

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

TESE DE DOUTORADO

**Existência e Estabilidade de Ondas
Viajantes Periódicas para Alguns
Modelos Dispersivos**

por

Carlos Banquet Brango[†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Profa. Dra. Márcia Guimarães Scialom

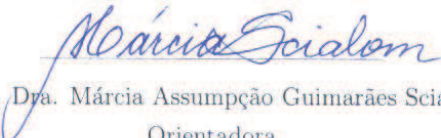
Co-orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Existência e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Alguns Modelos Dispersivos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Carlos Banquet Brango** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de Novembro de 2009.


Profa. Dra. Márcia Assumpção Guimarães Scialom

Orientadora


Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Co-orientador

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Márcia Assumpção Guimarães Scialom - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Aloísio Freiria Neves - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. José Luiz Boldrini - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Fabio Amorin Natali - DMA/UEM

Prof. Dr. José Felipe Linares Ramirez - IMPA

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Banquet Brango, Carlos Alberto
B227c Existência e estabilidade de ondas viajantes periódicas para alguns modelos dispersivos / Carlos Alberto Banquet Brango -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientadores : Márcia Guimarães Scialom ; Jaime Angulo Pava
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Equações de Benjamin-Ono. 3. Sistema de Zakharov. 4. Equações de Benjamin-Bona-Mahony. 5. Estabilidade não-linear. I. Scialom, Marcia A. G. II. Pava, Jaime Angulo. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Existence and stability of periodic travelling waves for some dispersive models.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Nonlinear partial differential equations. 2. Benjamin-Ono equations. 3. Zakharov system. 4. Benjamin-Bona-Mahony equations. 5. Nonlinear stability.

Área de concentração: Equações diferenciais parciais

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Márcia Guimarães Scialom (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Fábio Amorin Natali (DMA-UEM)
Prof. Dr. José Felipe Linares (IMPA)
Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 11/11/2009

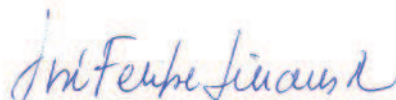
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 11 de novembro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MÁRCIA ASSUMPÇÃO GUIMARÃES SCIALOM



Prof(a). Dr(a). JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ



Prof(a). Dr(a). FÁBIO MATHEUS AMORIN NATALI



Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof(a). Dr(a). ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Damaris del Carmen Brango Mercado, apesar de todos os obstáculos sempre me apoiou em meus projetos.

Ao meu defunto pai Manuel Osias Banquet Gonzalez, gostaria de ter conversado mais uma vez com você antes de partir.

À professora Márcia Guimarães Scialom e o professor Jaime Angulo Pava pela orientação e pelas valiosas discussões, que me fizeram crescer como pessoa e como matemático.

À minha namorada Dianelis Torres Ramos por todo o apoio que me deu durante estes últimos dois anos.

Aos meus amigos que de uma ou outra forma contribuíram para a realização desta tese e do meu projeto de vida. Quero agradecer em especial a Ademir Pastor, Fabio Natali, Elisandra Gloss, Bruno Riveiro, Henrique Vitório e Alan Moura, por todos os bons momentos que passamos juntos e por toda a matemática que aprendi de vocês.

Ao CNPq, pela bolsa concedida.

RESUMO

O objetivo da tese é estudar algumas propriedades de soluções de equações diferenciais dispersivas. Primeiro, estabelecemos uma teoria de boa colocação local e global para a equação de Benjamin-Ono regularizada no contexto periódico, depois mostramos que o problema de Cauchy para esta equação (em ambos os casos periódico e não periódico) não pode ser resolvido usando um esquema iterativo baseado na fórmula de Duhamel em espaços de Sobolev com índice negativo. Adicionalmente, apresentamos a prova da existência de uma curva suave de soluções ondas viajantes periódicas, para a equação Benjamin-Ono regularizada, via o Teorema do Somatório de Poisson, com período minimal $2L$ fixo. Também é mostrado que estas soluções são não linearmente estáveis no espaço de energia $H_{per}^{1/2}$ por perturbações do mesmo período. Como uma extensão da teoria estabelecida para a equação Benjamin-Ono regularizada é provado que as soluções ondas periódicas associadas as equações Benjamin-Bona-Mahony, Benjamin-Bona-Mahony modificada e 4-Benjamin-Bona-Mahony são não linearmente estáveis em H_{per}^1 . Finalmente, provamos a existência e estabilidade não linear de uma família de soluções ondas dnoidal associadas ao sistema de Zakharov. Neste último caso, para obter as propriedades espectrais requeridas na prova da estabilidade foi usada a teoria de Floquet.

ABSTRACT

The goal of this thesis is to study the properties of solutions of some dispersive differential equations. First, we develop a local and global well-posedness theory for the regularized Benjamin-Ono equation in the periodic setting, then, we show that the Cauchy problem for this equation (in both periodic and nonperiodic cases) cannot be solved by an iteration scheme based on the Duhamel formula for negative Sobolev indices. Additionally, a proof of the existence of a smooth curve of periodic travelling wave solutions, for the regularized Benjamin-Ono equation, with fixed minimal period $2L$, is given. It is also shown that these solutions are nonlinearly stable in the energy space $H_{per}^{1/2}$ by perturbations of the same wavelength. An extension of the theory developed for the regularized Benjamin-Ono equation is given and as examples it is proved that the periodic wave solutions associated to the Benjamin-Bona-Mahony, modified Benjamin-Bona-Mahony and 4-Benjamin-Bona-Mahony equations are nonlinearly stable in H_{per}^1 . Finally, we prove the existence and the nonlinear stability of a family of dnoidal wave solutions associated to the Zakharov system. The Floquet theory is used in the last case to obtain the spectral properties required to prove the stability.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Notação e Preliminares	15
2 Resultados de Boa e Má Colocação	21
2.1 Boa Colocação para a Equação rBO	21
2.2 Boa Colocação para a Equação gBBM	29
2.3 Resultado de Má Colocação para a Equação rBO	30
3 Estabilidade para a Equação Benjamin-Ono Regularizada	35
3.1 Soluções Ondas Viajantes Periódicas	36
3.2 Análise Espectral	39
3.3 Estabilidade de Soluções Ondas Viajantes	41
4 Generalização da Teoria e Estabilidade para Equações do Tipo BBM	51
4.1 Generalização da Teoria	52
4.2 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação mBBM	55
4.3 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação BBM	61
4.4 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação 4-BBM	67
4.5 Estabilidade de Soluções Constantes para a Equação gBBM	76

5	Estabilidade para o Sistema de Zakharov	81
5.1	Existência de Soluções do Tipo Ondas Dnoidal	82
5.2	Existência de Soluções do Tipo Ondas Cnoidal	88
5.3	Análise Espectral	92
5.3.1	Análise Espectral para Ondas Dnoidal	93
5.3.2	Análise Espectral para Ondas Cnoidal	97
5.4	Estabilidade Não linear	100
5.4.1	Estabilidade das Soluções Ondas Dnoidal	100
6	Conclusões e Estudos Futuros	107
7	Apêndice	113
7.1	Apêndice A	113
7.2	Apêndice B	115
	Referências Bibliográficas	119

INTRODUÇÃO

A não linearidade é um fenômeno fascinante da natureza cujos efeitos têm sido apreciados durante muitos anos quando o objeto em consideração são soluções ondas viajantes para equações dispersivas. O estudo da existência e estabilidade/instabilidade destes estados especiais de movimento é muito importante para o entendimento de diferentes fenômenos observados em vários campos científicos tais como fluídos, plasmas e óptica não linear. As soluções ondas viajantes (nas quais estamos interessados) dependendo das condições de fronteira são de dois tipos: solitárias ou periódicas. A existência, estabilidade e instabilidade não linear de soluções ondas solitárias têm sido discutidos nas últimas duas décadas sob muitos pontos de vista. Por exemplo, do ponto de vista variacional ou via uma análise local através do método de Lyapunov. Diversas técnicas foram criadas para encontrar soluções e condições suficientes têm sido obtidas para garantir a estabilidade ou instabilidade para este tipo de ondas, veja por exemplo [3], [4], [6], [14], [15], [18], [37], [38], [58], [73], [74]. Em contraste com o estudo de ondas solitárias, as soluções ondas viajantes periódicas têm recebido menos atenção. O primeiro trabalho sobre a existência e estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas foi feito por Benjamin em [13], onde ele estudou ondas periódicas do tipo cnoidal para a equação Korteweg-de Vries. Este trabalho tinha algumas lacunas em partes centrais da teoria de estabilidade as quais foram recentemente revisadas e complementadas por Angulo, Bona e Scialom em [10]. Nos últimos anos, vários artigos a respeito de soluções ondas viajantes periódicas apareceram na literatura tratando-se existência, propriedades das soluções, estabilidade/instabilidade não linear e também estabilidade espectral, a qual é outro aspecto

interessante deste tipo de soluções, veja por exemplo [8, 9, 10, 11, 12, 34, 35, 41, 55].

Nesta tese estamos interessados em provar a existência e estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas para vários modelos dispersivos, mais precisamente estudaremos as equações Benjamin-Ono regularizada, Benjamin-Bona-Mahony, Benjamin-Bona-Mahony modificada, 4-Benjamin-Bona-Mahony e o sistema de Zakharov. A técnica usada para obter nossos resultados de estabilidade é a mesma para todos os modelos estudados, o método de Lyapunov, mais especificamente adaptaremos a teoria estabelecida por Benjamin [14], Bona [18] e Weinstein[74] ao caso periódico.

Na primeira parte da tese estudaremos a equação de Benjamin-Ono regularizada (rBO de aqui em diante)

$$u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0, \quad (1)$$

onde u é uma função a valores reais e \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert periódica definida, via a transformada de Fourier, como

$$\widehat{\mathcal{H}f}(k) = -i\text{sgn}(k)\widehat{f}(k),$$

onde

$$\text{sgn}(k) = \begin{cases} -1, & k < 0 \\ 1, & k > 0. \end{cases}$$

A equação Benjamin-Ono regularizada é um modelo para a evolução de ondas na interface entre dois líquidos que não se misturam. Esta equação é aproximadamente válida para ondas longas com amplitude pequena se uma das camadas de um dos fluidos tem grande profundidade e a outra é muito fina. Uma situação real na qual a equação surge é quando temos duas camadas geradas pelo encontro de água doce do rio com a água salgado do mar, veja Kalisch [46]. Esta equação é formalmente equivalente a equação Benjamin-Ono,

$$v_t + vv_x - \mathcal{H}v_{xx} = 0, \quad (2)$$

a qual foi introduzida pela primeira vez por Benjamin em [15] e mais tarde por Ono em [58] como um modelo para os mesmos tipos de situações que a equação rBO. Para ser mais específico, para condições iniciais convenientemente restritas, as soluções u de (1) e v de (2) são quase idênticas, pelo menos para valores de t em $[0, T]$, onde T é bastante grande,

veja Albert e Bona [5] para mais detalhes. Em [5] também são estudadas de maneira mais detalhada as vantagens e desvantagens de usar a equação (2) ou a equação (1) para modelar a propagação de ondas longas de amplitude pequena.

O primeiro passo para obter um resultado de estabilidade não linear é estabelecer um resultado de boa colocação para a equação estudada. Neste caso, para a equação (1) provamos que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3)$$

com dados iniciais nos espaços de Sobolev periódicos $H_{per}^s([-L, L])$ está localmente bem colocado se $s > 1/2$, e globalmente bem colocado se $s \geq 3/2$. Este resultado de existência, unicidade, persistência e dependência contínua dos dados iniciais para (3) não apresenta dificuldades especiais e foi estabelecido seguindo as ideias de Bona e Kalisch em [20], onde um resultado similar foi obtido no caso contínuo. A boa colocação local é provada usando um argumento de ponto fixo no espaço $C([0, T]; H_{per}^s)$ e usando uma estimativa *a priori* podemos estender a solução de maneira global no tempo.

A equação rBO possui três leis de conservação bem conhecidas, duas das quais serão usadas no decorrer desta tese, a saber:

$$E(u) := \frac{1}{2} \int (u\mathcal{H}u_x - \frac{1}{3}u^3)dx \quad \text{e} \quad F(u) := \frac{1}{2} \int (u^2 + u\mathcal{H}u_x)dx. \quad (4)$$

A lei de conservação F dada acima sugere que o espaço $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ (ou $H_{per}^{\frac{1}{2}}$) é um bom candidato para estabelecer uma teoria de boa colocação global para o problema de Cauchy associado a (1). Este problema está em aberto para dados iniciais em $H^s(\mathbb{R})$ (ou H_{per}^s), com $s \leq 1/2$, e um dos objetivos desta tese é apresentar alguns inconvenientes que aparecem quando queremos usar um método iterativo para resolver o problema. Mais precisamente, provamos que a aplicação dado-solução não pode ser C^2 na origem para $s < 0$, em ambos os casos periódico e não periódico. Este tipo de má-colocação já foi estudada por Bourgain em [24] e Tzvetkov em [69] para a equação de Korteweg-de Vries. Molinet, Saut e Tzvetkov em [53] e [54] fizeram o mesmo para as equações de Benjamin-Ono e Kadomsev-Petviashvili I (KPI), respectivamente. De acordo com o nosso melhor conhecimento, não existe nenhum

resultado de má-colocação para a equação rBO no caso periódico nem no caso contínuo.

Conforme fora mencionado no começo da introdução, um dos objetivos da tese é estabelecer uma teoria de estabilidade para as soluções ondas viajantes periódicas para a equação não linear dispersiva (1). As soluções ondas viajantes periódicas que serão consideradas nos Capítulos 3 e 4 desta tese são da forma geral,

$$u(x, t) = \phi_c(x - ct), \quad (5)$$

onde $\phi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave periódica (de período $2L$ no caso da rBO) e $c \in \mathbb{R}$ um parâmetro. Então, substituindo este tipo de solução em (1), integrando e supondo a constante de integração igual a zero, obtemos a seguinte equação pseudo-diferencial

$$c\mathcal{H}\phi_c' + (c - 1)\phi_c - \frac{1}{2}\phi_c^2 = 0. \quad (6)$$

No contexto de ondas viajantes do tipo solitária (isto é, soluções da forma (5) tais que ela e todas as suas derivadas de qualquer ordem convergem a zero quando $|\xi| \rightarrow \infty$), é bem conhecida a existência de soluções para (6) da forma

$$\phi_c(\xi) = \frac{4(c - 1)}{1 + \left(\frac{c-1}{c}\xi\right)^2}, \quad (7)$$

onde $c > 1$. A teoria de estabilidade para estas ondas solitárias foi estabelecida por Albert, Bona e Henry em [4]. Adicionalmente, Kalisch em [46] apresentou uma família periódica de soluções ondas viajantes (dependendo da velocidade c) com período 2π , para a equação rBO e a usou para testar a rapidez de convergência de um esquema numérico, o qual foi introduzido em [20] para provar que a equação (1) não constitui um *sistema infinito-dimensional completamente integrável*.

Para $L > \pi$ e $c > \frac{L}{L-\pi}$, provamos a existência de uma curva suave de soluções ondas viajantes periódicas pares para (1). A construção destas soluções é baseada no Teorema do Somatório de Poisson. A família de soluções está dada por

$$\phi_c(\xi) = \frac{2c\pi}{L} \left(\frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - \cos\left(\frac{\pi\xi}{L}\right)} \right), \quad (8)$$

com η satisfazendo

$$\eta(c) = \tanh^{-1} \left(\frac{c\pi}{(c-1)L} \right). \quad (9)$$

Com respeito a estabilidade não linear desta família de soluções periódicas, estendemos a abordagem clássica desenvolvida por Benjamin [14], Bona [18] e Weinstein [73] para o caso periódico. Mais precisamente, usamos as leis de conservação dadas em (4) para provar que a órbita $\mathcal{O}_{\phi_c} = \{\phi_c(\cdot + y) : y \in \mathbb{R}\}$ gerada pela onda ϕ_c é orbitalmente estável em $H_{per}^{\frac{1}{2}}([-L, L])$ com respeito ao fluxo periódico da equação rBO.

A fim de obter as condições espectrais requeridas para provar a estabilidade não linear, usamos a teoria recentemente desenvolvida por Angulo e Natali em [12]. Embora esta teoria tenha sido estabelecida para uma família de equações que não inclui a equação rBO, ainda podemos aplicá-la para obter uma estrutura espectral específica associada ao operador não local dado por,

$$\mathcal{L} := c\mathcal{H}\partial_x + (c - 1) - \phi_c. \quad (10)$$

No Capítulo 4 da tese a teoria estabelecida para a equação rBO é estendida para uma família mais geral de equações regularizadas. Estudamos uma classe de equações da forma

$$u_t + u_x + u^p u_x + H u_t = 0, \quad (11)$$

onde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, e H é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto de funções periódicas, definido como

$$\widehat{H}u(n) = \alpha(n)\widehat{u}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O símbolo α é assumido como uma função real, mensurável, localmente limitada e par definida em \mathbb{R} , satisfazendo as condições

$$A_1|n|^{m_1} \leq \alpha(n) \leq A_2(1 + |n|)^{m_2}, \quad (12)$$

com $1 \leq m_1 \leq m_2$, $|n| > n_0$, $\alpha(n) > b$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $A_i > 0$, para $i = 1, 2$. Observe que um número considerável de equações da forma dada em (11) surgem na prática. Por exemplo, se consideramos $H = -\partial_x^2$ obtemos a equação generalizada Benjamin-Bona-Mahony, e se escolhermos $H = \mathcal{H}\partial_x$ obtemos a equação generalizada Benjamin-Ono regularizada. O tipo de generalização dado em (11) no contexto de ondas solitárias já foi estudado por vários autores, veja por exemplo Albert, Bona e Henry [4] e Bona e Chen [19].

No que concerne à equação (11), as soluções ondas viajantes periódicas nas quais estamos interessados devem satisfazer

$$cH\phi_c + (c - 1)\phi_c - \frac{1}{p+1}\phi_c^{p+1} = 0. \quad (13)$$

Seguindo a prova da estabilidade das ondas periódicas estabelecida para a equação rBO, verificamos que as condições que garantem a estabilidade não linear de soluções ondas viajantes periódicas associadas a equações do tipo (11) são as seguintes:

- (C₀) existe uma curva não trivial suave de soluções periódicas para (13) da forma $c \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \phi_c \in H_{per}^{m_2}([-L, L])$;
 - (C₁) \mathcal{L} tem um único autovalor negativo o qual é simples;
 - (C₂) o autovalor zero é simples;
 - (C₃) $\frac{d}{dc} \int_{-L}^L (\phi_c H\phi_c + \phi_c^2) dx > 0$.
- (14)

Estas condições no caso de ondas solitárias são bem conhecidas e foram estabelecidas nos trabalhos de Benjamin, Bona, Weinstein, Grillakis, Shatah e Strauss. Em (4.5) o operador \mathcal{L} está dado por $\mathcal{L} := cH + (c - 1) - \phi_c^p$. Ainda no Capítulo 4, estabelecemos condições suficientes para obter as propriedades espectrais do operador \mathcal{L} dadas em (C₁) e (C₂) e como exemplos de aplicação obtemos a estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas não constantes para a equação generalizada Benjamin-Bona-Mahony (gBBM de aqui em diante), a saber

$$u_t + u_x + (p + 1)u^p u_x - u_{xxt} = 0, \quad (15)$$

onde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, e u é uma função a valores reais, nos casos particulares $p = 1$ (BBM), $p = 2$ (mBBM) e $p = 4$ (4-BBM). O caso $p = 1$ corresponde à equação BBM, a qual foi derivada como um modelo que descreve ondas de água com amplitude pequena e longo comprimento de onda, veja por exemplo [16, 61, 62]. Para $p = 2$, a equação obtida em (15) é conhecida como equação BBM modificada, a qual descreve ondas unidimensionais em *lattices* não lineares, veja [70, 71], portanto a generalização considerada em (15) não é somente de interesse matemático. Os outros casos possíveis de interesse $p = 3, 5$ não são considerados aqui porque os métodos que usamos para encontrar soluções apresentam dificuldades. Por exemplo, se $p = 3$ não conhecemos explicitamente a transformada de Fourier das soluções ondas solitárias associadas à equação 3-BBM (veja (17) abaixo), a qual é necessária para aplicar o Teorema do Somatório de Poisson. Usando o método de quadratura acreditamos

que temos alguma chance de obter soluções periódicas para os casos não estudados aqui, o que será feito futuramente.

Recentemente, no contexto periódico, Hărăguş em [41] provou a estabilidade espectral de ondas periódicas para a equação generalizada BBM que são perturbações pequenas da solução constante $u = (c - 1)^{1/p}$ em ambos os casos $L^2(\mathbb{R})$ e $C_b(\mathbb{R})$. Se $1 \leq p \leq 2$, a autora obteve estabilidade espectral para todo $c > 1$. No caso $p = 3$, comprova-se a existência de $c_3 > 1$ tal que as ondas são estáveis para $c > c_3$ e instáveis em $(1, c_3)$, e no caso $p > 3$ existe uma velocidade crítica c_p tal que as ondas periódicas são espectralmente estáveis para $c \in (c_p, \frac{p}{p-3})$, e instáveis para $c \in (1, c_p) \cup (\frac{p}{p-3}, \infty)$. Vale a pena notar que Hakkaev, Iliev e Kirchev em [40] estudaram a estabilidade orbital para um tipo de equação generalizada BBM e para equação Camassa Holm. A família de equações do tipo BBM que eles pesquisaram é da forma

$$u_t + 2\omega u_x + 3uu_x - u_{xxt} = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Os autores provaram a existência de soluções do tipo ondas cnoidal, mas somente mostraram a estabilidade orbital destas soluções no caso particular $\omega = 0$, o que nos permite concluir que esta abordagem é bem diferente dos assuntos estabelecidos nesta tese.

Novamente, as ondas viajantes periódicas que consideraremos no Capítulo 4 são da forma (5), no caso da BBM, mBBM e 4-BBM a função ϕ_c terá período minimal L . Substituindo este tipo de solução em (15) e assumindo zero como a constante de integração, obtemos

$$c\phi_c'' - (c - 1)\phi_c + \phi_c^{p+1} = 0. \quad (16)$$

Para $c > 1$, a equação ordinária anterior possui soluções ondas solitárias da forma

$$\varphi_c(\xi) = \left[\frac{(p+2)(c-1)}{2} \right]^{1/p} \operatorname{sech}^{2/p} \left(\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c-1}{c}} \xi \right). \quad (17)$$

Estas ondas solitárias são orbitalmente estáveis para todas as velocidades $c > 1$ se $1 \leq p \leq 4$, para cada $p \geq 5$ existe uma velocidade crítica $c_p > 1$ tal que as ondas solitárias são não linearmente estáveis se $c > c_p$, e não linearmente instáveis quando $c \in (1, c_p)$, veja Souganidis e Strauss [65] e Weinstein [72]. No caso particular da equação BBM foi provado por El Dika em [33] e Miller e Weinstein em [52] que as ondas solitárias são assintoticamente estáveis.

Outro resultado interessante foi obtido em [78] por Zeng, onde fora provada a existência e estabilidade de ondas solitárias para uma família de equações do tipo BBM usando métodos variacionais.

No caso da equação BBM, usando o Teorema do Somatório de Poisson, provamos a existência de uma curva suave de soluções ondas viajantes periódicas para (16) (com $p = 1$) do tipo cnoidal com período minimal $L > 2\pi$ e cuja velocidades de onda satisfaz

$$c > \frac{L^2}{L^2 - 4\pi^2}.$$

As soluções neste caso são da forma,

$$\phi_c(x) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12c}} x; k \right), \quad (18)$$

onde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dependem suavemente de c e cn denota a função elíptica de Jacobi cnoidal (veja Apêndice A). Para a equação mBBM, novamente usando o Teorema do Somatório de Poisson, obtemos a existência de uma curva suave de soluções ondas viajantes periódicas do tipo dnoidal para (16) (com $p = 2$) com período minimal $L > \sqrt{2}\pi$ e $c > \frac{L^2}{L^2 - 2\pi^2}$. As soluções neste caso são dadas por,

$$\phi_c(x) = \eta \operatorname{dn} \left(\frac{\eta x}{\sqrt{2c}}; k \right), \quad (19)$$

onde η e k são funções positivas que dependem suavemente de c e dn representa a função elíptica de Jacobi dnoidal (veja Apêndice A). Finalmente, para a equação 4-BBM seguindo as ideias em Angulo e Natali [11] provamos que existe uma família explícita de soluções ondas viajantes periódicas para (16) (com $p = 4$), com período minimal $L > \pi$ e $c > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$. Neste caso não usamos o Teorema do Somatório de Poisson pois não sabemos explicitamente para onde converge a série de Fourier gerada por este método. A curva suave de soluções periódicas é dada por

$$\phi_c(\xi) = \sqrt{\eta_3} \frac{\operatorname{dn} \left(\frac{2}{g\sqrt{3c}} \xi; k \right)}{\sqrt{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{2}{g\sqrt{3c}} \xi; k \right)}}, \quad (20)$$

onde os parâmetros η_3, g, α, k dependem suavemente da velocidade de onda c e sn denota a função elíptica de Jacobi snoidal. A estabilidade não linear das ondas viajantes periódicas (18), (19) e (20) associadas as equações BBM, mBBM e 4-BBM, respectivamente, é estabelecida para perturbações de período L , com as condições $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ e $c > \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$ (é claro,

$p = 1, 2, 4$ para a BBM, mBBM e 4-BBM, respectivamente). Vale a pena ressaltar que todos os nossos resultados de estabilidade valem para qualquer período fixo $L > 0$ tal que $pL^2 > 4\pi^2$, e não somente para períodos grandes. O caso $pL^2 \leq 4\pi^2$ será também analisado.

Com respeito ao problema de Cauchy associado à equação (15) no caso periódico, a boa colocação global no espaço de Sobolev $H_{per}^1([0, L])$ é suficiente para nosso propósito, uma vez que neste caso H_{per}^1 é o espaço de energia associado a equação. Este resultado é diretamente obtido seguindo as ideias de Albert em [2] onde um resultado similar foi estabelecido no caso contínuo. Vale a pena notar que no caso não periódico (isto é, dados iniciais em $H^s(\mathbb{R})$) para a equação BBM existe um resultado muito melhor obtido por Bona e Tzvetkov em [22] onde eles provaram que o problema de valor inicial associado à equação BBM é globalmente bem colocado em $H^s(\mathbb{R})$ com $s \geq 0$. Este resultado é ótimo no sentido que a equação BBM não pode ser resolvida aplicando o método de ponto fixo em $H^s(\mathbb{R})$ para $s < 0$. Bona e Chen em [21] obtiveram resultados adicionais de boa colocação no caso não periódico para uma família de equações que inclui a equação gBBM.

Na última parte do Capítulo 4 desta tese, é apresentada a estabilidade de soluções constantes para a equação generalizada BBM. Neste caso, usamos a abordagem dada por Angulo, Bona e Scialom em [10] para obter um resultado de estabilidade não linear para uma família de soluções de (16) da forma,

$$\phi_0(\xi) = (c - 1)^{1/p}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Observe que as restrições no período L e na velocidade c dadas por $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ e $c > \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$, sempre emergem quando provamos a estabilidade de soluções periódicas não constantes para as equações BBM, mBBM e 4-BBM. Se impusermos a mesma restrição em L e considerarmos $1 < c < \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$, para as soluções constantes da equação gBBM, obteremos também a estabilidade, mas se supusermos $0 < L \leq \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ obteremos a estabilidade orbital usando somente a hipótese $c > 1$, a qual é necessária para ter a existência de soluções constantes.

Ainda respeito da equação gBBM, podemos ressaltar que recentemente Johnson em [44] estudou a estabilidade de soluções periódicas para uma equação do tipo BBM da forma,

$$u_t - u_{xxt} + u_x + (f(u))_x = 0, \tag{21}$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$. Neste trabalho, condições suficientes para obter a estabilidade não linear de soluções ondas viajantes periódicas (por perturbações periódicas com o mesmo período que as ondas) foram estabelecidas em termos dos Jacobianos de várias aplicações definidas no espaço de parâmetros (a, E, c) , onde a, E são constantes de integração e c é a velocidade da onda. As aplicações anteriormente mencionadas são o período, a massa e o momento. Todas as soluções estudadas por Johnson não são encontradas explicitamente e o período delas depende continuamente das variáveis a, E e c . No caso particular $f(u) = u^{p+1}$ os resultados de estabilidade/instabilidade obtidos em [44] foram estabelecidos para a suficientemente pequeno, $T(a, E, c)$ suficientemente grande e $p \neq 4$. Um resultado similar foi também estabelecido por Johnson em [45] para a equação de Korteweg-de Vries generalizada. Observe que o nosso trabalho é bem diferente, pois em todos os casos estudados nesta tese, sempre é construída explicitamente uma família de soluções ondas viajantes periódicas com um período minimal fixo L , o qual não depende da velocidade de onda c e os casos relacionados com a gBBM o período é tal que $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$, mas não necessariamente grande.

No Capítulo 5, estudamos o sistema de Zakharov,

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = uv \\ v_{tt} - v_{xx} = (|u|^2)_{xx}, \end{cases} \quad (22)$$

onde $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$, $v = v(x, t) \in \mathbb{R}$, e $x, t \in \mathbb{R}$. Este sistema foi introduzido por Zakharov em [77] para descrever a propagação de turbulência das ondas de Langmuir em um plasma. A função u denota a envolvente de variação lenta do campo elétrico E com frequência ω tal que $E(x, t) = \text{Re}(u(x, t)\exp(-i\omega t))$ e a função v denota o desvio do ion densidade do equilíbrio.

Nosso objetivo com o sistema (22) tange a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas. Mais exatamente, estamos interessados em soluções do tipo

$$u(x, t) = e^{-i\omega t} e^{i\frac{c}{2}(x-ct)} \phi_{\omega, c}(x - ct), \quad v(x, t) = \psi_{\omega, c}(x - ct), \quad (23)$$

onde $\omega, c \in \mathbb{R}$ e $\phi_{\omega, c}, \psi_{\omega, c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves periódicas com um mesmo período fundamental $L > 0$. De acordo com o nosso melhor conhecimento, nenhum resultado de estabilidade para este tipo de ondas fora estabelecido. Substituindo o tipo de soluções dado

em (23) no sistema (22) segue que $\phi = \phi_{\omega,c}$ e $\psi = \psi_{\omega,c}$ devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{cases} (c^2 - 1)\psi'' = (\phi^2)'' \\ \phi'' + \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right)\phi = \phi\psi. \end{cases} \quad (24)$$

Integrando a primeira equação do sistema (24), obtemos após uma álgebra que a solução ϕ_c deve satisfazer

$$(\phi')^2 = \frac{1}{2(1-c^2)}F(\phi),$$

onde F é o polinômio dado por

$$F(t) = -t^4 + 2(1-c^2)\left(-\omega - \frac{c^2}{4}\right)t^2 + 4(1-c^2)A_\phi$$

e A_ϕ é uma constante de integração. É claro que as soluções da equação (22) dependem das raízes do polinômio F . Provaremos nesta tese a existência de duas famílias de soluções, a saber,

- (i) Se F tem raízes $\pm\eta_1$ e $\pm\eta_2$ com $0 < \eta_2 < \eta_1$, obtemos uma curva suave de ondas dnoidal

$$\nu \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto (\psi_\nu, \phi_\nu) \in H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^n([0, L]),$$

com ϕ_ν e ψ_ν dadas por

$$\phi_\nu(\xi) = \eta_1 \operatorname{dn}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}}\xi; k\right) \quad \text{e} \quad \psi_\nu(\xi) = -\frac{\eta_1^2}{1-c^2} \operatorname{dn}^2\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}}\xi; k\right).$$

Estas soluções são construídas com período minimal L fixado. Aqui, $k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}$, $\nu = -\left(\omega + \frac{c^2}{4}\right)$ e dn representa a função elíptica de Jacobi do tipo dnoidal.

- (ii) Se F tem raízes $\pm a$ e $\pm bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, podemos obter duas curvas suaves de ondas tipo cnoidal, a primeira

$$\nu \in (0, +\infty) \mapsto (\psi_\nu, \phi_\nu) \in H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^n([0, L])$$

com ϕ_ν e ψ_ν dadas por

$$\phi_\nu(\xi) = a \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu\alpha}{\alpha}}\xi; k\right) \quad \text{e} \quad \psi_\nu(\xi) = -\frac{a^2}{\alpha} \operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu\alpha}{\alpha}}\xi; k\right).$$

Neste caso, o módulo k está dado como $k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$. A segunda família é

$$\nu \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2}, 0 \right) \mapsto (\phi_\nu, \psi_\nu) \in H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^n([0, L])$$

onde ϕ_ν e ψ_ν vêm dadas por

$$\phi_\nu(\xi) = \sqrt{2\nu\alpha + b^2} \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{\nu\alpha + b^2}{\alpha}} \xi; k \right) \quad \text{e} \quad \psi_\nu(\xi) = -\frac{b^2 + 2\nu\alpha}{\alpha} \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha\nu + b^2}{\alpha}} \xi; k \right),$$

onde o módulo é definido como $k^2 = \frac{b^2+2\nu\alpha}{2b^2+2\nu\alpha}$. Estas soluções são construídas com período minimal L fixado arbitrariamente. Em ambos os casos, $\nu = -\left(\omega + \frac{c^2}{4}\right)$, $\alpha = 1 - c^2$ e cn representa a função elíptica de Jacobi do tipo cnoidal.

Em ordem de estabelecer o estudo espectral relacionado aos diferentes operadores lineares que surgirão na prova da estabilidade, usaremos a teoria de Floquet. Nossa análise espectral depende basicamente dos problemas de autovalores periódicos e semi-periódicos associados à equação de Lamé, dados respectivamente por

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k)]y = 0 \\ y(0) = y(2K(k)), \quad y'(0) = y'(2K(k)), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k)]y = 0 \\ y(0) = -y(2K(k)), \quad y'(0) = -y'(2K(k)), \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, sn denota a função elíptica de Jacobi do tipo snoidal e K é a integral elíptica completa do primeiro tipo (veja Apêndice A). Recentemente, Neves em [56] provou que é possível caracterizar os autovalores do operador de Hill $L(y) = -y'' + Q(x)y$ em $L^2[0, \pi]$ se conhecemos explicitamente uma das autofunções associadas ao autovalor (neste caso, Q é uma função de classe C^2 periódica com período π). Infelizmente, só tivemos acesso a este trabalho quando já estávamos concluindo nossos resultados estudando a equação de Lamé associada. Acreditamos que esta nova teoria poderia ser usada para obter as propriedades espectrais da maioria dos operadores diferenciais estudados nesta tese.

Com intuito de obter o resultado de estabilidade para as soluções do tipo ondas dnoidal,

escrevemos o sistema de Zakharov da seguinte forma

$$\begin{cases} v_t = -V_x, & \int_0^L V(x, t) dx = 0 \\ V_t = -(v + |u|^2)_x \\ iu_t + u_{xx} = uv \end{cases} \quad (25)$$

e aplicamos novamente o método de Lyapunov ao sistema dado acima, impondo a restrição

$$\int_0^L v_0(x) dx \leq \int_0^L \psi_\nu(x) dx,$$

onde $v(x, 0) = v_0(x)$, obtemos que as ondas tipo dnoidal com $c \in (-1, 1)$ fixo e $\nu > \frac{2\pi^2}{L^2}$, são orbitalmente estáveis em

$$X := L_{per}^2([0, L]) \times \tilde{L}_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]),$$

pelo fluxo periódico do sistema de Zakharov. Aqui, \tilde{L}_{per}^2 é dado por

$$\tilde{L}_{per}^2([0, L]) = \left\{ f \in L_{per}^2([0, L]) : \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}.$$

Vale a pena notar que no caso contínuo a restrição imposta acima para o dado inicial v_0 não se faz necessária, posto que usando a propriedade em que as soluções tendem a zero no infinito, desaparece o termo que obriga a imposição dessa condição.

Em relação às ondas do tipo cnoidal, o problema é muito mais delicado. Apesar de termos uma teoria espectral completa em mãos, o método usado anteriormente para obter um resultado de estabilidade não é aplicável. Tentaremos no futuro estabelecer algum resultado de estabilidade ou instabilidade para este caso.

Dividiremos esta tese da seguinte forma. No Capítulo 1 introduzimos as notações que serão usadas no decorrer da tese, inclusive o Teorema do Somatório de Poisson, a definição da classe $PF(2)$ discreto bem como algumas de suas propriedades. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos resultados de boa colocação necessários para estabelecer a estabilidade, mais especificamente, provamos a boa e má colocação da equação rBO e a boa colocação da equação gBBM. A existência e estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para a equação rBO é provada no Capítulo 3, usando o Teorema do Somatório de Poisson e o

método de Lyapunov, respectivamente. No Capítulo 4 a teoria estabelecida para a equação rBO é estendida a uma família mais geral de equações regularizadas, e como exemplos provamos a estabilidade de soluções periódicas para as equações BBM, mBBM e 4-BBM. O sistema de Zakharov é estudado no Capítulo 5 e usando novamente o método de Lyapunov obtemos um resultado de estabilidade para soluções periódicas do tipo ondas dnoidal. O Capítulo 6 apresenta as conclusões que foram obtidas nesta tese e eventuais estudos futuros a serem pesquisados posteriormente. Finalmente, no Capítulo 7 temos os Apêndices A e B, os quais contem as definições e propriedades fundamentais das funções elípticas de Jacobi, e os principais elementos da Teoria de Floquet que usaremos no decorrer da tese.

CAPÍTULO 1

NOTAÇÃO E PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos algumas notações e resultados básicos que serão utilizadas no decorrer desta tese. A maioria dos resultados contidos aqui podem ser encontrados em Iório e Iório [43].

Os espaços $L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq \infty$ são definidos como sendo os espaços de funções definidas em Ω a valores reais ou complexos e mensuráveis a Lebesgue tais que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Os espaços $L^p(\Omega)$ munidos com as normas acima são espaços de Banach, em particular quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(f, g)_{L^2} := (f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Neste contexto definimos a transformada de Fourier como segue

Definição 1.0.1. *A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$, que denotaremos \widehat{f} , é definida como*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}.$$

Observação 1.0.2. Usando o Teorema de Plancherel é possível definir a transformada de Fourier para uma função em $L^2(\mathbb{R})$. Em qualquer dos casos $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ expressaremos a transformada de Fourier de f como $\widehat{f}^{\mathbb{R}}$ para não ter perigo de confusão com a transformada de Fourier no caso periódico, que será definida depois.

A seguir definimos os espaços de Sobolev periódicos. Denote por $\mathcal{P} = C_{per}^{\infty}$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que são infinitamente diferenciáveis e periódicas com período $2L > 0$. A coleção \mathcal{P}' de todos os funcionais lineares e contínuos definidos de \mathcal{P} em \mathbb{C} é denominado o conjunto das *distribuições periódicas*. Se $\Psi \in \mathcal{P}'$ denotamos o valor de Ψ em $\varphi \in \mathcal{P}$ como

$$\Psi(\varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle.$$

Defina as funções $\Theta_k(x) = \exp(\pi i k x / L)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. A transformada de Fourier de $\Psi \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ dada pela fórmula

$$\widehat{\Psi}(k) = \frac{1}{2L} \langle \Psi, \Theta_{-k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, se Ψ é uma função periódica com período $2L$, temos que

$$\widehat{\Psi}(k) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \Psi(x) e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx.$$

O espaço das sequências $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de quadrado somável denotado por $l^2 := l^2(\mathbb{Z})$ é definido como

$$l^2 = \left\{ \alpha : \|\alpha\|_{l^2} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev de ordem s , denotado por $H_{per}^s := H_{per}^s([-L, L])$ é o conjunto de todas as $f \in \mathcal{P}'$ tais que $(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(k) \in l^2(\mathbb{Z})$, com norma

$$\|f\|_{H_{per}^s}^2 = 2L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2.$$

A coleção H_{per}^s é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$(f|g)_s = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

No caso $s = 0$, H_{per}^0 é um espaço de Hilbert que é isometricamente isomorfo a $L^2([-L, L])$ e

$$(f|g)_0 = (f, g) = \int_{-L}^L f \overline{g} dx.$$

O espaço H_{per}^0 será denotado por L_{per}^2 e sua norma será $\|\cdot\|_{L_{per}^2}$. Claramente $H_{per}^s \subset L_{per}^2$, para qualquer $s \geq 0$. Além disso, $(H_{per}^s)'$, o dual topológico de H_{per}^s , é isometricamente isomorfo a H_{per}^{-s} para todo $s \in \mathbb{R}$. A dualidade é implementada concretamente pelo par

$$\langle f, g \rangle_s = 2L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}, \quad \text{para } f \in H_{per}^{-s}, \quad g \in H_{per}^s.$$

Desta maneira, se $f \in L_{per}^2$ e $g \in H_{per}^s$, com $s \geq 0$, segue que $\langle f, g \rangle_s = (f, g)$. Adicionalmente, no caso particular $s = \frac{1}{2}$ denotaremos o par $\langle f, g \rangle_s$ simplesmente por $\langle f, g \rangle$. Neste contexto o Lema de Sobolev nos diz que se $s > \frac{1}{2}$ e

$$C_{per} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é contínua e periódica com período } 2L\},$$

então $H_{per}^s \hookrightarrow C_{per}$.

Se Y é um espaço de Banach do tipo H_{per}^s e $T > 0$, então $C([0, T]; Y)$ é o espaço das aplicações contínuas de $[0, T]$ em Y e para $k \geq 0$, $C^k([0, T]; Y)$ é o subespaço das funções $t \mapsto u(t)$ tais que $\partial_t^j u \in C([0, T]; Y)$ para $0 \leq j \leq k$, onde as derivadas são consideradas no sentido das distribuições de valores vetoriais. Este espaço carrega a norma padrão

$$\|u\|_{C^k([0, T]; Y)} = \sum_{j=0}^k \max_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t^j u(t)\|_Y.$$

No decorrer desta tese, c_0 denotará constantes numéricas as quais podem mudar de linha em linha. Para qualquer números positivos A e B a notação $A \lesssim B$ (respectivamente, $A \gtrsim B$) significa que existe uma constante positiva c_0 tal que $A \leq c_0 B$ (respectivamente, $A \geq c_0 B$). A notação $A \sim B$ significa que $A \lesssim B \lesssim A$. Finalmente denotaremos por $\mu(A)$ a medida de Lebesgue do conjunto A .

A convolução de duas sequências α e β , que denotaremos por $\alpha * \beta$, é a sequência definida por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-m} \beta_m,$$

sempre que o lado direito da igualdade anterior faça sentido.

Apresentaremos agora o Teorema de Parseval. Denote por PC_{per} o espaço das funções contínuas por partes e periódicas de período $2L$. Dada $f \in PC_{per}$, a transformada de Fourier

de f é a sequência de números complexos $\widehat{f} = \left(\widehat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$\widehat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx.$$

Os números $\widehat{f}(k) = c_k$ são os coeficientes de Fourier de f e a série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\frac{ik\pi x}{L}},$$

é chamada a série de Fourier gerada por f .

Teorema 1.0.3. *Seja $f \in C_{per}$ e assumamos que $f' \in PC_{per}$. Então a série de Fourier gerada por f converge uniformemente à f sobre \mathbb{R} . Além disso, temos a identidade*

$$\|\widehat{f}\|_{l^2}^2 = \frac{1}{2L} \|f\|_{L^2_{per}}^2.$$

Ou equivalentemente,

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{l^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2L} (f, g)_{L^2_{per}}.$$

A última igualdade é conhecida como identidade de Parseval.

Agora apresentaremos o Teorema do Somatório de Poisson que será usado repetidamente nesta tese para encontrar a maioria das ondas viajantes periódicas aqui estudadas.

Teorema 1.0.4. *Seja $\widehat{f}^{\mathbb{R}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$ e $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^{\mathbb{R}}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ satisfazendo*

$$|f(x)| \leq \frac{A}{(1 + |x|)^{1+\delta}} \quad e \quad |\widehat{f}^{\mathbb{R}}(\xi)| \leq \frac{A}{(1 + |\xi|)^{1+\delta}},$$

onde $A > 0$ e $\delta > 0$ (então f e \widehat{f} podem ser assumidas contínuas). Então, para $L > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2Ln) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}^{\mathbb{R}}\left(\frac{n}{2L}\right) e^{\frac{\pi inx}{L}}.$$

As duas séries acima convergem absolutamente.

Demonstração. Veja Capítulo 7 de Stein e Weiss [67], por exemplo. □

Terminaremos esta seção apresentando a definição da classe $PF(2)$ discreto e as propriedades que serão usadas repetidamente nesta tese.

Definição 1.0.5. Definimos a classe $PF(2)$ discreto como o conjunto de seqüências $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \alpha_n > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}, \\ (ii) \quad & \alpha_{n_1 - m_1} \alpha_{n_2 - m_2} - \alpha_{n_1 - m_2} \alpha_{n_2 - m_1} > 0 \text{ para } n_1 < n_2 \text{ e } m_1 < m_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

A definição anterior é uma discretização da definição usual dada no caso contínuo, isto é, quando estamos trabalhando com funções a valores reais. Mais especificamente, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f está na classe $PF(2)$ contínuo se

$$\begin{aligned} (i) \quad & f(x) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad & f(x_1 - y_1)f(x_2 - y_2) - f(x_1 - y_2)f(x_2 - y_1) > 0 \text{ para } x_1 < x_2 \text{ e } y_1 < y_2. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes veja Capítulo 7 de Karlin [47]. É claro que se f está na classe $PF(2)$ contínuo, então a seqüência $a_n := f(n)$ esta na classe $PF(2)$ discreto. A seguir, apresentamos duas propriedades que serão usadas várias vezes neste trabalho. A prova da primeira propriedade foi estabelecida por Albert e Bona em [6]. A demonstração da segunda pode ser encontrada no Capítulo 8 de [47].

Lema 1.0.6. *Suponha que f é uma função positiva, duas vezes diferenciável sobre \mathbb{R} e satisfazendo $\frac{d^2}{dx^2}(\log(f(x))) < 0$, para cada $x \neq 0$. Então $f \in PF(2)$ contínuo.*

Teorema 1.0.7. *Sejam α e β duas seqüências pares na classe $PF(2)$ discreto, então a convolução $\alpha * \beta$ está em $PF(2)$ discreto (se a convolução fizer sentido).*

CAPÍTULO 2

RESULTADOS DE BOA E MÁ COLOCAÇÃO

Neste capítulo estabeleceremos os resultados de boa colocação para as equações rBO e gBBM. Para obter o resultado de boa colocação para a equação rBO seguimos as ideias de Bona e Kalisch em [18] onde um resultado similar foi obtido para o caso contínuo. No caso da gBBM a abordagem é um pouco mais simples posto que a norma H_{per}^1 é uma quantidade conservada. No final do capítulo apresentaremos um resultado de má colocação para a rBO no espírito dos trabalhos de Bourgain em [24] e Molinet, Saut e Tzvetkov em [53, 54].

2.1 Boa Colocação para a Equação rBO

Nesta seção estudaremos a boa colocação associada ao problema de valor inicial,

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

com dados iniciais nos espaços de Sobolev periódicos $H_{per}^s([-L, L])$. Para maior simplicidade nesta seção consideraremos $L = \pi$. Primeiramente, rescreva (2.1) como sendo

$$(1 + \mathcal{H}\partial_x)u_t = -(u + \frac{1}{2}u^2)_x,$$

usando os fatos que $1 + \mathcal{H}\partial_x > 0$ e que ∂_x e $(1 + \mathcal{H}\partial_x)^{-1}$ comutam, temos que

$$u_t = -\partial_x (1 + \mathcal{H}\partial_x)^{-1} (u + \frac{1}{2}u^2) = K * (u + \frac{1}{2}u^2), \quad (2.2)$$

onde K é dado explicitamente pela transformada de Fourier como

$$\widehat{Ku}(k) = \frac{-ik}{1 + |k|} \widehat{u}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Integrando (2.2) e usando a condição inicial obtemos

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t K * (u + \frac{1}{2}u^2)(x, \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2.3)$$

Agora, pelo fato de H_{per}^s com $s > 1/2$ ser uma álgebra de Banach, obtemos por argumentos típicos de ponto fixo o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1. *Suponha $s > 1/2$, então para todo $u_0 \in H_{per}^s$ existe $T = T(\|u_0\|_{H_{per}^s}) > 0$ e uma única solução de (2.3) no intervalo $[-T, T]$, tal que $u \in C([-T, T]; H_{per}^s)$. Além disso, para todo $T' < T$ existe uma vizinhança V de u_0 em H_{per}^s tal que o fluxo dado-solução*

$$\mathbb{F} : V \longrightarrow C([-T', T']; H_{per}^s), \quad \tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(t),$$

é Lipschitz.

Demonstração. Apresentaremos a prova somente para a conveniência do leitor. Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $T > 0$, defina $X := C([0, T], H_{per}^s)$, $\|u\|_X := \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_{per}^s}$ e

$$Au(t) := u_0 + \int_0^t K * (u + \frac{1}{2}u^2)(\cdot, \tau) d\tau.$$

Então,

$$\|Au(t)\|_{H_{per}^s} \leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \|K * (u + \frac{1}{2}u^2)(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^s} d\tau.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|K * w\|_{H_{per}^s}^2 &= 2L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{K}(k)|^2 |\widehat{w}(k)|^2 = 2L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \frac{|k|^2}{(1 + |k|)^2} |\widehat{w}(k)|^2 \\ &\leq 2L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{w}(k)|^2 = \|w\|_{H_{per}^s}^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Agora, pela estimativa (2.4) e usando o fato que H_{per}^s com $s > \frac{1}{2}$ é uma álgebra de Banach, temos

$$\begin{aligned} \|Au(t)\|_{H_{per}^s} &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \|(u + \frac{1}{2}u^2)(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^s} d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \left(\|u(\tau)\|_{H_{per}^s} + \frac{c_0}{2} \|u(\tau)\|_{H_{per}^s}^2 \right) d\tau \\ &\leq \|u_0\|_X + T(\|u\|_X + \frac{c_0}{2} \|u\|_X^2), \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Portanto

$$\|Au\|_X \leq \|u_0\|_X + T \left(\|u\|_X + \frac{c_0}{2} \|u\|_X^2 \right). \quad (2.5)$$

Por outro lado, se $u, w \in X$, então para todo $0 \leq t \leq T$ tem-se

$$\begin{aligned} \|Au(t) - Aw(t)\|_{H_{per}^s} &\leq \int_0^t \left[\|(u - w)(\tau)\|_{H_{per}^s} + \frac{1}{2} \|(u^2 - w^2)(\tau)\|_{H_{per}^s}^2 \right] d\tau \\ &\leq \int_0^t \|(u - w)(\tau)\|_{H_{per}^s} \left[1 + \frac{c_0}{2} \|(u + w)(\tau)\|_{H_{per}^s} \right] d\tau \\ &\leq T \|u - w\|_X \left[1 + \frac{c_0}{2} (\|u\|_X + \|w\|_X) \right]. \end{aligned}$$

Assim

$$\|Au - Aw\|_X \leq T \|u - w\|_X \left[1 + \frac{c_0}{2} (\|u\|_X + \|w\|_X) \right]. \quad (2.6)$$

Agora, defina $M := \{u \in X : \|u\|_X \leq R\}$. Se $u, w \in M$ de (2.5) e (2.6) temos que

$$\|Au\|_X \leq \|u_0\|_X + T \left(R + \frac{c_0}{2} R^2 \right) \quad \text{e} \quad \|Au - Aw\|_X \leq T \|u - w\|_X (1 + c_0 R).$$

Tomando $R := 2\|u_0\|_X$ e $T < \frac{1}{2}(1 + c_0 R)^{-1}$, tem-se que para todo $u, w \in M$

$$\|Au\|_X \leq \frac{R}{2} + RT(1 + \frac{c_0}{2} R) \leq \frac{R}{2} + RT(1 + c_0 R) \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

e

$$\|Au - Aw\|_X \leq \frac{1}{2} \|u - w\|_X.$$

Portanto $A : M \rightarrow M$ é uma contração, então existe um único $u \in M$ tal que $Au(t) = u(t)$ para todo $t \in [0, T]$.

Provaremos agora a dependência contínua dos dados iniciais. Primeiro provaremos que para todo $T' < T$, existe uma vizinhança V de u_0 em H_{per}^s tal que a aplicação

$$F : V \longrightarrow C([-T', T'], H_{per}^s), \quad \tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(t),$$

onde \tilde{u} é a solução da equação integral (2.3) com dado inicial \tilde{u}_0 é Lipschitz.

De fato, defina $V := \{v \in X : \|v - u_0\|_X < \delta\}$, com $0 < \delta < \frac{1}{4c_0}(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T})$. Note que se $v_0 \in V$, então

$$\|v_0\|_{H_{per}^s} \leq \|v_0 - u_0\|_{H_{per}^s} + \|u_0\|_{H_{per}^s} \leq \delta + \|u_0\|_{H_{per}^s}.$$

Logo

$$\begin{aligned} 1 + c_0 R_{v_0} &= 1 + 2c_0 \|v_0\|_{H_{per}^s} \leq 1 + 2c_0 \delta + 2c_0 \|u_0\|_{H_{per}^s} = 1 + 2c_0 \delta + c_0 R \\ &= \frac{1}{2T} + 2c_0 \delta < \frac{1}{2T'}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Portanto

$$T_{v_0} = \frac{1}{2(1 + c_0 R_{v_0})} = \frac{1}{2(1 + 2c_0 \|v_0\|_{H_{per}^s})} > T'$$

Agora, considere v e w soluções do problema (2.3) com dados iniciais v_0 e w_0 respectivamente. Se $v_0, w_0 \in V$, pelas estimativas dadas acima temos que $v(t)$ e $w(t)$ estão definidas para todo $t \in [0, T']$, logo

$$\begin{aligned} \|v(t) - w(t)\|_{H_{per}^s} &\leq \|v_0 - w_0\|_X + \left[1 + \frac{c_0}{2}(\|v\|_X + \|w\|_X)\right] \int_0^t \|v(\tau) - w(\tau)\|_{H_{per}^s} d\tau \\ &\leq \|v_0 - w_0\|_X + \left[1 + \frac{c_0}{2}(\|v\|_X + \|w\|_X)\right] \|v - w\|_X T'. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\|v(t) - w(t)\|_X \left\{1 - \left[1 + \frac{c_0}{2}(\|v\|_X + \|w\|_X)T'\right]\right\} \leq \|v_0 - w_0\|_X,$$

para todo $0 \leq t \leq T'$. Como $v_0, w_0 \in V$, tem-se

$$\|v_0\|_X \leq \|v_0 - u_0\|_X + \|u_0\|_X \leq \delta + \frac{R}{2}.$$

Assim, pelo estabelecido anteriormente e (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{c_0}{2}(\|v\|_X + \|w\|_X)\right] T' &\leq \left[1 + \frac{c_0}{2}(2\|v_0\|_X + 2\|w_0\|_X)\right] T' \\ &= [1 + c_0(\|v_0\|_X + \|w_0\|_X)] T' \leq [1 + c_0(2\delta + R)] T' \\ &= \left[2\delta c_0 + \frac{1}{2T}\right] T' < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto para todo $v_0, w_0 \in V$ temos que

$$\|v(t) - w(t)\|_X \leq \mathcal{K}\|v_0 - w_0\|_X,$$

onde \mathcal{K} é uma constante positiva. O que prova a dependência contínua dos dados iniciais. \square

Os seguintes lemas serão úteis para estabelecer uma estimativa *a priori* a qual será usada para obter boa colocação global.

Lema 2.1.2. *Seja u uma solução de (2.3) com $u \in C([0, T], H_{per}^s)$ para $s > \frac{1}{2}$, então para todo $t \in [0, T]$*

$$\|u(t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} = \|u(0)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}.$$

Lema 2.1.3. *Se $s_0 \leq s \leq s_1$, com $s = \theta s_0 + (1 - \theta)s_1$, e $0 \leq \theta \leq 1$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|J^s f\|_{L_{per}^2} \leq C \|J^{s_0} f\|_{L_{per}^2}^\theta \|J^{s_1} f\|_{L_{per}^2}^{1-\theta}, \quad (2.8)$$

onde $J^s = (1 + \Delta)^{\frac{s}{2}}$ é o potencial de Bessel de ordem s .

Lema 2.1.4. *Seja $s \geq 1$, então existe uma constante $C = C(s) > 0$ tal que*

$$\|J^s(fg) - fJ^s g\|_{L_{per}^2} \leq C \left\{ \|\partial_x f\|_A \|g\|_{H_{per}^{s-1}} + \|\partial_x f\|_{H_{per}^{s-1}} \|g\|_A \right\}, \quad (2.9)$$

onde $\|g\|_A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(k)|$.

A prova do Lema 2.1.2 segue por argumentos padrões de métodos de energia, veja por exemplo Benjamin, Bona e Mahony [16]. A demonstração do Lema 2.1.3 pode ser encontrada em Bergh e L ofstr om [17] e o Lema 2.1.4 nos d a uma estimativa do tipo commutator, veja Lema B.3 em I orio e I orio [43].

Teorema 2.1.5. *Seja $s \geq 3/2$. Se $u \in C([0, T], H_{per}^s)$   uma solu ao de (2.1) em $[0, T] \times \mathbb{R}$, com dado inicial u_0 ,  nto existem constantes $C = C(\|u_0\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}) > 0$ e $C_s = C_s(\|u_0\|_{H_{per}^s}) > 0$ tais que*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_{per}^s} \leq C_s e^{CT} \quad (2.10)$$

Demonstra ao. Como $u \in C([0, T], H_{per}^s)$ com $s > 1/2$, pelas propriedades de K temos que (2.2) vale para u , portanto $u \in C^1([0, T], H_{per}^s)$. Provaremos primeiro o resultado no caso

$s = 3/2$. Para este fim considere uma sequência $\{u^n\}_{n=0}^\infty$ em $C^1([0, T], H_{per}^\infty)$, convergindo a u em $C^1([0, T], H_{per}^{\frac{3}{2}})$ e defina

$$F(v) = v_t + v_x + vv_x + \mathcal{H}v_{xt}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2 u^n(t)\|_{H_{per}^{-\frac{1}{2}}}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{\partial_x^2 u^n}(k)|^2 \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^{-\frac{1}{2}} |k|^4 |\widehat{u^n}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^{\frac{3}{2}} |\widehat{u^n}(k)|^2 = \|u^n(t)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2. \end{aligned}$$

Logo $\{\partial_x^2 u^n\}_{n=0}^\infty$ é limitada em $C([0, T], H_{per}^{-\frac{1}{2}})$. Como $\|\mathcal{H}u_x\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \leq \|u\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(u^n)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} &\leq \|u_t^n - u_t\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} + \|u_x^n - u_x\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} + \|\mathcal{H}(u_{xt}^n - u_{xt})\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \|((u^n)^2)_x - (u^2)_x\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq 2\|u_t^n - u_t\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}} + \|u^n - u\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \|(u^n)^2 - u^2\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq 2\|u_t^n - u_t\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}} + \left[1 + c_0(\|u^n\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}} + \|u\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}})\right] \|u^n - u\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

Então $F(u^n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em $C([0, T], H_{per}^{\frac{1}{2}})$. Portanto, $\langle F(u^n), \partial_x^2 u^n \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em $C([0, T])$. Sendo u^n suave e $(u_t^n, \mathcal{H}u_x^n) = (\mathcal{H}u_{xt}^n, u^n)$, temos que

$$2\langle F(u^n), \partial_x^2 u^n \rangle = -\frac{d}{dt} \|u_x^n(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 - \int_{-\pi}^{\pi} (u_x^n)^3 dx. \quad (2.11)$$

A imersão de Sobolev $H_{per}^{\frac{1}{6}} \hookrightarrow L^3$ e o Lema 2.1.3 (com $\theta = 1/3$, $s = 7/6$, $s_0 = 1/2$ e $s_1 = 3/2$) implicam que existe uma constante positiva c_0 tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\partial_x f)^3 dx \leq \|\partial_x f\|_{L_{per}^3}^3 \leq c_0 \|\partial_x f\|_{H_{per}^{\frac{1}{6}}}^3 \leq c_0 \|f\|_{H_{per}^{\frac{7}{6}}}^3 \leq c_0 \|f\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \|f\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2. \quad (2.12)$$

Integrando (2.11) de 0 a t e usando (2.12) obtemos,

$$2 \int_0^t \langle F(u^n), \partial_x^2 u^n \rangle d\tau \leq \|u_x^n(\cdot, 0)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 - \|u_x^n(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 + c_0 \int_0^t \|u^n(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \|u^n(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 d\tau.$$

Da última desigualdade tem-se

$$\begin{aligned} \|u^n(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 &\leq \|u^n(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 + \|u_x^n(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \|u^n(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 + \|u_x^n(\cdot, 0)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 \\ &\quad + c_0 \int_0^t \|u^n(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \|u^n(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 d\tau - 2 \int_0^t \langle F(u^n), \partial_x^2 u^n \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.2 e tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 \leq 2\|u_0\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 + c_0\|u_0\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 d\tau.$$

Finalmente pela desigualdade de Gronwall temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 \leq 2\|u_0\|_{H_{per}^{\frac{3}{2}}}^2 \exp(c_4\|u_0\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 t)$$

para todo $t \in [0, T]$, o que implica o resultado desejado no caso $s = \frac{3}{2}$.

Para o caso geral suponha que (2.10) vale para $r_0 \geq 3/2$. Defina $s = r_0 + \alpha$, com $0 < \alpha \leq 1/2$, e $r = s - 1/2$. Provaremos que a desigualdade vale para s via indução. De fato, considere $\{u^n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência em $C^1([0, T], H_{per}^\infty)$ tal que $u^n \rightarrow u$, em $C^1([0, T], H_{per}^s)$. Procedendo similarmente ao caso $s = 3/2$, temos que $F(u^n) \rightarrow 0$, em $C([0, T], H_{per}^{s-1})$ e $\{J^r u^n\}_{n=0}^\infty$ é limitado em $C([0, T], H_{per}^{\frac{1}{2}})$. Portanto, $\langle J^r u^n, J^r F(u^n) \rangle \rightarrow 0$ em $C([0, T])$, quando $n \rightarrow \infty$.

Definamos $v := u^n$, então

$$\langle J^r v, J^r F(v) \rangle = \langle J^r v, J^r v_t + J^r \mathcal{H}v_x \rangle + \langle J^r v, J^r v_x \rangle + \langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle.$$

Como $J^r \partial_x = \partial_x J^r$ é fácil ver que

$$2\langle J^r v, J^r F(v) \rangle = \frac{d}{dt} \langle J^r v, J^r v + J^r \mathcal{H}v_x \rangle + 2\langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle.$$

Integrando a última desigualdade de 0 a t , usando o fato que

$$\langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle = -\frac{1}{2} \langle J^r v, v_x J^r v \rangle + \langle J^r v, J^r (vv_x) - v J^r v_x \rangle \quad (2.13)$$

e como $s = r + 1/2$, temos

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}^2 &\leq 2\pi \sum (1 + |k|^2)^r (1 + |k|) |\widehat{v}(k)|^2 = \langle J^r v, J^r v \rangle + \langle J^r v, J^r \mathcal{H}v_x \rangle \\ &= \langle J^r v(0), J^r v(0) + J^r \mathcal{H}v_x(0) \rangle + 2 \int_0^t \langle J^r v, J^r F(v) \rangle d\tau - 2 \int_0^t \langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle d\tau \\ &\leq c_s \|u_0\|_{H_{per}^s}^2 + 2 \int_0^t \langle J^r v, J^r F(v) \rangle d\tau - 2 \int_0^t \langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle d\tau \end{aligned}$$

Passando limite quando $n \rightarrow \infty$ na última desigualdade, obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}^2 \leq c_s \|u_0\|_{H_{per}^s}^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle d\tau. \quad (2.14)$$

De (2.13) e do Lema 2.1.4 tem-se

$$\begin{aligned} 2|\langle J^r v, J^r (vv_x) \rangle| &\leq \|J^r v\|_{L_{per}^2}^2 \|v_x\|_\infty + c_0 \|J^r v\|_{L_{per}^2} \|v_x\|_A \|v_x\|_{H_{per}^{r-1}} \\ &\leq \|v\|_{H_{per}^r}^2 \|v_x\|_\infty + c_0 \|v\|_{H_{per}^r}^2 \|v_x\|_{H_{per}^{s-1}} \\ &\leq c_0 \|v\|_{H_{per}^r}^2 \|v\|_{H_{per}^s}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos os seguintes fatos

$$\|g\|_A \leq c_0 \|g\|_{H_{per}^l}, \quad H_{per}^l \hookrightarrow L^\infty, \quad \text{para } l > 1/2 \quad \text{e} \quad \|g_x\|_{H_{per}^{s-1}} \leq c_0 \|g\|_{H_{per}^s}.$$

Por conveniência do leitor provaremos a primeira desigualdade dada acima. Note que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^{-l} \leq c_0, \quad \text{para todo } l > 1/2.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\|g\|_A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1 + |k|^2)^{\frac{l}{2}}}{(1 + |k|^2)^{\frac{l}{2}}} |\widehat{g}(n)| \leq \|g\|_{H_{per}^l} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^{-l} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_0 \|g\|_{H_{per}^l}.$$

Voltando a (2.14) temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}^2 \leq c_s \|u_0\|_{H_{per}^s}^2 + c_0 \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^r}^2 \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^s} d\tau,$$

Agora, como $s > r$, $r_0 \geq r$ e a última desigualdade, obtemos de (2.14) que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}^2 &\leq c_s \|u_0\|_{H_{per}^s}^2 + c_0 \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^r} \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^r} \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^s} d\tau \\ &\leq c_s \|u_0\|_{H_{per}^s}^2 + c_0 \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^{r_0}} \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^s}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, a hipótese indutiva implica

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}^2 \leq c_s \|u_0\|_{H_{per}^s}^2 + C_{r_0} e^{c_0 T} \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^s}^2 d\tau.$$

Finalmente, o resultado desejado segue pela desigualdade de Gronwall. \square

Corolário 2.1.6. *O problema de valor inicial periódico (2.1) está globalmente bem colocado em H_{per}^s para $s \geq 3/2$.*

2.2 Boa Colocação para a Equação gBBM

Nesta seção estudaremos o problema de Cauchy periódico associado à equação gBBM, a saber

$$\begin{cases} u_t + u_x + (p+1)u^p u_x - u_{xxt} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro e u é uma função a valores reais. O resultado de boa colocação local segue as mesmas ideias que a prova estabelecida no caso da rBO e a boa colocação global segue de maneira direta posto que neste caso temos que a norma H_{per}^1 é conservada.

Primeiro, escreva a equação (15) como $(1 - \partial_x^2)u_t = -\partial_x(u + u^{p+1})$. Como $1 - \partial_x^2 > 0$, temos que

$$u_t = K * (u + u^{p+1}), \quad (2.16)$$

onde K está dado explicitamente como

$$\widehat{Ku}(k) = \frac{-ik}{1+k^2} \widehat{u}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Integrando (2.16) e impondo a condição inicial obtemos

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t K * (u + u^{p+1})(x, \tau) d\tau.$$

Usando argumentos do tipo ponto fixo como na seção anterior, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. *Suponha que $s > 1/2$, então o problema de Cauchy periódico (2.15) é localmente bem colocado em H_{per}^s .*

Como a norma H_{per}^1 é conservada pelo fluxo da equação gBBM o seguinte resultado de boa colocação global é imediatamente obtido.

Corolário 2.2.2. *O problema de Cauchy periódico (2.15) está globalmente bem colocado em H_{per}^1 .*

2.3 Resultado de Má Colocação para a Equação rBO

Nesta seção mostraremos que a aplicação dado-solução para o problema de Cauchy associado à equação rBO não é suave (não é C^2) na origem para dados iniciais em H_{per}^s (ou $H^s(\mathbb{R})$), com $s < 0$. Portanto, não podemos aplicar o Princípio de Contração para resolver a equação integral (2.17) abaixo, pois caso conseguíssemos, teríamos, usando o teorema da Função Implícita, que a aplicação dado-solução seria suave, veja por exemplo Corolário 5.21 em Linares e Ponce [50].

Primeiro estudaremos o problema no caso periódico. Por simplicidade consideraremos funções de período 2π . Começamos estudando o problema linear

$$u_t + u_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0.$$

Usando a transformada de Fourier temos que

$$\widehat{u}_t(n) = \frac{-in}{1 + |n|} \widehat{u}(n).$$

Esta EDO é facilmente resolvida, a saber,

$$u(x, t) = S(t)\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} e^{\frac{-in}{1+|n|}t} \widehat{\phi}(n).$$

Agora, se u é solução de (1), então pelo princípio de Duhamel temos que

$$u(x, t) = S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-\tau)\Lambda[u(x, \tau)u_x(x, \tau)]d\tau, \quad (2.17)$$

onde $\widehat{\Lambda}u(n) = (1 + |n|)^{-1}\widehat{u}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

O seguinte teorema é o resultado principal desta seção.

Teorema 2.3.1. *Seja $s < 0$ e T um número positivo. Então não existe um espaço X_T continuamente imerso em $C([-T, T]; H_{per}^s)$ tal que exista $c_0 > 0$ satisfazendo*

$$\|S(t)\phi\|_{X_T} \leq c_0 \|\phi\|_{H_{per}^s}, \quad \forall \phi \in H_{per}^s, \quad \forall t \in [-T, T] \quad (2.18)$$

e

$$\left\| \int_0^t S(t-\tau)\Lambda[u_x(\tau)u(\tau)]d\tau \right\|_{X_T} \leq c_0 \|u\|_{X_T}^2, \quad \forall u \in X_T, \quad \forall t \in [-T, T]. \quad (2.19)$$

Demonstração. Suponha por contradição que exista um tal espaço. Considere $\phi \in H_{per}^s$ e defina $u := S(t)\phi$. Então, temos que $u \in X_T$ e como $X_T \hookrightarrow C([-T, T]; H_{per}^s)$, obtém-se

$$\left\| \int_0^t S(t-\tau)\Lambda[S(t)\phi(S(t)\phi)_x]d\tau \right\|_{H_{per}^s} \leq c_0 \|\phi\|_{H_{per}^s}^2. \quad (2.20)$$

Provaremos que (5.38) não se verifica escolhendo ϕ de maneira apropriada. De fato, considere

$$\phi(x) := N^{-s} \cos(Nx), \quad \text{com } N \in \mathbb{N}, \quad N \gg 1.$$

Então,

$$S(t)\phi(x) = N^{-s} \cos\left(Nx - \frac{N}{1+N}t\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &:= \int_0^t S(t-\tau)\Lambda[S(t)\phi(x)(S(t)\phi(x))_x]d\tau \\ &= \int_0^t S(t-\tau)\Lambda\left[(-N^{-2s+1} \cos\left(Nx - \frac{N}{1+N}\tau\right) \text{sen}\left(Nx - \frac{N}{1+N}\tau\right))\right]d\tau \\ &= -\frac{1}{2}N^{-2s+1} \int_0^t S(t-\tau)\Lambda\left[\text{sen}\left(2Nx - \frac{2N}{1+N}\tau\right)\right]d\tau. \end{aligned}$$

Agora, usando a definição de Λ obtemos

$$\begin{aligned} S(t-\tau)\Lambda\left[\text{sen}\left(2Nx - \frac{2N}{1+N}\tau\right)\right] &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1+2N} e^{-i\frac{2N}{1+N}\tau} e^{i\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}(t-\tau)\right)} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \frac{1}{1+2N} e^{i\frac{2N}{1+N}\tau} e^{-i\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}(t-\tau)\right)} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1+2N} e^{i\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}t\right)} e^{-i\tau\left(\frac{2N^2}{(1+N)(1+2N)}\right)} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \frac{1}{1+2N} e^{-i\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}t\right)} e^{i\tau\left(\frac{2N^2}{(1+N)(1+2N)}\right)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^t S(t-\tau)\Lambda\left[\text{sen}\left(2Nx - \frac{2N}{1+N}\tau\right)\right]d\tau &= -\frac{1}{2(1+2N)\gamma_N} \left[e^{i\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}t\right)} - e^{i\left(2Nx - \frac{2N}{1+N}t\right)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2(1+2N)\gamma_N} \left[e^{-i\left(2Nx - \frac{2N}{1+N}t\right)} - e^{-i\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}t\right)} \right], \end{aligned}$$

onde $\gamma_N = \frac{2N^2}{(1+N)(1+2N)}$. Portanto

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2}N^{-2s+1} \frac{1}{\gamma_N(1+2N)} \left[\cos\left(2Nx - \frac{2N}{1+2N}t\right) - \cos\left(2Nx - \frac{2N}{1+N}t\right) \right].$$

Logo,

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}^2 \sim N^{-4s} \left| e^{-i\frac{2N}{1+2N}t} - e^{-i\frac{2N}{1+N}t} \right|^2 (1 + 4N^2)^s.$$

Como

$$\left| e^{-i\frac{2N}{1+2N}t} - e^{-i\frac{2N}{1+N}t} \right|^2 = 2 - 2 \cos \left(\frac{2N}{1+N}t - \frac{2N}{1+2N}t \right),$$

temos que

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{H_{per}^s} \sim N^{-s} (1 - \cos(\gamma_N t))^{\frac{1}{2}}.$$

Pela definição de ϕ obtemos que $\|\phi\|_{H_{per}^s}^2 \sim 1$. Portanto para todo $t \in (0, T)$ tem-se

$$\frac{\|\psi(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}}{\|\phi\|_{H_{per}^s}^2} \sim N^{-s} (1 - \cos(\gamma_N t))^{\frac{1}{2}}.$$

Sem perda de generalidade suponha que $0 < T < 2\pi$ e considere $s < 0$ fixo, então como $\gamma_N \rightarrow 1^-$, quando $N \rightarrow +\infty$, temos que

$$\frac{\|\psi(\cdot, t)\|_{H_{per}^s}}{\|\phi\|_{H_{per}^s}^2} \longrightarrow +\infty,$$

quando $N \rightarrow +\infty$, o qual contradiz (5.38). Isso termina a prova do teorema. \square

Como consequência temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.2. *Fixe $s < 0$. Não existe $T > 0$ tal que (1) admita uma única solução local definida no intervalo $[-T, T]$ e tal que a aplicação dado-solução*

$$\phi \longmapsto u(t), \quad t \in [-T, T]$$

seja C^2 diferenciável em zero de H_{per}^s em H_{per}^s .

Demonstração. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0, \\ u(x, 0) = \phi_\gamma(x), \quad 0 < \gamma \ll 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $\phi_\gamma(x) := \gamma\phi(x)$. Suponha que $u(\gamma, t, x)$ é uma solução local de (2.21) e que a aplicação dado-solução seja C^2 na origem de H_{per}^s em H_{per}^s . Então

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}(\gamma, t, x)|_{\gamma=0} = S(t)\phi(x)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma}(\gamma, t, x)|_{\gamma=0} = -2 \int_0^t S(t-\tau) \Lambda [(S(\tau)\phi)(S(\tau)\phi)_x] d\tau.$$

Usando a suposição, temos que

$$\left\| \int_0^t S(t-\tau) \Lambda [(S(\tau)\phi)(S(\tau)\phi)_x] d\tau \right\|_{H_{per}^s} \leq c_0 \|\phi\|_{H_{per}^s}^2.$$

A última estimativa é a mesma dada em (5.38), a qual já foi provado no Teorema anterior que não é válida para todo ϕ em H_{per}^s , com $s < 0$. O que termina a prova do corolário. \square

Agora estabelecemos o mesmo tipo de resultado anterior no contexto contínuo, isto é em $H^s(\mathbb{R})$. Neste caso temos que

$$S(t)\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) e^{i\left(\xi x - \frac{\xi}{1+|\xi|}t\right)} d\xi \quad \text{e} \quad \widehat{\Lambda u}(\xi) = (1+|\xi|)^{-1} \widehat{u}(\xi).$$

A prova do seguinte lema segue as mesmas ideias do Lema 1 em [53], apresentaremos a prova unicamente para conveniência do leitor.

Lema 2.3.3.

$$\int_0^t S(t-\tau) \Lambda [(S(\tau)\phi)(S(\tau)\phi)_x] d\tau = c_0 \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x - p(\xi)t)} \frac{\xi}{1+|\xi|} \widehat{\phi}(\eta) \widehat{\phi}(\xi-\eta) \frac{e^{-it\chi(\xi,\eta)} - 1}{\chi(\xi,\eta)} d\eta d\xi,$$

onde $p(\xi) = \frac{\xi}{1+|\xi|}$ e $\chi(\xi,\eta) = p(\eta) + p(\xi-\eta) - p(\xi)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} & \int_0^t S(t-\tau) \Lambda [(S(\tau)\phi)(S(\tau)\phi)_x] d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x - p(\xi)t)} e^{\tau p(\xi)} \left[\frac{i\xi}{1+|\xi|} (S(\tau)\phi) \widehat{*} (S(\tau)\phi) \widehat{(\xi)} \right] d\xi d\tau \\ &= i \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x - p(\xi)t)} e^{\tau p(\xi)} \frac{\xi}{1+|\xi|} [(e^{-i\tau p(\cdot)} \widehat{\phi}(\cdot)) * (e^{-i\tau p(\cdot)} \widehat{\phi}(\cdot))](\xi) d\xi d\tau \\ &= i \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x - p(\xi)t)} \frac{\xi}{1+|\xi|} \widehat{\phi}(\eta) \widehat{\phi}(\xi-\eta) \int_0^t e^{i\tau[p(\eta) + p(\xi-\eta) - p(\xi)]} d\tau d\eta d\xi \\ &= i \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x - p(\xi)t)} \frac{\xi}{1+|\xi|} \widehat{\phi}(\eta) \widehat{\phi}(\xi-\eta) \frac{e^{-i\tau[p(\eta) + p(\xi-\eta) - p(\xi)]} - 1}{p(\eta) + p(\xi-\eta) - p(\xi)} d\eta d\xi. \end{aligned}$$

\square

Agora defina

$$\varphi(x, t) := \int_0^t S(t - \tau) \Lambda[(S(\tau)\phi)(S(\tau)\phi)_x] d\tau.$$

Então, usando o Lema anterior obtemos

$$\widehat{\varphi}(\xi, t) = c_0 \frac{\xi}{1 + |\xi|} e^{-ip(\xi)t} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\eta) \widehat{\phi}(\xi - \eta) \frac{e^{-it\chi(\xi, \eta)} - 1}{\chi(\xi, \eta)} d\eta. \quad (2.22)$$

Neste caso considere

$$\widehat{\phi}(\xi) := N^{-s} \chi_{[N, N+1]}(\xi), \quad \text{com } N \in \mathbb{N}, \quad N \gg 1,$$

onde χ_A denota a função característica de A . Note que $\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim 1$. Usando (2.22) temos que

$$\widehat{\varphi}(\xi, t) = c_0 \frac{\xi}{1 + |\xi|} e^{-ip(\xi)t} N^{-2s} \int_{\Omega_\xi} \frac{e^{-it\chi(\xi, \eta)} - 1}{\chi(\xi, \eta)} d\eta,$$

com $\Omega_\xi = \{\eta : \eta \in \text{supp } \widehat{\phi} \text{ e } \xi - \eta \in \text{supp } \widehat{\phi}\}$. Como $s < 0$, podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que $-s - \epsilon > 0$. Agora, considere $t = N^{-\epsilon}$ e note que para $\xi \in (2N + \frac{1}{2}, 2N + 1)$ tem-se $\mu(\Omega_\xi) \gtrsim 1$. Além disso, é fácil ver que

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{\eta(\xi - \eta)(2 + \xi)}{(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)(1 + \xi)} \leq 3, \quad \forall \eta, \xi - \eta \in [N, N + 1].$$

Então, para N suficientemente grande temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &\gtrsim \int_{2N + \frac{1}{2}}^{2N+1} (1 + |\xi|^2)^s N^{-4s} \frac{|\xi|^2}{(1 + |\xi|)^2} |t|^2 \left| \int_{\Omega_\xi} \frac{e^{-it\chi(\xi, \eta)} - 1}{t\chi(\xi, \eta)} d\eta \right|^2 d\xi \\ &\gtrsim \int_{2N + \frac{1}{2}}^{2N+1} (1 + |\xi|^2)^s N^{-4s} \frac{|\xi|^2}{(1 + |\xi|)^2} |t|^2 \left| \int_{\Omega_\xi} \frac{\sin(t\chi(\xi, \eta))}{t\chi(\xi, \eta)} d\eta \right|^2 d\xi \\ &\gtrsim N^{-4s} N^{2s} t^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$1 \sim \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \gtrsim \|\varphi(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \gtrsim N^{-s-\epsilon},$$

o qual é uma contradição para $N \gg 1$. O que completa a prova no caso não periódico. \square

CAPÍTULO 3

ESTABILIDADE PARA A EQUAÇÃO BENJAMIN-ONO REGULARIZADA

Este capítulo da tese está dedicado ao estudo da estabilidade não linear da equação Benjamin-Ono regularizada. Para rápida referência a equação que queremos estudar é

$$u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0, \tag{3.1}$$

onde u é uma função a valores reais e \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert. Começaremos mostrando a existência de soluções ondas viajantes periódicas explícitas com período minimal L para a equação acima mencionada, usando o Teorema do Somatório de Poisson. Depois, usaremos a teoria estabelecida por Angulo e Natali em [12] para conseguir as propriedades espectrais requeridas para obter estabilidade e finalmente na última seção, usando o método de Lyapunov, provaremos a estabilidade orbital das ondas periódicas dadas em (8), por perturbações de mesmo período L .

3.1 Soluções Ondas Viajantes Periódicas

O objetivo deste seção é mostrar a existência de uma curva suave de ondas viajantes periódicas para a equação (3.1). Para tal fim, usaremos o Teorema do Somatório de Poisson para obter uma função periódica que depende da velocidade da onda solitária w , a qual será depois ajustada (e talvez a amplitude também) para encontrar uma solução onda viajante periódica para a equação rBO. A vantagem deste método é que nos permite conhecer imediatamente a transformada de Fourier de nossa solução.

Estamos interessados em soluções para a equação (3.1) da forma

$$u(x, t) = \phi_c(x - ct), \quad (3.2)$$

onde $\phi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica suave com período fundamental $2L > 0$ e c um parâmetro real. Substituindo (3.2) em (3.1), integrando uma vez e considerando zero a constante de integração, segue que ϕ_c deve satisfazer a equação pseudo-diferencial

$$c\mathcal{H}\phi'_c + (c - 1)\phi_c - \frac{1}{2}\phi_c^2 = 0. \quad (3.3)$$

A equação anterior possui soluções de tipo onda solitárias, a saber, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \varphi(\xi) = 0$, veja Albert, Bona e Henry [4]. Mais precisamente, para $w > 1$, φ_w definido como

$$\varphi_w(x) = \frac{4(w - 1)}{1 + \left(\frac{w-1}{w}x\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

satisfaz a equação

$$w\mathcal{H}\varphi'_w + (w - 1)\varphi_w - \frac{1}{2}\varphi_w^2 = 0.$$

A transformada de Fourier da função φ_w em (3.4) está dada por

$$\widehat{\varphi}_w^{\mathbb{R}}(\xi) = 4\pi w e^{-|\frac{w}{w-1}\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo teorema do Somatório de Poisson (veja Teorema 1.0.4 no Capítulo 2), obtemos a seguinte função periódica (de período $2L$) para todo $w > 1$

$$\begin{aligned} \psi_w(x) &:= \frac{2\pi w}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w|n|}{2(w-1)L}} e^{\frac{\pi i n x}{L}} = \frac{2\pi w}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\frac{wn}{2(w-1)L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{2\pi w}{L} \left(\frac{\sinh\left(\frac{w}{2(w-1)L}\right)}{\cosh\left(\frac{w}{2(w-1)L}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2, & \text{se } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Agora, considere $c \neq 1$, como ϕ_c é uma função suave podemos expressar ϕ_c e ϕ_c^2 como

$$\phi_c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} \quad \text{e} \quad \phi_c^2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{\frac{i\pi n x}{L}}. \quad (3.6)$$

Além disso,

$$\mathcal{H}\phi_c'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |n| e^{\frac{i\pi n x}{L}}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.3) obtemos

$$c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} + \frac{c\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} = 0.$$

Assim,

$$ca_n + \frac{c\pi}{L} |n| a_n - a_n - \frac{1}{2} b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

Mas,

$$b_n = \widehat{\phi_c^2}(n) = \widehat{\phi_c * \phi_c}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi_c}(n-m) \widehat{\phi_c}(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m} a_m.$$

Logo, substituindo b_n dado pela igualdade anterior em (3.8) temos que

$$ca_n \left[1 + \frac{\pi}{L} |n| \right] - a_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m a_{n-m}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Agora, inspirados em (3.5) escolha $a_n = \frac{2\pi c}{L} e^{-\eta|n|}$ com $\eta > 0$ (observe que $\eta < 0$ não pode acontecer, pois nesse caso as séries dadas em (3.6) não convergiriam), então obtemos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m a_{n-m} = \frac{4\pi^2 c^2}{L^2} e^{-\eta|n|} \left[|n| + 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\eta k} \right] = \frac{4\pi^2 c^2}{L^2} e^{-\eta|n|} (|n| + \coth \eta).$$

Substituindo a igualdade anterior e a forma que escolhemos para a_n em (3.9) tem-se

$$c \left[1 + \frac{\pi}{L} |n| \right] - 1 = \frac{\pi c}{L} (|n| + \coth \eta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

A última desigualdade é satisfeita para todo n inteiro desde que

$$\tanh(\eta) = \frac{\pi c}{(c-1)L}. \quad (3.11)$$

Observe que nossa análise mostra exatamente o valor da velocidade w que precisamos usar para que ψ_w em (3.5) (talvez com um ajuste na amplitude) seja de fato uma solução em onda viajante de (3.3). Com efeito, definindo $\eta = \frac{w}{2(w-1)L}$ e considerando $c \neq 1$ tal que $0 < \frac{c}{c-1} < \frac{L}{\pi}$, escolhamos $w = w(c) > 1$ tal que $\tanh(\eta) = \frac{\pi c}{(c-1)L}$. De (3.10) e (3.5) obtemos que $\phi_c = \frac{c}{w}\psi_{w(c)}$ é de fato solução de (3.3). Além disso, ϕ_c tem a forma

$$\phi_c(\xi) = \frac{2c\pi}{L} \left(\frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - \cos\left(\frac{\pi\xi}{L}\right)} \right), \quad (3.12)$$

com $\eta > 0$ satisfazendo (3.11).

Vale a pena notar que é possível encontrar a solução dada em (3.12) modificando um pouco as ideias de Benjamin em [15], onde ondas viajantes periódicas para a equação de Benjamin-Ono são estudadas. Preferimos usar o método acima pois fica clara a escolha dos coeficientes de Fourier a_n da função ϕ_c .

Observação 3.1.1. (1) Como $c \neq 1$ satisfaz $0 < \frac{c}{c-1} < \frac{L}{\pi}$ temos três casos:

(i) Se $L = \pi$, então $c \in (-\infty, 0)$.

(ii) Se $L < \pi$, então $c \in (\frac{L}{L-\pi}, 0)$.

(iii) Se $L > \pi$, então $c \in (-\infty, 0) \cup (\frac{L}{L-\pi}, +\infty)$.

(2) Observe que o sinal da solução ϕ_c depende do sinal de c , como estamos interessados em soluções positivas (para poder aplicar a teoria em [12]) vamos supor que $L > \pi$ e $c > \frac{L}{L-\pi}$.

Observe que se consideramos $c = 1$ em (3.3), então a única solução real suave que obtemos é $\phi_1 \equiv 0$. De fato, neste caso ϕ_1 satisfaz $\mathcal{H}\phi_1' - \frac{1}{2}\phi_1^2 = 0$. Tomando transformada de Fourier obtemos,

$$2|n|\widehat{\phi}_1(n) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}_1(n-k)\widehat{\phi}_1(k) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular para $n = 0$, tem-se $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}_1(-k)\widehat{\phi}_1(k) = 0$. Como ϕ_1 é real temos que $\widehat{\phi}_1(-k) = \overline{\widehat{\phi}_1(k)}$. Portanto $\|\phi_1\|_{L^2_{per}}^2 = 0$, assim pela suavidade de ϕ_1 temos que $\phi_1 \equiv 0$.

Como $\eta(c) = \tanh^{-1}\left(\frac{c\pi}{(c-1)L}\right)$ é uma função diferenciável se $c \neq 1$, pelo Teorema da Função Inversa obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.2. *Seja $L > \pi$. Então a curva*

$$c \in \left(\frac{L}{L-\pi}, +\infty \right) \mapsto \phi_c \in H_{per}^n([-L, L]), \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

é de classe C^1 , onde ϕ_c é dado por (3.12). Além disso, como $c > 0$, temos que $\phi_c > 0$.

3.2 Análise Espectral

Esta seção é dedicada ao estudo de propriedades espectrais específicas do operador linear

$$\mathcal{L} = c\mathcal{H}\partial_x + (c-1) - \phi_c, \quad (3.13)$$

onde ϕ_c é a solução periódica (3.12) dada pela Proposição 3.1.2 com período fundamental $2L$, $L > \pi$ e $c > \frac{L}{L-\pi}$. Esta informação será básica na nossa teoria de estabilidade para a equação rBO. Neste momento usaremos a teoria estabelecida por Angulo e Natali em [12].

Nossa análise concentra-se no problema de autovalores periódico considerado em $[-L, L]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\chi = \lambda\chi \\ \chi(-L) = \chi(L), \quad D^{\frac{1}{2}}\chi(-L) = D^{\frac{1}{2}}\chi(L). \end{cases} \quad (3.14)$$

Mostraremos que o problema (3.14) determina exatamente a existência de um único autovalor negativo, o qual é simples; zero é também um autovalor simples com autofunção ϕ'_c e o resto do espectro é limitado longe de zero (de fato vai ser discreto). Inicialmente notemos de (3.3) que ϕ'_c satisfaz $\mathcal{L}\phi'_c = 0$. Portanto zero é um autovalor de \mathcal{L} com autofunção associada ϕ'_c . A teoria de operadores compactos auto-adjuntos aplicada a (3.14) implica que o espectro de \mathcal{L} é um conjunto infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ com

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots,$$

onde $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ (veja por exemplo Proposição 3.1 em [12]).

Com o propósito de tornar a leitura mais agradável faremos aqui um pequeno resumo da teoria estabelecida por Angulo e Natali em [12]. Em [12] foi estudada a existência e estabilidade não linear de ondas viajantes periódicas para uma família de equações da forma

$$u_t + u^p u_x - (Mu)_x = 0, \quad (3.15)$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro e M é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto das funções periódicas. M é definido como um operador multiplicador de Fourier por

$$\widehat{Mg}(k) = \zeta(k)\widehat{g}(k), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z},$$

cujos símbolo ζ é uma função real, mensurável, localmente limitada e par satisfazendo

$$A_1|n|^{m_1} \leq |\zeta(n)| \leq A_2(1 + |n|)^{m_2}, \quad (3.16)$$

com $1 \leq m_1 \leq m_2$, $|n| \geq n_0$, $\zeta(n) > b$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $A_i > 0$, $i = 1, 2$.

O resultado principal obtido em [12] é o seguinte.

Teorema 3.2.1. *Considere o operador $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \longrightarrow L_{per}^2([-L, L])$ dado por*

$$\mathcal{L}_0 u = (M + c)u - \varphi^p u, \quad (3.17)$$

onde $D(\mathcal{L}_0)$ é denso em $L_{per}^2([-L, L])$ e φ_c é uma solução de onda viajante periódica para a equação (3.15). Suponha que φ_c é uma solução positiva par de (3.15) tal que $\widehat{\varphi}_c > 0$ e $\widehat{\varphi}_c^p \in PF(2)$ discreto. Então

- (i) \mathcal{L}_0 tem um único autovalor negativo λ , o qual é simples;
- (ii) o autovalor zero é simples.

Definimos a classe $PF(2)$ discreto como o conjunto de seqüências $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \alpha_n > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}, \\ (ii) \quad & \alpha_{n_1 - m_1} \alpha_{n_2 - m_2} - \alpha_{n_1 - m_2} \alpha_{n_2 - m_1} > 0 \quad \text{para } n_1 < n_2 \text{ e } m_1 < m_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Embora a equação rBO não tem a forma dada em (3.15), ainda podemos aplicar o Teorema 3.2.1 para obter a informação espectral requerida do operador \mathcal{L} dado em (3.13). Para isso, assumamos $L > \pi$, $c > \frac{L}{L - \pi}$ e definamos $M := c\mathcal{H}\partial_x - 1$, então $\mathcal{L} = (M + c) - \phi_c$. Neste caso $\widehat{Mf}(k) = \zeta(k)\widehat{f}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $\zeta(k) := c|k| - 1$. Considerando $A_1 = c/2$, $A_2 = c + 1$ e $m_1 = m_2 = 1$, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que ζ satisfaz (3.16) para todo $k \geq N_0$. Além disso, é claro que $a_n = \widehat{\phi}_c(n) = \frac{2\pi c}{L} e^{-\eta|n|} > 0$.

Antes de continuar com o estudo do espectro de \mathcal{L} , note que o Teorema 3.2.1 é ainda válido se substituirmos (ii) em (3.18) pela condição mais fraca

$$(ii') \begin{cases} \alpha_{n_1-m_1}\alpha_{n_2-m_2} - \alpha_{n_1-m_2}\alpha_{n_2-m_1} \geq 0, \text{ para todo } n_1 < n_2 \text{ e } m_1 < m_2, \\ \alpha_{n_1-m_1}\alpha_{n_2-m_2} - \alpha_{n_1-m_2}\alpha_{n_2-m_1} > 0, \text{ se } n_1 < n_2, m_1 < m_2, n_2 > m_1, \text{ e } n_1 < m_2. \end{cases}$$

Para provar que $a_n \in PF(2)$ discreto, só temos que mostrar que $a_n = \frac{2c\pi}{L}e^{-\eta|n|}$ satisfaz (ii'), o qual é equivalente a provar que

$$(a) \quad |n_1 - m_1| + |n_2 - m_2| \leq |n_1 - m_2| + |n_2 - m_1|, \text{ se } n_1 < n_2 \text{ e } m_1 < m_2; \text{ e}$$

$$(b) \quad |n_1 - m_1| + |n_2 - m_2| < |n_1 - m_2| + |n_2 - m_1|, \text{ se } n_1 < n_2, m_1 < m_2, n_2 > m_1 \text{ e } n_1 < m_2.$$

A prova de (a) e (b) segue diretamente, portanto omitiremos os detalhes. Como consequência da análise anterior obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.2. *Seja ϕ_c a solução onda viajante periódica obtida na Proposição 3.1.2, com $L > \pi$ e $c > \frac{L}{L-\pi}$. Então, o operador linear \mathcal{L} definido em (3.13) com domínio $H_{per}^1([-L, L]) \subseteq L_{per}^2([-L, L])$ tem seus dois primeiros autovalores simples sendo zero o segundo. Além disso, o resto do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores positivos que convergem a $+\infty$.*

3.3 Estabilidade de Soluções Ondas Viajantes

Nesta seção usaremos o método de Lyapunov para estudar a estabilidade não linear das soluções da forma $u(x, t) = \phi_c(x - ct)$ com ϕ_c dadas pela Proposição 3.1.2. Neste momento faremos uso de duas leis de conservação para a equação (3.1), a saber

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L ((D^{\frac{1}{2}}u)^2 - \frac{1}{3}u^3) dx \quad \text{e} \quad F(u) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (u^2 + (D^{\frac{1}{2}}u)^2) dx.$$

O tipo de estabilidade que provaremos é *estabilidade orbital*, veja Definição 4.1.2 abaixo, a qual é dada num contexto mais geral. No caso da equação rBO consideraremos $m_2 = 1$ e como não temos um resultado de boa colocação em $H_{per}^{\frac{1}{2}}$, escolhemos $s_0 = 3/2$.

Antes de estabelecer o resultado principal desta seção, provaremos alguns lemas que serão úteis futuramente.

Lema 3.3.1. *Seja ϕ_c a solução onda viajante periódica dada pela Proposição 3.1.2 com $L > \pi$ e $c > \frac{L}{L-\pi}$. Então, o operador linear $\mathcal{L} = c\mathcal{H}\partial_x - 1 + c - \phi_c$ satisfaz*

$$(a) \alpha := \inf\{(\mathcal{L}f, f) : \|f\|_{L^2_{per}} = 1 \text{ e } (f, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0\} = 0, \quad (3.19)$$

$$(b) \beta := \inf\{(\mathcal{L}f, f) : \|f\|_{L^2_{per}} = 1, (f, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0 \text{ e } (f, \phi_c\phi'_c) = 0\} > 0 \quad (3.20)$$

Demonstração. (a). Como ϕ_c é limitada, temos que α é finito. Sendo que $(\phi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0$ e $\mathcal{L}\phi'_c = 0$ obtemos $\alpha \leq 0$. Provaremos que o ínfimo em (3.19) é atingido. De fato, como α é finito existe uma sequência $\{f_j\}_{j=0}^\infty \subset H^{\frac{1}{2}}_{per}$ tal que

$$\|f_j\|_{L^2_{per}} = 1, \quad (f_j, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0 \text{ e } (\mathcal{L}f_j, f_j) \rightarrow \alpha \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Considere $\epsilon > 0$, então existe $J \in \mathbb{N}$ tal que se $j > J$, tem-se

$$|(\mathcal{L}f_j, f_j) - \alpha| < \epsilon$$

ou equivalentemente

$$|c\|D_x^{\frac{1}{2}}f_j\|_{L^2_{per}}^2 + (c-1)\|f_j\|_{L^2_{per}}^2 - (\phi_c f_j, f_j) - \alpha| < \epsilon.$$

Assim,

$$0 < c-1 \leq c\|D_x^{\frac{1}{2}}f_j\|_{L^2_{per}}^2 + (c-1)\|f_j\|_{L^2_{per}}^2 < \epsilon + \alpha + \int_{-L}^L \phi_c f_j^2 dx \leq \epsilon + \alpha + \|\phi_c\|_\infty. \quad (3.21)$$

Portanto, como $\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}^2 \sim c\|D_x^{\frac{1}{2}}f\|_{L^2_{per}}^2 + (c-1)\|f\|_{L^2_{per}}^2$ temos que $\|f_j\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}$ é uniformemente limitada em j . Logo, existe uma subsequência de f_j , que denotaremos $\{f_j\}$ novamente e uma função $f^* \in H^{\frac{1}{2}}_{per}$ tal que $f_j \rightharpoonup f^*$ em $H^{\frac{1}{2}}_{per}$. Como a imersão $H^{\frac{1}{2}}_{per} \hookrightarrow L^2_{per}$ é compacta obtemos,

$$(f^*, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0 \text{ e } (\phi_c f_j, f_j) \rightarrow (\phi_c f^*, f^*) \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Provaremos que $f^* \neq 0$. De fato, podemos passar ao limite em (3.21) quando $j \rightarrow \infty$ de modo a obter

$$0 < c-1 \leq \epsilon + \alpha + \int_{-L}^L \phi f^{*2} dx.$$

Suponha que $f^* = 0$, então

$$0 < c-1 \leq \epsilon + \alpha \leq \epsilon,$$

como ϵ é arbitrário temos que $0 < c - 1 \leq 0$, o qual é absurdo, assim $f^* \neq 0$. Como a convergência fraca é inferiormente contínua tem-se

$$\|D_x^{\frac{1}{2}} f^*\|_{L_{per}^2}^2 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} f_j\|_{L_{per}^2}^2.$$

Agora, defina $f = \frac{f^*}{\|f^*\|_{L^2}}$, então $(f, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0$, $\|f\|_{L_{per}^2} = 1$ e

$$\alpha \leq (\mathcal{L}f, f) \leq \frac{\alpha}{\|f^*\|_{L_{per}^2}^2} \leq \alpha.$$

Portanto, α é um mínimo. Provaremos agora que $\alpha \geq 0$. Para isso aplicaremos o Lema E1 estabelecido por Weinstein em [73] (o qual vale no caso periódico) com $A = \mathcal{L}$ e $R = \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c$. De fato, pela Proposição 3.2.2, \mathcal{L} tem as propriedades espectrais requeridas pelo Lema E1. Precisamos encontrar χ tal que $\mathcal{L}\chi = \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c$ e $(\chi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) \leq 0$. Pela Proposição 3.1.2 temos que a aplicação

$$c \in \left(\frac{L}{L - \pi}, +\infty \right) \mapsto \phi_c \in H_{per}^{\frac{1}{2}}([-L, L])$$

é de classe C^1 , então diferenciando (3.3) com respeito a c obtemos que $\chi = -\frac{d}{dc}\phi_c$ satisfaz $\mathcal{L}(\chi) = \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c$. Observe que

$$\begin{aligned} (\chi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) &= -L \frac{d}{dc} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|) |\widehat{\phi}_c(n)|^2 = -\frac{8\pi^2 c}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|) e^{-2|n|\eta} \\ &\quad + \frac{8\pi^2 c^2}{L} \frac{d\eta}{dc} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|) |n| e^{-2|n|\eta}. \end{aligned}$$

De (3.11) e usando o fato que $c > \frac{L}{L-\pi}$, tem-se

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{d}{dc} \left(\tanh^{-1} \left(\frac{c\pi}{(c-1)L} \right) \right) = -\frac{\pi}{(c-1)^2 L} \left(1 - \left(\frac{c\pi}{(c-1)L} \right)^2 \right)^{-1} < 0.$$

Portanto $(\chi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) < 0$, o que implica que $\alpha \geq 0$. Isto termina a prova de (3.19).

(b). Usando a parte (a) obtemos $\beta \geq 0$. Suponha por absurdo que $\beta = 0$. Então usando um argumento similar ao estabelecido na parte (a), temos que existe f satisfazendo $\|f\|_{L_{per}^2} = 1$ e $(f, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = (f, \phi_c \phi'_c) = (\mathcal{L}f, f) = 0$. Portanto existe pelo menos um ponto

crítico (f, γ, θ, ν) para o problema de Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \mathcal{L}g = \gamma g + \theta(\phi + \mathcal{H}\phi') + \nu\phi\phi' \\ \text{Sujeito aos vínculos} \\ \|g\|_{L_{per}^2} = 1, (g, \phi\phi') = 0, (g, \phi + \mathcal{H}\phi') = 0. \end{cases}$$

Como $(\mathcal{L}f, f) = 0$, então $(\gamma f + \theta(\phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) + \nu\phi_c\phi'_c, f) = 0$, assim $\gamma = 0$. Usando que $\mathcal{L}\phi'_c = 0$, obtemos $(\theta(\phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) + \nu\phi_c\phi'_c, \phi'_c) = (\mathcal{L}f, \phi'_c) = (f, \mathcal{L}\phi'_c) = 0$, logo $(\nu\phi_c\phi'_c, \phi_c) = 0$ e como $(\phi_c\phi'_c, \phi'_c) = \int \phi_c(\phi'_c)^2 > 0$, temos que $\nu = 0$. Agora considere $\chi = -\frac{d}{dc}\phi_c$, segue que $\mathcal{L}(f - \theta\chi) = 0$, então $(f - \theta\chi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0 = (f, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) - \theta(\chi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c)$. Assim $\theta = 0$, pois $(\chi, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) \neq 0$, logo $\mathcal{L}f = 0$. Como zero é um autovalor simples de \mathcal{L} temos que existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f = \lambda\phi'_c$, o que implica que ϕ'_c é ortogonal a $\phi_c\phi'_c$, mas isto é absurdo. Assim $\beta > 0$, o que termina a prova do lema. \square

A prova do seguinte lema foi estabelecida durante a prova do lema anterior.

Lema 3.3.2. *A função $h(c) := F(\phi_c)$ definida em $(\frac{L}{L-\pi}, +\infty)$ é estritamente crescente.*

Agora, usando os fatos que h é contínua, estritamente crescente e a continuidade de F em $H_{per}^{\frac{1}{2}}$ é fácil provar o seguinte.

Lema 3.3.3. *Se $c \in (\frac{L}{L-\pi}, +\infty)$ e $0 < \beta < c - (\frac{L}{L-\pi})$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que se $\|v - \phi_c\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} < \delta_0$, existe um único e com $|e - c| < \beta$ tal que $F(v) = F(\phi_e)$.*

A seguir apresentamos uma das estimativas mais importantes para obter nosso resultado de estabilidade, a prova é consequência do Lema 3.3.1.

Observação 3.3.4. *Seja $f \in H_{per}^{\frac{1}{2}}$ com $(f, \phi + \mathcal{H}\phi') = 0$ e $(f, \phi\phi') = 0$, então existe β_0 tal que*

$$(\mathcal{L}f, f) \geq \beta_0 \|f\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2.$$

Demonstração. Seja b uma constante positiva, então

$$\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{2}} f\|_{L_{per}^2}^2 + b\|f\|_{L_{per}^2}^2 &\leq \|D_x^{\frac{1}{2}} f\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{b}{\beta}(\mathcal{L}f, f) \\
&= \int_{-L}^L \left\{ \left(\frac{1}{c} + \frac{b}{\beta} \right) c(D_x^{\frac{1}{2}} f)^2 + \frac{b}{\beta}(c-1)f^2 - \frac{b}{\beta}\phi_c f^2 \right\} dx \\
&= \left(\frac{1}{c} + \frac{b}{\beta} \right) (\mathcal{L}f, f) - \frac{1}{c} \int_{-L}^L (c-1-\phi_c)f^2 dx \\
&\leq \left(\frac{1}{c} + \frac{b}{\beta} \right) (\mathcal{L}f, f) + \left\| \frac{c-1-\phi_c}{c} \right\|_{\infty} \|f\|_{L_{per}^2}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D_x^{\frac{1}{2}} f\|_{L_{per}^2}^2 + (b - \left\| \frac{c-1-\phi_c}{c} \right\|_{\infty}) \|f\|_{L_{per}^2}^2 \leq \left(\frac{1}{c} + \frac{b}{\beta} \right) (\mathcal{L}f, f).$$

Assim

$$(\mathcal{L}f, f) \geq \left(\frac{1}{c} + \frac{b}{\beta} \right)^{-1} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}} f\|_{L_{per}^2}^2 + (b - \left\| \frac{c-1-\phi_c}{c} \right\|_{\infty}) \|f\|_{L_{per}^2}^2 \right\}.$$

Escolhendo b tal que $b - \left\| \frac{c-1-\phi_c}{c} \right\|_{\infty} > 0$, obtemos o resultado desejado. \square

O resultado principal desta seção é o seguinte.

Teorema 3.3.5. *Seja $L > \pi$ e ϕ_c a solução onda periódica dada pela Proposição 3.1.2 com $c \in \left(\frac{L}{L-\pi}, +\infty \right)$. Então a órbita \mathcal{O}_{ϕ_c} é não linearmente estável com respeito ao fluxo periódico gerado pela equação rBO.*

Demonstração. A prova é baseada nas ideias desenvolvidas em [14], [18], [74]. Inicialmente note que $F'(u) = u + \mathcal{H}u_x$ e $E'(u) = \mathcal{H}u_x - \frac{1}{2}u^2$, então ϕ_c é um ponto crítico do funcional $\mathcal{B} := E + (c-1)F$. Adicionalmente, como $F''(u) = 1 + \mathcal{H}\partial_x$ e $E''(u) = \mathcal{H}\partial_x - u$, temos que

$$E''(\phi_c) + (c-1)F''(\phi_c) = c\mathcal{H}\partial_x + (c-1) - \phi_c = \mathcal{L}.$$

Para $r \in [-L, L]$ e $t \in \mathbb{R}$ defina

$$\Omega_t(r) := \|D_x^{\frac{1}{2}} u(\cdot + r, t) - D_x^{\frac{1}{2}} \phi_c\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{c-1}{c} \|u(\cdot + r, t) - \phi_c\|_{L_{per}^2}^2.$$

Como $u_0 \in H_{per}^{\frac{3}{2}}$ e o problema (2.1) está bem colocado globalmente em $H_{per}^{\frac{3}{2}}$, então existe $u(t)$ solução do problema (2.1) tal que $u(t) \in H_{per}^{\frac{3}{2}}$ para todo $t > 0$. Como $H_{per}^s \hookrightarrow C_{per}$ para todo $s > \frac{1}{2}$, temos que $u(t), D_x^{\frac{1}{2}} u(t) \in C_{per}$ para cada t , logo para qualquer $t > 0$ fixo,

a função $\Omega_t(\cdot)$ é contínua. Então o $\inf_{r \in [-L, L]} \Omega_t(r)$ é atingido em algum $\gamma = \gamma(t)$, para cada $t > 0$. Portanto,

$$\Omega_t(\gamma(t)) = \inf_{r \in \mathbb{R}} \Omega_t(r). \quad (3.22)$$

Agora, considere a perturbação da onda viajante periódica ϕ_c

$$u(x + \gamma, t) = \phi_c(x) + v(x, t) \quad (3.23)$$

para $t \in [0, T]$ e $\gamma = \gamma(t)$ determinada por (3.22). Então diferenciando $\Omega_t(r)$ com respeito a r , avaliando nos valores que minimizam $\Omega_t(r)$ e usando (3.23) obtemos que v satisfaz a relação de compatibilidade

$$\int_{-L}^L \phi_c'(x) \phi_c(x) v(x, t) dx = 0, \quad (3.24)$$

para todo $t \in [0, T]$. Usando que E e F são quantidades conservadas, a representação (3.23) e os fatos que ϕ_c satisfaz (3.3) e $(\phi_c, \mathcal{H}v_x) = (\mathcal{H}\phi_c', v)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{B}(t) &= \mathcal{B}(u_0) - \mathcal{B}(\phi_c) = \mathcal{B}(\phi_c + v(\cdot, t)) - \mathcal{B}(\phi_c) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (cv \mathcal{H}v_x - v^2 + cv^2 - \phi_c v^2) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L (2cv \mathcal{H}\phi_c' + 2c\phi_c v - 2\phi_c v - \phi_c^2 v) dx - \frac{1}{6} \int_{-L}^L v^3 dx = \frac{1}{2} (\mathcal{L}v, v) - \frac{1}{6} \int_{-L}^L v^3 dx. \end{aligned}$$

Portanto, da imersão $H_{per}^{\frac{1}{2}}([-L, L]) \hookrightarrow L^3([-L, L])$, temos que

$$\Delta \mathcal{B}(t) \geq \frac{1}{2} (\mathcal{L}v, v) - c_0 \|v\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^3 \quad (3.25)$$

onde c_0 é uma constante positiva. Para obter nosso resultado de estabilidade precisamos estabelecer uma limitação conveniente para a forma quadrática em (3.25). Consideraremos dois casos.

Caso 1: Suponha primeiro que $F(u_0) = F(\phi_c)$, então

$$\int_{-L}^L \left(u^2(t) + (D_x^{\frac{1}{2}} u(t))^2 \right) dx = \int_{-L}^L \left(\phi_c^2 + (D_x^{\frac{1}{2}} \phi_c)^2 \right) dx \quad (3.26)$$

para todo $t \in [0, T]$. Portanto de (3.23) e (3.26) segue que

$$-2(v, \phi_c + \mathcal{H}\phi_c') = \|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2. \quad (3.27)$$

Sem perda de generalidade suponha que $\|\phi_c + \mathcal{H}\phi_c'\|_{L_{per}^2} = 1$. Defina v_{\parallel} e v_{\perp} como

$$v_{\parallel} = (v, \phi_c + \mathcal{H}\phi_c')(\phi_c + \mathcal{H}\phi_c') \quad \text{e} \quad v_{\perp} = v - v_{\parallel}.$$

Assim usando (3.27) temos que $(v_{\perp}, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) = 0$. Além disso, usando (3.27), (3.3) e a relação de compatibilidade (3.24) obtemos

$$\begin{aligned} (v_{\perp}, \phi_c \phi'_c) &= \left(v + \frac{1}{2} \{ \|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2 \} (\phi_c + \mathcal{H}\phi'_c), \phi_c \phi'_c \right) \\ &= (v, \phi_c \phi'_c) + \frac{1}{2} \{ \|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2 \} \frac{1}{c} \int_{-L}^L (\phi_c + \frac{1}{2} \phi_c^2) \phi_c \phi'_c dx = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 3.3.1-(b) e (3.27) segue que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}v_{\perp}, v_{\perp}) &\geq \beta \|v_{\perp}\|_{L_{per}^2}^2 = \beta \|v\|_{L_{per}^2}^2 - \beta |(v, \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c)|^2 \|\phi_c + \mathcal{H}\phi'_c\|_{L_{per}^2}^2 \\ &= \beta \|v\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{\beta}{4} \left[\|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2 \right]^2 \geq \beta \|v\|_{L_{per}^2}^2 - \tilde{\beta}_3 \|v\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^4, \end{aligned} \quad (3.28)$$

com $\beta, \tilde{\beta}_3 > 0$. Por outro lado,

$$(\mathcal{L}v_{\parallel}, v_{\parallel}) = \frac{1}{4} \{ \|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2 \}^2 (\mathcal{L}(\phi + \mathcal{H}\phi'), \phi + \mathcal{H}\phi').$$

Vamos supor que $(\mathcal{L}(\phi_c + \mathcal{H}\phi'_c), \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) < 0$, então

$$(\mathcal{L}v_{\parallel}, v_{\parallel}) \geq -\tilde{\beta}_4 \|v\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^4. \quad (3.29)$$

Se $(\mathcal{L}(\phi_c + \mathcal{H}\phi'_c), \phi_c + \mathcal{H}\phi'_c) \geq 0$, a desigualdade (3.29) é imediata. Além disso, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}v_{\parallel}, v_{\perp}) &= -\frac{1}{2} \{ \|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2 \}^2 (\mathcal{L}(\phi + \mathcal{H}\phi'), v_{\perp}) \\ &\geq -\frac{1}{2} \{ \|v\|_{L_{per}^2}^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{per}^2}^2 \} \|\mathcal{L}(\phi + \mathcal{H}\phi')\|_{L_{per}^2} \|v_{\perp}\|_{L_{per}^2}. \end{aligned}$$

Mas

$$\|v_{\perp}\|_{L_{per}^2} \leq \|v\|_{L_{per}^2} + |(v, \phi + \mathcal{H}\phi')| \|\phi + \mathcal{H}\phi'\|_{L_{per}^2} \leq 2\|v\|_{L_{per}^2}.$$

Então

$$(\mathcal{L}v_{\parallel}, v_{\perp}) \geq -\tilde{\beta}_j \|v(t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^3, \quad (3.30)$$

onde $\tilde{\beta}_j > 0$, para $j = 3, 4$.

Agora, usando (3.28), (3.29), (3.30), a forma específica de \mathcal{L} e uma argumento similar ao estabelecido na Observação 3.3.4 tem-se

$$(\mathcal{L}v, v) \geq \beta_0 \|v(t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^2 - \beta_1 \|v(t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^3 - \beta_2 \|v(t)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}^4, \quad (3.31)$$

onde $\beta_j > 0$, para $j = 0, 1, 2$. Portanto, de (3.22), (3.25) e (3.31) segue que para todo $t \in [0, T]$

$$\Delta\mathcal{B}(t) \geq g\left(\|v(t)\|_{\frac{1}{2},c}\right), \quad (3.32)$$

onde $\|f\|_{\frac{1}{2},c}^2 := \|D^{\frac{1}{2}}f\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{c-1}{c}\|f\|_{L_{per}^2}^2$ e $g(s) := \eta s^2 - \sum_{k=3}^4 d_k(c)s^k$, com $\eta, d_k > 0$. As propriedades essenciais de g são $g(0) = 0$ e $g(s) > 0$ para todo s pequeno. O resultado de estabilidade é uma consequência imediata de (3.32). De fato, seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $g(\epsilon) > 0$. Como \mathcal{B} é uniformemente contínua em $S := \left\{u \in H_{per}^{\frac{1}{2}} : F(u) = F(\phi_c)\right\}$, temos que existe $0 < \delta_2(\epsilon) < \epsilon$ tal que se $v \in S$ e $\|v - \phi_c\|_{\frac{1}{2},c} < \delta_2$ então

$$|\mathcal{B}(v) - \mathcal{B}(\phi_c)| < g(\epsilon).$$

Suponha que $\|u_0 - \phi_c\|_{\frac{1}{2},c} < \delta_2$. Como $u_0 \in S$ e $\Delta\mathcal{B}(t)$ é constante no tempo obtém-se

$$g\left(\|v(t)\|_{\frac{1}{2},c}\right) \leq \Delta\mathcal{B}(t) = \Delta\mathcal{B}(0) \leq |\Delta\mathcal{B}(0)| < g(\epsilon) \quad (3.33)$$

para $t \in [0, T]$. Finalmente como $t \mapsto \|v(t)\|_{\frac{1}{2},c}^2$ é uma função contínua,

$$\|v(0)\|_{\frac{1}{2},c} = \|u_0 - \phi_c\|_{\frac{1}{2},c} < \epsilon,$$

pela forma específica de g , (3.33) e o Teorema do Valor Intermediário, temos que

$$\|v(t)\|_{\frac{1}{2},c} < \epsilon, \quad (3.34)$$

para todo $t \in [0, T]$. A desigualdade (3.34) é ainda válida para todo $t > 0$, isto é consequência imediata do fato que T foi escolhido arbitrariamente. O que prova que \mathcal{O}_{ϕ_c} é orbitalmente estável em $H_{per}^{\frac{1}{2}}([-L, L])$ com respeito a pequenas perturbações que preservam a norma $H_{per}^{\frac{1}{2}}$.

Caso 2: Caso geral, não necessariamente $F(u_0) = F(\phi_c)$. Fixe $c > \frac{L}{L-\pi}$ e $\epsilon > 0$ como acima. Sendo,

$$s \in \left(\frac{L}{L-\pi}, \infty\right) \mapsto \phi_s \in \left(H_{per}^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

uma aplicação contínua, existe $0 < \delta_1 < c - \frac{L}{L-\pi}$ tal que se

$$s \in \left(\frac{L}{L-\pi}, \infty\right) \text{ e } |s - c| < \delta_1, \text{ então } \|\phi_s - \phi_c\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} < \frac{\delta_2}{2}, \quad (3.35)$$

onde δ_2 foi escolhido no Caso 1. Defina $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\delta_2}{2}\}$ (onde δ_0 está dado pelo Lema 3.3.3 considerando $\beta = \delta_1$) e suponha que $\|u_0 - \phi_c\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} < \delta$. Pelo Lema 3.3.3 podemos escolher $e > \frac{L}{L-\pi}$ tal que

$$|e - c| < \delta_1 \quad \text{e} \quad F(u_0) = F(\phi_e).$$

Por (3.35) temos que $\|\phi_e - \phi_c\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} < \frac{\delta_2}{2}$, logo

$$\|u_0 - \phi_e\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \leq \|u_0 - \phi_c\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} + \|\phi_c - \phi_e\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} < \delta + \frac{\delta_2}{2} \leq \delta_2.$$

Finalmente, aplicando o resultado já provado para e tem-se,

$$\inf_{r \in [-L, L]} \|u(t) - \phi_c(\cdot + r)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} \leq \inf_{r \in [-L, L]} \|u(t) - \phi_e(\cdot + r)\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} + \|\phi_e - \phi_c\|_{H_{per}^{\frac{1}{2}}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\delta_2}{2} \leq \epsilon.$$

O que termina a prova do teorema. □

CAPÍTULO 4

GENERALIZAÇÃO DA TEORIA E ESTABILIDADE PARA EQUAÇÕES DO TIPO BBM

Neste capítulo a teoria estabelecida para a equação rBO será estendida para uma família de equações da forma,

$$u_t + u_x + u^p u_x + H u_t = 0, \quad (4.1)$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro e H é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto das funções periódicas. Note que se $p = 1$ e $H = \mathcal{H}\partial_x$ obtemos a equação rBO estudada no capítulo anterior. Um número considerável de equações podem ser escritas da forma (4.1), adicionalmente à equação rBO. Nesta tese, estamos interessados em estudar existência e estabilidade de soluções periódicas para equações do tipo Benjamin Bona Mahony. Mais especificamente, estabeleceremos condições suficientes para obter estabilidade não linear de ondas periódicas associadas à equação (4.1) e provaremos existência e estabilidade de soluções periódicas para as equações BBM, mBBM e 4-BBM, isto é, $H = -\partial_x^2$ e $p = 1, 2, 4$ em (4.1). Além disso, no final deste capítulo será estabelecida a estabilidade não linear de soluções constantes para a equação gBBM (i.e., $H = -\partial_x^2$ em (4.1)).

4.1 Generalização da Teoria

Nesta seção estenderemos a teoria desenvolvida para a equação rBO a uma família de equações da forma (4.1), com H definido como

$$\widehat{Hu}(n) = \alpha(n)\widehat{u}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

O símbolo α é assumido como uma função real, mensurável, localmente limitada e par definida em \mathbb{R} , satisfazendo as condições

$$A_1|n|^{m_1} \leq \alpha(n) \leq A_2(1 + |n|)^{m_2}, \quad (4.2)$$

onde $1 \leq m_1 \leq m_2$, $|n| > n_0$, $\alpha(n) > b$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $A_i > 0$, com $i = 1, 2$.

Novamente, estamos interessados em soluções ondas viajantes da forma

$$u(x, t) = \phi_c(x - ct),$$

onde ϕ_c é uma função com valores reais periódica (de período $2L$) e suave. Substituindo esta forma em (4.1), obtemos após integração

$$cH\phi_c + (c - 1)\phi_c - \frac{1}{p + 1}\phi_c^{p+1} = A_\phi, \quad (4.3)$$

onde a constante de integração A_ϕ é assumida nula. É bem conhecido que a equação (4.1) possui três leis de conservação, duas delas serão usadas na nossa teoria, a saber

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(uHu - \frac{2}{(p+1)(p+2)} u^{p+2} \right) dx \quad \text{e} \quad F(u) := \frac{1}{2} \int_{-L}^L (uHu + u^2) dx.$$

Se consideramos *a priori* a existência de soluções viajantes periódicas ϕ_c para a equação (4.3), temos que

$$E'(\phi_c) + (c - 1)F'(\phi_c) = 0.$$

isto é, ϕ_c é um ponto crítico para o funcional $\mathcal{B} := E + (c - 1)F$,

Agora, defina

$$\mathcal{L} := E''(\phi_c) + (c - 1)F''(\phi_c) = cH + (c - 1) - \phi_c^p. \quad (4.4)$$

Então $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow L^2_{per}([-L, L])$ é um operador linear, fechado, não limitado e auto-adjunto definido num subconjunto denso de $L^2_{per}([-L, L])$. Além disso, derivando (4.3) com respeito à variável x temos que $\mathcal{L}\phi'_c = 0$.

Seguindo a prova da estabilidade orbital das soluções ondas viajantes periódicas para a equação rBO obtemos as seguintes condições que provam a estabilidade:

- (C₀) Existe uma curva não trivial suave de soluções periódicas para (4.3) da forma $c \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \phi_c \in H^{m_2}_{per}([-L, L])$;
- (C₁) \mathcal{L} tem um único autovalor negativo o qual é simples;
- (C₂) o autovalor zero é simples;
- (C₃) $\frac{d}{dc} \int_{-L}^L (\phi_c H \phi_c + \phi_c^2) dx > 0$.

A seguir estabelecemos condições suficientes para obter C₁ e C₂ para o operador \mathcal{L} associado ao problema (4.1). De fato, comecemos notando que o espectro essencial do operador \mathcal{L} é vazio. A prova segue as mesmas linhas dos argumentos estabelecidos no caso da equação rBO, logo o espectro de \mathcal{L} é discreto.

O resultado principal desta seção é o seguinte.

Teorema 4.1.1. *Seja ϕ_c uma solução positiva e par de (4.3). Assuma $\widehat{\phi}_c > 0$ e $\widehat{\phi}_c^p \in PF(2)$ discreto, então (C₁) e (C₂) em (4.5) ocorrem para o operador \mathcal{L} em (4.4).*

Demonstração. Note que o operador \mathcal{L} pode ser escrito como

$$\mathcal{L}u = (M + c)u - \phi_c^p u,$$

onde $M =: cH - 1$. O símbolo de M é $\zeta(n) := c\alpha(n) - 1$. Usando (4.2) temos que para todo $c \neq 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$B_1 |n|^{m_1} \leq |\zeta(n)| \leq B_2 (1 + |n|)^{m_2}, \quad \forall n \geq N_0,$$

onde $B_1 = \frac{cA_1}{2}$ e $B_2 = cA_2 + 1$. Então aplicando o Teorema 3.2.1 tem-se que C₁ e C₂ valem para o operador \mathcal{L} . □

A seguir apresentamos a definição de estabilidade na qual estamos interessados na maior parte desta tese.

Definição 4.1.2. *Seja ϕ_c uma solução onda viajante periódica com período $2L$ de (4.3). Definimos a órbita gerada por ϕ_c , como*

$$\mathcal{O}_{\phi_c} := \{f \in H_{per}^{\frac{m_2}{2}} : f = \phi_c(\cdot + r) \text{ para algum } r \in \mathbb{R}\},$$

e para qualquer $\gamma > 0$

$$U_\gamma := \{f \in H_{per}^{\frac{m_2}{2}} : \inf_{g \in \mathcal{O}_{\phi_c}} \|f - g\|_{H_{per}^{\frac{m_2}{2}}} < \gamma\}.$$

Com esta terminologia, dizemos que ϕ_c é orbitalmente estável em $H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$ pelo fluxo gerado pela equação (4.1) se,

(i) existe s_0 tal que $H_{per}^{s_0} \subset H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$ e o problema de valor inicial associado a (4.1) é globalmente bem colocado em $H_{per}^{s_0}$.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $u_0 \in U_\delta \cap H_{per}^{s_0}$, a solução u de (4.1) com $u(0, x) = u_0(x)$ satisfaz $u(t) \in U_\epsilon$ para todo $t > 0$.

Caso contrário, dizemos que ϕ_c é instável em $H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$.

A condição (i) na definição anterior é importante quando o espaço no qual temos boa colocação global é menor que o espaço onde estão bem definidas e são contínuas as leis de conservação usadas para provar estabilidade, o que ocorre no caso da equação rBO. Note que esta condição não interfere muito no resultado de estabilidade, pois estamos interessados em dados iniciais perto da solução onda viajante, a qual sempre é suave.

A prova do seguinte teorema geral de estabilidade segue as ideias usadas no teorema de estabilidade da equação rBO.

Teorema 4.1.3. *Seja ϕ_c uma solução onda viajante periódica de (4.3), e suponha que a parte (i) da definição de estabilidade ocorre. Suponha também que o operador \mathcal{L} definido anteriormente em (4.4) tem as propriedades (C_1) e (C_2) em (4.5). Escolha $\chi \in L_{per}^2$ tal que $\mathcal{L}\chi = \phi_c + H\phi_c$ e defina $I = (\chi, \phi_c + H\phi_c)_{L_{per}^2}$. Se $I < 0$ então ϕ_c é orbitalmente estável.*

Observação 4.1.4. *Nos nossos problemas, devido à suavidade da aplicação $c \mapsto \phi_c$ a função χ no Teorema 4.1.3 é $\chi = -\frac{d}{dc}\phi_c$. Vale a pena ressaltar que seria interessante encontrar alguma outra função χ diferente da escolhida anteriormente tal que $\mathcal{L}\chi = \phi_c + H\phi_c$, tal como ocorre no caso das ondas solitárias.*

4.2 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação mBBM

Nesta parte da tese aplicaremos o Teorema 4.1.1 para obter a estabilidade não linear das ondas viajantes periódicas associadas à equação mBBM

$$u_t + u_x + 3u^2u_x - u_{xxt} = 0. \quad (4.6)$$

Primeiro, vamos encontrar soluções ondas viajantes periódicas para (4.6) usando o Teorema 1.0.4. Neste caso a EDO que determina as soluções é

$$c\phi_c'' - (c-1)\phi_c + \phi_c^3 = 0. \quad (4.7)$$

As ondas solitárias para a equação mBBM são dadas por

$$\varphi_w(x) = \sqrt{2(w-1)} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{w-1}{w}} x\right), \quad w > 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

onde a transformada de Fourier é

$$\widehat{\varphi}_w^{\mathbb{R}}(\xi) = \sqrt{2w}\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\xi}{2} \sqrt{\frac{w}{w-1}}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo Teorema do Somatório de Poisson obtemos a seguinte função periódica

$$\psi_w(x) := \frac{\sqrt{2w}\pi}{L} + \frac{2\sqrt{2w}\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w}{w-1}}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad (4.9)$$

onde $w > 1$ será escolhido mais tarde de maneira que ψ_w seja uma onda viajante periódica da equação BBM.

Por outro lado, considere a expansão em série de Fourier da função elíptica de Jacobi dnoidal de período L (veja Oberhettinger [57]), a saber

$$\frac{2K}{L} \operatorname{dn}\left(\frac{2K\xi}{L}; k\right) = \frac{\pi}{L} + \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi K'}{K}\right) \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right), \quad (4.10)$$

onde $K = K(k)$ é a integral completa do primeiro tipo e $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$.

Comparando (4.9) e (4.10) vemos que um candidato natural ϕ_c a solução de (4.7) é

$$\phi_c(x) = \eta \operatorname{dn} \left(\frac{\eta x}{\sqrt{2c}}; k \right), \quad (4.11)$$

com $\eta > 0$ e $k \in (0, 1)$ fixo. Então, substituindo este tipo de solução em (4.7) e usando o fato que o período fundamental da função dnoidal é $2K$, obtemos as seguintes relações de compatibilidade

$$c - 1 = \frac{\eta^2}{2}(2 - k^2) \quad \text{e} \quad \eta = \frac{2\sqrt{2c}K(k)}{L}. \quad (4.12)$$

Portanto $c - 1 > 0$. Além disso, para $k \in (0, 1)$ devemos ter que $\eta \in (\sqrt{c-1}, \sqrt{2(c-1)})$ e $\frac{c-1}{c} > \frac{2\pi^2}{L^2}$. Combinando as duas equações dadas em (4.12) obtemos

$$L^2 = \frac{4c(2 - k^2)K^2(k)}{c - 1},$$

e como $c > 1$ tem-se a estimativa $L > \sqrt{2}\pi$. As relações de compatibilidade em (4.12) também implicam que

$$c = \frac{L^2}{L^2 - 4(2 - k^2)K^2(k)} := f_L(k). \quad (4.13)$$

Assim, usando novamente o fato que $c > 1$ temos que existe $k_L \in (0, 1)$ satisfazendo

$$L^2 - 4(2 - k^2)K^2(k) > 0, \quad \text{para todo } k \in (0, k_L). \quad (4.14)$$

Por exemplo para $L = 5$ o programa Maple nos fornece $k_L = 0.9041841218$ (veja Figura 4.1 abaixo).

Se consideramos ϕ_c dada em (4.11) com período T_{ϕ_c} , obtemos de (4.12) que o período fundamental de ϕ_c é uma função de η dada por

$$T_{\phi_c}(\eta) = 2K(k)\sqrt{2 - k^2}\sqrt{\frac{c}{c-1}},$$

com $k^2 = 2 - \frac{2(c-1)}{\eta^2}$. Se $\eta \rightarrow \sqrt{c-1}$, então $k \rightarrow 0^+$, portanto $T_{\phi_c}(\eta) \rightarrow \sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{c}{c-1}}$. Se $\eta \rightarrow \sqrt{2(c-1)}$, então $k \rightarrow 1^-$, portanto $T_{\phi_c}(\eta) \rightarrow +\infty$. Como $\eta \mapsto T_{\phi_c}(\eta)$ é uma função estritamente crescente (provaremos isso mais tarde), temos que $T_{\phi_c}(\eta) > \sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{c}{c-1}}$.

Observação 4.2.1. Note que se $\eta \rightarrow \sqrt{2(c-1)}$, então

$$\phi_c(x) = \sqrt{2(c-1)} \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{c-1}{c}} x \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad c > 1$$

é a solução onda solitária para a equação mBBM. Se $\eta \rightarrow \sqrt{c-1}$, obtemos a solução constante $\phi_c(x) = \sqrt{c-1}$ para a equação mBBM. O estudo destas soluções constantes será feito na última seção deste capítulo.

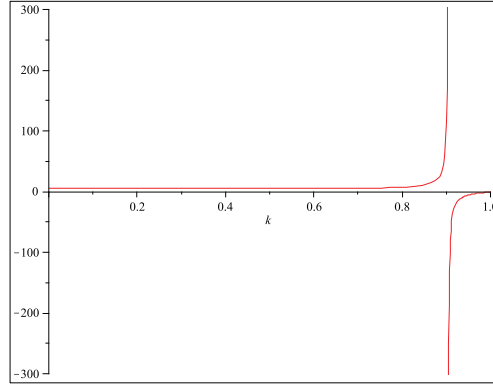


Figura 4.1: Gráfico de $c(k)$ com $L = 5$

A seguir, construiremos uma família de soluções tipo dnoidal com período $L > \sqrt{2}\pi$ para a equação mBBM, via o Teorema da Função Implícita. Seja $k_L \in (0, 1)$ satisfazendo (4.14) e considere $c_0 > \frac{L^2}{L^2 - 2\pi^2}$. Escolha o único $k_0 \in (0, k_L)$ tal que $c_0 = f_L(k_0)$, onde f_L é definido em (4.13). Então existe um único $\eta_0 = \eta(c_0)$ tal que $\eta_0 \in (\sqrt{c_0 - 1}, \sqrt{2(c_0 - 1)})$ e o período fundamental de ϕ_{c_0} é $T_{\phi_{c_0}}(\eta_0) = L$.

Agora estamos aptos a enunciar nosso resultado de existência.

Teorema 4.2.2. *Seja $L > \sqrt{2}\pi$ fixo e $k_L \in (0, 1)$ satisfazendo (4.14). Considere $c_0 > \frac{L^2}{L^2 - 2\pi^2}$ e o único $\eta_0 = \eta(c_0)$ tal que $T_{\phi_{c_0}}(\eta_0) = L$, então*

(i) *existe um intervalo aberto $I(c_0)$ contendo c_0 , um intervalo aberto $J(\eta_0)$ contendo η_0 e uma única função suave $\Lambda : I(c_0) \rightarrow J(\eta_0)$ tal que $\Lambda(c_0) = \eta_0$ e*

$$2\sqrt{2 - k^2}K(k)\sqrt{\frac{c}{c-1}} = L, \quad (4.15)$$

onde $c \in I(c_0)$, $\eta = \Lambda(c) \in J(\eta_0)$ e $k = k(c)$ é dado por $k^2 = 2 - \frac{2(c-1)}{\eta^2}$.

(ii) *As soluções ondas dnoidal ϕ_c dadas por (4.11), determinadas por $\eta = \eta(c)$, tem período fundamental L e satisfazem (4.7). Além disso, a aplicação*

$$c \in I(c_0) \mapsto \phi_c \in H_{per}^n([0, L]),$$

é suave, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $I(c_0)$ pode ser escolhido como $\mathcal{J} = (\frac{L^2}{L^2-2\pi^2}, +\infty)$.

Demonstração. A prova segue as mesmas ideias estabelecidas por Angulo em [9], por causa disso só faremos um esquema da demonstração. Para isso, defina

$$\Omega = \left\{ (\eta, c) \in \mathbb{R}^2 : c > \frac{L^2}{L^2-2\pi^2} \text{ e } \eta \in \left(\sqrt{c-1}, \sqrt{2(c-1)} \right) \right\}$$

e $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Gamma(\eta, c) = 2K(k(\eta, c))\sqrt{2-k^2(\eta, c)}\sqrt{\frac{c}{c-1}},$$

onde $k^2(\eta, c) = 2 - \frac{2(c-1)}{\eta^2}$. Note que $\Gamma(\eta_0, c_0) = L$. Provaremos que $\Gamma_\eta(\eta, c) > 0$ para todo $c > \frac{L^2}{L^2-2\pi^2}$. De fato, para $k'^2 = 1 - k^2$ temos que

$$\Gamma_\eta(\eta, c) = \frac{2}{k'^2 k \sqrt{2-k^2}} \sqrt{\frac{c}{c-1}} \frac{dk}{d\eta} \left[(2-k^2)E - 2k'^2 K \right].$$

Como $\frac{dk}{d\eta} = \frac{2(c-1)}{k\eta^3} > 0$ e $k \mapsto (2-k^2)E(k) - 2k'^2 K(k)$ é uma função positiva em $(0, 1)$, obtemos que $\Gamma_\eta(\eta, c) > 0$. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita temos que existe uma única aplicação suave Λ definida numa vizinhança $I(c_0)$ de c_0 tal que $\Gamma(\Lambda(c), c) = L$ para todo $c \in I(c_0)$. Como c_0 foi fixado arbitrariamente no intervalo $\mathcal{J} = (\frac{L^2}{L^2-2\pi^2}, +\infty)$, tem-se da unicidade de Λ que podemos estender $I(c_0)$ a todo \mathcal{J} .

Agora, observe que (4.15) é equivalente a

$$\frac{1}{c} = \frac{L^2 - 4(2-k^2(c))K^2(k(c))}{L^2},$$

Como $c > 0$, temos que $k(c) \in (0, k_L)$ para todo $c \in \mathcal{J}$. O resto da prova segue da suavidade das funções envolvidas e usando o fato que $k^2(c) = 2 - \frac{2(c-1)}{\eta^2(c)}$ e (4.15) implicam as relações de compatibilidade dadas em (4.12). \square

No próximo Corolário, escolhamos a velocidade $w = w(c)$ de tal modo que ψ_w em (4.9) se transforma numa onda viajante periódica do tipo dnoidal.

Corolário 4.2.3. *Defina*

$$w(c) := \frac{16c(2-k^2)K'^2}{16c(2-k^2)K'^2 - c + 1}, \quad (4.16)$$

onde $k = k(c) \in (0, k_L)$ e $c > \frac{L^2}{L^2-2\pi^2}$. Então $\phi_c = \sqrt{\frac{c}{w(c)}}\psi_{w(c)}$.

Demonstração. Pela definição de w e (4.13) temos que $\sqrt{\frac{w}{w-1}} = \frac{2K'L}{K}$. Então, usando (4.9) e (4.10) obtemos

$$\psi_w(\xi) = \frac{2\sqrt{2w}K}{L} \operatorname{dn} \left(\frac{2K\xi}{L}; k \right) = \sqrt{\frac{w}{c}} \phi_c(\xi),$$

onde na segunda igualdade usamos a relação $\frac{\eta}{\sqrt{2c}} = \frac{2K}{L}$ a qual pode ser obtida de (4.12). Isto termina a prova do corolário. \square

Os dois próximos Corolários serão úteis para obter o resultado de estabilidade para a equação mBBM.

Corolário 4.2.4. *Considere a aplicação $\Lambda : I(c_0) \longrightarrow J(\eta_0)$ determinada pelo Teorema 4.2.2. Então, Λ é uma função estritamente crescente em $I(c_0)$.*

Demonstração. Temos que $\Gamma(\Lambda(c), c) = L$, para todo $c \in I(c_0)$. Pelo Teorema da Função Implícita obtemos

$$\frac{d\Lambda(c)}{dc} = -\frac{\Gamma_c}{\Gamma_\eta}.$$

Como $\Gamma_\eta > 0$, somente temos que provar que $\Gamma_c < 0$. De fato, como

$$\Gamma_c(\eta, c) = \sqrt{\frac{c-1}{c}} \left\{ \frac{2c}{(c-1)\eta^2 k^2 k'^2 \sqrt{2-k^2}} \left[2k'^2 K - (1+k'^2)E \right] - \frac{\sqrt{2-k^2} K}{(c-1)^2} \right\} \quad (4.17)$$

e $2k'^2 K(k) - (1+k'^2)E(k) < 0$, para todo $k \in (0, 1)$, tem-se $\Gamma_c < 0$, o qual termina a prova do Corolário. \square

Corolário 4.2.5. *Considere $w : \left(\frac{L^2}{L^2-2\pi^2}, +\infty \right) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde w é dado por (4.16). Então $\frac{dw}{dc} > 0$.*

Demonstração. Para $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$ e $E'(k) = E(\sqrt{1-k^2})$ temos que

$$\frac{dK'}{dk} = - \left(\frac{E' - k^2 K'}{k k'^2} \right).$$

Portanto, segue que

$$\frac{dw}{dc} = \frac{16(2-k^2)K'^2 + \frac{32c(c-1)K'}{k k'^2} \frac{dk}{dc} [(2-k^2)E' - k^2 K']}{[16c(2-k^2)K'^2 - c + 1]^2}.$$

Usando a identidade $E' > K'$, obtemos $(2 - k^2)E'(k) - k^2K'(k) > 0$, para todo $k \in (0, 1)$. Então, para finalizar a prova só temos que mostrar que $\frac{dk}{dc} > 0$. Para isso é suficiente estudar a sinal de $2(c - 1)\frac{d\eta}{dc} - \eta$ em

$$\frac{dk}{dc} = \frac{1}{k\eta^3} \left[2(c - 1)\frac{d\eta}{dc} - \eta \right].$$

O Corolário 4.2.4 implica $\frac{d\eta}{dc} = -\frac{\Gamma_c}{\Gamma_\eta}$ e note que

$$\Gamma_\eta(\eta, c) = \frac{4(c - 1)}{k'^2 k^2 \eta^3 \sqrt{1 + k'^2}} \sqrt{\frac{c}{c - 1}} \left[(1 + k'^2)E - 2k'^2 K \right].$$

Assim, de (4.17) obtemos

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{\eta}{2(c - 1)} + \frac{kk'^2 \eta^3 (1 + k'^2)K}{2c(c - 1)^2 [(1 + k'^2)E - 2k'^2 K]} =: \frac{\eta}{2(c - 1)} + A.$$

Portanto $2(c - 1)\frac{d\eta}{dc} - \eta = 2(c - 1)A > 0$. □

A seguir apresentamos nosso teorema de estabilidade para a equação mBBM.

Teorema 4.2.6. *Seja $L > \sqrt{2}\pi$ e $c > \frac{L^2}{L^2 - 2\pi^2}$. Então a solução onda viajante dnoidal ϕ_c construída no Teorema 4.2.2 é estável em $H_{per}^1([0, L])$ pelo fluxo da equação mBBM.*

Demonstração. O intuito é aplicar o Teorema 4.1.3. De fato, primeiro provaremos que (C_1) e (C_2) dados em (4.5) ocorrem para o operador

$$\mathcal{L}_2 = -c\partial_x^2 - 1 + c - 3\phi_c^2.$$

Como ϕ_c é positiva e par, pelo Teorema 4.1.1 somente temos que mostrar que $\widehat{\phi}_c > 0$ e $\widehat{\phi}_c^2$ pertence a $PF(2)$ discreto. De fato, o Corolário 4.2.3 implica

$$\widehat{\phi}_c(n) = \frac{c}{w} \widehat{\psi}_w(n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Então pelo Teorema do Somatório de Poisson obtemos $\widehat{\psi}_w(n) = \frac{1}{L} \widehat{\varphi}_w^{\mathbb{R}}\left(\frac{n}{L}\right)$, onde φ_w é a onda solitária dada em (4.8). Portanto

$$\widehat{\phi}_c(n) = \frac{\sqrt{2c}}{L} \pi \operatorname{sech} \left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w(c)}{w(c) - 1}} \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como $f(x) = A \operatorname{sech}(Bx) \in PF(2)$ contínuo para $A > 0$ e $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluímos que $\widehat{\phi}_c \in PF(2)$ discreto. Pelo Teorema 1.0.7, temos que $\widehat{\phi}_c^2 = \widehat{\phi}_c * \widehat{\phi}_c \in PF(2)$ discreto. Como

$\widehat{\phi}_c > 0$, tem-se $\widehat{\phi}_c^2 = \widehat{\phi}_c * \widehat{\phi}_c > 0$, então as condições (C_1) e (C_2) são válidas para o operador \mathcal{L} .

Agora, provaremos que (C_3) dada em (4.5) é válido. Como a aplicação

$$c \longmapsto \phi_c \in H_{per}^n([0, L]), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

é suave, derivando (4.7) com respeito a c temos que $\mathcal{L} \left(-\frac{d}{dc} \phi_c \right) = \phi_c - \phi_c''$. Portanto usando a identidade de Parseval obtemos

$$I = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left(\|\phi\|_{H_{per}^1}^2 \right) = -\frac{L}{2} \frac{d}{dc} \left(\|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi}_c\|_{l^2}^2 \right).$$

Mas

$$\|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi}_c\|_{l^2}^2 = \frac{2c\pi^2}{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left(\|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi}_c\|_{l^2}^2 \right) &= \frac{2\pi^2}{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \right) \\ &+ \frac{C}{(w-1)^2} \sqrt{\frac{w-1}{w}} \frac{dw}{dc} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2) n \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \right) \tanh \left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \right), \end{aligned}$$

onde a constante $C = C(c, L) > 0$. Como a sequência $\left\{ n \tanh \left(\frac{\pi n}{2L} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \right) \right\}_n$ é positiva, usando o Corolário 4.2.5 temos que

$$\frac{d}{dc} \left(\|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi}_c\|_{l^2}^2 \right) > 0,$$

o que prova a estabilidade de ϕ_c . □

4.3 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação BBM

A seguir aplicaremos os resultados obtidos na seção 4.1 para provar a estabilidade de soluções ondas do tipo cnoidal associadas à equação BBM,

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \tag{4.18}$$

Com respeito à existência de soluções periódicas para a equação BBM, a boa colocação global em H_{per}^1 é suficiente para nosso propósito, este resultado foi estabelecido no Capítulo 2. Vale a pena notar que existe um resultado melhor estabelecido por Chen em [28] provando boa colocação global em L_{per}^2 .

Considere $c > 1$. Neste caso as soluções ondas viajantes periódicas associadas a (4.18) satisfazem

$$c\phi_c'' - (c-1)\phi_c + \frac{1}{2}\phi_c^2 = 0. \quad (4.19)$$

É bem conhecido que as soluções ondas solitárias para (4.18) são dadas por

$$\varphi_w(x) = 3(w-1)\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{w-1}{w}}\frac{x}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

com $w > 1$. Como anteriormente, podemos calcular a transformada de Fourier destas ondas solitárias as quais são

$$\widehat{\varphi}_w^{\mathbb{R}}(\xi) = 12\pi w \xi \operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{w}{w-1}}\pi\xi\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Então pelo Teorema do Somatório de Poisson (veja Teorema 1.0.4 no Capítulo 1) obtemos a seguinte função periódica

$$\begin{aligned} \psi_w(\xi) &:= \frac{12\pi w}{L^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{w}{w-1}}\frac{\pi n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \\ &= \frac{12w}{L} \sqrt{\frac{w-1}{w}} + \frac{24\pi w}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{w}{w-1}}\frac{\pi n}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $w > 1$ será escolhido mais tarde para que ψ_w seja uma onda viajante periódica.

Agora, considere a expansão em série de Fourier do quadrado da função elíptica de Jacobi dnoidal (veja Oberhettinger [57]) de período L , a saber

$$K^2 \left[\operatorname{dn}^2\left(\frac{2K\xi}{L}; k\right) - \frac{E}{K} \right] = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right),$$

onde $E = E(k)$ denota a integral elíptica completa do segundo tipo, $q = e^{-\left(\frac{\pi K'}{K}\right)}$ e

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = \frac{1}{2} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi K'}{K}\right).$$

Portanto

$$K^2 \left[\operatorname{dn}^2 \left(\frac{2K\xi}{L}; k \right) - \frac{E}{K} \right] = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{csch} \left(\frac{n\pi K'}{K} \right) \cos \left(\frac{2\pi n\xi}{L} \right). \quad (4.21)$$

Devido à forma da série que determina ψ_w , considere $\phi_c(x) = a + b \left[\operatorname{dn}^2(d\xi; k) - \frac{E}{K} \right]$ uma solução onda viajante periódica para (4.19) com $k \in (0, 1)$ fixo e período minimal L . Depois de substituir este tipo de solução em (4.19), o seguinte sistema é obtido,

$$\begin{cases} \frac{b^2}{2} - 6cbd^2 = 0 \\ 4bd^2c(1 + k'^2) + ab - b^2\frac{E}{K} - (c-1)b = 0 \\ \frac{a^2}{2} - ab\frac{E}{K} + \frac{b^2}{2}\left(\frac{E}{K}\right)^2 - (c-1)a + (c-1)b\frac{E}{K} - 2cbd^2k'^2 = 0. \end{cases}$$

Como ϕ_c foi escolhida com período L segue que $d = \frac{2K}{L}$. Então, a primeira equação do sistema acima implica $b = \frac{48cK^2}{L^2}$. Substituindo os valores de d e b na segunda equação obtemos

$$aL^2 = 48cKE - 16K^2c(2 - k^2) + cL^2 - L^2.$$

Colocando os valores de aL^2 , d e b na terceira equação do sistema tem-se a seguinte equação quadrática

$$[256K^4(1 - k^2 + k^4) - L^4] c^2 + 2cL^4 - L^4 = 0. \quad (4.22)$$

Pela igualdade (4.22) obtemos

$$L^2 = \frac{16c\sqrt{k^4 - k^2 + 1}K^2(k)}{c - 1}.$$

Sendo $c > 1$, temos que L deve satisfazer a estimativa $L > 2\pi$. Resolvendo a equação (4.22) para c , obtemos duas soluções

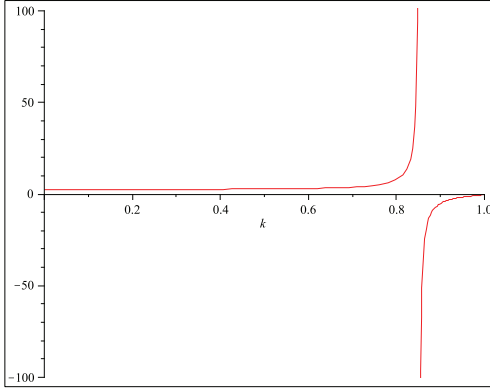
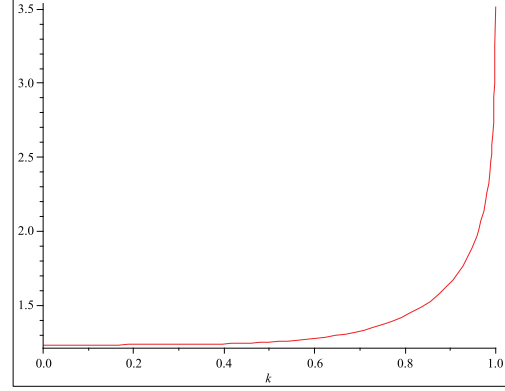
$$c = \frac{L^2}{L^2 + 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}} \quad \text{e} \quad c = \frac{L^2}{L^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}.$$

Novamente, como $c > 1$, escolhemos c sendo

$$c = \frac{L^2}{L^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}. \quad (4.23)$$

Note que o fato $c > 1$ implica que deve existir $k_L \in (0, 1)$ tal que

$$L^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4} > 0 \quad \text{para todo } k \in (0, k_L).$$


 Figura 4.2: Gráfico de $c(k)$ com $L = 8$.

 Figura 4.3: Gráfico de $\tilde{a}(k)$ com $L = 8$.

Usando (4.23) temos que para $L > 2\pi$ fixo, a aplicação $k \mapsto c(k)$ é estritamente crescente em $(0, k_L)$ (veja Figura 4.2), portanto $c \in (c^*, +\infty)$, para todo $k \in (0, k_L)$, onde $c^* = \frac{L^2}{L^2 - 4\pi^2}$.

A seguir escrevemos ϕ_c em termos da função elíptica de Jacobi cnoidal como

$$\phi_c(x) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12c}} x; k \right), \quad (4.24)$$

onde

$$\beta_2 = \frac{16cK^2(2k'^2 - 1)}{L^2} + c - 1, \quad \beta_3 = \frac{16cK^2(1 + k^2)}{L^2} + c - 1$$

e β_1 é tal que $\beta_3 - \beta_1 = \frac{48cK^2}{L^2}$.

Fazendo uma análise similar como no caso da mBBM (através do Teorema da Função Implícita), obtemos uma curva suave de ondas positivas do tipo cnoidal todas com o mesmo período minimal L e com a forma (4.24),

$$c \in (c^*, +\infty) \longmapsto \phi_c \in H_{per}^n([0, L])$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $k := k(c)$ é uma função de c suave e estritamente crescente.

A seguir, vamos escolher a velocidade w da função ψ_w dada em (4.20) de modo que esta se transforme em uma solução onda viajante periódica para (4.18). De fato, defina $w = w(c)$ como

$$w(c) := \frac{16c\sqrt{k^4 - k^2 + 1}K'^2(k)}{16c\sqrt{k^4 - k^2 + 1}K'^2(k) - c + 1},$$

onde $k = k(c) \in (0, k_L)$ e c é dado por (4.23). Usando a definição de w e (4.23) pode-se determinar que $\sqrt{\frac{w}{w-1}} = \frac{K'L}{K}$, onde K' foi definido na seção anterior. Então de (4.20) e (4.21) obtém-se

$$\psi_{w(c)}(\xi) = \frac{12w}{L} \sqrt{\frac{w-1}{w}} + \frac{24K^2w}{L^2} \left[\operatorname{dn}^2 \left(\frac{2K\xi}{L}; k \right) - \frac{E}{K} \right]. \quad (4.25)$$

Como $\frac{K(k)}{K'(k)} \in (0, L)$, para todo $k \in (0, k_L)$, segue que para $c \in (c^*, +\infty)$ obtemos $w(c) \in (1, +\infty)$. Portanto, pela suavidade das funções envolvidas temos que a aplicação

$$c \in (c^*, +\infty) \longmapsto \psi_{w(c)} \in H_{per}^n([0, L])$$

é uma curva suave para todo $n \in \mathbb{N}$.

O resultado de estabilidade para a equação BBM é o seguinte.

Teorema 4.3.1. *Assuma $L > 2\pi$ fixado. Se $c > \frac{L^2}{L^2 - 4\pi^2}$, então a solução onda viajante periódica ϕ_c dada em (4.24) é estável pelo fluxo periódico da equação BBM.*

Demonstração. Note que

$$\phi_c = a(k(c)) - \frac{24c}{L} \sqrt{\frac{w-1}{w}} + \frac{2c}{w} \psi_{w(c)},$$

onde

$$a(k) = \frac{16cK}{L^2} \left[3E - (1 + k'^2)K \right] + c - 1.$$

Portanto, $\phi_c(x) = s(k(c)) + \frac{2c}{w} \psi_{w(c)}(x)$, com

$$s(k(c)) := a(k(c)) - \frac{24c}{L} \sqrt{\frac{w-1}{w}}.$$

Usando o Teorema do Somatório de Poisson temos que os coeficientes de Fourier de ϕ_c são

$$\widehat{\phi}_c(n) = \begin{cases} a(k), & n = 0 \\ \frac{12c\pi}{L^2} n \operatorname{csch} \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi n}{L} \right); & n \neq 0, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

De (4.23) temos que $\frac{c-1}{c} = \frac{16K^2\sqrt{1-k^2+k^4}}{L^2}$, logo

$$s(k) = c \left[\frac{16K^2}{L^2} \left(\sqrt{1-k^2+k^4} - 2 + k^2 + 3\frac{E}{K} \right) - \frac{24}{L^2} \frac{K(k)}{K'(k)} \right] =: c\tilde{s}(k)$$

e

$$a(k) = \frac{16K^2c}{L^2} \left[3\frac{E}{K} - 2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4} \right] =: c\tilde{a}(k).$$

Observe que a função \tilde{s} é positiva em $(0, 1)$ e $a(k)$ é uma aplicação estritamente crescente em $(0, k_L)$ (pois \tilde{a} é estritamente crescente e positiva em $(0, 1)$, veja Figura 4.3). Como $s > 0$ temos que

$$a(k) > \frac{24c}{L} \sqrt{\frac{w-1}{w}} > \frac{12c}{L} \sqrt{\frac{w-1}{w}} = f(0),$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por,

$$f(x) = \frac{12c\pi}{L^2} x \operatorname{csch} \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi x}{L} \right).$$

Usando o Lema 1.0.6, obtemos que $f \in PF(2)$ contínuo, provaremos que $\widehat{\phi}_c \in PF(2)$ discreto. De fato, como $a(k) > f(0)$ podemos redefinir a função f acima por uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e assim obter uma função diferenciável da seguinte forma. Para todo $k \in (0, k_L)$ fixado considere $h(0) = a(k)$, $h(x) = f(x)$ em $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ e sobre o intervalo $(-1, 1)$ podemos “completar” f de maneira diferenciável, de tal modo que $h \in PF(2)$ contínuo. Como $h(m) = \widehat{\phi}_c(m)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\widehat{\phi}_c \in PF(2)$ discreto.

A seguir provaremos que (C_3) dado em (4.5) ocorre. De fato, como $c \mapsto \phi_c$ é suave, temos que $\chi = -\frac{d}{dc}\phi_c$ satisfaz $\mathcal{L}\chi = \phi_c - \phi_c''$. Então pelo Teorema de Parseval, segue que

$$I = (\chi, \phi_c - \phi_c'') = -\frac{L}{2} \frac{d}{dc} \left(\|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi}_c\|_{l^2}^2 \right).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left(\|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi}_c\|_{l^2}^2 \right) &= 2a(k) \frac{da}{dk} \frac{dk}{dc} + C_1 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (1 + |n|^2) n^2 \operatorname{csch}^2 \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi n}{L} \right) \\ &+ C_2 ((w-1)^3 w)^{-1/2} \frac{dw}{dk} \frac{dk}{dc} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (1 + |n|^2) n^3 \operatorname{csch}^2 \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi n}{L} \right) \coth \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi n}{L} \right), \end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(L, c) > 0$ e $C_2 = C_2(L, c) > 0$. Para provar que $I < 0$ somente temos que mostrar que $\frac{dw}{dk} > 0$, pois

$$b_n = (1 + |n|^2) n^3 \operatorname{csch}^2 \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi n}{L} \right) \coth \left(\sqrt{\frac{w}{w-1}} \frac{\pi n}{L} \right)$$

é uma sequência positiva e $k = k(c)$ é uma função estritamente crescente. De fato, como $\sqrt{\frac{w-1}{w}} = \frac{K}{K'L}$ temos que $w = \frac{K'^2 L^2}{K'^2 L^2 - K^2}$, portanto para $k' = \sqrt{1 - k^2}$ temos que

$$\frac{dw}{dk} = \frac{2L^2 K' K \left[k' \frac{dK}{dk} - K \frac{dK'}{dk} \right]}{(L^2 K'^2 - K^2)^2}, \quad \forall k \in (0, k_L).$$

Como $\frac{dK}{dk} > 0$ e $\frac{dK'}{dk} < 0$ obtemos que $\frac{dw}{dk} > 0$ em $(0, k_L)$. Portanto, $I < 0$ e as ondas cnoidal ϕ_c são estáveis em $H_{per}^1([0, L])$ pelo fluxo periódico da equação BBM. \square

4.4 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação 4-BBM

O objetivo desta seção é provar a existência e estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas à equação 4-BBM. Começamos encontrando soluções ondas viajantes periódicas ϕ_c para a equação

$$u_t + u_x + 5u^4 u_x - u_{xxt} = 0. \quad (4.26)$$

Para esta equação não aplicaremos o Teorema do Somatório de Poisson usado nas duas seções anteriores, posto que não conhecemos explicitamente a onde converge a série de Fourier que surge desta técnica. Para esta equação usaremos o método de quadratura. De fato, neste caso ϕ_c satisfaz

$$c\phi_c'' - (c-1)\phi_c + \phi_c^5 = 0. \quad (4.27)$$

Multiplicando (4.27) por ϕ_c' e integrando temos que

$$(\phi_c')^2 = \frac{1}{3c} [-\phi_c^6 + 3(c-1)\phi_c^2 + 6A_{\phi_c}], \quad (4.28)$$

onde A_{ϕ_c} é uma constante não nula. Como estamos interessados em soluções positivas (para aplicar a teoria estabelecida na primeira seção deste capítulo) vamos supor que $\phi_c = \sqrt{\psi_c}$, então (4.28) se converte em

$$(\psi_c')^2 = \frac{4}{3c} [-\psi_c^4 + 3(c-1)\psi_c^2 + 6A\psi_c]. \quad (4.29)$$

Seja η_1, η_2 e η_3 as raízes não nulas do polinômio $F(t) = -t^4 + 3(c-1)t^2 + 6At$. Então, de (4.29) obtemos

$$(\psi_c')^2 = \frac{4}{3c} F(\psi_c) = \frac{4}{3c} \psi_c (\psi_c - \eta_1) (\psi_c - \eta_2) (\eta_3 - \psi_c). \quad (4.30)$$

e

$$\begin{cases} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_3 = -3(c-1) \\ \eta_1\eta_2\eta_3 = 6A_{\phi_c}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Assumindo $\eta_1 < 0 < \eta_2 < \eta_3$, tem-se $\eta_2 \leq \psi_c \leq \eta_3$. Outras possibilidades para η_1, η_2 e η_3 serão discutidas mais tarde (veja Observação 4.4.1 abaixo).

Agora, considere $c > 1$ arbitrariamente fixado. Como (4.27) é invariante por translações (consequentemente (4.29) também) podemos supor que a solução periódica não constante ψ_c tem seus valores máximo e mínimo em $[0, L]$ dados por $\psi_c(0) = \eta_3$ e $\psi_c(\xi_0) = \eta_2$, para algum $\xi_0 \in (0, L)$, respectivamente. Assim, de (4.30) e usando a regra Leibnitz concluímos que

$$\int_{\psi(\xi)}^{\eta_3} \frac{dt}{\sqrt{t(\eta_3-t)(t-\eta_2)(t-\eta_1)}} = \frac{2}{\sqrt{3c}}(\xi + B_c) = g \left(\frac{2}{g\sqrt{3c}}(\xi + B_c) \right),$$

onde B_c é uma constante de integração e g é definido abaixo. Pela suposição $\psi_c(0) = \eta_3$, tem-se $B_c = 0$. Portanto, de [27] obtemos que

$$\psi_c(\xi) = \frac{\eta_3(\eta_2 - \eta_1) + \eta_1(\eta_3 - \eta_2)\text{sn}^2\left(\frac{2}{g\sqrt{3c}}\xi; k\right)}{(\eta_2 - \eta_1) + (\eta_3 - \eta_2)\text{sn}^2\left(\frac{2}{g\sqrt{3c}}\xi; k\right)},$$

onde $g = \frac{2}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}}$ e $k^2 = \frac{-\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}$. A função ψ_c pode ser escrita de forma mais simples como

$$\psi_c(\xi) = \eta_3 \left[\frac{\text{dn}^2\left(\frac{2}{g\sqrt{3c}}\xi; k\right)}{1 - \alpha^2 \text{sn}^2\left(\frac{2}{g\sqrt{3c}}\xi; k\right)} \right], \quad (4.32)$$

com $\alpha^2 = \frac{\eta_3}{\eta_1} k^2 < 0$. Como queremos ψ_c com período minimal $L > 0$, tem-se $\frac{2}{g\sqrt{3c}} = \frac{2K}{L}$.

De (4.31) temos que η_2 e η_3 satisfazem

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2\eta_3 = 3(c-1), \quad (4.33)$$

o que implica $\eta_2 < \sqrt{c-1} < \eta_3 < \sqrt{3(c-1)}$ e

$$L = \frac{2\sqrt{3c}K(k)}{\sqrt[4]{a}}, \quad (4.34)$$

onde $a := 12(c-1)\eta_3^2 - 3\eta_3^4$. Usando (4.31) e (4.33) temos que

$$\eta_2 = \frac{-\eta_3 + \sqrt{12(c-1) - 3\eta_3^2}}{2} \quad \text{e} \quad \eta_1 = \frac{-\eta_3 - \sqrt{12(c-1) - 3\eta_3^2}}{2}. \quad (4.35)$$

Portanto, podemos expressar k como uma função de η_3

$$k^2 = \frac{3\eta_3^2 + \sqrt{a} - 6(c-1)}{2\sqrt{a}}. \quad (4.36)$$

Combinando (4.34) e (4.36) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \eta_3^2 L^2 - 2(c-1)L^2 = 4c(2k^2 - 1)K^2, \\ 4(c-1)\eta_3^2 L^4 - \eta_3^4 L^4 = 48c^2 K^4. \end{cases} \quad (4.37)$$

Substituindo $\eta_3^2 L^2$, obtido na primeira equação de (4.37), na segunda conseguimos

$$(c-1)^2 L^4 - 16c^2(k^4 - k^2 + 1)K^4 = 0. \quad (4.38)$$

Assim, para $k \in (0, 1)$ obtemos das propriedades assintóticas de K que $c > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$. Usando (4.38) também obtém-se

$$L^2 = \frac{4c\sqrt{k^4 - k^2 + 1}K^2(k)}{c-1}.$$

Então, como fora assumido $c > 1$, temos a estimativa $L > \pi$. Note que (4.38) é equivalente a,

$$c = \frac{L^2}{L^2 - r(k)} := g_L(k), \quad (4.39)$$

onde $r(k) := 4\sqrt{k^4 - k^2 + 1}K^2(k)$. Portanto devemos ter que existe $k_L \in (0, 1)$ tal que

$$L^2 - 4\sqrt{k^4 - k^2 + 1}K^2(k) > 0, \quad \text{para todo } k \in (0, k_L). \quad (4.40)$$

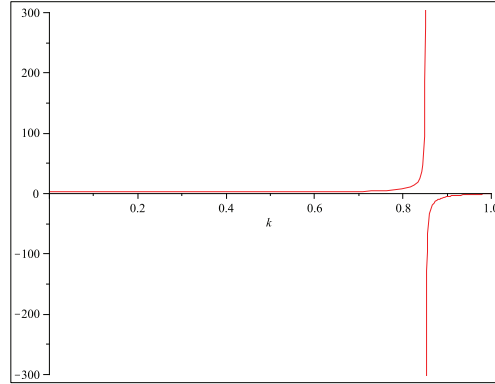
Por exemplo para $L = 4$ e $L = 7$ usando o programa Maple obtemos $k_4 = 0.8515822215$ e $k_7 = 0.9927289494$ (veja Figura 4.4).

Se consideramos ψ_c dado em (4.32) com período fundamental T_{ψ_c} , obtemos de (4.31) que

$$T_{\psi_c}(\eta_3) = \frac{2\sqrt{3c}K(k(\eta_3))}{[12(c-1)\eta_3^2 - 3\eta_3^4]^{1/4}}.$$

Suponhamos que $\eta_3 \in (\sqrt{c-1}, \sqrt{3(c-1)}) \mapsto T_{\psi_c}(\eta_3)$ é estritamente crescente (provaremos este fato mais tarde), então obtemos a seguinte estimativa

$$T_{\psi_c}(\eta_3) > \pi\sqrt{\frac{c}{c-1}}.$$


 Figura 4.4: Gráfico de $c(k)$ com $L = 4$

Observação 4.4.1. (i) Note que se $\eta_3 \rightarrow \sqrt{c-1}^+$, então $k \rightarrow 0^+$ e $\psi_c \rightarrow \sqrt{c-1}$. Portanto obtemos a solução constante $\phi_c(\xi) = \sqrt[4]{c-1}$. Por outro lado, se $\eta_3 \rightarrow \sqrt{3(c-1)}^-$, então $k \rightarrow 1^-$ e $\psi_c(\xi) \rightarrow \sqrt{3(c-1)} \operatorname{sech}\left(2\sqrt{\frac{c-1}{c}}\xi\right)$ a qual é o quadrado da solução onda solitária para a equação 4-BBM.

(ii) Se supomos $\psi_c(0) = \eta_2$ e $\psi_c(\xi_0) = \eta_3$ para algum $\xi_0 \in (0, L)$, obtemos usando a fórmula 256.00 em [27] que

$$\phi_c(\xi) = \frac{\sqrt{\eta_2\eta_3}}{\sqrt{\eta_3 - (\eta_3 - \eta_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{2\xi}{g\sqrt{2c}}; k\right)}}. \quad (4.41)$$

Esta solução positiva converge a zero quando $k \rightarrow 1^-$. Vale a pena observar que Angulo e Natali em [11] encontraram ondas viajantes periódicas para a Crítica KdV, similares à função dada em (4.41). Num trabalho futuro a estabilidade para a família de soluções dada em (4.41) será estudada.

(iii) Outras possíveis escolhas para η_1 , η_2 e η_3 sempre produzem uma solução que é negativa ou zero em algum ponto. Até agora não temos uma teoria satisfatória para soluções que possam ser negativas.

Agora, provamos a existência de uma curva suave de soluções periódicas com período minimal fixado $L > \pi$ para a equação (4.26). Como a raiz quadrada é uma função suave em $(0, +\infty)$ e os períodos fundamentais de ϕ_c e ψ_c são os mesmos, estudaremos a curva

$$c \in \left(\frac{L^2}{L^2 - \pi^2}, +\infty\right) \mapsto \psi_c \in H_{per}^1([0, L]).$$

Seja $L > \pi$ fixo e $k_L \in (0, 1)$ tal que (4.40) é satisfeito. Considere $c_0 > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$ e escolha o único $k_0 \in (0, k_L)$ tal que $g_L(k_0) = c_0$, onde g_L foi definido em (4.39). Então existe $\eta_{3,0} = \eta_3(c_0)$ tal que $\eta_{3,0} \in (\sqrt{c_0 - 1}, \sqrt{3(c_0 - 1)})$ e o período fundamental de ψ_{c_0} é dado por $T_{\psi_{c_0}}(\eta_{3,0}) = L$. Portanto de (4.35) e (4.36) obtemos uma solução explícita de (4.30) na forma (4.32) e dependendo unicamente de $\eta = \eta_3$. O seguinte teorema mostra que a escolha $c \mapsto \eta(c)$ é suave.

Teorema 4.4.2. *seja $L > \pi$ fixo e $k_L \in (0, 1)$ satisfazendo (4.40). Considere $c_0 > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$ e $\eta_{3,0}$ tal que $T_{\psi_{c_0}}(\eta_{3,0}) = L$. Então,*

(i) *existem intervalos abertos $I(c_0)$ contendo c_0 , $J(\eta_{3,0})$ contendo $\eta_{3,0}$ e uma única função suave $\Lambda : I(c_0) \rightarrow J(\eta_{3,0})$ tal que $\Lambda(c_0) = \eta_{3,0}$ e*

$$\frac{2\sqrt{3c}K}{[12(c-1)\eta_3^2 - 3\eta_3^4]^{1/4}} = L, \quad (4.42)$$

onde $c \in I(c_0)$, $\eta_3 = \Lambda(c)$ e $k = k(c) \in (0, k_L)$ é dado por (4.36).

(ii) *A função $\phi_c = \sqrt{\psi_c}$, onde ψ é dado por (4.32), determinada por η_3 tem período fundamental L e satisfaz (4.27). Além disso*

$$c \in I(c_0) \mapsto \psi_c \in H_{per}^n([0, L])$$

é suave, para todo $n \in \mathbb{N}$

(iii) *$I(c_0)$ pode ser escolhido como $\mathcal{J} = \left(\frac{L^2}{L^2 - \pi^2}, +\infty\right)$.*

Demonstração. A prova segue as mesmas ideias do Teorema 4.2.2 e por isso será apresentado apenas um esquema da prova. Defina

$$\Omega = \left\{ (\eta, c) \in \mathbb{R}^2 : c > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2} \text{ e } \eta \in \left(\sqrt{c-1}, \sqrt{3(c-1)}\right) \right\}$$

e $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(\eta, c) = \frac{2\sqrt{3c}K(k(\eta, c))}{[12(c-1)\eta^2 - 3\eta^4]^{1/4}},$$

onde $k^2(\eta, c)$ é dado por (4.36). Denote $a := 12(c-1)\eta^2 - 3\eta^4$, então

$$\Gamma_\eta(\eta, c) = \frac{2\sqrt{3c}}{\sqrt[4]{a^5}} \left[\frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\eta} a - 3\eta [2(c-1) - \eta^2] K \right]. \quad (4.43)$$

Usando (4.36) obtemos que $\frac{dk}{d\eta} > 0$. Consideraremos dois casos:

Caso 1: $\eta \in \left[\sqrt{2(c-1)}, \sqrt{3(c-1)}\right)$. Neste caso $2(c-1) - \eta^2 \leq 0$, portanto $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} > 0$.

Caso 2: $\eta \in (\sqrt{c-1}, \sqrt{2(c-1)})$. Então temos que $a[2(c-1) - \eta^2]^2 < 9(c-1)^4$. Portanto usando (4.43) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{a^5}\Gamma_\eta}{6\eta\sqrt{3c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{6(c-1)^2}{k} \frac{dK}{dk} - \sqrt{a} [2(c-1) - \eta^2] K \right\} \\ &> \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{6(c-1)^2}{k} \frac{dK}{dk} - 3(c-1)^2 K \right\} = \frac{3(c-1)^2}{k^2 k'^2 \sqrt{a}} \left\{ 2E - (2+k^2)k'^2 K \right\}. \end{aligned}$$

Como $2E - (2+k^2)k'^2 K > 0$, temos que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} > 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função suave Λ definida numa vizinhança $I(c_0)$ de c_0 tal que $\Gamma(\Lambda(c), c) = L$ para todo $c \in I(c_0)$. Como escolhemos c_0 arbitrariamente no intervalo \mathcal{J} , pela unicidade de Λ , estendemos $I(c_0)$ ao intervalo \mathcal{J} .

Agora, observe que (4.42) é equivalente a

$$\frac{1}{c} = \frac{L^2 - r(k(c))}{L^2}.$$

Portanto obtemos que $k(c) \in (0, k_L)$, para todo $c \in \mathcal{J}$. O resto da prova segue pela suavidade das funções envolvidas. \square

Os seguintes corolários são uteis para obter nosso resultado de estabilidade para a equação 4-BBM.

Corolário 4.4.3. *Considere $\Lambda : I(c_0) \longrightarrow J(\eta_{3,0})$ determinada pelo teorema anterior. Então Λ é estritamente crescente.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.4.2, temos que $\Gamma(\Lambda(c), c) = L$ para todo $c \in I(c_0)$. Então usando o Teorema da Função Implícita obtemos,

$$\frac{d\Lambda(c)}{dc} = -\frac{\Gamma_c}{\Gamma_\eta}. \quad (4.44)$$

Já provamos que $\Gamma_\eta > 0$, portanto só resta mostrar que $\Gamma_c < 0$. De fato,

$$\Gamma_c(\eta, c) = a^{-5/4} \sqrt{3c} \left[\frac{a}{c} K + 2a \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dc} - 6\eta^2 K \right].$$

Como $\frac{dk}{dc} = -\frac{9(c-1)\eta^2}{k\sqrt{a^3}}$, tem-se

$$\Gamma_c(\eta, c) = \eta^2 a^{-7/4} \sqrt{3c} \left[\sqrt{a} \left(\frac{a}{c\eta^2} - 6 \right) K - \frac{18(c-1)}{k} \frac{dK}{dk} \right]. \quad (4.45)$$

Consideraremos dois casos. Se $\eta^2 \geq 2(c-1) - 2$, então $\frac{a}{c} - 6\eta^2 < 0$, portanto $\Gamma_c < 0$. Se $\eta^2 < 2(c-1) - 2$, usando $\eta^2 > c-1$, devemos ter que $c > 3$. Como

$$\eta \in \left(\sqrt{c-1}, \sqrt{2(c-1)-2} \right),$$

temos que $\sqrt{a} \left(\frac{a}{c\eta^2} - 6 \right) < 9(c-1) \left(\frac{c-3}{c} \right)$. Assim

$$\Gamma_c < 9\eta^2(c-1)\sqrt{3c} a^{-7/4} k^{-2} k'^{-2} \left[k'^2(2+k^2)K - 2E \right].$$

Como $k'^2(2+k^2)K - 2E < 0$, então $\Gamma_c < 0$, o que termina a prova do corolário. \square

Corolário 4.4.4. *Considere $L > \pi$, $c > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$, $\eta_3(c) = \Lambda(c)$ e função módulo*

$$k = \left(\frac{3\eta_3^2 - 6(c-1) + \sqrt{12(c-1)\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12(c-1)\eta_3^2 - 3\eta_3^4}} \right)^{1/2}.$$

Então $\frac{dk}{dc} > 0$.

Demonstração. No Corolário 4.4.3 provamos que $c \in \left(\frac{L^2}{L^2 - \pi^2}, +\infty \right) \mapsto \eta_3(c)$ é diferenciável, então usando (4.36) obtemos

$$\frac{dk}{dc} = \frac{9(c-1) [2(c-1)\eta_3' - \eta_3] \eta_3}{ka^{3/2}},$$

onde $a := 12(c-1)\eta_3^2 - 3\eta_3^4$. De (4.43), (4.44) e (4.45) temos que

$$2(c-1)\eta_3' = \frac{\eta \left[\frac{18(c-1)^2}{k} \frac{dK}{dk} - \sqrt{a}(c-1) \left(\frac{a}{c\eta_3^2} - 6 \right) K \right]}{\frac{18(c-1)^2}{k} \frac{dK}{dk} - 3\sqrt{a} [2(c-1) - \eta_3^2] K}.$$

Portanto

$$2(c-1)\eta_3' - \eta_3 = \frac{\eta_3^{-1} a^{\frac{3}{2}} K \left[1 - \frac{c-1}{c} \right]}{\frac{18(c-1)^2}{k} \frac{dK}{dk} - 3\sqrt{a} [2(c-1) - \eta_3^2] K}. \quad (4.46)$$

Como $c > 1$ e o denominador em (4.46) é positivo (foi provado no Teorema 4.4.2), obtemos que $2(c-1)\eta_3' - \eta_3 > 0$. Isto prova o resultado desejado. \square

Expansão em série de Fourier para ψ_c : Usando uma análise muito similar à [11] para a equação Crítica KdV, obtemos a seguinte expansão em série da solução onda viajante periódica dada em (4.32)

$$\psi_c(\xi) = C(\eta_3, \alpha, k) \left[\Lambda_0(w, k) + 2L \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch} \left(\frac{n\pi K'}{K} \right) \sinh \left(\frac{\pi F(w, k')n}{K} \right) \cos \left(\frac{2\pi n\xi}{L} \right) \right],$$

onde Λ_0 é a função Lambda de Heuman, veja [27]. A função $\Lambda_0(\varphi, k)$ é definida em termos das integrais elípticas de primeiro e segundo tipo pela fórmula,

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{\pi}{2}[K(k)E(\varphi, k') - K(k)F(\varphi, k') + E(k)F(\varphi, k')],$$

onde $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $k \in (0, 1)$. Veja o Apêndice A onde a definição das integrais elípticas do primeiro e segundo tipo são dadas.

Escrevemos η_1, η_2 , e η_3 em termos do módulo $k \in (0, k_L)$, este fato será necessário para estabelecer nosso resultado de estabilidade para a equação 4-BBM. Substituindo c dado em (4.39) na primeira equação em (4.37) obtemos

$$\eta_3 = \frac{2\sqrt{c}K}{L}\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1}.$$

Então, pela identidade anterior e (4.35) temos que

$$\eta_1 = -\frac{\sqrt{c}K}{L} \left[\sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - (2k^2 - 1)} + \sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1} \right]$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{c}K}{L} \left[\sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - (2k^2 - 1)} - \sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1} \right].$$

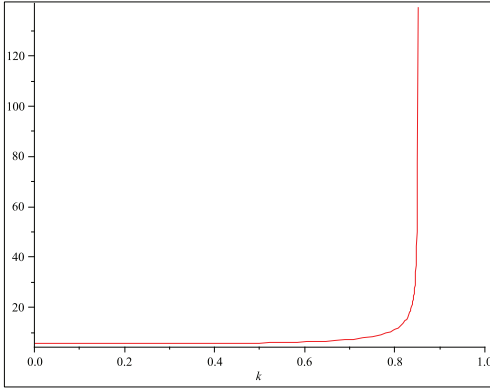


Figura 4.5: Gráfico de $P_L(k)$ com $L = 4$.

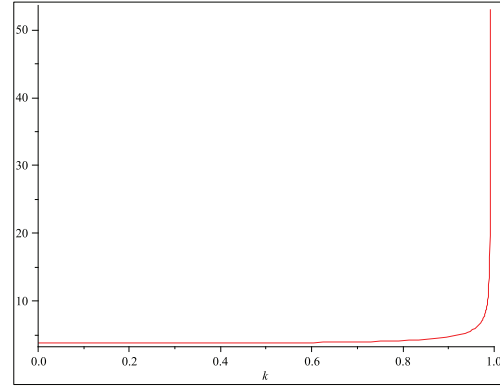


Figura 4.6: Gráfico de $P_L(k)$ com $L = 7$.

A seguir apresentamos nosso teorema de estabilidade para a equação 4-BBM. Vale a pena notar que o seguinte resultado difere do obtido por Angulo e Natali em [11] para soluções ondas viajantes periódicas φ_c da equação Crítica KdV e com forma similar a ϕ_c dada em

(20). De fato, esses autores provaram a existência de uma velocidade crítica c_L tal que as soluções periódicas φ_c (de período L) são orbitalmente estável se $c \in (\frac{\pi^2}{L^2}, c_L)$ e orbitalmente instável se $c > c_L$. Em nosso caso não temos tal velocidade crítica.

Teorema 4.4.5. *Seja $L > \pi$. Considere $c > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$, então a solução onda viajante periódica $\phi_c = \sqrt{\psi_c}$, onde ψ_c está dada em (4.32) é estável em $H_{per}^1([0, L])$ pelo fluxo periódico da equação 4-BBM.*

Demonstração. Primeiro provaremos que $I = (\chi, \phi_c) < 0$ para $c > \frac{L^2}{L^2 - \pi^2}$, onde χ é tal que $\mathcal{L}_4\chi = \phi_c - \phi_c''$. Como a aplicação

$$c \in \left(\frac{L^2}{L^2 - \pi^2}, +\infty \right) \mapsto \phi_c \in H_{per}^n([0, L])$$

é suave escolhemos $\chi = -\frac{d}{dc}\phi_c$. então

$$I = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \|\phi_c\|_{H_{per}^1}^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 + (\phi_c')^2 d\xi \right).$$

Como $0 < -\alpha^2 < +\infty$, a fórmula 410.04 em [27] implica para $w = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k^2}}$ que

$$\int_0^K \frac{\operatorname{dn}^2(x; k)}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2(x; k)} dx = \frac{\pi(k^2 - \alpha^2) \Lambda_0(w; k)}{2\sqrt{\alpha^2(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - k^2)}}.$$

Consequentemente, usando (4.32) obtemos que

$$\int_0^L \psi_c(\xi) d\xi = \frac{2\sqrt{c} \sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1} \sqrt{1 + f(k)} G(w, k)}{\sqrt{f(k)[1 + k^2 f(k)]}},$$

onde $G(w, k) := \frac{\pi}{2} \Lambda_0(w, k)$ e

$$f(k) = -\frac{\eta_3}{\eta_1} = \frac{2\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1}}{\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1} + \sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - (2k^2 - 1)}}.$$

Observe que $w = \sin^{-1} \sqrt{\frac{f(k)}{1+f(k)}}$. Se definimos a função m (a qual não depende do período L) como

$$m(k) := \frac{2\sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1} \sqrt{1 + f(k)} G(w, k)}{\sqrt{f(k)[1 + k^2 f(k)]}},$$

temos que

$$\int_0^L \phi_c^2(\xi) d\xi = \int_0^L \psi_c(\xi) d\xi = \sqrt{c} m(k). \tag{4.47}$$

Por outro lado, multiplicando (4.27) por ϕ_c e integrando de 0 a L obtemos

$$-c \int_0^L (\phi'_c)^2 d\xi - (c-1) \int_0^L \phi_c^2 d\xi + \int_0^L \phi_c^6 d\xi = 0. \quad (4.48)$$

Além disso, integrando (4.28) de 0 a L tem-se

$$3c \int_0^L (\phi'_c)^2 d\xi + \int_0^L \phi_c^6 d\xi - 3(c-1) \int_0^L \phi_c^2 d\xi = 6A_{\phi_c} L. \quad (4.49)$$

Combinando (4.48) e (4.49) temos que

$$\int_0^L (\phi'_c)^2 d\xi = \frac{c-1}{2c} \int_0^L \phi_c^2 d\xi + \frac{6A_{\phi_c} L}{4c}.$$

Pela última identidade, (4.47), (4.31) e a expressão dada por η_1, η_2 e η_3 , temos

$$\int_0^L [\phi_c^2 + (\phi'_c)^2] d\xi = \sqrt{c} \left\{ m(k) + \frac{c-1}{2c} [n(k) + m(k)] \right\},$$

onde

$$n(k) := \frac{(2k^2 - 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}) \sqrt{2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1} K(k)}{\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}.$$

Assim, de (4.39) obtemos a seguinte expressão

$$\int_0^L [\phi_c^2 + (\phi'_c)^2] d\xi = \frac{L}{\sqrt{L^2 - r(k)}} \left\{ m(k) + \frac{r(k)}{2L^2} [n(k) + m(k)] \right\} := P_L(k).$$

Então,

$$\frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 + (\phi'_c)^2 d\xi \right) = \frac{dP_L(k)}{dk} \frac{dk}{dc}.$$

Pelo Corolário 4.4.4 e o fato de que para qualquer $L > \pi$ a função P_L é estritamente crescente em $(0, k_L)$ (veja Figuras 4.5 e 4.6), tem-se $\frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 + (\phi'_c)^2 d\xi \right) > 0$ em $\left(\frac{L^2}{L^2 - \pi^2}, +\infty \right)$.

Finalmente, usando uma análise similar como em [11] provamos que $\widehat{\phi}^4 \in PF(2)$ e $\widehat{\phi}(n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o que termina a prova do teorema. \square

4.5 Estabilidade de Soluções Constantes para a Equação gBBM

Nesta seção provamos a estabilidade não linear de soluções constantes para para a equação gBBM, a saber

$$u_t + u_x + (p+1)u^p u_x - u_{xxt} = 0, \quad (4.50)$$

com $p \geq 1$ um inteiro. A prova segue as ideias estabelecidas por Angulo, Bona e Scialom em [10]. Para $c > 1$, as soluções ondas viajantes periódicas para (4.50) satisfazem

$$c\phi_c'' - (c - 1)\phi_c + \phi_c^{p+1} = 0$$

com soluções constantes dadas por $\phi_0(x) = (c - 1)^{1/p}$.

A prova de nosso resultado de estabilidade é baseada nas seguintes quantidades conservadas:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int u^2 + u_x^2 dx \quad \text{e} \quad \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 - \frac{2}{p+2} u^{p+2} dx. \quad (4.51)$$

Observe que $\mathcal{L}_0 := \mathcal{E}''(\phi_0) + (c - 1)\mathcal{F}''(\phi_0) = -c\partial_x^2 - p(c - 1)$.

Começamos estudando as propriedades espectrais do operador \mathcal{L}_0 .

Proposição 4.5.1. *Seja $L > 0$, $c > 1$ e considere o operador $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \rightarrow L_{per}^2$, definido acima com domínio $D(\mathcal{L}_0) = H_{per}^2([0, L])$. Então,*

(i) *Se $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ e $c < \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$, o operador \mathcal{L}_0 tem seu primeiro autovalor negativo e o resto dos autovalores são duplos e positivos.*

(ii) *Se $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ e $c = \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$, o operador \mathcal{L} tem seu primeiro autovalor negativo, zero é um autovalor duplo e o resto dos autovalores são duplos e positivos.*

(iii) *Se $L \leq \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$, obtemos o mesmo resultado dado em (i) para todo $c > 1$.*

Demonstração. Estamos interessados em estudar o problema de autovalores

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 f = \lambda f \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L). \end{cases}$$

Este último problema é equivalente a

$$\begin{cases} -f'' = \sigma f \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L), \end{cases}$$

onde $\sigma = \frac{\lambda + p(c-1)}{c}$. É bem conhecido que $\sigma_0 = 0$ e

$$\sigma_{2m+1} = \sigma_{2m+2} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{L^2},$$

para $m \geq 0$, com autofunções dadas por $f_0 = 1$,

$$f_m^-(x) = \text{sen} \left(\frac{2(m+1)\pi x}{L} \right) \quad \text{e} \quad f_m^+(x) = \text{cos} \left(\frac{2(m+1)\pi x}{L} \right).$$

Portanto $\lambda_0 = -p(c-1) < 0$ e

$$\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m+2} = \frac{4c(m+1)^2\pi^2}{L^2} - p(c-1).$$

Agora

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4c\pi^2}{L^2} - p(c-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{c-1}{c} = \frac{4\pi^2}{pL^2},$$

o que implica (ii). É fácil ver que

$$\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m+2} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{c-1}{c} < \frac{4\pi^2}{pL^2},$$

portanto obtemos (i). Finalmente, observe que se $pL^2 \leq 4\pi^2$, então $\frac{4\pi^2}{pL^2} \geq 1 > \frac{c-1}{c}$ para todo $c > 1$. Assim $\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m+2} > 0$, para todo $m \geq 0$, o que prova (iii). \square

A seguir apresentamos nosso teorema de estabilidade para as soluções constantes.

Teorema 4.5.2. *Seja $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$. Então para todo c satisfazendo $1 < c < \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$, a solução constante $\phi_0(x) = (c-1)^{1/p}$ é orbitalmente estável pelo fluxo periódico da equação gBBM.*

Demonstração. Considere os funcionais $\mathcal{E}, \mathcal{F} : H_{per}^1([0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ dados em (4.51). \mathcal{E} e \mathcal{F} estão bem definidos em H_{per}^1 e são contínuos. Considere $v := u - \phi_0 \in H_{per}^1$ e seja u_0 o dado inicial associado ao problema periódico

$$\begin{cases} u_t + u_x + (p+1)u^p u_x - u_{xxt} = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Defina $\mathcal{B} := \mathcal{E} + (c-1)\mathcal{F}$. Então, pela imersão $H_{per}^1 \hookrightarrow L_{per}^q$, para todo $q \geq 2$ e um argumento muito similar ao estabelecido na prova da estabilidade para a equação rBO, temos que

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{B}(t) &= \mathcal{B}(u_0) - \mathcal{B}(\phi_0) = \mathcal{B}(v(t) + \phi_0) - \mathcal{B}(\phi_0) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_0 v, v) - \frac{1}{p+2} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+2}{k} \int_0^L v^{p+2-k} \phi_0^k dx \\ &\geq \frac{1}{2}(\mathcal{L}_0 v, v) - C(c, p) \sum_{k=0}^{p-1} \|v\|_{H_{per}^1}^{p+2-k}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Assuma $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\phi_0)$, então $\mathcal{F}(u(t)) = \mathcal{F}(\phi_0)$, para todo $t \geq 0$. Como $v = u - \phi_0$ obtemos que

$$-2(v, \phi_0) = \|v\|_{H_{per}^1}^2. \quad (4.53)$$

Defina $v^\perp := v - \bar{v}$, onde $\bar{v} = \frac{1}{L} \int_0^L v dx$. Note que $\int_0^L v^\perp dx = 0$. Assim, segue da desigualdade de Poincaré-Wintinger que

$$\int_0^L (v_x^\perp)^2 dx \geq \frac{4\pi^2}{L^2} \int_0^L (v^\perp)^2 dx.$$

Usando a última desigualdade, obtemos

$$(\mathcal{L}_0 v^\perp, v^\perp) = \int_0^L c(v_x^\perp)^2 - p(c-1)(v^\perp)^2 dx \geq \left(\frac{c4\pi^2}{L^2} - p(c-1) \right) \int_0^L (v^\perp)^2 dx.$$

Como $0 < \frac{c-1}{c} < \frac{4\pi^2}{L^2 p}$, tem-se $\tilde{\beta}_1 = \frac{4\pi^2 c}{L^2} - p(c-1) > 0$, então

$$(\mathcal{L}_0 v^\perp, v^\perp) \geq \tilde{\beta}_1 \|v^\perp\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.54)$$

Por outro lado, usando (4.53) obtemos

$$\bar{v} = \frac{1}{L} \int_0^L v dx = \frac{1}{L\phi_0} (v, \phi_0) = -\frac{1}{2L\phi_0} \|v\|_{H_{per}^1}^2.$$

Assim,

$$\|v\|_{L_{per}^2}^2 = \|v^\perp\|_{L_{per}^2}^2 + \|\bar{v}\|_{L_{per}^2}^2 = \|v^\perp\|_{L_{per}^2}^2 + C(p, L, c) \|v\|_{H_{per}^1}^4.$$

Portanto de (4.54) temos que

$$(\mathcal{L}_0 v^\perp, v^\perp) \geq \tilde{\beta}_1 \|v\|_{L_{per}^2}^2 - \tilde{\beta}_2 \|v\|_{H_{per}^1}^4. \quad (4.55)$$

Observe que

$$(\mathcal{L}_0 \bar{v}, \bar{v}) = -p(c-1) \|\bar{v}\|_{L_{per}^2}^2 = -\tilde{\beta}_3 \|v\|_{H_{per}^1}^4. \quad (4.56)$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$(\mathcal{L}_0 \bar{v}, v^\perp) \geq -C(p, L, c) \|\bar{v}\|_{L_{per}^2} \|v^\perp\|_{L_{per}^2} \geq -\tilde{\beta}_4 \|v\|_{H_{per}^1}^3 - \tilde{\beta}_5 \|v\|_{H_{per}^1}^4. \quad (4.57)$$

Portanto, de (4.55), (4.56), (4.57) e da forma específica de \mathcal{L}_0 concluímos que

$$(\mathcal{L}_0 v, v) \geq \beta_0 \|v\|_{H_{per}^1}^2 - \beta_1 \|v\|_{H_{per}^1}^3 - \beta_2 \|v\|_{H_{per}^1}^4. \quad (4.58)$$

Assim, por (4.52) e (4.58) obtemos

$$\Delta\mathcal{B}(t) \geq g\left(\|v\|_{H_{per}^1}\right), \quad \forall t \geq 0,$$

onde $g(s) = s^2 - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k s^{p+2-k}$ e $\alpha_k = \alpha_k(c, p, L) > 0$. Como

$$d_1(u(t), \phi_0) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \|u(t) - \phi_0(\cdot + y)\|_{H_{per}^1} = \|v\|_{H_{per}^1}, \quad \forall t \geq 0$$

tem-se $\Delta\mathcal{B}(t) \geq g(d_1(u(t), \phi_0))$, para todo $t \geq 0$. Isto termina a prova do teorema. \square

Observação 4.5.3. *Em particular, se $L \leq \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ o Teorema 4.5.2 vale para todo $c > 1$.*

CAPÍTULO 5

ESTABILIDADE PARA O SISTEMA DE ZAKHAROV

Neste capítulo, estamos preocupados em provar a existência e estabilidade não linear de soluções ondas viajantes periódicas para o sistema de Zakharov,

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = uv \\ v_{tt} - v_{xx} = (|u|^2)_{xx}, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$, $v = v(x, t) \in \mathbb{R}$, e $x, t \in \mathbb{R}$. A técnica que usaremos para obter nosso resultado de estabilidade vai ser a mesma, o método de Lyapunov, e usaremos a Teoria de Floquet para obter as propriedades espectrais requeridas de certos operadores que aparecerão durante nossa análise.

Com respeito ao problema de boa colocação, no caso periódico, para o sistema (5.1), este foi estudado previamente por Bourgain em [23], onde um resultado de boa colocação global foi obtido para dados iniciais $(u(0), v(0), v_t(0)) \in H_{per}^1 \times L_{per}^2 \times H_{per}^{-1}$. Vale a pena notar que no caso periódico, outro resultado *um pouco mais geral* foi obtido por Takaoka em [68], mas para nosso objetivo o resultado de Bourgain é suficiente. No caso contínuo o problema de Cauchy associado ao sistema (5.1) em uma ou várias dimensões tem sido estudado extensivamente, veja por exemplo [1, 25, 30, 36, 49, 59, 60, 64, 66].

Neste caso, estamos interessados em soluções do sistema (5.1) da forma

$$u(x, t) = e^{-i\omega t} e^{i\frac{c}{2}(x-ct)} \phi_{\omega,c}(x-ct), \quad v(x, t) = \psi_{\omega,c}(x-ct), \quad (5.2)$$

onde $\omega, c \in \mathbb{R}$ e $\phi_{\omega,c}, \psi_{\omega,c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves periódicas com um mesmo período fundamental $L > 0$. Como queremos que u seja periódica (com período L), para $c \neq 0$ suporemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L = \frac{4\pi m}{c}$. Note que para $c = 0$ claramente u é L -periódica. Substituindo (5.2) em (5.1) segue que $\phi = \phi_{\omega,c}$ e $\psi = \psi_{\omega,c}$ devem satisfazer o seguinte sistema não linear de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{cases} (c^2 - 1)\psi'' = (\phi^2)'' \\ \phi'' + \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right)\phi = \phi\psi. \end{cases} \quad (5.3)$$

Começaremos achando soluções do tipo ondas *dnoidal* para o sistema acima.

5.1 Existência de Soluções do Tipo Ondas Dnoidal

Como já mencionamos na introdução do capítulo, nesta seção estamos interessados em mostrar a existência de uma curva suave de soluções do tipo ondas dnoidal com o mesmo período fundamental para o sistema de Zakharov. Com efeito, integrando a primeira equação em (5.3) obtemos

$$(c^2 - 1)\psi' = (\phi^2)' + a_0. \quad (5.4)$$

Usando o fato que ϕ^2 e ψ são periódicas têm-se $a_0 = 0$. Portanto

$$(c^2 - 1)\psi' = (\phi^2)' \quad (5.5)$$

Integrando (5.5) e considerando a constante de integração como sendo nula, temos que para todo $c \neq 1$

$$\psi = \frac{-\phi^2}{1 - c^2}. \quad (5.6)$$

Substituindo (5.6) na segunda equação de (5.3) tem-se

$$\phi'' + \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right)\phi + \frac{\phi^3}{1 - c^2} = 0. \quad (5.7)$$

Agora, multiplicando (5.7) por ϕ' e integrando uma vez, obtemos

$$\frac{(\phi')^2}{2} + \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^4}{4(1-c^2)} = A_\phi.$$

Logo,

$$(\phi')^2 = \frac{1}{2(1-c^2)} F(\phi),$$

onde A_ϕ é uma constante de integração e F é o polinômio dado por

$$F(t) = -t^4 + 2(1-c^2) \left(-\omega - \frac{c^2}{4}\right) t^2 + 4(1-c^2)A_\phi.$$

Suponha que F tem raízes $\pm\eta_1$ e $\pm\eta_2$, (note que F é par) e sem perda de generalidade que $0 < \eta_2 < \eta_1$. Assim podemos escrever

$$(\phi')^2 = \frac{1}{2(1-c^2)} (\phi^2 - \eta_2^2)(\eta_1^2 - \phi^2). \quad (5.8)$$

Suponha também que $1 - c^2 > 0$, portanto como o lado esquerdo de (5.8) é não negativo temos que $\eta_2^2 \leq \phi^2 \leq \eta_1^2$. Como queremos estudar soluções positivas, da desigualdade anterior obtemos $\eta_2 \leq \phi \leq \eta_1$. Note que por (5.8) os η_j 's satisfazem

$$\begin{cases} 2(1-c^2) \left(-\omega - \frac{c^2}{4}\right) = \eta_1^2 + \eta_2^2 \\ 4(1-c^2)A_\phi = -\eta_1^2\eta_2^2. \end{cases}$$

Da equação anterior podemos concluir que $-4\omega - c^2 > 0$.

Agora defina $\varrho(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{\eta_1}$, $k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}$ e suponha que $\varrho(0) = 1$. Então podemos reescrever a equação (5.8) como

$$(\varrho')^2 = \frac{\eta_1^2}{2(1-c^2)} (1 - \varrho^2)(\varrho^2 + k^2 - 1). \quad (5.9)$$

Finalmente, defina χ pela relação $\varrho^2 = 1 - k^2 \text{sen}^2 \chi$, com $\chi(0) = 0$, então (5.9) pode ser reduzido a

$$[\chi']^2 = \frac{\eta_1^2}{2(1-c^2)} (1 - k^2 \text{sen}^2 \chi). \quad (5.10)$$

Desta forma por (5.10) temos após integração,

$$\int_0^{\chi(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t}} = \frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}} \xi. \quad (5.11)$$

Pela igualdade (5.11), segue pela definição das funções elípticas de Jacobi, que

$$\operatorname{sen}(\chi(\xi)) = \operatorname{sn} \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}} \xi; k \right).$$

Portanto obtemos

$$\varrho(\xi) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\chi(\xi))} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}} \xi; k \right)} = \operatorname{dn} \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}} \xi; k \right),$$

onde usamos o fato que $k^2 \operatorname{sn}^2 + \operatorname{dn}^2 = 1$. Voltando à variável ϕ tem-se

$$\phi_{\omega,c}(\xi) = \eta_1 \operatorname{dn} \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}} \xi; k \right) \quad (5.12)$$

e usando (5.6) temos que

$$\psi_{\omega,c}(\xi) = -\frac{\eta_1^2}{1-c^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2(1-c^2)}} \xi; k \right). \quad (5.13)$$

Agora, como dn tem período fundamental $2K$, onde $K = K(k)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo, segue que ϕ e ψ tem período fundamental dado por

$$T_\psi = T_\phi = \frac{2\sqrt{2(1-c^2)}}{\eta_1} K(k).$$

Fixe ω e c tais que $1 - c^2 > 0$ e $4\omega + c^2 < 0$. Além disso defina

$$\nu = -\left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) \quad \text{e} \quad \alpha = 1 - c^2,$$

então $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 2\nu\alpha$, assim $0 < \eta_2 < \sqrt{\nu\alpha} < \eta_1 < \sqrt{2\nu\alpha}$. Adicionalmente, podemos ver T_ψ e T_ϕ como funções unicamente do parâmetro η_2 ,

$$T_\psi(\eta_2) = T_\phi(\eta_2) = \frac{2\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\nu\alpha - \eta_2^2}} K(k(\eta_2)),$$

com

$$k^2(\eta_2) = \frac{2\nu\alpha - 2\eta_2^2}{2\nu\alpha - \eta_2^2}.$$

Note que se $\eta_2 \rightarrow 0$, temos que $k(\eta_2) \rightarrow 1^-$, donde $K(k(\eta_2)) \rightarrow +\infty$ e consequentemente $T_\psi, T_\phi \rightarrow +\infty$. Por outro lado, quando $\eta_2 \rightarrow \sqrt{\nu\alpha}$ obtemos que $k(\eta_2) \rightarrow 0^+$ e portanto

$K(k(\eta_2)) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e segue que $T_\psi, T_\phi \rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}$. Como a função $\eta_2 \in (0, \sqrt{\nu\alpha}) \mapsto T_\psi(\eta_2) = T_\phi(\eta_2)$ é estritamente decrescente (o qual provaremos depois) obtemos que

$$T_\phi = T_\psi > \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}.$$

Agora, para $L > 0$ e $1 - c^2 > 0$ fixados, escolha $\nu > 0$ tal que $\sqrt{\nu} > \frac{\pi\sqrt{2}}{L}$. Então segue da análise acima que existe um único $\eta_2 = \eta_2(\nu) \in (0, \sqrt{\nu\alpha})$ tal que as ondas dnoidal $\phi = \phi(\cdot; \eta_1(\nu), \eta_2(\nu))$ e $\psi = \psi(\cdot; \eta_1(\nu), \eta_2(\nu))$ tem período fundamental $L = T_\psi(\eta_2) = T_\phi(\eta_2)$.

Observação 5.1.1. A fórmula (5.12) e (5.13) contém, formalmente, as soluções ondas solitárias do sistema (5.1) encontradas em [75]. De fato, se $\eta_2 \rightarrow 0^+$ obtemos que $\eta_1 \rightarrow \sqrt{2\nu\alpha}$, $k(\eta_2) \rightarrow 1^-$ e $dn(x, 1^-) = \operatorname{sech}(x)$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \phi_{c,\omega}(x) &= \frac{\sqrt{(-4\omega - c^2)(1 - c^2)}}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{-4\omega - c^2}}{2} x\right) \quad e \\ \psi_{c,\omega}(x) &= \left(2\omega + \frac{c^2}{2}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-4\omega - c^2}}{2} x\right). \end{aligned}$$

Teorema 5.1.2. Seja $L > 0$ e $1 - c^2 > 0$ arbitrariamente fixados. Considere $\nu_0 > \frac{2\pi^2}{L^2}$ e o único $\eta_{2,0} = \eta_{2,0}(\nu_0) \in (0, \sqrt{\nu_0\alpha})$ tal que $T\psi_{\nu_0} = L = T\phi_{\nu_0}$. Então,

(i) existem intervalos $I(\nu_0)$ e $B(\eta_{2,0})$ entorno de ν_0 e $\eta_{2,0}$ respectivamente, e uma única função suave $\Lambda : I(\nu_0) \rightarrow B(\eta_{2,0})$ tal que $\Lambda(\nu_0) = \eta_{2,0}$ e

$$\frac{2\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\nu\alpha - \eta_2^2}} K(k) = L,$$

para todo $\nu \in I(\nu_0)$, $\eta_2 = \Lambda(\nu)$ e

$$k^2 = k^2(\nu) = \frac{2\nu\alpha - 2\eta_2^2}{2\nu\alpha - \eta_2^2}. \quad (5.14)$$

Além disso, podemos escolher $I(\nu_0) = (\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$.

(ii) As ondas dnoidal $\psi(\cdot; \eta_1, \eta_2)$ e $\phi(\cdot; \eta_1, \eta_2)$ dadas por (5.12) e (5.13), e determinadas por $\eta_1 = \eta_1(\nu)$, $\eta_2 = \eta_2(\nu) = \Lambda(\nu)$, com $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 2\nu\alpha$, tem período L e satisfazem (5.7) e (5.6). Além disso, a aplicação

$$\nu \in I(\nu_0) \mapsto (\psi(\cdot; \eta_1(\nu), \eta_2(\nu)), \phi(\cdot; \eta_1(\nu), \eta_2(\nu))) \in H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^n([0, L])$$

é de classe C^∞ , para todo inteiro $n \geq 1$.

(iii) A aplicação $\Lambda : I(\nu_0) \rightarrow B(\eta_{2,0})$ é estritamente decrescente. Portanto, de (5.14), $\nu \mapsto k(\nu)$ é uma função estritamente crescente.

Demonstração. A demonstração deste fato segue as mesmas ideias do Teorema 4.2.2 e para este fim usaremos o Teorema da Função Implícita. Para isso, considere o conjunto aberto

$$\Omega = \left\{ (\eta, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \nu > \frac{2\pi^2}{L^2} \text{ e } \eta \in (0, \sqrt{\nu\alpha}) \right\}$$

e $\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(\eta, \nu) = \frac{2\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\nu\alpha - \eta^2}} K(k(\eta, \nu)) - L,$$

onde

$$k^2(\eta, \nu) = \frac{2\nu\alpha - 2\eta^2}{2\nu\alpha - \eta^2}. \quad (5.15)$$

Por hipótese, temos que $\Gamma(\eta_{2,0}, \nu_0) = 0$. Provaremos que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0$ em Ω . De fato, usaremos a seguinte relação

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{kk'^2}, \quad \text{com } k \in (0, 1), \quad (5.16)$$

onde $E = E(k)$ é a integral elíptica completa do segundo tipo e $k'^2 = 1 - k^2$ é o módulo complementar, veja Apêndice A. Derivando (5.15) com respeito a η , temos

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = -\frac{2\eta\nu\alpha}{k(2\nu\alpha - \eta^2)^2}. \quad (5.17)$$

Então, por (5.16) e (5.17) obtemos

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \frac{2\eta\sqrt{2\alpha}}{(2\nu\alpha - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} K(k) - \frac{4\eta\nu\alpha\sqrt{2\alpha}}{(2\nu\alpha - \eta^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 k'^2} \right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0 &\Leftrightarrow k^2 k'^2 (2\nu\alpha - \eta^2) K(k) < 2\nu\alpha E(k) - 2\nu\alpha k'^2 K(k) \\ &\Leftrightarrow k'^2 (2\nu\alpha - 2\eta^2) K(k) + 2\nu\alpha k'^2 K(k) < 2\nu\alpha E(k) \\ &\Leftrightarrow \frac{2\nu\alpha k'^2}{(1 + k'^2)} K(k) < \nu\alpha E(k) \Leftrightarrow (1 + k'^2) E(k) - 2k'^2 K(k) > 0. \end{aligned}$$

Já provamos no Teorema 4.2.2 que esta última desigualdade é sempre válida, portanto $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0$. Pelo teorema da Função Implícita temos que existe um intervalo $I(\nu_0)$ a redor de (ν_0) , um intervalo $B(\eta_{2,0})$ ao redor de $\eta_{2,0}$ e uma única aplicação suave $\Lambda : I(\nu_0) \longrightarrow B(\eta_{2,0})$ tal que $\Lambda(\nu_0) = \eta_{2,0}$ e

$$\Gamma(\Lambda(\nu), \nu) = 0, \quad \forall \nu \in I(\nu_0).$$

Além disso, desde que ν_0 foi escolhido arbitrariamente em $I = \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ e pela unicidade de Λ , podemos estender Λ a I . A parte (ii) é imediata pela suavidade das funções em questão.

Provaremos agora que Λ é uma função estritamente decrescente. Temos que $\Gamma(\Lambda(\nu), \nu) = L$ para todo $\nu \in I(\nu_0)$, usando novamente o Teorema da Função Implícita temos

$$\Lambda'(\nu) = -\frac{\partial\Gamma/\partial\nu}{\partial\Gamma/\partial\eta}.$$

Como $\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta} < 0$, somente temos que provar que $\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} < 0$ em $I(\nu_0)$. De fato, como

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} = \frac{2\alpha\sqrt{2\alpha}}{(2\nu\alpha - \eta^2)^{3/2}} \left[-K + \frac{dK}{dk} \frac{\eta^2}{k(2\nu\alpha - \eta^2)} \right]$$

e sendo $\eta^2 = (2\nu\alpha - \eta^2)k'^2$, obtemos

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} < 0 \Leftrightarrow \frac{\eta^2}{\sqrt{2\nu\alpha - \eta^2}\sqrt{2\nu\alpha - 2\eta^2}} \frac{dK}{dk} < K \Leftrightarrow k'^2 \frac{dK}{dk} - kK < 0.$$

Novamente de (5.16), tem-se

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} < 0 \Leftrightarrow \frac{E - k'^2 K}{k} - kK < 0 \Leftrightarrow E < K.$$

Como esta última desigualdade é sempre válida (veja Byrd e Friedman [27]), temos o resultado desejado.

Finalmente, derivando k em relação a ν , obtemos

$$\frac{dk}{d\nu} = \frac{\alpha\eta(\eta - 2\eta'\nu)}{k(2\nu\alpha - \eta^2)^2} > 0,$$

donde segue que k é estritamente crescente, o que termina o prova do teorema. \square

O seguinte resultado será usado na prova da estabilidade das ondas dnoidal

Corolário 5.1.3. *Sejam $L > 0$ e c tal que $1 - c^2 > 0$, arbitrariamente fixados. Considere a curva suave de ondas dnoidal $\nu \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto \phi_\nu(\cdot; \eta_1(\nu), \eta_2(\nu))$ determinada pelo Teorema 5.1.2. Então*

$$\frac{d}{d\nu} \int_0^L \phi_\nu^2(\xi) d\xi > 0.$$

Demonstração. Usando os fatos que $\eta_1 L = 2\sqrt{2(1-c^2)}K$ e $\int_0^L dn^2(y)dy = E(k)$ (Veja [27]) segue que

$$\int_0^L \phi_\nu^2(\xi)d\xi = 2\eta_1\sqrt{2(1-c^2)} \int_0^K dn^2(y;k)dy = \frac{8(1-c^2)}{L}KE.$$

Como $k \mapsto K(k)E(k)$ e $\nu \mapsto k(\nu)$ são funções estritamente crescentes obtemos

$$\frac{d}{d\nu} \int_0^L \phi_\nu^2(\xi)d\xi = \frac{8(1-c^2)}{L} \frac{d}{dk} [K(k)E(k)] \frac{dk}{d\nu} > 0$$

o que termina a prova do corolário. \square

5.2 Existência de Soluções do Tipo Ondas Cnoidal

Seguiremos buscando soluções para o sistema (5.1) que sejam do tipo (5.2). Temos que

$$(\phi')^2 = \frac{1}{2(1-c^2)}F(\phi), \quad (5.18)$$

onde F é um polinômio dado por

$$F(t) = -t^4 + 2(1-c^2)\left(-\omega - \frac{c^2}{4}\right)t^2 + 4(1-c^2)A_\phi,$$

com A_ϕ uma constante de integração e $1-c^2 > 0$. Lembremos que para obter soluções do tipo ondas dnoidal assumimos que F possuía raízes $\pm\eta_1$ e $\pm\eta_2$. Suporemos agora que F possui raízes $\pm a$ e $\pm bi$, com $a > 0$. De (5.18) obtém-se

$$(\phi')^2 = \frac{1}{2(1-c^2)}(\phi^2 + b^2)(a^2 - \phi^2). \quad (5.19)$$

Como $1-c^2 > 0$ temos que $-a \leq \phi \leq a$ e

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -2(1-c^2)\left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) \\ a^2b^2 = 4(1-c^2)A_\phi. \end{cases} \quad (5.20)$$

Agora, defina $\varrho(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{a}$ e suponha que $\varrho(0) = 1$, então usando (5.19) obtemos

$$[\varrho']^2 = \frac{1}{2(1-c^2)}(a^2\varrho^2 + b^2)(1 - \varrho^2).$$

Definindo χ pela relação $\varrho^2 = 1 - \text{sen}^2\chi$, com $\chi(0) = 0$, e $k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, temos que

$$(\chi')^2 = \frac{1}{2(1-c^2)}(a^2 + b^2)(1 - k^2\text{sen}^2\chi).$$

Tomando raiz e integrando obtemos

$$\int_0^{\chi(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(1 - c^2)}} \xi.$$

Pela definição das funções elípticas Jacobianas tem-se

$$\text{sen}\chi(\xi) = \text{sn} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(1 - c^2)}} \xi; k \right).$$

Voltando a φ temos $\varrho(\xi) = \text{cn} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(1 - c^2)}} \xi; k \right)$, onde usamos que $\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = 1$. Finalmente, obtém-se

$$\phi_{\omega,c}(\xi) = a \text{cn} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(1 - c^2)}} \xi; k \right) \quad \text{e} \quad \psi_{\omega,c}(\xi) = -\frac{a^2}{1 - c^2} \text{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2(1 - c^2)}} \xi; k \right).$$

Como as funções cn e cn^2 tem períodos fundamentais $4K$ e $2K$ respectivamente, temos que ϕ e ψ , tem períodos fundamentais,

$$T_\phi = 4K(k) \sqrt{\frac{2(1 - c^2)}{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad T_\psi = 2K(k) \sqrt{\frac{2(1 - c^2)}{a^2 + b^2}}.$$

Como queremos obter uma curva suave de ondas tipo cnoidal, com o mesmo período $L > 0$ fixo, analisaremos o comportamento de T_ϕ e T_ψ .

De novo defina $\alpha := 1 - c^2$ e $\nu := -\left(\omega + \frac{c^2}{4}\right)$. Por (5.20) podemos ter ν positivo ou negativo.

Caso 1: $\nu \geq 0$ fixo. Neste caso, de (5.20) tem-se $a^2 > 2\nu\alpha$ e $a^2 \geq b^2$, logo $k^2 \in [\frac{1}{2}, 1)$. Podemos ver T_ϕ e T_ψ como funções de a ,

$$2T_\psi(a) = T_\phi(a) = 4\sqrt{\frac{\alpha}{a^2 - \nu\alpha}} K(k(a)),$$

onde $k^2(a) = \frac{a^2}{2a^2 - 2\nu\alpha}$. Portanto se $a \rightarrow +\infty$, então $k^2(a) \rightarrow \frac{1}{2}$, logo $K(k(a)) \rightarrow K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, assim $2T_\psi(a) = T_\phi(a) \rightarrow 0^+$. Quando $a \rightarrow \sqrt{2\nu\alpha}^+$, temos que $k^2(a) \rightarrow 1^-$, assim $K(k(a)) \rightarrow +\infty$ e portanto $2T_\psi(a) = T_\phi(a) \rightarrow +\infty$. Como a aplicação $a \in (\sqrt{2\nu\alpha}, +\infty) \mapsto T_\phi(a)$ é estritamente decrescente (o que provaremos mais tarde), temos que dados $L > 0$ e $1 - c^2 > 0$ fixos, para qualquer $\nu \geq 0$, existe um único $a = a(\nu)$ tal que $T_\phi(a) = L$ e $T_\psi(a) = L/2$.

Caso 2: $\nu < 0$ fixo. Neste caso, de (5.20) tem-se $a^2 < b^2$, logo $k^2(b) \in (0, \frac{1}{2})$. Podemos ver T_ϕ e T_ψ como funções somente de b ,

$$2T_\psi(b) = T_\phi(b) = 4\sqrt{\frac{\alpha}{b^2 + \nu\alpha}} K(k(b)),$$

com $k^2(b) = \frac{b^2 + 2\nu\alpha}{2b^2 + 2\nu\alpha}$. Se $b \rightarrow +\infty$, temos que $k^2(b) \rightarrow \frac{1}{2}^-$, assim $2T_\psi(b) = T_\phi(b) \rightarrow 0^+$. Além disso, se $b \rightarrow \sqrt{-2\nu\alpha}^+$, temos que $k^2(b) \rightarrow 0^+$ e portanto $2T_\psi(b) = T_\phi(b) \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{-\nu}}$. Como a aplicação $b \in (\sqrt{-2\nu\alpha}, +\infty) \mapsto T_\phi(b)$ é estritamente decrescente, dados $1 - c^2 > 0$ e $0 < L < \frac{2\pi}{\sqrt{-\nu}}$ fixos, para qualquer $\nu < 0$, existe um único $b = b(\nu)$ tal que as ondas cnoidal ψ e ϕ tem período fundamental $T_\phi(b) = L$ e $T_\psi(b) = L/2$.

Teorema 5.2.1. *Sejam $L > 0$ e $1 - c^2 > 0$ fixos. Então,*

(i) *Se $\nu \geq 0$, existe um único $a = a(\nu)$ com $a \in (\sqrt{2\nu\alpha}, +\infty)$, tal que $L = 4\sqrt{\frac{\alpha}{a^2 - \nu\alpha}} K(k)$. O módulo $k = k(\nu)$ é dado por $k^2 = \frac{a^2}{2a^2 - 2\nu\alpha}$.*

(ii) *As ondas cnoidal*

$$\phi_\nu(\xi) = a \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu\alpha}{\alpha}} \xi; k \right) \quad e \quad \psi_\nu(\xi) = -\frac{a^2}{\alpha} \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu\alpha}{\alpha}} \xi; k \right)$$

tem período fundamental L e $L/2$, respectivamente e satisfazem (5.3). Além disso, a aplicação.

$$\nu \in (0, +\infty) \mapsto (\psi_\nu, \phi_\nu) \in H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^n([0, L])$$

é suave, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Usaremos novamente o Teorema da Função Implícita. Para isso defina

$$\Omega = \{(\nu, a) \in \mathbb{R}^2 : \nu > 0 \text{ e } a > \sqrt{2\nu\alpha}\}$$

e $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Gamma(\nu, a) = \frac{4K(k(\nu, a))\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a^2 - \nu\alpha}},$$

onde $k^2(\nu, a) = \frac{a^2}{2a^2 - 2\nu\alpha}$. Pela análise feita acima, para cada $\nu_0 > 0$ existe um único $a_0 = a_0(\nu_0)$ tal que $\Gamma(\nu_0, a_0) = L$. Além disso,

$$\frac{\partial k}{\partial a} = -\frac{2a\nu\alpha}{k(2a^2 - 2\nu\alpha)^2} < 0. \quad (5.21)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a}(\nu, a) = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a^2 - \nu\alpha}} \left[\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial a} - \frac{aK}{a^2 - \nu\alpha} \right].$$

Como K é uma função estritamente crescente (veja Apêndice A) e usando (5.21) temos que $\frac{\partial \Gamma}{\partial a} < 0$. Portanto pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função suave $a = a(\nu)$, numa vizinhança de ν_0 , tal que

$$\Gamma(\nu, a(\nu)) = L.$$

Pela unicidade de a e a arbitrariedade de ν_0 , podemos definir a em $I = (0, +\infty)$. A parte (ii) segue da suavidade das funções envolvidas. \square

Teorema 5.2.2. *Sejam $L > 0$ e $1 - c^2 > 0$ fixos. Então,*

(i) *se $\nu \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2}, 0\right)$, existe um único $b = b(\nu)$ com $b \in (\sqrt{-2\nu\alpha}, +\infty)$ tal que $L = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\sqrt{b^2 + \nu\alpha}} K(k)$. O módulo $k = k(\nu)$ é dado por $k^2 = \frac{b^2 + 2\nu\alpha}{2b^2 + 2\nu\alpha}$.*

(ii) *As ondas cnoidal*

$$\phi_\nu(\xi) = \sqrt{2\nu\alpha + b^2} cn \left(\sqrt{\frac{\nu\alpha + b^2}{\alpha}} \xi; k \right) \quad e \quad \psi_\nu(\xi) = -\frac{b^2 + 2\nu\alpha}{\alpha} cn^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha\nu + b^2}{\alpha}} \xi; k \right)$$

tem período fundamental L e $L/2$, respectivamente e satisfazem (5.3). Além disso, a aplicação

$$\nu \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2}, 0\right) \longmapsto (\phi_\nu, \psi_\nu) \in H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^n([0, L])$$

é suave, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Defina

$$\Omega = \left\{ (\nu, b) \in \mathbb{R}^2 : \nu \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2}, 0\right) \text{ e } b \in (\sqrt{-2\nu\alpha}, +\infty) \right\}.$$

Considere $\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\Gamma(\nu, b) = \frac{4\sqrt{\alpha} K(k(\nu, b))}{\sqrt{\nu\alpha + b^2}},$$

onde $k^2(\nu, b) = \frac{b^2 + 2\nu\alpha}{2b^2 + 2\nu\alpha}$. Pela análise feita acima, para cada $\nu_0 > 0$ existe um único $b_0 = b_0(\nu_0)$ tal que $\Gamma(\nu_0, b_0) = L$. Além disso,

$$\frac{\partial k}{\partial b} = -\frac{b\nu\alpha}{2k(b^2 + \nu\alpha)^2} > 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0 &\Leftrightarrow \frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial b} < \frac{bK}{b^2 + \nu\alpha} \Leftrightarrow \frac{dK}{dk} < -\frac{2k(b^2 + \nu\alpha)K}{\nu\alpha} \\ &\Leftrightarrow E - k'^2 K < -\frac{2k^2 k'^2 (b^2 + \nu\alpha)K}{\nu\alpha} \Leftrightarrow E < k'^2 \left(1 - \frac{b^2 + 2\nu\alpha}{\nu\alpha}\right) K \\ &\Leftrightarrow E < -\frac{b^2 + \nu\alpha}{\nu\alpha} k'^2 K \Leftrightarrow E < \left(\frac{b^2}{-2\nu\alpha}\right) K. \end{aligned}$$

Como $E < K$ e $b^2 > -2\nu\alpha$, temos que $E < K < \frac{b^2}{-2\nu\alpha} K$. Portanto $\frac{\partial \Gamma}{\partial b} < 0$. O resto da prova é similar à do teorema anterior. \square

5.3 Análise Espectral

Neste parte da tese, estudaremos algumas propriedades espectrais de certos operadores as quais serão necessárias para obter nosso resultado de estabilidade. Primeiro note que o sistema (5.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} v_t = -V_x, & \int_0^L V(x, t) dx = 0 \\ V_t = -(v + |u|^2)_x \\ iu_t + u_{xx} = uv \end{cases} \quad (5.22)$$

Portanto, temos a estrutura Hamiltoniana $\frac{\partial U}{\partial t} = JE'(U)$ onde $U = (v, V, u)^t$, J é o operador linear anti-simétrico dado por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ -\frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

e E é o funcional de energia definido como

$$E(v, V, u) = \frac{1}{2} \int_0^L 2|u_x|^2 + v^2 + V^2 + 2v|u|^2 dx. \quad (5.23)$$

Considere também Q_1 e Q_2 definidos como

$$Q_1(v, V, u) = \int_0^L uV + \text{Im}(u_x \bar{u}) dx \quad \text{e} \quad Q_2(v, V, u) = \int_0^L |u|^2 dx. \quad (5.24)$$

Uma análise padrão prova que E , Q_1 e Q_2 são quantidades conservadas do sistema (5.22), i.e.,

$$E(v(t), V(t), u(t)) = E(v(0), V(0), u(0)), \quad Q_1(v(t), V(t), u(t)) = Q_1(v(0), V(0), u(0))$$

$$\text{e } Q_2(v(t), V(t), u(t)) = Q_2(v(0), V(0), u(0))$$

para todo $t \in [-T, T]$, onde T o tempo maximal de existência das soluções.

5.3.1 Análise Espectral para Ondas Dnoidal

Nesta seção estudaremos a estrutura espectral dos operadores que surgem na prova da estabilidade das ondas dnoidal. Para isso usaremos a teoria de Floquet.

Primeramente, suponha que $V(x, t) = \varphi_{\omega, c}(x - ct)$, com $\varphi_{\omega, c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e L -periódica, é solução de $v_t = -V_x$, então

$$c\psi'_{\omega, c} = \varphi'_{\omega, c}. \quad (5.25)$$

Portanto temos que $c\psi = \varphi + d_0$, onde d_0 é uma constante de integração. Como queremos que φ seja de média zero, obtemos $d_0 = \frac{c}{L} \int_0^L \psi dx$. Usando o fato que $\int_0^K \text{dn}^2(x, k) dx = E(k)$ temos que $d_0(k) = -\frac{c\eta_1^2}{1-c^2} \frac{E(k)}{K(k)}$. Portanto

$$\varphi(\xi) = -\frac{c\eta_1^2}{1-c^2} \left[\text{dn}^2 \left(\frac{\eta_1 \xi}{\sqrt{2(1-c^2)}}; k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right]. \quad (5.26)$$

Vale a pena notar que se $\eta_2 \rightarrow 0^+$, então $\eta_1 \rightarrow \sqrt{2\alpha\nu}$ e portanto $k \rightarrow 1^-$. Como $\text{dn}(u, 1^-) = \text{sech}(u)$, $E(1) = \frac{\pi}{2}$ e $K(1) = +\infty$ temos que

$$\varphi(\xi) = c \left(2\omega + \frac{c^2}{2} \right) \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{-4\omega - c^2}}{2} \xi \right),$$

a qual é a solução de onda viajante solitária para (5.25).

Agora, usando o Teorema 5.1.2 temos que existem ondas viajantes periódicas para (5.22) dadas por

$$(\psi_{\omega, c}(x - ct), \varphi_{\omega, c}(x - ct), e^{-i\omega t} e^{i\frac{c}{2}(x-ct)} \phi_{\omega, c}(x - ct)),$$

onde

$$\psi_{\omega,c}(\xi) = \frac{-\eta_1^2}{1-c^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{\eta_1 \xi}{\sqrt{2(1-c^2)}}; k \right), \quad \phi_{\omega,c}(\xi) = \eta_1 \operatorname{dn} \left(\frac{\eta_1 \xi}{\sqrt{2(1-c^2)}}; k \right), \quad (5.27)$$

$$\text{e } \varphi_{\omega,c}(\xi) = -\frac{c\eta_1^2}{1-c^2} \left[\operatorname{dn}^2 \left(\frac{\eta_1 \xi}{\sqrt{2(1-c^2)}}; k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right]. \quad (5.28)$$

Os operadores a seguir serão úteis na prova da estabilidade das soluções do tipo ondas dnoidal:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4} \right) + 3\psi \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_4 = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4} \right) + \psi. \quad (5.29)$$

Estudaremos as propriedades espectrais dos operadores \mathcal{L}_i , $i = 3, 4$. Lembre que $\sigma(\mathcal{L}_i) = \sigma_{ess}(\mathcal{L}_i) \cup \sigma_{disc}(\mathcal{L}_i)$ onde $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_i)$ e $\sigma_{disc}(\mathcal{L}_i)$ denotam, respectivamente, o espectro essencial e o espectro pontual de \mathcal{L}_i (veja [63]). Inicialmente como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4} \right) \right) + 3\psi =: \mathcal{L} + M_1, \\ \mathcal{L}_4 &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4} \right) \right) + \psi =: \mathcal{L} + M_2, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4} \right)$ e M_1, M_2 são relativamente compactos com respeito a \mathcal{L} , segue do teorema do Espectro Essencial de Weyl (veja [63]) que $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_i) = \sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$, com $i = 3, 4$. Então $\sigma(\mathcal{L}_i) = \sigma_{disc}(\mathcal{L}_i)$, para $i = 3, 4$. Portanto, temos que analisar o problema de autovalores periódico considerado em $[0, L]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i \chi = \lambda \chi \\ \chi(0) = \chi(L), \quad \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \quad (5.30)$$

O problema (5.30) determina que o espectro de \mathcal{L}_i é um conjunto enumerável de autovalores $\{\lambda_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ com

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

onde os autovalores duplos são contados duas vezes e $\lambda \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Denotaremos por χ_n a autofunção associada ao autovalor λ_n . É claro pelas condições $\chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L)$ que χ_n pode ser estendida a todo $(-\infty, +\infty)$ como uma função continuamente diferenciável com período L . Sabemos pela teoria de Floquet que o problema de

autovalores periódico (5.30) esta relacionado ao estudo do seguinte problema de autovalores semi-periódico considerado em $[0, L]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i \eta = \mu \eta \\ \eta(0) = -\eta(L), \eta'(0) = -\eta'(L), \end{cases}$$

o qual é também um problema auto-adjunto e portanto determina uma sequência de autovalores $\{\mu_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ com

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots,$$

onde os autovalores duplos são contados duas vezes e $\mu \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Denotaremos por η_n a autofunção associada ao autovalor μ_n .

Teorema 5.3.1. *Sejam $\phi_\nu = \phi$ e $\psi_\nu = \psi$ as ondas dnoidal dadas pelo Teorema 5.1.2. Então,*

(i) *o operador \mathcal{L}_3 em (5.29) definido em $L^2_{per}([0, L])$ e com domínio $H^2_{per}([0, L])$ tem seus três primeiros autovalores simples, sendo zero o segundo autovalor cuja autofunção associada é ϕ' . Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores que são duplos.*

(ii) *O operador \mathcal{L}_4 em (5.29) definido em $L^2_{per}([0, L])$ e com domínio $H^2_{per}([0, L])$ tem zero como seu primeiro autovalor o qual é simples cuja autofunção associada é ϕ . Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

Demonstração. (i) A prova é baseada na teoria de Floquet (Veja [32], [51]). Derivando (5.7) e usando (5.6) temos que $\mathcal{L}_3 \phi' = 0$. Assim zero é um autovalor de \mathcal{L}_3 com autofunção ϕ' . Como ϕ' tem exatamente dois zeros em $[0, L)$, temos que zero é o segundo, ou terceiro autovalor de \mathcal{L}_3 . Provaremos que de fato zero é o segundo. Para isso devemos estudar o problema periódico

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3 \chi = \lambda \chi \\ \chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \quad (5.31)$$

Seja $\Lambda(x) = \chi(\eta x)$ onde $\eta = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\eta_1}$. Então pela forma explícita de ψ e a relação $k^2 \text{sn}^2 + \text{dn}^2 = 1$, temos que o problema (5.31) é equivalente a

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - 6k^2 \text{sn}^2(x; k)] \Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K), \Lambda'(0) = \Lambda'(2K), \end{cases} \quad (5.32)$$

onde

$$\rho = \frac{2\alpha}{\eta_1^2} \left(\frac{\lambda}{2} + \omega + \frac{c^2}{4} + \frac{3\eta_1^2}{\alpha} \right).$$

A equação de segunda ordem em (5.32) é chamada forma Jacobiana da equação de Lamé. É bem conhecido que tal equação determina a existência de exatos três intervalos de instabilidade (Veja [51] Teorema 7.8). Mostraremos que estes intervalos são os três primeiros. Primeiro, observe que $\rho_1 = 4 + k^2$ e $\Lambda_1(x) = \operatorname{cn}(x; k)\operatorname{sn}(x; k)$ satisfazem o problema (5.32). Além disso, seguindo Ince [42] temos que as funções

$$\Lambda_0(x) = 1 - (1 + k^2 - \sqrt{1 + k^2 + k^4})\operatorname{sn}^2(x; k),$$

$$\Lambda_2(x) = 1 - (1 + k^2 + \sqrt{1 + k^2 + k^4})\operatorname{sn}^2(x; k),$$

as quais têm período $2K$ são autofunções de (5.32), com autovalores dados por

$$\rho_0 = 2 \left(1 + k^2 - \sqrt{1 + k^2 + k^4} \right) \quad \text{e} \quad \rho_2 = 2 \left(1 + k^2 + \sqrt{1 + k^2 + k^4} \right).$$

Como Λ_0 não tem zeros em $[0, 2K]$, segue que ρ_0 é o primeiro autovalor de (5.32). Além disso, como Λ_2 tem dois zeros em $[0, 2K)$ e $\rho_1 < \rho_2$, segue que ρ_1 é o segundo autovalor de (5.32) e ρ_2 é o terceiro. Também temos que ρ_0, ρ_1, ρ_2 são simples. Agora, como os autovalores de (5.31) e (5.32) estão relacionados por

$$\lambda = \frac{\eta_1}{\alpha}(\rho - 6) + 2\nu,$$

podemos ver λ como uma função de ρ , a qual é crescente. Como $k^2 - 2 = \frac{2\alpha\nu}{\eta_1^2}$, temos que $\lambda(\rho_1) = 0 = \lambda_1$ e como $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$, temos finalmente que

$$\lambda_0 < 0 = \lambda_1 < \lambda_2.$$

O que termina a prova da parte (i).

(ii) Usando (5.6) e (5.7) temos que $\mathcal{L}_4\phi = 0$. Assim zero é um autovalor de \mathcal{L}_4 com autofunção associada ϕ . Como ϕ não tem zeros em $[0, L]$ temos que zero é o primeiro autovalor de \mathcal{L}_4 e portanto é simples. \square

5.3.2 Análise Espectral para Ondas Cnoidal

Nesta seção estudaremos as propriedades espectrais de alguns operadores que serão necessárias na análise de estabilidade não linear das ondas cnoidal.

Os seguintes operadores surgirão no estudo da estabilidade para as soluções do tipo ondas cnoidal:

$$\mathcal{L}_{3,i}^c = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) + 3\psi_i \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{4,i}^c = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) + \psi_i, \quad (5.33)$$

onde ψ_i , com $i = 1, 2$, é a onda cnoidal dada pelos Teoremas 5.2.1 e 5.2.2 respectivamente. Queremos ressaltar que o espectro dos operadores dados acima, será estudado no espaço $L^2([0, L])$ e que as funções ψ_i tem período minimal $L/2$.

Começemos encontrando uma solução para o problema $c\psi'_{\omega,c} = \varphi'_{\omega,c}$. Analogamente que para as ondas dnoidal temos que $\varphi = c\psi - d_0$, onde $d_0 = \frac{c}{L} \int_0^L \psi dx$. Usando o fato que $\int_0^K \text{cn}^2(x, k) dx = k^{-2}[E - k'^2 K]$ obtemos que

$$d_0(k) = -\frac{ca^2}{(1-c^2)k^2} \frac{E(k)}{K(k)} + \frac{ca^2}{1-c^2} \frac{k'^2}{k^2}.$$

Como $k^2 \text{cn}^2 = \text{dn}^2 - k'^2$, obtém-se

$$\varphi(\xi) = \frac{-ca^2}{(1-c^2)k^2} \left[\text{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2(1-c^2)}} \xi; k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right].$$

Assim, pelos Teoremas 5.2.1 e 5.2.2 temos que existem ondas viajantes periódicas para (5.22) dadas por

$$(\psi_{\omega,c}(x-ct), \varphi_{\omega,c}(x-ct), e^{-i\omega t} e^{i\frac{c}{2}(x-ct)} \phi_{\omega,c}(x-ct)),$$

onde

$$\phi_{\omega,c}(\xi) = a \text{cn} \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2(1-c^2)}} \xi; k \right), \quad \varphi_{\omega,c}(\xi) = -\frac{a}{1-c^2} \text{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2(1-c^2)}} \xi; k \right),$$

$$\text{e} \quad \psi_{\omega,c}(\xi) = \frac{-ca^2}{(1-c^2)k^2} \left[\text{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2(1-c^2)}} \xi; k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right].$$

Agora apresentamos nosso teorema sobre a análise espectral para as ondas cnoidal.

Teorema 5.3.2. *Sejam ψ_i , com $i = 1, 2$, as ondas cnoidal dadas pelos Teoremas 5.2.1 e 5.2.2 respectivamente. Então,*

(i) *o operador $\mathcal{L}_{3,i}^c$ em (5.33) definido em $L_{per}^2([0, L])$ e com domínio $H_{per}^2([0, L])$ tem exatamente dois autovalores negativos, os quais são simples, o autovalor zero é simples com autofunção ϕ'_i . Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

(ii) *O operador $\mathcal{L}_{4,i}^c$ em (5.33) definido em $L_{per}^2([0, L])$ e com domínio $H_{per}^2([0, L])$ tem exatamente um autovalor negativo, o qual é simples, zero é também um autovalor simples com autofunção associada ϕ_i . Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

Demonstração. (i) Usando (5.3) temos que $\mathcal{L}_{3,i}^c \phi' = 0$, portanto zero é um autovalor de $\mathcal{L}_{3,i}^c$ com autofunção associada ϕ'_i . Como ϕ'_i tem exatamente dois zeros em $[0, L)$, temos que zero é o segundo ou terceiro autovalor de $\mathcal{L}_{3,i}^c$. Provaremos que é o terceiro. De fato, para isso devemos analisar o problema de autovalores

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{3,i}^c \chi = \lambda \chi \\ \chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \quad (5.34)$$

Seja $\Lambda(x) = \chi(\eta x)$ onde $\eta = \sqrt{\frac{2\alpha}{a^2+b^2}}$. Então usando o fato que $\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = 1$ o problema (5.34) é equivalente ao seguinte problema periódico associado à equação de Lamé

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - 6k^2 \text{sn}^2(x; k)] \Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(4K), \Lambda'(0) = \Lambda'(4K), \end{cases} \quad (5.35)$$

onde

$$\rho = \eta^2 \left[-\nu + \frac{3a^2}{\alpha} + \frac{\lambda}{2} \right].$$

Note que sn^2 tem período fundamental $2K$ e $4K = 2(2K)$, então o Corolário 1.3.1 em Eastham [32] (ou veja Apêndice B) diz que as soluções de (5.35) devem possuir período $2K$ ou semi-período $2K$, por tanto ρ deve ser autovalor do problema periódico

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - 6k^2 \text{sn}^2(x; k)] \Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K), \Lambda'(0) = \Lambda'(2K) \end{cases}$$

ou do problema semi-periódico

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - 6k^2 \operatorname{sn}^2(x; k)] \Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = -\Lambda(2K), \quad \Lambda'(0) = -\Lambda'(2K) \end{cases}$$

Agora, temos que $\rho_0 = 1 + k^2$ e $\rho_1 = 1 + 4k^2$ são os dois primeiros autovalores do problema semi-periódico anterior, cujas autofunções são respectivamente $\Lambda_{0, \operatorname{sn}}(x) = \operatorname{cn}(x; k) \operatorname{dn}(x; k)$ e $\Lambda_{1, \operatorname{sn}}(x) = \operatorname{sn}(x; k) \operatorname{dn}(x; k)$. Note que $\lambda = 0$ se, e somente se $\rho = 1 + 4k^2$. Portanto zero é o terceiro autovalor, além disso é simples.

(ii) Por (5.3) temos que $\mathcal{L}_{4,i}^c \phi_i = 0$, assim zero é um autovalor de $\mathcal{L}_{4,i}^c$ com autofunção associada ϕ_i . Como ϕ_i tem exatamente dois zeros em $[0, L)$ temos que zero é o segundo o terceiro autovalor.

Para o operador $\mathcal{L}_{4,1}^c$, temos que $\lambda_{0,1} = -\frac{b^2}{\alpha}$ (onde $a^2 = b^2 + 2\nu$) e $\lambda_{2,1} = \frac{a^2}{\alpha}$ são autovalores com respectivas autofunções dadas por

$$\eta_{0,1} = \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu\alpha}{\alpha}} x; k \right) \quad \text{e} \quad \eta_{2,1} = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu\alpha}{\alpha}} x; k \right),$$

com $k^2 = \frac{a^2}{2a^2 - 2\nu\alpha}$. Como $\lambda_{4,1} > 0$ e η_2 tem exatamente dois zeros em $[0, L)$, temos que zero é o segundo autovalor de $\mathcal{L}_{2,1}^c$, além disso, o autovalor zero é simples.

De forma análoga, para o operador $\mathcal{L}_{4,2}^c$, temos que $\lambda_{0,2} = -\frac{b^2}{\alpha}$ e $\lambda_{2,2} = \frac{a^2}{\alpha}$ são autovalores com autofunções dadas por

$$\eta_{0,2} = \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{b^2 + \nu\alpha}{\alpha}} x; k \right) \quad \text{e} \quad \eta_{2,2} = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{b^2 + \nu\alpha}{\alpha}} x; k \right),$$

com $k^2 = \frac{b^2 + 2\nu\alpha}{2b^2 + 2\nu\alpha}$. De igual forma que anteriormente, obtemos que zero é o segundo autovalor de $\mathcal{L}_{4,2}^c$, o qual é simples. \square

5.4 Estabilidade Não linear

5.4.1 Estabilidade das Soluções Ondas Dnoidal

Nesta seção estudaremos as propriedades de estabilidade não linear da solução onda viajante periódica $\Phi(\xi) = (\psi(\xi), \varphi(\xi), \tilde{\phi}(\xi))$ onde ψ , φ e ϕ são dadas por (5.27), (5.28), $\tilde{\phi}(\xi) = e^{i\frac{\epsilon}{2}\xi}\phi(\xi)$ e $1 - c^2 > 0$. A continuação definimos o tipo de estabilidade na qual estamos interessados: Seja $X := L^2_{per}([0, L]) \times \tilde{L}^2_{per}([0, L]) \times H^1_{per}([0, L])$, onde

$$\tilde{L}^2_{per}([0, L]) = \left\{ f \in L^2_{per}([0, L]) : \int_0^L f(x)dx = 0 \right\}.$$

Inicialmente, observe que o sistema (5.22) possui duas simetrias básicas: translações e rotações. O qual significa que se $(v(x, t), V(x, t), u(x, t))$ é uma solução de (5.22) então os pares de funções $(v(x + y), V(x + y), u(x + y))$ e $(v(x, t), V(x, t), e^{-is}u(x, t))$ também são soluções, para qualquer constantes reais y e s . Desta forma, nossa noção de estabilidade será módulo tais simetrias. Mais exatamente,

Definição 5.4.1. Dizemos que a órbita gerada por $\Phi(\xi)$, a saber

$$\mathcal{O}_\Phi = \left\{ \left(\psi(\cdot + y), \varphi(\cdot + y), e^{i\theta}\tilde{\phi}(\cdot + y) \right) : (\theta, y) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \right\}$$

é estável em X pelo fluxo gerado pelo sistema (5.22), se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(v_0, V_0, u_0) \in X$ satisfazendo

$$\|v_0 - \psi\|_{L^2_{per}} < \delta, \quad \|V_0 - \varphi\|_{L^2_{per}} < \delta, \quad e \quad \|u_0 - \tilde{\phi}\|_{H^1_{per}} < \delta,$$

temos que (v, V, u) solução de (5.22) com $(v(0), V(0), u(0)) = (v_0, V_0, u_0)$, satisfaz

$$(v, V, u) \in C(\mathbb{R}; L^2_{per}([0, L])) \times C(\mathbb{R}; \tilde{L}^2_{per}([0, L])) \times C(\mathbb{R}; H^1_{per}([0, L])),$$

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \|v(\cdot + y, t) - \psi\|_{L^2_{per}} < \epsilon, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}} \|V(\cdot + y, t) - \varphi\|_{L^2_{per}} < \epsilon \quad (5.36)$$

$$e \quad \inf_{\theta \in [0, 2\pi), y \in \mathbb{R}} \|e^{i\theta}u(\cdot + y, t) - \tilde{\phi}\|_{H^1_{per}} < \epsilon. \quad (5.37)$$

Caso contrário, dizemos que Φ é X -instável.

Agora, apresentamos nosso resultado de estabilidade para as ondas dnoidal.

Teorema 5.4.2. *Sejam $L > 0$ e $1 - c^2 > 0$ números fixos. Considere a curva suave de soluções ondas viajantes periódicas para (5.22), $\nu \mapsto (\psi_\nu, \varphi_\nu, \phi_\nu)$, determinada pelo Teorema 5.1.2 e (5.26). Então para $\nu > \frac{2\pi^2}{L^2}$ a órbita gerada por $\Phi_\nu(x, t) = (\psi_\nu(x), \varphi_\nu(x), \tilde{\phi}_\nu(x))$ é estável em X pelo fluxo periódico gerado pelo sistema (5.22), se o dado inicial (v_0, V_0, u_0) satisfaz*

$$\int_0^L v_0(x) dx \leq \int_0^L \psi(x) dx.$$

Demonstração. Considere $(\psi_\nu, \varphi_\nu, \tilde{\phi}_\nu)$ a solução de (5.22) dada pelo Teorema 5.1.2. Para $(v_0, V_0, u_0) \in L^2([0, L]) \times \tilde{L}_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$ e (v, V, u) a solução global para (5.22) correspondente a estes dados iniciais, definimos para $t \geq 0$ e $\nu > \frac{2\pi^2}{L^2}$

$$\Omega_t(y, \theta) = \|e^{i\theta}(T_c u)'(\cdot + y, t) - \phi'_\nu\|_{L_{per}^2}^2 + \nu \|e^{i\theta}(T_c u)(\cdot + y, t) - \phi_\nu\|_{L_{per}^2}^2,$$

onde denotaremos por T_c o operador linear limitado definido como

$$(T_c u)(x, t) = e^{-ic(x-ct)/2} u(x, t).$$

Então, o desvio da solução $u(t)$ da órbita gerada por $\tilde{\phi}$ é medida por

$$\rho_\nu(u(\cdot, t), \phi_\nu)^2 := \inf \{ \Omega_t(y, \theta) : (y, \theta) \in [0, L] \times [0, 2\pi] \}. \quad (5.38)$$

Portanto, de (5.38) temos que o $\inf \Omega_t(y, \theta)$ é atingido em $(\theta, y) = (\theta(t), y(t))$. Considere a perturbação da onda periódica $(\psi, \varphi, \tilde{\phi})$

$$\begin{cases} \xi(x, t) = e^{i\theta}(T_c u)(x + y, t) - \phi_\nu(x) \\ \eta(x, t) = V(x + y, t) - \varphi_\nu(x) \\ \gamma(x, t) = v(x + y, t) - \psi_\nu(x). \end{cases} \quad (5.39)$$

Pela propriedade de mínimo de $(\theta, y) = (\theta(t), y(t))$, obtemos de (5.39) que $p(x, t) = \text{Re}(\xi(x, t))$ e $q(x, t) = \text{Im}(\xi(x, t))$ satisfazem as relações de compatibilidade

$$\begin{cases} \int_0^L q(x, t) \phi_\nu(x) \psi_\nu(x) dx = 0 \\ \int_0^L p(x, t) (\phi_\nu(x) \psi_\nu(x))' dx = 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

Agora, considere o funcional contínuo \mathcal{B} definido em X como

$$\mathcal{B}(v, V, u) := E(v, V, u) - cQ_1(v, V, u) - \omega Q_2(v, V, u),$$

onde E , Q_1 e Q_2 foram definidos em (5.23) e (5.24). Então de (5.39) e (5.40), tem-se

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{B} &:= \mathcal{B}(v(t), V(t), u(t)) - \mathcal{B}(\psi, \varphi, \tilde{\phi}) \\ &= (\mathcal{L}_3 p, p) + (\mathcal{L}_4 q, q) + \frac{1}{2} \int_0^L \gamma^2 + 2\gamma(p^2 + q^2) - 4\psi p^2 + 4\gamma p \phi \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L 2\gamma\psi + \eta^2 + 2\eta\varphi + 2\gamma\phi^2 - 2c\gamma\eta - 2c\gamma\varphi - 2c\psi\eta \, dx\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) + 3\psi \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_4 = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\omega + \frac{c^2}{4}\right) + \psi.$$

Usando os fatos que $c\psi - \varphi = d_0$ e $\int_0^L \eta dx = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{B}(t) &= (\mathcal{L}_3 p, p) + (\mathcal{L}_4 q, q) + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sqrt{1-c^2}\gamma + \frac{2\phi p}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{p^2+q^2}{\sqrt{1-c^2}} \right]^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (c\gamma - \eta)^2 dx - \int_0^L \frac{4\phi p(p^2+q^2)}{1-c^2} + \frac{(p^2+q^2)^2}{1-c^2} dx + \int_0^L (c\gamma - \eta)(c\psi - \varphi) dx \\ &= (\mathcal{L}_3 p, p) + (\mathcal{L}_4 q, q) + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sqrt{1-c^2}\gamma + \frac{2\phi p}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{p^2+q^2}{\sqrt{1-c^2}} \right]^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (c\gamma - \eta)^2 dx - \int_0^L \frac{4\phi p(p^2+q^2)}{1-c^2} + \frac{(p^2+q^2)^2}{1-c^2} dx + cd_0 \int_0^L \gamma dx.\end{aligned}$$

Como $cd_0 \leq 0$, $\int_0^L v_0 dx \leq \int_0^L \psi(x) dx$ e $\int v(t, x) dx = \int v_0(x) dx$, temos que $cd_0 \int_0^L \gamma dx \geq 0$.

Portanto

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{B}(t) &\geq (\mathcal{L}_3 p, p) + (\mathcal{L}_4 q, q) + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sqrt{1-c^2}\gamma + \frac{2\phi p}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{p^2+q^2}{\sqrt{1-c^2}} \right]^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (c\gamma - \eta)^2 dx - C_1 \|\xi\|_{H_{per}^1}^3 - C_2 \|\xi\|_{H_{per}^1}^4,\end{aligned}\tag{5.41}$$

com $C_i > 0$, $i = 1, 2$.

As estimativas para $(\mathcal{L}_3 p, p)$ e $(\mathcal{L}_4 q, q)$ serão obtidas dos seguintes teoremas.

Teorema 5.4.3. *Sejam $1 - c^2 > 0$ e $\nu > \frac{2\pi^2}{L^2}$ números fixos. Considere ϕ_ν a onda dnoidal dada pelo Teorema 5.1.2. Então*

$$(a) \inf\{(\mathcal{L}_3 f, f) : \|f\| = 1 \text{ e } (f, \phi_\nu) = 0\} =: \alpha_0 = 0$$

$$(b) \inf\{(\mathcal{L}_3 f, f) : \|f\| = 1, (f, \phi_\nu) = 0 \text{ e } (f, (\phi_\nu \psi_\nu)') = 0\} =: \alpha > 0.$$

Demonstração. (a) Como $\mathcal{L}_3\left(\frac{d}{dx}\phi_\nu\right) = 0$ e $\left(\frac{d}{dx}\phi_\nu, \phi_\nu\right) = 0$, então $\alpha_0 \leq 0$. Provaremos que $\alpha_0 \geq 0$ usando o Lema E.1 em Weinstein [73]. Mostremos primeiro que o ínfimo é atingido. De fato, como ϕ_ν é limitada temos que α é finito, então existe $\{f_j\} \subset H_{per}^1([0, L])$ com $\|f_j\| = 1$, $(f_j, \phi_\nu) = 0$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} (\mathcal{L}_3 f_j, f_j) = \alpha_0$. Como $\{f_j\}$ é limitada em $H_{per}^1([0, L])$ existe uma subsequência de $\{f_j\}$, que denotamos ainda f_j , tal que $f_j \rightharpoonup g$ fracamente em $H_{per}^1([0, L])$, logo $f_j \rightarrow g$ em $L_{per}^2([0, L])$. Portanto $(g, \phi_\nu) = 0$ e $(\phi_c f_j, f_j) \rightarrow (\phi g, g)$ quando $j \rightarrow +\infty$. Assim $g \neq 0$ e $\|g'\|_{L_{per}^2} \leq \liminf \|f_j'\|_{L_{per}^2}$.

Agora, defina $f = g/\|g\|_{L_{per}^2}$, então $(f, \phi_\nu) = 0$, $\|f\|_{L_{per}^2} = 1$ e

$$\alpha_0 \leq (\mathcal{L}_3 f, f) \leq \frac{\alpha_0}{\|f\|_{L_{per}^2}^2} = \alpha_0.$$

Portanto o ínfimo é atingido. Mostraremos agora que $\alpha_0 \geq 0$. De fato, \mathcal{L}_3 tem as propriedades espectrais requeridas pelo Lema E.1, precisamos achar χ tal que $\mathcal{L}_3 \chi = \phi_\nu$ e $(\chi, \phi_\nu) \leq 0$. Pelo Teorema 5.1.2 temos que $\nu \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto \phi_\nu \in H_{per}^1([0, L])$ é de classe C^1 , então diferenciando (5.7) com respeito a ν obtemos que $\chi = -\frac{d}{d\nu}\phi_\nu$ satisfaz $\mathcal{L}_3 \chi = \phi_\nu$. Usando o Corolário 5.1.3 temos que

$$(\chi, \phi_\nu) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\nu} \int_0^L \phi_\nu^2(\xi) d\xi < 0$$

Portanto $(\chi, \phi_\nu) < 0$, o que prova que $\alpha_0 \geq 0$. Isto termina a prova da parte (a).

(b) Usando a parte (a), temos que $\alpha \geq 0$. Suponha que $\alpha = 0$. Por um argumento similar ao estabelecido na parte (a) temos que existe $f \in H_{per}^1([0, L])$ tal que $\|f\|_{L_{per}^2} = 1$ e $(f, \phi_\nu) = (f, (\phi_\nu \psi)') = 0$. Então pela teoria de Multiplicadores de Lagrange, existe λ , θ e δ tais que

$$\mathcal{L}_3 f = \lambda f + \theta \phi_\nu + \delta (\phi_\nu \psi_\nu)'$$

Como $(\mathcal{L}_3 f, f) = 0$, obtemos $\lambda = 0$. Pelo fato que $\mathcal{L}_3 \phi_\nu' = 0$ tem-se

$$0 = \delta \int_0^L \phi_\nu' (\phi_\nu \psi_\nu)' d\xi = -\frac{3\delta}{1-c^2} \int_0^L (\phi_\nu')^2 \phi_\nu^2 d\xi.$$

A última desigualdade implica $\delta = 0$, assim $\mathcal{L}_3 f = \theta \phi_\nu$. Considerando $\chi = -\frac{d}{d\nu}\phi_\nu$, segue que $\mathcal{L}_3(f - \theta\chi) = 0$, logo

$$0 = (f - \theta\chi, \phi_\nu) = -\theta(\chi, \phi_\nu).$$

Portanto $\theta = 0$. Assim existe $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f = s\phi'_\nu$ o qual é absurdo. Portanto $\alpha > 0$, o que termina a prova do teorema. \square

Teorema 5.4.4. *Sejam $1 - c^2 > 0$ e $\nu > \frac{2\pi^2}{L^2}$ números fixos. Considere ϕ_ν e ψ_ν as ondas dnoidal dadas pelo Teorema 5.1.2. Então,*

$$\inf\{(\mathcal{L}_4 f, f) : \|f\|_{L^2_{per}} = 1 \text{ e } (f, \phi_\nu \psi_\nu) = 0\} =: \beta > 0$$

Demonstração. Pelas propriedades espectrais de \mathcal{L}_4 é claro que \mathcal{L}_4 é um operador não negativo, portanto $\beta \geq 0$. Suponha que $\beta = 0$. Então seguindo as mesmas ideias da prova do Teorema 5.4.3, temos que o mínimo é atingido numa função admissível $g \neq 0$ e existe $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathcal{L}_4 g = \lambda g + \theta \phi_\nu \psi_\nu.$$

Como $(g, \phi_\nu \psi_\nu) = 0$, então $\lambda = 0$. Além disso,

$$0 = (\mathcal{L}_4 \phi, g) = \theta \int_0^L \phi_\nu^2 \psi_\nu \, d\xi.$$

O que implica $\theta = 0$. Como zero é um autovalor simples para \mathcal{L}_4 , existe $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $g = s\phi$, o que é absurdo. Este argumento finaliza a prova do teorema. \square

Nosso objetivo é estimar os termos $(\mathcal{L}_3 p, p)$ e $(\mathcal{L}_4 q, q)$, onde p e q satisfazem (5.40). Usando o Teorema 5.4.4 e a definição de \mathcal{L}_4 , temos que existe $C_0 > 0$ tal que

$$(\mathcal{L}_4 q, q) \geq C_0 \|q\|_{H^1_{per}}^2. \quad (5.42)$$

Agora estimaremos $(\mathcal{L}_3 p, p)$. Suponha sem perda de generalidade que $\|\phi_\nu\|_{L^2_{per}} = 1$. Escreva $p_\perp = p - p_\parallel$, onde $p_\parallel = (p, \phi_\nu)\phi_\nu$, então de (5.40) obtemos $(p_\perp, \phi_\nu) = 0$ e $(p_\perp, (\phi_\nu \psi_\nu)') = 0$. Pelo Teorema 5.4.3 se segue que $(\mathcal{L}_3 p_\perp, p_\perp) \geq \widetilde{C}_0 \|p_\perp\|_{L^2_{per}}^2$.

Consideremos também a normalização $Q_2(u_0) = Q_2(\phi)$, i.e., $\|u_0\|_{L^2_{per}} = \|\phi_\nu\|_{L^2_{per}}$. Então $\|u(t)\|_{L^2_{per}} = 1$, para todo $t \geq 0$, logo $-2(p, \phi_\nu) = \|\xi\|_{L^2_{per}}^2$. Portanto

$$(\mathcal{L}_3 p_\perp, p_\perp) \geq C_0 \|p_\perp\|_{L^2_{per}}^2 \geq C_0 \|p\|_{L^2_{per}}^2 - \widetilde{C}_1 \|\xi\|_{H^1_{per}}^4.$$

Como $(\mathcal{L}_3 \phi_\nu, \phi_\nu) < 0$, se segue que $(\mathcal{L}_3 p_\parallel, p_\parallel) \geq -\widetilde{C}_2 \|\xi\|_{H^1_{per}}^4$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $(\mathcal{L}_3 p_\parallel, p_\perp) \geq -\widetilde{C}_3 \|\xi\|_{H^1_{per}}^4$. Portanto pela forma específica do operador \mathcal{L}_3 concluímos que

$$(\mathcal{L}_3 p, p) \geq D_1 \|p\|_{H^1_{per}}^2 - D_2 \|p\|_{H^1_{per}}^3 - D_3 \|p\|_{H^1_{per}}^4, \quad (5.43)$$

onde $D_j > 0$ para $j = 1, 2, 3$.

Agora, usando (5.41), (5.42) e (5.43) obtemos

$$\Delta \mathcal{B}(t) \geq d_1 \|\xi\|_{1,\nu}^2 - d_2 \|\xi\|_{1,\nu}^3 - d_3 \|\xi\|_{1,\nu}^4$$

onde $d_i > 0$, para $i = 1, 2, 3$ e $\|f\|_{1,\nu}^2 := \|f\|_{L_{per}^2}^2 + \nu \|f\|_{L_{per}^2}^2$. Por um argumento similar ao usado na prova da estabilidade para a equação rBO, temos que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se

$$\|u_0 - \tilde{\phi}\|_{1,\nu} < \delta, \quad \|V_0 - \varphi\|_{L_{per}^2} < \delta \quad \text{e} \quad \|v_0 - \psi\|_{L_{per}^2} < \delta,$$

então

$$\rho_\nu(u(t), \phi_\nu)^2 = \|\xi(t)\|_{1,\nu}^2 < \epsilon, \quad (5.44)$$

para todo $t \geq 0$. Portanto obtemos a desigualdade (5.36).

Agora, usando (5.41) e a análise feita acima para ξ obtém-se

$$\int_0^L \left[\sqrt{1-c^2} \gamma + \frac{2\phi p}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{1-c^2}} \right]^2 dx \leq \epsilon \quad \text{e} \quad \int_0^L (c\gamma - \eta)^2 dx \leq \epsilon.$$

Usando estas duas últimas desigualdades, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (5.44) obtemos (5.36), o que prova que $(\psi, \varphi, \tilde{\phi})$ é estável com respeito a pequenas perturbações que preservam a norma $L_{per}^2([0, L])$ de $\tilde{\phi}$. O caso geral segue da continuidade da aplicação

$$\nu \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty \right) \mapsto (\psi, \varphi, \tilde{\phi}).$$

□

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E ESTUDOS FUTUROS

De acordo com os resultados obtidos nesta tese, podemos concluir o seguinte:

- O estudo da estabilidade para as soluções ondas viajantes periódicas ϕ_c (dadas pelo Teorema 3.1.2) para a equação rBO, com período minimal fixado $L > \pi$ e velocidade $c > \frac{L}{L-\pi}$ está completo. Neste caso, a teoria de Angulo e Natali dada em [12] é eficiente de modo que nossa análise espectral é suficientemente boa para aplicar o método de Lyapunov e obter um resultado de estabilidade por perturbações periódicas de período L .
- A teoria de Angulo e Natali estabelecida em [12] foi estendida a um grupo de equações do tipo regularizada, de modo que é possível obter a estrutura espectral requerida para provar estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas, impondo algumas condições sobre as soluções.
- Nossa teoria estabelecida para equações regularizadas é usada para provar a estabilidade de ondas viajantes periódicas associadas às equações BBM, mBBM e 4-BBM, com período minimal $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ e velocidade $c > \frac{pL^2}{pL^2-4\pi^2}$, onde $p = 1, 2, 4$, respectivamente. Adicionalmente, as soluções constantes da equação gBBM são estáveis para períodos

fixos $L > \frac{4\pi}{\sqrt{p}}$ e velocidades $1 < c < \frac{pL^2}{pL^2 - 4\pi^2}$, e para $0 < L \leq \frac{4\pi}{\sqrt{p}}$, somente precisamos $c > 1$. Neste caso, também a estabilidade foi provada por perturbações periódicas de período L .

- O estudo da estabilidade das soluções ondas viajantes periódicas do tipo dnoidal (dadas pelo Teorema 5.1.2) com período minimal $L > 0$, $c \in (-1, 1)$ fixo e $\nu = -(\omega + \frac{c^2}{4}) > \frac{2\pi^2}{L^2}$ está completa. Neste caso, a Teoria de Floquet nos fornece uma análise espectral satisfatória para aplicar, novamente o método de Lyapunov e obter um resultado de estabilidade por perturbações periódicas de período L .

Para possíveis estudos futuros, podemos ressaltar os seguintes:

- Para obter nosso resultado de estabilidade para a equação rBO, provamos um resultado de boa colocação local para a equação antes mencionada em H_{per}^s como $s > 1/2$. Também provamos um resultado de má colocação em espaços de Sobolev com índice negativo. Portanto, nossa primeira proposta de estudo futuro é pesquisar que acontece para s no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ para o problema de Cauchy associado à equação rBO.
- No caso da equação rBO, ainda para períodos $0 < L \leq \pi$ temos soluções ondas viajantes periódicas, mas estas são negativas. Portanto a teoria de Angulo e Natali [12] não poder ser aplicada. A teoria de Floquet também não poder ser aplicada, pois neste caso temos um operador linear não local. Seria interessante achar uma forma diferente de obter as propriedades espectrais requeridas para obter algum resultado de estabilidade ou instabilidade com estas condições sobre o período.
- Como foi mencionado no Capítulo 4, existe uma outra solução positiva para a equação 4-BBM dada por

$$\phi_c(\xi) = \frac{\sqrt{\eta_2 \eta_3}}{\sqrt{\eta_3 - (\eta_3 - \eta_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{2\xi}{g\sqrt{2c}}; k\right)}}.$$

Nos propomos também num futuro estabelecer uma teoria de estabilidade para esta solução.

- Quando estabelecemos nosso resultado de estabilidade para o sistema de Zakharov, impomos uma limitação sobre a média de um dos dados iniciais para o problema de Cauchy associado ao sistema antes mencionado. Esta limitação depende da média de

uma das soluções ondas viajantes periódicas. Portanto, uma outra proposta é continuar investigando este problema e ver se é possível tirar tal restrição ou mostrar que esta é completamente necessária.

- No caso das soluções ondas viajantes periódicas do tipo cnoidal para o sistema de Zakharov, obtivemos uma análise espectral completa para os operadores lineares envolvidos na prova da estabilidade, mas não conseguimos provar estabilidade neste caso. Nos propomos futuramente obter algum resultado de estabilidade ou instabilidade para este tipo de soluções.
- Ao estudar a estabilidade de ondas periódicas para o sistema de Zakharov, percebemos que o resultado de estabilidade no caso contínuo, estabelecido por Ya Ping em [75], não está totalmente correto. Neste caso, ele considera o sistema equivalente

$$\begin{cases} v_t = V_{xx}, \\ V_t = v + |u|^2 \\ iu_t + u_{xx} = uv \end{cases} \quad (6.1)$$

Portanto, a solução tipo onda viajante solitária $V(x, t) = \varphi_c(x - ct)$ é dada por

$$\varphi_c(\xi) = c\sqrt{-4\omega - c^2} \tanh\left(\frac{\sqrt{-4\omega - c^2}}{2}\xi\right).$$

Observe que esta solução não está em nenhum espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ onde Ya ping prova a estabilidade. É claro que ele pode provar estabilidade em outro espaço, por exemplo num espaço tipo Zhidkov, mas primeiramente um resultado de boa colocação nesse espaço deve ser estabelecido, resultado não conhecido até agora na literatura. Além disso, o resultado de boa colocação que ele faz referência em seu artigo jamais foi publicado. Portanto, nos propomos melhorar o trabalho de Ya Ping num futuro e obter um resultado de estabilidade no caso contínuo usando o método de Lyapunov.

- O sistema de Zakharov pode ser generalizado para o seguinte sistema

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \alpha|u|^p u + \beta|u|^q u = uv \\ v_{tt} - v_{xx} = (|u|^2)_{xx}, \end{cases} \quad (6.2)$$

onde $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$, $v = v(x, t) \in \mathbb{R}$, $x, t \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta, p, q > 0$ são constantes positivas. Note que se $\alpha = \beta = 0$, obtemos o sistema de Zakharov. O sistema (6.2)

já foi estudado por Guo em [39] e Yang em [76], onde um resultado de boa colocação global e de estabilidade, respectivamente, foram obtidos. O resultado de Yang somente foi estabelecido para os valores $p = 2$ e $q = 4$. Nos propomos num futuro melhorar o problema de boa colocação periódico do sistema antes mencionado e obter um resultado de estabilidade para soluções ondas periódicas para (6.2).

- Todos os resultados de estabilidade obtidos nesta tese foram estabelecidos por perturbações periódicas de período igual do que as ondas estudadas, assim uma outra proposta é continuar investigando a estabilidade/instabilidade não linear de todas estas soluções por perturbações periódicas de período nL , $n = 1, 2, 3, \dots$. Um tal estudo talvez possa ser feito usando a teoria recentemente estabelecida por Deconinck e Kapitula em [31], onde foi estudado a estabilidade espectral e orbital de ondas periódicas para o sistema

$$u_t = \mathcal{J}\mathcal{E}'(u), \quad u(0) = u_0$$

num espaço de Hilbert X , com $\mathcal{J} : X \rightarrow X$ um operador anti-simétrico e $\mathcal{E} : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2 . Neste trabalho ([31]), eles permitem que o operador \mathcal{J} seja singular, mas assumem que $\mathcal{J}|_{\ker(\mathcal{J})^\perp}$ tem uma inversa limitada. Com hipóteses mais gerais os autores provam que a estabilidade linear das ondas implica a estabilidade orbital (não linear) assumindo que não existem autovalores imaginários puros com *assinatura de Krein* negativa. Como aplicação desta teoria, eles provam a estabilidade não linear de soluções tipo ondas cnoidal associadas a equação KdV por perturbações periódicas tais que o período delas é um múltiplo inteiro do período da onda cnoidal.

- Também estamos interessados em aplicar as mesmas ideias desenvolvidas nesta tese a outro tipo de equações regularizadas que aparecem na física matemática. Dentro das quais queremos ressaltar a seguinte

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u)_{xt} - u_{xxtt} = 0, \tag{6.3}$$

onde f é uma função C^1 , e está relacionada aos efeitos não lineares que sofrem as ondas que estão sendo modeladas. A equação (6.3) é uma versão geral da equação simétrica regularizada de ondas-longas, isto é $f(u) = \frac{u^2}{2}$, a qual têm várias aplicações em acústica e eletrônica. Um resultado de estabilidade e instabilidade foi obtido para a equação (6.3), no caso contínuo, por Chen em [29]. Estes resultados de estabilidade ou instabilidade, é claro dependem do tipo de não linearidade que se esta considerando. Nenhum

resultado de boa colocação nem de estabilidade/instabilidade no caso periódico é conhecido até agora para esta equação.

CAPÍTULO 7

APÊNDICE

7.1 Apêndice A

Estabeleceremos algumas propriedades básicas das integrais elípticas Jacobianas, para maiores detalhes veja [27]. A *integral elíptica do primeiro tipo* é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F(\varphi, k)$$

onde $y = \operatorname{sen}\varphi$ e $k \in (0, 1)$. A *integral elíptica do segundo tipo* é definida por

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta} d\theta \equiv E(\varphi, k)$$

O número k é chamado de módulo elíptico. O número $k' = \sqrt{1-k^2}$ é chamado de módulo elíptico complementar. O parâmetro φ é chamado o argumento das integrais elípticas. É usualmente entendido que $0 \leq y \leq 1$ ou ainda que $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Para $y = 1$, as integrais acima são ditas ser completas. Neste caso, escrevemos,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\pi/2, k) \equiv K(k) \equiv K$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = E(\pi/2, k) \equiv E(k) \equiv E$$

Claramente temos que $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$, enquanto que $E(1) = 1$ e $K(1) = +\infty$. Para $k \in (0, 1)$, temos $\frac{dK}{dk} > 0$, $\frac{d^2K}{dk^2} > 0$, $\frac{dE}{dk} < 0$, $\frac{d^2E}{dk^2} < 0$ e $E(k) < K(k)$. Além disso, $E(k) + K(k)$ e $E(k)K(k)$ são funções estritamente crescentes de $k \in (0, 1)$. As integrais elípticas completas K e E satisfazem as seguintes *equações diferenciais hipergeométricas*

$$\begin{cases} kk'^2 \frac{d^2K}{dk^2} + (1 - 3k^2) \frac{dK}{dk} - kK = 0 \\ kk'^2 \frac{d^2E}{dk^2} + k'^2 \frac{dE}{dk} + kE = 0 \end{cases}$$

e suas derivadas são dadas pelas relações

$$\begin{cases} \frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2K}{kk'^2} \\ \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k} \end{cases}$$

As funções Jacobianas elípticas serão definidas como segue. Considere a integral elíptica,

$$u(y_1; k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\theta}} = F(\varphi, k)$$

que é uma função estritamente crescente na variável y_1 . Sua inversa é escrita como sendo $y_1 = \text{sen}\varphi \equiv \text{sn}(u, k)$, onde $\varphi = \text{am}(u; k)$. A função $\text{sn}(u; k)$ é chamada senoidal e a função $\text{am}(u; k)$ é chamada a função amplitude de u . Podemos escrever ainda, $y_1 = \text{sn}u$ quando não é necessário enfatizar o módulo k . As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal e dnoidal, são definidas em termos de sn por,

$$\begin{cases} \text{cn}(u; k) = \sqrt{1 - y_1^2} = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u; k)} \\ \text{dn}(u; k) = \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)} \end{cases}$$

Notemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de $\text{sn}(0; k) = 0$, $\text{cn}(0; k) = 1$ e $\text{dn}(0; k) = 1$. As funções $\text{cn}(\cdot; k)$ e $\text{dn}(\cdot; k)$ são pares enquanto $\text{sn}(\cdot; k)$ é ímpar. Estas funções são periódicas com respectivos períodos minimais dados por $4K$, $2K$ e $4K$, ou seja,

$$\text{sn}(u + 4K; k) = \text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 4K; k) = \text{cn}(u; k), \quad \text{dn}(u + 2K; k) = \text{dn}(u; k)$$

Além disso, temos as relações,

$$\begin{cases} \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1, \quad k'^2 \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = \text{dn}^2 u, \\ -1 \leq \text{sn}(u; k) \leq 1, \quad -1 \leq \text{cn}(u; k) \leq 1, \quad k' \leq \text{dn}(u; k) \leq 1, \\ \text{sn}(u + 2K; k) = -\text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 2K; k) = -\text{cn}(u; k), \end{cases}$$

ocorrem para todo $k \in (0, 1)$ e $u \in \mathbb{R}$. Alguns valores específicos são dados abaixo

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \operatorname{cn}(0) = 1, \operatorname{sn}(K) = 1, \operatorname{cn}(K) = 0,$$

Para os valores específicos de $k = 0, 1$ temos

$$\operatorname{sn}(u; 0) = \operatorname{senu}, \operatorname{cn}(u; 0) = \cos u, \operatorname{dn}(u, 0) = 1,$$

$$\operatorname{sn}(u; 1) = \tanh u, \operatorname{cn}(u; 1) = \operatorname{sechu}, \operatorname{dn}(u, 1) = \operatorname{sechu}.$$

Finalmente, tem-se as fórmulas para as derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sn}u) = \operatorname{cnu} \operatorname{dnu}, \quad \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{cnu}) = -\operatorname{sn}u \operatorname{dnu}, \quad \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{dnu}) = -k^2 \operatorname{cnu} \operatorname{sn}u.$$

7.2 Apêndice B

Neste Apêndice serão apresentadas as principais propriedades do operador de Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \tag{7.1}$$

onde $q(x) \in \mathbb{R}$ é suave e tem período minimal $L > 0$. Estamos interessados no espectro do operador H no espaço $L^2_{per}([0, L])$. Considere a equação diferencial ordinária

$$Hv = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Todas as soluções periódicas de (7.2) podem ser caracterizadas da seguinte forma: Sejam $\phi_1(x, \lambda)$ e $\phi_2(x, \lambda)$ as soluções de (7.2) satisfazendo

$$\phi_1(0, \lambda) = 1, \phi'_1(0, \lambda) = 0, \quad \phi_2(0, \lambda) = 0, \phi'_2(0, \lambda) = 1,$$

respectivamente, e defina

$$D = D(\lambda) = \phi_1(L, \lambda) + \phi'_2(L, \lambda).$$

A prova do seguinte Teorema, conhecido como Teorema de Floquet, pode ser encontrado em [32]:

Teorema 7.2.1. *Nas condições acima tem-se*

(i) Se $D > 2$. Existem duas soluções linearmente independentes do tipo

$$\psi_1(x) = e^{mx}p_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-mx}p_2(x),$$

onde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e p_k , $k = 1, 2$, são periódicas de período L .

(ii) Se $D < -2$. Análogo ao caso (i) com m substituído por $m + \frac{\pi i}{L}$.

(iii) Se $-2 < D < 2$. Existem $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha L < \pi$ ou $(-\pi < \alpha L < 0)$ e duas soluções linearmente independentes da forma

$$\psi_1(x) = e^{i\alpha x}p_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-i\alpha x}p_2(x),$$

onde p_1 e p_2 são periódicas de período L .

(iv) Se $D = 2$. Existem duas soluções linearmente independentes do tipo

$$\psi_1(x) = p_1(x), \quad \psi_2(x) = p_2(x)$$

ou do tipo

$$\psi_1(x) = p_1(x), \quad \psi_2(x) = xp_1(x) + p_2(x),$$

onde p_1 e p_2 são periódicas de período L .

(v) Se $D = -2$. Existem duas soluções linearmente independentes do tipo

$$\psi_1(x) = e^{\frac{i\pi}{L}x}p_1(x) = P_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{\frac{i\pi}{L}x}p_2(x) = P_2(x)$$

ou do tipo

$$\psi_1(x) = P_1(x), \quad \psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x),$$

onde p_1 e p_2 são periódicas de período L .

Note que no caso (v) as funções P_1 e P_2 são semi-periódicas com semi-período L , ou seja, satisfazem $P_k(x + L) = -P_k(x)$, $k = 1, 2$.

Observação 7.2.2. Nos casos (iii) - (v) sempre existe uma solução do tipo

$$v(x) = e^{i\alpha x}p(x)$$

onde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right]$ e p é periódica de período L . Além disso, nestes casos e somente nestes casos, o problema (7.2) possui uma solução limitada.

A seguir, enunciamos um corolário o qual será usado na análise espectral para as soluções ondas cnoidal associadas ao sistema de Zakharov. A prova pode ser encontrada em [32].

Corolário 7.2.3. *Uma solução não trivial de (7.2) que tem período $2L$ também tem período L ou semi-período L .*

No que segue, denotaremos por $\sigma(H)$ o espectro de H em $L^2_{per}([0, L])$. Consideremos o *problema de autovalores periódico*

$$\begin{cases} Hu = \lambda u \\ u(0) = u(L), u'(0) = u'(L). \end{cases} \quad (7.3)$$

Dessa forma, determinar o espectro de H em $L^2_{per}([0, L])$ equivale a encontrar os valores de λ para os quais o problema (7.3) possui uma solução não trivial. Pela teoria dos operadores compactos simétricos segue que $\sigma(H)$ é constituído por uma sequência de autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, onde autovalores duplos são enumerados duas vezes e $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Denotaremos por χ_n a autofunção associada a λ_n . O problema (7.3) está relacionado com o *problema de autovalores semi-periódico*

$$\begin{cases} Hu = \mu u \\ u(0) = -u(L), u'(0) = -u'(L). \end{cases} \quad (7.4)$$

Os autovalores de (7.4) podem ser enumerados numa sequência $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$, e $\mu_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Novamente autovalores duplos são enumerados duas vezes. Denotaremos por η_n a autofunção associada a μ_n .

A equação (7.2) possui uma solução de período L se, e somente se, $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ e possui uma solução de período $2L$ se, e somente se, $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = \mu_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Se todas as soluções de (7.2) são limitadas dizemos que (7.2) é *estável*. Se (7.2) possui pelo menos uma solução não trivial limitada, dizemos que (7.2) é *condicionalmente estável*. Caso contrário, dizemos que a equação (7.2) é *instável*. Além disso, o Teorema de Oscilação (veja Teorema 2.1 em [51]) nos diz que os autovalores λ_n e μ_n satisfazem a relação:

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots$$

Os intervalos (λ_0, μ_0) , (μ_1, λ_1) , \dots são chamados *intervalos de estabilidade*, posto que todas as soluções de (7.2) são limitadas se $\lambda \in (\lambda_0, \mu_0) \cup (\mu_1, \lambda_1) \cup \dots$. Os intervalos $[\lambda_0, \mu_0]$, $[\lambda_1, \mu_1]$, \dots ,

são chamados de *intervalos de estabilidade condicional*, posto que (7.2) possui pelo menos uma solução não trivial limitada se $\lambda \in [\lambda_0, \mu_0] \cup [\mu_1, \lambda_1] \cup \dots$ e, finalmente os intervalos $(-\infty, \lambda_0), (\mu_0, \mu_1), (\lambda_1, \lambda_2), \dots$ são chamados *intervalos de instabilidade* posto que todas as soluções de (7.2) são ilimitadas se $\lambda \in (-\infty, \lambda_0) \cup (\mu_0, \mu_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup \dots$, sendo que alguns destes intervalos são omitidos sempre que temos um autovalor duplo. Note que o intervalo de instabilidade $(-\infty, \lambda_0)$ sempre aparece na sequência acima.

Agora temos a caracterização do número de zeros das autofunções χ_n e η_n associadas aos problemas de autovalores (7.3) e (7.4), a saber,

- (i) χ_0 não tem zeros em $[0, L]$,
- (ii) χ_{2n+1} e χ_{2n+2} tem exatamente $2n + 2$ zeros em $[0, L]$,
- (iii) η_{2n} e η_{2n+1} tem exatamente $2n + 1$ zeros em $[0, L]$.

Exemplo 7.2.4. (A Equação de Lamé) Consideremos a equação de Lamé.

$$y'' + [\lambda - m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x; k)]y = 0, \quad (7.5)$$

onde m é um parâmetro real, sn denota a função elíptica Jacobiana denominada senoidal e k^2 é o módulo elíptico (veja Apêndice A). Então a equação (7.5) possui soluções de período $2K$ ou $4K$ se, e somente se, m é um inteiro. Se l é definido por $l = m$ se m é um inteiro não negativo e por $l = -m - 1$ se m é um inteiro negativo, então a equação de Lamé (7.5) terá no máximo $l + 1$ intervalos de instabilidade (incluindo o intervalo $(-\infty, \lambda_0)$). Mais ainda, se m é um inteiro não negativo então (7.5) possui exatamente $m + 1$ intervalos de instabilidade (veja [51]).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Added and S. Added, *Existence globale de solutions fortes pour les équations de la turbulence de Langmuir en dimension 2*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 299 (1984), pp. 551-554.
- [2] J. P. Albert, *Dispersion of low-energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, J. Differential Equations, 63 (1986), pp. 117-134
- [3] J. P. Albert, *Positivity properties and stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), pp. 1-22.
- [4] J. P. Albert, J. L. Bona and D. B. Henry, *Sufficient conditions of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Phys. D, 24 (1987), pp. 343-366.
- [5] J. P. Albert and J. L. Bona, *Comparisons between model equations for long waves*, J. Nonlinear Sci., 1 (1991), pp. 345-374.
- [6] J. P. Albert and J. L. Bona, *Total positivity and the stability of internal waves in fluids of finite depth*, IMA J. Appl. Math., 46 (1991), pp. 1-19.
- [7] J. Angulo, *Existence and stability of solitary wave solutions to nonlinear dispersive evolution equations*. IMPA Mathematical Publications, 24th Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

-
- [8] J. Angulo, *Stability of cnoidal waves to Hirota-Satsuma systems*, Mat. Contemp., 27 (2004), pp. 189-223.
- [9] J. Angulo, *Non-linear stability of periodic travelling-wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries*, J. Differential Equations, 235 (2007), pp. 1-30.
- [10] J. Angulo, J. Bona and M. Scialom, *Stability of cnoidal waves*, Adv. Differential Equations, 11 (2006), pp. 1321-1374.
- [11] J. Angulo and F. Natali, *Stability and instability of periodic travelling wave solutions for the critical Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations*, Phys. D, 238 (2009), pp. 603-621.
- [12] J. Angulo and F. Natali, *Positivity properties of the Fourier transform and the stability of periodic travelling-wave solutions*, SIAM, J. Math. Anal., 40 (2008), pp. 1123-1151.
- [13] T. B. Benjamin, *Lectures on nonlinear wave motion*, Nonlinear wave motion, AMS Providence, R. I. 15 (1974), pp. 3-47.
- [14] T. B. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 338 (1972), pp. 153-183.
- [15] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech., 29 (1967), pp. 559-592.
- [16] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, *Models equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 272 (1972), pp. 47-78.
- [17] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces: An introduction*, Grundlehren 223, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [18] J. L. Bona, *On the stability theory of solitary waves*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 344 (1975), pp. 363-374.
- [19] J. L. Bona and H. Chen, *Solitary waves in nonlinear dispersive systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, (2002), pp. 313-378.

- [20] J. L. Bona and H. Kalisch, *Models for internal waves in deep water*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 6 (2000), pp. 1-20.
- [21] J. L. Bona and H. Chen, *Well-posedness for regularized nonlinear dispersive wave equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., (2009), pp. 1253-1275.
- [22] J. L. Bona and N. Tzvetkov, *Sharp well-posedness results for the BBM equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 23 (2009), pp. 1241-1252.
- [23] J. Bourgain, *On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system*, Duke Math. J. 76 (1994), pp. 175-202
- [24] J. Bourgain, *Periodic Korteweg-de Vries equation with measures as initial data*, Selecta Math. (N.S.), 3 (1997), pp. 115-159.
- [25] J. Bourgain and J. Colliander, *On wellposedness of the Zakharov system*, Internat. Math. Res. Notices 11 (1996), pp. 515-546.
- [26] F. Bowman, *Introduction to Elliptic Functions, with Applications*, Dover Publications, inc., New york, 1961.
- [27] P. F. Byrd and M. D. Friedman, "Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists," 2nd edition, Springer, NY, 1971.
- [28] H. Chen, *Periodic initial-value problem for BBM-equation*, Comput. Math. Appl. 48 (2004), pp. 1305-1318.
- [29] L. Chen, *Stability and instability of solitary waves for generalized symmetric regularized-long-wave equations*, Phys. D 118 (1998), pp. 53-68.
- [30] J. Colliander, *Wellposedness for Zakharov systems with generalised nonlinearity*, J. Differential Equations, 148 (1998), pp. 351-363.
- [31] B. Deconinck and T. Kapitula, *On the orbital (in)stability of spatially stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations*, Preprint.
- [32] M. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Academic Press, London (1973).

- [33] K. El Dika, *Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin-Bona-Mahony equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 13 (2005), pp. 583-622.
- [34] T. Gallay and M. Hărăgus, *Stability of small periodic waves for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations, 234 (2007), pp. 544-581.
- [35] T. Gallay and M. Hărăgus, *Orbital stability of periodic waves for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Dynam. Differential Equations, 19 (2007), pp. 825-865.
- [36] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. 151 (1997), pp. 384-436.
- [37] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Anal., 74 (1987), pp. 160-197.
- [38] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*. J. Funct. Anal., 94 (1990), pp. 308-348.
- [39] B. Guo and L. Shen, *The existence and uniqueness of the classical solution to the periodic initial value problem for the Zakharov equation*, Acta Math. Appl. Sinica 5 (1982), pp. 310-324.
- [40] S. Hakkaev, I. Iliev and K. Kirchev, *Stability of periodic travelling shallow-water waves determined by Newton's equation*, J. Phys. A, 41 (2008), 085203, (31pp).
- [41] M. Hărăgus, *Stability of periodic waves for the generalized BBM equation*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 53 (2008), pp. 445-463.
- [42] E. Ince, *The periodic Lamé functions*, Proc. Roy. Soc., Edinburgh 60 (1940), pp. 47-63.
- [43] R. J. Iorio Jr. and V. de M. Iorio, *Fourier analysis and partial differential equations*, Cambridge Stud. Adv. Math. 70, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [44] M. Johnson, *On the stability of periodic solutions for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, Preprint, arXiv:0908.0277.
- [45] M. Johnson, *Nonlinear Stability of Periodic Traveling Wave Solutions of the Generalized Korteweg-de Vries Equation*, Preprint, arXiv:0901.4948v2.

- [46] H. Kalisch, *Error analysis of a spectral projection of the regularized Benjamin-Ono equation*, BIT, 45 (2005), pp. 69-89.
- [47] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, 1968.
- [48] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1976.
- [49] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the Zakharov and Zakharov Schulman systems*, J. Funct. Anal. 127 (1995), pp. 204-234.
- [50] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [51] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's equation*, vol 20, Interscience, Tracts in Pure and Appl. Math., 1976.
- [52] J. R. Miller and M. I. Weinstein, *Asymptotic stability of solitary waves for the regularized long-wave equation*, Comm. Pure Appl. Math., 495 (1996), pp. 399-441.
- [53] L. Molinet, Saut, J. and N. Tzvetkov, *Ill-posedness issues for the Benjamin Ono and related equations*, SIAM J. Math. Anal., 33 (2001), pp. 982-988.
- [54] L. Molinet, Saut, J. and N. Tzvetkov, *Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev Petviashvili I equation*, Duke Math. J., 115 (2002), pp. 353-384.
- [55] F. Natali and A. Pastor, *Stability and instability of periodic standing wave solutions for some Klein-Gordon equations*, J. Math. Anal. Appl., 347 (2008), pp. 428-441.
- [56] A. Neves, *Floquet's theorem and stability of periodic solitary waves*, To appear in J. Dynam. Differential Equations.
- [57] E. Oberhettinger, *Fourier expansions: a collection of formulas*, Academic Press, New York, London, 1973.
- [58] H. Ono, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan, 39 (1975), pp. 1082-1091.
- [59] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, *Existence and smoothing effect of solutions for the Zakharov equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 28 (1992), pp. 329-361.

- [60] H. Pecher, *Global well-posedness below energy space for the 1-dimensional Zakharov system*, Internat. Math. Res. Notices 19 (2001), pp. 1027-1056.
- [61] D. H. Peregrine, *Calculations of the development of an undular bore*, J. Fluid Mech., 25 (1966), pp. 321-330.
- [62] D. H. Peregrine, *Long waves on a beach*, J. Fluid Mech., 27 (1967), pp. 815-827.
- [63] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics: Analysis of operators, Vol. IV*, Academic Press, New York, 1978.
- [64] S. Schochet and M. Weinstein, *The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing the Langmuir turbulence*, Comm. Math. Phys. 106 (1986), pp. 569-580.
- [65] P. E. Souganidis and W. A. Strauss, *Instability of a class of dispersive solitary waves*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 114 (1990), pp. 195-212.
- [66] C. Sulem and P-L. Sulem, *Quelques résultats de régularité pour les équations de la turbulence de Langmuir*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 289 (1979), pp. A173-A176.
- [67] E. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
- [68] H. Takaoka, *Well-posedness for the Zakharov system with the periodic boundary condition*, Differential Integral Equations, 12 (1999), pp. 789-810.
- [69] N. Tzvetkov, *Remark on the local ill-posedness for the KdV equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 329 (1999), pp. 1043-1047.
- [70] M. Wadati, *Wave propagation in nonlinear lattice I*, J. Phys. Soc. Japan, 38 (1975), pp. 673-680.
- [71] M. Wadati, *Wave propagation in nonlinear lattice II*, J. Phys. Soc. Japan, 38 (1975), pp. 681-686.
- [72] M. I. Weinstein, *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation*, Comm. PDE, 12 (1987), pp. 1133-1173.

- [73] M. I. Weinstein, *Modulation stability of ground states of nonlinear Schrödinger equation*, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), pp. 472-490.
- [74] M. I. Weinstein, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive equations*, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), pp. 51-68.
- [75] W. Ya ping, *Orbital stability of solitary waves of Zakharov system*, J. Math. Phys., 35 (1994), pp. 2413-2422.
- [76] H. Yang, *Orbital stability of solitary waves for generalized Zakharov system*, J. Partial Differential Equations 20 (2007), pp. 252-264.
- [77] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys. JEPT, 35 (1972), pp. 908-914.
- [78] L. Zeng, *Existence and stability of solitary-wave solutions of equations of Benjamin-Bona-Mahony type*, J. Differential Equations, 188 (2003), pp. 1-32.