleta) e outros três na 2ª série de problemas (2ª etapa da coleta), descritos a seguir:

### 1ª série de problemas (1ª etapa)

**4º ano:**

*1. Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?*

*2. O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?*

*3. Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?*

**5º ano:**

*1. Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-los em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?*

*2. No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas nesse telhado?*

*3. Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?*

**2ª série de problemas (2ª etapa)**

**4º ano:**

1. *Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniatura. Nas carretas são colocadas 14 rodinhas: na fábrica há 364 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?*

2. *Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar esse jogo?*

3. *Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?*

**5º ano:**

*1. Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. De quantas caixas ela vai precisar?*

*2. Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?*

4. *Porque Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?*

Os problemas foram selecionados e adaptados pela pesquisadora, a partir de Nunes et al (2001), Brito e Correa (2004) e de alguns livros didáticos de Matemática destinados às respectivas faixas etárias. Posteriormente, foram confrontados com os problemas contidos nos livros utilizados pelos sujeitos da pesquisa, para verificar se apresentavam estrutura semelhante à qual os estudantes estavam familiarizados, confirmando, assim, a aplicabilidade dos mesmos.

**II. Entrevista semi-estruturada** composta de um roteiro fundamentado no método clínico, com 11 questões básicas, permitindo, porém, a adequação das questões, bem como sua complementação com novas perguntas.

A entrevista era realizada após a solução da 2ª série de problemas e o roteiro dela encontra-se no Anexo V.

**III. Prova da multiplicação e da divisão aritmética[13],** (GRANELL, 1983), que consiste na simulação de uma situação de compra e venda, colocando-se nove grupos de objetos com seus respectivos preços diante da criança (com valores variando entre R$1,00 e R$9,00) e fichas simulando moedas de R$1,00.

Essa prova é composta de 2 situações:

1ª. Multiplicação aritmética — propõem-se situações nas quais as crianças são solicitadas a responder qual a quantidade de dinheiro necessária para se comprarem determinadas quantidades de objetos;

2ª. Divisão aritmética — coloca-se determinada quantia de fichas, representando moedas de 1 real, diante das crianças e pede-se, a elas, que digam quantos objetos é possível comprar com determinada quantia de dinheiro (2ª situação – divisão aritmética).

**IV. Registros videográficos** — usados como recurso auxiliar para a análise dos relatos verbais dos sujeitos e dos diálogos entre eles e o pesquisador;

---

[13] A descrição completa deste procedimento pode ser encontrada no Anexo VI.

**V. Sistema de correção dos problemas** — para a seleção da amostra de sujeitos, os problemas da 1ª série (1ª etapa) foram corrigidos de duas formas: pelo sistema convencional (respostas certas = 1 ponto / respostas erradas = 0 pontos) e pelo Sistema de Pontuação Cinco-pontos[14] elaborado por Charles (1988), atribuindo-se uma pontuação para a solução dos problemas dos estudantes que varia entre zero e cinco pontos, conforme demonstra o quadro a seguir:

| **Número de pontos** | **Observação das características da solução dos estudantes** |
|---|---|
| **0** | • Papel em branco<br>• Cópia dos números do problema – falta de compreensão do problema<br>• Resposta incorreta e não trabalhou para responder |
| **1** | • Inicia usando estratégias inapropriadas – não finaliza o problema<br>• Abordagem sem sucesso – não tenta abordagem diferente<br>• Tentativa falha, não consegue alcançar um sub-objetivo |
| **2** | • Estratégia inapropriada – mas mostra certa compreensão do problema<br>• Usa estratégia apropriada, mas não encontra a solução – alcança um sub-objetivo, mas não finaliza o problema<br>• Resposta correta, mas não mostra o trabalho |
| **3** | • Usa estratégia apropriada, mas:<br>• Ignora a condição do problema<br>• Resposta incorreta sem razão aparente<br>• Pensamento confuso do procedimento |
| **4** | • Usa estratégias apropriadas<br>• O trabalho reflete a compreensão do problema<br>• Resposta incorreta devido a erro de cópia ou de cálculo |
| **5** | • Estratégias apropriadas<br>• O trabalho reflete compreensão do problema<br>• Resposta correta |

**Quadro 3. Sistema de pontuação de cinco pontos. (CHARLES, 1988, p.49).**

---

[14] Trata-se de uma técnica de avaliação sugerida pelo autor na reunião do National Council of Supervisors of Mathematics (NSCM), em abril de 1986, em Washington. Consiste em um “sistema holístico” que, segundo o autor, se baseia na ideia de que a maneira pela qual os estudantes solucionam problemas deve ser considerada como uma “entidade inteira”, ou seja, “é maior que a soma das partes”, valorizando, assim, os procedimentos utilizados durante a solução de problemas (CHARLES, 1988, p. 50).

### 3.1.3 Procedimentos

Os procedimentos adotados foram os seguintes:

a) Contato com a escola, a fim de solicitar a autorização para realizar a pesquisa;
b) Pedido de autorização, aos pais dos estudantes, para que estes participassem da pesquisa, mediante a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo II);
c) Coleta de dados, dividida em quatro etapas subsequentes, conforme apresentado a seguir:

#### <u>1ª etapa – Seleção dos Participantes - Prova Aritmética de Divisão (1ª série de problemas)</u>

A primeira etapa consistiu na aplicação das provas aritméticas de divisão, compostas dos três problemas de divisão por quotas.

Em sala de aula, na presença de todos os estudantes e de sua professora, foram distribuídas as folhas, contendo os três problemas de divisão por quotas (da 1ª série), para a população de estudantes do 4º e do 5º anos, em dias alternados. Identificaram-se, então, as folhas com os problemas impressos por meio do nome, da data e do ano escolar do estudante.

A pesquisadora solicitou, aos participantes, que solucionassem, individualmente, os três problemas propostos, da maneira como julgassem melhor, registrando, no papel, os procedimentos[15] de solução e a resposta que julgassem correta. Ao finalizarem, entregaram seus protocolos para a pesquisadora.

A seguir, foram corrigidos[16] os três problemas de cada criança, escolhendo-se, por meio das respostas, 10 sujeitos de cada classe, os que obtiveram a maior

---

[15] Procedimentos são meios, ou caminhos, utilizados pelas crianças para resolver um problema. (STAREPRAVO e MORO, 2005).

[16] Utilizando o sistema de correção detalhado no item V (supra).

pontuação na prova aritmética de divisão. O resultado foi um grupo de 20 sujeitos, 10 do 4º ano e 10 do 5º.

### 2ª etapa – Prova Aritmética de Divisão (2ª série de problemas) – amostra do estudo

Numa segunda etapa, depois de selecionados os sujeitos, em outra sala e com um sujeito por vez, foram devolvidos os problemas solucionados na primeira etapa, juntamente com uma folha em branco de papel sulfite; solicitou-se, então, a cada estudante, que explicasse "como pensou" enquanto solucionava aqueles problemas; caso desejasse, poderia, nessa explicação, utilizar a folha em branco.

Na sequência, propuseram-se três novos problemas (da 2ª série), cada um deles em uma folha separadamente, para que os estudantes os solucionassem e explicassem "como estavam pensando", enquanto o faziam. O objetivo foi duplo: obter detalhes sobre as representações mentais deles durante[17] os procedimentos de solução e elaborar protocolos mais confiáveis de respostas.

### 3ª etapa – Entrevista semi-estruturada

As seis primeiras perguntas do roteiro foram feitas, na maioria dos casos, após a solução de todos os problemas; já as cinco últimas, assim que as crianças terminavam a explicação sobre os procedimentos adotados na 1ª série de problemas.

### 4ª etapa – Prova – Multiplicação e Divisão Aritmética

Os objetos, com seus respectivos preços, foram dispostos sobre uma mesa e assim que as crianças terminavam de resolver os problemas da 2ª etapa e de

---

[17] A representação mental diz respeito à antecipação da solução do problema ou à imagem que o sujeito cria para elaborar estratégias de solução, que pode ser identificado pela representação gráfica ou pela verbalização do sujeito.

responder às questões colocadas pela pesquisadora, dirigiam-se a esta mesa, para que iniciassem esta prova, que consiste em duas situações:

*1. Primeira Situação - Multiplicação Aritmética* – seu objetivo é o de verificar se o sujeito apenas faz antecipações, ou se introjetou a ideia do operador multiplicativo.

*Procedimento*: O experimentador pede à criança que coloque o dinheiro necessário para comprar determinado objeto. Em seguida, põe vários deles, do mesmo tipo, sobre a mesa e solicita que o sujeito coloque, também sobre a mesa, o dinheiro necessário para comprá-lo (s). Importante notar que não se enumera a quantidade de objetos. Repete-se o procedimento variando os objetos e sua quantidade.

*2. Segunda Situação - Divisão Aritmética* – seu objetivo é o de verificar a construção da compensação necessária entre as variáveis.

*Procedimento*: O experimentador entrega para a criança uma determinada quantidade de moedas e pergunta-lhe quantos objetos de um determinado tipo podem ser comprados com aquela quantia de dinheiro (por exemplo: quantos objetos podem ser comprados com 18 moedas). Se a criança chegar a uma conclusão correta, ser-lhe-á proposto que pense se, com as mesmas moedas, poderá comprar algum outro objeto dentre os existentes na loja, de maneira que não lhe sobrem, nem lhe faltem moedas. A criança será avisada de que todos os objetos que poderá comprar deverão ser do mesmo tipo.

Todas as atividades para a coleta de dados foram realizadas no período vespertino, durante os horários destinados às aulas de Matemática.

A frequência dos dias variou em função da rotina e da disponibilidade dos estudantes e das professoras as quais, por sua vez, muito contribuíram para o estudo, disponibilizando várias aulas a fim de que a pesquisa de campo pudesse ser realizada.

Registraram-se, com câmera filmadora e gravador de voz, os procedimentos de coleta de dados, realizados com os estudantes. Em seguida, fez-se a transcrição das gravações, registrando-se todas as falas da pesquisadora e dos sujeitos, bem como suas expressões faciais e gestuais. Após a transcrição, o material foi relido, a fim de obter-se maior precisão dos dados.

No início das atividades, explicava-se aos estudantes que a gravação e a filmagem seriam necessárias para a pesquisa, uma vez que outras crianças participariam do estudo, sendo inviável, em termos de memória, que a pesquisadora se lembrasse da conversa levada com todas.

Procurou-se deixá-los bastante à vontade, de modo que não se observasse nenhum constrangimento por parte deles, como de fato ocorreu; parecia terem se adaptado facilmente à situação.

Ao todo, o procedimento de coleta de dados resultou em vinte e cinco horas de gravação, transcritas integralmente.

# CAPÍTULO 4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados da pesquisa empírica. A análise dos dados deste estudo é de natureza quantitativo-qualitativa; para tanto, consideraram-se as representações gráficas das crianças, os procedimentos empregados na solução dos problemas, bem como a justificativa dada para essa escolha, a psicogênese das noções de multiplicação e de divisão, bem como as respostas à entrevista.

Procedemos à análise da seguinte forma:

1. Análise dos procedimentos de solução de problemas empregados pelos estudantes;
2. Análise das representações gráficas;
3. Análise do desempenho dos sujeitos na Prova de multiplicação e de divisão aritméticas;
4. Análise dos erros cometidos pelos estudantes na solução dos problemas;
5. Análise das respostas à entrevista.

Inicialmente, para compor a amostra de sujeitos foi aplicada a Prova Aritmética de Divisão composta de três problemas de divisão por quotas (1ª série de problemas) para o universo de estudantes (18 de 4º ano e 21 do 5º).

O material de análise dos dados foi constituído dos protocolos da Prova Aritmética de Divisão contendo as representações gráficas dos sujeitos, do protocolo das entrevistas, dos protocolos da Prova de Multiplicação e de Divisão Aritméticas, da filmagem e da transcrição de todas as atividades.

Conforme dito anteriormente, para a composição da amostra, foram corrigidos os três problemas da 1ª série pelos dois sistemas e, a partir da pontuação obtida pelas crianças, foram selecionados os 20 sujeitos a obterem a maior pontuação[18], apresentada no quadro a seguir:

---

[18] O quadro com a pontuação da população de estudantes encontra-se no Anexo VII.

| sujeitos | Pontuação pelo Sistema Convencional | | | Pontuação pelo Sistema Charles | | | Total de pontos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | prob. 1 | prob. 2 | prob. 3 | prob. 1 | prob. 2 | prob. 3 | |
| **ESTUDANTES DO 4º ANO** | | | | | | | |
| E 1 - AMA | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 2 - AUG | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 4 | 14 |
| E 3 - FLA | 0 | 0 | 1 | 4 | 4 | 4 | 13 |
| E 4 - GUIO | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 5 - LAUB | 1 | 1 | 0 | 5 | 5 | 4 | 16 |
| E 6 - LAUR | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 4 | 14 |
| E 7 - LUA | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 16 |
| E 8 - MAT | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 9 - TAI | 0 | 1 | 1 | 2 | 5 | 5 | 14 |
| E 10 - THI | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| **ESTUDANTES DO 5º ANO** | | | | | | | |
| E 11 - BEA | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 12 - BIA | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 13 - BRU | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 14 - GUIS | 1 | 0 | 1 | 5 | 4 | 5 | 16 |
| E 15 - JOA | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 16 - JHU | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 17 - JUL | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18 |
| E 18 - LUC | 1 | 0 | 1 | 5 | 3 | 5 | 15 |
| E 19 - PED | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 16 |
| E 20 - VAN | 1 | 0 | 1 | 5 | 4 | 5 | 16 |

**Quadro 4. Pontuação obtida pelos estudantes para a composição da amostra.**

Depois de selecionada a amostra, deu-se início à coleta, partindo da explicação por parte dos sujeitos sobre os procedimentos empregados na solução da 1ª série de problemas; em seguida, a aplicação das Provas Aritméticas de divisão, composta pela 2ª série de problemas, e da Prova de Multiplicação e de Divisão Aritméticas.

Vale ressaltar que nenhum estudante se recusou a realizar as atividades propostas e que todos os problemas das duas séries foram solucionados, o que resultou em um total de 120 soluções, uma vez que cada participante da pesquisa resolveu, ao todo, 6 problemas.

Assim que terminaram de resolver os problemas, foi aplicada a Prova de Multiplicação e de Divisão Aritmética.

Quanto às representações dos sujeitos, todas se caracterizaram pela natureza numérica, porém, duas delas ainda se aproximam de representações icônicas, que poderão ser vistas no item 4.2, adiante.

Os procedimentos de solução dos problemas variaram entre a solução por meio da divisão, a solução por outras operações, a solução por cálculo mental e a solução por decomposição. Embora essa variedade tenha ocorrido, todos os sujeitos reconheceram os problemas como de divisão, o que se evidenciou na justificativa que forneceram durante a entrevista.

Vale salientar que, pelo fato de as atividades terem sido realizadas no espaço escolar e de os estudantes saberem que se tratava de uma atividade de solução de problemas matemáticos, a opção deles acabou recaindo sobre procedimentos do “tipo escolar”, ainda que tivessem sido solicitados a solucioná-los da maneira que julgassem melhor e, portanto, que tivessem liberdade na escolha dos procedimentos a empregar.

A partir da análise das representações gráficas dos estudantes, foi possível identificar oito tipos de estratégias de solução, compondo as categorias de respostas deste estudo e que se caracterizaram por:

**1. DEC = decomposição.** A criança faz estimativa decompondo o dividendo em partes iguais (divisor), fazendo ajustes com os restos da divisão;

**2. ACL = algoritmo com chave longa**. A criança resolve o problema utilizando o procedimento convencionalmente conhecido como processo longo da divisão;

**3. ACB = algoritmo com chave breve**. A criança resolve o problema, utilizando o procedimento convencionalmente conhecido como processo breve da divisão;

**4. AA = algoritmo americano**. A criança resolve o problema utilizando o procedimento convencionalmente conhecido como algoritmo americano, que também envolve estimativa (processo que se assemelha mais à *ideia* da divisão);

**5. AM = algoritmo da multiplicação.** A criança emprega procedimentos multiplicativos, ou seja, resolve o problema empregando o algoritmo da multiplicação;

6. **AAd = algoritmo adição**. A criança emprega a operação de adição, para solucionar o problema;

7. **ASb = algoritmo subtração**. A criança emprega a operação de subtração, para solucionar o problema;

8. **CM = cálculo mental**. A criança resolve o problema por cálculo mental e registra o resultado;

9. **DES = desenho**. A criança vale-se do desenho (representação icônica), associado à representação numérica.

Além das outras questões analisadas (representações gráficas, procedimentos de solução e noção do operador multiplicativo), a análise estatística foi realizada para verificar as seguintes hipóteses:

1. há relação entre a variação dos procedimentos de solução e o nível de escolaridade;
2. há relação entre o tipo de procedimento empregado pelos sujeitos e o nível de escolaridade;
3. há relação entre a noção do operador multiplicativo e o nível de escolaridade dos sujeitos;
4. há relação entre a noção do operador multiplicativo e o tipo de procedimento de solução.

Para verificar a confirmação – ou não – dessas hipóteses, submeteram-se, a um tratamento estatístico, os dados apresentados na sequência.

## 4.1 Análise dos procedimentos de solução de problemas (Prova Aritmética de Divisão)

Todos os estudantes, independentemente do ano de escolaridade, realizaram uma representação direta dos problemas, ou seja, após lerem o enunciado, aplicaram procedimentos de solução caracterizados por uma representação numérica.

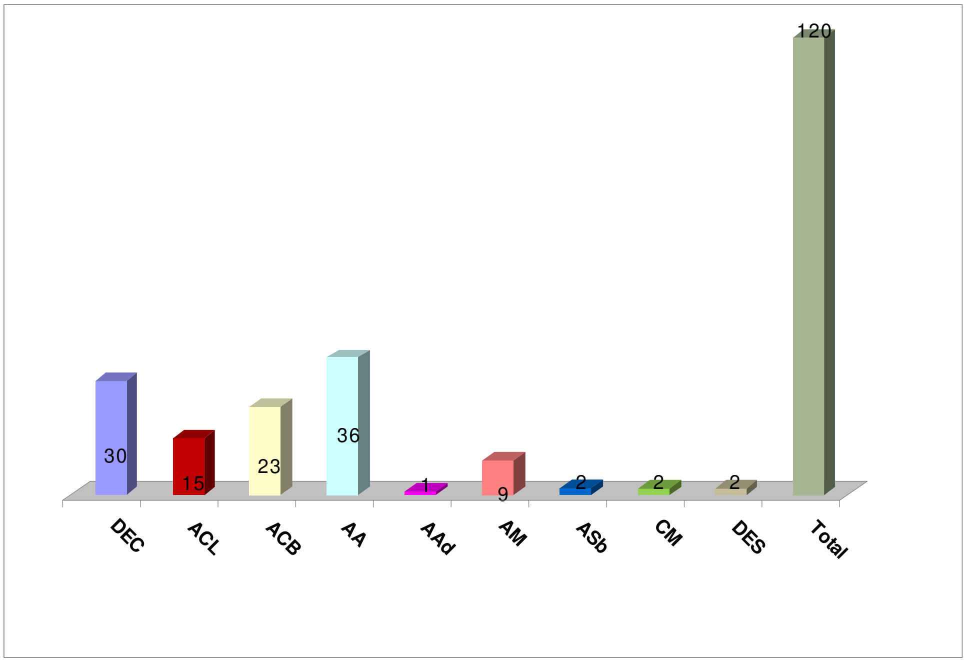


**Gráfico 1. Total de respostas aos problemas, segundo a categoria.**

Conforme mostra o Gráfico 1, das 120 respostas[19] dos estudantes, 36 utilizaram o algoritmo americano, como procedimento de solução; 30 usaram a decomposição (DEC); 23, o algoritmo de chave breve (ACB; 15, o algoritmo de chave longa (ACL); 9, a multiplicação (AM); 2, a subtração (ASb); 2 resolveram por cálculo mental (CM); 2 utilizaram desenho[20] (DES) e 1, a adição (AAd).

---

[19] Diz respeito à primeira resposta dada pelos estudantes a cada um dos problemas, pois no total, houve uma quantidade maior de respostas, o que ocorreu quando eles eram solicitados a explicar se conheciam outras maneiras de se resolverem os problemas.

[20] Desenho associado a uma representação numérica.

Analisando esses dados separadamente, por ano de escolaridade, encontramos um predomínio do algoritmo americano em estudantes do 5º ano e o da decomposição no 4º ano, conforme ilustrado no gráfico 2.

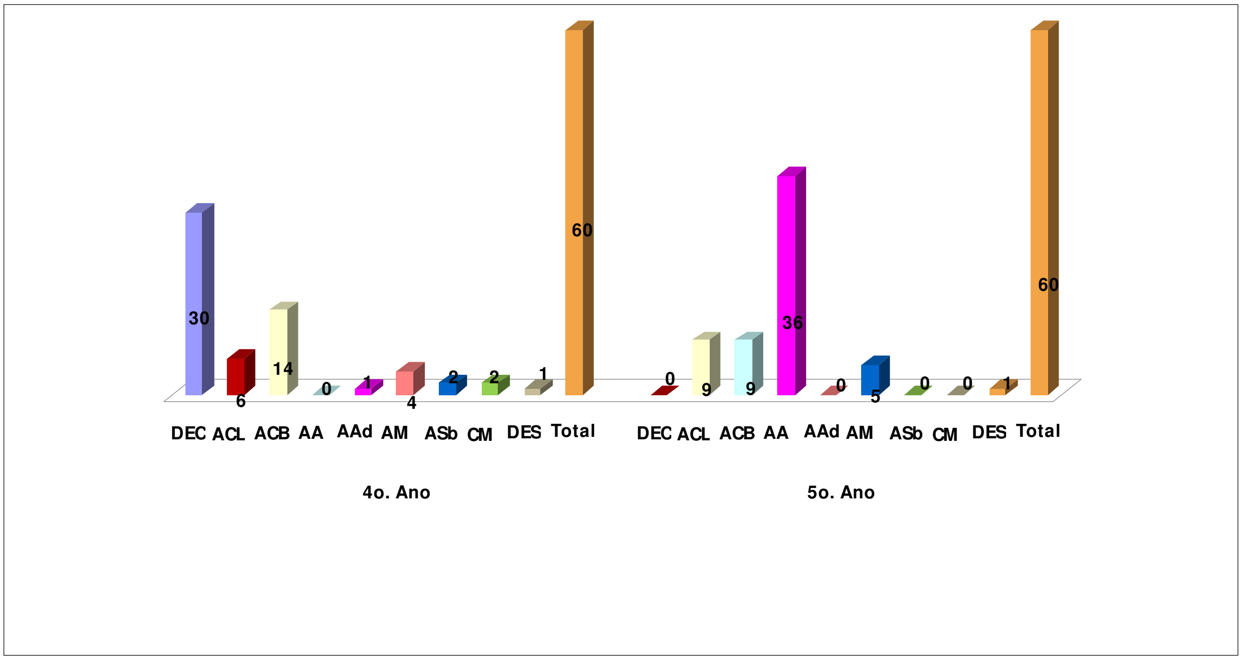


**Gráfico 2. Número de respostas, segundo a categoria e o ano de escolaridade.**

No grupo de estudantes do 4º ano de escolaridade, predominou a solução por decomposição (30 respostas), seguida do uso de chave breve (14), de chave longa (6) e de outras operações (2 deles utilizaram a subtração e 1, a adição); 2 resolveram por cálculo mental e 1 utilizou o desenho.

Já no 5º ano de escolaridade, houve predomínio do algoritmo americano (36), seguido dos algoritmos de chave longa (9) e de chave breve (9), do emprego da multiplicação (5) e, por último, do desenho, utilizado por 1 estudante. Neste grupo, não se encontraram respostas que usassem a decomposição, a adição, a subtração ou o cálculo mental.

Vale ressaltar que o algoritmo americano, uma técnica que se ensina na escola, constitui, depois da decomposição, o procedimento que mais se assemelha à real ideia da divisão, pois nele, além de ser necessário fazer estimativas, se deve considerar o resto da divisão (ajustando-os sucessivamente), atribuindo um significado a este último e permitindo o trabalho futuro com números racionais.

Segundo Jesus e Diniz (2010), o "algoritmo americano permite ao aluno maior controle do resultado e evita erros muito comuns, como as dificuldades encontradas quando há zeros intercalados no dividendo ou no quociente" (s/p).

Dos estudantes de 5º ano que se valeram da multiplicação para solucionar problemas, apenas 1 (E18) empregou a operação erroneamente (erro de procedimento, relacionado ao raciocínio[21]), não compreendendo tratar-se de um problema de divisão, enquanto, nas outras 4 respostas (E11 e E13), a multiplicação foi utilizada como operação inversa à divisão, multiplicando-se o divisor pelo número necessário até chegar ao valor do dividendo (procedimento correto).

Quando questionados se conheciam outra forma de resolver esse tipo de problema, apenas 1 deles respondeu que não; 19 estudantes responderam que existem outras formas de se resolver, citando que podem ser: da "bola" ou "bolinha"[22], da chave, por multiplicação, por decomposição ou pelo desenho.

Dos 20 estudantes, 10 deles (5 do 5º ano e 5 do 4º) variaram os procedimentos de solução nos 6 problemas que cada um resolveu, conforme aponta o Gráfico 3 a seguir:

---

[21] Como o procedimento está relacionado ao raciocínio, empregar procedimento errado implica a criança ter elaborado uma representação mental inadequada, levando-a ao erro no resultado também; enquanto erro de cálculo diz respeito ao emprego do procedimento correto, porém, com erro no resultado.

[22] Nomenclatura dada pelos estudantes ao procedimento de decomposição, no qual as "bolas" se referem aos grupos ou às quotas.

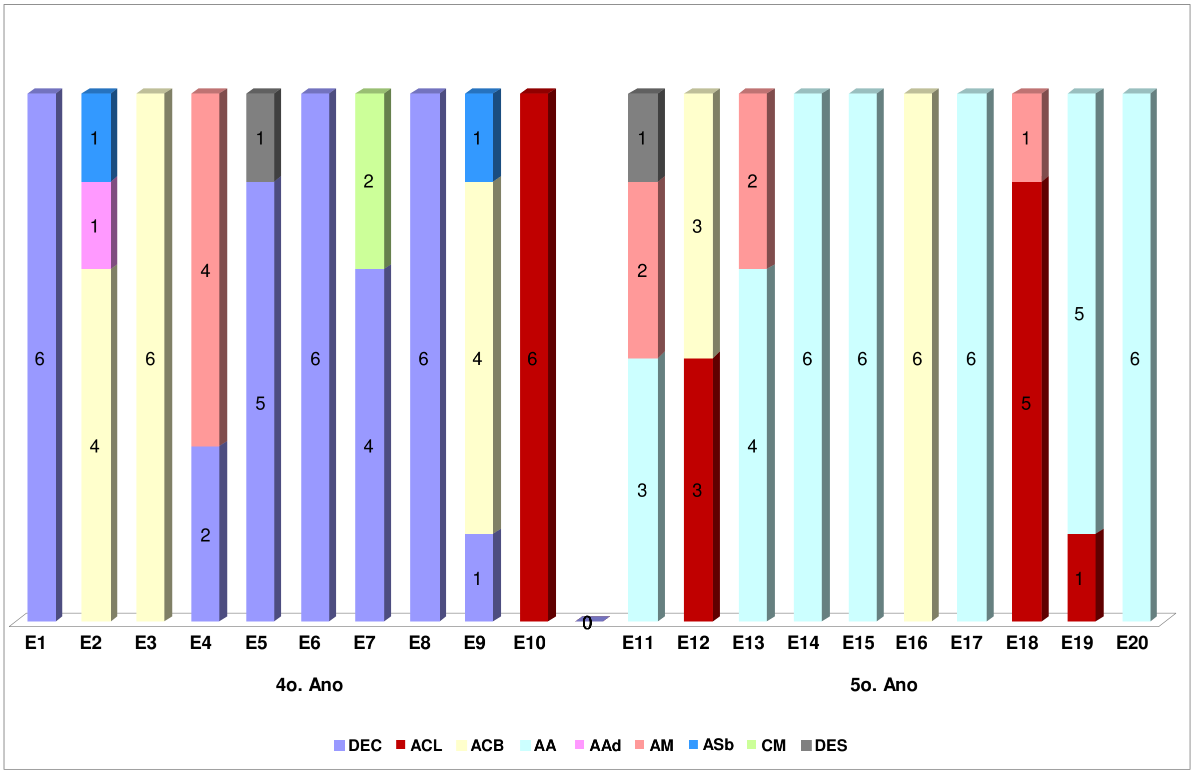


**Gráfico 3. Variação da categoria de respostas por estudante e por ano de escolaridade.**

Para a análise mais detalhada da variação (ou não) dos procedimentos, o Quadro 5 a seguir aponta todos as categorias de procedimentos empregados pelos estudantes nas duas séries de problemas:

| | | DEC | ACL | ACB | AA | AAd | AM | ASb | CM | DES | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4o. Ano | E1 | 6 | | | | | | | | | 6 |
| | E2 | | | 4 | | 1 | | 1 | | | 6 |
| | E3 | | | 6 | | | | | | | 6 |
| | E4 | 2 | | | | | 4 | | | | 6 |
| | E5 | 5 | | | | | | | | 1 | 6 |
| | E6 | 6 | | | | | | | | | 6 |
| | E7 | 4 | | | | | | | 2 | | 6 |
| | E8 | 6 | | | | | | | | | 6 |
| | E9 | 1 | | 4 | | | | 1 | | | 6 |
| | E10 | | 6 | | | | | | | | 6 |
| | | **DEC** | **ACL** | **ACB** | **AA** | **AAd** | **AM** | **ASb** | **CM** | **DES** | **Total** |
| 5o. Ano | E11 | | | | 3 | | 2 | | | 1 | 6 |
| | E12 | | 3 | 3 | | | | | | | 6 |
| | E13 | | | | 4 | | 2 | | | | 6 |
| | E14 | | | | 6 | | | | | | 6 |
| | E15 | | | | 6 | | | | | | 6 |
| | E16 | | | 6 | | | | | | | 6 |
| | E17 | | | | 6 | | | | | | 6 |
| | E18 | | 5 | | | | 1 | | | | 6 |
| | E19 | | 1 | | 5 | | | | | | 6 |
| | E20 | | | | 6 | | | | | | 6 |
| | | **30** | **15** | **23** | **36** | **1** | **9** | **2** | **2** | **2** | **120** |

**Quadro 5. Categorias encontradas por sujeito e por ano de escolaridade.**

A variabilidade dos procedimentos de solução foi semelhante entre o 4º e 5º anos. Metade dos alunos utilizou apenas um procedimento e o número máximo de procedimentos empregados foi três, nos dois anos de escolaridade. Também não se encontrou evidência de que os alunos de escolaridade mais avançada sejam mais estáveis na escolha dos procedimentos de solução de problemas.

Para testar essa hipótese foi criada uma nova variável "*Número de Procedimentos Utilizados*", que indica a quantidade de procedimentos utilizada por estudantes na resolução dos problemas. Segue a estatística descritiva dessa variável para cada série:

**Descriptive Statistics: Número de Procedimentos Utilizados**

```
Variable                  Ano  Percent   Mean  StDev  Variance  Minimum     Q1
Número de Procedimentos   4º        50  1,700  0,823     0,678    1,000  1,000
                          5º        50  1,600  0,699     0,489    1,000  1,000

                                                             N for
Variable                  Ano  Median     Q3  Maximum  Mode   Mode
Número de Procedimentos   4º    1,500  2,250    3,000     1      5
                          5º    1,500  2,000    3,000     1      5
```

Apresenta-se, a seguir, um gráfico da dispersão dessa variável, para cada ano de escolaridade:

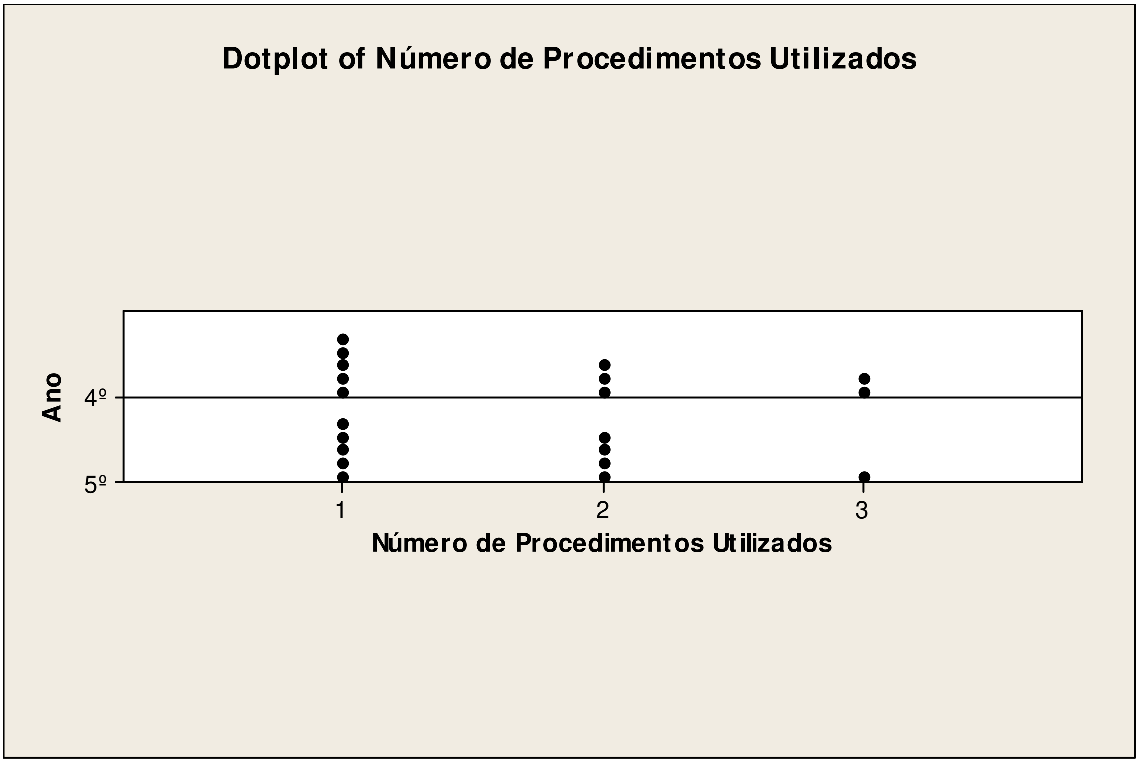


**Gráfico 4. Número de procedimentos utilizados.**

Pode-se notar pelo gráfico e pelas estatísticas apresentadas, que a distribuição do número de procedimentos utilizados pelos alunos do 4º e 5º anos é muito semelhante.

Em ambos, metade dos alunos utilizaram apenas um procedimento. Os dados possuem os mesmos quartil 1 e mediana. Além disso, evidenciou-se como três o número máximo de procedimentos utilizados por alunos de ambos os anos de escolaridade foi 3.

Avaliando, a seguir, a média de procedimentos utilizados em cada ano:

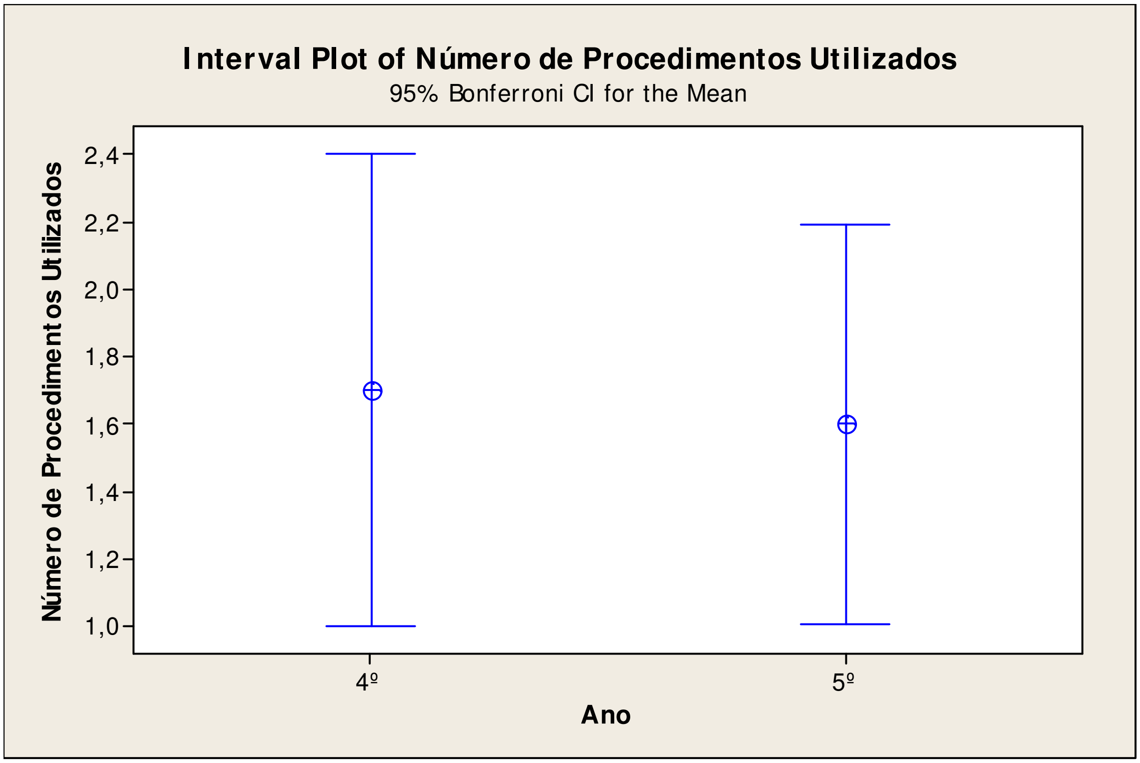


**Gráfico 5. Número de procedimentos utilizados por ano de escolaridade.**

Pelo gráfico acima, notamos que os Intervalos de Confiança para o número médio de procedimentos utilizados pelos alunos de cada ano são muito próximos e coincidentes. Dessa forma, não temos evidência para afirmar que exista diferença, por ano de escolaridade, entre o número de procedimentos aplicados por alunos.

Realizou-se, por fim, um teste de hipóteses para avaliar se existe diferença entre a média de procedimentos utilizada pelos alunos de cada um dos anos:

**Two-Sample T-Test and CI: Número de Procedimentos Utilizados; Ano**

```
Two-sample T for Número de Procedimentos Utilizados

Ano   N   Mean  StDev  SE Mean
4º   10  1,700  0,823     0,26
5º   10  1,600  0,699     0,22



Difference = mu (4º) - mu (5º)
Estimate for difference:  0,100
95% CI for difference:  (-0,621; 0,821)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 0,29  P-Value = 0,773  DF = 17
```

Como observado, a diferença entre as médias está entre -0,621 e 0,821. O intervalo da diferença contém o 0, que indica que não existe diferença entre as duas médias. O p-valor, para esse teste, foi 0,773; logo não há evidência para rejeitar a hipótese nula de que não existe diferença entre as médias.

Portanto, não se encontrou evidência estatística, no conjunto de dados, para afirmar que alunos de classes mais adiantadas possuem maior estabilidade na escolha dos procedimentos para resolver problemas.

Deve-se tomar cuidado com essa afirmação, pois nesta pesquisa, foram testados apenas alunos de duas séries subsequentes. Pode-se afirmar que não existe diferença entre os alunos de 4º e 5º ano, pois são anos muito próximos, mas não se pode generalizar dizendo que não existe essa diferença entre alunos de séries não subsequentes, por exemplo. Para fazer essa afirmação, seria necessário realizar o estudo com, pelo menos, quatro anos de diferença e um número maior de amostras.

Assim, procurando explicações para a ocorrência dessa variabilidade, pode-se pensar que ela esteja associada à liberdade que os estudantes têm na escolha dos procedimentos de solução que julgam mais adequados (incentivados por suas professoras); ou podem ser influenciados pelos dados numéricos dos problemas, como, por exemplo, o cálculo mental (CM) ter sido empregado em problemas com quantidades numéricas menores e a decomposição ou os algoritmos mais “longos” (chave longa ou algoritmo americano), em problemas com quantidades numéricas maiores, embora isso não se tenha feito presente neste estudo.

A suposição é que, como as diferenças de idade e de ano de escolaridade são pequenas, o raciocínio dos estudantes seja pouco diferenciável. É importante lembrar que o uso de diversos procedimentos ocorreu em problemas de mesma estrutura (divisão por quotas).

Outro aspecto a considerar, nessa análise dos dados, é a relação entre procedimentos mais avançados de solução e nível de escolaridade: embora a amostra de sujeitos seja pequena, impedindo-nos de generalizar, é incontestável verificar que os estudantes do ano mais avançado (5º ano) utilizam procedimentos mais avançados[23] e os do menos avançado (4º ano) procedimentos mais elementares que, por sua vez, são mais adequados ao nível de pensamento das crianças em etapas específicas de seu desenvolvimento.

Vale destacar que o foco deste estudo foi explorar as representações gráficas dos procedimentos de solução dos problemas, e não discutir a adequação ou a inadequação dos mesmos.

Para realizar esta análise, foi criada a variável “*Utilização*”, que mostra o número de vezes em que cada procedimento foi utilizado, em cada ano de escolaridade.

Apresentamos, a seguir, o gráfico com as proporções de utilização de cada procedimento nas diferentes séries:

---

[23] Consideraram-se procedimentos mais *avançados* aqueles mais econômicos em relação aos passos da operação (algoritmo americano, algoritmo chave longa e algoritmo chave breve) e mais *elementares ou primitivos,* aqueles menos econômicos (decomposição e desenho) que, portanto, são mais longos e trabalhosos. Inicialmente, essas duas categorias foram criadas, a fim de permitir o tratamento estatístico, pois havia muitas categorias para um número pequeno de estudantes. Mas ao longo da análise, resolveu-se considerá-las, discussão que será retomada um pouco mais adiante.

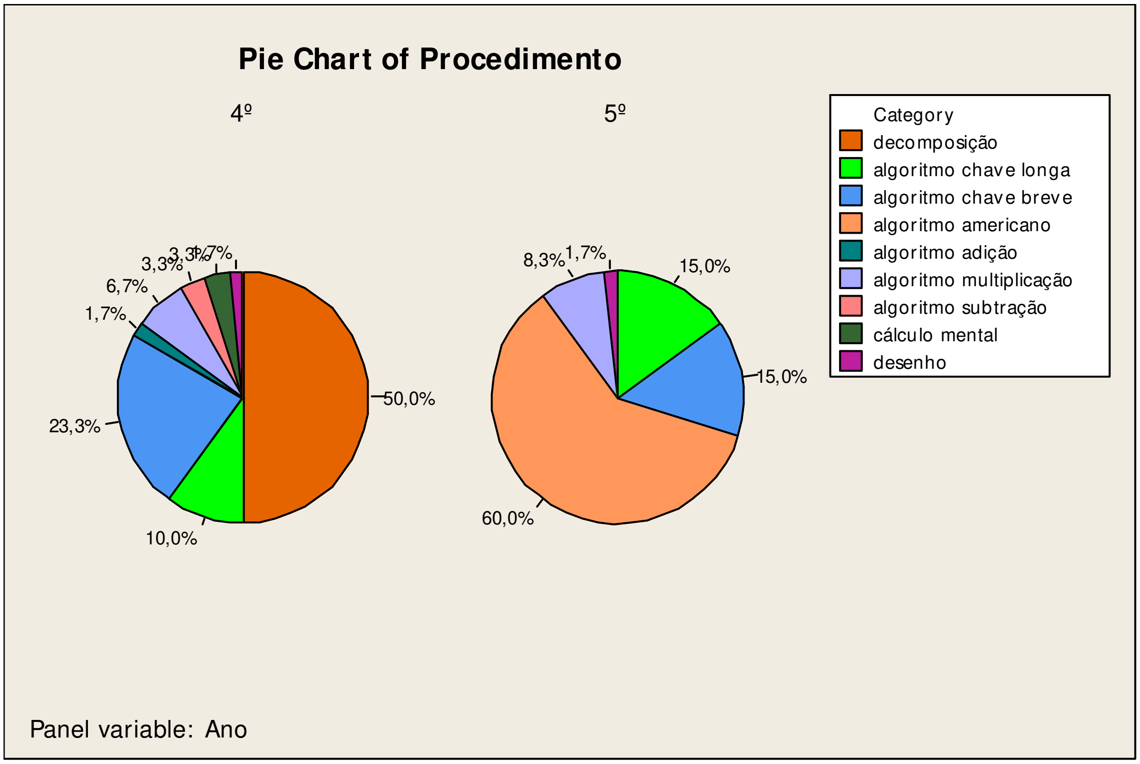


**Gráfico 6. Proporção de utilização de cada procedimentos por ano de escolaridade.**

Como é possível notar pelo gráfico acima, parece existir uma grande diferença entre os procedimentos utilizados em cada série. No 4º ano, metade dos problemas foram resolvidos pelo procedimento de decomposição, enquanto no 5º 60% dos problemas foram resolvidos pelo algoritmo americano.

A fim de verificar se existe mesmo diferença entre os procedimentos utilizados por estudantes de cada ano de escolaridade, avalia-se o gráfico de efeito apresentado a seguir:

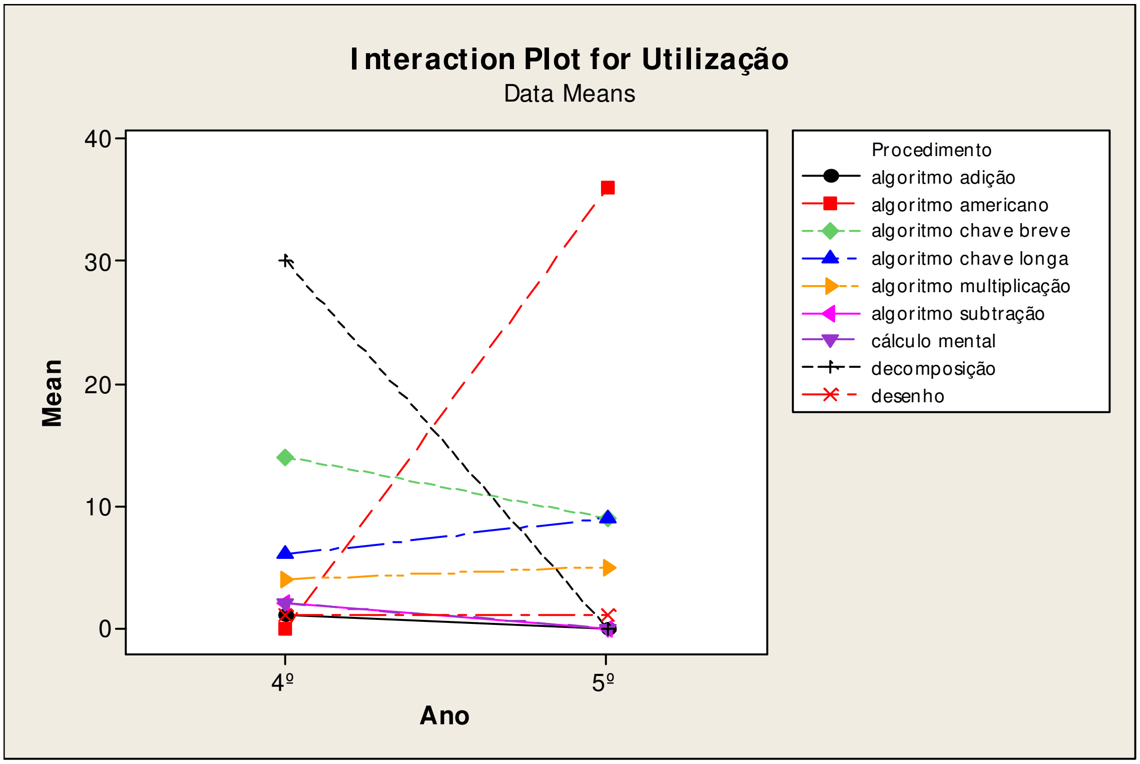


**Gráfico 7. Procedimentos por ano de escolaridade.**

Nesse tipo de gráfico, o cruzamento entre linhas explicita a diferença existente na relação entre o Procedimento e o Ano de Escolaridade.

Com efeito, nota-se uma grande diferença no emprego dos procedimentos de decomposição e algoritmo americano nas duas séries. Como o número de categorias é muito grande e a amostra é muito pequena, não se tem grau de liberdade suficiente para a excussão de testes que confirmem essa diferença, apesar de ser visualmente incontestável.

Para que fosse possível realizar algum tipo de teste, os procedimentos foram agrupados em duas categorias: *Avançados* (algoritmos chave longa, chave breve e americano) e *Elementares* (o restante). Foi, então, realizado o teste apresentado a seguir:

**Tabulated statistics: Classe de Procedimento; Ano**

```
Using frequencies in Utilização


Rows: Classe de Procedimento   Columns: Ano

             4º  5º  All

Avançado     20  54   74
             37  37   74

Primitivo    40   6   46
             23  23   46

All          60  60  120
             60  60  120

Cell Contents:      Count
                    Expected count


Pearson Chi-Square = 40,752; DF = 1; P-Value = 0,000

Fisher's exact test: P-Value =  0,0000000
```

O p-valor para o teste $\chi^2$ de Pearson assume o valor 0. Isso indica que existe uma associação entre o ano escolar do aluno e a utilização de procedimentos avançados ou primitivos.

O valor do Teste exato de Fisher também mostra evidências de que Procedimento e Ano de Escolaridade não são independentes, o que leva a concluir que as crianças do 5º ano deste estudo utilizaram procedimentos mais complexos e, portanto, mais avançados.

Como na escola em que foi realizada esta pesquisa os algoritmos, em geral, não são ensinados, foram considerados um procedimento mais complexo, o que não poderia ocorrer com estudantes de outras escolas, onde se ensinam os algoritmos. As professoras desses estudantes afirmaram que eles mesmos pedem para que elas lhes ensinem as formas convencionais de se resolverem problemas. Assim, entende-se que, em decorrência da própria solicitação dos alunos, essas professoras acabem por avançar mais rapidamente em alguns aspectos do ensino.

Há que se considerar, também, que muitos pais ensinam aos seus filhos os mecanismos mais formais de se operar com os cálculos; o fato foi citado em algumas entrevistas com as crianças, que disseram terem aprendido a “fazer divisão na chave” em casa, com os pais.

A seguir, apresentam-se as interpretações das representações gráficas dos participantes da pesquisa.

## 4.2 Análise e Interpretação das Representações gráficas

Complementando os dados quantitativos expostos no início deste capítulo, será apresentada, a seguir, a análise qualitativa das representações gráficas dos participantes deste estudo.

Nesta seção, serão apresentados os grafismos mais significativos para a análise, porém todos os protocolos de representação gráfica de todos os sujeitos encontram-se no Anexo VII.

Como dito anteriormente, os grafismos dos sujeitos caracterizaram-se por uma representação numérica, independentemente do ano de escolaridade deles e, em sua maioria, semelhantes à ensinada na escola. Predominou o procedimento algorítmico (americano, chave longa e chave breve), mas com forte presença da decomposição, procedimento que mais se assemelha ao pensamento partitivo (esquema de ação característico da divisão).

Separando-os por ano de escolaridade, encontrou-se, no 4º ano, o predomínio do procedimento por decomposição, seguido da chave breve e, depois, da chave longa; já no 5º ano, o predomínio foi do algoritmo americano, seguido da chave breve e chave da chave longa, concomitantemente.

A seguir, apresentam-se as representações gráficas dos estudantes, de acordo com as categorias de procedimentos empregados, seguidas pelo argumento de justificativa para eles.

Para tanto, procurou-se selecionar as representações mais expressivas e, na medida do possível, apresentar as diversas formas com que os estudantes representaram problemas em comum, como poderá ser visto a seguir:

## 1. Decomposição (DEC):

Dos 20 estudantes, 7 enquadram-se nesta categoria, todos eles do 4º ano, conforme pode ser observado nas próximas Figuras:

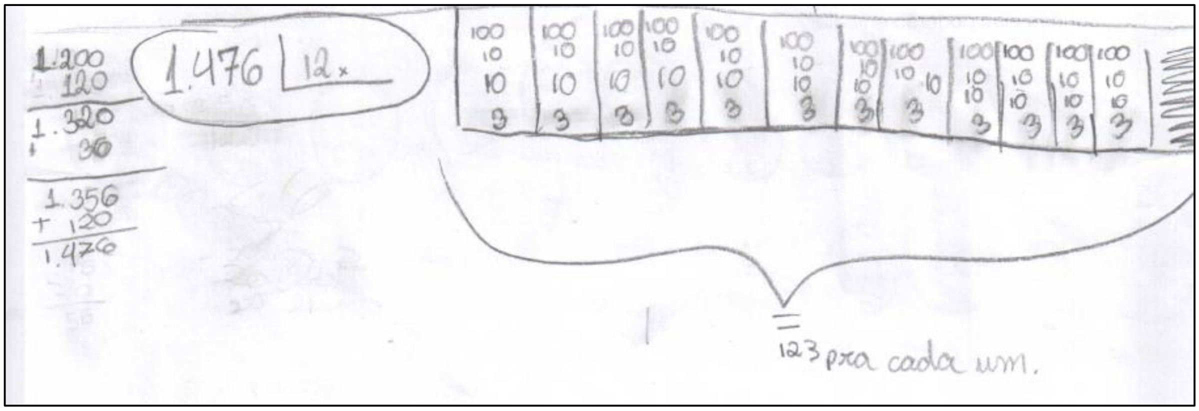


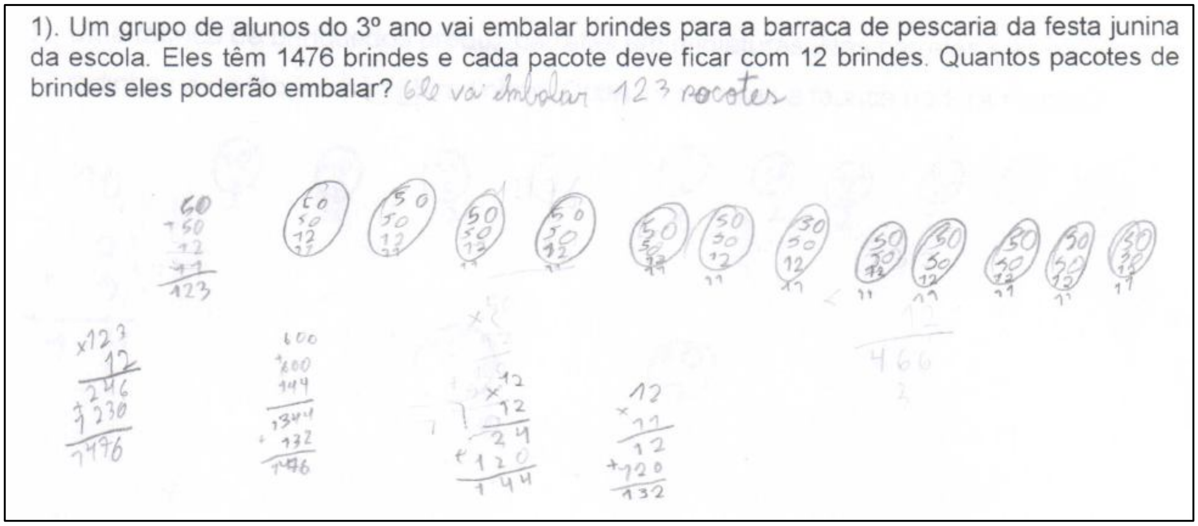
**Figura 2. Representação de E1 (9,6), 4º ano.**

Esta foi a representação de E1 para o primeiro problema da 1ª série que tinha o seguinte enunciado: *Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?*

Vale lembrar que o problema continha dados numéricos maiores do que os restantes, o que poderia ter gerado certa dificuldade, manifesta por E1 ao explicar sua representação para o problema em questão. Porém a mesma criança resolveu todos os outros problemas, utilizando o mesmo procedimento, incluindo os que comportavam dados numéricos mais baixos.

> P - Eu gostaria que você me explicasse como foi que você pensou para resolver esses problemas. Se precisar, você pode usar esta folha em branco para me explicar, ou para me mostrar, ok?
> **E1 - É... Na primeira que foi mais difícil eu fiz 1476 dividido por 12. Daí eu fiz tipo um retângulo e dividi em 12... Daí eu tinha começado por 100, mas eu achei que não tava bom, daí a Mariane falou que era um bom número para começar... Aí eu coloquei 100, aí de 100 em 100 deu 1200. Aí eu fui colocando mais 10, que eu sabia que ia dar 120, pra dar 1320... Aí eu fui colocando vários números, foi de 15 primeiro, 20... Daí eu coloquei 10 de novo... 10, 10, 10... Daí deu 1376 né?... Aí eu fui colocando de três em três que deu 120...** (expressão de dúvida).
> **Aí eu vou fazendo continha do lado juntando cada número que eu vou colocando nos quadrados que eu fiz de doze... (aponta para a folha)... Aí deu o resultado, 1476.**
> P - Como você pensou para resolver esse problema dessa forma, se antes você havia feito de outra forma?
> **E1 - Eu fiz uma conta de dividir, daí eu esqueci como fazia daí não deu certo... Daí eu fui fazendo de bolinha...** (referindo-se a uma primeira tentativa de solução). **Daí as bolinhas ficaram apertadas demais e a minha borracha não é boa, ia ficar tudo borrado... Daí eu fiz bolinha aqui também, daí as bolinhas também ficaram muito pequenas daí eu, aí eu resolvi fazer de quadrado mesmo.**

Outro estudante a utilizar este procedimento é E4, conforme pode ser visto a seguir:



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar? ele vai embolar 123 pocotes

**Figura 3. Representação de E4 (9,10), 4º ano.**

P - Por que você resolveu assim Gui?

**E4 - Porque eu tava tentando fazer de vezes, esse tipo de coisa, mas não deu certo o resultado, se eu colocasse um a menos ia dar muito pra menos, que eu esqueci o resultado que deu... Ah, deu 456...** (lê o enunciado)**. Daí aqui eu coloquei 50, 50, 50, 50... Daí eu fiz 12 vezes 50... Não! Ah! Eu apaguei a conta, tava aqui... 12 vezes 50, mas tava aqui.**

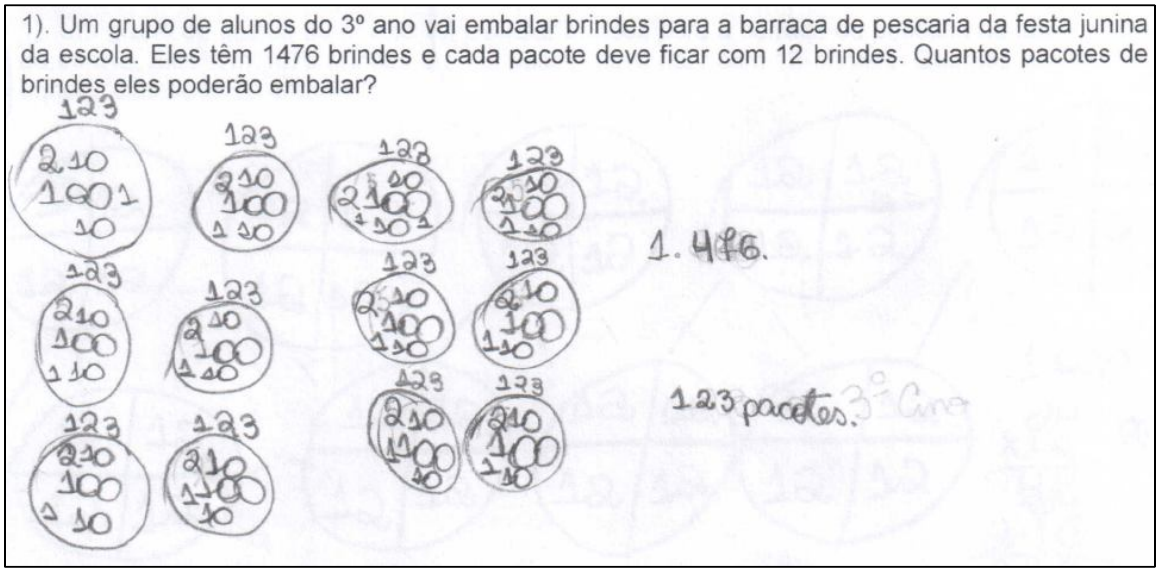
P - Certo, mas primeiro me explica o que é 12 vezes 50. O que é isso?

**E4 - Porque eu fui colocando até dar a quantidade certa, tipo eu fui colocando o 50 até dar um total igual a 1476...**

P - Certo. E por que você faz esses círculos aí? Explica para mim o que é isso?

**E4- É... Você junta... É... Você junta os números até dar o resultado que foi 123.**

E5, a seguir, também utilizou esse tipo de procedimento:



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

**Figura 4. Representação de E5 (9,10), 4º ano.**

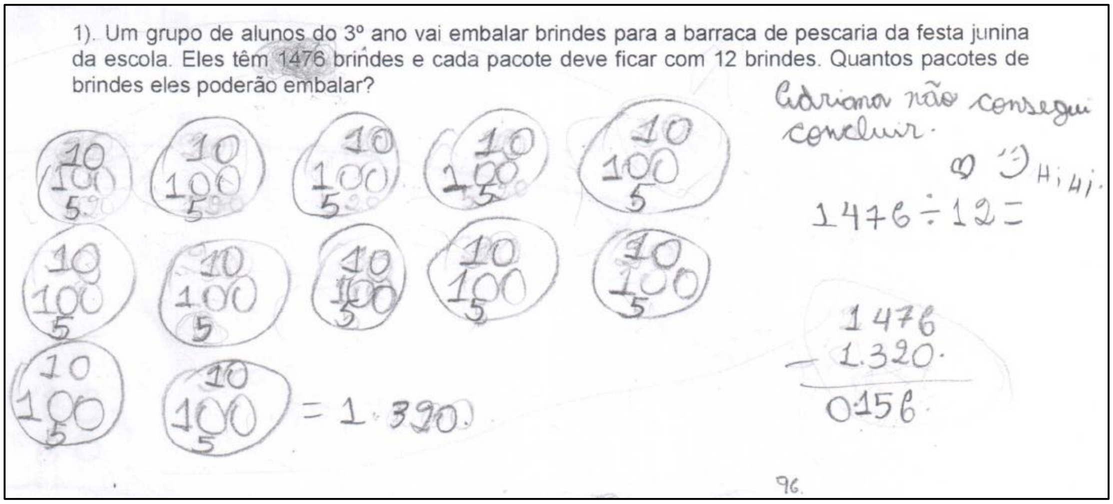
**E5 - Eu comecei fazendo as bolinhas, aí eu fui dividindo de 100 em 100... E era pra dividir 1476 em 12 pacotinhos, daí eu coloquei 100 em cada um, deu 1200, aí eu fui somando, eu fui colocando de 10 em 10 depois, até que chegou no resultado certo. Parou no 1476 que era a quantidade de brindes, aí deu 123 pacotes.**

P - Certo, agora como é que você pensou para resolver esse problema, como é que você fez para escolher o jeito de resolver esse problema? Qual foi a primeira coisa que você fez quando você pegou esses problemas?

**E5 - Eu fiz as bolinhas porque eu não sei fazer a chave porque a Mari** (professora) **ainda não ensinou. Aqui no problema tá falando que tem que**

**embalar brindes para a barraca de pescaria...** (lê o enunciado do problema)**... daí tem que dividir pra ver quantos brindes...**

A seguir, a representação de E6:



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

Adriana não consegui concluir.

Hi, hi.

1476 ÷ 12 =

1476
− 1.320.
0156.

= 1.320.

96.

**Figura 5. Representação de E6 (9,7), 4º ano (não conclui).**

Este problema (Figura 4), E6 não consegue concluir, como ela mesma deixa registrado, justificando que isso ocorreu por ser um número grande, conforme o diálogo a seguir:

**E6 - Eu pensei assim... como a gente não aprendeu ainda na chave, a gente tá começando a aprender isso tudo...**

P - O que na chave?

**E6 - De fazer a divisão na chave... a gente tá fazendo na bolinha ainda, que daí terça, não essa a próxima, vai ter uma prova da divisão... daí a gente vai poder fazer na chave o que a gente souber, né?**

P - Sei.

**E6 - Porque tem vezes que cai números muito grandes e daí não dá muito porque a gente não aprendeu muito grande ainda... Mas tem gente que já sabia antes do estudo, mas não com número...**

P - Então, mas por quê? Com números muito grandes, não dá para fazer assim?

**E6 - Com chave?**

P - Fazer com bolinhas?

**E6 - Dá. Mas na chave dá também, mas só que a gente não aprendeu ainda.**

P - Ah tá, entendi!

**E6 - Então eu tô começando assim, eu fiz na bolinha... Aí eu fiz as...**

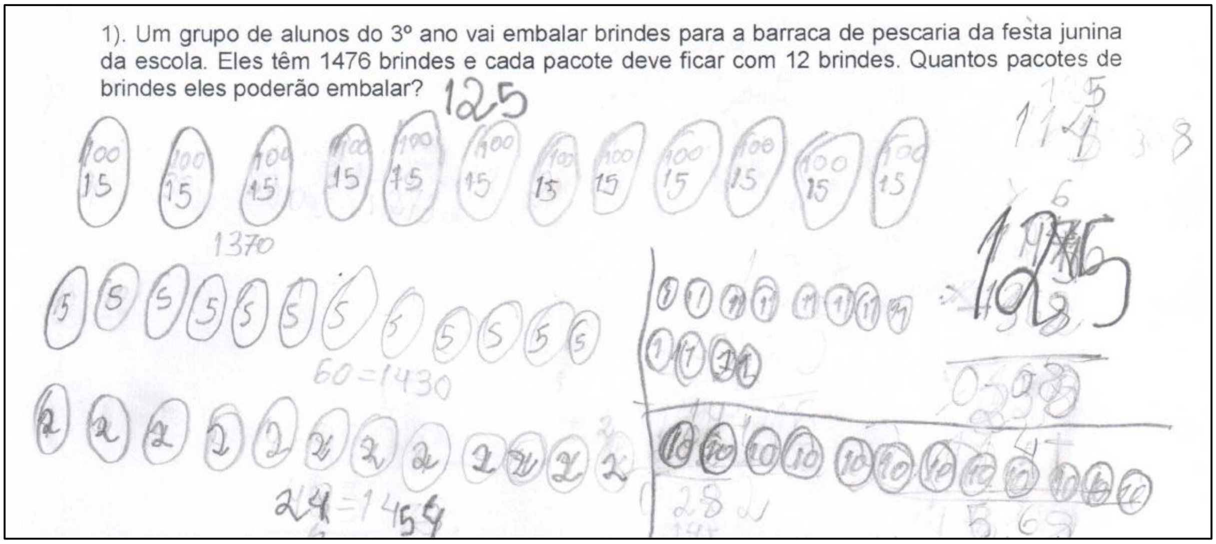
P - Pode ler se precisar...

**E6 -** (Lê o problema em voz baixa)**. Eu fiz 12 brindes escolares para dividir por 1476, que fica mais difícil o número maior, porque daí a gente já tem que pensar como que a gente tem que colocar, antes eu fazia no pauzinho...**

P - Ah!

**E6 - Daí a Mari, minha professora, me explicou assim que tinha uma possibilidade melhor pra fazer porque era muito confuso, daí eu fui fazendo com número, né? Que eu também achei bem melhor porque no pauzinho demora mais e, assim, eu não pensava nessa possibilidade de eu fazer, né? 30... Assim...**
P - Sei. Então me explica esse primeiro, como é que você pensa para fazer, porque é que você fez essas bolinhas, o que são essas bolinhas? Você escreveu nesse problema que você não conseguiu concluir, né?
**E6 - É porque era um número muito grande.**
P - Você consegue explicar esse mesmo que você não tenha terminado?
**E6 - Consigo. Foi assim, eu coloquei os 12 brindes aqui, né? As bolinhas... Daí eu fui separando...**
P - As bolinhas são os brindes?
**E6 - Isso. Daí eu fui colocando de 100 pra eu ver se dava ai eu cheguei aqui que deu... Deixa ver... 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200... Eu cheguei no 1200... Cheguei no 1200 só contando com esse 100... aí eu coloquei o 10, para ver se eu conseguiria ter esse 400...** (explica a estimativa através da decomposição do número-dividendo)
P - Deixa-meeu entender uma coisa: por que você escolheu o 100 primeiro?
**E6 - Ah, porque eu acho que daria certo pra fazer o 1000.**
P - Ah tá! Você pensou o 100 para fazer o 1000, e agora você pensou o 10 para chegar ao 400 aqui? É isso?
**E6- É. 10, 20, 30, 40.**
P - Mas quanto está dando essa soma aqui? (apontando para a folha de anotações)
**E6 - Então, mas o total de tudo isso (aponta para a folha do problema), foi mais ou menos, foi isso aqui, ó** (aponta para uma conta feita na própria folha do problema)... (1320)
(continua explicando todos os passos da solução)
**E6 - Eu faço pontinhos pra não me confundir. Aí aqui é um. 1320...**
**E6 - Daí faltava o 70, mas, como eu cheguei só no 60, faltava só mais um número, então aqui eu teria que fazer de 6 em 6.**
P - Ah é?
**E6 - Eu acho que sim, porque, se eu tentasse chegar no 70, porque deu só 60 pra chegar no 70, aí eu não consigo concluir.**

Outra representação de solução por decomposição foi a de E7, demonstrada a seguir:



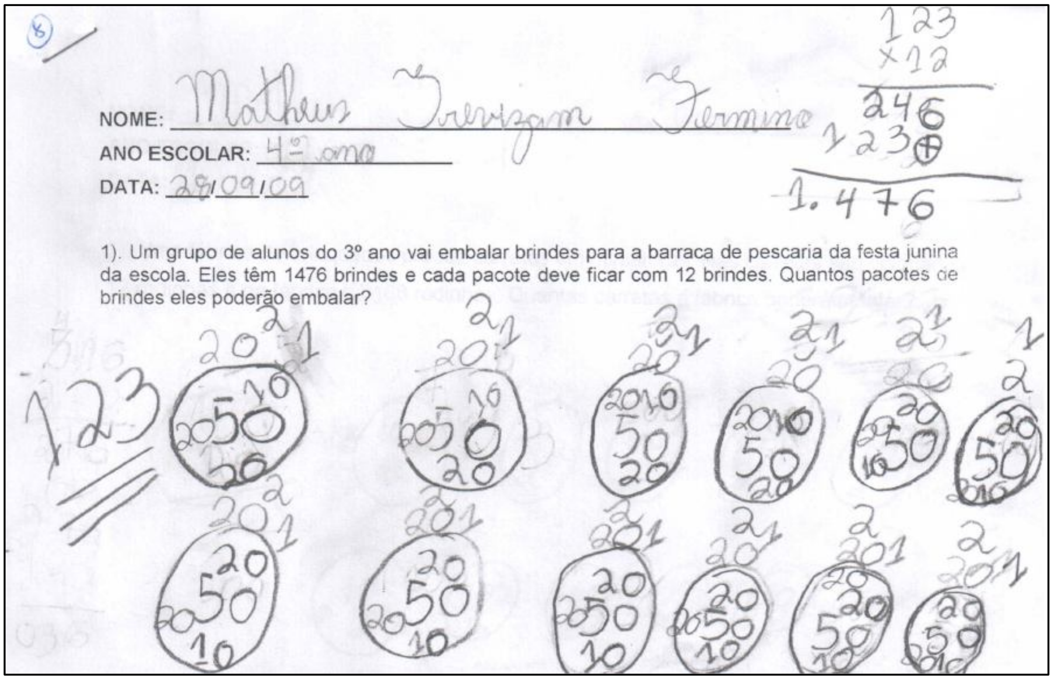
1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

**Figura 6. Representação de E7 (9,7), 4º ano (erro).**

> **E7 - Assim, eu fiz... 12 dividido por 1476. Fiz 12 bolinhas e comecei pelo 100. Eu fui dando até dar o 1476. Somei as bolinhas e vi o quanto que deu.**
> P - O que são essas bolinhas? Por que você coloca essas bolinhas aqui?
> **E7 - Ah, porque aqui vale 1 do 12** (aponta uma das bolinhas)**... aqui vale tudo 12.**
> P - E por que são 12?
> **E7 - Porque um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola e eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes... Daí pra chegar nessa conta... se eles têm 1476, eu tenho que dividir 1476 por 12...**
> P - Então o que significam as bolinhas?
> **E7 - Significam os 12 brindes...**
> P - E por que é de dividir esse problema?
> **E7 - Porque tem que dividir igualmente para cada pacote.**

O procedimento de decomposição empregado por esta criança é menos econômico do que os observados anteriormente, pois há uma sequência de agrupamentos: após distribuir 100 e 15, ele vai formando novos agrupamentos (marcados pelas "bolinhas"), ocupando uma boa extensão da folha. Ele comete erro no resultado, porém emprega o procedimento correto.

Percebe-se uma ocupação espacial do grafismo do sujeito na folha de respostas que parece proporcional ao tamanho dos dados numéricos contidos no problema. Isso pôde ser deduzido, uma vez que o mesmo sujeito (E7), que utilizou um procedimento tão longo, resolveu por cálculo mental os dois últimos problemas da 2ª série – que contêm dados numéricos menores – como se pode verificar na descrição da categoria “cálculo mental”, mais adiante.



NOME: Matheus Trevizam Fermino
ANO ESCOLAR: 4º ano
DATA: 28/09/09

1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

Figura 7. Representação de E8 (9,10), 4º ano.

**E8 - O primeiro problema eu fiz assim: eu achei que eu podia começar de 50 em 50 que é um bom número. Daí eu fui indo... 50, 50, 50... até... até... 12. Daí eu achei muito pouco e daí eu coloquei mais 20 em cada, mais 40 em cada... daí eu percebi assim, daí eu tentei mais um, fui colocando, daí eu somei quanto que deu e faltava mais um pouquinho, daí eu coloquei mais 10 daí eu percebi que deu 123, daí eu fiz 123 vezes 12 que dá 1476, que dá o número de brindes.**

P - Ah tá! Mas então espera um pouquinho... o que estava pedindo esse problema?

**E8 - Tinha 1476 brindes... cada pacote tinha que ficar com 12 brindes... Em cada pacote tinha que caber 12, daí tinha que saber quantos pacotes embalar, daí minha conta deu 123...**

P - E que operação você teve que fazer para resolver?

**E8 - Divisão.**

P - Por que é divisão, Mat?

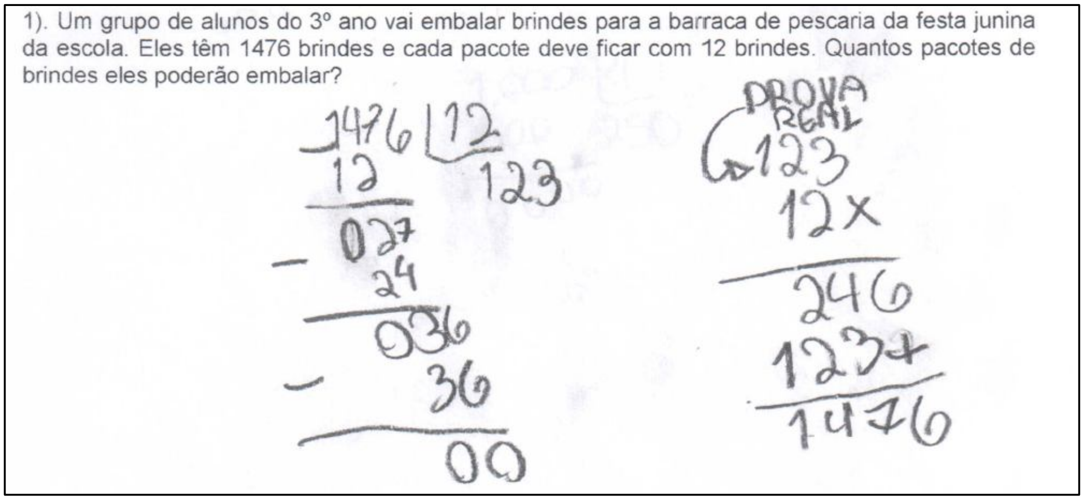
**E8 - Assim, eu poderia até fazer assim, por exemplo... é... eu podia ir chutando, assim, por exemplo... 21 vezes 12... mas assim eu acho que é muito complicado... daí eu pensei assim, por que eu não faço 1476 dividido por 12? Daí eu pensei assim e fiz.**

P - Certo. E esse jeito de dividir que você colocou aí no papel... o que significam essas bolinhas?

**E8 - São as sacolinhas dos brindes.**

## 2. Algoritmo Chave Longa (ACL):

Conforme dito anteriormente, 15 estudantes enquadraram-se nesta conduta, como exposto a seguir:



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

**Figura 8. Representação de E10 (9,11), 4º ano.**

E10 é um dos estudantes que também realizou a prova real.

P - Eu gostaria que você me explicasse como pensou para resolver esse problema. Se precisar, você pode usar esta folha (em branco).

**E10 - Explicar tipo... como que é a conta?**

P - É como é que você fez para resolver esse problema.

**E10 - Eu fiz na conta de divisão uma chave... daí depois eu fiz a prova real em vezes.**

P - Mas me fale como você fez desde que você pegou essa folha...

**E10 - Eu comecei a fazer a conta de chave, porque... Quer ver como que é?**

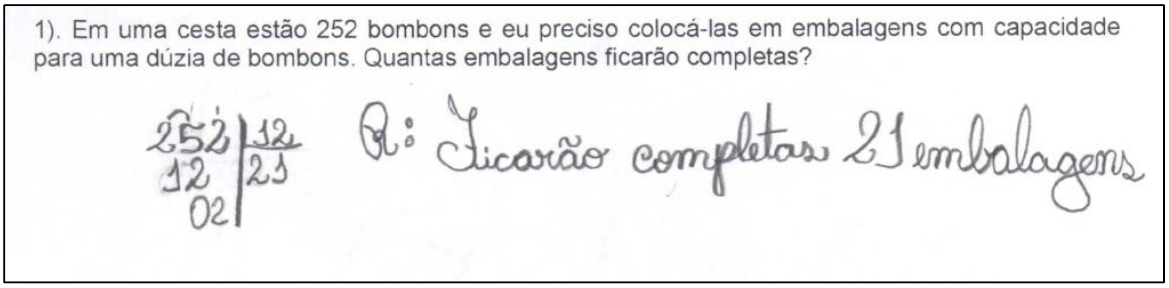
P - Quero.

**E10 - Eu vou dar um exemplo. O exemplo é 6 dividido por 4, você tem que tentar pegar o menor número que dá pra dividir por 4... Primeiro começa do 1, o 1 num dá** (fazendo na folha em branco)**... dá 25, então 25 vezes 4 dá 100, daí eu faço uma conta de menos...**

P – Por que essa conta de menos?

**E10 - Pra saber quanto que sobrou...**

Segue a representação de E12:



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

252 | 12
12 | 21
02

R: Ficarão completas 21 embalagens

**Figura 9. Representação de E12 (11,2), 5º ano.**

**E12 - Eu pensei assim: uma dúzia são doze, então eu tenho que dividir 252... Dividido por 12. Tá? ... E daí eu fiz 252 dividido por 12, que foi igual a 21 bombons. Né? (anotando na folha) E o total é isso porque o resto foi de 2, não dá para continuar. Sendo que o divisor é maior que o resto, então não dá para continuar.**
P - Então foi trabalhado com resto...
**E12 - Com resto... Então, sendo que o divisor né? O divisor é maior que o resto, então não dá pra continuar... Então o resultado é 21. Ficarão completas 21 embalagens** (neste problema não há resto, mas o resultado está correto).
P - Certo. Bia. Por que você pensou é, vou dividir?
**E12 - Porque precisa colocar em embalagens com capacidade de uma dúzia, ela precisa colocá-las, ela precisa dividi-las naquelas caixas, (Fazendo sinais com a mão) uma quantidade naquelas embalagens... Então ela precisa dividir.**

Vale destacar que esta criança (E12) utiliza folhas de rascunho para realizar seus cálculos e, quando foi questionada sobre isso, afirmou que costuma conferir os resultados de suas contas, mas que o faz em folha separada porque, muitas vezes, não há “espaço” para colocar as contas, como pode ser visto pela fala de E12 a seguir:

P - E você confere para ver se está certo?
**E12 - Confiro, mas eu confiro numa folha à parte e coloco aqui.**
P - Porque você não gosta de conferir na mesma folha?
**E12 - Não é que eu não gosto, é que assim... Certas atividades têm menor espaço, e se eu for, por exemplo, fazer a prova real, então eu ponho numa folha à parte e anexo junto ao problema, aí coloco bem no cantinho: Prova real na folha anexada.**
P - Tá, então tem alguns lugares em que você não faz porque não tem espaço?
**E12- É.**
P - Que lugares, por exemplo, não têm espaço? O caderno?
**E12 - Não, o caderno tem bastante, no livro. Esse é um dos problemas... no livro... porque eles só deixam um espaço igual pra todos né?**

De fato, o que esta criança constatou é um dos limitadores às representações espontâneas das crianças, uma vez que os livros didáticos não trazem espaço suficiente para comportar tais representações

O enunciado dos dois problemas a seguir, mostrados respectivamente nas Figuras 10 e 11, é o mesmo descrito na Figura 9, anterior.


252 |12
-24   21
012
12
00

R: Ficaram 21 embalagens completas.

**Figura 10. Representação de E18 (10,7), 5º ano.**

**E18 - Daí pra, 252 bombons pra mim colocar em cada uma caixa eu dividi por 12 caixas. Pra mim pôr esse** (252) **em 12 caixas. Daí eu peguei, eu fiz o modo breve, né?**
P - O que é o modo breve? O modo breve do quê?
**E18 - Da divisão.**
P - E o que é o modo breve?
**E18 - Modo breve é o modo mais rápido, porque também tem o modo de estimativa, você vai estimando números... Aí eu estimei o 2, aí duas vezes o 1, duas vezes o 12, aí dá 24, aí eu ponho e subtraio aí depois eu estimo o 1, aí deu 12, aí dá certo, aí eu somo 2 mais 1, 3... Daí tem vez que dá, aí quando não dá, você apaga e você estima um outro número...**

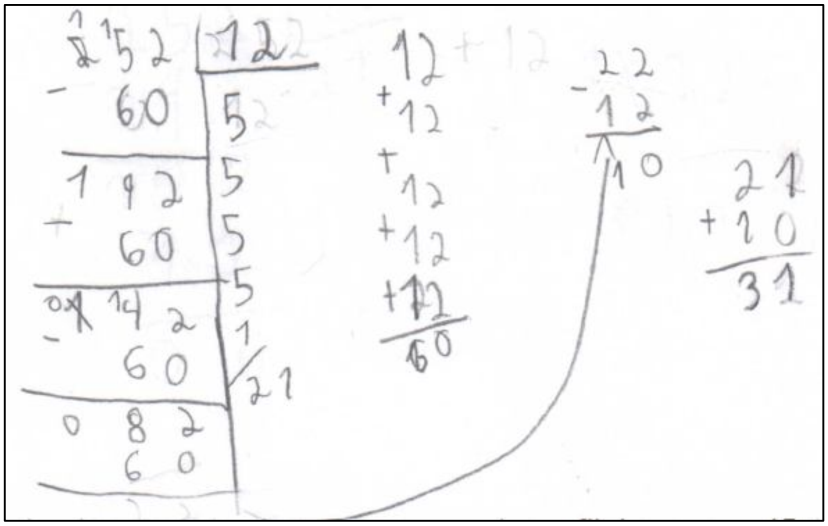


**Figura 11. Representação de E19 (10,5), 5º ano.**

**E19 - Nesse primeiro eu pensei, numa cesta são 252 bombons e eu preciso colocá-los em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons, quantas embalagens ficarão completas? Daí eu pensei: se você precisa colocar em uma dúzia, que é 12, daí você coloca 252 dividido por 12... Daí eu fiz assim...**

P - Por que é dividido Ped? Por que você pensou que era de dividir o problema?

**E19 - Porque 225 você vai tentar dividir eles em 12 partes pra poder repartir em cada caixa. Daí eu comecei assim, quantas vezes o 12 cabe no 252... daí eu coloquei assim... 5 vezes, vamos tentar 5 vezes 12, daí eu fiz, e então 12 mais 12 mais 12 mais 12 mais 12... Deu 60... Aí eu coloquei, aí eu falei: Ah vou colocar do lado, daí eu coloquei aqui, ficou 192 daí eu coloquei mais 5 vezes, deu 60 daí eu fiz a conta deu 92, daí eu falei: mas 60 cabe no 92, daí eu coloquei sobrou 22... Aí mais uma vez, daí sobrou 10... Aí eu somei o 21 mais 10 que ficou 31...**

## 3. Algoritmo Chave Breve (ACB):

Esta categoria de procedimentos foi encontrada em 5 estudantes, sendo 3 do 4º ano e 2 do 5º.

Nesta categoria, serão apresentadas apenas duas representações gráficas uma vez que não há diferenças nas formas como os estudantes representaram por se tratar de um algoritmo canônico e, portanto, convencional e padronizado.

Priorizou-se demonstrar duas representações de estudantes de 4º ano a fim de verificar que estudantes mais novos empregam essa técnica, considerada a mais econômica para se resolverem problemas de divisão e, portanto, a mais avançada do ponto de vista formal. Porém não podemos afirmar que essas crianças tenham empregado tal procedimento porque compreendem o significado do algoritmo ou se estavam apenas aplicando a técnica, pois ambas erraram o resultado do problema.

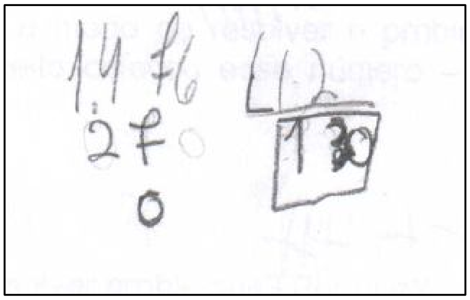


**Figura 12. Representação de E2 (9,6), 4º ano (erro).**

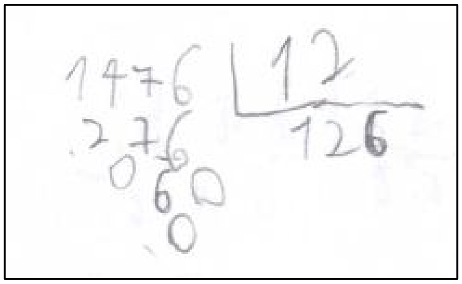


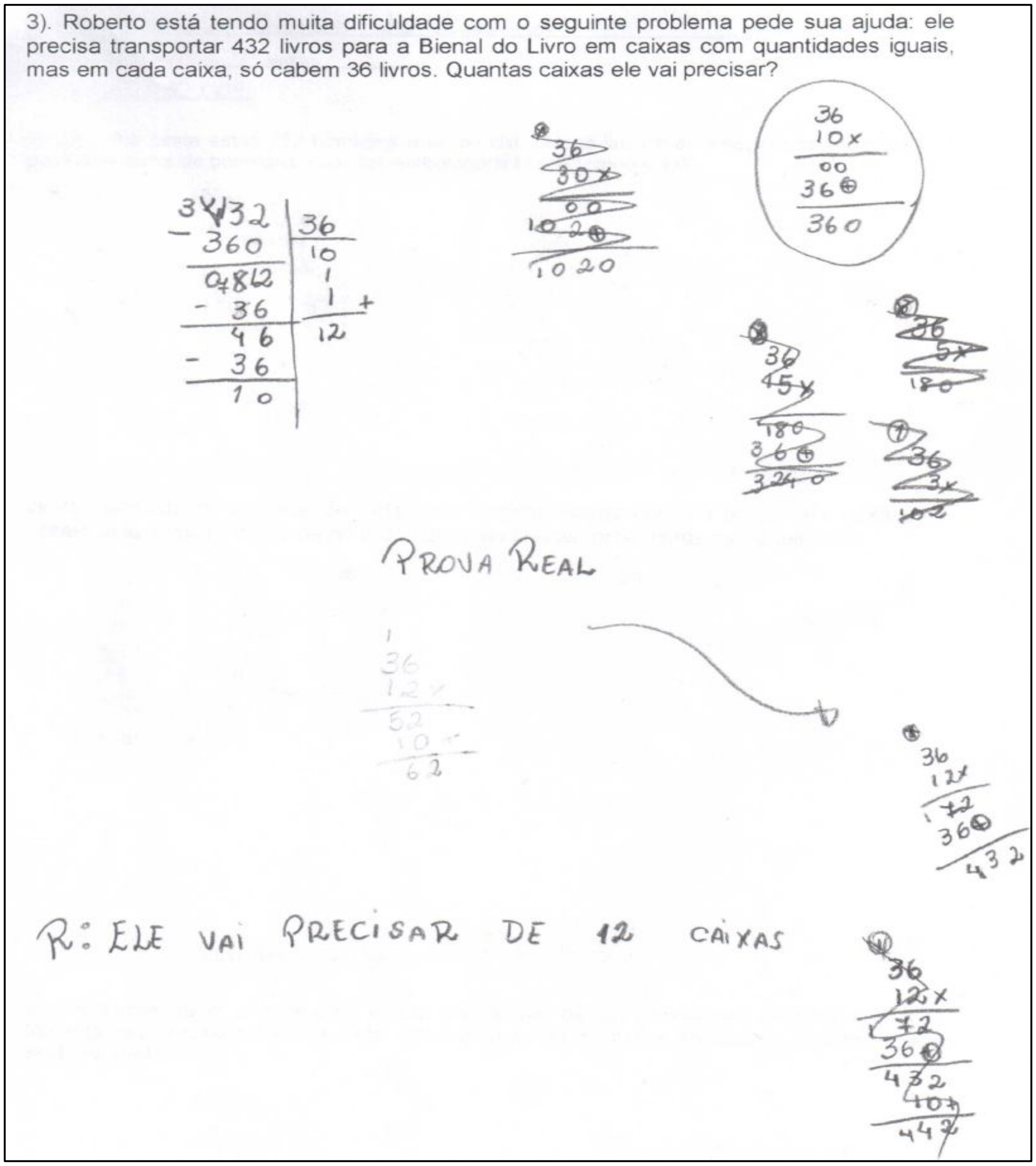
**Figura 13. Representação de E3 (9,6), 4º ano (erro).**

> **E2 - Eu fiz 1476 dividido por 12, eu fui fazendo os pauzinhos** (atrás da folha) **pra ver quanto que ia ser dividido** (usando “pauzinhos” para fazer o cálculo).
> **E2 - Aí eu fui fazendo... Eu não fiz tudo, eu fiz 14 dividido por 1, aí eu fiz... Calma aí deu 14...** (percebendo que errou no cálculo).
>
> **E3 - Eu peguei 1476, dividi por 12.**
> P - Humm, por quê?
> **E3 - Porque ele tem 1476 brindes...**
> P - 1476...
> **E3 - É. Brindes. E cada pacote deve ficar com 12 brindes.**

## 4. Algoritmo Americano (AA):

Esta categoria foi encontrada em 7 estudantes, todos cursando o 4º ano.

Depois do modo **decomposição**, este é o procedimento que mais se assemelha ao pensamento da criança e, do ponto de vista da aprendizagem da técnica operatória da divisão – quando se prioriza seu ensino – este pode ser um procedimento intermediário entre formas mais elementares de solução e o emprego do algoritmo canônico.



3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

PROVA REAL

R: ELE VAI PRECISAR DE 12 CAIXAS

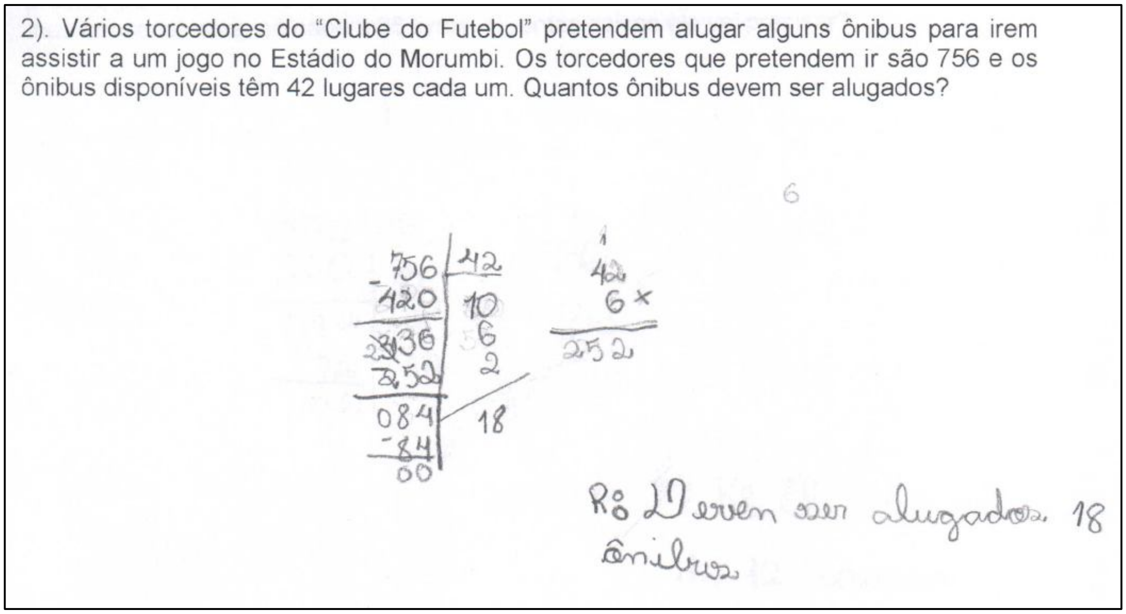
Figura 14. Representação de E11 (10,8), 5º ano.

Vejamos a explicação dada por E11 para sua representação:

**E11 -** (Faz a leitura do problema em voz baixa)**. É fácil, é só fazer 432 divido por 36.**
P - Por quê?
**E11 - Porque assim, eu tenho 432 livros e as caixas só... peraí... são 432 livros em caixas com quantidades iguais. E em cada caixa só cabem 36 livros, então**

**tem que fazer 432 dividido por 36**. (Começa a construir o algoritmo na folha do problema**) Acabei!**
P - E como você resolveu?
**E11 - 432 dividido por 36... não dá pra pôr o 36 no 4, então juntei 43. Quantas vezes o 36 cabe no 43... 1!** (continua explicando a os passos da conta realizada).

Outra representação por algoritmo de chave longa foi de E13, a seguir:



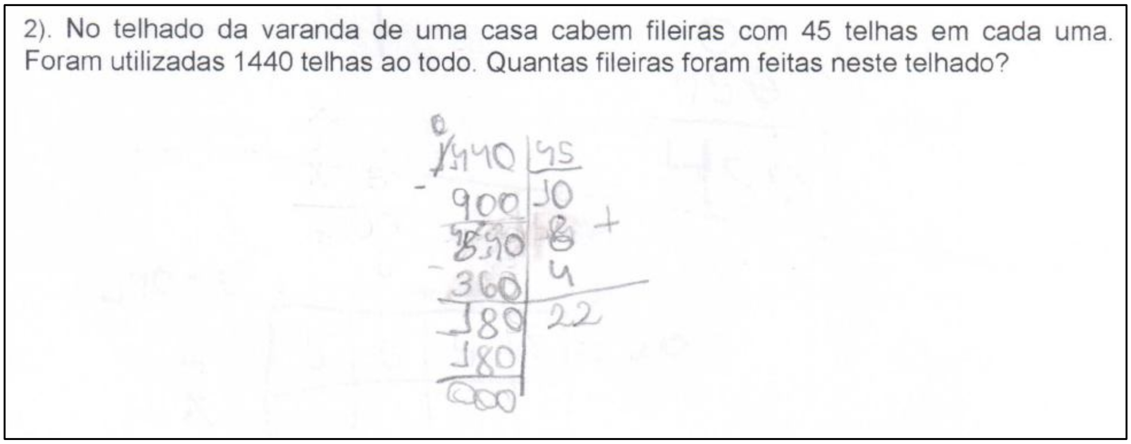
2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

Rº Deven ser alugados 18 ônibus

**Figura 15. Representação de E13 (10,7), 5º ano.**

P - Como você pensou para resolver este problema?
**E13 - É que eu tinha 756 pessoas e os ônibus tinha 42 lugares. Aí eu pensei em dividir pra cada pessoa ficar no lugar certo. Aí eu pensei em 10, aí tem um jeito que você coloca um 0 aqui, aí você faz a...**
P - Só uma coisa antes... você disse que pensou em dividir: a primeira coisa que você pensou é que esse problema era de divisão, é isso?
**E13 - É. Eu dividi 756 por 42... aí deu 420 aqui sobrou 36, aí eu pensei no 6 e eu fiz a conta aqui deu 252... Depois eu fiz 84, 42 mais 42 deu 84... E é 42 aqui.**
P - Você vê que quando você vai colocar um número aí, como é que você faz para escolher esse número?
**E13 - Eu vou tentando até chegar no resultado.**

A seguir, observa-se a representação de E14:



2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

Figura 16. Representação de E14 (11,1), 5º ano (erro).

P - Você pode me explicar como é que você fez para resolver este problema?
**E14 - Eu fiz de divisão também. E eu fiz por estimativa porque eu não sou muito bom de calcular assim.**
P - O que é estimativa?
**E14 - É assim ó:** (Começa a fazer na folha em branco)**... Eu coloquei 10** (fez a multiplicação de 45 por 10), **daí quando eu tô com muito, muito mesmo, que nem aqui deu 900...** (errando o cálculo)
P - Eu não entendi o que você falou. Você colocou 10 por causa de ficar muito? É isso que você falou?
**E14 - É, eu pus o 10 pra aproximar bastante, pra ficar mais fácil a conta. (continua fazendo a conta)**
P - Ah tá! Isso é fazer estimativa Guilherme?
**E14 - Não, estimativa é tipo... você pega um número que você sabe que dá, ó tipo... aqui. Nas provas mais ou menos eu faço assim, eu pego, eu vejo... 45 vezes o 10... aí eu vejo como que... Será que tá errada a conta?** (percebendo o seu erro). **Bom, daí eu somo e deu 450. Aí eu vi que dava um número maior...**

Este estudante fez uma estimativa incorreta: ele queria chegar a 1440 e para aproximar-se desse número, multiplicou o 45 (divisor) por 10, o que deu 450, estando ainda longe do resultado esperado.

A seguir, outras representações para o mesmo problema:

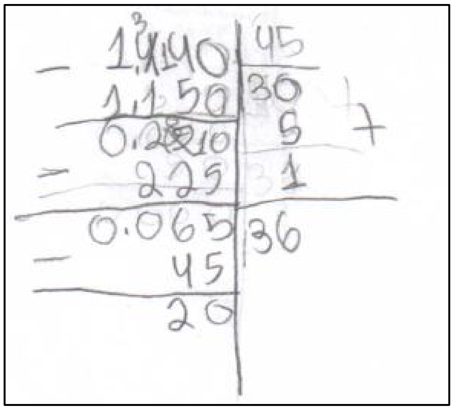


Figura 17. Representação de E20 (10,3), 5º ano (erro).

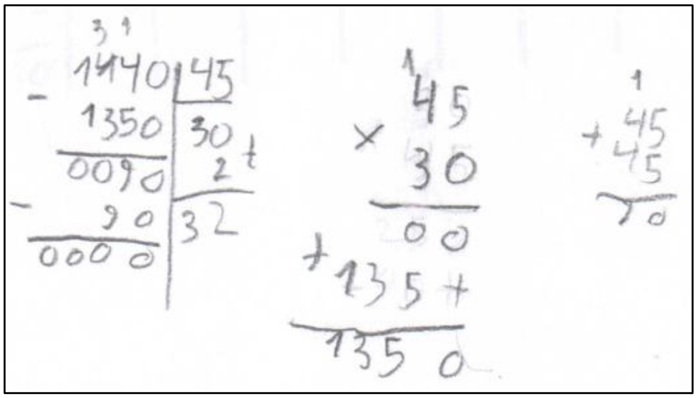


Figura 18. Representação de E15 (11,1), 5º ano (erro).

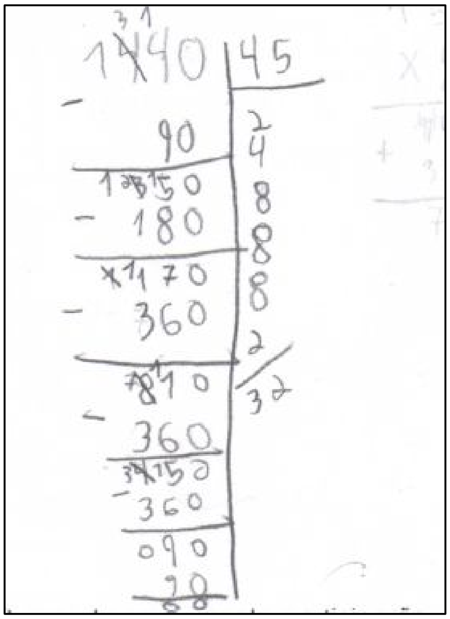


Figura 19. Representação de E19 (10,5), 5º ano.

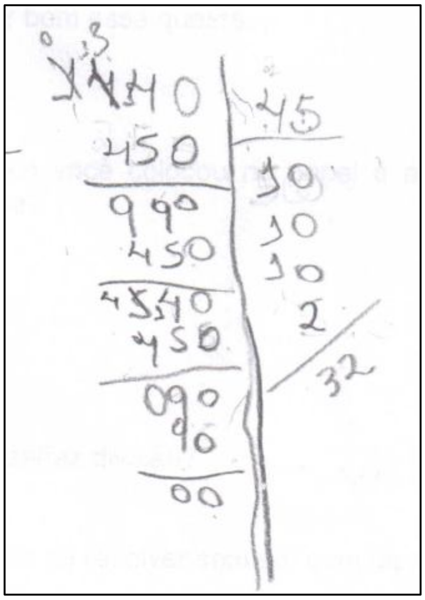
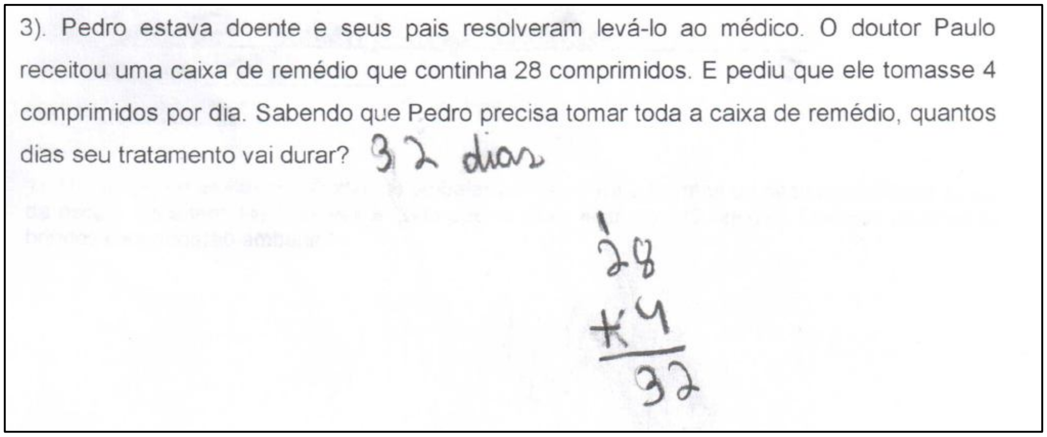


**Figura 20. Representação de E17 (11,3), 5º ano.**

Essas representações mostram estimativas totalmente diferentes, utilizadas pelos estudantes, embora com o mesmo resultado, o que reforça a ideia de que há várias formas de se resolver o mesmo problema.

## 5. Algoritmo Adição (AAd):

Apenas 1 dos 20 estudantes empregou este procedimento como a conta para solucionar o problema. Trata-se de E2, do 4º ano:



3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar? 32 dias

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}8 \\ +4 \\ \hline 32 \end{array}$$

**Figura 21. Representação de E2 (9,6), 4º ano (erro de procedimento).**

Nota-se que ele errou o procedimento em um problema com dados simples. Ele poderia ter usado adição para somar parcelas do quociente, mas a empregou o raciocínio incorreto somando o divisor ao dividendo, procedimento inadequado.

Este estudante é o que mais cometeu erros nas soluções dos problemas; entre os 6 problemas, suas respostas estavam incorretas em 5 e mesmo quando explicou as formas pelas quais resolveu os problemas, não identificou seus erros. Ele não checou o que o problema pedia; mesmo lendo o enunciado novamente, apenas conferiu a conta utilizada.

Percebe-se uma total ausência de antecipação da solução e embora a pesquisadora relesse o problema, ele não avaliou o seu procedimento. Isso pode ser verificado no diálogo mantido com o estudante:

P - Você pode explicar para mim como você pensou?
**E2 -** (Lê o enunciado do problema em voz alta) **Daí eu fiz 28 comprimidos mais 4.**
P - E qual o resultado que deu?
**E2 - Deu 94...**
P - Mas 28 mais 4 dá 94, tem certeza? Você tem certeza de que a resposta tá correta?
**E2 -** (Confere a conta) **Dá 34...**
P - Ah.
**E2** - (Apaga alguns números da conta da folha, modifica do resultado) **Deu 32 dias.** (Escreve a nova resposta na folha).
P - Como é que você chegou à conclusão de que era essa a operação que você tinha que fazer Augusto?
**E2 - Porque esses comprimidos era pra beber mais 24 dias...**
P - Tá, mas não eram 24 dias, né? Ele tem que comprar uma caixa que tem 28 comprimidos e tem que tomar quatro comprimidos por dia, é isso?
**E2 - É.**
P - Então quantos dias seu tratamento vai durar?
**E2 - 32 dias.**
P - 32?
**E2 - É.**
P - Você tem certeza de que sua resposta tá certa?
**E2 - Tenho.**

## 6. Algoritmo Multiplicação (AM):

Nesta categoria, enquadraram-se 9 estudantes.

Este problema é o mesmo solucionado por E2, na categoria anterior, porém neste caso, o estudante empregou, com êxito, a multiplicação como operação inversa à divisão.

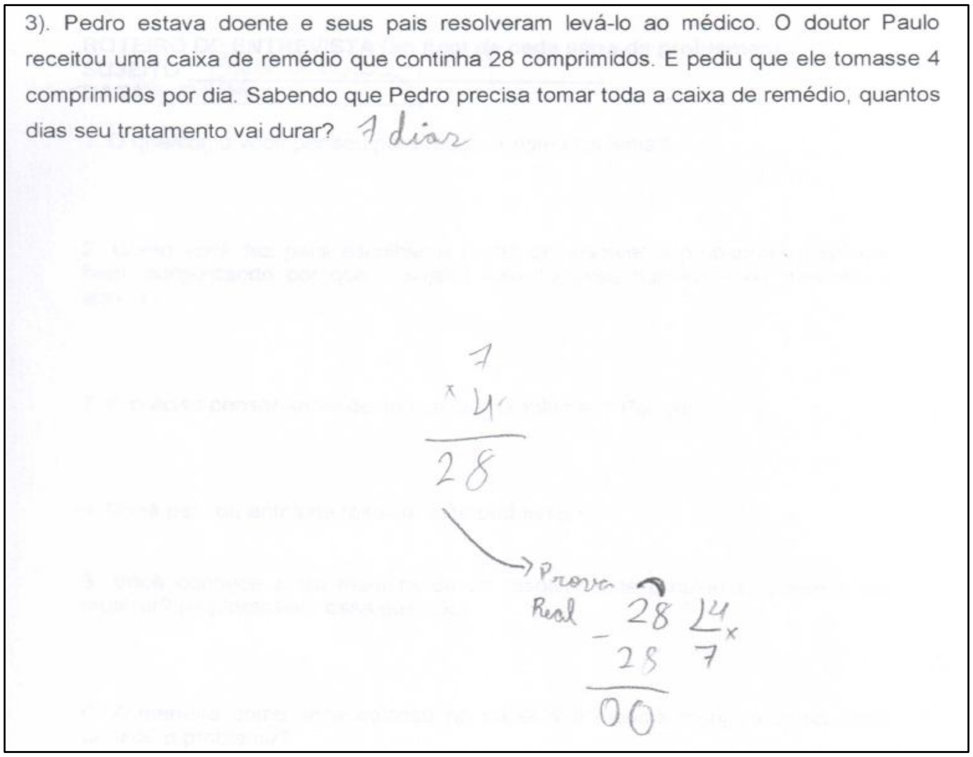

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar? 7 dias

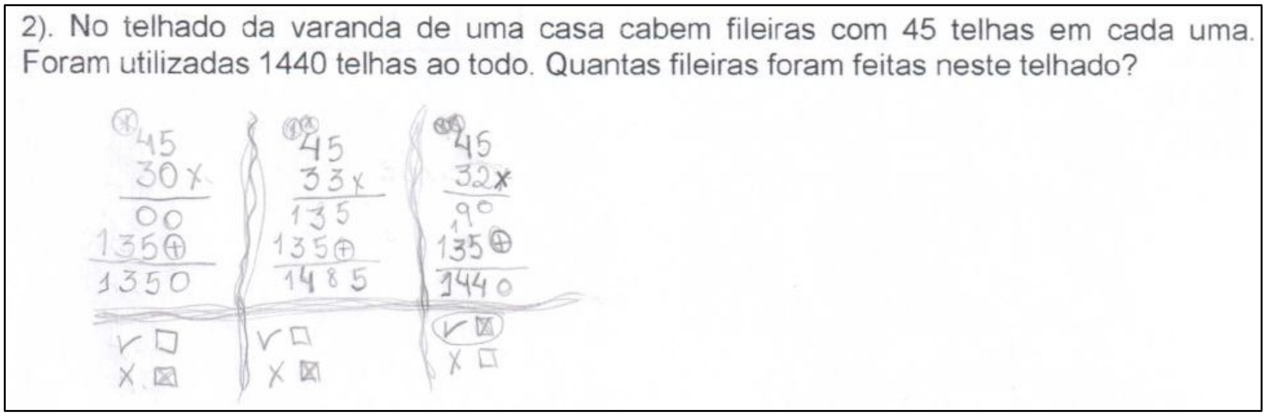
**Figura 22. Representação de E4 (9,10), 4º ano.**

Vejamos a justificativa de E4:

(Lê o enunciado e fica pensando por um tempo, com expressão de quem está calculando mentalmente; em seguida, rapidamente faz a conta no papel, levando em torno de dez segundos para calcular)
**E4 - [...] 5 vezes 4 já dá 20 com mais 2, com mais 2 dá 24, mas daí tem que colocar mais 2 aqui, dá sete...** (explicando como opera com a multiplicação, explica o procedimento, mas já antecipa o resultado).
P - Dá 7? É?
**E4 - 7 vezes 4 dá 28... 28 dividido por 4 é igual a 7 e 7 vezes 4 é 28 menos 28, 0... não sobra nada. Dá uma conta exata.**
P - É uma conta exata. É uma conta do que essa Gui?
**E4 - Vezes e a prova real é divisão.**
P - Ah é? E você precisou pensar para resolver esse problema?
**E4 - Não.**
P - Não? Você já olha e já resolve?
**E4 - Eu já olho e tenho a tabuada na minha cabeça.**

Este estudante não só antecipa mentalmente a operação, como a explica de formas diferentes, basta verificar como ele explica que chegou ao 28: 5 x 4 = 20 + 2 + 2 = 24 + 2 +2 = 28, ou 7 x 4 = 28. A seguir, diz que 28 ÷ 4 = 7, que é igual a 7 x 4 = 28, fazendo a inversão da operação, mostrando claramente estar de posse do operador multiplicativo. Por isso que este sujeito está no nível IV da psicogênese da multiplicação e da divisão.

Segue outra representação gráfica por multiplicação:



2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

**Figura 23. Representação de E11 (10,8), 5º ano.**

Interessante esta representação: a criança explica que marca, em todas as tentativas, as que estão corretas ou incorretas, como se procurasse deixar seus passos registrados, que, neste caso, serviram como apoio aos cálculos realizados, conforme explicação a seguir:

> **E11 -** (Começa a explicação lendo o problema) **Aí eu falo assim... Cabem fileiras de 45 né? ... aí eu vou chutando assim... 45 vezes 30, deu 1350... aí não deu certo. Aí depois chutei 45 vezes 33, daí 1486, aí deu errado também... Aí troca, 45... Tem já passado...**
> P - Ok.
> **E11 - Aí 45 vezes 32, aí deu 1440... Aí deu certo.**
> P – Ah, tá! Então você foi fazendo por tentativas, é isso?
> **E11 - Uhum...**
> P - Ah tá! Então embaixo você foi fazendo algumas marcas; então para que servem essas marcações aqui?

**E11 – Ah, aqui? Assim é quando tá certo e assim errado.** (Mostrando as marcas em outra folha em branco) **Aí eu coloco um negócio assim** (marca com o x) **pra ver se tá certo ou tá errado. E quando estiver certo, eu faço esse e, se tiver errado, eu faço esse...**
P - E por que você escolheu fazer por 30 primeiro?
**E11 - Não sei.**
P - Não sabe... Você chutou algum número?
**E11 -** (Sinal aparente de positivo com a cabeça. Como não foi autorizada a filmagem de corpo desta estudante, só puderam ser captados os seus movimentos de mão).
P - Bia, então é um problema de multiplicação?
**E11 -** (Sinal aparente de positivo com a cabeça)
P - E como é que você faz para resolver qual cálculo você vai fazer? Quando você tem um problema para resolver, como é que você sabe que o problema é de divisão, quando é de multiplicação?
**E11 - Depende... Eu tenho que dar 30 bombons pra nós duas, daí tem que usar dividir.**
P - Humm...
**E11 - Às vezes, vou ter que dar tantas coisas por tantas coisas em tantas coisas, em cada coisa...**
P - Você precisa pensar para resolver um problema?
**E11 - Uhum.**
P - Você pensou para resolver esse problema?
**E11 - Sim.**
P - Então, e como que é pensar um problema? Como é que você faz?
**E11 -** (Começa a ler um dos problemas propostos – problema 2 da 2ª série) **Aí é... eu vejo quanto cabe em cada pra ver qual é o resultado que eu tenho que pôr nessa parte aqui** (quociente).
P - E o jeito que você pensa é o mesmo jeito que você põe no papel?
**E11 - Sim.**
P - Você conhece outra maneira de resolver esse problema?
**E11 - Esse daqui? Não... Ah! Quando eu era menor eu fazia... se fosse número alto eu fazia, tipo... 250... Calma aí! Eu fazia 12 bolinhas e colocava 250 dentro, aí eu colocava tipo... 10 vezes era tanto... Eu fazia assim...** (começa a desenhar as bolinhas em outra folha, explicando por decomposição).

Vale lembrar que algumas das crianças variaram os seus procedimentos de solução, entre todos os problemas solucionados.

Segue a representação gráfica de Bru (E13) para o problema anterior:

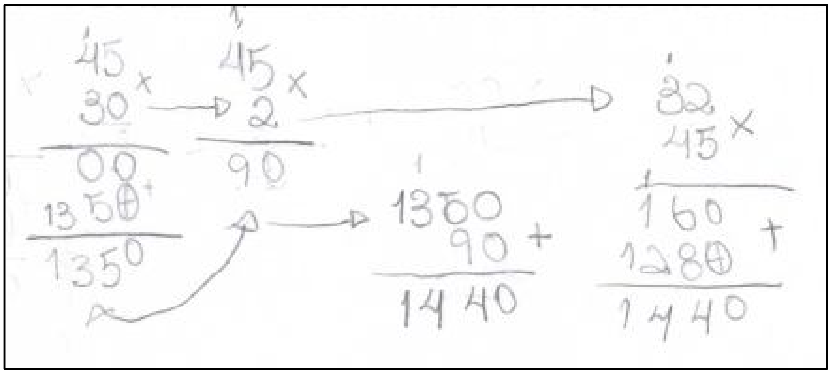


**Figura 24. Representação de E13 (10,7), 5º ano.**

P - Como você pensou para resolver este problema?

**E13 -** (Lê o enunciado do problema). **Aí em cada fileira cabem 45 telhas... aí eu somei 45 vezes 30 pra ver se dá até chegar nesse número, multiplicando até chegar nesse número** (apontando o dividendo, 1440)**, aí eu consegui um que chegou, eu fiz 45 vezes 30...**

P - 1350 não dava ainda?

**E13 - Não, daí eu fiz 45 vezes 2, daí deu 90, daí eu juntei com esse (1350 com 90), aí eu pensei que ia dar certo, aí eu somei esses dois deu 1440 que é esse resultado aqui. Aí eu fiz 32 vezes 45, dava 160**

P - Eu não entendi ainda porque você fez essa outra conta aqui. Eu não entendi ainda sua explicação, você consegue explicar de novo?

**E13 - É que eu tô tentando fazer a soma, as multiplicações até chegar no 1440.**

P - Ah, você tentou várias multiplicações?

**E13- É.**

P - Multiplicando o quê?

**E13 - O 45 vezes algum número que ia dar 1440, eu fui tentando números aqui...**

P - Você fez 45 vezes 30 primeiro?

**E13 - É.**

P - É. E daí deu 1350.

**E13 - É. Aí... depois eu tentei 45 vezes 2, deu 90. Aí eu somei esses dois aqui** (1350 + 90) **e deu 1440.**

P - Então aí já tinha terminado.

**E13 - É.**

P - Mas daí você fez outra conta. Por quê? Por que você fez essa outra conta, 32 vezes 45? Essa última...

**E13 - Fiz outra conta também que deu certo. Ah, porque aqui ó... 32... É pra ver aqui ó 32 vezes 45...**

P - Ah!

**E13 - Porque eu já sabia que esses dois dava certo** (30 x 45 e 2 x 45)**, aí eu já juntei tudo e fiz uma conta inteira.**

P - Você fez isso para conferir ou não?

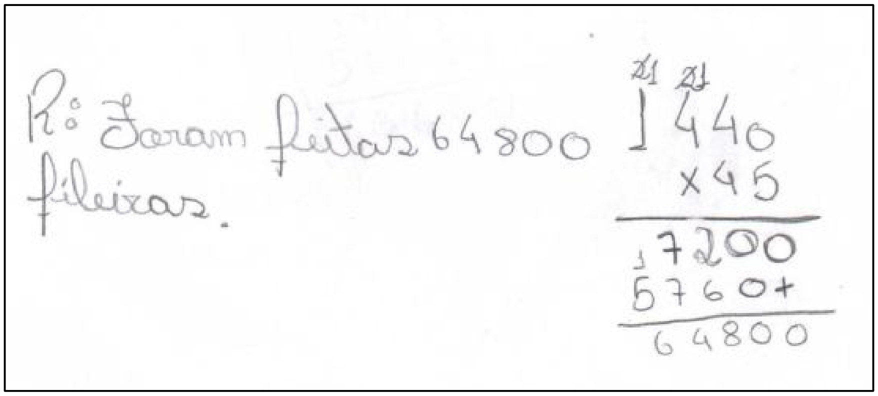
**E13 – È, pra conferir.**

P - Para conferir ou você quis tentar outro jeito para ver se dava certo?

**E13 - É pra ficar uma conta mais exata. Aqui eu só tentei né, aí aqui que eu juntei essas duas contas e fiz essa.**

P – Ah, tá!
**E13 - Aqui o 30 e o 2 que deu certo, deu certo os dois e eu fiz uma conta inteira.**
P - Ok. E aí qual foi a resposta então para esse problema Bruna?
**E13 - Foram feitas 32 fileiras.**

A seguir, segue a representação gráfica de E18 para o problema anterior, com erro de procedimento:



R: Foram feitas 64800 fileiras.

21 21
1440
x45
17200
5760+
64800

**Figura 25. Representação de E18 (10,7), 5º ano (erro)**

Neste caso, E18 multiplicou o dividendo pelo divisor, não percebendo que o procedimento fugia à solicitação do problema, saber quantas fileiras era possível fazer com 45 telhas cada.

**E18 - Esse daqui eu fiz assim** (lê o enunciado do problema)**. Daí eu fiz assim ó: 1440 vezes 45. Porque aí eu tenho que ver 45 telhas, não... 45 fileiras né? E 1440 em cada fileira...**
P - Tá, mas são 1440 telhas ao todo né?
**E18 - É ao todo. Aí eu tinha que fazer vezes pra descobrir, aí eu fiz...** (descreve os passos da multiplicação efetuada). **Só que aqui eu acho que eu errei alguma coisa.**
P - Pode retomar: se você quiser corrigir alguma coisa que você acha que está errada pode corrigir.
**E18 - Em vez de eu pôr o 20, eu pus o 12 aqui e o 2 em cima, deu zero aqui.** (verificando seu erro ao levar o 2 em vez do 1, do 12)
P - Pode fazer na outra folha.
**E18 - (Começa a fazer a conta em outra folha, explicando alguns passos em voz alta)**
**E18 - Terminei. Pronto, eu fiz assim, tem que ter 73600 fileiras.**
P - Tá. E você tem certeza de que esse resultado tá certo?

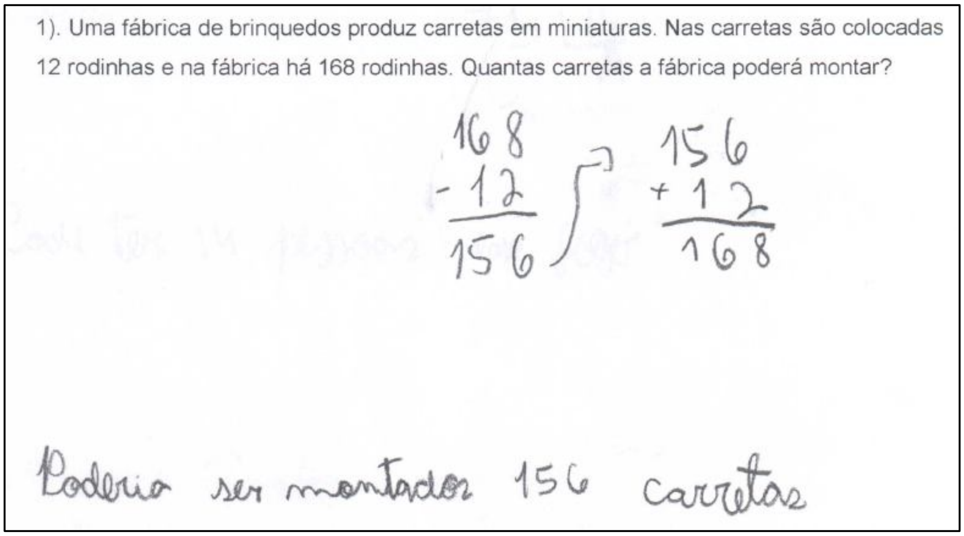
**E18 - Ah, aí tem vez que eu não sei daí eu... Sempre assim na Matemática eu faço um resultado, daí eu falo: Huumm não sei se tá certo, daí eu faço a conta de novo pra ver se tá certo.**
P - Que foi o que você fez agora, você estava fazendo a conta de novo porque você percebeu que tinha um errinho, né?
P - Lucas, esse problema perguntava quantas telhas caberiam em 45 fileiras, é isso? Sendo que tinha 1440 telhas, não é isso?
**E18 - É, daí quantas fileiras foram feitas nesse telhado?**
P - Então, as fileiras com 73600, é isso?
**E18 - Pera**... (Observa o problema e suas respostas)**. É.**

Este estudante refez a conta, mas utilizando o mesmo procedimento – multiplicando o divisor pelo dividendo – e não percebeu seu erro, apenas corrigiu o erro de cálculo que havia cometido anteriormente.

É outro caso que demonstra a conferência apenas do cálculo empregado, sem relacioná-lo com a estrutura semântica do problema.

## 7. Algoritmo Subtração (ASb):

Apenas 1 estudante (E2) empregou este procedimento e errou, conforme pode ser visto na Figura 26, a seguir:



1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r} 168 \\ -12 \\ \hline 156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 156 \\ +12 \\ \hline 168 \end{array}$$

Poderia ser montados 156 carretas

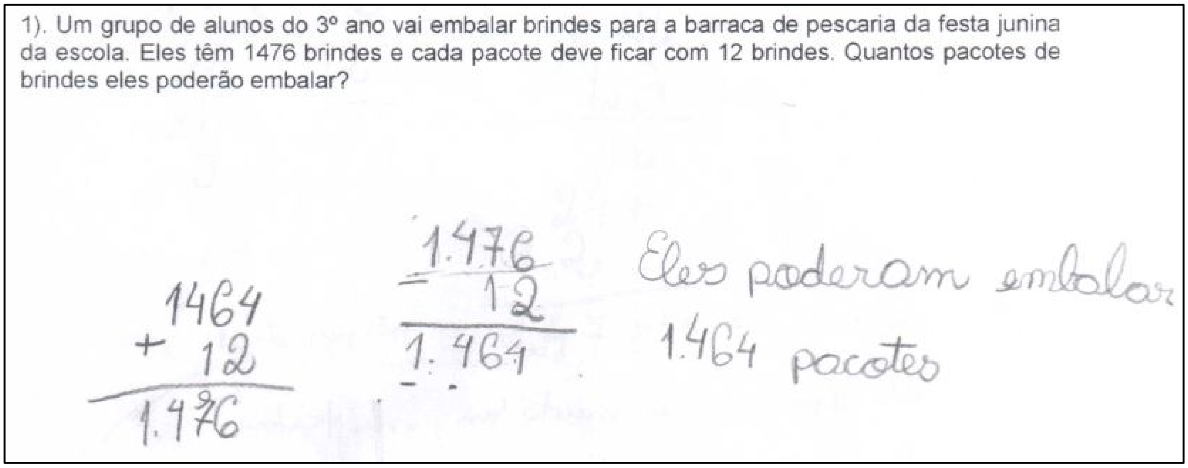
Figura 26. Representação gráfica de E2 – erro de procedimento.

E2 resolveu subtraindo 14 de 364 e, depois, efetuou a prova real, fazendo o inverso (soma). Segue a seguir a explicação de E2 para o seu procedimento de solução:

> P - Você pode me explicar como é que você fez?
> **E2 -** (Lê o enunciado do problema) **Eu fiz assim: 168 menos 12, daí deu 156...**
> P - Então a resposta é...
> **E2 - Vai poder montar 156 carretas.**
> P - 156 carretas para usar as 168 rodinhas?
> **E2-** (Sinal de positivo com a cabeça)
> P - Você tem certeza de que está certo seu problema? Como é que você pode confirmar que tá certo?
> **E2 -** (Faz uma conta na folha do problema proposto) **Eu tiro a prova real, 156 que é o resultado mais 12 que é a quantidade de rodinhas (explica os passos do algoritmo) 168.**

Trata-se de outro exemplo de criança que não avalia seu procedimento de solução em relação ao enunciado do problema, realizando a prova real que, como já discutido anteriormente, confirma apenas o cálculo, e não a estrutura do problema.

Outro estudante que utilizou a subtração foi E9. Seguem sua representação e o diálogo mantido durante a entrevista:



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

1464
\+ 12
1.476

1.476
\- 12
1.464

Eles poderam embalar 1.464 pacotes

**Figura 27. Representação de E9 (10,3), 4º ano (erro).**

> **E9 - Aí aqui eu peguei o 1476 e dividi ele por 12, porque cada pacote tem que ter 12 brindes.**
> P - E por que você dividiu?
> **E9 - Não... Subtraí.**
> P - Ah.

**E9 - Eu subtraí, porque cada um deve ficar com 12 brindes... (lê o problema novamente em voz baixa, observa as suas contas). Assim... cada pacote deve ficar com 12 e eles tem 1476... Aí o que eu faço? Aí eu subtraio... subtraindo... Nossa!**

P - Fique tranquila, calma, pra você lembrar...

**E9 - Eu sei é que eu não consigo explicar...**

P - Não tem pressa...

**E9 - Assim, subtraio seis de dois, dá quatro... Por quê? Se eu subtrair, eu vou tirar 12 brindes...**

**Aqui eu peguei né, os 1476 brindes que eles tinham e peguei o número de pacotes que eles tinham que embalar... E cada pacote tinha que ficar com esse número aqui** (aponta o 12 do problema proposto).

P - Que número que é?

**E9 - 12.**

P - Hum...

**E9 – Daí, pra saber quantos pacotes eles poderiam embalar, eu subtraí 12 de 1436... Aí deu 1464.**

P - Hum...

**E9 - Só que eu fiquei um pouco em dúvida nessa conta, se ela era de dividir ou de menos.**

P - Por que você ficou em dúvida Tai?

**E9 - Porque assim, aqui também dá pra fazer assim, eu divido esse daqui por 12...**

P - Você quer fazer em outro papel?

**E9 - Pode?**

P - Pode.

**E9 - É assim, vou dividir agora... 1476 com 12...** (faz a conta de divisão numa folha em branco).

P - Ok.

**E9 - Deu 123 pacotes com 12.**

P- Ah, tá! Mas e agora? Aqui você vez desse jeito e lá, na primeira vez, você fez de outro jeito, né?

**E9 - É.**

P - Qual jeito você acha que tá certo?

**E9 - Esse** (aponta para a folha entregue em branco pela pesquisadora, na qual operara a divisão).

P - Por quê?

**E9 - Esse eu dividi um número que tinha por quantos eu ia ter em cada pacote, daí deu que ficou 123 pacotes com 12... Aí aqui deu 1644, um número muito perto desse...** (aponta para a conta realizada na folha do problema proposto).

P - Ah! Então é por isso que você acha que este está errado?

**E9 - Uhum...** (afirmando).

P - Certo. E tem algum jeito de você ter certeza de que sua resposta está certa?

**E9 - Tem.**

P - Como que você pode fazer pra ter certeza?

**E9 - Prova real.**

P - Que é prova real, Tai?

**E9 - É quando você soma um número do resultado vezes o número que você vai dividir... Aí na conta de menos seria um número que deu mais esse número pra ver se vai dar esse aqui.** (aponta para a primeira folha do problema proposto)

P - Hum... Na conta de dividir, pra tirar a prova real, você multiplica, faz vezes?

**E9 - É.**
P - E na conta de subtrair pra tirar a prova real você faz mais? Você faz soma?
**E9 - É.**
P - Ok.
**E9 -** (Faz a prova real para conferir a resposta do primeiro problema proposto na folha em branco, apaga algumas vezes, volta a escrever, até chegar ao resultado) **1476... Agora vou fazer aqui** (na folha do problema)**.**
P - E aí?
**E9 - Os dois são iguais.**
P - Os dois são iguais? Então qual que você acha que é a resposta certa para esse problema?
**E9 - Ah, eu acho que os dois, só que um você faz de menos e o outro de dividir.**
P - Tá.
**E9 - Os dois tá certo.**
P - Os dois estão certos Tai? Então qual é a resposta do problema?
**E9 - Que eles conseguiram embalar 1474 pacotes e aqui deu 123 pacotes...**
P - Então... Qual você acha dessas duas respostas que estão certas, que está respondendo o que o problema tá perguntando?
**E9 - Essa.** (aponta para a conta de divisão).
P - Por quê?
**E9 - Porque essa daqui (resultado da conta de subtração) é um número muito grande pra eu colocar, pra dar só, tipo assim... Porque não dá pra mim, porque aqui eu só dividi uma vez o 12...**

Este foi um caso interessante: embora a criança tenha utilizado um procedimento incorreto, do ponto de vista da solução do problema, revelando não ter antecipado o erro, ao retomá-lo e explicar como pensou para resolvê-lo, tomou consciência da incorreção.

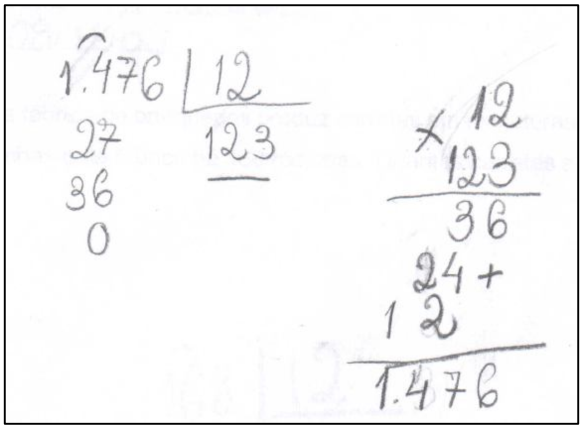


**Figura 28. Representação de E9 (10,3), 4º ano, ao refazer o problema 1 da 1ª série de problemas.**

A tomada de consciência, mesmo que provocada pela intervenção da pesquisadora, mostra que o erro teve sentido para ela, provocando a necessidade de corrigir o problema.

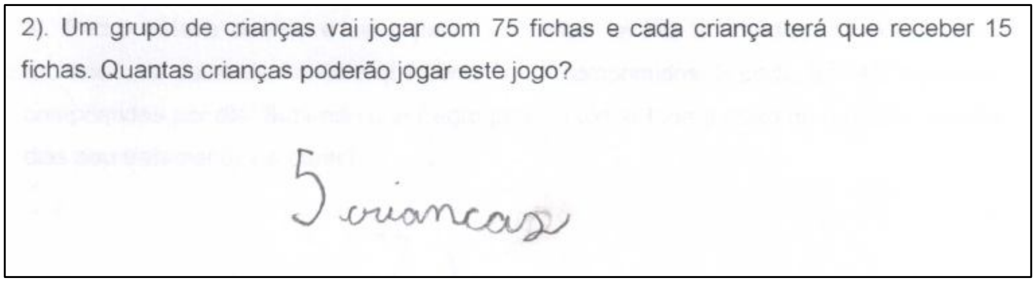
Esse é um tipo de erro que gera uma contradição, erro considerado por Piaget (apud MACEDO, 1997) de nível 2, em que exige a superação por parte do sujeito, conforme será discutido mais a frente.

Como dito anteriormente, realizar a prova real não garante o acerto do problema, apenas do resultado do cálculo empregado. Isso pode ser verificado por meio de E9, que fez a prova real nos dois procedimentos empregados para resolver o mesmo problema e afirmou que "os dois estão certos" (do ponto de vista da conta, referindo-se à prova real), mas que o correto é o da divisão.

## 8. Cálculo Mental (CM):

Apenas 1 estudante apresentou esta conduta. Talvez isso tenha sido favorecido pelo fato de os problemas apresentarem dados numéricos relativamente baixos facilitando o cálculo mental e, consequentemente, a antecipação do resultado.

Seguem suas representações:



2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

5 crianças

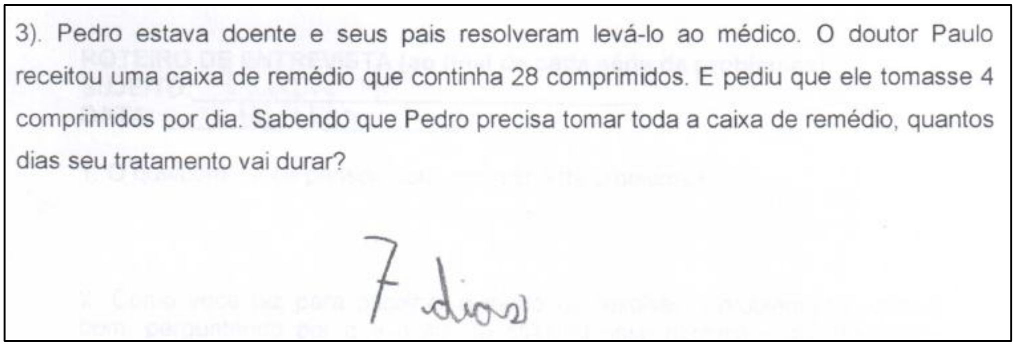
**Figura 29. Representação de E7 (9,7), 4º ano.**

Sua explicação para o cálculo realizado foi a seguinte:

**E7 - Um grupo de crianças... (Lê o problema)... Então tem 75 fichas e cada criança tem que receber 15 fichas...**
P - Uhum...

**E7 - Tem que ver quantas crianças poderão jogar... porque só tem 75 fichas... fiz de cabeça.**
P - Sei, e como é que você consegue fazer de cabeça? Conta para mim...
**E7- Eu peguei o 15 e vi quantos dele cabe dentro do 75, 15 mais 15 é 30... com mais 15 é 45, com mais 15 é 60... mais 15 é 75... então 3... é... 5.**

O mesmo estudante resolveu o problema seguinte empregando também o cálculo mental, conforme a Figura 30, a seguir:



3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

7 dias

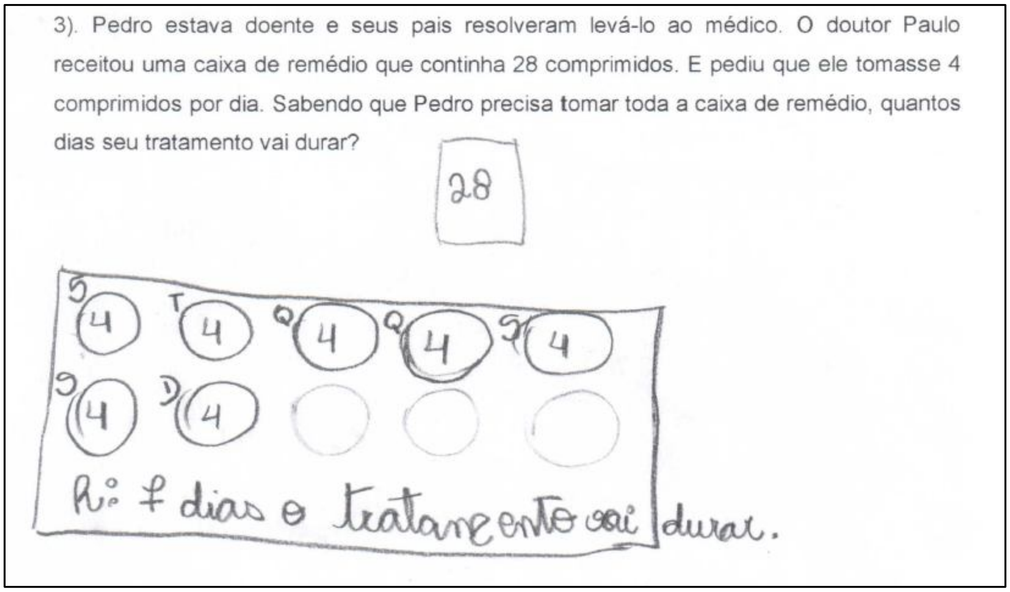
**Figura 30. Representação de E7 (9,7), 4º ano.**

P - Como é que você pensou para resolver?
**E7 -** (Lê o problema proposto). **Eu peguei o 4, porque ele tem que tomar 4 por dia e vi quantos 4 cabem dentro do 28... quatro mais 4 até dar 28! Deu 7 "quatros" 4, 8, 12...** (Contando nos dedos, de 4 em 4)
P - Ahan... então qual foi a resposta do problema?
**E7 - 7 dias.**
P - Lua, então me fale uma coisa: você fez de cabeça, fez o cálculo de cabeça?
**E7 - É.**
P - É? E existiria outro jeito de resolver isso?... Você conhece? Sem ser desse jeito...
**E7 - Tem aquele de bolinhas que eu sei...**
P - E nesse você não precisou fazer as bolinhas?
**E7 - Não.**

Os problemas anteriores aos dois descritos nas Figuras 29 e 30 continham dados numéricos mais altos (o dividendo comportava 3 dígitos) e E7 utilizou procedimentos de decomposição por estimativa para solucioná-los, indicando ser um bom procedimento para se operar com a divisão envolvendo quantidades maiores, nesta etapa de desenvolvimento da criança.

## 9. Desenho (DES):

Embora com o emprego de notações numéricas, este tipo de representação ainda apresenta traços de representações icônicas, como pode ser visto nas representações de E5 e E11, conforme as Figuras a seguir:



3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

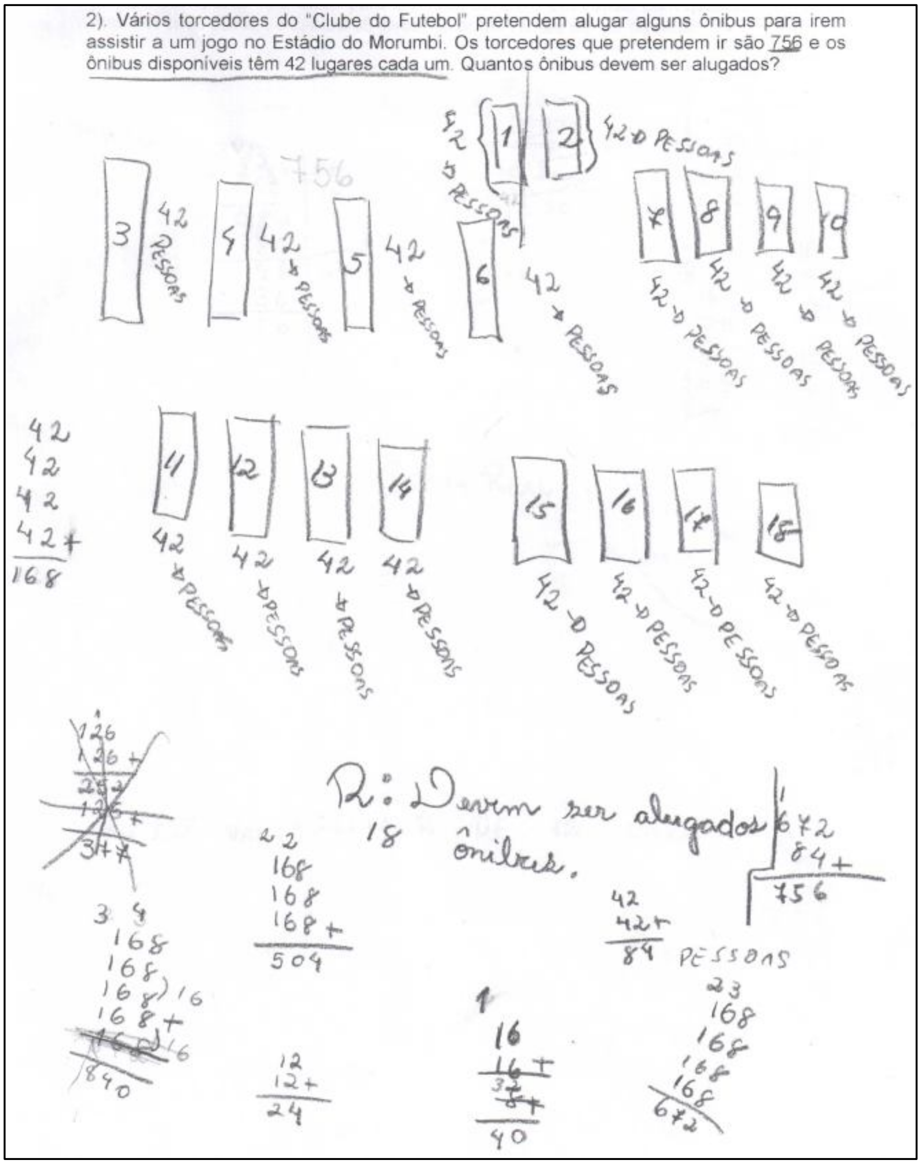
R: 7 dias o tratamento vai durar.

Figura 31. Representação gráfica de E5, 4º ano.

Para solucionar o problema, E5 "desenhou" o calendário com os dias da semana, distribuindo 4 comprimidos para cada dia (que é a quantidade que Pedro tem que tomar por dia) e depois somou de 4 em 4 até chega ao resultado (28). Essa representação deixa clara a imagem mental criada pela criança e de que forma o grafismo pode auxiliar, como apoio ao pensamento.

Nesse tipo de procedimento, não há uma antecipação do resultado, nem mesmo o emprego do princípio multiplicativo, uma vez que basta somar as parcelas distribuídas, o que mostra a ausência do operador multiplicativo.

A seguir, pode-se observar a representação icônica de E11:



2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

R: Devem ser alugados 18 ônibus.

**Figura 32. Representação gráfica de E11, 5º ano.**

Trata-se de um procedimento aditivo, em que a criança adicionou a quantidade correspondente ao número de elementos que cada grupo deveria conter (42 jogadores em cada ônibus) tantas vezes quantas necessárias para atingir a quantidade total (756 jogadores); a resposta foi o número de adições realizadas.

Enfim, conforme já mencionado, muitas das representações gráficas da divisão dos participantes deste estudo indicaram a representação como registro da ação de distribuir.

A seguir, apresentam-se os dados referentes à psicogênese da noção de operador multiplicativo, coletados com a aplicação da Prova de Multiplicação e de Divisão aritméticas.

## 4.3 Análise dos resultados da Prova de Multiplicação e de Divisão Aritmética

Buscou-se, com este instrumento, avaliar o nível de desenvolvimento dessa noção nos estudantes, além de verificar as relações entre os níveis (condutas), o procedimento de solução empregado e o nível de escolaridade dos estudantes.

As condutas são as seguintes:

### 1. Primeira Situação – Multiplicação Aritmética

**Conduta I** – Corresponde às crianças que estabelecem correspondência termo a termo, igualando, na resposta final, o número de fichas ao de objetos que poderiam ser comprados:

**Conduta II** – Corresponde às crianças que aumentam, em algumas unidades, o resultado final, devido a uma consideração intuitiva da correspondência múltipla, não se importando ainda com a quantificação exata;

**Conduta III** – Corresponde às crianças que chegam a um resultado correto por procedimentos aditivos sucessivos sem nenhuma antecipação do número de ações a fazer. Para isso, relacionam os conjuntos de fichas (preço dos objetos) a cada objeto a ser comprado (correspondendo muitos para cada um, a cada elemento sucessivamente), chegando ao resultado final correto por meio de adições sucessivas;

**Conduta IV** – Corresponde às crianças cujos procedimentos mostram a antecipação da quantidade de fichas necessárias, sem nenhuma verificação empírica, alcançando o resultado final mentalmente.

## 2. Segunda Situação – Divisão Aritmética

**Conduta I –** Corresponde às crianças que afirmam não poder comprar nenhuma outra coisa, ou somente objetos que custam 1 real, não admitindo a possibilidade de fazer diferentes composições, nem mesmo com conjuntos equivalentes;

**Conduta II –** Corresponde às crianças que tentam operar com conjuntos equivalentes, mas ainda não percebem uma compensação exata entre o número de conjuntos e o de elementos de cada conjunto dentro do mesmo todo. Parece haver um início de tomada de consciência de que, se comprarem mais objetos, eles têm de ser mais baratos e vice-versa, sem que cheguem a uma quantificação exata. As crianças não atinam com a necessidade de coordenação entre as três variáveis: multiplicando, multiplicador e resultado final;

**Conduta III –** Corresponde às crianças que não são capazes de realizar antecipações corretas, mas chegam a uma solução, por meio de tentativas, que podem começar desde um tateio assistemático, compreendendo algumas propriedades, até um tateio sistemático, com todas as possibilidades de distribuição do todo;

**Conduta IV –** Corresponde às crianças que antecipam as possíveis composições do todo, com os respectivos conjuntos equivalentes, por meio de operações mentais, sem necessariamente se basearem em comprovações empíricas.

Os resultados obtidos com a aplicação desta Prova revelaram que todas as crianças da amostra do estudo se encontram nos níveis III, IV ou em transição[24] entre eles, revelando, assim, que antecipando – ou não – o resultado dos problemas, elas são capazes de encontrar uma maneira de solucioná-los. Nessa direção, é importante ressaltar que os estudantes pesquisados resolveram todos os problemas propostos.

O quadro 6 a seguir mostra os resultados da Prova de Multiplicação e Divisão Aritmética:

---

[24] A conduta "transição" foi encontrada apenas na primeira situação (multiplicação); já, na segunda (divisão), os estudantes encontram-se na conduta IV.

| | **SUJEITO** | **Sit. 1** | **Sit. 2** | **FINAL** |
|---|---|---|---|---|
| **4o. Ano** | **1 - AMA** | III | III | **III** |
| | **2 - AUG** | III | III | **III** |
| | **3 - FLA** | T | III | **T** |
| | **4 - GUIO** | IV | IV | **IV** |
| | **5 - LAUB** | III | III | **III** |
| | **6 - LAUR** | III | III | **III** |
| | **7 - LUA** | IV | IV | **IV** |
| | **8 - MAT** | III | III | **III** |
| | **9 - TAI** | III | III | **III** |
| | **10 - THI** | IV | III | **T** |
| **5o. Ano** | **11 - BEA** | III | III | **III** |
| | **12 - BIA** | III | III | **III** |
| | **13 - BRU** | IV | III | **T** |
| | **14 - GUIS** | III | III | **III** |
| | **15 - JOA** | III | III | **III** |
| | **16 - JHU** | IV | IV | **IV** |
| | **17 - JUL** | T | III | **T** |
| | **18 - LUC** | III | III | **III** |
| | **19 - PED** | III | III | **III** |
| | **20 - VAN** | III | III | **III** |

**Quadro 6. Conduta na Prova de Multiplicação e Divisão segundo o estudante.**

Como se vê, 3 crianças encontram-se no nível IV (2 do 4º ano e 1 do 5º), 13, no nível III (6 do 4º ano e 7 do 5º) e 4 em transição entre os níveis III e IV (2 no 4º ano e 2 no 5º), ou seja, dos 20 estudantes que compuseram a amostra deste estudo, apenas 3 construíram a noção do operador multiplicativo.

Para facilitar a visualização das condutas distribuídas por ano de escolaridade, observe-se o Gráfico 8 a seguir:

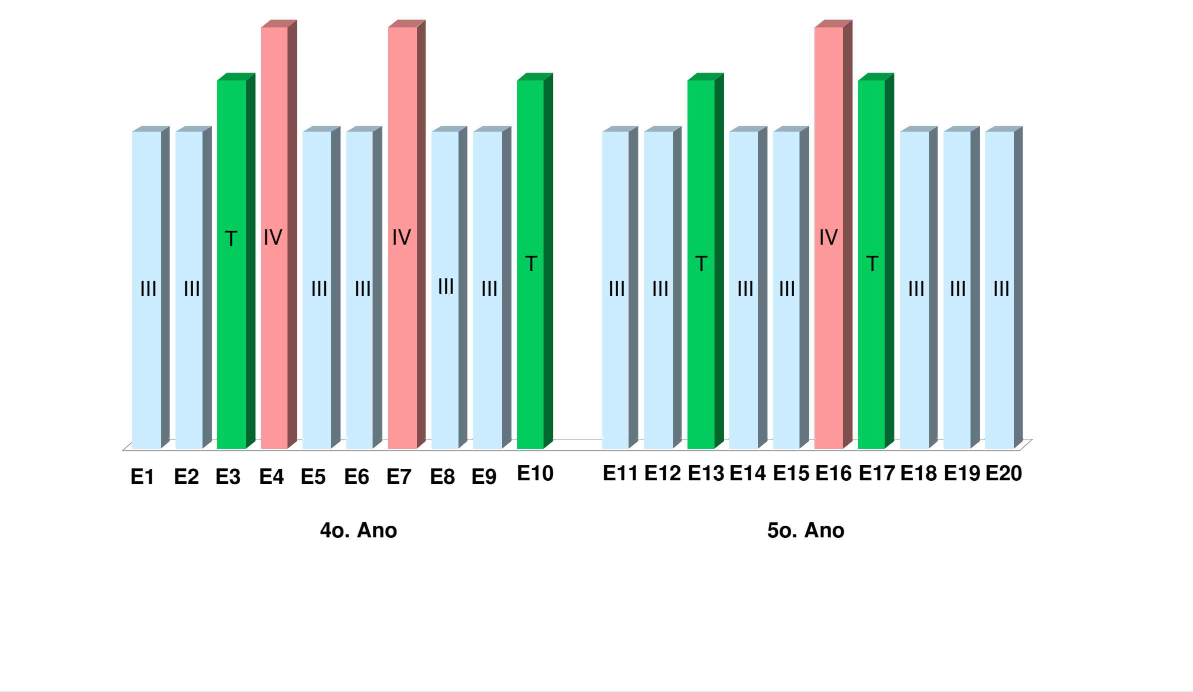


**Gráfico 8. Conduta na Prova de Multiplicação e Divisão Aritméticas, segundo o nível de escolaridade**

Isso mostra que as condutas mais evoluídas não necessariamente aparecem em estudantes do nível de escolaridade mais avançado, visto que a distribuição das condutas, em relação à quantidade de sujeitos, é quase semelhante entre os dois anos de escolaridade.

Para avaliar essa hipótese, foi calculada a frequência em que ocorre cada par das variáveis Conduta e Ano de Escolaridade. A distribuição desses pares é apresentada no gráfico a seguir:

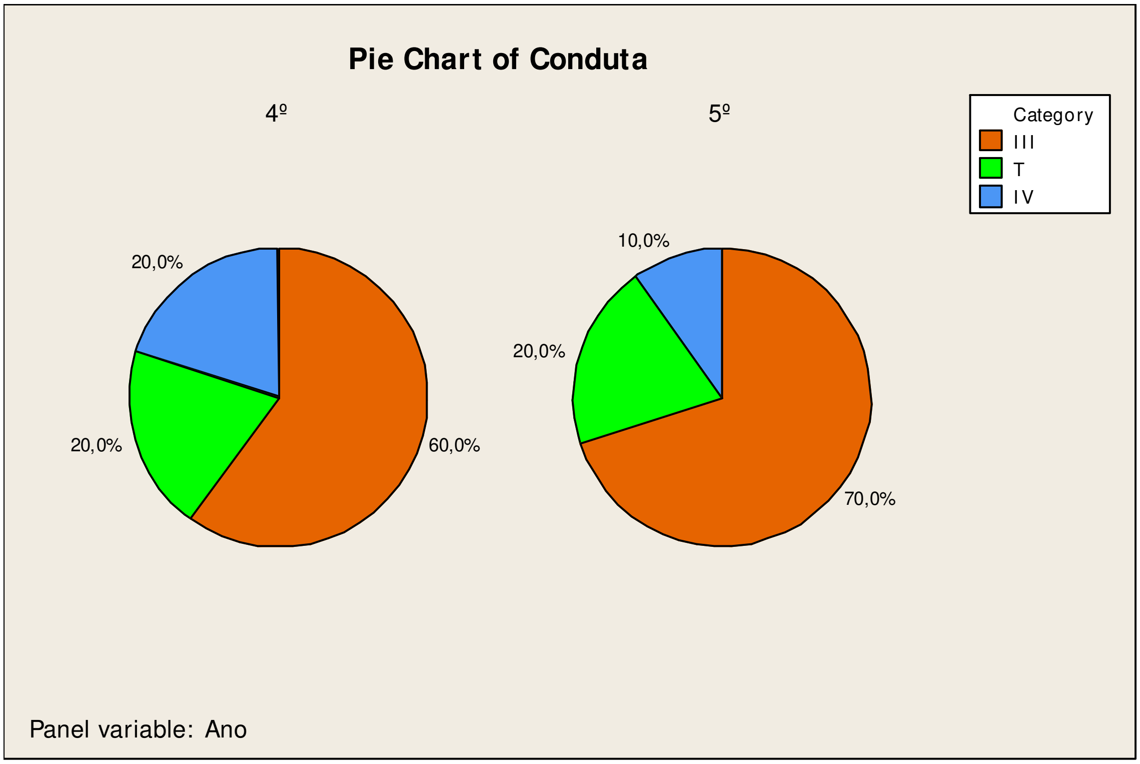


**Gráfico 9. Conduta e ano de escolaridade.**

Pelo gráfico acima, não é possível estabelecer qualquer relação entre a conduta do estudante e seu grau de escolaridade.

Realizou-se, então, mais uma análise, utilizando-se o gráfico de efeitos a seguir:

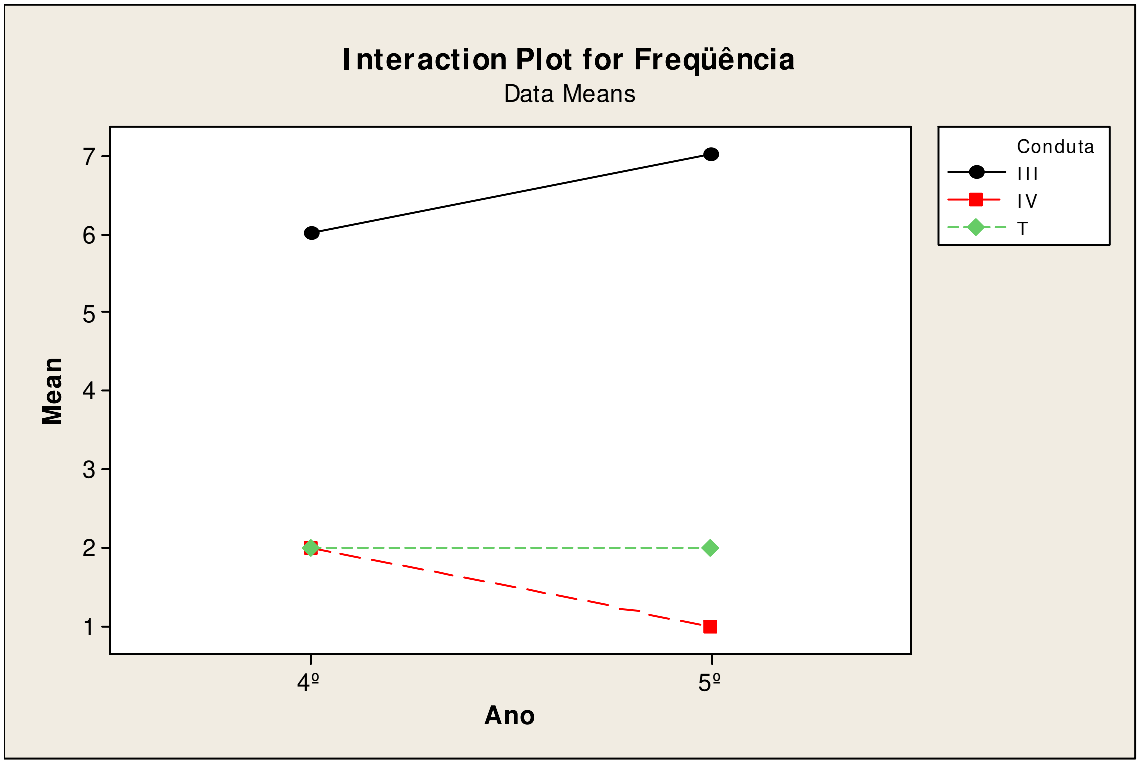


**Gráfico 10. Cruzamento entre procedimentos por ano de escolaridade.**

O gráfico acima não apresenta cruzamentos, fornecendo evidências de que, realmente, a conduta não se relaciona ao ano.

Buscou-se, então, confirmar o que foi observado pelos gráficos, realizando o seguinte teste de hipótese:

**Tabulated statistics: Conduta; Ano**

```
Using frequencies in Freqüência

Rows: Conduta   Columns: Ano

           4º      5º     All

III         6       7      13
        6,500   6,500  13,000

IV          2       1       3
        1,500   1,500   3,000

T           2       2       4
        2,000   2,000   4,000

All        10      10      20
       10,000  10,000  20,000

Cell Contents:      Count
                    Expected count


Pearson Chi-Square = 0,410; DF = 2; P-Value = 0,815
* NOTE * 4 cells with expected counts less than 5
```

O p-valor do teste é 0,815, ou seja, não há evidências para rejeitar a hipótese de que conduta e ano não estão associados.

É necessário tomar cuidado, ao avaliar esse teste de hipótese, pois se obtiveram 4 células com valor esperado menor que 5, o que compromete o resultado do teste.

As conclusões com base no teste e nos gráficos são, portanto, de que a conduta do aluno não está associada ao seu ano de escolaridade. Em outras palavras: crianças de anos superiores não possuem, necessariamente, condutas superiores.

Também não se encontra relação entre o nível de noção do operador multiplicativo (conduta) e o uso de estratégias mais elaboradas de solução, ou seja, os sujeitos que utilizaram o procedimento algorítmico (avançado) não necessariamente estão de posse da noção do operador multiplicativo. Essa percepção confirma a ideia de que o emprego desse mecanismo de solução pode estar associado a uma mera aplicação de técnica aprendida na escola. Ou seja, crianças que utilizam procedimentos considerados aqui, neste estudo, mais avançados, ainda não estão de posse da ideia de divisão.

Isso pode ser confirmado pelo fato de que a turma do 5º ano foi quem mais utilizou algoritmo americano, embora seja o grupo que menos apresentou a conduta IV.

Analisando melhor a relação entre os procedimentos de solução empregados e o nível de psicogênese da noção de multiplicação e divisão aritméticas, verifica-se que há relação entre o procedimento empregado e o nível da noção de multiplicação e divisão aritméticas, conforme pode ser observado no Quadro 7, a seguir:

| | | **DEC** | **ACL** | **ACB** | **AA** | **AAd** | **AM** | **ASb** | **CM** | **DES** | **Total** | **Conduta** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4o. Ano** | **E1** | 6 | | | | | | | | | 6 | III |
| | **E2** | | | 4 | | 1 | | 1 | | | 6 | III |
| | **E3** | | | 6 | | | | | | | 6 | T |
| | **E4** | 2 | | | | | 4 | | | | 6 | IV |
| | **E5** | 5 | | | | | | | | 1 | 6 | III |
| | **E6** | 6 | | | | | | | | | 6 | III |
| | **E7** | 4 | | | | | | | 2 | | 6 | IV |
| | **E8** | 6 | | | | | | | | | 6 | III |
| | **E9** | 1 | | 4 | | | | 1 | | | 6 | III |
| | **E10** | | 6 | | | | | | | | 6 | T |
| | | **DEC** | **ACL** | **ACB** | **AA** | **AAd** | **AM** | **ASb** | **CM** | **DES** | **Total** | |
| **5o. Ano** | **E11** | | | | 3 | | 2 | | | 1 | 6 | III |
| | **E12** | | 3 | 3 | | | | | | | 6 | III |
| | **E13** | | | | 4 | | 2 | | | | 6 | T |
| | **E14** | | | | 6 | | | | | | 6 | III |
| | **E15** | | | | 6 | | | | | | 6 | III |
| | **E16** | | | 6 | | | | | | | 6 | IV |
| | **E17** | | | | 6 | | | | | | 6 | T |
| | **E18** | | 5 | | | | 1 | | | | 6 | III |
| | **E19** | | 1 | | 5 | | | | | | 6 | III |
| | **E20** | | | | 6 | | | | | | 6 | III |
| **Total** | | **30** | **15** | **23** | **36** | **1** | **9** | **2** | **2** | **2** | **120** | |

**Quadro 7. Categorias por sujeito, por ano de escolaridade e por conduta.**

Porém, fez-se necessário o emprego de testes estatísticos para que essa relação pudesse ser afirmada com segurança.

Para iniciar a análise foram computadas as frequências de cada dupla de "*Procedimento* e *Conduta*". A distribuição dessas duplas pode ser observada no gráfico a seguir:

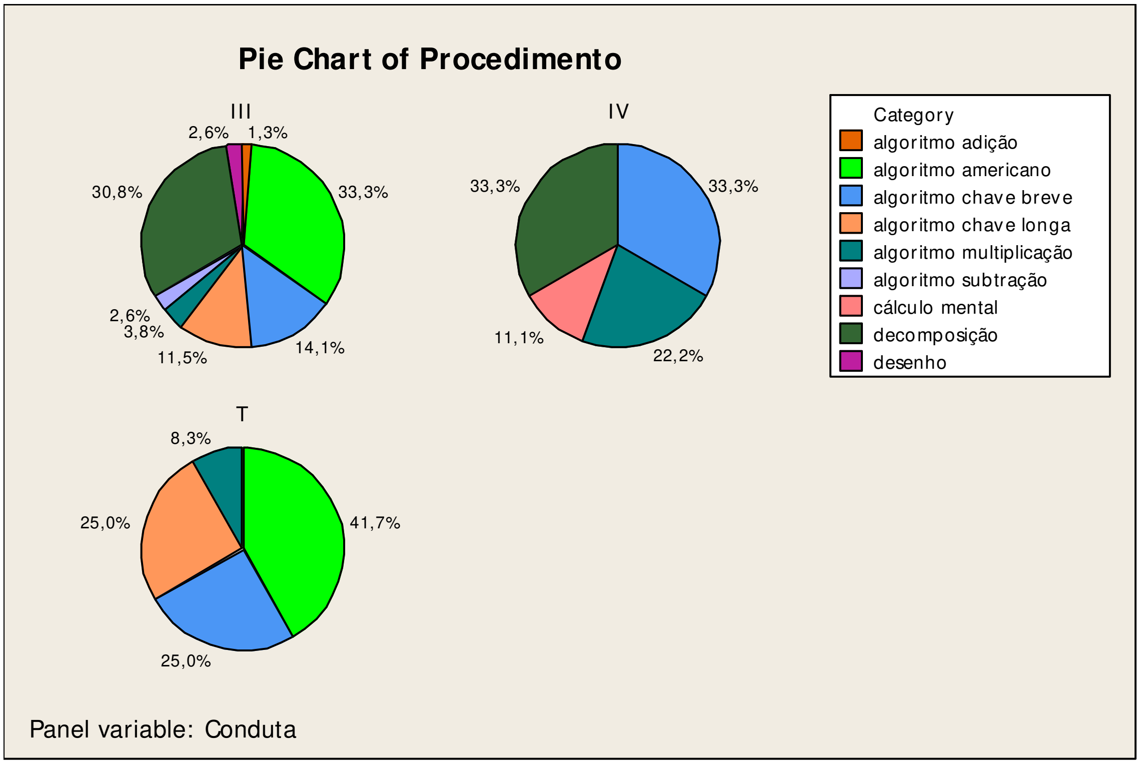


**Gráfico 11. Procedimentos e condutas.**

Como o número de procedimentos é muito grande, a análise gráfica fica um pouco comprometida. É possível, todavia, observar que, aparentemente, existe uma grande diferença na distribuição dos procedimentos de decomposição e chave longa entre as diferentes condutas.

Para facilitar a análise, utilizou-se a classificação entre procedimentos primitivos (ou elementares) e avançados:

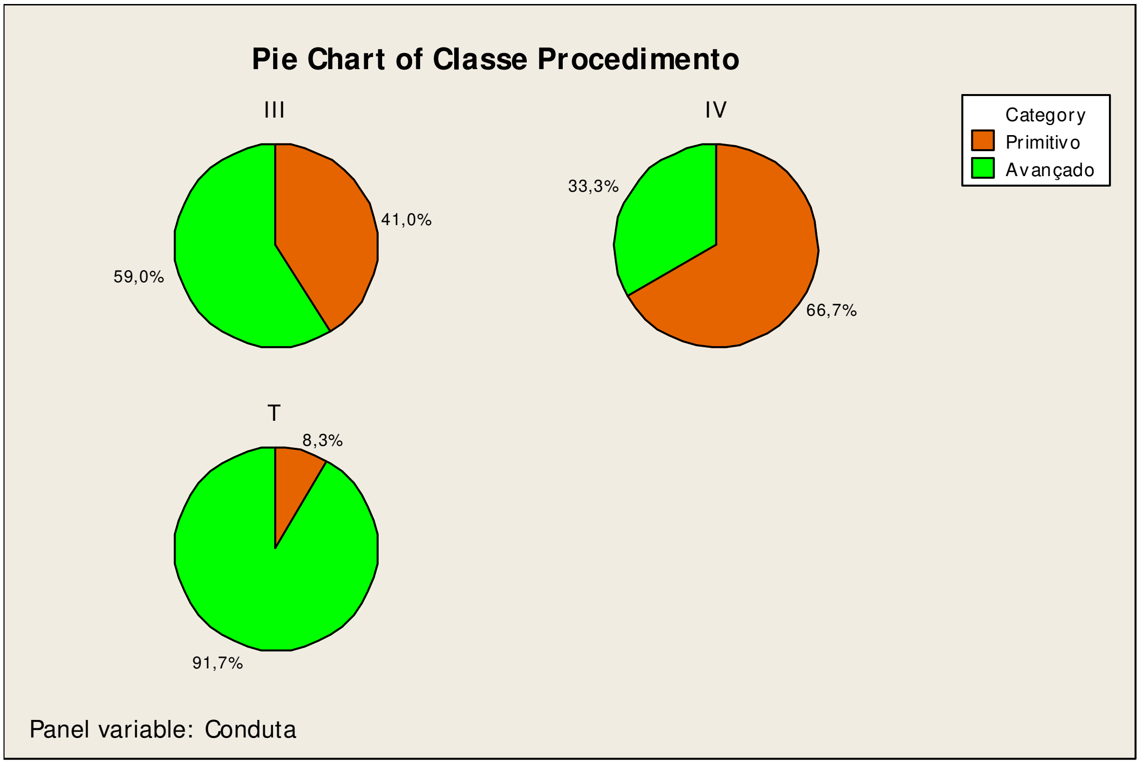


**Gráfico 12. Distribuição de procedimentos, por conduta.**

Neste gráfico, é possível notar, mais facilmente, a diferença na distribuição das classes de procedimentos dentro de cada conduta.

É interessante ressaltar que o maior índice de utilização de procedimentos elementares ocorreu na conduta IV, enquanto o maior índice de utilização de procedimentos avançados se deu na conduta de transição. Avaliando pelo gráfico de efeito, observa-se que:

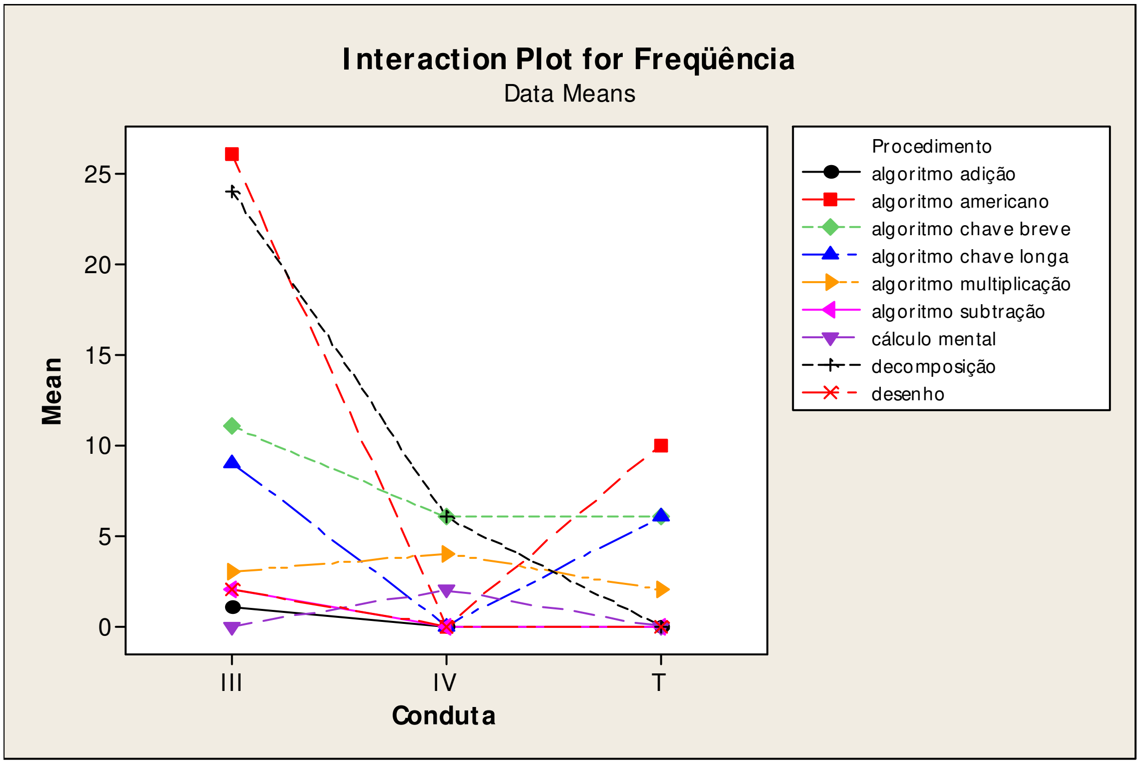


**Gráfico 13. Cruzamento entre procedimentos e condutas.**

No gráfico acima, nota-se a existência de cruzamentos. O mais gritante é o cruzamento entre as linhas referentes ao algoritmo americano e a decomposição. Refazendo a análise, utilizou-se a classificação dos procedimentos a seguir:

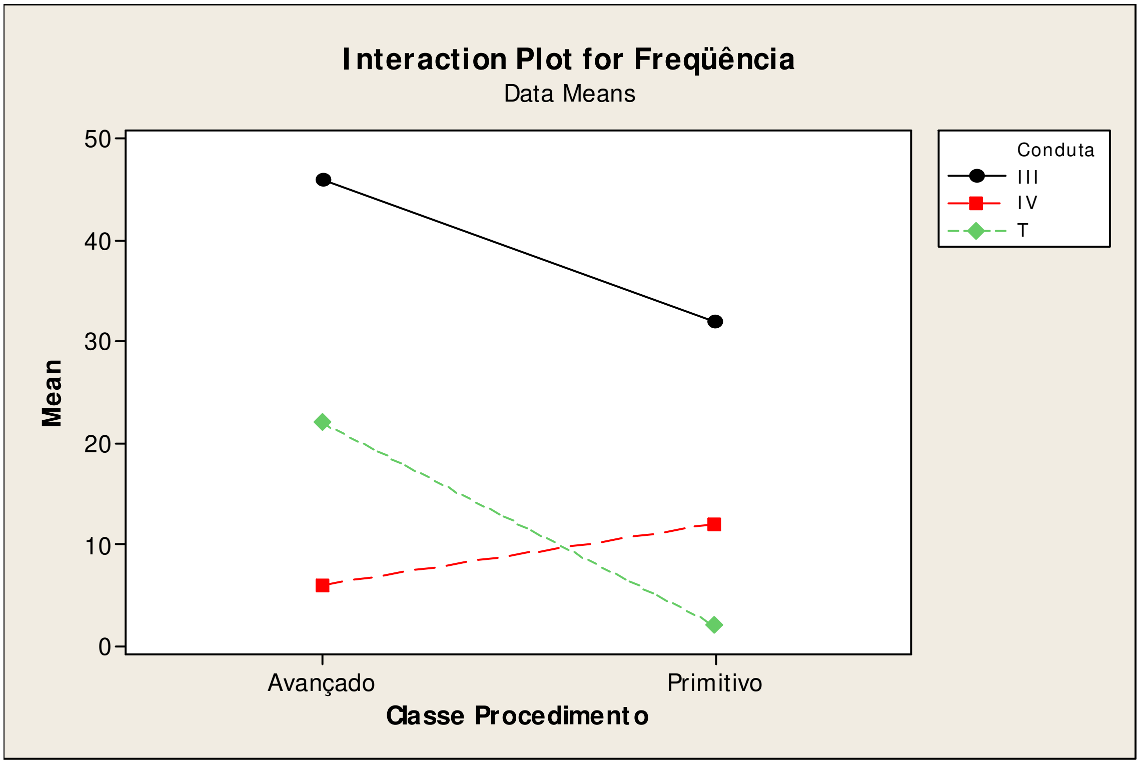


**Gráfico 14. Interação entre procedimentos e condutas.**

Pelo gráfico acima, nota-se, mais facilmente, a interação entre a classe de procedimento e a conduta. Finalmente, para confirmar os resultados, realizou-se um teste $\chi^2$:

**Tabulated statistics: Classe Procedimento; Conduta**

```
Using frequencies in Freqüência

Rows: Classe Procedimento   Columns: Conduta

               III      IV       T     All

Avançado        46       6      22      74
             48,10   11,10   14,80   74,00

Primitivo       32      12       2      46
             29,90    6,90    9,20   46,00

All             78      18      24     120
             78,00   18,00   24,00  120,00

Cell Contents:      Count
                    Expected count


Pearson Chi-Square = 15,489; DF = 2; P-Value = 0,000
```

O p-valor do teste é nulo, evidenciando a associação entre a classe de procedimento e a conduta do aluno.

Concluí-se, então, haver uma dependência entre a conduta e o procedimento escolhido pela criança, porém, dados os resultados, não se pode afirmar que crianças de conduta superior utilizem procedimentos mais avançados, já que neste estudo, as crianças com conduta IV utilizaram, em sua maioria, procedimentos primitivos.

Ressalta-se, novamente, que, como as idades entre os grupos de estudantes são muito próximas, encontra-se pouca diferenciação no raciocínio das crianças. Assim, há que se considerar que as representações delas possam ser influenciadas por elementos externos, como os sociais, por exemplo, a influência da família e a do ensino.

A seguir, descrevem-se os desempenhos de alguns dos participantes deste estudo na Prova de Multiplicação e de Divisão Aritméticas. Para tanto, selecionou-se um estudante de cada nível de conduta e em cada ano de escolaridade, respectivamente.

## 1. Primeira Situação – Multiplicação Aritmética

A pesquisadora solicitou às crianças que colocassem o dinheiro necessário para comprar determinado objeto. Em seguida, colocou vários objetos do mesmo tipo sobre a mesa e solicitou que as crianças colocassem o dinheiro necessário para comprá-los.

As condutas encontradas nesta pesquisa foram a III e a IV[25], e o desempenho de alguns estudantes são descritos a seguir:

### Conduta III

A criança chegou ao resultado correto, por meio de adições sucessivas, porém sem antecipar as ações a realizar. Ela correspondeu, à quantidade de fichas, cada objeto a comprar (correspondência um a muitos):

<u>Estudante 5 (9,10) - 4º ano - CONDUTA III</u>

> P - Se você quisesse levar esses brinquedos (4 caminhonetes a 8,00), quanto você precisaria me dar?
> **E5 -** (pega as fichas em pequenos grupos de 8 e faz a soma com os dedos) **32 reais.**
> P - Por que, Lau?
> **E5 - Porque cada carrinho custa 8 reais. Aí eu peguei o 4 vezes o 8 reais que é cada carrinho, deu 32.**

---

[25] Na Conduta I, às crianças que estabelecem correspondência termo a termo, igualando na resposta final o número de fichas ao número de objetos que poderiam ser comprados. Na Conduta II, as crianças aumentam em algumas unidades o resultado final, mas ainda não se importam com a quantificação exata ainda. Essas condutas não foram encontradas nesta pesquisa (GRANELL, 1983).

Estudante 18 (10,7) - 5º ano - CONDUTA III

P - Vamos supor que você queira comprar todos esses jogadores, (5 a 9,00). Quanto de dinheiro você tem que me dar?
**E5 -** (inicia colocando várias fichas na mão, mas não cabem e, então, ele separa 5 montes de 9 fichas)
P - Quanto então você vai ter que pôr de dinheiro para comprar esses jogadores?
**E5 - 41** (errando o cálculo)**.**
P - 41? Por que Lucas?
**E5 – Porque, se cada um vale 9, eu tinha que somar 9 mais 9 mais 9 mais 9...**
P - E você conferiu?
**E5 - Ahan...**
P - Então... 9 mais 9 mais 9 mais 9 mais 9 dá 41?
**E5 -** (Faz sinal de positivo com a cabeça, mas ainda está envolvido na contagem das fichas)
P – Luc, e se você quisesse levar só aqueles? (3 jogadores a 9,00).
**E5 - 9 mais 9, se esses 9 mais 9 é 18** (aponta para o monte no qual foram colocados de volta os outros 2 jogadores) **e mais esses 2** (os 2 jogadores excluídos) **ia dar 41, eu tenho que fazer 41 menos 18. Então aqui ó:** (tira 18 fichas do monte) **aí eu tiro 18 e vou ficar com...**
P - Com quanto?
**E5 - 27.**
P - Luc, o que mais você gostaria de comprar dessa loja?
**E5 - Apito.**
P - Então vamos supor que você queira comprar esses apitos. (6 apitos a 4,00) Quanto você tem que me dar?
**E5 - 24.**
P - Por que 24?
**E5 - Cada apito é 4 reais, aí eu tenho 6 apitos. Dá 24 reais.**

Nota-se neste caso, haver maior dificuldade em operar com a multiplicação do número 9 do que com o 4, o que é natural e esperado, pois para crianças desta faixa etária, ainda é mais fácil operar com multiplicadores abaixo de 6.

## Conduta IV

A criança mostra antecipação da quantidade de fichas necessárias, sem nenhuma verificação empírica, alcançando o resultado final mentalmente.

Estudante 4 (9,10) - 4º ano - CONDUTA IV

A- Quanto que você vai precisar me dar? (para comprar 1 jogador a 9,00).
**E 4- Preciso dar 9 fichas...**

A- Agora, vamos imaginar Gui, que você gostou desses jogadores e queira levar para alguns amigos (mais 3 jogadores a 9,00), quanto você vai precisar me dar?
**E4 - Agora vou precisar 97. dar mais 27... 97!** (Risos)
A- Mais quanto?
**E4 - É 27... (Conta e separa as fichas) Pronto, agora só faltam mais 9, eu tenho 27 porque eu tenho 4 hominhos... (Conta e separa as fichas)**
A- Quanto que você vai ter que me dar então ao todo?
**E4 - Ao todo eu vou ter que te dar 36 reais.**
A- 36... Por que Gui?
**E4 - 4 vezes 9 é 36.**
A- Ok, agora vamos imaginar que você queira levar esses brinquedos... (5 celulares a 6,00).
**E4 - 5 desses?**
A- Sim.
**E4 - Vou precisar de 30.**
A- Por que 30?
**E4 - 6 vezes 5 dá 30.** (Conta as fichas) **Eu vou pegar o total já, pegar direto, não vou separar...** (como se estivesse referindo-se à ação de separar por grupos, não precisa separar por grupos e, sim, "dar direto" o valor total). **Já paguei dois...** (conta mais fichas). **Paguei 4, falta mais 2...**
A- Então quanto você tem que me dar, ao todos?
**E4 - 30 reais.**
A- 30 reais por que mesmo?
**E4 - 5 vezes 6 é 30.**

Estudante 16 (10,9) - 5º ano - CONDUTA IV

P - O que você gostaria de comprar?
**E16 - Tem esse** (pulseiras a 3,00)**.**
P – De quantas você gostaria?
**E16 - 5.**
P - Cinco pulseiras? Quanto você vai precisar me pagar?
**E16 - Se cada uma custa 3 reais... é... 5 vezes 3 é 15.**
P - Vamos supor que você queira levar mais quatro. De quantas moedas você vai precisar?
**E16 - Mais 4?**
P - É.
**E16 - 12. Eu somei... 3 mais 3 é 6, então 6 mais 6 é 12.**
P - Então Jhu, quanto ficaria tudo? Quanto daria todas essas pulseiras?
**E16 - Quanto que era? 9, né?** (confundindo-se com o valor anterior) **9 vezes 3... 27.** (fazendo o cálculo correto, mas enganando-se na quantidade de pulseiras colocadas em 2 vezes)
P – Jhu, vamos supor que você queira levar para os seus amigos estes relógios (7 a 5,00). Quanto você precisaria me dar?
**E16 -** (Respondendo rapidamente) **5 vezes 7 é 35... Dá 35.**
P - 35?
**E16 - É.**

Uma vez construída a noção, a antecipação é garantida, mesmo que, para a criança justificar a obtenção do resultado, ela ainda tenha que recorrer a adições sucessivas, como é o caso deste estudante, E16.

## Transição entre III e IV

A criança oscila entre uma conduta e outra, ora antecipando o resultado, ora necessitando de comprovação empírica (contar nos dedos, contar grupos de fichas sem necessariamente fazer empiricamente a correspondência um a muitos etc.) ou ainda, faz o cálculo mental, mas justifica-o somando as antecipações realizadas.

Estudante 3 (9,6) - 4º ano - TRANSIÇÃO

> P - Vamos fazer de conta que você queira levar esses aviõezinhos (5 aviões a 2,00) Quanto você precisaria me dar para levar todos esses aviões?
> **E3 -** (apontando os aviões e contando de 2 em 2) **10 reais, porque tem 5 aviõezinhos e cada um custa 2 reais.**
> P - Fla, se você quisesse levar esses relógios (5 a 5,00)...
> **E3 -** (aponta cada relógio e soma de 5 em 5, pega as fichas da caixa). **Eu tinha que dar 25 reais, porque cada relógio é 5 reais... 5 vezes 5 é 25.**

Estudante 17 (11,3) - 5º ano - TRANSIÇÃO

> P - Quanto você precisaria me dar se você quisesse levar esses brinquedos? (3 jogadores a 9,00)
> **E17 -** (afasta os jogadores uns dos outros e conta as fichas de 9 em 9)
> P - Quanto você tem que me dar?
> **E17- 36.**
> P - Como é que você sabe Jul?
> **E17 - Sei porque... Não são quatro? Então, eu faço conta de vezes assim, né, do 9... Ponho todos os dedos e abaixo a quantidade que eu tenho** (mostra a "técnica" da tabuada do 9 feita com as mãos e com os dedos)**, daí deu 36... Eu preciso de 36 moedas... Porque eu tenho 4 bonecos e cada um custa 9.**
> P - Você fez essa conta aí antes de você separar as fichas ou não?
> **E17 - Não, depois...**
> P - E se você quisesse levar esses brinquedos (4 relógios a 5,00), quanto você teria que me dar?
> **E17 - 20 reais.**
> P - 20 reais por quê?
> **E17 - Porque custa 5 reais cada né? 5 vezes quatro é 20.**
> P - E se você quisesse levar esses apitos aqui? (5 apitos a 4,00)

> **E17 -** (calcula o valor de 2 apitos, separando-os dos demais, depois de outros 2 e depois soma-os com o último, pensa por um tempo) **20 reais...**

Quando a noção ainda não está construída, há a necessidade do apoio de ações empíricas, como é o caso desta criança, que separa os objetos para criar uma ordem de contagem, esquema característico das etapas mais primitivas do desenvolvimento.

Porém, operar com o número 5 é mais fácil e todos os participantes deste estudo puderam fazê-lo com tranquilidade.

## 2. Segunda Situação – Divisão Aritmética

A pesquisador entregou às crianças determinada quantidade de moedas e perguntou-lhe quantos objetos de um determinado tipo poderiam ser comprados com aquele dinheiro.

Quando a criança chegava a uma conclusão correta, era proposto que pensasse se, com as mesmas moedas poderia comprar algum outro objeto dentre os existentes na loja, de maneira que não lhe sobrassem ou faltassem moedas, mas que tais objetos deveriam ser do mesmo tipo.

A seguir, o desempenho de alguns estudantes. Assim como na primeira situação, não encontrou-se crianças nas condutas I e II[26]:

### Conduta III

A criança não é capaz de fazer antecipações corretas sobre quais objetos podem ser comprados, fazendo várias tentativas, mas chegando à solução correta.

---

[26] A conduta I corresponde às crianças que afirmam não poder comprar nenhuma outra coisa, ou somente objetos que custem 1 real, não admitindo a possibilidade de fazer diferentes composições, nem mesmo com conjuntos equivalentes. Na conduta **II,** a criança tenta operar com conjuntos equivalentes, mas ainda não existe uma compensação exata entre o número de conjuntos e o número de elementos de cada conjunto dentro do mesmo todo. Parece haver um inicio de tomada de consciência de que se comprar mais objetos tem que ser mais baratos e vice-versa, sem que se chegue a uma quantificação exata. A criança não percebe a necessidade de coordenação entre as três variáveis: multiplicando, multiplicador e resultado final (GRANELL, 1983).

## Estudante 5 (9,10) - 4º ano - CONDUTA III

P - Agora Lau, vamos supor que você veio na minha loja com 24 reais e quisesse levar alguns celulares (a 6,00). Quantos celulares você poderia levar com esses 24 reais de modo que não sobre e nem falte dinheiro?
**E5 -** (separando grupos de 6 fichas e somando os grupos) **4.**
P - Como é que você sabe?
**E5 - É que é assim, tenho 24 reais, aí esses 24 reais eu fui colocando 6 fichinhas em cada montinho que eu queria, 6 fichinhas é 6 reais que é igual ao celular... Aí eu coloquei todos assim, aí deu quatro.**
P - Ah, ta, Ok. E com esses 24 reais você poderia comprar alguma outra coisa dessa lojinha? Tem que ser o mesmo objeto e não pode nem sobrar nem faltar dinheiro.
**E5 -** (Observa todos os objetos dispostos na mesa, aponta os aviõezinhos) **Este.**
P - Quantos aviões você poderia comprar?
**E5 -** (faz grupos de 2 fichas cada) **12.**
P - Como é que você sabe disso Lau?
**E5 - Eu coloquei 2 reais, como custa 2 reais o avião, 2 reais dava 1 avião...**
P - E agora o que dessa loja você poderia comprar com 35 reais de modo que não sobrasse nem faltasse dinheiro? Lembre que só pode comprar objetos iguais.
**E5 - Esse** (aponta os relógios que custam 5,00).
P - Quantos relógios?
**E5** - (separa as fichas em pequenos montes com 5) **7.**
A- Você tem certeza de que você poderia comprar 7 relógios?
**E5 - Sim.**
A- Por quê?
**E5 - Porque eu fui de 5 em 5, daí se eu fosse de 5 em 5, aí se eu fizesse 7 vezes 5 ia dar 35.**
P – E, com esses 35 reais, teria mais alguma coisa dessa lojinha que você poderia comprar? Lembrando que têm que ser objetos do mesmo tipo e não pode sobrar e nem faltar dinheiro.
**E5 -** (Observa os objetos e aponta para as pulseiras que custam 3,00) **Esse.**
P - Quantas pulseiras daria para você comprar?
**E5 -** (Conta e separa as fichas em pequenos montes) **Vai sobrar...**
P - Não pode sobrar, nem faltar dinheiro...
**E5 - Pode escolher outro?**
P - Pode.
**E5 - Celular.**
P - Celular (a 6,00)?
**E5 -** (separa as fichas em montes de 6) **Não dá...**
P - O que você acha que daria para comprar?
**E5 - Peixe** (apitos a 4,00)**.** (faz montes com 4 fichas) **Não deu...**
P - Pode escolher outro.
**E5 - O avião...** (faz montes com 2 fichas) **Não.**
P - Não dá também?
**E5 - Pode fazer o de 1?** (apontando para os piões)**.**
A- Você pode comprar o que você quiser, só não pode sobrar e nem faltar.
**E5 -** (afasta as 35 fichas uma das outras) **Os piõezinhos deu 35**...
P - E aí, tem mais alguma coisa que você possa comprar com 35 reais?
**E5 - Eu acho que...** (aponta para as caminhonetes a 8,00, separando as fichas em montes de 8 fichas) **Não dá.**

P - Não dá?
**E5 - Não.** (aponta para os celulares a 6,00) **6... não esse eu já fiz, eu já fiz de 6... Vou tentar o 7...** (aponta para os carrinhos, e faz grupos de 7 fichas) **Pronto, deu.**
P - O que deu para comprar?
**E5 - 5 carrinhos.**
P - Ok. Tem mais algum que você pode comprar, ou não?
**E5 - Vou tentar o 9** (faz grupos de 9 fichas) **Não dá.**
P - Não dá.
**E5 - Só.**
P - Só? Então o que dá mesmo para você comprar?
**E5 - Dá pra comprar o relógio** (a 5,00)**, o pião** (a 1,00) **e esses carrinhos** (a 7,00) **só.**

É possível observar a ausência de antecipação; E5 faz várias tentativas de aproximações, sempre formando agrupamentos de fichas, até mesmo quando os objetos custam R$1,00.

Estudante 18 (10,7) - 5º ano - CONDUTA III

P - Vamos supor que você tenha 28 reais e quisesse comprar esses carrinhos (a 7,00). Quantos carrinhos daria para você comprar, de modo que não sobrasse nem faltasse dinheiro?
**E18 - 28 reais?**
P - É.
**E18 - Se cada carrinho é 7 reais, dá pra comprar 1, 2...** (somando nos dedos) (pega mais 1 do monte, soma e pega mais 1)**. Daria pra comprar 4 carrinhos.**
P - Você tem certeza?
**E18 - Eu tenho.**
P - Que outros objetos desta loja você poderia levar, com esses 28 reais sem sobrar e sem faltar dinheiro? Têm que ser objetos ou brinquedos do mesmo tipo, não podem ser diferentes.
**E18 -** (Observa os objetos com atenção, pensando) **Aí daria pra mim levar...** (pega os apitos de 4,00) **7 desses daqui.**
P - Por quê?
**E18 - Porque 7 vezes 4, que é quanto custa, aí vai dar 28 reais.**
P - Tem algum outro tipo de objeto que você poderia levar com esses 28 reais?
**E18 - O pião** (de 1,00).
P - Aí quantos daria para você levar?
**E18 - Aí daria 28 piões. Porque é 1 real o pião.** (Observa os objetos e aponta para os jogadores de 9,00) **ah, não, vai dar 27 reais...**
**E18 -** (Observa os objetos mais uma vez)**. Daria pra levar esse daqui** (aviões, de 2,00).
P - Quantos dariam para levar?
**E18 - 14.**
P - Por que Luc?
**E18 - Porque 14 vezes 2 dá 28.**
P - Agora Luc, com 35 reais, o que daria para você comprar?

**E18 - Relógio** (a 5,00)**.**
P - Quantos relógios você poderia levar?
**E18 - 7.**
P - Por quê?
**E18 - Porque 7 vezes 5 dá 35.**
P - Que mais?
**E18 -** (pensando e olhando para os objetos). **Ah, daria pra eu levar esse...** (piões a 1,00)
P - Mais algum?
**E18 - Esse daqui** (celulares de 6,00) **é trinta, não dá...**
**E18 -** (Continua observando os objetos). **Ih, vai passar...**
P - Qual?
**E18 - Esse daqui.** (caminhonetes a 8,00).
P - E se você tivesse 36?
**E18 - Daí daria pra comprar esse daqui** (aponta para os celulares de 6,00).
P - Quantos?
**E18 - Peraí...** (conta nos dedos) **6.**
P - Por quê?
**E18 - Porque daí faz o 6 vezes o 6.**
P - Que dá...
**E18 - Dá 36.**

Percebe-se, também nesses estudantes, a ausência de antecipação de pensamento, fazendo os cálculos por aproximações sucessivas.

A seguir, poderão ser vistas as crianças que já antecipam mentalmente o resultado nas situações de divisão pela operação inversa (por multiplicação) e que, portanto, se encontram na conduta IV.

## Conduta IV

A criança antecipa as possíveis composições do todo com os respectivos conjuntos equivalentes, por meio de operações mentais, sem, necessariamente, basear-se em comprovações empíricas.

<u>Estudante 4 (9,10) - 4º ano - CONDUTA IV</u>

P - Vamos supor que você tenha 36 reais e queria comprar esses apitos (9 a 4,00). Quantos apitos você vai poder comprar de forma que nem sobre e nem falte dinheiro para você?
**E4 - 9.**
P - Por que 9?
**E4 - Porque 9 vezes 4 dá 36, um jeito mais fácil 4 vezes 10 num dá 40? Menos 4 não dá 36?**
P - Ahan...

**E4 – Então, é que nem fosse tirar menos 1** (apito) **do 10...**
P - Ok. Então vamos supor que, com esses mesmo 36 reais, você queira comprar outra coisa daqui dessa loja, mas você tem que comprar objetos do mesmo tipo, de modo que não sobre, nem falte dinheiro para você.
**E4 - 36 disso...** (aponta os piões a 1,00) **é mais fácil... hehe!**
P - 36 piões... que mais?
**E4 - 6 disso...** (aponta para o relógio, a 5,00) **e 1 disso** (celular a 6,00)**...**
P - Você só pode comprar objetos iguais.
**E4 - Ah!** (observa os objetos) **18 disso?** (aviõezinhos a 2,00)
**E4 - Ou 12 desses, 12 pulseirinhas** (a 3,00)**.**
P - Ok! E com 45 reais, o que você pode comprar?
**E4 -** (rapidamente) **9 relógios** (a 5,00).
P - 9 relógios?
**E4 - É.**
P - Por quê?
**E4 - É, porque 45 reais... é... 9 vezes 5 vai dar 45.**
P - Ah tá! E aí, tem mais alguma coisa dessa mesa que você poderia comprar?
**E4 - 5 desses** (jogadores de futebol).
P - Por quê?
**E4 - Mesma coisa, porque 5 vezes 9 dá... 45** (referindo-se à operação anterior)**.**
P - Teria mais algum objeto dessa mesa aqui que você poderia comprar? Com esses 45 reais?
**E4 - 45 desses** (piões a 1,00)**... (risos). Não, só esses 2. Não, tinha como comprar 15 desses** (pulseiras a 3,00).
P - 15 desses o quê?
**E4 - 15 dessas pulseirinhas porque 3 vezes 15 dá 45...**
P - Só isso?
**E4 - Só.**

Interessante notar que, nesta situação de divisão, todos as crianças operam inversamente, ou seja, nenhuma delas faz a divisão para calcular a quantidade de objetos que se podem comprar com certa quantidade de dinheiro; elas fazem a correspondência multiplicativa, mesmo que algumas ainda o façam por procedimentos aditivos, confirmando que "os alunos resolvem o problema (de divisão) com a mesma estratégia que utilizam para resolver problemas de multiplicação (Nunes et a, 2001, p.91).

Estudante 16 (10,9) - 5º ano - CONDUTA IV

P - Vamos supor que você tenha 56 reais e quisesse comprar carrinhos. Quantos carrinhos (a 7,00) você poderia comprar, sem sobrar ou faltar dinheiro para você?
**E16 - 56?** (errando o cálculo).
P - 56.
**E16 -** (pensa um pouco) **56** (olha as fichas)**... 7 reais** (aponta os carrinhos).
**E16 - 9.**

P - Tem certeza? Como?... Você tem 56 reais e você quer comprar carrinhos que custam sete. Quantos carrinhos você poderia comprar?
**E16 - 7 mais 7, 14, com mais 7... 21... 28! 28!**
**(Contando baixo)... 56!**
P - Quantos então?
**E16 - Então deu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.**
P - Deu 8 carrinhos?
**E16 - Uhum** (afirmando)**.**
P - Com esses mesmos 56 reais, tem algum outro objeto que você poderia comprar? Tem que ser uma mesma quantidade do mesmo objeto, sem sobrar ou faltar dinheiro.
**E16 - Pra comprar?**
P - É. Com 56 reais o que mais você poderia comprar daqui?
**E16 - 56 reais... O pião!**
P - Quantos piões?
**E16 - 56.**
**E16 - Aqui** (mostrando os apitos)**. 4 mais 4, 8... 16... Calma aí...**
P - Posso propor uma coisa, vou diminuir um pouco essa quantidade... vamos supor que você tenha 24 reais, tá? Com 24 reais o que você poderia comprar aqui dessa mesa, de forma que não sobrasse, nem faltasse dinheiro? Sempre lembrando que tem que comprar objetos iguais.
**E16 - Quanto?**
P - 24 reais.
**E16 - Pião... 24 piões... 6 apitos... 3 caminhonetes** (a 8,00).

Esta criança demonstrou conhecer bem o procedimento, porém não demonstrou confiança em si mesma.

Outros estudantes ainda ficam um pouco inseguros, o que pode ser notado quando alguns riem quando dizem que podem comprar os piões a R$1,00 cada.

### Transição entre III e IV

Como dito anteriormente, neste estudo, não se identificaram participantes, neste estágio da psicogênese da noção de multiplicação e de divisão, na situação da divisão.

Porém, registra-se aqui o desempenho de dois deles, que se encontram em transição na situação 1, para verificar o desempenho que tiveram nesta situação, lembrando que, como eles estavam em transição na situação 1, no resultado final foram considerados também como em *transição*.

É o caso de E3 e E17, descritos a seguir:

## Estudante 3 (9,6) - 4º ano - TRANSIÇÃO

P - Vamos supor que você veio aqui na minha loja com 36 reais e você queira levar, esse dinheiro todo em telefones celulares. Quantos telefones daria para você levar, de modo que não sobrasse e nem faltasse dinheiro?

**E3 - (Conta nos dedos de 6 em 6). Eu tenho 36, dava pra mim levar 7...**

P - Por que 7?

**E3 - Porque eu fiz a conta de tabuada na cabeça. 7 vezes o 6 dá 36.**

P - E teria alguma coisa nessa loja que daria para você comprar com 36 reais de modo que não sobrasse nem faltasse dinheiro? Mas têm que ser brinquedos iguais.

**E3 -** (Observa os objetos, pensa e conta nos dedos). **9 apitinhos desse daqui** (a 4,00)**.**

P - Por quê?

**E3 - Porque 9 vezes o 6 dá 36.**

P - 9 vezes o 6? Por que nove vezes 6?

**E3 - Porque eu fiz a conta de tabuada na cabeça e...**

P - Tá, mas espera aí, por que você multiplicou o 9 por 6?

**E3 - É, quer dizer... Eu fiz 9 por 4...**

P - Tem mais alguma coisa dessa mesa que daria para você comprar?

**E3 -** (Observa os objetos, pensa, conta nos dedos). **Dava pra mim comprar 12 pulseirinhas dessa** (a 3,00).

P - Por que Fla?

**E3 - 3 vezes o 12 dá 36.**

P - E teria mais alguma coisa que daria para você comprar?

**E3 - Daria pra eu comprar 18 desses** (aviões a 2,00).

P - 18 aviões, muito bem... Mais algum brinquedo você acha que daria para comprar?

**E3 -** (Observa os objetos, pensa por algum tempo) **Não.**

## Estudante 17 (11,3) - 5º ano - TRANSIÇÃO

P – Agora, vamos supor que você venha na minha loja com 27 reais... Tem 27 reais... E você quisesse levar esses carrinhos (a 7,00) quantos carrinhos você poderia levar?

**E17 - 27...**

P - De modo que nem sobrasse e nem faltasse dinheiro...

**E17 - Tem que ser em diversidade igual?**

P - É.

**E17 - Com 27?**

P - É... Você acha que dá para você comprar?

**E17 - Não.**

P - Por quê?

**E17 - Ó... 7 vezes 7 é 14...**

P - 7 vezes 7 é 14?

**E17 - Não, 7 mais 7 é 14... Mais 7... 21... Mais 7, 28... Então não dá...**

P - Tá. E se você quisesse levar essas pulseiras (a 3,00), daria para você levar?

**E17 - Com 27?**

P - É, 27 reais...

**E17 - (Pensa um pouco, conta nos dedos) Dá.**

P - Quantas daria para você levar?

**E17 - Tenho 27 reais?**
P - É.
**E17 - Daria pra eu levar 9 pulseiras.**
P - Por quê?
**E17 - Porque, pensando agora, fica mais fácil, né... Porque custa 3 reais, 10 vezes três dá 30, então é muito, como tem vezes 7... 30 menos 3 dá 27, então dá nove...**
P - Jul teria algum outro brinquedo dessa loja que você poderia levar com 27 reais? Mas têm que ser brinquedos iguais, para não sobrar nem faltar dinheiro.
**E17 - Isso aqui.** (aponta para os piões a 1,00).
P - Quantos?
**E17 - 27...**
P - Mais algum brinquedo dessa loja?
**E17 - Peraí, deixa pensar...**
P - Pode pensar...
**E17 -** (Observa bem os objetos dispostos sobre a mesa) **Esses daqui...** (os jogadores a 9,00)
P - Quantos daria?
**E17 - Custa 9 reais?**
P - Sim.
**E17 - Poderia comprar 3.**
P - Ok. Agora com 36 reais...
**E17 - 36...**
P - Veja se dá para você comprar objetos iguais, de modo que não sobre nem falte dinheiro...
**E17 - 36 eu já fiz, não é difícil... eu já fiz o 36, não fiz? Com esse?** (aponta para os jogadores a 9,00)
P - Ah, você fez com 36 então vamos mudar essa quantidade, vamos com 35...
**E17 - 5... Eu posso comprar...** (pensa por algum tempo**) posso comprar 7 desses** (relógios a 5,00)...
P - Mais alguma coisa?
**E17 - Peraí...** (observa os objetos com atenção, conta nos dedos) **tenho 35...** (pensa por algum tempo) **dá pra comprar desse daqui** (carrinhos a 7,00)
P - Esses carrinhos que custam?
**E17 - 7 reais.**
P - Quantos dá para você levar?
**E17 - Peraí...** (conta nos dedos) **5.**
P - Mais algum brinquedo?
**E17 - Esse daqui, né?** (ri apontando os piões a 1,00)
P - Agora com 45 reais...
**E17 - Posso comprar desse daí...** (apontando os relógios a 5,00)
P - Quantos?
**E17 - Eu posso comprar... Eu tenho 45?**
P - 45 reais.
**E17 - 45 reais, eu posso comprar 9.**
P - Nove relógios?
**E17 - (Sinal de positivo com a cabeça)**
**E - Não, 9, não, 7!**
P - 7?
**E17 - 9...**
P - Você tem 45 reais...

**E17 - 45 é 9...**
P - É? Tem mais alguma coisa que você possa levar?
**E17 - O piãozinho (risos)... 45... Só!**

Como pôde ser verificado, os participantes deste estudo, em sua maioria, ainda não construíram a noção do operador multiplicativo, mas estão avançados na psicogênese da noção de multiplicação e de divisão aritméticas, visto que não surgiram condutas inferiores à conduta III. Porém, com relação ao conceito de divisão, a ideia fortemente presente é a de partição, “noção esta que não garante a compreensão imediata da relação entre os termos da divisão” (LAUTERT e SPINILLO, 1999, p.27).

O recurso da multiplicação encontrado nos estudantes na situação 2 (divisão) quando fazem a multiplicação ou mesmo quando fazem adições sucessivas, ao contrário de ser a aplicação de uma técnica, pode ser considerado como “o resultado de um processo de conceitualização a partir das estratégias de tateio, mediante as quais, as crianças solucionam empiricamente, em um determinado momento, os problemas propostos” (GRANELL, 1983, p.146).

A seguir, serão apresentados e discutidos os erros cometidos pelos estudantes.

## 4.4 Análise dos Erros

Embora não constitua o objetivo deste estudo analisar os erros ou os acertos cometidos pelos participantes da pesquisa, é importante registrar que tipos de erros foram identificados e em quais categorias e ano de escolaridade ficaram mais evidentes, a fim de auxiliar na análise geral dos dados.

O Quadro 8 a seguir mostra os erros e os acertos cometidos pelos estudantes em cada um dos problemas propostos:

| 1a. Série de Problemas | | | | 2a. Série de Problemas | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **1** | **2** | **3** | **Total** |
| **4º ANO** | | | | | | | |
| **1 - AMA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **2 - AUG** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| **3 - FLA** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **2** |
| **4 - GUIO** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **5 - LAUB** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | **3** |
| **6 - LAUR** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **7 - LUA** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **2** |
| **8 - MAT** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **9 - TAI** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **10 - THI** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **Total** | **5** | **1** | **2** | **3** | **2** | **1** | **14** |
| **5º ANO** | | | | | | | |
| **11 - BEA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **12 - BIA** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| **13 - BRU** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| **14 - GUIS** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **15 - JOA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **16 - JHU** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **17 - JUL** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **18 - LUC** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| **19 - PED** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| **20 - VAN** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | **2** |
| **Total** | **0** | **3** | **0** | **4** | **0** | **0** | **7** |

**Quadro 8. Erros por sujeito, por problema.**

O participante E2 foi quem cometeu mais erros (5 dos 6 problemas resolvidos), porém apenas 2 constituem erros de procedimento. Essa discussão será retomada mais adiante, ainda nesta seção.

Dos 120 problemas resolvidos pelos 20 estudantes, houve um percentual de erros de 17,5%, o que, em números, representam 21 erros. O Gráfico 15, a seguir, permite que se faça essa observação:

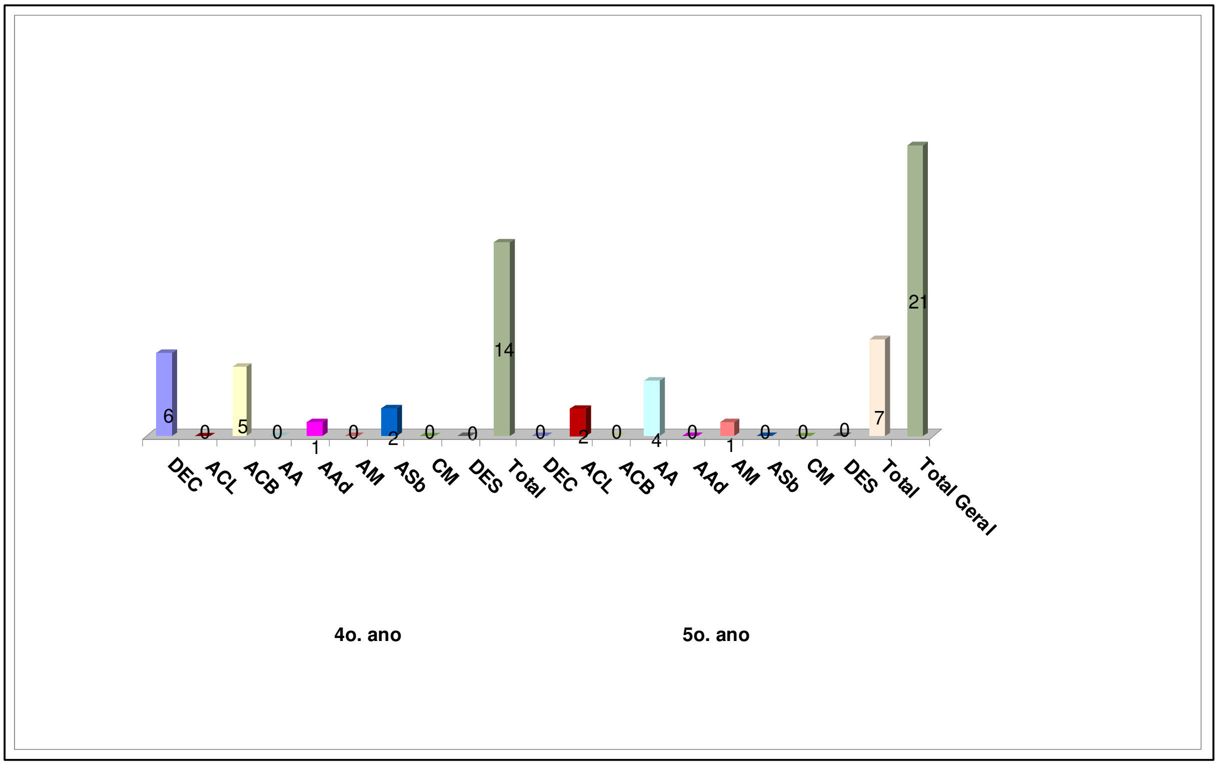


**Gráfico 15. Erros cometidos, segundo a categoria.**

Foram 14 erros cometidos pelos estudantes de 4º ano e 7 pelos estudantes do 5º. A maior frequência de erros entre os estudantes de 4º ano apareceu na categoria da decomposição, a mais utilizada na pesquisa, seguida pela categoria de algoritmo chave breve. Já entre os estudantes de 5º ano, o maior número de erros apareceu na categoria de algoritmo americano, o mais utilizado pelo este grupo.

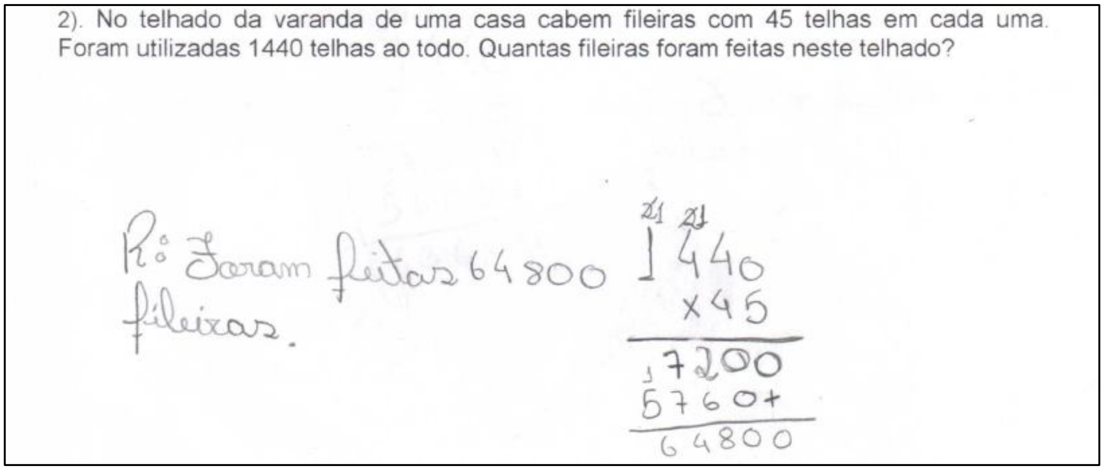
No entanto, desses 21 erros cometidos pelos estudantes, 17 dizem respeito a erros de cálculo: o estudante emprega corretamente o procedimento de solução, mas erra no resultado, revelando que compreendeu a estrutura semântica do problema, confundindo-se, porém, no cálculo final.

Apenas 4 desses erros podem ser considerados de procedimento (raciocínio errado), os quais mostram que o estudante não o problema. Dessa forma, pelo surgimento desses casos, julgou-se necessária e importante a sua descrição nesta seção do trabalho.

São os casos de E2, que usou a adição (somando o dividendo e o divisor) e a subtração (subtrai o divisor do dividendo), para solucionar dois dos problemas de divisão; de E9, que utilizou a adição (soma o divisor e o dividendo) em um dos problemas, e de E18, que multiplicou o dividendo pelo divisor em um dos problemas.

Pode-se inferir que os três participantes citados (E2, E9 e E18), que utilizaram procedimento de solução incorreto, não tenham percebido os erros cometidos, por não haverem adquirido a prática de avaliar seus resultados, em função dos problemas verbais, e não apenas dos cálculos. Todavia, não se pode afirmar que eles se encontrem num estágio mais elementar de compreensão do erro.

Levando-se em consideração que a estrutura multiplicativa da divisão diz respeito à multiplicação do divisor por um número no quociente, cujo resultado seja igual ao dividendo, a multiplicação efetuada por E18, além de ser o procedimento de solução errado em relação ao solicitado no enunciado do problema, levou a um resultado discrepante. Isso demonstra que o estudante não compreendeu o que se pedia no enunciado, nem realizou uma avaliação do mesmo e, portanto, que não tomou consciência do raciocínio errado que empregou, como mostra a Figura 33.



2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

R: Foram feitas 64800 fileiras.

```
 2 1 2 1
 1 4 4 0
   x 4 5
--------
 1 7 2 0 0
 5 7 6 0 +
----------
 6 4 8 0 0
```

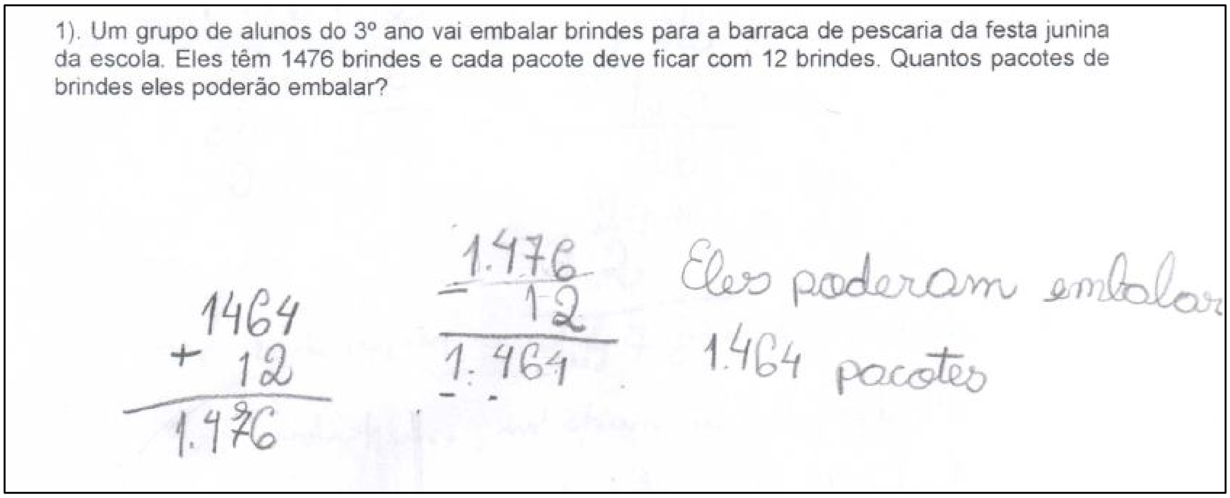
**Figura 33. Representação gráfica de E18, 5º ano (erro de procedimento).**

Faz-se necessário esclarecer que este foi o único erro cometido pelo estudante nos seis problemas solucionados.

Nesses três casos de erros de procedimento, nenhum dos estudantes avaliou se o resultado de sua solução era coerente com a estrutura semântica do problema.

Assim, não se pode afirmar se eles têm dificuldades no raciocínio necessário para a operação aritmética proposta.

O erro cometido por E9, que também apresentou apenas uma resposta incorreta, deixa evidente a ausência de avaliação do procedimento empregado. A criança errou apenas um dos problemas da 1ª série e, na 2ª etapa da coleta de dados, quando explicou, para a pesquisadora, como pensou para resolvê-lo, autocorrigiu-se, solucionando novamente o mesmo problema, como mostram as Figuras 34 e 35, a seguir:



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

Eles poderam embalar 1.464 pacotes

**Figura 34. Representação gráfica de E9 – erro de procedimento.**

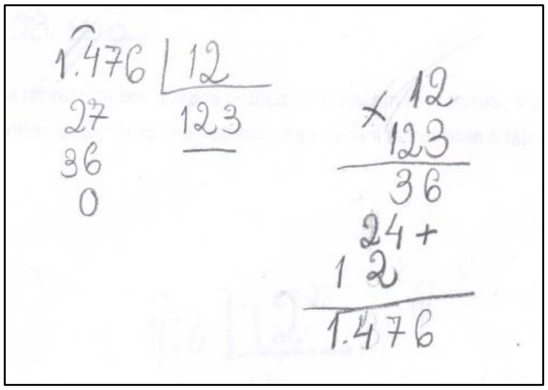
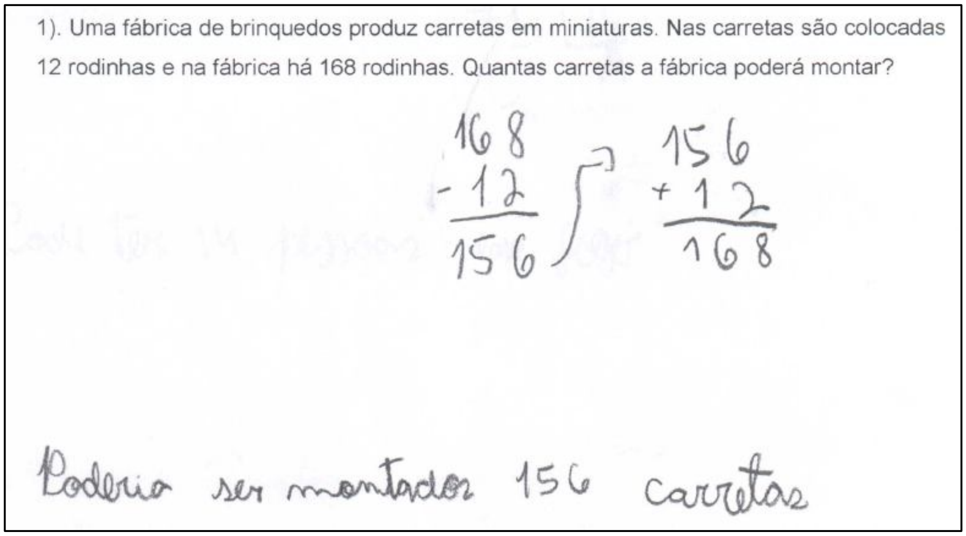


**Figura 35. Representação gráfica de E9 – autocorreção do erro de procedimento.**

O estudante E2 foi quem mais cometeu erros[27] (5 no total de 6 problemas solucionados), 3 de cálculo e 2 de procedimento, os últimos, na mesma série de problemas (2ª). Na Figura 36 (também mostrada na seção sobre representação gráfica), pode-se perceber que ele se preocupou em conferir sua conta, fazendo a prova real, o que não garantiu o acerto; ele empregou a subtração e a adição (Figura 5), como evidenciado a seguir:

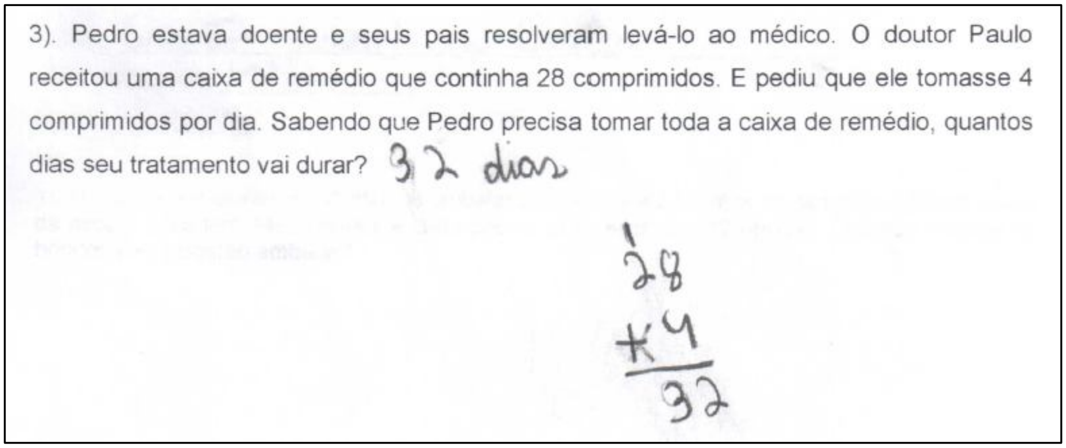


1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r} 168 \\ -12 \\ \hline 156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 156 \\ +12 \\ \hline 168 \end{array}$$

Poderia ser montados 156 carretas

Figura 36. Representação gráfica de E2 – erro de procedimento.



3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar? 32 dias

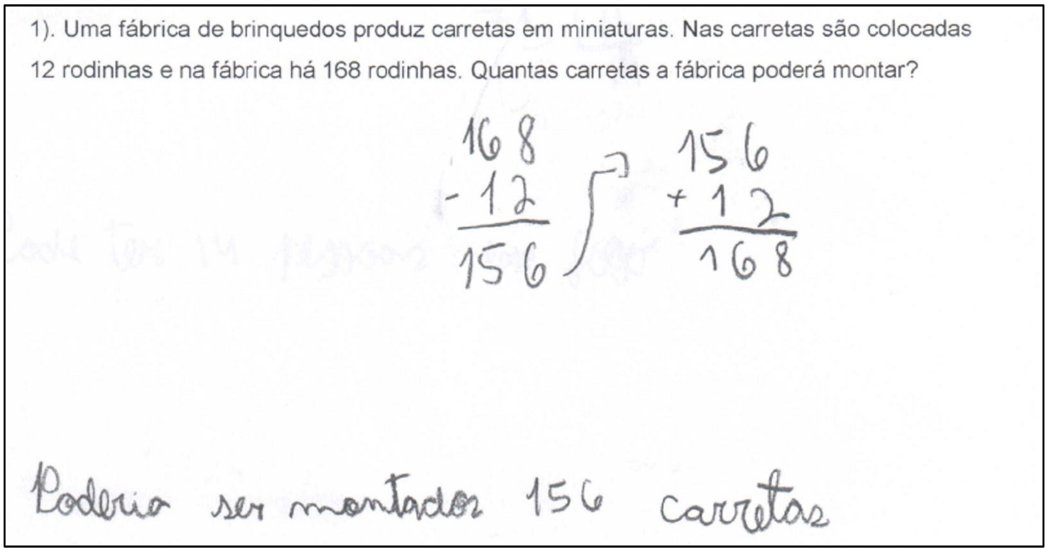
$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 28 \\ +4 \\ \hline 32 \end{array}$$

Figura 37. Representação gráfica de E2 – erro de procedimento.

---

[27] Na 1ª série de problemas (para a composição da amostra), E2 cometeu apenas erros de cálculos, tendo adotado o procedimento correto, o que lhe permitiu ter uma boa pontuação para compor a amostra de sujeitos do estudo.

Realizar a prova real não garante a solução correta do problema, como constatado no presente estudo: dos 8 estudantes que utilizaram o procedimento, 2 deles não acertaram a reposta do problema, justamente por ter empregado o procedimento errado de solução, como é o caso de E2, ilustrado na Figura 38 a seguir:



1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r} 168 \\ -12 \\ \hline 156 \end{array} \quad \begin{array}{r} 156 \\ +12 \\ \hline 168 \end{array}$$

Poderia ser montados 156 carretas

**Figura 38. Representação de E2, com prova real.**

O estudante resolveu o problema de divisão, subtraindo o divisor (12) do dividendo (168) e fazendo, depois, a prova real pela adição.

Trabalhar com a prova real pode ser interessante para levar a criança à compreensão do sentido inverso da operação em questão; no entanto, quando desvinculada do enunciado do problema e relacionada apenas ao cálculo, não propicia o verdadeiro significado de que se imbui.

Isso pode ser constatado pelo trecho do diálogo que a pesquisadora manteve com um dos participantes do estudo, E14, do 5º ano:

> P - [...] Por que você usou divisão?
> **E14 - Eu usei divisão porque daí eu tenho que dividir nas caixas. Daí a prova real da divisão, ela tem que ser de multiplicação, senão não dá certo a prova real.**
> P - O que é prova real?

> **E14 - Prova real é... tipo assim... tipo um crime assim que aconteceu... vou dar um exemplo, o cara roubou seu carro, aí você tem o documento do carro para mostrar pra policia a prova real que aquele cara roubou o carro.**
> P - E aí, nos problemas de Matemática é para você provar alguma coisa, é isso?
> **E14 - É. Pra provar que a conta tá certa.**
> P - E você sempre faz prova real?
> **E14 - Sempre não, só quando... ah não sei! Só nos mais importantes, tipo prova...**

O estudante não explicou o emprego do procedimento no problema em questão. Seu entendimento foi servir a prova real para provar algo para outra pessoa (polícia), e não para si mesmo. Afirmou, ainda, que faz a prova real apenas quando se trata de situação “mais importante”, como a prova (avaliação).

## 4.5 Análise das respostas da Entrevista

Nesta seção, apresentam-se as respostas obtidas na entrevista com os estudantes.

Alguns objetivos foram atingidos, por meio das questões colocadas durante a conversa. Eles são apresentados sinteticamente no quadro a seguir e, em seguida, ilustradas essas constatações com algumas respostas da entrevista.

| Objetivos da entrevista | Resultados* |
|---|---|
| 1. Verificar as justificativas que os estudantes dão aos procedimentos de solução empregados | Encontrou-se vínculo entre a ação e a representação (os 20 estudantes se enquadram nesta afirmação). |
| 2. Verificar a ideia que os estudantes têm sobre a divisão | O entendimento de divisão está, para os estudantes, fortemente relacionado à ação de partilhar (partição) (20 estudantes). |
| 3. Verificar se os estudantes relacionam a divisão às situações cotidianas (fora do ambiente escolar) | Não houve homogeneidade nesta relação.<br>As respostas variaram:<br>10 estudantes relacionaram a divisão a situações escolares<br>8 estudantes relacionaram-na a situações não escolares;<br>2 estudantes não responderam |

* 20 alunos foram entrevistados (n=20)

**Quadro 9. Objetivos e síntese das respostas da entrevista.**

Como destacado no quadro acima, as entrevistas foram orientadas por 3 objetivos básicos, procurando verificar: 1. as justificativas aos procedimentos de solução empregados, 2. a concepção de divisão e 3. a relação entre a operação de divisão e situações escolares ou não escolares.

A entrevista ocorreu na forma de diálogo, mantido durante todas as etapas da coleta de dados; no entanto, das questões elaboradas para o roteiro da entrevista, algumas foram feitas com mais frequência do que outras em virtude da sua maior adequação à atividade realizada.

Esse instrumento foi inspirado no trabalho intitulado "Noção de Soma", desenvolvido por Genoveva Sastre e Montserrat Moreno, de 1980, cujo propósito é verificar a noção de soma construída por crianças do terceiro ano de E.G.B. (Espanha). Porém, na presente pesquisa, o instrumento foi adaptado para verificar a noção de divisão das crianças.

As questões 1 (*O que/como você pensou para resolver este problema?*) e 2 (*Como você escolhe o modo de resolver o problema?*) eram realizadas sempre ao final de cada problema solucionado.

As questões 3 (*É preciso pensar antes de se resolver problemas? Por que?*), 4 (*Você pensou antes de resolver este problema?*), 6 (*A maneira como você colocou no papel é a mesma que você pensou?*) e a 5 (*Você conhece outra maneira de resolver este problema?*) foram planejadas para questionar os estudantes logo que terminavam cada problema (das duas séries), Entretanto, trabalhou-se com flexibilidade, uma vez que tais perguntas tinham que ser oportunas no diálogo estabelecido com as crianças.

Essas questões (3, 4, 5 e 6), por estarem diretamente relacionadas aos procedimentos empregados pelas crianças na solução dos problemas, foram detalhadas na análise das representações gráficas dos pesquisados (cf. 4.2).

As questões 7 (*O que é divisão?*), 8 (*Onde/quando você faz divisão?*), 9 (*Há alguma forma de resolver sem ser com lápis e papel?*), 10 (*Você acha importante usar lápis e papel para resolver problemas? Por que?*) e 11 (*Você acha mais fácil dividir com lápis e papel ou com as coisas?*) foram realizadas ao final da 1ª série de problemas.

Quando questionados sobre como haviam pensado para resolver cada problema, os 20 estudantes fizeram uma descrição detalhada sobre os passos dados durante a solução, tanto os que utilizaram procedimentos algorítmicos, quanto os que utilizaram procedimentos de decomposição, o que revela a necessidade de as crianças criarem um vínculo entre a ação e a representação.

Isso será encontrado também quando eles falam sobre sua concepção sobre a divisão: as respostas dos estudantes apontaram que o conceito deles sobre divisão se baseia no procedimento, na ação.

Acompanhando a descrição do procedimento, alguns argumentos utilizados pelos estudantes são: “eu dividi”, “eu fiz de vezes”, “eu fui separando”, “fui fazendo por estimativa”, como pode ser visto nos seguintes trechos das falas dos estudantes:

> **(E1): É... Na primeira, que foi mais difícil, eu fiz 1476 dividido por 12. Daí, eu fiz tipo um retângulo e dividi em 12... Daí eu tinha começado por 100** (estimando)**... Aí, eu coloquei 100, aí, de 100 em 100, deu 1200. Aí eu fui colocando mais 10, que eu sabia que ia dar 120, pra dar 1320... Aí, eu fui colocando vários números, foi de 15 primeiro, 20... Daí, eu coloquei 10 de novo... 10, 10, 10... Daí, deu 1376, né?... Aí, eu fui colocando de três em três que deu 120... Aí, eu vou fazendo continha do lado, juntando cada número que eu vou colocando nos quadrados aqui... Aí, deu o resultado, 1476. Eu fiz uma conta de dividir, daí não deu certo... Daí, eu fiz de bolinha... Daí, eu fiz de bolinha aqui também, daí, ficou... Daí, as bolinhas ficaram apertadas demais e eu fiz de quadrado mesmo.**
>
> **(E4): Eu coloquei 50, 50, 50, 50... Daí, eu fiz 12 vezes 50... Não! Ah! Eu apaguei as contas, tava aqui... 12 vezes 50, mas tava aqui. Assim, cada círculo tem um número exato que foi, é... 123... Daí, a gente vai colocando 50, 50, 50... Em todos, pra dar todos os exatos...**
>
> **(E5): Eu comecei fazendo as bolinhas, aí eu fui dividindo de 100 em 100... e era pra dividir 1476 em 12 pacotinhos, daí eu coloquei 100 em cada um, daí eu fui somando, eu fui colocando de 10 em 10 depois, até que chegou no resultado certo. Parou no 1476 que era a quantidade de brindes, aí deu 123 pacotes.**
>
> **(E8): Eu achei que eu podia começar de 50 em 50 que é um bom número. Daí, eu fui indo... 50, 50, 50... até... até... 12. Daí, eu achei muito pouco e daí, eu coloquei mais 20 em cada, mais 40 em cada... daí, eu percebi assim, daí, eu tentei mais um, fui colocando, daí eu somei quanto que deu e faltava mais um pouquinho, daí, eu coloquei mais 10 daí, eu percebi que deu 123, daí eu fiz 123 vezes 12 que dá 1476, que dá o número de brindes. Tinha 476 brindes... cada pacote tinha que ficar com 12 brindes...**
> **E cada pacote tinha que caber 12, daí, tinha que saber quantos pacotes embalar, daí, minha conta deu 123.**
>
> **(E9): Eu peguei o 1476 e dividi ele por 12, porque cada pacote tem que ter 12 brindes. Não... Subtraí. Eu subtraí, porque cada um deve ficar com 12 brindes...** (lê o problema novamente em voz baixa, observa as suas contas).

**Assim, cada pacote deve ficar com 12 e eles têm 1476... Aí o que eu faço? Aí eu subtraio... subtraindo... Nossa! Assim, subtraio seis de dois, dá quatro... Por quê? Se eu subtrair eu vou tirar 12 brindes... Aqui, eu peguei né, os 1476 brindes que eles tinham e peguei o número de pacotes que eles tinham que embalar... E cada pacote tinha que ficar com esse número aqui** (aponta o 12 do problema proposto). **Daí, pra saber quantos pacotes eles poderiam embalar, eu subtraí 12 de 1436... Aí deu 1464. Porque assim, aqui também dá pra fazer assim, eu divido esse daqui por 12... Só que eu fiquei um pouco em dúvida nessa conta, se ela era de dividir ou de menos. É assim, vou dividir agora... 1476 com 12...** (faz a conta de divisão numa folha em branco percebendo que errou da primeira vez)**. Deu 123 pacotes, com 12.**

**(E13):** (Lê o problema)... **uma dúzia era 12 e tinha 252 bombons, aí eu coloquei 252 bombons para dividir nas caixas, e cada caixa tinha capacidade para duas dúzias, uma dúzia... Daí eu somei deu 240.**
P - Você somou?
**E13 - Somei.**
P - Por quê?
**E13 - Fiz 20 vezes 18...**
P - Ah, você não somou, você multiplicou.
**E13 - É. Multipliquei, fiz 20 vezes 18 e deu 240. Aí eu tirei 240 dos 252, sobrou 12, aí eu vi que 12 com 12 dava pra colocar um 12 de novo, aí eu coloquei e deu certo, mais esse daqui deu 21.**

**(E16): uma cesta tinha 252 bombons, né?Só que eu tinha que dividir eles em uma dúzia, que é doze... Então eu tive que colocar daí eu fiz 252 dividido por 12...** (apontando para a folha). **Então... tipo assim... tenho as embalagens... tipo assim, né... embalagens... vai ter... vai pôr 12 aqui, 12 aqui... então eu tô dividindo ela.** (desenhando na folha e apontando para ela)
P - Ah tá, mas aqui tá dizendo que tem que dividir? No problema...
**E16 - Não. Tá falando pra colocá-los...**

**(E20): Está escrito que em uma cesta estão 252 bombons e preciso colocá-los em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Aí...** (Começa a escrever na folha) **então, eu dividi 252 por 12.**
P – Por que você dividiu, por que você achou que era para dividir?
**E20 - Porque é o melhor jeito de colocar os 252 bombons nas caixas. E eu sempre divido nessas contas...**
**Eu fiz de... estimativa**
P - Como que é de estimativa?
**E20 - Você vai estimando... Tipo... Eu coloco o 10, daí eu faço 10 vezes 12, daí, quanto deu, eu coloco aqui e subtraio... aí, eu vou colocando até... até ficar 0 ou sobrar. Tem que colocar sempre um... por exemplo, se aqui tivesse colocado o 100, não vai dar porque vai ficar muito. Aí, não vai ter como, como... é... diminuir.**
P – Por que você não colocou o 12, por exemplo?
**E20 - 10 é um número bom para colocar**
P – Ah, tá! Ele é um número bom por quê Van?
**E20 -** (Pensando) **Porque...** (Levanta os olhos para pensar, com expressão de dúvida) **Não é maior que... o 10 vezes o 12 não vai ser maior que o 252, vai dar 120.**

P - Tá! Mas vamos supor se você tivesse colocado 20, daria para pôr 20 aqui?
**E20 - Sim** (categoricamente). **Daí, ia ficar 240.**
P - Ah tá! Então tanto faz esse primeiro número que você coloca aqui?
**E20 - Sim! Mas se você quiser também fazer mais rápido, daí, você coloca o 20.**
P – Ah, tá! Entendi...
**E20 - Poderia, mas é que eu gosto de fazer mais separado, sabe? Um de cada vez.** (querendo dizer que prefere fazer mais tentativas)

Quando questionados sobre a escolha dos procedimentos empregados (questão 2), eles responderam:

**(E16): E 16 - Não escolhi.**
P - Ah! Você não escolheu?
**E16 - Não. É que 12... 12... Quantas vezes o 12 cabe no dois... 2 vezes, só que sobra um... Daí, põe o 1, daí abaixa o dois... Aqui... Eu sempre quando vou fazer divisão de 5, tipo... 9 vezes o 5, daí eu sempre olho no relógio, porque já tem, né?**

Essa foi uma situação interessante: parece que a técnica de fazer a multiplicação do 5, olhando no relógio, foi ensinada, pelo fato de E16 não conseguir dar uma boa explicação sobre ela, demonstrando a mecanização do processo, como a seguir (continuando o diálogo):

P - Não sei... explica para mim isso...
**E16 - Então assim...**
P - Tem relógio aqui?
**E16 -** (Desenhando um relógio na folha)**... Uma vez o 1... Eu sei que hora né, lógico... Daí fica assim** (continua escrevendo e apagando na folha) **assim... tipo assim... É... uma vez o... Eu sei, calma aí... (risos) deixa eu explicar... aqui sempre tem 4 pontinhos no relógio** (entre 1 número e outro do relógio)**...**
**daí eu conto: 1, 2, 3, 4,5... Então uma vez o 5 é... é 5.**
P - Ah!
**E16 – Daí, aqui continua... daí, continua... 1,2... duas vezes 5 até chegar o 2... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10... Daí, vai contando... duas vezes 5...** (sem conseguir dar uma boa explicação)
P - Mas quando você vai dividir, o que é que tem a ver o relógio? Como é que você faz? Quando tem que dividir por 5... não é isso que você falou? Quando tem que dividir por 5 eu olho no relógio...
**E16 - Não, é que aqui era 45, né?**
P – Sim.
**E16- Eu sei que 9 vezes o 5 é 45, então eu pus assim...**
P- Mas o que isso tem a ver com o relógio? Você pensou no relógio para fazer 9 vezes 5?

**E16 - Não.**
A- Você já sabia que era 45?
**E16 - Já.**

A criança parece ter lembrado a técnica, mas não conseguiu explicá-la, nem a utilizou para fazer os cálculos, uma vez que não havia relógio na sala. Isso aparenta ser mais uma das técnicas ensinadas para operar com a tabuada, sem o devido entendimento da operação.

Outras respostas e explicações sobre os procedimentos adotados foram:

**(E14):** P - Por que você escolheu essas operações para resolver esses problemas? Você usou divisão e multiplicação você falou né?
**E14 - É. São as operações que tem que fazer para chegar no resultado.**
P - É? Como que você sabe que é um problema de dividir?
**E14 - Porque ó... eu vejo assim... numa cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-los em uma embalagem com capacidade para 1 dúzia bombons, aí eu já sei que tem que dividir.**
P – Ah, tá! Mas o problema tá falando que é de dividir? Como é que você sabe que tem que dividir?
**E14- Eu sei por que tá falando assim... Eu tenho 252 bombons... Eu tenho que colocá-los nas embalagens e em cada embalagem cabem 12 bombons, então, aí, eu já tenho uma noção da conta que eu tenho que fazer.**

**(E15): E15 - Se fosse multiplicação eu multiplicaria os bombons, eu não ia dividir eles nas caixas pra saber quantos iam ficar, eu ia multiplicar e não teria nada a ver; se fosse subtração eu ia subtrair os bombons e eu não ia colocar nas caixas; se fosse adição eu ia adicionar os bombons e também não servia; então, a divisão pra mim foi o melhor jeito porque eu dividi nas caixas pra chegar no resultado**

**(E17): Pra eu descobrir uma quantidade eu uso o dividir...**

**(E19): Porque assim, eu penso: dá pra fazer 1440 e somar o 45? Aí tipo eu não vou conseguir saber o total de coisas, então não vai dar o resultado que eu quero. Daí, eu faço 1440 vezes o 45... Eu não queria fazer vezes 45 porque senão ia dar número muito alto... Daí, menos... Como que eu vou tirar o 45 do 1440? Mas vai ficar meio estranho, tipo, vai ficar menos do que eu queria... Então, eu resolvo fazer a divisão porque eu quero saber quantas fileiras tem o telhado...**
**Antes de tudo, eu penso.**

Quando questionados se era preciso pensar antes de resolver problemas (questão 3), 18 estudantes responderam que sim, enquanto 2 disseram que “apenas em algumas contas”, “se você não tiver na sua cabeça”:

**(E3): Algumas contas... Que outras que você já tem na cabeça, daí, você não precisa pensar.**

**(E4): É, pra mim esses dois aqui eu não pensei... Eu não pensei, eu já sabia na minha cabeça a tabuada... Esse (o terceiro), eu pensei bastante.**

Outros argumentos para a mesma questão:

**(E1): Sim, porque a gente pensar os números, pensar primeiro na cabeça e depois ir colocando, pra não ficar apagando, apagando e apagando...**

**(E6):** (Sinal de positivo com a cabeça)**. Porque se a gente começar de qualquer jeito, não vai dar certo!**

**(E8): Ahan, por exemplo, se você não pensar e for fazendo tudo direto, às vezes, você pode fazer errado, e se for uma prova?**

**(E14): Ah, é, você pode pensar já escrevendo. Né? Você pode pensar anotando... Que fica muito mais fácil.**
**(E14): Ah, eu preciso pensar pra ver a conta que eu vou fazer, daí, depois, eu penso na continha que eu tô fazendo.**

**(E16): Eu acho que sim. É, porque, às vezes, a gente não sabe que divisão... é, que... Operação que vai pôr, que vai fazer... Só que a gente lendo já dá pra perceber e a Ciça** (professora) **sempre fala que pode resolver com desenho. (Mesmo incentivados a utilizar desenhos, nenhum sujeito utilizou o procedimento).**

**(E18): É. Que nem... Eu tenho um amigo, né... Ele falava um número assim, ele achava que dava e colocava, ele não pensava pra confirmar se tava certo. Daí ele nunca acertava as atividades, raramente ele acertava.**

Quando questionados se haviam pensado para resolver aqueles problemas, 18 deles disseram que sim, 1 afirmou não se lembrar e 1 disse “mais ou menos”:

**(E4): Pensei em fazer a conta da chave, mas esqueci como é que faz, mas, depois, vou levar o caderno pra estudar...**

**(E5): Eu pensei, eu pensei num número que eu poderia colocar no primeiro até chegar num resultado...**

Percebe-se, ainda, o pensamento baseado na ação realizada, no procedimento executado; ou seja, os estudantes explicam a conta realizada.

Questionados sobre se conheciam outra forma de resolver os problemas propostos, 18 responderam que sim, 1 respondeu que não conhece e 1 disse “acho que não”, mas depois se contradisse, como pode ser observado pela sua resposta a seguir:

> **(E1): Eu acho que não... Porque, de vezes, a gente vai aumentar, de mais, a gente vai aumentar também, de menos, eu acho que a gente vai diminuir e... Não vai ser tudo que nem a divisão, né? Existe de bolinha e de fazer na chave mesmo. Na chave, eu não sei.**

Dos que responderam que conheciam, 10 disseram que era o da “chave”, 1 falou da multiplicação, 3 falaram da decomposição, 1 falou da chave breve e 1 que era pelo “desenho”:

> **(E16): calma aí, deixa eu pensar... tem, fazendo desenho... Só que, quando for número muito alto assim, vai precisar fazer muitos**

Embora seja conhecido o hábito de as crianças utilizarem o desenho em suas representações gráficas, neste estudo, esse traço surgiu de maneira bastante discreta.

Uma das hipóteses que talvez justifique o emprego de vários procedimentos é as professoras da escola envolvida na pesquisa apresentarem às crianças, a partir do 4º ano de escolaridade, as diversas formas convencionais de se solucionarem problemas de divisão com lápis e papel (decomposição[28], algoritmo americano, chave longa e chave breve). Além disso, o livro didático utilizado pela escola também expõe tais procedimentos.

As professoras permitem que as crianças utilizem o procedimento que julgarem melhor e parecem incentivá-los a isso, como foi constatado também pela fala de E16, que segue:

---

[28] Considerou-se aqui este procedimento como “convencional”, uma vez que é ensinado pelos professores e pelos livros didáticos, tratando-se, pois, de um conhecimento social.

**E16 - É, porque, às vezes, a gente não sabe que operação que vai pôr... só que a gente lendo, já dá pra perceber, e a Ciça** (professora) **sempre fala que pode fazer resolver os problemas com desenho, sabe? Tipo... Tinha 3 sapatos... Huumm... é... 3 pulseiras** (desenhando na folha)**... daí, pra dividir em, não pra usar com... 1 de cada cor, aqui é amarela, aqui é azul, aqui é verde... Daí, com cada roupa... a roupa amarela, calma aí... a roupa verde e a roupa azul... daí, quantas vezes eu posso usar. Daí, faz, liga, vai ligando entendeu?** (desenhando na folha)**.**
P - Fazer esses desenhos ajuda a pensar na forma de resolver o problema?
**E16 - É, eu acho.**

A questão 6 inquiria se eles haviam colocado no papel a mesma forma como pensaram. 18 deles responderam que sim, 1 disse “mais ou menos” e 1 não respondeu. Dos que afirmaram que sim, selecionaram-se as duas respostas a seguir:

**(E4): Eu... é... tem vez que eu faço de um jeito na cabeça, e não dá certo, daí, eu faço do jeito que eu... o jeito certo no papel. E, daí, eu já faço a conta de cabeça, pra ver se dá certo, ou não dá. Que nem aqui, ó** (referência ao segundo problema proposto) **eu sabia que o resultado era 55...**

**(E8): Mais ou menos, eu pensei umas coisas e foi aí que eu percebi. Assim, se eu fosse fazer, por exemplo... aqui, pacotinho... Não ia dar certo, porque meu número é muito grande; daí; eu fiz bola bem grandona... Eu pensei em pacotinhos, só que, daí, eu tentei fazer pacotinhos, só que meu número é muito grande e não cabe no pacotinho... se eu fizer uma bola e fingir que é um pacotinho, vai dar certo.**

A questão 7, considerada uma das mais importantes para o estudo, perguntou “O que é divisão”, como descrito no Quadro 9 anteriormente.

O entendimento de divisão está, para os estudantes, fortemente relacionado à ação de partilhar (partição). Isso foi observado nos 20 estudantes que compuseram a amostra do estudo, como se pode verificar pelas respostas, nos diálogos que seguem:

**(E1): Divisão é uma matemática que a gente usa para dividir as coisas... Então é a mesma coisa, tipo, eu tenho um leilão de carros que tem 20 carros, daí eu tenho 20 clientes... 10 clientes... Aí, eu vou ter que colocar dois carros para cada um... Daí, a gente vai dividir, né?**

**(E2): A divisão é assim, por exemplo... 15 balas, você quer dividir para 5 pessoas, cada pessoa recebe 3 balas...**

> **(E3): Divisão é tipo assim... Eu divido. Assim, eu tenho 5 pessoas e tenho 10 balas, eu divido 2 pra cada uma que daí o resultado vai dar 10.**

A criança E3 ilustra bem a ideia de que, do ponto de vista do pensamento, a divisão comporta uma estrutura multiplicativa, uma vez que se trata de operações inversas: ela explica a operação em questão, mas o que faz, em pensamento, é a inversa (multiplicação).

> **(E4): É dividir igualmente ou sobrar... ou dar um resto...**
>
> **(E5): É quando você quer colocar uma quantidade, por exemplo, de livros aqui... na prateleira, quando você quer colocar alguma coisa e você não sabe quanto você vai colocar no lugar.**
>
> **(E6): Pra mim, divisão é uma coisa que você tem que dividir com o... tipo assim, eu divido... Adriana vai ter que dividir 60 jogos com a Laura, é assim...**
>
> **(E7): Ah! Divisão é tipo... você tem 6 coisas e você tem que dividir igualmente pra 3 pessoas, daí, vai ficar 2 pra cada pessoa, se somar 2 vezes 3 vai dar 6.**

Curioso observar a argumentação das crianças com relação à multiplicação: a proximidade entre a ideia da soma e a da multiplicação, por constituírem ações por meio das quais se acrescentam quantidades, embora as origens de seus esquemas sejam diferentes, pode ser observada neste argumento de E7 *"somar 2 vezes o 3".* Diversas crianças, ao longo das atividades, disseram a palavra somar quando estavam multiplicando, ao justificarem a representação da ação que haviam realizado.

> **(E8): É dividir... por exemplo, 84 por 2... eu tenho que... quer o resultado, né? pra ficar igual pra cada um, por exemplo, se fosse dividir entre eu e meu primo R$84,00... Se fosse mais pro meu primo eu ficava reclamando... se fosse mais pra mim, ele ficava reclamando... daí teria que dividir igual pra ficar igual...**
>
> **(E9): É quando você tem um número e tem uma quantidade, que você tem que dividir esse número... Tipo assim, você tem um número de balas, aí, você tem cinco pessoas... Aí, você tem que conseguir dividir esse número de balas que você tem, se você quiser dividir por essas cinco pessoas. Isso é divisão, quando você divide um número por uma, tipo... Quantidade de pessoas, de animais, qualquer coisa...**
>
> **(E10): É pra dividir um número... Pra dividir um tanto pelo outro tanto.**

**(E11): Pra mim, é quando você tem que dividir alguma coisa...**

**(E12): Divisão é o ato de dividir. Dividir igualmente ou deixar sobrar o resto. Porque nesse caso aqui, cadê? No 1, na atividade número 1, teve resto** (nenhum problema tinha resto)**. O certo da divisão, que é uma coisa lógica né, é dividir igualmente. A divisão é uma coisa que tem que dividir igualmente apenas.**

Essa criança (E12) foi enfática, ao afirmar que a "lógica" da divisão é a partilha "igual", como se dissesse que só pode ser divisão se for uma partilha justa.

**(E13): É pra dividir. Divisão é pra você dividir quantidades exatas ou pode sobrar.**

**(E14): Divisão... ah não sei explicar muito bem. Ó, pelo que eu sei divisão é... Você divide um número pelo outro, pra ver o quanto vai dar, tipo... Você comprou 500 cocas-colas aí você tem que dividir em 5 pessoas, aí você vai dar 100 pra cada.**

**(E15): Divisão é tipo assim, eu tenho um objeto, um chocolate, por exemplo, e quero reparti-lo, aí eu vou fazer a divisão pra ver quanto eu vou repartir para as pessoas... A divisão é dividir.**
P – Dividir é a mesma coisa que repartir?
**E15 – Não.**
P - Não? Porque, quando você falou do chocolate, você falou, vamos supor eu tenho um chocolate e quero repartí-lo entre algumas pessoas...
**E15 - É. Aí você tem que dividir primeiro.**
P - O que é repartir?
**E15 - Repartir é tipo dar. Como eu disse a barra de chocolate eu reparti em pedaços e dei pros meus amigos...**
P - Ah, então dividir você faz antes de repartir?
**E15 - É. Primeiro, eu divido, depois, eu reparto.**

**(E16): Divisão é... dividir... dividir as quantidades. Tipo, eu tenho 5 balas para 10 pessoas... Daí eu vou dividir as 5 balas para as 10 pessoas...**
**Dividi, tipo tenho 20... 24 balas... 25 balas pra dividir... em 25 pessoas... aí, fica mais fácil... 25 dividido por 25, daí, dá 1.**
**É, quantidade. Tipo... quantidade de... a gente divide uma quantidade para... ou pessoas ou para alguma coisa assim...**

**(E17): Divisão é uma forma de você resolver problemas de Matemática, e, fazendo a divisão, eu consigo descobrir a quantidade, a quantidade que... Por exemplo, numa cesta estão 253 bombons, eu preciso colocá-los... Daí, pra eu descobrir quantas eu vou utilizar... Aí, dá pra eu descobrir quantidades, usando a divisão também...**

**(E18): Divisão é assim, quando você tem uma coisa e vai repartir igualmente pra... Tipo assim, tenho um tanto de maçã e vou dividir igualmente pra cada caixa, você vai dividindo igualmente um tanto pra cada lugar...**

> P – Dividir é o mesmo que repartir?
> **E18 – É. Repartir igualmente pra cada um.**
>
> **(E19): Divisão é você dividir um número, você poder dividir um número em várias partes.**
>
> **(E20): É... tipo, eu tenho 6 doces e tenho 3 primos e eu tenho que dividir os 6 doces pra eles... aí eu vou dando tipo... um pra um primo, outro pra um primo, outro pra um primo, daí, sobrou 3, aí, eu vi que dá pra dar mais pra eles, daí, eu dou mais 1 para cada um. Aí, sobra 0.**

O fato de os estudantes descreverem a divisão como uma ação de dividir, de partilhar, confirma que a divisão é ainda uma noção de difícil compreensão nessa etapa inicial da escolaridade.

Lembrando Correa, Nunes e Bryant (1998), embora o esquema de ação da divisão seja o de partilhar, a divisão, enquanto operação, deve relacionar os valores do dividendo, do divisor e do quociente. Assim, podemos inferir que a ação de partilhar ainda é uma compreensão muito inicial da divisão enquanto uma operação; quando as crianças estão preocupadas apenas com a igualdade das partes, elas ainda não estão com o conceito formado sobre divisão.

Desta forma, é preciso incentivar os alunos a resolverem problema de divisão por quotas (mais complexo do que a divisão partitiva), de modo a compreenderem melhor a estrutura do problema.

Neste estudo, as crianças chegam à solução correta, mas a maioria delas não sabe explicar como ou por que escolheram aquele procedimento.

A questão 8 (*Quando você faz divisão)* gerou alguns desdobramentos em decorrência da própria liberdade em se aprofundar na conversa com os estudantes e, então, acrescentaram-se mais duas perguntas, quando oportunas: *você faz divisão somente na escola?* e *você faz divisão em sua casa?*

O objetivo com esta pergunta foi o de verificar se os estudantes relacionam a divisão com situações não escolares, e as respostas foram variadas. Dos 20 estudantes, 10 deles relacionaram a divisão com situações escolares, 8 deles relacionaram a divisão com situações não escolares e 2 estudantes não responderam. Seguem algumas respostas, separadas por categorias SE - situação escolar e SNE - situação não escolar, selecionadas:

### SE

**(E1): Só quando a Mari dá lição...**

**(E2): Quando a pergunta do problema tá falando "João tinha 15 balas e tinha que dividir..."**
P - Me dê um exemplo de quando você faz divisão fora da escola.
**E - Às vezes a minha mãe manda fazer tabuada, adição, subtração e divisão.**
P - Sem ser na escola e sem ser na sua casa, quando você tá brincando, por exemplo, você faz divisão?
**E- Não, não faço.**

**(E4): Ai! Essa daí é difícil, eu não sei... em conta de divisão ou em prova real.**

**(E8): Às vezes a Mari manda lição de casa, assim, por exemplo, pra conta de divisão essas coisas... daí às vezes eu treino em casa...**

**(E10): ... eu faço às vezes. Nas contas de divisão.**

**(E11): Em qualquer lugar... no mercado, às vezes eu vou no aniversário daí eu volto e tenho que dividir com meu irmão... Quando eu volto de uma aniversário de um colega meu, daí meu irmão quer também né? Daí eu tenho que dividir.**

**(E14): Quando precisa, nas provas essas coisas...**

**(E15): Em problemas que são, é... de colocar em cada caixa... o material... ou uma pessoa correu 10 quilômetros em três dias, quantos quilômetros ela correu por dia...**

**(E17): Eu uso a divisão pra descobrir uma quantidade que eu não sei ainda...**
P- Sei, mas quando que você faz divisão?
**E- Eu faço a divisão quando precisa usar a divisão... (risos)**
P - Quando precisa usar a divisão? (risos). Em que lugares você faz

### SNE

**(E3): Quando a gente vai dividir para várias pessoas.**

**(E5): Quando você quer colocar alguma coisa... ah, já expliquei o que é divisão. Quando eu tenho que separar as coisas para saber o resultado.**

**(E7): Eu não uso muito...**

**(E9): T- Quando tem conta... Quando a pessoa fala assim: ah, tanto daquilo pra dividir tanto pra cada um, aí eu faço a conta de dividir.**
A- Uhum... E onde você faz divisão?
**T- Como assim?**
A- Em que lugares? Quer dizer, na rua... Na escola... na sua casa...
**T- Assim, a divisão... Assim, em vários lugares porque tipo assim, porque tipo assim você vai... Quando você vai no mercado, aí você quer comprar bolacha, só que aí você tem que ver porque você quer comprar bolacha pra ir num lanche coletivo né? Aí você tem que ver, porque aqui na escola tem bastante pessoas, não dá pra você comprar um pacote com 46 bolachas e querer dividir pra escola inteira né?**

**(E12): Divisão... por exemplo, quando eu tenho quando as minhas primas vão lá em casa não pode ter isso a mais pra uma e isso a menos pra outra né? Então é assim... eu tenho um pacote de balas com conteúdo de 50 balas e nós somos em 5, daí tem que dividir igualmente, é 10 pra cada uma né? Toda hora que você for dividir, dar igualmente para cada um, você tem que dividir.**

**(E13): Quando tá falando que você tem que colocar em caixas, tem que repartir pra pessoas.**

**(E18): Ah, quando você tá assim num lugar e você tem um tanto de balas, de chocolate ou um tanto de maçã assim né... Daí se pedem um**

divisão?
**E - Em que lugares?... na folha...**

**(E19): Eu tenho tipo, 17 batatas eu quero dividir por cinco, daí ao invés de ficar fazendo palitinho, ficar fazendo 17 palitinhos e dividir pra não sei quantas pessoas, é pra... 6 pessoas, eu faço esse modo que é mais rápido e é mais fácil de fazer** (procedimento algorítmico).
**Quando eu quero dividir alguma coisa, alguma coisa ou são várias pessoas... Daí eu... Tipo, eu tenho não sei quantos carros, 20 carros e eu quero dividir pra dois amigos meus, daí eu divido, daí vai ficar 10 pra cada um... Então pra ficar mais fácil, porque senão vai demorar pra fazer os palitinhos, daí fazer os dois hominhos...** (apontando o procedimento algorítmico).
**(E20): Quando é um problema assim, tipo... 540 dividido por... Eu tenho que dar 540 bombons para 33 pessoas, daí eu uso.**

**A- Tá... então espera um pouquinho, deixa eu entender... Você acha que então... a gente usa a divisão quando tem que dividir coisas entre as pessoas?**
**V- É. Ou também pode usar pra colocar, tipo... Tem três varais e 30 roupas. Daí eu divido para ver quantas roupas cabem em cada varal. Eu tenho que saber quantas roupas cabe em cada varal, aí eu faço divisão.**
**tanto pra você, aí você vai repartir igualmente, um pouco pra cada um...**

A questão 9 buscou verificar outras formas de representação dos estudantes, perguntando-lhes se existe algum jeito de responder sem ser com lápis e papel.

Com exceção da resposta de 1 estudante, as outras respostas foram afirmativas variando entre cálculo mental (“com a cabeça”, “pensando”), com outros procedimentos (discutidos na análise das representações), com as coisas e com os dedos:

> **(E9): Ah, existe... Você pensando... Tipo, se você pensa 45 dividido pra 5, aí você somar quantos 45 cabe dentro do 5, isso dá pra fazer, você tem que guardar a tabuada pra isso, mas dá.**
>
> **(E11): Eu tenho 5 pra dividir por 3, ou 4 pra dividir por 2... aí você vai fazer na cabeça, não precisa de papel... faz cálculo mental...**
>
> **(E15): Tem. De cabeça e manualmente... Porque tipo assim, um chocolate, por exemplo, eu consigo dividir se não for no papel...**
>
> **(E16): Nos dedos assim... contando... nos dedos... ou... é... cabeça mesmo...**
>
> **(E19): Cálculo mental.**
>
> **A- Então vamos supor que você tivesse 5 bombons e 4 amigos... (como faria pra resolver sem lápis e papel)**
>
> **P- Daí eu faço assim, eu pego 4 pessoas aí eu divido 4 pra cada um, e o ultimo que sobrar eu divido em 4 e dou ¼ pra cada um.**
>
> **(E20): Sim. Na vida real assim mesmo, eu tenho 3 lápis que minha tia me deu, e eu tenho... Tem eu, minha irmã e meu outro irmão... Tem que dar 1 pra cada um, aí vai dando. Tipo, não sei, vai dar 2 pra cada um.**

A questão 10 buscou verificar se os estudantes acham importante usar lápis e papel para resolver problemas. 12 disseram “sim”, 6 disseram “às vezes”, 1 disse “não” e 1 sem respostas:

> **(E1): Eu acho que ficaria melhor, porque na cabeça eu acho que fica mais solto...**
>
> **(E5): Depende qual é a tarefa, se for de dividir daí eu acho importante, porque eu não consigo fazer de cabeça a de dividir. De vezes eu consigo fazer sem o lápis e o papel.**
>
> **(E6): Ah, tem vez que não porque a gente pensa... Ah! Eu acho, porque assim... Como que eu vou guardar um número? ... Tem vez que sim né... Porque a gente tem que guardar, agora quando for um número menor a gente guarda na cabeça, então... 5 mais 5 é isso, então dá pra guardar, 30 mais 30 são 60... Dá pra guardar os números que a gente sabe tudo que termina em zero, 60...**
>
> **(E9): Ah, sim e não também... Porque você usar lápis e papel é a mesma coisa que tá na cabeça, só que às vezes com lápis e papel é mais difícil, porque às vezes na cabeça você perde, porque na cabeça não tá escrito quanto você tá dividindo, na cabeça você só pensa naquele número... Assim, não aparece uma nuvem na sua frente escrito o número que você vai dividir e você vai clicando assim e vai fazendo o resultado... Na cabeça você vai tipo assim, pensando... Vai dividindo. Agora no papel você já sabe o que você vai dividir você pode ir fazendo a tabuada pra você ver quantas vezes dá aquele número. É mais fácil...**

**(E10): Eu acho porque daí facilita, você não esquece dos números porque tá gravado no papel.**

**(E12): Sim, pra você dar mais razão para o que você tá fazendo.**

**(E17): Acho. Porque eu tô... se eu erro um problema, aí não tem como... é... arrumar. E também é mais fácil porque eu vou tá registrando meu pensamento. E depois eu já vejo o que eu pensei... e às vezes eu quero voltar naquilo, daí não dá... Tipo... 10 mais 10 mais 10 mais 10... dá 40, mas eu quero ver quantos... O outro problema tá perguntando quanto é duas vezes o 10. Daí tem que voltar tudo de novo...**

**(E19): Nem tanto porque a mente é a forma de resolver os problemas no dia-a-dia então, não é sempre que você vai ter um lápis e papel pra resolver um problema.**

A última questão (11) indagou-os se consideram mais fácil dividir com lápis ou papel ou com as coisas. 11 dizem achar mais importante resolver com as coisas e 9 dizem achar mais importante resolver com lápis e papel:

**(E6): - Quando as coisas tão bagunçadas não dá muito pra dividir, agora quando as coisas tão certinhas, com o preço certinho assim, daí dá pra dividir...**
P - Com as coisas?
**E - É.**
P - Então é mais fácil com as coisas ou com o papel?
**E - Com o papel às vezes...**
P - Às vezes com o papel e às vezes com as coisas...
**E- É.**

**(E8): Com as coisas.**
P - Por que?
**E - Assim... as coisas ficam mais fácil... Por que... Assim... As coisas são maiores daí você tem que ver... você conta certinho... 1 2 3 4... por exemplo, 6 por 2... você conta assim 1 2 3... daí você pensa assim... 3 por 2... vamos tentar 3... 1 2 3... daí pra dar 6 faltam mais 3... Daí tem que ir contando... daí assim fica mais fácil pra mim entender...**

**(E10): É mais fácil dividir com as coisas. Porque você já vai distribuindo e não precisa ficar pensando.**

**(E12): Os dois. Porque no papel você já vai tá pondo as coisas, mas com as coisas você já tá com elas né?**

**(E14): Ah, com as coisas que eu vou dividir... mas se eu vou resolver um problema que eu não tenho presente os brinquedos que eu vou repartir, por exemplo, aí eu vou fazendo no papel.**

**(E15): Dividir com as coisas, muito mais fácil, porque elas vão estar na minha frente, já pego com a mão e já vou dividindo e se eu errar é só pegar de novo** (gesticulando com as mãos)**... é mais fácil.**

Os resultados da pesquisa empírica revelaram uma grande quantidade de dados que, devido ás limitações do estudo, não puderam ser suficientemente explorados, como por exemplo, uma maior discussão acerca dos erros cometidos pelos participantes da pesquisa. Porém, faz-se necessária uma breve discussão sobre os mesmos, que será apresentada na próxima seção.

# CAPÍTULO 5. DISCUSSÃO

Levantada a categorização das representações gráficas das crianças, procede-se à discussão sobre os procedimentos empregados por elas.

Não se podem fazer afirmações exatas quanto à diversidade e à variação das representações gráficas das crianças, porém algumas inferências são suscitadas. Um dos fatores é a escola que os estudantes desta pesquisa frequentam estimulá-los a decidir sobre quais procedimentos podem utilizar na solução de problemas.

Por meio de entrevistas informais, realizadas com as professoras de Matemática desses estudantes, soube-se que vários deles lhes solicitam que ensinem as formas convencionais de proceder com as contas; elas afirmaram que, em diversas ocasiões, quando as crianças fazem discussões em grupo, por exemplo, surge tal solicitação.

Outro fator que pode levar essas crianças a diversificarem e variarem seus procedimentos de solução de problemas refere-se ao conteúdo do livro didático utilizado na escola, que apresenta três formas de resolver problemas de divisão: decomposição, algoritmo americano e algoritmo de chave breve, orientando os alunos para a idéia de que os problemas apresentam mais de uma forma de solução.

Há que se levar em consideração o contexto educativo dessa escola: como foi relatado, o ensino oferecido por ela é orientado para a construção do conhecimento pelas crianças; para tanto, propõe trabalho com jogos, atividades em grupo, discussões sobre as práticas pedagógicas realizadas coletivamente, estimulo à construção da autonomia moral e intelectual de seus alunos e convivência em um ambiente cooperativo, dentre outros. Essas ações, com certeza, favorecem o processo de construção natural do conhecimento pelos alunos, o que pode levar à diversidade dos procedimentos de solução.

É muito comum observarmos, em grande parte das escolas, a valorização da técnica operatória, em detrimento da compreensão de problemas verbais; muitos professores reforçam as palavras-chave do problema, dando sempre as dicas para os alunos, se “é de mais” ou “de menos”, por exemplo. Assim que as crianças começam a buscar a estratégia de cálculo a utilizar no problema em questão, elas abandonam as instruções linguísticas nele presentes, passando a preocupar-se somente com a técnica a empregar.

Apesar de a escola proporcionar um trabalho educativo diferenciado das demais, priorizando a construção do conhecimento, aspectos convencionais da Matemática fizeram-se presentes, como os algoritmos e a prova real. Porém não foi possível afirmar, com certeza, que tais procedimentos sejam ensinados pela escola, ou que tal aprendizagem seja realizada na escola, uma vez que se deve considerar o aspecto social das convenções, que abarcam a família e demais grupos do entorno social.

Procedimentos algorítmicos não são descobertos espontaneamente, é um esquema, mas não é pessoal e há diferença entre um algoritmo espontâneo e um transmitido (Vergnaud, 2008[29]). Entende-se que o ensino de técnicas operatórias impede a construção natural da criança; no entanto, quando tal ensino é inevitável, espera-se que, ao menos, seja acompanhado das possibilidades de compreensão dessas técnicas pelas crianças.

Segundo Saiz (1996), "as variáveis que influem no reconhecimento do problema como um problema de divisão também influem no tratamento e na resolução do algoritmo" (p. 175). A autora denomina o algoritmo de chave breve de *pseudoalgoritmo*, pois o que se faz, ao empregar-se procedimento, é dividir cada algarismo do dividendo por um algarismo do divisor. Por exemplo: em 293 ÷ 24, a solução é realizada da seguinte maneira: "2 dividido por 2 dá 1 e sobra zero; baixo o 9, 9 dividido por 4, dá 2 e sobra 1; baixo o 3, 13 dividido por 2 dá 6 e sobre 1", (p. 175).

Portanto, quando as crianças empregam procedimentos incorretos, podem fazê-lo por estarem mais preocupadas com os passos a empregar na solução do que com a estrutura do problema.

Do ponto de vista da formalização do conhecimento, encontrou-se um elemento que chamou a atenção: a técnica de fazer a prova real nos problemas matemáticos. Por meio do diálogo com as crianças, percebeu-se que elas são incentivadas a efetuar essa prova.

---

[29] Palestra proferida na Semana de Educação do SESC, em 14 de outubro de 2008.

Conforme abordado anteriormente, a prova real não garante a confirmação positiva do procedimento empregado, nem mesmo a autocorreção por parte da criança. Para haver a autocorreção, é necessário que ela tome consciência de seu erro e não que empregue outra técnica operatória. Foi o que se observou em um dos participantes do estudo (E9), que, provocada pela intervenção da pesquisadora, tomou consciência do erro cometido e solucionou o problema novamente, a fim de corrigi-lo, o que evidencia uma evolução na tomada de consciência.

As crianças precisam construir uma representação do problema para trabalhar com ele e, para tanto, dependendo do estágio do desenvolvimento em que ela se encontre, faz-se necessária a intervenção do educador, no sentido de auxiliá-la a tomar consciência de suas ações.

Como foi possível observar, embora a maioria dos estudantes não tenha construído o conceito de divisão, todos resolveram os problemas. A noção de divisão encontrada nesses estudantes mostrou-se fortemente relacionada à idéia de partilha, que, por si, não é suficiente para compreender a noção em questão, pois o fato de saber repartir não garante que a criança entenda a operação multiplicativa; é preciso que ela compreenda que, além de separar determinadas quantidades em conjunto, o valor dos conjuntos varia de acordo com o tamanho do dividendo e do divisor (CORRÊA, 1996, p.155).

Um dos aspectos relevantes deste estudo foi o de não ter-se encontrado relação entre o nível de noção do operador multiplicativo e o uso de estratégias mais elaboradas de solução, ou seja, os sujeitos que utilizaram o procedimento algorítmico (avançado) não necessariamente estão de posse da noção do operador multiplicativo. Essa percepção confirma que a aplicação de uma técnica não contribui para a compreensão dos conceitos; se por um lado, o emprego de procedimentos algorítmicos pode supor uma formalização da ideia aritmética em questão (a divisão), por outro, apenas confirma a hipótese de que tal formalização não acompanha a construção natural da criança.

Dito em outras palavras, ensinar técnicas operatórias às crianças, em nada contribui para a real compreensão da noção em questão, nem mesmo para que se construam procedimentos mais elaborados de solução de problemas.

Porém, como a escola ainda apresenta grande dificuldade em avançar em uma proposta de ensino inovadora, acaba mantendo padrões tradicionais de ensino, que pouco contribui para o desenvolvimento adequado das noções e dos conceitos.

Desta forma, acredita-se que, as crianças devam ser incentivadas, pelos educadores, ao emprego de procedimentos estratégicos mais espontâneos, compreendendo que desta forma, elas tenham a oportunidade de construírem maneiras mais elaboradas de solução de problemas e avançarem na aprendizagem da Matemática. As crianças deste estudo, pareceram ser incentivadas a isto.

Em uma das representações gráficas de E11, na qual ela realiza uma representação icônica (vide p. 101), utilizou um procedimento aditivo, que apresenta certa semelhança com a divisão, pois as partes que foram divididas têm que ser somadas para compor o todo (relação parte-todo). Esse procedimento é característico de crianças de séries iniciais e também foi encontrado em outros estudos, como os de Selva (2003) e Olivier; Murray e Human (1991)

Cavalcanti (2001) descreve que há três maneiras de se utilizar o desenho na resolução de problemas: 1. o desenho representa aspectos da situação, sem relações numéricas que indiquem que o problema esteja sendo resolvido pelo desenho; 2. o problema é resolvido, utilizando-se apenas o desenho e 3. misturam-se desenhos e sinais matemáticos, ou porque o desenho está sendo utilizado para interpretar o texto do problema, mas a criança expressa a solução pela escrita matemática, ou porque o desenho está sendo utilizado para comprovar se a resposta está correta.

No processo de solução de problemas, a avaliação do plano de solução executado constitui uma das etapas mais importantes, por significar o momento em que o sujeito pode perceber eventuais erros cometidos e, assim, elaborar novas estratégias de solução, que, por sua vez, poderão ser generalizadas para situações futuras, uma vez que somente a conta utilizada não garante o acerto.

Portanto, é de fundamental importância que os professores estimulem as crianças a avaliarem as ações que realizam, pois encontrar o resultado é diferente de ter consciência do cálculo feito para resolver o problema (LERNER, 1995).

Kamii (2005), em seus estudos realizados com professores e crianças das séries iniciais, afirma que o objetivo de trabalhar com problemas de enunciado (*word* *problems*) é que as crianças "pensem sobre o problema e cheguem à resposta da maneira como conseguirem". Segundo a autora, ao se introduzirem problemas com enunciado, as crianças podem "aplicar suas habilidades de cálculo aos problemas, inventando procedimentos de solução" (p.67).

Essa discussão sobre a avaliação do plano de solução empregado nos problemas remete ao significado que muitos professores dão ao procedimento da "prova real" e que, por sua vez, transmitem aos seus alunos; ambos entendem que, ao realizar a prova real, estão conferindo a resposta do problema, quando, na verdade, estão apenas conferindo o cálculo empregado no problema, não tomando consciência, assim, de seu erro.

## Considerações sobre o erro

Na perspectiva do adulto, o erro incomoda, pois estamos inseridos em uma cultura que privilegia o acerto; por isso, a escola exige, das crianças, o êxito na solução de tarefas escolares, entendendo o erro como um fato negativo e procurando eliminar, dos alunos, as respostas incorretas (MACEDO, 1994).

No entanto, numa perspectiva construtivista, entende-se que o erro faz parte da produção da criança e compreendê-los é tarefa essencial dos educadores, uma vez que podem informar *o que* e *como* a criança pensou*, quais caminhos* ela percorreu para solucionar determinado problema e o que ela ainda não compreendeu o que ela *pode* ou ainda *não pode* fazer, levando-a a elaborar novas estratégias, dedicando-se e aperfeiçoando os meios que utiliza para solucionar problemas.

O grande desafio é aprender a identificar o erro para que ele possa ser superado, pois ele sinaliza a existência de níveis provisórios de aproximação com o objeto do conhecimento.

Dessa forma, o erro deve ser observável para o professor e também para a criança, o que, segundo Macedo (1992), constitui um problema difícil e importante: "difícil porque é justamente isso que o sujeito não consegue fazer por si mesmo.

Importante porque só assim ele terá algo ‘concreto’ contra o qual lutar e, se possível, vencer” (p.135).

Macedo (1992), baseando-se na teoria de Piaget, propõe que analisemos os erros das crianças, no plano do fazer e no plano do compreender. Analisar o erro no plano do fazer “consiste em a criança ser capaz de proceder a uma melhor definição operacional dos meios que utiliza [...], significa poder corrigir a situação, testar outras estratégias”, esquecendo, temporariamente, o objetivo e o resultado esperado, dedicando-se a aperfeiçoar os meios que utilizou; já no plano do compreender, “significa deparar-se com ‘contradições’ e ‘conflitos’ [...], dominar as razões que levaram ao sucesso ou ao fracasso” (p.134).

Apresentando a proposta de Piaget, Macedo (1997) descreve que a evolução da criança em direção à superação do erro passa por três níveis:

*Nível 1* – a criança é indiferente ao erro (pois não resolve nem entende o problema proposto); as respostas contraditórias não causam conflito;

*Nível 2* – a criança soluciona problemas por ensaio e erro – o erro aparece como um problema, contradição que exige superação, sem, no entanto, conseguir superá-lo;

*Nível 3* – o erro tem sentido para a criança, pois ela compreendeu a situação proposta. Busca soluções e consegue evitá-lo, fazendo a pré-correção. Nas palavras do autor:

> O primeiro caracteriza-se pela impossibilidade de resolver a situação que lhe é apresentada; no segundo, a criança é capaz de solucionar o problema de maneira empírica, sendo que o erro só é percebido após ter sido cometido; já o terceiro nível tem, como característica, a possibilidade de solução do problema, ou seja, o erro torna-se antecipável. (MACEDO, 1997, 40).

Dessa maneira, o educador reflexivo deve ter, como atitudes: propor que a criança analise o que fez, classifique as respostas que considera certas e as que talvez estejam erradas e busque soluções para as últimas.

Como dito anteriormente, a divisão descrita como uma ação de partilhar, não garante a compreensão da operação, pois as crianças precisam entender que além de separar determinadas quantidades em conjuntos, o valor desses conjuntos varia de acordo com o valor da quantidade a ser dividida (dividendo) e do valor das partes a serem divididas (divisor) e que, modificando uma delas, o resultado varia.

Portanto, há que se considerar a compreensão inicial da criança acerca do conceito de divisão, a fim de se propôr situações-problema que as desafiem a avançar na construção dessa ideia.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve, como objetivo, verificar as representações gráficas de solução de problemas de divisão aritmética, em estudantes de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Por meio do método do exame clínico, realizou-se um estudo de caso com vinte crianças de uma escola privada, freqüentando o 4º e o 5º anos, selecionadas por meio de provas aritméticas.

Os experimentos subdividiram-se em quatro etapas: solução de problemas (2 séries), aplicação da Prova de multiplicação e de divisão aritmética e entrevista.

As respostas geraram um conjunto de variáveis analisadas qualitativa e quantitativamente; também quanto ao objeto deste estudo – as representações gráficas – se obteve um conjunto bastante variado de representações categorizadas em nove tipos, todos contendo representações numéricas, algumas mais elementares, outras mais avançadas.

Na medida em que os estudantes eram solicitados a explicarem outras maneiras de realizar a tarefa (solucionar problemas), formas diversas configuraram-se. A repetição das atividades levou-os a encontrar formas alternativas de representação; muitos estudantes variaram os grafismos durante a mesma atividade, aproximando-se, alguns deles, ao desenho.

O uso do desenho para representar pode ser entendido como um retrocesso no grafismo, mas não no sistema de representação, visto que os mesmos estudantes que utilizaram esta forma de representação em um dos problemas também apresentaram outra forma de representação mais avançada, como o algoritmo americano e a decomposição, em outros problemas da mesma série.

Ao iniciar-se a análise dos dados, pretendeu-se verificar os procedimentos de solução, as representações gráficas, a psicogênese da noção de multiplicação e divisão aritméticas, bem como a concepção dos estudantes sobre a operação de divisão. Esses aspectos forma analisados pelas respostas à entrevista semi-estruturada. No entanto, no decorrer da análise, o campo abriu-se de tal forma, que se fez necessária a verificação das variáveis que surgiram, bem como a aplicação de testes estatísticos, para confirmar algumas relações entre as elas.

Assim, no processo de análise dos dados, delimitaram-se algumas hipóteses que levaram à necessidade de verificar-se a existência de relações entre: 1. a variabilidade de procedimentos de solução e o ano de escolaridade dos estudantes; 2. a complexidade do procedimento de solução e o ano de escolaridade; 3. a noção de operador multiplicativo e o ano de escolaridade e 4. o procedimento de solução e a noção de operador multiplicativo.

Quanto à primeira das hipóteses levantadas – alunos de anos escolares mais avançados utilizam menor variação de procedimentos na resolução dos problemas – não se encontraram evidências para confirmá-la, pois tanto os alunos de 4º ano como os de 5º tiveram o mesmo índice de variabilidade nos procedimentos empregados na solução dos problemas.

Os dados obtidos nesta pesquisa não foram suficientes para explicar o motivo de os estudantes, de qualquer ano de escolaridade, variarem os procedimentos empregados na solução de problemas.

Como todos os problemas tinham a mesma estrutura (divisão por quotas) e dados numéricos adequados à possibilidade de resolução pelas crianças, e como a explicação dada a todos os procedimentos empregados se baseou na representação da ação (ação de partilhar), atribuiu-se essa variabilidade à liberdade e ao incentivo das professoras para a escolha do procedimento a ser empregado na solução de problemas aritméticos de divisão.

Quanto à complexidade do procedimento de solução empregado, encontraram-se evidências para afirmar que os estudantes do 5º ano empregaram procedimentos mais avançados do que os estudantes do 4º ano, pois aqueles, em sua maioria, utilizaram o algoritmo americano, enquanto estes preferiram a decomposição.

Embora saibamos que as crianças apresentam formas diversificadas e particulares de representar mentalmente, o emprego de procedimentos diferenciados de solução pode ser justificado pela diversidade de procedimentos que lhes é apresentada na escola.

Sabe-se que os professores dos participantes deste estudo, bem como os livros didáticos utilizados, apresentam, aos alunos, as diversas técnicas operatórias e as formas de se operar com o cálculo necessário à divisão, quer seja ele algorítmico, quer não seja.

Uma vez que a pesquisa não trabalhou com situações espontâneas e as crianças sabiam que iriam resolver problemas aritméticos, provavelmente a semelhança entre os grafismos dos estudantes e os convencionais tenha sido influenciada por isso, diferentemente do que ocorreu no estudo de Moro e Starepravo (2005), que trabalharam com grafismos espontâneos e encontraram procedimentos diferentes aos utilizados na escola.

Não podemos esquecer que existe também uma forte influência de fatores sociais que, de certa forma, impulsionam (positiva ou negativamente) as crianças a utilizarem os procedimentos convencionais (aspecto social do conhecimento matemático).

Não se pretende aqui defender o ensino de tais técnicas, mas pôde-se observar, pelo próprio relato de alguns dos estudantes, frases do tipo: “minha mãe me ensina”, “meu pai ensinou” ou estamos “aprendendo com a professora” etc.

No entanto acreditamos que muitas crianças utilizam tais procedimentos, sem a compreensão de seu significado. O grande problema dos algoritmos é que eles não são descobertos espontaneamente, são culturais, foram inventados em nossa história e, portanto, são ensinados, o que pode ser prejudicial, por impedir uma construção natural por parte da criança.

Quando se ensina algo que é convencional à criança, ela precisa atribuir seus próprios significados ao que foi ensinado, transformando a convenção em algo espontâneo, o que pode ser transferido para o ensino dos algoritmos: se a criança não os transformar em uma representação espontânea, poderá não compreender o seu real significado, aplicando-os de forma mecânica.

Esse mecanismo foi identificado em vários depoimentos dos estudantes aqui pesquisados: muitos deles empregaram procedimentos mais convencionais nos problemas de divisão solucionados, porém, quando tentaram explicar o que era divisão, não conseguiram dar uma boa definição e, para isso, apresentaram uma definição tautológica do conceito, por exemplo: “divisão é divisão”, “é quando você tem que dividir algo entre as pessoas” ou é “quando você tem que resolver problemas de divisão”, sem considerar que esta operação envolve relações entre proporções, que não necessariamente numéricas.

Para conceituar, é necessário identificar as propriedades do objeto em questão; é necessário compreender as relações de proporcionalidade entre as grandezas, no caso da divisão, a relação entre a dimensão do dividendo, do divisor e do quociente. Passar dessa conceitualização para a representação gráfica, demanda transformar um esquema de ação num esquema simbólico.

Para confirmar a hipótese de que as crianças de anos superiores possuem condutas mais elevadas do ponto de vista da noção de operador multiplicativo, também não se encontraram evidências, pois tanto estudantes de 4º ano utilizaram procedimentos mais avançados, quanto estudantes de 5º ano, procedimentos mais elementares, evidenciando que tais crianças não apresentam, necessariamente, condutas superiores.

Quanto à relação entre os procedimentos de solução e a noção de operador multiplicativo, sua afirmação também não se confirmou, uma vez que os procedimentos mais primitivos se fizeram presentes com maior frequência dentro da conduta IV (mais avançada) e o maior índice de utilização de procedimentos mais avançados ocorreu na conduta de transição.

O que se concluiu, para esta relação, foi a dependência entre a conduta e o procedimento escolhido pela criança, porém, frente aos resultados obtidos, não se pode afirmar que crianças com conduta superior utilizam procedimentos mais avançados, já que as crianças com conduta IV utilizaram, em sua maioria, procedimentos mais elementares.

Como pôde ser verificado, os participantes deste estudo, em sua maioria, ainda não construíram a noção do operador multiplicativo, mas estão avançados na psicogênese da noção de multiplicação e de divisão aritmética, uma vez que não se encontraram condutas inferiores à conduta III (GRANELL, 1983).

Com relação à ideia de divisão, a análise dos dados revelou um predomínio do conceito de divisão como distribuição e a utilização do princípio multiplicativo para solucionar problemas dessa natureza, o que confirma a ideia de que a divisão ainda é um conceito de difícil compreensão nessa etapa de escolaridade.

Por outro lado, nenhum estudante negou-se a participar das atividades, havendo todos solucionado a totalidade dos problemas propostos, o que corrobora a ideia de alguns pesquisadores de que as crianças, pela sua curiosidade e pela sua capacidade natural de resolver problemas, sempre encontram uma solução, seja correta, seja incorreta.

Foi possível verificar também, as antecipações. Elas se caracterizaram por antecipações do procedimento, ou, em alguns casos, do resultado do problema: a maioria dos estudantes antecipou o tipo de procedimento a empregar por meio de uma conta, a qual, no geral se operou por estimativa (na decomposição ou no algoritmo americano), mesmo em casos de resultado incorreto.

Do ponto de vista da solução dos problemas, todos os estudantes resolveram-nos por meio de uma representação gráfica (e numérica), não sendo possível generalizar ter havido uma solução anterior a essa – o que ocorreu em apenas duas situações pontuais. Tal fato pode indicar que, em problemas dessa natureza, o grafismo seja necessário para servir como apoio às estratégias de solução.

O fato de não se terem encontrado formas mais homogêneas de representação parece indicar que, além de experiências oriundas do meio social, algumas particularidades estão envolvidas no sistema representativo, tais como a compreensão da estrutura semântica do problema e dos procedimentos de solução, os dados numéricos que comportam o problema e o raciocínio das crianças, o significado social e escolar das representações algorítmicas, dentre outras.

A presença do algoritmo nas condutas das crianças mais novas, ou do desenho e dos procedimentos mais longos em crianças mais velhas leva a considerar que, os fatores sociais (convenções) atuam como grandes responsáveis pela construção do sistema de representação.

Esse resultado coincide com o do estudo anteriormente realizado pela pesquisadora (MOLINARI, 2003), no qual se demonstrou não ser a operatoriedade necessária à utilização de grafismos mais complexos, estando estes fortemente relacionados a fatores externos à criança.

A análise do referido estudo de caso mostrou que a representação gráfica constitui um processo individual no qual entram em jogo todas as ideias e vivências sociais das crianças. O fato leva-nos a concluir que as atividades de ensino devem ser planejadas e desenvolvidas considerando as particularidades das crianças, propondo-lhes situações nas quais sejam encorajadas a expor suas ideias, a expressar-se livremente e a buscar alternativas próprias para a resolução de problemas.

# REFERÊNCIAS

Borba, R. E. S. R. e Selva, A. C. V. (2006). Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. In: 29ª reunião anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação- ANPEd. **Anais***:* trabalhos - GT-19 – Educação Matemática. Caxambu - MG.

Brito, M. R. F. (2006). (org). **Solução de problemas e a matemática escolar***.* Campinas, SP: Editora Alínea.

Brito, M. R. F. e Correa, J. (2004). Divisão e representação no processo de solução de problemas aritméticos*.* In Amaro, Fernanda. O. S. T. e Pirola, Nelson. **Pedagogia cidadã***:* cadernos de formação: Educação Matemática*.* São Paulo: UNSEP, Pró-Reitoria de Graduação.

Brito, M. R. F. (2001). **Psicologia da Educação Matemática.** Florianópolis: Insular.

Cavalcanti, Claudia T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In: Smole, K. e Diniz, I. (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Charles, Randall (1988). How do you evaluate problem solving? **Arithmetic teacher**, 35 (8), 49-51.

Chi, M. T. H. e Glaser, R. (1992). A capacidade para a solução de problemas. In: Sternberg, Robert (1992). **As capacidades intelectuais humanas:** uma abordagem em processamento de informações. Porto Alegre: Artes médicas.

Correa, J. (2006). A compreensão intuitiva da criança acerca do conceito de divisão por quotas de quantidades contínuas. In: Brito, Márcia R.F. (2006). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, SP: Editora Alínea.

Correa, J., Nunes, T. e Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: the relationship between division terms in a noncomputational task. **Journal of Educational Psychology**. 90(2), 321-329.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não computacionais. In: **Coletâneas da Anpepp**, nº. 5, 151-165.

Delval, J. (2007). O desenvolvimento da criança e a evolução de seus interesses. In **A escola possível**: democracia, participação e autonomia. Trad. Carmen Campoy Scriptori. Campinas – SP: Mercado de Letras. p.81-108.

Ferreira, S. P. e Lautert, S. L. (2003). A tomada de consciência analisada a partir do conceito de divisão: um estudo de caso. **Psicologia: reflexão e crítica**, 16(3), 547-554.

Fini, L. D. (2001). Aritmética no ensino fundamental: análise psicopedagógica. In Sisto, F. et al. (2001). **Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico**. Petrópolis, RJ: Vozes.

Fischbein, E. et al. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education** 1985, 16 (1), 3-17.

Granell, Carmen Gómez (1983). Procesos cognoscitivos en el aprendizaje de la multiplicación. In: MORENO, Montserrat et al**. La Pedagogía Operatoria**: un enfoque constructivista de la educación. Barcelona: Laia.

Jesus, H. L. e Diniz, M. **O que é preciso saber para fazer uma divisão?** Disponível em:<http://www.mathema.com.br/default.asp?url=http://www.mathema.com.br/reflexoes/divisao.html. Acesso em: 16/01/10

Kamii, C. (2005). **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética** (séries iniciais): implicações da Teoria de Piaget. Trad. Vinicius Figueira. 2 ed. Porto Alegre: Artmed.

Kamii, C. (2002). **Crianças pequenas reinventam a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. Trad. Cristina Monteiro. 2 ed. Porto Alegre: Artmed.

Kamii, C. (1995). **Desvendando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. Campina, SP: Papirus.

Kamii, C. (1990). **A criança e o número:** implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. TRD. Regina Assis. 11 ed. Campinas, SP: Papirus.

Krutetskii, V. A. (1976). **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago Press.

Lautert, S. L. e Spinillo, A. G. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. **Psicologia: Teoria e Pesquisa***.* 187(3), 237-246.

Lautert, S. L. e Spinillo, A. G. (1999). Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia***.* 7(1), 23-36.

Lima, V. S. (2001). **Solução de problemas***:* habilidades matemáticas, flexibilidade de pensamento e criatividade. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – UNICAMP.

Macedo, L., Petty, A. L. S. e Passos, N. C. (1997). **Quatro cores, senha e dominó**: oficina de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica. São Paulo: casa do Psicólogo.

Macedo, L. (1994). **Ensaios construtivistas**. São Paulo: casa do Psicólogo.

Machado, S. D. A. (2003). (org.). **Aprendizagem em matemática***:* registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus.

Mantovani de Assis, O. Z.; Assis, M.; Chiarotino, Z. R. (1996). **Piaget: Teoria e Prática**. Campinas: Tecnicópias Gráfica e Editora Ltda.

Mayer, E. R. (1992). **Thinking, problem solving, cognition.** 2nd ed. New York: W.H. Freeman and Company.

Molinari, A. M. C. (2003). **Estudo da relação entre a representação gráfica da quantidade e o desenvolvimento cognitivo***,* 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Morgado, L. M. A. (1994). O papel da representação mental na resolução de problemas. In **Anais do III Simpósio Internacional de Epistemologia Genética***,* Resumos das Conferências. Águas de Lindóia.

Morgado, L. M. A. (1993). **O ensino da aritmética:** perspectiva construtivista. Coimbra: Livraria Almedina.

Moro, M. L. e Carneiro, M. T. (2005) (orgs.). **Desenhos, Palavras e Números***:* as marcas da matemática na escola, Curitiba, PR: Editora UFPR.

Moura, M. O. de (1992). O jogo e a construção do conhecimento matemático. **Idéias***,* vol. 10. p. 45-53.

Nunes, T. et al (2001). **Introdução à Educação Matemática***:* os números e as operações numéricas. 1ed. São Paulo: Proem.

Nunes, T. et al (2001). As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. In: **Introdução à Educação Matemática***:* os números e as operações numéricas. 1 ed. São Paulo: Proem.

Nunes, T. e Bryant, P. (1997) **Crianças fazendo matemática***.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T. e Bryant, P. (1997). **Learning and teaching mathematics***.* An international perspective. Hove, East Sussex: Psychology Press Ltd.

Olivier, A., Murray, H. and Human, P. (1991). Children's solution strategies for division problems. In Underhill, R.G. Proceedings of the thirteenth annual meeting. **North american chapter of the psychology of mathematics education**, vol.2. VA (Virginia Tech).

Piaget, J. (1998). **Seis estudos de psicologia.** 23 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Piaget, J. (1990). **A formação do símbolo na criança:** imitação, jogo e sonho, imagem e representação. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC.

Piaget, J. (1986). **O possível e o necessário:** evolução dos necessários na criança. Trad. por Bernardina Macha do Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J. (1978). **A representação do mundo na criança**: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Rio de Janeiro: Zahar.

Piaget, J. (1977) **O desenvolvimento do pensamento**: equilibração das estruturas cognitivas. Traduzido do francês por Álvaro de Figueiredo, Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Piaget, J. e Szeminska, A. (1975). **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PIAGET, Jean (1926). **A Representação do Mundo na Criança**, Rio de Janeiro: Record.

Polya, G. (2006). **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Pozo, J. I. (1998). (org.)*.* **A solução de problemas***:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Saiz, I. e Parra, C. et. al. (1996). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas.

Saravali, E. (2005). Intervenção psicopedagógica na construção da noção de multiplicação. **Cadernos de Educação**. Faculdade de Educação da UFPeL

Sastre, G.; Moreno, M. (1980). **Descubrimiento y construccion de conocimentos.** Gedisa – Espanha – Barcelona.

Sastre, G.; Moreno, M. (1976). **Représentations gráphiques de la quantité**. Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris, 30, 346-355.

Selva, Ana C.V. e Borba, Rute, E.S.R. (2005). O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora. **Boletim GEPEM***.* 47, 51-72.

Selva, Ana C. V., Borba, Rute E. S. e Steedman, Lígia H. S. (2004). Explorando a resolução de problemas de divisão com resto por crianças de 2ª e 3ª séries. **VIII**

**Encontro Nacional de Educação Matemática**. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Selva, Ana C.V. (2003). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: Schliemann, Analúcia e Carraher, David (orgs.) (1998). **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. Campinas – SP: Papirus. (Perspectivas em educação matemática).

Selva, Ana C.V. e Brandão, Ana C.P. (2000). A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. 16(3), 241-249.

Silveira, J. F. P. (2001). **Três noções numéricas básicas**: número, numeral e algarismo. Disponível em: <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/pass7a.html. Acesso em: 15 fev.2009.

Sinclair. A. (1990). A notação numérica na criança. In: Sinclair. H. (org.). **A produção de notações na criança**: linguagem, número, ritmos e melodias. São Paulo: Cortez: Autores Associados.

Starepravo, A. R. e Moro, M. L. F.(2005). As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação. In: Moro, M. L. F. e Soares, M. T. C. **Desenhos, palavras e números**: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. da UFPR.

Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: Smole, K. S. e Diniz, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre, Artmed Editora.

Taxa, F. O. (1996). **Solução de problemas verbais aritméticos nas primeiras séries do 1º grau.** Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação - UNICAMP.

Teixeira, L. R. M. (2005). As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: Moro, M. L. F. e Soares, M. T. C. **Desenhos, palavras e números**: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. da UFPR.

Toledo, M. e Toledo, M. (1997). **Didática da matemática:** como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of mathematical behavior**, 17, (2), 167-181.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. e Bryant, P. **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. Psychology Press Ltd., Publishers.

Vergnaud, G. (1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. In: **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, nº 4, p. 6-19.

Vergnaud, G. (1988). Estruturas multiplicativas. Texto traduzido originalmente de Hiebert, H. & Behr, M. **Research Agenda in Mathematics Education**. Number concepts and operations in diddle grades. Laurence Erbium Ed., p. 141-161. (mimeo).

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In Lesh, R. e Landau, M. **Acquisition of mathematics concepts and process**. New York: Academic Press. Inc.

Zunino, D. L. **A matemática na escola:** aqui e agora. 2 ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

# ANEXO I

## Parecer de aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa

UNICAMP

FACULDADE DE CIÊNCIAS MÉDICAS
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

www.fcm.unicamp.br/pesquisa/etica/index.html

CEP, 23/06/09.
(Grupo III)

**PARECER CEP:** N° 584/2009 (Este n° deve ser citado nas correspondências referente a este projeto)
**CAAE:** 2371.0.000.146-09

## I - IDENTIFICAÇÃO:

PROJETO: **"UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO MENTAL E A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DURANTE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE DIVISÃO".**
PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Adriana Maria Corder Molinari
INSTITUIÇÃO: Cooperativa Educacional de Piracicaba
APRESENTAÇÃO AO CEP: 18/06/2009
**APRESENTAR RELATÓRIO EM: 23/06/10** (O formulário encontra-se no *site* acima)

## II - OBJETIVOS

Verificar como estudantes de quarto e quinto anos do ensino fundamental representam mental e graficamente a solução de problemas de divisão por cotas e se há relação entre os dois tipos de representações.

## III - SUMÁRIO

O estudo será desenvolvido em 2 etapas. Serão escolhidas 4 classes, sendo 2 de escola pública e 2 de escola privada. Em sala de aula, serão aplicados 3 problemas de divisão por cotas para solução individual. Na segunda etapa, fora da sala de aula e com um estudante por vez, serão devolvidos os problemas resolvidos na etapa 1, juntamente com 1 folha em branco para registro de como pensaram na solução do problema. Na sequência serão distribuidos 3 novos problemas. Serão selecionados 12 estudantes.

## IV - COMENTÁRIOS DOS RELATORES

Projeto redigido de maneira adequada, com metodologia bem descrita. Recrutamento adequado de estudantes, com autorização dos pais. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido está adequado. Tem autorização da Cooperativa educacional de Piracicaba e do E.M. Prof. Santo Granúzio.

## V - PARECER DO CEP

O Comitê de Ética em Pesquisa da Faculdade de Ciências Médicas da UNICAMP, após acatar os pareceres dos membros-relatores previamente designados para o presente caso e atendendo todos os dispositivos das Resoluções 196/96 e complementares, resolve aprovar sem restrições o Protocolo de Pesquisa, o Termo do Consentimento Livre e Esclarecido, bem como todos os anexos incluídos na pesquisa supracitada.

O conteúdo e as conclusões aqui apresentados são de responsabilidade exclusiva do CEP/FCM/UNICAMP e não representam a opinião da Universidade Estadual de Campinas nem a comprometem.

## VI - INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES

O sujeito da pesquisa tem a liberdade de recusar-se a participar ou de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma e sem prejuízo ao seu cuidado (Res. CNS 196/96 – Item IV.1.f) e deve receber uma cópia do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, na íntegra, por ele assinado (Item IV.2.d).

Pesquisador deve desenvolver a pesquisa conforme delineada no protocolo aprovado e descontinuar o estudo somente após análise das razões da descontinuidade pelo CEP que o aprovou (Res. CNS Item III.1.z), exceto quando perceber risco ou dano não previsto ao sujeito participante ou quando constatar a superioridade do regime oferecido a um dos grupos de pesquisa (Item V.3.).

O CEP deve ser informado de todos os efeitos adversos ou fatos relevantes que alterem o curso normal do estudo (Res. CNS Item V.4.). É papel do pesquisador assegurar medidas imediatas adequadas frente a evento adverso grave ocorrido (mesmo que tenha sido em outro centro) e enviar notificação ao CEP e à Agência Nacional de Vigilância Sanitária – ANVISA – junto com seu posicionamento.

Eventuais modificações ou emendas ao protocolo devem ser apresentadas ao CEP de forma clara e sucinta, identificando a parte do protocolo a ser modificada e suas justificativas. Em caso de projeto do Grupo I ou II apresentados anteriormente à ANVISA, o pesquisador ou patrocinador deve enviá-las também à mesma junto com o parecer aprovatório do CEP, para serem juntadas ao protocolo inicial (Res. 251/97, Item III.2.e)

Relatórios parciais e final devem ser apresentados ao CEP, de acordo com os prazos estabelecidos na Resolução CNS-MS 196/96.

## III – DATA DA REUNIÃO

Homologado na VI Reunião Ordinária do CEP/FCM, em 23 de junho de 2009.

**Profa. Dra. Carmen Silvia Bertuzzo**
VICE-PRESIDENTE do COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
FCM / UNICAMP

# ANEXO II

# Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNICAMP

Piracicaba, 07 de outubro de 2009.

Prezado(a) Senhor(a),

Responsável pelo(a) aluno(a)______________________________________________.

Venho por meio desta solicitar sua autorização para realizar algumas atividades com seu filho(a), a fim de coletar dados para minha pesquisa de doutorado em Educação.

Sou aluna do programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação da Unicamp e o tema dessa pesquisa é: *Estudo da Relação entre Representação Mental e Solução de Problemas Aritméticos.* O objetivo do estudo **é verificar como as crianças representam mental e graficamente operações aritméticas durante o procedimento de solução de problemas.**

O trabalho será desenvolvido em duas sessões, da seguinte forma: na 1ª sessão faremos uma simulação de compra e venda de objetos e, na 2ª sessão, solicitarei às crianças que resolvam 3 problemas aritméticos me explicando como "pensaram" a solução dos mesmos. Enquanto as crianças resolvem os problemas, farei algumas perguntas, tais como: "como você fez para resolver o problema?", "como você pensou este problema?". Os problemas foram adaptados à capacidade de resolução dos alunos.

Nenhuma criança será "testada" e não existem respostas certas ou erradas; serão consideradas as suas respostas espontâneas.

Vale ressaltar que esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Unicamp, pelo Parecer CEP nº 584/2009 e pela diretora da escola, Sra. Claudia Georgini Genaro.

Estas atividades serão realizadas na escola em momentos previamente combinados com a professora de matemática do 4º e do 5º ano, de modo que não prejudique o trabalho dos alunos em sala de aula.

Gostaria de contar com sua colaboração, através do seu consentimento, pois acredito que, os resultados deste trabalho poderão contribuir para estratégias de ensino, especialmente, para os professores de matemática.

Agradeço sua atenção e, se houver consentimento, peço-lhe a gentileza de **assinar e devolver o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido anexo.**

Atenciosamente,

Adriana M. Corder Molinari

Contato: (19) 3424 4190 / dri.molinari@uol.com.br
Comitê de Ética em Pesquisa – Rua Tessália Vieira de Camargo, 126 – Caixa Postal 6111. 13.083-887
Campinas – SP. Fone: (19) 3521 8936 e-mail: cep@fcm.unicamp.br

UNICAMP

## UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
## CAMPINAS - SP

# TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____________________________________________________________, portador da identidade nº _______________, órgão ___________, autorizo meu(minha) filho(a) a participar das atividades propostas pela pesquisadora Adriana Maria Corder Molinari, compreendendo a solução dos problemas propostos por ela, bem como a utilizar as informações fornecidas pelo mesmo(a) na pesquisa científica em desenvolvimento na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, sob orientação da Profª. Drª. Orly Zucatto Mantovani de Assis, utilizando um nome fictício, a fim de resguardar o sigilo necessário. A presente autorização abrangerá os seguintes aspectos:

| **Autorizo** | **Não autorizo** | **Aspecto da Autorização** |
|---|---|---|
| | | Gravação de voz e imagem durante as atividades - somente mãos e papel. |
| | | Gravação de voz e imagem durante as atividades - corpo e papel. |
| | | Veiculação pública de voz para fins científicos. |
| | | Veiculação pública de imagem para fins científicos. |

OBSERVAÇÃO: a gravação e filmagem são necessárias para garantir a autenticidade e para que não haja distorções das respostas das crianças.

Piracicaba, 07 de outubro de 2009.

______________________________________

Assinatura do(a) responsável

# ANEXO III

## 1ª série de problemas

## Resolvidos individualmente na presença do grupo todo

## 4º ANO

**NOME: ______________________________________________________**

**ANO ESCOLAR: _________________**

**DATA: ____/____/____**

1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

## 5º ANO

**NOME:__________________________________________________________**
**ANO ESCOLAR: ___________________**
**DATA: ____/____/____**

1). A bibliotecária da escola precisa guardar 1620 livros em prateleiras com quantidades iguais, mas em cada prateleira só cabem 3 dúzias de livros. De quantas prateleiras ela vai precisar?

2). Na escola vai haver um festival de jogos e os professores precisam formar equipes com 8 alunos cada. Há 432 alunos ao todo na escola, quantas equipes poderão ser formadas?

3). Alguns professores estão organizando uma excursão para o zoológico e eles querem alugar alguns ônibus para levarem os alunos. São 882 alunos ao todo, mas em cada ônibus só cabem 42 pessoas. Quantos ônibus devem ser alugados?

# ANEXO IV

## 2ª série de problemas

## Resolvidos individualmente na presença apenas da pesquisadora

## 4º ANO

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 14 rodinhas e na fábrica há 364 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

## 5º ANO

1) A escola de Lucas arrecadou 3332 peças roupas para as vítimas da enchente em Santa Catarina, que foram distribuídas em um dos bairros. Se cada morador deste bairro recebeu 49 peças de roupas, quantos moradores havia no bairro?

2). Em um parque de diversões havia 1000 pessoas. Para irem embora para suas casas elas precisam pegar ônibus e cada ônibus, tem 40 lugares. Quantos ônibus serão necessários para todas as pessoas poderem ir embora?

3). Para um torneio de jogos, 405 alunos do 3º ano formarão equipes com 9 alunos cada. Quantas equipes serão formadas?

# ANEXO V

## Roteiro da entrevista

**ROTEIRO DE ENTREVISTA (ao final de cada série de problemas)**

**SUJEITO:________________________________**

**DATA: _____________________**

1. O que/como você pensou para resolver este problema?

2. Como você fez para escolher o modo de resolver o problema?

3. É preciso pensar antes de se resolver problemas? Por que?

4. Você pensou antes de resolver este problema?

5. Você conhece outra maneira de se resolver este problema? Poderia me mostrar?

6. A maneira como você colocou no papel é a mesma maneira como você pensou o problema?

7. O que é divisão?

8. Quando você usa/faz divisão?

9. Existe algum jeito de resolver sem ser com lápis e papel?

10. Você acha importante usar lápis e papel para resolver problemas? Por que?

11. Você acha mais fácil dividir com lápis e papel ou com as coisas?

# ANEXO VI

## Prova da multiplicação e divisão aritmética

# Prova - Multiplicação e Divisão Aritmética

(GRANELL, 1983, p.129-147)

**Objetivo:**

Estudar as dificuldades encontradas na construção das noções de multiplicação e divisão e as estratégias que as crianças desenvolvem para superarem estas dificuldades.

**Descrição:**

Sobre uma mesa, o experimentador dispõe objetos mini brinquedos, simulando uma loja.

Cada objeto tem à sua frente um cartão com preço que varia de 1 a 9 reais. Numa caixa ficam várias fichas que correspondem ao dinheiro. O experimentador combina com a criança que cada ficha vale 1 real e que o preço marcado no cartão corresponde ao preço de cada objeto. Em seguida, pede-se à criança que constate o preço dos objetos e lhe é proposto brincar de comprar e vender, sendo ela o comprador e o experimentador, o vendedor.

Há duas situações que são propostas aos sujeitos que envolvem compra e venda.

## 1. Primeira Situação - Multiplicação Aritmética

**Objetivo:**

Por meio desta situação é possível verificar se o sujeito apenas faz antecipações ou se tem a ideia do operador multiplicativo.

**Procedimento:**

O experimentador pede à criança que coloque o dinheiro necessário para comprar um objeto. Em seguida, põe vários objetos do mesmo tipo sobre a mesa e pede a ela que coloque o dinheiro necessário para comprá-los. Importante notar que não se enumera a quantidade de objetos. Repete-se o procedimento variando os objetos e a quantidade dos mesmos.

*Para avaliar* os *níveis de construção da noção de multiplicação, Granell adotou* 4 *(quatro) condutas:*

**Conduta I** - Corresponde às crianças que estabelecem correspondência termo a termo, igualando na resposta final o número de fichas ao número de objetos que poderiam ser comprados.

**Conduta II** - Corresponde às crianças que aumentam em algumas unidades o resultado final devido a uma consideração intuitiva da correspondência múltipla, não se importando com a quantificação exata ainda.

**Conduta III** - Corresponde às crianças que chegam a um resultado correto por procedimentos aditivos mediante adições sucessivas, sem nenhuma antecipação do número de ações a fazer. Para isso correspondem os conjuntos de fichas (preço dos objetos) a cada objeto a ser comprado (correspondendo muitos para cada um a cada elemento sucessivamente), chegando ao resultado final correto por meio de adições sucessivas.

**Conduta IV** - Corresponde às crianças cujos procedimentos mostram antecipação da quantidade de fichas que seriam necessárias, sem nenhuma verificação empírica, alcançando o resultado final mentalmente.

## 2. Segunda Situação - Divisão Aritmética

**Objetivo:** Verificar a construção da compensação necessária entre as variáveis.

**Procedimento:**

O experimentador entrega para a criança uma determinada quantidade de moedas e pergunta-lhe quantos objetos de um determinado tipo podem ser comprados com aquele dinheiro (por exemplo: quantos objetos podem ser comprados com 18 moedas). Se a criança chegar a uma conclusão correta, ser-lhe-á proposto que pense se, com as mesmas moedas poderá comprar algum outro objeto dentre os existentes na loja, de maneira que não lhe sobre ou falte moedas. A criança será avisada que todos os objetos que poderá comprar deverão ser do mesmo tipo.

*Para a Segunda situação a noção da divisão Granell também apresentou 4 condutas:*

**Conduta I** - Corresponde às crianças que afirmam não poder comprar nenhuma outra coisa, ou somente objetos que custam I real, não admitindo a possibilidade de fazer diferentes composições, nem mesmo com conjuntos equivalentes.

**Conduta II** - a criança tenta operar com conjuntos equivalentes, mas ainda não existe uma compensação exata entre o número de conjuntos e o número de elementos de cada conjunto dentro do mesmo todo. Parece haver um inicio de tomada de consciência de que se comprar mais objetos tem que ser mais baratos e vice-versa, sem que se chegue a uma quantificação exata. A criança não percebe a necessidade de coordenação entre as três variáveis: multiplicando, multiplicador e resultado final.

**Conduta III** - a criança não é capaz de fazer antecipações corretas, mas chega a uma solução por meio de tentativas que podem começar desde um tateio assistemático, compreendendo algumas propriedades, até um tateio Sistemático, com todas as possibilidades de distribuição do todo.

**Conduta IV** - Corresponde às crianças que antecipam as possíveis composições do todo com os respectivos conjuntos equivalentes por meio de operações mentais, sem necessariamente se basear em comprovações empíricas.

**Referência Bibliográfica:**

GRANELL, C.G. (1983). Procesos Cognoscitivos en el aprendizaje de la multiplicación. In: MONTSERRAT MORENO y equipo del IMIPAE del Ayuntamiento de Barcelona. **Pedagogía operatoria**, Laia Editorial, p.129-47

## ANEXO VI

# Pontuação obtida pela população de estudantes, de onde se originou a amostra de sujeitos

## Pontuação geral da população de estudantes para compor a amostra de sujeitos

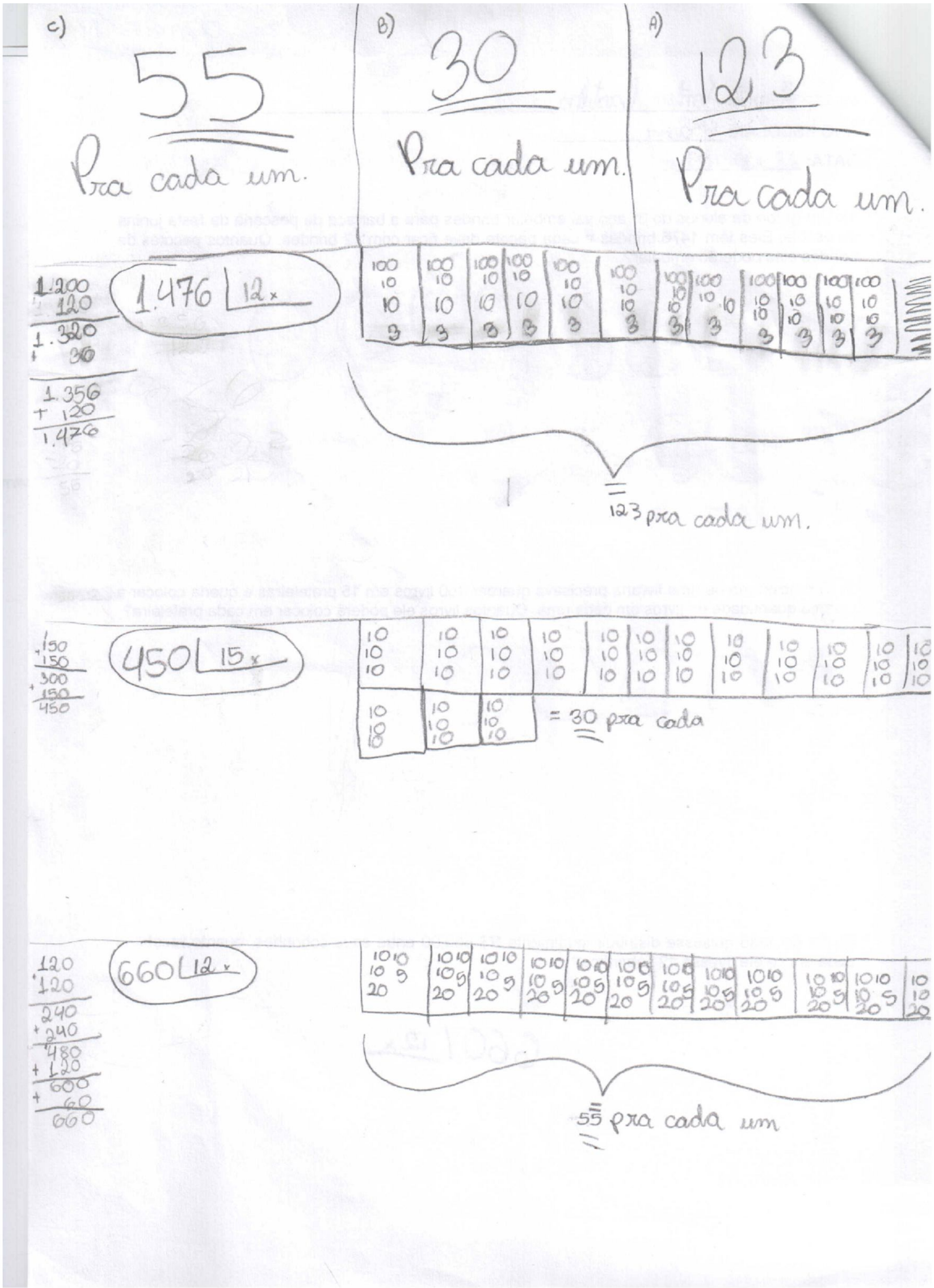
| sujeitos | Pontuação pelo Sistema Convencional | | | Pontuação pelo Sistema Charles | | | Total de pontos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | prob. 1 | prob. 2 | prob. 3 | prob. 1 | prob. 2 | prob. 3 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 4 | 14* |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 4 | 10 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 4 | 4 | 4 | 13* |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 3 | 10 |
| 8 | 1 | 1 | 0 | 5 | 5 | 4 | 16* |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 4 | 14* |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 8 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 4 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 16* |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 9 |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 2 | 5 | 5 | 14* |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 18 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 12 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 22 | 1 | 0 | 1 | 5 | 4 | 5 | 16* |
| 23 | 1 | 0 | 0 | 5 | 4 | 4 | 14 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 26 | 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 4 | 12 |
| 27 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 18* |
| 28 | 1 | 0 | 0 | 5 | 4 | 4 | 14 |
| 29 | 1 | 0 | 1 | 5 | 3 | 5 | 15* |
| 30 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 4 | 9 |
| 31 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 16* |
| 32 | 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 2 | 10 |
| 33 | 1 | 0 | 1 | 5 | 4 | 5 | 16* |
| 34 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 6 |

* - sujeitos selecionados para compor a amostra.

# ANEXO VII

## Representação gráfica dos estudantes nas duas séries de problemas

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 1 - AMA (9,6) - 4º ano



c) 55 Pra cada um.

B) 30 Pra cada um.

A) 123 Pra cada um.

1.200
+ 120
1.320
+ 36
1.356
+ 120
1.476

1.476 ⌊12 x

100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3 | 100 10 10 3

= 123 pra cada um.

150
+ 150
300
+ 150
450

450 ⌊15 x

10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10 | 10 10 10

= 30 pra cada

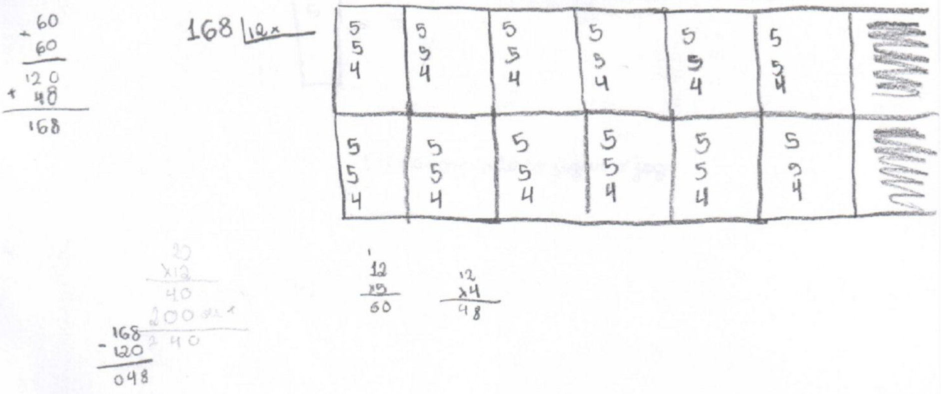
120
+ 120
240
+ 240
480
+ 120
600
+ 60
660

660 ⌊12 x

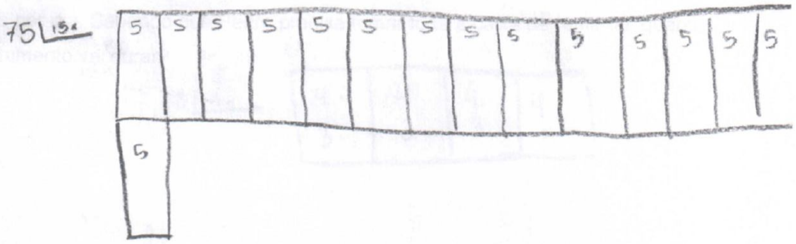
10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 10 5 20 | 10 10 20

= 55 pra cada um

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

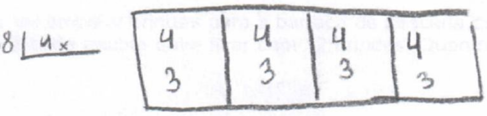


2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?



5 crianças poderão jogar o jogo

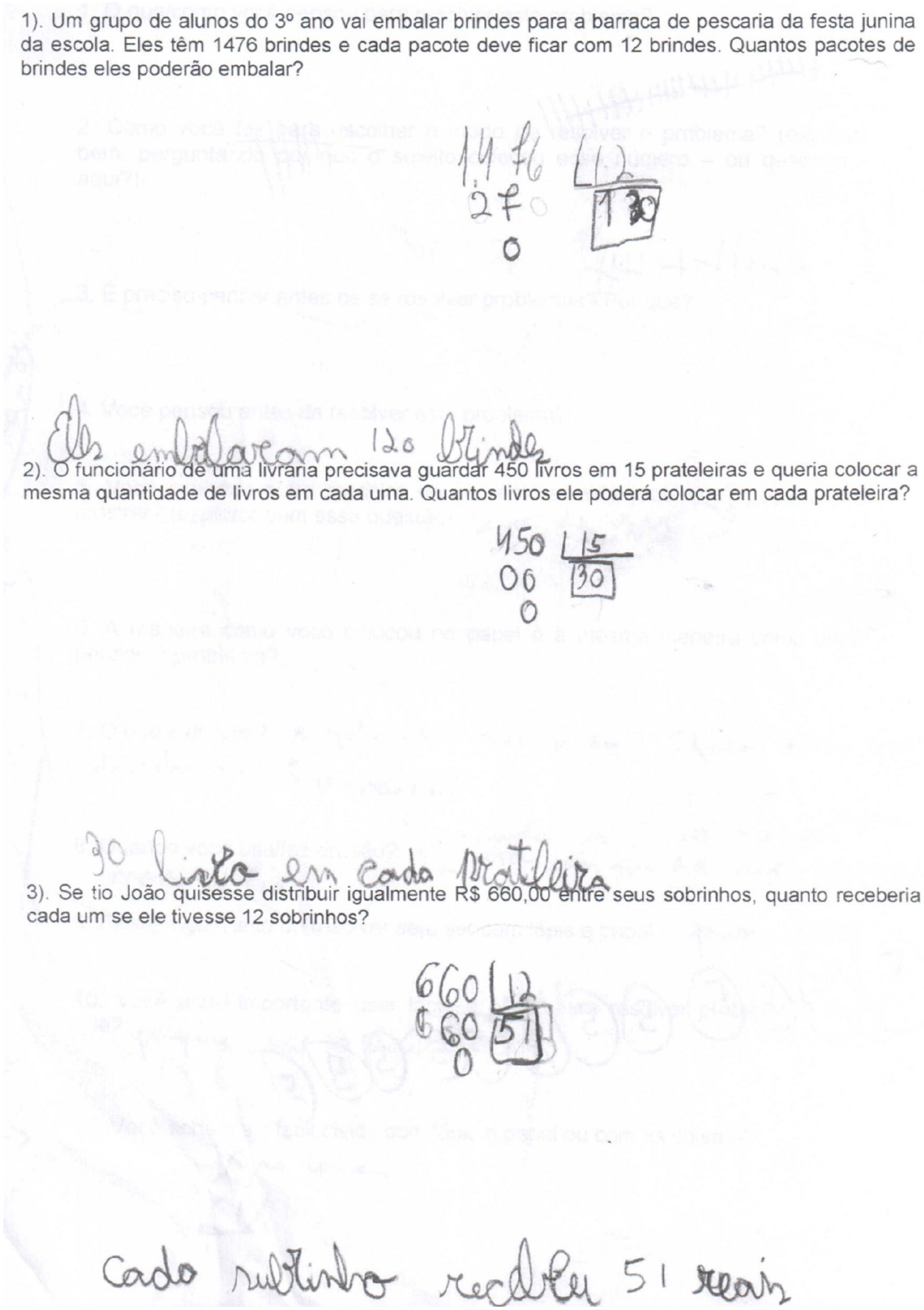
3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?



$$\begin{array}{r} 28 \\ -16 \\ \hline 12 \end{array}$$

O tratamento vai durar 7 dias o uma semana

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 2 - AUG (9,6) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

1476 | 12
27 | $\boxed{130}$
0

Els embalaram 120 Brindes

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

450 | 15
00 | $\boxed{30}$
0

30 livro em cada prateleira

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

660 | 12
660 | $\boxed{51}$
0

Cado sobrinho recebeu 51 reais

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r} 168 \\ -\ 12 \\ \hline 156 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 156 \\ +\ 12 \\ \hline 168 \end{array}$$

2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

$$\begin{array}{r|l} 75 & 15 \\ \cline{2-2} 0 & 14 \end{array}$$

Pode ter 14 pessoas nesse jogo

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar? 32 dias

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 28 \\ \times 4 \\ \hline 32 \end{array}$$

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 3 - FLA (9,6) - 4º ano

1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

1476 12

1476 | 12
276   126
060
0

126 enbalagens

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

450 15

450 | 15
00   3

Ele vai calacar 3 em cada

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

660 | 12
60   55
0

Ele vai dar 55 reais para cada pesoa

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

168 |12
48 14
0

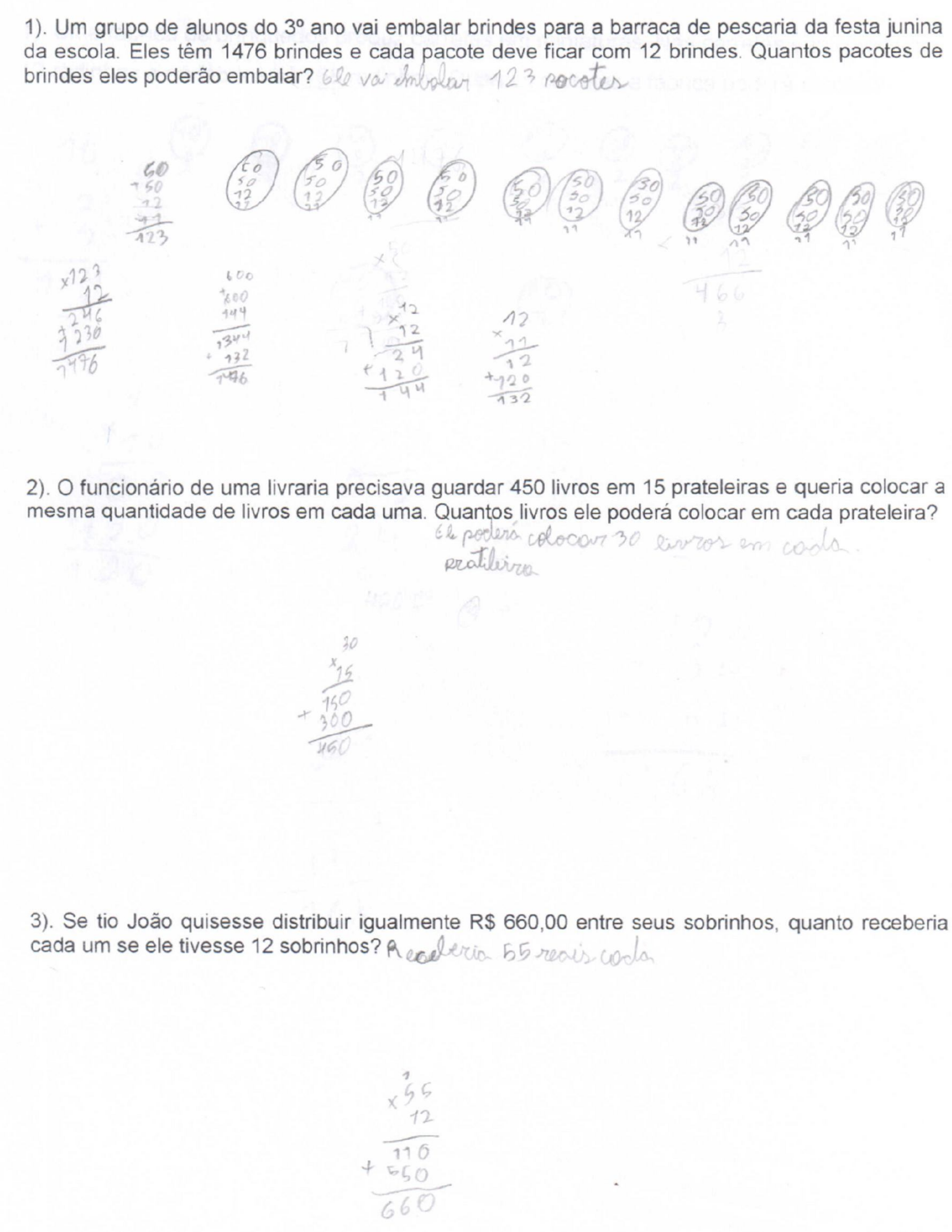
2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

75 |15
0 5

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

28 |4
0 7

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 4 - GUIO (9,10) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar? Ele vai embolar 123 pacotes

60
+50
12
11
123

×123
12
246
+1230
1476

600
+600
144
1344
+132
1476

×12
12
24
+120
144

×12
11
12
+120
132

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira? Ele poderá colocar 30 livros em cada pratileira

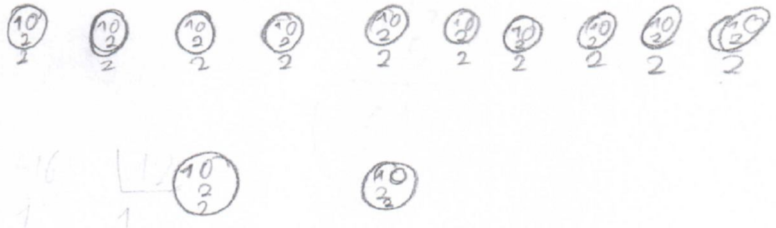
30
×15
150
+300
450

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos? Receberia 55 reais cada

×55
12
110
+550
660

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r} 10\\ +\ 2\\ +\ 2\\ \hline 14\end{array}$$



$$\begin{array}{r} 12\\ \times 10\\ \hline 00\\ +120\\ \hline 120\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\\ \times\ 2\\ \hline 24\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\\ \times\ 2\\ \hline 24\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120\\ +\ 24\\ +\ 24\\ \hline 168\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14\\ \times 12\\ \hline 28\\ +\ 140\\ \hline 168\end{array}$$

2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo? 5 crianças.

$$\begin{array}{r} {}^{2}\\ \times 15 \\ 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

Prova Real

$$\begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ \hline -75 & 15^{x} \\ \hline 00 & \end{array}$$

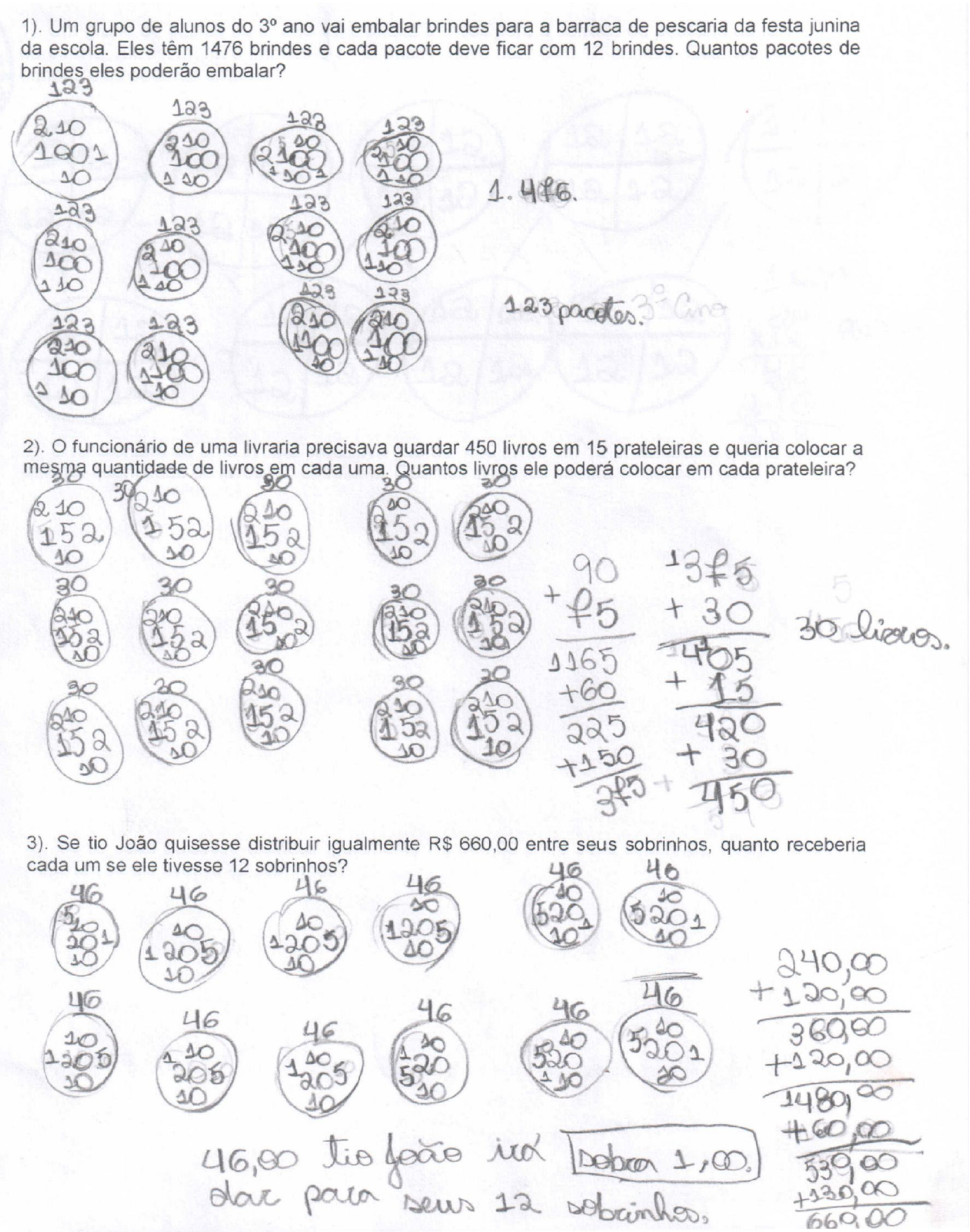
3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar? 7 dias

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

Prova Real

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4_{x} \\ \hline -28 & 7 \\ \hline 00 & \end{array}$$

# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 5 - LAUB (9,10) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

1.476.

123 pacotes. 3º ano

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

90
+75
165
+60
225
+150
375

375
+30
405
+15
420
+30
450

30 livros.

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

240,00
+120,00
360,00
+120,00
480,00
+60,00
539,00
+120,00
660,00

46,00 tio João irá dar para seus 12 sobrinhos. Sobra 1,00.

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

100 = 50 + 50

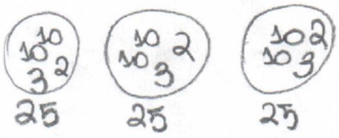
60 = 30 + 30

8 = 4 + 4

R: 42 carretas a fábrica pode montar.

90
+45
135
+18
153
+19
162
+ 9
181

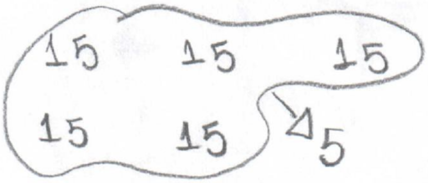
2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?



75 = 38 + 37

30
+30
60
+9
69
+6
75

R: 25 crianças partici-param do jogo.

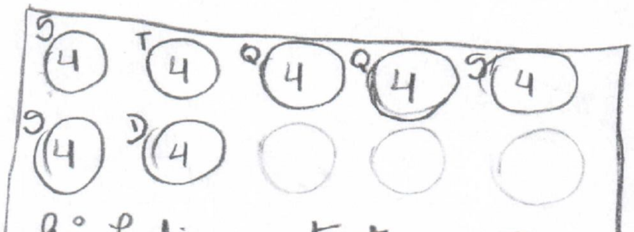


¹15
×3
45
+15
15
75

R: 5 crianças participaram do jogo.

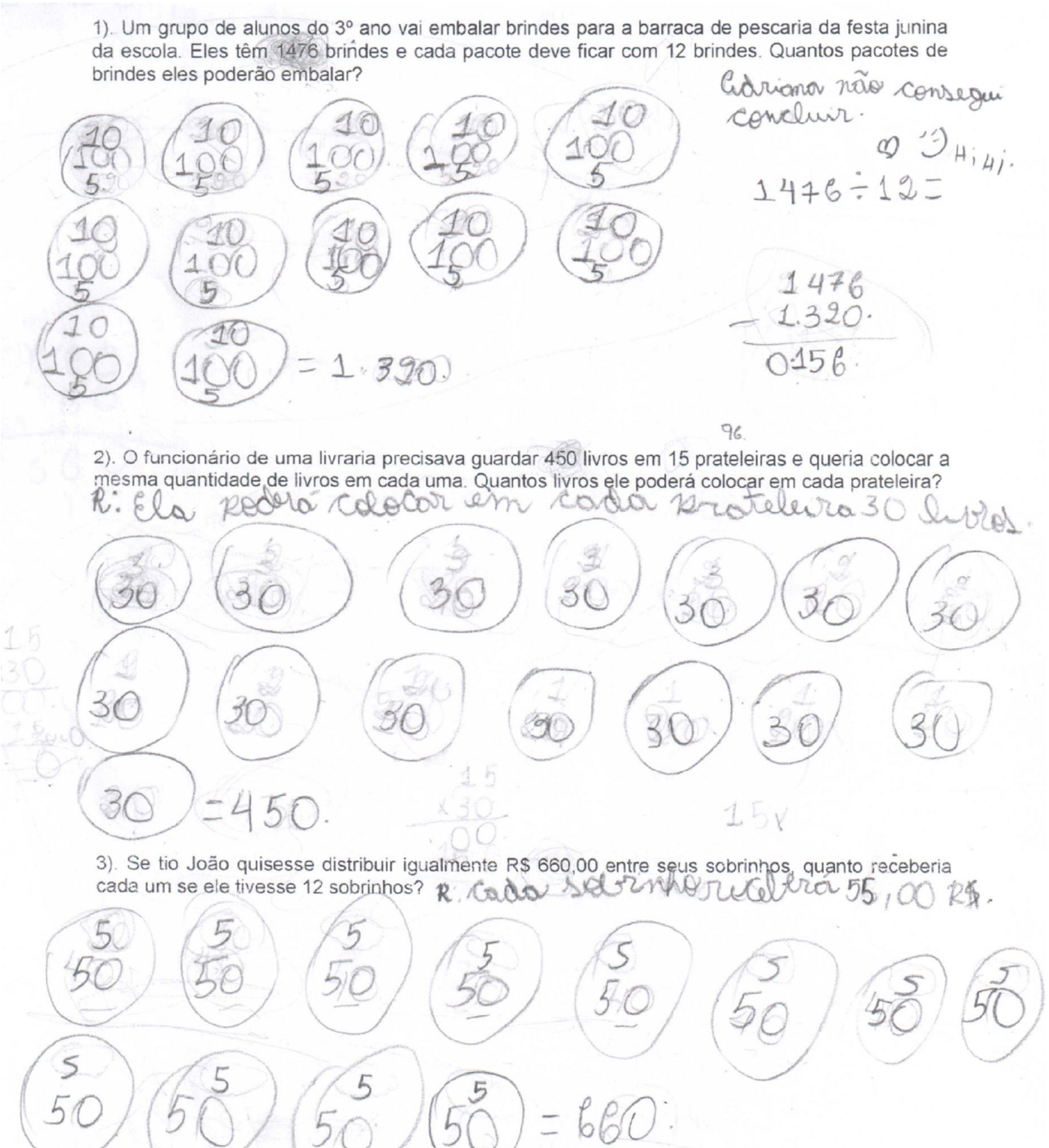
3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

28



R: 7 dias o tratamento vai durar.

# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 6 - LAUR (9,7) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

Adriana não consegui concluir.

Hi, hi.

1476 ÷ 12 =

= 1.320

$$\begin{array}{r} 1476 \\ -\ 1.320 \\ \hline 0156 \end{array}$$

96.

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

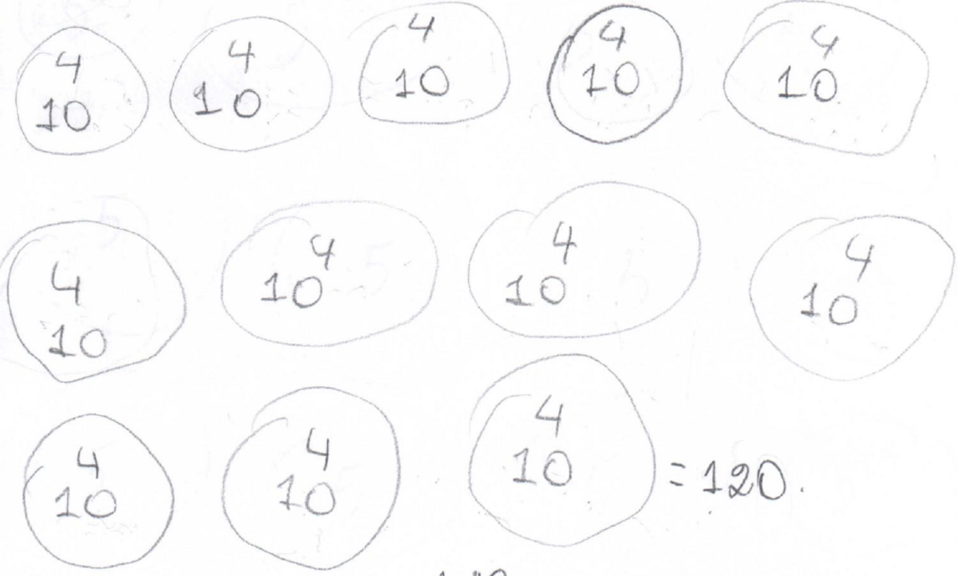
R: Ela podrá colocar em cada prateleira 30 livros.

= 450.

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos? R. Cada sobrinho recebrá 55,00 R$.

= 660.

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?



148

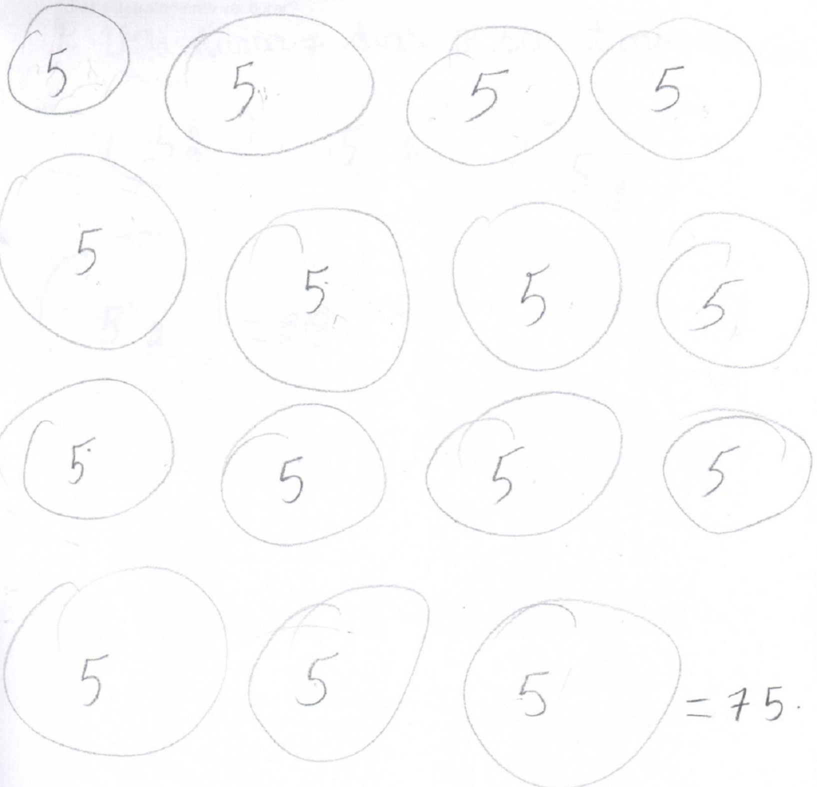
R: Poderá montar 14 carretas.

$$\begin{array}{r} 168 \\ -\ 20 \\ \hline \boxed{1}48. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ +\ 120 \\ \hline 268. \end{array}$$

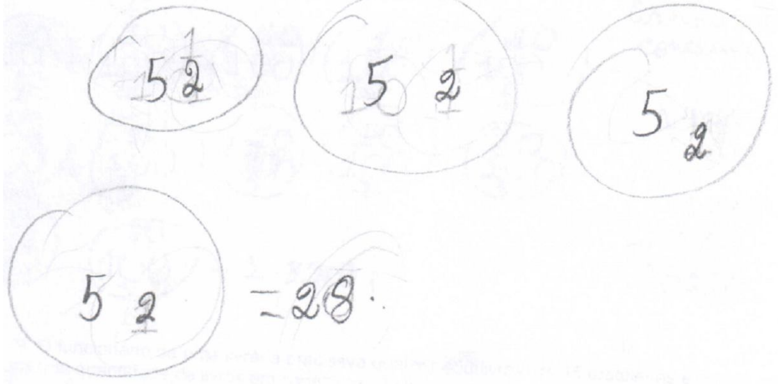
2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

R: 5 Crianças poderam Jogar este jogo.

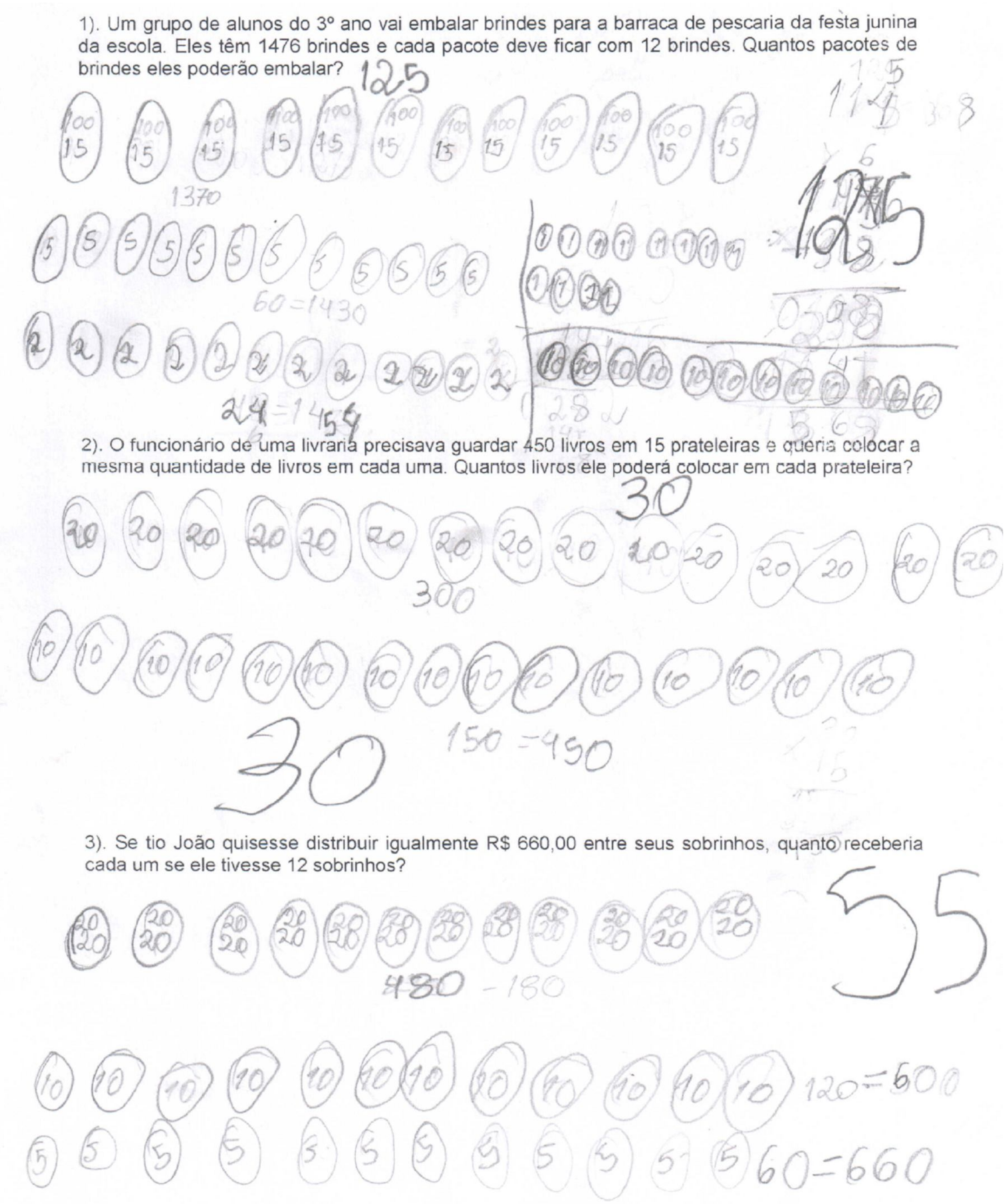


3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

R: Vai durar 7 dias o seu tratamento.



# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 7 - LUA (9,7) - 4º ano



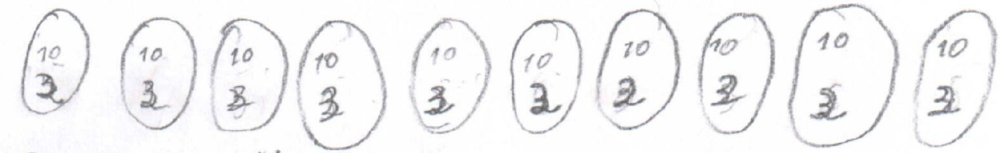
1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar? 125

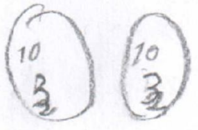
2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira? 30

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

55

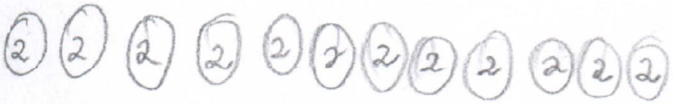
1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?





142

$$\begin{array}{r} 168 \\ -\,142 \\ \hline 026 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142 \\ +\,24 \\ \hline 166 \end{array}$$



14 carretas e sobram 2 rodinhas

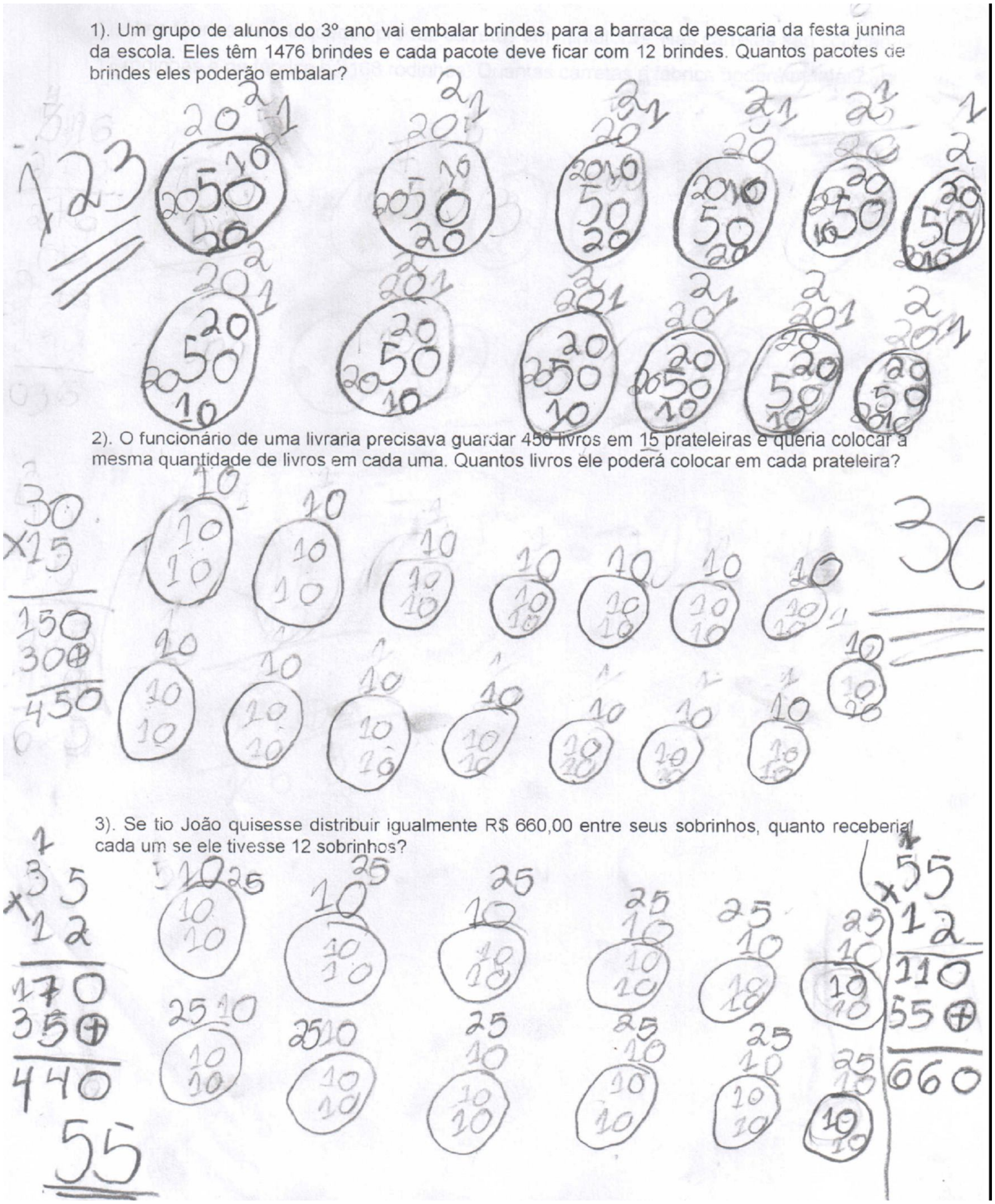
2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

5 crianças

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

7 dias

# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 8 - MAT (9,10) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

123

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

30
×15
150
300+
450

30

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

35
×12
170
350+
440

55

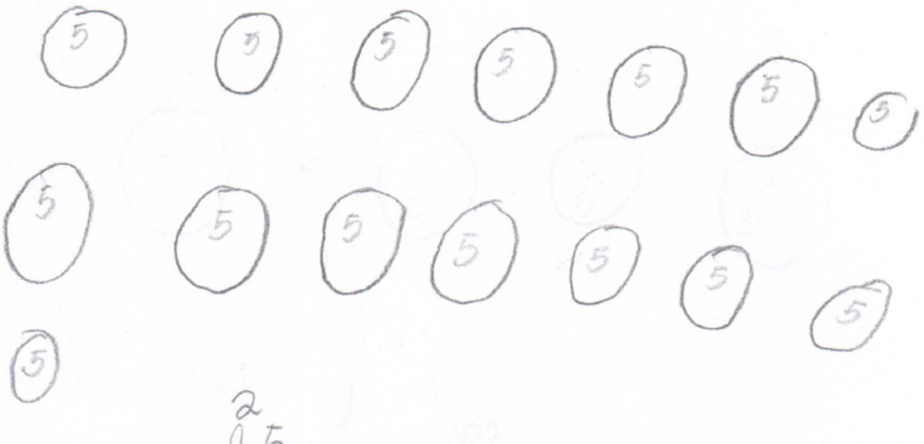
55
×12
110
550+
660

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

14

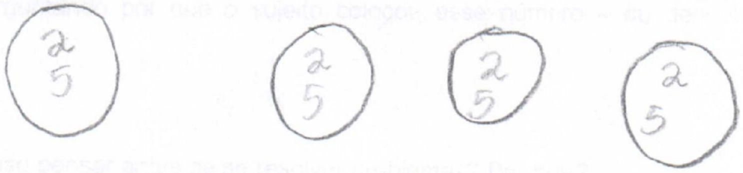
x14
12
28
14+
168

2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?



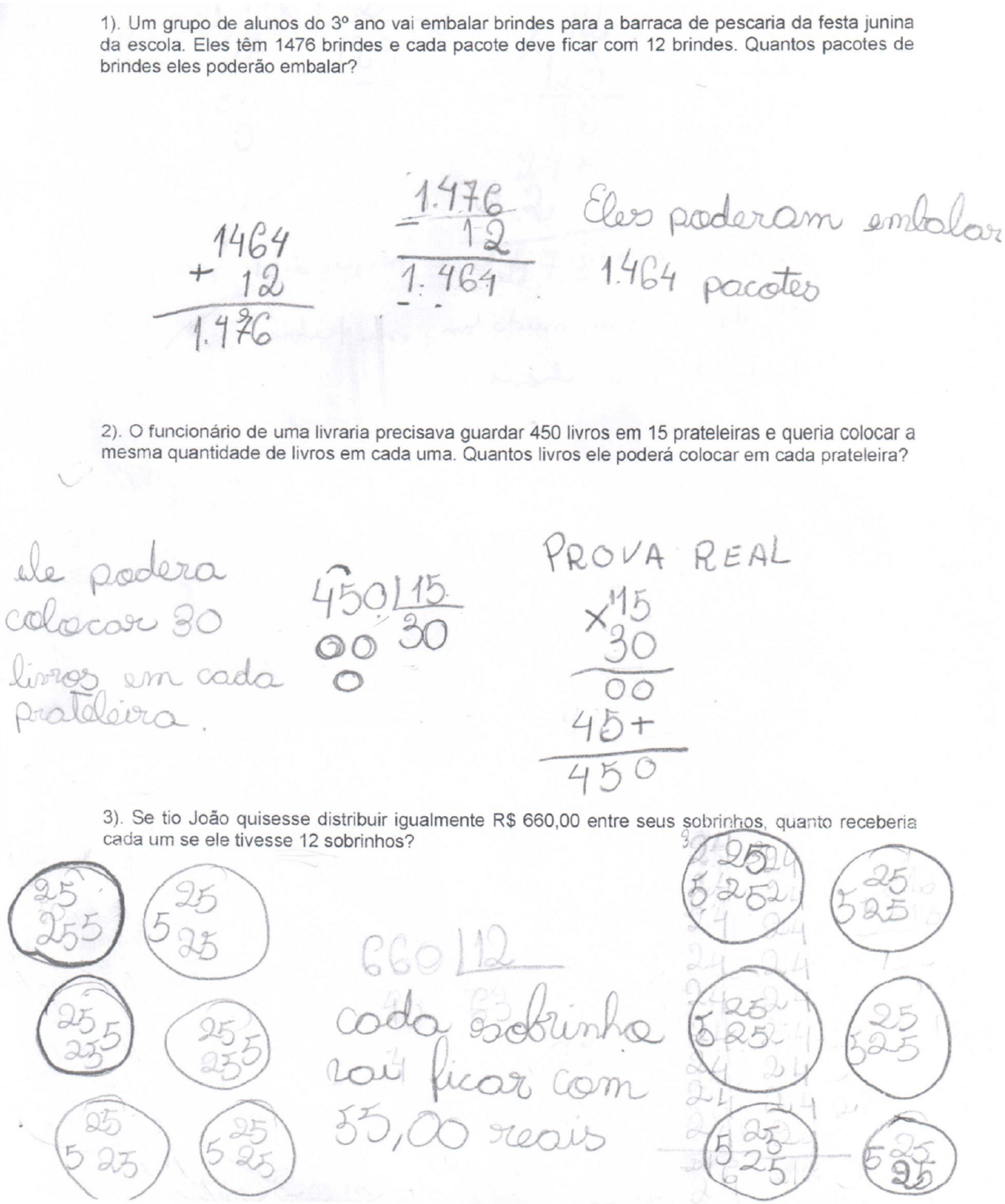
2
15
x5
75

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?



7 dias

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 9 - TAI (10,3) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

$$\begin{array}{r} 1464 \\ +\ 12 \\ \hline 1.476 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.476 \\ -\ 12 \\ \hline 1.464 \end{array}$$

Eles poderam embalar 1.464 pacotes

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

ele podera colocar 30 livros em cada prateleira.

$$\begin{array}{r|l} 450 & 15 \\ \cline{2-2} 00 & 30 \\ 0 & \end{array}$$

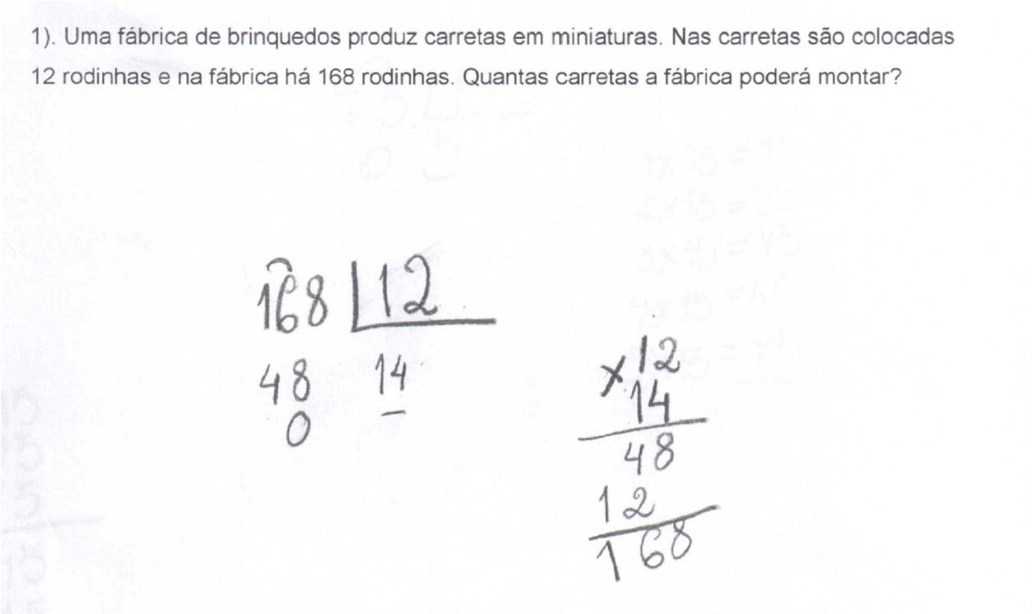
PROVA REAL

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 30 \\ \hline 00 \\ 45+ \\ \hline 450 \end{array}$$

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

$$\begin{array}{r|l} 660 & 12 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

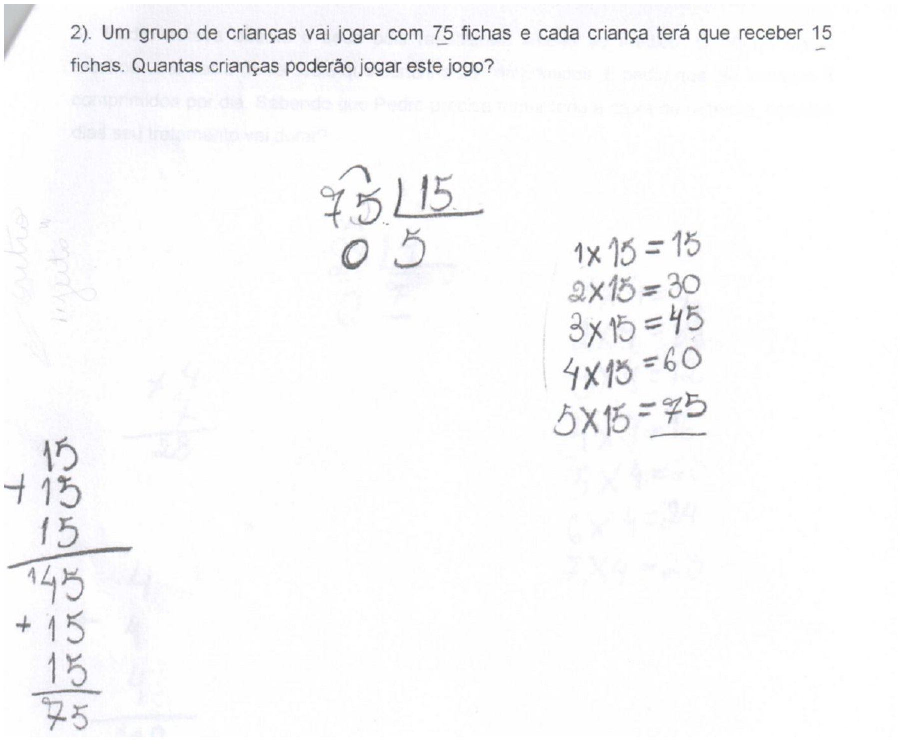
cada sobrinho vai ficar com 55,00 reais



1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r|l} 168 & 12 \\ \hline 48 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 14 \\ \hline 48 \\ 12\phantom{0} \\ \hline 168 \end{array}$$



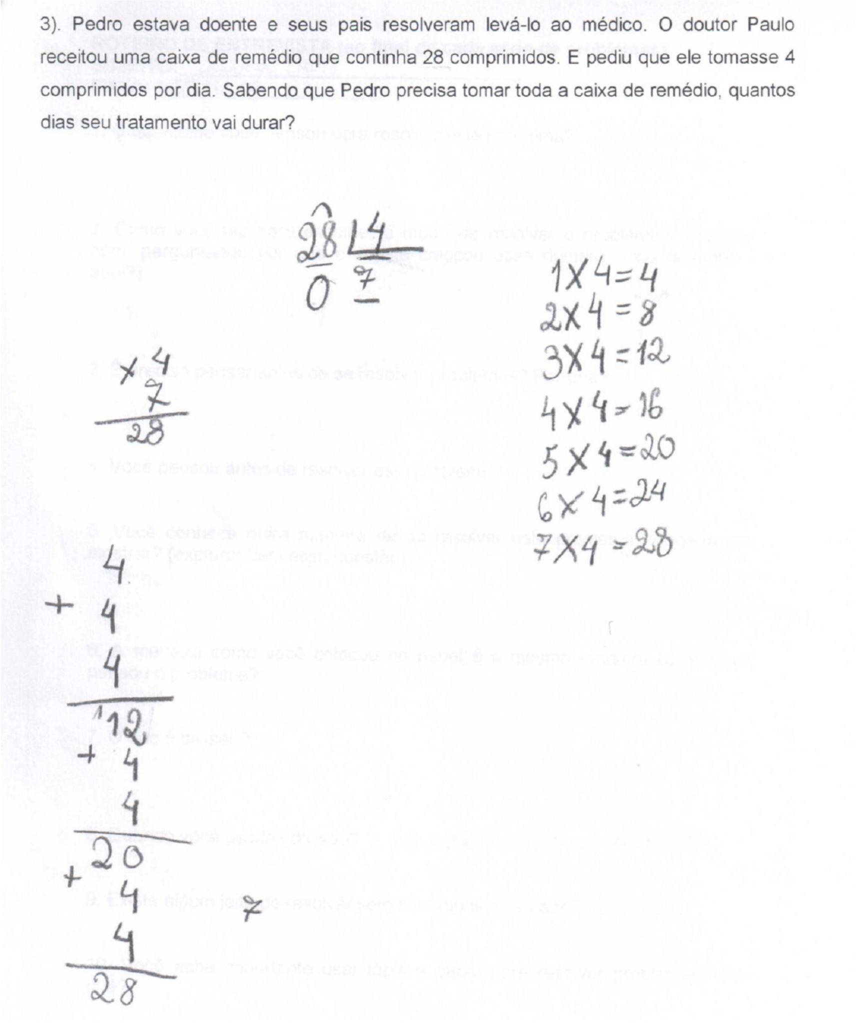
2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

outro jeito

$$\begin{array}{r|l} 75 & 15 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

1x15 = 15
2x15 = 30
3x15 = 45
4x15 = 60
5x15 = 75

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 15 \\ 15 \\ \hline {}^{1}45 \\ +\ 15 \\ 15 \\ \hline 75 \end{array}$$



3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

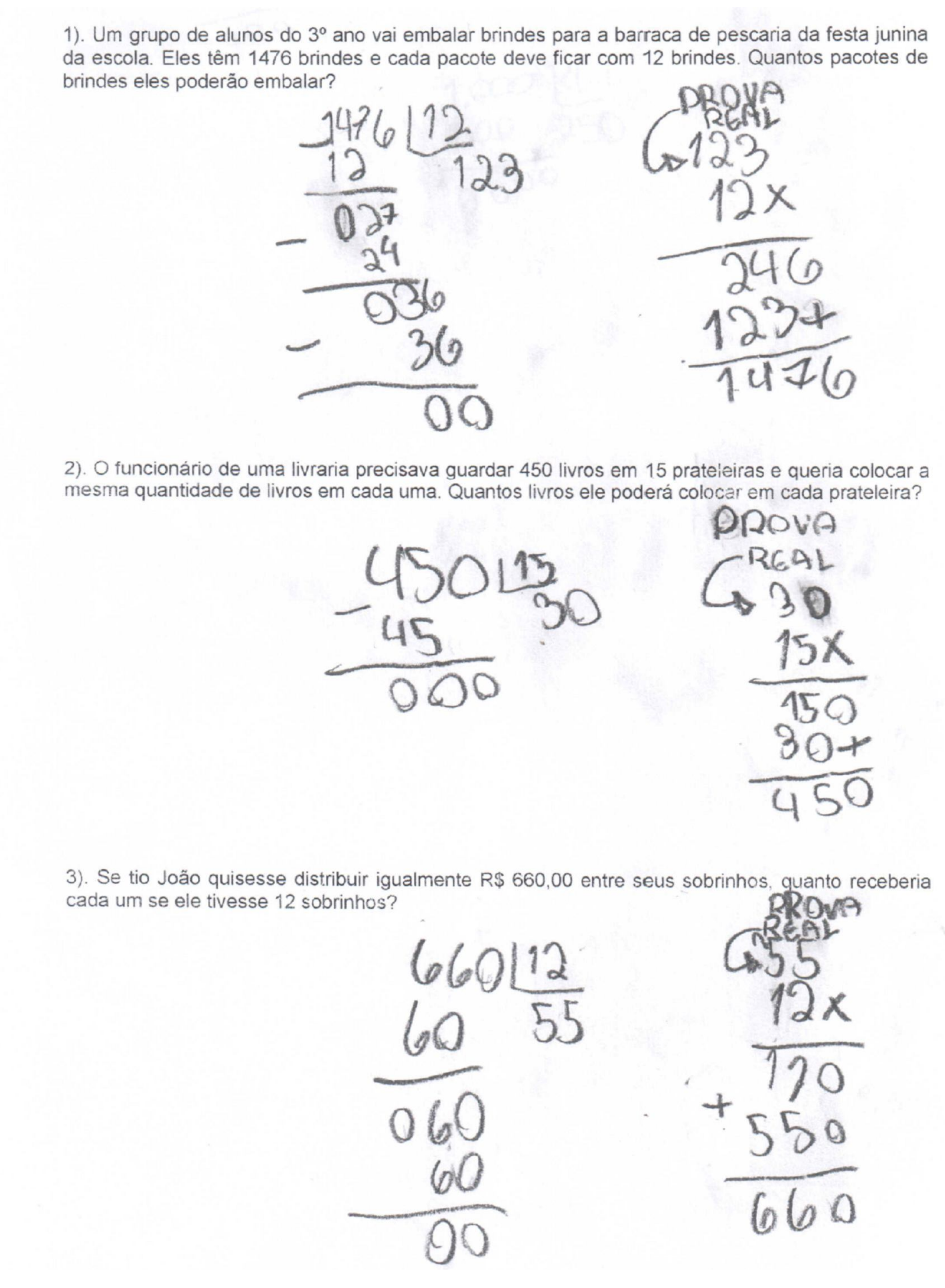
$$\begin{array}{r} \times\ 4 \\ 7 \\ \hline 28 \end{array}$$

1X4=4
2X4=8
3X4=12
4X4=16
5X4=20
6X4=24
7X4=28

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 4 \\ 4 \\ \hline {}^{1}12 \\ +\ 4 \\ 4 \\ \hline 20 \\ +\ 4 \\ 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

7

# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 10 - THI (9,11) - 4º ano



1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

-1476 |12
12 123
027
- 24
036
- 36
00

PROVA REAL
123
12x
246
123+
1476

2). O funcionário de uma livraria precisava guardar 450 livros em 15 prateleiras e queria colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ele poderá colocar em cada prateleira?

450 |15
-45 30
000

PROVA REAL
30
15x
150
30+
450

3). Se tio João quisesse distribuir igualmente R$ 660,00 entre seus sobrinhos, quanto receberia cada um se ele tivesse 12 sobrinhos?

660 |12
60 55
060
60
00

PROVA REAL
55
12x
110
+ 550
660

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r|l} 168 & 12 \\ \hline 12 & 14 \\ \hline 048 & \\ 48 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

14

2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

$$\begin{array}{r|l} 75 & 15 \\ \hline -75 & 5 \leftarrow 1 \\ \hline 00 & \end{array}$$

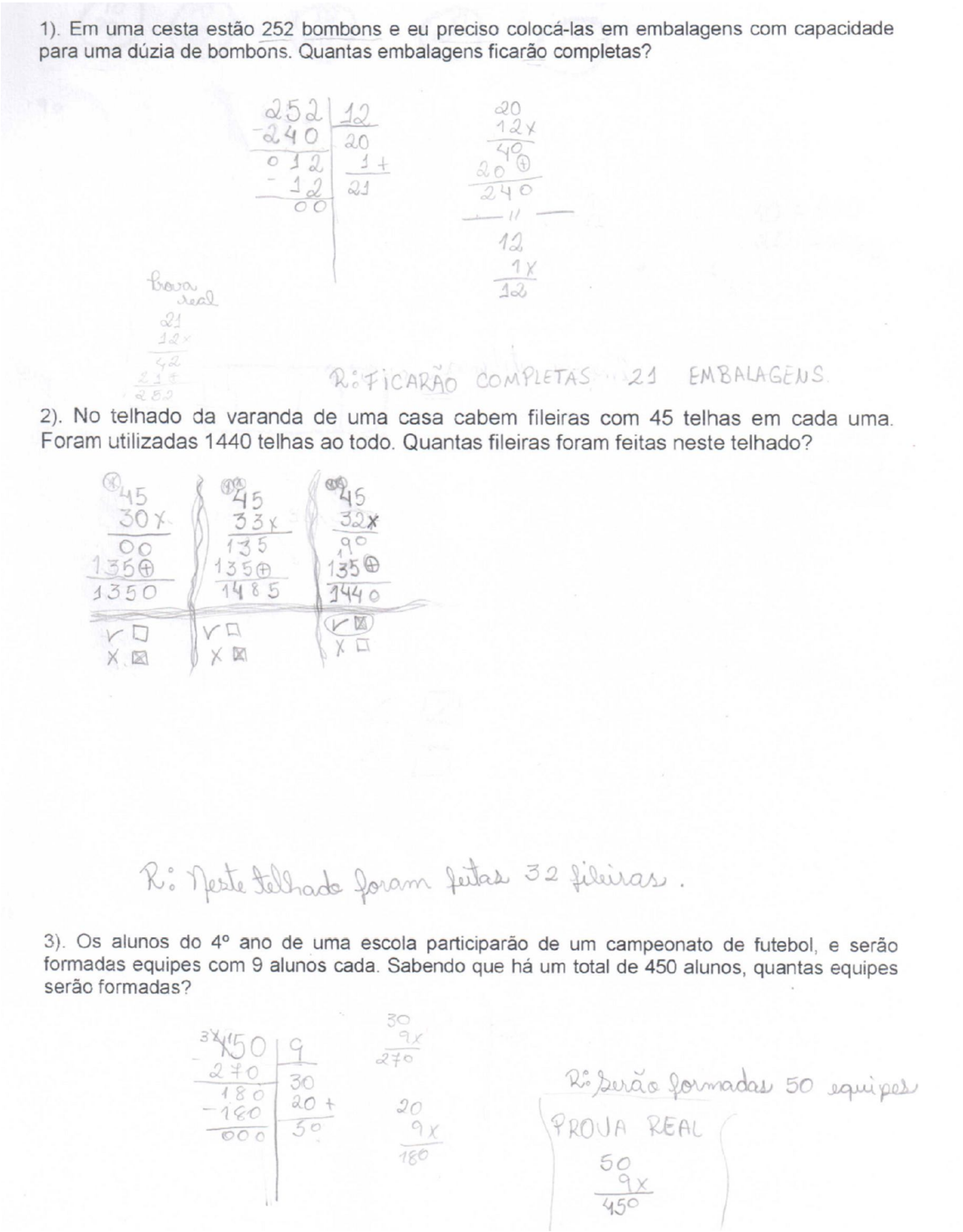
$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 15 \\ 5\times \\ \hline 75 \end{array}$$

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ -28 & \underline{\underline{7}} \leftarrow \\ \hline 00 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 7\times \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 11 - BEA (10,6) - 5º ano



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

```
 252 | 12
-240 |----
 012 | 20
- 12 |  1+
  00 | 21
```

20
12x
40
20 +
240

12
1x
12

Prova real

21
12x
42
21+
252

R: FICARÃO COMPLETAS 21 EMBALAGENS

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

| | | |
|---|---|---|
| 45<br>30x<br>00<br>135+<br>1350 | 45<br>33x<br>135<br>135+<br>1485 | 45<br>32x<br>90<br>135+<br>1440 |
| ✓ ☐<br>X ☒ | ✓ ☐<br>X ☒ | ✓ ☒<br>X ☐ |

R: Neste telhado foram feitas 32 fileiras.

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

```
 450 | 9
-270 |----
 180 | 30
-180 | 20 +
 000 | 50
```

30
9x
270

20
9x
180

R: Serão formadas 50 equipes

PROVA REAL

50
9x
450

1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

12 = 1 dúzia
12 = " "
+12 = " "
36

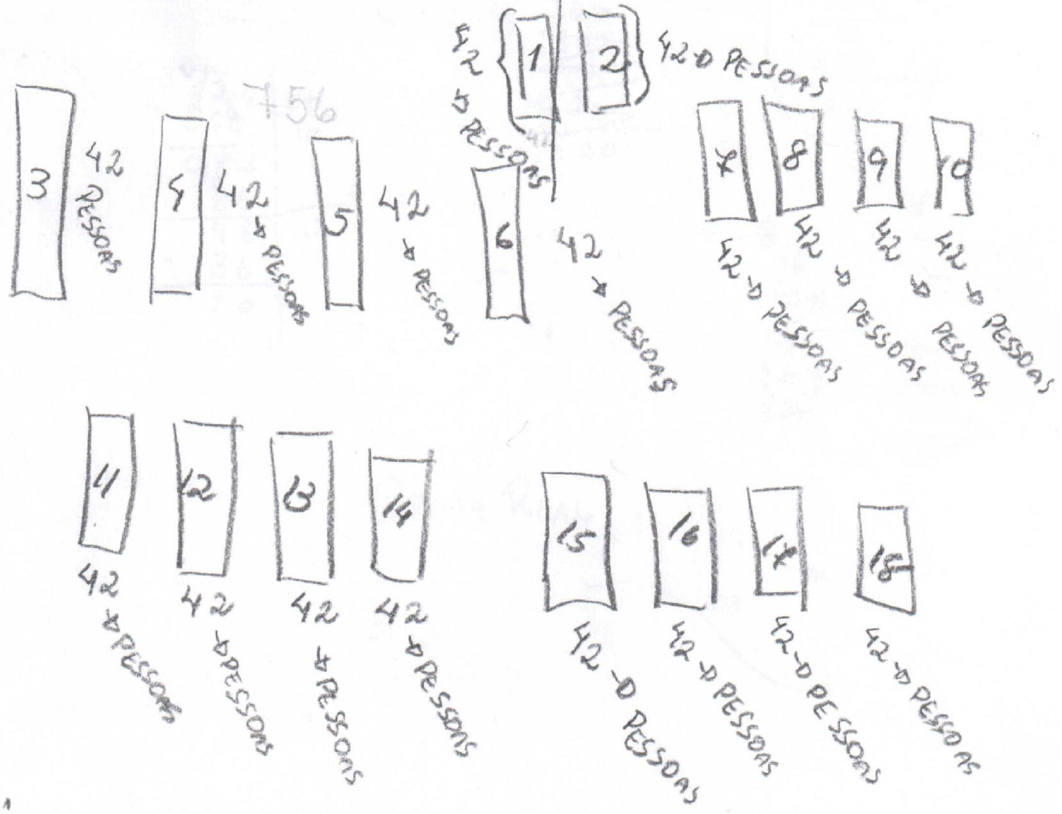
$$\begin{array}{r} ② \\ 36 \\ 4\times \\ \hline 144 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ 10\times \\ \hline 00 \\ 36+ \\ \hline 360 \end{array} \quad \begin{array}{r} ① \\ 36 \\ 13\times \\ \hline 108 \\ 36+ \\ \hline 468 \end{array} \quad \begin{array}{r} ② \\ 36 \\ 15\times \\ \hline 180 \\ 36+ \\ \hline 540 \end{array}$$

++++++

+++

R: Ela vai precisar de 15 caixas

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?



42
42
42
42+
168

~~126~~
~~126+~~
~~252~~
~~126+~~
~~377~~

R: Devem ser alugados 18 ônibus.

1
672
84+
756

2 2
168
168
168+
504

42
42+
84 PESSOAS

3 4
168
168
168 ) 16
168+
~~168~~ 16
840

12
12+
24

1
16
16+
32
8+
40

2 3
168
168
168
168
672

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

432 | 36
\- 360 | 10
0482 | 1
\- 36 | 1 +
46 | 12
\- 36
10

~~36~~
~~30x~~
~~00~~
~~1020~~
~~1020~~

36
10x
00
36+
360

~~36~~
~~45x~~
~~180~~
~~36+~~
~~3240~~

~~36~~
~~5x~~
~~180~~

~~36~~
~~3x~~
~~102~~

PROVA REAL

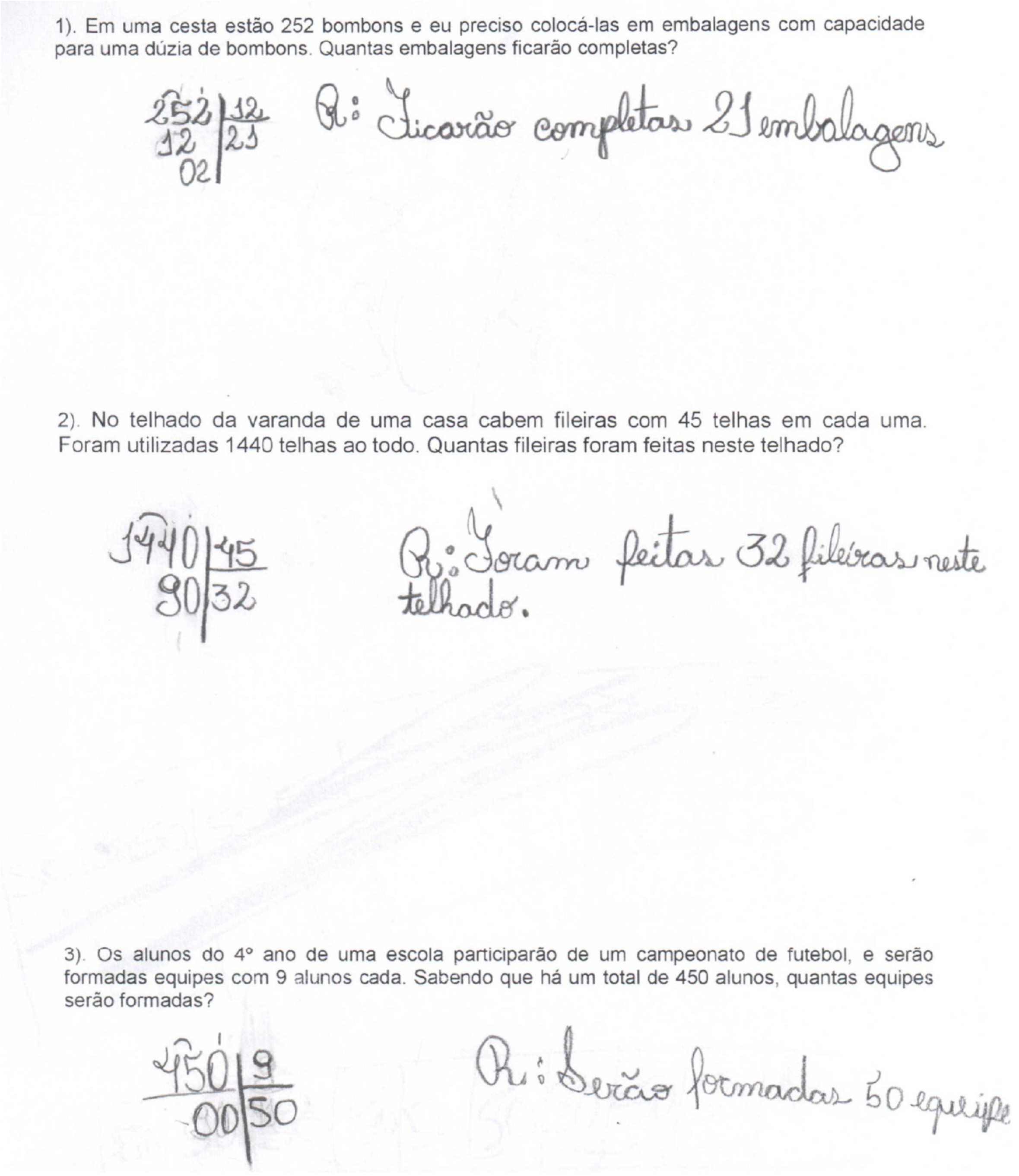
1
36
12x
52
10+
62

36
12x
72
360+
432

R: ELE VAI PRECISAR DE 12 CAIXAS

36
12x
72
360+
432
10+
442

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 12 - BIA (11,2) - 5º ano



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

252 | 12
12 | 21
02

R: Ficarão completas 21 embalagens

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

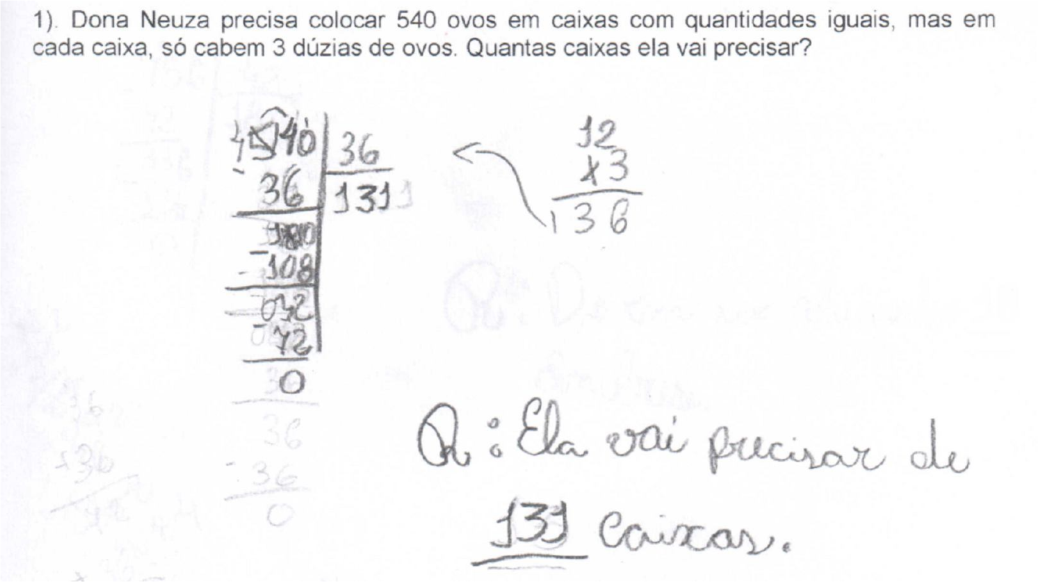
1440 | 45
90 | 32

R: Foram feitas 32 fileiras neste telhado.

3). Os alunos do 4° ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

450 | 9
00 | 50

R: Serão formadas 50 equipe



1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

R: Ela vai precisar de 131 caixas.

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

$$\begin{array}{r|l} 756 & 42 \\ \hline -42 & 18 \\ \hline 336 & \\ -336 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

R: Devem ser alugados 18 ônibus.

42
+42
84
+84
168
+168
336

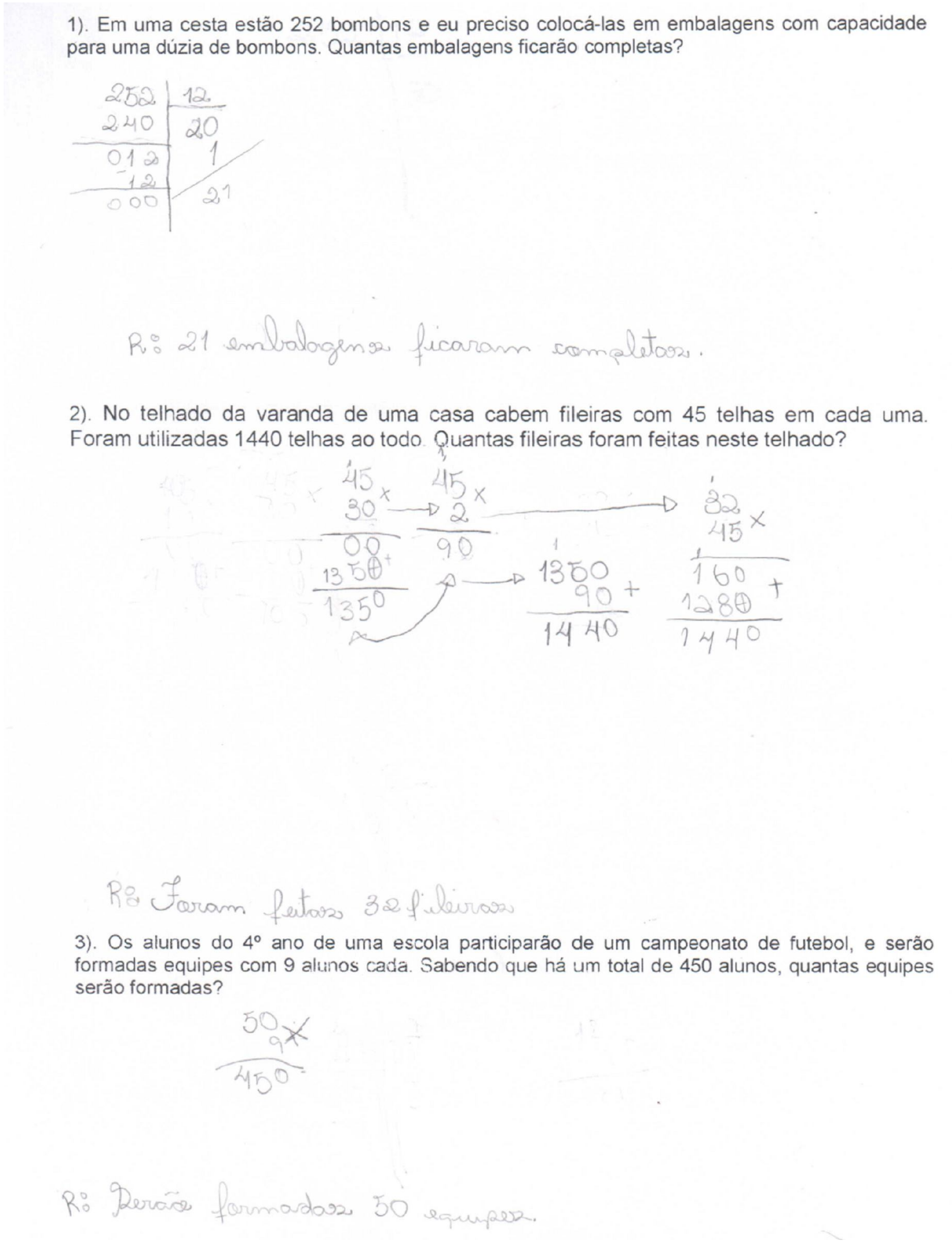
$$\begin{array}{r} 42 \\ +42 \\ \hline 84 \\ +42 \\ \hline 126 \\ +42 \\ \hline 168 \\ +42 \\ \hline 210 \\ +42 \\ \hline 252 \\ +42 \\ \hline 294 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 294 \\ +42 \\ \hline \boxed{336} \end{array}$$

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

$$\begin{array}{r|l} 3\cancel{4}32 & \underline{36} \\ -36 & 12 \\ \hline 072 & \\ -72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

R: Ele vai precisar de 12 caixas para colocar os livros.

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 13 - BRU (10,7) - 5º ano



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

252 | 12
240 | 20
012 | 1
12
000 | 21

R: 21 embalagens ficaram completas.

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

45 × 30 = 1350
45 × 2 = 90
1350 + 90 = 1440
32 × 45: 160 + 1280 = 1440

R: Foram feitas 32 fileiras

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

50 × 9 = 450

R: Serão formadas 50 equipes.

1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

12
12 +
12
36

~~5~~ ~~4~~ 540 | 36
-144 | 40
396 | 10
-360 | 1
036 | 51
-36
00

Rº Ela vai precisar de 51 caixas

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

6

-756 | 42
420 | 10
336 | 6
252 | 2
084 | 18
-84
00

42
6 ×
252

Rº Devem ser alugados 18 ônibus

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

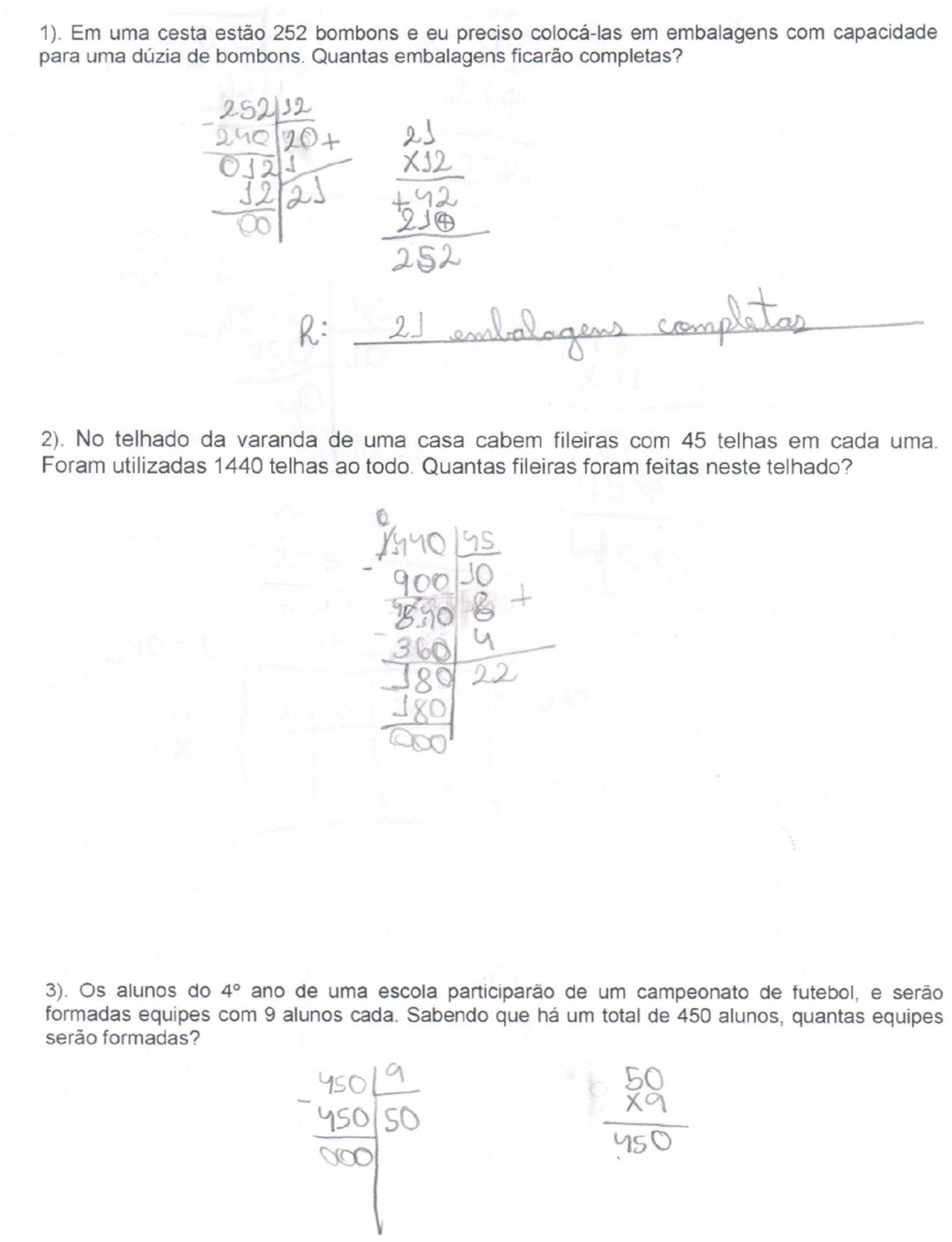
432 | 36
-360 | 10
072 | 2
-72 | 12
00

36
36 +
72

Rº Ele vai precisar de 12 caixas

36
12 ×
72
360 +
432

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 14 - GUIS (11,1) - 5º ano



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

```
 252 |12
-240 |20 +
 012 | 1
  12 |21
  00 |

   21
  x12
 +42
 21⊕
 252
```

R: 21 embalagens completas

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

```
 0
 1440 |45
- 900 |10
  540 | 8 +
- 360 | 4
  180 |22
  180 |
  000 |
```

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

```
  450 |9
- 450 |50
  000 |

   50
   x9
  450
```

1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

$\overset{4}{\cancel{5}}\,{}^{1}40$ | 36
\- 360 | 10
180 | 5 +
\- 180 | 15
000

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 360 \\ \hline 360 \end{array}$ +

$\begin{array}{r} {}^{3} \\ 36 \\ \times 5 \\ \hline 180 \end{array}$

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

\- 756 | 42
420 | 10
\- 336 | 5 +
210 | 3
126 | 18
\- 126
000

$\begin{array}{r} 42 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 420 \\ \hline 420 \end{array}$ +

$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 42 \\ \times 5 \\ \hline 210 \end{array}$

$\begin{array}{r} 42 \\ \times 3 \\ \hline 126 \end{array}$

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

$$\begin{array}{rl|l}
 & \overset{3}{\cancel{4}}{}_{1}32 & 36 \\ \cline{3-3}
- & 360 & 10 \\ \cline{2-2}
 & 072 & 2 \quad + \\ \cline{3-3}
- & 72 & 12 \\ \cline{2-2}
 & 00 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
{}^{1} \\
36 \\
\times 2 \\ \hline
72
\end{array}$$

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 15 - JOA (10,10) - 5º ano

1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

```
  252 | 12
- 120 | 10
  132 | 10 +
- 120 |  1
  012 | 21
-  12 |
   00 |
```

```
   12
 × 10
   00
+ 12 +
  120
```

R: 21 embalagens ficaram completas

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

```
  3 1
  1440 | 45
- 1350 | 30
  0090 |  2 +
-   90 | 32
  0000 |
```

```
    1
    45
 ×  30
    00
+ 135 +
  1350
```

```
   1
 + 45
   45
   90
```

R: Foram feitas 32 fileiras

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

```
  450 | 9
- 450 | 50 +
  000 | 50
```

```
   50
 × 9.
  450
```

R: Seram formadas 50 equipes

1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

540 | 36
- 360 | 10 +
180 | 5
- 180 | 15
000

ESTIMATIVAS

36 × 10
00 +
36
360

36 × 5
180

3 DÚZIAS

12
12
12
36

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

756 | 42
- 420 | 10
336 | 5 +
- 210 | 3
126 | 18
- 126
000

ESTIMATIVAS

42 × 10
00
42 +

42 × 5
210

42 × 3
126

R: Seram alugada 18 ônibus

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

432 | 36
- 360 | 10
072 | 2 +
- 72 | 12
00

ESTIMATIVA

36 × 10
00
36 +

36 × 2
72

R: Roberto precisara de 12 caixas

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 16 - JHU (10,9) - 5º ano

1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

252 |12
12 21
00

R: Ficarão completas 21 embalage

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

1440 |45
90 32
00

R: Foram feitas neste telhado
32 fileiras.

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

450 |9
00 50

R: Foram formadas 50 equipes.

1). Dona Neuza precisa 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

$$\begin{array}{r|l} 540 & 36 \\ \cline{2-2} 180 & 15 \\ 00 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{3}6 \\ \times\ 2 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{3}6 \\ \times\ 15 \\ \hline +\ 180 \\ 36\oplus \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{4}{\cancel{5}}{}^{1}4 \\ -\ 36 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{3}6 \\ \times\ 5 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{3}6 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \\ +\ 36 \\ \hline 180 \end{array}$$

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

2
~~3~~36
\- 252
084

756 | 42
336 | 162
84
00

3
162
× 42
324
6480
6804

42
× 6
252

× 18

4
\+ 2
\+ 1
\+ 2
\+ 2

6
× 42
2
84

75
\- 42
33

42
× 4
168
\+ 84
252
\+ 42
394
\+ 84
478

84
562
\+ 168
730
42
72

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

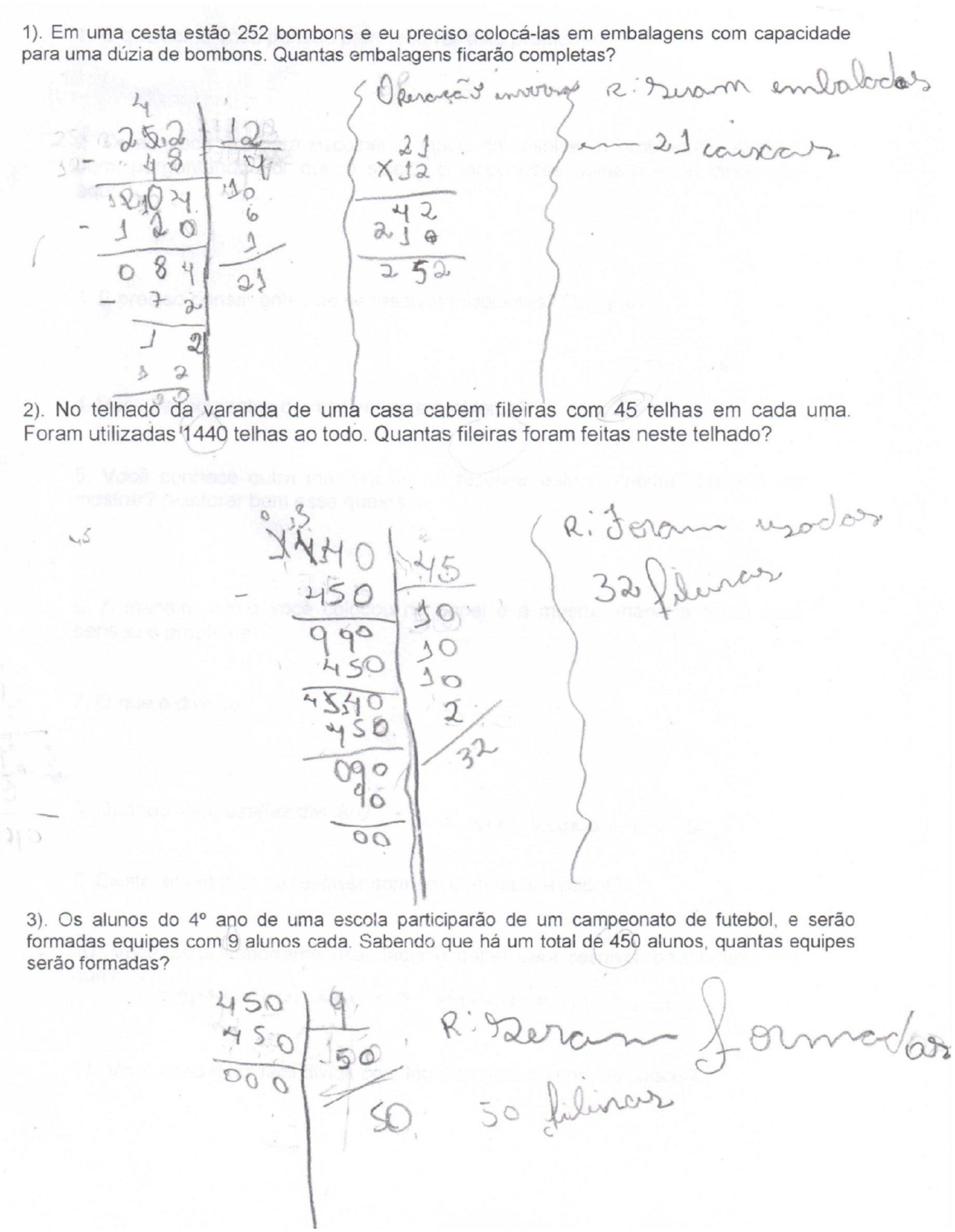
$$\begin{array}{r|l} 432 & 36 \\ \cline{2-2} 72 & 12 \\ 00 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 36 \\ \times\ 12 \\ \hline 72 \\ 360 \\ \hline \boxed{432} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 2 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{\cancel{4}}{}_{1}3 \\ -\ 36 \\ \hline 07 \end{array}$$

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 17 - JUL (11,3) - 5º ano



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

Operação inversa

R: Foram embaladas em 21 caixas.

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

R: Foram usadas 32 fileiras

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

R: Foram formadas 50 fileiras

1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

```
 4 3
 ~~5~~
- 540 | 36
  360 | 10
  180 | 5
- 180 | 15
  000
```

```
 12
x 3
 36
```

R: Dona Neuza usou 15 caixas para colocar os ovos.

2). Vários torcedores do “Clube do Futebol” pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados? 750

42

R: Serão alugados 18 ônibus

```
  750 | 42
- 420 | 10
  330 | 5
- 210 | 2
  0120| 17
-  84 | + 1
  036 | 18
```

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar? 432 36

```
  3 4
   432 | 36
 - 360 | 10
   072 | 2
    72 | 12
    00
```

R: Ele vai usar 12 caixas.

```
   36
 × 12
  ---
   72
  360
  ---
  432
```

# REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 18 - LUC (10,7) - 5º ano

1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

R: Ficaram 21 embalagens completas.

252 |12
-24 21
012
12
00

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

R: Foram feitas 64800 fileiras.

21 21
1440
x45
1 7200
5760+
64800

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

R: Serão formadas 50 equipes.

450 |9
-45 50
000

1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

36
×2
72

36
×3
108

36
×5
180

540 | 36
36 | 15
180
180
000

24 = 2 × 12
+ 12
36

R: Ela vai precisar de 15 caixas.

36
×15
180
36+
540

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

756 | 42
-42 | 18
336
-336
000

42
×2
84

42
×4
168

42
×3
126

42
×5
210

42
×7
294

42
×8
336

42
×18
336
42+
756

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

$^{3}4{,}3\overset{1}{2}$ | $\underline{36}$

$-36$   12

072

$-72$

00

$\overset{1}{36}$

$\times 2$

72

$\overset{1}{36}$

$\times 12$

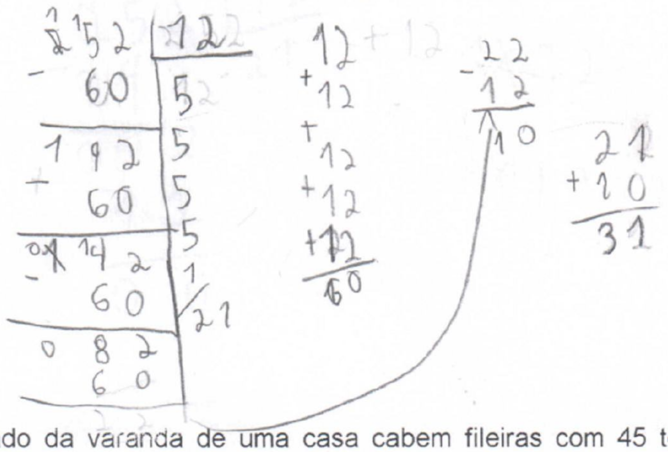
72

$36+$

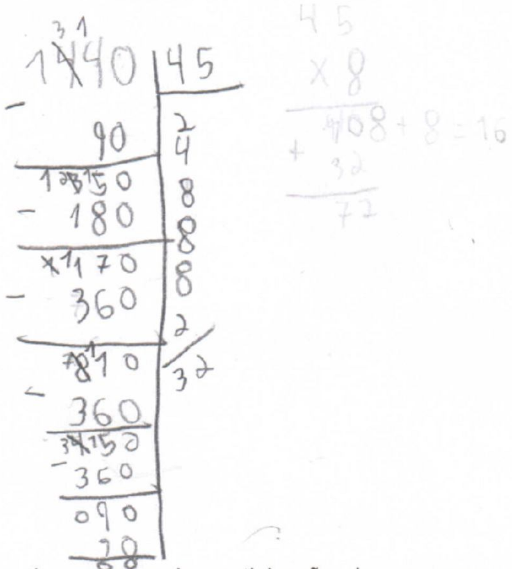
432

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 19 - PED (10,5) - 5º ano

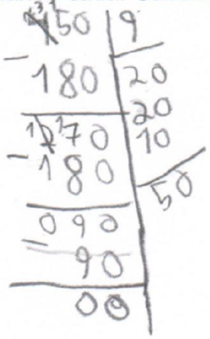
1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?



2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?



3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?



1). Dona Neuza precisa colocar 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

540 | 36
- 36   132
180
- 108
088
72
16

36
x 3
108

36
x 2
72

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

756 | 42
- 420   10
336   5
- 210   2
120   1
80   18
40

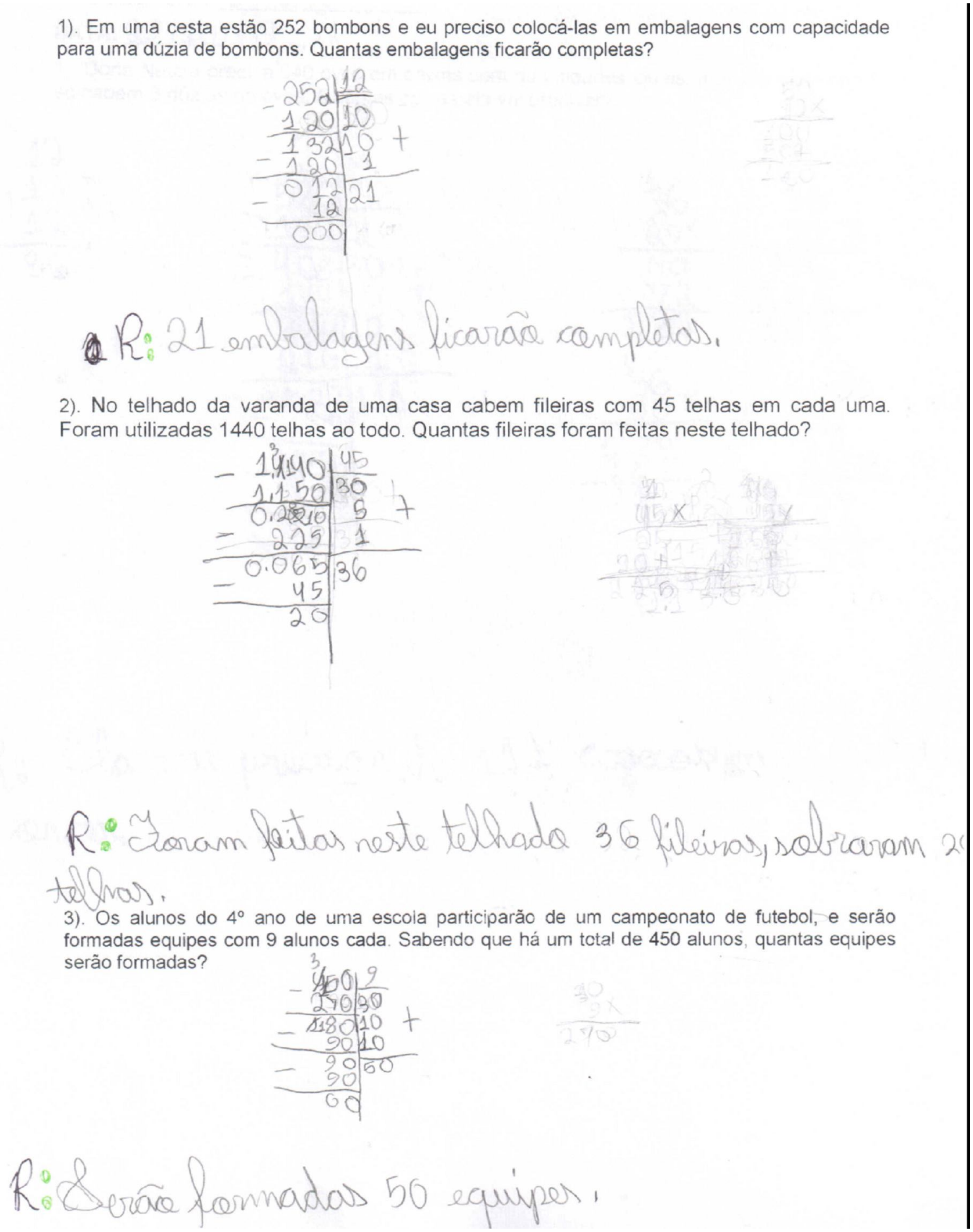
R: Devem ser alugados 18 onibus

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?

$$\begin{array}{r|l} \overset{3}{\cancel{4}}\,{}^{1}3\,2 & 36 \\ \hline -360 & 10 \\ & 1 \quad + \\ \hline {}^{6}\cancel{7}\,{}^{1}2 & 1 \\ -36 & 12 \\ \hline 36 & \\ -36 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

R: Ele vai precisar de 12 caixas.

## REPRESENTAÇÃO - ESTUDANTE 20 - VAN (10,3) - 5º ano



1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

252 | 12
− 120 | 10
132 | 10 +
− 120 | 1
012 | 21
− 12
000

R: 21 embalagens ficarão completas.

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

1.440 | 45
− 1.150 | 30
0.290 | 5 +
− 225 | 1
0.065 | 36
− 45
20

R: Foram feitas neste telhado 36 fileiras, sobraram 2
telhas.

3). Os alunos do 4º ano de uma escola participarão de um campeonato de futebol, e serão formadas equipes com 9 alunos cada. Sabendo que há um total de 450 alunos, quantas equipes serão formadas?

450 | 9
− 270 | 30
180 | 10 +
− 90 | 10
90 | 50
− 90
00

R: Serão formadas 50 equipes.

1). Dona Neuza precisa 540 ovos em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa só cabem 3 dúzias de ovos. Quantas caixas ela vai precisar?

```
  12
  12 +
  12 +
  --
  36

   540 | 36
 - 132 | 20
   408 | 30
 - 144 | 50 +
   344 | 10
 - 216 | 1
  0127 | 111
 -  72
 -  55
    36
    19

   36        36
   20 x      30 x
   60       136
   72 +     108
  132       144

   36        36
   50 x      10 x
   36       136
  180        36
  216        72
```

R: Ela vai precisar de 111 caixas, mas sobram 19 ovos.

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

```
   756 | 42
 - 420 | 10
   336 | 5 +
 - 210 | 2
   126 | 1
 -  84 | 18
    42
 -  42
   000

   42        42
   10 x       5 x
   00       210
   42 +
  420

   42
   18 x
   36
  727
  756
```

3). Roberto está tendo muita dificuldade com o seguinte problema pede sua ajuda: ele precisa transportar 432 livros para a Bienal do Livro em caixas com quantidades iguais, mas em cada caixa, só cabem 36 livros. Quantas caixas ele vai precisar?