CARMEN MARIA GUACELLI TÁBOAS

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Carmen Maria Guacelli Táboas
e aprovada pela Comissão Julgadora em

Data: 10 de Março de 1993
Assinatura:

O NÚMERO E SUA HISTÓRIA CULTURAL FUNDAMENTO NECESSÁRIO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
1993

Tese apresentada, como exigência parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação na área de Concentração: Metodologia de Ensino, à Comissão julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Newton Cesar Balzan. ol/

Comissão Julgadora

Desejamos externar os seguintes agradecimentos:

Ao nosso orientador Prof. Dr. Newton Cesar Balzan e ao Prof. Dr. Lafayette de Moraes pelo valioso apoio profissional e estímulo na realização deste trabalho.

Aos demais membros da banca do exame de qualificação, Profa. Dra. Amélia Americano Domingues de Castro e Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi por suas relevantes sugestões.

À Faculdade de Educação por ter acolhido nosso projeto em seu Programa de Doutorado.

A todos os que contribuiram de alguma forma para o aprimoramento deste trabalho.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios financeiros da CAPES, através do PICD.

Resumo

Observações de nossa vida estudantil, confrontam-se com os dados atuais sobre acesso, evasão, repetência e permanência da criança brasileira na escola e se enriquecem pela análise de estudos recentes, que valorizam o saber escolar como instrumento para a sobrevivência na sociedade e ponto de partida para o conhecimento e a participação crítica. Os dados sugerem a necessidade de se repensar o Ensino de Matemática numa escola que, se pretende, corresponda aos anseios de uma sociedade democrática.

Reconhecemos, no entanto, deficiências nos cursos de licenciatura em Matemática e, por tabela, nos cursos de magistério, onde o conhecimento é visto como algo passivo e intelectualizado. A falta, na escola, de recursos humanos, preparados para repensar o ensino de Matemática e para participar ativamente na discussão dos problemas da comunidade escolar, aliada à precária situação econômica, afasta dela os alunos.

Como agravante da situação diagnosticada, a análise dos livros didáticos de Matemática que têm chegado às mãos dos professores retrata, ora características marcantes das preocupações pedagógicas da época, ora tímidas incursões na busca de um ensino adequado às condições concretas de nossa sociedade. Os autores sofrem influências de leis e decretos da esfera governamental, bem como sofrem pressões do "lobby" dominante, com raras exceções, preocupado, principalmente, em atender interesses econômicos do corpo de editoração do país.

De qualquer forma, a Matemática continua sendo mostrada como conhecimento pronto e acabado, com verdades irrefutáveis, neutra no sentido das influências da sociedade na sua construção, bem como das conseqüências do seu progresso na transformação da qualidade de vida e, salvo as raras exceções, os livros passam uma idéia da Matemática como área de estudo sem história, sem valorizar a evolução gradativa dos conteúdos matemáticos.

A compreensão adquirida nessa introspecção subjetiva e objetiva, na realidade do professor e no seu material de apoio, leva-nos a estabelecer a ênfase histórico-cultural para a análise da evolução dos conceitos da Aritmética, em especial do conceito de número, sua representação e a ampliação dos campos numéricos, eleitos o centro de interesse da pesquisa.

A idéia é preencher uma lacuna na formação do professor. Entendemos que a pesquisa sobre o número e sua história cultural contribui para uma compreensão mais adequada do que é a Matemática, desfazendo concepções falsas, e concorrendo também, para uma melhor percepção de seu papel no currículo do 1º e 2º graus.

A pesquisa efetuada sobre a gênese do número e a ampliação dos campos numéricos, traz significado intrínseco à busca, pelo futuro professor, do domínio da contagem (discreto numérico) e do domínio da medida (contínuo numérico), ou seja, traz motivação para o estudo desses dois grandes temas, no curso de preparação desse profissional.

Do percurso histórico-cultural realizado, emergem as mudanças, ao longo dos anos, dos significados de número, dos procedimentos usados na representação de quantidades - relativas às grandezas discretas e contínuas - e dos métodos de cálculo aritmético.

Neste trajeto, os vários modos de se superar obstáculos e de se obter resultados evidenciam sutilmente uma lógica natural da construção do conhecimento aritmético, que não é a lógica formal, usualmente requerida para a validação dos resultados matemáticos, o que nos permite respeitá-la quando aplicada no ensino elementar.

Ao percorrermos os caminhos do desenvolvimento aritmético, em especial dos sistemas de numeração hindu-arábico e da evolução do número, identificamos fortes influências culturais e as classificamos em diversas "forças desenvolvimentistas". Durante o percurso, destacamos o papel do homem – sua curiosidade e seu espírito criativo – ao extrapolar o conhecimento além das fronteiras do imediato. As "forças culturais", envolvidas no desenvolvimento da Aritmética, não são valorizadas nos livros didáticos ou nos cursos de formação de recursos humanos, o que implica, muitas vezes, numa visão errônea da Matemática como área de conhecimento desligada do contexto sócio-cultural.

Enfatizamos, no texto, a questão da formação do professor e sugerimos um currículo centrado no desenvolvimento histórico do número e sua representação. A partir deste, a estrutura curricular deve se irradiar para outros temas. Priorizamos no curso de formação do professor, atividades que propiciem a autonomia intelectual, a autonomia profissional e a prática da cidadania de seus docentes e de seus professorandos.

O trabalho não tem a intenção de responder a todas as dúvidas, mas pretende, antes disso, suscitá-las, provocar seu aprofundamento, e principalmente, instigar reflexões sobre a formação do professor.

Abstract

Observations of our life as students were compared with the current data of admission, drop-out, repetition and permanency of the brazilian child in school and were enriched by the analysis of recent studies which valorize school knowledge as a tool for survival in society and as a starting point for knowledge and critical participation. The data suggests the need to rethink the teaching of Mathematics in school with the purpose of meeting the expectations of a democratic society.

We recognize, however, defficiencies in the teacher preparation for Mathematics, where knowledge is seen as something passive and intellectualized. The lack in education of human resources prepared to rethink the teaching of Mathematics and to participate actively in the discussion of school community problems associated with the precarious economic situation drives the students away.

As an aggravating circumstance of the diagnosed situation, the analysis of Mathematics text-books which have been available to teachers portrays, at times, characteristics of the pedagogical worries, at other times timid incursions in the search for adequate teaching in the concrete conditions of our society. The authors of these books undergo influences from laws and decrees, as well as pressures from the dominant lobby which, with rare exceptions, is concerned, mainly with serving the economic interests of the country's publishing industries.

Anyway, Mathematics is still shown as a ready and finished knowledge, with incontestable truths, that are unsensitive to social influences; its progress is meaningless in improving the quality of life and, except in rare occasions, these books transmit an idea of Mathematics as an area of study with no history, without giving value to the gradual evolution of the mathematical contents.

The understanding achieved in this subjective and objective introspection in the teacher's reality and in his supporting material leads us to establish the historical-cultural emphasis for the analysis of the evolution of the arithmetic concepts, in particular the concept of number, its representation and the enlargement of the numerical fields which were selected as the center of interest in the research.

The idea is to fill a lack in teacher preparation. We understand that the research on number and its cultural history may contribute for a more adequate comprehension of what Mathematics is, correcting misconceptions and even contributing for a better perception of its role in the primary and secondary curriculum.

This study of the number genesis and the enlargement of the numerical fields gives an intrisic meaning to the study of the mastering of counting and measuring by the future teacher. Thus, it motivates the study of these two great issues during

the preparation course.

Out of this historical-cultural study arise the changes in the meanings of number, the procedures used in the representation of quantities - relative to discreet and continuous quantities - and in arithmetic calculation methods over the years.

In this study various ways to overcome obstacles and to get results subtly present a natural logic of construction of mathematical knowledge which is not the formal logic, usually required for the validation of mathematical results and which allows us to respect this natural logic when applied in elementary teaching.

Continuing this study of arithmetical knowledge, in particular the hindu-arabic numeration and the evolution of number concept, we identify strong cultural influences and classify them into various "developmentalist forces". In the study we stress the role of man - his curiosity and creative spirit - when he extends knowledge beyond the borders of the immediate.

The cultural forces envolved in the development of arithmetic are not valued by the text-books in teacher preparation courses, implying many times an erroneous view of Mathematics as an area of knowledge disconnected from the socio-cultural context.

We have stressed, in this work the question of teacher formation, and we suggested a curiculum centered on the historical development of the number and its representation. Because of this, the curriculum should open itself to other issues. We give priority in teacher preparation courses to activities which allow intellectual and professional autonomy and the practice of citizenship of teachers giving the preparation course, and the future teachers of Mathematics.

This work does not intend to answer all doubts; rather it intends to provoke questions and to stimulate further studies and mainly, to instigate reflections on teacher formation itself.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Um Ponto de Partida

Ao fazermos a opção por um tema de pesquisa, vários fatores nos influenciaram fortemente. No capítulo 1, procuramos, nas 3 seções iniciais, dar uma visão clara das angústias e dos anseios que vivemos na área educacional, bem como das motivações e das buscas surgidas em decorrência delas. Ao final do capítulo, nas seções 1.3 e 1.4, fixamos as questões emergentes e o enfoque sobre os quais decidimos concentrar nossa atenção na pesquisa.

1.1 Problemas Antigos com Dados Recentes

O ensino esteve presente em toda nossa vida. Num retrospecto, identificamos problemas educacionais que se perpetuaram, conceitos que se modificaram, valores que se preservaram, enfim ... uma gama de questões que são enfrentadas pela sociedade dos mais diferentes modos.

Para um grupo de pessoas, nada é possível fazer para sair do marasmo em que estão envolvidas as instituições educacionais, nada adianta fazer. Para outro, vale o extremo oposto. Não pretendemos nos equivocar permanecendo em algum dos extremos. Se houver equívoco, que seja identificando causas, problemas e perspectivas a médio e longo prazo.

Nessa volta ao passado, procuramos expressar uma visão da realidade educacional através dos olhos, ora do estudante, ao descrever situações que nos marcaram, ora do educador que as aponta para confrontá-las com os dias atuais, cabendo ao leitor enriquecê-la com suas próprias experiências, reflexões e críticas. Procuramos incentivá-lo à sua própria análise.

A idéia é levantar polêmica, é levantar debates e, a par destes, desejamos externar nossa visão e fornecer uma opção para a formação do professor, em qualquer nível, na área de Matemática.

Este trabalho é um misto de vivência, de reflexão, de estudo e de crítica acerca de dúvidas e incertezas que pretendemos responder, não a todas, porém.

Em nossa infância, no convívio familiar, tivemos ocasião de compartilhar com nossos pais de seus afazeres, aborrecimentos e satisfações de suas vivências na escola. Vez por outra, algumas mães vinham até nossa casa expor as dificuldades em enviar seus filhos à escola. Entre as queixas, as mais numerosas referiam-se à falta de dinheiro para o material escolar, à necessidade do filho cuidar de irmãos menores enquanto os pais trabalhavam, à mudança da família, pois o pai saíra do emprego, à premência em encaminhar o filho ao trabalho e às justificativas de freqüentes faltas à escola por motivo de doença: tonturas pela manhã, amarelão, dor d'olhos.

Estávamos em meados dos anos cinqüenta e essas atitudes de aproximação e confiança de mães das classes mais pobres, provavelmente à espera de uma palavra de orientação ou de concordância com o procedimento adotado, passavam para nós o significado da importância de uma professora do curso primário numa escola pública, rural ou urbana, de município interiorano paulista. Mais tarde, passamos a nos interessar ainda mais, então de uma forma menos particular, pelo ensino básico.

A professora naquele caso, como o ensino básico em geral, representa o elo de ligação entre o saber natural do senso comum e aquele do saber elaborado, sistematizado[1], que abre perspectivas, na expectativa popular, de melhoria material de vida pela aquisição de conhecimentos e habilidades.

Além disso, a nosso ver, a alfabetização entendida não apenas como o domínio da leitura, da escrita e da compreensão da língua nacional, mas também como o domínio dos símbolos e operações matemáticas, além do entendimento das formas elementares da construção do mundo da cultura, é o instrumento pelo qual o indivíduo vem a compreender, a analisar e a participar de sua realidade.

Estudos desta última década têm mostrado que a escola básica, qualquer que seja a razão – da ascensão social até à crença na escola como instrumento privilegiado para a conquista da cidadania – é apontada pelas camadas mais pobres da população como elemento importante na formação de seus filhos [2].

---

[1] Demerval Saviani comenta esse papel da escola e se reporta aos gregos para ilustrá-lo. Veja em "Sobre a natureza e a especificidade da Educação", comunicação apresentada em mesa redonda realizada em Brasília em 05/07/84.

[2] Lisete R.G. Arelaro, apresenta comentários sobre esses estudos em "A extensão do ensino básico no Brasil: ainda um desafio político" in Em Aberto, Brasília ano 7, no.39: pp 37-43,

Na verdade, o ingresso e a permanência na escola ao serem reivindicados pelas camadas mais pobres como maneira de melhoria de vida, de obtenção de melhor emprego, expressa a não aceitação das limitações impostas à sua classe social. E essa insatisfação pode levar a um projeto coletivo de tentativa de mudança que depende da participação de cada indivíduo e visa estreitar as distâncias sociais. A escolaridade desse indivíduo pode influir nessa participação, pois ela diminui a visão mística da realidade, fornece instrumentos para a sobrevivência e para um conhecimento mais crítico da sociedade. A Escola, nesse caso, tem um sentido político ao garantir melhores condições de aprendizagem às crianças [3].

No entanto, ao nos reportarmos às observações estudantis colhidas durante anos de permanência na escola, identificamos mais dificuldades somando-se àquelas já comentadas, relativas às mães que almejavam a permanência de seus filhos na escola.

Com a vigência da lei 4424 de 1942 e, posteriormente, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional no. 4024/61, o aluno que terminava o 4o. ano primário recebia o diploma de conclusão do curso elementar. Estava completada a escolaridade obrigatória prevista pela lei. Para continuar os seus estudos, o jovem submetia-se ao Exame de Admissão ao curso ginasial. A necessidade desse exame seletivo decorria da defasagem entre a pequena oferta e a demanda de vagas para a 1a. série ginasial nas escolas públicas.

O jovem da classe mais pobre que superava as barreiras para a conclusão do ensino elementar tinha dificuldades em ser selecionado para as vagas ginasiais. O exame de admissão, favorecia, em geral, aquele que fazia cursinho para a sua preparação à prova, ou aquele que freqüentava o 5o. ano primário, também preparatório ao exame e oferecido, em número limitado, por algumas escolas estaduais primárias.

Nesse caso, a escolaridade do jovem da classe mais pobre ficava restrita a, no máximo, 4 anos, reforçando a concentração da mão de obra qualificada e monopolizadora do conhecimento ao domínio de poucos.

Nossos professores dessa época formavam um grupo responsável, bastante respeitado na cidade. Viemos a saber mais tarde que seus salários, junto às escolas

julho/outubro/1988.

[3]Cabe aqui a indicação de alguns textos ainda não citados, e que aprofundam a discussão sobre a escolarização, de forma que a mesma não venha apenas reproduzir o saber, mas reelaborá-lo e transformá-lo. Entre outros podemos citar:

a) Guiomar Namo de Mello, Magistério de 1o. grau: da competência técnica ao compromisso político. São Paulo, Cortez, 1983.

b) Neidson Rodrigues. Por uma nova escola: o transitório e o permanente em Educação. São Paulo, Cortez, 1986.

c) José Carlos Libâneo. A democratização da escola primária. A pedagogia crítico/social do conteúdo. São Paulo, Editora Loyola, 1986.

públicas ginasiais estaduais nos anos 40 e 50, equivaliam aos dos magistrados do Forum da Comarca. A maioria era concursada, muitas vezes formada por autodidatas e no que sentíamos, estava satisfeita com a profissão exercida e dela se orgulhava. A habilitação para o exercício do magistério nas escolas públicas ginasiais era adquirida com a aprovação em exame de suficiência, realizado pelo MEC, para tal fim. Essa habilitação permitia participar de concurso público de ingresso ao cargo de professor. A partir de 1931, pela reforma Campos, sugeria-se em lei a criação das Faculdades de Educação, Ciências e Letras, cuja preocupação, entre outras, seria a formação do professorado secundário. No estado de São Paulo, a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, constituída em 1934, tornou-se pioneira nessa atividade, tendo seus primeiros licenciados em 1936.[4]

Próximo ao final de cada ano, Matemática, Português e Ciências, consideradas as disciplinas mais difíceis, provocavam uma corrida às aulas particulares e, mesmo com elas, muitos dos nossos colegas não obtinham aprovação.

Nesse tempo, nosso interesse concentrava-se em Matemática, num mundo de fórmulas, símbolos, definições e teoremas. O professor era considerado excelente didata e a maior inteligência da instituição. Nós resolvíamos muitos exercícios do livro-texto, compreendíamos os passos a serem dados nas demonstrações dos teoremas, mas sentíamos como se nada daquilo tivesse significado algum. Os assuntos ficavam soltos, semestre a semestre, faltava organização num conjunto evolutivo mas, principalmente, significativo. Mesmo assim, nos saíamos bem na disciplina e os colegas nos admiravam por isso.

Não raro convivíamos com lamentações de muitos pais, à porta de nossa casa, à procura de aulas particulares de Matemática. Eram várias as reclamações. Entre elas destacavam-se problemas de compreensão dos conteúdos e da linguagem matemática e conseqüente má interpretação de enunciados de problemas. A essa somavam-se as queixas dos filhos quanto à monotonia dos exercícios repetitivos, à aridez dos livros textos, às massacrantes questões das provas e aos sentimentos de frustração e incapacidade.

Os fatos dessa vivência estudantil repetiam-se, certamente, durante anos e dados recentes se fizeram necessários para avaliar a situação em dias atuais e fornecer, portanto, um referencial de nossa realidade escolar, nos anos 80-90.

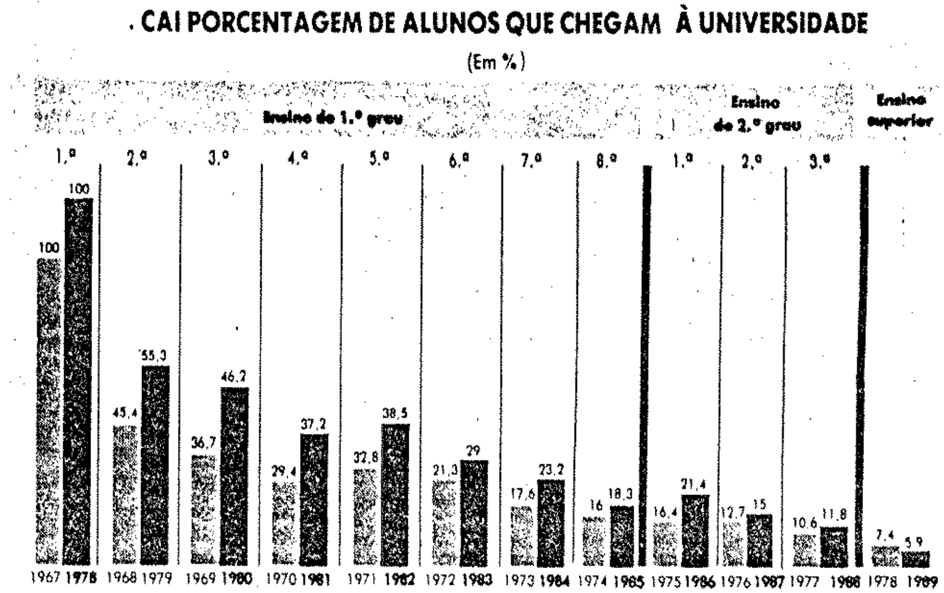
Procuramos analisar dados que pudessem comprovar ou se confrontarem com os fatos vividos, com as cenas gravadas em nossa mente e que pudessem fornecer pistas para um ponto de partida no nosso trabalho educacional: formação de professores

[4] Amélia Domingues de Castro estuda com profundidade a questão do licenciado em "a Licenciatura no Brasil". Separata da revista de História, nº100. São Paulo, 1974.

de Matemática em qualquer nível, para a realidade contemporânea e para uma sociedade democrática, na qual são imprescindíveis conhecimentos mais gerais e diferenciados, maior iniciativa e domínio sobre os acontecimentos e participação neles.

Entre as fontes consultadas, estão gráficos divulgados pela imprensa e elaborados com dados fornecidos pelo MEC, de onde pudemos extrair valiosas, embora trágicas, observações[5].

Anexamos um dos gráficos para facilitar o acompanhamento das análises.



De cada 100 alunos matriculados na 1a. série em 1978, 45 abandonaram ou foram reprovados nessa série; 63 saíram da escola ou foram retidos entre 1a. e 4a. série. Dos 37 restantes inscritos na 5a. série, apenas 23 chegaram a se inscrever na 7a. série, 18 se matricularam na 8a. e somente 12 iniciaram a 3a. série do 2o. grau. Pelo mesmo gráfico, podemos verificar que esse quadro dramático era bem parecido 11 anos antes.

Segundo Fletcher e Ribeiro (1987), na última década, 3 milhões de crianças e adolescentes abandonaram a escola e 6 milhões foram reprovados em cada ano. No ano de 1988, pesquisa nacional realizada por Amostra de Domicílio denunciou que

[5]a) Folha de São Paulo. MEC solta dados dos anos 80. Caderno 4: pp 4; 30/03/91.
b) Folha de São Paulo. Fluxo Escolar 1967-1978 e 1978-1989. Caderno 1: pp 8; 11/09/91.

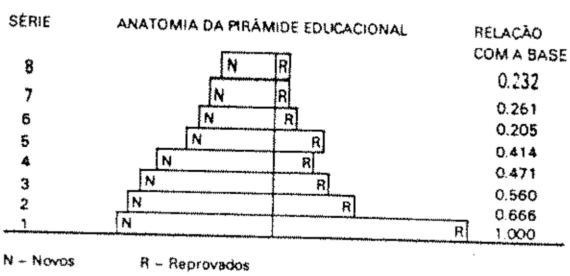
4 milhões de crianças de 7 a 14 anos estavam fora da escola e, dessas, pelo menos a metade já teve acesso a ela.

Nos Anuários Estatísticos, há outros dados ainda mais críticos: de cada 100 brasileiros de 10 anos ou mais, em 1987, 19 estavam há menos de 1 ano na escola, 23 completaram de 1 a 3 anos de estudo, 15 dispunham de escolaridade de 5 a 7 anos e 6 completaram 8 anos na escola. Em 1987, esses dados correspondiam a 17 456 348 analfabetos no Brasil. Em reportagens mais recentes, são citadas estimativas que variam de 30 a 45 milhões de analfabetos para uma população de 155 milhões - quase 20% de brasileiros numa visão mais otimista.

Por outro lado, sintomas fortes levaram a supor que a caótica situação econômica familiar acabou empurrando a criança, muito antes da hora, para o mercado de trabalho. Artigo divulgado pela Folha de São Paulo baseado em pesquisa feita por instituição governamental constatou, na cidade de São Paulo, 70% de meninos menores de 16 anos, participando do mercado de trabalho, como forma de ajudar na receita familiar e 40% não freqüentando qualquer tipo de escola.

Entretanto, ao lado de toda sorte de dificuldades econômicas e sociais para o acesso à escola, Fletcher e Ribeiro, em texto recente, divulgaram gráfico da pirâmide educacional brasileira, denunciando a existência de deficiências na escola que prejudicam a permanência dos que conseguem chegar a ela [6].

– Pirâmide educacional para o Brasil (100% da população nacional)



Apud: Fletcher e Ribeiro 1987

Neste gráfico, foram relacionados os alunos inscritos, novos e reprovados, por série em 1987. Como podemos observar, os reprovados pela escola em cada série, representam um índice alto, variando de 30% a 52% em cada ano e devem provocar um alerta significativo nas instituições educacionais e em outros grupos da sociedade interessados na educação. Fletcher e Ribeiro, no mesmo estudo, comprovaram, como

[6]Philip R. Fletcher, Sergio Costa Ribeiro. O ensino do 1o. grau no Brasil de hoje, in Em Aberto, Brasília, ano 6, no. 33: pp 1-10, 1987.

era esperado, que o abandono e a reprovação incidem perversamente sobre os alunos de origem menos favorecida.

Em ingênua contraposição, comprovamos, na elaboração do quadro abaixo, a expansão quantitativa da escola do 1o. grau no Brasil, no período 1962-1974, dando mais oportunidade de acesso àqueles que eram excluídos do sistema escolar.

Ano	no. de inscrições no 1o. grau	% da população brasileira
1962	9 664 423	13,4
1966	12 585 190	15,0
1970	15 894 927	17,5
1974	19 286 611	18,5

Os cálculos efetuados para os anos anteriores a 1962 revelaram o índice em torno de 10% e, a partir de 1974, em torno de 18%. Graças à maior disponibilidade de vagas nas escolas nos anos 60 e ao estabelecimento, em 1971, de 8 anos para a escolaridade mínima obrigatória, ampliou-se a presença na escola, das crianças das classes mais pobres, modificando a composição na sala de aula.

Todavia, embora o número de alunos tivesse aumentado, não aumentaram proporcionalmente os recursos materiais e humanos[7].

Comentários de algumas educadoras nos dão uma visão real desta democratização do ensino. Segundo Maria Malta Campos "O aumento da quantidade de prédios não veio acompanhado da preocupação com a qualidade" e Stella Piconez diz "Continuaram usando o mesmo material didático e métodos de ensino"[8].

Sem dúvida, a nova clientela, agora presente na sala de aula, veio questionar o ensino oferecido àquela minoria da classe média. O currículo, os programas e os métodos de ensino influenciados pelos hábitos das crianças de classe média não estavam adequados à nova clientela.

Segundo Mello (1983), existem indícios da tendência dos professores de encarar a crise de qualidade da escola como conseqüência da expansão quantitativa da mesma, levando-os à defesa do suposto padrão de qualidade numa escola de minoria.

[7]Bernadete A. Gatti. "Democratização do ensino: uma reflexão sobre a realidade atual in Em Aberto, Brasília, ano 8, no. 44: pp 3-8, out/dez/1989.

[8]Em "Currículos defasados afugentam estudantes", reportagem publicada na Folha de São Paulo, Caderno 1: pp 8, de 11/08/1991.

Mello argumenta que negar os benefícios educacionais a essa grande massa não se sustenta numa sociedade democrática, ao mesmo tempo que a "suposta qualidade" anterior defendida por alguns, se mantida, decreta o fracasso dos alunos pobres, pela evidente inadequação dos programas, currículos e avaliações.

De fato: ... "pode-se imaginar a escola brasileira como um carrossel louco que cospe crianças. Além das pressões exercidas pela pobreza e, muitas vezes, pela fome, as crianças se entediam na escola, são humilhadas por reprovações nos primeiros passos e descobrem rapidamente, dezenas de motivos para procurar na rua o que não lhes é dado dentro do colégio."[9]

Essas são algumas das questões a serem discutidas e enfrentadas na próxima década, por toda a sociedade, quando cada segmento deverá dar a sua contribuição.

Às dificuldades para o acesso, à evasão, à repetência ou a permanência na escola, até aqui denunciadas, acrescem-se aquelas envolvendo professores mal remunerados, sem estímulo e mal preparados, problemas esses que devem ser discutidos por via da organização dos professores e de grande mobilização popular [10].

As causas daquelas dificuldades advindas de baixos níveis de renda, carências alimentares e de saúde, situam-se no nível da estrutura econômica do país e parecem fugir ao nosso alcance. Porém, em datas mais recentes, temos lido ou ouvido com freqüência que "o país precisa do impulso educacional para que a sociedade possa desgarrar-se da pobreza"; "sinônimo de país analfabeto é país pobre" e "boa educação pública e modernização econômica são duas variáveis que andam juntas".

Parece haver um consenso de que o ensino de 1o. grau é instrumento não suficiente, mas indispensável no processo de construção de uma realidade social mais justa. E, assim sendo, devemos repensar os fatores cujas deficiências podem ser enfrentadas pelo setor educacional, entre eles a reprovação em excesso, a inadequação do currículo das escolas e a formação do professor.

Existe, a nosso ver, muito o que se fazer na formação do professor, pois nessa breve reflexão pudemos arrolar, entres outros, os seguintes fatos, alguns crônicos, na Educação Brasileira em geral:

- causas sociais prejudiciais ao acesso e à permanência de alunos das classes pobres aos primeiros anos de escolaridade.
- causas sociais complicadoras à continuidade dos estudos de 5a. a 8a. séries.

[9]Revista Veja, "A máquina que cospe crianças". Seção Educação pp 46-47; 20/11/91.

[10]Luiz S. de Araújo Filho em "O professor, formação, carreira, salário e organização política", in Em Aberto, Brasília, ano 6, no. 34: pp 1-10, abril-junho/1987.

- expansão da clientela na escola de 1o. grau no período 1962-1974.
- derrubada da exigência seletiva institucionalizada para a continuidade dos estudos de 5a. a 8a. séries.
- não acompanhamento proporcional de recuros humanos e materiais à expansão quantitativa de alunos do 1o. grau.
- constância de altos índices de reprovação.
- ocorrência de índices mais altos de repetência nas classes mais pobres.
- fortes indícios de inadequação do currículo escolar às necessidades e anseios das camadas mais pobres.
- indícios de confusão de parte dos professores ao relacionar boa escolarização com altos índices de reprovação.
- problemas estruturais de carreira e salário dos professores [11].
- fortes indícios do despreparo do professor para o enfrentamento desses problemas de fora e de dentro do setor educacional.

Na verdade, essas questões complexas nos convenceram da impossibilidade de haver melhoria na Educação Brasileira pelos veículos apenas técnicos.

Cremos que, é preciso haver ações conjuntas nos cursos de preparação do professor, para se perseguir o perfil do professor dos anos 90, de forma que o mesmo se prepare para assumir a liderança na comunidade escolar, não só no campo técnico, mas também no campo político. Precisamos de gente disposta a comprometer-se com a comunidade em que trabalha e vive.

Nessa análise sucinta das dificuldades e contradições que o professor encontrará no seu trabalho na escola, fica clara a necessidade de se fomentarem discussões para se traçar o esboço do perfil desse professor dos anos 90.

Entre as características imprescindíveis a esse perfil, deverão estar:

- o engajamento na mobilização popular, pela conquista de uma sociedade mais justa;

[11] Artigos recentes denunciam fortemente aspectos frágeis da carreira do professor nas escolas públicas. Veja em:
a) "Professor típico se decepciona com carreira". Folha de São Paulo, caderno 1: pp 19, 29/09/91.
b) "Salário do professor em SP vale 4 vezes menos que vinte anos atrás". Folha de São Paulo. Caderno 1: pp 6, 30/09/91.

- a participação responsável na sua associação de classe para reivindicações de melhores condições no exercício de sua profissão;
- a consciência do sentido político da escola, ao fazer bem aquilo a que se propõe: **ensinar bem a todos que a ela têm acesso**.

Parafraseando Mello (1983), "uma das condições para que o sentido político da educação escolar se dê é a **competência técnica do professor**, aliada ao seu compromisso político". É preciso, é desejado, que a **"natureza, a qualidade e o resultado do seu trabalho venha fazer alguma diferença sobre o modo como cada indivíduo irá realizar o seu destino social"** (grifos nossos).

Na tentativa de definir os valores e prioridades educacionais que direcionaram nossa pesquisa, procuramos retratar a época e as experiências vividas.

É importante destacar nosso primeiro foco de interesse: a formação do professor para uma sociedade democrática, na qual a escola pública deve realizar uma ação efetiva.

1.2 Trajetória Profissional e Perspectivas Atuais

Apesar da falta de sintonia entre o desempenho na disciplina e a compreensão global de seu significado e suas razões, a satisfação pessoal pelo sucesso no desempenho levou-nos a nos candidatarmos à licenciatura em Matemática.

Nessa ocasião, e ainda durante anos, a licenciatura plena foi sinônimo de bacharelado mais disciplinas pedagógicas e, neste, a construção do conhecimento esteve inteiramente dissociada da realidade social. O conhecimento, de fato, era passado como algo passivo e intelectualizado.

Nossa licenciatura nestes e noutros aspectos não foi diferente das outras existentes na época. Certas características do nosso curso, naquele tempo bastante valorizadas, faziam-no bem considerado: instituição pública, corpo docente com respeitável currículo, biblioteca suficiente.

Essas características colaboraram para um extenso histórico escolar, com inúmeras disciplinas, e permitiram a quase todos os licenciados da Instituição um desempenho no mínimo regular nos concursos de ingresso ao magistério oficial, nos moldes da época.

No entanto, uma sólida formação de conteúdo matemático, **condição necessária** para o trabalho pedagógico, não é suficiente para um professor melhor contribuir na construção do conhecimento do aluno, de forma distinta da transmissão passiva.

Não se pode, também, julgar que a prática, quando entendida como "treinamento" de um conjunto de técnicas e de métodos de ensino, venha a minimizar os efeitos de se reproduzir o "status quo".

Ou seja, nos cursos de licenciatura dos anos 60 e 70 não havia preocupação com o comprometimento do futuro professor em relação a um projeto de sociedade, o que em geral concorria para a sua posição acrítica, de mero reprodutor das condições sociais vigentes.

A nossa atividade no magistério teve início no último ano do curso de licenciatura no final dos anos 60. A escola onde trabalhamos era pública e considerada não tradicional, na medida em que as prioridades na aprendizagem diziam respeito à formação do aluno e não à informação, à participação ativa do mesmo em seu aprendizado em oposição à passividade e o comprometimento da escola era com o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno.

Às diretrizes norteadoras do trabalho, juntavam-se atividades que davam consistência e unidade e o tornavam possível.

Essas atividades consistiam em estudo dirigido, supervisionado, estudo do meio, elaboração de projetos, todas elas envolvidas com um tema central proposto para o estudo bimestral. Os professores reuniam-se semanalmente para análise do trabalho, quando refletiam sobre as abordagens mais adequadas ao desenvolvimento do estudo.

A experiência foi rica e marcante neste ginásio pertencente à rede de Escolas Vocacionais do Estado de São Paulo, criada em 27/06/61 e, por obra do governo militar, extinta em meados de 1970.

Por esta ocasião, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo encaminhou ao Conselho Estadual de Educação o ante-projeto Grupo Escolar-Ginásio, sugerindo o término do Exame de Admissão e a expansão da escolarização obrigatória de quatro para oito anos. Ele veio a ser aprovado, em São Paulo, através do decreto 52.353, de 06/01/70.

Com a lei 5.692/71, o ensino obrigatório passou de 4 para 8 anos em todo o território nacional e os grupos e ginásios se adaptaram à nova lei, completando as séries em seus estabelecimentos, de forma a se denominarem pelo decreto 6.907, de 23/10/75, Escolas de 1o. grau.

Dessa maneira, nossa segunda experiência profissional se desenrolou numa Escola de 1o. grau. Nessa nova equipe, encontramos um grupo de professores de 5a. a 8a.

série, licenciados há, no máximo, 8 ou 10 anos, motivados e interessados em realizar um trabalho significativo.

O grupo levava muito a sério as reuniões de planejamento, formulava as metas a serem alcançadas pela escola e, por falta de apoio pedagógico institucionalizado, os próprios professores escolhiam um colega como orientador pedagógico e outro, como orientador educacional. Além disso, cada professor da escola assumia o papel de conselheiro de uma classe.

Essas funções não implicavam nenhum ganho extra e eram realizadas paralelamente à carga didática semanal de cada professor.

O trabalho era intenso: centro cívico de alunos, entrevistas com pais de alunos inadaptados, campeonatos internos, gincanas culturais. A escola era um centro agradável para alunos e professores.

Neste estabelecimento, nos primeiros anos de implementação da junção escola primária-ginásio, não houve, de fato, atuação conjunta dos professores do ensino elementar e aqueles do ginásio mas, passado algum tempo, a interação iniciou-se precária, crescendo ano a ano.

Promoviam-se reuniões conjuntas de planejamento, trocas de idéias sobre os conteúdos específicos de cada disciplina nas diferentes séries, com propostas de seriação e seqüência de 1a. a 8a. séries, por áreas de estudo.

Estávamos bastante envolvidos nessas atividades quando surgiu a oportunidade de participarmos de um curso de licenciatura em Matemática, em que seríamos responsáveis por disciplinas básicas e aquelas de caráter pedagógico, ligadas às questões metodológicas do Ensino de Matemática.

Iniciamos o programa de mestrado em Matemática, ao mesmo tempo que acompanhávamos avidamente as publicações especializadas em Ensino de Matemática.

Eram poucas: revista Educação e Matemática da Editora Scipione (1o. ano: 1979), revista SAPO, Serviço Ativador em Pedagogia e Orientação do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro (início: 1974), o Boletim Gepem, Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática da Faculdade Sta. Úrsula, Rio de Janeiro (1o. número em 1976) e, mais recentemente, a revista do Professor de Matemática, publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (1o. número em 1983). Algumas dessas foram interrompidas, outras surgiram.

Movimentos de professores de 1o. e 2o. graus, organizações de simpósios, encontros promovidos por algumas Universidades, pipocavam aqui e ali e preocupações com o Ensino de Matemática cresceram, ganhando corpo no país.

Projetos de Atualização de Professores, na área de Matemática, surgiram em muitos centros universitários. Participamos, durante anos, deste tipo de atividades: reuniões com professores do ensino elementar, debates, discussão de textos e livros, grupos de estudos com licenciandos, professores do 1o. grau e colegas responsáveis por disciplinas pedagógicas afins.

Durante essa trajetória, nas diversas atividades que, certamente, retrataram um pouco os diferentes momentos pedagógicos da Educação Brasileira, percebemos os anseios de pessoas e instituições em realizar algo significativo no setor educacional. Tudo leva a crer, no entanto, num descompasso entre o desejado e o possível, entre o trabalho desenvolvido e o resultado obtido.

Evidências dessa problemática se fizeram sentir na pesquisa-avaliação do Ensino de Matemática realizada nos anos 80 pela Secretaria de Educação de Estado de São Paulo, em que se analisou o desempenho de alunos de 2as. e 4as. séries, de 228 escolas estaduais, abrangendo todas as Delegacias de Ensino do Estado.

Os temas da investigação foram centrados em Sistema de Numeração, números naturais, números racionais, técnicas operatórias e problemas numéricos de Geometria[12].

Entre os resultados da pesquisa, destacamos o fato da existência de sérias falhas na aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal.

Nas segundas séries, apenas dois índices de acerto foram superiores a 50%. Estes envolviam questões sobre números naturais e operações.

Chamou a atenção o fato de que os índices de acerto nas questões mais fundamentais, que avaliavam a compreensão da representação de quantidades pelo uso do princípio posicional, foram inferiores ao da questão que avaliava a técnica operatória da adição. Existiram, portanto, fortes indícios de memorização sem compreensão.

Podemos dizer, também, que os alunos de 4a. série tinham dificuldades com os números racionais, pois o desempenho não foi bom nas questões relacionadas às operações com esses números representados na forma decimal.

O índice de acerto foi pequeno na questão sobre escrita e leitura de medidas, envolvendo compreensão do sistema de numeração decimal, quanto às relações entre os sub-múltiplos da unidade. Contudo, naquelas questões de cálculo operatório com

[12]São Paulo, Secretaria do Estado da Educação, CENP, Pesquisa Avaliação sobre o Ensino de Matemática, 1981.

números decimais, embora relacionadas aos sub-múltiplos da unidade, houve índices de acerto superiores, sugerindo que foram efetuadas sem a devida compreensão.

Os índices obtidos nas demais questões reforçaram a inferência de que há distorções no Ensino de Matemática, cujas causas provavelmente estejam ligadas à inadequação da disciplina no currículo e/ou despreparo dos professores.

Cabe ressaltar aqui que dados da mesma pesquisa informaram haver mais da metade dos professores desse contingente de alunos entrevistados, com escolaridade de nível superior.

No caso da cidade de São Paulo, esse dado é até superado em pesquisa feita pela Folha de São Paulo, quando se registrou apenas 17% do professorado paulistano sem curso superior[13].

Por outro lado, na mesma pesquisa, agora considerando o universo dos professores de Recife, São Paulo e Porto Alegre, constatou-se que 64% deles tinham feito 2o. grau em escolas públicas e 67% fizeram o curso superior em Universidades particulares.

Merece registro pesquisa apresentada pelo jornal O Estado de São Paulo e editada pela Fundação para o Desenvolvimento da Educação, órgão da Secretaria da Educação paulista. Nela são analisadas as respostas dos professores da rede pública. A figura emergente das entrevistas e da interpretação dos dados é a do funcionário mal pago, contratado em duas ou três escolas, que tem raiva do governo, a quem responsabiliza pela deterioração da escola e do ensino público.

Pelos estudos feitos, o jornal reconhece na realidade educacional paulista um "novo" professor e conclui: "o perfil que se fazia do professor secundário do ensino oficial alguns anos atrás, está superado. Aquele mestre que dominava sua disciplina, que educava em período integral, que sinalizava com seu comportamento o modelo a ser copiado e tinha em troca o reconhecimento da comunidade e do governo, esse perfil mudou. Isso para não dizer que a capacitação profissional do novo professor, feita às suas expensas, começa a deixar a desejar".[14]

Esses dados parecem não comprometer a adequação ou não à realidade educacional dos cursos de formação oferecidos pelas escolas públicas de ensino superior.

Mas, a nosso ver, as universidades públicas não estão isentas de seu compromisso com um novo perfil do professor dos anos 90. Neste perfil, faz-se necessária a competência técnica do professor aliada à necessidade de seu compromisso social para

[13] Folha de São Paulo. "Quem é professor"; Caderno 1: pp 19, 27/setembro/1991.

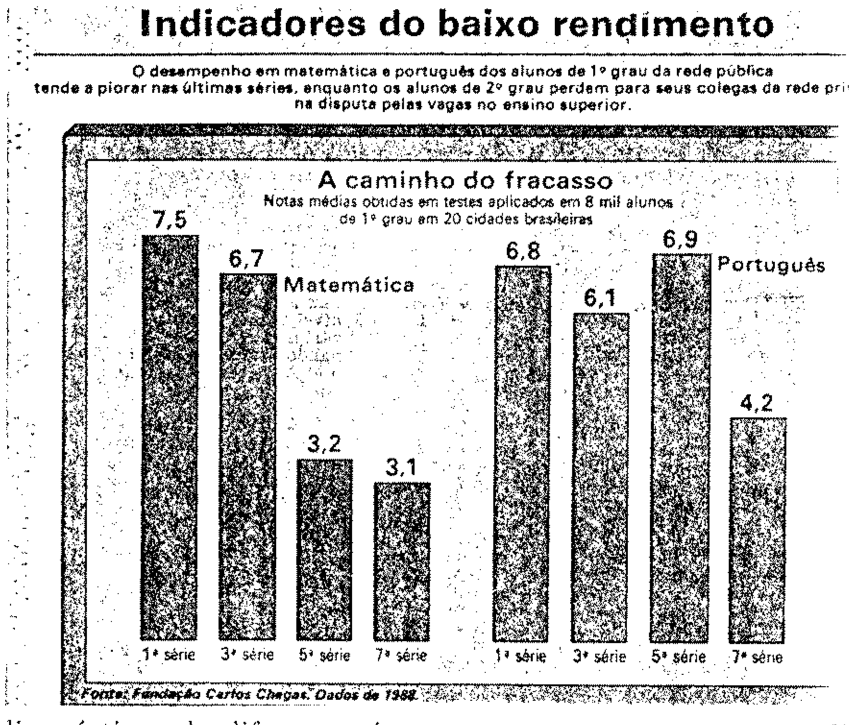
[14] O Estado de São Paulo, "O novo professor". Caderno 1: pp 3, 18/11/1992.

com a realidade escolar.

Outro estudo exploratório feito por Vianna, em 1989, em 15 estados do Brasil e 39 cidades (entre capital e interior), com o objetivo de sondar o nível de conhecimento do aluno em diversas áreas, de 1as., 3as., 5as. e 7as. séries, foi comentado por Bernadete A. Gatti[15]. Segundo ela, em Matemática, as médias de acerto em 30 pontos foram 11, 12, 9 e 9 nas 1as., 3as., 5as. e 7as. séries respectivamente, e a percentagem de alunos que acertou um terço ou menos de questões foi elevado, chegando a 79% nas 5as. e 7as. séries e 57% e 55% nas 1as. e 3as. séries.

Comentários divulgados pela imprensa sobre o mesmo teste de desempenho realizado por Vianna, em 1989, afirmam que os resultados mostraram o estudante na 7a. série, portanto quase no final do 1o. grau, dominando apenas 30% do currículo exigido em Matemática e 40% do de Português[16].

O gráfico abaixo, também divulgado pela imprensa, foi anexado para verificação das notas médias nas disciplinas de Matemática e Português, por alunos de 1o. grau de escolas públicas de 20 cidades brasileiras[17].



Esses diagnósticos de diferentes épocas comprovaram uma aprendizagem ma-

[15] Bernadete A. Gatti, op. cit. 1989.

[16] "Fundação testa desempenho das escolas de 1o. e 2o. graus."; O Estado de São Paulo, pp 12, 20/01/92.

[17] "Indicadores de baixo rendimento". O Estado de São Paulo, pp 12, 20/01/92. fonte Fundação Carlos Chagas.

temática na Escola de 1o. grau, e também nos cursos de formação de professores que precisa ser repensada. As deficiências nos cursos para professores não devem ser tratadas apenas na sua roupagem externa, como mudanças na grade curricular e nas técnicas de ensino, mas sim na sua essência, no aprofundamento do conceito de Educação e Alfabetização, e na percepção efetiva do papel de cada área de conhecimento no ensino de 1o. grau.

No final dos anos 80, o interesse no assunto fez com que as nossas limitações na área de Educação nos incomodassem e nos motivassem à participação em grupos de pesquisa nessa área, o que culminou com o ingresso no Programa de Doutorado em Educação.

Desde o início do Programa, as leituras nos encaminharam para a percepção e para a discussão do significado e importância do trabalho do professor na escola e, em conseqüência, nos indicaram as implicações desses aspectos na preparação do professor.

Saviani, em artigo publicado em 1983, caricaturou apropriadamente as possíveis confusões presentes na prática do professor na sala de aula durante a década de 80: "O professor tem na cabeça os princípios da escola nova, ... ele concebe o processo educativo como tendo o aluno por centro... e tendo como segredo da boa aprendizagem, a atividade do aluno". No entanto encontra a sala superlotada, dificuldade com biblioteca e material didático. "Tem apenas um quadro negro e... giz". Logo, "as condições em que ele pode atuar são as da escola tradicional. Isso significa que ele deverá ser o centro do processo de aprendizagem", deverá transmitir os conteúdos. "Está confuso", se revolta com a situação, "busca apoio com os colegas", mas, o tempo o vai levando a se adaptar. As exigências da pedagogia oficial pregam a eficiência, deve atingir o máximo de resultados, deve executar o planejamento para alcançar o previsto. Se, de uma certa maneira, tem resquícios de autonomia, resiste a aderir ao tecnicismo oficial. Se atualizado, se costuma participar de palestras e simpósios, chegam até ele as críticas da tendência reprodutivista: a escola reproduz as relações sociais vigentes. "Não consegue entender, ... enquanto pensa ... que está ajudando seus alunos ... está cumprindo a função de dominação. O professor chega às raias da paranóia". [18] Este é o quadro contraditório que, em geral, pode se apresentar ao professor: sua cabeça é escolanovista, a realidade é tradicional, rejeita o tecnicismo oficial, e por outro lado, tem a pressão das análises crítico/sociais.

Essas reflexões das contradições do dia-a-dia do professor, aliadas às evidências da trajetória profissional: a licenciatura acrítica, a prática na escola detectando emoções

[18] Demerval Saviani. Tendências e correntes da Educação Brasileira, in Filosofia da Educação Brasileira. Demerval Trigueiro (coord). Rio de Janeiro, Civilização Brasileira, 1983.

e envolvimento no trabalho, por parte de pessoas e instituições, o diagnóstico de diferentes épocas, nada satisfatório da aprendizagem matemática, com os fortes indícios de que as causas não se devem ao nível de escolaridade do professor, nos apontam pistas para as perspectivas na formação e concepção do professor dos anos 90.

Concordamos com Antonio Carlos Ronca (1988) quando comenta:
É preciso que se tenha na formação do professor, em qualquer nível, tanto direcionado para as séries iniciais como finais do 1o. grau, "um fio condutor que dê unidade à teoria e à prática, ... uma união indissolúvel entre reflexão e ação". Reconhece-se a importância e relevância da teoria para uma prática coerente e constante. No entanto, "o fio condutor é o comprometimento do professor com um projeto de sociedade ... Se houver um sacrifício da ação caímos no verbalismo oco e sem sentido ... se houver ... sacrifício da reflexão, a palavra se converterá em ativismo. Este que é ação pela ação". É preciso que o professor "seja capaz de voltar-se sobre si mesmo, de tornar-se objeto de sua consciência..., de perguntar-se sobre si, sobre a própria atividade e também sobre o mundo no qual está inserido, ... captar e dar um significado a essa realidade", [19] ser capaz de transformá-la.

Também concordamos com Araújo Filho (1987) ao insistir:
"É preciso ir além de simples aparência da realidade, desmistificando-a e colocando-a a nu, face a face com suas contradições e com as forças que a envolvem e a determinam para, conhecendo-a à luz da história, se poder buscar possíveis alternativas de superação" [20].

E acreditamos como Saviani (1983) que:
"A partir daí, clareia-se o quadro, a tênue chama da esperança se aviva e se transforma em farol que aponta o caminho - a luta pela expansão das escolas, pela ampliação do tempo diário de permanência da criança na escola, pela diminuição da evasão e repetência, de modo a convertê-la em instrumento eficaz de conteúdo significativo a todas as crianças" [21].

É preciso que o professor esteja atento ao resultado do seu trabalho.

Como disse Libâneo (1986):
"Há um confronto do aluno entre a sua cultura e a herança cultural da humanidade, entre seu modo de viver e os modelos sociais desejáveis para um projeto novo de sociedade. E há um professor que intervém, não para se opor aos desejos e

[19]Antonio Carlos Ronca. Desmistificação e comprometimento, in Caderno Cedes, São Paulo, no. 8: pp 5-16, 1988.

[20]Luiz Soares de Araújo Filho aborda essas questões de desmistificação da realidade na problemática de formação/carreira/salário e organização política do professor, op cit, 1987.

[21]Demerval Saviani, op cit, 1983.

necessidades ou à liberdade e autonomia do aluno, mas para ajudá-lo no seu esforço de distinguir a verdade do erro, para ajudá-lo a compreender as realidades sociais e a sua própria experiência" [22].

É preciso mais, é preciso que o professor esteja consciente de que:

"A contribuição essencial da educação escolar para a democratização da sociedade consiste no cumprimento de sua função primordial: o ensino. Valorizar a escola pública não é apenas reivindicá-la para todos, mas realizar nela um trabalho docente diferenciado em termos pedagógicos" [23].

A realidade da formação e do dia a dia do professor e o diagnóstico do ensino de Matemática se contrapõem às nossas perspectivas atuais na preparação e concepção do futuro professor. Essas perspectivas se apoiam, comprometedoramente, na análise apurada, no diagnóstico certeiro e na poesia implícita dos textos de nossos mais combativos educadores brasileiros e nos induzem a algumas linhas de atuação no curso de formação:

- teoria e prática envolvida com um projeto de sociedade democrática;
- reflexão sobre a realidade e perspectiva de atuação do professor;
- comprometimento com trabalho pedagógico/didático significativo.

1.3 O Material de Apoio e as Questões Emergentes

No caminho do conhecimento explícito e do desnudamento da realidade do professor, fizemos opção para conhecer melhor o material de apoio que se apresenta ao professor no seu trabalho, em particular o livro didático, recurso preferido e mais próximo.

A intenção, nessa seção, é discernir possíveis influências do livro didático, em especial do livro didático de Matemática, detectar deficiências e características retratadas e divulgadas por esse veículo ao longo desse século.

A escolha dos livros foi feita de maneira informal, colhendo informações de colegas de magistério, outrora estudantes, agora professores ou ex-professores de Matemática. A eles, na maioria oriundos de diferentes regiões do estado, foi solicitado indicar os livros de Matemática conhecidos no passado e no presente.

[22] José Carlos Libâneo, op cit, 1986.

[23] Demerval Saviani, op cit, 1983.

Ao consultar esses livros didáticos e manuais de Matemática, constatamos que, exceto pelas diferentes conotações atribuídas à época e suas prioridades, as preocupações com a inclusão da Matemática no ensino básico têm-se firmado em duas vertentes, que discutimos a seguir.

Na obra de Trajano (1905), Arithmetica Progressiva, o autor afirmou:
"O estudo da Arithmetica tem duas grandes vantagens: a primeira é saber calcular, isto é, resolver facilmente qualquer problema de Arithmetica, e a segunda é desenvolver as faculdades intellectuaes por meio do raciocínio exercido nos processos de cálculos".

Na proposta curricular do 1o. grau, sugerida para o Estado de São Paulo (1988), um dos últimos ensaios pedagógicos da década de 80, do qual participaram nas discussões e sugestões inúmeros professores, temos registrado:

"Ela (a Matemática) é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como são os que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo, etc. Ela (a Matemática) desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível".

Apesar de aspectos comuns, percebemos, claramente, focos diferentes de interesse.

No primeiro caso, a "Arithmetica" deve fornecer instrumentos para cálculos, entendidos como instrumentos para resolver problemas de Aritmética. Aqui, não há compromisso em associar o ensino de Matemática com a realidade. Os problemas de Aritmética podem estar fechados dentro de si mesmos, numa ciranda entre números e operações.

No segundo caso, a Matemática fornece instrumentos para lidar com aspectos quantitativos da realidade, o que favorece a relação Matemática e realidade.

A ênfase sugerida para o primeiro caso foi reforçada pelo próprio autor quando explicitou o seu entendimento de desenvolver habilidades mentais, por exercitar o raciocínio nos processos de cálculo.

Bastante diferente é a extensão dada às potencialidades intelectuais favorecidas pela Matemática, no segundo caso: elas transpõem, elas extrapolam às situações práticas da realidade, ganhando vulto, adquirindo liberdade e perseguindo a imaginação no mundo abstrato da mente.

Esses dois materiais de consulta do professor, publicados em diferentes épocas retratam diferentes prioridades educacionais e refletem características próprias das tendências pedagógicas desses tempos.

Nessa linha de análise, percorremos alguns dos livros didáticos deste século e procuramos identificar influências e tendências retratadas e divulgadas através deles.

Os livros didáticos de Matemática, anteriores a 1930, usavam a programação do Colégio D. Pedro II, do Rio de Janeiro, como modelo e externavam a preocupação dos autores com os exames preparatórios aos cursos superiores.

Os conteúdos não se apresentavam seriados, mas organizados em compêndios de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Nos compêndios de Aritmética, estudavam-se as operações elementares usuais, acrescentadas à radiciação quadrática e cúbica e, algumas vezes, logaritmos. Os números envolvidos nessas operações eram os inteiros, frações ordinárias e decimais, e o estudo do Sistema de Numeração Decimal incluía comentários breves sobre outros sistemas.

A abordagem dada às operações, em geral, seguia um esquema rígido: definições, regras de cálculo, prova dos nove, provas simples, demonstrações. Em alguns livros encontramos termos como corolário e teorema para designar as propriedades das operações. Essas etapas se repetiam para exemplos numéricos diferenciados e não se usava linguagem simbólica ao generalizar regras ou propriedades.

As demonstrações efetuadas para exemplos particulares eram, na verdade, as justificativas das regras de cálculo, justificativas essas, que, infelizmente, desapareceram gradativamente dos livros posteriores a 1930 e tornaram a aparecer eventualmente nos anos 80 e maciçamente após 1986.

Fatores primos, critérios de divisibilidade, m.d.c. e m.m.c., razão, regra de três, porcentagem, juros, estavam incluídos entre os assuntos dos compêndios de Aritmética.

Todo conteúdo era transmitido pelo livro numa forma enciclopédica, árida, sem preocupação com motivação ou linguagem adequada a leitores jovens. O livro era muito mais adequado ao leitor adulto, no caso, o professor.Quanto à apresentação gráfica, os títulos ocupavam pouco espaço e a eles era dado destaque pelo uso do negrito. As ilustrações apareciam em número bem reduzido.

No final da obra, ou no final de cada capítulo, encontravam-se os "problemas", termo usado para tudo que não estivesse resolvido: contas, expressões, perguntas, etc, onde estavam incluídos inúmeros exercícios de mesmo tipo e onde cálculos e mais cálculos se faziam necessários.

Pelas observações feitas, pudemos perceber que o material de apoio do professor refletia a Pedagogia clássica predominante nesse período, que preconizava uma educação centrada no conhecimento e no professor. As ênfases neste contexto estão na instrução, na informação, na disciplina. Os conteúdos, os procedimentos didáticos, não têm relação com as experiências, com o cotidiano do aluno, muito menos com a sua realidade social. A repetição de exercícios do mesmo tipo, a memorização de muitas fórmulas visava formar hábitos e, dessa forma, disciplinar a mente.

Os livros do final da década de 30 e, principalmente, aqueles impressos depois de 1943, baseados nas reformas Campos e Capanema, mostravam preocupações com a motivação e o nível do desenvolvimento do aluno.

Os compêndios dão lugar, pouco a pouco, aos livros seriados para o 1o., 2o., 3o. e 4o. ano do curso ginasial.

Nos prefácios dos livros, em geral, os autores esclareciam que as demonstrações rigorosas e "inacessíveis" seriam substituídas por raciocínios práticos e intuitivos, mais próprios ao nível de inteligência do aluno, e que "notícias" históricas e problemas curiosos estariam incluídos nos conteúdos a fim de amenizar a aridez do estudo de Matemática.

Na abordagem das operações, alguns termos como definição, corolário, teorema, demonstração foram menos usados em Aritmética, embora persistissem em se tratando de divisibilidade e números primos.

As seqüências no desenvolvimento das operações passaram a ser: noções ou preliminares, prática da operação, regra, propriedades das operações, prova dos nove e simples, princípios e aplicações. Eventualmente, encontravam-se regras acompanhadas de suas justificativas.

Exercícios e perguntas eram feitas no final de cada capítulo e não diferiam daquelas dos livros anteriores a 1930. Notas históricas e curiosidades apareciam ao longo do conteúdo. Houve mudanças na ortografia e na linguagem menos rebuscada, mais direcionada ao estudante jovem. A diagramação estava mais agradável, com mais espaços entre os parágrafos.

Os assuntos estavam desenvolvidos de maneira mais acessível, com exemplos, aplicações por etapas de dificuldade, ficando mais fácil o seu entendimento. Os autores deixaram de discorrer o assunto de forma enciclopédica. Pareciam ter mudado timidamente o seu foco de atenção do assunto para o aluno.

Na década de 60, durante a vigência da Lei de Diretrizes e Bases de 1961, as coleçõs didáticas tiveram seus títulos alterados para Curso Moderno de Matemática, Matemática para a Escola Moderna, Matemática Moderna. Esses "ares de modernidade"[24] tiveram influência do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática, G E E M, fundado em São Paulo, em 1961, cujos participantes eram pessoas estudiosas de novos caminhos para o Ensino de Matemática.

Esse grupo, tendo sido influenciado por pesquisadores europeus como Papy e Dienes, adotou em seus livros a linguagem da teoria dos conjuntos, considerada unificadora de toda a Matemática e baseada em tendências pedagógicas americanas e européias, divulgou as idéias do "aprender fazendo."

Nos prefácios dos livros dessa época apareciam referências "aos novos métodos e processos de ensino" e, pela primeira vez, apareceram sugestões de materiais didáticos para o desenvolvimento de alguns conteúdos. Um dos livros desenvolveu temas de estudo de Matemática, através da técnica de estudo dirigido.[25]

Os autores, em geral, enfatizaram o estudo experimental da Geometria, relegando ao plano secundário o ensino axiomático.

A abordagem dos assuntos partia sempre de uma situação particular envolvendo o conceito a ser estudado, seguido pela definição, propriedades e exercícios. As propriedades foram, pela primeira vez, registradas em linguagem simbólica, utilizando letras, num caráter bastante genérico. Desapareceram da Aritmética os termos corolário, teorema e demonstração.

Os exercícios eram classificados numa variedade de tipos: completamento, escolha múltipla, indicação de verdadeiro e falso, todos esses facilitando o "chute", pois não requeriam do aluno justificativa ou registro do processo de solução.

A linguagem utilizada era acessível, a leitura agradável, a explicação e a resolução do exemplo eram de fácil entendimento, as dificuldades foram trabalhadas etapa por etapa, e a seleção de exemplos e exercícios seguiu rigorosamente o critério do aumento gradativo de complexidade. As ilustrações foram mais usadas, as cores surgiram nos resumos e quadros, às vezes, nos sub-títulos.

Essas características do livro didático dos anos 60 espelhavam fortemente a filosofia de Escola Nova, onde a educação estava centrada na criança, na vida, na atividade, enfatizando a experiência, a participação, a criatividade e a descoberta. A educação passou a ser um processo interno, partindo das necessidades e interesses individuais onde o "aprender fazendo" esteve sempre presente.

---

[24]Termo usado para caracterizar esse movimento, em texto de Antonio Miguel e outros. "Álgebra ou Geometria, para onde pende o pêndulo." Campinas, FE, UNICAMP, 1991.

[25]Scipione di Piero Neto - Matemática para a Escola Moderna, 1a. série ginasial. São Paulo, I B E P, 1964.

Os princípios da Escola Nova foram bastante difundidos nos cursos de Licenciatura no período pós-1960 e alguns de seus métodos foram adotados em escolas experimentais, comunitárias ou particulares, como o método Montessori, o método dos centros de interesse de Decroly e o método dos projetos de Dewey.

Com a lei 5692 de 1971, as disciplinas foram organizadas em torno de um núcleo obrigatório em nível nacional, e uma parte diversificada a ser definida pelas escolas, sob aprovação dos respectivos Conselhos Estaduais de Educação, de forma a garantir o desenvolvimento das potencialidades individuais, a preparação para o trabalho e o atendimento às necessidades regionais.

Com isso, as Secretarias Estaduais de Educação passaram a elaborar suas próprias propostas curriculares. A proposta paulista de Matemática, divulgada a partir de 1975, retratava o tecnicismo pedagógico da época, predominante nos meios educacionais, supervalorizando os planos de ensino e os objetivos comportamentais na linha de Bloom e seus seguidores, embora a equipe organizadora tenha apresentado, no texto, metodologias fundamentadas nas idéias de Gategno, Castelnuovo, Papy, Dienes, Lucienne Felix e Piaget. Essa equipe sugeria ao professor tentar unificar a Aritmética, a Álgebra e a Geometria em torno da linguagem e conceitos da Teoria dos Conjuntos, sem torná-la, porém, repetitiva em cada série.

As estruturas algébricas, a noção de função e suas aplicações na Geometria, ficaram em evidência no texto. Por influência das idéias de Bourbaki, na Aritmética e de Felix Klein, na Geometria, as transformações isométricas e homotéticas foram sugeridas para o estudo de congruência e de semelhança de figuras.

Aconselhava-se a fazer uso da experiência do aluno em atividades e manipulação de objetos para estabelecer-se a passagem gradativa de noções intuitivas à aquisição de conceitos básicos até alcançar a abstração e o rigor matemático.

Os livros editados, a partir daí, reservavam um capítulo ou incluíam um manual dedicado ao planejamento do professor, onde eram dadas sugestões de cronogramas, objetivos gerais e operacionais para o desenvolvimento do trabalho didático. Nessas orientações afirmavam priorizar a compreensão, a criatividade, a descoberta de idéias e a generalização. O livro didático tinha, portanto, duas partes bem definidas: o manual do professor e o Caderno de Atividades do aluno.

No Caderno de Atividades, os autores utilizavam a linguagem coloquial para direcionar tarefas e ações a serem executadas pelo aluno. Os exercícios eram abundantes, de diferentes tipos: exercícios de fixação, de aprendizagem, de aplicação, de reforço. O Livro Didático passou a ser um livro descartável.

No estudo de Geometria, os autores optaram pela apresentação intuitiva com poucas demonstrações, apesar de terem dado destaque para o raciocínio dedutivo como ferramenta básica em qualquer atividade intelectual. A linguagem da Teoria dos Conjuntos envolvia todos os assuntos e precedendo o estudo de números, vinham pela primeira vez as noções de relação, função e correspondência biunívoca.

As obras buscavam uma "organização coerente", com os "assuntos interligados" e os exercícios "partindo do mais simples para situações novas". As cores e as ilustrações eram muitas: lembretes, diagramas, quadros e tabelas. Utilizavam os mais modernos recursos gráficos na tentativa de prender a atenção do aluno.

As coleções didáticas ganharam os mais variados nomes: Matemática - um processo de criação; Matemática - um processo de auto-instrução.

Esses livros reproduziam a tendência tecnicista na Educação onde as informações, os princípios, as leis, foram ordenados numa seqüência lógica e psicológica, considerando-se, como matéria de ensino, apenas o que era redutível ao conhecimento observável. A escola funcionava como modeladora do comportamento humano através de técnicas específicas. O planejamento didático foi supervalorizado em detrimento de sua execução.

Os marcos da implantação do modelo tecnicista foram as leis 5540/68 e 5692/71, que reorganizaram o ensino superior e o ensino do 1o. e 2o. graus.

No início dos anos 80, a atenção do país estava voltada para a transição do governo militar às instituições civis. No decorrer dessa década, o Brasil, de norte a sul, de leste a oeste, se levantou para a luta das diretas na escolha do seu governante máximo. Foi um "show" de movimentação democrática e de educação cívica em todas as instâncias.

Paralelamente, em Educação, as obras de Coleman (1966), de Jencks (1972), e de Bernstein (1977) sobre os fatores que influíam na desigualdade de oportunidades no convívio escolar provocavam polêmica nos meios educacionais altamente motivados pela corrente democratizante do país.[26]

Segundo Coleman (1966), o ambiente familiar tinha relação bastante significativa com as diferenças de rendimento das crianças na escola. Além disso, suas pesquisas apontavam para a escola como uma fonte de desigualdades, pois as diferenças no rendimento das crianças mais pobres aumentavam à medida que a criança permanecia mais tempo na escola.[27]

[26]Teresa Roserley (Rose) N. da Silva focaliza estas questões em "Influências teóricas no Ensino e Currículo no Brasil". Cadernos de Pesquisa, São Paulo, no. 70: pp 5-19, agosto/ 1989.

[27]Apud Jerome Karabel and A. H. Halsey. Power and Ideology in Education. New York, Oxford University, 1977.

Jencks (1972) questionava a escola quanto a ser capaz de produzir uma mudança social e negava-a como instrumento na obtenção de maior igualdade social. Na verdade, denunciava-a como instrumento de manutenção das desigualdades sociais.[28]

Por outro lado, Bernstein (1977), socio-lingüista inglês, negava que as deficiências das crianças mais pobres e de seus familiares fossem responsáveis pelo fracasso de seu desempenho escolar e responsabilizava por esse fracasso as relações de classes presentes no trabalho escolar.[29]

As obras de Bourdieu e Passeron (1975) e de Baudelot e Establet (1975) enfocavam o papel reprodutor da escola, que contribuía para a manutenção dos desiquilíbrios sociais, e questionavam a possibilidade de ocorrência de qualquer mudança.[30]

Essas linhas de análise influenciaram os educadores brasileiros, fazendo surgir um grupo preocupado com a valorização da escola e de seus conteúdos, como um espaço de luta importante à superação das desigualdades sociais.

Enfim, a corrente democratizante do povo na luta pela conquista do direito de escolher seus governantes e a luta dos educadores na busca de um ensino e de um currículo mais adequado às condições concretas de nossa sociedade, tornaram obsoletos os guias curriculares anteriores e fizeram surgir, em 1986, novas propostas curriculares para nossas escolas de 1o. grau.

Os guias paulistas foram elaborados com maior participação dos professores, seja através de questionamento, críticas ou mesmo sugestões. A primeira versão circulou em todas as Delegacias de Ensino e seus monitores foram responsáveis por colocá-la em discussão, em reuniões de professores, coletando suas idéias e levando-as à equipe redatora para reformulações, até surgir a redação final de 1988.

Na nova proposta, percebeu-se as idéias de Bruner na abordagem do currículo em espiral, na perspectiva antropológica de desenvolvimento (o homem produz o mundo e este produz um novo homem) e na preocupação com os significados em detrimento da memorização.

Percebeu-se influências de Piaget no respeito ao desenvolvimento cognitivo da criança. Ao professor deixou-se a tarefa de selecionar atividades e conteúdos e de estimular as crianças, expondo-as às situações prévias apropriadas ao desenvolvimento de cada assunto.

[28] Apud Jerome Karabel and Halsey, op cit, 1977.
[29] Apud Jerome Karabel and Halsey, op cit, 1977.
[30] Apud Teresa Roserley (Rose) N. da Silva, op cit, 1989.

As idéias de Vygotsky emergiam também da proposta, sugerindo uma nova fonte de busca no ensino de Matemática no Brasil: a Matemática e a linguagem.

Enfim, como conseqüência de toda a movimentação democrática e daquelas preocupações citadas anteriormente que persistiam nos meios universitários, e eram divulgadas em simpósios e reuniões, surgiram pequenas mudanças nos livros didáticos a partir de 1984.

Uma característica marcante nos livros desse período foi o de centrar a atenção do aluno para a ligação da Matemática com o mundo em que vive. Os autores dirigiam-se aos alunos, apontando os destaques de suas obras:

"Compreender as idéias básicas da Matemática e, quando necessário, saber aplicá-las na resolução de problemas do dia a dia".[31]

"Usar sua observação e sua capacidade criativa para melhor compreender os modelos matemáticos e ver como a Matemática está ligada ao mundo".[32]

"Aplicar as técnicas de cálculo a problemas ligados ao seu cotidiano".[33]

Os livros deixaram de ser o caderno de atividades e a eles "ficou reservado o papel de material de apoio às atividades didáticas." Os títulos inovaram novamente: Matemática Aplicada, Matemática e Realidade, Matemática e Vida, Aprendizagem em Educação Matemática.

Como resultado da análise dos livros, percebemos que a influência de certos movimentos pedagógicos foi muito forte em determinados períodos, tanto na formulação de leis e decretos, como na produção das coleções didáticas, podendo ser detectados claramente três momentos da Educação Brasileira estudados por Saviani (1983) e Libâneo (1986): perspectiva clássica, renovada e tecnicista.

Após 1984, os livros didáticos timidamente mudaram do modelo tecnicista para preocupações com a realidade do aluno, anteriormente percebida na proposta curricular.

Paralelamente à influência exercida pelos movimentos pedagógicos sobre os autores, é certo que eles sofreram também, pressões das editoras, às quais salvo exceções, pouco importa o conteúdo do livro. A forma e a apresentação pesam mais para o consumo de estudantes, atualmente representando um grande mercado consumidor.

[31]Giovanni e Giovanni Junior. Aprendizagem e Educação Matemática, 5a. série. São Paulo, Editora F T D, 1990.

[32]Id. Ibidem.

[33]Gelson Iezzi et. alii. Matemática e Realidade, 5a. série, Atual, 1984.

Assim sendo, as editoras e os autores em geral se preocuparam em seguir leis e decretos do Conselho Federal de Educação, sugestões das equipes de assessoria da Secretaria da Educação e leis de mercado, em detrimento de preocupações mais profundas com as necessidades de professores e alunos.

Os livros, com raras exceções, divergem muito pouco entre si, pouco estimulam a reflexão e a crítica e, embora se deseje que o livro didático seja um instrumento auxiliar no trabalho do professor, pesquisas têm mostrado que os professores os utilizam como um "padrão de excelência" a ser adotado na aula.

Pesquisas feitas por Azevedo (1981), em escolas públicas de Recife, e outras, realizadas no Rio, por Nilda Alves (1987), norte e nordeste, por Batista de Oliveira (1988), em Curitiba, por Bittencourt (1981), e comentadas por Bárbara Freitag (1987), apontam nesta direção e denunciam que a maioria ds professores não tem critérios próprios para a escolha do livro adotado. Muitos justificam a adoção de um determinado livro, por tê-lo recebido gratuitamente da Editora, e outros por ter sido o livro indicado por um colega.

Segundo Freitag (1987), "Tudo se baseia no livro didático. Ele estabelece o roteiro de trabalho para o ano letivo, dosa as atividades de cada professor no dia-a-dia da sala de aula e ocupa os alunos por horas a fio em classe e em casa."

Portanto, a seleção e o uso do livro didático dependem da habilidade e do nível de formação do professor. Dessa maneira, com todos esses riscos e interesses em jogo, são ainda mais preocupantes as fortes evidências de que os autores, embora tentem passar uma idéia da Matemática mais ligada ao cotidiano do aluno e, de fato, tenham feito "mudanças de superfície" no "design" e na linguagem, não têm conseguido romper com a sua concepção tradicional da disciplina.

A **Matemática continua sendo mostrada como algo pronto e acabado, com verdades irrefutáveis, neutra no sentido das influências da sociedade na sua construção, bem como das conseqüências do seu progresso na transformação da qualidade de vida.** Salvo as raras exceções, **os livros passam uma idéia da Matemática, como área de estudo sem história, sem valorizarem a evolução gradativa dos conceitos matemáticos.** [34]

Com essa visão, agora clara, da importância estratégica do livro didático no funcionamento do sistema educacional e das distorções possíveis no seu uso e produção, que também passam pela habilidade e pelo nível de formação do professor, completa-

[34] Imenes, em sua dissertação de mestrado, também analisa os livros didáticos de Matemática. Porém, não foi seu objetivo relacioná-los com expressões do pensamento pedagógico. Ele aborda aspectos metodológicos interessantes relacionados ao fracasso do ensino de Matemática. Veja em "O fracasso do ensino e da aprendizagem de Matemática". Rio Claro, UNESP - 1989.

se o quadro de reflexões necessárias para reforçar a importância da qualificação do professor nos moldes preconizados por este texto.

Acresce-se àquelas linhas de atuação prescritas na seção 1.2, pag. 18 , a preocupação com a reflexão crítica na seleção e no uso do material de apoio ao trabalho do professor.

Ainda, essa rápida incursão pelos livros didáticos colaborou para delimitar a nossa pesquisa ao campo da Aritmética, tema dos mais comuns e necessários no ensino do 1o. grau e, por conseqüência direta, nos cursos de formação de professores, em qualquer nível.

Nosso interesse nessa área se restringirá aos sistemas de numeração, ao conceito de número, e sua ampliação.

Outro fato de destaque, resultado das análises feitas, é a fixação da ênfase da pesquisa no eixo histórico-cultural.

Logo, nosso foco de atenção é **resgatar entre os conceitos aritméticos, aqueles de número e sua representação, sua evolução e seu desenvolvimento histórico**, de forma a **identificar as influências sociais e culturais na construção desse conhecimento matemático**, bem como **reconhecer o papel do homem - sua curiosidade intelectual e seu espírito criativo - ao extrapolar esse conhecimento além da fronteira do imediato**, aspectos esses não valorizados nos livros didáticos e nos cursos de formação de recursos humanos.

1.4 O Quadro de Referência e o Enfoque da Análise

No estudo até aqui realizado verificamos, numa abordagem intuitiva, que a vivência estudantil e as experiências profissionais não estiveram dissociadas das discussões teóricas sobre o panorama educacional geral, efetuadas nos artigos e nos autores analisados. Elas não se contradisseram com os resultados apresentados por estudos sobre o desempenho do aluno na área de Matemática, nem desmentiram as contradições do dia-a-dia no trabalho do professor, mas foram além, apontando indícios da existência de grupos de professores e instituições educacionais interessadas num trabalho sério.

Por outro lado, esse mesmo estudo apontou deficiências nos cursos de formação de professores e no material de apoio - o livro didático-pontos nevrálgicos no processo de revisão do ensino de 1o. grau.

Essa trajetória colaborou para fixarmos características imprescindíveis, a nosso ver, ao professor dos anos 90, as quais devem ser perseguidas na definição do perfil desse profissional.

Nessa abordagem, em que o empírico e o teórico se mesclaram, o desnudamento da realidade do professor contribuiu para o discernimento de algumas diretrizes na nossa atuação em curso de formação.

Queremos enfatizar que a preocupação primeira, não a mais forte, porém, de identificação de dificuldades no ensino, em particular no ensino de Matemática, por tabela, na qualificação do professor, não foi o fim desse trabalho - foi o começo.

E com a compreensão adquirida nessa introspecção subjetiva e objetiva, na realidade do professor e no seu material de trabalho - o livro didático, **estabelecemos a ênfase histórico-cultural para a análise da evolução dos conceitos de Aritmética, em especial, do conceito de número, sua representação e suas relações**, eleitos o centro de interesse da pesquisa.

Por certo, nossa experiência profissional em cursos de formação de professores, fomentou inquietações e angústias relativas às três grandes áreas da Matemática na escola de 1o. grau: Aritmética, Álgebra e Geometria.

Entretanto, alguns anos passados, estivemos particularmente interessados na controvérsia entre memorização e compreensão de conceitos e técnicas de cálculos aritméticos, resultando em dois textos, que favoreceram as justificativas e os porquês, na linha dos Fundamentos da Aritmética Elementar, ou seja, no caminho do esclarecimento do conceito e da técnica, no seu estágio atual de desenvolvimento[35].

Assim, ao nos depararmos, na análise efetuada em seções anteriores, com deficiências do aluno em Matemática, e com os indícios do despreparo do professor para repensar o ensino dessa disciplina e o papel dela no currículo da escola de 1o. grau, optamos por fixar nossa pesquisa na área de Aritmética, em que já tínhamos iniciado algum trabalho e na qual pudéssemos esclarecer algumas questões.

Naturalmente, nesse campo, do conceito de número, de sua representação e de sua operacionalização, derivam os conceitos de razão, proporção, divisibilidade, números primos e propriedades, múltiplos e divisores comuns. Esses são os motivos da escolha do **número e suas relações**, como centro da pesquisa.

---

[35]a) Carmen M.G. Táboas. Matemática para professores de 1a. a 4a. séries - um desenvolvimento compreensivo. DM/UFSCar, 1986.

b) Carmen M.G. Táboas, co-autora. Sobre Critérios de Divisibilidade, Revista do Professor de Matemática, vol.6: pp 21-24, 1o. sem/85.

A construção do conceito de número pelo aluno passa por dificuldades envolvendo grandezas discretas e contínuas e suas representações. Nas etapas de dificuldades é importante a interação do aluno com objetos da realidade, com valores da sua cultura, com indivíduos do grupo social, sugerindo que a **história desse conhecimento** - na qual o homem, a curiosidade, a cultura e a interação social dele com grupos distintos tiveram papéis importantes - **deva ser motivo de análise em cursos de formação de professores de qualquer nível.**

Dessa forma, **a ênfase histórico-cultural, no estudo da Aritmética**, não levada em conta nos livros didáticos, nem nos cursos de formação, salvo honrosas exceções, **é o eixo na pesquisa.** Essa opção deverá fornecer subsídios para se repensar o papel da Matemática no currículo da escola do 1o. grau e para sinalizar um caminho nos cursos de formação de recursos humanos para a Educação.

Inúmeros são os livros e artigos que tratam dos conceitos aritméticos elementares, e inúmeros são também aqueles que tratam da História da Matemática, como pode ser conferido em nossas referências bibliográficas.

Contudo, insistimos: nosso objetivo é coletar, desses livros e artigos, os fatos e as opiniões que, trazidos à tona, analisados e coerentemente relacionados, mostrem a evolução do conceito de número e dos sistemas de numeração bem como o seu fluir por entre as influências sociais e culturais.

A cultura é, claramente, um elemento construtivo do desenvolvimento do ser humano, por conseqüência, da produção desse ser nas suas dimensões - individual e coletiva - o que deverá transparecer claramente na gênese do assunto a ser pesquisado. Desse modo, o assunto e os efeitos da interação social entre grupos distintos são entendidos como uma unidade pois, de fato, eles o são.

Na análise do trabalho, a situação de confronto entre o conhecimento de um grupo e o conhecimento de outro provoca um conflito que é a mola propulsora da dinâmica do desenvolvimento. Essa é a garantia de que o desenvolvimento não é linear e de que o fato histórico é estudado em seu processo de mudança.

Estabelecidos o tema e as prioridades da pesquisa, nos concentramos nas questões da Aritmética Elementar, surgidas no decorrer de nossas atividades em curso de formação, que os fundamentos adquiridos na licenciatura e mestrado em Matemática não permitiam responder de pronto, com a profundidade desejada. Organizamos a investigação em torno de algumas dessas questões:

- Quais fatos influíram, de que maneira as dificuldades foram superadas por diferentes povos, na conquista dos princípios de nosso atual sistema de numeração?

- Nossa língua é portuguesa, portanto nosso alfabeto é latino. Como ocorreu a aquisição e quais fatores contribuíram para o uso do sistema de numeração hindu-arábico entre os povos ocidentais?
- Como ocorreu, quando e quais sociedades participaram da ampliação do número natural para racional, inteiro e real?
- Na ampliação do número, quais foram os desafios, as dúvidas surgidas, as crises, as controvérsias, os conceitos pré-concebidos, até a superação dos impasses?
- Como os diferentes povos superaram as barreiras para a operacionalização desses números na solução de problemas?
- Quais foram as forças desenvolvimentistas da Aritmética elementar? Como cada uma delas influiu na construção do conhecimento aritmético?

Capítulo 2

Uma Visão da Gênese e da Evolução Histórica do Conceito de Número e sua Representação

Neste capítulo, sintetizamos a pesquisa realizada, selecionando os dados importantes para a análise a ser efetuada no capítulo 4. Não se trata de um conglomerado de informações de conteúdo, nem um mero relato sobre o foco central: números e suas relações. Procuramos, ao contrário, dar uma visão histórica que deixe emergir as mudanças e os saltos qualitativos que ocorreram nas concepções e idéias a partir da crítica do fato histórico.

Pretendemos que essa visão venha a ser útil no momento da opção por um desenvolvimento desse tema nos cursos de formação de professor de qualquer nível. É importante ressaltar deste ponto de vista, que a medida da efetividade desses cursos está na formação de quadros de professores competentes dentro do magistério.

Nossa preocupação essencial é percorrer o caminho feito pelo homem, na sua necessidade básica de contar, expressar e registrar essa contagem, estabelecendo, portanto, a evolução do conceito de número, a sua representação em sistemas de numeração, as operações, relações e inferências a partir dele.

Não é, certamente, um caminho fácil e sem tropeços. Há avanços e retrocessos, mas é um caminho fascinante e longo, sendo a necessidade drástica de síntese a grande dificuldade que encontramos em apresentá-lo.

Segundo Prado (1990), é importante, ao fazermos o estudo da evolução de um conceito, termos claros os períodos determinados de acordo com as características exibidas pela Matemática dominante. Essa divisão pode ser estabelecida baseada na cultura da época, na opinião de Struik e Kline, ou em função da notação simbólica e da cadeia de argumentos lógicos, na opinião de Byers.

Neste texto, pelo foco de interesse em jogo, ratificamos as idéias de Struik e Kline e consideramos os períodos a serem analisados, assim distribuídos:

— A origem prático-utilitária; do surgimento do homem até o século VI a.C.

— A matemática da razão; do século VI a.C. até o século VI d.C.

— O ecletismo matemático e as inovações tecnológicas; do século VI d.C. até o século XVIII d.C.

— A abstração consciente, as investigações lógicas; do século XVIII d.C. até nossos dias.

2.1 A contagem, o registro de quantidades e os cálculos em tempos antigos

As primeiras sociedades humanas eram de pescadores e caçadores. O homem vivia em cavernas e suas energias eram usadas principalmente para recolher alimentos, onde fosse possível encontrá-los. Era o começo da era paleolítica. Fazia instrumentos de caça e pesca, desenvolvia rudimentos de linguagem e enriquecia as cavernas com gravuras que remontam a 25 000 a.C. Existem, porém, evidências de contagem realizada muito tempo antes, a partir de 50 000 a.C.

Mesmo num estágio de desenvolvimento social muito primitivo, o homem demonstra ter a faculdade do *senso numérico*[1], pois é capaz de reconhecer quando algo é retirado ou acrescido a uma coleção, embora essa faculdade seja limitada pela falta de artifícios auxiliares ao discernimento de quantidades.

Estudos sobre povos primitivos mostram que, quando estes não alcançam a etapa de comparação com os dedos da mão, dificilmente conseguem discernir o *quatro* e, definitivamente, o *sete* não o conseguem[2].

A percepção numérica combinada com o artifício da contagem levou a extraordinários progressos em eras pré-históricas. O caminho começa a ser trilhado fazendo

[1]Termo utilizado por Karl Menninger (1958) e por Tobias Dantzig (1970).

[2]O.Koechler (1956) aprofunda essa discussão e relaciona esta habilidade a de certas espécies animais.

correspondência um-a-um entre coleções de objetos e transformando esse ato num importante recurso de comunicação: "tantos peixes quantas pernas de um certo animal", "tantos frutos quantas asas de um pássaro" ou "tantos pássaros quantos dedos da mão".

O passo seguinte é o da comparação com coleções padrão, pelo uso de seixos, dedos da mão, incisões na madeira, riscos na pedra, nós nas cordas, partes do corpo...[3].

A padronização na comparação é um grande passo, dando origem às primeiras palavras para designar quantidades. Evidencia, entretanto, a dificuldade de abstrair a noção de quantidade da natureza dos objetos contados. Como diz Menninger (1969): "Alguns povos primitivos fundem a quantidade e o objeto como uma entidade única." Vejamos alguns exemplos tomados de uma mesma tribo primitiva:

valor numérico		palavra numérica
10 botes	$\longrightarrow$	bola
10 cocos	$\longrightarrow$	koro
1000 cocos	$\longrightarrow$	saloro

Como essa, outras tribos primitivas usam diferentes palavras para designar a mesma quantidade de árvores, animais, homens, canoas, etc. Exemplos dessas palavras numéricas qualitativas são encontrados em Leonard Conant (1931). Vejamos as diferentes palavras numéricas para designar 1, 3 e 10, por exemplo, extraídas da Figura 2.1 da página seguinte.

	objetos redondos	homens	canoas	medidas
1	g'erel	k'al	k'amaet	K'al
3	gutle	gulal	galtskantk	guleont
10	kpeel	kpal	gy'apsk	kpeont

[3]Comentários interessantes sobre o assunto são feitos por Leonard Conant (1956).

Caracteres numéricos tsimshiam (L.L. Conant, The Number Conceptt, Macmillan, New York, 1931.)

Nº	contagem	objetos planos	objetos redondos	homens	objetos compridos	canoas	medidas
1	gyak	gak	g'erel	k'al	k'awutskan	k'amaet	k'al
2	t'epqat	t'epqat	goupel	t'epqadal	gaopskan	g'alpēeltk	gulbel
3	guant	guant	gutle	gulal	galtskan	galtskantk	guleont
4	tqalpq	tqalpq	tqalpq	tqalpqdal	tqaapskan	tqalpqsk	tqalpqalont
5	ketōne	ketōne	ketōne	keenecal	k'etoentskan	ketōonsk	ketonsilont
6	k'alt	k'alt	k'alt	k'aldal	k'aoltskan	k'altk	k'aldelont
7	t'epqalt	t'epqalt	t'epqalt	t'epqaldal	t'epqaltskan	t'epqaltk	t'epqaldelont
8	guandalt	yuktalt	yuktalt	yuktleadal	ek'tlaedskan	yuktaltk	yuktaldelont
9	ketemac	ketemac	ketemac	ketemacal	ketemaetskan	ketemack	ketemasilont
10	gy'ap	gy'ap	kpēol	kpal	kpēetskan	gy'apsk	kpeont

Figura 2.1

Sabe-se que os turcos distinguiam duas classes de objetos para contar: *homens* e *não homens.* Os persas tinham 20 classes, os chineses, cerca de 100, os japoneses, mais ou menos 50.

Foi no momento em que o homem conseguiu desvincular a palavra numérica do objeto contado, criando palavras numéricas abstratas, que adquiriu o nosso conceito de número cardinal. Uma propriedade comum às coleções que podem ser postas em correspondência um-a-um entre si.

Ao arranjar essas palavras numéricas numa sucessão, ou seqüência, ordenada de acordo com a magnitude crescente, obtém a *seqüência dos números naturais.* Contar uma coleção é associar, a cada termo dessa seqüência ordenada, um elemento da coleção, até que esta se esgote. Ao último termo da seqüência dos naturais envolvido nesse processo, chamamos *número cardinal* da coleção.

O número cardinal corresponde à noção de quantidade e o processo de contagem é, obviamente, mais sofisticado do que fazer comparações entre coleções, pois envolve a idéia de sucessão, portanto, de ordem, e de correspondência.

Ao descobrir o processo de contar como acabamos de o descrever, o homem cria as condições para desenvolver a arte de calcular. Mas o caminho é muito longo. Nos estágios iniciais a sucessão dos naturais não é, certamente, infinita. Antes de serem grafadas, as palavras numéricas são apenas orais e, nesse estágio, as técnicas de contagem dependem do auxílio dos dedos. Na maioria das línguas primitivas o *cinco* é expresso por *mão* e o *dez*, por *duas mãos*. Veja, por exemplo, Ifrah (1989).

Em sociedades primitivas há evidências do uso do *três* com o sentido de *muitos*, sugerindo que a contagem, então, não vai além de *um, dois e muitos*. Como comenta Gerdes (1980), a idéia do *três* com a significação de *muitos* é a origem, em francês, da palavra *très*: *très bien*. Em algumas línguas, como na portuguesa, as duas primeiras palavras numéricas têm gênero: *um, uma* e *dois, duas*, o mesmo não ocorrendo com *três, quatro,...*, levando à conjectura de que, num passado remoto, só havia os dois primeiros números.

Ainda nessa linha de argumentos, é interessante notar que em certas línguas antigas havia as formas singular, dual e plural para as palavras numéricas. A forma dual indica dois objetos e a plural só é usada para mais de dois. O par tem um significado muito forte e impressiona profundamente o homem primitivo; ele o observa em seu próprio corpo: dois olhos, duas mãos, dois pés ... e essa dualidade é estendida ao mundo ao redor, às vezes com elementos opostos e inseparáveis: pai e mãe, homem e mulher, dia e noite, claro e escuro ....

Essa idéia marcante é preservada em algumas línguas atuais. Em grego, há palavras diferentes para indicar: a mão, duas mãos e as mãos; o amigo, dois amigos e os amigos. Em árabe, palavras distintas indicam o homem, dois homens e os homens.

Provavelmente em 10 000 a.C., quando as camadas de gelo que cobriam a Europa e a Ásia deram lugar a florestas e desertos, o homem começa a deixar de ser nômade para construir habitações. Surgem as povoações fixas e as atividades predadoras cedem espaço a agricultores, que passam a desenvolver a cerâmica, a carpintaria e a tecelagem. A atitude do homem diante da natureza deixa de ser passiva. O homem já funde o cobre, tem o bronze, utiliza a roda e aperfeiçoa os barcos e os abrigos.

Com as atividades evoluindo para as de sociedades mais complexas, o progresso nas questões numéricas é significativo. Existem atividades comerciais entre as diversas populações e ligações são estabelecidas entre localidades afastadas, promovendo o desenvolvimento da linguagem.

As notações desenvolvem-se a partir da necessidade de transmitir e preservar relatos e idéias concernentes a quantidades e cálculos. Em certas sociedades, o maior desenvolvimento levou à necessidade de expressar grandes quantidades. Surgem, então, os agrupamentos; em geral de cinco em cinco, ou de dez em dez. Além dos agrupamentos quinário e decimal, há evidências do uso de base doze, quinze, vinte e sessenta, como constatamos em Smith (1951).

Comunidades neolíticas, do 5º ao 3º milênio a.C., se fixaram às margens de grandes rios da África e da Ásia: a civilização egípcia às margens do Nilo, a mesopotâmica entre o Tigre e o Eufrates, a hindu à volta do Indo e do Ganges e a chinesa ao longo do Huang-Ho e do Yang-Tse. Legaram-nos importantes documentos com registros de quantidades e cálculos.

Os rios fornecem água para propósitos domésticos, para plantações e, posteriormente, favorecem a navegação e o desenvolvimento de projetos de irrigação.

Às margens do Nilo, a civilização egípcia floresce entre o deserto e o mar. Barreiras geográficas lhe propiciam uma existência pacífica por longo tempo. A aridez do deserto e as regiões montanhosas que cercam suas terras contrastam com o vale do rio, que podem transformar em terras férteis pelo controle das cheias, resultado da observação dos astros e do estudo da periodicidade das estações. É sabido que a civilização egípcia atingiu um alto grau de complexidade, com artesãos, soldados, funcionários, sacerdotes e uma aristocracia de poderosos chefes.

Aos funcionários cabia explorar o ciclo das estações, o movimento dos astros, desenvolver a arte de dividir os campos de plantio, do armazenamento dos alimemtos e regular taxação de impostos, o que exigia conhecimentos técnicos de astronomia, das artes do cálculo e da medição. O enorme acervo arqueológico resgatado desse povo revela, em potes, tecidos e cestas, uma preocupação com os sentimentos de estética e prazer pela beleza das cores e das formas.

A maior parte do conhecimento atual sobre a Matemática egípcia resulta de dois documentos, o papiro Rhind e o papiro Moscou. Esses documentos datam de, provavelmente, 1650 a.C. e 1850 a.C., respectivamente. O primeiro contém 80 problemas e o segundo, 25. Em situações envolvendo grandes quantidades, os papiros revelam como os egípcios superaram a dificuldade de representar com um símbolo individual, cada objeto contado. Inventaram uma marca para representar um grupo de dez elementos, outra para representar cem e assim por diante. Seguiam o plano de representar nove vezes o mesmo símbolo, quando outra marca, de ordem maior era introduzida; após a repetição por nove vezes desta marca, usavam uma nova, de ordem superior, e assim sucessivamente.

O princípio de usar agrupamentos padrões, decimais no caso, foi básico para o desenvolvimento de esquemas satisfatórios de numeração. Entretanto, o princípio aditivo de repetir a marca da unidade não foi inteiramente abandonado, pois era usado para representar de 2 a 9 em qualquer ordem.

Estudos dos papiros indicam que, nos primórdios da civilização egípcia, os números eram representados em colunas verticais, da direita para a esquerda, como observa Newmann (1956) em *The Rhind Papirus.* A escrita hieroglífica da época tem símbolos próprios para as potências de dez, indicando a base decimal. Entre as inconveniências do sistema está a necessidade de muitos caracteres para representar alguns números pequenos, enquanto números maiores são representados com poucos caracteres. Veja a Figura 2.2. (Obs: Nas fontes consultadas o número 100 é representado por 9 ou ℮).

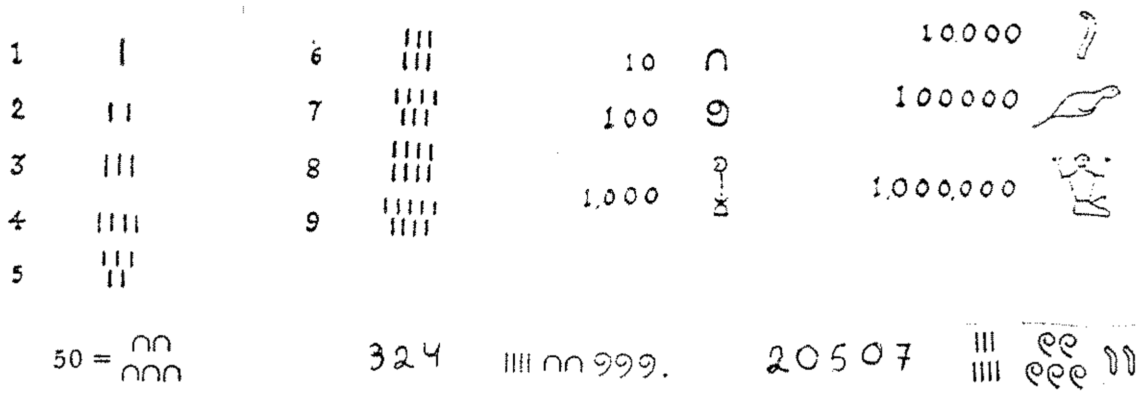
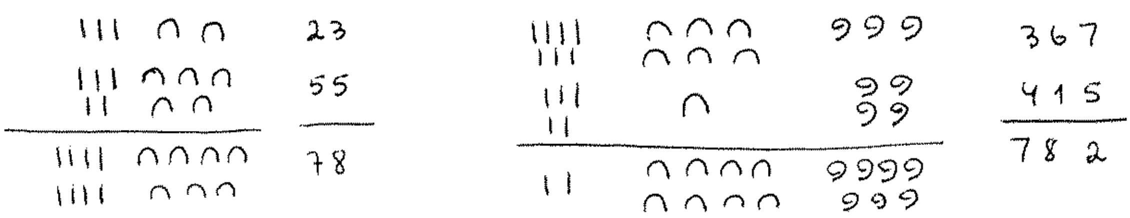


Figura 2.2: Sitema egípcio de numeração primitivo

Os egípcios chegaram a desenvolver engenhosos algoritmos de cálculo. A adição não chegava a causar grandes dificuldades, com o artifício auxiliar de trocar dez unidades por ∩, dez ∩ por 9 e assim por diante. A seguir, apresentamos exemplos das operações $23 + 55$ e $367 + 415$.



Subtrair era a noção de completar. Assim, a operaçõe $12 - 5$, por exemplo, era descrita como

5 mais quanto resulta 12.

Para multiplicar por dez, trocavam cada | por ∩, cada ∩ por 𓍢, cada 𓍢 por 𓆼, e assim por diante.

Ainda com relação à multiplicação, combinavam as operações de duplicação, mediação e adição. Segundo Bunt (1988), o problema 32 do papiro Rhind mostra o procedimento para efetuar 12×12:

Em notação atual,

	1	12
	2	24
/	4	48
/	8	96

onde se nota a multiplicação 12×12 como adições de duplicações de 12, ou seja,

$$\begin{aligned} 12{\times}12 &= (4{+}8){\times}12 = (2{\times}2{+}2{\times}2{\times}2){\times}12 \\ &= 2{\times}(2{\times}12) + 2{\times}[2{\times}(2{\times}12)] = 48{+}96 = 144. \end{aligned}$$

No caso 7×12, o procedimento seria:

$$7 \times 12 = (1 + 2 + 4) \times 12 = (1 + 2 + 2 \times 2) \times 12 = 12 + 24 + 48 = 84.$$

Nos cálculos efetuados, a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição é usada implicitamente.

O processo de duplicação é sempre possível, porque todo inteiro pode ser escrito de modo único como soma de termos da sucessão das potências de dois: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... As vantagens da duplicação, entre elas a de evitar a memorização de tabelas de multiplicação, foram percebidas e usadas não só pelos egípcios mas também pelos gregos, pela civilização bizantina e pelos romanos, vindo a serem reconhecidas até no século XVI.

Apesar do sucesso obtido nas operações, era premente sanar as deficiências da escrita hieroglífica e do princípio aditivo. A multiplicação era tremendamente tediosa, nessa notação. Um outro processo conhecido por "mediação" - com o significado de achar metades - foi algumas vezes utilizado para simplificar os cálculos, como mostramos a seguir ao efetuarmos 16×23

/	1	23
/	10	230
/	5	115

$$16 \times 23 = (1 + 10 + 5) \times 23 = 23 + 230 + 115 = 575$$

A divisão era pensada como operação inversa da multiplicação. Assim, a questão $156 \div 12 =?$ passou a ser: por quanto multiplicar 12 para se obter 156?

O processo pode ser descrito da seguinte forma: Dispõe-se em uma coluna a sucessão das potências de 2 e, ao lado, o correspondente produto por 12 (as duplicações),

/	1	12
	2	24
/	4	48
/	8	96

A duplicação seguinte, "16 192", excede 156, tornando desnecessário continuar. Em seguida, verifica-se na coluna das duplicações de 12 se existem termos cuja soma seja 156. No caso, temos $12 + 48 + 96 = 156$. Os correspondentes a esses termos na coluna das potências de dois são 1, 4 e 8 (indicados pelos egípcios com traço /), portanto, $(1 + 4 + 8) \times 12 = 156$ ou, $13 \times 12 = 156$ donde, finalmente $156 \div 12 = 13$.

No que concerne às frações, as complicações com a notação egípcia são muito maiores. Talvez a mais séria das restrições seja a de manter a unidade como numerador (frações unitárias) de qualquer fração, exceto duas, 2/3 e 3/4.

As frações unitárias eram denotadas pelo denominador encimado pelo sinal ⬭ . Há, também, registros do uso de uma barra horizontal em vez do sinal anterior. Por exemplo, sendo o número 14 indicado por "$||||\cap$", 1/14 era denotada por:

$$\overset{⬭}{||||\cap} \quad \text{ou} \quad \overline{||||\cap}$$

As demais frações deviam ser, em geral, representadas pela soma de frações unitárias o que, convenhamos, não é fácil. Por exemplo:

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}.$$

A representação de uma fração como soma de frações unitárias não é única. Assim,

$$\frac{7}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{35}+\frac{1}{35}=\frac{1}{21}+\frac{1}{105}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=\frac{1}{20}+\frac{1}{140}=\frac{1}{18}+\frac{1}{630}$$

No século XIX, o matemático Sylvester estudou profundamente o problema egípcio de decompor frações em frações unitárias. Entre vários resultados interessantes, mostrou que toda fração pode ser representada como soma finita de frações unitárias e elucidou o método de representá-las dessa maneira. Entre os princípios egípcios destacam-se:

1. não repetir a mesma fração mais de uma vez;
2. uma das parcelas é a maior fração unitária da seqüência $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, menor que a fração dada;
3. a representação é escrita na ordem decrescente.

De acordo com as normas egípcias, as apresentações preferidas para os exemplos acima são: $\frac{7}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}$; $\frac{2}{35} = \frac{1}{18} + \frac{1}{630}$. Podem ocorrer somas de mais de dois termos como $\frac{13}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$.

O problema 24 do papiro Rhind é um exemplo da utilização das frações unitárias para obter quociente de divisão não exata. Apresentamos, a seguir, detalhes da resolução da divisão proposta pelo problema.

A questão $19 \div 8 =?$ foi modificada para $?.8 = 19$.

Usando duplicações,

$$\begin{array}{ll} 1 & 8 \\ 2 & 16 \\ 4 & 32 \end{array}$$

32 ultrapassa 19, portanto limita esse processo na linha anterior e fornece o resultado parcial $19 \div 8 = 2 + \ldots$, pois $2.8 = 16$.

16 não era o resultado almejado, e sim 19, o que os levou a utilizar frações.

Tinham o resultado parcial $2.8 = 16$. O resultado final, obviamente, corresponderá à $(2 + \ldots).8 = 19 = 16 + 3$. Infere-se que a segunda parcela do parêntese multiplicada por 8 resultará 3.

Esta análise os levou a utilizar a mediação na 1ª linha do algoritmo para obter a 3ª linha e outras mediações sucessivas nas próximas linhas, até que a soma 3 fosse obtida com os elementos da 2ª coluna, como observamos a seguir.

$$\begin{array}{rcccl} & & 1 & 8 & \\ & / & 2 & 16 & \text{resultado parcial} \\ \text{mediação da } 1\underline{a} \text{ linha} \longrightarrow & & \bar{2} & 4 & \bar{2} \text{ significa } \frac{1}{2} \\ & / & \bar{4} & 2 & \\ & / & \bar{8} & 1 & \end{array}$$

No lado direito temos $16 + 2 + 1 = 19$, que correponde na coluna da esquerda à $2 + \bar{4} + \bar{8}$ (indicados com o traço /).

Evidentemente agora,

$$(2 + \bar{4} + \bar{8}).8 = 16 + 2 + 1 = 19$$

E portanto $19 \div 8 = 2 + \bar{4} + \bar{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Na impossibilidade de resolução da divisão, utilizando duplicações e mediações de acordo com a sequências $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \ldots$ e $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{6}, \ldots$, os egípcios criaram outros meios muito engenhosos.

Como exemplo, analisaremos a questão $11 \div 25 = ?$, transformada por eles em $?.25 = 11$.

A resposta 1 não serviu, pois $1.25 = 25$ maior que 11, e então iniciaram a seqüência de subunidades de 1: $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{6}, \ldots$ na 1ª coluna, como abaixo, na tentativa de obter a soma 11 na coluna da direita.

	1	25	
	$\bar{\bar{3}}$	$16\ \bar{\bar{3}}$	significa $16 + \frac{2}{3}$
/	$\bar{3}$	$8\ \bar{3}$	
	$\bar{6}$	$4\ \bar{6}$	
/	$\overline{12}$	$2\ \overline{12}$	

Na segunda coluna, já obtiveram $(8+\bar{3}) + (2 + \overline{12}) = 10 + (\bar{3} + \overline{12})$, isto é, quase 11. A pergunta passou a ser: quanto falta na soma $(\bar{3} + \overline{12})$ para completar 1?

Cálculos auxiliares efetuados e traduzidos para nossa notação atual evidenciam a seguinte reflexão: $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$; $\frac{5}{12}$ para completar 1 faltam $\frac{7}{12}$; $\frac{7}{12}$ da unidade é o quociente de $7 \div 12$, ou equivalentemente, é a solução da questão $?.12 = 7$.

Assim:

1	12	excede 7
$\bar{2}$	6	
$\overline{12}$	1	idéia de recíproco

Totalizado 6+1 na coluna da direita, ou seja 7, obtiveram $\bar{2}$ e $\overline{12}$ na primeira coluna que, adicionados aos $\bar{3}$ e $\overline{12}$ do cálculo anterior, completam 1.

Com isso, o algoritmo da operação $?.25 = 11$, já conhecidos os termos necessários na segunda coluna, $(8 + \bar{3})$, $(2 + \overline{12})$, $\bar{2}$ e $\overline{12}$ como explicado, é completado na forma seguinte:

	1	25		
	$\bar{\bar{3}}$	16	$\bar{\bar{3}}$	
/	$\bar{3}$	8	$\bar{3}$	
	$\bar{6}$	4	$\bar{6}$	
/	$\overline{12}$	2	$\overline{12}$	
	$\overline{25}$	1		recíproco de 25
/	$\overline{50}$	$\bar{2}$		
/	$\overline{300}$	$\overline{12}$		

Enfatizamos: as duas últimas linhas foram encontradas convenientemente, dadas as informações obtidas da análise de $7 \div 12$.

Finalmente, na coluna da direita, temos $11 = (8 + 2) + (\bar{3} + \overline{12} + \bar{2} + \overline{12})$ correspondente na coluna da esquerda à $(\bar{3} + \overline{12} + \overline{50} + \overline{300})$.

Com certeza, esta última soma multiplicada por 25 resultará 11, ou $11 \div 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{50} + \frac{1}{300}$.

Os egípcios deixaram muitas tabelas, algumas das quais reproduzimos parcialmente nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5. Para esclarecer a leitura dessas tabelas, dizemos como deve ser lida a primeira linha de cada uma: a primeira linha da Figura 2.3 significa: 1/2 de 1/2 é 1/4; a da Figura 2.4: 1/3 de 1/2 é 1/8 + 1/24 = 1/6 e a da Figura 2.5: 2/3 de 1/2 é 1/4 + 1/12 = 1/3

$\bar{2}$	de	$\bar{2}$	=	$\bar{4}$
$\bar{2}$		$\bar{3}$	=	$\bar{6}$
$\bar{2}$		$\bar{4}$	=	$\bar{8}$
$\bar{2}$		$\bar{5}$	=	$\overline{10}$

Figura 2.3: tabela de um meio

$\bar{3}$	de	$\bar{2}$	=	$\bar{8}$	$\overline{24}$	=	$\bar{6}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$	=	$\overline{12}$	$\overline{36}$	=	$\bar{9}$
$\bar{3}$		$\bar{4}$	=	$\overline{16}$	$\overline{48}$	=	$\overline{12}$
$\bar{3}$		$\bar{5}$	=	$\overline{20}$	$\overline{60}$	=	$\overline{15}$

Figura 2.4: tabela de um terço

$\bar{\bar{3}}$	de	$\bar{2}$	=	$\bar{4}$	$\overline{12}$	=	$\bar{3}$
$\bar{\bar{3}}$		$\bar{3}$	=	$\bar{6}$	$\overline{18}$		
$\bar{\bar{3}}$		$\bar{4}$	=	$\bar{8}$	$\overline{24}$		$\bar{6}$
$\bar{\bar{3}}$		$\bar{5}$	=	$\overline{10}$	$\overline{30}$		
$\bar{\bar{3}}$		$\bar{6}$	=	$\overline{12}$	$\overline{36}$		$\bar{9}$

Figura 2.5: tabela de dois terços

É crença geral entre os especialistas que a Matemática dos antigos egípcios se baseava fortemente no princípio de tentativa e erro. Não havia preocupação perceptível com regras gerais ou procedimentos sistemáticos, muito menos com a construção de teorias gerais. Entretanto, além de dar origem a importantes pesquisas, sua engenhosidade inspirou métodos hoje em dia consagrados. Damos, a seguir, um exemplo de um problema de equação de primeiro grau resolvido pelo método da falsa posição, considerado uma herança egípcia.

A questão é encontrar um número que, somado ao seu sétimo, dá 21.

Em termos atuais, trata-se de resolver a equação

$$x + \frac{x}{7} = 21 \quad \text{ou} \quad (1 + \frac{1}{7}).x = 21 \qquad (1)$$

Na primeira tentativa, os egípcios assumiam o valor procurado como 7, por exemplo. Mas,

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right).7 = 8 \qquad (2)$$

Como desejavam obter 21, a questão passou a ser: " por quanto 8 deve ser multiplicado para se obter 21?". Usando o artifício da duplicação,

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 8 \\ / & 2 & 16 \\ & 4 & 32 \end{array}$$

32 ultrapassa 21, o que torna esta linha desnecessária.

Resultado parcial $2.8 = 16$. Pretendia-se $(2 + \ldots).8 = 21 = 16 + 5$.

Como faltassem 5 para 21, no resultado parcial, partia-se para a mediação da unidade da primeira linha no cálculo anterior e outra sucessivas.

/	$\overline{2}$	4
	$\overline{4}$	2
/	$\overline{8}$	1

Na coluna da direita, obteve-se $16 + 4 + 1 = 21$, correspondente à $2 + \overline{2} + \overline{8}$ na coluna da esquerda.

Portanto $(2 + \overline{2} + \overline{8}).8 = 16 + 4 + 1 = 21$.

Comparando-se as relações (1) e (2), observou-se que o 2º membro da relação (2) foi multiplicado por $(2 + \overline{2} + \overline{8})$ para resultar 21 na relação (1), o que sugeriu que o fator 7 da relação (2), falso valor de x, deva ser multiplicado pelo mesmo número $(2 + \overline{2} + \overline{8})$ para obter x, em (1).

Dessa forma chegou-se a

$$7.(2 + \overline{2} + \overline{8}) = x \quad \text{ou} \quad x = 14 + 7.\frac{1}{2} + 7.\frac{1}{8};$$

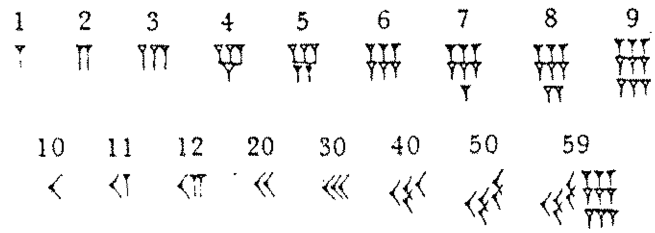
De onde $x = 14 + (3 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24})$ e, finalmente,

$$x = 18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

À época em que a Matemática egípcia chegava a seu clímax, os mesopotâmios já eram povos bastante desenvolvidos. Acadianos, ao norte, e sumérios, ao sul, faziam inscrições em tabletes de argila crua, que depois eram cozidos ou secos ao sol. Por volta de 3 000 a.C., já tinham seu calendário, um sistema de medidas e os mercadores mostravam grande familiaridade com as contas.

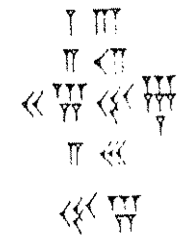
Eram freqüentes as guerras entre as comunidades da região. A localização entre o Tigre e o Eufrates, extremamente privilegiada, facilitava o comércio e provocava ações militares na disputa pela supremacia econômica.

Segundo Heath (1981) e Aaboe (1984), os acadianos usavam a base dez enquanto os sumérios, a base sessenta. Os acadianos dominaram os sumérios e adotaram sua escrita cuneiforme sem abolir, entretanto, sua notação antiga, pois ambas são observadas nos tabletes da época. Vê-se, abaixo, exemplos de seu sistema de numeração:

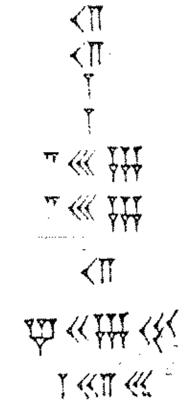


O sistema babilônico de numeração é um misto de decimal e sexagesimal. Há símbolos próprios para a unidade, para o *dez* e para agrupamentos de sessenta, sem que para isso necessitassem de sessenta símbolos distintos. Usavam aditivamente o símbolo da unidade até que ultrapassasse 9, introduziam então o símbolo da dezena que era utilizado aditivamente até ultrapassar 59, quando o símbolo para o um era usado novamente para representar o 60. Damos, a seguir, uma ilustração. Veja Bunt (1988).

Decimal	*Sexagesimal*	*Babylonian*
63	1,3	
132	2,12	
1547	25,47	
$2\frac{1}{2} = 2\frac{30}{60}$	2;30	
$\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$	0;45	



O princípio aditivo é evidente ao agregar os símbolos da unidade até 9 e da dezena até 50. Usavam os símbolos em colunas diferentes, onde o valor atribuído a eles dependia da coluna em que estivessem, isto é, adotavam um princípio posicional multiplicativo. Os valores atribuídos às colunas eram potências de 60 ou 1/60, ou seja, tinham valor posicional sexagesimal. Os exemplos, a seguir, foram extraídos de Bunt (1988).

Decimal	Sexagesimal	Babilônico
12	12	
602	10,2	
1	1	
60	1,0	
7236	2,0,36	
156	2,36	
$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$	0;12	
$\frac{2}{27} = \frac{4}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{40}{60^3}$	0;4,26,40	
$1\frac{3}{8} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{30}{60^2}$	1;22,30	

A notação por colunas, como se vê acima, indicava as potências 60, 60^2, 60^3, ..., ou $1/60$, $1/60^2$, $1/60^3$, ... Uma séria dificuldade advinha do fato de não se saber, ao certo, quando as colunas representavam potências de 60 ou de $1/60$. Essa ambiguidade decorria da inexistência de uma marca para distinguir a posição da unidade. Outra ambiguidade vinha da falta de um sinal para denotar o zero. Essas deficiências não permitiam distinguir entre 12, 12×60 ou $12 \times \frac{1}{60}$, por exemplo. Veja as linhas 1, 2 e 7 no quadro acima.

Os recursos posicionais tornavam o sitema babilônico superior ao egípcio mas, ainda assim, o simbolismo cuneiforme era tão enfadonho e árido quanto à notação hieroglífica. Desenhar os caracteres na argila tomava um tempo enorme. É notável, porém, a extensão do princípio posicional às frações, onde 𒈫 𒈫 tanto podia denotar $2 \times 60+2 = 122$, como $2 + 2 \times 1/60 = 2\frac{2}{60}$, ou $2 \times 1/60 + 2 \times 1/60^2 = 122/3600$.

O princípio posicional aplicado às frações representou uma brutal simplificação frente às dificuldades dos egípcios nesse campo. Aos babilônios, para multiplicar 22,45 e 98,76, não era mais difícil do que fazê-lo para os inteiros 2245 e 9876, como ocorre no nosso sistema atual.

As operações de adição e subtração não apresentavam, assim como aos egípcios, grandes dificuldades aos babilônios. A multiplicação era feita mais comodamente com o recurso de tábuas e, na divisão, combinavam tábuas de multiplicação e de recíprocos. Possuíam, além destas, tábuas de quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas. A base sexagesimal trouxe a desvantagem de tábuas muito longas.

É interessante observar que nas tábuas de recíprocos não aparecem os recíprocos de 7 e 11, pois têm expansão sexagesimal infinita. O fato de 60 ter os divisores primos

2,3 e 5 implica que frações, cujos denominadores ou seus fatores são divisores primos distintos destes, têm expansão infinita. Seguem alguns exemplos de tábuas parciais de multiplicação e de recíprocos,

$1 \div 2 = 0;30$	tábua de multiplicação por $\frac{1}{9} = 0;6,40$
$1 \div 3 = 0;20$	1 x 0;6,40 = 0;6,40
$1 \div 4 = 0;15$	2 x 0;6,40 = 0;13,40
$1 \div 5 = 0;12$	3 x 0;6,40 = 0;20
$1 \div 6 = 0;10$	4 x 0;6,40 = 0;26,40
$1 \div 8 = 0;7,30$	5 x 0;6,40 = 0;33,20
$1 \div 9 = 0;6,40$	6 x 0;6,40 = 0;40
$1 \div 10 = 0;6$	7 x 0;6,40 = 0;46,40

Os babilônios utilizavam um método bem simples para estimar raízes quadradas. Vejamos, por exemplo, como procediam para obter uma estimativa para $\sqrt{37}$. Por tentativa, obtinham a estimativa inteira, por falta, 6. Então, observavam que $37 = \sqrt{37} \times \sqrt{37} = 6 \times 37/6$. Do fato de 6 ser menor do que $\sqrt{37}$, concluíram da última igualdade, que $37/6$ é maior do que $\sqrt{37}$. Logo $6 < \sqrt{37} < \frac{37}{6}$. Isso os levou a tomar a média entre 6 e $37/6$ para $\sqrt{37}$, assim,

$$\sqrt{37} = \frac{1}{2}\left(6 + 6\frac{1}{6}\right) = 6\frac{1}{12} = \frac{73}{12}.$$

Os mesopotâmios desenvolveram, também, processos para resolver sistemas de equações de primeiro e segundo graus. Vejamos alguns exemplos:

1. Encontrar dois números cuja soma é 16 e o produto 63.

Solução. O processo usado é expresso na nossa notação por

$$\begin{cases} (8+a)+(8-a) & = 16 \\ (8+a)(8-a) & = 63 \end{cases}$$

Da segunda equação, $64 - a^2 = 63$, tiramos $a^2 = 1$, portanto, $a = 1$.

Assim, obtiveram os números $9 = (8+1)$ e $7 = (8-1)$.

2. Resolver $5x^2 + 4x = 1$.

Solução. Multiplicaram ambos os membros por 5:

$$(5x)^2 + 4(5x) = 5.$$

Definiram então, $z = 5x$, obtendo

$$z^2 + 4z = 5 \quad \text{que resultou} \quad z = 1.$$

Portanto, $x = 1/5$.

Estava-se longe de cogitar soluções negativas na época.

Os problemas eram propostos em situações particulares, com dados numéricos, e as soluções não especificavam regras ou procedimentos gerais.

Com o passar dos séculos, a civilização babilônica evolui. Obras públicas se fazem necessárias, como um sistema de canais de irrigação e o controle das cheias. A agricultura e o comércio se desenvolvem, levando a duas necessidades básicas:

(1) usar números muito grandes ou muito pequenos.

(2) arquivar relatos, forçando a melhoria da escrita.

O princípio multiplicativo posicional dos babilônicos proporciona grande simplificação, inclusive no trato das frações. Porém, como na já complexa civilização egípcia, as deficiências do princípio aditivo e as dificuldades em desenhar os complicados símbolos se transformam em obstáculos práticamente intransponíveis. É premente a criação de símbolos menos rebuscados e uma forma abreviada de notação numérica.

Não podemos deixar de mencionar que, diante dessas dificuldades, os escribas do império egípcio lograram alguma simplificação com a adoção das escritas hierática e demótica, posteriores à hieroglífica, e comentadas mais tarde na seção 2.3. Os documentos Rhind e Moscou, embora escritos em notação hierática, evidenciam o conhecimento da linguagem hieroglífica, tratada nessa seção.

2.2 A Curiosidade Intelectual e uma Nova Abordagem do Número.

A era do bronze deu lugar à do ferro. Era o primeiro milênio antes de Cristo e muita coisa estava ocorrendo à volta do Mediterrâneo. Os impérios egípcio e babilônico estavam em declínio e grandes mudanças sociais se davam como decorrência indireta do uso do ferro. O barateamento dos instrumentos de produção e de guerra e o comércio florescente faziam crescer em território grego e, menos intensamente, na costa da Ásia, cidades muito prósperas.

Primeiramente despontaram Mileto e Ephesus, 600 a.C., que se comunicavam com a Babilônia por terra e com o Egito por mar. Seus meios de sobrevivência eram atividades marítimas e o comércio. Depois, no século V a.C., projetaram-se Corinto e Atenas, no território grego, Creta e Tarento na costa italiana e Siracusa, na Sicília.

Os mercadores gregos ficavam grande tempo no Egito e na Mesopotâmia, onde adquiriam conhecimentos dos escribas e sacerdotes. É o caso dos matemáticos Tales, de Mileto, e Pitágoras, de Jônia. Além dos conhecimentos matemáticos e astronômicos, no caso de Pitágoras, idéias religiosas estimularam-no a criar uma confraria secreta, que desenvolveu uma matemática impregnada de misticismo.

Os mercadores prosperaram usando o trabalho escravo, sem se preocupar com questões práticas e o trabalho braçal. Essa circunstância provocou a formação de uma elite alheia à realidade concreta, que desdenhava a prática e se voltava às preocupações intelectuais. A curiosidade sobre a existência do homem, seu posicionamento diante dos fenômenos do mundo e questões sobre o *como* e o *porquê* das coisas emergiram dessa civilização.

O homem começava a dar asas à grande aventura da razão e a valorizar o conhecimento dissociado da realidade imediata, embora alguns de seus feitos não sejam desprovidos de interesse prático.

Tales (600 a.C.), o mercador, o mais antigo matemático grego conhecido, dotado de notável espírito de generalização, resolveu problemas de medição de distâncias inacessíveis. Por exemplo, calculou a altura de uma pirâmide, medindo sua sombra num instante em que sombra e altura de uma haste vertical tinham a mesma medida[4].

Descobriu, também, vários fatos geométricos, formulou-os em forma geral, fundamentando-os logicamente, o que diferenciou sua contribuição da dos egípcios e ba-

[4]Bunt (1988) descreve o método de Tales para medir a distância a um navio no mar.

bilônios. Há que se considerar, porém, a obra em seu tempo, Tales não podia mostrar um rigor lógico de um sistema axiomático altamente elaborado. Isso só viria com Euclides de 200 a 300 a.C. Resultados de Tales podem ser encontrados em Bunt (1988) e Heath (1981).

No trato dos números, duas vertentes surgiram: a *logística*, que se voltava às aplicações práticas, fixando-se nas operações e nos cálculos, era praticada por mercadores e escravos e a *aritmética*, que estudava os números e suas propriedades de um ponto de vista abstrato, era a atitude dos filósofos.

Pitágoras (572-497 a.C.), matemático e profeta, reuniu em torno de si, em Croton, um grupo de matemáticos e filósofos das elites gregas constituindo uma liga secreta, a escola pitagórica, onde suas idéias eram discutidas e desenvolvidas. Seus estudos sobre os números, que nada tinham a ver com os cálculos aritméticos dos babilônios e egípcios, se tornaram famosos.

Associavam números a pontos, e figuras geométricas. Desses números figurados extraíam propriedades. Um ponto correspondia ao 1; dois pontos, ao 2; três pontos não alinhados, ao 3, que correpondia ao triângulo, a primeira figura plana; quatro pontos (três não alinhados e o quarto fora do plano deles) correspondiam ao 4, e à pirâmide, o primeiro sólido. Definiam classes de números: ímpares, pares, primos, compostos, amigáveis, triangulares, etc., que comentamos a seguir.

1. **Números Triangulares.** Eram obtidos dos seguites diagramas:

1 3 6 10

ou, equivalentemente, a partir do seguinte esquema:

1
1+2=3
1+2+3=6
1+2+3+4=10
1+2+3+4+5=15
....

Ou seja, os números triangulares são as somas dos primeiros naturais sucessivos. Se, nos diagramas acima, um triângulo tem n pontos em seu lado, o número triangular correspondente é:

$$1 + 2 + \cdot + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Fórmula facilmente obtida pela observação de casos particulares, ou mesmo, considerando duas vezes a seqüência, na forma a seguir:

$$\begin{array}{rccccccc}
1+ & 2+ & 3 & +\ldots+ & (n\text{-}1) & +n & \\
n+ & (n\text{-}1)+ & (n\text{-}2) & +\ldots+ & 2 & +1 & \\
\hline
(n+1)+ & (n+1)+ & (n+1) & +\ldots+ & (n+1) & +(n+1) & = n(n+1)
\end{array}$$

2. Números Quadrangulares. Eram obtidos a partir dos seguintes diagramas:

1 4 9 16

Formam os quadrados sucessivos, que podem ser vistos como as somas dos primeiros ímpares sucessivos,

1
1+3=4
1+3+5=9
1+3+5+7=16
. . . .

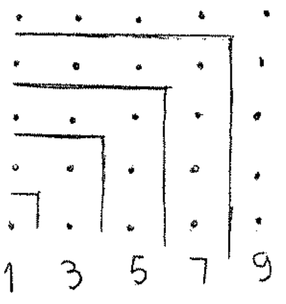
Nos diagramas acima, se um quadrado tem n pontos em seu lado, a ele fica associado o número quadrangular

$$1 + 3 + \cdot + (2n-1) = n^2.$$

Pela mesma linha de raciocínio, utilizada anteriormente, a fórmula pode ser obtida assim:

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & + & 3 & +\ldots+ & (2n\text{-}3) & + & (2n\text{-}1) & \\
+ & (2n\text{-}1) & + & (2n\text{-}3) & +\ldots+ & 3 & + & 1 & \\
\hline
 & 2n & + & 2n & +\ldots+ & 2n & + & 2n & = n(2n)= 2n^2
\end{array}
$$

O fato de esses números serem somas dos primeiros ímpares sucessivos era justificado como se segue: subtraindo-se ao quadrangular 4 o seu antecedente 1, obtém-se 3; subtraindo-se ao quadrangular 9 o seu antecedente 4, obtém-se 5; subtraindo-se a 16 o antecedente 9, obtém-se 7, etc. Obtinham, desse modo, a sucessão dos ímpares pelas diferenças de quadrangulares sucessivos. Veja o diagrama abaixo.



$$
\begin{array}{r}
1 \\
4\text{-}1 = 3 \\
9\text{-}4 = 5 \\
16\text{-}9 = 7 \\
\cdots\cdots\cdots \\
(n+1)^2 - n^2 = 2n+1
\end{array}
$$

3. **Números Perfeitos.** Os que eram a soma de seus divisores próprios.

Um exemplo é o 6, como soma, $6 = 3 + 2 + 1$, de seus divisores próprios.

Outro exemplo é o 28; $28 = 1+2+4+7+14$.

4. **Números Amigáveis.** Dois números eram chamados amigáveis, se cada um deles fosse a soma dos divisores próprios do outro.

Os divisores próprios de 220 são $110, 55, 44, 22, 20, 11, 10, 5, 4, 2, 1$, enquanto os divisores próprios de 284 são $142, 71, 4, 2, 1$. Logo, em termos pitagóricos, são dois números amigáveis, pois

$$
\begin{aligned}
284 &= 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 \text{ e} \\
220 &= 1+2+4+71+142,
\end{aligned}
$$

5. **Números Primos.** Para os quais *um* é o único divisor próprio, 3, 5, 7, 11, 13, ...

6. **Números Compostos.** Os não primos distintos de *um*, 2, 4, 6, 8, 9, ·

No misticismo grego, o 1 é o gerador de todos os números; o 2, o primeiro par, é feminino, o número da opinião; o 3 é o primeiro número masculino, o da harmonia;

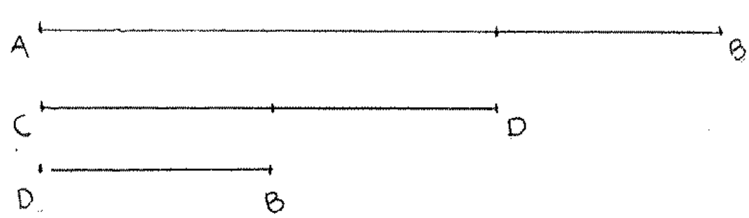
4 é o número da justiça ou retribuição; 5 é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros, feminino e masculino; 6 é o número da criação; 7, do entendimento e da saúde e 8, do amor e amizade. O 10 é o número perfeito por ser a soma de todas as dimensões geométricas possíveis, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, segundo o conceito pitagórico de dimensão.

Resultados conhecidos desta época dizem respeito à teoria dos pares e ímpares. Entre eles:

- A soma de dois números pares é um número par.
- O produto de dois números ímpares é ímpar.
- Se um número ímpar divide um número par, ele divide sua metade.

O estudo dos números figurados não era bastante para dar uma interpretação abrangente do mundo. Os pitagóricos adotaram, então, uma atitude que, a bem da verdade, já era praticada muito naturalmente fora de sua seita, desde há muito: associar ao comprimento de um segmento de reta uma razão, sua medida, resultado da comparação com uma unidade de comprimento.

A associação de uma medida a um segmento, pela comparação com uma unidade, levou à teoria das proporções. Além disso, fortalecia-se a crença já arraigada (e falsa!), de que, fixada uma unidade, a todo segmento de reta ficava associado seu comprimento expresso por uma razão p/q.



$$\overline{AB} = 1\,\overline{CD} + 1\,\overline{DB}$$

$$\overline{CD} = 2\,\overline{DB}$$

$$\overline{AB} = 3\,\overline{DB}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{2}$$

Os pitagóricos associaram razões às notas musicais, relacionando tons produzidos por cordas vibrantes de comprimentos diferentes. Se uma corda produz a nota dó quando tocada, outra semelhante, com o dobro do comprimento, produzirá o dó uma oitava abaixo. E os tons entre essas notas são emitidos por cordas, cujos comprimentos são dados por razões intermediárias: 16:9 para ré; 8:5 para mi; 3:2 para fá, etc.

É atribuída aos pitagóricos a teoria das proporções, que são relações entre números estabelecendo médias. Por exemplo, tomados os números 6 e 12, temos:

- A média harmônica entre 6 e 12 é 8, pois vale a proporção

$$\frac{8-6}{12-8} = \frac{6}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{m_H - a}{b - m_H} = \frac{a}{b}$$

- A média aritmética entre 6 e 12 é 9, isto é, $9 = (6+12)/2$ ou $\frac{9-6}{12-9} = \frac{6}{6}$.

Os pitagóricos definiram a média geométrica m_G entre dois números, a e b, pela relação ${m_G}^2 = ab$. Exprimiam essa média pela proporção

$$\frac{m_G - a}{b - m_G} = \frac{a}{m_G}.$$

Definiram, além dessas, mais sete médias, envolvendo inteiros e razões entre dois inteiros.

Segundo Maziarz e Greenwood (1984), na época em que esses conhecimentos eram conquistados pelos filósofos gregos, o crescimento intelectual provocava reflexões mais profundas e, portanto, questões mais delicadas se punham.

A questão mais séria desse tempo é, sem dúvida, a da incomensurabilidade. Isto se deu pouco antes de Platão, ao final do século V a.C. Como já dissemos, era crença arraigada, até então, que todo segmento de reta teria um comprimento expresso por uma razão entre dois inteiros, em termos de uma unidade pré estabelecida. Pois bem, ficou conhecido na época que, tomando-se a unidade como o lado de um quadrado, o comprimento de sua diagonal não pode ser expresso por uma razão, isto é, a diagonal e o lado do quadrado são *segmentos incomensuráveis.*

A constatação é simples. Baseia-se no Teorema de Pitágoras, segundo o qual, num triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Como conseqüência conclui-se que o comprimento da diagonal do quadrado de lado unitário não é uma razão, ou seja, não existem inteiros p e q tais que (medida da diagonal) $= \frac{p}{q}$.

A partir de então, outros exemplos de incomensurabilidade surgiram, como o da diagonal do pentágono regular em relação ao lado. É questionável, entretanto, que os pitagóricos tenham se deparado com a incomensurabilidade do perímetro da circunferência em relação ao raio, ou seja, a irracionalidade de π.

A sólida idéia de que, pré-fixada uma unidade, todo segmento de reta tem uma medida dada por uma razão entre dois números, teria de conviver com essa incômoda e persistente contradição. Abria-se uma grande crise na Matemática. No entanto, é esse o caminho pelo qual ela se desenvolve.

O misticismo da escola pitagórica é, certamente, seu ponto mais vulnerável. É justo, porém, destacar que não há evidências de que a crise da incomensurabilidade tenha vindo de fora para dentro da escola pitagórica, embora seja essa uma crença comum hoje em dia. Coxeter, (1969), menciona que G.H.Hardy considerava a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ um dos mais antigos exemplos de Matemática dedutiva, " tão nova e significante como quando foi descoberta".

Portanto, a par do aspecto dogmático de seu misticismo, os pitagóricos talvez tenham tido a grandeza da auto-crítica, e as dificuldades com a incomensurabilidade podem ter sido apontadas por eles mesmos.

Como veremos, a questão viria a ser contornada mais tarde entre os gregos, por Eudoxus, dando passos muito significativos na direção da compreensão da completividade da reta. É bom, todavia, que se diga: o problema, em toda a sua profundidade, ultrapassou grandes gênios da Matemática, como os fundadores do cálculo diferencial, Leibniz, Lagrange e Newton, só vindo a ser superado com rigor quase em nossa contemporaneidade, ao final do século XIX, com Dedekind e Cantor, não sem provocar intensa polêmica, como comentaremos na seção 3.2.

O misticismo propiciou uma visão desfavorável dos pitagóricos. É como se fossem eles a causa dos problemas advindos da incomensurabilidade, como se só eles devessem ficar embaraçados. Isso não só é injusto mas, considerando a longevidade de mais de 2 000 anos desses problemas, chega a ser uma impiedade.

Outras importantes críticas surgiram após os pitagóricos. Dentre essas, talvez as mais incisivas e, nos dias de hoje, célebres, são os argumentos de Zenon, de Eléa, sobre o movimento. Segundo Heath (1981, Vol. I), em razão deles o curso da geometria subseqüente seria profundamente afetado. No entanto, Aristóteles os classificou de *falácias*, sem conseguir refutá-los.

Daremos uma rápida exposição dos quatro paradoxos e, para se ter uma idéia da importância atribuída atualmente a Zenon, traduzimos, a seguir, palavras de Bertrand Russel citadas por Heath, na referência acima:

"Nesse mundo caprichoso nada é mais caprichoso do que a fama póstuma. Uma das mais notáveis vítimas do reconhecimento tardio em posteridade é o eleático Zenon. Tendo inventado quatro argumentos, todos imensuravelmente sutis e profundos, a insensibilidade de filósofos subseqüentes o pronunciou como um mero engenhoso manipulador e seus argumentos, como sofismas. Depois de dois mil anos de contínuas refutações, esses sofismas foram restabelecidos e fizeram os fundamentos de uma renascença matemática ..."

Ao tempo de Zenon (450 a.C.), a Matemática grega já era notavelmente imensa e fervilhante. As idéias de processos de divisão *ad infinitum* e de infinitésimos já eram presentes, como no método da exaustão, comumente atribuído a Arquimedes. Essa é a área de atuação dos argumentos de Zenon. Numa formulação baseada na apresentação de Heath (1981), são os seguintes os paradoxos:

1. A dicotomia

"Não existe movimento porque aquilo que se move precisa chegar à metade de seu curso antes de chegar ao fim. E, claro, precisa atravessar a metade da metade antes de atingir a metade, e assim por diante *ad infinitum*."

2. Aquiles

"Aquiles, rápido, não consegue apanhar uma lenta tartaruga, porque precisa atingir o ponto de onde a tartaruga partiu, de modo que ela fatalmente sempre estará alguma distância adiante".

Uma análise cuidadosa mostra, como já observara Aristóteles, que o primeiro, a dicotomia, e o segundo, Aquiles, são equivalentes.

3. A flecha

"Se tudo está em repouso ou em movimento quando ocupa um espaço igual a si mesmo, como o objeto movente está sempre no instante (no *agora*), a flecha em movimento é imóvel."

Cabe aqui uma interpretação: o argumento de Zenon é que é impossível à flecha em movimento se mover durante um instante (suposto indivisível), pois, caso contrário, teria de mudar de posição dentro de um instante e, assim, este seria dividido; como o tempo é constituído por nada mais do que instantes, a flecha em movimento está sempre em repouso.

4. O estádio

A formulação deste paradoxo é mais elaborada, razão pela qual deixamos para analisá-lo em detalhes mais à frente (pag. 69). O argumento é centrado na análise de duas colunas de corpos, consistindo de igual número de corpos, cada qual de mesmo tamanho, que se cruzam numa pista de corrida, com mesma velocidade e sentidos opostos.

A argumentação leva à conlusão de que metade de um dado tempo é igual a seu dobro.

Não há consenso entre os historiadores, e isso merece destaque, para a opinião muito freqüente de que os paradoxos de Zenon, pelo menos os dois primeiros, tenham sido dirigidos contra pontos de vista pitagóricos. As interpretações e críticas concernentes aos paradoxos, contidas em Heath (1981), são muito importantes e deixam suficientemente claro que as controvérsias sobre o assunto ainda são muito vivas hoje em dia. Comentaremos mais sobre eles na pág. 62.

Nessa época, surgiriam também problemas que se tornariam clássicos, como a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Esses foram estudados durante séculos. Muitas soluções surgiram até que, em 1882, F.Lindermann e, em 1837, Wantzel, mostraram a impossibilidade de solução do primeiro, e do segundo e terceiro, respectivamente, usando apenas régua sem graduação e compasso.

Ao final do século IV a.C., Atenas era o centro da fascinante civilização grega. Aos pitagóricos, sucederam os filósofos chamados sofistas que se sustentavam dando aulas, enquanto os anteriores eram proibidos de aceitar pagamento por divulgar seus conhecimentos. Hippias (420 a.C.) era, entre os sofistas, o mais interessado em problemas matemáticos. Estudou o problema da trissecção do ângulo usando a quadratriz, uma curva que também seria utilizada nas discussões sobre a quadratura do círculo.

Sócrates (469-399 a.C.), Platão (427-347 a.C.) e Aristóteles (384-322 a.C.) não são considerados sofistas. Foram filósofos que, mesmo sem se dedicar enfáticamente à Matemática, contribuíram para o seu desenvolvimento, os dois primeiros, principalmente do ponto de vista pedagógico. Segundo Imenes (1989), ainda hoje são bastante presentes as idéias de Platão dentro das salas de aula e nos livros didáticos de Matemática.

Platão enfatiza a natureza abstrata dos entes matemáticos. Segundo ele, figuras e objetos materiais são recursos auxiliares, enquanto os conceitos matemáticos são entes abstratos que existem independentemente do mundo físico. Os elementos da Geometria não são marcas imperfeitas esboçadas no papel, são idéias abstratas da mente. Há objetos eternos, definitivos, como os números um, dois, três, ..., que são formas aritméticas e outros, como pontos, retas, círculos, ..., que são formas geométricas.

A Arquitas (428 a.C.), um dos últimos pitagóricos, amigo de Platão, é creditado o *quadrivium*: aritmética, geometria, música e astronomia, como as áreas do conhecimento necessárias à educação liberal. Essas, acrescidas do *trivium*: gramática, retórica e dialética, atribuído a Zenon, viriam a ser as sete artes liberais, intocáveis por pelo menos dois milênios, que influenciariam profundamente o pensamento pedagógico ocidental.

Aristóteles, que foi considerado o homem mais erudito de todos os tempos, discípulo de Platão e mestre de Alexandre, o Grande, em vez de, como Platão, discutir a natureza dos objetos matemáticos, preocupou-se em estudar os métodos do pensamento matemático. Sua teoria continha os seguintes princípios:

1) Com exceção de alguns conceitos, aqueles primitivos, todos os demais devem ser definidos.

2) As definições não pressupõem a existência do que está sendo definido.

3) A existência do que foi definido deve ser provada.

4) Algumas proposições devem ser aceitas sem provas.

As proposições básicas, aceitas sem provas, para as ciências chamou de *noções comuns*, ou *axiomas*. Aquelas que são básicas para uma ciência particular chamou *noções especiais*, ou *postulados*. Esses quatro princípios formam o ponto de partida para a construção de uma ciência dedutiva. Os fatos de uma tal ciência, chamados teoremas, são provados por dedução a partir dos conceitos primitivos, dos definidos a partir destes, dos postulados e dos teoremas provados anteriormente.

Aristóteles foi o primeiro pensador a revelar aspectos distintos do conceito de infinito, que chamou de *infinito real* e *infinito potencial*. Ao processo de acrescentar sucessivamente uma unidade a um número inteiro, ou dividir uma grandeza *ad infinitum*, chamou de infinito potencial. A consideração de todos os números inteiros, ou das partes de uma grandeza dividida *ad infinitum*, contém a noção de infinito real. Embora tenha feito tal distinção, não estudou em profundidade a questão. Seu estudo sobre lógica se aplica a conjuntos finitos.

Atribui-se a Aristóteles, por tê-lo analisado e descrito com precisão, o método de redução ao absurdo que, pelo menos por Sócrates, já devia ter sido utilizado. Consiste em negar o fato que se quer demonstrar e, a partir da hipótese, chegar a uma contradição. A prova, então conhecida da irracionalidade de $\sqrt{2}$, é um exemplo desse método, assim como as provas, atribuídas a Theodorus (400 a.C., aproximadamente), da irracionalidade de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ e outros. Estas provas se baseiam na incomensurabilidade dos lados de dois quadrados cujas áreas estão na razão 1 para 3, 1 para 5, 1 para 7, respectivamente.

Eudoxus (408-355 a.C.) viveu em Atenas e, como Aristóteles, foi discípulo de Platão. A ele se atribui a teoria das proporções que, como já dissemos, permitiu contornar o problema da incomensurabilidade. O que se sabe dessa obra de Eudoxus é através do livro V dos *Elementos* de Euclides. É importante abrir parênteses para observar que o famoso axioma de Arquimedes, citado nos *Elementos*, foi atribuído pelo próprio Arquimedes a Eudoxus.

A dificuldade com a questão da incomensurabilidade era a seguinte: propunha-se que a medida de um segmento com relação a uma unidade pré-fixada era uma razão entre dois números e, portanto, podia-se operar normalmente com essas medidas. O mesmo se esperava das razões entre segmentos, ou grandezas de mesma natureza. A razão entre os segmentos r e s é a medida de r, tomando-se s como unidade. Ou seja, sendo m/n uma razão, $r/s = m/n$ se, e somente se, $r = (m/n)s$ ou, equivalentemente, $nr = ms$.

Dessa maneira, define-se de modo muito natural a igualdade de duas razões entre segmentos colocando: $\frac{r}{s} = \frac{t}{u}$ se, e somente se, existem números naturais m e n tais que:

$$nr = ms \Longleftrightarrow nt = mu.$$

O símbolo $\Longleftrightarrow$ significa *se, e somente se,* ou *é eqivalente a.*

O problema é que, se os segmentos em questão forem incomensuráveis, não existem números naturais m e n tais que $nr = ms$. Como definir, então, a igualdade de razões entre segmentos incomensuráveis?

Vejamos, em termos atuais, como Eudoxus, notavelmente contornou essa dificuldade, definindo a igualdade de duas razões entre segmentos, permitindo que eles fossem inclusive incomensuráveis.

Dados quatro segmentos, r, s, t e u, diz-se que r está para s assim como t está para u, isto é, $\frac{r}{s} = \frac{t}{u}$, se, e somente se, para quaisquer números naturais m e n, tem-se:

$$nr > ms \Longleftrightarrow nt > mu,$$

$$nr = ms \Longleftrightarrow nt = mu,$$

$$nr < ms \Longleftrightarrow nt < mu.$$

A vantagem dessa definição é que ela coincide com a anterior, no caso de segmentos comensuráveis, e se aplica perfeitamente quando os segmentos são incomensuráveis.

É ilustrativo conhecer a formulação da definição anterior nos termos originais de Eudoxus, que se encontra nos *Elementos, V*, de Euclides, o que destaca as dificuldades da época por não se contar com uma notação adequada:

Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda, e a terceira para a quarta quando, tomando quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e tomando quaisquer equimúltiplos da segunda e quarta, os primeiros equimúltiplos excedem, são iguais ou são menores que os últimos equimúltiplos tomados na ordem correspondente.

É frequente conceder-se a Eudoxus o crédito do pioneirismo da construção dos reais, realizada rigorosamente por Dedekind no século XIX. Veja Ávila (1985), ou Struik (1989). No entanto, há um evidente exagero nessa colocação. Não há como negar a genialidade de Eudoxus. O próprio Dedekind identifica em seu trabalho a origem de sua teoria, mas o que fez de admirável e o que tinha em mente foi contornar as dificuldades em operar com razões entre grandezas incomensuráveis. O problema da completividade da reta numérica persistiu desconcertante até o final do século XIX

Em 334 a.C., Alexandre, o Grande, discípulo de Aristóteles, iniciava suas conquistas e, quando morreu, em 323 a.C., estendia seus domínios ao Egito, Mesopotâmia e parte da Índia. Além dos antigos habitantes, as cidades passaram a contar com os gregos, que eram mercadores, viajantes, médicos, aventureiros e mercenários. Algumas dessas cidades chegaram a ser rebatizadas com nomes dados pelos gregos. As civilizações grega e oriental se mesclavam, dando origem ao período mais fecundo da Matemática grega, em grande parte em terras egípcias, de 350 a.C. a 200 a.C., época de Eudoxus, Euclides, Arquimedes e Apolônio.

Na capital, Alexandria, foi criado um centro de estudos, chamado Museu, que contava com uma fantástica biblioteca. Com isso, e com o benefício de uma posição geográfica central no Mediterrâneo, Alexandria se tornou logo o centro intelectual e econômico da época. Entretanto, Atenas e Siracusa, onde vivia Arquimedes continuaram sendo centros educacionais.

No Museu de Alexandria estudou e ensinou Euclides (300 a.C.), que foi fortemente influenciado pelas idéias de Platão e pelos métodos de Aristóteles. Nos *Elementos*, valorizou a Matemática independente dos objetos concretos e do mundo físico. Como Platão, entendia que o conhecimento matemático é adequado principalmente ao desenvolvimento do raciocínio. Uma história a seu respeito, atribuída a Stobaeus e reproduzida em Coxeter (1969), diz respeito a alguém que se iniciava em geometria com Euclides e perguntou-lhe: "O que eu ganharei aprendendo essas coisas?" Euclides chamou seu escravo e disse: "Dê-lhe uma moeda, já que ele precisa ganhar alguma coisa pelo que aprende."

Na história da humanidade, somente a bíblia teve maior tiragem do que os seus *Elementos*, obra que engloba em treze volumes praticamente todo o conhecimento matemático da época, organizado na linha dos princípios estabelecidos por Aristóteles para uma ciência dedutiva. Segundo palavras de Sir Thomas L. Heath, também reproduzidas em Coxeter (1969), *"O trabalho de Euclides viverá muito depois que todos os livros-textos dos dias atuais estiverem superados e esquecidos. É um dos mais nobres monumentos da antiguidade."*

Os *Elementos* tiveram uma primeira tradução para o árabe no século IX e os árabes a levaram para a Europa. A versão árabe foi traduzida para o latim no século XII. Embora trate de toda a Matemática de seu tempo, é na geometria que sua influência é extrema. O quinto postulado do livro I, o célebre postulado das paralelas, gerou incontáveis estudos de matemáticos durante séculos. O princípio de que o número de postulados deve ser mínimo suscitou a conjectura de que esse postulado era supérfluo, podendo ser demonstrado como teorema a partir dos restantes, fato que mais tarde ficou provado ser falso.

O intenso trabalho relativo à independência do quinto axioma, muitas vezes infrutífero, acabou por levar Riemann, Lobatchevski e Bolyai a criarem geometrias não euclideanas no século XIX.

Euclides evita a comparação de segmentos, áreas ou volumes, a números, como reflexo das dificuldades com a questão da incomensurabilidade. O sucesso de Eudoxus não fora suficiente para superar os traumas dessas dificuldades. No entanto, ele explora muito bem a correspondência contrária: aos números associa segmentos, áreas e volumes. No caso anterior, existe o perigo de se deparar com segmentos que não têm comprimento inteiro ou racional e devem ser representados numericamente, o que na época era impossível.

A par de seu imenso significado para a geometria, os *Elementos* são o principal veículo de todo o legado da Grécia para a Matemática. Contém vários notáveis resultados da teoria dos números e sugere importantes conjecturas que permanecem abertas até os dias de hoje. Mencionamos, a seguir, alguns desses resultados, sem demonstração para evitar excesso de tecnicismo:

a) Existem infinitos números primos. Uma prova pode ser encontrada em Bunt (1988).

b) O Teorema Fundamental da Aritmética: *"Todo inteiro maior do que 1 é um primo ou pode ser escrito como um produto de primos de forma única, exceto pela ordem dos fatores."*

c) O algoritmo euclideano para o maior divisor comum de dois números.

d) O teorema: *"Se $2^n - 1$ é primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito."*

Verifiquemos a veracidade desse teorema numa situação particular. Para $n = 3$, temos $2^n - 1 = 7$ primo e $2^{n-1}(2^n - 1) = 28$. O número 28 é perfeito, pois $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ é a soma de seus divisores próprios.

A recíproca desse teorema: *"Todo número perfeito é da forma* $2^{n-1}(2^n - 1)$*, com* 2^{n-1} *primo,"* ainda é uma conjectura. Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos dos últimos tempos, chegou a provar que todo número perfeito par é dessa forma. Mas o fato de que todo número perfeito é par é também uma conjectura ainda.

e) Se u e v são inteiros, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ e $z = u^2 + v^2$, então os inteiros x, y e z satisfazem a relação pitagórica: $x^2 + y^2 = z^2$.

f) O problema ainda aberto de encontrar um critério geral para decidir se um número qualquer é primo. Alternativamente, o problema de encontrar uma lei de formação dos primos.

Ao resgatarmos o desenvolvimento matemático grego, de Sócrates a Euclides, foi possível, sem dúvida, apreciarmos uma de suas características mais notáveis: a transformação do caráter prático-empírico do conhecimento, comum aos demais povos da Antiguidade, para um procedimento sistemático e dedutivo.

Essa mudança atribuída ao avançado sistema político e a vida cultural grega, que contribuíram para tornar a arte da argumentação, uma característica marcante, se notabilizou em Matemática, nos princípios de Aristóteles e na obra de Euclides, quando os resultados foram validados somente através de demonstrações. Caso contrário, foram refutados. Cabe lembrar que muitas dessas demonstrações só foram possíveis usando a forma indireta de demonstração.

Outro fator peculiar, observado na Matemática grega, é seu caráter geométrico. Observamos que a geometrização teve papel de destaque no reconhecimento das quantidades irracionais, ou seja, dos segmentos incomensuráveis e no tratamento das soluções gerais das equações quadráticas. Na verdade, a demonstração indireta aliada ao caráter geométrico do fenômeno tornou possível o reconhecimento da existência da incomensurabilidade.

Antes disso, nos tempos de Platão e dos mais antigos pitagóricos, a Aritmética, como vimos, esteve em primeiro plano e era utilizada pelos filófosos gregos para explicar o mundo físico e seus fenômenos.

Por outro lado, embora as obras gregas exibam um tratamento dedutivo peculiar, num primeiro momento, a Matemática grega utilizou a **visualização concreta** e a **ilustração por desenho**, como métodos de demonstração, bem como, algumas vezes, a **superposição**. Como veremos, num exemplo apresentado por Szabó (1960), Sócrates utilizou a forma empírica de demonstração para encontrar "um quadrado cuja área é o dobro de um quadrado dado".

A observação dos desenhos a), b), c) da figura 2.6 é necessária para o acompanhamento dos argumentos 1, 2, 3 abaixo, usados na solução.

1. Construiu-se o quadrado de lado 2 e dobrou-se seu lado.

O quadrado obtido, dobrando o lado, tem área 16, ou seja, 4 vezes mais que o quadrado dado, cuja área é 4. Logo, este não é o procedimento correto.

2. Numa primeira estimativa, considerou-se que o quadrado pocurado tem lado maior que 2 e menor que 4. Tomou-se o lado 3. (Desenho b).

A área do quadrado de lado 3 ultrapassou o dobro da área do quadrado original. Então este resultado foi descartado.

3. Finalmente, considerou-se acertada a construção proposta no desenho c.

A idéia primeira de dobrar o lado do quadrado original foi considerada. A primeira estimativa, o lado é maior que 2 e menor que 4, também. A área do quadrado original é igual à soma da área de 2 triângulos iguais, formados pela diagonal do quadrado. Desse modo, as diagonais do quadrado do desenho a), formaram um quadrado consistindo de 4 triângulos iguais. (Desenho c).

A área desse quadrado é duas vezes a área do quadrado original.

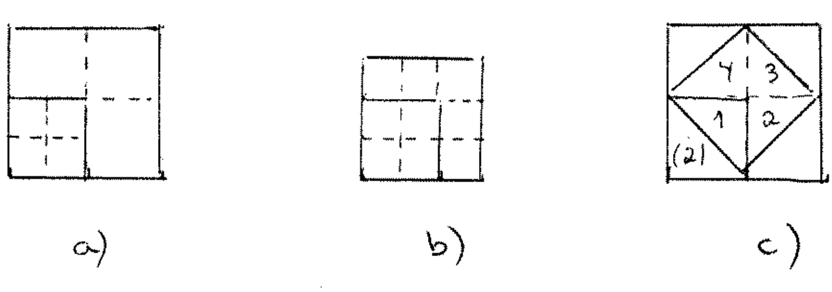
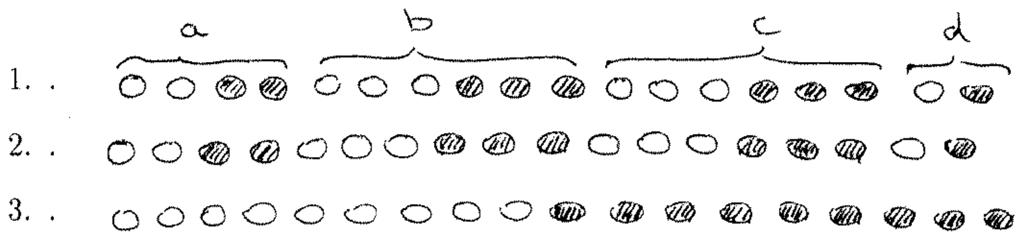


Figura 2.6

O fato de Proclus, historiador de 450 d.C., ter afirmado que, de 5 teoremas atribuídos a Tales, 4 foram demonstrados pelo método da superposição, e também por termos verificado que, na teoria dos números pares e ímpares, os resultados foram originalmente deduzidos com a ajuda de contas desenhadas, somos levados a concluir que, nos primórdios da civilização grega, a Matemática foi uma ciência empírica, na qual a demonstração utilizou a visualização concreta. Posteriormente prevaleceu a tendência anti-empírica na verificação da validade dos teoremas, quando, por volta de 450 a.C., as demonstrações utilizaram afirmações já consideradas verdadeiras que implicam na aceitação da tese.

Nas teses da Aritmética, trocou-se contas desenhadas por segmentos de retas representando números. Vejamos as provas usadas pelos antigos pitagóricos e por Euclides para um mesmo teorema: "a soma de números pares é um número par".

A. Método empírico

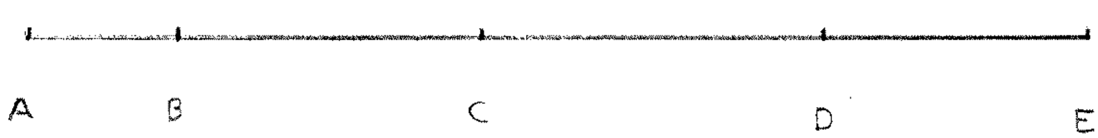


a, b, c, d representam números pares e portanto, eles têm metades, assim como sua soma.

B. Método mais geral (Euclides)

Considere $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, números pares.

Desde que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ são números pares, eles têm metades. Assim, sua soma $\overline{AE}$ também tem metades, portanto $\overline{AE}$ é um número par.



Na maneira euclidiana, sem dúvida, houve generalização. Somente número par de contas tem metade, enquanto o segmento sempre pode ser dividido em metades, represente ele número par ou ímpar.

O caráter anti-empírico das demonstrações euclidianas está implícito. Consideremos, por exemplo, o teorema comentado por Szabó (1960), cuja demonstração feita por Euclides, é indireta.

"Se um número ímpar é o divisor de um número par, então ele é divisor de sua metade".

Supõe-se já aceito o resultado: número ímpar multiplicado por número ímpar é número ímpar.

Demonstração indireta:

Se um número ímpar A é divisor de um número par B, A não pode ser divisor da metade de B, a não ser que B seja o produto de um número ímpar e outro par τ.

Assumindo o contrário, τ ímpar temos A ímpar $\times$ τ ímpar = B ímpar. Isto é impossível, pois B é par. Logo, o quociente τ ser ímpar, envolve a contradição B ímpar. B não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Então, somente o contrário de τ ímpar é verdadeiro. Assim, τ é par.

Os gregos, ao darem tratamento sistemático e dedutivo à Aritmética, estabeleceram definições e o princípio da não contradição. Na Geometria, necessitaram de definições, postulados, noções gerais e, mesmo assim, encontraram dificuldades como veremos mais à frente.

Entre as definições dadas por Euclides para os elementos da Aritmética estão:

- um é a unidade de modo que cada coisa é dita para ser um.
- número é um conjunto composto por unidades.

Baseado nelas, podemos esclarecer algumas posições gregas no tratamento com os números:

1. O "um é indivisível" pois, se assim não fosse, este não seria um.
2. O um pode ser multiplicado gerando o número, com idéia de mais de uma unidade (os números figurados pitagóricos).
3. A fração não é considerada um número ("número é um conjunto composto de unidades"). Até a época de Arquimedes, os matemáticos gregos ignoraram as frações. Baniram as frações da teoria dos números.

4. As proporções pitagóricas, que estabeleciam as comparações entre segmentos, ou seja, as relações entre números, foram preferidas às frações.

5. Cada número é divisível pois pode ser decomposto em unidades. O "um é o divisor de todos os números".

6. O número cujo único divisor é o "um" é chamado número primo. Aquele cujo divisor "não é somente um", é chamado número composto.

7. Os números pares são os que podem ser divididos em metades. Caso contrário, são ímpares.

8. Os números têm um número finito de divisores.

9. Mercadores, arquitetos, engenheiros usaram frações em seus cálculos, mas não os matemáticos, não na Ciência Matemática. Durante muitos anos, os negociantes gregos usaram as frações unitárias egícias e, os astrônomos gregos, as frações sexagesimais babilônicas.

Resumindo: as definições do "um" e do "número" na Aritmética grega, tornaram possível formar um sistema não contraditório e evitar as demonstrações empíricas, substituindo as contas desenhadas por comprimentos de segmentos representando números. No modelo geométrico, tudo ficou mais difícil. Surgiram os segmentos incomensuráveis e os paradoxos de Zenon. Os segmentos puderam ser divididos "ad infinitum", o que não acontecia com os números, de acordo com sua definição.

Vejamos como os gregos definiram os elementos básicos da Geometria:

- "ponto é aquele que não tem partes" ou "tamanho sem partes".
- "reta é comprimento sem largura".
- tempo é dividido em "agora" (momentos "sem duração", segundo Zenon).

A dificuldade com o **infinito** não permitiu que definissem **reta** a partir do **ponto**, similarmente ao **número** a partir do **um**. E reconheceram a insuficiência das definições para construir uma Geometria dedutiva. Criaram os postulados e as noções gerais. Os postulados euclidianos aplicam-se apenas aos domínios da Geometria.

A divisibilidade do espaço **ad infinitum**, ponto fraco da geometria grega, foi posta à prova nos postulados de Zenon: a dicotomia e Aquiles (pag.58). O movimento não é possível, neste caso, pois o corpo deve percorrer metade do percurso, depois a metade da metade do percurso e, assim por diante, ou seja, o segmento é divisível "ad infinitum". De forma que, cada um desses segmentos, cada vez menor, está contido no segmento original, isto é, o segmento é formado por um número infinito de segmentos cada vez menores.

A verdade empírica "o todo é maior que sua parte" tomada pelos gregos como um axioma válido sem prova, desconheceu ou ignorou novamente, o "infinito" geométrico.

Zenon, com muita argúcia, explorou esta fragilidade, apresentando o paradoxo do estádio (pag. 58). Representou corpos numa pista na forma da figura 2.7. Os corpos denotados pela letra A considerou em repouso, os demais, denotados pelas letras B e C, considerou em movimento constante, retilíneo e de mesma velocidade, durante um certo tempo, porém em sentidos opostos, como mostram as flechas na figura.

Analisou os corpos na posição da figura 2.7 e, depois, na posição ilustrada na figura 2.8 e concluiu que "a metade do tempo é igual a seu dobro". Zenon chegou a esta conclusão ao comparar a duração do movimento e a distância percorrida, por B' e C", ora em relação aos corpos em repouso, (A_2 e A_3), ora em relação aos corpos em movimento (B' e C"). No primeiro caso, essa duração foi A_3A_4 (2 letras), no segundo caso a duração foi B B B B' ou C" C C C (4 letras).

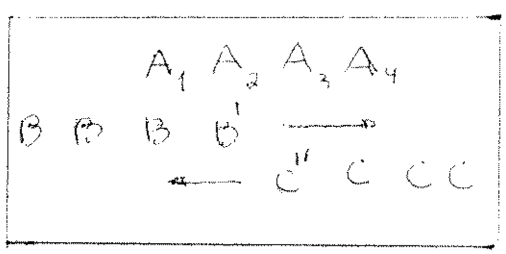


figura 2.7

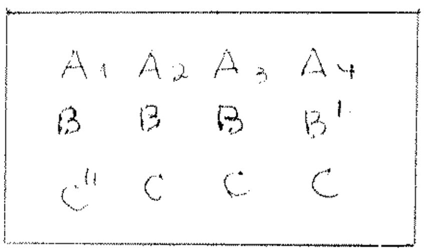
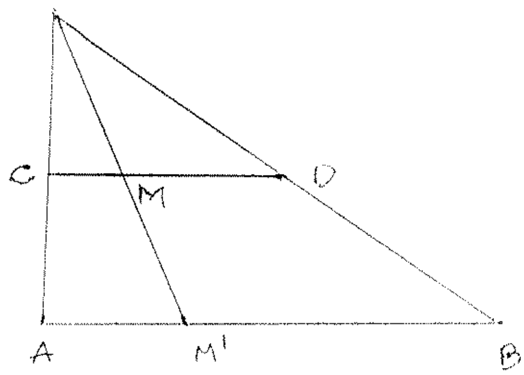


figura 2.8

Aristóteles e seus discípulos julgaram falso o raciocínio de Zenon, ao considerar que os corpos percorreram o dobro da distância, no mesmo período de tempo t e com a mesma velocidade c. Nisso eles estiveram certos, naturalmente.

Mas há quem sugira que, como as letras não só representaram corpos, mas distâncias, ou seja, segmentos de reta, Zenon analisou a questão em termos de segmentos e pontos ("pontos sem dimensão"). Nesse caso, como ambos os segmentos A_3A_4, B' C", são conjuntos infinitos, é perfeitamento possível considerar "o todo equivalente às partes", ou numa linguagem mais simples, "o dobro igual à metade", como veremos na figura abaixo.

$\overline{CD}$ é metade de $\overline{AB}$, porém, pela correspondência biunívoca proposta, $\overline{CD}$ é equivalente a $\overline{AB}$.



Qualquer ponto M de $\overline{CD}$ tem correspondente único M' em $\overline{AB}$ e vice-versa.

De qualquer forma, Zenon desejou provar, através dos paradoxos, a inconsistência dos conceitos de "movimento", "tempo" e "espaço" na forma adotada na época.

Na seção 3.2 voltaremos a abordar as dúvidas e inquietações surgidas na Europa, a partir do século XVIII, no trato das quantidades infinitas e veremos como elas foram superadas.

Após Euclides, Arquimedes(287-212 a.C.), que nasceu e viveu longo tempo em Siracusa, freqüentou Alexandria, assim como Eratóstenes (230 a.C.) e Diofanto (250 d.C.), matemáticos com importantes contribuições à Aritmética e ao Cálculo. Sobre Arquimedes, podemos dizer que as idéias de seu método da exaustão para o cálculo de áreas e volumes são inspiradoras da teoria das integrais, no sentido de Riemann, conforme a conhecemos hoje. Também é sua uma acurada estimativa do número π, usando esse método com o auxílio de polígonos regulares de 96 lados: $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$.

Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra, utilizadas contra os romanos na defesa de Siracusa e Cartago. Siracusa caiu em poder dos romanos, entre 214 a.C. e 212 a.C., e Cartago, em 146 a.C., infelizmente.

O império romano continuou a avançar suas fronteiras, dominando a Grécia em 146 a.C., a Mesopotâmia em 64 a.C. e o Egito em 30 a.C., subjugando esses povos, submetendo-os a pesados impostos. Dividiu-se, então, no império Ocidental e no Oriental, cujas capitais foram Roma e Bizanto, respectivamente. O império ocidental era fortemente agrícola, tendo feito florescer o mercado de mão de obra escrava do oriente para o ocidente.

No entanto, a supremacia intelectual grega era incontestável e os estudiosos da filosofia e das ciências tinham de aprender grego. A difusão do conhecimento se fazia com facilidade entre Roma, Atenas, Mesopotâmia, China e Índia e a ciência oriental começava a se fazer conhecer numa mistura de elementos gregos e orientais. A Mesopotâmia se tornou independente dos romanos no século II d.C. e, em 266 d.C., caiu sob domínio persa. Várias dinastias gregas que se formaram na região da Índia desapareceram por volta do século I d.C. Mas relações culturais foram mantidas entre a Índia, a Pérsia e o Ocidente.

Alexandria ainda permanecia o centro da Matemática e, o que é admirável, não se restringia às influências de origens gregas, como no caso dos *Elementos*, de Euclides. A matemática era desenvolvida mesclando-se com a aritmética computacional e a álgebra de origens egípcia e babilônica que encontramos nos trabalhos de Heron e Diofanto.

Diofanto viveu em Alexandria e ficou célebre por suas contribuições à Álgebra.

Nesse campo, parece haver consenso entre os historiadores de que os gregos conheciam os métodos egípcios para o tratamento de equações de primeiro e segundo graus. Documentos de 500 d.C. dão conta de problemas tratados pelos gregos, envolvendo equações de primeiro grau e sitemas de equações, com duas e três variáveis. Estudavam também equações indeterminadas, como a equação $2x^2 - y^2 = 1$, cujo interesse vinha desde a época de Pitágoras. Foi conhecido na Europa do século XII um manuscrito creditado a Heron (158 d.C), contendo vários problemas geométricos tratados por métodos algébricos, conforme Heath (1981, Vol.II).

A obra *Arithmetica*, de Diofanto, embora tenha aspectos da Álgebra babilônica, exibe diferenças fundamentais. Enquanto os babilônicos se concentravam em soluções aproximadas de equações de até terceiro grau, Diofanto se dedicou ao estudo da resolução exata tanto de equações determinadas como indeterminadas. Costuma-se classificar a álgebra, de acordo com o seu desnvolvimento histórico, em três estágios:

1) *primitivo* ou *retórico*, quando tudo é escrito em palavras.

2) *intermediário*, quando são adotadas algumas abreviações.

3) *simbólico*.

A palavra Aritmética, deriva da palavra grega **Arithmetike**, combinação de **Arithmos** e **Techne**, cujo significado é **número** e **ciência** respectivamente.

Diofanto usou em sua obra muitas abreviações, na busca de simplificar a linguagem comum, o que a enquadra no segundo estágio. Há 130 problemas tratados com exemplos numéricos. As raízes negativas são ignoradas e as soluções são sempre racionais. As soluções irracionais eram chamadas impossíveis. Não há a preocupação de discutir as soluções. Mesmo nos problemas indeterminados, Diofanto se satisfaz em apresentar uma solução. Não seguiu a tendência dominante que já o antecedia, deixando de apresentar o desenvolvimento axiomático de uma ciência dedutiva.

Com o declínio do império romano, a escola de Matemática de Alexandria começava a fenecer, embora o Museu permanecesse como um símbolo do paganismo contra o avanço do cristianismo. A academia de Atenas continuava seu trabalho, embora o império romano se desmoronasse gradualmente até o seu fim, em 476 d.C. Logo após tornar-se imperador do oriente, Justiniano, por julgar a cultura pagã da academia uma ameaça ao cristianismo, fechou-a em 529 d.C. Esta data é conhecida como o marco do fim do desenvolvimento matemático na Grécia.

Os membros da Academia buscaram abrigo no Oriente e as sementes da ciência helênica germinaram nos países dessa região. Na Europa discutia-se mais religião do que Matemática, embora versões medíocres de obras gregas estivessem em uso nas escolas ocidentais.

Em 641 d.C., Alexandria foi tomada pelos árabes, o que determinou o ocaso dos séculos de intensa luz em sua existência na Antiguidade.

2.3 A Busca da Simplificação

Por volta de 2000 a.C., os principais sistemas de numeração conhecidos tinham dois grandes defeitos básicos:

- O dos egípcios necessitava de muitos símbolos e tediosas repetições para a escrita e, na leitura, a interpretação era dificultada por não se poder distinguir, num relance, o número preciso de caracteres. Além disso, mais e mais símbolos se fariam necessários, à medida que números muito grandes fossem utilizados.
- O dos babilônios sofria dos mesmos males, embora tenha vencido a dificuldade de memorizar muitos símbolos. Com apenas dois, o da dezena e o da unidade, e com a invenção de engenhoso princípio posicional, usando novamente o símbolo da unidade para representar 60, permitia escrever qualquer grande quantidade. Faltava, todavia, um sinal para indicar as posições vazias e então, evitar confusão quanto à ordem de grandeza de um símbolo.

A necessidade de um sinal para o zero era menor no sistema babilônico, de base sexagesimal, do que no sistema decimal posicional. A representação de todos os números naturais até 3600 utiliza uma posição vazia 917 vezes, no nosso sistema decimal, e 59 vezes, no sistema babilônico. De qualquer forma, o símbolo para o zero, era uma necessidade premente.

Em síntese, a notação babilônica permanecia tão rústica e deficiente quanto a egípcia. O princípio posicional multiplicativo introduziu simplificações mas não a fez significativamente mais simples. O princípio aditivo provocava muita repetição de símbolos e a escrita e a leitura, num misto de base dez com sessenta, eram muito complicadas. A única vantagem da notação babilônica sobre as outras da época foi evitar a memorização de muitos símbolos. Nem os cálculos eram menos difíceis. Essa economia de símbolos não causou grande impacto e, exceto no trato de números exageradamente grandes, os sistemas não posicionais praticamente se igualavam ao babilônico em deficiências na leitura, na escrita e nos cálculos. Era necessário inventar um novo sistema de numeração que eliminasse tais deficiências.

É justo mencionar que uma simplificação fora obtida pelos próprios egípcios nas escritas hierática e demótica, a primeira utilizada nos papiros Rhind e Moscou. Demonstraram reconhecer que usar novas marcas, no lugar de abusar do princípio repetitivo, podia tornar mais concisa a representação numérica. Adotando base decimal, estabeleceram símbolos diferentes para os nove primeiros naturais, para os nove primeiros múltiplos de dez e para as nove primeiras centenas. Assim, um número menor do que 1 000 era representado por, no máximo, três símbolos: um para as unidades, outro para as dezenas e outro para as centenas. A figura 2.9 ilustra esses sistemas egípcios.

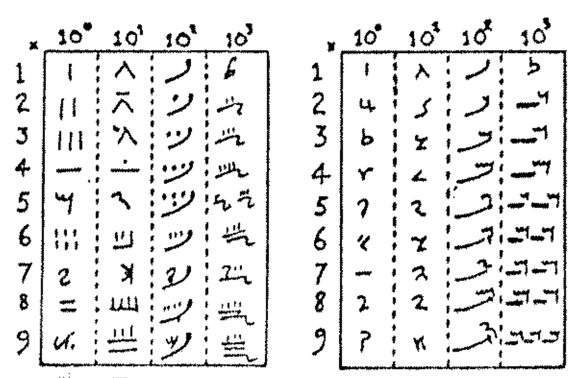


Tabela 2.9: formas hierática e demótica

A escrita hierática esteve em uso no 2º milênio antes de Cristo, até que a demótica surgisse por volta de 800 a.C. Estava iniciado o processo de cifração, que levava a um sistema cifrado, intermediário entre as massantes repetições do incipiente princípio aditivo e os sistemas mais concisos e evoluídos. Uma grande deficiência, ainda em evidência, era o excesso de símbolos. Necessitavam de 54 para representar os naturais menores do que um milhão ! Os escribas egípcios alcançaram alguma facilidade para escrever, mas à custa de um considerável esforço de memorização.

Na verdade, os babilônios não exploraram em toda a plenitude as vantagens do uso do valor posicional e os egípcios estiveram longe de aproveitar todas as vantagens de um sistema cifrado. Tanto na escrita hierática como na demótica é fácil notar o uso repetitivo de algumas marcas. Também, grafias muito semelhantes provocavam confusão entre algumas cifras.

A civilização grega e a romana, desenvolveram sistemas de numeração semelhantes ao hieroglífico dos egípcios. A base decimal prevaleceu, mas a contagem por grupos de cinco tornou-se uma passagem intermediária entre a unidade e a dezena. O princípio aditivo implicava na repetição de um símbolo até 4 vezes, quando um novo era introduzido.

O sistema ático (ou herodiânico), usado em Atenas, encontrado em documentos de 454 a 95 a.C., usava 6 símbolos simples, dados pela inicial da palavra numérica correspondente, e quatro símbolos compostos, obtidos dos simples pelo princípio multiplicativo. Todos os números naturais, até 50 000, eram representados por combinações aditivas desses, com o de maior valor colocado sempre à esquerda do de menor valor.

Sistema Ático

1 -	I		
5 -	Γ		
10 -	Δ	50 -	𐅄
100 -	H	500 -	𐅅
1 000 -	X	5 000 -	𐅆
10 000 -	M	50 000 -	𐅇

O sistema romano, ainda conhecido e usado hoje em dia, teve seus símbolos alterados durante os muitos anos em que esteve em uso na Europa Ocidental, onde permaneceu quase absoluto até o século XII d.C. Após isso, seu uso foi decaindo gradativamente. (Veja pág.108, seção 3.1).

Sistema Romano (símbolos usados no séc. XVI)

1 -	I	5 000 -	$\overline{V}$
5 -	V	10 000 -	$\overline{X}$
10 -	X	50 000 -	$\overline{L}$
50 -	L		
100 -	C		
500 -	D		
1 000 -	M		

Os dois sistemas mostraram, num certo sentido, símbolos mais concisos que os sistemas hieroglíficos egípcio e cuneiforme babilônio, principalmente por usar o princípio subtrativo (IX em vez de VIIII) e o princípio multiplicativo (𐅄 em vez de ΔΔΔΔΔ). Mas ainda assim, abusavam da repetição de símbolos pela aplicação do princípio aditivo, tornando por demais enfadonha a manipulação e a leitura dos números. Comprovamos nos exemplos, a seguir que, o desconforto de usar, repetidamente, o mesmo símbolo, persistia. Não houve ganho para o cálculo.

$$238 : \begin{cases} \text{HH}\Delta\Delta\Delta\Gamma||| & \text{ático} \\ \text{CCXXXVIII} & \text{romano} \end{cases}$$

$$4987 : \begin{cases} \text{XXXX𐅅HHHH𐅄}\Delta\Delta\Delta\Gamma|| & \text{ático} \\ \overset{\equiv}{\text{M}}\text{CMLXXXVII} & \text{romano} \end{cases}$$

A Grécia teve outra notação numérica, além da ática: a notação iônica ou alfabética adotada oficialmente em 50 a.C., mas usada desde 300 a.C. em Alexandria. Esta apresentava uma evolução dos sistemas cifrados egípcios, explorando seus recursos em toda a plenitude, o que a tornava superior a todos os sistemas conhecidos até então. Combinava com a cifração, os princípios aditivo, multiplicativo e subtrativo e utilizava o alfabeto fenício, de 22 letras, ao qual os gregos acrescentaram mais cinco vogais. As letras, divididas em três conjuntos de nove, denotaram, respectivamente, as unidades, as dezenas e as centenas. O uso das letras do alfabeto como numerais foi um recurso criado pelos gregos. Os fenícios nunca utilizaram seu alfabeto com propósitos de notação numérica.

Na figura 2.10 os símbolos da notação iônica revelam que as letras não foram associadas aos números numa simples observância da sucessão natural, mas respeitando-se os agrupamentos de dez e a ordem das potências de dez. Esse sistema foi utilizado por hebreus, sírios e árabes, adaptado às letras desses povos.

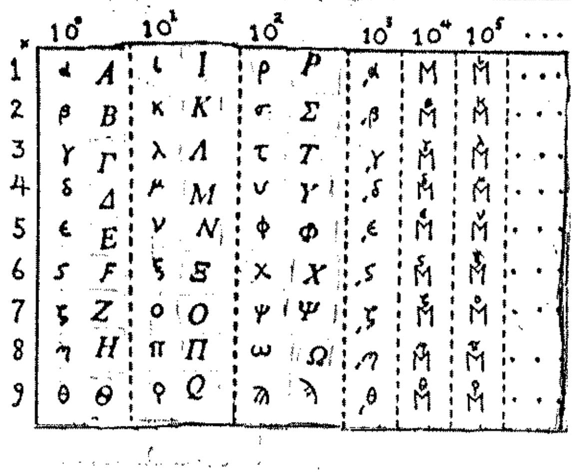


Figura 2.10: Numerais iônicos

Em documentos de 50 a.C. observamos o uso simultâneo dos dois sistemas gregos: o número de livros escrito em numerais alfabéticos e o número de linhas, em notação ática, analogamente ao que se faz hoje em dia no ocidente, com as notações arábica e romana.

Os gregos foram os primeiros a tirar vantagem plena do princípio de cifração !

Embora o sistema iônico tenha sido considerado o mais evoluído de sua época, em alguns aspectos outros se mostravam superiores. O sistema ático faz menos apelo à memorização nos processos operacionais. Assim, $30 + 40 = 70$ e $300 + 400 = 700$ eram indicados, respectivamente, por

$$\Delta\Delta\Delta + \Delta\Delta\Delta\Delta = 𐅄\Delta\Delta \qquad e \qquad HHH + HHHH = 𐅅HH,$$

no sistema ático e, numa forma gráfica mais simples, porém de muito maior apelo à memória, por

$$\Lambda + M = O \text{ e } T + \Gamma = \Psi, \text{ no sistema iônico}$$

O número 849 era indicado por 𐅅HHHΔΔΔΔΓ||||, no sistema ático, e $\Omega M\theta$, no sistema iônico. A vantagem gráfica deste último é clara. Todavia , como a supremacia do sistema iônico sobre o ático não chega a ser insofismável, existem, hoje em dia, inúmeras opiniões a favor de um ou de outro.

A numeração iônica despontou nos anos dourados da Matemática grega, tempos de Ptolomeu, Arquimedes e Apolônio, que contribuíram significativamente na escrita de números grandes, pois as 27 letras disponíveis já tinham sido usadas na representação dos números até 1 000. Criaram, então, modos diferentes de indicar os milhares e outros números grandes, em geral, via princípio multiplicativo. Arquimedes tinha símbolos para representar números entre 10 000 e 100 000 000, chamados números de primeira ordem, outros para os números de segunda ordem, entre 100 000 000 e 10^{16}, e outros para os de terceira ordem, entre 10^{16} e 10^{24}, veja Heath (1981).

Na figura 2.10, estão registrados os artifícios usados comumente para números maiores que 1000:

- As 9 primeiras letras do alfabeto, precedidas por uma vírgula, tinham seu valor aumentado mil vezes.
- As dezenas de milhar, chamadas *miríades*, eram indicadas pelo M e, sobre ele, um símbolo iônico como multiplicador. Por exemplo:

$$\overset{\beta}{M} = 2 \times 10000 = 20000$$

$$\overset{\lambda\eta}{M}, \alpha, \varphi, o, \delta = 38 \times 10\,000 + 1\,000 + 500 + 70 + 4 = 381\,574$$

- Alguma vezes, os documentos apresentaram a notação $\ddot{\alpha}$, para 10 000 e $\ddot{\rho}$, para 1 000 000.

A ausência do zero é sentida nos dois sistemas, embora haja indícios de que nos trabalhos de Ptolomeu uma palavra tenha sido usada para indicar o zero na notação da fração sexagesimal (Veja pag.174 na seção 4.1). De qualquer modo, era um procedimento isolado, não se caracterizando como aplicação sistemática de um princípio posicional.

Quanto à notação para as frações, os gregos não tiveram um procedimento único:

1. Sob influência egípcia representavam, inicialmente, as frações como somas de frações unitárias.
2. Posteriormente, usaram as notações:

- O número cardinal do numerador seguido do número, com acento, representando o denominador:

$$IO\alpha' \text{ para } \frac{10}{71},$$

$$\theta I\alpha' \text{ para } \frac{9}{11}.$$

Essa notação gerava confusões. No primeiro exemplo, a fração poderia ser $10\frac{1}{71}$ e no segundo $9\frac{1}{11}$. A correta interpretação dependia do contexto.

- O numerador seguido do denominador, com uma palavra abreviada superposta ao mesmo:

$$NK\Gamma^{\omega\nu}\left(\frac{50}{23}\right) \qquad \theta\rho K\alpha^{\omega\nu}\left(\frac{9}{121}\right)$$

- O numerador seguido do denominador acentuado escrito duas vezes:

$$EI\Gamma' I\Gamma'\left(\frac{5}{13}\right) \qquad S, \zeta'\zeta' \left(\frac{6}{7}\right)$$

- O numerador e, sobre ele, o denominador, notação atribuída a Diofanto, é por certo a mais conveniente:

$$\rho^{PKH}\left(\frac{100}{128}\right) \qquad \alpha^{\emptyset IB}\left(\frac{1}{512}\right)$$

As frações sexagesimais foram usadas pelos astrônomos. Ptolomeu usava divisões da circunferência em 360 partes (os *graus* de hoje em dia), cada parte era subdividida em 60, correspondentes aos nossos *minutos* e, depois, novamente em 60 partes, correspondentes aos nossos *segundos*. Usando frações sexagesimais, Ptolomeu obteve a notável estimativa para um segmento medindo $\sqrt{3}$:

$$1 + \frac{43}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3},$$

o que significa

$$\sqrt{3} = 1,7320509.$$

Resumindo, os gregos passaram pelas frações unitárias dos egípcios, as frações sexagesimais dos babilônios e, por último, uma notação análoga à nossa. As frações decimais não foram introduzidas até o renascimento europeu.

Em toda a história da Matemática grega, o cálculo aritmético foi colocado em segundo plano. Em que pesem suas significativas contribuições na área e apesar de Arquimedes e Heron, de reconhecidas habilidades numéricas, ou da produtividade de Diofanto, os gregos realmente não a valorizavam.

Não há dúvida de que os gregos preferiram o ábaco para tornar prático o cálculo aritmético. Com um sistema de numeração não posicional como o seu, o ábaco sanava suas deficiências operacionais. Nele, em linhas verticais separadas, eram representadas as unidades, dezenas, centenas, etc e o trabalho mental envolvido nas operações era praticamente o mesmo que em nosso sistema atual.

Para a multiplicação, os gregos usavam uma tábua de multiplicação, uma tabuada. Escreviam o multiplicando e, abaixo, o multiplicador. O termo representando a maior potência de 10 no multiplicador multiplicava todos os termos do multiplicando, começando pelo representante da maior potência de dez e seguindo a ordem decrescente. Depois procedia-se da mesma forma com o seguinte termo de mais alta ordem do multiplicador, e assim por diante.

O procedimento acima também era empregado nos casos de multiplicações que incluíam termos fracionários.

Dada a dificuldade de descrever claramente o processo, damos, a seguir, um exemplo que, a nosso ver, o ilustra melhor.

$$1243 \times 1312,$$

$$\begin{array}{r} 1243 \\ \times\ 1312 \end{array}$$

		1 000 000	200 000	40 000	3 000		
		300 000	60 000	12 000	900		
			10 000	2 000	400	30	
				2 000	400	80	6
ou		1 300 000	270 000	56 000	4700	110	6
		1 300 000	270 000	60 000	800	10	6
ou		1 300 000	330 000	0 000	800	10	6
ou	1 000 000	600 000	30 000	0 000	800	10	6

Finalmente, $1\,243 \times 1\,312 = 1\,630\,816$

Nos documentos legados pelos gregos, os produtos parciais eram apresentados diretamente. As últimas quatro linhas do esquema acima são de nossa responsabilidade e foram escritas com o fim de aclarar o procedimento.

Em Heath (1981), são encontrados exemplos de casos em que o multiplicando e o multiplicador são fracionários, bem como do algoritmo de divisão empregado pelos gregos, que é bastante semelhante ao nosso atual.

Vejamos um exemplo de multiplicação com frações, traduzido para a notação atual: $4\frac{33}{64} \times 7\frac{62}{64}$.

Cálculos efetuados:

$$4 \times 7 = 28$$

$$4 \times \frac{62}{64} = \frac{248}{64}$$

$$\frac{33}{64} \times 7 = \frac{231}{64}$$

E finalmente $\frac{33}{64} \times \frac{62}{64} = \frac{2046}{64}.\frac{1}{64} = \frac{31}{64} + \frac{62}{64}.\frac{1}{64}$.

A soma das 4 parcelas é

$$28 + \frac{510}{64} + \frac{62}{64}.\frac{1}{64} = 28 + 7\frac{62}{64} + \frac{62}{64}.\frac{1}{64} = 35\frac{62}{64} + \frac{62}{64}.\frac{1}{64}$$

A divisão 1 631 816 $\div$ 1312 é encarada como 1 000 000 + 600 000 + 30 000 + 1 000 + 800 + 10 + 6 $\div$ 1 000 + 300 + 10 + 2.

O primeiro quociente parcial de 1 000 000 por 1 000, é 1 000, que multiplicado pelo divisor 1 312 resulta 1 312 000. A diferença entre 1 631 816 e 1 312 000 é 319 816; este é dividido por 1 312, resultando 200.

Esse segundo quociente parcial é multiplicado por 1 312 e subtraído de 319 816, resultando 57 416.

Nova divisão de 57 416 por 1 312 dá 40. Este, multiplicado pelo divisor 1 312 e subtraído de 57 416 resulta 4 932, que dividido por 1 312 dá 3.

A soma dos quocientes parciais 1 000 + 200 + 40 + 3 = 1 243.

No processo de extração de raiz quadrada, era usada a decomposição do número em potências de dez e explorava-se o fato de que os números de 1 a 10 têm quadrados de 1 a 100, os de 10 a 100 têm quadrados de 100 a 10 000, e assim por diante. Logo, sabiam que as raízes quadradas de números entre 100 e 10 000 são números formados por dezenas e unidades.

Para encontrar a raiz quadrada de um número dado N, $100 \leq N \leq 10\,000$, a idéia era a seguinte: suponhamos que **a** indique as dezenas e que **b** represente as unidades da raiz quadrada, de modo que o número procurado é $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, com $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = N$, um número conhecido. Não é difícil encontrar, por tentativa, o maior número **a** de dezenas tal que a^2 seja menor ou igual as centenas contidas em N. Assim, conhecido **a**, a relação $\mathbf{a}^2 + \mathbf{2ab} + \mathbf{b}^2 = N$ fornece $N - a^2 = 2ab + b^2$ e, sendo o primeiro membro conhecido, essa relação permite encontrar **b**, por tentativa.

Para aclarar de vez a questão, consideremos o exemplo de encontrar a raiz quadrada de $N = 169$.

Como $169 = 100 + 60 + 9$, o número **a** de dezenas, tal que a^2 é menor ou igual a 100 (as centenas contidas em N) é 10. O número **b** das unidades, que nos resta encontrar, deve satisfazer

$$(10 + b)^2 = 100 + 20b + b^2 = 100 + 60 + 9,$$

ou seja, $20\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 60 + 9$, o que sugere $20\mathbf{b} = 60$ e $\mathbf{b}^2 = 9$. Donde $\mathbf{b} = 3$ e, finalmente, chega-se a que a raiz quadrada de 169, $10 + \mathbf{b}$, é 13.

Até o final da Idade Média, a numeração alfabética grega foi usada e teve papel fundamental no Oriente próximo e em todo o Mediterrâneo.

Embora a civilização grega é que tenha logrado as mais espetaculares conquistas da Matemática da Antiguidade, do ponto de vista da representação e dos cálculos aritméticos, isso não é bem verdade. Não se pode ignorar a grande contribuição da civilização chinesa, que florescia às margens dos rios Amarelo e Yang-Tse, tão antiga como a egípcia e a mesopotâmica. Há evidências de que os chineses tinham importantes conhecimentos astronômicos desde o século XV a.C. e de que já estudavam constelações da esfera celestial e os signos do zodíaco por volta de 8 000 a.C.

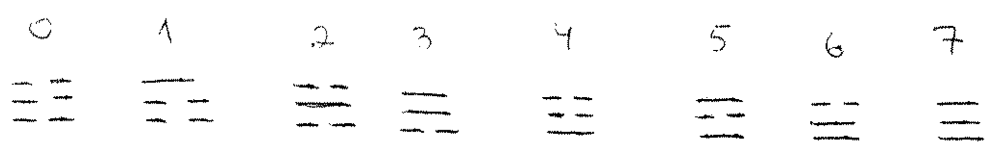
O interesse pela astronomia levou à necessidade de medidas de tempo, ângulos e, por conseguinte, ao desenvolvimento de uma teoria dos números. Dos documentos chineses mais antigos, cujas datas são aproximadas, I-King (livro de permutações, 2 200 a 1 200 a.C.), Chon-Pei Shuang-Ching (1 200 a.C.-300 a.C.), Chui-Chang Suan-Shu (nove capítulos sobre a arte Matemática, 250 a.C.), percebe-se o gosto por permutações e por quadrados mágicos, atribuindo qualidades mágicas dos números.

A magia dos números decorria de sua inserção num plano de harmonia universal, baseado na teoria dualística de Ying (força feminina associada à lua) e Yang (força masculina associada ao sol). Os números ímpares eram yang e os pares, ying e, para um estado harmonioso, as forças ying-yang deviam estar balanceadas.

Smith (1951) e Swetz (1984) comentam a construção dos primeiros quadrados mágicos e a engenhosidade dessa invenção, onde o misticismo, aliado a grande criatividade, faz da construção e da manipulação dos quadrados mágicos uma arte de muita habilidade e graça.

No livro das permutações, a partir dos sinais —, para yang, e - -, para ying, construíram os quatro símbolos abaixo que, associando - - ao dígito 0 e — ao 1, correspondem, no sistema de numeração binário, aos números 0, 1, 2, 3:

Consideravam também arranjos com repetição dos símbolos yang e ying, tomados três a três aos quais deram os seguintes nomes:



terra montanha água vento tempestade fogo vapor paraíso

Na base decimal esses números equivalem a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

O Chon-Pei, que trata de cálculos astronômicos, propriedades do triângulo retângulo e uso das frações, data aproximadamente de 1200 a.C., mas isto é objeto de dúvidas porque Shi Huang Ti, imperador chinês em 213 a.C., mandou queimar todos os livros e documentos com o objetivo de criar uma nova era de aprendizagem em seu império. Supõe-se que alguns sábios o recompuseram de memória depois desse desastre. A obra reproduz diálogos entre um príncipe que viveu no século XII a.C. e seu ministro.

Smith (1951) reproduz a seguinte fala do ministro ao príncipe:

"A arte dos números deriva do círculo e do quadrado. Quebre a linha e faça a largura 3, o comprimento 4, então a distância entre as extremidades é 5. ... Formas são redondas ou ponteagudas, números são ímpares ou pares. O céu se move em um círculo cujos números são ímpares, a terra repousa sobre um quadrado cujos números são pares. Sabe-se que a terra é inteligente, mas sabe-se que o céu é um

homem sábio. O conhecimento vem da sombra e a sombra vem do gnomo."

A outra obra matemática importante, os nove capítulos sobre a arte matemática, contém 246 problemas sobre medição de terras, agricultura, sociedade, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos.

Na época da criação dessa obra, os gregos já estavam preocupados em dar um tratamento global ao conhecimento matemático, com teorias unificadas e métodos sistemáticos. Os chineses adotavam uma postura como a dos egípcios e babilônios, apresentando coleções de problemas isolados e suas soluções.

Especificamente no Chui-Chang Suan-Shu, que contém os nove capítulos sobre a arte matemática, existem problemas sobre equações lineares, números positivos e negativos, fórmulas para áreas de triângulos, trapézios e círculos. Existem, também, problemas de regras de três, porcentagem, proporções, raízes quadradas e cúbicas, onde aparece algumas vezes o método da falsa posição, comumente atribuído aos egípcios.

A idéia de números negativos não parece ter causado dificuldades aos chineses. Na verdade, a eles é atribuído o mérito de ser a primeira sociedade a operar corriqueiramente com números positivos e negativos. Estavam acostumados a calcular adições e subtrações com o auxílio de duas coleções de barras: uma vermelha e outra preta, representando os positivos e os negativos. Não consideravam, entretanto, as soluções negativas de suas equações.

Struik (1989) afirma que no calendário chinês era usado um tipo de sistema sexagesimal, comparável à combinação de duas rodas dentadas, uma com 12 dentes e outra com 10, de sorte que 60 se tornava a unidade de ordem imediatamente superior à das dezenas, equivalente a um ciclo. Todavia, a numeração chinesa foi sempre decimal.

Os chineses usaram dois sistemas de numeração. O mais antigo utilizava símbolos diferentes de 1 a 9 e para as potências de 10. A representação envolvia um princípio multiplicativo, de forma que os dígitos eram acompanhados pelos símbolos referentes às potências de dez, correspondentes as suas posições.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	二	三	四	五	六	七	八	九

10	100	1000	10,000	100,000 000
十	百	千	萬	億

A escrita era de baixo para cima, na ordem crescente, gravada em vara de bambu. O número 420, por exemplo, era representado pelo símbolo referente ao 4, seguido do símbolo indicativo da ordem das centenas, o símbolo referente ao 2, seguido do símbolo para as dezenas. Se, por hipótese, M, C e D representassem o milhar, a centena e a dezena, respectivamente, usando os nossos dígitos atuais e o sistema chinês antigo, o número 5562 seria denotado por5M5C6D2. Menninger (1969), pag.247, apresenta vários exemplos desse sistema, encontrados em anotações na madeira, da época da dinastia Han (300 a.C. - 200 d.C.).

O sistema evoluiu de forma a incluir o princípio posicional. Havia dígitos de 1 a 9, específicos para as posições das potências ímpares de dez e outros, distintos, para as potências pares de dez. Os numerais de 1 a 9, na ordem crescente, eram

| || ||| |||| ||||| T || ||| ||||

para coeficientes de 10^{2n-1}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

—   =   ≡   ≣   ≣   ⊥   ⊥   ⊥   ⊥

para coeficientes de 10^{2n-2}, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Assim, o número 3 816 era representado por ||| ⊥ | ⊥. Menninger (1969) mostra foto de um vaso de 20 d.C., com inscrições nessa notação.

As operações elementares efetuadas em tabuleiros de contas tinham espaços vazios para a indicação do zero. A notação circular para o zero, como fazemos hoje, só veio a ser introduzida na China, por volta do século XII d.C. As tábuas de contas eram divididas em colunas designando grupos posicionais do sistema decimal.

Como em situações anteriores, consideramos a descrição dos processos menos elucidativa do que exemplos típicos. Ilustramos, portanto, uma multiplicação de números de três dígitos,

357 × 246 :

Tábua de Contas	Cálculos Auxiliares	Significado
246 ← multiplicador ← produto 357 ← multiplicando	2 × 3 = 6 2 × 5 = 10 70	2C × 3C = 6 DM 2C × 5D = 1 DM 7 DM
246 714 357	2 × 7 = 14 714 4 × 3 = 12 834	2C × 7U = 1 UM + 4C 4D × 3C = 1 DM + 2 UM
46 8568 357	4 × 5 = 20 854 4 × 7 = 28 8568	4D × 5D = 2 UM + 0C 4D × 7U = 2C + 8D
6 87822 ← resposta 357	6 × 3 = 18 8748 6 × 5 = 30 8778 6 × 7 = 42 87822	6U × 3C = 1 UM + 8C 6U × 5D = 3C + 0D 6U × 7U = 4D + 2U

A coluna indicando o significado é de nossa responsabilidade e foi acrescentada para melhor compreensão do processo.

Os produtos parciais mostrados nos cálculos auxiliares indicam o perfeito entendimento da notação posicional. Na verdade, na opinião de Swetz (1984), Menninger (1969) e outros, a sociedade chinesa foi a primeira a explorar eficientemente o princípio posicional decimal, embora sua representação numérica não tivesse alcançado o nível de abstração e a simplicidade adequados.

Os chineses usavam a tábua de contas com bastante desembaraço, também nas demais operações elementares. Vejamos um exemplo de divisão,

$$166\,536 \div 648 :$$

$$166\,536 \div 648:$$

Tábua de contas	Cálculos Auxiliares	Significado
2 166 536 648	166 500 120 000 = 200 × 600 46 500 8 000 = 200 × 40 38 500 1 600 = 200 × 8 36 900	200 é escolhido como primeiro quociente parcial
25 36 936 648	36 930 30 000 = 50 × 600 6 930 2 000 = 50 × 40 4 930 400 = 50 × 8 4 530	50 é escolhido como segundo quociente parcial
257 4 536 648	4 536 4 200 = 7 × 600 336 280 = 7 × 40 56 56 = 7 × 8 0	7 é escolhido como terceiro quociente parcial

No Chon-Pei podemos encontrar um sofisticado processo de extração da raiz quadrada. Na verdade, os chineses tratavam a extração de raízes quadradas e a divisão como processos semelhantes. O processo do Chon-Pei dependia de modo fundamental, da seguinte propriedade algébrica:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + (2a+b)b + (2(a+b)+c)c.\end{aligned}$$

Na Figura 2.11, mostramos um diagrama encontrado no documento chinês e, que dá uma justificativa geométrica para essa propriedade.

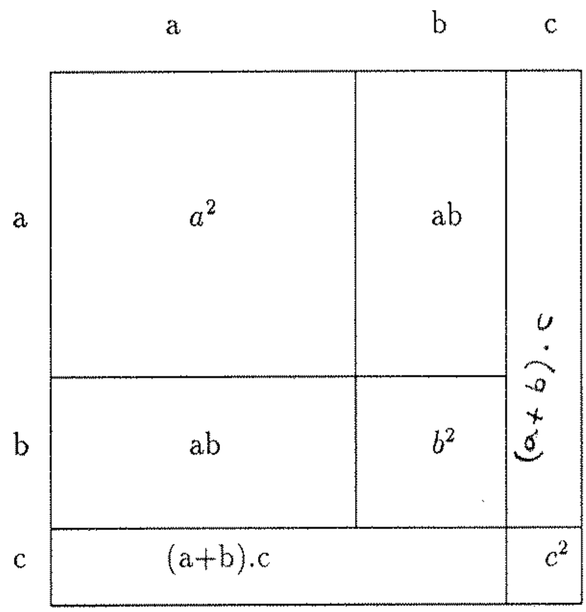


Figura 2.11

Os chineses estavam muito à frente das sociedades da Antiguidade nas habilidades com o cálculo. Segundo alguns autores, estenderam a notação posicional decimal às frações já no século XIV a.C. e, antes do século III a.C., faziam as operações básicas com frações, usando o moderno recurso do denominador comum, já bastante difundido entre eles no século V a.C. No século VI d.C., nos trabalhos de Ch'ang K'in Kien, é empregada a idéia de dividir frações pelo recurso de multiplicar pelo recíproco do divisor. Os chineses se referiam ao numerador como "filho" e ao denominador como "mãe".

No século III d.C. chegaram à estimativa: $\pi = 3,141024$. No séc. V d.C., melhoraram notavelmente para $\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929$ e, mais tarde, para $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. A Europa não teve esse grau de acurácia até o século XVI.

Usaram, como já dissemos, o método da falsa posição para sistemas de equações lineares, mas chegaram também a métodos sofisticados similares ao das matrizes.

Num interessante trabalho de 1 303, Ssu-Yüan Yüchien (Preciso espelho dos quatro elementos), as quatro incógnitas de um problema foram chamadas de céu, terra, homem e matéria. Nessa obra, aparecem equações de grau até catorze. Há, ainda, um método de resolução de sistemas lineares atribuído, muito mais tarde, no ocidente, a Hörner.

A civilização chinesa é a responsável por admiráveis inovações tecnológicas: o uso da impressão e da pólvora, no século VIII d.C., do papel e da bússola, no século XI d.C. Por volta de 75 d.C., usavam varas de bambu numa forma primitiva de ábaco.

A Matemática, em seu estágio primário, é uma arma para a sobrevivência da sociedade que, uma vez logrado esse intento, pode passar a estágios mais avançados. O segundo estágio não chegou a ocorrer na China. Apesar do impacto causado do ponto de vista computacional, as mais profundas contribuições chinesas estão na Álgebra. Desenvolviam processos de extração de raízes cúbicas e quadráticas visando o estudo de equações quadráticas e de outras ordens.

2.4 A procura da Perfeição na Representação e Manipulação de Quantidades

A civilização hindu se desenvolveu a partir de, aproximadamente, 2 500 a.C. sendo, portanto, tão antiga como a egípcia, a babilônica e a chinesa. São conhecidas as escavações de Mohenjo Daro e Harappa, na região do rio Indus. As ruínas mostram uma escrita não desvendada até hoje e uma notação numérica por traços verticais dispostos em grupos.

Por volta de 1500 a.C., os arianos invadiram a região do Ganges, forçando seus povos a um regime de castas servis e impondo a escrita sânscrita. Somente a casta dos sacerdotes, os brâmanes, ficou como guardiã de todo o conhecimento, inacessível ao povo. O desejo de manter seus privilégios levou os brâmanes a serem contrários à escrita, no cuidado de evitar a divulgação de seus conhecimentos. Seus hinos religiosos védicos eram, em grande parte, transmitidos oralmente e, para facilidade de memorização, escritos em versos.

Essa prática tornou mais inacessível a história antiga da civilização hindu. Porém. por volta do século VI a.C., o advento do budismo trouxe uma forte oposição às exclusividades dos brâmanes e, coincidindo com a vida de Buda, em decorrência de seus princípios não discriminatórios, nascia uma fase mais rica em literatura na Índia. Os relatos de eventos históricos passaram a ser preservados e acessados. O budismo floresceu até transformar-se na religião oficial, por volta de 250 a.C.

Nos anos 500 a.C., o noroeste da Índia (Gândara) estava sob domínio persa. Quando a região foi conquistada por Alexandre, o Grande, ali por 327 ou 325 a.C., veio a conhecer a cultura grega. Desse modo, as culturas persa e grega se misturaram e, por essa rota, idéias egípcias, babilônicas, gregas e assírias chegaram à Índia.

Sabe-se que, assim como os egípcios, os hindus tinham noções de geometria e, como eles, utilizavam cordas como instrumentos de medida. No caso hindu, muito desse conhecimento cresceu em decorrência de seu uso na construção de templos e altares. Em última análise, advinha de rituais místicos religiosos, uma das mais fortes influências nessa civilização.

Foi em meio a esse ambiente cultural que se deu o aparecimento da obra *Sulvasutras*[5], da qual se conhecem várias versões, todas em versos. Aparecem ali, por exemplo, idéias de como construir um ângulo reto, com o uso de cordas, nos moldes dos métodos egípcios e babilônicos. As datas dessas versões são muito incertas, podendo estar entre os séculos VIII a.C. e II d.C., razão pela qual alguns historiadores a relacionam à agrimensura egípcia e outros à geometria desenvolvida na obra de Euclides[6].

Entre os séculos V a.C. e III d.C., a escrita kharoshi, proveniente do noroeste da Índia, era largamente utilizada por escribas e mercadores pelos caminhos da Pérsia. Os numerais kharoshi indicam agrupamentos de quatro, dez e vinte, com símbolos específicos para indicar esses agrupamentos. Assemelha-se ao sistema ático grego. A figura 2.12, extraída de Menninger (1969), mostra os numerais kharoshi, por volta de 200 a.C.

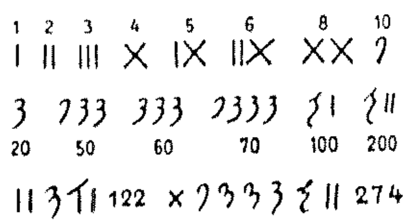


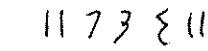
Figura 2.12

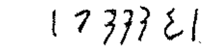
O símbolo para 20 consiste da superposição de dois símbolos para 10. A escrita é da direita para a esquerda, obedecendo à ordem decrescente dos valores. Não usavam a notação aditiva para as centenas, mas as representavam como se as contassem (2C, 3C, 4C,...). Existe a possibilidade de esse fato evidenciar contagem antiga limitada até 100.

Exemplos:

[5]Sulvasutras significa regras de corda.

[6]O Sulvasutras é abordado de forma interessante por Saradakanta Ganguli em *Scripta Mathematica*, nº 1, pp 135-141, 1932.

232 ⟶ 

175 ⟶ 

Nossos numerais não têm como ancestrais os numerais kharoshi, mas os brâmanes, de uma escrita posterior, mais importante, por ter dado origem a duzentos diferentes alfabetos indianos, incluindo o deva-nagari, o mais largamente usado hoje. (Veja árvote genealógica de nossos numerais na página 173, seção 4.1).

Um aspecto importante revelado pelos numerais brâmanes, encontrados em inscrições em pratos de cobre, paredes de templos e em superfícies de pedras, datadas de aproximadamente 150 a.C., é a adoção da cifração, já utilizada pelas escritas hierática, demótica e alfabética.

Cada unidade tem seu símbolo específico, assim como cada dezena. A gênese desses símbolos não é bem determinada. Alguns lhes atribuem origem indígena, outros acreditam serem oriundos do alfabeto fenício. Alguns historiadores observam grandes semelhanças entre eles e o sistema de numeração alfabético, usado pelos gregos pouco antes dos brâmanes. A Figura 2.13, extraída de Menninger (1969), mostra numerais brâmanes.

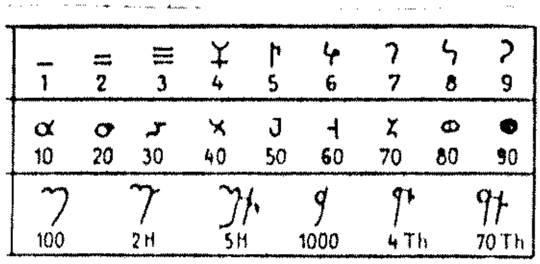


Figura 2.13

Os símbolos para as unidades e para as dezenas não revelam nenhuma conexão, o que indica um sistema cifrado, sem a adoção do princípio posicional. Este, porém, está presente na indicação das centenas e dos milhares, que se representam acompanhados do símbolo da unidade, como se estivessem sendo contados (2C, 3C,. . . ,2M, 3M,. . .).

Obtinham uma notação simplificada pela cifração das unidades e dezenas e, para as centenas e milhares, utilizavam apenas os nove símbolos das unidades, combinados com um símbolo indicativo da ordem correspondente à posição. Enfim, combinavam as vantagens da cifração com as do princípio posicional.

Este sistema evoluiu e acredita-se que o aparecimento, na Índia, nos anos 500-600 d.C., de um sistema de numeração combinando a cifração com o princípio posicional, tenha sido estimulado pelo uso das tábuas para o cálculo. Essas tábuas tinham uma leve camada de areia e, sobre ela, esboçadas algumas colunas em que os algarismos, a princípio os nove símbolos brâmanes, eram representados. Havia uma estreita relação entre esses instrumentos e a notação posicional.

Há, praticamente, unanimidade em considerar que a fascinação pelos números, demonstrada pelos hindus, é uma das causas que os levaram a ser o primeiro povo a tirar vantagem, em toda a plenitude, do princípio posicional em um sistema de numeração abstrato. Veja, por exemplo Smith (1951), Struik (1989), Boyer (1974), Menninger (1969).

Existe, entretanto, um consenso de que as civilizações contemporâneas à sua volta estavam prontas para receber esse evoluído sistema. Ao ocidente da Índia, pelos lados da Pérsia, já se fazia uso da notação posicional babilônica e o sistema alfabético grego era usado em Alexandria. Ao oriente, nos caminhos da China, o uso de barras para indicação de posições de ordens pares ou ímpares, ou mesmo, os nove símbolos acompanhados daqueles indicativos de sua ordem, faziam inequívoco apelo ao princípio posicional.

Estava, portanto, conquistada uma notação posicional abstrata, mesmo que um símbolo para a posição vazia somente tivesse vindo a ser usado, pelos próprios hindus, séculos mais tarde, entre 600-870 d.C. Embora as formas hindus medievais dos dez numerais sejam bastante diferentes das de hoje, pois esses numerais passaram por muitas mãos: indianas, árabes e européias, os princípios do sistema estavam firmados. Esses princípios são: 1) base decimal; 2) notação posicional; 3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais e; 4) um símbolo para a casa vazia.

As duas maiores contribuições dos indianos ao desenvolvimento da Matemática são considerados o nosso sistema de numeração e a introdução da função seno na trigonometria, em substituição às tabelas gregas de cordas. As mais antigas tabelas da função seno que se preservaram são as do Siddhāntas e do Aryabhatiya, obra do século V I d.C., do matemático hindu Aryabhata. Este texto também está escrito em versos, como era peculiar dos hindus, e fornece regras de cálculo para medição de terras e para a astronomia.

Os *Siddhāntas*, ou sistemas de astronomia, dos quais se conhecem cinco versões diferentes, escritas por volta de 400 d.C., envolvem funções trigonométricas e regras que indicam a forte influência grega da época de Alexandria. Apesar disso, os hindus deram uma abordagem nova, em muitos aspectos, à astronomia. Enquanto os gregos baseavam sua trigonometria na relação de uma corda de circunferência com o arco correspondente, no Siddhantas ela é baseada na relação entre metade da corda e metade do ângulo central subentendido, o que deu origem à função seno, no sentido moderno. Características negativas dos textos indianos, apontadas por vários historiadores,são a falta de técnica dedutiva como a dos gregos, e incorreções nas regras de cálculos de áreas e volumes. Entretanto, deles emergem grande interesse pelos números, operações aritméticas e soluções de equações determinadas e indeterminadas.

A adição e a multiplicação são efetuadas de formas parecidas com as de hoje, sendo os cálculos realizados em pequenas lousas, com tinta branca removível, ou em tábuas cobertas de farinha ou areia. O exemplo de como os hindus efetuavam a operação 325×28 foi extraído de Ifrah (1989), já traduzido para a nossa notação.

1) traçam-se sobre a areia fina colunas paralelas e escrevem-se os números como segue:

	3	2	5
2	8		

2) efetua-se $3 \times 2 = 6$,

6	3	2	5
2	8		

3) efetua-se $3 \times 8 = 24$, o 4 vai para o lugar do 3 e o 2 é adicionado ao 6,

8	4	2	5
2	8		

A esta altura, 3 já foi multiplicado por todos os algarismos do multiplicador.

4) avança-se 28 uma coluna à direita,

8	4	2	5
	2	8	

5) efetua-se $2 \times 2 = 4$ e adiciona-se ao 4

8	8	2	5
	2	8	

6) efetua-se $2 \times 8 = 16$, o 6 vai ao lugar do 2 e o 1 é adicionado ao 8, na coluna à esquerda,

8	9	6	5
	2	8	

O 2 já foi multiplicado por todos os algarismos do multiplicador, 28.

7) avança-se 28 uma coluna à direita

8	9	6	5
		2	8

8) efetua-se $5 \times 2 = 10$, o 0 não altera nada e o 1 é adicionado ao 9. Como resulta 10, apaga-se o 9, ficando a casa vazia, e adiciona-se 1 à coluna à esquerda,

9		6	5
		2	8

9) efetua-se $5 \times 8 = 40$, o 0 vai para o lugar do 5, ficando a casa vazia, e o 4 é adicionado ao 6. Como resulta 10, apaga-se o 6, deixando a casa vazia e adicionando 1 à coluna à esquerda ,

9	1		
		2	5

O resultado final é

9	1		

Os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e mostravam grande independência em seus trabalhos matemáticos. Assim é que Brahmagupta, que viveu na Índia central em torno de 628 d.C., mais de cem anos depois de Aryabhata, pouco tem a ver com seu antecessor que viveu no leste da Índia. As contribuições de Brahmagupta são mais voltadas à Álgebra, tendo dado soluções gerais a equações quadráticas, mesmo quando uma delas era negativa.

A Aritmética sistematizada dos números negativos e do zero foi, na verdade, encontrada pela primeira vez na obra de Brahmagupta. Nas questões geométricas, os gregos já consideravam grandezas negativas e conheciam regras como $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$, mas os hindus as converteram em regras numéricas sobre números negativos e positivos.

Brahmagupta cometeu o deslize de considerar $0 \div 0 = 0$, mas para $a \div 0$, com $a \neq 0$, não tomou nenhuma posição[7]. Além disso, é justo destacar que os hindus, diferentemente dos gregos, não questionaram sobre o problema da incomensurabilidade e, talvez por isso mesmo, operavam com as raízes irracionais com maior desenvoltura, tratando-as como números, não de uma forma consciente como Eudoxus, mas ingenuamente.

Um dos feitos notáveis de Brahmagupta é a obtenção da solução geral da equação diofantina $ax + by = c$, onde a, b e c são constantes inteiras, isto é, obteve todas as soluções inteiras, um problema não resolvido completamente por Diofanto.

Já na obra de Brahmagupta, bem como na de Diofanto, a adição era indicada por justaposição, a subtração, colocando-se um ponto sobre o subtraendo, e a divisão escrevendo-se o divisor sob o dividendo, como em nossa notação atual para frações, mas sem a barra. A notação grega da época helenística, para frações com o numerador embaixo do denominador, foi invertida pouco mais tarde pelos próprios gregos e, depois, foi adotada pelos hindus, ainda sem a barra entre eles. Infelizmente, os hindus não estenderam sua numeração decimal e posicional para as frações.

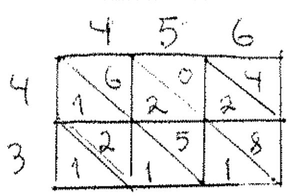
Baskara, matemático hindu do século XII, preencheu algumas lacunas da obra de Brahmagupta, dando uma solução geral para a equação diofantina quadrática e considerando mais apropriadamente, em termos da época, o problema da divisão $a \div 0$, com $a \neq 0$, afirmando que esse quociente é infinito. Estudou exaustivamente equações lineares ou quadráticas, determinadas ou indeterminadas. Para a equação diofantina $x^2 = 1 + py^2$, proposta por Brahmagupta, considerou os casos $p = 8, 11, 32, 61$ e 67, dando soluções particulares para estes[8].

[7] Para mais detalhes sobre o aparecimento do zero, veja Carl Boyer: *An early reference to division by zero*. The American Mathematical Mounthly, **50**, pp 487-491, 1943.

[8] Para uma visão das soluções e classificações de problemas algébricos em tempos antigos, veja

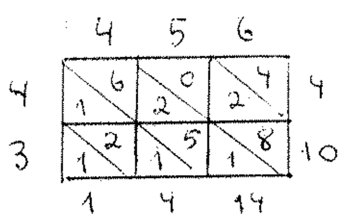
Ao criar um símbolo para as casas vazias, o zero, os hindus não mais necessitavam de tábuas de calcular e o algoritmo de multiplicação evoluiu para o reticulado, ou multiplicação de grades ou em gelosia. Esse método foi usado na Índia do século XII d.C., de onde foi levado para a China e a Arábia. Dos árabes foi para a Itália, por volta dos séculos XIV ou XV, quando recebeu o nome *gelosia* ao ser associado aos gradeados colocados à frente das janelas na Europa. O método de divisão mais difundido nessa época na Europa, o método do galeão também veio da Índia. Efetuamos, a seguir, 456×34 e $44977 \div 382$, pelos métodos mencionados.

1) 456×34

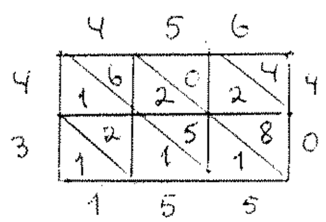


← nesta linha temos os resultados de 4×4, 4×5 e 4×6. A dezena abaixo e a unidade acima.

← Produto de 3×4, 3×5, 3×6.



Adicionamos os algarismos de cada diagonal e registramos.



Tomamos os resultados obtidos da direita para a esquerda, adicionando as dezenas aos resultados à frente.

O produto final é obtido da esquerda para a direita: $546 \times 34 = 15\ 504$.

David Eugene Smith: *Algebra of four thousand years ago*, Scripta Mathematica, vol. 4, nº2, pp 111-125, 1936.

2) 44 977 ÷ 382

382 | 44977 | 1

Cálculos auxiliares

$382 \times 1 = 382$

$449 - 382 = 67$

Continuando a divisão (cálculos em vermelho)

382 | 44977 | 11

$677 \div 382 = 1$

$382 \times 1 = 382$

$677 - 382 = 295$

(Continuação em azul)

382 | 44977 | 117

$2957 \div 382 = 7$

$382 \times 7 = 2674$

$2957 - 2674 = 283$

O resultado final é 177.

Alguns dos mais sofisticados problemas aritméticos ou algébricos tratados pelos hindus não correspondiam às exigências das situações práticas da vida de então. Eram problemas oriundos da especulação da própria Matemática, o que demonstra o grande pendor dos hindus para o cálculo.

Para bem compreender como esse vasto emaranhado de conhecimentos aritméticos e algébricos, uma inestimável contribuição dos povos egípcio, babilônico, grego, chinês, persa e hindu, veio aflorar na civilização ocidental, é preciso considerar a ação do povo árabe, sua cultura e suas conquistas.

O território correspondente à Arábia era um deserto habitado por tribos nômades, os beduínos, num ambiente extremamente belicoso, motivado pela busca da água e da posse das poucas regiões férteis.

No século V d.C., os vizinhos mais próximos da península árabe eram os impérios bizantino e o persa. O império bizantino incluía a Ásia Menor, a China e o Egito, enquanto o persa, a Mesopotâmia e a Pérsia, separados dos árabes pelo deserto da Síria. Nessa época, as tribos árabes, sob a liderança religiosa de Muhammad, vieram a expandir-se em conquistas militares, sustentadas basicamente em doutrinas religiosas e no fanatismo de seus fiéis, para os quais todas as guerras eram consideradas sagradas. Dominaram Damasco e Jerusalém e, por volta de 641 d.C., conquistaram Alexandria, que já fora o maior centro irradiador de cultura, num passado não muito remoto.

Oriundos de uma cultura mais primitiva, tinham mais a aprender do que a influenciar os povos conquistados, impondo basicamente transformações na linguagem. Cometeram algumas atrocidades culturais, como a queima da biblioteca de Alexandria, sob a justificativa de seu líder de que o importante já estava no alcorão e o que não estava no alcorão não merecia ser preservado. Havendo conquistado o norte da África, os árabes cruzaram o estreito de Gibraltar, em 711, e fizeram de Córdoba sua capital ocidental.

Nos anos 750 os árabes do império oriental, cuja capital era Bagdá, haviam despertado para o desenvolvimento intelectual iniciando intensos estudos de obras vindas da Grécia e da Índia, chegando a fazer de Bagdá o centro cultural do mundo. Essa influência se propagou para o ocidente e, como de 500 a 1 200, a Europa passasse pela *idade negra*, desprovida de realizações culturais de vulto, a dominação árabe, pela força, transformou-se naturalmente em dominação cultural.

Além de assimilar a cultura grega, Bagdá, pelo fácil acesso ao golfo pérsico, através do rio Tigre, alimentava-se culturalmente do conhecimento chinês e hindu, que por ali se propagava. O comércio também se expandia por esses caminhos. Assim, adquiriu dos chineses o uso do papel manufaturado, importantíssimo na difusão dos conhecimentos. Dos hindus aprendeu os cálculos, os numerais e o avançado sistema de numeração.

Durante os trezentos anos de um império consolidado, os árabes fizeram os conhecimentos fluírem do oriente para o ocidente. Por isso, os monastérios de Córdoba, Sevilha e Toledo enriqueceram-se com as culturas grega e oriental que, em 1 100, já se difundiam pelos monastérios de toda a Europa. Sendo assim, as obras de Euclides e Ptolomeu percorreram um longo caminho para chegar à cultura ocidental. Foram traduzidas para o árabe, provavelmente em Bagdá, e chegaram por mãos árabes à Espanha, onde foram traduzidas para o latim e de onde se difundiram pela Europa. O mesmo caminho seguiram os outros conhecimentos assimilados e preservados pelos árabes.

Em 1258, Bagdá caía em poder dos mongóis e, em 1 492, Granada, o último reduto árabe na Espanha, era reconquistada pelos espanhóis. No que concerne à Matemática, chegava ao fim o principal papel histórico do povo árabe, de difusor das culturas hindu e grega. Este foi imprescindível para o desenvolvimento europeu, numa época de transição em que as realizações genuínas eram praticamente ausentes. É justo observar, porém, que os árabes trouxeram significativas contribuições próprias à Matemática, como veremos adiante.

Deve-se levar em conta que o império árabe abrigava, no interior de suas fronteiras, povos das mais variadas etnias. Sírios, gregos, egípcios, persas, turcos e outros, conviviam com uma língua comum, o árabe, e outras de suas origens. Desta forma, no início do império, os numerais utilizados eram os dos povos conquistados, entre eles os alfabéticos gregos. Estes, aos poucos, começaram a predominar até que, depois de alguns séculos, chegassem os numerais hindus, com um sistema de numeração mais evoluído.

Sabe-se que, por volta de 773, a obra indiana sobre astronomia, escrita por Brahmagupta, foi traduzida do sânscrito para o árabe e passou a servir de base aos estudiosos árabes.

Al Khowarizmi, matemático de Bagdá, entre outras obras escreveu um livro sobre a aritmética hindu. O texto, traduzido para o latim, foi muito divulgado e, tendo sido escrito em árabe por um árabe, passou a impressão muito forte de que os numerais e o sistema de numeração ali tratados eram árabes. A própria palavra *algarismo* é derivada do nome Al Khowarizmi. A palavra *algoritmo*, usada hoje em dia para denominar certos conjuntos de regras operacionais, é também de origem árabe.

As formas dos numerais variavam muito, numa mistura de influências hindus, mouras, gregas e romanas, mas é inegável sua ascendência comum brâmane. Mudanças profundas ocorreram gradualmente no tempo e no espaço, tornando-os hoje muito diferentes dos numerais devanagari, usados atualmente na Índia, e daqueles usados hoje em dia no Egito, Iraque, Síria, Arábia e Irã. (Veja seção 4.1).

Outra obra de Al Khowarizmi, "Al'jabr wa'l muqabalch" (A ciência do cancelamento e da redução), do ano de 820, deu origem ao nome do ramo da Matemática conhecido como *álgebra*, embora não se tratasse de obra mais profunda do que as de Diofanto ou Brahmagupta. Pelo contrário, era mais superficial, limitando-se ao estudo de equações de segundo grau mais simples do que as tratadas por seus dois predecessores. Segundo Al Daffa (1984), o título da obra de Al Khowarizmi, *Al'jabr* significa transpor quantidades de um lado a outro de uma equação, enquanto *muqabalch* significa a simplificação de expressões resultantes[9].

Assim, considerando a equação

$$x^2 + 2x + 5 = 5 + 3x + x^3,$$

Al'jabr significa:

$$x^2 - x + 5 = 5 + x^3$$

e muqabalch:

$$x^2 - x = 3x^3.$$

Nesse livro, Al Khowarizmi tratou de problemas práticos como partilha de heranças e legados e questões comerciais envolvendo equações de primeiro e segundo graus. Sua obra revela influência hindu, no sistema de numeração, mesopotâmica, nos métodos de resolução de equações, e grega, nas soluções geométricas. No século XII, foi traduzida para o latim e usada por estudiosos ocidentais até o século XVI.

Entre suas contribuições, apresenta um algoritmo para extração de raiz quadrada. Desenvolve, também, métodos para resolver equações de primeiro e segundo graus.

Vejamos alguns de seus exemplos expressos em notação atual (Al Khowarizmi chamava de *raiz* o termo de primeiro grau de uma equação):

(a) raiz igual a cinco $\qquad x = 5$

(b) quatro raizes igual a doze $\qquad 4x = 12; \quad x = 3$

(c) metade de uma raiz igual a dez $\qquad \frac{1}{2}x = 10; \quad x = 20$

(d) quadrados iguais a raízes

$x^2 = 3x \qquad x = 3$

$\frac{x^2}{3} = 2x \qquad x = 6$

a raiz $x = 0$ não era reconhecida.

[9]Considerações mais detalhadas são feitas por Salomon Gandz em *The origin of the term Algebra*, The American Mathematical Monthly, vol 33: pp 437-440, 1926.

(e) quadrados iguais a números

$x^2 = 36$ $\qquad\qquad$ $x = 6$

$\frac{x^2}{4} = 16$ $\qquad\qquad$ $x = 8$

(f) quadrados e raízes iguais a números

$$(*) \qquad x^2 + 10x = 39.$$

Neste exemplo, mencionado em Al Daffa (1984), apresentou uma solução geométrica combinada com a idéia de completar quadrados. A Figura 2.14 é útil na descrição do processo.

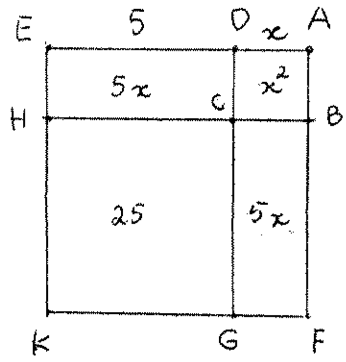


Figura 2.14

1) Tomou um quadrado $ABCD$, considerando $AB = x$.

2) Estendeu AD até E e AB até F, supondo que $DE = BF = \frac{1}{2}(10) = 5$.

3) Completou o quadrado $AFKE$

4) Estendeu BC a H e DC a G

A área do quadrado $AFKE$ pode ser escrita como

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

Adicionando 25 a ambos os membros da equação (*), obtemos

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64,$$

cujos dois membros são quadrados perfeitos:

$$(**) \qquad (x+5)^2 = 8^2.$$

Portanto, a medida de AF deve ser 8 e, como $AF = x + 5$, segue finalmente que

$$x = 3.$$

Sem o apelo geométrico final, chega-se a essa solução considerando-se as raízes positivas de ambos os membros de (**). A outra solução $x = -5 - 8 = -13$ não foi considerada por Al Khowarizmi.

Outros exemplos, a seguir, apresentados como casos distintos, são hoje reconhecidos como meras variações do exemplo (f).

(g) quadrados e números iguais a raízes

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Apresenta uma solução específica para este caso, no mesmo espírito da anterior, mesclando artifícios algébricos com idéias geométricas. Veja Al Daffa (1984).

(h) quadrado igual a raízes e números

$$x^2 = 3x + 4$$

Aqui também Al Khowarizmi adota o mesmo procedimento e indicamos a mesma referência do exemplo anterior: Al Daffa (1984).

Os casos analisados por Al Khowarizmi esgotam as possibilidades para as equações lineares e quadráticas com uma raiz positiva. Uma característica das obras árabes é, ao contrário das indianas, a apresentação sistemática e bem organizada. Contudo, não chegaram tão longe como os hindus, que estudaram as equações indeterminadas, negligenciadas pelos árabes. Embora rejeitassem as raízes e as grandezas negativas, é certo que conheciam as regras que governavam operações com esses números.

Após Al Khowarizmi, o mundo árabe deu Thakit ibn Qurra (826-901), matemático e lingüista, a quem se devem as traduções de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Não só traduziu como em alguns pontos acrescentou, além de sugerir modificações e generalizações. Num deles, obteve um esquema de construção de números amigáveis, considerados pelos pitagóricos:

Se p, q e r são primos da forma $p = 3\times 2^n - 1$, $q = 3\times 2^{n-1} - 1$ e $r = 9\times 2^{2n-1} - 1$, então $2^n pq$ e $2^n r$ são números amigáveis, pois cada um é a soma dos divisores próprios do outro.

Por exemplo, tomando $n = 2$, temos $p = 3 \times 2^2 - 1 = 11$, $q = 3 \times 2 - 1 = 5$ e $r = 9 \times 2^3 - 1 = 71$. Então, nota-se que $p = 11$, $q = 5$ e $r = 71$ são números primos e da forma requerida. Assim, de acordo com a fórmula de Thakit, os números

$$2^2 \times 11 \times 5 = 220 \quad \text{e} \quad 2^2 \times 71 = 284$$

são amigáveis, conforme já foi destacado em exemplo da Seção 2.2.

Recentemente, Saidan (1966) descobriu uma obra árabe do século X (952-953 d.C.), que estuda frações decimais na forma utilizada pelos hindus. O autor, Al Uqlidisi, considera questões que envolvem metades sucessivas de um número ímpar e reconhece que o problema está em encontrar sucessivos termos na progressão $a(\frac{1}{2})^n$ onde **a** é o número dado. Ele desenvolve o método da seguinte maneira:

	a=19	a=13
1ª metade	95	65
2ª metade	475	325
3ª metade	2375	1625
4ª metade	059375	08125

O resultado é comprovado, duplicando-o até obter 19 e 13, respectivamente.

Num outro exemplo, a questão é aumentar o número 135 de seus décimos sucessivos, por 5 vezes.

a= 135' (o sinal ' foi usado para indicar a unidade)

		1	3	5					seu décimo
1)	1	4	8'	5					primeira soma
		1	4	8	5				décimo
2)	1	6	3'	3	5				segunda soma
		1	6	3	3	5			décimo
3)	1	7	9'	6	8	5			terceira soma
		1	7	9	6	8	5		décimo
4)	1	9	7'	6	5	3	5		quarta soma
		1	9	7	6	5	3	5	décimo
5)	2	1	7	4	1	8	8	5	quinta soma

O número 135 foi aumentado de seus décimos por 5 vezes. O resultado encontrado é 217,41885.

Al Uqlidisi sugere no texto um método diferente desse para encontrar o mesmo resultado para a mesma questão:

"Multiplique 135 por 11 e divida por 10, isto é, reduza uma casa. Multiplique o número (a parte inteira) por 11 e tome seus décimos. Multiplique o 5 (parte decimal) por 11, adicione o 5 ao 8 e coloque 5 ..."

Em nossa notação, o método fica:

135 × 11 = 1485; 1485 ÷ 10 = 148,5; 1a soma parcial 148,5.

148 × 11 = 1628; 1628 ÷ 10 = 162,8
5 × 11 = 55

Adicione o 5 com o 8 e coloque 5, isto é,

	1	6	2	8	
				5	5
2a soma parcial →	1	6	3	3	5

Confira este resultado com 2), no quadro da página anterior.

O processo, naturalmente, continua.

O autor mostra desembaraço ao multiplicar quantidades decimais por um número e ao dividí-lo por potências de 10.

Os comentários de Saidan dão conta que, nas obras árabes escritas entre o século X e o século XIV, foram usadas as seguintes notações:

3
3
4 para $3\frac{3}{4}$;

17
02
08 ou

inteiros	frações decimais
17	28

para denotar 17,28 ;

10
53
100 para 10,53 ;

153|5 para $153\frac{1}{2}$; 16|25 para $16\frac{1}{4}$ e 2494 ⌊375 para o produto de 153|5 por 16|25.

Na verdade, a idéia de fração decimal estava bastante forte no mundo árabe desse período, embora credite-se a Stevin (1585) ter esclarecido completamente o método das operações com números decimais e de ter feito perfeitamente compreensível a extensão do princípio posicional aos sub-múltiplos da unidade, como veremos na seção 3.1.

Outro matemático árabe que exerceu forte influência na Europa, notadamente em álgebra e aritmética, foi Abu Kamil (século X) que, segundo Karpinski[10], influenciou Leonard de Pisa (1 202) e também o matemático árabe do século XI, Al Karkhi.

Obras citadas anteriormente à revelação de Saidan sobre Al Uqlidisi, como as de Abu Mansur (1 037) e Al Kashi (1 436), tratam basicamente dos mesmos assuntos, sempre se referindo à maneira da "aritmética hindu", no que concerne aos cálculos; mas há ligeiras variações quanto à notação de frações. Todos, sem exceção, tratam de cálculos na base sessenta, lembrando idéias babilônicas, e de métodos e questões oriundos da Grécia, relativos aos números, o que demonstra um certo ecletismo da obra matemática árabe.

A introdução do uso do traço de fração, é comumente creditada a Stevin, em torno de 1585, ou Christoff Rudolff, por volta de 1530. Saidan, porém, menciona recentes estudos de Hunger e Vogel (1963), segundo os quais, Stevin e Rudolff foram significativamente precedidos no mundo árabe. A divulgação no ocidente do método da falsa dupla posição, supostamente provindo da Índia, mas usado em forma mais simples, desde os antigos egípcios e babilônios, é uma contribuição árabe.

Não se pode falar da influência árabe no desenvolvimento da Matemática sem mencionar o nome do poeta persa Omar Khayyam, que viveu no século XI, dentro das fronteiras do império árabe[11]. Um certo encanto envolve a sua lembrança, certamente por sua condição de poeta, e lhe custa uma conotação popularesca. Sua contribuição, porém, é muito importante e contém boa dose de engenhosidade e criatividade.

Trabalhou na solução, via álgebra e aritmética, de equações do 2º grau. Para as equações cúbicas, concentrou-se em processos geométricos, afirmando que as soluções aritméticas ou algébricas eram impossíveis nesse caso. Ficou, entretanto, provado no século XVI, que suas convicções a esse respeito eram falsas.

Omar Khayyam é incompleto por negligenciar equações contendo coeficientes negativos, bem como as raízes negativas, além de não considerar todas as interseções das cônicas envolvidas em seu método. Cabe-lhe, no entanto, o crédito de haver sido o precursor no uso simultâneo da Álgebra, Aritmética e Geometria no estudo

[10]Karpinski. *The algebra of Abu Kamil*. The American Mathematical Monthly. **21**. nº 2. pp 37-48, Feb. 1914.

[11]Uma interessante referência sobre o assunto é D. Struik. *Omar Khayyam*. Mathematics Teacher. Vol. 51. pp 280-286, Apr. 1958.

das equações.

A partir do século XII, o império árabe entrava em declínio e, já no seu estertor, temos as contribuições de Al Kashi, no século XV, com aplicações do método de Hörner, de origem chinesa, à resolução de equações e, também, com trabalhos sobre frações decimais e sexagesimais.

Numa rápida avaliação final da ação árabe no desenvolvimento da Matemática, diríamos que foi fundamental, como veículo da cultura oriental para o ocidente, mas enriquecendo-a significativamente, ao realizar esse transporte, com valiosas contribuições próprias.

Boyer (1974) divide seu legado em quatro partes:

(1) Uma aritmética derivada da Índia, com um sistema de numeração baseado no princípio posicional.

(2) Uma álgebra oriunda de fontes gregas, hindus e babilônias, porém, acrescida de novos fatos e revestida de características árabes.

(3) Uma trigonometria de raízes gregas e hindus.

(4) Uma geometria grega com algumas contribuições árabes.

Capítulo 3

A Propagação pela Europa e a Contribuição Ocidental

3.1 Entre o Ábaco e o Algoritmo: uma Seleção Conflitante

Nesta seção, pretendemos discorrer sobre a numeração na Europa, na Idade Média, onde o cálculo era fortemente baseado no ábaco e a representação numérica, nos numerais romanos.

Durante o século I a.C., o império romano ampliou suas fronteiras para o oeste e o norte, influenciando a França com a cultura romana. Os rios Danúbio e Reno tornaram-se os limites do império. Os cristãos foram perseguidos até os anos 300 d.C., quando, sob o governo de Constantino I, sua religião foi oficializada. Por esse tempo, tribos germânicas ampliaram suas terras pela França e Espanha, confinando o império oriental romano à região à volta de Roma. Alemães estabeleceram-se ao norte da Itália até 500 d.C., quando o exército do império romano ocidental, cuja capital era fixada em Bizanto, reconquistou o território. Mais ou menos 200 anos mais tarde, a Espanha perdia suas terras para os árabes.

O ocidente europeu ficou sob o domínio de três forças: a Igreja, o governo franquista e os árabes. Estes, em 732, perderam parte de sua influência em terras espanholas, não sem antes ter deixado marcas profundas na cultura espanhola e ter divulgado o conhecimento grego e hindu pelos monastérios da região.

Até então, a Europa sob forte pressão religiosa, tinha, nos monastérios, o centro irradiador do conhecimento, no fundo, baseado na cultura romana. Mesmo as tribos bárbaras recebiam, por meio de relações comerciais com outros povos, influência da cultura romana. Nesse caso, devido às línguas diferentes, realizavam o intercâmbio comercial, utilizando-se da **linguagem dos dedos** para o entendimento dos cálculos numéricos.

Os romanos, por exemplo, tinham seu método de representar números de 1 a 10.000, com os dedos das duas mãos, assim como os utilizavam para os cálculos. No comércio interno europeu, bem como no externo, com os mercadores árabes, persas e hindus, usou-se o recurso da linguagem numérica dos dedos. Esta prática estava muito em uso no início da Idade Média, tendo o monge beneditino inglês Beda escrito um texto em 700 d.C., esclarecendo e difundindo tal costume. Antes dele, no continente europeu, houve poucos estudiosos da Matemática. Os mais conhecidos foram os romanos Boethius ($\pm$ 500 d.C.) e Cassiodorus ($\pm$ 550 d.C.).

O conhecimento aritmético na Idade Média era domínio de estudantes das escolas religiosas, de mercadores e de funcionários das administrações. Fazendeiros e camponeses europeus detinham uma aprendizagem primitiva, de alcance doméstico e limitado. Legaram-nos muitos tabletes de madeira com traços entalhados representando quantidades.

O costume camponês dos entalhes em madeira obteve status de documentos legais ou comerciais, estabelecendo débitos e processos de pagamento envolvendo pessoas de uma comunidade. Os "contratos" eram anotados em tabletes duplos com os mesmos traços entalhados. Cada contratante conservava o tablete até que o compromisso comercial tivesse sido cumprido. Esse hábito esteve em uso em toda a Europa do século XIII, XIV, XV e XVI.

Da observação dos tabletes numéricos, os historiadores concluíram que os numerais romanos são de origem camponesa e levantaram as hipóteses sobre o significado de cada um de seus numerais. Um hábito comum observado é aquele de cruzar traços quando completado um agrupamento. No caso mais geral, quando completado um agrupamento de dez.

Examinemos os numerais romanos e sua suposta origem.

valor numérico	numeral	origem
1,2,3,	I, II, III	traços entalhados na madeira
4	IIII posteriormente IV	
10	X	derivado da prática comum de cruzar grupos de traços
5	V	metade de dez: $X \to$ --X--- $\to$ V
100	Ж	posteriormente tornou-se C da palavra latina centum
50	L	metade de cem Ж $\to$ -Ж- $\to$ ↓ $\to$ ⊥ $\to$ ⊥ $\to$ L
1000	(X) $\to$ ⊗ $\to$ ↀ	posteriormente M da palavra latina mille
500	D	metade direita de mil ↀ $\to$ ↀ $\to$ D
10 000	ↂ	forma antiga
5 000	ↁ	metade direita de dez mil
100 000	(ↂ) (forma antiga)	dez vezes mil
50 000	ↇ	metade direita de cem mil
1 000 000	|X|	

A fração $\frac{1}{2}$ era indicada por uma unidade cruzada por um traço:

*XII*Ⅹ para denotar $12\frac{1}{2}$; L X X V I Ⅹ para $76\frac{1}{2}$.

Às vezes, nos manuscritos medievais, o S (letra esse) foi usado como abreviatura da palavra latina semi = metade:

SV indicava 5 menos $\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$; *SX* para 10 menos $\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$.

Os numerais romanos foram muito usados por todos os povos europeus devido sua praticidade e estavam enraizados nos costumes populares. As operações nos moldes romanos, efetuadas na tábua de contar, o ábaco, associavam contas a valores, dependendo da posição ocupada: unidade, dezena, centena, unidade de milhar, etc, ou seja, os europeus utilizavam no ábaco o nosso moderno princípio posicional para agrupamentos decimais. No registro do resultado dos cálculos, utilizavam algarismos romanos. Essa duplicidade, cálculos decimais no ábaco e algarismos romanos na escrita, permaneceu durante séculos.

Os europeus não foram diferentes de gregos, hindus, árabes, chineses e japoneses no efetuar cálculos com o recurso da tábua de calcular. As tábuas gregas, por exemplo, de nome "abákion", característica da região de Atenas, no século VII a.C., supõe-se terem influenciado as tábuas romanas.

As gregas possuem 13 colunas, 4 delas referentes a submúltiplos da unidade: o obol (0), sexta parte da unidade; o hemobolión (c), metade do obol; o tetartemorion (T), quinta parte e; o chalkós (x), oitava parte do obol. Estavam estabelecidas as seguintes relações:

1 unidade = 1 drachma = 6 obols = 12 metades de obol = 24 quartos do obol = 48 oitavos do obol

1 talento = 6.000 unidades.

As posições das colunas no ábaco grego estão ilustradas por numerais áticos e os valores indicam o nº874 + $\frac{5}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}$

Talento	drachmas								obol			
T	𐅇	X	𐅅	H	𐅄	Δ	Γ	⊢	I	C	T	X
6000	5000	1000	500	100	50	10	5	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$500 + 300 + 50 + 20 + 4 + \frac{5}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}$

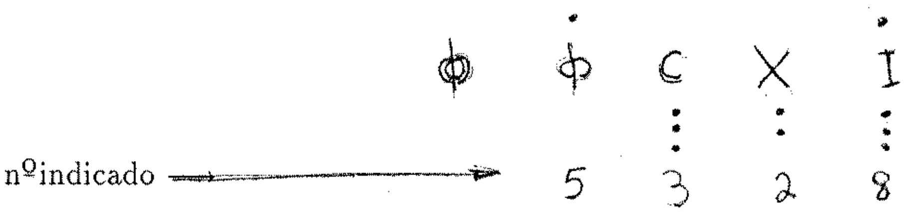
As tábuas recobertas de areia, facilitavam a remoção das contas de uma coluna a outra. Se mudasse uma delas do chalkós ao talento, seu valor estaria aumentado de 288.000 vezes.

No "abacus" romano, as colunas referentes às frações representavam a semiunciae = metade da unciae ($\mathcal{L}$); a sicilius = $\frac{1}{4}$ (Ɔ) e duella = $\frac{1}{3}$ da unciae (2). As contas, discos de mármore, metal ou vidro, mudadas de uma coluna a outra, assumem o valor posicional de no máximo 1 000 000. No incício da era cristã, existiam ábacos simplificados do tamanho da mão, algumas vezes indicando agrupamentos quinários intermediários.

Colunas e valores nos ábacos romanos

1 000 000   100 000   10 000   1 000   100   10   1   1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$

A tábua de contar, a seguir, apresenta agrupamento quinário na parte superior.



Calculi (= pequenas pedras) é o nome dado às contas do ábaco romano. Calculare, palavra introduzida na língua romana aos 400 d.C. na Espanha, tem seu significado relacionado à contar "calculi" no ábaco.

Os numerais gregos e romanos, como indicados nas colunas das tábuas, tinham regras primitivas, se comparadas ao processo avançado, posicional, utilizado para os cálculos no ábaco.

Dos estudiosos do ábaco, o monge Gerbert ($\pm$ 980 d.C.) foi o primeiro a escrever sobre o seu uso. Ele estudou nos monastérios espanhóis onde aprendeu os numerais hindus trazidos pelos árabes em 713 d.C. Tornou-se professor de autoridades eclesiásticas e papa em 999 d.C., com o nome de papa Silvester II. Em seu livro "Regras para calcular com números no ábaco", apresentou uma tábua de contar com 27 colunas, das quais 3 representavam frações. Chamou-a de arco pitagórico pois considerava as tábuas invenção de Pitágoras.

Gerbert inovou ao trocar os "calculi" romanos por "ápices" (= pequenos cones com numerais hindus escritos). Não utilizou o agrupamento quinário à moda romana e no lugar de 4 calculi, colocou o ápice com o numeral hindu 4, ou seja, representou um número de pedras por um ápice com a quantidade escrita em numeral hindu. O zero não foi utilizado por ele.

Os numerais hindus, como adotados por Gerbert, no ábaco, não contribuíram para simplificar notações ou cálculos. Qualquer outro símbolo, se escrito no ápice, teria o mesmo efeito. Talvez, por isso, os ápices não tenham sido bem assimilados nos monastérios, embora nos séculos XI e XII dizer gerberista ou abacista tinha o mesmo significado, usuário do ábaco.

Em geral, durante o século XI, os algarismos hindus, quando adotados, o foram sem o devido entendimento do princípio posicional. Apenas foram trocados os numerais romanos pelos hindus. Faltou compreensão do sistema.

Ao contrário na Itália, ou melhor, em Pisa, Leonardo Fibonacci (1175-1250), dominava perfeitamente os cálculos com os numerais hindus, habilidade aprendida com comerciantes árabes e em viagens pelo Oriente. Esse talentoso matemático sofreu influência das álgebras de Al-Khworizmi e Abu Kamil e divulgou as notações e cálculos hindus no texto escrito por ele: Liber Abaci.

Fibonacci, embora prestigiado pela corte italiana, não obteve boa receptividade para o conhecimento aritmético que defendia.

A sociedade italiana, entusiasta das facilidades do uso do ábaco, resistiu aos cálculos hindus e não percebeu as vantagens dos novos numerais.

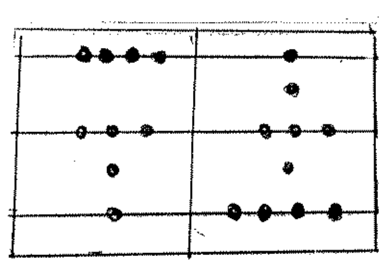
A partir do séc. XIII, a produção e o comércio floresceram, forçando a aplicação do uso das tábuas. As linhas verticais do ábaco foram substituídas pelas horizontais e os "ápices" deram lugar novamente aos "calculi", transformados em discos de metais semelhantes a moedas e com desenhos estampados sobre eles. O povo francês adotou-os na vida cotidiana, sendo seguido pelos demais povos europeus. No séc. XV, a habilidade do cálculo no ábaco era requisito básico para os cidadãos.

Tivemos, algumas vezes, as tábuas de contar confeccionadas em tecidos para facilitar seu transporte e os agrupamentos quinários podiam ou não ser adotados. Termos como numeração (=colocação dos números na tábua), adição, subtração, duplicação, mediação, multiplicação, divisão, elevação (= trocar grupos de contas por outra de ordem superior) e resolução (= decomposição do número de ordem superior no de ordem inferior), estavam relacionados aos cálculos no ábaco e eram, agora, usados popularmente.

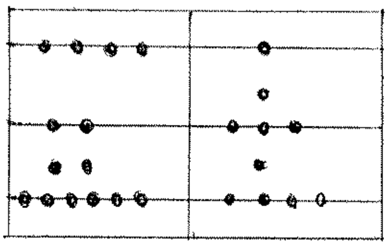
Vejamos alguns exemplos dessas operações num ábaco de agrupamento quinário intermediário.

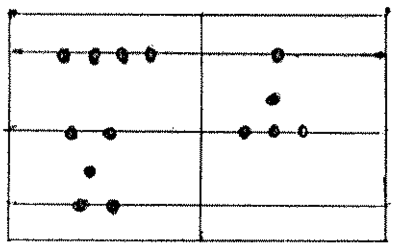
I) Subtração (ilustrada em 5 etapas).

$$\begin{array}{r} 436 \\ -\ 189 \\ \hline 247 \end{array}$$



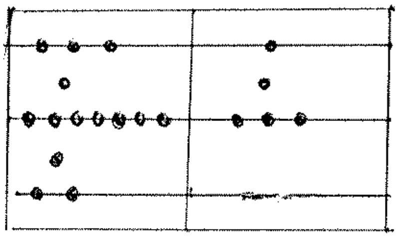
(1) 400 + 30 + (5+1)   100 + (50+30) + (5+4)

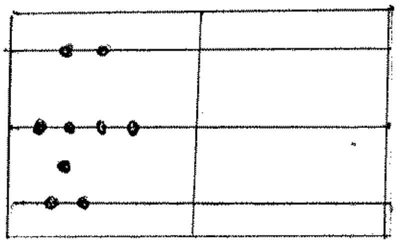




(2) 1 conta representando a dezena é decomposta em 1 conta de valor 5 e 5 contas referentes à unidades

(3) situação intermediária

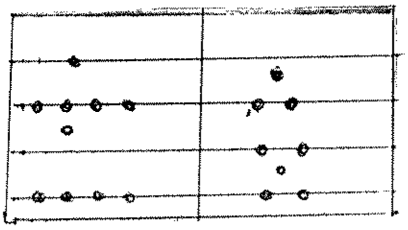




(4) 1 conta representando a centena é decomposta em 1 conta de valor 50 e 5 contas referentes à dezenas

(5) resultado final 247

II) Duplicação e Mediação, na maneira de Jordanus Memorius ($\pm$ 1200 d.C)



duplicação

1454 727

As operações de duplicação e mediação são usadas até hoje, por alguns camponeses russos, na maneira ilustrada, a seguir.

1)	36	x	73	
metade	18	x	146	dobro
metade	9	x	292	dobro
	4	x	584	houve mediação do ímpar 9. Veja Obs.1
	2	x	1168	
	1	x	2336	
resultado			2336+ 292 = = 2628	

Foi adicionado a 2336 o número 292, correspondente ao multiplicador ímpar 9.

Obs. I

$9 \times 292 = \frac{9}{2} \times (292 \times 2) = (4 + \frac{1}{2}) \times (292 \times 2) = (4 \times 584) + \frac{1}{2}.(292.2) =$
$= (4 \times 584) + 292$ ← ficou para trás e é posteriormente compensado no resultado final.

2)	74	x	17	
metade	37	x	34	dobro
	18	x	68	Veja obs.1
	9	x	136	
	4	x	272	Veja obs. 2
	2	x	544	
	1	x	1088	
resultado final			1088 = 1588	+ 34 + 136 =

Foram adicionados a 1088 os números 34 e 136 correspondentes aos multiplicadores ímpares 37 e 9.

Obs. 1

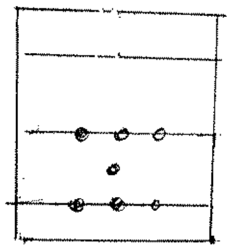
$$\begin{aligned} 37 \times 34 &= \frac{37}{2} \times (34.2) = (18 + \frac{1}{2}) \times (34 \times 2) = \\ &= (18 \times 68) + (\frac{1}{2} \times 34 \times 2) = \\ &= (18 \times 68) + 34 \text{ (ficou para trás)} \end{aligned}$$

Obs. 2

$$\begin{aligned} 9 \times 136 &= \frac{9}{2} \times (136 \times 2) = (4 + \frac{1}{2}) \times (136 \times 2) = \\ &= (4 \times 272) + (\frac{1}{2} \times 136 \times 2) = \\ &= (4 \times 272) + 136 \text{ (ficou para trás)} \end{aligned}$$

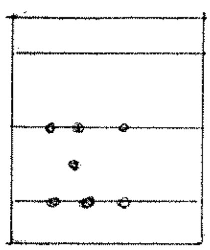
III) Multiplicação : 6 × 38 (ilustrada em 4 etapas).

(1) Ábaco 1

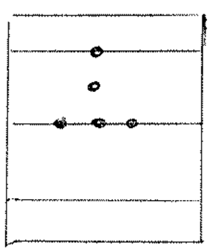


38 = 30 + (5 + 3)

(2) Ábaco 1 Ábaco 2



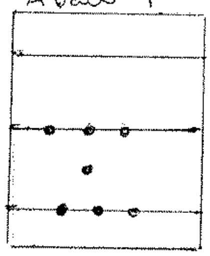
× 6



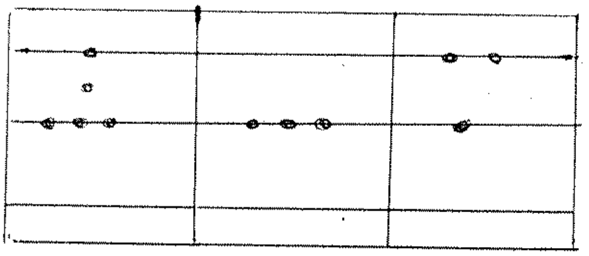
1º operação = R_1

Significado 6 × 30 = 100 + (50 + 30)

(3) Ábaco 1



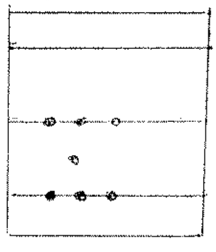
× 6



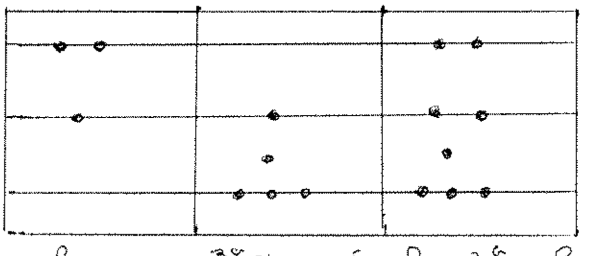
R_1 2º operação $R_1 + 2^{\underline{o}} = R_2$

Significado 6 × 5 = 30

(4) Ábaco 1



× 6



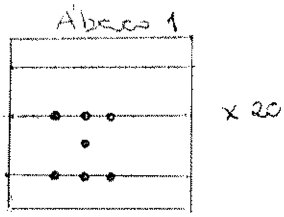
R_2 3º operação $R_2 + 3^{\underline{a}} = R_3$

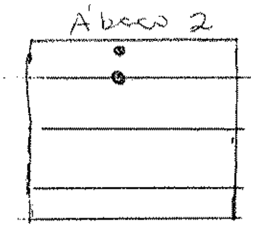
Significado 6 × 3 = 10 + (5 + 3)

Resultado final 6 x 38 = 228 = 200 + 20 + (5+3)

IV) Multiplicação: 23 × 38 (ilustrada em 6 etapas).

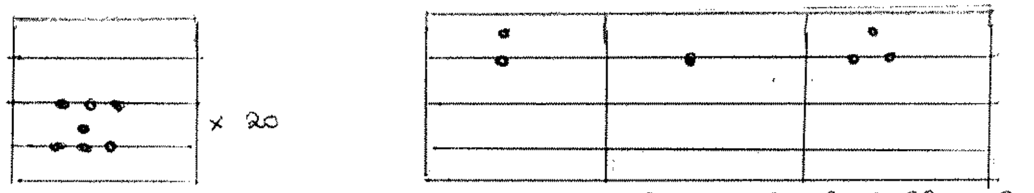
(1)





Significado 20 × 30 = 600   1ª operação = R_1

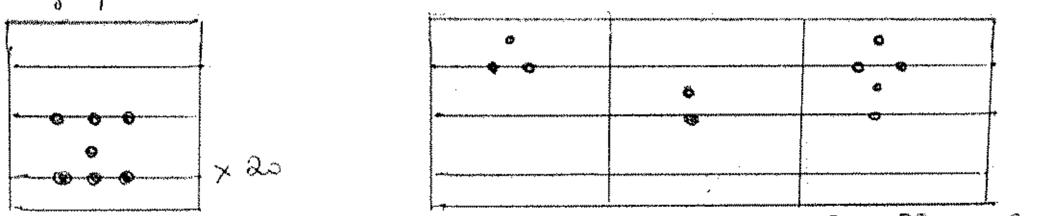
(2)



R_1 2ª operação R_1 + 2ªop = R_2

Significado 20×5 = 100

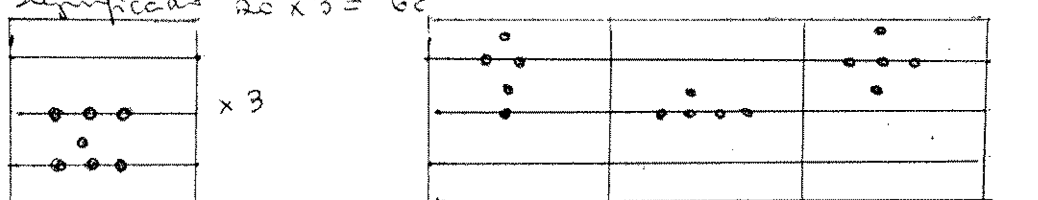
(3)



R_2 3ª operação R_2 + 3ªop = R_3

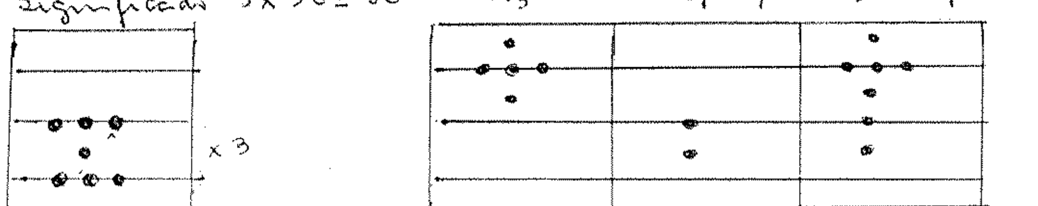
Significado 20 × 3 = 60

(4)



Significado 3 × 30 = 90 R_3 4ª operação R_3 + 4ªop = R_4

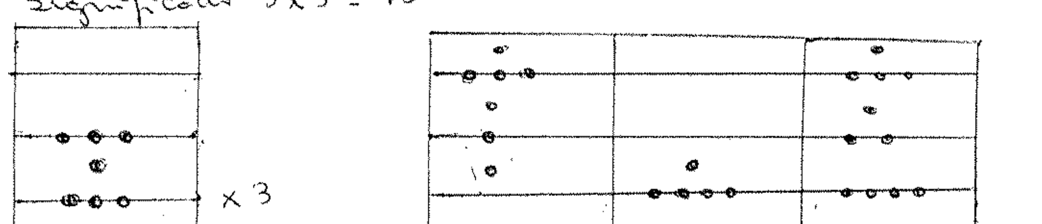
(5)



R_4 5ª operação R_4 + 5ªop = R_5

Significado 3 × 5 = 15

(6)

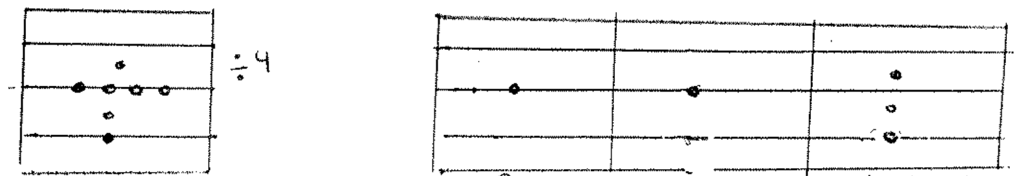


Significado 3 × 3 = 9 R_5 6ª operação R_5 + 6ªop = R_6

Resultado final 874.

V) Divisão: 96 ÷ 4 (ilustrada em 5 etapas).

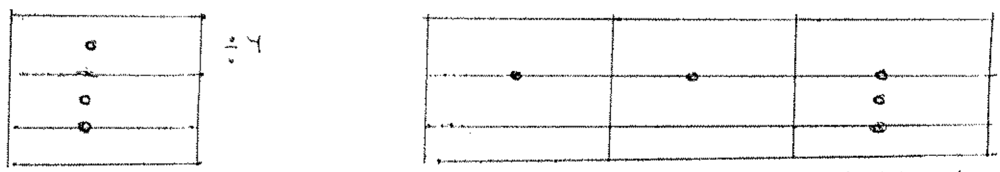
(1)



q_1 r_1 Dividendo 1

Significado $50 \div 4 = 10 + r_1$

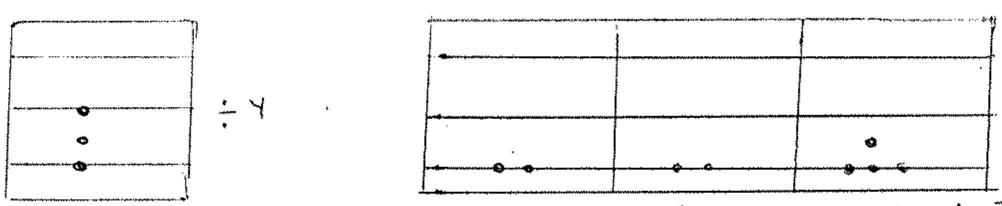
(2)



Dividendo 1 q_2 r_2 Dividendo 2

Significado $50 \div 4 = 10 + r_2$

(3)

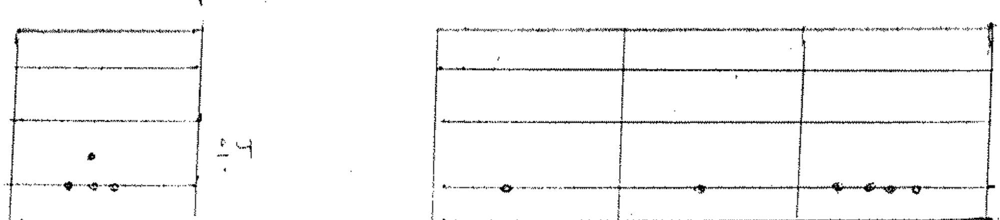


q_3 r_3 Dividendo 3

Dividendo 2

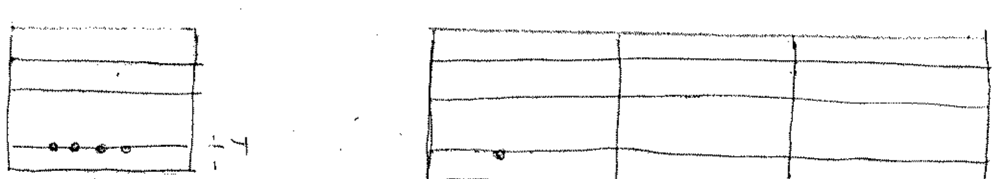
Significado $10 \div 4 = 2 + r_3$

(4)



Dividendo 3 q_4 r_4 Dividendo 4

(5)



Dividendo 4 q_5 r_5

Resultado Final $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 24$

É famosa, nos dias de hoje, a habilidade dos japoneses no cálculo com o ábaco. Este, na sua versão moderna, denominado soroban, supõe-se ter sido introduzido no séc. XVI, vindo da China. O soroban, bem como o suan pan, ábaco chinês, tem agrupamento quinário. O suan pan apareceu na China no séc. XII e há quem diga que sofreu influência do ábaco romano, povo com o qual os chineses mantiveram estreitas relações comerciais.

Com o comércio prosperando na Europa, os mercadores e comerciantes necessitavam de maior rapidez no trato com os números, contribuindo para que as vantagens dos numerais hindu-arábicos fossem reconhecidas, não sem antes terem sofrido intensa resistência, como vimos. Os cidadãos comuns foram, aos poucos, adaptando-se aos novos métodos, embora muita confusão ainda acontecesse na sua adoção. Surgiram notações dúbias como: MCCC8II para 1382; CC2 para 202; I5X5 e IV0II indicando 1515 e 1502; e 150030 com significado de 1530. Os contratos comerciais redigidos em latim tinham as páginas, os cálculos e as datas registrados em algarismos hindu-arábicos, enquanto o montante de dinheiro era escrito em algarismos romanos.

De fato, os numerais romanos seguiam regras fáceis e os numerais hindus aplicavam o princípio difícil e abstrato do valor posicional. Apenas após o seu perfeito entendimento, conseguia-se a simplificação no seu uso e nos cálculos com ele.

Com a impressão do tipo móvel em 1450, os muitos livros impressos contribuíram tanto para a divulgação do ábaco como dos cálculos com os algarismos hindu-arábicos. Entre os livros de Aritmética da época estão os de Adam Riese, impressos em 1518, 1522 e 1550 e o de Robert Recorde, em 1541. Devemos esclarecer que, por essa época, a palavra **Algoritmo**, de origem árabe, derivada latina de Al Khworizmi, indicava regras de cálculo das operações com numerais hindu-arábicos, fossem esses efetuados no ábaco ou não. **Algoristas** eram pessoas defensoras do uso dos numerais hindu-arábicos.

Acompanhando os fatos históricos, chama-nos a atenção o fato de nossa numeração falada seguir princípios similares àqueles da tábua de contar romana: palavras diferentes para cada um dos nove dígitos e, para cada agrupamento decimal de ordem superior, representante de uma posição no ábaco. Além disso, causa estranheza que os sistemas de numerais dos gregos e dos europeus medievais não tenham evoluído para sistemas cujos princípios fossem similares aos das tábuas de calcular.

Na verdade, dos sistemas de numerais existentes no mundo, apenas o chinês e o hindu aplicaram esse eficiente procedimento. O dos chineses, em linguagem ideográfica, indicava a quantidade nomeando o dígito e seu valor posicional; o dos hindus, mais abstrato, registra os dígitos somente, devendo cada um deles ser interpretado pela posição na representação. Assim, se falássemos quinhentos e setenta e oito, os chineses escreveriam em sua linguagem 5C7D8 e os hindus 578.

A simplificação conseguida pelos hindus, enfim compreendida em toda sua essência, foi amplamente utilizada na Europa, a partir do séc. XVI. A partir daí, coube aos europeus tornar compreensível a aplicação do princípio posicional aos sub-múltiplos da unidade, tornando possível os cálculos, com quantidades menores que a unidade, sem o uso de frações.

Stevin está entre os que mais contribuíram para a Aritmética das frações decimais. Em texto escrito em 1585, cujo título em francês é La Disme, forneceu uma notação para as representações decimais, regras para as operações e suas justificativas. Aplicou seu próprio estudo a cálculos, envolvendo dinheiro, pesos e medidas. Seu trabalho foi um marco na história cultural do número.

Sarton (1935) assim se pronunciou, ao comentar a importância e o significado de sua obra para a época:

" A simplificação nos cálculos obtida pelo trabalho de Stevin representou uma grande conquista e uma grande invenção, pois permitiu que, em nossos dias, numerais decimais fossem operacionalizados com muita simplicidade e talvez isso nos tenha feito, muitas vezes, desvalorizar a importância desta etapa vencida".

Na notação de Stevin, a unidade é seguida do símbolo (0), indicando a fração decimal $(\frac{1}{10})^0$, o décimo é seguido do (1), o centésimo do (2) e assim por diante, representando as frações $(\frac{1}{10})^1$, $(\frac{1}{10})^2$, ..., respectivamente.

A notação para 8,937 é feita, por exemplo, e 8(0) 9(1) 3(2) 7(3). A representação adotada foi, sem dúvida, deficiente e confundia com a indicação de quantidades desconhecidas utilizada pelo mesmo autor:

3(0) 4(1) 9(2) representava 3,49, bem como 9(2) + 4(1) - 3(0) significava $9x^2 + 4x - 3$.

As operações efetuadas similarmente àquelas com números naturais possuíam justificativas baseadas nas frações decimais. Para multiplicar 32,57 e 89,46, Stevin deu, como resultado, quociente de último dígito (4), pois este derivava das frações decimais que compunham os fatores:

Exemplo 1: 32, 57 × 89,46

Em notação da época:

$$32(0)\ 5(1)\ 7(2) = 32 + \tfrac{5}{10} + \tfrac{7}{100}$$
$$89(0)\ 4(1)\ 6(2) = 89 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{6}{100}$$

No algoritmo utilizado:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & (0) & (1) & (2) & \\
 & & & 3 & 2 & 5 & 7 & \\
 & & \times & 8 & 9 & 4 & 6 & \\
\hline
 & & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 & \\
 & 1 & 3 & 0 & 2 & 8 & & \\
2 & 9 & 3 & 1 & 3 & & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 \\
 & 1 & 3 & 0 & 2 & 8 & \\
 2 & 9 & 3 & 1 & 3 & & \\
\end{array}$$

O produto, expresso em notação moderna, é 2913,7122. O menor valor, de ordem $(\frac{1}{10})^4$, é derivado da multiplicação de $(\frac{1}{10})^2$ por $(\frac{1}{10})^2$, relativo aos fatores.

Exemplo 2: 3,44352 ÷ 0,96

O quociente tem último dígito (3) pois,

$3(0)\ 4(1)\ 4(2)\ 3(3)\ 5(4)\ 2(5) = 3 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{2}{100000}$

e $9(1)\ 6(2) = \frac{9}{10} + \frac{6}{100}$.

De forma que o produto fica:

$3\frac{44352}{100000} \div \frac{96}{100} = \frac{3587}{1000} = 3(0)\ 5(1)\ 8(2)\ 7(3)$.

No texto de Stevin, os dois números foram divididos como naturais e, posteriormente, estabeleceu-se as suas casas decimais.

Antes deste estudo, existiam, na Europa, algumas traduções de originais árabes, onde a idéia de fração decimal foi usada com simplicidade, sem justificativa e combinada com a base sexagesimal. Além disso, antes dele, o uso das frações decimais não foi generalizado no continente europeu, e quando usadas, o foram intuitivamente, sem relacioná-las à extensão do sistema de numeração decimal a submúltiplos da unidade.

Por exemplo, para $\sqrt{26}$ aplicava-se o método $\sqrt{26} = \frac{1}{100}\sqrt{260000}$ e o resultado indicava-se na base 60; $5°5'24''$.

Outras vezes, valia a fórmula: $\sqrt{a} = \frac{1}{60^n 10^m}\sqrt{a60^{2n}.10^{2m}}$

Num texto do italiano Pietro Borghi, de 1484, há citação da divisão por $a.10^n$. Ele sugere cortar $\underline{n}$ algarismos do dividendo, da direita para a esquerda, e dividir o restante por $\underline{a}$, isto é, para efetuar-se 2345678 $\div$ 3000, deve se separar os três últimos algarismos 678 e dividir-se o restante 23456 por 3, obtendo-se o quociente 7818 e o resto 2.

O resultado final é, portanto, 7818 $\frac{2678}{3000}$.

O mesmo método foi usado por Christoff Rudolff (1530), que introduziu a barra vertical como separador das partes decimal e inteira.

O desenvolvimento de uma notação para os números decimais foi vagaroso. Em 1579, Viète usou tipos menores e a barra vertical para diferenciar a parte decimal. Em 1592, o italiano Magini colocou a vírgula e o suiço Bürgi, um zero abaixo do último algarismo da parte inteira. Christopher Clavius, um ano depois, fez uso de um ponto.

Assim, Bürgi indicava $14\underset{\circ}{1},4$, Christopher Clavius 141.4 e Magini 141,4.

A criação do logaritmo por Napier e a publicação da primeira tábua logarítmica por Biggs em 1624, fez ampliar o uso de decimais e surgiram muitas notações, algumas delas apresentando redundâncias.

Vejamos algumas notações do século XVIII :

$34\frac{1426}{10000}$; $34\ 1'4''2'''6''''$; $34,\ 1^1 4^2 2^3 6^4$

$34,\ 1426''''$; $34{,}1426^4$; 34.1.4.2.6.;

34 $\underline{1426}$; 34 $|\underline{1426}$; 34'1426

Finalmente, em 1800, o ponto e a vírgula estavam definitivamente aceitos e os matemáticos europeus passaram a concentrar-se em questões de caráter fundamentalista, que vinham já ocupando a vibrante e fértil comunidade científica.

3.2 A Confiança nos Processos Infinitos

Não temos a ambição de apresentar, nesta seção, uma descrição formal e completa do desenvolvimento do conceito de número. Trata-se, mantendo-nos coerentes com as seções anteriores, de uma visão geral. A Aritmética e seus fundamentos constituem um vasto e intrincado campo da pesquisa matemática e, certamente, não está no escopo deste trabalho. Pretendemos enfatizar alguns pontos que consideramos de interesse para a Educação Matemática, no que diz respeito à formação do professor dessa disciplina.

Nessa linha, aspectos históricos merecerão considerações até minuciosas, sem nos comprometermo, entretanto, com a complexidade de alguns processos analíticos envolvidos.

Esta seção está mais fortemente ligada a problemas de dois milênios, à crise da incomensurabilidade com os pitagóricos, do que aos fatos ocorridos de então até a época da criação do cálculo diferencial, com Newton e Leibniz.

Na verdade, como observamos na seção 2.2, ao tratarmos dos gregos, a sutileza dos argumentos de Zenon revela uma impressionante argúcia, ao apontar questões fundamentais que persistiram abertas até a época da já recente tendência da aritmetização da análise. Seus paradoxos chegaram a ser classificados como falácias por Aristóteles, mas não foram resolvidos em todo esse longo tempo.

As inquietações surgidas na Grécia Antiga, após os paradoxos de Zenon (veja pag.58) estão relacionadas às questões:

1. Uma magnitude é infinitamente subdivisível?[1].
2. Uma magnitude é formada por um número muito grande de pequeníssimas partes indivisíveis?

O método de exaustão creditado a Eudoxo assume a divisibilidade infinita de magnitudes e se mostrou um importante instrumento para Arquimedes demonstrar a fórmula do volume da esfera. O método, porém, não o levou à descoberta inicial da fórmula. Esta foi conseguida por ele ao usar o método do equilíbrio, no qual considerou a idéia de uma magnitude ser composta por um número muito grande de pequeninas partes indivisíveis. Eves (1990) ilustra, de forma acessível, o método de equilíbrio como usado por Arquimedes.

---

[1]Magnitude, como entendido pelos gregos, é um segmento de reta ao qual está relacionado um número.

Com as traduções dos manuscritos de Arquimedes, por volta de 1540, os matemáticos europeus do século XVI e XVII puderam avançar nas questões envolvendo os "indivisíveis" e utilizá-los no cálculo de volumes e áreas, dando origem à teoria da Integração estudada por Stevin (1548-1620), Luca Valeria (1552-1618), Kepler (1571-1630), Wallis (1616-1703) e ampliada, para os estudos de diferenciação e limite realizados por Fermat (1601-1665), Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716).

Apesar do desenvolvimento matemático obtido, ainda persistiam dúvidas envolvendo números muito grandes ou muito pequenos.

Por exemplo, Galileo Galilei, em 1636, observou que os números naturais podiam ser colocados em correspondência biunívoca com os números pares, ou seja, a quantidade de números pares é a mesma dos números naturais.

A correspondência, em questão, é obtida arrumando os números naturais e os números pares na forma abaixo:

números pares		números naturais
0	$\longleftrightarrow$	0
2	$\longleftrightarrow$	1
4	$\longleftrightarrow$	2
6	$\longleftrightarrow$	3
8	$\longleftrightarrow$	4
10	$\longleftrightarrow$	5
$\vdots$		$\vdots$

Bolzano (1718-1848) estabeleceu a correspondência biunívoca entre os números naturais e os seus quadrados, arrumando-os da seguinte maneira:

números naturais		quadrados correspondentes
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	1
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	9
4	$\longleftrightarrow$	16
5	$\longleftrightarrow$	25
$\vdots$		$\vdots$

Esses exemplos negaram o postulado de Euclides (300 a.C.): "o todo é maior que uma sua parte", pois tanto o conjunto dos números pares, quanto aquele dos quadrados dos inteiros positivos, partes, portanto, do conjunto dos números naturais, foram considerados com o mesmo número de elementos desse último.E Zenon havia, também, levantado pistas sobre a ocorrência do mesmo fenômeno envolvendo os segmentos de reta e suas partes.

Estes fatos, não bem explicados, requeriam a necessidade de maiores esclarecimentos sobre os conjuntos infinitos. As duas correspondências analisadas e o 4º paradoxo de Zenon contrariaram a intuição humana.

Estudos realizados durante o século XVII e XVIII, especialmente aqueles sobre quantidades muito pequenas, também levantaram suspeitas sobre noções intuitivas de aceitação generalizada. No caso, questionaram se "a soma de um número infinito de quantidades positivas é um número infinitamente grande, mesmo sendo essas quantidades extremamente pequenas", isto é $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \infty$ onde $\epsilon_j > 0$?

Os resultados obtidos na ocasião, entre eles os abaixo ilustrados, não esclareceram definitivamente a questão.

1. A soma infinita, de quantidades cada vez menores,
$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots$$
representa o número racional 0,9999 ... de expansão infinita repetitiva.

2. a soma $\frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{2}{1000000} + \dots$ expressa o número racional 0,323232 ...

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$, soma infinita contida no cerne do paradoxo de Aquiles e a tartaruga proposta por Zenon (veja pag. 58), se aproxima do número 1 para um número muito grande de termos cada vez menores.

4. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.
Soma infinita que Leibniz (1689) e Jacob Bernouilli (1654-1703) foram incapazes de esclarecer e exibida por Euler, em 1736, denunciou um fato curioso: adição infinita apenas de números racionais pode resultar num número envolvendo π, irracional de expansão infinita e não repetitiva.

5. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$.
Esta soma é semelhante à anterior e também apresentada por Euler.

6. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, soma infinita para a qual Leibniz apresentou o resultado $S = \frac{1}{2}$, embora muitos a julgassem nula ou igual a unidade. A análise efetuada, até então, dependia do agrupamento considerado.

Assim, fazendo-se,

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, a soma é zero.

Tomando-se

$1-(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, a soma é 1.

Leibniz julgou $S = 1-(1+1-1+1-1+\ldots)$ ou $S = 1-S$, de forma que $2S = 1$ e portanto S, representando a soma, é $\frac{1}{2}$.

Anos depois, provou-se que nenhum desses resultados é verdadeiro, e a soma cresce para o infinito.

7. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$ soma infinita que vagarosamente excede qualquer número natural. Estudos mais recentes, comprovam que, se eliminarmos da soma as frações cujos denominadores têm o dígito 9, ou seja, se eliminarmos as frações $\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \ldots \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \ldots$, a soma infinita resulta num número entre 22,4 e 23,3.

Esses exemplos apresentados e muitos outros colocaram em cheque a intuição e os estudos efetuados por caminhos não muito rigorosos, e estimularam a grande preocupação dos matemáticos dos séculos XIX e XX: à fundamentação do conhecimento matemático em bases sólidas.

Ainda que Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1818) e Gauss (1777-1855) tenham desvendado a maior parte dos problemas envolvendo somas infinitas de quantidades muito pequenas, aquelas envolvendo quantidades muito grandes continuaram sem esclarecimento a ponto de Euler ter considerado $\frac{1}{0}$ como infinito e $\frac{2}{0}$ duas vezes maior que $\frac{1}{0}$. Gauss parecia concordar com Euler, pois defendeu, para as grandezas infinitas, o uso das mesmas regras da Aritmética elementar.

Weierstrass (1815-1897), no entanto, resistiu em aceitar o conhecimento construído usando noções intuitivas sobre os sistemas de números e clamou pela formalização dos conceitos numéricos.

No final do século XIX, os trabalhos de Dedekind (1813-1916), Georg Cantor (1845-1898) e Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceram esses fundamentos a partir do mais simples e básico dos sistemas, o dos números naturais.

Com o intuito de clarear as dúvidas existentes e desmistificar a noção de infinito, vamos tratar, a partir de agora, dos fundamentos dos sistemas de números, mencionando, quando julgar necessário, os fatos históricos que os precederam.

Os números naturais, que poderíamos chamar *números de contagem*, são $1, 2, 3, \ldots$ e a coleção de todos eles, que é infinita, forma um conjunto denotado por **N**. O zero é incluído entre os números naturais por alguns autores, em geral algebristas. Peano está entre eles, como veremos, a seguir. Esses números estão ligados à necessidade de contar, à idéia de pluralidade. Como vimos na seção 2.1, são de conhecimento de todas as culturas conhecidas, mesmo as mais primitivas, exceto pela noção de infinitude.

Os gregos antigos conheciam bem esses números, é claro. Muito além disso, na Grécia antiga, já havia especulações sobre números não racionais. Mesmo antes, segundo E.L.Lima (1985) [RPM $n^{\underline{0}}$ 6], por exemplo, os babilônios já haviam notado (por volta de 4000 anos atrás) que o número de vezes que o diâmetro está contido no comprimento da circunferência é sempre o mesmo, independentemente de quanto meça esse diâmetro. Isto é, nessa época, os babilônios já andavam rondando o famoso número π. E até faziam para ele uma estimativa muito boa. Afirmavam que esse número é maior que $\frac{25}{8}$ e menor que $\frac{22}{7}$.

Entretanto, a formalização lógica do sistema dos números naturais, de acordo com os padrões de rigor dos nossos dias, só veio a se concretizar completamente muito mais tarde, por Giuseppe Peano, com os axiomas de Peano, em 1889.

Em seus fundamentos da Aritmética, Peano fixou três conceitos primitivos: zero (0), número (natural) e a relação "é sucessor de". Em seguida, enunciou os seguintes axiomas, sobre os quais se baseiam inúmeras construções rigorosas da Álgebra e da Análise:

1) Zero é um número.

2) Se a é um número, o sucessor de a é um número.

3) Zero não é sucessor de um número.

4) Se os sucessores de dois números são iguais, eles próprios são iguais.

5) Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número que está em S, então S contém todos os números.

O quinto axioma de Peano é conhecido como o princípio de indução. A partir desses axiomas são definidas as operações usuais de adição e multiplicação, relação de ordem, etc. Uma vantagem técnica de incluir o número 0 entre os naturais é a de garantir a presença de um elemento neutro para a operação de adição em $\mathbf{N}$, isto é, 0 satisfaz a propriedade: $a + 0 = a$, para qualquer número natural a.

Nas seções anteriores, o conjunto dos números naturais mostrou-se por demais restrito como instrumento auxiliar no trato de problemas práticos. Não podemos precisar, historicamente, quais foram as primeiras dificuldades que começaram a revelar essas deficiências. Tal fato ocorreu, certamente, ainda em civilizações muito primitivas. Já dissemos que os babilônios, há quatro milênios, faziam notáveis estimativas do π. Foram, portanto, os números racionais a primeira extensão dos naturais.

Entretanto, admitindo uma aberração cronológica, apresentamos aqui os números inteiros antes de falar nos racionais. Dada a nossa explícita intenção de dar um pouco mais de importância ao formalismo matemático, sem desprezar a história na presente seção, cremos que essa inversão é aceitável. Ademais, como essa é uma prática muito comum no planejamento de programas de cursos de graduação, cremos que nossa decisão pode suscitar discussões salutares em conexão com o princípio biogenético.

A época da descoberta dos números relativos já está na era cristã. Segundo M. Kline (1972 ,p.185) foram os hindus que o fizeram através de Brahmagupta, por volta de 628 d.C., embora se saiba, como já vimos na seção 2.3, que os chineses operavam com grande desenvoltura com números positivos e negativos.

É, para nós, difícil crer que, entre os babilônios, ninguém jamais entendera "prejuizo" como "lucro negativo"... . Não se trata, porém, de contestar a história, curvamo-nos diante dos fatos. Sabemos que Diofanto, em torno de 250 d.C., estudando equações de segundo grau, considerava apenas as raízes racionais não negativas. Quando ocorriam, as raízes negativas eram simplesmente ignoradas. Independentemente da ordem de ocorrência dos fatos, um dia a humanidade certamente acabaria por esbarrar na impossibilidade de se resolver, dentro do universo $\mathbf{N}$, dos naturais, (ou $\mathbf{Q}_+$, dos racionais não negativos) uma equação como

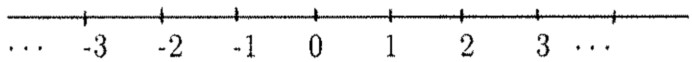
$$(1) \qquad x + 2 = 1.$$

Isso levou à necessidade de se estender esse universo. Por infindáveis razões de natureza prática, era preciso que equações como essa fossem resolúveis. Essa foi a motivação para a descoberta dos números inteiros, que constituem uma extensão dos números naturais, isto é, incluem os naturais.

Como não estamos aqui interessados em realizar tecnicamente essa extensão, contentamo-nos em apelar para a intuição e dizer que os inteiros são os números que formam a coleção, usualmente denotada por $\mathbf{Z}$, que pode ser ordenada de acordo com a seqüência

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

a qual não tem começo nem fim. É conveniente representá-los geometricamente por pontos igualmente espaçados ao longo de uma reta.



A representação de **Z** na reta

Embora se possa realizar tecnicamente a construção dos números sem qualquer apelo geométrico, do ponto de vista do ensino isto não nos parece aconselhável. Historicamente, problemas relacionados com medição representaram fortes motivações de natureza geométrica para o desenvolvimento do conceito de número.

No universo **Z**, todo número a tem um oposto $-a$, de sorte que $a + (-a) = 0$ e, usando essa propriedade, pode-se concluir que a equação (1) tem a solução $x = -1$.

Em razão de outras extensões a serem consideradas mais tarde, convém pensar na reta sobre a qual representamos os inteiros como o eixo x da Geometria Analítica plana. Geometricamente, a adição e a subtração são representadas por translações. Se a é um dado número inteiro, a transformação $x \mapsto x + a$ desloca cada ponto a espaços à direita, se a é positivo, e a espaços à esquerda, se a é negativo. Em outros termos, a operação de adicionar a corresponde à translação da reta que transforma 0 em a.

Os números inteiros ainda apresentam graves deficiências. Os problemas de medição, já lembrados acima, sempre estiveram entre as necessidades mais prementes para a evolução da raça humana. No seu trato, é imprescindível considerar subdivisões das unidades de comprimento, área, volume... Só com o conhecimento dos inteiros não nos é dado esse grau elementar de sofisticação. Quando formuladas algebricamente, essas dificuldades acabam invariavelmente reduzindo-se à impossibilidade de resolver, no universo **Z**, equações como

$$(2) \qquad 2x = 1.$$

Vemo-nos, novamente, diante da necessidade de estender o universo numérico. Isto motiva a descoberta dos números racionais, que são os números q da forma $q = a/b$, ou $q = \frac{a}{b}$, onde a é um inteiro e b um inteiro positivo. Não há problema em permitir que b seja negativo, mas podemos, naturalmente, fazer a identificação de $a/(-b)$ com $-a/b$.

A coleção dos números racionais, que é usualmente denotada por $\mathbf{Q}$, contém o conjunto $\mathbf{Z}$ dos inteiros. Um número inteiro a pode agora também ser escrito, como um racional, na forma $a/1$. Assim, $\mathbf{Q}$ é realmente uma extensão de $\mathbf{Z}$ e, novamente, temos uma ampliação do universo dos números. Além do mais, lançando mão dos racionais, é possível resolver grande parte dos problemas (não todos, como já sabiam os gregos) de exprimir uma medida em termos de uma unidade fixada *a priori*.

Voltemos novamente nossa atenção para uma representação geométrica, de sorte que possamos entender $\mathbf{Q}$ como um subconjunto da reta. Um simples procedimento nos leva, então, a constatar que, ao agregarmos novos números à coleção dos inteiros $\mathbf{Z}$ para formar o conjunto $\mathbf{Q}$ dos racionais, tornamos o universo numérico muito maior, em algum sentido um tanto vago, do que o fizemos ao passar dos naturais para os inteiros.

De fato, ao representar os racionais na reta onde já estão os inteiros (um procedimento sistemático pode ser o de primeiro representar os números a/b com denominador $b = 2$, depois, com $b = 3$, depois, com $b = 4$ e assim sucessivamente), verifica-se que a profusão é, agora, muito maior; arbitrariamente próximos de qualquer racional estão outros racionais. De fato, entre dois racionais distintos, a/b e c/d, é sempre possível encontrar um terceiro (por exemplo, $(ad + bc)/(2bd)$), portanto infinitos.

Vejamos:

Entre 0 e 1 existem os números racionais $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \frac{n}{(n+1)}, \ldots$

Entre 0 e $\frac{1}{2}$ existem os números racionais $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$

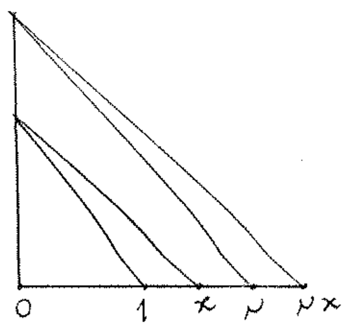
Entre 0 e $\frac{1}{4}$ existem os números racionais $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17}, \frac{5}{21}, \ldots, \frac{n}{4n+1}, \ldots$.

E assim por diante.

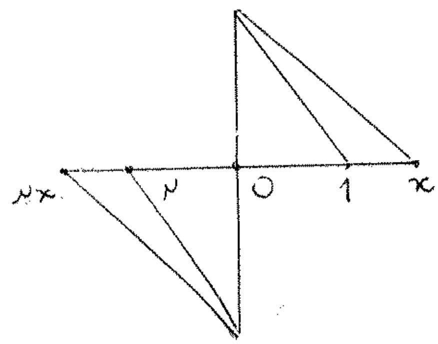
Essa propriedade é expressa em termos técnicos, dizendo-se que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos racionais é *denso* na reta. Uma conseqüência de tudo isso é que não se pode representar os racionais na reta com uma seqüência de pontos, coerente com sua ordem natural, como fizemos com os inteiros,$\cdots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \cdots$.

Uma importante vantagem conquistada com os racionais é que, para todo racional q não nulo, existe um inverso q^{-1}, ou equivalentemente $1/q$, de sorte que $qq^{-1} = 1$. Usando essa propriedade, pode-se ver que a equação (2) tem a solução $x = \frac{1}{2}$. Na verdade, toda equação da forma $px = q$, com p e q racionais, p não nulo, tem a solução $x = qp^{-1}$. Do ponto de vista algébrico, esta é uma grande conquista.

Do ponto de vista geométrico, a multiplicação e a divisão são interpretadas como dilatações ou contrações, ou seja, como homotetias. Precisamente, se μ é um número racional pré-fixado, a transformação $x \mapsto \mu x$ é a homotetia de razão μ e centro na origem (zero), usualmente denotada por $O(\mu)$. Em nossa opinião, como já externamos, a visão geométrica dos problemas não deve ser relegada a segundo plano quando o assunto é tratado com interesses pedagógicos. A figura mostra construções geométricas do produto μx, a partir de μ e de x, quando $\mu > 0$, caso (a), e quando $\mu < 0$, caso (b). São construções da chamada quarta proporcional para os segmentos de comprimento 1, x e μ, que remontam a Euclides.



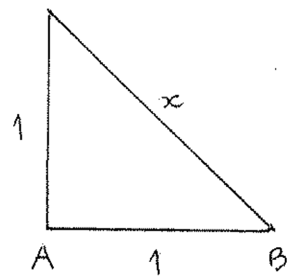
(a)



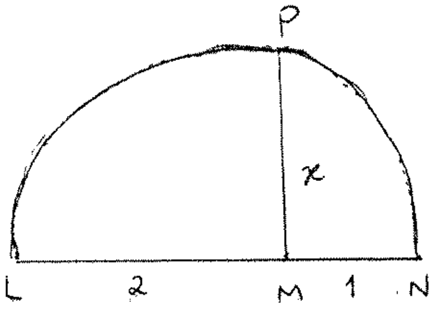
(b)

A superpopulação de racionais na reta, revelada pela propriedade de densidade, é que deve ter levado, em eras pitagóricas, à falsa crença de que apenas com os racionais era possível representar todos os pontos da reta. Isto é, com uma pré-fixada unidade de comprimento, pensava-se ser possível exprimir com um número racional a medida de qualquer segmento da reta.

Há, no entanto, inúmeras construções geométricas elementares de um segmento de comprimento x, de sorte que $x^2 = 2$. A figura mostra dois exemplos: a construção (c), a mais popular, onde x é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos são unitários, a construção (d), que corresponde à construção de Euclides da média proporcional entre segmentos de comprimentos um e dois.



(c)



(d)

O problema é que o número $\sqrt{2}$, que representa o comprimento x de um tal segmento, não existe no universo dos números racionais. O que resulta disso é, de certo modo, uma decepção, pois os números racionais, à primeira vista tão abundantes, também apresentam uma grave deficiência: existem segmentos incomensuráveis.

A firmeza de convicções dos pitagóricos, originária de seu misticismo, deve ter tornado para eles muito mais incômoda a primeira crise da Matemática, a incomensurabilidade. Todavia, há quem atribua a eles próprios, os matemáticos da escola pitagórica, o mérito da descoberta de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Veja, por exemplo, D.G. de Figueiredo (1985). Também Hardy (1967) considera a prova, segundo ele de Pitágoras, de que $\sqrt{2}$ não é racional, como um dos mais antigos exemplos de Matemática rigorosa, *"as fresh and significant as when it was discovered."*

Conservando-nos fiéis ao espírito desta exposição, não apresentamos nenhuma prova de que $\sqrt{2}$ não é racional, mas há várias conhecidas hoje em dia. Uma delas pode ser encontrada em Hardy (1967).

Nessa linha, a questão fundamental que não foi abordada por nós até agora é: como é que a reta numérica se completa com os números incomensuráveis, os irracionais? ou, em outros termos, o que é precisamente esse contínuo (numérico) sobre o que os matemáticos raciocinam?

Poincaré em "A Ciência e a Hipótese" (1985) esclareceu: "De acordo com a concepção corrente, o contínuo não é uma coleção de indivíduos, justapostos numa certa ordem, mas *exteriores* uns aos outros". Ao contrário, entre os elementos do contínuo se supõe "uma espécie de liame íntimo que faz dele um todo, em que o ponto não preexiste à linha, mas a linha ao ponto".

Mais de dois milênios foi o tempo de maturação das idéias, foi o que custou à humanidade o esclarecimento definitivo dessas questões. Meu velho professor de cálculo costumava dizer sabiamente: "Esses professores novatos, antes de se impacientar com as dificuldades naturais de alunos iniciantes, deviam pensar em quanto tempo a raça humana levou para colocar tudo isso em bons termos..."

A solução veio com o coroamento do processo de aritmetização da análise, cujos créditos são hoje atribuídos a Richard Dedekind e a Georg Cantor . Mas isso não foi um passe de mágica realizado por dois notáveis matemáticos, como de fato eles foram. Nem mesmo foi um processo tranqüilo. Para Cantor, que o levou muito mais adiante, foi trágico. Ainda voltaremos a esse ponto mais adiante.

A Análise, de acordo com a concepcão de Newton e Leibniz, tidos como seus grandes fundadores, tem, como objetos de estudo, grandezas contínuas tais como, velocidades, acelerações, áreas, comprimento de arco etc. A busca dos fundamentos do contínuo, de um ponto de vista estritamente matemático, se faz naturalmente na Aritmética, porque é ali que o raciocínio matemático se apresenta com toda a sua pureza, livre das sofisticações dos ramos mais complexos da Matemática.

A Aritmética fundamenta-se no conjunto discreto dos números naturais e, apesar da infinitude (compreendida pelos matemáticos da época mas, até então, não muito bem explicada) dos racionais, seu conceito desenvolvera-se através de processos finitos, isto é, as extensões dos campos numéricos envolveram soluções de equações algébricas que, no fundo, envolviam um número finito e reduzido de operações binárias. Ao final do século XIX, a escola de Berlim, notadamente Kronecker, dedicou-se de forma ortodoxa a construir a escala contínua dos números racionais e irracionais, lançando mão exclusivamente de processos finitos.

Muito antes de Dedekind ou Cantor nascerem já havia surgido a chama da tendência de aritmetização da análise. Um dos matemáticos mais profícuos e consagrados nessa área foi Cauchy (1789-1857). Entretanto, marcos relevantes dessa tendência foram fincados em 1817 por Bernhard Bolzano, um padre tcheco não muito obediente às determinações teológicas de sua igreja que, nesse ano, publicou o livro "Rein analytischer Beweis" onde faz uso de um conceito não geométrico de continuidade. (Veja Boyer - 1974).

Os resultados de Bolzano dizem respeito à estrutura íntima dos números reais, embora não tenha ele chegado à sua formalização definitiva. Suas especulações sobre os diferentes tipos de infinidades demonstram uma maior clarividência do assunto do que os mais notáveis matemáticos da época, como Gauss ou Cauchy.

Tem-se notícia de que Cauchy esteve em Praga ao tempo em que ali vivia e trabalhava Bolzano, mas é práticamente certo que não chegaram a se conhecer e muitos dos resultados comuns desses dois grandes matemáticos foram obtidos independentemente. Infelizmente não se fez justiça, nem em vida nem depois, a Bolzano. Há resultados seus atribuídos a outros e, em pelo menos um caso, atribuem-se-lhe co-autoria com matemáticos ilustres que precedeu significativamente. Sua obra foi muito avançada para seu tempo.

Pouco tempo depois da citada publicação de Bolzano, em 1822, Fourier publica sua célebre "Théorie analytique de la chaleur", uma obra fundamental para o que ocorreria nos anos seguintes na Matemática e, também, de grande significado para a Física. Trabalha com grande desenvoltura e clarividência com séries de funções, hoje conhecidas como séries de Fourier, explorando-as com a máxima eficiência permitida pelo estágio de desenvolvimento matemático. Na época, problemas mal resolvidos de convergência, relacionados ao entendimento insatisfatório de processos infinitos o que, por sua vez, decorria da incompreensão do *continuum*, passaram a incomodar persistentemente as mentes mais argutas. A grande concentração de esforços levou à redescoberta inconsciente da obra de Bolzano. Um indicativo deste fato é que o insigne Weierstrass reobteve, cinqüenta anos depois, ignorando a autoria de Bolzano, o que é hoje popularizado em todos os compêndios de Cálculo elementar como o Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Muitas contribuições cruciais foram feitas a partir de 1872, o clímax do esforço intelectual desenvolvido desde a época de Bolzano. As de Méray, Cantor, Dedekind, Weierstrass e seu aluno Heine são de grande destaque.

Na verdade, como vimos, a noção de infinito e o completamento da reta numérica, desde os pitagóricos, marcava grande presença por toda a Matemática, mas ainda era uma noção extremamente imprecisa e, freqüentemente, mística. Meray já percebera, em 1869, um grave erro que vinha dos tempos de Cauchy: definia-se limite de uma seqüência como um número real e depois definia-se um número real como limite de uma seqüência de racionais. Dedekind percebe que um dos paradoxos de Bolzano relativo aos conjuntos infinitos é, na verdade, uma propriedade universal desses conjuntos e inteligentemente a utiliza como sua definição: *Um conjunto S é infinito quando é equipotente a(*está em correspondência biunívoca com*) uma parte própria de si mesmo.*

Com Galileu já havia alguma confusão entre a idéia de densidade dos números (*entre dois distintos sempre existe um terceiro*) e do contínuo, confusão também revelada por Leibniz. O golpe definitivo nessa questão foi desferido em 1888 por Dedekind. Dedekind perguntou-se: "O que há de diferente entre a continuidade geométrica da reta e o conjunto Q dos racionais?" e, num instante de criatividade e talento, concluiu que a essência do contínuo (geométrico) de um segmento de reta está, não na idéia imprecisa de ligação íntima de suas partes, mas exatamente na propriedade oposta a essa noção: a da divisão em duas partes bem definidas por um seu ponto. Isto levaria à definição de *corte*, conforme damos logo a seguir.

Formulou o agora conhecido como axioma de Cantor-Dedekind, ***os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais*** e definiu um *corte* de Dedekind como uma partição dos números racionais em duas classes A e B (isto é, $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = Q$ e $A \cap B = \emptyset$) tais que todo número da primeira classe, A, é menor que todo número da segunda classe, B. A seguir, define-se: ***um número real é um corte.*** Se um corte, definido pelas classes, A e B, como acima, for tal que A tem um maior elemento, ou B tem um menor elemento, então o corte define um número racional. Em caso contrário define um número chamado irracional. O conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais passa, agora, a ser sugestivamente chamado de *reta real.*

Um exemplo ilustrativo de corte de Dedekind é a partição dos números racionais, tomando como A o conjunto dos números racionais x tais que $x^2 < 2$ e, como B, o conjunto dos números racionais y tais que $y^2 > 2$. Observemos que, representando geometricamente a reta racional, é o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ que divide a reta nessas duas classes. Esse é o corte que define o número $\sqrt{2}$.

O homem acabara de compreender a reta numérica tal como a concebemos hoje em dia. Chegava ao fim uma longa caminhada de vários milênios.

É justo mencionar que também Weierstrass construiu uma teoria de aritmetização da análise, contornando o círculo vicioso da definição de convergência dada por Cauchy. Nunca publicou suas idéias, mas as difundiu em suas aulas. Em conseqüência, Heine, um de seus alunos, juntamente com Cantor, realizou o chamado desenvolvimento de Cantor-Heine.

Dada a densidade dos racionais na reta, é surpreendente o resultado de Cantor, de que eles estão em correspondência biunívoca com os naturais, isto é, $\mathbf{Q}$ é enumerável, assim como $\mathbf{Z}$.

Na pag.122 exibimos a correspondência biunívova entre $\mathbf{N}$ e duas de suas partes: $\mathbf{N}$ e { números pares }, $\mathbf{N}$ e { quadrados dos números naturais }. Aqui, ilustraremos a correspondência biunívoca entre $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}$, embora $\mathbf{N}$ seja uma parte de $\mathbf{Z}$ e de $\mathbf{Q}$, isto é, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ e $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$.

Para isso, arrumaremos os elementos do conjunto $\mathbf{Z}$, na forma 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ... e os do conjunto $\mathbf{Q}$, como ilustramos, a seguir:

números inteiros		números naturais
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	1
-1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	3
-2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	5
-3	$\longleftrightarrow$	6
4	$\longleftrightarrow$	7
-4	$\longleftrightarrow$	8
$\vdots$		$\vdots$

números racionais

frações de denominadores 1	1	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	...
frações de denominadores 2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
frações de denominadores 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
frações de denominadores 4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	...
frações de denominadores 5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	...

E assim sucessivamente.

Todas as frações aparecem nesse arranjo. Além disso, podemos colocar os números racionais na seqüência indicada pelas flechas, omitindo os números antes tomados. Dessa forma, pode-se obter a seqüência de números naturais positivos $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, 6, \ldots$ e a seqüência dos números racionais negativos $-1, -2, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}$, -3, -4, $\frac{-3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, -5, -6, \ldots$

Reagrupando-os como fizemos com os números inteiros: 0, 1 racional positivo, 1 racional negativo, então 1 racional positivo, etc., é possível colocá-los em correspondência biunívoca com os números naturais.

Cantor provou, também, que **R** é não-enumerável e, portanto, muito "maior", ou "mais denso", do que **Q**. Como a reunião finita de conjuntos enumeráveis é enumerável, e **R** é a reunião de **Q** com os irracionais, segue que o conjunto dos números irracionais é não-enumerável, isto é, não pode ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais. Assim, ao completar a reta racional, Dedekind acrescentou muito mais do que já havia nela.

Esses resultados de Cantor estão hoje nos livros introdutórios de Análise Matemática mas, na época em que foram obtidos, causaram grande impacto. Segundo Boyer (1974), o próprio Cantor, por considerá-los paradoxais, em 1877 escreveu a Dedekind: "Eu vejo isso, mas não acredito"; e pediu ao amigo que conferisse a prova de um seu teorema.

Além da classificação em racionais e irracionais, os números reais podem ser particionados em números algébricos (aqueles que são raízes de polinômios com coeficientes inteiros) e transcendentes (aqueles que não são algébricos). Os números π e e são exemplos de números transcendentes. A classe dos números algébricos inclui todos os racionais e, muito mais, inclui, por exemplo, todos os irracionais que se exprimem como raízes n-ésimas de inteiros, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$... Um número algébrico interessante é o número áureo obtido da proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, onde C é a divisão áurea do segmento $\overline{AB}$. Quando fazemos $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AC} = x$ a proporção $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ nos fornece o polinômio $x^2 + x - 1 = 0$ cuja solução positiva é $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,61803\ldots$ e $\phi = \frac{1}{x} = 1,61803\ldots$ número áureo, de expansão decimal infinita não repetitiva. Parece que não sobra mais muito "espaço" na reta para os números transcendentes. Pois bem, acontece que Cantor provou, de forma simples e elegante, que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Portanto, o conjunto dos transcendentes é que é não-enumerável, "ocupando" assim "mais espaço".

Para finalizar nossas considerações sobre a construção dos números reais, devemos observar que o processo foi árduo não só do ponto de vista estritamente matemático. Kronecker foi um contemporâneo de Cantor e Dedekind que, além de matemático e próspero homem de negócios, liderava ferrenhamente um movimento contrário à construção dos reais, por não depender exclusivamente de processos finitos. A Cantor que, apesar do grande brilhantismo, passou praticamente toda a vida profissional numa universidade (de Halle) sem expressão, foi negada, por manobras do influente Kronecker, uma posição na importante Universidade de Berlim. Mais do que isso, Kronecker procurava solapar impetuosamente a obra matemática de Cantor, a Aritmética transfinita. Kronecker chegou a fazer importantes contribuições em Álgebra, mas nada que pudesse compensar o imenso mal feito a Cantor que, extremamente sensível, passou a ter sucessivos esgotamentos nervosos desde 1884 até sua morte, em 1918, numa casa para doentes mentais em Halle. O valor de sua obra já era resgatado antes dessa tragédia. Hilbert (1862-1943), um dos maiores matemáticos deste século, escreveu: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós."

Existem outras duas maneiras de se estudar o contínuo numérico: por seqüência de intervalos encaixantes e por convergência de sucessões de números racionais. Ambas são equivalentes aos cortes de Dedekind, visto que os sistemas numéricos, definidos das três maneiras, gozam das mesmas propriedades. Courant (1967) faz uma análise didática desses métodos.

Os matemáticos da Europa ainda estavam longe de superar suas dificuldades com números racionais e irracionais quando começaram a se envolver com os números complexos. Esses números apareceram quando se procurou estender a radiciação, de sorte que passasse a fazer sentido a raiz quadrada de números negativos. De acordo com Kline (1972), está contida em publicação de Cardano, de 1545, a resolução do problema de dividir 10 em duas partes tais que seu produto seja 40. Procurando as soluções da equação $x(10-x)=40$, encontrou as seguintes: $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$. Escreveu, então, "pondo de lado as torturas mentais envolvidas," multiplique as soluções, obtendo o produto 25-(-15), ou seja, 40.

Os números complexos não foram um produto da fácil aceitação, mesmo entre as eminências da época, Descartes (1596-1650) é responsável por sua cunha de *imaginários*. Naquele tempo, as raízes negativas de um polinômio eram chamadas de *falsas*. Descartes escreveu, "nem sempre são verdadeiras ou falsas as raízes reais, às vezes elas são imaginárias." Mais impressionante é a afirmação de Leibniz: "...,esse anfíbio entre o ser e não-ser, que chamamos a raiz imaginária da unidade negativa." Entretanto, é importante considerar aqui a observação de Titchmarsh (1943): "Existem, certamente, muitas pessoas que olham $\sqrt{2}$ como algo perfeitamente óbvio, mas empacam diante de $\sqrt{-1}$. Isto é porque elas pensam que podem visualisar a primeira como alguma coisa no espaço físico, mas não a última. Na verdade, $\sqrt{-1}$ é um conceito muito mais simples."

A impossibilidade de resolver nos reais $\mathbf{R}$ uma equação como

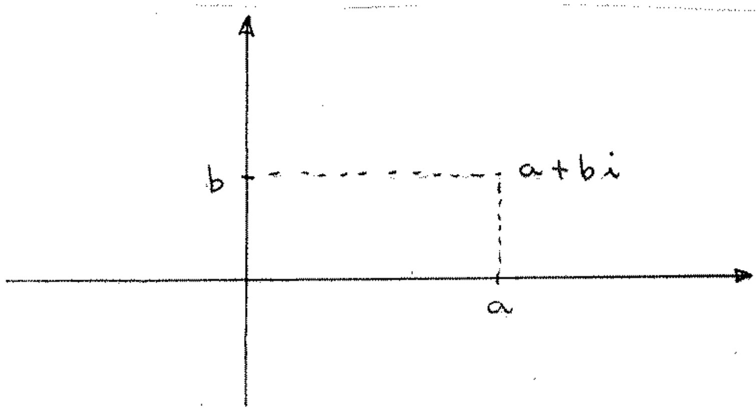
$$x^2+1=0$$

é a motivação para a descoberta dos números complexos, como acabaram sendo batizados por Gauss que, segundo G.H.Hardy, foi o primeiro matemático a usar os números complexos de um modo realmente confiável e científico.

A saída foi definir a unidade imaginária i pela relação $i^2=-1$ ou, equivalentemente, $i=\sqrt{-1}$. Assim, a forma geral de um número complexo fica $a+bi$, onde a e b são números reais chamados, respectivamente, *parte real* e *parte imaginária* desse número. O conjunto, habitualmente denotado por C, dos números complexos contém o conjunto $\mathbf{R}$ dos reais, os quais correspondem aos complexos cuja parte imaginária b é nula. As operações de adição e multiplicação são estendidas formalmente a C, de modo a preservar as propriedades de que gozam nos reais.

Geometricamente, o complexo $a+bi$ pode ser identificado ao par de números reais

(a, b) e interpretado como o ponto do plano coordenado que tem essas coordenadas. Assim, o eixo x representa os reais e é chamado *eixo real*, enquanto o eixo y, chamado *eixo imaginário*, representa os complexos da forma bi, com b real, conhecidos como *imaginários puros.*



Representação dos complexos no plano

Essa representação geométrica é chamada *diagrama de Argand*, embora tenha sido inventada por Caspar Wessel um pouco antes dele, em 1797. O plano passa a ser chamado o *plano complexo.* De acordo com as operações complexas, os pontos são adicionados geometricamente, como na adição vetorial. Ao fazer a interpretação dos complexos como pontos do plano, é como se tivéssemos munido o plano com uma operação interna de multiplicação de vetores.

Apesar das reações contrárias que despertou e das conotações de irrealidade que lhe foram impostas, os números complexos representam um enorme e hoje em dia indiscutível recurso das ciências aplicadas.

Capítulo 4

Uma Análise Histórico-Cultural

Tendo em vista a abordagem árida e muito técnica de grande parte das referências em História da Matemática, supomos poder contribuir, neste capítulo, com o estabelecimento de relações entre o desenvolvimento do conceito de número, sua representação e ampliação e as tendências sócio-econômicas-culturais das sociedades, no que Eves (1990) chamou de "cultural conections".

Cabe observar que os estudos referentes aos conceitos aritméticos, como adquiridos pelas sociedades, estiveram nas referências consultadas, baseados em informações colhidas em:

- encontros arqueológicos nas cavernas paleolíticas, em ruínas neoliticas e escavações (documentos, monumentos, túmulos, instrumentos de trabalho, armas).
- relatos de antropologistas sobre povos primitivos de nossos dias vivendo ainda, em condições paleolíticas e neolíticas.
- estudos modernos referentes a números e a contagem.

4.1 Os Caminhos do desenvolvimento

Os primeiros povos viveram provavelmente em porções habitáveis da África Central, sul da Europa, sul da Ásia e na América Central. Nossos ancestrais, conhecidos por "Australopithecus", viveram na África, por volta de 5.000.000 a.C., os "Homo Erectus", moravam em cavernas da China, aproximadamente em 400.000 a.C. e os

"Homo neanderthalensis" são considerados habitantes da Europa e Oriente Médio, entre 110.000 e 35.000 a.C. Aos 30.000 a.C., os "Homo Sapiens" construíram tendas com estacas móveis e cobertas com peles de animal.

Os períodos de tempo abrangendo tais povos e tais culturas ficaram conhecidos como Idade da Pedra e constituíram as fases:

- paleolítica, de 5.000.000 a 10.000 a.C.
- mesolítica, de 10.000 a 7.000 a.C.
- neolítica, de 7.000 a 3.000 a.C.

Entre os anos 50.000 a 10.000 a.C., o habitante da Terra é nômade, vive em cavernas, segue as migrações de animais e depende das alterações climáticas para a obtenção de alimentos. Colhe frutos e raízes, pesca e caça com instrumentos de pedra, inventa o fogo. Nossos ancestrais comercializavam uns com os outros, compartilhavam a caçada e a colheita, desenvolvendo, portanto, entendimentos de linguagem e de contagem. O culto à religião sempre esteve presente numa tentativa de explicar e entender os fenômenos físicos.

Com o degelo acontecendo, aproximadamente de 10.000 a 7.000 a.C., na Europa e Ásia surgem os desertos e as florestas. O homem constrói habitações à margem dos rios, torna-se agricultor, inventa a cerâmica, a roda, o cobre, o bronze e utiliza o bote como meio de transporte. Desenvolve o calendário, a astronomia, sistemas de numerais, de pesos e de medidas. Usa Aritmética prática - resolve problemas do seu dia-a-dia e aprimora sua linguagem.

A provável seqüência da contagem, até essa época, é o desenvolvimento de:

1. Senso numérico, conceito de mais, menos ou igual.
2. Noção de correspondência um a um entre conjuntos de objetos. Uso de traços na pedra, nós na corda, marcas em osso ou madeira, comparação com grupos de seixos, pedras, ou com partes do corpo.
3. Sons vocais para designar números de objetos. A qualidade e a quantidade dos objetos se confundem nas palavras numéricas.
4. Palavras numéricas abstratas.
5. Extensão de palavras numéricas por adição. Uso de pequenos agrupamentos e de combinação de palavras.

6. Contagem nos dedos. Uso das bases 5, 10, 20 ou combinação dessas.

7. Numerais, símbolos escritos para designar quantidades.

8. Sistemas de numerais para registrar maiores quantidades.

De 7.000 a 3.100 a.C., surgiram comunidades neolíticas à margem dos rios Nilo, Tigre e Eufrates, Indus e Ganges, Huang-Ho e Yang-tse. Tornaram-se sociedades agrícolas. Os homens domesticavam animais, plantavam sementes, ceifavam colheitas, ou seja, passaram a agir sobre a natureza, utilizando os instrumentos de cobre e de bronze. Observavam estações da chuva, registravam produção da colheita, construíram canais de irrigação e diques. Surgiram profundas mudanças culturais. Destacavam-se homens mais bem informados como sacerdotes, escribas e astrônomos, e aumentavam os artesãos, aqueles que transformavam os metais em instrumentos.

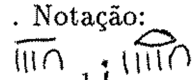
As cidades mais importantes na ocasião, eram Tebas e Mênfis, no Egito; Ur, na Babilônia. Fazendeiros e artesãos trocavam mercadorias, desenvolvendo as transações comerciais e propiciando o aparecimento de mercadores e de mercados centrais nas cidades.

De tribos ou clãs, liderados por um chefe, os grupos cresceram e se transformaram em sistemas centralizados de governo: as cidades-estados. Essas eram governadas por poucas pessoas de grande riqueza. Surgiram as monarquias e as teocracias (estas últimas eram governadas pela classe dos padres).

As cidades-estados deram lugar aos impérios do Egito e da Babilônia e, na China, às dinastias. Na Índia desse período, não são conhecidos os sistemas de governo.

Algumas das contribuições à Aritmética dessas quatro importantes civilizações, até os 600 a.C., estão resumidas no quadro I.

PERÍODO: ANTIGUIDADE ORIENTAL

datas e fatos culturais	número natural	no. inteiro	no. fracionário e decimal	no. real e complexo
3100	objetos egípcios comprovam numeração com agrupamento decimal e princípio aditivo. Símbolos hieroglifos.		. frações unitárias egípcias. . Notação:  para $\frac{1}{4}$;	
2400	ruínas de Mohenjo Daro, região do Indus, conservam vestígios de sistemas de contagem, pesos e medidas.			
2200 - 1600	- tabletes babilônicos de Ur e Nippur mostram algarismos cuneiformes. - sumérios: agrupa/o sexagesimal e idéia de posição. - acadianos: agrupa/o e notação decimal. - babilônios: miscigenação das duas culturas. Ambas usam princípios aditivo, subtrativo e multiplicativo.		extensão da idéia posicional babilônica às frações. Submúltiplos e múltiplos da unidade tratados da mesma maneira na base sexagesimal - frações sexagesimais.	
2200-1200	data atribuída ao I - king, documento chinês mais antigo.			

1850	papiro egípcio Moscou com 25 problemas. Escrita hierática.		
1650	papiro egípcio Rhind. Escriba Ahmes apresenta 80 problemas. Escrita hierática.		tábuas babilônicas de recíprocos confirmam uso de frações sexagesimais à maneira das atuais frações decimais.
1500 . arianos invadem a região do Ganges na Índia. Sacerdotes brâmanes usam versos sânscritos.			
1200 . o ferro substitue o bronze.			
1000-700 alfabeto fenício é introduzido.			
800	. uso da escrita egípcia demótica.		

Sem dúvida, as aquisições culturais mais expressivas das civilizações agrícolas, em todas as áreas de conhecimento, aconteceram na Grécia e na China. As contribuições da civilização grega foram mais conhecidas e estiveram em evidência em tempos mais antigos. As da China, iremos tratar mais à frente.

A Grécia, uma coleção de cidades-estados, construídas sobre ilhas rochosas, a beira do mar Mediterrâneo, teve primeiramente sua economia fortemente agrícola. As cidades eram separadas umas das outras por montanhas e suas fazendas estavam distribuídas em pequenos vales, de terras rochosas. As tentativas de anexação de umas às outras gerava constantes guerras entre elas. Esparta destacava-se das demais pela índole guerreira de sua população. Os seus filhos homens, desde jovens, pertenciam às tropas militares. Mileto e Smirna destacavam-se como centros comerciais. Rhodes e Samos eram pesqueiras e também comerciais. Pelos anos 600 a.C., surgiram problemas com alimentação e colheita, levando os gregos a mudarem do cultivo do trigo para o de uvas e azeitonas.

O povo grego esteve à frente, na época, em termos de participação nas decisões do governo, surgindo daí uma nova organização política: a república. Em 5.100 a.C. todo cidadão adulto masculino tinha direito ao voto.

O comércio florescia, artesãos estrangeiros foram acolhidos e Atenas se tornou o principal centro comercial do Mediterrâneo. A ela chegavam fazendeiros, mercadores, artesãos, comerciantes e navegantes. Filósofos se reuniam nos mercados, rodeados de seus discípulos e admiradores, divulgando idéias novas e avançadas.

Em 432 a.C., Atenas estava em seu auge cultural e político, Esparta constantemente instigava guerra contra Atenas e demais cidades gregas provocando, finalmente, uma ruína coletiva.

Em 336 a.C., Alexandre, filho do rei da Macedônia e discípulo de Aristóteles, uniu as cidades gregas ao seu império persa. Conquistou terras egípcias, fundando Alexandria em 332 a.C. A sua localização, entre importantes rotas comerciais, contribuiu para a sua prosperidade e, em 300 a.C., era o maior centro cosmopolita do mundo, com 500.000 habitantes. Nos seus mercados encontravam-se temperos da Índia e China, madeira e mármores da África, azeitona e vinho da Grécia, escravos de Roma.

Alexandre levou aos territórios conquistados a cultura grega. Grécia, Egito e Oriente Médio tornaram-se o mundo civilizado.

Com a morte de Alexandre, Ptolomeu, novo governante do Egito, escolheu Alexandria, sua capital. Nela fundou uma escola onde Euclides foi o líder na área de Matemática.

Os atenienses destacavam-se em filosofia, história e literatura enquanto a ênfase em Alexandria era o estudo da Ciência e da Matemática. Após 150 a.C., vagarosamente a cultura grega declinou, enquanto os romanos aumentavam seu poder na região do Mediterrâneo. Os líderes romanos se aperfeiçoaram na arte da guerra, disputavam o poder com seus conterrâneos e pouco valor deram as aquisições intelectuais gregas e egípcias. Em 46 a.C., numa dessas disputas, os romanos queimaram a biblioteca de Alexandria.

Embora os romanos tenham, no início, reprimido os cristãos, posteriormente vieram a divulgar o cristianismo até que em 325 d.C., o imperador Constantino I, oficializou essa religião.

Os líderes religiosos se opuseram às investigações científicas, quando elas contrariavam os seus dogmas de fé, de forma que a Academia de Atenas pouco a pouco foi sendo marginalizada até seu fechamento em 529 d.c.

O período greco-romano ao qual nos referimos esteve assim dividido:

- Grécia Clássica, 800 - 336 a.C.
- expansão persa, 550 - 330 a.C.
- Grécia Helenística, 336 - 31 a.C.
- império romano, 31 a.C. - 476 d.c.

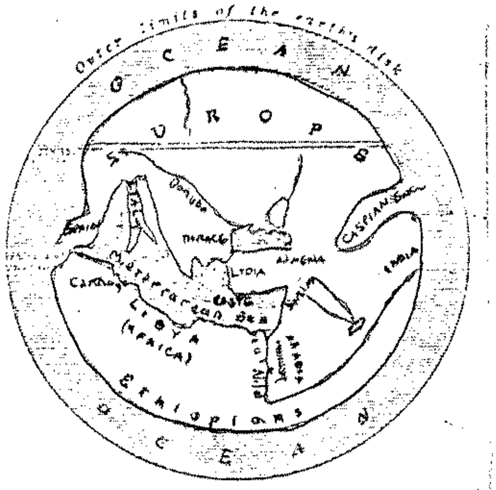
Na cultura grega destacam-se os primeiros mapas do mundo: em 517 a.C., temos o mapa feito por Hecataeus, em 250 a.C, o de Eratóstenes e, em 200 d.c., o mapa de Ptolomeu.

Os dois últimos sofreram influência dos relatos de viajantes, mercadores e comerciantes que chegaram a Alexandria vindos de terras distantes. Pela época de Eratóstenes já existia intercâmbio comercial com a China, e causa estranheza o fato de este país não ter sido incluído em seu mapa.

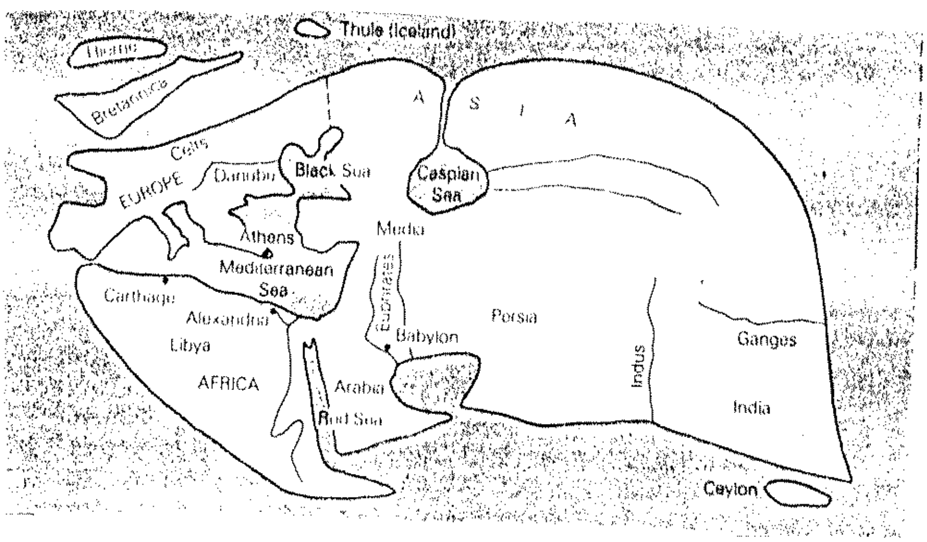
Para melhor compreensão da expansão cultural e comercial da época, anexamos os mapas citados.

Mapas do mundo:

por Hecataeus 517 a.C.



Por Eratóstenes 250 a.C.



Por Ptolomeu 200 d.C.

No quadro 2 a seguir, estão registradas as contribuições do período grego-romano, no desenvolvimento da Aritmético.

PERÍODO GRECO-ROMANO

Datas e fatos culturais	no. natural	no. inteiro	no. fracionário e decimal	no. real e complexo
650 a.C. Moedas estão em uso.				
600 a.C- 250 d.C Florescimento do budismo na Índia.	Época provável das versões do Sulvasutras na Índia.			
A partir de 580	Números figurados pitagóricos e estudo de suas propriedades. Números naturais como múltiplos da unidade.		Matemáticos gregos evitam submúltiplos da unidade, porém problemas práticos levam os gregos ao uso das frações unitárias egípcias. Sob influência das proporções pitagóricas, os matemáticos gregos usam razão entre números como frações.	
500	Sistema ático usado na região de Atenas. Base decimal com agrupamento intermediário quinário. Princípio aditivo, subtrativo e multiplicativo (até 95 a.C.).			Descoberta grega da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado e do pentágono regular.

450 Atenas é o centro cultural do mundo.				Paradoxos de Zenon. Problemas envolvendo subdivisões "ad infinitum" de segmentos de reta.
430-322	Influência de Sócrates, Platão e Aristóteles. Aristóteles faz implícita referência à noção do zero como número.			Prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Aristóteles percebe o infinito real e potencial. Thaetetus estuda a irracionalidade de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ (400 a.C.) Proporções de Eudoxus contornam o problema da incomensurabilidade (400-350 a.C.).
326 Alexandre invade a Índia e leva cultura grega.				
300 Alexandria, em terras egípcias, desponta como centro cultural.	Surge em terras babilônicas um símbolo para denotar uma posição vazia intermediária na representação de quantidades na base sexagesimal. Sistema grego alfabético usado na região de Alexandria. Base decimal, sistema cifrado usando letras do alfabeto. Para nos maiores de 1000 existe o princípio multiplicativo.		Astrônomos gregos usam frações sexagesimais à maneira babilônica. Outras notações gregas para frações. γ'' para $\frac{1}{3}$; $\gamma = 3$ ε'' para $\frac{1}{5}$; $\varepsilon = 5$	

300	Época de Euclides, Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio. Surge "Os Elementos". Numerais Kharoshi indianos apresentam agrupa/os de 4,10,20. Princípios semelhantes ao ático grego.		Símbolo grego $\omega\nu$ para indicar denominadores de frações. $NKI^{\omega\nu}$ para $\frac{50}{23}$; $N = 50$, $K = 20$, $I = 3$	Arquimedes estuda a representação de n<u>os</u> muito grandes.
300 a.C a 1600 d.C na Europa	Sistemas de numerais romanos. Muita semelhança com princípios do sistema ático grego. Os símbolos sofrem modificações ao longo desse tempo.		Romanos evitam frações como submúltiplos da unidade. Preferem estabelecer relações do tipo 1 pé = 12 uncia.	
300 a.C - 200 d.C	Sistema chinês: princípio multiplicativo posicional embora necessite de símbolos para dezena, centena, unidade e dezena de milhar. Os numerais são caracteres ideográficos.	Chineses usam barras vermelhas e pretas para positivos e negativos. Não consideram as soluções negativas dos problemas.	Chineses efetuam operações básicas com frações utilizando denominadores comuns.	
200 a.C. - 30 d.C. Ascensão do Império romano. Conquista da Grécia, Mesopotâmia, Egito.				
150 a.C.	Numerais brâmanes gravados nas pedras de cavernas. Sistema cifrado não posicional. Semelhança com sistema alfabético grego.			

Início da era cristã.	Sistema de barras chinês. Agrupamento decimal, princípio posicional, símbolos para algarismos de ordem par e ímpar.			
150 d.C.			Ptolomeu usa frações sexagesimais babilônicas e uma letra grega para uma casa vazia.	
100-200 d.C.	Obra de Heron trata de equações e Aritmética.			
250		Diofanto ignora soluções negativas nas equações. Considera apenas raízes racionais positivas. Usa implicita/ negativo em demonstrações geométricas do tipo $(a-b).(c-d) = ac-ad-bc+bd$.	Diofanto representa o denominador de frações no canto superior direito do numerador. $\rho^{\rho k}$ representa $\frac{100}{120}$; $\rho = 100,\ k = 20$	
395 Constantinopla é um importante centro comercial.				
400 - 500 d.C. Biblioteca de Alexandria é destruída.	Data provável do texto hindu Siddhantas.			
476 Queda de Roma.				

Percorremos, brevemente, até o momento, o devenvolvimento social, cultural, político e econômico à volta do mar Mediterâneo, berço da civilização ocidental. Porém no Oriente estavam crescentes e importantes civilizações: China, Índia, Arábia que viriam, durante a Idade Média, influenciar os costumes ocidentais e deixar traços permanentes no desenvolvimento da Aritmética.

A civilização chinesa costuma ser dividida em:

- China Antiga, 200-600 a.C.
- China Clássica, 600 a.C.-221 d.c.
- China Imperial, 221-1.911 d.c.
- China Moderna, 1.911 d.c. até nossos dias.

Durante a China Antiga, os chineses estiveram unificados por governos poderosos, conhecidos por dinastias. Na China Clássica, os monarcas mantinham um poder apenas unificador pois pequenas cidades-estados, governadas por príncipes, decidiam seus impostos e suas leis.

Pelos anos 500 a.C. surgiu o filósofo Confucius, defendendo mudanças sociais e políticas. Pregava uma mistura de respeito à autoridade, humildade e preocupação com a pobreza e governos éticos. Outras teorias filosóficas surgiram pregando simplicidade, paz e governos benevolentes. Em 60 d.c., o budismo chegou vindo da Índia e atingiu seu apogeu, por volta de 800 d.c.

Após 221, as cidades-estados foram novamente unificadas em dinastias. Alguns dos imperadores patrocinaram a arte, a literatura e favoreceram o comércio com o Ocidente. Os impérios foram algumas vezes interrompidos, por pequenos períodos de tempo, e divididos em comunidades guerreiras, embora, num total de 1.500 anos, a China tenha permanecido unida, evoluindo em termos culturais. Em 1.911, teve início a Revolução Cultural.

A Índia, diferentemente do ocorrido com a China, desde 2.000 a.C. foi dividida em numerosos e pequenos principados e sofreu muitas invasões: arianas, persas, gregas, árabes e inglesas. As guerras foram uma constante.

De 3.000 a 1.500 a.C., o povo hindu teve a agricultura como meio de sobrevivência. E as ruínas de duas de suas cidades dessa época, Mohenjo Daro e Harappa, espelham sua cultura.

Os arianos, invasores das duas cidades, as destruíram. De 1.500 a 500 a.C., devenvolveram o hinduismo, uma filosofia que distinguia fortemente quatro classes distintas, a brâmane, dos padres; a dos guerreiros; a de artesãos e mercadores; e a dos camponeses. Sua escrita era o sânscrito.

Após este longo período, muitas filosofias surgiram na Índia, sendo a mais aceita pela classe pobre, o budismo, que permaneceu em evidência por 1.000 anos, ou seja até 500 d.c. quando começou a declinar na Índia, e a crescer na China, Japão e sudeste da Ásia.

De 300 a.C. a 500 d.c., diferentes ordens políticas intercalaram-se: grandes e poderosos impérios e reinos pequenos, guerreiros e desunidos, que novamente eram reunificados por grandes impérios.

Aos poucos a filosofia sânscrita ressurgiu na literatura, arte e medicina e predomina até os dias de hoje, embora, a partir do sec. VIII d.c., os árabes tenham conquistado grandes regiões indianas, divulgando sua religião islã e mantendo, por muito tempo, o império árabe na região. Em 1.200 d.c., a Matemática árabe e hindu estavam mescladas.

O crescimento do domínio árabe no mundo se deu a partir de 622 d.c., quando o profeta Mohammed escreveu o Korão, motivado por questões religiosas, e reuniu pela fé e fanatismo as tribos nômades dos desertos árabes. Em guerras "sagradas", ampliaram suas fronteiras, conquistando a Palestina, a Síria, as terras entre o rio Tigre e o Eufrates, o Egito, o norte da África, o Irã, a Espanha e as costas do mar Mediterrâneo.

A capital oriental do império árabe pernaneceu em Bagdá e o traço mais marcante deste povo foi preservar, assimilar e divulgar as culturas das regiões dominadas.

As três importantes civilizações orientais tiveram, em sua origem e desenvolvimento, fortes influências religiosas e economias centradas, em princípio, na agricultura, no caso da China e Índia e, posteriormente, centradas no comércio, motivo da divulgação de suas culturas. As causas militares, mescladas com interesses mercantis, levaram os árabes à Europa e a dominarem, durante a Idade Média, toda a região do mar Mediterrâneo.

O período do domínio árabe foi de 622 a 1.300 d.c., tempo em que a Europa esteve mergulhada na Idade negra, desprovida de construções significativas no campo das Artes, Literatura e Ciências.

Para entender o que se passou na Europa nesse período, devemos lembrar que os romanos conquistaram a França, Itália, Espanha, Inglaterra, o noroeste da África, o Egito, algumas regiões da Índia e o Golfo Pérsico. Nos anos 400 d.C. estavam divididos em dois impérios: o Ocidental, com sede em Roma; outro Oriental, com sede em Bizanto, mais tarde chamada de Constantinopla. Nesse mesmo século, o norte e leste da Europa foram invadidos por tribos de cavaleiros vindos da Ásia Central, que conquistaram as florestas germânicas e eslavas, se uniram a vândalos na Checolosváquia e chegaram a Roma em 476.

O poder político na Europa Ocidental se deslocou para o norte, para os lados da atual França, onde tribos de caçadores alemães se misturaram aos nativos gauleses, adotaram a religião cristã e a economia agrícola.

A Itália e o norte da África foram reconquistados nos anos 500 por Justiniano, governante do império romano oriental, por pouco tempo porém, pois nos anos 600, sofreram várias invasões e abandonaram Roma.

O império romano oriental foi perdendo seus domínios no norte da África, Egito e Palestina para os árabes, ficando limitado à pequena região da Grécia, em torno do importante centro cultural e comercial de Constantinopla. O comércio mantido com os povos eslavos da Europa Oriental deixava fluir por esta rota os elementos culturais dos mercadores gregos bizantinos. O alfabeto russo foi influenciado pelo grego e a religião cristã ortodoxa é similar à ortodoxa grega. As aquisições bizantinas mantiveram o espírito romano de exaltar a religião em detrimento da ciência.

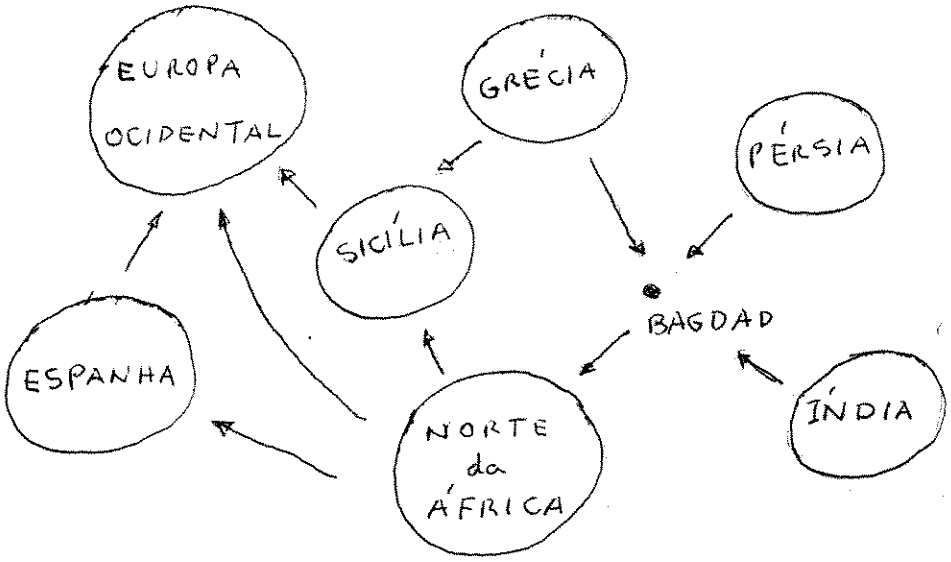
No oeste da Europa, alemães e gauleses se uniram aos italianos, e formaram o 1º Império Sagrado Romano, nos anos 800, tendo um papa católico como governante. Nos anos 900, muitos principados alemães, chefiados por lordes ou barões, formam o 2o. Império Romano, liderado por um rei alemão.

Estava em ascensão o feudalismo, estrutura social européia composta de lordes, camponeses e servos, alguns poucos artesãos e mercadores. Administradores e generais eram as pessoas mais bem informadas. Monastérios e conventos eram os locais apropriados para o estudo da religião e da filosofia. Surgiram teólogos famosos como São Benedito e São Francisco de Assis. Os engenheiros, com pouca cultura, desenvolviam-se mais como artesãos e mecânicos e construíram as magníficas catedrais, de belos e coloridos vitrais.

Entre 1300 e 1400, o comércio com os árabes e os gregos bizantinos propiciou o crescimento de muitas cidades italianas: Gênova, Veneza e Florença. Surgiram os artistas Leonardo da Vinci e Michelângelo. Na Matemática tivemos Leonardo de Pisa ou Fibonacci, divulgador da Aritmética hindu trazida por comerciantes árabes.

Pelos lados da Espanha, o domínio árabe, a partir de 711, chegou às cidades de Córdoba, Toledo e Sevilha, levando as culturas hindu e grega que se expandiram nos monastérios e conventos.

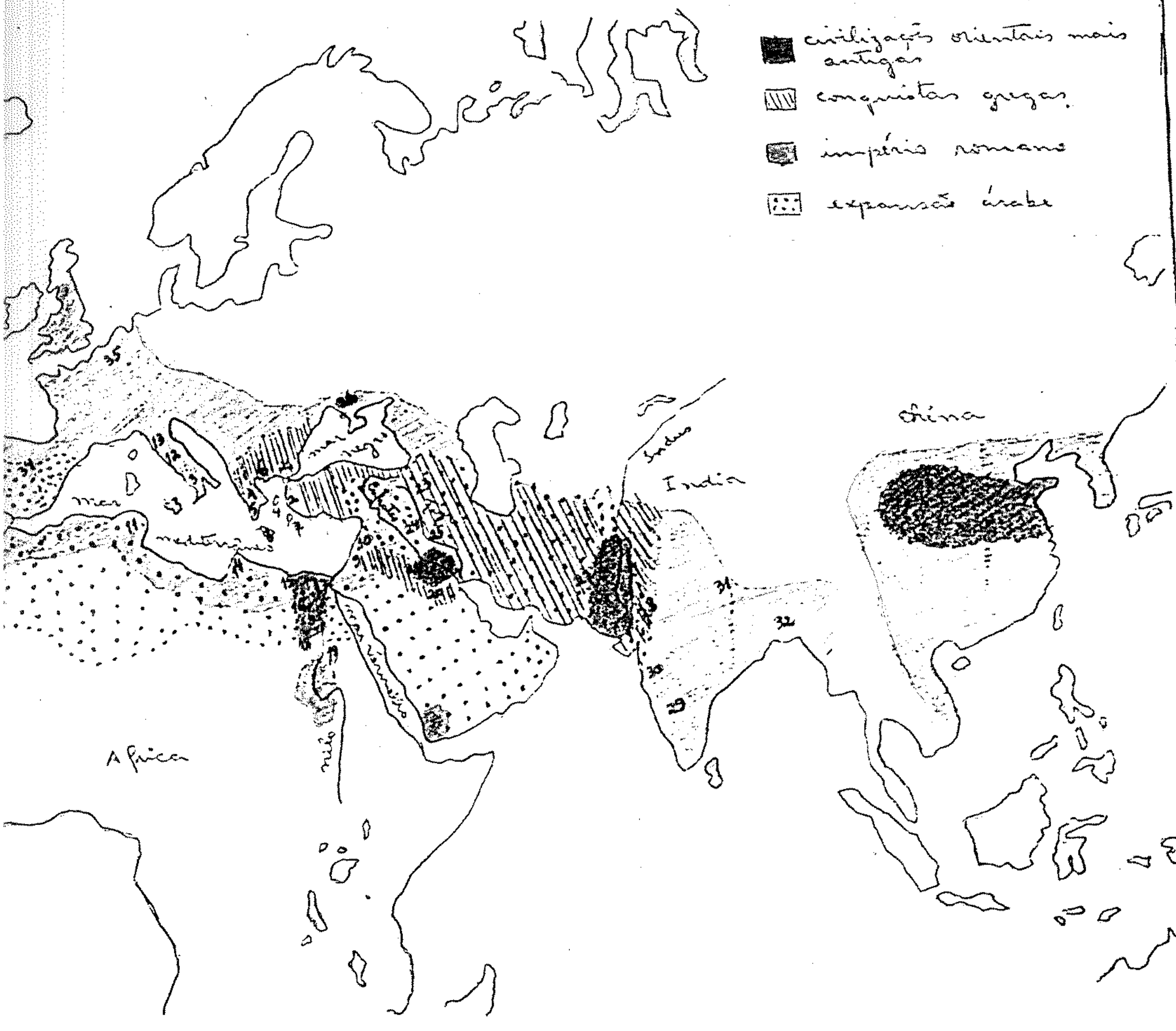
Os caminhos da divulgação do conhecimento grego e hindu para a Europa Ocidental estão esquematizados no diagrama, a seguir.



Para melhor acompanharmos as modificações políticas ocorridas no mundo e descritas até aqui, resumimos, no quadro, os períodos de acentuada influência das diversas civilizações, incluindo os intervalos de sofrível contribuição intelectual européia.

sociedade	período de acentuada influência
egípcia	3000 - -300 a.C.
babilônica	3000 - -300 a.C
grega	600 - 31 a.C.
romana	31 a.C. - 476 a.C.
chinesa	1030 a.C. - 1600 d.C.
hindú	200 a.C. - 1250 d.C.
árabe	622 - 1300 d.C.
européia	500 - 1200 d.C. (idade negra)
européia	1200 - 1450 d.C. (época de transição)

Registramos, no mapa anexo, a expansão territorial que implicou na difusão cultural, promovida pelas conquistas militares grega, romana e árabe.



Cidades

1- Atenas
2- Mileto
3- Crotona
4- Chios
5- Esparta
6- Estageira
7- Rhodes
8- Siracusa
9- Tyre
10- Sidon
11- Cartago
12- Roma
13- Pisa
14- Cirene
15- Alexandria
16- Menfis
17- Cairo
18- Tebas
19- Siene
20- Ur
21- Nippur
22- Babilonia
23- Nineveh
24- Assur
25- Bagdad
26- Constantinopla (antes Bizanto)
27- Mohenjo-Daro
28- Ujjain
29- Misore
30- Nana Ghat
31- Patna
32- Calcutá
33- Córdoba
34- Toledo
35- Paris

Organizamos, a seguir, um resumo do desenvolvimento aritmético alcançado por essas civilizações.

PERÍODO: ASCENSÃO DO ORIENTE E IDADE NEGRA DA EUROPA

datas e fatos culturais	no. natural	no. inteiro	no. fracionário e decimal	no. real e complexo
500 d.C. Início do papado na Europa.	Hindu Aryabhata escreve texto sobre Aritmética e Álgebra hindu.			
500-600	Sistema hindu combina cifração e princípio posicional.			
500-1200 Idade negra na Europa.				
600 Tribos nômades árabes iniciam conquistas.				
600-870	Evolução de um símbolo hindu para a casa vazia.			
627	Hindu Bramagupta escreve tratado de Aritmética.	Bramagupta sistematiza regras para as operações com negativos e positivos.	Bramagupta utiliza símbolos $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ para $\frac{2}{3}$	Bramagupta considera $0 \div 0 = 0$
641 Árabes conquistam Alexandria e queimam sua biblioteca.				
711 Árabes cruzam o estreito de Gibraltar, chegam a Córdoba na Espanha.				

750 Bagdá capital orien- tal do império árabe surge como centro cultural.	Obra de Bramagupta traduzida pelos árabes divulga Aritmética hindu (773).			
800 Uso da impressão e da pólvora pelos chineses.	Árabe Al Khowarizmi escreve texto sobre numeração hindu, já usa símbolo para o zero (829).	Al Khowarizmi não con- sidera soluções negativas de equações mas usa negativos em operações. indica $\dot{5}$ ou 5 para -5.		
900-1050 Ascensão do feudalismo na Europa.	Árabe Al Biruni e padre inglês Adelard traduzem obras e ajudam a divulgar notação e cálculos hindus			
1020	Al Karkhi, matemático árabe, insiste em escrever palavras extensas para representar números.			
1085 Queda de Toledo para os cristãos.				
1100 Monastérios de Córdoba, Sevilha e Toledo enriquecem- se com cultura greco/oriental traduzida pelos árabes.			Persa Al Nasawi faz extração de raiz quadrada aplicando idéia de frações decimais $\sqrt{17^o} = \frac{1}{100}\sqrt{170000} = \frac{1}{100}\ 412^o = 4^o\ 7'\ 12''$.	

1100 Gherardo de Cremona, tradutor de obras. Uso do papel e da bússola pelos chineses. Época das cruzadas cristãs.			Tradução de árabe desconhecido feita por John de Seville usa $\sqrt{a} = \frac{1}{10^n}\sqrt{a.10^{2n}}$	
1150	Hindu Bashara estuda equações lineares e quadráticas.			Bashara considera $a \div 0$ infinito. Para ele não pode haver raiz quadrada de negativos.
1200	Tradução da obra de Al Khowarizmi para o latim.	Matemáticos europeus preferem evitar expressões "sem sentido" do tipo $a - b$ com $a < b$.		
1202	Leonardo de Pisa (ou Fibonacci) escreve e divulga Aritmética hindu.		Fibonacci resolve problemas de racionais do tipo $x^2 + 5 = y^2$. Dá resultado $x = \frac{41}{12}$ e $y = \frac{49}{12}$ Mostra que equação cúbica não tem raiz construída por régua e compasso.	
1250 Surgem as $1^{\underline{as}}$ Universidades Europeías.				
1272	Ralph de Leon resiste aos numerais hindu-arábicos. Traduz textos árabes mudando seus símbolos pelos romanos.			

1300 Invenção da arma. Sistema feudal declina na Europa.				Preocupações dos filósofos escolásticos com infinitamente grande e pequeno.
1343			Astrônomo parisiense John de Meurs usa $\sqrt{2} = \frac{1}{1000}\sqrt{2000000} = 1^o 24' 50'' 24'''$	
1349 Peste negra na Europa.				
1438 A impressão gráfica é inventada.				
1442			Alemão Jhon Von Gemundem usa misto de base decimal e sexagesimal $\sqrt{2} = \frac{1}{60^n 100^m}\sqrt{a 60^{2n}\ 100^{2m}}$	
1400-1600			Uso na Europa de unidades muito grandes para evitar frações por exemplo tg 45^o = 100 000 ; raio do círculo 100000.	
1453 Os turcos conquistam Constantinopla.				

Com o colapso da civilização grega-bizantina, em 1453, e com a queda do domínio árabe sobre Granada em 1492, a Europa ficou dividida na cultura latino-germânica a oeste e a greco-eslava a leste. Os centros culturais deslocaram-se do mar Mediterrâneo (Grécia e Roma) para as costas do mar do Norte e Báltico, ou seja, para a França, Inglaterra, Holanda, Alemanha, Escandinávia, Polônia e Rússia.

As viagens comerciais estavam no seu apogeu, navios atravessavam o mar Mediterrâneo levando roupas e especiarias da Ásia para as prósperas cidades italianas. As cidades localizadas na costa do Oceano Atlântico não estavam bem posicionadas para esta rota comercial, levando seus governantes a procurarem rotas alternativas e transformando-os nos pioneiros das viagens marítimas para a Índia, passando pela África. Numa dessas viagens descobriram a América.

O florescimento das nações-estados européias provocou consumo comercial e gerou dinheiro suficiente para financiar explorações, conquistas e colônias. Os avanços nas construções dos navios, melhoramentos nos equipamentos, como armas e canhões permitiam essa ânsia por novas conquistas. Em 1500, os monarcas de Portugal, Espanha, França e Inglaterra tinham poderes econômico e político para tais proezas. Teve início a expansão européia para outros continentes.

Os espanhóis dominaram o México, o Peru, a Colômbia, a Argentina e as Filipinas. Os portugueses construíram fortes na Índia, Golfo Pérsico, China e controlaram as costas africanas, cidades na Índia e Brasil. Os franceses chegaram à América do Norte, no vale do rio Mississipi e em Saint Lawrence, enquanto os ingleses colonizaram a costa oriental. Os holandeses construíram fortes na África, Índia e sul da África. A Rússia expandiu-se para a Sibéria.

Das conquistas militares passou-se à colonização. Imigrantes europeus rumaram para esses continentes. A reforma protestante no nordeste da Europa também colaborou com a colonização européia. A descoberta do ouro, da prata, o comércio de escravos trouxe um fluxo de capital para a Europa, trazendo o progresso e o crescimento das cidades, tornando-as importantes centros comerciais. Essa época da exploração trouxe à Europa uma revolução cultural e científica, o florescimento das artes e a invenção de novas tecnologias.

No campo da Matemática, nos anos 1600, Napier inventou os logaritmos, Harriot e Oughtred contribuíram para a notação da Álgebra, Galileu desenvolveu a ciência da dinâmica, Kepler anunciou as leis do movimento planetário, Descartes introduziu a Geometria Analítica, Fermat lançou a teoria dos números, Newton e Leibniz, criaram o cálculo Diferencial e Integral.

Nos anos 1700, houve turbulência na Europa e América. As idéias sociais, políticas e econômicas feudais usadas na agricultura deram lugar ao liberalismo clássico que defendia o direito à propriedade privada, igualdade de oportunidades e direitos humanos para ricos e pobres, homens e mulheres, camponeses ou lordes.

Muitos líderes surgiram defendendo essas idéias. Entre eles, Locke, Rousseau e Thomas Jefferson. Surgiu uma nova classe social, a classe média ou burguesia. Esta classe consistia de fazendeiros, comerciantes, banqueiros, artesãos, advogados e médicos. Houve fluxo dos camponeses para a cidade. Na Inglaterra, França e América, a aristocracia ficou limitada e a classe média reinvidicava direitos para escolher seus governantes.

Na Matemática, a preocupação passava a ser os fundamentos da disciplina, pois surgiram algumas contradições e absurdos, levando os matemáticos a questionarem a maneira empírica do desenvolvimento dos conceitos. O conhecimento tinha se desenvolvido em bases não muito sólidas, era premente estabelecer critérios lógicos e rigorosos.

Nos anos 1800 e 1900, o desenvolvimento da Matemática deu-se influenciado pelo esforço em organizar uma sólida fundamentação lógica, pelo aumento da área de seguros e pela necessidade de melhorias tecnológicas surgidas da expansão industrial na Europa e na América.

De forma que, pelos anos 3000 a.C. houve mudanças nos hábitos, costumes e organizações políticas influenciadas pela agricultura. Nos anos 1800, as mudanças se deram a partir das máquinas industriais. As cidades cresceram e se urbanizaram, os meios de transportes evoluíram, as tecnologias e os investimentos de capital tornaram-se o centro de interesse. A máquina a gasolina substitui a máquina a vapor e o avião é inventado.

As grandes nações industrializadas correm atrás de matérias primas inexistentes na Europa, como borracha, ligas de metal, carvão e algodão para as fábricas têxteis. Surgem colônias européias na Índia, África, Ásia e Ilhas do Pacífico.

Os artesãos e técnicos tiveram papel importante no início do desenvolvimento industrial. Posteriormente, porém, as invenções foram mais sofisticadas, implicando, nos anos 1900, na necessidade de cientistas e matemáticos.

Os grandes poderes imperiais do século XIX levaram à 1ª guerra mundial (1914-1918) que deixou a indústria quebrada. A revolução russa (1917) trocou a monarquia pelo socialismo. Nacionalistas estabeleceram novos regimes na Polônia, Yugoslávia, Checolosváquia e Hungria em 1920. Fascistas tomaram o controle da Alemanha, Espanha, Itália e Japão em 1930. Fascistas europeus assassinaram judeus e homossexuais e provocaram a 2ª guerra mundial (1939-1945). O mundo, após a guerra, se dividiu em blocos: oriental e ocidental. Países do terceiro mundo ficam cada vez mais pobres, super populosos, sub-educados. Alguns se rebelam como Vietnam, Zaire, Nigéria e Uganda. O poder atômico domina o século XX, e os perigos do seu abuso emergem no movimento dos ambientalistas e pacifistas. Surgem milhares de empregos para cientistas.

O desenvolvimento em todas as áreas do conhecimento foi bastante profícuo, tornando difícil a tarefa de selecionar e resumir as contribuições mais expressivas nesse período. Mesmo assim, fizemos o quadro IV, estando o mesmo passível de futuras modificações.

PERÍODO: CONTRIBUIÇÃO OCIDENTAL

Datas e fatos culturais	no. Natural	no. inteiro	no. fracionário e decimal	no. real e complexo
1457-1500	Calendários alemães ainda usam símbolos romanos.			
1488			Pietro Borghi usa regra de divisão por $a.10^n$. Conta n dígitos da direita-esquerda e divide o restante por a.	
1489	Aritmética de Widman usa sinais + e - nas operações.			
1492 Granada retorna para espanhóis.			Mizrahi usa a barra vertical em frações decimais e sexagesimais.	
1500-1600	Gradualmente mudanças dos símbolos romanos para os hindus.			Galileu faz relação biunívoca entre naturais e pares.
1530			Christoff Rudolph denota 15|230 para $15\frac{230}{1000}$	Rudolph adota $\surd$ para raiz quadrada. Discarta raiz quadrada negativa.

1545		Cardano não considera soluções negativas, mas usa regras para operações com negativos.		Cardano trabalha com idéia de complexos em problemas.
1557	Robert Record usa símbolo =.			
1579			Viète escreve 15 $\|_{230}$ para 15,230.	Bombelli introduz teoria dos complexos.
1585			Stevin apresenta cálculos sem frações: uso de decimais. 8 (o) 9 (1) 3 (2) para 8,93.	
1592			Borghi indica 141_0 4 para 141,4. Magini usa vírgula para separar parte decimal.	
1593	Christopher Clavius usa • para multiplicação.		Clavius usa • para separar parte decimal.	
1600 ascensão das máquinas.	Oughtred usa × para multiplicação.			
1602 - 1619	regras de origem hindu, gelósia e galeão, são usadas pelos europeus.		surge notação $83^{I}4^{II}$ para 8,34.	

1619			Napier usa decimal em logaritmos. Escreve $15,2'3''1'''$ para 15,231.	
1624			Briggs publica 1ª tábua logaritmica. usa 15^{230} para 15,230.	
1629			Von Kalchein escreve 893(2) para 8,93.	
1637		Descartes usa negativos e positivos; interpreta-os como sentidos "opostos".		Descartes nomeia real e "imaginário". Usa complexos como solução de equações.
1675				Newton e Leibniz estudam técnicas de cálculo diferencial e integral.
1685				Wallis: raiz quadrada de negativos é lado de quadrado de área negativa.
1700 Prenúncios da Revolução Industrial.				
1700 - 1800			notações redundantes de decimais $34,1'4''2'''$; $34,1'4''2''$; 34,142"'	

1748				Euler indica $\sqrt{-1}$ por i.
1752				D'Alembert aplica complexos na hidrodinâmica.
1772				Lambert usa complexos na construção de mapas - técnica "projeção cônica conformal".
1797				Wessel introduz eixos para reais e para $b\sqrt{-1}$.
1800			ponto e virgula foram sistematizados para decimais. 12.234 na América do Norte e na Inglaterra. 12,234 para Europa e Brasil.	
1817				Bolzano usa conceito não geométrico de continuidade. Exibe correspondência entre naturais e seus quadrados.
1821				Cauchy estuda séries infinitas e desenvolve teoria de limites.
1832				.Gauss introduz termo "complexo". Estuda séries infinitas.

1835				Hamilton introduz notação de pares ordenados para complexos.
1850				Weierstrass e a Aritmetização da Análise. Kronecker estuda infinitésimos e defende métodos finitos sobre inteiros. Fourier estuda séries infinitas.
1873				Hermite prova: "e" é transcendental.
1880				Dedekind-Cantor: formalização dos reais, continuidade da reta numérica. Cantor e a Aritmética transfinita.
1882				Lindermann prova: π é transcendental.
1889	Axiomas de Peano: sistematização dos naturais.			
1900				Steinmetz usa complexos para desenvolver teoria dos circuitos elétricos.

Ao traçarmos um perfil do desenvolvimento da Aritmética entre diferentes povos e organizações políticas surgiu, com muito impacto, a importância da criação de uma linguagem escrita nas superações das questões ligadas a relatos e registros envolvendo a contagem, a representação de quantidades e as relações decorrentes da operacionalização do número.

A criação do alfabeto permitiu também o grau de acurácia e rigor das obras matemáticas gregas influenciadas pelos trabalhos de Aristóteles, nas quais foram estabelecidas formas válidas de argumentação e regras básicas para a clarificação e organização do discurso. O desenvolvimento da Lógica , que teve em Aristóteles seu precursor, se deu paralelamente a organização da língua grega por volta do século IV a.C. Nas demais sociedades, o aprimoramento dos sistemas de numerais esteve associado ao desenvolvimento da linguagem escrita.

No Egito, a escrita, inicialmente gravada nas pedras, posteriormente em papirus, cujos símbolos foram chamados hieroglifos (palavra grega significando gravações sagradas), tem sinais escritos – representações dos sinais visuais dos objetos que representam. Essas palavras simbólicas compõem a escrita **pictográfica**. É a forma mais antiga de escrever e associa a palavra escrita aos objetos da natureza próximos ao homem.

Os primitivos numerais egípcios expressam esse costume cultural, como podemos observar nos significados de seus numerais.

valor numérico	numeral pictográfico	origem
1		traço vertical
10		osso de calcanhar ou junta de gado
100		rolo de corda
1000		flor de lotus
10000		dedo apontando
100000		girino
1000000		homem atônito

Os sumérios, por sua vez, tinham originalmente cada palavra representada por um único pictograma impresso em tablete de argila crua, secos posteriormente ao sol. Devido à natureza da argila, ao imprimir o pictograma, esta secava rapidamente, forçando a estilização máxima do pictograma original para apressar sua gravação. Com isso, palavras, que na linguagem falada tinham sons parecidos, ficaram escritas com os mesmos símbolos, ou seja, os **pictogramas** tornaram-se **fonogramas**.

Este povo tinha mais de 600 sinais fonográficos para representar os fonemas de sua linguagem falada. A nova técnica representou um avanço, especialmente quando pequenas unidades fonéticas eram reconhecidas e manipuladas independentemente. Sua escrita recebeu o nome de cuneiforme (derivada da palavra latina cuneus = cunha, metal ou madeira na forma triangular própria para gravar). Os sumérios, sendo conquistados pelos acadianos de linguagem muito diferente, tiveram seus símbolos usados para indicar palavras acadianas. Na mistura, os fonemas foram reduzidos para sessenta e seus sinais combinados de acordo com princípios fonéticos, de forma que cada símbolo representasse um objeto e o som inicial do nome que o identificasse. A combinação desses fonemas compôs a palavra escrita.

Na escrita cuneiforme babilônica os numerais são 𒁹 e 𒌋.

valor numérico	numeral	origem
1	𒁹	a cunha de forma triangular é usada para gravar o vértice oposto à base do triângulo isósceles.
10	𒌋	o instrumento é agora usado, imprimindo na argila, um dos ângulos da base.

As sociedades egípcia, suméria, chinesa e a cultura do vale do rio Indus, em Mohenjo Daro e Harappa tiveram escritas **pictográficas**. Embora as escritas egípcias e suméricas tenham evoluído para sistemas silábicos, a chinesa evoluiu para sistemas **ideográficos**, ou seja, seus símbolos não se limitam a significação visual direta (pictograma), mas têm um valor mais amplo, representando ações ou idéias próximas (ideografia).

O desenho da mão, por exemplo, pode significar a idéia de dar, receber ou tomar.

Os numerais chineses apresentados na pág.84 seguem os princípios **ideográficos** de sua escrita.

A linguagem egípcia evoluída, a que nos referimos anteriormente, influenciou tribos semíticas vivendo na região do Sinai. Estas adequaram os sinais egípcios para nomes e sons de suas palavras orais.

As duas primeiras letras da língua semítica eram aleph e bet, que significavam cabeças de boi e casa, originalmente denotadas por $\forall \perp \square$. Elas deram origem às duas primeiras letras do alfabeto grego, alfa e beta, das quais a palavra "alfabeto" é derivada.

A escrita semítica, por sua vez, influenciou a linguagem fenícia que incorporou os princípios fonéticos na combinação de suas 22 letras, das quais originaram as letras do alfabeto hebreu, grego e aramaico. Supõe-se que esses estiveram em uso em 850 a.C., 800 a C e 750 a C, respectivamente. Essas linguagens, já nesse tempo, eram escritas em linhas horizontais da esquerda para a direita.

A escrita aramaica deu origem a muitas outras, entre elas, a da região persa, a da Ásia Central e a do continente indiano. É bom que se frise que a atual escrita indiana não derivou da cultura nativa de Mohenjo Daro e Harappa, mas sim do alfabeto aramaico, descendente direto daquele que evoluiu sobre a influência do sistema escrito egípcio.

Os gregos usaram os nomes, os valores e a forma do alfabeto fenício, completando-o com um número pequeno de vogais e consoantes necessárias para representar sua linguagem oral. Assim fizeram os vários povos: adotaram novas letras para representar os sons de suas linguagens particulares.

Ao introduzirem as vogais, os gregos criaram o mais avançado sistema fonético de escrever, tornando-o um eficiente sistema de transcrever uma linguagem falada. Este se espalhou de uma cultura européia a outra, onde era modificado para adequar-se aos diferentes sons das linguagens locais.

Os sistemas de numerais gregos foram naturalmente influenciados pelo seu alfabeto fonético. Assim, os numerais áticos (da região de Atenas) têm seus símbolos relacionados às primeiras letras das palavras numéricas correspondentes, como observamos a seguir:

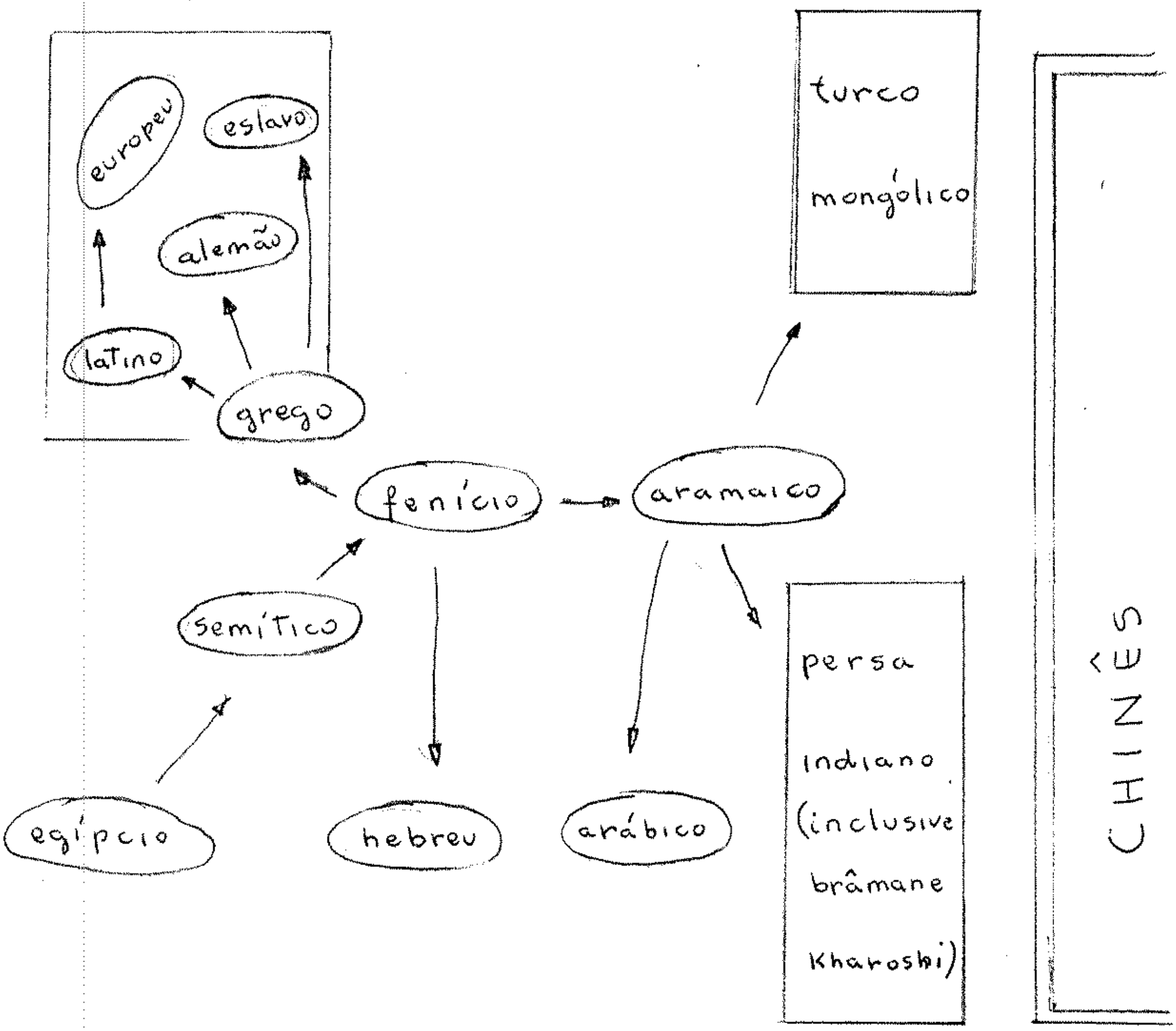
valor numérico	numeral ático	origem
1	I	associado ao traço
5	Π ou Γ	letra inicial da palavra penta (=5)
10	Δ	primeira letra da palavra Δ e ka (=10)
100	H	letra inicial de hekatron (=100)
1000	X	inicial de chilioi (=1000)
10 000	M	mipioi = miríade = 10 000

Os numerais alfabéticos gregos, da região de Alexandria, têm os 9 dígitos representados pelas 9 primeiras letras do alfabeto, as 9 dezenas pelas letras sucessoras e as 9 centenas pelas últimas letras. Hebreus e árabes adotaram, na ocasião, o princípio grego de relacionar numerais a letras.

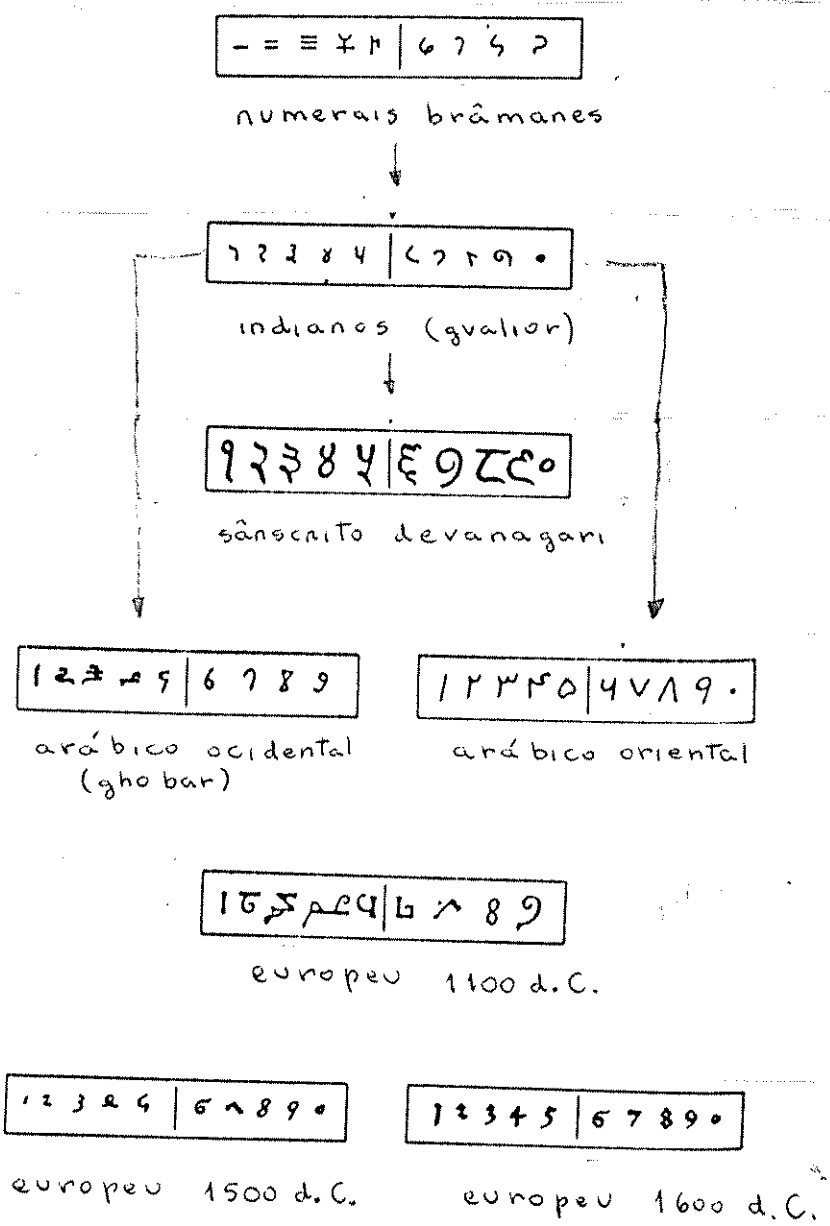
Anexamos, no próximo quadro, símbolos do antigo alfabeto egípcio, as 22 letras fenícias, as dos hebreus e gregos. As duas últimas estão associadas aos valores numéricos que representam e, por último, o alfabeto latino, do qual derivou o português.

			Hebreu				Grego				
linha	egípcio	fenícia	letra	valor fonético	valor numérico	nome	letra	valor fonético	valor numérico	nome	latim
1	[illegible]	𐤀	א	ʼ	1	alef 'Rind'	Αα	a	1	álpha	A
2	[illegible]	𐤁	ב	b	2	beth 'Haus'	Ββ	b	2	bêtha	B
3		𐤂	ג	g	3	gimel 'Kamel'	Γγ	g	3	gámma	C
4	[illegible]	𐤃	ד	d	4	daleth 'Tür'	Δδ	d	4	délta	D
5		𐤄	ה	h	5	he	Εε	e	5	è-psilón	E
6	Y	𐤅	ו	w	6	waw 'Nagel'	Fϛ	–	6	wau	F
7		𐤆	ז	z	7	zajin 'Waffe'	Ζζ	z	7	zêta	(G)
8		𐤇	ח	h	8	heth	Ηη	ē	8	êta	H
9		𐤈	ט	t	9	teth	Θϑ	th	9	thêta	100?
10	[illegible]	𐤉	י	j	10	jod 'Hand'	Ιι	i	10	jôta	I
11	[illegible]	𐤊	כ	k	20	kaf 'offene Hand'	Κκ	k	20	káppa	K
12		𐤋	ל	l	30	lamed	Λλ	l	30	lámbda	L
13	[illegible]	𐤌	מ	m	40	mem 'Wasser'	Μμ	m	40	my	M
14	[illegible]	𐤍	נ	n	50	nun 'Fisch Schlange'	Νν	n	50	ny	N
15		𐤎	ס	s	60	samek	Ξξ	x	60	xî	–
16	[illegible]	𐤏	ע	ʻ	70	ajin 'Auge'	Οο	o	70	ò-mikrón	O
17	[illegible]	𐤐	פ	p	80	pe 'Mund'	Ππ	p	80	pî	P
18		𐤑	צ	s	90	sade	–	–	–	–	–
19		𐤒	ק	q	100	qof	Ϙϙ	–	90	kóppa	Q
20	[illegible]	𐤓	ר	r	200	reš 'Kopf'	Ρϱ	r	100	rhô	R
21		𐤔	ש	š	300	šin 'Zahn'	Σσ	s	200	sígma	S
22		𐤕	ת	t	400	tau 'Zeichen'	Ττ	t	300	taû	T
23			ך	-k	(500)	(kaf)	Υυ	ü	400	ŷ-psilón	V
24			ם	-m	(600)	(mem)	Φφ	ph	500	phî	1000
25			ן	-n	(700)	(nun)	Χ↓	ch	600	chî	X
26			ף	-f	(800)	(fe)	↓Ψ	ps	700	psî	50?
27			ץ	-s	(900)	(sade)	Ωω	ō	800	ô-méga	–
28							↑Ϡ↑	–	900	sampî	–

A divulgação do alfabeto fenício de origem egípcia, através de seus descendentes diretos grego, hebreu e aramaico, está representada no diagrama abaixo.



Os símbolos brâmanes descendem da escrita aramaica. Deles derivam os numerais indianos que influenciaram os numerais arábicos oriental e ocidental. Deste último, surgem as transformações em solo europeu, até estabelecer-se nos nossos numerais atuais.



A palavra numérica, para representar a casa vazia, teve também inúmeras adaptações, desde a sua origem hindu até as culturas ocidentais.

600-800 d.C.	(em sânscrito)	sunya (= vazio)	
900	(em árabe)	as-sifr	
1300	(latim) cifra	zefirum	cephirum (Leonardo de Pisa)
1400	(francês) chiffre (dois significados: zero e dígito)	zefiro-zevero-(italiano)	zero(Veneza)
1500	cipher (Inglês)	zilffer (alemão)	zero (francês-inglês)

Nos quadros resumos anteriores, pudemos acompanhar as várias ocasiões em que se criou um símbolo para o zero.

300 a.C.	babilônicos usaram um sinal para representar a casa vazia em posição intermediária, na base sexagesimal.
150 d.C.	Ptolomeu introduziu um símbolo o - abreviatura da palavra grega ouden = nada, para frações sexagesimais.
500 d.C.	os indianos usam um ponto para representar a casa vazia nos resultados obtidos no ábaco.
a partir de 800 d.C.	surge o atual símbolo para o zero. É usado para escrever 50 e 270, nos escritos das paredes de um pequeno templo na vizinhança de Gvalior.

Em pesquisa antropológica realizada entre povos primitivos, por Corrant (1931), as origens da palavras numéricas de 1 a 9, apresentaram as caracteríticas comuns, resumidas no quadro:

1- existência, unidade, grupo, início.

2- repetição, divisão, par natural.

3- coleção, muitos, dois-um.

4- dois - dois

5- mão, grupo, divisão.

6- cinco-um, dois três, segundo um.

7- cinco-dois, segundo dois, três de dez.

8- cinco-três, segundo três, dois quatro, dois de dez.

9- cinco-quatro, três três, um de dez.

10- um (grupo), dois cincos, metade de um homem, um homem.

4.2 As Forças Desenvolvimentistas.

Com o estudo efetuado nas seções anteriores, foi possível detectar **fortes influências** no desenvolvimento da Aritmética, o que nos possibilitou identificá-las e classificá-las em várias **forças**.

Nesse aspecto, dois trabalhos nos influenciaram. Num deles, Wilder (1968) estabeleceu "laws governing the evolution of Mathematical concepts". Em outro, Crowe (1975) examinou "... laws concerning patterns of change in the History of Mathematics". Procuraremos aproveitar suas idéias para o caso específico do desenvolvimento da contagem e da ampliação dos campos numéricos.

Num grupo de pessoas existem vários fatores se inter-relacionando: cada indivíduo do grupo, a sua cultura, isto é, os seus costumes, rituais, credos e instrumentos. Cada um desses fatores não é independente, ou seja, cada um desses elementos culturais, de uma mesma cultura, influencia o desenvolvimento do outro. O desenvolvimento ocorre, portanto, motivado por **forças culturais**. Existe, relação entre o estágio tecnológico de um povo primitivo e seus credos religiosos e rituais. De forma que, o povo adquire em princípio, os elementos culturais de seus antepassados, mas esses sofrem transformações provocadas pelo seu próprio desenvolvimento. As **forças culturais** e as transformações provocadas por elas, relativas a contagem, número e suas relações, serão, nesta seção, motivo de análise.

Em tempos muito remotos, o homem olhava à sua volta, observava objetos, cores, formas que não eram resultado do seu trabalho, não tinha consciência do mundo, não sabia explicar os fenômenos da natureza. Isto tornou forte e profundo o cultivo ao misticismo, à superstição e à religião. Sendo assim, numa sociedade primitiva existem muitos mitos e muitos rituais. Toda atividade em grupo, envolvendo coleção de objetos, seja ela de cunho religioso ou conseqüência de comemoração e de distribuição do resultado de uma pesca ou caça, transforma-se num ritual, a ponto de Seidenberg ter afirmado, "a seriação é um ritual e a contagem é um mito".

Neste estágio, são necessárias, para contagem, uma seqüência de palavras, às quais estão associadas uma sucessão, ou seja, uma ordem e uma atividade familiar na qual elas são empregadas. Essas atividades podem ser resultado de qualquer motivação: caça, pesca, colheita, religião, misticismo.

Mitos, rituais e superstições permaneceram associados à contagem e a números em diferentes sociedades e representaram **forças culturais** no desenvolvimento da Aritmética.

Na sociedade grega da época dos pitagóricos, ficaram bastante conhecidos os seguintes *mitos*, envolvendo os números:

- números ímpares são masculinos; números pares, femininos.
- cinco é o número do casamento.
- dez é um número perfeito.
- um é o Deus.
- 220 e 284 são números amigáveis, pois cada um é a soma dos divisores próprios do outro.

Tentativas existem para justificar parte desse misticismo. Segundo alguns, 5 é o número do casamento por ser soma dos primeiros números masculino e feminino, 2 e 3; dez é um número perfeito como soma de todas as dimensões observadas nos elementos geométricos, como consideradas na época; um é Deus, como gerador de todos os números. A relação estabelecida entre sexo e número, é justificada pela prática de enumeração de homens e mulheres em cerimônias; contava-se um homem, então uma mulher e, desse modo, os números ímpares recaíam nos homens e os pares, nas mulheres.

Estudos sobre religião mostram associação entre números e deuses, em diversos povos. Na civilização maia, por exemplo, os números de 1 a 13 são sagrados. Na Babilônia, existiram um deus oito, um deus três, etc. Mesmo nas oferendas aos deuses, os números foram necessários para a contagem.

Em alguns grupos do Congo é extremamente desagradável para uma mulher contar seus filhos: um, dois, três, ..., pois os espíritos maus ouvirão e levarão alguns deles para a morte. A mesma superstição existe no leste da Africa. O gado nunca deve ser contado. Seu dono pode avaliar a boiada pela observação e verificar se algum boi está faltando. Contar o gado impede de aumentar a sua boiada.

Uma história na Bíblia sugere que Jeová e Satanás inspiraram o rei Davi para contar seu povo. A enumeração das pessoas foi imediatamente seguida por uma grande peste e as pessoas interpretaram essa calamidade como castigo ao "pecado do censo".

Entre os romanos, a mesma superstição parece ter existido. A taxação de impostos era impingida ao povo, sem ser efetuado diretamente o censo. Em algumas cerimônias realizadas todo ano, em homenagem aos deuses de Roma, os seus moradores eram convocados à festa e obrigados a contribuir com dinheiro. Cada homem levava uma "moeda" de mesmo valor, cada mulher uma "outra" de valor diferente daquela e, cada criança, "uma" também diferente. No final da cerimônia os responsáveis contavam as diferentes "moedas", pelas quais vinham a saber o número de homens, mulheres e crianças. A pessoa não foi contada, mas sim o imposto.

Outra forte tendência encontrada no desenvolvimento da contagem foi o uso do sistema binário. Este tem, no fundo, uma conotação cultural devido à profunda influência exercida pela concepção do "dois" entre os homens primitivos. É provável que diferentes povos, em diferentes lugares na Terra, tenham, ao mesmo tempo, porém independentemente, atingido o mesmo avanço na contagem. Esta suposição é fortalecida por pesquisas recentes em tribos indígenas, de diferentes continentes, as quais efetuam a contagem pelo método de combinação de um e dois, ou seja, pelo sistema binário.

Vejamos alguns dos exemplos de sistemas binários fornecidos por Seidenberg (1960).

	Gumulgal (Austrália)	Bakairi (América do Sul)	Bushmen Africa do Sul
1	urapon	tokale	xa
2	ukasar	ahage	t'oa
3	ukasar-urapon	ahage tokale	'quo
4	ukasar-ukasar	ahage-ahage	t'oa-t'oa
5	ukasar-ukasar-urapon	ahage-ahage-tokale	t'oa-t'oa-t'a
6	ukasar-ukasar-ukasar	ahage-ahage-ahage	t'oa-t'oa-t'oa

Os três povos de locais distantes apresentam procedimentos comuns. Usam uma palavra para representar o um, outra para o dois, e as demais quantidades são representadas por combinações de "um" e de "dois", com o número maior, 2, precedendo o número menor 1. A combinação de palavras é feita usando o método da adição, porém não é uma conseqüência da contagem pelos dedos, pois esse procedimento levaria a $4 = 3+1$ e $6 = 5+1$ e não a, $4 = 2+2$ e $6 = 2+2+2$. Outro fator comum entre os diversos povos é a combinação do sistema binário com outros métodos, por exemplo, $6 = 2x3$, $7 = 4+3$, $8 = 2x4$, $9 = 5+4$. Estes casos ocorreram entre algumas tribos de esquimós, no nordeste da Ásia e no sudeste do Pacífico. Nessas combinações, em geral, se o método usado é adição, o número maior vem antes do menor, se o método é multiplicação, o número menor vem antes.

Em tempos muito remotos, desenhos e objetos de egípcios e sumérios evidenciaram o estágio do sistema binário ou de sistemas mistos-binários. Estes, naturalmente, pelo nível de desenvolvimento ocorrido na sociedade, foram ampliados para o agrupamento decimal, como o dos hieroglifos egípcios; para combinações de agrupamento decimal com intermediário quinário, dos sistemas romano e ático grego; para a união de decimal e vigesimal encontrada em algumas palavras numéricas francesas. Entre os sumérios e os acadianos, vivendo na Mesopotâmia, a miscigenação de suas culturas originou a escrita cuneiforme, num misto de notação decimal e agrupamento sexagesimal. Na antiga Índia, os numerais Kharoshi apresentaram agrupamentos de quatro, dez e vinte.

Embora na antiguidade as bases sucessoras da binária foram tantas e tão diversas, em combinações com ela, ou com outras, como agrupamentos quaternário, quinário, decimal, sexagesimal, etc., prevaleceu tão fortemente a decimal em supremacia quase absoluta, que Aristóteles, ao considerar a questão da base, (de acordo com Seidenberg) escreveu:

"Porque todos os homens bárbaros e aqueles como os gregos contam até dez e não até qualquer outro número? ... Não é claramente resultado de escolha, o fato de todos os homens invariavelmente contarem em dezenas. Aquilo que é invariável, e universal, não é resultado de escolha, mas está na natureza das coisas. É porque dez é um número perfeito? Ou é porque os corpos que movem no céu são em número de nove? Ou é porque todos os homens têm dez dedos? Numa raça entre os thracianos, todos os homens contam em 'quatro', porque sua memória parece aquela das crianças, não pode estender além, e eles não usam números maiores de qualquer coisa."

Nas civilizações modernas, onde a tecnologia obteve avanços inimagináveis para a época de Aristóteles, a base de nosso sistema também foi motivo de polêmica. Dantzig (1970), ao comentar a base decimal, afirma que se esta tivesse sido escolhida por técnicos, teríamos um conflito entre aqueles que favoreceriam a prática e aqueles que privilegiariam a simplificação. No século XVIII, o naturalista Buffon defendeu o uso da base doze, pois seu maior número de divisores facilitaria os cálculos nas questões envolvendo os múltiplos e os sub-múltiplos da unidade de medida. Lagrange apontou a necessidade de uma base prima, pois haveria um número menor de possibilidades na representação de frações.

Esses foram argumentos que desconsideraram a realidade física. A humanidade em sua evolução não esteve isenta de toda sorte de influências físicas e culturais. A base decimal de um sistema, que prevaleceu sobremaneira nos sistemas de numeração estudados no capítulo 2, é conseqüência direta dos "dez dedos da mão", característica biológica do ser humano. Portanto, esta influência, no desenvolvimento dos sistemas de numeração, será chamada **força física**, assim como qualquer influência que advenha da localização geográfica como solo, vegetação, clima.

Em muitas tribos indígenas da América do Sul e da África, as palavras numéricas referem-se às características humanas. Por exemplo:

Tribo	Palavra Numérica	Significado	Valor
Kusai	sie-mul	1 homem	10
	tol-mul	3 homens	30
	maul	4 homens	40
Pigmeu	mabo		10
	mabo-mabo	1 homem	20
Ku-mbutti	makko		10
	moku	1 homem	20

O termo "homem" é usado, ora para indicar a quantidade dos dedos das mãos, ora para denotar a quantidade dos dedos das mãos e dos pés.

Devemos enfatizar que **forças culturais** e **forças físicas** não só contribuíram no desenvolvimento da contagem, mas também na ampliação do número natural para a fração e para o número inteiro negativo. No caso das frações, as questões relacionadas à medida foram a motivação. Os números negativos surgiram como requisitos de problemas ligados às transações comerciais.

A necessidade de comunicação entre as pessoas levou às palavras. É sabido que as palavras orais precederam, em muitos anos as, palavras escritas. Estas últimas, assim como os numerais, surgiram da premência de registros escritos, ou seja, surgiram da necessidade de **simbolização**. Estudos antropológicos em tribos mostram que todo ritual, é acompanhado por palavras e, que todo ritual envolvendo coleções de objetos, é acompanhado por palavras numéricas.

Fizemos alguns comentários na seção 2.1 sobre a forte relação entre as palavras numéricas primitivas e as características do objeto a ser contado (veja Figura 2.1, pág. 35). Nesse caso, as palavras numéricas tomam o significado de substantivo e estão intimamente ligadas ao objeto e seus atributos. Num outro estágio, a palavra numérica toma o significado de adjetivo. Na seqüência de palavras numéricas, em português, algumas delas preservaram esse costume de épocas primitivas. Vejamos a ilustração a seguir:

Seqüência das palavras numéricas em português:

dígitos 1-10	11-20	21-30	... 91-100	dezenas
um (a)	onze	vinte e um (a)	noventa e um (a)	dez
dois (duas)	doze	vinte e dois (duas)	noventa e dois (duas)	vinte
três	treze	vinte e três	noventa e três	trinta
quatro	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮				
nove	dezenove	vinte e nove	noventa e nove	noventa
dez	vinte	trinta	cem	

101-110	111-120	121-130	... centena e dezenas
cento e um (a)	cento e onze	cento e vinte e um (a)	cento e dez
cento e dois (duas)	cento e doze	cento e vinte e dois (duas)	cento e vinte
cento e três	cento e treze	cento e vinte e três	cento e trinta
⋮	⋮	⋮	⋮
cento e nove	cento e dezenove	cento e vinte e nove	cento e noventa
cento e dez	cento e vinte	cento e trinta	

centenas	unidades de milhar	dezenas de milhar	centenas de milhar
cento	mil	dez mil	cem mil
duzentos(as)	dois (duas) mil	vinte mil	duzentos(as) mil
trezentos(as)	tres mil	trinta mil	trezentos(as) mil
⋮	⋮	⋮	⋮
novecentos(as)	nove mil	noventa mil	novecentos(as) mil

unidades de milhão ...

um milhão
dois milhões
três milhões
⋮

Na seqüência de palavras numéricas ilustrada, observamos:

- palavras declináveis em gênero: um (uma), dois (duas) e as demais combinações com elas. Duzentos(as), trezentos(as), ..., novecentos(as).
- palavras declináveis em número: milhão (milhões), bilhão (bilhões), trilhão (trilhões), ...
- palavras declináveis em número e gênero: combinação das duas classes anteriores.
  Exemplo:
  - um milhão e duzentos livros
  - dois milhões e duzentas casas
- palavras indeclináveis: os dígitos três, quatro, ..., nove; dez, cem e mil. São também indeclináveis onze, doze, ..., dezenove, vinte, trinta, quarenta, ..., noventa.

Pela análise, comprovamos a existência, em nossa seqüência, de palavras numéricas que dependem da característica do objeto a ser contado. Distinguimos, entre os dígitos, apenas o **um** (uma) e o **dois** (duas) nestas condições. Os sucessivos **três**, **quatro**, ..., **nove** , e as palavras representantes da ordem de grandeza dos agrupamentos de dez, **dez** (ordem 10^1), **cem** (ordem 10^2), **mil** (10^3), são indeclináveis.

No italiano, francês e espanhol são declináveis o um e suas combinações. No latim o **um** (unus, una, um), o **dois** (duo, duae, dua), o **três** (tres, tria) e suas combinações.

É forte a suposição de que as indeclináveis foram acrescentadas à seqüência, num estágio posterior, quando as palavras numéricas se desligaram das características do objeto a ser enumerado. Dados da história medieval nos dão conta que, durante a Idade Média, foram usadas em Roma as palavras latinas para dezenas, centenas, milhares e as suas compostas. A palavra milhão apareceu primeiro na Itália, provavelmente no século XIV, usada por comerciantes italianos. Depois disso, na França, Nicholas Chuquet, no século XV, introduziu várias palavras novas na seqüência numérica, estendendo-a para bilhão, trilhão, quatrilhão, ...

Naturalmente, as demais palavras em cada ordem foram inseridas na sequência. Assim, na ordem 10^1, dezena, as palavras **vinte**, **trinta**, ..., **noventa**, são indeclináveis. O mesmo não ocorre com as palavras inseridas na ordem 10^2, centenas. **Duzentos**(as), **trezentos**(as), ..., **novecentos**(as), são palavras adjetivadas. Não ficamos surpresos com esta característica da palavra **duzentos**(as), combinação de **dois** (duas), declinável, com **cem**, nem com **trezentos**(as), combinação de **três**, declinável no latim (três, tria), com **cem**. Ambas são declináveis na nossa língua mãe, o latim. Entretanto, **quatrocentos**(as), **quinhentos**(as), ..., **novecentos**(as) são indeclináveis no latim !.

Diferenças continuam acontecendo na seqüência de palavras numéricas de línguas descendentes do latim. Observemos a seqüência de dez a vinte.

	Latim	Italiano	Francês	Espanhol	Português
10	decem	dieci	dix	dies	dez
11	un-decim	un-dici	on-ze	on-ce	onze
12	duo-decim	do-dici	dou-ze	do-ce	doze
13	tre-decim	tre-dici	trei-ze	tre-ce	treze
14	quatros-decim	quattos-dici	quator-ze	cator-ze	quatorze
15	quin-decim	quin-dici	quin-ze	quin-ce	quinze
16	se-decim	se-deci	sei-ze	diez y seis	dezesseis
17	septen-decim	diciasette	dix-sept	diez y siete	dezessete
18	octo-decim	diciotto	dix-huit	diez y ocho	dezoito
19	under viginti	dicianove	dix-neuf	diez y nueve	dezenove
20	viginti	venti	vingt	veinti	vinte

De 10 a 15, as palavras são indeclináveis e há combinações respeitando a ordem: digito + dez. A partir daí começam as diferenças. No latim, essa mesma combinação continua até 8 + 10, depois segue 1 - 20, introduzindo o princípio subtrativo. No italiano e francês temos 5 + 10, 6 + 10 seguidos por 10 + 7, 10 + 8, 10 + 9. Houve mudança de ordem na combinação, a partir de 6 + 10. No espanhol e português, a mudança de ordem inicia-se a partir de 5 + 10, quando se torna 10 + 6, 10 + 7, etc. A ordem da combinação aditiva, para as palavras subsequentes, segue a regra: número maior + número menor. Há, também, utilização do princípio multiplicativo, quando ocorre, por exemplo, seiscentos, novecentos, dois mil, três mil e muitos outros.

Cada povo no mundo teve a sua sequência de palavras numéricas. Elas diferem entre si, em dependência direta com a cultura de seu povo. Fornecem indícios dessa cultura, das dominações que esse povo sofreu, das influências de costumes oriundas de relações culturais, econômicas e políticas, mantidas com outros povos. Surgem de comunicações diárias entre os indivíduos do grupo, emergem do uso popular, não são resultado de estudos realizados em gabinetes de sacerdotes, filósofos, cientistas. Por isso, são bastante susceptíveis de mudanças embora, em princípio, possam originar de uma mesma linguagem.

Na formação de nossa seqüência de palavras temos os agrupamentos decimais, os princípios aditivo e multiplicativo. Ela revela um estágio anterior à abstração absoluta do sistema de numerais hindu-arábicos, pois este necessita de apenas dez algarismos para representar todos os números e a seqüência de palavras precisa de muito mais. E usa nove palavras para os dígitos, uma para o primeiro agrupamento decimal, e uma diferente para cada novo agrupamento de dez.

Nessa linha de raciocínio, é surpreendente que os romanos, durante a Idade Média, tenham tido uma seqüência escrita e falada com esses modernos princípios, e um incômodo e rude sistema de numerais. É um testemunho de que palavras numéricas e numerais não seguiram os mesmos caminhos.

Em épocas antigas, como vimos na seção 2.3, os numerais dos chineses possuíam princípios parecidos aos do nosso sistema de palavras numéricas. Eles tinham símbolos para o dígitos de 1 a 9 e símbolos diferentes para cada ordem do agrupamento, 10^1, 10^2, 10^3 (por exemplo D, C, M). Seus numerais eram formados por combinações de dígitos e de símbolos referentes à ordem do agrupamento (Veja pág.84). Havia coerência e sintonia entre as suas palavras numéricas e seus numerais, embora devamos lembrar que as palavras chinesas não são formadas por letras, mas por caracteres ideográficos.

Não estava ocorrendo a mesma sintonia em diversas outras sociedades da mesma época. O sistema alfabético grego, por exemplo, utilizava as letras como numerais, obedecia ao princípio do agrupamento decimal, mas não utilizava as vantagens do princípio posicional e não se assemelhava à seqüência de palavras numéricas gregas. Alguns sistemas de numerais, quando muito, utilizavam a primeira letra da palavra numérica para simbolizar o numeral correspondente.

Até o momento, apreciamos a importância das **forças culturais**, das **físicas** e da **simbolização** no desenvolvimento do conhecimento aritmético. Em seguida, pretendemos identificar, no estudo efetuado nas seções anteriores, outras **forças** que colaboraram com o desenvolvimento.

Obtida a **simbolização** na contagem, seja pela seqüência de palavras escritas, seja através dos numerais, a sociedade, tornando-se mais completa, pressionava por maior simplicidade e maior eficiência nessa questão. Foi visto no capítulo anterior que os numerais hieroglíficos egípcios, de princípio aditivo e agrupamnto decimal, deram margem aos numerais da escrita hierática e demótica na busca à **simplificação** e que vieram a influenciar o sistema alfabético grego, cuja idéia central era a cifração. O sistema ático grego, anterior a este último, utilizava os princípios aditivo e multiplicativo, com agrupamento decimal e intermediário quinário que influenciou o sistema romano de princípios aditivo, subtrativo e multiplicativo.

Na época da escrita hieroglífica, hierática e demótica, os babilônios usavam a escrita cuneiforme, de agrupamento sexagesimal e representação posicional. Utilizavam os princípios aditivo, multiplicativo, e algumas vezes, o substrativo (19= 20-1). Por esse tempo, portanto, duas foram as idéias decisivas na **simplificação** dos sistemas de numeração: a cifração e o princípio posicional, sem as quais não obteríamos a perfeição de nosso sistema atual.

Contudo, enfatizamos: no caso dos babilônios, a **simplificação** obtida pela utilização do princípio posicional foi conseqüência da necessidade de evitar muitos símbolos diferentes na representação dos números. Como foi visto, com o numeral para o um, com outro para o dez, bem mais tarde, com o símbolo para o zero e com a aplicação do valor posicional, eles representavam seus números. Não deixaram de usar o princípio repetitivo e aditivo. Portanto, as graves deficiências permaneceram: as dificuldades para a leitura e o desconforto para a escrita.

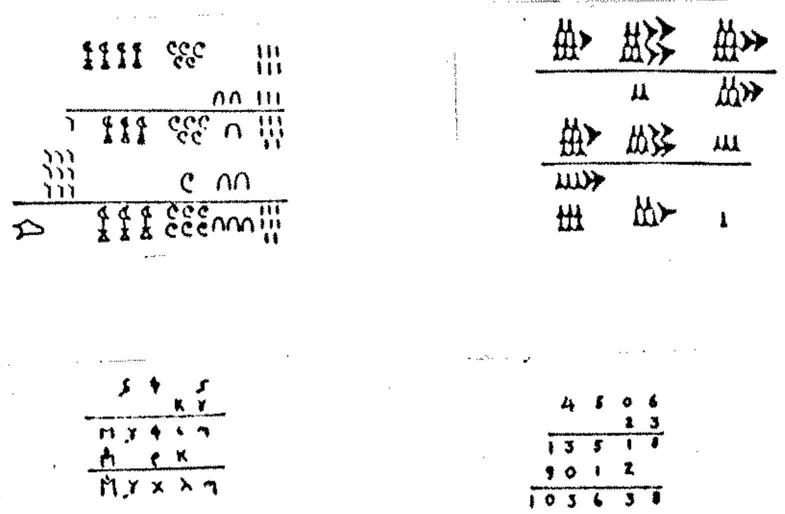
Essas últimas parecem ter sido a motivação principal da escrita hierática e demótica. Os egípcios idealizaram marcas e cifras para cada um dos nove primeiros números naturais, cada um dos 9 múltiplos da dezena, cada um dos 9 múltiplos das centenas, etc. Todavia, como os babilônios, não aproveitaram em toda sua plenitude o avanço obtido, no caso a cifração. Pela figura 2.9, da pág.73 , observamos que os princípios aditivo e multiplicativo ainda foram adotados para representar 2, 3, 4, 6 e outros, na escrita hierática. Esse processo foi um pouco mais aperfeiçoado na escrita demótica, onde permaneceram deficiências para as centenas e milhares.

Os gregos, na numeração alfabética, conseguiram eliminar plenamente essa deficiência do caráter repetitivo e aditivo. Utilizaram as letras do seu próprio alfabeto, como podemos ver na Fig. 2.10 da pág.76 . Essa numeração foi uma extensão ou um aperfeiçoamento das duas últimas escritas egípcias e aconteceram pela época de Arquimedes e Ptolomeu. Esse sistema parece não ter sido corretamente avaliado.

De acordo com Boyer (1944), Gow e Ball acharam os numerais alfabéticos "um erro fatal"; Cantor afirmou ser "em vez de um avanço, um definitivo retrocesso"; Gauss considerou como "a maior calamidade na história da Ciência, o fato de Arquimedes, o maior matemático da Antiguidade, ter fracassado em inventar nossa notação"; Nesselmann não viu nenhuma diferença essencial entre o sistema romano e o alfabético e caracterizou o último como "inconveniente e de nenhuma importância"; Cajori considerou "um paradoxo, a mudança do sistema ático para o iônico, decididamente para o pior" e Sarton (1935) caracterizou-o como inferior ao dos egípcios".

Nós, ao contrário, defendemos fortemente o avanço decisivo representado pela cifração no sistema alfabético pois, a nosso ver, o critério de uma boa notação inclui: 1) concisão e facilidade de escrever; 2) possibilidade de leitura fácil, rápida e sem ambigüidade; 3) favorecimento para o cálculo e 4) que o domínio do sistema não seja tão difícil. A notação alfabética satisfaz as quatro exigências.

Boyer apresenta o exemplo de uma multiplicação nos quatro sistemas: hieroglífico egípcio, cuneiforme posicional babilônico, grego alfabético cifrado e sistema hindu-arábico, cifrado e posicional, que ilustramos e analisamos, a seguir.



Pudemos verificar, através da ilustração, que o sistema iônico satisfaz inteiramente os itens 1) e 2) e não desmerece os itens 3) e 4), apontados anteriormente. O sistema babilônico, embora posicional, mas não cifrado, é incômodo para os cálculos, assim como os numerais hieroglíficos egípcios. Esses dois últimos apresentam deficiências sérias em relação aos itens 1) e 2).

Logo, é clara a superioridade dos sistemas cifrados grego e hindu-arábico sobre os demais e não podemos nos basear somente na disposição dos algarismos em colunas para justificarmos a facilidade obtida no cálculo com os numerais gregos. A disposição em colunas para os cálculos foi usada por egípcios e babilônios também, sem que isto compensasse a deficiência da notação deles. Sendo assim, a cifração, aliada à disposição em colunas, influiu na facilidade do cálculo.

A objeção, colocada por alguns ao excesivo esforço de memorização exigido pelos numerais iônicos, também pode ser contestada. As letras do alfabeto costumam ser memorizadas em seqüência por todos os povos para o propósito de ler e escrever. Isso evita novo esforço memorizador ao relacionar os números 1, 2, ..., 9 às nove primeiras letras, as dezenas 10, 20, ..., 90 às nove letras sucessoras e as centenas 100, 200, ..., 900 às nove letras restantes do alfabeto.

As objeções colocadas por Karpinski (1914), Cajori (1930) e Menninger (1969), referentes às tábuas de multiplicação iônicas, devido não existirem nelas analogias nas multiplicações de $2 \times 3 = 6$, $20 \times 30 = 60$ e $200 \times 300 = 600$, como acontece no nosso atual sistema são, de fato, pertinentes. Essas multiplicações em numerais iônicos são $\beta\gamma = S$; $K.\lambda = \xi$ e $\sigma.\tau = \lambda$. No entanto, mesmo assim, consideramos o sistema cifrado grego superior a qualquer sistema posicional não cifrado.

Como comprovamos, a **simplificação** foi perseguida pelas diversas sociedades, da Antiguidade à Idade Média e jogou um papel importante no desenvolvimento da representação de números. Ela foi responsável pela combinação dos dois avanços, cifração e valor posicional, no sistema de numeração hindu-arábico, ou seja, a **simplificação** foi responsável pela **fusão**. Por outro lado, ela foi também responsável, na sociedade árabe, na européia, na grega, e em tantas outras, pela **seleção** de um sistema, entre os conhecidos e que melhor conviesse.

Outra influência cultural que sentimos muitas vezes, ao longo desta pesquisa, em diferentes momentos, foi o de **resistência** às inovações. Sejam inovações surgidas no próprio grupo cultural ou sejam aquelas trazidas de um grupo cultural para outro. **Resistência** houve, por exemplo, quando do surgimento dos segmentos incomensuráveis entre os gregos e quando da conseqüente ampliação do conceito de número racional para irracional. Nos trabalhos de Heron e de Diofanto esses novos números não são considerados nas soluções de equações. A sociedade chinesa, embora conhecesse os números negativos, não os aceitava como raízes de equações. O mesmo na sociedade árabe.

Nos dias de hoje, encontramos **resistência** ao uso do Sistema Métrico Decimal pelos países de origem inglesa. Mesmo ele tendo sido oficializado, devido às vantagens obtidas pela homogeneização de princípios com o Sistema de Numeração Decimal, o Sistema Métrico Decimal não tem sido amplamente usado por esses países.

Resistência foi demonstrada pelos europeus quando da chegada, à Europa, dos métodos hindus de registro e de cálculo com quantidades. Crowe, (1975) ao descrever as **forças**, reforça: "Muitos conceitos matemáticos novos, mesmo embora logicamente aceitáveis, encontram forte resistência depois do seu aparecimento e adquirem aceitação somente depois de um longo período de tempo". Argumenta que somente 2.200 anos depois do aparecimento dos números representando razões incomensuráveis, os mesmos foram completamente aceitos. Também os números representados por raízes quadradas negativas (ou complexos), surgidos entre 1543 e 1830, foram motivo de bastante polêmica. Segundo Crowe, esses números foram chamados de "falaciosos" por Cardano; "sem sentido" por Napier; "inexplicáveis" por Girard; "imaginários" por Descartes; "incompreensíveis" por Huggens.

Existe, naturalmente, o lado positivo da **resistência**, quando entra em questão a preservação da linguagem, dos costumes, das tradições de um grupo cultural, mas não quando o avanço tecnológico é comprovado, e a não utilização do mesmo possa causar **atraso cultural**. Este é confundido com uma espécie de conservadorismo.

Em todo o trajeto histórico-cultural percorrido no texto, a **difusão** de conhecimento entre gerações de um mesmo grupo ou entre diferentes grupos teve um papel importante no desenvolvimento do número, sua representação e ampliação. Na Antiguidade, a **difusão** se deu através de relações culturais ou conquistas militares e a história nos mostrou que nem sempre o país oprimido absorveu a cultura do dominador. Dependeu da superioridade cultural de vencedores e vencidos.

Os árabes, quando conquistaram o Oriente, assimilaram a Matemática da antiga Grécia, o trabalho dos matemáticos hindus e contribuíram para divulgá-los na Europa Ocidental.

Os acadianos usavam inicialmente base decimal. Ao conquistarem os sumérios, surgiu uma escrita de base sexagesimal com representação decimal, numa miscigenação de culturas.

Os mercadores gregos, como Tales, e viajantes, como Pitágoras, trouxeram, de terras egípcias, as frações unitárias, e de terras babilônicas, as frações sexagesimais de princípio posicional. Os astrônomos gregos preservaram a base sexagesimal, a que chegou até nós nas medidas de tempo e de ângulo.

Assim, as frações se manifestaram em duas formas: frações racionais, comparação entre dois inteiros (egípcias e gregas) e frações decimais, estas resultantes da extensão do princípio posicional e agrupamento decimal a submúltiplos da unidade. As últimas, similares às frações sexagesimais babilônicas.

De fato, a investigação realizada nos capítulos 2 e 3 possibilitou-nos ilustrar diversas influências: **culturais, físicas, simbolização, simplificação, fusão, seleção, resistência** e **difusão** e conduziu-nos, ainda, a observar outras: a **generalização**, a **abstração**, a **força interna**, que discutimos a seguir. Os babilônios, levados pela vantagem da **generalização**, construíram muitas tábuas para recíprocos, de forma que as divisões por um número **n** foram possíveis a partir da multiplicação por $\frac{1}{n}$. A mesma motivação tiveram os egípcios, ao usarem métodos de duplicação e de mediação nos cálculos envolvendo multiplicação e divisão. Hindus, árabes e europeus desenvolveram variados métodos e regras para solução de equações, raízes quadradas, etc.

O desenvolvimento matemático grego, sem dúvida, foi na direção de encontrar enunciados gerais para os resultados conhecidos, a fim de obter um instrumento forte de estudo de novos problemas. Os gregos colaboraram no estabelecimento de normas para sistematizar e validar esses estudos.

Os números usados na contagem foram ampliados para os números próprios para a medida, no caso, as frações racionais, desde que a medida de um comprimento seja a contagem do número de uma certa unidade convencional naquele comprimento. Os princípios aplicados na representação dos inteiros no sistema de numeração decimal foram estendidos para as frações decimais, alcançando **generalização**. Com isso, os múltiplos e submúltiplos da unidade ficam, agora, representados pelos mesmos princípios.

O estabelecimento de $\sqrt{-1}$ como número teve a finalidade de estender o estudo de equações lineares e quadráticas às cúbicas.

A **abstração** desde os mais primitivos estágios da contagem teve papel importante na concepção do número. A palavra numérica, num primeiro momento associada à qualidade do objeto a ser contado, dá lugar à palavra numérica desvinculada do objeto físico. Os numerais pictográficos, de natureza análoga dos objetos representados, evoluíram pouco a pouco para os algarismos, de natureza abstrata. Estes algarismos combinados representam um número. A representação transmite uma idéia, aquela da quantidade, no caso, o número. O conceito se amplia, se estende. Relações e operações são estabelecidas, problemas são resolvidos, envolvendo tal conceito, emergem questões, reflexões, análises sobre diversos pontos de vista, surgem novas abordagens para o estudo de número, propõe-se hipóteses e teorias.

Dos objetos concretos manipuláveis, visíveis, palpáveis, ou seja, percebidos pelo sentido, fomos conduzidos à identificação de propriedades associadas à quantidade. Esse conjunto de objetos passou, a partir daí, a ser identificado por essas suas propriedades. Foram, posteriormente,estabelecidas relações entre propriedades, ou seja propriedades das propriedades, e estas aparecem uma como conseqüência lógica de outras. São cadeias de propriedades e, posteriormente, as propriedades das cadeias. Esta seqüência foi obtida intermediada por **abstrações** e, estas são ilimitadas.

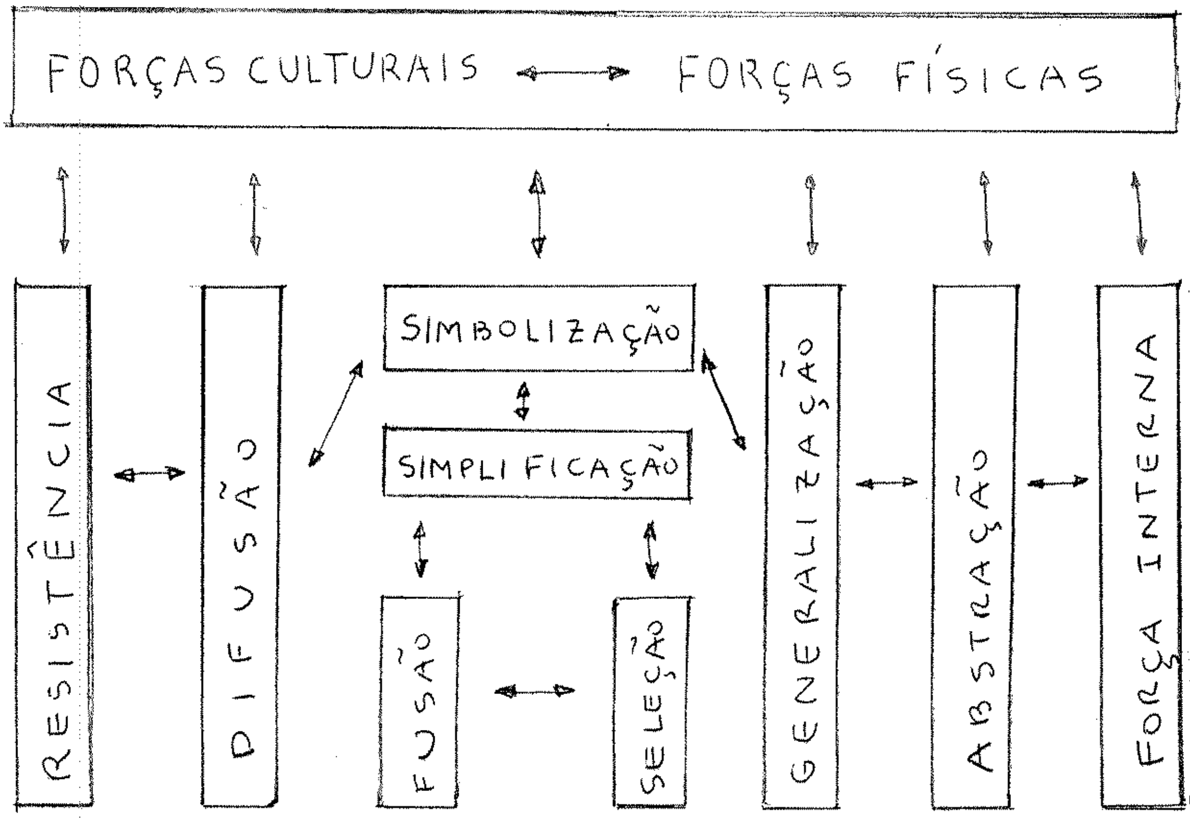
Os homens de diferentes sociedades e em diferentes períodos de tempos não estiveram apenas preocupados em resolver problemas de sobrevivência diária, embora essa tenha sido uma característica marcante da humanidade, mas foram também, levados por curiosidades e desafios, extrapolaram os motivos práticos e concentraram-se em problemas teóricos de difícil solução. Nesse entusiasmo por solucioná-los surgiram novos conceitos, descobriram-se novos métodos, possivelmente incorporados à Aritmética.

Essa motivação gerou desenvolvimento matemático e teve papel importante no estudo dos números irracionais e da continuidade da reta, chegando aos números reais. Essa força desenvolvimentista de estímulo "interior" ao ser humano será chamada nesse texto de **força interna**.

Tal força esteve muitas vezes associada às "crises". No caso anteriormente citado, o estudo dos números irracionais esteve ligado a crise gerada pela descoberta das grandezas incomensuráveis e o estudo das grandezas contínuas esteve associado à crise gerada pelos paradoxos de Zenon e pelas dúvidas surgidas a partir das quantidades muito pequenas e muito grandes.

Consideramos a **força interna** também responsável pelo desenvolvimento incorporado à Matemática gerado pelo prazer, pela beleza das formas, pela harmonia dos sons, e pelas atividades de recreação.

Embora tenhamos identificado várias **forças** que contribuíram para o desenvolvimento da Aritmética, é certo que elas não atuaram independente ou isoladamente, como é certo que elas provocaram as mudanças e os avanços significativos na construção do conceito de número, suas representações e operações. As inter-relações entre elas podem, no caso do número e suas relações, serem assim esquematizadas:



Capítulo 5

Reflexões sobre o ensino de Aritmética na formação do professor.

Ao concentrarmos nossa pesquisa no eixo histórico-cultural e na área de Aritmética, particularmente no desenvolvimento do número, na ampliação dos campos numéricos e nos sistemas de numeração, as preocupações relativas à formação de recursos humanos levaram-nos a analisar a opinião de vários autores, cujas obras têm forte apelo didático, sobre os motivos e as razões que os fizeram sugerir, como nós, o estudo da construção histórica do conhecimento aritmético ou do conhecimento matemático na preparação do professor.

Apresentamos, a seguir, algumas dessas opiniões para, posteriormente, colocarmos a nossa posição sobre o ensino de Aritmética na formação do professor.

Kline (1966), analisando os princípios fundamentais para um currículo de Matemática no 2o. grau, considera que, nesse nível, ao desenvolver a Matemática construtivamente, é importante o professor conhecer a ordem e as dificuldades históricas dos fatos matemáticos, pois as dificuldades encontradas no desenvolvimento da Matemática são as mesmas encontradas pelo estudante no seu estudo. Como exemplo, cita o fato de os números negativos terem sido descobertos mais de 1000 anos após a civilização egípcia ter apresentado uma notação para os números naturais e só vindo a ser aceitos 1000 anos depois, o que faz esperar que os estudantes terão problemas nesse assunto.

Jones (1969) defende um ensino baseado em significação e compreensão e, para tanto, entende ser indispensável a significação histórica na formação matemática do professor. A significação histórica permitirá ensinar com compreensão.

Ele faz suas as palavras do professor de Matemática Jacques Barzum:

"Eu tenho mais que uma impressão, o que equivale a uma certeza - a Álgebra se torna repulsiva devido à má vontade ou inabilidade do professor de explicar porque ... Não há significação histórica por trás do ensino, assim a impressão que se tem é que todo o sistema está pronto e acabado ao longo do tempo, para ser usado apenas por aqueles que possuam habilidades inatas."

Wilder (1972) valoriza o estudo da história da Matemática para se ter uma visão dessa disciplina como um organismo vivo, crescendo, que está continuamente evoluindo. O mundo no qual vivemos é formado de instrumentos e de tecnologia, de rituais e de credos, de arquitetura e de arte, de literatura e de ciência, incluindo a Matemática, ou seja, este é um mundo de cultura, que é mais que um mundo físico, pois é um mundo onde o ser humano usa a habilidade de simbolização escrita, não necessária a outras formas de vida. A evolução da habilidade de simbolização na espécie humana faz possível a complexidade das culturas que temos hoje.

Na sua opinião, a história cultural do homem, na qual está incluída a história da Matemática, pode ser mais significativa, se estudada como um processo evolucionário. Sugere que seja feita uma análise da evolução histórica dos conceitos matemáticos.

Em texto de 1973, Wilder reforça, mais uma vez, a necessidade de se conhecer a origem dos conceitos na nossa cultura, para que os mesmos sejam realmente compreendidos. Para isso, é necessário ter deles um significado intuitivo e é importante saber como, porque e quais aspectos de nossa cultura levaram aos conceitos. Sem tal entendimento, haverá frustração ou aceitação do mesmo como um dogma, sem significação.

Para Grattan-Guiness (1978), a tradição na Educação Matemática tem se concentrado no conhecimento matemático advindo de definições, teoremas, provas... Tal conhecimento é necessário mas não suficiente. Para suficiência é preciso a compreensão, não meramente o conhecimento por si só, mas também as motivações históricas, os caminhos nos quais os conceitos foram criados. Nesse aspecto, desaprova a apresentação dos livros-textos. Ela é ortodoxa, inadequada pois, na exposição dos conteúdos, os autores iniciam com alguns componentes básicos e, através de deduções, chegam a uma seqüência de resultados que, na maioria das vezes, não é a ordem histórica dos acontecimentos mas a inversa desta.

Victor Byers (1982) concorda com as razões apresentadas por Jones e Grattan-Guiness e enfatiza a importância do conhecimento histórico dos assuntos para as decisões de ordem pedagógica a serem tomadas pelo professor, no desenvolvimento das aulas de Matemática.

Struik (1985) considera que o conhecimento histórico satisfaz a curiosidade sobre o passado, de como os conceitos em Matemática se originaram e se desenvolveram, e contribui para entender nossa herança cultural, não somente através das aplicações que a Matemática teve e ainda tem na astronomia e em outras ciências, mas também devido às relações que ela teve e ainda tem em campos variados como a arte, a religião, a filosofia. O conhecimento histórico contribui para a verificação das relações existentes entre a sociedade e a Matemática no passado.

Para Prado (1990), a história da Matemática permite compatibilizar os aspectos intuitivos e a formalização presentes nas diversas etapas, porque passa o conhecimento matemático, das primeiras idéias aos estágios mais avançados e permite, também, entendê-lo como resultado da vida e da cultura dos povos, assim como compreender o seu papel na história das civilizações.

Brolezzi (1991) analisa três componentes principais do valor da História da Matemática, quando utilizada como recurso pedagógico:

1. Fonte de conhecimento da lógica da Matemática em construção. Para esse fim, os livros cuja abordagem da História da Matemática é feita por assunto, são os mais apropriados, pois deixam clara a distinção entre a forma lógica inicial, presente nas origens da Matemática, e sua posterior e paulatina formalização. A Matemática em construção admite uma lógica mais adequada ao ensino.

2. Instrumento para a superação da dicotomia "técnica e significado" no ensino elementar. O acompanhamento dos fatos históricos permite conhecer inúmeras alterações de símbolos, de conceitos e de idéias e essas alterações contribuem para a compreensão. Sem compreensão não é possível utilizar a técnica em outros conceitos.

3. Proporciona uma visão de totalidade ou de conjunto. A história favorece o distanciamento do momento atual, o que facilita a apreensão do todo e a percepção do contínuo processo de formalização da Matemática. Os livros da História da Matemática, cujo sumário é organizado pela ordem cronológica, favorecem essa visão.

A nosso ver, Sebastiani (1990) traduz bem as opiniões dos autores, ao concluir pela existência de um consenso sobre a necessidade do conhecimento histórico por professores e futuros professores de Matemática e pela existência de divergência, nos pontos de vista dos educadores, em como promover esse estudo num curso de formação. Muitos defendem a inclusão da disciplina História da Matemática no currículo do futuro professor, outros sugerem o desenvolvimento de cada disciplina do currículo com perspectivas históricas ou, então, propõem ambas as alternativas.

Nós, ao desenvolvermos aqui nossa posição a esse respeito, abordamos inicialmente nossas razões para o estudo da evolução histórica do conhecimento aritmético pelo futuro professor e, posteriormente, apresentamos algumas sugestões de como fazê-lo.

Ao longo dos anos, muitas concepções falsas existiram a respeito da Aritmética ou a respeito da Matemática. Algumas pessoas consideram a Aritmética como uma série de técnicas de uso somente de cientistas, engenheiros e economistas; outros a descrevem como uma área de conhecimento pouco apropriada ao aprimoramento do espírito, pois máquinas fazem os cálculos aritméticos.

Já houve quem atribuísse à Matemática poderes maquiavélicos. Segundo Morris Kline (1954), Santo Agostostinho dizia: " O bom cristão deve ficar longe da Matemática e de todos aqueles que fazem profecias vazias. Existe o perigo de que os matemáticos tenham feito um acordo com o diabo para obscurecer o espírito e confinar o homem às profundezas do inferno."

Para Phillip Davis e Reuben Hersh (1980), a Matemática costuma ser comparada a uma árvore onde cada ramo antecedente é necessário para a compreensão do ramo subseqüente. Essa dependência seqüencial colabora para confundi-la com uma área de conhecimento estritamente cumulativa. No entanto, há teorias que desfazem aquelas supostamente aceitas, há descobertas individuais postergadas por outras, existem trabalhos antigos reformulados sob perpectivas modernas, existem métodos simplificadores que substituem os anteriores.

Há os que confundem a universalidade da Matemática com a neutralidade. Há o mito de verdades sempre eternas e muitos que creditam o seu estágio de desenvolvimento somente à individualidade de gênios.

Com o intuito de que sejam colocadas de lado tais concepções, é importante, num curso de formação de professores, desenvolver o conceito de número e outros correlatos, percorrendo um caminho histórico, não em linha reta, nem numa infalível seqüência lógica, mas um caminho que contribua para a descoberta dos pressupostos fundamentais dos quais surgiram os problemas e as idéias dos homens. Pela história cultural desse conceito, pode-se perceber as preocupações, os problemas, as hipóteses e as idéias através dos anos.

Durante o percurso histórico-cultural, é possível verificar a utilidade da Aritmética, comprovar a importância da Matemática como matéria prima na simplificação do pensamento, observar a precisão de sua linguagem, sentir a beleza e o prazer no seu convívio e distinguir as potencialidades envolvidas nessa relação: imaginação, intuição, criatividade. É possível conhecer as relações da Matemática com a sociedade e as forças-culturais responsáveis pelo seu desenvolvimento.

A citação de Poincaré (em Hershberger,1957), expressa bem o nosso ponto de vista:

"São geralmente conhecidos esses finos travamentos de agulhas fossilizadas, constitutivos do esqueleto de certas esponjas. Desaparecida por completo a matéria orgânica, apenas resta um quebradiço e gracioso tecido de agulhas. Na realidade não passa de partículas de ácido silicoso, mas o interessante é que a forma assumida por esse ácido silícico, não podemos compreender, sem conhecermos a esponja viva que justamente impregna essa forma. Assim se passa também com os velhos conceitos intuitivos de nossos antepassados que, apesar de abandonados por nós, continuam a imprimir a sua forma ao arcabouço lógico, que conhecemos no lugar deles".

No geral, o estudo do número e sua história cultural contribuem para a constatação de que a Aritmética tem sido motivo de construção e destruição de teorias filosóficas, tem servido de objeto de rivalidades pessoais e políticas e tem sido complemento nos rituais, nos credos, na religião, no lazer e no prazer. A Aritmética tem participado das civilizações em todos os tempos, tendo favorecido a organização do pensamento e fornecido respostas a algumas questões fundamentais sobre o mundo em que vivemos. Na verdade, uma de suas motivações tem sido solucionar questões surgidas diretamente das necessidades sociais.

Os antigos egípcios e babilônios tinham uma economia agrícola e lhes foi necessário implementar a astronomia que implicou no desenvolvimento da Aritmética e da Geometria práticas.

A ordem social grega criou os comerciantes ricos, prósperos exploradores do trabalho escravo que apreciavam especular sobre o mundo. Isso fez surgir o misticismo e também estimulou o seu oposto - o racionalismo e a perpectiva científica. Surgiu a Matemática do pensamento.

Como um método de pensamento, ela continuou evoluindo até nossos dias: as definições cuidadosamente formuladas e axiomas explicitamente estabelecidos. Das definições e axiomas, conclusões foram deduzidas pela aplicação do raciocínio lógico.

Nesse caminho, a Aritmética mostrou-se um campo fértil à criatividade. Ao se construírem as provas para as conjecturas, foram empregadas a intuição e a imaginação. O indispensável uso da intuição e da imaginação na criação de provas e conclusões proporcionou satisfação e prazer.

Intuição, imaginação e criatividade fizeram surgir relações entre números e notas musicais, entre números e versos, entre números e formas e estas criaram a harmonia e a beleza que são características dos trabalhos artísticos. Isso mostra que a Matemática contribui também com a arte.

J. Bronowski (1965), a nosso ver, captou com poesia e sutileza o sentimento humano despertado pela criação e pela recriação:

"As descobertas da ciência, as obras de arte são explosões, mais que isso, são explosões de uma similitude oculta. O descobridor e o artista apresentam dois aspectos da natureza e os fundem em um só. É esse o ato de criação, no qual um pensamento original nasce, e é o mesmo ato na ciência original e na arte original ... (Esta noção) por si só dá um siginificado ao ato de apreciação, pois o apreciador tem de ver a ação atento ao eco que foi iniciado quando da criação da obra. No momento da apreciação, vivemos de novo o momento em que o criador viu e reteve a similitude oculta. Reeditamos o ato criador e nós mesmos fazemos de novo a descoberta... O grande poema e o teorema profundo são novos para cada leitor e, no entanto, são as suas próprias experiências, porquanto ele próprio as recria. Eles são as marcas da unidade na variedade, e no instante em que a mente apreende isso para si, o coração falha uma batida."

Os povos orientais, hindus e chineses tinham uma sociedade comercial, usavam sistemas de escrever, contar, pesar e medir. Transações comerciais e econômicas, navegação, construção de calendários, fortificações e armas de guerra continuaram motivando o desenvolvimento da Aritmética prática.

De considerável importância foi a contribuição árabe para a preservação das obras gregas e hindus na Astronomia, Medicina e Matemática. A apendizagem antiga preservada pela cultura islâmica passou para a Europa Ocidental e, na época medieval, desenvolveram-se o comércio, as viagens marítimas e a engenharia civil.

Na Europa, a Matemática floresceu principalmente nas cidades que prosperaram sob influência do comércio, navegação, astronomia e pesquisa.

A Matemática prática teve um rápido progresso na América do Norte, durante os sec. XIX e XX, sendo utilizada no comércio, no seguro, nas ciências e na tecnologia. A par desse desenvolvimento, a Matemática adquiriu uma linguagem própria, que permite trabalhar e expressar as idéias de maneira compacta, clara e precisa.

Recorremos, novamente, a J.Bronowski (1965), que é extremamente sutil e ao mesmo tempo profundo, na sua percepção da alma e do espírito desse campo de investigação:

"Em primeiro lugar, a Matemática é uma língua em que se discutem aquelas partes do mundo real que podem ser descritas por números ou por relações semelhantes de ordem. Juntamente, porém, com o dever rotineiro de traduzir os fatos para esta língua, existe naturalmente para aqueles que são bons nesse campo, um prazer na própria atividade em si. Acham a linguagem mais rica do que seu conteúdo; aquilo que é taduzido significa menos para eles do que a lógica e o estilo de dizer e desses sons harmoniosos desenvolve-se a Matemática como literatura por direito próprio. A Matemática nesse sentido - a Matemática pura - é uma forma de poesia, que possui a mesma relação com a prosa da Matemática prática, como a poesia tem com a prosa em qualquer outra linguagem."

A nossa pesquisa permitiu constatar que a Matemática é uma área que desafia, estimula e inspira e que, apesar das contribuições valiosas de indíviduos como Pitágoras, Euclides, Dedekind e Cantor, o seu desenvolvimento não é somente resultado de cérebros privilegiados mas também da herança coletiva da humanidade.

Enfim, o estudo sobre a gênese e a evolução histórica do número e de outras noções aritméticas relacionadas contribui para desfazer possíveis concepções falsas a respeito da Matemática e para uma compreensão mais adequada do que ela é, o que concorre para uma melhor percepção do papel da Matemática no currículo do 1o. e 2o. graus.

Embora os argumentos apresentados até aqui sejam bastante gerais, a pesquisa sobre número, sua representação e relações dão-nos conta que esse conceito está no cerne do conhecimento matemático. Comprova-se que ele se constrói a partir da análise de relações quantitativas entre os objetos do mundo físico, sejam relações estabelecidas entre quantidades discretas (discreto numérico) ou entre quantidades contínuas (contínuo numérico) como comprimento, área, tempo, velocidade.

Na construção do conceito estão envolvidos o senso numérico, a relação de ordem e o princípio de correspondência, para o qual contribuem materiais auxiliares de todo tipo: pedras; incisões na madeira, em ossos, em bambu, na argila; o próprio corpo, os dedos e as articulações.

O princípio de correspondência permite associar grupos de objetos segundo uma característica comum: a quantidade dos objetos, ou seja, a quantidade é vista como uma qualidade a mais de grupos de objetos.

A noção abstrata de número desenvolve-se lentamente e, após construída uma seqüência numérica, recorre-se ao princípio de base, diminuindo o esforço de memória e de representação, pois evita indicar cada número com novo nome ou símbolo, sem relação com os demais.

Na busca, surgem os sistemas aditivos, os mistos e os posicionais. No nosso estudo, aditivos são os sistemas hieroglífico, hierático, demótico e os sistemas alfabéticos. Como exemplo de sistema misto, temos o antigo chinês. Esse utiliza o princípio multiplicativo, uma vez que, cada dígito é acompanhado do valor da potência da base.

O sistema posicional diferencia-se desse último por não necessitar da representação das potências da base. São esses os sistemas babilônicos, as barras chinesas e o sistema hindu.

Em síntese, acrescentada de todas as razões já anunciadas, a nossa pesquisa forneceu-nos esclarecimentos sobre as dúvidas colocadas no início do trabalho e fez-nos aproximar da essência do objeto de estudo: o número e sua história cultural, o que nos permite transformarmo-nos em críticos: os conceitos se aclaram, os problemas podem ser analisados em maior profundidade e extensão e as opções pelos caminhos melhor se delineiam. Desaparecerá, nesse momento, o perigo de termos um enorme acervo de material de museu e de propormos quimeras por falta de suficiente fundamentação histórica.

Cabe aqui, a lembrança da dissertação de Brolezzi (1991) onde se reportou a Bochenski para resgatar o significado original, literal, da palavra **metodologia**, de derivação grega: **percorrer um caminho.**

Para a opção por um caminho, o professor deverá analisar obstáculos e dificuldades inerentes ao assunto, sobre os quais nos permitimos divagar um pouco.

As deficiências a que nos referimos (no capítulo 1) na formação do professor e que eram também nossas, devem ter sido sanadas nesse campo - número e sua história cultural. Todavia, podemos dizer que esse estudo usado isoladamente, por si só, num curso de formação, pouco contribui para a preparação do professor. É necessário, inicialmente, complementá-lo com os aprofundamentos proporcionados pela área de Fundamentação da Matemática Elementar, na qual já desenvolvemos dois trabalhos (Táboas, 1985, 1986) e pelas áreas de Didática e de Psicologia.

Algumas leituras por nós realizadas, nas duas últimas áreas citadas, fizeram-nos conhecer inúmeras dificuldades enfrentadas pelas crianças quando em contato com os dígitos arranjados numa representação posicional, seja antes ou durante a transmissão pela escola, de forma organizada, desse conhecimento cultural.

Assim, a aquisição desse conhecimento cultural supõe um processo de construção intelectual que resulta da interação entre as idéias elaboradas previamente pela criança e o que lhe é ensinado.

A atenção do professor deve estar sobre as características e o grau de dificuldade do conteúdo a ser transmitido e as possibilidades intelectuais do estudante que o deve assimilar.

Sellares e Bassedas (em texto mimeografado) argumentam que a aquisição do sistema de numeração posicional envolve o **objeto cultural**, resultado do desenvolvimento histórico, e o **objeto do conhecimento**, que deve ser assimilado pelas estruturas intelectuais do indivíduo.

Pouco a pouco, os dígitos e as leis que os combinam são descobertos pela criança que, através de observações, experiências e desenvolvimento de atividades, vai construindo o conceito de número.

Piaget e Szeminska (1975a) consideram que a aquisição do conceito de número pela criança envolve o domínio de conservação das quantidades discretas[1] e do princípio de correspondência num processo gradativo. Composições aditivas e multiplicativas são importantes para completar as atividades que levam a criança à elaboração de sistemas de inclusão e de relações (seriações) e culminam com a sucessão dos números inteiros finitos, indissociavelmente cardinais e ordinais.

A noção de número está ligada, portanto, à reunião de classes e à relação de ordem, ou seja, envolve a classificação e a seriação. No processo, a tautologia própria da inclusão de classes $A + A = A$ é, aos poucos, substituída por $A + A = 2A$.

Kamii(1985), discípula de Piaget e sua colaboradora, expõe de maneira bastante acessível questões fundamentais do trabalho de Piaget e suas implicações pedagógicas:

"O número é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica .... Só podemos nos assegurar de que não deixamos de contar nenhum objeto de uma coleção ou de que não repetimos nenhum , se os colocarmos numa ordem ... Para quantificar os objetos de um grupo, a criança tem de colocá-los numa relação de inclusão hierárquica ...A criança inclui mentalmente **um** em **dois**, **dois** em **três**, **três** em **quatro**, ... É importante esclarecer sobre a construção do número e a quantidade dos objetos. A construção do número (uma estrutura mental) existe ou existirá na cabeça da criança, não sendo, portanto, observável. A quantificação dos objetos, por sua vez, é parcialmente observável" (o observável é o seu comportamento e o não observável é o pensamento na cabeça da criança). "Quantificar objetos deve ajudar a criança a construir o número."

[1]Domínio da conservação de quantidades discretas se refere à compreensão, de cada indivíduo, de que a quantidade dos objetos permanece invariável, enquanto outros aspectos, como forma, posição dos objetos, por exemplo, se modificam.

A pesquisadora considera que a noção de número emerge a partir de atividades de colocar todos os tipos de coisas em todos os tipos de relações, mas adverte: "As crianças não aprendem conceitos numéricos com desenhos. Tampouco aprendem conceitos numéricos meramente pela manipulação de objetos. Elas constróem esses conceitos pela abstração reflexiva[2] à medida que atuam (mentalmente) sobre os objetos. O número é alguma coisa que cada ser humano constrói através da criação e coordenação de relações".

Baseada nesses argumentos Kamii prescreve seis princípios que contribuem para a construção do número na criança:

1. A criação de todos os tipos de relações. Encorajar a criança a estar alerta e a colocar todos os tipos de objetos , eventos e ações em todas as espécies de relações.

2. A quantificação dos objetos.

    (a) Encorajar as crianças a pensarem sobre número e quantidade de objetos quando estes sejam significativos para elas.

    (b) Encorajar a criança a quantificar objetos logicamente e a comparar conjuntos (em vez de encorajá-la a contar).

    (c) Encorajar a criança a fazer conjuntos com objetos móveis.

3. Interação social com os colegas e os professores.

    (a) Encorajar a criança a trocar idéias com seus colegas.

    (b) Imaginar como é que a criança está pensando, e intervir de acordo com aquilo que parece estar sucedendo em sua cabeça.

A preocupação da pedagoga não é, na verdade, somente a construção do número pela criança, mas promover, no âmbito escolar, condições para que ela desenvolva a autonomia intelectual. As suas reflexões sobre as questões ligadas ao número, apóiam a nossa prática pedagógica e sua posição esclarecedora sobre as finalidades dos processos educacionais facilita a extensão das sugestões a todos os níveis de ensino.

Uma ampliação da contagem é a análise de relações quantitativas existentes entre grandezas contínuas. Uma grandeza é dita contínua quando é divisível em partes sempre divisíveis. Essas partes não são formadas por elementos individualizados ou

[2]A abstração reflexiva, nesse caso, envolve a construção de uma relação entre objetos. Essa construção é feita pela mente e não é uma concentração sobre alguma coisa que já existe no objeto.

separados (como os objetos de uma coleção). O comprimento de um barbante, a área de uma superfície, o volume de um sólido, são exemplos de grandezas contínuas.

Em tempos muito remotos, a necessidade de medir terras levou ao reconhecimento de que os números naturais eram insuficientes para exprimir as medidas pois, para exprimi-las, devemos comparar o objeto a ser medido com outro da mesma grandeza tomado como unidade. Não raro, a unidade não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. O mais freqüente é a unidade caber um número inteiro de vezes e sobrar uma parte inferior à unidade. Para exprimir a medida (de comprimento, de área, de tempo) foi preciso subdividir a unidade num certo número de partes iguais.

A superação da impossibilidade dos números naturais ante a medida foi conseguida pela criação da fração. Foi possível, assim, medir uma grandeza contínua, tomando a unidade e as frações dessa unidade.

É importante o futuro professor reconhecer as diferenças entre a contagem e a medida. A contagem expressa por um número natural envolve a quantificação de objetos discretos (coleção de objetos). A medida envolve grandezas contínuas e estas só podem ser quantificadas pela introdução de uma unidade arbitrária, com a qual vão ser comparadas. A unidade arbitrária é uma grandeza da mesma espécie e não é dada no objeto a ser medido. Na contagem, a unidade é dada por um objeto da própria coleção. Essas diferenciações não intervêm no tipo de estruturas envolvidas com os conceitos. Kamii (1985) afirma que a estrutura de ordem e a de inclusão hierárquica, são as mesmas para a contagem e a medida.

O conceito de fração exige a existência de uma unidade, isto é, pressupõe a existência de uma totalidade divisível. Esta unidade deve ser dividida em um número determinado de partes iguais, de modo que se esgote completamente o todo considerado.

Lima (em texto mimeografado), pós-graduando de Psicologia, investigou o desempenho de crianças quanto à evolução do conceito de fração, em experiências envolvendo sete condições propostas por Piaget:

1. A existência de uma totalidade divisível. A criança concebe ou não a decomposição do todo em partes.
2. A existência de um número determinado de partes. Deve estar claro, para a criança, o número de partes iguais que o todo precisa ser dividido, de modo que as mesmas sejam distribuídas para um número conhecido de pessoas.
3. Esgotamento do todo. Um pedaço cortado do todo é resultado de uma divisão

do todo em partes iguais e corresponde a uma fração do todo. Não deve haver resíduo nessa divisão efetuada pela criança.

4. Relação entre o número de partes e o número de cortes. Em quantidades discretas, o número de elementos da coleção é múltiplo do número de subcoleções iguais, resultante da partição. Nas quantidades contínuas, o número de cortes não é o mesmo número de frações obtidas. Para dividir um barbante em 4 partes iguais, a criança necessita fazer 3 cortes.

5. Igualização das partes. As partes devem ser iguais para que haja frações. Relação das partes com o todo e das partes entre si devem estar claras.

6. Conceptualização de cada fração como parte de um todo e esta susceptível de divisões. A fração é parte do todo, ao mesmo tempo, que ela pode ser tomada como um todo, que será submetido a nova divisão.

7. Atendimento ao princípio de invariância: a soma das frações contituídas pela divisão, é igual ao todo inicial.

Segundo as observações de Lima, a iniciação ao estudo da fração tem sido feita, em geral, com cuidados e preocupações mais voltados para a escolha de técnicas de ensino auxiliares à formação do conceito e para o uso de recursos materiais estimuladores, deixando-se, para segundo plano, os cuidados e preocupações com as condições cognitivas da criança para a aquisição do conceito.

No estudo realizado, as investigações sugerem que as habilidades das crianças para o estudo de frações envolvendo quantidades discretas, são anteriores às habilidades para o estudo de frações envolvendo área (quantidade contínua).

A seqüência do desempenho das crianças manteve-se constante, mesmo quando eram diferentes os níveis sócio-econômicos dos sujeitos submetidos às tarefas. As médias de idade, no entanto, variaram segundo os níveis sócio-econômicos.

Na tentativa de melhor discernir as barreiras a serem enfrentadas pelo professor no seu trabalho, Glaeser (1985), um estudioso da didática e da epistemologia, enumerou dificuldades e obstáculos à compreensão dos números relativos, evidenciados em livros antigos de matemáticos. Categorizou-as em:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas. A idéia de número negativo está implícita nos problemas resolvidos pelo autor, mas passa despercebida pelo mesmo.

2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas. O autor usa regras, sem justificá-las devidamente.

3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Há insitência nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e as positivas e não há considerações das características dinâmica e estática dos números.

4. Ambigüidade dos dois zeros. Confusão entre o zero absoluto e o zero origem. Difícil aceitação de algo abaixo de zero.

5. Estagnação no estágio das operações concretas. Dificuldade de afastar-se de um sendido "concreto" atribuído aos números.

6. Desejo de um modelo unificador. Intenção de dispor de um modelo único para ilustração das propriedades do sistema numérico, tanto no campo aditivo como no multiplicativo.

É interessante observar, no trabalho de Glaeser, que as dificuldades de caráter epistemológico, superadas em algumas obras, foram novamente apresentadas por outras, de época posterior, levando-o a supor que a insuficiente clareza do assunto exposto, não permitiu ao autor convencer definitivamemente seus leitores. Os progressos obtidos pelo mesmo foram provisoriamente perdidos.

A pesquisa constatou que, enquanto todos os obstáculos epistemológicos não foram vencidos, persistiam várias áreas de incompreensão nos livros, denunciadas por hesitações, explicações em círculos viciosos e outras, mesmo que os números relativos fossem manipulados com muitas engenhosidade pelo matemático.

"A eficácia no cálculo é suficiente para confortar o matemático mas é nos seus trabalhos de cunho pedagógico que se manifestam seus apuros... O especialista não consegue dar uma explicação satisfatória ... Enquanto todas as facetas do problema não forem simultaneamente dominadas, corre-se sempre o risco de uma recaída na incompreensão."

Glaeser destaca, também, que a opinião de Piaget em "Introduction à l'épistemologie génétique (1949)", sobre as dificuldades enfrentadas, no campo dos números negativos, se prendem à concepção do caráter fixo do número. Para Piaget, é necessário o entendimento de que um número simboliza uma ação, não um estado. Assim, o ilustre pesquisador se espanta com a obscura noção de quantidades positivas evidenciadas na obra do matemático D'Alembert (1777-1783) e comenta:

"Tais hesitações do grande D'Alembert são particularmente instrutivas quanto à natureza ativa e não estática do número negativo e do número inteiro em geral.

De fato, está claro que, se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção, ou ainda menos, e percepções nulas não são perceptíveis de gradação.

Espantoso é que essa contradição entre a interpretação sensualista do conhecimento e a realidade matemática não tenham levado um espírito tão voltado para o concreto e pouco dado às considerações mecânicas como D'Alembert a entender que a natureza essencial do número não é nem estática nem perceptiva, e sim, muito dinâmica e ligada à própria ação, interiorizada em operações".

Essas pesquisas comentadas são bastante esclarecedoras e abrem várias perspectivas de aprofundamento. Contribuem para uma visão multifacetada dos cursos de preparação do professor.

Nessa linha de argumentos, nos propomos algumas reflexões.

No capítulo 1, apontamos características imprescindíveis no perfil do professor dos anos 90. E as pesquisas realizadas por nós nos demais capítulos, direcionadas, para atender a formação desse profissional, nos moldes preconizados, indicaram a necessidade da inclusão, em seu curso, de áreas de estudo que o permitam adquirir:

- o conhecimento da evolução histórico-cultural do número, nas dimensões discreta (contagem) e contínua (medida);
- a compreensão e o desembaraço no uso do conteúdo matemático a ser ensinado;
- o entendimento do desenvolvimento cognitivo do aluno;
- o discernimento na seleção e uso dos métodos e técnicas adequados ao ensino;
- o conhecimento da realidade sócio-cultural e educacional da comunidade onde estuda e/ou trabalha.

As áreas de estudo, a nosso ver, que proporcionam tal aprendizagem ao futuro professor, são a Matemática, a Filosofia, a Sociologia e a Psicologia. Essas áreas, comprometidas com tal tarefa devem incorporar, em sua proposta de trabalho, atividades que possibilitem desenvolver no professorando:

- os ideais de uma sociedade democrática;
- a visão crítica da realidade sócio-cultural e educacional brasileira e das possibilidades e limitações de sua profissão;

- a interação com a comunidade escolar onde irá trabalhar;
- a competência para a transmissão e para o incentivo à aquisição do conhecimento matemático;
- a responsabilidade na assimilação do conhecimento pelo estudante;
- o senso crítico na seleção e uso de métodos, técnicas e meios auxiliares ao ato de ensinar.

Entendemos que a competência envolve o domínio do conteúdo matemático, também o domínio dos instrumentos psicopedagógicos para o ato de ensinar e, embora esteja arrolada entre vários itens, ela é condição "sine qua non" para que a relação ensino-aprendizagem exista com eficácia. Discordamos, entretanto, que a competência seja a única componente desejada.

Os cursos de formação de professores nas instituições públicas, têm se preocupado com a competência e isso é positivo, mas têm negligenciado os outros aspectos apontados.

As tentativas de melhoria da qualidade de ensino dessas instituições são equivocadas pois, na maioria das vezes, desconsideram o perfil do profissional que desejam formar e a realidade onde ele irá atuar. Restringem as preocupações com a qualidade, na seleção e organização das disciplinas, na maneira como o conteúdo delas é desenvolvido e avaliado. Não há procedimentos consistentes valorizando os dois componentes fundamentais comentados.

A nosso ver, outra deficiência grave é a colcha de retalhos em que se transformam as disciplinas e seus conteúdos. Não existe um núcleo básico, coeso, integrado, a partir do qual seguem os aprofundamentos necessários.

As premissas por nós defendidas, serão efetivamente incorporadas na preparação do professor se, de um núcleo básico, no caso, a Aritmética, vista sob os dois aspectos fundamentais, o do objeto cultural e o do objeto do conhecimento, surgirem as demais áreas de estudo.

Na Licenciatura, por exemplo, a Aritmética, estudada como objeto cultural, propiciará a inclusão, na grade curricular do licenciando, da Filosofia (noções gerais e Filosofia da Matemática) e da Sociologia (as sociedades: suas organizações e influências). A Aritmética, como objeto do conhecimento, será abordada na área de Psicologia (noções gerais, a gênese do número na criança, a epistemologia dos números negativos, a linguagem e pensamento matemático...)

Outros aspectos da aprendizagem serão complementados pela Didática. Filosofia da Educação e Sociologia (a realidade sócio-cultural e educacional brasileira) contribuirão para o desenvolvimento de temas ligados à escola e à comunidade.

A Aritmética cultural colocará o futuro professor às voltas com a gênese do número, sua representação e relações. Nesse campo, terá significado intrínseco à busca pelo domímio da contagem (discreto numérico) e pelo domínio da medida (contínuo numérico), dois grandes eixos do estudo da Matemática, complementados pelas suas extensões.

A elaboração de uma proposta detalhada para os cursos de preparação do professor, licenciatura ou bacharelado, deve ser resultado das opiniões de toda uma equipe. Mesmo assim, o nosso interesse no assunto nos permite opinar sobre alguns aspectos.

Na Licenciatura, para o domínio do discreto, sugerimos o estudo da Teoria dos números, da Análise Combinatória, da Probabilidade, da Estatística, do Cálculo Numérico e da Computação.

Para o domínio do contínuo, contribuem a Geometria Euclidiana (Geometria Métrica e de Posição), o Desenho Geometríco, as Geometrias Descritiva e Projetiva.

Nas correlações ou extensões dessas estão a Álgebra Elementar, a Geometria Analítica, a Álgebra Linear, as Estruturas Algébricas, as Seqüências e Séries, a Análise (conceito de limite e de função contínua, a derivação e a integração, em especial o estudo das funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas), as Equações Diferenciais.

Esses assuntos não devem ser pulverizados em inúmeras disciplinas, mas agrupados em áreas, tais como Aritmética, Geometria, Álgebra, Análise, Áreas afins (Física, Probabilidade, Estatística, Matemática Financeira, Computação), Filosofia - Sociologia, Psicologia - Didática. Nessas, os conteúdos e as atividades são planejadas para, no máximo, 4 anos, com os sub-títulos, Aritmética I, II, III, Geometria I, II, III, Análise I, II, III, Psicologia - Didática I, II, III, etc.

Naturalmente, as áreas da Matemática, são vistas, nesta proposta, mais abrangentes, menos fechadas em si mesmas, promovendo a interação com as escolas e a comunidade, em eventos significativos, preocupando-se tanto com os aspectos formativos do profissional, quanto com os informativos, devendo priorizar, enquanto objeto cultural, a ênfase histórico - cultural, principalmente contribuindo para esclarecer os principais estágios de seu desenvolvimento histórico.

Muitos desses comentários se aplicam ao curso do 2o. grau: habilitação ao magistério.

Por exemplo, a Aritmética, como objeto cultural e como objeto do conhecimento, propiciará a inclusão, na grade curricular do professorando, da Filosofia (noções gerais, Filosofia da Matemática e da Educação), da Psicologia, da Didática e da Sociologia (sociedades e instituições escolares: organizações e influências).

A gênese do número e sua evolução histórica, estudadas no curso do magistério, como objeto cultural, serão de grande valia para a compreensão dos domínios da contagem e da medida, embora sem os mesmos aprofundamentos desejados para os licenciandos.

As áreas sugeridas para o curso de magistério são: Aritmética, Geometria, Álgebra, Áreas Afins (Física, Noções Elementares de Probabilidade e Estatística, Matemática Financeira), Filosofia - Sociologia, Psicologia - Didática.

As áreas do curso de graduação devem planejar atividades coerentes com o espírito aqui defendido, respeitando o nível de envolvimento do futuro professor no curso.

Assim, algumas atividades podem ser propostas para o 1o. e 2o. anos, outras para o 3o., outras ainda para o 4o.

Numa primeira fase, por exemplo, as áreas de Aritmética e Geometria devem priorizar as atividades:

- Observações de aulas nas escolas;
- Entrevistas com profissionais e alunos;
- Diagnósticos da realidade escolar;
- Discussão das dificuldades das questões de Matemática dos vestibulares;
- Elaboração de relatórios estabelecendo relações entre conteúdo desenvolvido nas escolas, fundamentos adquiridos no curso de formação e instrumentos pedagógicos utilizados.

Numa segunda fase, as áreas de Aritmética, Geometria, Álgebra e Psicologia podem sugerir:

- Levantamento das dificuldades cognitivas das crianças na aquisição do conteúdo de Matemática desenvolvido na escola;

- Análise de materiais didáticos - livros didáticos: vantagens e limitações de seu uso;
- Discussão de provas de Matemática de diversos concursos, incluindo aquelas do concurso de ingresso ao magistério;
- Proposta de possibilidades de intervenção, no ensino de tópicos de Matemática nas escolas.

Numa terceira fase, todas as áreas da Matemática e a Didática propõem:

- Pesquisas nas instituições da região sobre Matemática e aplicações;
- Regência de mini-cursos e aulas;
- Desenvolvimento de projetos alternativos para o ensino de tópicos de Matemática.

O desejado nesses cursos, é o envolvimento efetivo de seus docentes no projeto de formação do professor, é a atualização constante em relação aos livros didáticos e as pesquisas sobre Ensino de Matemática e é o comprometimento com as crises e com as diretrizes educacionais.

Em resumo, o curso de formação do professor, numa instituição educacional, deve propiciar a autonomia intelectual, a autonomia profissional e a prática da cidadania de seus docentes e de seus professorandos.

Sob um ponto de vista geral, nosso trabalho enfatiza a questão da formação do professor de Matemática. Propomos um currículo centrado no desenvolvimento histórico do número e sua representação. A partir deste, a estrutura curricular deve se irradiar para outros temas.

A forma como desenvolvemos os capítulos anteriores dão uma medida do que entendemos deva ser o sabor da história a impregnar os temas da Aritmética. Acreditamos que essa estratégia deve estimular uma visão histórica de outros assuntos, tanto no desenvolvimento formal do currículo como em atividades extra-curriculares. Ademais, cremos que essa atitude venha enriquecer a formação do cidadão formador de cidadãos.

Referências Bibliográficas

1- Aaboe, Asber. Episódios da História Antiga de Matemática. Rio de Janeiro, Soc. Bras. de Matemática, 1984.

2- Al Daffa, Ali Abdullah. The Muslim contribution to Mathematics, in Mathematics: People, Problems, Results. Edited by Douglas Campbell and John Higgins, Belmont, California, vol 3, 1984.

3- Araújo, Antonio Pinheiro de. Formação do Professor de Matemática: realidade e tendências. São Paulo, FE-USP; 1990 (tese de doutorado).

4- Araújo Filho, Luiz Soares de. O professor: formação, carreira, salário e organização política, in Em Aberto, Brasília, ano 6, no. 34: pp 1-10, abril/ junho/1987.

5- ____________________. Rumos da Educação Brasileira, in Em Aberto, Brasília, ano 4, no. 25: pp 9-15, jan/ março/1985.

6 - Archibald, R. C. Mathematics before the greeks. Science vol 71: pp 109-121, 1930.

7- ____________________. Egyptian Mathematics. Science vol 72: pp 39, 1930.

8- Arelaro, Lisete R. G. A extensão do ensino básico no Brasil: ainda, um desafio político, in Em Aberto, Brasília, ano 7, no. 39: pp 37-43, julho/ out/ 1988.

9- Ávila, Geraldo. Eudoxo, Dedeking, números reais e Ensino de Matemática. Revista do Professor de Matemática, vol 7: pp 5-16, 2o. sem/1985.

10- Balzan, Newton C. Nós professores de licenciatura, in Cadernos CEDES, Licenciatura, no. 8: pp 19-24. 1985.

11- ____________________ e Paoli, Niuvenius J. Licenciatura: o discurso e a realidade. Ciência e Cultura, São Paulo, vol 40, no. 2: pp 147-151, fev/ 1988.

12- Bassedas, Merce y Rosa Sellares. La construcción de sistemas de numeración en la historia y en los ninõs: pp 87-105 (texto mimeografado).

13- Boyer, Carl B. An early reference to division by zero. The American Monthly, no. 50: pp 487-491, 1943.

14- ____________________. Fundamental steps in the development of numeration. Isis, vol 35: pp 153-168, 1944.

15- ______________________.. Analysis: notes in the evolution of a subject and a name. The Mathematics Teacher vol 47: pp 450-462, 1954.

16- ______________________. História da Matemática. São Paulo, Edit. Edgar Blücher Ltda, 1974.

17- Brasil, Ministério da Educação e Cultura. O desafio educacional: Brasil 1970-1980. Brasília, Secretaria do Ensino do 1o. e 2o. graus, 1983.

18- Brasil, Secretaria do Planejamento e Coordenação da Presidência da República. Anuário Estatístico do Brasil. Rio de Janeiro, IBGE vol 49, 1989.

19- Brolezzi, Antonio Carlos. A arte e contar: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática. São Paulo, Faculdade de Educação - USP, 1991 (dissertação de mestrado).

20- Bronowski, Jacob. Science and human values. New York, Harper & Row Pub, 1965.

21- Buddhue, John Davis. The origin of our numerals. The Scientific Monthly vol 52: pp 265-267, 1941.

22- Bunt, Lucas, Phillip S. Jones e Jack D. Bedient. The historical roots of elementary Mathematics. New York, Dover Publications, 1988.

23- Byers, Victor. Why study the history of Mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology vol 13 (1), 1982.

24- ______________________. The order of subject matter, 1982 (texto mimeografado).

25- Caderno CEDES-Licenciatura, no. 8, São Paulo, Cortez Editora, 1985.

26- ______________________. O profissional do Ensino-debates sobre sua formação, no. 17. São Paulo, Cortez Editora, 1986.

27- Cajori, Florian. A history of Mathematical Notations. The Open Court Pub. Co. - Vol. I, II, Chicago, 1930.

28- Carvalho, Dione Lucchesi de. A concepção de Matemática do professor também se transforma. Campinas, FE-UNICAMP, 1989. (dissertação de mestrado).

29- Castro, Amélia Domingues de. Bases para uma Didática do estudo. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. Boletim nº306, Metodologia Geral do Ensino, nº4. São Paulo, 1969.

30- ______________. Fundamentos Pisocológicos da Didática - enfoque piagetiano. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. São Paulo, 1972.

31- ______________. A Licenciatura no Brasil. Separata da revista de História, ..nº100. São Paulo, 1974.

32- Conant, Levi Leonard. The Number concept - Its origin and development. New York, MacMillan and Co, 1931.

33- ______________. Counting, in the World of Mathematics, James Newmann. Simon Schuster, vol 1: pp 432-441, 1956.

34- Coelho, Marília Martins. Escola Pública de Primeiro Grau: tendências didáticas do Ensino de Ciências e Matemáticas. Campinas, FE-UNICAMP, 1992. (Tese de Doutorado).

35- Courant, Richard y Herbert Robbins. ¡ Qué es la matemática? Madri, Aguilar Ediciones, 1967.

36- Coxeter, F. R. S. Introduction to Geometry. New York, John Wiley e Sons, Inc, 1969.

37- Crowe, Michael J. Ten laws concerning patterns of change in the History of Mathematics. História Matemática 2: 161-166, 1975.

38- D'Ambrósio, Ubiratan. Reflexões sobre História, Filosofia e Matemática, 1991 (texto mimeografado).

39- Dantzig, Tobias. Número: A linguagem da Ciência. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1970.

40- Davis, Phillip. Fidelity in Mathematical discourse: is one and one really two? texto mimeografado, 1972.

41- ______________. & Reuben Hersh. The Mathematical Experience. Boston, Burkhaüser, 1980.

42- Duarte, Newton. A relação entre o lógico e o histórico no Ensino de Matemática Elementar. São Carlos, UFSCAR, 1987 (dissertação de mestrado).

43- Dugas, Lydia S. A problemática das pesquisas político-eleitorais: o currículo de matemática para a compreensão social. Caderno de Pesquisa 76: pp 18-23, 1991.

44- -Eves, Howard. An Introduction to the History of Mathematics. New York, Holt, Rinehart e Winston, 1990.

45- Figueiredo, Djairo G. Números Irracionais e Transcendentes. Rio de Janeiro, Soc. Bras. de Matemática, 1985.

46- Fletcher, Philip R. e Sergio Costa Ribeiro. O ensino do 1o. grau no Brasil de hoje, in em Aberto, ano 6, no. 33: pp 1-10, 1987.

47- Folha de São Paulo. 70% dos meninos de 16 anos trabalham em São Paulo. Caderno 1: pp 7, 23/03/1991.

48- ______________________. MEC solta dados dos anos 80. Caderno 4: pp 4, 30/03/91.

49- ______________________. Currículos defasados afugentam estudantes. Caderno 1: pp 8 , 11/08/91.

50- ______________________.. Fluxo Escolar 1967-1978. Caderno 1: pp 8, 11/09/91.

51- ______________________.. Professor típico se decepciona com a carreira. Caderno 1: pp 19, 29/09/91.

52- ______________________.. Quem é professor. Caderno 1: pp 19, 29/09/91.

53- ______________________.. Salário do professor em São Paulo, 4 vezes menor que vinte anos atrás. Caderno 1: pp 6, 30/09/91.

54- Freitag, Barbara e outros. O estado da arte do livro didático no Brasil. Brasília, REDUC e INEP, 1987.

55- Gadotti, Moacir. Elementos para a crítica da questão da especificidade da Educação, in Em Aberto, Brasília, ano 3, no. 22: pp 21-30, julho/ agosto/ 84.

56- ______________________.. A questão da Educação e a formação do Educador. Aprendendo com a minha própria história, in Em Aberto, Brasília, ano 6, no. 34: pp 25-39, abril/ junho/ 1987.

57- Gandz, Salomon. The origin of the term Algebra. The American Mathematical Monthly, vol 33: pp 437-440, 1926.

58- Ganguli, Saradakanta. On the indian discovery of the irrational at the time of Sulvasutras. Scrypta Mathematica, no. 1: pp 135-141, 1932.

59- Gatti, Bernadete A. Democratização do ensino: uma reflexão sobre a realidade atual, in Em Aberto, Brasília, ano 8, no. 44: pp 3-8, out/ dez/ 1989.

60- ______________________.. Sobre a formação de professores para o 1o. e 2o. graus, in Em Aberto, Brasília, ano 6, no. 34: pp 11-15, abril/ junho/ 1987.

61- Gazetta, Marineusa. A modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professor. Rio Claro, UNESP, 1989 (dissertação de mestrado).

62- Gerdes, Paulus. Sobre a origem histórica do conceito de número. Ciência e Tecnologia vol 1: pp 53-57, 1980.

63- ____________________.. A ciência matemática, 1980, texto mimeografado.

64- Gillings, Richard J. Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papirus. The Mathematics Teacher, vol 55: pp 61-62, 1962.

65- ____________________.. Mathematics in the time of Pharaohs. Cambridge, Mass, The MIT Press, 1982.

66- Ginsburg, Jakuthiel and David Smith. From numbers to numerals and from numerals to computation, in The World of Mathematics, James Newmann pp 442-464, 1956.

67- Glaeser, Georges. Epistemologia dos números relativos in Boletim - GEPEM, vol. 17 : pp 29-124, 1985.

68- Goldenberg, José. Repetência e evasão da escola. O Estado de São Paulo, pp 2, 17/11/1992.

69- Grattan, Guiness. On the relevance of the history of Mathematics to Mathematical Education. Int. J. Math Education in Science and Tecnology vol 9, no.3: pp 275-285, 1978.

70- Groza, Vivian Shaw. A survey of Mathematics. Holt Rinehart and Winston, Ney York, 1968.

71- Guggenbuhl, Laura. Mathematics in Ancient Egypt, a checklist. The Mathematic Teacher 58: pp 630-634, 1965.

72- Halsted, G. B. On the foundation and Technic of Arithmetic. Chicago, The Open Court Pub Co, 1912.

73- Hardy, G.H. A course of Pure Mathematics. Londres, Cambridge U. P, 1967.

74- Harris, V. C. On proofs of irracionality of $\sqrt{2}$.Mathematics Teacher, vol 64: pp 19-21, 1971.

75- Heath Sir Thomas. A history of greek Mathematics. Dover Pub. Inc. vol 1, 2, 1981.

76- Hershberger, Johannes. História da Filosofia da Antiguidade. São Paulo, Editora Herdes, 1957.

77- Ifrah, Georges. Os números. História de uma grande invenção. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1989.

78- Imenes, Luiz Márcio. Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da Matemática. Rio Claro, UNESP, 1989 (dissertação de mestrado).

79- Jones, Phillip S. Large Roman numerals. The Mathematics Teacher,vol 47: pp 194-195, 1954.

80- ________________________. Tangible Arithmetic I: Napier's and generalle rods. The Mathematics Teacher vol 47: pp 482-487, 1954.

81- ________________________. Tangible Arithmetic 4: finger recknoning and other devices. The Mathematics Teacher, vol 48: pp 153-157, 1955.

82- ________________________. A História da Matemática como ferramenta de ensino in Historical Topics for the Mathematical Classroom, 1969 - tradução de Maria Quiroga Anastácio.

83- Kamii, Constance. A construção do número na criança. Campinas, Editora Papirus, 1985.

84- ________________________ e Georgia DeClark. Reinventando a Aritmética. Campinas, Editora Papirus, 1986.

85- Karabel, Jerome and A. H. Halsey. Power and Ideology in Education. New York, Oxford University, 1977.

86- Karpinski, The Algebra of Abu Kamil. The American Mathematical Monthly vol 21: no. 2: pp 37-48, 1914.

87- Kline, Morris. Mathematics in the vestern culture. London, Bradford and Dickens, 1954.

88- ________________________. A proposal for the high school Mathematics curriculum. The Mathematics Teacher, vol 59, no. 4: pp 322-330, 1966.

89- ________________________ Mathematical Thought: from Ancient to modern times. New York, Oxford U. P. 1972.

90- ________________________. The loss of certainty. New York, Oxford U. P. 1980.

91- Koechler, V. The ability of birds to count. in The World of Mathematics, James Newmann, Simon Schuster: pp 489-496, 1956.

92- Libâneo, José Carlos, A democratização da escola pública. A pedagogia crítico-social dos conteúdos. São Paulo, Edições Loyola, 1986.

93- Lima, Elon. O que é o no. π. Revista do professor de Matemática, no. 6: pp 18-20, 19.

94- Lima, José Maurício F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade (texto mimeografado).

95- Logan, Robert K. The Alphabet Effect. St. Martin's Press, New York, 1987.

96- Machado, Nilson José. Matemática e Língua Materna-análise de uma impregnação mútua. São Paulo, Cortez Editora, 1990.

97- Maor, Eli. To infinity and Beyond. Birkhauser, Boston, 1987.

98- Maziarz, Edward and Thomas Greenwood. Greek Mathematical Philosophy, in Mathematics, Peolple, Problems, Result. Belmont, California, Wadworth International vol 3, 1984.

99- Mello, Guiomar Namo. Ensino de 1o. grau: da competência técnica ao compromisso político. São Paulo, Cortez, 1983.

100- ____________________. Ensino de 1o. grau: as estratégias da transição democrática, in Em Aberto, Brasília, ano 4, no. 25: pp 17-27, jan/ julho/ 1985.

101- Menninger, Karl. Number words and number simbols-a cultural history of numbers. Boston. The M.I.T. Press, 1969.

102- Miguel, Antonio e outros. Álgebra ou Geometria, para onde pende o pêndulo. Campinas, FE-UNICAMP, 1991.

103- Miller, G.A. Our common numerals. Science, vol 78: pp 236-237, 1933.

104- Neugebauer, Otto. Babylonian Mathematics. Scripta Mathematica, vol 2: pp 312-315, 1934.

105- ____________________. The Exact Sciences in Antiquity. Providence, R.I. Brown U.P. 1957.

106- ____________________. Egyptian Mathematics an Astronomy in mathematics: People, Problems, Result. California, Wadsworth International, vol 3, 1984.

107- Newmann, James. The Rhind Papyrus, in The World of Mathematics. Siomon Schuster, vol 1: pp 170-178, 1956.

108- Nobre, Sérgio Roberto. Aspectos sociais e culturais no desenho curricular de Matemática. Rio Claro, UNESP, 1989 (dissertação de mestrado).

109- Nóbrega, Sandick L. da. Enciclopédia da Legislação no Ensino, vol 1, tomo 1o. e 2o.. Rio de Janeiro, Romanitas Livrarias Editora Ltda, 1972.

110- O Estado de São Paulo. Fundação testa desempenho das Escolas do 1o. e 2o. graus, pp 12, 20/01/92.

111- ______________. Indicadores de baixo rendimento, pp 12, 20/01/92.

112- ______________. O Novo Professor, pp 3, 18/11/1992.

113- ______________. Dívida social: ensino básico, pp 24, 22/11/ 1992.

114- Oliveira, João Batista de Araújo. O livro didático-livros descartáveis: exigência pedagógica ou apenas um bom negócio? Cadernos de Pesquisa: 44: pp 90, fev 1983.

115- Orton, Robert E. Two Theories of "Theory" in Mathematics Education: using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundational Issues. For the learning of Mathematics, 8(2): pp 36-43, june 1988.

116- Pavanello, Regina Maria. O abandono da Geometria: uma visão histórica. Campinas, FE-UNICAMP, 1989 (dissertação de mestrado).

117- Piaget, Jean e A.Szeminska. A gênese do número na criança. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1975a.

118- Piaget, Jean. O nascimento da inteligência na criança. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1975b.

119- ______________ e Rolando Garcia. Psychogênese et Histoire des Science. Flammarion, Paris, 1983.

120- Poincaré, Henri. A ciência e a hipótese. Brasília; Editora Universidade de Brasília, 1985.

121- Prado, Ema Luiza Beraldo. História da Matemática: um estudo de seus significados na Educação Matemática. Rio Claro, UNESP, 1990 (dissertação de mestrado).

122- Rashed, Rohsdi. Entre Arithmetique et Algebre (Reserche sur L'Histoire des Mathematiques Arabes). Paris, Soc. Edit. Les Belles Lettres, 1984.

123- Revista Veja. A Máquina que cospe crianças. Seção educação. pp 46-47, 20/11/1991.

124- Rodrigues, Neidson. Por uma nova escola: o transitório e o permanente em Educação. São Paulo, Cortez, 1986.

125- Ronca, Antonio Carlos C. Desmistificação e comprometimento, in Caderno do CEDES, no. 8: pp 5-16, 1988.

126- Saidan, A.S. The earliest extant arabic arithmetic. Isis vol 57. no. 190: pp 475-490, 1966.

127- São Paulo, CENP. Proposta curricular para as matérias do núcleo comum do ensino do 1o. grau. São Paulo, SE/CENP, 1975.

128- ______________________. Pesquisa-avaliação sobre o Ensino de Matemática. São Paulo, SE/CENP, 1981.

129- ______________________. Proposta curricular para o ensino de Matemática na 1o. grau. São Paulo, SE/CENP, 1988.

130- Sarton, George. The study of the history of Mathematics. New York, Dover Pub. Inc, 1936.

131- ______________________. The first explanation of decimal fraction and measure. Isis XXIII, pp 153-244, 1935.

132- Saviani, Demerval. Tendências e Correntes da Educação Brasileira in Demerval Trigueiro Mendes (coord). Filosofia da Educação Brasileira, Rio de Janeiro, Civilização Brasiliense, 1983.

133- ______________________. Sobre a natureza e espeficidade da Educação, conferência proferida em Brasília 05/07/84.

134- Sebastiani, Eduardo. História de Matemática. Por que essa disciplina no programa de um futuro professor? IMECC-UNICAMP, 1990 (texto mimeografado).

135- ______________________. Educação Matemática. Ciência ou não? Uma reflexão no contexto da História e da Filosofia da Ciência. IMECC-UNICAMP, 1991 (texto mimeografado).

136- ______________________. Por uma teoria de etnomatemática. IMECC-UNICAMP, 1991 (texto mimeografado).

137- Seidenberg, A. The diffusion of counting practice. Bekerley, California U.P. 1960.

138- ____________________. The ritual origin of exact sciences. vol 1 e 2, 1961/1962.

139- Silva, Teresa Roserley (Rose) da. Influências teóricas no Ensino e Currículo no Brasil. Cadernos de Pesquisa. São Paulo, no. 70: pp 5-19, agosto 1989.

140- ____________________. Educação do 1o. grau: o não direito do não-cidadão; in Em Aberto, ano 7, no. 39: pp 25-35, julho/ set/ 1988.

141- Smith, D.E. Euclid, Omar Klayyam and Saccheri. Scripta Mathematica, vol 3: pp 5-10, 1935.

142- ____________________. Algebra of 4000 years ago. Scripta Mathematica vol 4: pp 111-125, 1936.

143- ____________________. History of Mathematics. New York, Dover Pub. Inc. vol 1, 2, 1951.

144- Souza, Antonio Carlos Carrera de. Matemática e Sociedade-um estudo das categorias do conhecimento matemático. Campinas, FE-UNICAMP, 1986 (dissertação de mestrado).

145- Souza, Antonio Carlos. et allii. Diretrizes para a licenciatura em Matemática. Bolema ano 6. no.7: pp 90-99, 1991.

146- Struik, D.J. Omar Khayyam, Mathematicien. The Mathematics Teacher, vol 51: pp 280-286, 1958.

147- ____________________. On ancient chinese Mathematics. The Mathematics Teacher, vol 56: pp 424-432, 1963.

148- ____________________. The prohibition of the use of Arabic numerals in Florence. Archives des Sciences no. 84-85: pp 291-294, 1968.

149- ____________________. Por que estudar história da Matemática? in História da Técnica e da Tecnologia. (Org. Ruy Gama) Tomás Aquino Queiroz Editora São Paulo: pp 191-215, 1985.

150- ____________________. História concisa da Matemática. Lisboa, Gradiva, 1989.

151- Swetz, Frank. The Evolution of Mathematics in Ancient China, in Mathematics: People, Problems, Results. California, Wadsworth Int, vol 3, 1984.

152- Szabó, Árpád. The transformation of Mathematics into deductive sicence and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. Scripta Mathematica, vol. XXVII, nn$^{\underline{o}}$1, 1960.

153- Táboas, Carmen M.G. Sobre Critérios de Divibilidade, Revista do Professor de Matemática, vol.6; pp 21-24, 1o. sem/85.

154- Táboas, Carmen M.G. Matemática, para professores do 1o. grau - desenvolvimento compreensivo. DM/UFSCar, 1986 (texto mimeografado).

155- Tancredi, Regina M. S. Puccinelli. O ensino dos nos. inteiros no 1o. grau: realidade e possibilidade. São Carlos, UFSCAR, 1989 (dissertação de mestrado).

156- Titchmarsh, E. C. Mathematics for the general reader, Londres, Hutchinson's University library, 1943.

157- Vygotsky, L. S, Luria, A. R. & Leontev, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. São Paulo, Icone/ EDUSP, 1988.

158- Whitehead, Alfred North. Science and modern World. The Mac Millan Co, 1931.

159- Wilder, Raymond. Evolution of Mathematical Concepts. New York. John Wiley e Sons Inc, 1968.

160- ________________________. History in the Mathematics curriculum: its status, quality and function. The American Mathematical Monthly vol 79, no. 5: pp 479-495, 1972.

161- ________________________. Mathematics and its relation to other disciplines. The Mathematics Teacher vol 66, no. 8: pp 679-685, 1973.

Livros Didáticos consultados.

Anteriores a 1930

1- Elementos de Aritmética - para o curso secundário. Rio de Janeiro, Livraria Paulo de Azevedo. FTD, 1922.

2- Peres y Marin. Arithmetica Theorico-Pratica. São Paulo, 1924, 8a. edição.

3- - ______________________ . Soluções Arithmeticas. São Paulo, 1925, 2a. edição.

4- Trajano, Antonio. Arithmetica Progressiva, Rio de Janeiro, 1905, 48a. edição.

5- Roxo, Euclides, Lições de Arithmetica. Rio de Janeiro; Livraria Francisco Alves, 1928, 6a. edição.

Período - 1930 - 1950

6- Farah, Edison e outros. Matemática, 1a. série (colegial) São Paulo, Editora do Brasil, 1948.

7- Maeder, Algacyr Munhoz. Curso de Matemática, 1o. livro (curso colegial). São Paulo, Edições Melhoramentos 1947, 2a. edição.

8- Por um grupo de professores. Elementos de Aritmética curso superior. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1937.

9- Quintella, Ary. Matemática, 4o. ano ginasial. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1948, 9a. edição.

10- ______________________ Matemática, 3o. ano ginasial. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1948, 10a. edição.

11- Thiré, Cecil. Manual de Matemática, 4o. ano ginasial. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alvez, 1944.

Década de 50

12- Castrucci, Benedito e Geraldo dos Santos Filho, 1a. série ginasial. Rio de Janeiro Livraria Francisco Alvez, 1959.

13- Quintella, Ary. Matemática, 1a. série ginasial. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1957, 49a. edição.

14- Thiré, Cecil. Manual de Matemática, 1a. série ginasial. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alvez, 1952, 1a. edição.

15- ______________________ Manual de Matemática, 2a. série ginasial. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alvez, 1953, 1a. edição.

Década de 60

16- Lamparelli, Lydia. Matemática para o ginásio, 1a. série ginasial. São Paulo, Edart, 1964.

17- Pierro Neto, Scipione. Matemática para a Escola Moderna, 1a. série ginasial. São Paulo, IBEP, 1964.

18- Rocha, Luiz Mauro e Ruy Madsen Barbosa. Matemática - curso ginasial moderno, 1o. volume. São Paulo, IBEP, 1968.

19- Sangiorgi, Osvaldo. Curso Moderno de Matemática, 1o. ano ginasial. Companhia Editora Nacional, 1964.

Período - 1970 - 1984

20- Castrucci, Benedito e outros. Matemática, 5a. série. São Paulo, Editora F.T.D, 1978.

21- Imenes, Luiz Márcio e outros. Matemática Aplicada, São Paulo, 1979.

22- Ludmila e Zago. Matemática: um processo de criação, 5a. série. São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1978.

23- Pierro Neto, Scipione. Matemática - um processo de auto-instrução, 5a. série. São Paulo, Editora Saraiva, 1975.

24- Sangiorgi, Osvaldo. Matemática, 5a. série. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1978.

25- São Paulo, Secretaria do Estado da Educação. CENP. Proposta curricular para as matérias do núcleo comum do ensino do 1o. grau. São Paulo, SE/CENP, 1975.

A partir de 1984

26- Bongiovani, Vincenzo e outros. Matemática e Vida, 5a. série. São Paulo, Editora Ática, 1990.

27- Giovanni e Giovanni Junior. Aprendizagem e Educação Matemática, 5a. série. São Paulo, F.T.D., 1990.

28- Iezzi, Gelson e outros. Matemática e Realidade; 5a. série. São Paulo, Atual, 1984.

29- Mori, Iracema e outros. Para Aprender Matemática, 5a. série. São Paulo, Editora Saraiva, 1990.

30- Pierro Neto, Scipione. Matemática: conceitos e operações, 5a. série. São Paulo, Editora Saraiva, 1986.

31- Sardella, Antonio e outros. Matemática, 5a. série. São Paulo, Editora Ática, 1984.

32- São Paulo, Secretaria do Estado da Educação. CENP. Proposta curricular para o ensino de Matemática no 1o. grau. São Paulo, SE/CENP, 1988.