Antonio Carlos Carrera de Souza

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Antonio Carlos Carrera de Souza e aprovada pela comissão Julgadora em

DATA: 10.12.86

ASSINATURA:

MATEMÁTICA E SOCIEDADE
Um estudo das categorias do Conhecimento Matemático.

Esta dissertação foi aprovada com o conceito -A- excelente

Prof. Dr. Newton Aquiles Von Zuben
COORDENADOR DE PÓS-GRADUAÇÃO
Faculdade de Educação - UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Campinas - 1986

ANTONIO CARLOS CARRERA DE SOUZA

MATEMÁTICA E SOCIEDADE

Um Estudo das Categorias do Conhecimento Matemático

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação (Metodologia do Ensino) à Comissão Julgadora da Universidade de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Lafayette de Moraes

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Campinas - 1986

Antonio Carlos Carrera de Souza

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por Antonio Carlos Carrera de Souza e aprovada pela comissão julgadora em

DATA: 10/12/86

Assinatura:

MATEMÁTICA E SOCIEDADE

Um estudo das categorias do Conhecimento Matemático.

Esta dissertação foi aprovada com o conceito -A- excelente

Prof. Dr. Newton Aquiles Von Zuben
COORDENADOR DE PÓS GRADUAÇÃO
Faculdade de Educação - UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Campinas - 1986

ANTONIO CARLOS CARRERA DE SOUZA

MATEMÁTICA E SOCIEDADE

Um Estudo das Categorias do Conhecimento Matemático

Dissertação apresentada como exi-
gência parcial para obtenção do
grau de Mestre em Educação (Meto-
dologia do Ensino) à Comissão
Julgadora da Universidade de Cam-
pinas, sob a orientação do Prof.
Dr. Lafayette de Moraes

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Campinas - 1986

Sei que traçar no papel
é mais fácil que na vida
sei que o mundo jamais é
página pura e passiva
O mundo não é uma folha
de papel, receptiva:
O mundo tem alma autônoma,
é de alma inquieta e explosiva
mas o sol me deu a idéia
de um mundo claro algum dia
....
....
Debaixo dessa luz crua,
sob um sol que cai de cima
e é justo até com talvezes
e até mesmo todavias,
quem sabe um dia virá
uma civil geometria.

Auto do Frade

João Cabral de Mello Neto

I N D I C E

RESUMO

MATEMÁTICA E SOCIEDADE — Um estudo das categorias do conhecimento matemático

A Ciência surge como resposta racional à visão mágica do mundo, pois na busca de soluções para os problemas gerados na realidade circundante, o homem vai se apropriando de processos mentais eficazes na análise de fenômenos naturais. Numa perspectiva de cunho histórico-crítico, a Matemática posiciona-se como um saber que se aproxima do conhecimento absoluto da realidade, historicamente determinada pelos modos de produção vigentes. Na prática, a Matemática tem se afastado da história do homem, transformando-se numa linguagem simbólica, distante das questões concretas. Esse fato evidencia a concepção ideológica na neutralidade científica: Ciência e Matemática, partes da cultura do homem, não escapam ao processo massificante da otimização dos objetivos econômicos.

A Ciência, enquanto produto cultural do homem, é condicionada pelos modos de produção, cujos avanços estão condicionados ao conflito gerado pelas contradições na divisão do trabalho. A realidade, a Ciência e o homem se entrelaçam organizadamente na produção da história, de tal forma que, segundo Álvaro Vieira Pinto, "cada época produz a Ciência historicamente possível". Portanto, para melhor compreender a evolução da ciência matemática, dividimos seus procedimentos em cortes historicamente determinados, daí resultando quatro concepções metodológicas: a) empírica: nos primórdios da civilização, a Matemática tem características de uma Ciência cujo objeto se encontra diretamente ligado à cultura e à sociedade da época, b) dedutiva: a partir do século VI A.C., o co-

nhecimento matemático encontra, na Grécia, condicionantes sociais e políticos que provocam a ruptura entre o prático e o teórico; a Ciência passa a ter, então, como base, o estudo das formas e das idéias; c) racional: Galileu, Descartes, Leibniz e Newton promovem o modelo racional de ver o mundo, acrescentando às conquistas do procedimento dedutivo o conhecimento matemático que explica e justifica o fenômeno observado; d) simbólica: dividida em três tendências: 1º) logicismo, cujos líderes, Frege e Russell, consideram a Matemática como dependente da Logística; 2º) intuicionismo, originário do "finitismo", de Kronecker, tem em Brower seu principal seguidor. Para essa tendência, cada conclusão matemática deve ser julgada por sua própria evidência e o princípio do terceiro excluído, por ser muito mal fundamentado, não pode servir de base à Matemática; 3º) formalismo; permite o estudo das estruturas do conhecimento matemático e, constatadas semelhanças entre uma e outra estrutura, aplicando demonstrações de uma, permite desenvolver a outra, por serem ambas isomorfas.

A ação científica evidencia pontos de conflito entre o saber científico e o conhecimento aceito. Esses pontos de ruptura fornecem dados para a reflexão sobre os fenômenos naturais, permitindo a tomada de consciência da realidade concreta, através de um sistema de categorias do conhecimento científico e matemático. As categorias são termos mais gerais, são formas de pensamento que buscam refletir o mundo objetivo e sua rede de fenômenos, numa tentativa de generalização dos mesmos. Privilegiamos as seguintes categorias: a) experiência: base do conhecimento matemático, embora também se encontre em seu topo; é a gênese da Matemática, pois a necessidade de resolução dos problemas práticos dos povos antigos resultou na necessidade do instrumental matemático; b) evidência: surge na generalização e sistematização do material das várias expe riências anteriormente realizadas, com ou sem sucesso; supõe uma transição do fato sensorial ao intelecto do homem, sob a forma de abstração; c) intuição: mostra como o movimento do saber científico do homem apresenta, em dadas circunstâncias, saltos qualitativos rápidos; exemplo dessa categoria, que se constitui de intervalos de continuidade dependentes de toda a base sensorial e experimental anterior, é o modelo geométrico euclidiano; d) totalidade: tenta revelar as relações mentais e imediatas entre os fenômenos e as leis da natureza, a essência e a aparência, as partes e o todo, o produto e a produção, não apenas adicionando dados da realidade, mas analisando as relações entre eles.

A Matemática, enquanto prática pedagógica, deve levar a uma visão de conjunto entre a realidade e a sociedade. Nesse contexto, emerge o "senso matemático", que se identifica como uma análise dos fenômenos e como sendo capaz de apreender o senso quantitativo dos fenômenos. Estimulando os valores do senso matemático — senso crítico, senso do relativo, senso de ordenação e precisão, senso do concreto, senso cinestésico-espacial —, a escola dotará os alunos de um estilo matemático arquimediano-galilaico, cuja síntese consiste numa visão cosmológica, crítica e comprometida com a Ciência e com a realidade. A opção do educador deve encaminhar-se, pois, para o homem como centro das preocupações e deve ter, como rumo, a competência e a criatividade. A escola, comprometida com a transformação social — no sentido de uma sociedade mais justa e igualitária — deve ter a competência política para trabalhar com o dado social possível, visando à sua transformação efetiva em condições sociais reais. Por decorrência, o professor deve ter criatividade e a competência técnica necessária para transformar o conteúdo teórico de sua disciplina em ações pedagógicas que busquem soluções concretas aos problemas reais enfrentados pelas comunidades em que atua.

O conteúdo aqui resumido é desenvolvido nos quatro capítulos da tese "Matemática e Sociedade — Um estudo das categorias do conhecimento matemático", que também apresenta, em anexo, uma pesquisa do jornal "O Estado de São Paulo", mostrando a posição da Ciência entre os valores preservados pelo homem, os axiomas e proposições euclidianas do 1º livro, o método da exaustão e uma série de atividades de Matemática para alunos de 1º e 2º graus.

INTRODUÇÃO

O estudo das relações de produção entre a Matemática e a Sociedade que a produz explicita as relações entre Ciência e Ideologia em sociedades historicamente determinadas. No decorrer de séculos, o homem foi crescentemente dominando instrumentos matemáticos e científicos mais sofisticados em busca de soluções para problemas gerados no controle dos fenômenos da natureza e na explicação da realidade circundante. A Ciência, em particular a Matemática, faz parte do projeto de "hominização"[1] do homem primitivo, na medida em que, permitindo substituir o saber mágico por um saber de cunho mais científico — que foi constituído basicamente pela experimentação e pela periodicidade dos eventos da natureza — criou um núcleo de bom senso a partir do senso comum[2]. O homem foi se aproximando de processos mentais eficazes na *análise* dos fenômenos naturais, criando categorias que permitem maior consciência diante do entrelaçamento desses fenômenos. As *categorias* nos fornecem os vários níveis de conhecimento do mundo. Torna-se necessário investigar os meios pelos quais, a partir da análise de

---

1. "Hominização": processo pelo qual o homem primitivo se torna, segundo Álvaro Vieira Pinto em "Ciência e Existência", "*um produzido pelo produzido por sua intervenção voluntária e progressivamente consciente daquilo que a natureza lhe oferece, ou seja, deixa de ser um produzido puro para se tornar um produzido produtor do que produz*".

2. *"Senso comum"* e *"bom senso"*: conforme Antonio Gramsci em "A Concepção Dialética da História", *"senso comum é um nome coletivo"*, isto é, pertence à cultura de um determinado grupo ou coletividade de forma que é estruturado a partir de diversos ensinamentos *"... do velho patriarca, cuja sabedoria dita leis ..."* e da *"... mulher que herdou a sabedoria das bruxas..."*; portanto, *"... não existe um único senso comum, pois também ele é um produto do devenir histórico. A filosofia é a crítica e a superação da religião e do senso comum e, neste sentido, coincide com o 'bom senso'*

uma multiplicidade de fenômenos, atingimos um grau superior de compreensão do real e das condições concretas, em cada tempo e lugar. A Matemática, então, surge como um instrumento eficaz de conhecimento da realidade objetiva.

Isto nos leva a situar o conhecimento humano como obra coletiva e o progresso da Ciência e o da Matemática como provenientes da evolução social do homem. Nesta perspectiva, de cunho histórico-crítico, tomaremos a Matemática não como uma Ciência que nos fornece um conhecimento absoluto da realidade mas, sim, como um saber que se aproxima desta. Embora nunca atinja o "em si" da realidade concreta, a Matemática fornece teorias ou modelos de interpretação do mundo que são verdadeiros enquanto possibilitam uma apreensão do todo social em que estão imersos. Portanto, o real, em Matemática, é historicamente determinado pelos modos de produção vigentes e as contradições da sociedade são retratadas nos conflitos gerados entre a Ciência oriunda dos avanços sociais e a "Ciência Oficial", estabelecida até então.

Neste contexto,"Ciência Oficial"significa, explicitamente, a Ciência que o grupo que detém a hegemonia política impõe ao grupo não-hegemônico, obrigando-o a aceitar, conseqüentemente, sua concepção de mundo. "Ciência Oficial"passa a ser, então, a Ciência do grupo dominante que é, via de regra, imposta ao grupo dominado. As fogueiras onde arderam *bruxas* — detentoras de uma cultura milenar, na arte de curar, cujas raízes são gregas e posteriormente árabes — e cientistas contestadores, como Giordano Bruno, apontam a força e a existência da "Ciência Oficial" na Idade Média. Nos nossos dias, a "deificação" da Ciência e da Tecnologia

---

cont. 2.: *que se contrapõe ao senso comum"*, isto é, o *"bom senso"* coincide com o núcleo sadio do *"senso comum"*.

é ilustrada por pesquisa publicada na Folha de São Paulo de 4/8/85 onde, dentre as instituições da nossa sociedade, o índice porcentual da religião, dos sindicatos, dos partidos políticos e da imprensa são ultrapassados, de longe, pelos índices de Ciência e Tecnologia.[3]

Acrescentamos um comentário de René Thom, que aponta a Ciência como substituta social da religião:

> *... mas o fenômeno mais interessante é a ciência assumir hoje o papel sociologicamente desempenhado, no passado, pela religião, no sentido em que a ciência é hoje portadora das esperanças escatológicas da humanidade* [4].

A essa complexa rede de fatos interligados, até aqui apontados, acrescentamos a preocupação com a escola brasileira no geral e com o ensino de Matemática em particular. No momento em que essa reflexão teórica repousa sobre a nossa prática pedagógica, quer como professor de Matemática da rede estadual, quer como professor de Prática de Ensino de Matemática no curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santos, somos tentados a responder a duas questões que os alunos propõem com certo grau de freqüência:

i) Quem inventou a Matemática ?

ii) Para que serve a Matemática ?

A questão pedagógica que se explicita no questionamento discente é, a nosso ver, clara manifestação do fato de o ensino de Matemática, em todos os níveis, ter-se distanciado da história do homem, da prática comum do dia-a-dia, porque a Matemática passou a ser considerada a rainha das ciências, a linguagem universal das

---

3. Anexo 1.

4. THOM, R. - "Parábolas e Catástrofes", p. 22.

ciências ou, mais recentemente, a Ciência racional. O distanciamento das questões concretas leva o ensino da Matemática ao perigoso campo das conjecturas a respeito de sua utilidade, ou seja, a questão é respondida de forma maniqueísta: para uns, não há a menor utilidade na Matemática e, para outros, a necessidade e a utilidade da Matemática são quase totais; em todos os campos do conhecimento humano se utiliza Matemática, dizem. Discussão de teor puramente escolástico que esteriliza a criatividade do ato docente.

Neste trabalho, as questões propriamente matemáticas tecem, juntamente com as questões da educação, uma rede de fenômenos imbricados que requerem, dentro da realidade concreta, soluções para o ensino da Matemática. Isso nos leva a questionar, na sociedade contemporânea, a concepção ideológica da neutralidade, ou seja, o "mito do cientificismo" ou a "ideologia cientificista". A Ciência, como parte do processo cultural do homem, não escapa ao processo massificante da otimização dos objetivos econômicos. Os fins da pesquisa científica estão atrelados aos princípios do capital. A eficiência da Ciência nos conduz a uma Tecnologia cada vez mais sofisticada, a Tecnologia de ponta, que substitui a Ciência e que existe

> *... como parte de um sistema mais amplo, que de um lado assimila objetos e homens, mas, de outro expele produtos unicamente na qualidade de mercadorias, que funcionam como expressões de um valor excedente, em suma, do capital* [5].

Podemos considerar a sociedade contemporânea científica e racionalmente planejada, que busca, de forma objetiva, mascarar

---

5. GIANNOTTI, J.A.- "Filosofia Miúda", p. 38.

os conflitos surgidos em seu interior, gerados pela divisão de trabalho. As situações antagônicas entre o capital e o trabalho bem como a sua decorrente divisão social entre opressores e oprimidos são mascaradas pela "ideologia cientificista", de cunho pragmático-positivista, que permeia nossa sociedade, procurando não só justificar a divisão social do trabalho, mas também colocá-la como fundamento do progresso. De um lado, a ordem, com o objetivo social de neutralizar os conflitos e contradições; de outro lado, o progresso, como fundamento de uma sociedade igualitária, onde as possibilidades de ascensão social dependem da capacidade e da persistência dos indivíduos. Ou seja: a sociedade neutraliza seus conflitos e suas contradições,gerados na divisão de classes e na estratificação social, mascarando-os, via "ideologia cientificista", pela mitificação da ordem e do progresso.

A partir desse ponto, a perspectiva tecnológica passa a agir como *mediadora* entre o homem e a realidade. Assim, a existência e a experiência passam a ser substituídas por figurações , isto é, por relações puramente simbólicas, entre o ser humano e o real. Essas figurações pertencem à esfera da "ideologia cientificista", sendo, portanto,de cunho tecnológico com finalidades tecnocráticas; o objetivo é burocratizar as *relações humanas, as sensações, a vida* , enfim.Sob esse ponto de vista, não é, pois, fora de propósito a linguagem da televisão, quando o "emissor" afirma enfaticamente ao "receptor": "imagem ao vivo".

A Tecnologia é então, nesse ponto, soberana detentora da exatidão, da perfeição, ou seja, do paraíso onde o homem só pode ser aceito como "peça de engrenagem"; ou ainda, na sociedade científica e racionalmente planejada para otimizar a igualdade, a liberdade e a fraternidade, a divisão do trabalho é necessária para que todos tenham suas funções — pré-estabelecidas — tal e qual as roldanas de uma dada máquina.

A "ideologia cientificista" no nosso século assume as mesmas características da visão teológica do universo, no século XV. O dogmatismo está presente nas duas posições: a visão do mundo real é mediada por concepções filosóficas, sendo uma, de cunho pragmático e a outra, de cunho metafísico.

Neste trabalho, o objetivo é mostrar que a Ciência, enquanto produto cultural do homem, é condicionada pelos modos de produção e, portanto, que o conflito gerado pela divisão do trabalho encerra contradições — tanto na sociedade estratificada em classes como na Ciência por ela gerada — que são condições básicas para o avanço dos modos de produção.

A Ciência surgiu como resposta racional à visão mágica do mundo; a pretensa "deificação" do método científico é uma visão mística da Ciência, sendo, portanto, contrária à sua origem. Para que possamos entender a Ciência como produto social do homem, vamos mostrar a ação científica como um movimento que compreende transformações qualitativas na realidade concreta, por meio de atividade humana; assim sendo, o pensamento deve refletir a realidade de forma criativa.

Procuraremos clarificar os pontos de conflito entre o saber científico e o saber oficial, isto é, o conhecimento aceito, e explicitaremos suas implicações no movimento de evolução da Ciência e da Sociedade. Para tanto, mostraremos este conflito como ruptura das relações de produção científica, cultural e social. Isto nos levará ao terreno perigoso da conjectura, se para cada conjectura, se para cada descoberta científica do homem, tentarmos, bi-univocamente, localizar uma revolução nos meios de produção. Com o propósito de evitar o lugar comum das conjecturas e suposições, vamos indicar requisitos básicos para que deter minado ponto seja considerado de ruptura. O primeiro é a necessidade de que um movimento de evolução se forme a partir de intelectuais orgânicos, ou seja, intelectuais comprometidos com as reformas sociais que beneficiem as classes não-hegemônicas em uma dada sociedade. E o segundo é que a ruptura científica seja expressão clara do avanço das relações de produção, em face aos modos de produção existentes.

Passaremos à explicitação de cada um dos quesitos mencionados. Quanto ao primeiro, apoiar-nos-emos em Gramsci, quando aponta as condições dos movimentos culturais:

> *Disto se deduzem determinadas necessidades para todo movimento cultural que pretende substituir o senso comum e as velhas concepções do mundo em geral, a saber: 1) Não se cansar jamais de repetir os próprios argumentos (variando literariamente a sua forma): a repetição é o meio didático mais eficaz para agir sobre a mentalidade popular 2) Trabalhar incessantemente para elevar intelectualmente camadas populares cada vez mais vastas, isto é, para dar personalidade ao amorfo elemento de massa, o que significa trabalhar na criação de elites de intelectuais de novo tipo, que surjam diretamente da massa e que permaneçam em contato com ela para tornarem-se os seus sustentáculos. Esta segunda necessidade, quando satisfeita, é a que realmente modifica o panorama ideológico de uma época* 6.

No tocante à Ciência, para exemplificar no primeiro quesito básico, quando um ponto pode ser considerado de ruptura, utilizaremos o conceito de"Homem Coperniciano", mostrando sua força e vigor nas lutas de transformações científicas e sociais. A "Revolução Científica Coperniciana"tem seu traço característico na laicidade do estado moderno e no saber do artesão. Estrutura-se basicamente no saber coletivo e na consciência política da sociedade civil.

> *Assim, a consciência científica emergia em toda a sua liberdade na civilização dos Homens Novos. Onde eles construíram o seu mundo e garantiam na laicidade dinâmica do estado moderno o independente e radical desenvolvimento das suas energias de cultura, tal consciência triunfava guiando os novos destinos da vida civil. Diante de sua verdade e humanidade, as fogueiras apagavam-se, desmoronavam-se as paredes das prisões. Porque ... a liberdade da consciência científica não se identifica com a liberdade pessoal dos pensadores; é mais radical e poderosa, porquanto depende da sua própria integridade teorética,de sua plenitude humana. A ciência nova revela ... uma nova dimensão do saber. Ao ideal da sabedoria solitária substituiu-se assim a realidade de um vasto e operante saber coletivo, em que a humanidade se reconhece* [7].

---

6. GRAMSCI, A.- "A Concepção Dialética da História", p. 27.
7. BANFI, A.- "Galileu", p. 54..

Temos, portanto, a identificação do "intelectual de novo tipo", em Gramsci, como aquele que cimenta à constituição do "novo bloco histórico"; ele corresponde ao "Homem Coperniciano" de que nos fala Banfi. Galileu sintetiza esses homens que, desafiando a ideologia dominante até então — tanto científica como politicamente porque esta se apóia naquela — constroem uma nova visão do mundo. Troca-se a visão essencialista do homem, baseada fundamentalmente em Aristóteles e São Tomás de Aquino, por uma visão em que a existência precede a essência. Fundamenta-se a luta entre burguesia e aristocracia ocorrida entre os séculos XVII e XVIII, em um princípio científico que privilegia o dado empírico, a observação, em contraposição à teoria aristotélica de causa-efeito. Isto nos leva ao cerne da questão: o poder político, até então exercido pela aristocracia e o clero, baseado na atemporalidade metafísica tomista, entra em contradição com o significado humano da teoria coperniciana que, arrancando o "*homem do centro metafísico do universo e de sua prescrita, absoluta e uniforme finalidade metafísica*"[8] coloca-o em um universo em movimento, gerando uma realidade humana, sem finalidade pré-determinada, mas constituída pelo seu trabalho, pela sua história, provocando, portanto, uma autoconstrução da vida humana.

Isso nos encaminha ao segundo quesito básico para que um ponto seja considerado de ruptura, isto é, a necessidade de que o movimento seja expressão clara do avanço das relações de produção, em face aos modos de produção existentes. No desenvolvimento deste quesito, apoiar-nos-emos em Marx, quando aponta as condições de evolução:

> *Em certo estágio de desenvolvimento, as forças produtivas materiais da sociedade entram em con*

8. BANFI, A.- "Galileu", p.54.

> *tradição com as relações de produção existentes ou, o que é a sua expressão jurídica, com as relações de propriedade no seio das quais se tinham movido até então. De formas de desenvolvimento das forças produtivas estas relações transformam-se no seu entrave. Surge então uma época de revolução social. A transformação da base econômica altera, mais ou menos rapidamente toda a imensa superestrutura* [9].

A ciência aristotélica entra em contradição com o desenvolvimento das forças produtivas renascentistas. O exemplo clássico é o desenvolvimento dos antigos teares. A Ciência, no Renascimento, desponta como força produtiva, ainda que frágil, decorrente de uma alteração da base econômica, gerada pelo avanço do estamento mercantil. Portanto, a Ciência passa a existir como força produtiva a partir do Renascimento fato que vai se ampliando dentro do capitalismo monopolista.

Um longo processo sócio-econômico-cultural, preparado a partir da Renascença como base para o surgimento de um novo modo de produção — o burguês — em contraposição ao velho modo de produção — o feudal, encontra em Galileu o intelectual comprometido e compromissado com a mudança social, pois o Matemático de Pádua, além de lições públicas, preocupa-se com as aplicações práticas da Matemática a problemas técnicos e mecânicos, chegando mesmo a ter uma oficina em sua casa. Isso se torna fundamental para o desenvolvimento de toda sua teoria astronômica, pois, ao saber da invenção de um aparelho que aproxima objetos distantes, fa

---

9. MARX, K.- "Contribuição à Crítica da Economia Política",p.24-25.

brica em 1609 um telescópio, com o qual deslumbra a sociedade veneziana — constituída, em grande parte, de mercadores navais — que vê, no aparelho, um instrumento útil para a navegação. Mas Galileu aponta o telescópio para o céu e então começa o conflito entre a velha ciência aristotélica e o novo espírito científico. As contradições são expostas em livros como "Siderus Nuncius","Istoria e dimostrazione intorne alle macchie solari", "Saggiatore" e outros, com alto teor polêmico e com características singulares, pois são escritos em italiano e sob forma dialogada — facilitando assim sua divulgação a todas as camadas — em contraste com o usual latim e com a forma erudita de apresentação.

Dissemos anteriormente que Galileu é o "intelectual novo", comprometido e compromissado com mudanças sociais, pois, através de sua Ciência e seu "discurso competente" — com os quais está comprometido — fundamenta uma nova visão do mundo e do homem, bem como da realidade e da existência — com o que demonstra o seu compromisso com o social.

O "Homem Coperniciano" nos fornece, por outro lado, dados para que possamos refletir sobre a *análise dos fenômenos naturais*, criando um sistema de *categorias do conhecimento matemático e científico* que nos permita tomar consciência da realidade concreta.

Ao procurarmos estabelecer um sistema de categorias do conhecimento matemático, não pretendemos um sistema fechado de análise da realidade, o que seria a negação do método dialético; entretanto, temos presente a necessidade de desvelar indicadores de como o homem se aproxima da realidade, buscando mostrar o movimento que compreende transformações qualitativas na realidade concreta, a partir da atividade humana, de tal forma que o pensamento reflita, criativamente, essa realidade.

Desse modo, mostraremos como as categorias exercem media ções entre o concreto e o abstrato, entre o empírico e o teórico, entre a experiência e o modelo matemático, entre a evidência e a intuição. A partir dessas categorias, demonstraremos que a Matemática é uma instância no "movimento geral do abstrato ao concreto, ou antes, do abstrato científico ao concreto captado enquanto tal"[10].

Todos sabemos que atividade humana é, em princípio, fundamentada na teoria e na prática. Historicamente, devido às características da cultura grega, os dois termos nascem antagônicos, isto é, a expressão do trabalho físico repousa na prática e a do puramente pensado, na teoria.

Veremos, entretanto, que essa separação não é tão tranqüila, nem aceita sem reservas. Passemos pois em revista a história das ciências. Umas das primeiras ciências a se constituir como tal é a Astronomia. Seu desenvolvimento, porém, é muito mais devido a fatos empíricos (predominância prática, como: navegação comercial, determinação de épocas de plantio e astrologia),do que propriamente a suposições teóricas. Outras ciências têm seu início da mesma forma, ou seja, utilizando o binômio "prática - teoria" como pilar. Podemos citar entre outras: A Matemática - com os sumérios, egípcios e jônicos; a Medicina - com Hipócrates e Nicandro; a Química e a Biologia - com Demócrito e Teofrasto; a Física - com Tales, Aristóteles e Arquimedes.

Com Sócrates, Platão e Aristóteles, há uma mudança clara do mundo real para o mundo ideal. Isso fica mais explícito a partir de Platão, com o "mundo das formas". Aqui surge um ponto de ruptura em relação à concepção anterior de Ciência,pois o real passa a seguir o ideal, isto é, a existência segue a essência. Es

---

10. LEFEBVRE, H.- "Lógica Formal/Lógica Dialética" p. 90 - 121.

sa atitude, na qual a teoria é priorizada em relação à prática, vai predominar até Leonardo da Vinci, que começa, de novo, a sugerir a observação como ponto de partida. Essa retomada de posição ganha mais vigor com Galileu, em 1612. De novo, podemos dizer que a existência e a experiência fornecem o ponto de partida do qual decorrem a essência e a teoria.

No princípio do nosso século, temos um novo ponto de ruptura em relação à concepção de Ciência: Einstein torna-se o novo paradigma de cientista. E, mais uma vez, temos a inversão: do teórico, do puramente pensado, ou seja, da abstração surge o modelo de visão da realidade, realidade não visível do espaço imaginado nas geometrias não — euclidianas. Novo triunfo da teoria sobre a prática.

As contradições presentes na história das ciências também o são na história da Matemática e os movimentos que geram a Matemática têm a sua origem na realidade concreta, isto é: 11

> *A natureza, essa totalidade imediata, desenvolve-se em idéia lógica e em 'espírito'. A lógica é a ciência do conhecimento; é a teoria do conhecimento. O conhecimento é o reflexo da natureza pelo homem; mas não se trata de um reflexo simples, imediato, total; esse processo consiste em toda uma série de abstrações, de formulações de conceitos, de leis, etc.; e os conceitos, leis, etc. (o pensamento, a ciência = a idéia lógica) abarcam relativamente, aproximada-*

11. Embora tendo presente as objeções ao texto de Lênin, ele nos parece oportuno em razão da sua explícita concepção de Ciência como um produto do devenir histórico.

> *mente, as leis da natureza em eterno movimento e desenvolvimento. Aqui existem, realmente, objetivamente, três termos: 1. a natureza; 2. o conhecimento do homem, isto é, o cérebro do homem (enquanto produto superior dessa natureza); 3. a forma do reflexo da natureza no conhecimento humano. Essa forma são os conceitos, as leis, as categorias, etc. O homem não pode aprender= refletir = reproduzir a natureza integralmente, em sua 'totalidade imediata'; tudo o que pode fazer é aproximar-se eternamente dessa totalidade, criando abstrações, conceitos, leis, uma figuração científica do universo, etc.*[12].

Podemos então perceber as categorias como reflexo da natureza no conhecimento humano e, portanto, com o fim de exercer mediações na aproximação da totalidade imediata do homem. Nos três níveis propostos no texto de Lênin, as categorias pertencem:

i) à natureza;

ii) ao conhecimento do homem (como se processa);

iii) ao reflexo da natureza (leis, conceitos etc).

No primeiro nível, a natureza, iremos localizar a categoria experiência, a atividade sensorial do homem sobre a realidade concreta. No segundo nível, o conhecimento do homem, o cérebro do homem, localizaremos as categorias evidência e intuição como mediadoras entre o prático, o fenômeno e o teórico, as leis, os conceitos. No terceiro nível, o reflexo da natureza, tra

---

12. Lênin, citado por LEFEBVRE, H. em "Lógica Formal/ Lógica Dialética", p. 276, grifos nossos.

balharemos a categoria totalidade, no sentido de que nesse nível se formula um "modelo" reflexivo da realidade, a partir do movimento de abstração do concreto ao teórico e do abstrato científico ao concreto real.

A estrutura deste ensaio segue, de certa forma, passos que mostram as relações entre a Matemática e a Sociedade, buscando nas categorias do conhecimento matemático, o movimento pelo qual possamos fornecer indicações para uma teoria crítica no ensino de Matemática. Pretendemos, pois, ter nas categorias uma abordagem, entre outras, para desvelar tanto o ato da criação matemática como o fato educacional referente ao ensino da Matemática.

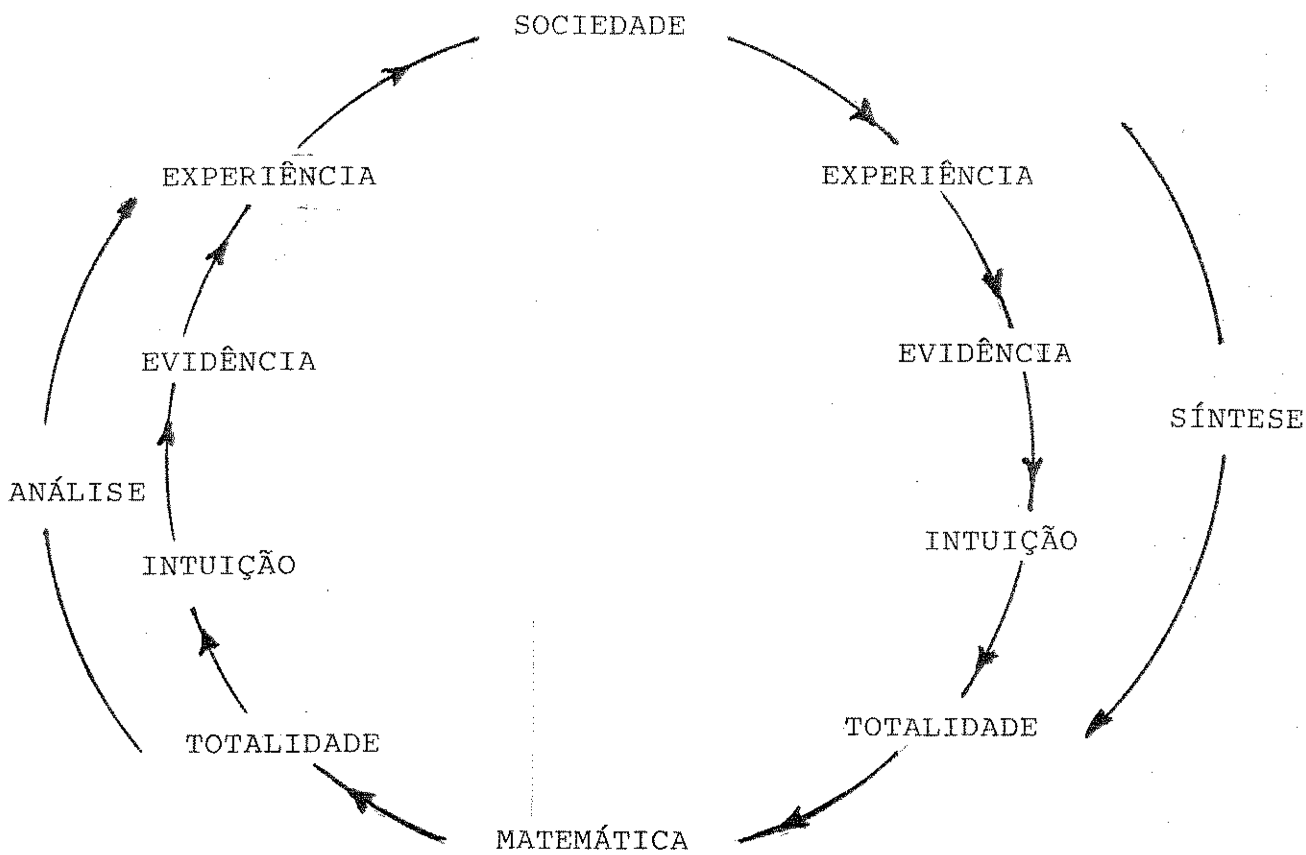
No primeiro capítulo, caracterizaremos a Matemática como produção social do homem, portanto, ligada às relações de produção. A forma que pretendemos dar às articulações entre a Matemática e o social procura ter um caráter *"intrínseco, no sentido de correlação de idéias umas com as outras, de época a época, sempre em correspondência com a situação objetiva que gera o processo social de produção dos bens humanos".* [13]

No segundo capítulo, em cortes históricos previamente selecionados por refletirem não só momentos de crise na Ciência mas também alterações nas relações de produção, mostraremos a evolução social da Matemática.

No terceiro capítulo, trataremos das categorias do conhecimento matemático. A forma de abordá-las seguirá os seguintes passos: a caracterização das categorias, o relacionamento entre elas e as mediações por elas geradas no movimento entre o concreto e o teórico. Esse movimento, em nível de síntese, tem sua origem na sociedade, pela atividade humana, atra

13. PINTO, A.V.- "Ciência e Existência", p. 91.

vés da *experiência* em direção à *evidência*. Dessa, deslocamo-nos no sentido da *intuição* e, daí, para a *totalidade*. Salientamos que esse movimento não é unilateral nem é mecânico. Em nível de aplicação, essa trajetória tem sua origem indo da Matemática à *totalidade*, da *totalidade* à *intuição*, da *intuição* à *evidência*, da *evidência* à *experiência*, e dessa à Sociedade, podendo ser graficamente assim representada:



No quarto capítulo, trataremos de uma visão do ensino de Matemática tendo como fulcro a abordagem externalista da Matemática, priorizando os sensos Matemáticos e mostrando a correlação destes com o aprendizado. É importante salientar que tanto a abordagem externalista bem como a valorizaçao dos sensos Matemáticos estão conjunturalmente imbricados com o ensino de Matemática fundamentado na realidade.

CAPÍTULO I

MATEMÁTICA E SOCIEDADE: A CIÊNCIA HISTORICAMENTE POSSÍVEL

> *Podemos distinguir os homens dos animais pela consciência, pela religião, por tudo o que se quiser. Mas eles começam a distinguir-se dos animais assim que começam a produzir os seus meios de vida, passo este que é condicionado pela sua organização física. Ao produzirem os seus meios de vida, os homens produzem indiretamente a sua própria vida material* [1].

Desde o alvorecer da humanidade, o homem desenvolveu-se biológica e socialmente, permitindo assim que a sua ação sobre a natureza fosse efetuada através da ideação reflexiva — a prática humana que compreende um movimento de transformação qualitativa na realidade concreta, a partir do pensamento do homem, crescendo em quantidade e qualidade ao refletir de forma criativa a natureza circundante. Tal ação tem caráter basicamente comunitário e as novas conquistas, descobertas e invenções pertencem ao grupo, ou melhor, à consciência comunitária que as aprimora, seleciona e transmite de geração a geração. Dentro do espectro de ações orgânicas que o homem gera para produção de seus meios de vida, algumas possuem um aperfeiçoamento o qual o impele a ser produtor de uma série de instrumentos de intervenção na natureza. A partir de técnicas rudimentares, passa a instrumentalizar objetos existentes em sua realidade, pondo-os a serviço de suas finalidades. A neces

---

1. MARX, K e ENGELS, F.- "Ideologia Alemã", p. 15.

sidade do homem de objetivar-se — de produzir um mundo humano — é fundamentalmente prática — de origem material — no sentido de produzir sua própria existência.

> *Produzir é, por um lado, projetar-se, objetivar-se no mundo dos objetos produzidos por seu trabalho; produzir é, igualmente, integrar a natureza no mundo do homem, fazer com que a natureza perca seu estado de pura natureza em si, para converter-se em natureza humanizada, ou natureza para o homem. Como a natureza de per si não tem um caráter antropológico, o homem tem de ajustá-la a seu mundo humano, através da transformação a que a submete com seu trabalho* [2].

Se tomarmos o processo de produção da existência do homem, podemos relacionar o desenvolvimento da Ciência com a evolução dos modos de produção da sociedade. É, porém, conveniente ressaltar que a Ciência não produz a alteração nos modos de produção da sociedade mas, sim, exerce a mediação entre a intervenção intencional do homem na natureza e o crescente processo de "hominização". O homem torna-se mais humano em sua ação sobre a natureza e essa torna-se mais humanizada com a atividade do homem.

Nessa perspectiva, ao intervir na natureza e ao produzir instrumentos para essa intervenção, a praxis humana é constituída de dois momentos distintos, ou seja, a elaboração de instrumentos — o objeto instrumentalizado pela ideação reflexiva do

---

2. VÁZQUEZ, A.S.- "Filosofia da Praxis", p. 144.

homem em sua intervenção na natureza — e a concepção de idéias — o ato intencional do homem. A mediação entre os instrumentos e as idéias é realizada pela "técnica" na preparação e na utilização dos instrumentos.

Ao relacionarmos a Ciência e a produção dos meios de vida, objetivamos, de modo explícito, a historicidade da Ciência, que é umbilicalmente relacionada com o processo histórico do homem. A história do homem, em seu processo de humanização, revela com clareza a história da cultura por ele produzida e, em caráter objetivo, a história da Ciência que, sendo a forma mais apurada do conhecimento humano, participa das mesmas condições gerais que produzem a cultura do homem. A realidade, a Ciência e o homem se entrelaçam organizadamente na produção da história, de tal forma que:

> *A historicidade da ciência deve ser compreendida não pelo lado formal, extrínseco, evidente, de que a humanidade aumenta constantemente o conhecimento da realidade, mas pelo lado intrínseco, no sentido da correlação das idéias umas com as outras, de época a época, sempre em correspondência com a situação objetiva que a gera no processo social de produção dos bens humanos. Deste modo, não basta reconhecer que a ciência de hoje é historicamente condicionada, e será substituída pela de amanhã, mais perfeita; faz-se preciso reconhecer que em todas as fases pretéritas isso aconteceu, e que o mesmo se dará em toda situação futura. O que em cada momento se entendeu como "ciência" era a forma mais perfei*

> *ta que podia assumir então a capacidade humana de compreensão e discernimento da realidade.* [3]

Parece-nos óbvio que cada época produz a "Ciência historicamente possível". Isso é fundamental para a nossa reflexão a respeito das relações entre os modos de produção e o desenvolvimento científico. Torna-se necessário historiar o conceito de Ciência ao longo da escalada do homem na busca do conhecimento a respeito da natureza. Mais ainda: é premente relacionar a historicidade da Ciência com a historicidade dos métodos de que se utilizou o homem no objetivo de compreender a realidade.

> *A relação entre a produção, a técnica exigida por esta e a ciência varia de uma formação econômico-social a outra, e muda igualmente de acordo com o caráter e objeto da ciência de que se trate. Pode-se, porém, estabelecer historicamente que a um baixo nível de desenvolvimento das forças produtivas serão menores as exigências que se apresentam à ciência, e, por conseguinte, esta se desenvolverá mais débil e lentamente.* [4]

Isso nos leva a entender porque o saber científico nas civilizações primitivas possuía fortes conotações místicas e religiosas, pois, nas condições históricas vigentes, era a única forma de saber que detinha uma possibilidade de conhecimento organi-

---

3. PINTO, A.V.- "Ciência e Existência", p. 91-92.
4. VÁZQUEZ, A.S.- "Filosofia da Praxis", p. 216.

zado da realidade. Não é relevante se tais conhecimentos são ou não — segundo nossa perspectiva atual — crendices ou manifestações mágicas perante fatos rotineiros da natureza.

O saber primitivo, de cunho mágico, esotérico e religioso possuía características de um método rudimentar, empírico, popular, ligado evidentemente às condições da época. É, porém, vital, salientar que esse saber primitivo tem aspectos metodológicos claros, pois as artes mágicas obedeciam a um ritual, de difícil aprendizado e execução, correspondente às exigências de apreensão "racional" da realidade e, portanto, embasando uma visão de mundo.

> *O que chamamos de magia justifica-se como saber científico para a época em que florescia porque era aquele que atendia aos reclamos da exigência metódica a que chegava a consciência social do momento, dada a capacidade então possível de penetração do homem no conhecimento do mundo material, de aproveitamento e transformação dos processos naturais. O que chamamos de magia era então a forma da auto-consciência crítica, dada a situação de desenvolvimento das forças naturais produtivas e seu reflexo no pensamento humano* [5].

A Ciência dos povos que antecedem ao período greco-romano é, então, uma mistura de Astrologia com Astronomia, de Geometria com Agrimensura, de Física com Arquitetura, de Aritmética com

---

5. PINTO, A.V.- "Ciência e Existência", p. 93.

impostos, de tal sorte que o conhecimento nesse período é empírico e, ao mesmo tempo, organizado e organizador das sociedades de então, pois, organizado pela sociedade sob o ponto de vista da prática diária do artesão, é organizador na medida em que está a serviço das classes dominantes — sacerdotes e nobres.

A grande massa dos conhecimentos do período empírico aliada às grandes mudanças sociais, causadas pelo surgimento da "polis" e pelo fato de a sociedade grega ser escravista, fornece os parâmetros para avaliarmos o desenvolvimento científico do período histórico grego, no qual encontramos alguns pontos - chave para o ulterior desenvolvimento da Matemática enquanto Ciência, tais como:

> *...a idéia lógica de prova, a idéia empírica das leis da natureza (de espaço, particularmente), a emergência do conceito de operações, e a evolução, dentro da matemática, da descrição estática para a descrição dinâmica da natureza* [6].

De Tales de Mileto a Apolônio de Perga, os matemáticos gregos apresentam uma evolução nos conceitos da ciência matemática sem paralelos em toda a história da humanidade, se considerarmos um determinado povo em uma dada época. Esse feito tem muitas explicações possíveis, tais como: a aptidão grega para o raciocínio lógico,[7] a linguagem dos gregos, a existência de sistemas filosóficos embasando sua Ciência, um sistema de governo diferente das teocracias orientais, a criação da "polis" e o regime

---

6. BRONOWSKI, J.- "A Escalada do Homem", p. 155.

escravista. Alguns desses argumentos não são aceitáveis, pois, ou mitificam a cultura, a sociedade e a "raça" grega — como no caso da "aptidão" grega para Matemática — ou desconsideram o fato de as civilizações mais antigas do Oriente terem dado à cultura grega contribuições como: *o alfabeto fonético fenício, a Astronomia Matemática babilônica, a Matemática e a Geometria babilônica e egípcia.* Consideramos conveniente ressaltar que o argumento da "existência de sistemas filosóficos que embasavam sua ciência" é falho do ponto de vista histórico, pois desconsidera a magia e a religião existentes no Egito e na Mesopotâmia — embora primitivas e ingênuas — como organizadoras dessas sociedades e de sua Ciência.

> *Em lugar de explicar pela raça a mentalidade , seria melhor concordar com as modernas concepções históricas, refletindo que a civilização grega, inclusive sua ciência, é essencialmente uma civilização da Idade do Ferro e não da Idade do Bronze. Seu tipo de democracia não poderia ter existido sem o amplo uso dos instrumentos e armas de ferro que a técnica da fundição*

---

7. HEATH, T. - Greek Mathematics, vol. I, pág. 3 - 6. A respeito desta "aptidão grega" exaltada por Heath, B. Farrington comenta : "Consideramos esse ponto de vista inaceitável. Em parte porque temos aversão a explicar as características mentais por fundamentos raciais e também porque, de qualquer modo, os gregos não constituíam uma raça, mas um povo de ascendência mista". Extraído de FARRINGTON, B. "A Ciência Grega", p. 8.

> *deste metal tornou possível. Poderíamos também mencionar os fenícios, inventores do alfabeto fonético, e, citando fatos incontestes, concluir que foi em Mileto, cerca de 800 anos antes de Cristo, que se adaptou o alfabeto à língua grega. Invenção que democratizou a escrita, abolindo o penoso aprendizado, mediante o qual os escribas da antiga civilização adquiriram a sua proficiência na escrita hieroglífica ou cuneiforme. A democracia grega não existiria sem a divulgação do alfabeto* [8].

O regime da "polis" facilitava a atividade intelectual do cidadão grego, pois o trabalho manual era executado pelos escravos. O cidadão grego tinha liberdade para pensar e criar. O surgimento de uma classe ociosa permite o desenvolvimento de teorias e a reflexão sobre essas e, vale dizer, permite teorizar sem base empírica e sem levar em conta os fatos. A estratificação social é que permite o surgimento do "milagre grego". É, também, por sua vez, a causa determinante do declínio dessa cultura, pois o cidadão grego:

> *... vivia às custas do trabalho dos escravos, e, portanto, não lhe interessava a técnica, mas só o exercício da teoria; a separação entre o conhecer e o fazer correu paralela com a estratificação social; a Ciência foi o adorno espi-*

---

8. FARRINGTON, B.- "A Ciência Grega", p. 9.

> *ritual de uma casta privilegiada que dispunha de tempo para dedicar-se à esterilidade da vida contemplativa, e ainda que sempre tivesse — incluindo os dias da decadência — gênios individuais que pisaram o umbral da Ciência moderna, não penetraram em seu interior porque o pensamento grego se aniquilou por falta de aplicação dos conhecimentos científicos às necessidades da vida* [9].

Os métodos e procedimentos gregos se exauriram em si próprios. Somente dez séculos após a decadência grega, a Ciência retoma como ponto de partida o ponto de chegada dos gregos, durante o período do Renascimento. Temos em Copérnico, Galileu, Descartes e Newton os verdadeiros herdeiros de Ptolomeu, Arquimedes, Euclides e Apolônio.

O período do Renascimento se apresenta como fundamental para uma análise social da evolução da Ciência, constituindo-se em uma fase de superação dos métodos científicos até então vigentes. De Leonardo da Vinci a Newton, o princípio da experimentação é, de novo, reconduzido ao centro da questão científica — não se trata de substituir os temas da Ciência grega, mas de, evitando a contemplação, voltar de novo os olhos para a natureza. Não é por acaso que o tipo do novo cientista começa no artista e no artesão: o artista, na representação da natureza de forma harmônica e com arguta percepção dos detalhes de perspectiva; o artesão, com profunda percepção da harmonia da natureza e na representação das leis

---

9. VERA, F - "Científicos Gregos", p. 43.

que regem o mundo. Leonardo é o artista — também um cientista de primeira estirpe, pois seus trabalhos de Anatomia são quase perfeitos — e Galileu, o artesão da nova Ciência, pois com suas qualidades de artífice constrói o telescópio e, com a sensibilidade do artista, aponta-o para o céu.

O desenvolvimento da Ciência no Renascimento não é fato isolado: da sociedade escravista grega para a sociedade artesanal das cidades-estado do Renascimento italiano, o desenvolvimento social está presente. Talvez mais revolucionária que a Ciência de Galileu seja a concepção de Estado formulada no Renascimento.

> *O novo estado não era já moldado e conduzido pelo costume, mas por homens. Por isso, o estado como uma obra de arte criou (pois teve de ser criada) uma nova arte: a arte da governação. O primeiro livro moderno sobre este assunto foi escrito no fim da vida de Leonardo por Nicolau Maquiavel* [10].

A razão do crescente florescimento intelectual na Itália no período do Renascimento se deve, principalmente, ao desenvolvimento econômico das cidades-estado como Milão e Veneza, ao norte e Florença, Roma e Nápoles, mais ao sul. O comércio é a principal atividade econômica, pois a Itália está no eixo comercial do Oriente com a Europa.

"O Príncipe", escrito por Maquiavel em 1513, é dedicado a Lourenço de Médici como um convite a seus favores. Leonardo da

---

10. BRONOWSKI, J. e MAZLISH, B. - "A Tradição Intelectual do Ocidente", p. 39.

Vinci envia uma carta a Lodovico Sforza, o Mouro, onde, em troca dos favores de proteção, dispõe-se a fazer desde estátuas até inventos de armas de guerra. O político e o artista têm muitos pontos em comum.

> *Maquiavel pode ter diferido de Leonardo pelo fato de ser um erudito e um humanista, mas era como ele enquanto cientista. De fato, Maquiavel foi o primeiro cientista da sociedade, no mesmo sentido em que Leonardo foi o primeiro cientista da natureza dos tempos modernos*[11].

Tal e qual Leonardo, que faz uma seleção de fatos da vida tanto nos quadros quanto nas experiências, Maquiavel tem que selecionar o que fica sem consideração na política, isto é, tem que refletir sobre o que excluir para melhor delimitar o problema.

> *Era uma abordagem extraordinária daquilo que era uma época pré-científica, na qual apenas um pequeno grupo de homens como Jean Buridan, Tartaglia e Leonardo da Vinci olharam de modo igual para os objetos naturais. O que significa que a escolha de perspectiva de Maquiavel o conduziu ao empirismo. Francis Bacon, que era ao mesmo tempo moralista e cientista da natureza, reconheceu um antecendente e um parentesco de espírito quando disse"dependemos muito de Maquiavel e de outros que escreveram o que os homens*

---

11. Ibid.-p. 49.

fazem e não o que devem fazer"[12].

O desenvolvimento matemático e o social vão logo em seguida sedimentar sua união na figura de René Descartes, que, um século após Maquiavel ter escrito *"O Príncipe"* e Leonardo da Vinci ter estudado a natureza, escreve o *"Discurso do Método"*.

Descartes, uma combinação de filósofo e matemático, promove, em nível filosófico, uma mudança em relação à postura aristotélica e tomista, quando toma a existência como precedente à essência, ou seja, retoma a prevalença do dado sensorial sobre o abstrato. Com a obra de Descartes está fundamentada a base filosófica do ideário liberal da revolução burguesa. A obra matemática de Descartes — Geometria Analítica — exerce influência no pensamento ocidental, com nível de importância equivalente ao de sua obra filosófica.

> *A tarefa que ele tinha em mente era construir a máquina do mundo rigorosamente por métodos dedutivos. Precisava por isso de operar segundo uma série fundamental de axiomas. Os jesuítas que haviam sido seus mestres haviam encontrado sanção para os seus axiomas na autoridade: a de Aristóteles, São Tomás de Aquino e dos textos eclesiásticos. Que autoridade podia propor Descartes ? Propôs a da razão. Os axiomas da ciência natural, tal como (supunha ele) os axiomas da matemática, deviam brotar por si mesmos do espírito humano. Deviam ser*

12. Ibid.-p. 50.

tão evidentes que não pudessem ser postos em dúvida. Atingimos os alicerces do pensamento quando já não temos razões para duvidar; e,por isso, só os atingimos pela dúvida [13].

Dos processos empíricos dos povos anteriores à civilização greco-romana até o racionalismo de Descartes, verificamos que cada época reúne as atividades, as atitudes e os procedimentos de investigação, ordenando-os sob a forma de categorias do conhecimento científico que permitem uma análise do mundo e gerando determinados mecanismos de pensamento que buscam explicar e dar conta dos fenômenos naturais e da visão do mundo.

O homem síntese do período que comumente chamamos de Revolução Científica é Isaac Newton. Dois fatores de origem pessoal explicam a importância do cientista: o primeiro é seu poderoso senso matemático, superior talvez ao de muitos de seus compatriotas e colegas da Royal Society; o segundo é a sua percepção da importância que teria para a Ciência a observação sistemática, ou seja, Newton vê a experimentação como um processo crítico passo a passo, sistemático. A Ciência, para Isaac Newton, constitui-se na descoberta das leis da natureza, ou melhor, na descoberta de como funciona a máquina do universo.

Um paralelo — Leonardo da Vinci e Maquiavel — foi estabelecido por nós. Podemos também observá-lo entre Newton e John Locke. Nesses últimos encontramos a busca da racionalidade na Ciência e na política. Para Locke, a lei que rege a sociedade é a lei da razão, baseada nos direitos naturais.

---

13. Ibid.-p. 236.

> *Está implícito em Locke que a verdadeira função do governo não é impor leis ao povo mas descobrir quais são as leis da natureza. Locke parece ter acreditado que há leis da natureza que governam a sociedade humana exactamente como as leis da natureza que governam a velocidade de queda dos corpos* [14].

A política, para Locke, nessa perspectiva, deveria funcionar como no método newtoniano, uma Ciência que busca, através da investigação, as leis naturais que regem a sociedade e governam de acordo com elas.

> *Assim se Newton via Deus como um regulador de relógios, Locke via o governo como juiz conservando o trabalhar social; ambos tinham como ideal uma estabilidade mecânica, baseada em leis da natureza* [15].

Na França, o método newtoniano encontrou em Voltaire um defensor. Ele propunha que o importante é como as coisas funcionam e não sua essência. Voltaire e D'Alermbert introduzem na França as idéias de Newton e Locke. O pensamento francês — preso a problemas como a liberdade da vontade e a natureza da graça — teve, nas idéias newtonianas, o catalizador necessário para partir para assuntos práticos e, com Voltaire, atingir o anseio de mudanças políticas de grandes camadas da população francesa .

14. Ibid.-p. 227.

15. Ibid.-p. 227.

Crepúsculo dos heróis e o nascer das aspirações populares como regentes de sua própria história.

Ao afirmarmos que Newton representa a síntese da Revolução Científica, o objetivo não é evidenciar o herói solitário, mas destacar que o processo desencadeado por Leonardo, Galileu e Descartes encontra , na tenacidade de Newton, a união entre o racional e o empírico, o pensamento e o fato, a teoria e a prática. E, paralelamente, encontramos em Maquiavel, Locke,Bacon, Voltaire, D'Alembert e Diderot o fermento filosófico do ideário da Revolução Francesa.

A Revolução Científica não é causa direta da Revolução Industrial. Essa é feita de inventos — no final do século XVIII, na Inglaterra — como o ferro fundido com o carvão, a máquina a vapor, a máquina de fiar, a tecedeira mecânica e o sistema fabril. Além de certos, porém não profundos conhecimentos científicos do século XVII, a Revolução Industrial baseia-se naquilo que a Revolução Científica tem de mais explosivo: a concepção de mundo.

> *O que a ciência fez para esses homens ..., em minas, fábricas e oficinas, foi libertar seus interesses. Não mais conceberam o mundo como providencialmente fixado e protegido para sempre. Viram-no construído e ordenado pelo homem ...*[16]

A Revolução Industrial traz consigo, provavelmente, a evidência dos limites naturais do homem e do mundo. E, mais, fornece-nos um momento de reflexão sobre a evolução do conhecimento

16. BRONOWSKI, J.-"O Senso Comum da Ciência", p. 53.

científico do homem. Um ponto de análise é o fato de a evolução dos métodos de produção científica depender historicamente da plena consciência das formas de produção material e econômica até então vigentes, isto é, a Ciência possível antes da invenção da máquina a vapor, por exemplo, difere da que virá posteriormente , pois alteram-se os meios de produção. A invenção da máquina de fiar, da tecedeira mecânica e do sistema fabril alteram os meios de produção bem como modificam, significativamente, a Ciência. Essa passa a se encaixar como força produtiva, isto é, entra no amplo espectro do sistema capitalista, que busca mercadorias para funcionarem como valor excedente, gerando Capital. Contraditoriamente, porém, essa Ciência produz um efeito inverso ao anterior pois, segundo Marx:

> *Mesmo esta ciência 'pura' da natureza só alcança o seu objetivo, bem como o seu material, por meio da atividade sensível dos homens* [17].

Um outro ponto de reflexão a respeito da evolução do conhecimento científico prende-se à evidência de que a descoberta científica, antes de ser efetuada por "gênios", é formada a partir de atitudes efetuadas com eficiência, ou seja, via "bom senso" de senso comum; em momento historicamente determinado, essas atitudes transformam-se em reflexão ideativa, proporcionando um aprofundamento do conhecimento da totalidade concreta.

É útil estarmos atentos a essas reflexões, para que possamos entender o progresso científico oriundo dos séculos XIX e XX. Alguns autores costumam prodigalizar os feitos científicos

---

17. MARX, K. e ENGELS, F.- "Ideologia Alemã", p. 28.

do século XIX — tido para esses como século heróico — devido ao número de teorias e cientistas nele existentes. Darwin, Gauss, Riemann, Lobachewski, Marx e Freud são exemplos dentro do universo dos cientistas do século XIX. Firmam-se como Ciência a Biologia, a Química e a Economia. Surge a Psicanálise. Sem querer, porém, distorcer fatos, se, por um lado, o avanço é devido ao desenvolvimento do novo modo de produção — o capitalista — que necessita de maior especialização, decorrente da maior divisão do trabalho, por outro lado, o avanço, em algumas áreas, é mais devido a trabalhos anteriores. Alguns exemplos justificam a última afirmação: Gauss, Riemann e Lobachewski, embora com obras significativas como as geometrias não euclidianas, números complexos e espaços métricos, praticamente não alteram os métodos vigentes de criação matemática. Marx nunca escondeu sua admiração por Adam Smith e por Hegel e, embora sua contribuição fundamental seja a criação do materialismo dialético, muito de sua trajetória apóia-se nos antigos mestres. Por outro lado, como contribuições realmente inovadoras, podemos computar a "Origem das Espécies", de Charles Darwin e o método psicanalítico, de Freud.

O traço característico da Ciência, a partir do final do século XIX, é a existência de uma grande quantidade de material simbólico. A Física, a Química e a Biologia passam por um processo de abstração e, conseqüentemente, começam a se utilizar da Matemática. Surgem os cientistas profissionais e a Ciência passa a ser uma peça na engrenagem do modo de produção capitalista. Encontramo-nos no limiar da Revolução Tecnológica, que tem como rumo um norte diferente daquele que orientou a Revolução Científica. A direção é fornecida pela eficiência técnica do processo fabril.

> *Se o trabalho do artesão inspira uma teoria, no caso da máquina automática é a teoria que produz um objeto totalmente inédito. No primeiro exemplo, uma representação antecipa o produto e norteia a ação concreta do trabalhador; no segundo, as representações subjetivas e individuais, tanto do fabricante operário como daquele que utiliza o autômato, são transpassadas, de um lado, pela planta da máquina, de outro, pelo itinerário do sistema produtivo, no qual ela se integra e para o qual ela funciona* [18].

O século XX torna-se, então, o período histórico em que se produz uma quantidade de máquinas e fábricas sem comparação possível aos períodos anteriores. A Ciência, aliada à Tecnologia, busca, em conjunto com o capital, uma produtividade maior no sistema fabril que interessa ao capitalismo, o qual, por sua vez, financia as pesquisas científicas.

O simbolismo presente nas relações de produção da sociedade capitalista está também presente na Ciência. O material simbólico existente nas mais variadas ciências tem sua raiz tanto na Matemática como na sociedade que a produz. Esse fato decorre das conquistas a que o mundo assiste a partir dos séculos XVIII e XIX, no campo da Matemática.

Na aurora do nosso século, encontramos a humanidade com uma crença muito forte no poder ilimitado da Ciência e, em parti

---

18. GIANNOTTI, J.A.- "Filosofia Miúda", p. 37.

cular, nas estruturas matemáticas e nos sistemas lógicos — acrescidos do modelo axiomático que matemáticos como Hilbert acreditavam depurado de suas falhas iniciais. A Matemática passa a ser encarada como a "Linguagem das Ciências".

A Matemática do século XX assiste a uma crescente importância ao preocupar-se com a abstração e análise de esquemas amplos. O grupo Bourbaki demonstra esse estado quando, ao escrever seus "Elements de Mathématique", observa que "a apresentação dos assuntos é feita de forma secamente abstrata e geral que retrata claramente a estrutura lógica".

A arquitetura da Matemática torna-se lógica e abstrata, deduzida de princípios básicos através de regras lógicas, para que a ênfase nas estruturas leve a uma economia considerável do pensamento. Esses pressupostos acabam por revelar-se de um cunho altamente elitista, pois ficam ilhados nos Institutos de Matemática e casualmente têm aplicação em alguma teoria científica abstrata.

Eleva-se a imaginação e elimina-se a intuição da Matemática. Mas essa situação caracteriza bem o século XX, um mundo de regras e leis — lógica e abstratamente corretas — que são formalmente corretas a partir da "Lógica da Dominação".

---

19. BOYER, C.B.- "História da Matemática", p. 458.

CAPÍTULO II

CONCEPÇÕES EM MATEMÁTICA: A CONSCIÊNCIA HISTÓRICA

> *E como tudo que é natural deve nascer, assim também o homem possui seu ato de nascimento: a história, que, no entanto, é para ele uma história consciente, e que, portanto, como ato de nascimento acompanhado de consciência é ato de nascimento que se supera. A história é a verdadeira história natural do homem* [1].

2.1. Introdução

Ao relacionarmos a Ciência e as relações de produção, apontamos um dado que influi na produção científica do homem e que nem sempre é considerado,pois não damos conta da relação entre a história, a história da Ciência e a evolução social dos processos de produção científica.

Deteremos nossa análise, neste momento, na evolução dos processos de produção científica utilizados pelo homem desde a Antigüidade até os dias de hoje. Isso se torna necessário,pois,desvelando as inter-relações da sociedade com a produção científica, aproximar-nos-emos da história da Ciência do homem.

Tomaremos, como fio condutor do nosso estudo,a história do desenvolvimento do pensamento matemático e sua aplicação à realidade bem como a sistematização e descrição das operações mentais envolvidas e a conseqüente análise de seus pressupostos e fundamentos. A escolha recai no ponto crucial da história da

---

1. MARX, K. - "Manuscritos Econômico - Filosóficos", p. 41.

Ciência, na medida em que a Matemática — conforme é vista nos dias de hoje — surge em um contexto em que não se privilegia a experiência mas,sim, a atitude teórica, ou seja, a abstração.

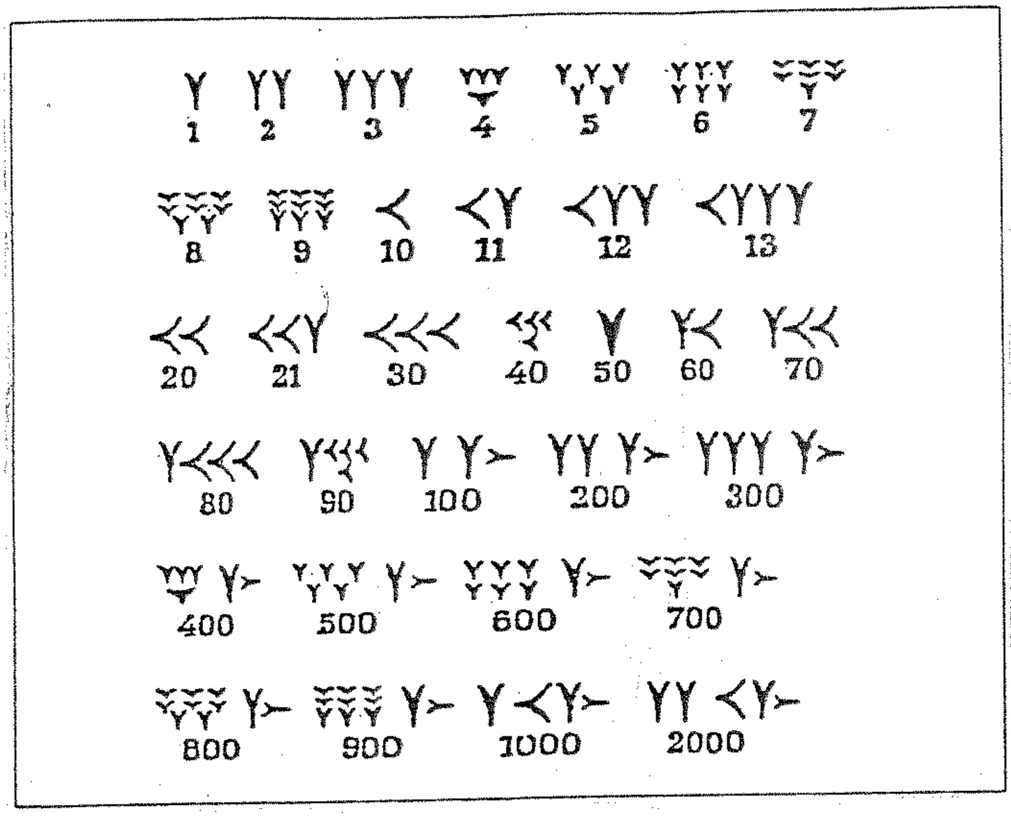
Na história da cultura ocidental,encontraremos uma Matemática que se desenvolveu desde um rudimentar, porém eficiente, sistema de numeração, desde a medida de áreas cultivadas e cálculos astronômicos até os modelos matemáticos atuais que dominam desde códigos lingüísticos até estruturas psicológicas. Isso evidencia uma Ciência historicamente pautada pela ideação reflexiva da realidade.

Para a melhor compreensão do desenvolvimento do pensamento matemático, traçamos linhas de demarcação, ou seja, cortes historicamente determinados, formulando, a grosso modo, uma periodização dos procedimentos matemáticos ao longo dos milênios de sua existência. O resultado é o agrupamento em quatro grandes concepções metodológicas em Matemática: Empírica, Dedutiva, Racional e Simbólica.

2.2. <u>Concepção Empírica</u>

A Matemática,nos primórdios da civilização,tem características de uma Ciência cujo objeto se encontra no mundo real, logo, com laços efetivos com a vida humana e suas relações de produção, isto é, vinculada ao meio social em que se desenvolve. Podemos exemplificar de forma clara tal situação, com a existência de diferentes sistemas de numeração — diretamente ligados à cultura e à sociedade nas quais se inseriam — seguindo de perto a escrita corrente, de tal forma que tais caracteres são considerados números ideográficos. A forte ligação entre a escrita do povo e sua numeração fica exemplificada pelos "números cuneiformes" dos assírios e pelos "números pictóricos" dos chineses.

A tábua dos números cardinais assíricos desde 1 a 2000 é como segue:



Verificando-se do seu exame que os números inferiores a 100 são expressos pelos símbolos da adição e que, para as centenas e para os milhares, um coeficiente menor colocado à esquerda de 100 e de 1000 indica quantas vezes estes últimos números são multiplicados, para se formarem os novos números [2].

Outra característica marcante da Matemática empírica é o florescimento da Geometria às margens do rio Nilo. A Geometria — que é a parte da Matemática que mais fascina pela aplicabilidade ao mundo real — tem seu alvorecer nos problemas de demarcação

2. ALMEIDA e VASCONCELOS, F. de- "História das Matemáticas na Antigüidade", p. 102.

de terra causados pelas enchentes sucessivas do rio Nilo,as quais provocavam problemas práticos na taxação de impostos e na determinação da quantidade de terra de cada agricultor. Heródoto comenta da seguinte forma esse fato:

> *Sesóstris ... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes ... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem ... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda ... Por esse costume, eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia* [3].

A questão básica consistia em que,após as enchentes,que eram periódicas, as demarcações dos terrenos eram desfeitas, causando invasões de terras e alteração no valor do imposto a ser pago. Surgem então os medidores de corda[4] com a função de calcular a área das propriedades.

> *Ao que parece, os agrimensores e construtores egípcios operavam de modo análogo ao dos chineses, na construção de ângulos retos, em terreno plano, formando um triângulo de lados iguais*

---

3. BOYER, C.B.- "História da Matemática", p. 7.

4. Harpedonatas, traçadores de corda ou medidores de corda: segundo Cantor (Vorlesungen, vol. 1º, p.106), o nome tem sua origem no traçado que os mesmos faziam dos ângulos retos, por meio de uma corda dividida em três segmentos de comprimentos respectivamente iguais a 3, 4 e 5.

> *respectivamente a 3, 4 e 5 — processo análogo ao que os práticos de todos os países ainda hoje empregam para traçar um ângulo reto no terreno* [5].

O conhecimento dos egípcios vai, porém, um pouco além do triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5. Num papiro contemporâneo do papiro de Ahmés, encontram-se fórmulas de relacionamento dos lados de um triângulo retângulo que nos fazem lembrar o teorema de Fermat — $x^n + y^n = z^n$ — no seu caso particular, em que temos $x^2 + y^2 = z^2$. Almeida e Vasconcelos comenta:

> *E são conhecidos pela designação de números pitagóricos, apesar de terem sido considerados muitos séculos antes de Pitágoras, como se mostra nos fragmentos dum papiro egípcio, contemporâneo pelo menos do papiro de Ahmés, em que se encontram as seguintes equações (SIC):*
>
> $1^2 + (\frac{3}{4})^2 = (\frac{5}{4})^2$; $8^2 + 6^2 = 10^2$;
>
> $2^2 + (\frac{3}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$; $16^2 + 12^2 = 20^2$
>
> *que se obtêm multiplicando cada termo da equação (SIC):*
>
> $4^2 + 3^2 = 5^2$
>
> *pelo mesmo número* [6].

---

5. ALMEIDA e VASCONCELOS, F. de - "História das Matemáticas na Antigüidade", p. 81.

6. Ibid,- p. 81.

Assim, da mesma forma que os egípcios, os babilônios desenvolvem uma poderosa Matemática de cunho altamente místico, uma vez que cultivada pelos sacerdotes babilônios e ligada à Astrologia. As "Tábuas Babilônicas" encontradas em 1864, próximo de Senkerek no Eufrates — documentos que já têm cerca de 4000 anos — são prova eloqüente de uma Matemática que atinge o conhecimento da clássica regra para resolução de equações de segundo grau, através de procedimentos aritméticos. É conveniente ressaltar o sistema de numeração babilônico utiliza a base sexagenal.

> *A solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para os egípcios, mas Neugebauer em 1930 revelou que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônicos em alguns dos mais antigos textos de problemas. Por exemplo, um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. A solução desse problema, equivalente a resolver* $x^2 - x = 870$, *é expressa assim:*
>
> *Tome a metade de 1, que é o 0;30 e multiplique 0,30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado*[7].

O saber matemático dos sumérios, assírios, egípcios e

7. BOYER, C.B.- "História da Matemática", p.23.

fenícios carece de um rigor lógico que se tornará, a partir dos gregos, marca da Ciência Matemática. O empirismo das civilizações teocráticas orientais permanece, porém, até os nossos dias, seja no teorema de Pitágoras — relação conhecida por quase todos os povos que erigiram edificações monumentais, como as pirâmides do Egito e os jardins suspensos da Babilônia, ou construções simples, como casas de alvenaria quando um mestre de obras ensina um pedreiro a levantar paredes ficando estacas no chão de modo a obter configuração de triângulo retângulo, — seja no raciocínio de camadas étnicas minoritárias, de favelados, de tribos indígenas...[8]

2.3. Concepção Dedutiva

A partir de VI A.C., o conhecimento matemático desloca-se para a Grécia, onde encontra no raciocínio grego, em grande parte gerada pela linguagem, uma aptidão particular para criar as formas de conhecimento objetivo.

> *Acrescente-se, a esta aptidão grega, o fato de que os instelectuais helênicos se viram favorecidos pelo regime político da Polis, que, diferente das teocracias orientais, deixou-os em liberdade de ação, pois, livres das tarefas manuais, que se confiavam aos escravos, dispuseram do ócio necessário para meditar* [9].

---

8. Com respeito à Matemática não institucionalizada existem alguns trabalhos sérios como: "Na Vida Dez, Na Escola Zero: Os Contextos Culturais da Aprendizagem da Matemática" - Carraher, T.N., Carraher, D.W. e Shliemann, A.D. in Cadernos de Pesquisa nº 42, agosto de 1982, São Paulo.

9. VERA, F.- "Científicos Gregos" , p. 13.

A hegemonia grega, no que toca ao conhecimento matemático, estende-se de VI A.C. até IV D.C., ou seja, de Tales de Mileto a Diofanto de Alexandria.

O ponto inicial de nossa análise incide sobre o fato de que os condicionantes sociais e políticos originam a ruptura entre o saber e o fazer, ou seja, entre o teórico e o prático, na cultura grega. A Ciência, aqui, passa a ter como base o estudo das idéias e das formas. Vamos encontrar o teórico precedendo o prático: Tales estudava Astronomia e,depois,aplicava-a às suas atividades mercantis, pois,como próspero comerciante de azeite,possuía embarcações e o conhecimento astronômico era fundamental para a navegação.

Outro fato que ilustra o corte entre o teórico e o prático na cultura grega é a transformação da atividade dos agrimensores egípcios e babilônicos para a construção de ângulos retos conforme já citamos na concepção empírica, no teorema de Pitágoras. Com efeito, uma das maiores conquistas da escola pitagórica é a elaboração de uma prova para a conhecida relação pitagórica. Isso ocorre, aproximadamente, no século VI A.C., provavelmente em Crotona, onde o sábio grego mantinha sua escola. Como a tradição da escola pitagórica impedia a divulgação dos seus estudos fica difícil supor como originalmente Pitágoras "demonstrou" seu teorema, embora exista um grande acervo de demonstrações do "teorema de Pitágoras".[10] Para os tempos de VI A.C., é razoável supor que a prova pitagórica tenha um grande enfoque empírico e,portanto, acreditamos que seja próxima do original uma das duas versões gráficas, que apresentamos a seguir:

---

10. RADICE, L.L.- "A Matemática de Pitágoras a Newton", p. 30.

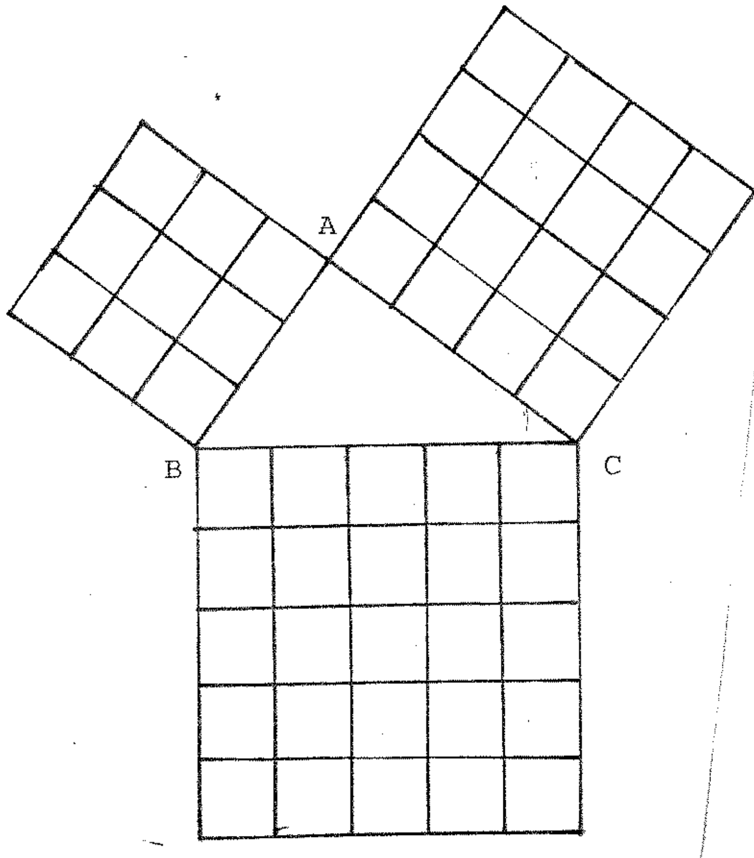


FIGURA 1

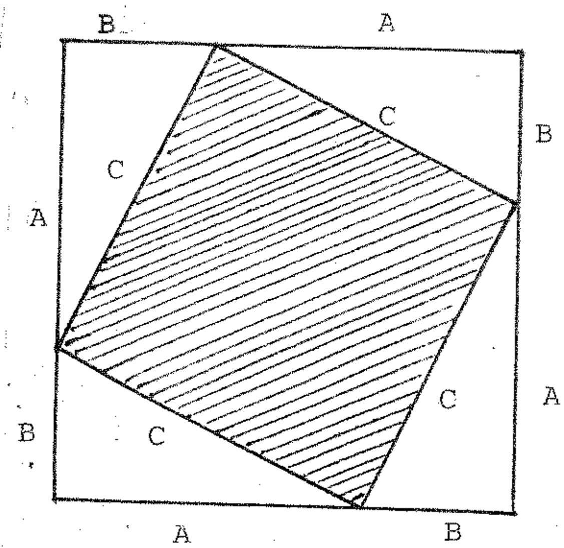


FIGURA 2

Na primeira representação, há o aspecto da contagem — os números tinham particular valor para Pitágoras. Contando os quadradinhos que compõem os quadrados dos catetos e comparando esse número com o obtido na contagem dos quadradinhos da hipotenusa, verificamos a veracidade da relação pitagórica. Essa versão da prova pitagórica é simples e bem difundida nos livros didáticos.

A segunda representação, conforme Radice, é a que alguns matemáticos julgam ser a originalmente dada por Pitágoras. Essa representação parte da idéia de um quadrado de lado A + B, dividido em quatro triângulos retângulos de catetos A e B e em um quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa dos triângulos cujos catetos são A e B. Reorganizando a figura 2, obtemos:

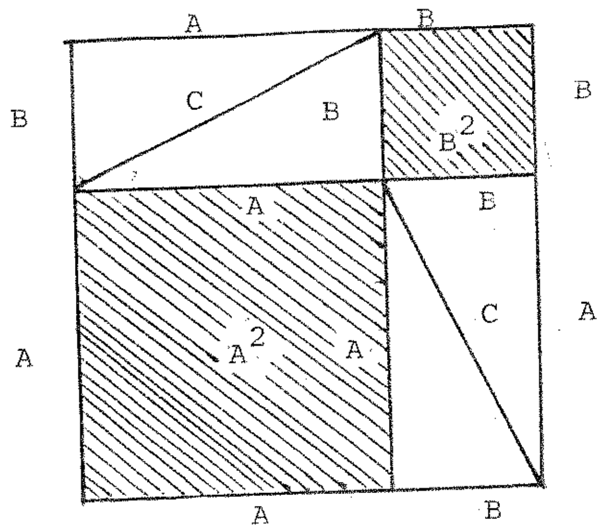


FIGURA 3

Podemos verificar, geométrica e/ou algebricamente, que as superfícies hachuradas nas figuras 2 e 3 são equivalentes, vale dizer, a relação $C^2 = A^2 + B^2$ é demonstrada — é mais preciso dizer"é mostrada"— como nos tempos de Pitágoras.

O pensamento matemático grego toma forma e corpo com Euclides de Alexandria (365 A.C. - 275 A.C.). Com ele temos a real alteração do objeto básico da Matemática como Ciência: do plano real para o plano abstrato. A Matemática passa a ser, em nível científico, tratada como o seu próprio objeto.

A obra de Euclides — o "Ensino dos Elementos de Geometria" [11] — caracteriza-se por ser a precursora do sistema axiomático, do qual, a partir de determinados axiomas e postulados, são inferidos os teoremas.[12] É comum dizer que os gregos criam

11. No dizer de Proclo de Lícia, esse é o nome da obra Euclides, a qual em nossos dias, é chamada de "Os Elementos de Geometria". Proclo de Lícia (412 - 485): considerado um dos primeiros historiadores da Matemática.

12. Aqui, axiomas e postulados têm o significado originalmente dado por Euclides. Os axiomas, no modelo euclidiano, são verda-

a razão humana em função do avanço notável dado por Euclides à Geometria, pois ele não só registra e aumenta os conhecimentos geométricos anteriores como justifica, por meio da razão, as observações, as regras, as práticas (o saber geométrico tem base empírica, pois representa uma seqüência de conhecimentos práticos no cotidiano) colhidas ao longo de uma lenta série de observações empíricas. E, assim, os *"medidores de corda"* se convertem em geômetras, que trabalham com construções mentais por puro movimento intelectual, da mesma forma que "a corda" se converte "no que não tem largura", ou seja, a corda- concreta, palpável e visível - transforma-se, na obra de Euclides, em reta, algo abstrato e que só tem comprimento.

Para uma visão clara da transformação ocorrida com a Matemática, no que respeita a seu objeto de estudo, vejamos como fica enunciado o teorema de Pitágoras na obra de Euclides:

> *Nos triângulos retângulos o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é equivalente aos quadrados sobre os lados que formam esse ângulo reto* [13].

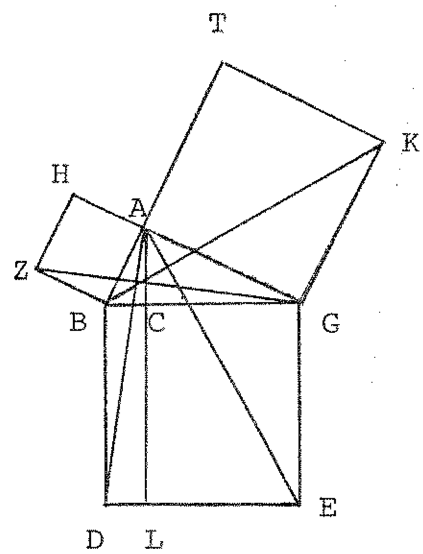
A demonstração é feita através da construção de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo e através da equivalência de áreas entre os dois paralelogramos formados no quadrado da hipotenusa com os dois quadrados dos catetos, como mostra a fi

---

cont. 12. des evidentes que não precisam de prova e os postulados são verdades práticas, articuladas entre si cuja aceitação é pedida. No terceiro capítulo,abordaremos o método euclidiano, ou melhor, o estilo matemático euclidiano.

13. VERA, F.- "Científicos Gregos" , p. 733.

gura:



Por construção, Euclides afirma:

> *O paralelogramo CDBL é o dobro do triângulo ABD porque ambos têm a mesma base $\overline{BD}$ e estão entre as mesmas paralelas $\overline{BD}$ e $\overline{AL}$, e o quadrado ZHBA é o dobro do triângulo ZBG porque ambos têm a mesma base $\overline{ZB}$ e estão entre as mesmas paralelas $\overline{ZB}$ e $\overline{HG}$; logo o paralelogramo CDBL é equivalente ao quadrado ZHBA* [14].

Analogamente, Euclides mostra que o quadrado TGAK equivale ao paralelogramo GLEC e conclui:

> *portanto o quadrado BDEG é equivalente aos dois quadrados ZHBA e TAGK juntos* [15].

---

14. Ibid,-p. 733.

15. Ibidem.

A demonstração do teorema de Pitágoras baseado na equivalência de áreas, segundo alguns historiadores, é do próprio Euclides.

O saber matemático passa, a partir de Euclides, a ser identificado com a abstração, o teórico, preocupado com a beleza do raciocínio e a exatidão da forma. Em resumo: a Ciência Matemática passa a ter existência prescindindo da realidade concreta,ou seja, é ato de pura ideação — aqui remotamente reflexiva em relação ao mundo real. Isso só se torna possível graças ao tipo de sociedade grega da época, em que a divisão do trabalho era bem demarcada,pois o mundo das idéias pertencia aos cidadãos gregos e o do trabalho, aos escravos. [16]

Estão lançadas as bases filosóficas da sociedade feudal, que começa a ser questionada no Renascimento, baseada numa visão de mundo fundamentada em Aristóteles, via São Tomás de Aquino. É conveniente ressaltar que Aristóteles viveu entre 384 A.C. e 322 A.C. e Euclides, aproximadamente entre 365 A.C. e 275 A.C. Logo, a lógica utilizada por Euclides deve ter sido influenciada pela lógica aristotélica do "Organum", embora não haja, em Euclides, qualquer referência a Aristóteles.

2.4. Concepção Racional

Muitos séculos se passam até que o crescimento matemático seja retomado. Alguns fatores são decisivos para que, durante nove séculos, a evolução do raciocínio matemático fique estag-

---

16. Sobre a divisão de trabalho da sociedade grega, consultar: VERA, F.:-"Científicos Gregos" e MARX, K. - "O 18 Brumário de Luiz Bonaparte" e "Formações Pré-Capitalistas".

nada. Entre eles,podemos destacar:

i) o domínio militar romano, durante um largo período, fez com que a lógica da Matemática fosse esmagada pelo peso das botas romanas;

ii) a estrutura feudal privilegiava uma sociedade fechada que,no máximo, reproduzia a cultura já conhecida;

iii) o poder temporal, exercido pela igreja católica, justificava que o conhecimento só era correto quando baseado nos dogmas da fé cristã, de tal sorte que não se questionava o poder exercido pela igreja nem se deixava que esse fosse colocado em risco;

iv) não havia meios mecânicos eficazes para a divulgação do conhecimento anterior, nem para troca de informações entre possíveis pesquisadores; logo, não havia acesso ao saber clássico dos gregos;

v) O método dedutivo grego, que praticamente se esgotara, era o único aceito, impedindo o crescimento do saber matemático e científico em geral.[17]

No século XV, alguns acontecimentos culturais de peso modificam o panorama científico da época, sendo que o primeiro e quiçá o mais importante avanço é a invenção da imprensa de tipos móveis, permitindo maior difusão do conhecimento. O segundo fator decisivo é o clima cultural e político que se instala na Itália Renascentista. Situar claramente o Renascimento é um tanto ou quanto complicado, do ponto de vista cronológico: uns autores consideram seu início nos séculos XII ou XIII; outros prolongam a Idade Média até o século XVII; alguns identificam seu início com

---

17. Aqui se faz referência ao "método da exaustão",do qual o principal representante, entre os gregos, é Arquimedes. O método da exaustão é explicitado no anexo 3.

a queda de Constantinopla sob os turcos em 1453. Decidimos, então, tomar o Renascimento a partir de três pontos-chave:

i) o conceito de estado, a partir das cidades-estado na Itália;
ii) o florescimento econômico gerado pelo período dos descobrimentos e pelo comércio, o que transforma significativamente o ambiente aristocrático italiano, com o aparecimento de atividades bancárias e (quase) empresariais;
iii) a facilitação, por causa da imprensa, da divulgação da cultura grega.

Bronowski & Mazlish sugerem que se considere o Renascimento dividido em duas espécies:

> *Fazemos, assim, uma separação entre o Renascimento aristocrático, como, por exemplo, a sua leitura dos manuscritos Gregos e Romanos e o seu gosto por um curioso idealismo platônico, tal como era tratado na Academia Platônica de Florença; e uma outra espécie de Renascimento que seguiu ou suplantou aquele — um Renascimento popular, empírico, menos tradicional e hierárquico e mais científico e voltado para o futuro* [18].

No Renascimento, a figura de Leonardo da Vinci desponta como modelo de cientista, técnico e artista. Destacamos o Leonardo cientista que, ciente da exaustão dos métodos gregos,

---

18. BRONOWSKI, J. e MAZLISH, B.- "A Tradição Intelectual no Ocidente", p. 25.

volta seus objetivos para a observação. Isso é de uma importância crucial, pois, libertando o conhecimento das amarras dedutivas, indica o caminho da Ciência dos próximos séculos.

> *Os pintores do Renascimento anteriores a Leonardo já tinham dado o primeiro passo nesse sentido; haviam mostrado que o pormenor da natureza distingue uma cena da outra e dá significado a cada uma. O que Leonardo fez foi transferir essa descoberta da oficina para o laboratório. Fez com que o olhar do artista para o detalhe significativo se tornasse parte do equipamento essencial do cientista*[19].

Leonardo busca na exatidão o apoio da Matemática. Partindo da observação, tem a idéia de perspectiva, faz aplicação da homotetia para a feitura de seus quadros e aplica a simetria para fugir da perseguição da Santa Sé, nos seus escritos sobre máquinas voadoras e anatomia humana. A paixão pelo real leva-o à experimentação. Esses dois pontos constituem os vetores da Ciência que advirá nos próximos séculos.

No século XVII, a Matemática tem um avanço significativo, devido em grande parte ao surgimento, nesse século, de Galileu, Descartes, Newton e Leibniz. A Matemática encontra os caminhos da libertação da Ciência, preparados no Renascimento por Leonardo, onde a razão havia sido alçada à estatura que os gregos lhe conferiram.

---

19. Ibid., p.37.

Nesse século, o que vamos encontrar é a nova concepção de procedimento empírico que, sem desprezar o conhecimento dedutivo e suas conquistas, enfatiza a observação e a experimentação, acrescentando a elas o conhecimento matemático que explica e justifica o fenômeno observado. É o modelo racional de ver o mundo. Essa constitui a grande colaboração dada à Ciência por Galileu.

Anos mais tarde, Descartes vai justificar, no "Discurso do Método", o procedimento científico do novo tempo. Newton alargará, sem dúvida, tanto o procedimento experimental quanto o teórico. Leibniz antecipará os futuros estudos dos fundamentos matemáticos, realizando trabalhos sobre Lógica. A partir desses, uma enorme sucessão de trabalhos em Ciência e, em especial, na Matemática, vai sacudir a Europa, a ponto de Kant considerar a Matemática e, em particular, a Geometria "o modelo da ciência racional".

O olho de Leonardo, a tenacidade de Galileu, a razão de Descartes, o universo de Newton representam o desvelamento de uma nova realidade social, pois, em menos de três séculos do início de uma Ciência nova, revolucionária e polêmica, as antigas formas políticas feudais começam a ruir, dando origem e fundamentação à burguesia revolucionária.

O modelo racional de ver o mundo finca, pois, suas origens no Renascimento Italiano e tem, na perspectiva humanista, a concepção do mundo. Instala-se a Idade da Razão.

> *Aos olhos dos experimentadores do tipo de Leonardo da Vinci e dos inovadores no campo da música, a experimentação era o caminho capaz de conduzir à arte verdadeira, o que equivalia dizer, o caminho capaz de conduzir à verdadeira natureza* [20].

É importante salientar: o saber científico renascentista é competente por ser revolucionário e é revolucionário por ser competente.

2.5. Concepção Simbólica

2.5.1. Introdução

No alvorecer do século XX, os matemáticos, estimulados pelas descobertas das geometrias não-euclidianas e pelo trabalho de David Hilbert —"Grundlagen der Geometrie", que dá à Geometria Euclidiana um tratamento axiomático — envidam esforços no sentido de uma fundamentação do edifício matemático, buscando evitar as antinomias. Basicamente, destacam-se três tendências distintas: o *Logicismo*, com Frege, Zermelo e Russell; o *Intuicionismo*, com Brouwer, Heyting e Weyl; o *Formalismo*, com Hilbert.

Gonseth cita algumas datas importantes nesse movimento:

> *... a antinomia de Burali-Forti*[21] *é de 1887; a de Russell, de 1903; nesse momento a obra de Cantor está terminada. A primeira edição dos Grundlagen der Geometrie de Hilbert apareceu em 1899; os trabalhos de Zermelo sobre a axiomatização da teoria dos conjuntos colocam-se entre 1904 e 1908; o monumento logístico dos Principia Mathematica está pronto em 1913, sintetizan*

---

20. WEBER, M.-"Ciência e Política - Duas Vocações", p. 31.
21. Burali-Forti pertence à escola de Peano, cuja maior contribuição se prende à tentativa de deduzir, através de uma linguagem lógico-simbólica, a Matemática. Para maiores detalhes: Costa,N.C.A. "Fundamentos da Matemática ".

> *do todo o trabalho dos logísticos até aquela data. Citando ainda os Problemi della Scienza, de Enriques, em 1905, vindo após as obras filosóficas de Poincaré, teremos fixado, para a seqüência, alguns pontos úteis* [22].

Na Concepção simbólica passaremos em revista alguns pontos das três tendências mencionadas, isto é, citaremos seus pressupostos matemáticos e suas limitações.

2.5.2. Tendência Logicista

A Lógica Formal, em meados do século XIX, é impulsionada pelas descobertas de Boole no sentido de dotar a Lógica de um simbolismo matemático, permitindo assim uma análise das operações lógicas. Com o mesmo objetivo destacam-se, no século XVII, os trabalhos de Leibniz.

Com os trabalhos de Frege e Russel, porém, é que toma corpo a tendência logicista:

> *Na obra de Bertrand Russell, líder do Logicismo, convergem as pesquisas de Cantor, Dedekind e Weierstrass referentes à aritmetização da análise, à Lógica Matemática de Boole e Peano e à teoria dos conjuntos. O próprio Russell reconhece essas influências e apresenta suas teses como remate de tais investigações* [23].

O pressuposto básico do Logicismo se prende ao fato de considerarem a Matemática e a Lógica como dependentes da Logísti

22. GONSETH, F. - "Philosophie Mathematique", p. 48.

23. COSTA, N.C.A.da "Introdução aos Fundamentos da Matemática", p.6.

ca (Lógica Matemática, Lógica Simbólica, Lógica Algorítmica). Em suma, a Matemática se reduz à Lógica, ou melhor, à Logística.

Em sua obra "Princípios da Matemática", Bertrand Russel, definindo Matemática Pura, demonstra claramente o princípio acima exposto:

> *Matemática pura é a classe de todas as proposições da forma ≪ p implica q ≫ onde p e q são proposições que contêm uma ou mais variáveis, as mesmas nas duas proposições, e nem p e nem q contêm nenhuma constante exceto as lógicas. As constantes lógicas são todas as noções definíveis nos termos seguintes: implicação, a relação de um termo com uma classe da qual é membro, a noção de ≪ tal que ≫, a noção de relação e outras noções tais que possam ser incluídas na noção geral de proposição da forma anterior. Além destas, a Matemática usa uma noção que não é elemento integrante das proposições que considera, a noção de verdade* [24].

Embora os logicistas pretendam dar conta de toda a Matemática, dando-lhe um corpo teórico sem paradoxos ou antinomias, nos últimos tempos do século XX, várias dúvidas e vários paradoxos atingem o Logicismo — por exemplo o axioma da escolha ou de Zermelo — de tal sorte que as teses logicistas, em grande parte, caem por terra. Além do mais, a Matemática atual ultrapassa os

---

24. RUSSEL, B.- "Los Principios de la Matematica", p. 393.

limites que os logicistas pretendem impor-lhe.

2.5.3. Tendência Intuicionista

Na crítica à axiomatização empreendida por Zermelo sobre a Teoria dos Conjuntos, vários matemáticos como Borel, Lebesgue e Baire afirmam que:

> *... a teoria geral dos conjuntos estava muito distante da intuição matemática imediata para que um axioma visando a um conjunto qualquer tenha um significado indubitável* [25].

O expoente máximo do Intuicionismo, Brouwer, afirma que "a intuição da verdade é o único critério do verdadeiro".

O Intuicionismo possui raízes históricas no "Finitismo" de Kronecker, para o qual o infinito como algo pronto, ou seja, como uma abstração a partir de coisas existentes e distintas, não parece correto. Acredita que o infinito se caracteriza apenas potencialmente e que somente os conjuntos finitos possam ser considerados como realizados.

> *Na verdade, entretanto, quem levou as teses de Kronecker ao extremo, elaborando uma nova filosofia da Matemática, batizada de Intuicionismo (ou algumas vezes, de Neo-intuicionismo, para evitar confusões com as velhas formas de Intuicionismo), foi o geômetra holandês Brouwer* [26].

---

25. GONSETH,F.- "Philosophie Mathematique", p. 62 .
26. COSTA,N.C.A.da- "Introdução aos Fundamentos da Matemática",p.20 .

o mundo. Os intuicionistas consideram a intuição como atividade da razão, da inteligência do sujeito em relação ao mundo que o cerca.

A idéia que norteia o Intuicionismo parece ser a do construtivismo, pois a realidade em Matemática é determinada pelo que o matemático cria, independente da simbolização, pois não há verdades eternas em Matemática, ela não se baseia em entidades metafísicas, relativas a objetos atemporais, platônicos.

A Matemática Intuicionista, *"em resumo, pertence à categoria das atividades sócio-biológicas e se destina a satisfazer certas exigências vitais do homem"*[28].

As idéias de Brouwer parecem encaminhar-se para a Matemática enquanto atividade prática do homem e,não,como uma doutrina, uma teoria pronta e acabada em alguns campos, como pretendem os logicistas e os formalistas.

2.5.4. Tendência Formalista

A tendência formalista tem em David Hilbert o seu criador e líder, sendo que, na atualidade, os seus seguidores mais próximos são os matemáticos do grupo Bourbaki.[29]

Para nos aproximarmos das idéias dos formalistas,é necessário primordialmente compreender o que é método axiomático.Esse método é estruturado da seguinte forma: em primeiro lugar, é

---

28. COSTA,N.C.A.- "Introdução aos Fundamentos da Matemática",p.20.

29. O grupo de matemáticos que publicou uma considerável obra em Matemática, usando o nome fictício de Nicholas Bourbaki,pretendia alcançar a inteligibilidade profunda da Matemática. O grupo Bourbaki tem influência direta, no dizer de Lucienne Felix: 1) da linguagem da Teoria dos Conjuntos; 2) da obra de Cantor; 3)da axiomática de Hilbert. Felix, L.- "Matemática Moderna", 1968.

eleito um certo número de noções não definidas e de proposições primitivas (a essas últimas é dado o nome de axiomas); em segundo lugar, são estabelecidas as regras de inferência (ao conjunto de axiomas e de regras de inferência denominamos postulados); em terceiro lugar, só são aceitas outras proposições derivadas de axiomas por meio das regras de inferência; em quarto lugar, sem implicações de ordem material, ou seja, sem estabelecer a natureza ou significado inicial das proposições e das relações entre elas, conseqüências de ordem abstrata são buscadas.

O método axiomático é extremamente útil à Matemática, pois permite o estudo da estrutura de um determinado corpo de conhecimentos matemáticos e, mais ainda, constatadas semelhanças entre uma e outra estrutura, permite, aplicando as demonstrações de uma teoria, desenvolver a outra, em virtude do fato de serem isomorfas. Um exemplo significativo desse procedimento é o desenvolvimento gerado no estudo dos números complexos, em particular na análise complexa, a partir da descoberta de que a estrutura desses é isomorfa à estrutura do plano euclidiano. São aplicadas, então, aos números complexos as propriedades e demonstrações utilizadas no plano euclidiano.[30]

A proposta formalista divide-se em três etapas distintas:

i) axiomatização das teorias lógico-matemáticas pelo método já descrito;

ii) formalização das axiomáticas obtidas, ou seja, substituição dos conceitos primitivos, dos postulados, dos conectivos lógicos e dos princípios lógicos por símbolos e arranjos simbólicos;

---

30. Para maiores detalhes, ver Boyer, C.B. "História da Matemática"

iii) demonstração da consistência das axiomáticas formalizadas, procurando evidenciar que não ocorrem contradições.

O terceiro item é o signo distinto da escola hilbertiana, a Metamatemática ou Teoria das Demonstrações,[31] cujo objetivo é demonstrar da consistência das teorias formalizadas, ou seja, a consistência da própria Matemática.

O Formalismo, então, "*deseja transformar o método axiomático, de técnica que é, na essência mesma da Matemática*"[32].

Não podemos negar, porém, não só o avanço que a tendência formalista deu à Matemática, principalmente no que respeita aos seus princípios e fundamentos, bem como o avanço significativo em determinadas teorias matemáticas com o uso do método axiomático e com os resultados alcançados em Metamatemática.

---

31. Ho~~y~~diernamente, distingue-se Metamatemática de Teoria das Demonstrações ou Teoria da Prova.

32. COSTA, N.C.A. da- "Introdução aos Fundamentos da Matemática", p. 33.

CAPÍTULO III

CATEGORIAS DO CONHECIMENTO: O NÓ E A REDE

O homem tem diante de si uma rede de fenômenos da natureza. O homem instintivo, primitivo, não faz distinção entre si e a natureza. O homem consciente o faz, e as categorias são níveis do conhecimento do mundo, pontos de confluência na rede, que ajudam a conhecê-la e dominá-la[1].

3.1. Introdução

Ao propormos o estudo das categorias do conhecimento matemático, temos como objetivo mostrar as formas pelas quais o homem, a partir da realidade concreta, apropria-se do instrumental matemático. Não pretendemos cristalizar o pensamento matemático, mas dar conta do movimento que compreende transfomações qualitativas na realidade concreta, por meio da atividade prática do homem, isto é, desvendar as mediações entre o concreto e o abstrato na formação do pensamento matemático.

Ao construirmos um sistema de categorias, temos em mente a construção de um sistema que visa a interpretar concretamente como o pensamento matemático, partindo de dados do mundo objetivo, reflete *"a natureza deste com plenitude e profundidade e a necessária universalidade"*.[2]

---

1. LENIN, V.I., in Kopnin, P,V.- "A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento", p.91.

2. KOPNIN, P.V. - "A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento", p. 114.

Quando detemos nossa análise na história da evolução do conhecimento humano podemos perceber, no movimento efetuado, as leis, os caminhos e as categorias que o homem utiliza na busca *"de novos resultados, na correlação entre o empírico e o teórico, o intuitivo e o formal nesse movimento, na inter-relação de diversos métodos de conhecimento"*.[3]

Quando caracterizamos *categorias*, afirmamos que elas "são termos mais gerais", isto é, são formas de pensamento que buscam refletir o mundo objetivo e sua "rede de fenômenos", numa tentativa de generalização dos mesmos. Podemos, pois, afirmar que as categorias são reduções que buscam abranger a totalidade dos fenômenos e processos sensorialmente perceptíveis, isto é, o cérebro humano pretende, através delas representar/refletir de forma organizada a realidade. Não se trata aqui de separar o homem do mundo, mas de uni-los, pois, por serem as categorias objetivas, refletem processos da natureza e da sociedade, tal e qual existem na realidade.

As categorias nos mostram o movimento dos fenômenos do mundo a partir do desvelar das leis mais gerais do concreto. Dessa forma, podemos afirmar que *"as categorias do materialismo dialético estão vinculadas à solução do problema fundamental da filosofia, ao estudo do processo de pensamento, à relação do pensamento com o ser e à revelação do conteúdo real do objeto"*.[4]

Assim, podemos compreender o movimento de transformações qualitativas na realidade concreta, por meio da atividade prática do homem que, a partir do pensamento e do sistema de categorias, reflete criativamente a realidade, impulsiona a descober

---

3. Ibid, p. 112 - 113.

4. Ibid, p. 107.

ta científica e cria condições para a *"a relação de constituição"*[5] da Ciência com a Sociedade.

A constituição do sistema de categorias do conhecimento matemático busca desnudar as leis objetivas da realidade. Para tanto, explicitaremos os quatro indicadores metodológicos basilares no sistema de categorias por nós utilizado. Em primeiro lugar, considerar *"a unidade entre o lógico e o histórico"* [6], procurando revelar, de forma sucinta e generalizada, a gênese e a evolução da história do pensamento matemático. Em segundo lugar, considerar que o movimento se processa *"do simples ao complexo, do abstrato ao concreto"* [7], isto é, tomar o pensamento como um movimento a partir da "coisa em si" — simples, amorfa e imediata — para a rede complexa de relações, buscando um aprofundamento na realidade concreta. Em terceiro, considerar que *todas as categorias têm origem no real, na prática humana, no mundo objetivo*, isto é, considerar a origem de todas as categorias com base nas inter-relações do sujeito e do objeto, relações essas que têm na experiência, no sensorial, a base de percepção. A base sensorial não tem aqui um caráter fenomenológico, onde as sensações partem da essência do ser, de forma estática, onde a percepção se dá em nível de contemplação. Em quarto lugar, reconhecer que *as categorias são reflexos da realidade sob forma de abstrações.*

Esses quatro indicadores metodológicos correspondem ao

---

5. ALTHUSSER, L.- "Filosofia e Filosofia Espontânea dos Cientistas", p. 38 - 39.

6. KOPNIN, P.V.- "A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento", p. 117.

7. Ibid, p. 117.

movimento pelo qual a natureza, o cérebro do homem e o reflexo da natureza no conhecimento humano criam níveis de distinção, de compreensão, de consciência diante da rede de fenômenos que o homem tem diante de si — o movimento de aproximação sucessiva da realidade em suas "*múltiplas determinações*", isto é, a totalidade concreta.

É importante salientar que esses indicadores metodológicos, e o sistema de categorias geram um movimento que não é unidirecional e mecanicista. Convém ressaltar que o movimento decorrente de um dado sistema de categorias, que siga as premissas aqui expostas, contém um alto grau de relações entre o empírico e o teórico, entre a evidência e a intuição, entre o singular e a totalidade em que o complexo gera o simples — a partir do movimento de síntese criadora — o qual, por sua vez, enriquece o complexo e por ele é enriquecido — a partir do movimento de análise.

Verificamos, pois, que as categorias do conhecimento matemático, aqui propostas, não possuem um movimento linear, mecânico, mas de superação, de saltos qualitativos, isto é:

> *No devir do pensamento e da sociedade, revela-se ainda mais visível o movimento "em espiral": o retorno acima do superado para dominá-lo e aprofundá-lo, para elevá-lo de nível libertando-o de seus limites (de sua unilateralidade).* [8]

Portanto, quando o movimento é considerado como do devir universal e, por isso, causando transformações qualitativas na

---

8. LEFEBVRE, H.- "Lógica Formal/Lógica Dialética", p. 240.

realidade, objetiva um aprofundamento do conhecimento, que é um movimento a partir *"do fenômeno à essência e da essência menos profunda à mais profunda"*.[9] Torna-se necessário, então, captar conexões e contradições na totalidade concreta e penetrar, o mais profundamente possível, na riqueza de conteúdo.

3.2. Categorias do Conhecimento Matemático

3.2.1. Experiência

A categoria *experiência* está na base do conhecimento matemático e, não obstante, também se encontra no topo desse, tanto do ponto de vista histórico como do ponto de vista lógico. Apontamos a gênese da Matemática a partir da *experiência* porque historicamente a necessidade do instrumental matemático surge nos problemas concretos e práticos dos povos sumério, egípcio, chinês, jônico e indiano. Para exemplificar, tomaremos o teorema de Pitágoras.

A relação entre os números 3, 4, 5 dispostos como medida dos lados do triângulo retângulo já era conhecida pelos povos que viveram antes que Pitágoras demonstrasse o famoso teorema a ele atribuído. Uma evidência desse fato é que os "medidores de corda" — função no Egito dada aos medidores de terra — utilizavam a corda com doze nós. Ora, doze é a soma de 3, 4, 5 e também os lados do primeiro triângulo retângulo possível, se considerarmos somente os números inteiros. É evidente, então, a importância do ângulo reto tanto para medições de terra, como para construções. Outra evidência é o fato de os *"babilônios"*,[10] excelen

---

9. Ibid, p. 241

10. Babilônios: utilizaremos esse nome para designar os povos que viveram entre os rios Tigre e Eufrates, como os sumérios, os caldeus, os assírios etc , durante o período até IV A.C.

tes em Aritmética, por razões místicas em relação à Astronomia,[11] terem encontrado triângulos retângulos com medidas 8, 15, 17 e o incrível 3367, 3456, 4825. Bronowski relata assim a história da prova pitagórica:

> *Em um sentido prático, essas culturas já tinham um conhecimento de um arranjo quadrado de construção, no qual as relações numéricas revelavam e formavam ângulos retos. Os babilônios conheciam muitas delas, talvez centenas dessas fórmulas, por volta de 2.000 A.C. Os indianos e os egípcios conheciam algumas. Parece que estes últimos quase sempre usavam o arranjo quadrado, com os lados do triângulo constituídos de três, quatro e cinco unidades. Não foi senão por volta de 550 A.C. que Pitágoras recuperou esse conhecimento do mundo dos fatos empíricos para o universo daquilo que hoje chamaríamos de prova*[12].

A base empírica do teorema de Pitágoras nos mostra historicamente a construção matemática como obra coletiva e, não, individual. Demonstra igualmente o movimento do simples ao complexo e também a base sensorial da Matemática. Aponta o trabalho do matemático como reflexo da natureza, de forma criativa.

---

11. A Astronomia começa a tomar corpo na Babilônia, fundada em razões místicas, como Astrologia. Para maiores detalhes sugerimos consultar Price, D. de S. - "A Ciência desde a Babilônia" e Karlson, P. - "A Magia dos Números ".

12. BRONOWSKI, J.- "A Escalada do Homem", p. 158.

Mas, do ponto de vista lógico, algumas objeções podem ser feitas — sob a ótica do positivismo — baseadas no fato de existirem teorias matemáticas que surgiram unicamente como abstração, isto é, baseadas apenas na teoria e sem nenhuma vinculação com a prática humana. Por exemplo: a Teoria das Matrizes, as Geometrias não-euclidianas.

Como resposta a essas objeções, nós nos ateremos às Geometrias não-euclidianas, produto exclusivo do intelecto humano, ou seja, sistemas lógicos engendrados teoricamente e sem nenhuma base empírica. Como primeira abordagem, apontamos o fato de que essas teorias partem da *negação* do quinto postulado, enunciado por Euclides no livro I dos "Elementos de Geometria" [13] como:

> *Se uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma do mesmo lado ângulos internos menores que dois retos, as duas retas prolongadas ao infinito se encontrarão no lado em que estejam os ângulos menores que dois retos*[14].

Entre os estudiosos de *Euclides*, vários procuraram eliminar a dificuldade contida no postulado quinto, procedendo de forma a:

i) modificar a definição de retas paralelas;

ii) procurar substituir o quinto postulado;

iii) tentar transformar o quinto postulado em teorema.

---

13. No Anexo II desta tese, reproduzimos o texto euclidiano, enunciando a lista de axiomas, definições, postulados e teoremas.

14. EUCLIDES, in Vera, F.- "Científicos Gregos", p. 704, 1º vol.

Esses procedimentos buscam modificar a definição 23, incluindo, por exemplo, o fato de as retas paralelas serem coplanares e eqüidistantes (i). Tentam substituir o postulado quinto por outro mais evidente e de mais fácil aceitação (ii).Por último,procuram demonstrá-lo com a ajuda de outros postulados ou proposições (iii). Questionava-se o fato de o quinto postulado de *Euclides* apresentar-se como verdade evidente — evidência de que provavelmente o próprio *Euclides* duvidava. Era considerado "*verdade decorrente*" de outros axiomas ou postulados, exigindo, portanto, demonstração.

Durante vários séculos, matemáticos tentam demonstrá-lo, isto é, transformá-lo em decorrente das premissas anteriores gastando, segundo Francisco Vera, "montanhas de papel e mares de tinta". Vamos fazer um breve histórico do esforço que representou para a humanidade a conquista das Geometrias não euclidianas que, objetivamente, resolvem o problema das paralelas.

O primeiro matemático a nos fornecer dados sobre as tentativas iniciais feitas com o propósito de eliminar a dificuldade contida no quinto postulado é *Proclo de Lícia (412-485)*, no texto intitulado "*O Postulado das Paralelas*". Segundo *Proclo*, o primeiro a tentar enfrentar essa dificuldade é *Possidônio*(no século I A.C.), que define retas paralelas como eqüidistantes no plano. Mas no pressuposto de que existam retas coplanares e eqüidistantes, esconde-se a hipótese de que o lugar comum dos pontos eqüidistantes de uma reta é uma reta — se conjugarmos a definição 23, a noção comum 9 e a proposição 33, verificaremos que o pressuposto de retas coplanares e eqüidistantes já existe em *Euclides*— o que, objetivamente, equivale ao quinto postulado.

De acordo com proclo, o segundo matemático a tentar superar a dificuldade é *Cláudio Ptolomeu (127-151)*, que acredita haver demonstrado o quinto postulado na obra "*Sobre o encontro das* *retas prolongadas a partir dos ângulos menores que dois retos*". Lança mão de várias demonstrações de *Euclides*, procurando demonstrar o quinto postulado com um lema. Parte da demonstração de que, se uma transversal forma com duas retas ângulos internos iguais a dois retos, essas duas retas são paralelas, isto é, não se encontram. Mais adiante, propõe que a recíproca dessa afirmação também é verdadeira. A proposição de *Ptolomeu* baseia-se no fato de que

> *...quando um reta que incide sobre outras duas e forma ângulos internos do mesmo lado, menores que dois retos, as duas retas não só não são assintóticas* [15] *(...) como o seu encontro se verifica do lado em que os ângulos são menores e não maiores que dois retos* [16].

Proclo adverte contra o raciocínio empregado por *Ptolomeu* na prova da distinção das hipóteses, porque acredita que o raciocínio de *Ptolomeu*, ao dizer que "*uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma de um lado ângulos menores ou maiores que a soma de dois retos*", não é um raciocínio correto de redução ao absurdo. E comenta:

> *Com efeito, que uma certa reta, que corta as paralelas, forme com uma ou outra parte de um mesmo lado, ângulos maiores ou menores que dois retos,*

---

15. Retas assíntotas, na acepção clássica dos gregos, são retas que não se cortam.

16. PROCLO, in Vera, F. - "Científicos Gregos", p. 1.179, 2º vol.

> *não resulta em absurdo; mas que os ângulos situados no interior dessas retas cortadas sejam iguais a quatro retos, há motivo para dizer que estas hipóteses são impossíveis; e se, adotando-as, se consideram retas não paralelas, chegar-se-á às mesmas conclusões, em vista das quais nos opomos a Ptolomeu, porque sua demonstração é manifestamente frágil pelo que dissemos*[17].

O próprio *Proclo* inscreve-se na lista dos que questionam o quinto postulado da Geometria Euclidiana. Recusa-se a admiti-lo como postulado, uma vez que sua inversa, a proposição 17 — *"a soma das medidas de dois ângulos de um triângulo é menor que dois retos"* — é um teorema demonstrado por *Euclides*, não lhe parecendo possível que uma proposição, cuja inversa é demonstrável, também não o seja. *Proclo* alerta também contra os abusivos apelos às evidências (intuições "a priori") e insiste sobre a possível existência de retas assintóticas. Procura demonstrar o quinto postulado, apoiando-se na seguinte proposição:

> *...a distância entre dois pontos situados sobre duas retas concorrentes pode tornar-se tão grande quanto quisermos, se prolongarmos convenientemente as retas*[18].

Essa proposição é apoiada na proposição aristotélica da

17. Ibid.,p. 1180 , 2º vol.

18. Ibid.,p. 1180 , 2º vol.

infinitude do universo. *Proclo* considera-a evidente, mas ela é demonstrada logicamente por *Girolamo Saccheri*[19] em sua obra *"Euclides ab Omni Naevo Vindicatus" (1733)* — "Euclides liberto de toda falha".

Outro matemático, *Nassir - Eddin (1201 - 1274)*, traz uma contribuição pessoal, antepondo-se explicitamente ao teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Eis sua hipótese fundamental:

> *Se uma reta u é perpendicular a uma reta w em A e se a reta v é oblíqua a w em B, então as perpendiculares traçadas de u sobre v são menores que $\overline{AB}$ do lado em que v faz um ângulo agudo com w e maiores do lado em que v faz um ângulo obtuso com w* [20].

Apóia-se na idéia de que, se dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes e caem em uma mesma região, isto é, em um mesmo semi-plano, caso os segmentos sejam perpendiculares a $\overline{AA'}$, obtém-se um retângulo. *Nassir-Eddin* conclui então que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Anteriormente a *Nassir-Eddin*, outros dois matemáticos árabes, *ibn al-Haithan (965 - 1039)* — conhecido no Ocidente com o nome de *Alhazen* — e *Omar Khayyam (1050 - 1122)*, tratam do problema das paralelas. *Alhazen* parte de um quadrilátero tri-retângulo (conhecido como quadrilátero de Lambert) e julga ter provado que o outro ângulo é reto. *Omar Kayyam*

---

19. Girolamo Saccheri(1667 - 1773): conhecido por seus trabalhos sobre a obra de Euclides e em particular sobre o paralelismo.

20. BOYER, C.B.- "História da Matemática", p.176.

parte de um quadrilátero bi-retângulo com dois lados congruentes, perpendiculares à base, conhecido como quadrilátero de *Saccheri*. E complementa-o com a questão de como eram os ângulos superiores, se retos, agudos ou obtusos. Exclui as possibilidades de os ângulos serem agudos ou obtusos, supostamente baseado em *Aristóteles*, e conclui optando pelos ângulos retos. Essas três tentativas são, na verdade, ratificações da teoria euclidiana.

No Ocidente, tanto as primeiras versões dos "Elementos", feitas nos séculos XII e XIII a partir de textos árabes, como as feitas no século XV e início do século XVI a partir de textos gregos não contêm, de maneira geral, críticas ao quinto postulado. Com a tradução do texto de *Proclo*, a crítica ao quinto postulado surge por volta de 1550. A idéia central no Renascimento é o estudo do conceito de equidistância. Entre os matemáticos mais destacados que estudam o quinto postulado no Renascimento, surgem: *Cristopher Clavius (1537 - 1612), Pietro Antonio Cataldi (1548 - 1626)* e *Giovanni Alfonso Borelli (1608 - 1679)*.

Mais um matemático inscrever-se-á na lista: é *J. Wallis (1616 - 1703)*, que abandona o conceito de equidistância e parte para uma nova tentativa de demonstração do quinto postulado, baseando-se neste conceito fundamental: "*Dada uma figura, existe outra semelhante, de magnitude arbitrária*". Observemos que ele poderia mais simplesmente ter admitido a existência de dois triângulos não congruentes, com os ângulos respectivamente congruentes. Justifica sua proposta no fato de que *Euclides* postulou a existência de um círculo e raios arbitrários e, portanto, admitiu tacitamente o princípio de semelhança para círculos. O princípio de *Wallis* estende a semelhança do círculo fornecida por *Euclides* a todas as figuras geométricas. A evidência empírica parece dar garantias à proposta de *Wallis*, porém falar na forma de uma figura como algo independente de sua grandeza implica exatamente um postulado, não mais evidente que o das paralelas e, talvez, mais complexo. A grande contribuição de *J.Wallis* é mostrar a possibilidade de um sistema geométrico no qual o quinto postulado não seja válido, mas o sejam os demais postulados de *Euclides*; então, nesse sistema, não poderão existir figuras semelhantes não congruentes, ligando a grandeza da figura à de seus ângulos — como acontece nos triângulos esféricos sobre uma esfera de raios dados.

A impossibilidade da demonstração do quinto postulado a partir dos postulados anteriores fica evidenciada nos trabalhos de *Girolamo Saccheri* que adota as primeiras 28 proposições do livro I de *Euclides*, as quais independem do postulado quinto. Tendo assumido como hipótese adicional a não validade desse, procura, entre as conseqüências da nova hipótese, alguma proposição que conduza à validade do postulado. Seu ponto de partida é um quadrilátero plano bi-retângulo isósceles (conforme figura 1). *Saccheri* demonstra que os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são congruentes e distingue, então, três casos:

i) esses ângulos são ambos retos (hipótese do ângulo reto);

ii) esses ângulos são ambos agudos (hipótese do ângulo agudo);

iii) esses ângulos são ambos obtusos (hipótese do ângulo obtuso).

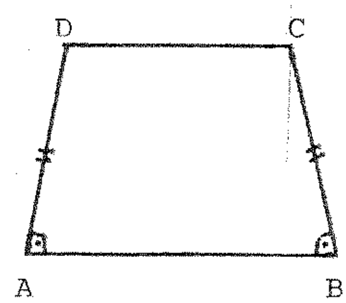


Figura 1

As hipóteses de *Saccheri* correspondem a três sistemas geométricos distintos, todos logicamente possíveis:

i) hipótese do ângulo reto - *Geometria Euclidiana;*

ii) hipótese do ângulo agudo - *Geometria Hiperbólica,* na qual não é verificado o postulado quinto de *Euclides*. Dentro dessa hipótese, Saccheri estuda particularmente o comportamento mútuo de duas retas coplanares. Estabelece, então, que ou elas se encontram ou exibem comportamento assintótico;

iii) hipótese do ângulo obtuso - verificada numa região convenientemente limitada da esfera, sendo a reta substituída pelo círculo máximo. Essa mesma hipótese, se válida na região completa, é, no entanto, incompatível com o conjunto das demais premissas de *Euclides*; se renunciarmos à hipótese da infinitude da reta, temos a *Geometria Elíptica*.

Saccheri mostra que cada uma das três hipóteses formuladas, se verificada num só caso particular, será válida em qualquer outro caso; e, em correspondência respectivamente a cada uma das hipóteses, demonstra que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é igual, menor, ou maior que dois retos. Mas Saccheri, acreditando a priori na verdade da Geometria Euclidiana, julga erroneamente poder demonstrar que as duas hipóteses adicionais — a do ângulo agudo e a do ângulo obtuso — são absurdas.

No século XVIII, o ilustre matemático *J. H. Lambert (1728 - 1777)* toma como ponto de partida um quadrângulo plano tri-retângulo, distinguindo as seguintes hipóteses em relação ao quarto ângulo:

i) hipótese do ângulo reto;

ii) hipótese do ângulo obtuso;

iii) hipótese do ângulo agudo.

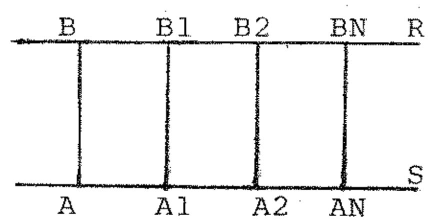


Figura 2

No caso da hipótese do ângulo reto, *Lambert* deduz facilmente o sistema euclidiano. Na segunda hipótese, utiliza-se da figura acima, onde R e S são retas perpendiculares à reta $\overline{AB}$. A partir dos pontos B, B_1, B_2, ... B_n de R, traça perpendiculares à reta S, encontrando, então, os segmentos $\overline{BA}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_2A_2}$,... $\overline{BnAn}$. Demonstra primeiramente que os segmentos entre R e S - ($\overline{BA}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_2A_2}$, ... $\overline{BnAn}$)- decrescem a partir de $\overline{BA}$; em seguida, mostra que os decréscimos ocorrem sucessivamente entre os segmentos. Encontra que:

$$\overline{BA} - \overline{BnAn} > (\overline{BA} - \overline{B_1A_1}) \cdot N$$

Pelo postulado de Arquimedes [21], para N suficientemente grande, o segundo membro da desigualdade torna-se tão grande quanto o queiramos; contraditoriamente, o primeiro membro da desigualdade é sempre menor que $\overline{BA}$. Por esse raciocínio, *Lambert* diz que a hipótese é falsa.

A terceira hipótese é construída a partir da mesma figura anterior, com a diferença de que os segmentos $\overline{BA}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_2A_2}$, ... $\overline{B_nA_n}$ vão crescendo sucessivamente. Isso faz com que *Lambert* não encontre contradições, como na segunda hipótese. Continua as deduções e, a partir da terceira hipótese, encontra que a soma dos ângulos de um triângulo é menor que dois retos. Descobre que a "deficiência de um polígono" — a diferença entre $2(n-2) \cdot \frac{\pi}{2}$ e a soma do ângulos do polígono — é proporcional à área desse polígono. *Lambert* avança, então, consideravelmente em relação aos

---

21. O postulado de Arquimedes é por ele formulado no livro "Sobre a Esfera e o Cilindro", como quinto princípio (postulado): "Dadas duas linhas, duas superfícies ou dois sólidos desiguais, se o excesso de uma destas figuras sobre a outra é adicionado um certo número de vezes, pode superar uma ou outra das figuras que se comparam entre si." Em linguagem matemática atual, esse postulado é assim enunciado: "Se o segmento $\overline{AB}$ é menor que um segmento $\overline{AL}$, existe um múltiplo de $\overline{AB}$, $N \cdot \overline{AB}$ (N inteiro $\geq$ 2) tal que $N \cdot \overline{AB} > \overline{AL}$." Castrucci, B. "Lições de Geometria Plana", p. 59.

estudos de *Saccheri*, observando, ainda, que a terceira hipótese é incompatível com a existência de figuras semelhantes não congruentes — resultado decorrente da relação entre a deficiência de um polígono e sua área. Como esse resultado contraria a intuição espacial, *Lambert* descarta a terceira hipótese.

O último matemático a tentar a demonstração do quinto postulado foi *A.M.Legendre* (1752 - 1833). Suas publicações alcançam grande difusão e notoriedade, graças à forma elegante de seu estilo, mas seus métodos e seus resultados não assinalam qualquer progresso em relação aos estudos anteriores. Os teoremas atribuídos a *Legendre* são:

i) a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual ou menor que dois retos;

ii) se essa soma valer dois retos, no caso de um triângulo particular, terá o mesmo valor para qualquer outro triângulo;

É importante salientar que esses teoremas já haviam sido enunciados um século antes por *Saccheri*, mas devido à pouca circulação de seu livro, "Euclides liberto de toda falha", não foram conhecidos.

Em meados do século XIX, *Lobachevski* (1793 - 1856), *Gauss* (1777 - 1855) e *Janos Bolyai* (1802 - 1860) partem da *negação* do quinto postulado, não para encontrar as falhas já apontadas na Geometria Euclidiana, mas para tentar construir outras geometrias, ditas então Geometrias não-euclidianas, que postulam a existência não de uma única paralela, mas de pelo menos duas paralelas (Lobachevski) ou da Ciência Absoluta do Espaço (Gauss-Bolyai). Isso gerou resultados distintos a respeito da concepção de espaço.

Com *Riemann* (1826 - 1866) a Geometria inclui as três concepções, isto é, a Euclidiana e as não-euclidianas, havendo, portanto, um aprofundamento na essência do conceito de espaço.

> *Foi a sugestão de Riemann do estudo geral de espaços métricos com curvatura e não o caso es pecial da geometria sobre a esfera, que mais tarde tornou possível a teoria geral da relati vidade* [22].

A Geometria de Riemann inclui a Geometria de Lobache vski — curvatura negativa; inclui a Geometria Euclidiana — cur vatura nula e sugere a geometria com curvatura positiva — dita, muitas vezes, Riemanniana. Temos, então, uma superação em espi ral, um salto qualitativo; portanto, um movimento dialético. Váz quez comenta:

> *... a Geometria — e a ciência em geral — não se reduz a um reflexo passivo ou decalque da na tureza, mas sim ... se constitui construindo con ceitos novos seguindo diversos caminhos, entre eles, conforme afirma I.Toth, a negação concre ta dos conceitos existentes* [23].

A *experiência* aqui, é teórica, isto é, durante séculos foi procurado um caminho para demonstrar o "erro" do quinto postu lado e a fragilidade da teoria de Euclides. Como dissemos, da ne gação teórica da Geometria Euclidiana surge um aprofundamento do conceito de espaço e, portanto, desvela-se ao homem a essência mais profunda desse. Isso nos permite retomar o fato de que a ex

---

22. BOYER, C.B.- "História da Matemática", p. 399.

23. VÁZQUEZ, A.S.- "Filosofia da Praxis", p. 219.

periência também está no topo do conhecimento matemático, pois *"essa nova geometria nascida de uma relação negativa num plano puramente teórico encontrou posteriormente aplicações práticas diversas na mecânica e na física. Desse modo a teoria encontra novamente seu nexo com a prática".*[24] A Física Relativista tem seu fundamento na extensão do conceito de espaço da Geometria Euclidiana, ou seja, no conceito de espaço tal e qual o formulado por Riemann.

A categoria *experiência* é, pois, a base de conhecimentos matemáticos bem como é o topo desses. É a *base* quando o conhecimento é imediato, relacionado diretamente com o desvelar da realidade concreta; é o *topo* quando a Matemática exerce mediação entre a realidade e outra Ciência, ou seja, quando fornece instrumental teórico para outras ciências.

3.2.2. Evidência

A categoria *evidência* está intimamente ligada à categoria *experiência*, embora esteja em um nível distinto. Aqui não se trata de leis estatísticas sobre a freqüência em um dado experimento — como o que acontece nas leis de Mendel — mas da evidência num sentido coletivo, isto é, o material das várias experiências anteriormente realizadas com ou sem sucesso,acrescentado de seu inter-relacionamento, faz surgir o novo dado científico.

No ítem anterior, fizemos menção ao fato de que os povos babilônio, chinês, egípcio e indiano possuíam conhecimento da relação pitagórica, porém não possuíam sua generalização. Isso nos leva ao material experimental que já havia sido encontrado e coletado. Francisco Vera resume da seguinte forma a questão:

---

24. Ibid, p. 239.

Este é o famoso teorema atribuído geralmente a Pitágoras; porém Proclo, mais cauteloso que seus antecessores, diz que é do "chefe da escola Pitagórica".

Os assírios e babilônios conheciam o teorema no caso particular do triângulo retângulo de hipotenusa 5 e catetos 3 e 4, que os agrimensores egípcios — medidores de corda — empregavam para traçar perpendiculares; porém se ignora o grau de generalidade que teve tal propriedade. Os indianos, por exemplo, tomando como cateto um número ímpar, a=3, no triângulo clássico, cujo quadrado é $a^2 = 2n + 1$, *obtiveram com nossa notação moderna:*

$$n = \frac{a^2 - 1}{2} \; ; \; n + 1 = \frac{a^2 + 1}{2} \; , \qquad e,$$

em geral:

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right) = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2 \; ,$$

de onde deduziram triângulos retângulos cujos lados estão dados pelas ternas ordenadas:

(3,4,5); (5,12,13); (7,24,25); (9,40,41)... [25]

Notemos que o conhecimento era, de certa forma, comum a vários povos, porém sem sistematização e de base empírica. A evidência da relação entre os lados dos triângulos retângulos é percebida pelos pitagóricos e demonstrada como: *"Nos triângulos retângulos o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é equivalente*

---

25. VERA, F.- "Científicos Gregos", p. 734, 1º vol.

aos quadrados sobre os lados que formam esse ângulo reto".[26]

Proclo, ao comentar o aparecimento da Geometria no seu livro "Geômetras Anteriores a Euclides", afirma:

> *Não se deve pois estranhar que a invenção desta*[27] *e de outras ciências haja sido provocada pelo interesse, porque tudo o que está sujeito a generalização procede do imperfeito ao perfeito e é natural portanto que haja uma transição da sensação ao conhecimento e do conhecimento à inteligência.*[28] *Do mesmo modo que o conhecimento exato dos números teve sua origem nos fenícios por causa de seu comércio e suas transações, os egípcios inventaram a geometria pela razão que dissemos.*[29]

Somos tentados a concordar com Proclo em sua afirmação de que é natural que haja uma transição da sensação ao conhecimento, pois o fato sensorial, experimental necessita de um trabalho intelectual do sujeito sobre o objeto, de forma a integrar o conhecimento do homem. E, segundo Proclo, quem efetuou esse trabalho foi Pitágoras, que

> *examinou desde o alto dos princípios da geome-*

---

26. EUCLIDES, in Vera, F.- "Científicos Gregos", p. 733, 1º vol.

27. A Geometria

28. Proclo comenta o surgimento da Geometria no Egito como tendo origem nos transbordamentos do Nilo.

29. PROCLO, in Vera, F.- "Científicos Gregos", p. 1154, 2º vol.

> *tria; investigou os teoremas de um modo imaterial, intelectual e descobriu as dificuldades dos números irracionais* [30] *e a construção das figuras* [31] *cósmicas.*[32]

O conhecimento empírico, que era de certa forma comum a vários povos, toma sua sistematização com Pitágoras que, percebendo a *evidência* dos fatos empíricos, transforma-os naquilo que chamamos prova.

A categoria *evidência* possui como característica fundamental o dado histórico de que o conhecimento, enquanto tal, é obra coletiva da humanidade, que expõe historicamente as experiências e os dados sensoriais; num determinado momento, essas *evidências* se aglutinam no pensamento, como reflexo da realidade, sob a forma de abstração. Isto é, refletem criativamente o dado concreto, residindo nessa propriedade o fato lógico, pois *"no pensamento sempre operamos com a imagem ideal do objeto e não com o próprio objeto* [33].

Outra característica dessa categoria é o fato de que o movimento se dá do mais simples ao complexo, da realidade aparente à sua essência. Assim, fica claro que a abstração, por tratar com a imagem ideal do objeto, não separa o homem da natureza ou a Matemática de sua base material; pelo contrário, unifica-os, pois

---

30. Menção ao triângulo retângulo isósceles de catetos iguais a 1, cuja hipotenusa, pelo teorema de Pitágoras, é calculada como igual a $\sqrt{2}$, número irracional.

31. Os cinco poliedros regulares.

32. PROCLO, in Vera, F. "Científicos Gregos", p. 1154, 2º vol.

33. KOPNIN, P.V. "A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento", p. 127.

o resultado do processo de abstração é a imagem subjetiva do mundo objetivo.

A *evidência* é precedida, no sistema de categorias, pela *experiência*. Isso se deve ao fato de que *"o pensamento é um processo objetivo de atividade da humanidade, o funcionamento da civilização humana, da sociedade como sujeito autêntico do pensamento"*.[34a]

3.2.3. Intuição

A categoria *intuição* faz mediação entre a *experiência* e a *evidência* — que estão no nível sensorial e sensório-intuitivo — e a *totalidade*, que busca a essência mais profunda da realidade. A *intuição* exerce a mediação entre o sensorial e a abstração, entre a experiência e a teoria, entre a evidência e a sistematização.

Antes de prosseguirmos, é necessário apontar que, aqui, *"intuição"* não significa um conhecimento imediato da realidade, da totalidade concreta, uma via pela qual o cérebro humano tem um conhecimento "a priori" da realidade, prescindindo, portanto, da experiência, do sensorial, da evidência e da razão. A "intuição" tomada dessa forma — "a priori" — apresenta-se como uma visão idealista do fenômeno científico.

Buscamos caracterizar, na categoria *intuição*, como o movimento da evolução do saber científico do homem apresenta, em dadas circunstâncias, saltos qualitativos rápidos. Constitui-se, portanto, de intervalos da continuidade, dependentes de toda a base sensorial e experimental anterior.

34ª Ibid, p. 126.

De fato, existem momentos na construção científica em que a intuição eleva o conhecimento humano. É quando há o movimento em espiral: " *o retorno acima do superado para dominá-lo e aprofundá-lo, para elevá-lo de nível libertando-o de seus limites (de sua unilateralidade)*".[34b]

Podemos citar,como exemplos concretos desse movimento o sistema geométrico euclidiano, a concepção de universo de Galileu, as Geometrias não-euclidianas, a Física Relativista de Einstein. Cada qual, à sua maneira,intuiu um sistema científico, a partir de determinados indícios presentes até então e contribuiu para um momento de superação da Ciência conhecida.

Nas categorias anteriores citamos o teorema de Pitágoras como exemplo. Nesta buscaremos mostrar o momento de superação do conhecimento anterior através do sistema geométrico euclidiano. Até Euclides, a Geometria — a começar pelo exemplo de Thales de Mileto — apresenta-se como um conhecimento difuso, sem possuir um corpo teórico consistente, às vezes,prendendo-se a fatos empíricos e, às vezes, a fatos filosóficos.

Na organização dos "Elementos da Geometria", Euclides *"coordenou muitos trabalhos de Eudóxio, aperfeiçoou os de Teeteto e demonstrou irrefutavelmente o que seus predecessores haviam apresentado de maneira difusa"*.[35]

No texto de Proclo, em relação à obra euclidiana, encontramos:

> ... *o admirável no mais alto grau é o Ensino dos Elementos de Geometria pela ordem e seleção dos*

34b. LEFEBVRE, H. - "Lógica Formal/ Lógica Dialética", p.241 .

35. Ibid, p. 126

teoremas e problemas considerados como elementos, porque não incluiu todos a que podia recorrer, mas somente os suscetíveis de informar sobre os primeiros princípios geométricos. [36]

O conhecimento matemático acumulado nas experiências babilônicas, egípcias, indianas e chinesas encontra, desde o século VI A.C., na Grécia, um campo fértil para florescer, a partir do século III A.C., como Ciência e, mais ainda, como uma forma especial de conhecimento objetivo.

A Geometria evolui da ação dos traçadores de corda - os quais, sem teorias prévias, isto é, em nível sensorial, constroem o triângulo retângulo - para um conhecimento no qual o mateiral simbólico prevalece sobre o dado experimental. O traço característico dessa evolução nos é fornecido pelo modelo geométrico euclidiano.

A obra de *Euclides* — "O Ensino dos Elementos de Geometria" — é a precursora do sistema exiomático, a partir do qual, de determinados axiomas e postulados, são inferidos teoremas. O modelo euclidiano possui um grau de perfeição tão alto — se levarmos em conta a época em que foi produzido — que fica intacto durante dois mil anos.

O modelo geométrico euclidiano é exposto nos "Elementos" em treze livros. Pelo menos mais dois outros são atribuídos a Euclides. Alguns autores, porém, consideram duvidosa a procedência desses dois últimos livros, preferindo atribuí-los a outros matemáticos como Hipsicles e Damáscio de Damasco. Hipsicles viveu por volta de II D.C. É considerado o autor do XIV livro, que

---

36. PROCLO, in Vera, F. - "Científicos Gregos", p. 1157, vol.II.

trata de polígonos regulares. Damáscio de Damasco viveu no século IV A.C. É considerado o autor do XV livro, que trata dos ângulos diedros dos cinco poliedros regulares.

Os "Elementos" possuem um todo orgânico no qual a Geometria aparece como Ciência autônoma, independente da Aritmética. O método euclidiano consiste em, dando uma visão lógica da Geometria e organizando o conhecimento geométrico até então, partir do desconhecido para o conhecido e do particular para o geral.

Esse método exige que o ponto de partida seja uma base constituída pelas definições, pelos axiomas e pelos postulados, isto é, exige que o ponto de partida sejam certas afirmações prévias consideradas evidentes, bem como construções previamente conhecidas.

As *definições euclidianas* procuram dar clareza à linguagem utilizada nos "Elementos"; *os postulados* são verdades práticas articuladas entre si e cuja aceitação é pedida, como era comum entre os matemáticos gregos, indicando a construção de alguns entes geométricos e, ao mesmo tempo, indicando as possibilidades lógicas no sistema; *os axiomas* são verdades evidentes por si mesmas e fundamentais ao método; *as proposições ou os teoremas* são verdades decorrentes e de necessária demonstração, a partir das definições, dos postulados e dos axiomas.

O livro I dos "Elementos" conta com vinte e três definições, cinco postulados, cinco ou nove axiomas e quarenta e oito teoremas ou proposições. É interessante salientar a discrepância em relação ao número de axiomas nas diferentes compilações e, mais ainda, o comentário de Efimov, mostrando tratar-se não explicitamente de acréscimos sucessivos de axiomas. [37]

---

37. No anexo 2 deste trabalho, apresentamos uma tradução dos axio

No texto "Elementos", de Euclides [38], Proclo indica, além do aspecto formal do modelo euclidiano, o estilo euclidiano de raciocinar e o método que Euclides utilizou para compor sua obra:

> *...sendo também de admirar seus variados modos de raciocinar, quando parte das causas, ou das provas, sempre incontestáveis, exatas e adequadas à ciência, assim como seus métodos dialéticos, a saber: o que distingue as espécies nos descobrimentos, o que define os conceitos essenciais, o demonstrativo no trânsito dos princípios das coisas que busca e o demonstrativo no movimento analítico de regressão às coisas buscadas nos princípios. Também nos mostra distintas espécies de reciprocidade, convenientemente distinguidas, portanto, a reciprocidade pode verificar-se em todas as coisas com todas, em todas com uma parte e vice-versa, e em uma parte com outra.* [39]

Para que possamos perceber, com clareza, a profundidade das palavras de Proclo a respeito do modelo geométrico euclidiano

---

37. Cont. mas, postulados, definições e proposições do livro I. A leitura desse anexo é particularmente importante para aqueles que nunca tiveram contato com o texto euclidiano e fundamental para a compreensão deste trabalho.

38. PROCLO, in Vera, F.- "Científicos Gregos", p. 1157 a 1162.

39. Ibid, p. 1157.

exposto nos "Elementos", tomaremos como exemplo a questão das paralelas.

A teoria das paralelas, no modelo euclidiano, é composta por uma definição, um postulado e quatro proposições do livro I dos "Elementos de Geometria". A essa lista alguns autores acrescentam a noção comum (axioma) número 9, [40] por considerarem que a mesma complementa o quinto postulado.

O quinto postulado da Geometria Euclidiana, tal qual foi enunciado por *Euclides*, traz em seu conteúdo um forte apelo à evidência, à intuição do plano - no sentido euclidiano do termo, isto é, considerando o plano como um retângulo infinito. Vejamos então:

> *Se uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma do mesmo lado ângulos internos menores que dois retos, as duas retas prolongadas ao infinito se encontrarão no lado em que estejam os ângulos menores que dois retos.* [41]

Esse postulado seria complementado pelo axioma número 9, no qual, ao que parece, Euclides "*estabelece a unicidade da determinação de um ponto pela intersecção de duas retas*".[42] Observemos que esse axioma está deslocado em relação à lista dos oito antecedentes, que tratam de regras gerais como, por exemplo, o de número oito. A noção comum número 9 explica: "*Duas retas não* de-

40. A questão da existência da noção comum ou axioma 9 é controvertida, pois alguns tradutores consideram sua existência, outros não. Efimov, em "Higher Geometry", comenta: "A origem de alguns desses axiomas (4, 5, 6, 9) é sujeita a alguma dúvida".
41. EUCLIDES, in Vera, F. - "Científicos Gregos", p.705, 1º vol.
42. VERA, F. - "Científicos Gregos", p. 705, 1º vol.

terminam espaço".[43]

Admitido o segundo postulado — a propriedade de a reta ser infinita — o quinto postulado, com a ajuda da noção comum 9, equivale à afirmação de que, por um ponto dado, podemos construir uma e uma só paralela a uma reta dada. Essa afirmação é designada como *"postulado das paralelas", "postulado de Euclides" ou "postulado de Playfair".*[44]

Na definição número 23, *Euclides* afirma:*"retas paralelas são aquelas que, estando no mesmo plano e prolongadas ao infinito, não se encontram".*[45] Essa definição demonstra o fato de que, mesmo antes das proposições (teoremas), *Euclides* incluiu a questão das paralelas nos axiomas (noções comuns), nos postulados e nas definições (hipóteses, segundo Proclo), de tal forma que se reafirmem ou justifiquem mutuamente, formando um todo orgânico.

Nas proposições, *Euclides* demonstra que, se duas retas formam com uma transversal ângulos alternos internos congruentes, ou ângulos correspondentes congruentes, ou ainda, ângulos colaterais internos suplementares, essas retas são paralelas. Para poder demonstrar as inversas dessas proposições (teoremas), *Euclides* tem que recorrer ao postulado quinto, fato evitado durante as vinte e oito primeiras proposições, que são independentes desse postulado.

A teoria euclidiana das paralelas é completada pelas proposições ou teoremas 30, 31, 32, 33. Para que possamos analisar as conclusões retiradas desses teoremas, procederemos à transcrição dos mesmos a partir do texto original do livro I dos *"Elementos de*

---

43. EUCLIDES, in Vera, F.- "Científicos Gregos", p. 705, 1º vol.

44. Esse enunciado é devido ao matemático inglês John Playfair (1748 - 1819), conhecido pela "transcrição" do postulado das paralelas para uma linguagem moderna.

45. EUCLIDES, in Vera, F.- "Científicos Gregos", p. 704, 1º vol.

Geometria" de Euclides,[46] seguido de comentários a respeito das interrelações desses teoremas com o postulado quinto, com a definição 23 e com a noção comum 9.

Proposição 30: *As retas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.*

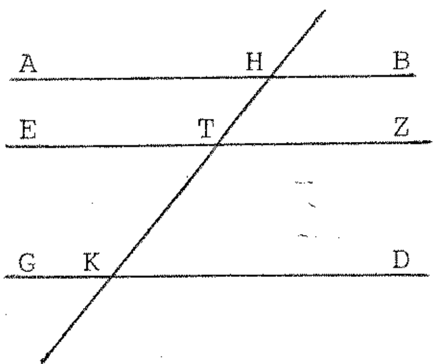


Figura 3

Demonstração: Sejam $\overline{AB}$ *e* $\overline{GD}$ *(fig. 3) duas retas paralelas à* $\overline{EZ}$. *Digo que a reta* $\overline{AB}$ *é paralela à reta* $\overline{GD}$ *porque, cortando-as pela reta* $\overline{HK}$, *o ângulo* $A\hat{H}K$ *será igual ao ângulo* $H\hat{T}Z$; *posto que a reta* $\overline{HK}$ *incide sobre as retas paralelas* $\overline{EZ}$ *e* $\overline{GD}$, *o ângulo* $H\hat{T}Z$ *será igual ao* $H\hat{K}D$. *Assim se demonstrou que o ângulo* $A\hat{H}K$ *é igual ao* $H\hat{T}Z$, *logo também o ângulo* $A\hat{H}K$ *será igual ao* $H\hat{K}D$ *e, como são alternos, a reta* $\overline{AB}$ *é paralela à reta* $\overline{GD}$.

Nessa proposição, notamos o forte apelo, de cunho sensório-intuitivo, ao desenho. Por exemplo: "Digo que a reta $\overline{AB}$ é paralela à reta $\overline{GD}$ porque, cortando-as pela reta $\overline{HK}$, o ângulo $A\hat{H}K$ será igual ao ângulo $H\hat{T}Z$". Aqui *Euclides* faz menção ao desenho e à proposição 19, que trata de ângulos alternos internos e na qual faz, pela primeira vez, o uso do postulado quinto na demonstração. Além disto, *Euclides* usa a noção comum primeira, ou seja: "*coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si*"[47] - silogismo fundamental da Matemática, mediante o qual *Euclides* introduz o prin

46. A versão utilizada é a que consta da obra: "Científicos Gregos", organizada por Francisco Vera, 1970, Ed. Aquillar.

47. Noção comum número um dos "Elementos", vol. 1

cípio de transitividade, isto é, a propriedade transitiva.

Proposição 31: Por um ponto dado traçar uma reta paralela a outra reta dada.

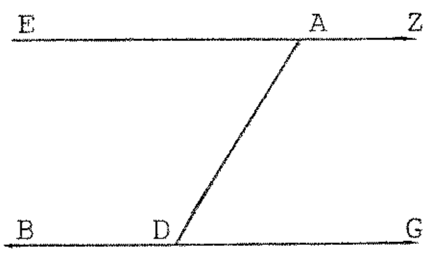


Figura 4

Demonstração: Seja A o ponto dado e $\overline{BG}$ a reta dada (Fig. 4). Tome-se sobre a reta $\overline{BG}$ um ponto qualquer D, trace-se a reta $\overline{AD}$ e sobre ela, no ponto A, construa-se o ângulo DÂE igual ao ângulo AD̂G e trace-se a reta $\overline{EA}$ até o ponto Z. Posto que a reta $\overline{AD}$, ao interceptar as retas $\overline{BG}$ e $\overline{EZ}$, formou ângulos alternos EÂD e AD̂G, iguais entre si, a reta $\overline{EZ}$ é paralela à $\overline{BG}$.

A proposição 31 — embora não tenha, na realidade, uma estrutura de teorema mas de exercício de construção geométrica — põe em evidência a fragilidade do postulado quinto, uma vez que corresponde praticamente à sua demonstração, na medida em que, admitida como teorema (e não como exercício), prova a existência da paralela. Só faltou, a rigor, a prova da unicidade, isto é, a prova de que a paralela é única. A proposição 17, *"a soma das medidas de dois ângulos de um triângulo é menor que dois retos"*, segundo *Proclo*, já evidencia a fragilidade do quinto postulado pois, a rigor, corresponde à sua recíproca e é demonstrada por *Euclides*; e, sendo a recíproca demonstrável, o postulado também o pode ser.

Proposição 32: "Se se prolongar um dos lados de um triângulo, o ângulo externo será igual aos *internos e opostos, adicionados, e os três ân-los internos do triângulo serão iguais a dois retos.*

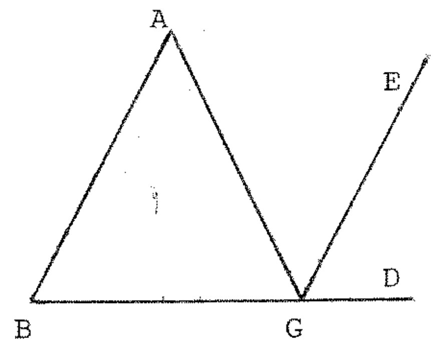


Figura 5

Demonstração: Seja o $\triangle A\hat{B}G$ *(Fig.5) Prolongue-se um de seus lados, o lado* $\overline{BG}$, *até D e trace-se por G a reta* $\overline{GE}$, *paralela à* $\overline{AB}$. *Posto que* $\overline{AG}$ *incide sobre as paralelas* $[\overline{AB}$ *e* $\overline{GE}]$, *os ângulos* $B\hat{A}G$ *e* $A\hat{G}E$ *são iguais entre si e, como também incide sobre elas a reta* $\overline{BD}$, *o ângulo externo* $A\hat{G}D$ *é igual aos dois internos e opostos* $B\hat{A}G$ *e* $A\hat{B}G$. *Foi demonstrado pois que o ângulo* $A\hat{G}E$ *é igual ao ângulo* $B\hat{A}G$; *logo, o ângulo externo* $A\hat{G}D$ *é igual aos dois internos e opostos.*

Se tomarmos agora o ângulo comum $A\hat{G}B$, *então os dois ângulos* $A\hat{G}D$ *e* $A\hat{G}B$, *somados, serão iguais aos três ângulos* $A\hat{B}G$, $B\hat{G}A$, $G\hat{A}B$, *somados e, como a soma de* $A\hat{G}D$ *e* $A\hat{G}B$ *são dois retos, temos que a soma dos ângulos* $A\hat{B}G$, $B\hat{G}A$, $G\hat{A}B$ *são dois retos.*

A proposição número 32 — atribuída aos pitagóricos, segundo *Eudemo de Rodes*[48] (século IV A.C.) em sua "História da Geometria" - afirma a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer como igual a 180°. Esta afirmação decorre diretamente do

---

48. Eudemo Rodes (± 320 A.C.) - discípulo de Aristóteles. Seguindo a tradição erudita do Liceu, escreveu uma "História da Geometria" que é o primeiro livro escrito sobre a Matemática grega.

postulado quinto e origina os trabalhos, no século XVIII, de *Girolamo Saccheri*, precurssor das Geometrias não-euclidianas que surgem no século XIX com *Gauss*, *Bolyai*, *Lobachevski* e revolucionam o conceito de espaço.

Proposição 33: Os segmentos que unem por um mesmo lado segmentos iguais e paralelos são também iguais e paralelos.

Demonstração: Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{GD}$ os segmentos iguais e paralelos (Fig. 6). Tracem-se as $\overline{AG}$ e $\overline{BG}$ e visto que $\overline{AB}$ é paralela à $\overline{GD}$ e sobre elas incide a reta $\overline{BG}$, os ângulos internos $A\hat{B}G$ e $B\hat{G}D$ são iguais; como $\overline{AB}$ é igual à $\overline{GD}$ e $\overline{BG}$ é comum, a base $\overline{AG}$ será igual à base $\overline{BD}$ e o triângulo ABG igual ao triângulo BGD e os outros ângulos de um respectivamente iguais aos do outro; logo, o ângulo $A\hat{G}B$ é igual ao ângulo $G\hat{B}D$.

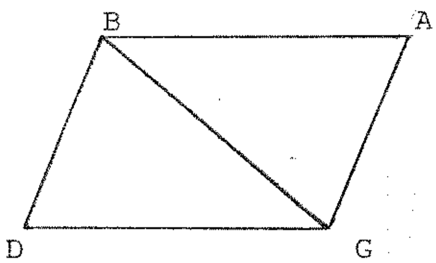


Figura 6

E como a reta $\overline{BG}$, ao incidir sobre as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$, formou ângulos alternos iguais entre si, a reta $\overline{AG}$ será paralela à $\overline{BD}$; foi demonstrado porém, que a reta $\overline{AG}$ é igual à reta $\overline{BD}$; logo, os segmentos que unem, por um mesmo lado, segmentos iguais e paralelos são também iguais e paralelos.

Da proposição número 33, deduzimos a equidistância de duas paralelas. Entre as mais notáveis conseqüências da teoria das paralelas no modelo euclidiano, estão o conhecido teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo (proposição 32) e as propriedades das figuras semelhantes. *Euclides*, como já dissemos, não faz uso do quinto postulado até as vinte e oito primeiras proposições do livro I dos "Elementos"; pelo contrário, evita-o cuidadosamente. Como prova desse fato, ele demonstra as proposições 16 e 17 sem utilizar o referido postulado. Se o fizesse, as demonstrações seriam mais fáceis. Vejamos, pois:

Proposição 16: Se prolongarmos um dos lados de um triângulo, o ângulo externo será maior que cada um dos ângulos internos e opostos

Demonstração:[49] *Observemos que, com a construção da proposição 16, reproduzida na figura 7, ao lado, são obtidos*[50]*:*

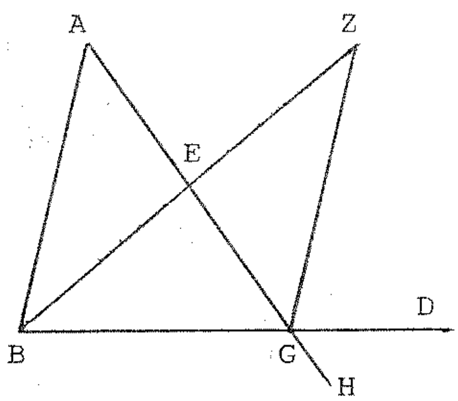


Figura 7

i) $\overline{BE} \equiv \overline{EZ}$, *porque E é ponto médio;*

ii) $\overline{AE} \equiv EG$, *porque E é ponto médio;*

iii) $A\hat{E}B \equiv Z\hat{E}G$, *porque são o.p.v;*

$\therefore$ $\Delta\ AEB \equiv \Delta\ ZEG$, *pelo caso L.A.L.;*

daí decorre:

iv) $E\hat{G}D > Z\hat{G}E$[51] *e* $Z\hat{G}E \equiv A\hat{B}E$, *logo:*

v) $E\hat{G}D > A\hat{B}E$;

e, por analogia:

vi) $A\hat{G}D > A\hat{B}G$.

---

49. Para maior facilidade, demonstramos usando notação simbólica atual.

50. Aqui, o apelo à evidência da construção gráfica.

51. De novo, apelo à evidência gráfica.

Proposição 17: *Em todo triângulo, dois ângulos adicionados são menores que dois retos*

Demonstração[52]*: Por construção, D é obtido. Temos então:*

i) $A\hat{G}D > A\hat{B}G$ *(prop.16);*

ii) adicionando $A\hat{G}B$ *a ambos os termos, temos:*

$A\hat{G}D + A\hat{G}B > A\hat{B}G + A\hat{G}B$;

mas:

iii) $A\hat{G}D + A\hat{G}B = 180^\circ$;

logo:

iv) $180^\circ > A\hat{B}G + A\hat{G}B$;

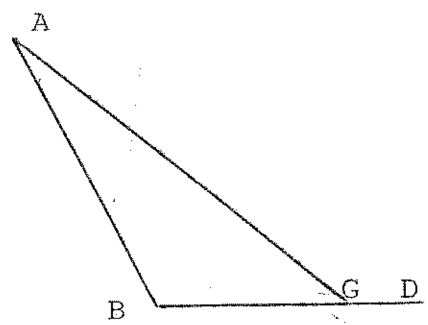


Figura 8

e, analogamente:

v) $B\hat{A}G + A\hat{G}B < 180^\circ$;

vi) $G\hat{A}B + A\hat{B}G < 180^\circ$

Notemos que, nas demonstrações das proposições 16 e 17, não é feita referência ao postulado quinto. Na proposição 16, isso fica patente, pois seria simples observar que: se $\overline{ZG} // \overline{AB}$ por construção, pelo postulado das paralelas, temos: $A\hat{B}G = Z\hat{G}D$. Esse caminho praticamente demonstraria o enunciado do teorema. E se *Euclides* não tivesse evitado o postulado quinto até a proposição 28, a conjugação da proposição 16 com a 32 teria demonstrado a proposição 17 como corolário.

As tentativas de demonstração da proposição 32, independentemente do postulado quinto, levam *Saccheri* e *Legendre* a considerar que, se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo particular for igual a dois retos, o mesmo acontecerá para qualquer outro triângulo. Então, a validade do postulado das paralelas poderá ser deduzida como conseqüência, ou seja, *a existên-*

52. Idem à nota 49.

cia de um triângulo cujas medidas dos ângulos internos, se somadas, resultam em dois retos pode ser considerada como um postulado equivalente ao postulado quinto.

A obra de Euclides deve, portanto, ser encarada como a transformação de uma seqüência de conhecimentos dispersos em uma Ciência logicamente organizada. A percepção do todo e das partes, dos relacionamentos às demonstrações rigorosas, demonstra a intuição da Ciência, partindo da organização do método. A intuição de Euclides é um momento de superação da essência menos profunda para a mais profunda.

3.2.4. Totalidade

Na categoria *totalidade* temos presente o fato de que o movimento do saber humano se processa a partir da análise de uma multiplicidade de fenômenos, procurando atingir maior compreensão da realidade concreta, em cada tempo e lugar.

A *totalidade* tenta revelar as relações mediatas e imediatas entre os fenômenos e as leis da natureza, a essência e a aparência, as partes e o todo, o produto e a produção. A totalidade não propõe simplesmente uma adição de dados da realidade, mas a análise das relações entre o todo e as partes, entre as partes e sua essência. A estrutura da totalidade concreta pode ser entendida como:

> *Se a realidade é entendida como concreticidade, como um todo que possui sua própria estrutura(e que, portanto, não é caótico), que se desenvolve (e, portanto não é imutável nem dado uma vez por todas), que vai criando (e que, portanto, não é um todo perfeito e acabado no seu conjun-*

> *to e não é mutável apenas em suas partes isoladas, na maneira de ordená-las), de semelhante concepção da realidade decorrem certas conclusões metodológicas que se convertem em orientação heurística e princípio epistemológico para estudo, descrição, compreensão, ilustração e avaliação de certas seções tematizadas da realidade, quer se trate de física ou ciência literária, da biologia ou da política econômica, de problemas teóricos da matemática ou de questões práticas relativas à organização da vida humana e da situação social.*

A Matemática não nos proporciona um conhecimento absoluto da realidade e, portanto, nunca toca o "em si" das coisas, apenas apresenta modelos de interpretação da realidade objetiva, verdadeiros na medida em que manifestam a totalidade concreta historicamente determinada.

Para exemplificar a idéia de modelo matemático, tomaremos a Geometria enquanto ramo da Matemática que, por meio de representações abstratas, relações e deduções, pretende expressar formas do real.

O modelo geométrico euclidiano deu conta da interpretação da realidade (inclusive no sentido de representação do universo) durante aproximadamente dois mil anos. Sustentou e foi sustentado pela Física, de Aristóteles a Newton. Deu conta dos movimentos planetários e astronômicos, de Ptolomeu a Keppler e desse a Newton. Enquanto o conceito de espaço utilizado era o tridimen

---

53. KOSIK, K. - "Dialética do Concreto", p. 36.

sional da esfera euclidiana, a validade do modelo estava garantida.

Já mencionamos o questionamento ao quinto postulado de Euclides e o surgimento das Geometrias não-euclidianas. Apontamos, agora, o fato de que o quinto postulado de Euclides, ao ser negado, origina outras concepções de espaço, que são a base concreta para a evolução da Física, principalmente no que toca à Teoria da Relatividade, uma vez que o modelo euclidiano não deu tento do avanço da Física Clássica, em virtude da limitação a respeito da idéia de espaço.

Descobre-se, a partir do século XIX, que não há apenas uma Geometria, mas, inicialmente, do ponto de vista matemático, três geometrias: Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica ou de Lobachevski e Geometria Elíptica ou Riemanniana. É importante salientar, embora não seja objeto de estudo deste trabalho, a existência de um grande número de geometrias logicamente possíveis, a partir da negação do quinto postulado de Euclides.

Os novos modelos geométricos, numa análise apressada, sugerem contradições no sentido da Lógica Formal, encaminhando a escolha do "mais perfeito". Na verdade, porém, os modelos euclidiano e não-euclidianos, em conjunto, é que vão considerar a realidade concreta. Kosik escreve:

> *O notável desenvolvimento da ciência no século XX depende de um fato: quanto maior o número de novos campos que ela descobre e descreve, tanto mais transparente se torna a unidade material interna dos mais diversos e mais afastados campos do real, enquanto se coloca de modo novo o problema das relações entre mecanismo e organis*

> *mo, entre causalidade e teleologia e, com isto, o problema da unidade do mundo. A diferenciação da ciência — que em certas etapas da evolução parecia ameaçar a sua unidade e apresentava o perigo de dividir o mundo, a natureza, a matéria em todos independentes e isolados, e de transformar os cientistas dedicados às disciplinas isoladas em eremitas solitários que haviam perdido todo o contato e possibilidade de comunicação — leva, ao contrário, com seus efetivos resultados e conseqüências, a sempre mais profundo descobrimento e a maior conhecimento da unidade do real. De outro lado, esta compreensão mais profunda da unidade do real representa uma compreensão também mais profunda da especificidade de cada campo do real e de cada fenômeno.* [54]

Para que possamos avaliar o alcance das palavras declinadas por Kosik, quanto à Matemática, vamos verificar como fica o teorema de Pitágoras em relação aos três modelos, isto é, como fica sua expressão matemática:

Geometria Euclidiana: $c^2 = a^2+b^2$

Geometria de Lobachevski: $2(e^{c/k} + e^{-c/k}) = (e^{a/k} + e^{-a/k}) + (e^{b/k} + e^{-b/k})$

sendo k uma constante fixa e e=2,718...

---

54. Ibid, p. 37.

Geometria Riemanniana: Temos a forma diferencial

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

$ds^2 = \alpha\, dx^2 + 2\,\beta\, dxdy + \delta\, dy^2$ com o determinante de A positivo e definido.

A estrutura da realidade é, portanto, interpretada por um modelo (uma estrutura lógica), porém, de modo aproximado da realidade, ou seja, da totalidade concreta. Ao movimento pelo qual temos a adequação do modelo matemático à realidade e vice-versa (no sentido de a Matemática apreciar a realidade concreta, em todas as suas determinações) damos o nome de *totalidade*.

CAPÍTULO IV

UMA VEREDA: A REALIDADE

> *A verdade científica é tradicionalmente proposta ao aluno como um dado que não dá qualquer ocasião a dúvida, nem mesmo a hesitações; precipita-se sobre ele, do exterior, já feita, já pronta. O aluno, decerto, pode estar interessado, mas quase não se pode sentir implicado; não o convidam a participar num esforço de edificação, justamente porque lhe apresentam o edifício já acabado.* [1]

Distante do currículo, das avaliações e dos métodos, procuraremos nos situar próximos das dúvidas e, talvez, — quem sabe ? — dentro das incertezas que envolvem o ensino de Matemática. Na educação, a trajetória descrita por crianças e por adultos é repleta de inseguranças, mas principalmente, de talvezes e de todavias.

As dúvidas e as incertezas ficam por conta das finalidades últimas do ensino de Matemática. A quem serve o conteúdo matemático ensinado em nossas escolas ? Há utilidade em ensinar uma linguagem de símbolos abstratos ?

O questionamento tem raízes no fato de que, em um país do terceiro mundo, recordista em taxas de analfabetismo, recordista em desnutrição infantil e repleto de desigualdades sociais, preocupações com a educação em Matemática, ou seja, com o ensino

---

1. SNYDERS, G. - "Para onde vão as pedagogias não-directivas ?" , p. 356.

em áreas científicas podem parecer, numa análise superficial, uma preocupação desocupada, um folguedo elitista. Tanto as contradições entre a Ciência [2] e o compromisso político com as classes desfavorecidas da sociedade, como as existentes entre Tecnologia e o ideal de igualdade social são aparentes, pois a Ciência e a Tecnologia não são, necessariamente, contra o homem do povo e as suas aspirações. A Ciência e a Tecnologia devem ter, isto sim, nas aspirações populares, o seu manancial de preocupações. As dúvidas e as incertezas do homem comum devem invadir a escola, em todos os seus níveis. Assim, a pesquisa e o ensino em áreas científicas buscarão a solução para o problema da fome, do analfabetismos e da desigualdade social.

A Ciência e a Tecnologia não representam somente mais um instrumento de dominação social; podem ser, também, uma forma pela qual podemos basear o ensino no entrelaçamento da cultura popular com a cultura elaborada no enriquecimento de uma pela outra. Desse modo, a escola torna-se o lugar onde o homem passa da representação mágica do mundo, que ele se limitou a absorver em seu meio "impregnado de folclore", para uma certa objetividade,para a compreensão das leis da natureza e da sociedade. Resumindo: na escola, o homem deve buscar as premissas do espírito científico,o senso verificável.[3]

Essas considerações nos levam aos objetivos fundamentais

---

2. Ciência e Tecnologia têm aqui, obviamente, a conotação utilizada por nós ao longo deste trabalho. Assim, sendo, a Ciência é socialmente produzida e, portanto ideológica em seus pressupostos . A Tecnologia, na medida em que se constitui em uma otimização da Ciência, tem substrato ideológico mais nítido.

3. SNYDERS,G.-"Para onde vão as pedagogias não-directivas ?", p. 334-335

da escola e, portanto, dos educadores: a competência técnica e a competência política. A dimensão da competência política da educação objetiva, de forma explícita, a competência para a transformação social, no sentido de uma sociedade mais justa e igualitária. Como decorrente da competência política, emerge a dimensão da competência profissional da escola — que retoma e repõe o papel do professor como agente de transmissão do saber sistematizado[4] — para com as classes trabalhadoras, que vêem, na escola, o único lugar de acesso ao saber erudito da classe dominante. Essa é a condição necessária para a formação de intelectuais comprometidos com a transformação social, condição imposta à educação por homens como Galileu e Darwin.

Assim, temos a competência política como sendo a aliada primeira da competência técnica[5]. Não se faz Ciência sem finalidades e sem saber específico.

A prática pedagógica deve converter a escola em instrumento eficaz de transmissão de conhecimentos significativos para os agentes da transição democrática — as classes trabalhadoras. Torna-se, pois, fundamental que a prática pedagógica aponte a luta por:

i) melhoria constante da qualidade de ensino;

ii) efetiva integração entre a pesquisa e o ensino;

iii) ensino comprometido com o homem;

iv) pesquisa interdisciplinar tendo a educação como cen

---

4. SAVIANI, D. - "Escola e Democracia", p. 74.

5. MELLO, G.N.- "Magistério de 1º Grau: Da Competência técnica ao Compromisso político". O livro discute a competência técnica e o compromisso político. Em nosso texto, discordamos do uso da expressão compromisso político. Em seu lugar, propomos a competência política.

tro;

v) crítica ao tecnicismo estéril;

vi) fortalecimento constante das instituições democráticas.

Os objetivos da educação e a prática pedagógica, como mediadores da transformação social, conduzem a uma visão de conjunto das relações entre a sociedade e a escola. Sob esse prisma emerge, naturalmente, o papel do ensino da Matemática,levando-nos a refletir sobre os condicionantes desse ensino.

A Matemática tem, basicamente, duas abordagens possíveis: a primeira é a internalista, priorizando a organização, o funcionamento e a estrutura matemática nos níveis semiótico e lógico. Esse aspecto tem sido sucessivas vezes considerado como um óbice à segunda visão da Matemática, a abordagem externalista, onde ficaria claramente visível a função da Matemática — através de grupos críticos e de vanguarda, atuantes no meio social das comunidades — como liame entre a escola e a sociedade.[6] Centraremos o nosso estudo na abordagem externalista. Ela é, seguramente, o nosso caminho às inseguranças. Ela é, também,sem dúvida, o retorno a Heráclito.[7]

O prisma externalista nos desperta para uma palavra:criatividade.

Não pretendemos enfocar a criatividade na moldura de critérios psicológicos ou psicanalíticos. Nem tampouco centraremos a questão no binômio competência - criatividade. No mínimo,

---

6. D'AMBRÓSIO, U. - "Culture, Cognition and Science Learning".

7. Heráclito de Éfeso, filósofo jônico de 530 A.C., afirmava que o aspecto básico da realidade é a transformação. Para Heráclito, o mundo — onde tudo flui — é dinâmico no devir universal.

seria simples demais. Caminharemos alguns passos (certos ou incertos), no sentido maior do papel do ensino da Matemática como um pólo gerador da integração da escola com o meio, buscando soluções aos problemas que afligem o homem e sua comunidade.

Visamos discutir as finalidades de uma educação que tenha como núcleo objetivo as aspirações do povo em relação à Matemática ensinada na escola.

É, porém, necessário reconhecer que existem múltiplas vias na formação cultural do homem. Assim, não é obrigatório que certa formação cultural seja calcada na escola e na Matemática aí ensinada. Para que possamos evitar o emaranhado teórico das relações do povo com a cultura — a célebre discussão da cultura popular versus cultura de elite — será suficiente para nossos propósitos considerar a Ciência como o conhecimento de leis e de regras que contribuem para a visão cosmológica do homem sobre a sua realidade e a cultura como o acesso às mais variadas formas de humanismos.

Nesse contexto, emerge o "senso matemático", que se situa como uma análise dos fenômenos, ou melhor, como um senso crítico da realidade, como uma disposição interior que torna o homem capaz de quantificar, ou seja, de apreender o caráter quantitativo dos fenômenos. O "senso matemático" determina, em nível social, por exemplo, o conhecimento dos próprios limites do homem. E, para a formação de seres dotados de "senso matemático", a escola deve preservar e estimular alguns valores, como:

i) senso crítico: consiste em analisar a ruptura entre uma situação concreta e outra, idealizável, isto é, consiste em configurar situações, delimitando a *"consciência real"* e a *"consciência possível"*.[8] Aqui encontramos os julgamentos de valor — formulados a partir de uma consciência crítica — que nos capacitam a analisar atitudes e meios para atingir objetivos. O homem moderno precisa de meios para julgar com objetividade, discernimento e justiça. Nesse contexto, é premente transformar a Matemática em um meio educativo que trate das observações científicas, das percepções ordenadas de espaço e de tempo, das intuições de ordem quantitativa das coisas, permitindo uma avaliação objetiva de fenômenos concretos;

ii) senso do relativo:[9] consiste em aferir os fatos segundo uma escala de densidade humana, em ter critérios de valor, através de referentes sociais, cujo centro seja o homem. Esses fatos equiparam-se, vale dizer, então, que a compreensão dos fatos e das coisas se acompanha de uma avaliação pessoal dos acontecimentos e de suas possíveis causas. O ato de saber e o fato de fazer com objetividade e ponderação, equilibrando, em parte, o excesso e a insuficiência, o interesse e a gratuidade, o desregulamento e a ordem, indicam a existência de um juízo matemático. É correto supor que uma base matemática colabore com o senso do relativo, mas não é lícito presumir que essa base matemática seja o único fator determinante do senso do relativo, pois vários são os aspectos psicológicos aí envolvidos como, por exemplo, a personalidade, a emoção e a afetividade;

---

8. GOLDMAN, L.- "Dialética e Ciências Humanas", p. 99 e s.s.

9. PICARD, G.- "A Matemática e o homem moderno - A Matemática a serviço do homem moderno", p. 3 - 4.

iii) senso de ordenação e precisão: verificamos com facilidade que o modo de produção capitalista, substituindo o artesão pela máquina, estimulou o crescimento do consumo, na igual proporção em que desestimulou a solidariedade, provocando e incentivando a avidez, cada vez mais insaciável — é a mutação do "gourmet" em "gourmant". O reflexo do crescente consumismo em nossa sociedade atinge diretamente a Matemática nos sentidos de ordem e de precisão, pois o importante é produzir Matemática, sem a preocupação com a natureza e a especificidade da Ciência. Tal procedimento leva à preocupação com a "forma". Existem dados de que os artigos de Matemática, publicados nas revistas internacionais, seguem sempre a mesma "forma" e o mesmo "estilo". Via de regra, quando a "forma" se sobrepõe ao conteúdo, esvai-se a criatividade. Torna-se necessário incentivar a qualidade, a precisão e a inventividade nas escolas, de modo que, no ensino de Matemática, prevaleça o estilo de Arquimedes;

iv) senso do concreto: é preciso rendermo-nos ao fato de que as "satisfações intelectuais" existem e conformarmo-nos com a evidência de que, muitas vezes, elas existem sem a necessária exigência material ou prática. Via de regra, os matemáticos consideram que as "satisfações intelectuais" devem ser hipertrofiadas e que a reflexão matemática — podendo facilmente abster-se de aplicações práticas — deve reduzir-se a jogos malabarísticos com fantasmas e abstrações, penetrando em um espaço ilusório. Não objetivamos impor limites à teoria mas, sim, ao sonho. Várias conquistas teó ricas em Matemática, como a Teoria das Matrizes ou a Teoria das Catástrofes, tornam patente que, em dado momento, as teorias abstratas têm um ponto de contato com a realidade, fornecendo-lhe *"modelos"* de interpretação do mundo objetivo, que são muito mais eficazes que os anteriores. Devemos ter sempre claro que os *modelos matemáticos* se referem a uma realidade concreta e abstrata ao mesmo tempo: falam de uma realidade abstrata quando, por um jogo semiótico e lógico, a Matemática progride, a largos passos, transformando e refinando o instrumental matemático; falam de uma realidade concreta quando, por mediação da prática, o instrumento refinado da teoria matemática serve para melhor interpretar os dados da realidade. A forma pela qual a teoria e a prática se relacionam dialeticamente impede, de um lado, o sonho de uma *"ciência pura"* e, de outro, o utilitarismo simplista de uma *"ciência aplicada"*;

v) <u>senso cinestésico-espacial</u>[10]: a Matemática conta com uma grande quantidade de material analítico-simbólico que dificulta, muitas vezes, a percepção de dados de outra origem. Material de origem analógica, por exemplo, tem dificuldade de penetrar no feudo matemático. Esse fato não é uma característica singular da concepção simbólica. Desde a Magna Grécia, procedimentos não analíticos eram descartados pela comunidade dos matemáticos. Como exemplo, em carta endereçada a Eratóstenes, Arquimedes relata o seu método de demonstrar

---

10. DAVIS-HERSH.- "A Experiência Matemática", p. 340.

teoremas geométricos utilizando centros de gravidade e alavancas. O movimento e o espaço tornam-se o signo distinto do sábio grego que, trabalhando com princípios cinestésicos e espaciais, demonstra a fórmula do volume da esfera e do cone, chegando quase ao Cálculo Diferencial e Integral. Mas os resultados de Arquimedes são recebidos com reservas pelos alexandrinos, que desconfiam das alavancas e dos centros de gravidade como motores do raciocínio matemático. A Matemática de Arquimedes inclui espaço, movimento e beleza

Preservando e estimulando o "senso matemático", pretendemos um ser dotado de senso crítico, senso de ponderação, senso de beleza e senso de estética. Esse objetivo nos induz a um estilo matemático arquimediano-galilaico cuja síntese consiste numa visão cosmológica, crítica e comprometida com a Ciência e com a realidade concreta.

A opção do educador encaminha-se, pois, para o homem como centro das preocupações. O educador tem o direito de estar fascinado pela atração que sobre ele exerce a disciplina que escolheu, mas seu objetivo primordial não pode estar aí. Ele deve manter um ritmo de progresso constante no conhecimento de sua disciplina e, mais ainda, deve assim proceder, sem prejuízo da formação social que lhe reclamam, tacitamente, os alunos.

Considerando as duas abordagens sob as quais a Matemática é enfocada, verificamos que a retomada dos aspectos externalistas no ensino dessa disciplina deve-se, basicamente, ao fracasso educacional da Matemática internalista, analítica, academicista e mecanicista que, de um modo ilusório, forma alunos, cujo campo de atuação é o mundo real. Através dos aspectos externalistas, o edu cador objetiva a criatividade, representada na luta por:

i) pesquisa básica comprometida com o homem e sua região, isto é, pesquisa voltada à melhoria da qualidade de vida;

ii) pesquisa de modelos matemáticos, considerando as variáveis locais;

iii) pesquisa de cunho etnográfico, levando em conta a Matemática do homem e, não, o homem da Matemática;

iv) avaliação crítica das relações entre a Ciência e a Sociedade;

v) uso da informática como libertação e, não, como opressão.

No conjunto desses fatores vislumbramos, como rumos possíveis do ensino de Matemática, a competência e a criatividade.Em decorrência delas, os caminhos conduzem-nos à Matemática externalista e aos "sensos matemáticos". Pretendemos, com essa abordagem, desatar o nó górdio que atrela nossa educação ao exaustivo e inoperante ensino de fórmulas prontas e ao entediante aprendizado de receituários de problemas vazios de substância matemática.

Apostamos na possibilidade de estabelecer uma relação entre a Sociedade e a Matemática, de tal forma que essa última seja mais um instrumento pelo qual o homem possa criar uma relação racional com o seu meio e, assim procedendo, estabelecer uma consciência real de mundo. Apostamos, mais ainda, em que a consciência do possível no ensino de Matemática, hoje, tem como vetor o homem, a sociedade e a realidade. E, com Nietzche, apostamos em que "a nossa arte é Livre, Gaia a nossa Ciência!"[11] Portanto, te

11. NIETZSCHE, F.- "Gaia Ciência", p. 315.

mos a vida como moldura do ensino de Matemática que objetiva o homem real, não o ideal ou idealizável, em um contexto histórico, levando em conta o dinamismo assim explicado: "*interação recíproca do todo com as partes que o constituem bem como a contraposição das partes entre si*".[12]

Acreditamos em que as contradições existentes nas velhas formações sociais evoluem para novas formações e, sob esse prisma, tanto a Educação quanto a Matemática têm o compromisso de desvelar essas contradições. E, então, o ensino de Matemática emerge como um instrumento de luta da classe trabalhadora, na reapropriação do saber que lhe foi expropriado pelo modo de produção capitalista.

Acreditamos em que o ensino de Matemática, se considerado em um contexto histórico, deve ter presente o sistema de *categorias do conhecimento matemático*, que, tendo como parâmetro o devir universal, objetiva captar as conexões e as contradições na totalidade concreta e penetrar, o mais profundamente possível, na riqueza de conteúdo da realidade. O sistema de categorias visa a explicitar o movimento que, a partir dos fenômenos do mundo, desvela as leis gerais da totalidade concreta e, assim, o "*estudo do processo do pensamento*".[13]

O sistema de categorias do conhecimento matemático tem sua base na prática humana, no mundo objetivo e nas relações entre o sujeito e objeto. A categoria *experiência* mostra o surgimento do raciocínio matemático, a partir dos problemas concretos e

12. SAVIANI, D. in D.T.Mendes (Org.)-"Filosofia da Educação Brasileira", p. 27

13. KOPNIN, P.V.- "A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento", p. 107.

práticos dos povos sumério, egípcio, jônico, chinês e indiano. A categoria *evidência* mostra o conhecimento humano como obra coletiva da humanidade que, partindo das experiências e dos dados sensoriais, tem o seu movimento do complexo (social) ao simples (abstrato), isto é, a evidência mostra que o movimento se processa do sensorial ao abstrato. A mediação entre o sensorial e a abstração, entre a experiência e o conhecimento mais profundo da realidade é feita pela categoria *intuição*. Uma análise das relações entre o todo e as partes, entre as partes e sua essência é o que pretende a categoria *totalidade*, apresentando modelos de interpretação da realidade objetiva, modelos que são verdadeiros, na medida em que dão conta da totalidade concreta historicamente determinada.

Permeando o sistema de categorias do conhecimento matemático, encontra-se a unidade entre o lógico e o histórico,a qual se explicita na análise histórica, básica na explicação dos fenômenos.

Acreditamos em que, estudando modelos e realidade, podemos desnudar as formas pelas quais o homem, a partir da realidade concreta, apropriou-se do instrumental matemático, isto é, acreditamos em que, através da relação dialética entre o modelo e a realidade, podemos desnudar as mediações entre o concreto e o abstrato na formação do pensamento matemático. Assim, podemos compreender o movimento de transformações qualitativas na realidade, por meio da atividade prática do homem que, a partir do pensamento e dos modelos, reflete criativamente a realidade, impulsiona a descoberta científica e cria condições para o relacionamento estreito entre Sociedade e Matemática. Objetivamente, para que possamos vislumbrar a realidade e os modelos matemáticos, é necessário considerar o conhecimento matemático como um movimento do complexo (realidade) ao simples (teoria) e, dialeticamente do sim ples (modelo) ao complexo (sociedade). Nesse contexto, o ensino de Matemática une o histórico e o lógico, de tal forma que os modelos matemáticos surgem como reflexo da realidade, do social, da vida, enfim. Desse modo, os modelos matemáticos e a sociedade, o abstrato e o concreto, o teórico e o prático não têm prioridade no ensino de Matemática,mas, sim, relacionam-se dialeticamente.

Acreditamos em que uma escola comprometida com a transformação social — no sentido de uma sociedade mais justa e igualitária — deve ter a competência política para trabalhar o dado social possível, visando à sua transformação efetiva em condições sociais reais. E, por decorrência, acreditamos em que o professor deve ter a competência técnica necessária para transformar o conteúdo teórico de sua disciplina em ações pedagógicas que busquem soluções concretas aos problemas reais enfrentados pelas comunidades em que atua. É necessário lembrar que sem conhecimento (saber) não há mudanças, porém, é preciso ter presente, sempre, que só saber não é suficiente para a transformação social, pois essa só se efetiva na prática. Acreditamos, enfim, em que a história do conhecimento matemático, tomada como produção social do homem, fornece as balizas da criatividade necessária ao professor de Matemática, com um compromisso político que, através das contradições existentes tanto na construção do edifício matemático como nas velhas formações sociais, formará uma consciência crítica que reflita a totalidade concreta.

Falamos de crenças e de apostas como respostas às dúvidas, falamos de inseguranças ao nortear veredas, mas falamos,principalmente,de caminhos que, no mundo da realidade concreta, são feitos de talvezes e todavias.

ANEXO 1

Pesquisa publicada pelo jornal

Folha de São Paulo em 4/08/85.

ANEXO 2

Definições, postulados, axiomas e proposições do livro I dos "Elementos de Geometria", de Euclides, baseada na edição bilíngue de Juan David Garcia Bacca, publicada pela Universidade Nacional Autónoma de México em 1944.

DEFINIÇÕES

1. Ponto é o que não tem parte [1].
2. Linha é comprimento sem largura.
3. Extremos de uma linha são pontos.
4. Linha Reta é a que repousa igualmente sobre seus pontos [2].
5. Superfície é o que tem somente comprimento e largura.
6. Extremos de uma superfície são linhas.
7. Superfície Plana é a que repousa igualmente sobre suas retas.
8. Ângulo Plano é a inclinação de duas retas que se cortam em um plano e que não estão em uma mesma reta.
9. Quando as linhas que compreendem o ângulo são retas, o ângulo chama-se retilínio.
10. Quando uma reta construída sobre outra, forma ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos iguais é um ângulo reto , e a reta construída chama-se perpendicular, em relação àquela sobre a qual está erguida.
11. Ângulo Obtuso é o ângulo maior que o reto.
12. Ângulo Agudo é o ângulo menor que o reto.
13. Limite é o extremo de algo.
14. Figura é o comprendido em um ou vários limites
15. Círculo é figura plana circundada por uma só linha, chamada circunferência; e as retas incidentes sobre essa linha e construídas desde um ponto interno [3] até pontos dessa são iguais entre si.
16. Tal ponto chama-se centro do círculo.
17. Diâmetro de um círculo é uma reta qualquer que passa por seu

---

1. Idéia de indivisível.
2. Repousa = todos seus pontos têm uma única direção e sentido.
3. "ponto interno": centro da circunferência, def. 16.

centro e cujas duas partes têm seus extremos na circunferência dessa círculo. Tal reta corta o círculo em dois.

18. Semicírculo é a figura contida entre o diâmetro e a circunferência cortada pelo diâmetro. O centro do semicírculo é o mesmo que o do círculo.

19. Figuras Retilíneas são as contidas entre retas. Triláteras (ou triângulos) são as contidas entre três retas, quadriláteras (ou quadriláteros) as contidas entre quatro e as multiláteras (ou polígono) as contidas entre mais de quatro retas.

20. Das figuras triláteras, um triângulo equilátero é aquele cujos três lados são iguais, um triângulo isóceles tem dois lados desiguais.

21. Acrescentando: nas figuras trilaterais, um triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, um triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso, e um triângulo acutângulo é o que tem três ângulos agudos.

22. Das figuras quadriláteras, o quadrado é a que é eqüilátera e equiângular; o retângulo é equiângular mas não é equilátero; o losango é equilátero mas sem ângulo reto, e o paralelogramo e tem seus lados e ângulos opostos iguais, respectivamente, mas não é equilátero e nem tem ângulos retos. Os quadriláteros distintos dos anteriores se chamam trapézios.

23. Retas paralelas são as que, estando em um mesmo plano e prolongando-as indefinidamente em ambos os sentidos, não coincidem.

POSTULADOS

1. Uma reta pode ser traçada de um ponto qualquer até outro qualquer.
2. Uma reta delimitada (ou limitada) pode ser prolongada indefinidamente em linha reta.
3. Para cada centro e raio pode-se descrever a circunferência correspondente.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma do mesmo lado ângulos internos menores que dois retos, as duas retas prolongadas ou infinito se encontrarão no lado em que estejam os ângulos menores que dois retos,

AXIOMAS ou NOÇÕES COMUNS

1. As coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se a quantidades iguais se somam outras, também iguais, os totais serão iguais.
3. Se de quantidades iguais se retiram quantidades iguais, os restos serão iguais.
4. Se a desiguais se acrescentam iguais, os totais são desiguais.
5. As quantidades dobradas de uma coisa são iguais entre si.
6. As metades da mesma quantidade são iguais entre si.
7. Coisas congruentes entre si são iguais entre si.
8. O todo é maior que a parte.
9. Duas retas não circundam uma região.

PROPOSIÇÕES ou TEOREMAS

1. Dada uma reta delimitada, construir sobre ela um triângulo equilátero.
2. Dado um ponto, construir uma reta igual à outra reta dada.
3. Dadas duas retas desiguais, retirar da maior uma reta igual à menor.
4. Se dois triângulos tiverem dois lados respectivamente iguais um a um, e iguais os ângulos correspondentes compreendidos por tais retas iguais, eles terão bases iguais entre si; um triângulo será igual ao outro e serão iguais os ângulos restantes, cada um com o seu correspondente: cada um com aquele que tenha lados iguais opostos.
5. Nos triângulos isósceles, os ângulos da base são iguais entre si e, prolongadas as duas retas iguais, os ângulos exteriores, formados por esse prolongamento e pela base, serão também iguais entre si.
6. Se dois ângulos opostos se um triângulo são iguais, os lados opostos a tais ângulos serão também iguais.
7. Duas retas respectivamente iguais a outras duas com os mesmos extremos no mesmo lado de uma mesma reta não se encontram em dois pontos distintos.
8. Se dois triângulos de bases iguais têm dois lados de um respectivamente iguais a dois de outro, terão iguais os ângulos compreendidos pelas retas iguais.
9. Dividir em duas partes iguais um ângulo retilíneo dado.
10. Dividir em duas partes iguais uma reta delimitada.
11. Dada uma reta, a partir de um ponto nela, traçar uma linha reta que forme ângulos retos.
12. Dada uma linha reta indefinida, traçar, de um ponto que não

se ache na mesma, uma linha reta perpendicular.

13. Se uma reta levantada sobre outra forma ângulos, eles serão ou dois retos ou iguais a dois retos.

14. Se, de um ponto sobre uma reta qualquer, duas retas não colocadas do mesmo lado formam ângulos adjacentes iguais a dois retos, ambas as retas estarão sobre a mesma reta.

15. Se duas retas se cortam, formam ângulos iguais opostos pelo vértice.

16. Em todo triângulo prolongando-se um dos lados, o ângulo externo é maior que cada um dos ângulos internos e opostos.

17. Em todo triângulo, quaisquer dois ângulos, adicionados, são menores que dois retos.

18. Em todo triângulo, o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

19. Em todo triângulo, o maior ângulo opõe-se ao maior lado.

20. Em todo triângulo, a soma de dois lados quaisquer é maior que o lado restante.

21. Se duas retas que partam dos extremos de um dos lados de um triângulo se juntarem dentro dele, elas serão menores que os dois lados restantes do triângulo, porém o ângulo que formarem será maior que o ângulo oposto ao lado do triângulo de cujos extremos partiram.

22. De três retas iguais a outras três retas, construir um triângulo.

23. Sobre uma reta dada e em um dos seus pontos, construir em ângulo retilíneo igual a outro ângulo retilíneo dado.

24. Se dois triângulos têm dois dos lados de um iguais a dois de outro, mas se um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais é maior que o outro, a base de um será maior que a do outro.

25. Se dois triângulos têm dois dos lados de um deles respectivamente iguais a dois dos lados do outro, mas a base de um é

maior que a do outro, então o ângulo compreendido pelos lados iguais do primeiro é maior que o ângulo compreendido pelos lados iguais do segundo.

26. Se dois triângulos têm dois ângulos de um, respectivamente iguais a dois ângulos do outro, e, um lado do primeiro igual a um lado do segundo — sendo tal lado o colocado entre os ângulos iguais ou o oposto a um destes — os demais lados de um dos triângulos serão respectivamente iguais aos demais do outro e o ângulo restante de um será igual ao restante do outro triângulo.

27. Se uma reta, ao cortar duas outras, formar ângulos alternos iguais entre si, tais retas serão paralelas entre si.

28. Se uma reta, ao cortar duas outras retas formar ângulo externo igual ao ângulo interno e oposto no mesmo lado, ou então se os dois internos forem iguais a dois retos, tais retas serão paralelas.

29. Uma reta que corta duas retas paralelas forma ângulos alternos iguais entre si, o externo igual ao interno e oposto, e os internos do mesmo lado iguais a dois retos.

30. As retas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

31. Por um ponto dado, traçar uma reta paralela a outra reta dada.

32. Se se prolongar um dos lados de um triângulo, o ângulo externo será igual aos internos e opostos, adicionados, e os três ângulos internos do triângulo serão iguais a dois retos.

33. Os segmentos que unem por um mesmo lado segmentos iguais e paralelos são também iguais e paralelos.

34. Os lados e os ângulos opostos de regiões formadas por retas paralelas — ou paralelogramos — são iguais entre si e a diagonal divide em duas tais regiões.

35. Paralelogramos que estão sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.
36. Paralelogramos colocados sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.
37. Os triângulos colocados entre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.
38. Os triângulos colocados sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.
39. Triângulos iguais colocados sobre a mesma base e do mesmo lado estão entre as mesmas paralelas.
40. Triângulos iguais colocados sobre bases iguais e do mesmo lado estão também entre as mesmas paralelas.
41. Se um paralelogramo tiver a mesma base que um triângulo e ambas estiverem entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo.
42. Dado um ângulo retilíneo, construir um paralelogramo igual a um triângulo dado.
43. Em todo paralelogramo os complementos à volta da diagonal são iguais entre si.
44. Sobre uma linha dada, construir um paralelogramo igual a um triângulo dado e que tenha um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado.
45. Dado um triângulo retilíneo, construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada.
46. A partir de uma reta dada, descrever um quadrado.
47. Nos triângulos retângulos, o quadrado do lado que se opõe ao ângulo reto é igual aos quadrados dos lados que formam o ângulo reto.
48. Se em um triângulo, o quadrado de um dos lados é igual aos quadrados dos dois lados restantes, o ângulo formado por esses dois lados restantes do triângulo é reto.

ANEXO 3

Notas sobre o Método da Exaustão

NOTAS SOBRE O MÉTODO DA EXAUSTÃO

Ao que tudo indica, o método da exaustão está ligado aos problemas clássicos em Geometria — a quadratura do círculo e sua retificação. Não podemos fixar o momento exato em que o círculo começa a ser considerado como limite de um polígono regular inscrito (aproximação por falta) ou circunscrito (aproximação por excesso). Parece ter sido Antífones (430 A.C.), um sofista contemporâneo de Sócrates, o primeiro a tentar a quadratura do círculo inscrevendo um polígono regular — um quadrado ou um triângulo — e duplicando o número dos lados sucessivamente, até a *exaustão* da área entre o polígono e o círculo. Assim, Antífones achou possível aproximar a área de cada polígono à área do círculo correspondente. Esse procedimento é criticado por Aristóteles como não pertencente ao campo da Geometria, porque ela só se apóia em raciocínios puros e sua natureza é racional e, não, empírica. É interessante salientar dois pontos com relação ao método e a crítica:

i) no procedimento mecânico de Antífones, está embutida a idéia de que o círculo é o limite de um polígono de n lados, quando n tende ao infinito. Caraça[1] aponta o porquê da crítica ao afirmar o clássico "horror do infinito" da Matemática grega;

ii) o método sugerido por Antífones guarda uma semelhança, quanto ao procedimento, com o método das tangentes para o cálculo de derivadas, criado por Newton no século XVIII.

---

1. CARAÇA, B. de J.- "Conceitos Fundamentais da Matemática", p.80. e s.s.

Mas a concepção empírica existente no método da exaustão não é abandonada, embora contrarie a concepção dedutiva da Geometria grega. Eudóxio de Cnides (408 - 355 ? A.C.), matemático e discípulo de Platão, aperfeiçoa o método e sugere um postulado, mais tarde reformulado por Arquimedes, no livro "Sobre a Esfera e o Cilindro" onde é apresentado como quarto princípio, posteriormente, Arquimedes apresenta-o como lema fundamental para os resultados obtidos em "A Quadratura da Parábola". O mesmo postulado é utilizado por Euclides, com enunciado impreciso e com o objetivo de esclarecer que igualdades ou desigualdades quando multiplicadas ou divididas devem manter as relações iniciais, ou seja: se $a < b$ então $c : a > c : b$.

No livro "O Método", endereçado a Eratóstenes (280 - 192 A.C.), Arquimedes explica o seu processo de descoberta de novos teoremas e o caminho de suas demonstrações:

> *... Creio ser conveniente expor por escrito e explicar com detalhe, neste mesmo livro, a natureza especial de certo método que permitirá resolver mecanicamente alguns problemas matemáticos. Estou convencido de que este procedimento é útil inclusive para demonstrar os próprios teoremas, alguns dos quais, evidentes por meio da Mecânica, foram demonstrados depois geometricamente porque sua investigação por este método não proporcionou uma demonstração rigorosa.*[2]

2. ARQUIMEDES, in Vera, F.- "Cientificos Gregos", p. 263, vol.II.

Nessa obra, Arquimedes expõe inicialmente onze lemas explicando as relações entre o centro de gravidade e as figuras geométricas e, também, operações com figuras geométricas e as relações com o centro de gravidade das mesmas. Entre as proposições demonstradas nesse livro, encontramos: *"uma esfera é o quádruplo do cone cuja base é igual a um círculo máximo e a altura igual ao raio e ... um cilindro cuja base seja igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro equivale a uma vez e meia a esfera".*[3] A demonstração dessas proposições revela que Arquimedes combinou fatos geométricos e mecânicos, num procedimento, sem dúvida, comparável ao do Cálculo Integral. De resto, é através do Cálculo que demonstramos hoje o volume da esfera. [4]

Como exemplo do método de exaustão e do raciocínio de Arquimedes, vamos nos valer do cálculo do valor π, efetuado no livro "Medida do Círculo". Inicialmente Arquimedes estabelece três teoremas:

i) "a área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um cateto é igual ao perímetro do círculo e o outro igual ao raio";

ii) "a razão da área de um círculo para o quadrado do diâmetro é aproximadamente $\frac{11}{14}$". Ou seja: $\frac{A}{R^2} = \frac{11}{14}$;

iii) " razão do perímetro de um círculo para o diâmetro está compreendida entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$". Isto é:

$$\frac{C}{2R} = \pi \quad \text{e} \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

3. Ibid , p. 268, vol. II.
4. Da proposição acima existem várias demonstrações em português. Sugerimos: KARLSON, P. "A Magia dos Números", p. 150 e s.s.

Para provar a terceira proposição, Arquimedes inscreveu e circunscreveu polígonos regulares, achou suas áreas até o polígono de 96 lados e demonstrou que a área do círculo está compreendida entre os resultados obtidos das áreas dos polígonos inscritos e circunscritos. Esses limites, expressos em frações decimais modernas, são:

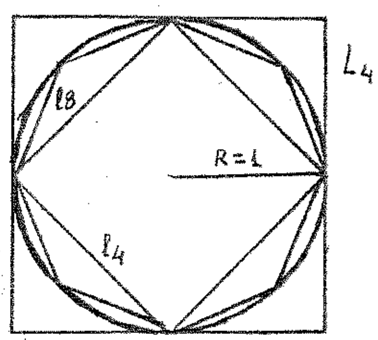
$$3,14084507 < \pi < 3,14285714$$

Vamos demonstrar a proposição iii) pelo método dos perímetros, que consiste em partir de um raio conhecido e achar o lado do polígono de n, 2n, 4n, ... com n igual ao número de lados do primeiro polígono. Os perímetros desses vários polígonos vão tender, sucessivamente, para a circunferência do círculo.

Com a finalidade de simplificar a demonstração, tomemos um círculo de raio igual a 1.

Da fórmula $C = 2\pi R$ obtemos para $R = 1$:

$$C = 2\pi \Rightarrow \pi = \frac{C}{2}$$



Na figura ao lado, partindo do lado do quadrado, obtemos:

$$L_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow L_4 = \sqrt{2} \therefore P_1 = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\frac{C1}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \therefore P_2 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}} \therefore$$

$$\frac{C2}{2} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$L_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \therefore P_3 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\therefore \frac{C3}{2} = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Feitos todos os cálculos, obtemos a seguinte tabela:

nº de lados	Semiperímetro do polígono inscrito	Semiperímetro do polígono circunscrito
4	2,82842	4,00000
8	3,06146	3,31371
16	3,12144	3,18260
32	3,13654	3,15173
64	3,14033	3,14412
128	3,14127	3,14223

Assim apresentado, o método dos perímetros é engenhoso e simples em seu princípio. É a versão do método da exaustão utilizado por Arquimedes. Ele parte do hexágono e chega ao polígono de 96 lados, provando que $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{10}{70}$. Assim, seu método de exaustão é, em gérmen, o método dos limites.

Por exemplo, querendo achar a área de uma curva, Arquimedes considerava-a como limite; a ela se aproximam mais e mais os polígonos regulares inscritos e circunscritos, quando duplicados sucessivamente os números de seus lados. Esse procedimento, para o cálculo de área de curvas, é o precursor do cálculo de integrais que terá seu desenvolvimento no século XVIII, com Newton e Leibnitz.

O método da exaustão exprime, por assim dizer, a *diferença* das áreas das figuras. Essa *diferença* é que fornece, propriamente, o nome do método. Arquimedes chegou ao resultado, por aproximação mecânica e por indução, pois qualquer que seja a formação, não só a razão entre os perímetros dos polígonos circunscrito e inscrito tende a 1 como o comprimento dos lados dos polígonos tende a zero.

Podemos também, na demonstração da proposição iii), par tir do triângulo equilátero, do pentágono, ou de qualquer polígono regular desde que circunscrito e inscrito. Haverá variação inicial, mas no limite, isto é, ao atingirmos polígonos de grande número de lados, teremos sempre $\pi = 3,1415926 \ldots$. Como aliás o afirma a tabela seguinte:

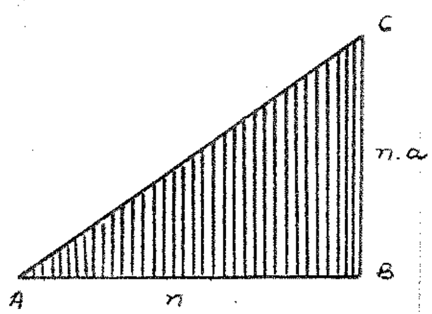
Nº de lados	Semiperímetro do polígono inscrito	Semiperímetro do polígono circunscrito
6	3,00000	3,46411 ...
12	3,10582 ...	3,21540 ...
24	3,13262 ...	3,15967 ...
48	3,13935 ...	3,14609 ...
96	3,14103 ...	3,14272 ...
192	3,14145 ...	3,14188 ...

Os cálculos da tabela acima estão feitos com os procedimentos modernos de extração de raiz quadrada. Comparando esses números com os obtidos por Arquimedes, pelo seu método, podemos observar o grau de aproximação entre os resultados. É impossível dizer com exatidão qual o método utilizado por Arquimedes para calcular raízes quadradas. O mais provável é que tenha estabelecido um processo de aproximações sucessivas, análogo ao empregado hoje para calcular raízes quadradas.

O método da exaustão, na época de Arquimedes, sofre o entrave de a linguagem matemática grega ater-se basicamente à Geometria e de pouco ter-se desenvolvido em direção à Álgebra. Isso sem falar que o termo infinito não era considerado apropriado à Matemática por ser vago. No século XVII, um discípulo de Galileu, Frei Boaventura Cavalieri, retoma o método de Arquimedes para cálculo de áreas e volumes. As idéias de Cavalieri são expostas, em 1635, no livro "Geometria dos Indivisíveis", onde ele explicita que, através dos indivisíveis — a decomposição de uma fi gura ou sólido em um conjunto de elemento infinitamente pequenos — fica "*evidente que podemos conceber as figuras planas como tecidos, compostos de fios paralelos, e os sólidos como livros, que são pilhas de folhas paralelas*!" [5]

As idéias de Cavalieri sofrem resistência por parte de vários geômetras da época que, apoiados nas demonstrações de Arquimedes, dizem ser absurdo decompor figuras em linhas e sólidos em livros. A obra do sábio grego "O Método", à qual já nos referimos, só é recuperada em 1906; esse fato, obviamente, impede que os críticos de Cavalieri avaliem o alcance de suas idéias.

Vamos demonstrar o processo utilizado para o cálculo da área de um triângulo pelo método de Cavalieri, para que possamos perceber seu procedimento:



Se $\overline{AB}$, base do triângulo, tem n pontos, $\overline{BC}$ possui a.n pontos. Portanto, as linhas inscritas em $\overline{AB}$ vão crescer como uma P.A. (a, 2a, 3a ... an). Tomando a fórmula da soma de uma P.A., temos:

$$\frac{n}{2}(a + na) = \frac{na}{2} + \frac{n^2 a}{2}$$

Se n é suficientemente grande, isto é, se n tende ao infinito, podemos considerar que:

$$\frac{na}{2} + \frac{n^2}{2} a = \frac{n^2}{2} a$$

Isto é: a área tenderá para:

$$\frac{n^2 a}{2} = \frac{n}{2} . na = \frac{1}{2} . \overline{AB} . \overline{BC}$$

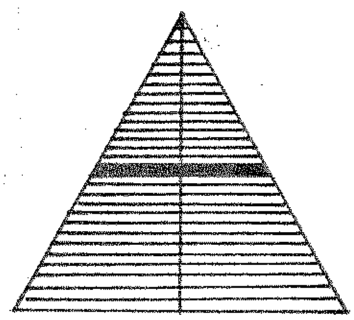
---

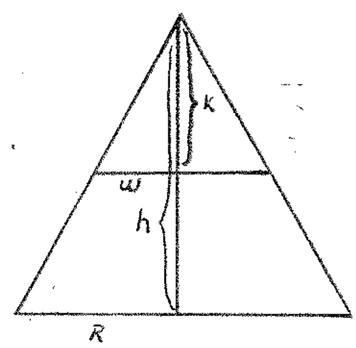
5. CAVALIERI, B., citado por KARLSON, P. "A Magia dos Números", p. 343.

Como $\overline{AB}$ é a base do triângulo e $\overline{BC}$ a altura, temos:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \, b \, . \, h$$, o que está correto.

Para explicitar o método de Cavalieri para calcular volumes, vamos utilizar o cálculo do volume do cone. O sólido é decomposto em n discos, suficientemente finos como cilindros de altura $\varphi = \frac{h}{n}$ e com raios crescentes de 0 a R (raio do cone).





Com base na semelhança de triângulos, temos:

$$w_k : R = k \, . \frac{h}{n} : n \qquad \text{Logo, } w_k = \quad . \, \frac{k}{n}$$

O volume de cada um dos n discos é:

$$\pi \cdot w_k^2 \, . \, \varphi = \pi \, . \, R^2 \, . \frac{k^2}{n^2} \, . \, \frac{h}{n} = \pi \, . \, R^2 . \, h \, . \, \frac{1}{n^3} \, . \, k^2$$

O volume total do cone será expresso pela soma dos discos. Sabendo que k cresce do valor 1 ao n, temos:

$$V_{cone} = \Pi \, . \, R^2 . \, h \, . \frac{1}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \right)$$

Como:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad (1)$$

Substituindo-se (1) na fórmula do volume, temos:

$$V_{cone} = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)$$

$$V_{cone} = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

Se n for suficientemente grande, isto é, com n tendendo ao infinito, teremos:

$$V_{cone} = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 h$$

O método de Cavalieri é, fundamentalmente, o da exaustão. Arquimedes, por certo, assinaria as descobertas do discípulo de Galileu e os dois juntos apontariam na direção do Cálculo Integral. A rigidez dedutiva da Matemática grega, que tanto tolheu Arquimedes e Cavalieri, não aceita o infinito como parte da Matemática, porque esse era um termo indefinido. Assim os matemáticos gregos destinam ao método da exaustão um lugar menor, porque não é baseado em raciocínios puros, mas em procedimentos mecânicos e, contraditoriamente, nesses dois fatores repousa o gérmen da evolução matemática do século XVIII, expressa pela conquista do Cálculo Integral por Isaac Newton e Leibniz.

ANEXO 4

Sugestões de Atividades em História da Matemática para o 1º e 2º graus

Cálculo do valor de π — Nºs irracionais

Atividade — 7a. série - 1º G

Um dos povos que mais colaborou com o desenvolvimento da Matemática nos primórdios da civilização foi o egípcio, que nos deixou vários papiros, com conhecimentos matemáticos. Em um desses papiros, há a seguinte afirmação: "O quadrado da diferença entre o diâmetro e a sua nona parte ..."

1. Expresse a afirmação indicada no papiro egípcio em notação moderna:

. Na continuação do texto do papiro egípcio está escrito " ... é igual à área desse círculo." Em notação moderna a área do círculo é dada por: $A_c = \pi R^2$

2. Compare o resultado obtido em (2) com a escrita moderna da área do círculo expressa em (3).

3. Qual o valor egípcio para π ?

4. O valor de π até a quarta casa decimal é 3,1415. Você acha boa ou má a aproximação obtida pelos egípcios ?

Cálculo do valor de π **Atividade**

Nºs irracionais 8a.série - 1º G

Em uma tábua babilônica do período de Hamurabi- aproximadamente 1800 A.C. - aparece uma fórmula que relaciona o perímetro de um hexágono com o perímetro da circunferência:

$$P_0 = \frac{24}{25} C_0 \quad \text{onde } P_0 = \text{perímetro do hexágono}$$

$$C_0 = \text{perímetro da circunferência}$$

1. A relação acima era acompanhada por interpretação gráfica. Construa um hexágono regular de lado 1 cm, inscrito em uma circunferência de raio 1 cm e compare os dados acima. Trabalhe em escala 1cm : 5cm.

2. Em notação moderna, o perímetro do hexágono regular é dado pela fórmula $P_0 = 6.R$ e o perímetro da circunferência é dado pela fórmula $C_0 = 2.\pi.R$. Usando a relação expressa em (1), determine o valor que os babilônicos usavam para π.

3. Se os babilônicos tivessem usado o dodecágono em vez do hexágono, para o cálculo do valor de π, como seria o resultado? Mais próximo do atual valor ou não ? Por quê ? (Sugestão: para responder, estabeleça uma relação gráfica, como a de (2), para o dodecágono).

Cálculo da raiz quadrada pelo processo babilônico — **Atividade**

8a.série - 1º G

Nºs irracionais

Os povos que habitaram a Mesopotâmia utilizavam dois sistemas de numeração: um, de base 10; outro, de base 60. Talvez tenham sido os mais hábeis calculadores do passado. Esses povos se utilizavam de um algoritmo para o cálculo da raiz quadrada bem simples e bem vantajoso.

O algoritmo era assim desenvolvido:

Forma geral	Exemplo	Comentário
$\sqrt{a}$ a_1	$\sqrt{10}$ 5	1a.aproximação chute um número qualquer
$b_1 = \frac{a}{a_1}$	$\frac{10}{5} = 2$	Correção da 1a. aproximação
$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$	$\frac{5+2}{2} = 3,5$	2a.aproximação média aritmética de a_1, b_1
$b_2 = \frac{a}{a_2}$	$\frac{10}{3,5} = 2,85$	Correção da 2a. aproximação
$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$	$\frac{3,5 + 2,85}{2} = 3,175$	3a.aproximação média aritmética a_2 e b_2
$b_3 = \frac{a}{a_3}$	$\frac{10}{3,175} = 3,1496$	Correção da 3a. aproximação
$a_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$	$\frac{3,175 + 3,1496}{2} = \underline{3,1623}$	uma excelente aproximação de $\sqrt{10}$

1. Utilize o método babilônico para calcular com uma aproximação de 10^{-5}, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$

2. Comente, no valor encontrado (se possível confr(sultado da sua calculadora), como você percebeu tingido a aproximação pedida.

3. Se você possui um micro-computador, identifique, senvolvido abaixo, o processo babilônico de extr da e veja se consegue, com a ajuda das tabelas d estabelecer uma relação com a matemática que voc to é, veja se consegue justificar o processo de raiz quadrada.

```
1  CLS
2 PRINT@0, "RADICANDO=";
3 INPUT A#
4 IFA#<0GOTO22
5 PRINT@30,"CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO="
6 INPUT B#
7 IF  A#=0 AND B#=0 THEN GOTO  19
8 IF B#<=0  THEN GOTO 24
9 IF B#*B#=A# THEN GOTO 18
10 PRINT@2*64+2,"CORRECOES DAS APR.";@2*64
11 FOR K=1 TO 12
12 LET C#=A#/B#
13 LET B#=( B# + C#)/2
14 PRINT TAB(0);C#; TAB(35);B#
15 IF (B#-C#)=0 GOTO 17
16 NEXT K
17 GOTO17
18 CLS
19 PRINT@(7*64+5),"GOOOOL! GOOOOL! GOOOOL!
20 PRINT@(9*64+20)," A RAIZ DE ";A#;" E ";
21 GOTO23
22 CLS:PRINT@(7*64+5)," RAIZ DE NUMERO NEG
IS"
23 FORX=1TO2000:NEXT:GOTO1
24 CLS: PRINT @(7*64+5),"SEU CHUTE E ABSUR
25 GOTO 23
26 GOTO 19
```

```
RADICANDO=? 625                CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO=? 312

 CORRECOES DAS APR.                 RAIZES APROXIMADAS
2.003205128205128                    157.0016025641026
3.980851085547469                    80.49122682482502
7.764821393022155                    44.12802410892359
14.16333526416861                    29.1456796865461
21.44400153716455                    25.29484061185532
24.70859609635459                    25.00171835410496
24.99828176399656                    25.00000005905076
24.99999994094924                    25
25                                   25
```

```
RADICANDO=? 625                CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO=? 4

 CORRECOES DAS APR.                 RAIZES APROXIMADAS
156.25                               80.125
7.800312012480499                    43.96265600624025
14.2166114784167                     29.08963374232848
21.4853169186025                     25.28747533046549
24.71579277220377                    25.00163405133463
24.99836605546334                    25.00000005339899
24.99999994660102                    25
25                                   25
```

```
RADICANDO=? 625                CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO=? 24

 CORRECOES DAS APR.                 RAIZES APROXIMADAS
26.04166666666667                    25.02083333333333
24.97918401332223                    25.00000867332778
24.99999132667523                    25.0000000000015
24.9999999999985                     25
25                                   25
```

```
RADICANDO=? 56

 CORRECOES DAS APR.
.8
1.581920903954802
3.028506828806258
5.204589804135773
7.015643374376281
7.467759400679974
7.483298572630832
7.483314773530346
7.483314773547883
```

```
CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO=? 70

 RAIZES APROXIMADAS
35.4
18.4909604519774
10.75973364039183
7.982161722263801
7.498902548320041
7.483330974500008
7.48331477356542
7.483314773547883
7.483314773547883
```

```
RADICANDO=? 56

 CORRECOES DAS APR.
18.66666666666667
5.169230769230769
6.998878384874219
7.466586805967493
7.483296035119873
7.483314773524422
7.483314773547883
```

```
CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO=? 3

 RAIZES APROXIMADAS
10.83333333333333
8.001282051282051
7.500080218078135
7.483333512022814
7.483314773571344
7.483314773547883
7.483314773547883
```

```
RADICANDO=? 56

 CORRECOES DAS APR.
8
7.466666666666667
7.483296213808463
7.483314773524867
7.483314773547883
```

```
CHUTE A PRIMEIRA APROXIMACAO=? 7

 RAIZES APROXIMADAS
7.5
7.483333333333334
7.483314773570899
7.483314773547883
7.483314773547883
```

Equação do 2º grau babilônica | **Atividade**
Álgebra | 8a.série - 1º G

Entre as conquistas dos povos da Mesopotâmia, no campo da Matemática, encontramos a solução de equações do 1º e 2º graus ao serem resolvidos problemas de herança, de distribuição de alimentos e de divisão de terras.

Como exemplo, temos o problema, fornecido por uma tábua de 2000 A.C., em que é pedido o lado de um quadrado sendo sua área menos o lado igual a 14;30 (base 60).

1. Em relação moderna, qual a equação encontrada ?

2. No quadro abaixo, apresentamos a resolução babilônica com as ordens do escriba. À esquerda, coloque a equação obtida em 1 e e resolva segundo as ordens do escriba:

Ordens do Escriba	Notação (base 60)	Notação Moderna(1)
1) Tome a metade de 1	0,30	
2) Multiplique 0,30 por 0,30	0,30 x 0,30 = 0;15	
3) Some isto a 14,30	14,30; 15	
4) isto é o quadrado de 29,30	$x^2 - x + 0{,}15 = 14{,}30;15$ $(x - 0{,}30)^2 = \sqrt{14{,}30;15}$ $x - 0{,}30 = 29{,}30$	
5) Agora some 0,30 a 29,30 e o resultado é 30; o lado do quadrado	$x = 29{,}30 + 0{,}30$ $x = 30$	

3. Generalize a equação obtida na coluna feita por você, usando as letras p, q E $\mathbb{R}$ para: $x^2 - px = q$.

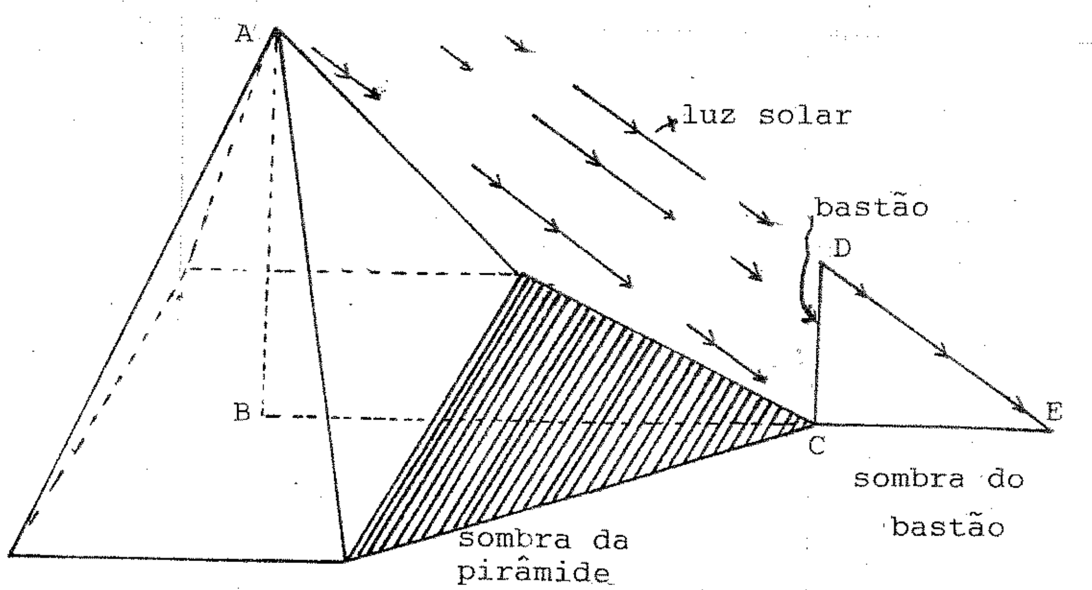
A altura da pirâmide e o bastão **Atividade**

Semelhança 8a.série - 1º G

Ao redor do século 6 A.C.,floresceu,na parte ocidental do Oriente Médio,uma série de colônias gregas, devido basicamente ao comércio. Em uma dessas colônias - Mileto - reinava Pisístrato grande incentivador do intercâmbio cultural e comercial da colônia. Em Mileto morava Thales, um dos pensadores gregos mais importantes desse período. Thales era comerciante de azeite de oliva, filósofo e matemático.

Consta que,em uma das suas viagens ao Egito, Thales mediu a altura da pirâmide do faraó que se preocupava com as medidas da pirâmide, utilizando-se de um bastão, simplesmente.Tal proeza maravilhou o faraó, que o recompensou pelo feito.

Graficamente, é esta a proeza de Thales.



1. Os triângulos ABC e DCE são semelhantes ? Por quê ?

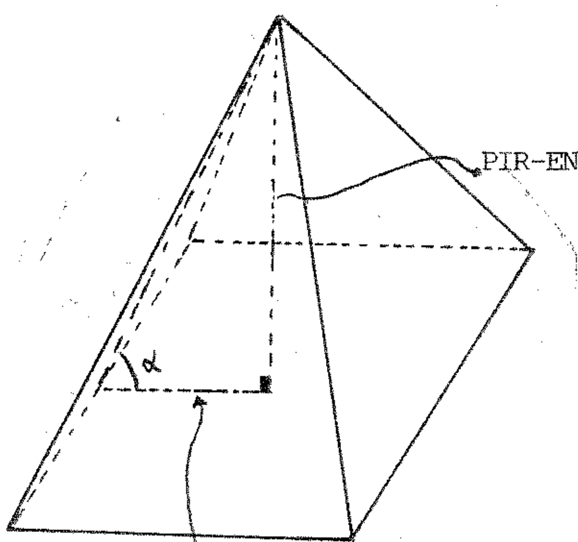
2. Qual a relação que permitiu a Thales descobrir a altura da pirâmide ?

Proporção das Pirâmides **Atividade**

Trigonometria 8a.série - 1º G

As pirâmides do Egito são consideradas uma das sete maravilhas do mundo antigo. Eram construídas para servir de túmulo aos faraós. Um dos mais intrigantes mistérios é como foi possível construí-las naquele tempo. Um papiro egípcio revelou-nos como os arquitetos egípcios podiam iniciar a construção da pirâmide, a partir das ordens do faraó.

O papiro afirmava que a metade da base da pirâmide, dividida pela sua altura, dava a proporção da pirâmide.



PIR-EN-US (nome egípcio para a altura da pirâmide)

$$\text{SE - QET} = \frac{\frac{1}{2}\text{ UKHA - THEBT}}{\text{PIR-EN-US}}$$

(SE-QET nome egípcio para a proporção da pirâmide)

$\frac{1}{2}$ UKHA - THEBT (Nome egípcio para a metade da base da pirâmide)

1. A proporção da pirâmide (SE -QET) é dada em função do ângulo α?
2. Escreva, em notação moderna, a relação SE - QET
3. Converse com seu colega sobre a importância, na construção da pirâmide, do ângulo α.

Progressão Aritmética **Atividade**

Seqüências 1º Colegial - 2º G

O célebre filósofo grego Platão afirma que os egípcios foram os "inventores" da Aritmética, Cálculo, Geometria e Astronomia. Os egípcios atribuíam essas descobertas ao deus THEUT. A "invenção" dessas ciências dependia de problemas práticos originados no cotidiano.

No papiro de Ahmés, que data de aproximadamente 2200 A.C., o problema número 40 trata da distribuição de alimentos para a população. Em linguagem matemática atual, esse problema seria assim enunciado "Divida cem pães entre cinco homens, de modo que seja igual e constante a diferença da quantidade de pães recebida por eles a partir do primeiro e de modo, ainda, que a sétima parte da soma das três quantidades maiores seja igual à soma das duas menores ".

1. Qual a expressão atual dessa seqüência ? É uma P.A. ou uma P.G. ?

2. Qual o número de termos dessa seqüência ?

3. Qual o valor da soma dos termos da seqüência ?

4. Determine o valor da razão da seqüência . Ela é positiva ou negativa ?

5. Determine os termos da seqüência.

BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA e VASCONCELLOS, F., História das Matemáticas na Antigüidade, Livrarias Aillaud e Bertrand, Paris-Lisboa, 1925.

ALTHUSSER, L., Filosofia e Filosofia Espontânea dos Cientistas, Editorial Presença, Lisboa, 1976.

BABINI, J., História de las Ideas Modernas em Matemática, Departamento de Assuntos Científicos Unión Panamericana-Secretaría General de la O.E.A., Washington, 1967.

______, História Sucinta de la Matemática, Espasa-Calpe S.A., Madrid, 1969.

BANFI, A., Galileu, Edições 70, Lisboa, 1981.

BORTOLOTTI, E., Storia Della Matemática Elementare, in Bertolari, L., Enciclopedia Delle Matematiche Elementari, Vol. III, Parte II, Milão, 1943.

BOYER, C.B., História da Matemática, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.

BRONOWSKI, J., O Senso Comum da Ciência, Editora Itatiaia Limitada, Belo Horizonte, 1977.

______, Ciência e Valores Humanos, Editora Itatiaia Limitada, Belo Horizonte, 1979.

______, A Esclada do Homem, Livraria Martins Fontes, São Paulo, 1983 a.

BRONOWSKI, J. & MAZLISH, B., a Tradição Intelectual do Ocidente , Edições 70, Lisboa, 1983 b.

CARAÇA, B. de J., Conceitos Fundamentais da Matemática, Livraria Sá da Costa Editora, Lisboa, 1981.

CARRAHER, T. N., CARRAHER, D. W. e SCHLIEMANN, A. D., Na Vida Dez, Na Escola Zero: Os Contextos Culturais da Aprendizagem da Matemática. São Paulo: Cadernos de Pesquisa, nº 42, Agosto 1982.

CASTRUCCI, B., Lições de Geometria Plana, Livraria Nobel S.A., São Paulo, 1964.

COSTA, N. C. A. da, Introdução aos Fundamentos da Matemática, Editora Hucitec, São Paulo, 1977.

CURY, C. R. J., Educação e Contradição: Elementos Metodológicos para uma Teoria Crítica do Fenômeno Educativo, Tese de Doutorado, mimeo, PUC-São Paulo, 1979.

D'AMBRÓSIO, V., "Culture, Cognition and Science Learning", Report of the Inter-American Beminar on Science Education, Panamá,1984.

DAVIS, P. J. & HERSH, R., A Experiência Matemática, Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1985.

ECCO, H., Como se Faz uma Tese, em Ciências Humanas, Editorial Presença, Lisboa, 1982.

EFIMOV, N. V., Higher Geometry, Mir Publishers, Moscow, 1980.

FERRINGTON, B., A Ciência Grega, Ibrasa, São Paulo, 1953.

FELIX, L., Matemática Moderna, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1968.

GIANNOTTI, J. A., Filosofia Miúda, Editora Brasiliense S.A., São Paulo, 1985.

GOLDMAN, L., "Dialética e Ciências Humanas", Editorial Presença,Lisboa, 1972.

GONSETH, F., Philosophie Mathématique, Librairie Scientifique Hermann et Cie, Paris, 1939.

GRAMSCI, A., Concepção Dialética da História, Editora Civilização Brasileira, Rio de Janeiro, 1984.

HEATH, T. L., The Thirteen Books of Euclid's Elements, 1º volume, Dober Publications Inc., New York, 1956.

KARLSON, P., A Magia dos Números, Editora globo, Porto Alegre,1961.

KONDER, L., O que é Dialética, Editora Brasiliense, São Paulo,1984.

KOPNIN, P. V., A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento, Editora civilização Brasileira S.A., Rio de Janeiro, 1978.

KOSIK, K., Dialética do Concreto, Editora Paz e Terra S.A., Rio de Janeiro, 1976.

KUHN, T. S., A Estrutura das Revoluções Científicas, Editora Perspectiva S.A., São Paulo, 1982.

LEFEBVRE, H., Lógica Formal/Lógica Dialética, Editora Civilização Brasileira S.A., Rio de Janeiro, 1983.

LOSEE, J., Introdução Histórica à Filosofia da Ciência, Livraria Itatiaia Editora Limitada, Belo Horizonte, 1979.

MARX, K., Contribuição à Crítica da Economia Política, Livraria Martins Fontes Editora Ltda., São Paulo, 1983.

______, Formações Econômicas Pré-Capitalistas, Editora Paz e Terra S.A., Rio de Janeiro, 1985.

______, O 18 Brumário de Luis Bonaparte, Abril S.A. Cultural, São Paulo, 1985.

______, Manuscritos Econômico-Filosófico e Outros Textos Escolhidos, Abril S.A. Cultural, São Paulo, 1985.

MARX, K. & ENGELS, F., A Ideologia Alemã, Editora Moraes, São Paulo , 1984.

MELLO, G. N., "Magistério de 1º grau: da Competência Técnica ao Compromisso Política, Cortez Editora - Autores Associados, São Paulo, 1984.

MELO NETO, J. C. de, Auto do Frade, Livraria José Olimpo, São Paulo, 1984.

NAGEL, E. & NEWMANN, J.R., A Prova de Gödel, Editora Perspectiva, São Paulo, 1973.

NIETZCHE, F., Gaia Ciência, Guimarães & Cª, Editores, Lisboa, 1984.

PRICE, D. de S., A Ciência desde a Babilônia, Livraria Itatiaia Editora Limitada, Belo Horizonte, 1976.

PICARD, G., A Matemática a Serviço do Homem Moderno, Serviço de Educação de Adultos, C.E.C.M., Montreal, xerox, 1975.

PINTO, A.V., Ciência e Existência, Editora Paz e Terra S.A., Rio de Janeiro, 1979.

RADICE, L.L., A Matemática de Pitágoras e Newton, Edições 70, Lisboa, 1985.

RUSSELL, B., Los Principios de la Matemática, in Russell, B., Obras Completas, Aguillar S.A. Ediciones, Madrid, 1973.

SAVIANI, D., Escola e Democracia, Cortez Editora / Autores Associados, São Paulo, 1984.

_____, in D.T. Mendes (org.), Filosofia da Educação Brasileira, Civilização Brasileira, Rio de Janeiro, 1983.

SEVERI, F. & CONFORTO, F., Caratteri e Indirizzi Della Matemática Moderna, in Bertolari, L., Enciclopedia Delle Matematiche Elementari, Vol. III, Parte II, Milão, 1943.

SNYDERS, G., Para onde vão as Pedagogias não directivas?, Moraes Editora, Lisboa, 1978.

THOM, R., Parábolas e Catástrofes, Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1985.