

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Perturbações de Sistemas Reversíveis

Ana Cristina de Oliveira Mereu
Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

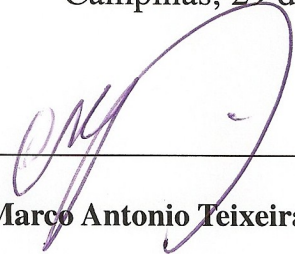
Campinas - Maio de 2009

Este trabalho contou com apoio financeiro da Fapesp, Processo nº 04/07386-2

Perturbações de Sistemas Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação da tese devidamente corrigida e defendida por **Ana Cristina de Oliveira Mereu** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de maio de 2009.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Prof. Dr. Eduardo Garibaldi
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, com requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática.**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Mereu, Ana Cristina de Oliveira
M541p Perturbações de sistemas reversíveis/Ana Cristina de Oliveira
Mereu -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Marco Antonio Teixeira
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Sistemas dinâmicos. 2.Órbitas periódicas. 3.Simetria. I. Teixeira,
Marco Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: Perturbations of reversible systems

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Periodic orbits. 3. Symmetry.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Eduardo Garibaldi (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi (UNESP)
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia (UFG)
Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello (UNIFEI)

Data da defesa: 29/05/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 29 de maio de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI



Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI



Prof(a). Dr(a). RONALDO ALVES GARCIA



Prof(a). Dr(a). LUIS FERNANDO DE OSÓRIO MELLO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por esta oportunidade, saúde e força para enfrentar e superar as dificuldades e também por colocar em meu caminho pessoas especiais que colaboraram cada qual a sua maneira na realização deste trabalho, em especial:

Ao professor Dr. Marco Antonio Teixeira pelo competente trabalho de orientação. Agradeço os ensinamentos, paciência e atenção dedicada para a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Jaume Llibre pela orientação, paciência e acolhida durante meu estágio em Barcelona.

À minha mãe, pai (in memoriam), irmão e toda família pelo apoio incondicional, amor, incentivo e orações.

A meu namorado Ramon pelo amor e carinho, e acima de tudo, pela paciência.

Ao Maurício e Ricardo pelas discussões que muito contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos por deixarem os momentos difíceis mais suaves.

Aos professores do IMECC/UNICAMP e do DMA/UFV em especial aos professores Olímpio H. Miyagaki, Margareth da S. Alves e Rosane S. M. Viana por acreditarem em mim.

Aos funcionários do IMECC, em especial à Tania, Cidinha e Edinaldo.

À Capes pela bolsa de estágio no exterior e à Fapesp pelo apoio financeiro concedido no Brasil.

RESUMO

Este trabalho é voltado ao estudo de existência e persistência de órbitas periódicas e órbitas homoclínicas em perturbações de sistemas dinâmicos reversíveis.

Primeiramente, rompemos a reversibilidade de centros no plano e em dimensões superiores e detectamos condições para a existência de ciclos limites e toros invariantes. A seguir, estudamos a existência de soluções periódicas simétricas de perturbações de uma família de equações diferenciais reversíveis. A existência e persistência de órbitas homoclínicas em tais equações também foram discutidas.

ABSTRACT

In this work we study the existence and persistence of some minimal sets in perturbations of reversible systems. First we make non reversible perturbations of centers in R^2 and R^4 and we detect conditions for the existence of limit cycles and invariant tori. We study the existence of periodic solutions of the perturbations of a family of differential equations expressed by $x^{(2n)} + \alpha_{\frac{2n-2}{2}}x^{(2n-2)} + \dots + \alpha_1x^{(2)} + x = 0$, for $n = 2, 3$. The existence and persistence of homoclinic orbits in such equations are also discussed.

ÍNDICE

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Introdução	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Sistemas Reversíveis	1
1.2 Forma Normal de Belitskii	5
1.3 Método de “averaging”	6
1.4 Redução de Lyapunov-Schmidt	10
2 Equação de Liénard	17
2.1 Introdução	17
2.2 “Averaging” de primeira ordem em equações de Liénard	21
2.3 “Averaging” de segunda ordem em equações de Liénard	24
2.4 “Averaging” de terceira ordem em equações de Liénard	29
3 Ressonância em \mathbb{R}^4	45
3.1 Introdução	45
3.2 As funções $h_i(r, R, s)$ para $i = 1, 2, 3$	48
3.3 Caso N par	55

3.4	Caso N ímpar	59
4	Toro folheado por órbitas periódicas	63
4.1	Introdução	63
4.2	O algoritmo	64
4.3	Aplicação do algoritmo	66
5	Existência de Órbitas Periódicas	69
5.1	Introdução	69
5.2	Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^4	70
5.3	Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^6	74
5.3.1	Caso $\alpha : 1 : 2$ ressonante	77
5.3.2	Caso $\alpha : 1 : 3$ ressonante	91
5.3.3	Caso $\alpha : 1 : p, p > 3$ ressonante	101
5.3.4	Caso $\alpha : 1 : 1$ ressonante não semi-simples	110
5.3.5	Caso $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ não ressonante	110
6	Existência de Órbitas Homoclínicas	117
6.1	Uma Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^4	117
6.1.1	Propriedades da Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^4	119
6.2	Uma Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^6	121
6.2.1	Propriedades da Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^6	123
	Perspectivas Futuras	125
	Referências Bibliográficas	129
	Índice Remissivo	133

INTRODUÇÃO

No estudo da teoria de sistemas dinâmicos é grande o interesse na detecção e no entendimento de certas complexidades como: órbitas periódicas, órbitas homoclínicas, toros invariantes, variedades folheadas por órbitas periódicas, etc... Esses objetos são, em geral, tratados em famílias de campos vetoriais que podem ou não preservar alguma estrutura como, por exemplo, Hamiltoniana, simetria, integrabilidade e reversibilidade.

Em 1895 Liapunov publicou o conhecido Teorema do Centro, veja [1] página 498. Este teorema, para sistemas Hamiltonianos analíticos com n graus de liberdade, afirma que se as autofrequências do sistema Hamiltoniano linearizado são independentes sobre \mathbb{Z} , próximo de um ponto de equilíbrio estável, então existem n famílias de soluções periódicas que preenchem uma variedade bidimensional suave e tendem ao ponto de equilíbrio com períodos limitados. Este resultado foi generalizado por Weinstein [38] e Moser [30]. Weinstein considerou o caso onde o Hamiltoniano tem Hessiana definida positiva no equilíbrio, e Moser, usando redução Lyapunov-Schmidt, estendeu o teorema de Weinstein para sistemas possuindo uma integral primeira, não necessariamente Hamiltoniano. Devaney em [10] provou uma versão do Teorema de Centro de Lyapunov para sistemas reversíveis. Recentemente este resultado foi generalizado por Golubitsky, Krupa e Lim [17] no caso reversível e por Montaldi, Robert e Stewart [28] no caso Hamiltoniano. Lembramos que em [17] o Teorema de Devaney foi estendido e algumas simetrias extras foram consideradas. Contrastando o método geométrico de Devaney, eles utilizaram a redução de Lyapunov-Schmidt adaptando uma prova alternativa

do Teorema do Centro de Lyapunov reversível dada por Vanderbauwhede [39]. Em [28] a existência de famílias de órbitas periódicas em torno de um ponto equilíbrio semisimple elíptico é analisada. Sistemas com simetrias, incluindo simetrias reversíveis, que são anti-simpléticas são estudadas. Seus métodos são continuações do trabalho de Vanderbauwhede, em [39], onde as famílias de soluções periódicas estão em correspondência bijetiva com as soluções de um problema variacional.

Uma das propriedades características de sistemas Hamiltonianos e reversíveis, é que órbitas periódicas em tais sistemas surgem em famílias a um parâmetro, o contrário de sistemas gerais onde órbitas são, geralmente, ciclos limites, isto é, elas são isoladas.

Assim, um problema geral pode ser formulado. Considere um campo vetorial reversível ou Hamiltoniano em \mathbb{R}^n . Existem famílias a um parâmetro de soluções periódicas? Quantas? Essas famílias persistem sob perturbações que preservam a estrutura inicial do campo? E se a perturbação não preserva a estrutura original? Neste caso, surgem ciclos limites?

Quando tratamos de famílias de órbitas periódicas em sistemas Hamiltonianos ou reversíveis, é possível que seus períodos tendam ao infinito. A órbita limitante pode, no entanto, ser limitada, por exemplo, ser uma órbita homoclínica.

Um órbita homoclínica não degenerada (elementar) em um sistema Hamiltoniano (reversível) é o limite de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas cujo período tende a infinito quando esta se aproxima da órbita homoclínica. Assim as seguintes questões podem ser formuladas: Como detectar a existência de órbitas homoclínicas em um sistema com uma certa estrutura? Sob que condições essas órbitas são limites de famílias a um parâmetro de órbitas periódicas? Elas persistem sob perturbações que preservam a estrutura do campo original? E sob uma perturbação qualquer?

O objeto principal deste trabalho é estudar as questões formuladas acima, tanto sobre órbitas periódicas como sobre homoclínicas, para perturbações de certas equações diferenciais reversíveis.

Em se tratando de existência de órbitas periódicas utilizamos a Teoria de “Averaging” (veja [2], [20], [32] e [36]). Resumidamente, podemos dizer que a Teoria de “Averaging” estabelece uma relação entre soluções de um sistema diferencial não autônomo dependente de pequeno parâmetro, e soluções do sistema diferencial “averaged” que é autônomo.

Quando estudamos a existência de famílias de órbitas periódicas utilizamos a Redução

de Lyapunov-Schmidt (veja [3], [18], [29], [35] e [37]). Tal método tem como objetivo reduzir o problema de existência local de soluções periódicas de um dado sistema, à resolver um sistema de equações algébricas num espaço cuja dimensão depende do tipo de ressonância que o campo vetorial em questão satisfaz. Teoria de Formas Normais, que consiste em encontrar mudanças de coordenadas próximas à identidade que levam o campo a uma forma mais “simples”, é uma ferramenta muito útil na aplicação da Redução de Lyapunov-Schmidt.

Iniciamos o Capítulo 1 introduzindo a terminologia e conceitos básicos utilizados neste trabalho. Resumimos algumas propriedades importantes dos campos vetoriais reversíveis e definimos quando um campo vetorial está na forma normal de Belitskii. Além disso, descrevemos resumidamente as técnicas utilizadas neste trabalho: Método de “averaging” e Redução de Lyapunov-Schmidt.

Os sistemas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^4 estudados nos Capítulos 2 a 4 são da forma $X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon F$, onde F é uma função C^∞ e ε um pequeno parâmetro. Para cada valor positivo do parâmetro ε , usaremos o termo *sistema perturbado* para referir ao sistema X_ε , enquanto o valor $\varepsilon = 0$ corresponde ao então chamado *sistema não-perturbado*. Entendemos *bifurcação* como o fenômeno de existência de soluções periódicas para o sistema perturbado que converge à alguma solução periódica do sistema não-perturbado quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Começamos nosso estudo em \mathbb{R}^2 perturbando centros reversíveis. Usando a teoria de “averaging” estabelecemos o número máximo de ciclos limites de média amplitude $\tilde{H}(m, n)$ que podem bifurcar de um centro linear quando o perturbamos dentro de uma classe de todas as equações diferenciais polinomiais de Liénard de graus m e n como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x)y + g_m^k(x)), \end{aligned} \tag{1}$$

onde para todo k os polinômios $g_m^k(x)$ e $f_n^k(x)$ têm grau m e n respectivamente, e ε é um pequeno parâmetro. Resumindo, no Capítulo 2 estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Se para todo $k = 1, 2, 3$, os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm grau n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, o número máximo de ciclos limites de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard (1) bifurcando das órbitas periódicas do centro $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, é*

$\left[\frac{n}{2}\right]$, ou $\max \left\{ \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right] \right\}$ ou $\left[\frac{n+m-1}{2}\right]$, onde $[\cdot]$ denota a função maior inteiro, isto é, para $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ é o maior número inteiro menor ou igual a x .

No Capítulo 3 tratamos o problema de encontrar ciclos limites para perturbações de centros lineares reversíveis em dimensão 4. Considerando perturbações polinomiais, aplicamos novamente o Método de “Averaging” (de primeira ordem) sobre o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p x_2 + \varepsilon(F_1^1(x) + F_N^1(x)), \\ \dot{x}_2 &= p x_1 + \varepsilon(F_1^2(x) + F_N^2(x)), \\ \dot{x}_3 &= -q x_4 + \varepsilon(F_1^3(x) + F_N^3(x)), \\ \dot{x}_4 &= q x_3 + \varepsilon(F_1^4(x) + F_N^4(x)), \end{aligned} \tag{2}$$

onde $F_m^n = \sum_{i+j+k+l=m} a_{ijkl}^n x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l$, para $m = 1, N$ e $n = 1, 2, 3, 4$.

Obtemos os seguintes resultados:

Teorema 0.0.2. *Considere p, q números inteiros primos entre si com $p + q > 2$, $p > 1$ e $N = p + q - 1$. Então para $N \geq 2$ par e $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno as seguintes afirmações se verificam.*

- (a) *Se a função deslocamento de ordem ε não é identicamente nula, então o número máximo de ciclos limites da equação diferencial (2) que bifurcam das órbitas periódicas do sistema (2) quando $\varepsilon = 0$ é menor ou igual a $2pq$.*
- (b) *Existe exemplo da equação diferencial (2) possuindo $2pq$ ciclos limites que se bifurcam das órbitas periódicas do sistema (2) quando $\varepsilon = 0$.*

Teorema 0.0.3. *Considere p, q números inteiros primos entre si com $p + q > 2$, $p > 1$ e $N = p + q - 1$. Então para $N \geq 3$ ímpar e $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, se a função deslocamento de ordem ε não é identicamente nula, então o número máximo de ciclos limites do sistema diferencial (2) que bifurcam das órbitas periódicas do sistema (2) quando $\varepsilon = 0$ é no máximo $pq(N + 1)$ se $p \geq 2$. Quando $p = 1$ este número é $q(N + 2)$.*

Os Teoremas 0.0.2 e 0.0.3 são generalizações dos resultados obtidos em [4] onde foi provado o caso $p = 1$.

No capítulo 4, descrevemos um algoritmo para estudar a existência de toros invariantes folheados por órbitas periódicas de um sistema perturbado que surge do conjunto de órbitas periódicas de um sistema linear em $p : q$ ressonância. Tal algoritmo é baseado na teoria de “averaging” de primeira ordem e é ilustrado com um exemplo.

Nos capítulos 5 e 6 estudamos perturbações reversíveis de um sistema expresso por:

$$x^{(2n)} + \alpha_{\frac{2n-2}{2}} x^{(2n-2)} + \dots + \alpha_1 x^{(2)} + x = 0, \quad (3)$$

com $n = 2, 3$, α_i e $i = 1, \dots, \frac{2n-2}{2}$ parâmetros reais.

No capítulo 5 estudamos a existência de famílias a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas utilizando a Redução de Lyapunov-Schmidt e Teoria de Formas Normais. Deste modo, estabelecemos condições sobre os termos de ordem 2 ou 3 da forma normal de perturbações de (3) para garantir a existência de tais famílias.

Para certos valores de α_i o sistema (3) possui ponto de equilíbrio elíptico com $p : q : r$ ressonância. Por dificuldades técnicas, resumiremos os teoremas principais do capítulo 5 de uma maneira coloquial no seguinte enunciado:

Teorema 0.0.4. *Seja X um campo de vetores reversível definido numa vizinhança de um ponto de equilíbrio do tipo elíptico com ressonância $p : q : r$. Exibimos condições para a existência de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas convergindo para 0 com período limitado (família Lyapunov).*

No capítulo 6 encontramos campos vetoriais a dois parâmetros X_{pk} que são perturbações particulares de (3) que possuem soluções homoclínicas. A partir daí estudamos suas propriedades e estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.5. *Para cada $p > 1$ e $k > 0$ fixados, X_{pk} possui uma solução homoclínica em relação à origem. Tal órbita persiste sob perturbações C^∞ que mantêm a reversibilidade do sistema original. Além disso, ela é o limite de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas.*

Finalmente descrevemos as perspectivas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado à introduzir definições, resultados e técnicas que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Em geral, não apresentaremos demonstrações e, em alguns casos, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

1.1 Sistemas Reversíveis

Sejam

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

um campo vetorial C^∞ e

$$R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \tag{1.2}$$

um difeomorfismo involutivo, isto é, $R^2 = \text{Id}$.

Definição 1.1.1. Dizemos que o campo vetorial (1.1) é R -reversível, ou simplesmente reversível, se existe uma involução R tal que:

$$DR(x)f(x) = -f(Rx), \tag{1.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^{2n})$ o conjunto de campos vetoriais C^∞ na origem R -reversíveis.

Definição 1.1.2. Dizemos que o campo vetorial (1.1) é conservativo se existe uma integral primeira, isto é, uma função de classe C^1 , $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$DH(x) \cdot f(x) = 0, \quad (1.4)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Isto significa que H é constante ao longo de órbitas de (1.1).

Proposição 1.1.3. Se (1.1) é R -reversível, R uma involução, então

$$R \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ R, \quad (1.5)$$

onde φ_t é o fluxo de f .

A identidade (1.5) significa que a involução R aplica órbitas do fluxo φ_t em órbitas do mesmo fluxo invertendo a direção de percurso em relação ao tempo.

Definição 1.1.4. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ definimos a órbita por x_0 como:

$$\gamma(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; x = \varphi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\},$$

onde φ_t é o fluxo de f .

Definição 1.1.5. Dizemos que uma órbita de um campo vetorial R -reversível é simétrica em relação a R , se R aplica a órbita nela mesma, isto é, se $R(\gamma) = \gamma$.

Definição 1.1.6. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ é dito um ponto de equilíbrio simétrico de (1.1) se $f(x_0) = 0$ e $x_0 \in \text{Fix}(R)$, onde $\text{Fix}(R) = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; Rx = x\}$.

Para os objetos descritos aqui temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.7. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\gamma(x_0)$ a órbita por x_0 de um campo vetorial R -reversível. As seguintes três situações são possíveis:

- (i) A órbita $\gamma(x_0)$ não encontra o conjunto $\text{Fix}(R)$. Neste caso, $\gamma(x_0)$ e $R(\gamma(x_0))$ são duas órbitas distintas.
- (ii) A órbita $\gamma(x_0)$ encontra o conjunto $\text{Fix}(R)$ em apenas um ponto. Neste caso, $\gamma(x_0)$ é simétrica e portanto $\gamma(x_0)$ e $R(\gamma(x_0))$ representam a mesma órbita.

(iii) A órbita $\gamma(x_0)$ encontra o conjunto $Fix(R)$ em exatamente dois pontos. Neste caso, $\gamma(x_0)$ é uma órbita periódica simétrica e se T é o período de $\gamma(x_0)$ e $x \in \gamma(x_0) \cap Fix(R)$ então $\varphi_{\frac{T}{2}}(x) \in Fix(R)$.

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ um ponto de equilíbrio de (1.1),

$$W^s(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_0\}$$

e

$$W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = x_0\}$$

as variedades estável e instável, respectivamente, em x_0 , onde $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.8. Dizemos que x é um ponto homoclínico para x_0 se $x \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$. A órbita γ por x é chamada de órbita homoclínica associada ao equilíbrio x_0 .

Suponha que o ponto de equilíbrio x_0 seja hiperbólico. Então podemos classificar as órbitas homoclínicas pelo grau de transversalidade da interseção de $W^u(x_0)$ e $W^s(x_0)$.

Para uma variedade $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ denotamos por $T_x M$ seu espaço tangente em $x \in M$.

Definição 1.1.9. A solução $x(t) = \varphi_t(x)$ (ou a correspondente órbita γ) é chamada não-degenerada se

$$\dim(T_{x(t)}W^u(x_0) \cap T_{x(t)}W^s(x_0)) = 1 \tag{1.6}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.1.10. Seja γ um órbita homoclínica não-degenerada associada ao equilíbrio x_0 em um campo conservativo com integral primeira H . As variedades $W^u(x_0)$ e $W^s(x_0)$ pertencem à mesma superfície de nível de H a qual é localmente uma subvariedade de codimensão um. Assim, a não-degenerescência da órbita implica que a interseção de $W^u(x_0)$ e $W^s(x_0)$ é transversal nesta superfície de nível. (Relembre que duas variedades $M, N \in \mathbb{R}^n$ interseptom-se transversalmente em um ponto $x \in M \cap N$ se $T_x M + T_x N = \mathbb{R}^n$.) Como interseções transversais persistem sob pequenas perturbações, concluímos que a órbita γ persiste sob perturbações que mantêm o campo conservativo.

A condição de não degenerescência, (1.6), pode ser expressa analiticamente como segue. Seja $B(t) = Df(x(t))$. A condição (1.6) significa que, a menos de múltiplos escalares, $y(t) = \dot{x}(t)$ é a única solução limitada da equação variacional ao longo da órbita homoclínica

$$\dot{y} = B(t)y.$$

Veja [40].

Para uma órbita homoclínica γ simétrica introduzimos o seguinte conceito geométrico:

Definição 1.1.11. A solução $x(t) = \varphi_t(x)$ (ou a correspondente órbita γ) associada ao equilíbrio x_0 é chamada elementar se $W^s(x_0)$ intercepta $Fix(R)$ transversalmente.

Observação 1.1.12. Se $W^s(x_0)$ intercepta $Fix(R)$ transversalmente, digamos em $x(0)$, como $R(W^u) = W^s$, então $W^u(x_0)$ também intercepta $Fix(R)$ transversalmente. Análogo às órbitas não-degeneradas em sistemas conservativos, órbitas elementares persistem sob perturbações que mantêm a R -reversibilidade do sistema.

Resaltamos que uma órbita homoclínica γ não-degenerada é sempre elementar. Isto segue do seguinte lema, demonstrado em [40].

Lema 1.1.13. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) γ é elementar.

(ii) $T_{x(0)}W^u(x_0) \cap T_{x(0)}W^s(x_0) \subset Fix(-R)$ onde $Fix(-R) = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; Rx = -x\}$.

Assim, se γ é não-degenerada então $T_{x(0)}W^u(x_0) \cap T_{x(0)}W^s(x_0)$ tem dimensão um e é gerado por $\dot{x}(0) = f(x(0)) \in Fix(-R)$. Portanto a afirmação (ii) do lema acima é satisfeita e daí γ é elementar.

Quando tratamos de famílias de órbitas periódicas em um sistema Hamiltoniano, conservativo ou reversível é possível que o período tenda a infinito. A órbita limitante pode, no entanto, ser limitada, por exemplo, ser uma órbita homoclínica. Em [40] é demonstrado que esse tipo de comportamento é típico próximo às órbitas homoclínicas em sistemas conservativos ou reversíveis. Descreveremos a seguir os principais resultados de [40].

Teorema 1.1.14. *Assumimos que (1.1) é conservativo com integral primeira H . Além disso,*

(i) existe uma órbita γ_0 de (1.1) homoclínica em relação a um equilíbrio hiperbólico $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$;

(ii) a órbita homoclínica γ_0 é não-degenerada;

(iii) $DH(y_0) \neq 0$ para algum $y_0 \in \gamma_0$.

Então $\gamma_0 \cup x_0$ é o limite de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas cujos períodos tendem ao infinito quando tal família se aproxima da órbita homoclínica.

Teorema 1.1.15. *Assumimos que (1.1) é R -reversível. Além disso,*

(i) existe uma órbita γ_0 de (1.1) homoclínica simétrica em relação a um equilíbrio simétrico hiperbólico $x_0 \in \text{Fix}(R)$;

(ii) a órbita homoclínica γ_0 é elementar.

Então $\gamma_0 \cup x_0$ é o limite de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas cujos períodos tendem ao infinito quando tal família se aproxima da órbita homoclínica.

1.2 Forma Normal de Belitskii

Seja

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

um campo vetorial C^∞ , R -reversível com $f(0) = 0$.

Para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ denote por $T_m f$ o polinômio de Taylor de grau m em $x = 0$ e $\tilde{T}_m f$ sua parte homogênea de grau m , isto é,

$$T_m f(x) = \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} D^l f(0) x^{(l)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\tilde{T}_m f(x) = \frac{1}{m!} D^m f(0) x^{(m)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde $x^{(l)}$ denota a l -upla (x, \dots, x) .

Definição 1.2.1. Diremos que o campo vetorial (1.7) está na forma normal de Belitskii até ordem m , $m \geq 2$, em relação a A , se

$$A^* \tilde{T}_l f(x) = D\tilde{T}_l f(x) A^* x, \quad l \in \{2, \dots, m\},$$

isto é, $\tilde{T}_l f(x)$, $l = 2, \dots, m$, comutam com a matriz A^* , onde A^* é a matriz adjunta de A .

Considere

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \Phi(y) = y + h(y) \end{aligned}$$

um difeomorfismo com $h(y) = o(|y|^2)$.

Aplicando a transformação $x = \Phi(y)$ a (1.7) obtemos

$$\dot{y} = \Phi^* f(y) := D\Phi(y)^{-1} f(\Phi(y)) = g(y).$$

O teorema seguinte garante que sempre é possível encontrar uma mudança de coordenadas da forma Φ que coloca (1.7) na forma normal. A demonstração pode ser vista em [35].

Teorema 1.2.2. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para cada $m \geq 2$, existe uma vizinhança da origem \mathcal{U}_m em \mathbb{R}^n e uma aplicação $\Phi \in C^\infty(\mathcal{U}_m)$ tal que $\Phi^* f(y) = Ay + g(y)$, onde $Dg(0) = 0$ e*

$$A^* \tilde{T}_l g(y) = D\tilde{T}_l g(y) A^* y, \quad l \in \{2, \dots, m\}.$$

Como estamos supondo f um campo vetorial R -reversível, queremos encontrar uma aplicação Φ que não altera esta propriedade. Para isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.3. *A aplicação Φ do Teorema 1.2.2 pode ser escolhida de forma que $\Phi R(y) = R(\Phi(y))$. Assim, se $g(y) = \Phi^* f(y)$, temos que $DR(y)g(y) = -g(Ry)$.*

1.3 Método de “averaging”

Definição 1.3.1. Um ciclo limite de um sistema de equações diferenciais é uma órbita periódica isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema.

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n e $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz

$$g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n), \quad (1.8)$$

$$y \in \mathbb{R}^n \text{ é tal que } y \notin f(\partial\Omega), \quad (1.9)$$

$$\text{se } x \in \Omega \text{ é tal que } f(x) = y \text{ então } f'(x) = Df(x) \text{ é não singular.} \quad (1.10)$$

Proposição 1.3.2. *Se g satisfaz (1.8), (1.9) e (1.10), então a equação*

$$g(x) = y \quad (1.11)$$

tem um número finito de soluções em Ω .

Definição 1.3.3. *Seja g satisfazendo (1.8), (1.9) e (1.10). Definimos*

$$d(g, \Omega, y) = \sum_{i=1}^k \text{sgn} \det f'(x_i)$$

onde x_1, \dots, x_k são as soluções de (1.11) em Ω e

$$\text{sgn} \det f'(x_i) = \begin{cases} +1, & \text{se } \det f'(x_i) > 0 \\ -1, & \text{se } \det f'(x_i) < 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, k$. Se (1.11) não tem solução em Ω definimos $d(g, \Omega, y) = 0$.

Definição 1.3.4. *Sejam $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Definimos o grau de Brouwer de f em y em relação a Ω por*

$$d_B(f, \Omega, y) = \lim_{g \rightarrow f} d(g, \Omega, y)$$

onde g satisfaz (1.8), (1.9) e (1.10).

Para mais detalhes sobre grau de Brouwer veja [33].

Apresentaremos alguns resultados da teoria de “averaging”. Para demonstração, veja [2].

Teorema 1.3.5. (Método de “averaging” de primeira ordem) Considere o seguinte sistema diferencial

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.12)$$

onde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Definimos f_1 por

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (1.13)$$

e assumimos que

- (i) F_1 e R são localmente Lipschitz em relação a x ;
- (ii) para $a \in D$ com $f_1(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (1.12) tal que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O Teorema 1.3.5 tem hipóteses mais fracas do que um resultado similar estabelecido em Verhulst [36], Teorema 11.5, onde (i) e (ii) são substituídos por

(j) F_1 , R , $D_x F_1$, $D_x^2 F_1$ e $D_x R$ estão bem definidos, são contínuos e limitados por uma constante M (independente de ε) em $[0, \infty) \times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$, e

(jj) para $a \in D$ com $f_1(a) = 0$ temos $J_{f_1}(a) \neq 0$,

respectivamente.

Aqui denotamos por $J_f(a)$ o determinante da matriz Jacobiana de f calculado em a .

Observação 1.3.6. Seja $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ um função C^1 , com $g(a) = 0$, onde D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $a \in D$. Se $J_g(a) \neq 0$ então existe uma vizinhança V de a tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$. Daí $d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}$.

Teorema 1.3.7. (Método de “averaging” de segunda ordem) Considere o seguinte sistema diferencial

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.14)$$

onde $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Assumimos que

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, F_1 , F_2 , R e $D_x F_1$ são localmente Lipschitz em relação a x .

Definimos $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ f_2(z) &= \int_0^T \left[D_z F_1(s, z) \cdot \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z) \right] ds. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Além disso, assumimos que

(ii) para $V \subset D$ um conjunto aberto e limitado e para cada $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, existe $a_\varepsilon \in V$ tal que $f_1(a_\varepsilon) + \varepsilon f_2(a_\varepsilon) = 0$ e $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, 0) \neq 0$.

Então para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (1.14).

Teorema 1.3.8. (Método de “averaging” de terceira ordem) Considere o seguinte sistema diferencial

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 R(t, x, \varepsilon), \tag{1.16}$$

onde $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável, C^1 na segunda variável e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Assumimos que

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^2(D)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $D_x^2 F_1$ e $D_x F_2$ são localmente Lipschitz em relação a x .

Definimos $f_1, f_2, f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dados por (1.15) e

$$\begin{aligned} f_3(z) &= \int_0^T \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(s, z) y_1(s, z)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z) y_1(s, z) + F_3(s, z) \right] ds, \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt,$$

$$y_2(s, z) = \int_0^s \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t F_1(r, z) dr + F_2(t, z) \right] dt.$$

Além disso, assumimos que

- (ii) para $V \subset D$ um conjunto aberto e limitado e para cada $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, existe $a_\varepsilon \in V$ tal que $f_1(a_\varepsilon) + \varepsilon f_2(a_\varepsilon) + \varepsilon^2 f_3(a_\varepsilon) = 0$ e $d_B(f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3, V, 0) \neq 0$.

Então para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (1.16).

1.4 Redução de Lyapunov-Schmidt

A redução de Lyapunov-Schmidt tem-se mostrado uma técnica muito eficiente na análise da dinâmica de um sistema dinâmico em torno de um ponto de equilíbrio, principalmente na abordagem da existência de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas. O objetivo desta teoria é reduzir o problema de existência local de soluções periódicas de um dado sistema a resolver um sistema de equações algébricas num espaço de dimensão finita, cuja dimensão depende do tipo de ressonância que o campo vetorial em questão satisfaz.

Considere uma família de EDOs R -reversíveis

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

satisfazendo $f(Rx, \lambda) = -Rf(x, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e R uma involução linear em \mathbb{R}^{2n} . Assumimos que $f(0, \lambda) = 0$ para todo λ próximo de 0 e denotamos $A_\lambda := D_1 f(0, \lambda)$.

Denote $C_{2\pi}^0$ como sendo o espaço de Banach de funções contínuas 2π -periódicas $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$ e por $C_{2\pi}^1$ o correspondente C^1 -subespaço.

Definimos um produto interno em $C_{2\pi}^0$ por

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle dt$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota um produto interno em \mathbb{R}^{2n} .

Seja α_0 um número real não-nulo. Estamos interessados em encontrar soluções periódicas de (1.18) com período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha_0}$.

Considere a aplicação $F : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow C_{2\pi}^0$ definida por

$$F(x, \lambda, \sigma)(t) = (1 + \sigma)\alpha_0 \dot{x}(t) - f(x(t), \lambda).$$

Se $(x_0, \lambda_0, \sigma_0) \in C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é tal que

$$F(x_0, \lambda_0, \sigma_0) = 0 \tag{1.19}$$

então $\tilde{x}(t) := x_0((1 + \sigma_0)\alpha_0 t)$ é uma solução $\frac{2\pi}{(1 + \sigma_0)\alpha_0}$ -periódica de (1.18). De fato, temos

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (1 + \sigma_0)\alpha_0 \dot{x}_0((1 + \sigma_0)\alpha_0 t) = f(x_0(1 + \sigma_0)\alpha_0 t, \lambda) = f(\tilde{x}, \lambda),$$

onde a segunda igualdade vem do fato de $F(x_0, \lambda_0, \sigma_0) = 0$. Daí $\tilde{x}(t)$ é solução de (1.18). Agora verifiquemos que é $\frac{2\pi}{(1 + \sigma_0)\alpha_0}$ -periódica.

$$\begin{aligned} \tilde{x}\left(t + \frac{2\pi}{(1 + \sigma_0)\alpha_0}\right) &= x_0\left((1 + \sigma_0)\alpha_0\left(t + \frac{2\pi}{(1 + \sigma_0)\alpha_0}\right)\right) = \\ &= x_0((1 + \sigma_0)\alpha_0 t + 2\pi) = x_0((1 + \sigma_0)\alpha_0 t), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é válida já que $x_0(t)$ é 2π -periódica.

Assim, o problema de encontrar soluções periódicas de (1.18) com períodos próximos de um dado período, no caso, $\frac{2\pi}{\alpha_0}$, se reduz a encontrar os zeros de F com σ e λ próximos de zero.

Nosso objetivo agora é reduzir esse problema, inicialmente definido em espaços de dimensão infinita, para outro equivalente em espaços de dimensão finita.

Observe que $(0, 0, 0)$ é uma solução de (1.19) pois $f(0, 0) = 0$.

Seja $L := D_1 F(0, 0, 0) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$ dada por

$$Lx(t) = \dot{x}(t) - \frac{1}{\alpha_0} A_0 x(t).$$

Definimos a adjunta de L , $L^* : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$ por

$$L^* x(t) = -\dot{x}(t) - \frac{1}{\alpha_0} A_0^* x(t),$$

onde A_0^* é a matriz adjunta de A_0 .

Iremos supor que A_0 tenha apenas autovalores imaginários puros.

Sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ a base canônica do \mathbb{R}^{2n} e V_0 a soma direta dos autoespaços generalizados de A_0 com autovalores múltiplos inteiros de $i\alpha_0$. Seja

$$\mathcal{N} = \{q, q(t) = \exp(tS_0/\alpha_0)v_0; v_0 \in V_0^{\mathbb{R}}\} \subset C_{2\pi}^1$$

onde S_0 é a parte semi-simples de A_0 e $V_0^{\mathbb{R}}$ é o espaço dos vetores reais em V_0 . Note que $\dim \mathcal{N} = \dim V_0^{\mathbb{R}}$ e portanto finita.

A idéia para a construção desse subespaço é a seguinte: Se olharmos para a aplicação $L = D_1F(0, 0, 0)$, o subespaço \mathcal{N} é escolhido de forma que o núcleo do operador L ($\ker(L)$) esteja contido em \mathcal{N} . De fato,

$$Lx(t) = \dot{x} - \frac{1}{\alpha_0}A_0x(t).$$

Assim, $Lx(t) = 0$ se, e somente se, $\dot{x} = \frac{1}{\alpha_0}A_0x(t)$ que tem solução em $C_{2\pi}^1$ contida em \mathcal{N} .

O objetivo a partir daqui é colocar as soluções de (1.19) em correspondência um a um com as soluções de uma equação em \mathcal{N} . Desta forma, defina os subespaços:

$$X_1 = \{x \in C_{2\pi}^1; (x, \mathcal{N}) = 0\},$$

$$Y_1 = \{x \in C_{2\pi}^0; (x, \mathcal{N}) = 0\}$$

como os complementos ortogonais de \mathcal{N} em $C_{2\pi}^1$ e $C_{2\pi}^0$, respectivamente.

Lema 1.4.1. $L\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ e $L^*\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$.

Demonstração: Seja $q(t) = e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} \in \mathcal{N}$. Daí

$$L(q(t)) = \frac{S_0}{\alpha_0}e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}}v_0 - \frac{1}{\alpha_0}A_0e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}}v_0 = e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}}\left[\frac{1}{\alpha_0}(S_0 - A_0)\right]v_0 \in \mathcal{N},$$

$$L^*(q(t)) = e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}}\left[\frac{1}{\alpha_0}(-S_0 - A_0^*)\right]v_0 \in \mathcal{N}.$$

■

Lema 1.4.2. (Alternativa de Fredholm): Sejam $A(t)$ uma matriz em C_T^0 e g em C_T , então a equação

$$\dot{x} = A(t)x + g(t)$$

tem uma solução em C_T se e somente se

$$\int_0^T \langle y(t), g(t) \rangle dt = 0$$

para toda solução y da equação adjunta

$$\dot{y} = -A^*(t)y$$

tal que y está em C_T .

Lema 1.4.3. $L : X_1 \rightarrow Y_1$ é bijetora.

Demonstração: Observe que $\ker(L) \subset \mathcal{N}$ e pelo lema (1.4.1) $L\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$. Logo, L é injetora.

Tome $x_1 \in X_1$, daí $(Lx_1, \mathcal{N}) = (x_1, L^*\mathcal{N}) = 0$ pois $L^*\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$. Assim, $Lx_1 \in Y_1$ e portanto $L(X_1) \subseteq Y_1$.

Agora, seja $y_1 \in Y_1$. Assim, $(y_1, \mathcal{N}) = 0$. Pelo lema da Alternativa de Fredholm existe $x \in C_{2\pi}^1$ tal que $Lx = y_1$. Mas $L\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ logo $x \in X_1$ e daí $y \in L(X_1)$. Portanto, $Y_1 = L(X_1)$.

■

Escreva

$$F(x, \lambda, \sigma) = F(q + x_1, \lambda, \sigma) =: \hat{F}(q, x_1, \lambda, \sigma),$$

$q \in \mathcal{N}$ e $x_1 \in X_1$.

Definimos o operador em $C_{2\pi}^0$

$$P : C_{2\pi}^0 \rightarrow C_{2\pi}^0$$

por

$$P(\cdot) = \sum_{i=1}^m (\cdot, q_i) q_i,$$

onde $\{q_i\}_{i=1}^m$ é uma base de \mathcal{N} .

Observe que P é projeção sobre \mathcal{N} com núcleo igual a Y_1 . A projeção complementar $I - P$ sobre Y_1 tem núcleo igual a \mathcal{N} . Assim valem as seguintes somas diretas:

$$C_{2\pi}^1 = X_1 \oplus \mathcal{N} \quad C_{2\pi}^0 = Y_1 \oplus \mathcal{N}.$$

Além disso,

$$F(q, x_1, \sigma, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (I - P)F(q, x_1, \sigma, \lambda) = 0 \\ PF(q, x_1, \sigma, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema da Função Implícita e o Lema (1.4.3), a primeira equação pode ser localmente resolvida para $x_1 = x_1^*(q, \sigma, \lambda)$. Assim, precisamos resolver $PF(q, x_1^*(q, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) = 0$. Mas

$$PF(q, x_1^*(q, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) = 0 \Leftrightarrow (F, q_i) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle F, q_i \rangle dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} F(x^*(v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt = 0$$

e como $S_0^* = -S_0$ temos que

$$PF(q, x_1^*(q, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{\alpha_0}} F(x^*(v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt = 0.$$

Estabelecemos a equação:

$$B(v_0, \lambda, \sigma) = 0,$$

onde $B : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definida por

$$B(v_0, \lambda, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{\alpha_0}} F(x^*(v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt,$$

onde

$$x^*(v_0, \lambda, \sigma) = e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0 + x_1^*(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma).$$

Proposição 1.4.4. *A aplicação B possui as seguintes propriedades:*

1. $\varphi_\beta(B(v_0, \lambda, \sigma)) = B(\varphi_\beta(v_0), \lambda, \sigma)$,
2. $RB(v_0), \lambda, \sigma) = -B(Rv_0, \lambda, \sigma)$,

onde $\varphi_\beta v_0 = \exp(-\beta/\alpha_0)v_0$.

Demonstração:

$$1. B(\varphi_\beta(v_0), \lambda, \sigma) = B(e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{\alpha_0}} F(x^*(e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{\alpha_0}} F(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}} v_0 + x_1^*(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma)) dt$$

fazendo $\tau = t - \beta$ temos $t = \tau + \beta$. Daí

$$B(\varphi_\beta(v_0), \lambda, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\tau+\beta)S_0}{\alpha_0}} F(x^*(e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\tau)S_0}{\alpha_0}} F(x^*(e^{-\frac{\beta S_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \\
&= \varphi_\beta(B(v_0, \lambda, \sigma)) \\
2. \quad RB(v_0, \lambda, \sigma) &= R\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{\alpha_0}} F(x^*(v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{-tS_0}{\alpha_0}} RF(x^*(v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{-tS_0}{\alpha_0}} F(Rx^*(v_0, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \\
&= -B(Rv_0, \lambda, \sigma).
\end{aligned}$$

■

A condição (1) diz que a aplicação B é rotacionalmente equivariante enquanto que (2) afirma que a aplicação B herda a propriedade de reversibilidade do campo X .

Assumiremos que (1.18) está na forma normal de Belitskii até ordem m . Assim seja o campo vetorial $f(x, \lambda) = A_\lambda x + \tilde{f}(x, \lambda) + r(x, \lambda)$ com $r(x, \lambda) = o(|x|^{m+1})$. Com estas hipóteses temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.5. 1. $x^*(v_0, \lambda, \sigma)(t) = e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0 + o(\|v_0\|^{m+1})$;

2. $B(v_0, \lambda, \sigma) = (1 + \sigma)Sv_0 - A_\lambda v_0 - \tilde{f}(v_0, \lambda) + \mathcal{O}(\|v_0\|^{m+1})$.

Demonstração: Consideremos a restrição de F a \mathcal{N} :

$$\mathcal{F}(v_0, \lambda, \sigma) := \hat{F}\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, 0, \lambda, \sigma\right).$$

Como $\dot{q} = \frac{S_0}{\alpha_0} q$ para todo $q \in \mathcal{N}$, e como A_λ, \tilde{f} comutam com $e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}}$ obtemos

$\mathcal{F}(v_0, \lambda, \sigma) = (1 + \sigma)\alpha_0 \left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}}\right)' v_0 - f\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda\right) = e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} \left((1 + \sigma)S_0 v_0 - A_\lambda v_0 - \tilde{f}(v_0, \lambda)\right) - r\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda\right)$ o qual para $\tilde{\mathcal{F}}(v_0, \lambda, \sigma) := (I - P)\mathcal{F}(v_0, \lambda, \sigma)$ implica que $D^j(\tilde{\mathcal{F}}(0, \lambda, \sigma)) = 0$ para $0 \leq j \leq m$ para todo (λ, σ) . Temos:

$$(I - P)\hat{F}\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, x_1^*\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma\right), \lambda, \sigma\right) \equiv 0;$$

diferenciando esta identidade em $v_0 = 0$ temos $D^j x_1^*\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma\right) = 0$ para $0 \leq j \leq m$ para todo (λ, σ) numa vizinhança de $(0, 0)$. Desta forma:

$$x_1^*\left(e^{\frac{tS_0}{\alpha_0}} v_0, \lambda, \sigma\right) = \mathcal{O}(\|v_0\|)^{m+1}$$

e o resultado segue da definição de $x^*(v_0, \lambda, \sigma)$.

A segunda parte segue imediatamente da definição de B . ■

Lembre que uma solução periódica de (1.18) é R -simétrica se ela intercepta $Fix(R)$ em exatamente dois pontos. Daí, obtemos todas soluções periódicas de (1.18) resolvendo a equação:

$$G(v_0, \lambda, \sigma) = 0,$$

com $G(v_0, \lambda, \sigma) = B(v_0, \lambda, \sigma)|_{v_0 \in Fix(R)}$.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DE LIÉNARD

Usando teoria de “averaging” estudaremos o número máximo de ciclos limites, $\tilde{H}(m, n)$, que podem bifurcar de órbitas periódicas de um centro linear quando o perturbamos dentro de uma classe das equações diferenciais polinomiais de Liénard.

2.1 Introdução

A segunda parte do problema de Hilbert está relacionada com o número de ciclos limites de campos vetoriais polinomiais. A equação polinomial generalizada de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{2.1}$$

foi introduzida em [21]. Aqui o ponto denota diferenciação em relação ao tempo t , $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios na variável x de graus n e m , respectivamente. Para esta subclasse de campos vetoriais polinomiais temos uma versão simplificada do problema de Hilbert, (veja [27] e [34]).

Em 1977 Lins, de Melo e Pugh [27] estudaram as equações diferenciais polinomiais clássicas de Liénard obtidas quando $g(x) = x$ e estabeleceram a seguinte conjectura: *Se $f(x)$ tem grau $n \geq 1$ e $g(x) = x$, então (2.1) tem no máximo $[n/2]$ ciclos limites.* Eles

também provaram a conjectura para $n = 1, 2$. A conjectura para $n \in \{3, 4, 5\}$ continua em aberto. Para $n \geq 6$ esta conjectura não é verdadeira e foi demonstrada recentemente por Dumortier, Panazzolo e Roussarie em [13].

Notemos que uma equação diferencial polinomial clássica de Liénard tem um único ponto singular. Porém, é possível que as equações diferenciais polinomiais generalizadas de Liénard tenham mais que um ponto singular.

Muitos dos resultados em ciclos limites de equações diferenciais polinomiais tem sido obtidos considerando ciclos limites que bifurcam de um ponto singular, chamados *ciclos limites de pequena amplitude*, (veja [19]). Denotamos por $\hat{H}(m, n)$ o número máximo de ciclos limites de pequena amplitude para equações diferenciais da forma (2.1). Os valores de $\hat{H}(m, n)$ fornecem uma cota inferior para o número máximo $H(m, n)$ (i.e. o *número de Hilbert*) de ciclos limites que a equação diferencial (2.1) com m e n fixados pode ter.

Descreveremos resumidamente os principais resultados sobre ciclos limites em equações diferenciais de Liénard.

- (i) Em 1928 Liénard [21] provou que se $m = 1$ e $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ é uma função contínua ímpar a qual possui uma única raiz em $x = a$ e é monótona crescente em $x \geq a$, então a equação (2.1) possui um único ciclo limite.
- (ii) Em 1973 Rychkov [31] provou que se $m = 1$ e $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ é um polinômio ímpar de grau cinco, então a equação (2.1) tem até dois ciclos limites.
- (iii) Em 1977 Lins, de Melo e Pugh [27] provaram que $H(1, 1) = 0$ e $H(1, 2) = 1$.
- (iv) Em 1998 Coppel [6] provou que $H(2, 1) = 1$.
- (v) Dumortier, Li e Rousseau em [14] e [11] provaram que $H(3, 1) = 1$.
- (vi) Em 1997 Dumortier e Chengzhi [12] provaram que $H(2, 2) = 1$.

Até agora os únicos números de Hilbert $H(m, n)$ determinados são os quatro casos marcados com asteriscos ((iii)-(vi)) na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Valores de $H(m, n)$ ou $\hat{H}(m, n)$ para equações de Liénard em função dos graus m e n .

		n																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	48	49	50
m	1	0	1*	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→
	2	1*	1*	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	...	32	33	→
	3	1*	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	...	36	38	38
	4	2	3	4	4	6	7	8	9	9	10	11	12	13				
	5	2	3	4	6	6	8	9	10	11								
	6	3	4	6	7	8	8	9										
	7	3	5	6	8	9	9	9										
	8	4	5	6	9	10												
	9	4	6	8	9	11												
	10	5	7	8	10													
	11	5	7	8	11													
	12	6	8	10	12													
	13	6	9	10	13													
	⋮	⋮	⋮	⋮														
	20	10	13	14	17													
	⋮	⋮	⋮	⋮														
	48	24	32	36														
	49	24	33	38														
	50	↓	↓	38														

Blows, Lloyd e Lynch, [5], [22] e [26] usaram argumentos indutivos para demonstrar os seguintes resultados:

- (I) Se g é ímpar então $\hat{H}(m, n) = [n/2]$.
- (II) Se f é par então $\hat{H}(m, n) = n$.
- (III) Se f é ímpar então $\hat{H}(m, 2n + 1) = [(m - 2)/2] + n$.
- (IV) Se $g(x) = x + g_e(x)$, onde g_e é par então $\hat{H}(2m, 2) = m$.

Christopher e Lynch [8], [23], [24], [25] desenvolveram um método algébrico para determinar os números de Lyapunov da equação (2.1) e provaram o seguinte:

- (V) $\hat{H}(m, 2) = [(2m + 1)/3]$.
- (VI) $\hat{H}(2, n) = [(2n + 1)/3]$.
- (VII) $\hat{H}(m, 3) = 2[(3m + 2)/8]$ para todo $1 < m \leq 50$.
- (VIII) $\hat{H}(3, n) = 2[(3n + 2)/8]$ para todo $1 < m \leq 50$.
- (IX) Os valores da Tabela 2.1 para $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$, $k = 6, 7, 8, 9$ e $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$.

Em 1998, Gasull e Torregrosa, [16], obtiveram cotas superiores para $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(6, 7)$, $\hat{H}(7, 7)$ e $\hat{H}(4, 20)$.

Em 2006, os valores da tabela 2.1 para $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$, para $n = 4, m = 10, 11, 12, 13$; $n = 5, m = 6, 7, 8, 9$; $n = 6, m = 5, 6$ foram dados por Yu e Han em [41].

Usando a teoria de “averaging” estudaremos o número máximo de ciclos limites $\tilde{H}(m, n)$ que podem bifurcar de órbitas periódicas de um centro linear perturbado sob a classe de todas equações diferenciais polinomiais de Liénard de graus m e n como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x)y + g_m^k(x)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde para todo k os polinômios $g_m^k(x)$ e $f_n^k(x)$ têm grau m e n respectivamente e ε é um pequeno parâmetro, isto é, o número máximo de *ciclos limites de média amplitude* que podem bifurcar das órbitas periódicas do centro linear $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, perturbado com em (2.2).

Na realidade, calcularemos cotas inferiores de $\tilde{H}(m, n)$, ou melhor, calcularemos o número máximo de ciclos limites $\tilde{H}_k(m, n)$ que podem bifurcar das órbitas periódicas do centro linear $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, usando a teoria de “averaging” de ordem k , para $k = 1, 2, 3$. Claramente, $\tilde{H}_k(m, n) \leq \tilde{H}(m, n) \leq H(m, n)$. Note que até agora não havia nenhuma estimativa para $H(m, n)$ quando

- (a) $m = 4$ e $n > 13$, ou $m > 20$ e $n = 4$,
- (b) $m = 5$ e $n > 9$, ou $m > 9$ e $n = 5$,
- (c) $m = 6$ e $n > 7$, ou $m > 7$ e $n = 6$,
- (d) $m, n > 7$.

2.2 “Averaging” de primeira ordem em equações de Liénard

Nesta seção aplicaremos a teoria de “averaging” de primeira ordem nas equações diferenciais polinomiais de Liénard para obter uma cota inferior de $H(m, n)$ para todo $m, n \geq 1$.

Teorema 2.2.1. *Se para cada $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, o número máximo de ciclos limites de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard (2.2) bifurcando de órbitas periódicas do centro $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, usando a teoria de “averaging” de primeira ordem é $\tilde{H}_1(m, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.*

Do Teorema 2.2.1 segue imediatamente a Tabela 2.2.

Para aplicar a teoria de “averaging” de primeira ordem escrevemos o sistema (2.2) com $k = 1$, em coordenadas polares (r, θ) onde $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$. Nessas coordenadas, o sistema (2.2) é escrito na forma padrão para aplicar a teoria de “averaging”. Se escrevemos

Tabela 2.2: Valores de $\tilde{H}_1(m, n)$.

		n																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	48	49	50	
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
4	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
5	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
6	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
7	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
8	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
9	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
10	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
11	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
12	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
13	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
48	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
49	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓			

$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$, então o sistema (6.26) fica

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^i \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta \right), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \operatorname{sen} \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^{i+1} \theta \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tomando θ como nova variável independente o sistema (2.3) fica

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^i \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta \right) + O(\varepsilon^2).$$

A correspondente função f_1 dada por (1.13) fica:

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^i \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta \right) d\theta.$$

Para calcular a exata expressão de f_1 usamos as seguintes fórmulas

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1} \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k} \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \alpha_{2k} \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^k \theta \operatorname{sen} \theta d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Daí

$$f_1(r) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ par}}}^n a_i \alpha_i r^{i+1}. \quad (2.4)$$

Então, o polinômio $f_1(r)$ tem até $[n/2]$ raízes positivas, e podemos escolher os coeficientes a_i com i par de tal modo que $f_1(r)$ tenha exatamente $[n/2]$ raízes positivas simples. Assim o Teorema 2.2.1 está provado.

2.3 “Averaging” de segunda ordem em equações de Liénard

Aplicaremos a teoria de “averaging” de segunda ordem nas equações diferenciais polinomiais de Liénard para obter uma cota inferior de $H(m, n)$ para todo $m, n \geq 1$.

Teorema 2.3.1. *Se para cada $k = 2$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, o número máximo de ciclos limites de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard (2.2) bifurcando de órbitas periódicas do centro $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, usando a teoria de “averaging” de segunda ordem é $\tilde{H}_2(m, n) = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$.*

Demonstração: Para demonstrar o Teorema 2.3.1 usaremos a teoria de “averaging” de segunda ordem.

Se escrevemos $f_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $f_2(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$, $g_1(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ e $g_2(x) = \sum_{i=0}^m d_i x^i$, então o sistema (2.2) com $k = 2$ em coordenadas polares (r, θ) , $r > 0$ fica

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right) - \\ &\quad \varepsilon^2 \left(\sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^m d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^{i+1} \theta \right) - \\ &\quad \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^m d_i r^i \cos^{i+1} \theta \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tomando θ como nova variável independente, o sistema (2.5) é escrito como

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^3),$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sen^2 \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^i \theta \sen \theta, \\
F_2(\theta, r) &= \left(\sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sen^2 \theta + \sum_{i=0}^m d_i r^i \cos^i \theta \sen \theta \right) - \\
&\quad r \sen \theta \cos \theta \left(\sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sen \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^{i-1} \cos^i \theta \right)^2.
\end{aligned}$$

Agora determinaremos a correspondente função f_2 definida em (1.15). Para isso, calculamos:

$$\frac{d}{dr} F_1(\theta, r) = \sum_{i=0}^n (i+1) a_i r^i \cos^i \theta \sen^2 \theta + \sum_{i=1}^m i b_i r^{i-1} \cos^i \theta \sen \theta,$$

$$\text{e } \int_0^\theta F_1(\phi, r) d\phi =$$

$$\begin{aligned}
& a_1 r^2 (\alpha_{11} \sen \theta + \alpha_{21} \sen(3\theta)) + \dots \\
& + a_l r^{l+1} \left(\alpha_{1l} \sen \theta + \alpha_{2l} \sen(3\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{l+3}{2})l} \sen((l+2)\theta) \right) + \\
& a_0 r (\alpha_{10} \theta + \alpha_{20} \sen(2\theta)) + \dots \\
& + a_b r^{b+1} \left(\alpha_{1b} \theta + \alpha_{2b} \sen(2\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{b+4}{2})b} \sen(b+2)\theta \right) \\
& b_0 (1 - \cos \theta) + \dots + b_m r^m \left(\frac{1}{m+1} (1 - \cos^{m+1} \theta) \right),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde l é o maior número ímpar menor ou igual à n , b é o maior número par menor ou igual à n , e α_{ij} são constantes reais que aparecem durante os cálculos de $\int_0^\theta \cos^i \phi \sen^2 \phi d\phi$ para todo i . Sabemos de (2.4) que f_1 é identicamente nula se e somente se $a_i = 0$ para todo i par.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta &= 0, & i = 0, 1, \dots \\
\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}((2k+1)\theta) \, d\theta &= 0, & i, k = 0, 1, \dots \\
\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta &= 0, & i = 0, 1, \dots \\
\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta &= A_{2i} \neq 0, & i = 0, 1, \dots \\
\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta &= 0, & i = 0, 1, \dots \\
\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}((2k+1)\theta) \, d\theta &= B_{2i}^{2k+1} \neq 0, & i, k = 0, 1, \dots \\
\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}((2k+1)\theta) \, d\theta &= 0, & i, k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(\theta, r) y_1(\theta, r) d\theta = \\
&\sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ímpar}}}^l -\frac{i+1}{j+1} a_i b_j r^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \\
&\sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ímpar}}}^l j a_i b_j r^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \operatorname{sen} \theta \left(\alpha_{1i} \operatorname{sen} \theta + \dots + \alpha_{\frac{i+3}{2}i} \operatorname{sen}((i+2)\theta) \right) d\theta = \\
&r \left(\tilde{\alpha}_{10} a_1 b_0 + (\tilde{\alpha}_{12} a_1 b_2 + \tilde{\alpha}_{30} a_3 b_0) r^2 + \dots + \sum_{i+j=l+k} \tilde{\alpha}_{ij} a_i b_j r^{l+k-1} \right),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}_{ij} = -\frac{1+i}{j+i}A_{i+j+1} + j\left(\alpha_{1i}B_j^1 + \alpha_{2i}B_j^2 + \dots + \alpha_{\frac{i+3}{2}i}B_j^{i+2}\right)$, para todo i, j e k sendo o maior número par menor ou igual à m .

Além disso,

$$\int_0^{2\pi} F_2(\theta, r)d\theta = \sum_{i=0}^b c_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta d\theta +$$

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^k \sum_{\substack{l=1 \\ l \text{ ímpar}}}^l 2r^{i+j} a_i b_j \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta =$$

$$A_0 c_0 r + \dots + A_b c_b r^{b+1} + 2\left(A_2 a_1 b_0 r + A_4(a_3 b_0 + a_1 b_2)r^3 + \dots + A_{l+k+1} r^{l+k} \sum_{i+j=l+k} a_i b_j\right).$$

Então $f_2(r)$ é o polinômio

$$r\left(\rho_{10}a_1b_0 + (\rho_{12}a_1b_2 + \rho_{30}a_3b_0)r^2 + (\rho_{14}a_1b_4 + \rho_{32}a_3b_2 + \rho_{50}a_5b_0)r^4 + \dots + \rho_{lk}a_l b_k r^{l+k-1} + A_0 c_0 + A_2 c_2 r^2 + \dots + A_b c_b r^b\right), \quad (2.7)$$

onde $\rho_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij} + 2A_{i+j+1}$ para todo i, j . Note que para encontrar raízes positivas de f_2 devemos encontrar os zeros de um polinômio em r^2 de grau igual à $\max\left\{\frac{l+k-1}{2}, \frac{b}{2}\right\}$.

Temos que $\frac{b}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$ e $\frac{l+k-1}{2} = \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]$. Veja Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Valores de $(l+k-1)/2$ escritos usando a função parte inteira.

n	m	l	k	$(l+k-1)/2$	$[(n-1)/2] + [m/2]$
ímpar	par	n	m	$(n+m-1)/2$	$(n-1)/2 + m/2$
par	par	n-1	m	$(n-1+m-1)/2$	$((n-1)-1)/2 + m/2$
ímpar	ímpar	n	m-1	$(n+m-1-1)/2$	$(n-1)/2 + (m-1)/2$
par	ímpar	n-1	m-1	$(n-1+m-1-1)/2$	$((n-1)-1)/2 + (m-1)/2$

Concluimos que f_2 tem até $\max\{[(n-1)/2] + [m/2], [n/2]\}$ raízes positivas. Além disso, podemos escolher os coeficientes a_i, b_j, c_k de tal modo que (2.7) tenha exatamente $\max\{[(n-1)/2] + [m/2], [n/2]\}$ raízes positivas. Assim o Teorema 2.3.1 está provado. ■

Tabela 2.4: Valores de $\tilde{H}_2(m, n)$. Os valores em negrito melhoram os correspondentes valores da Tabela 2.2.

		n																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	48	49	50	
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→		
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	...	24	25	→		
3	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	...	24	25	→		
4	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	...	25	26	→		
5	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	...	25	26	→		
6	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9	...	26	27	→		
7	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9	...	26	27	→		
8	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	...	27	28	→		
9	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	...	27	28	→		
10	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	...	28	29	→		
11	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	...	28	29	→		
12	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	...	29	30	→		
13	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	...	29	30	→		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
48	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	...	47	48	→		
49	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	...	47	48	→		
50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓			

2.4 “Averaging” de terceira ordem em equações de Liénard

Aplicaremos a teoria de “averaging” de terceira ordem nas equações diferenciais polinomiais de Liénard para obter uma cota inferior de $H(m, n)$ para todo $m, n \geq 1$.

Teorema 2.4.1. *Se para cada $k = 3$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, o número máximo de ciclos limites de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Liénard (2.2) bifurcando de órbitas periódicas do centro $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, usando a teoria de “averaging” de terceira ordem é $\tilde{H}_3(m, n) = \left\lceil \frac{n + m - 1}{2} \right\rceil$.*

Escrevendo $f_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, f_2(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, f_3(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i, g_1(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, g_2(x) = \sum_{i=0}^m d_i x^i$ e $g_3(x) = \sum_{i=0}^m q_i x^i$, um sistema equivalente ao (2.2) com $k = 3$ será encontrado. Considerando-o em coordenadas polares (r, θ) teremos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\operatorname{sen} \theta (\varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 C), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\cos \theta}{r} (\varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 C), \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^n a_i r^{i+1} \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta + \sum_{i=0}^m b_i r^i \cos^i \theta, \\ B &= \sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta + \sum_{i=0}^m d_i r^i \cos^i \theta, \\ C &= \sum_{i=0}^n p_i r^{i+1} \cos^i \theta \operatorname{sen} \theta + \sum_{i=0}^m q_i r^i \cos^i \theta. \end{aligned}$$

Tomando θ como nova variável independente o sistema (2.8) fica

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon A \operatorname{sen} \theta + \varepsilon^2 \left(B \operatorname{sen} \theta - \frac{A^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{r} \right) + \\ &\varepsilon^3 \left(\frac{A^3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}{r^2} - \frac{2AB \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{r} + C \operatorname{sen} \theta \right) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sabemos por (2.4) que f_1 é identicamente nula se e somente se $a_i = 0$ para todo i par, e por (2.7) obtemos que f_2 é identicamente nula se e somente se os coeficientes a_i , b_j e c_k satisfazem

$$c_\mu = \frac{1}{A_\mu} \sum_{\substack{i+j=\mu+1 \\ i \text{ ímpar, } j \text{ par}}} \rho_{i,j} a_i b_j \quad (2.10)$$

onde μ é par, A_μ e $\rho_{i,j}$ são dados na Seção 2.3.

Para aplicar a teoria de “averaging” de terceira ordem precisamos calcular a correspondente função f_3 definida em (1.17). A demonstração do Teorema 2.4.1 será consequência direta dos próximos lemas.

A demonstração do próximo lema segue de cálculos pesados e será omitida.

Lema 2.4.2. *As correspondentes funções $y_1(\theta, r)$ e $y_2(\theta, r)$ da teoria de “averaging” de terceira ordem são expressas por (2.6) e*

$$y_2(\theta, r) = C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + \dots + C_\lambda r^\lambda,$$

respectivamente, onde $\lambda = \max\{2n + 1, 2m - 1\}$ e

$$\begin{aligned} C_{2k+1} = & \sum_{i+j=2k} c_{ij}^0 a_i a_j + \sum_{i+j=2k+2} d_{ij}^0 b_i b_j + \sum_{i+j=2k+1} e_{ij}^0 a_i b_j \theta + \\ & \sum_{i+j=2k} f_{ij}^0 a_i a_j \theta^2 + d_{2k+1} + c_{2k} \theta + \sum_{i+j=2k+2} b_i b_j \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_{2i+1}^0 \cos(2i+1)\theta \right) + \\ & \left(\sum_{i+j=2k} a_i a_j + \sum_{i+j=2k+2} b_i b_j + \sum_{i+j=2k+1} a_i b_j \theta + d_{2k+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_{2i+2}^0 \cos(2i+2)\theta \right) + \\ & \sum_{i+j=2k+1} a_i b_j \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_{2i+1}^1 \sin(2i+1)\theta \right) + \\ & \left(\sum_{i+j=2k+1} a_i b_j + \sum_{i+j=2k} a_i a_j \theta + c_{2k} \right) \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_{2i+2}^1 \sin(2i+2)\theta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2k} = & \sum_{i+j=2k-1} c_{ij}^1 a_i a_j + \sum_{i+j=2k+1} d_{ij}^1 b_i b_j + \sum_{i+j=2k} e_{ij}^1 a_i b_j \theta + \\
& \left(\sum_{i+j=2k-1} a_i a_j + \sum_{i+j=2k+1} b_i b_j + \sum_{i+j=2k} a_i b_j \theta \right) \left(\sum_{i=0}^{k+1} b_{2i+1}^0 \cos(2i+1)\theta \right) + \\
& \left(\sum_{i+j=2k+1} b_i b_j \right) \left(\sum_{i=0}^{k+1} b_{2i+2}^0 \cos(2i+2)\theta \right) + \\
& \left(\sum_{i+j=2k} a_i b_j + c_{2k-1} + \sum_{i+j=2k} a_i b_j \theta \right) \left(\sum_{i=0}^{k+1} b_{2i+1}^1 \sin(2i+1)\theta \right) + \\
& \left(\sum_{i+j=2k} a_i b_j \right) \left(\sum_{i=0}^{k+1} b_{2i+2}^1 \sin(2i+2)\theta \right),
\end{aligned}$$

onde $a_{2i+1}^l, a_{2i+2}^l, b_{2i+1}^l, a_{2i+2}^l, c_{ij}^l, d_{ij}^l, e_{ij}^l, f_{ij}^l$ são constantes reais para $l = 1, 2$ and $k = 0, 1, \dots, \frac{\lambda}{2}$.

Lema 2.4.3. A integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(s, r) (y_1(s, r))^2 ds$ é o polinômio

$$\pi(D_0 + D_1 r + D_2 r^2 + \dots + D_\kappa r^\kappa) \quad (2.11)$$

$$\text{onde } \kappa = \begin{cases} n + 2m - 1 & \text{se } m > n + 1 \text{ e } m \text{ ou } n \text{ par,} \\ n + 2m - 2 & \text{se } m > n + 1 \text{ e } m \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ 3n + 1 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ 3n & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned}
D_\chi = & \sum_{i+j+k=\chi-1} \beta_{ijk}^1 a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=\chi+1} \gamma_{ijk}^1 a_i b_j b_k + \\
& \sum_{i+j+k=\chi} \delta_{ijk}^1 a_i a_j b_k,
\end{aligned}$$

para $\chi = 0, 1, \dots, \kappa$ onde $\beta_{ijk}^1, \gamma_{ijk}^1, \delta_{ijk}^1$ são constantes reais.

Demonstração: Denotaremos

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(s, r) = h_1(r) + h_2(r),$$

onde

$$h_1(r) = \sum_{i=1}^n i(i+1)a_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin^2 \theta,$$

$$h_2(r) = \sum_{i=2}^m i(i-2)b_i r^{i-2} \cos^i \theta \sin \theta,$$

e

$$(y_1(s, r))^2 = g_1^2(r) + 2g_1(r)g_2(r) + g_2^2(r),$$

com

$$g_1(r) = s_1(r) + s_2(r),$$

onde

$$s_1(r) = a_1 r^2 (\alpha_{11} \sin \theta + \alpha_{21} \sin(3\theta)) + \dots$$

$$+ a_l r^{l+1} \left(\alpha_{1l} \sin \theta + \alpha_{2l} \sin(3\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{l+3}{2})l} \sin((l+2)\theta) \right),$$

$$s_2(r) = a_0 r (\alpha_{10} \theta + \alpha_{20} \sin(2\theta)) + \dots$$

$$+ a_b r^{b+1} \left(\alpha_{1b} \theta + \alpha_{2b} \sin(2\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{b+4}{2})b} \sin(b+2)\theta \right),$$

e

$$g_2(r) = b_0(1 - \cos \theta) + \dots + b_m r^m \left(\frac{1}{m+1} (1 - \cos^{m+1} \theta) \right).$$

Então

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(s, r) (y_1(s, r))^2 = h_1(r) (g_1^2(r) + 2g_1(r)g_2(r) + g_2^2(r)) +$$

$$h_2(r) (g_1^2(r) + 2g_1(r)g_2(r) + g_2^2(r)).$$

De

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta = M_1(2i, \rho_1, \rho_2) \neq 0, \quad \rho_1, \rho_2 \text{ ímpares},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1, \rho_2 \text{ ímpares},$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$\int_0^{2\pi} h_1(r) s_1(r)^2 d\theta = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^l \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^l \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^b \zeta_{ijk}^1 a_i a_j a_k r^{i-1} r^{j+1} r^{k+1}$$

onde $\zeta_{ijk}^1 = \sum_{\substack{\rho_1 = 1 \\ \rho_1 \text{ ímpar}}}^{k+2} \sum_{\substack{\rho_2 = 1 \\ \rho_2 \text{ ímpar}}}^{j+2} \delta_{\rho_1 \rho_2}^{jk} i(i+1) \alpha_{\frac{\rho_1+1}{2}j} \alpha_{\frac{\rho_2+1}{2}k} M_1(i, \rho_1, \rho_2)$, com

$$\delta_{\rho_1 \rho_2}^{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_1 = \rho_2 \text{ e } j = k, \\ 2 & \text{se } \rho_1 \neq \rho_2 \text{ ou } j \neq k. \end{cases}$$

Assim, $H_1(r) = \int_0^{2\pi} h_1(r) s_1(r)^2 d\theta$ é um polinômio em r de grau $3n - 1$ se n é par e $3n$ se n é ímpar.

Sabendo que

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) d\theta = M_2(i, \rho_1, 0) \neq 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar}, \rho_2 \text{ par},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta = M_3(2i, \rho_1, \rho_2) \neq 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar}, \rho_2 \text{ par},$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 2h_1(r) s_1(r) s_2(r) d\theta = & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^l \sum_{i=1}^n \zeta_{ijk}^2 a_i a_j a_k r^{i-1} r^{j+1} r^{k+1} + \\ & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^l \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ímpar}}}^l \zeta_{ijk}^3 a_i a_j a_k r^{i-1} r^{j+1} r^{k+1}, \end{aligned}$$

onde $\zeta_{ijk}^\lambda = \sum_{\substack{\rho_1 = 1 \\ \rho_1 \text{ ímpar}}}^{k+2} \sum_{\substack{\rho_2 = 0 \\ \rho_2 \text{ par}}}^{j+2} 2i(i+1) \alpha_{\frac{\rho_1+1}{2}j} \alpha_{\frac{\rho_2+2}{2}k} M_\lambda(i, \rho_1, \rho_2)$, $\lambda = 2, 3$.

Assim o grau do polinômio $H_2(r) = \int_0^{2\pi} 2h_1(r) s_1(r) s_2(r) d\theta$ em r é $3n$.

De

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta (\sin^2 \theta) \theta^2 d\theta &= M_4(i, 0, 0) \neq 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta &= M_5(2i, \rho_1, \rho_2) \neq 0, \quad \rho_1, \rho_2 \text{ par}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta &= 0, \quad \rho_1, \rho_2 \text{ par}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta \sin(\rho_1 \theta) \theta d\theta &= M_6(i, \rho_1, 0) \neq 0, \quad \rho_1 \text{ par}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h_1(r) s_2^2(r) d\theta = & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{i=1}^n \zeta_{ijk}^4 a_i a_j a_k r^{i-1} r^{j+1} r^{k+1} + \\ & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^n \zeta_{ijk}^5 a_i a_j a_k r^{i-1} r^{j+1} r^{k+1} + \\ & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{i=1}^n \zeta_{ijk}^6 a_i a_j a_k r^{i-1} r^{j+1} r^{k+1}, \end{aligned}$$

onde $\zeta_{ijk}^\lambda = \sum_{\substack{\rho_1=0 \\ \rho_1 \text{ par}}}^{k+2} \sum_{\substack{\rho_2=0 \\ \rho_2 \text{ par}}}^{j+2} \delta_{\rho_1 \rho_2}^{jk} i(i+1) \alpha_{\frac{\rho_1+2}{2} j} \alpha_{\frac{\rho_2+2}{2} k} M_\lambda(i, \rho_1, \rho_2)$, $\lambda = 4, 5, 6$ com $\delta_{\rho_1 \rho_2}^{jk}$ como

acima. Assim $H_3(r) = \int_0^{2\pi} h_1(r) s_2^2(r) d\theta$ é um polinômio em r de grau $3n + 1$ se n é par e $3n - 1$ se n é ímpar.

Sabendo que

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}(\rho_1 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1 = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta (\operatorname{sen}^2 \theta) \theta d\theta = M_7(i, 0, 0) \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta (\operatorname{sen}^2 \theta) \theta d\theta = 0,$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$\int_0^{2\pi} h_1(r)(s_1(r) + s_2(r))g_2(r)d\theta = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{i=1}^n \zeta_{ijk}^7 a_i a_j b_k r^{i-1} r^{j+1} r^k,$$

onde $k+i$ é ímpar e $\zeta_{ijk}^7 = i(i+1)\alpha_{1j}M_7(i, 0, 0)$. Assim $H_4(r) = \int_0^{2\pi} h_1(r)(s_1(r)+s_2(r))g_2(r)d\theta$ é um polinômio em r de grau $2n+m-1$ se m é par, $2n+m$ se n é par e m ímpar, e $2n+m-2$ se n, m são ímpares.

As igualdades

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = M_8(i, 0, 0) \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = 0,$$

para $i = 1, 2, \dots$ implicam que

$$\int_0^{2\pi} h_1(r)g_2^2(r)d\theta = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^n \zeta_{ijk}^8 a_i b_j b_k r^{i-1} r^j r^k,$$

onde $\zeta_{ijk}^8 = \delta_{jk}i(i+1)M_8(i, 0, 0)$ com $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 2 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$

Assim $H_5(r) = \int_0^{2\pi} h_1(r)g_2^2(r)d\theta$ é um polinômio em r de grau $2m+n-1$ se n ou m são pares e $2m+n-2$ se n e m são ímpares.

De

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1, \rho_2 \text{ ímpar}$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$H_6(r) = \int_0^{2\pi} h_2(r) s_1^2(r) d\theta = 0.$$

Das integrais

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta (\sin \theta) \theta \sin(\rho_1 \theta) d\theta = M_9(i, \rho_1, 0) \neq 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta (\sin \theta) \theta \sin(\rho_1 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \sin(\rho_1 \theta) \sin(\rho_2 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1 \text{ par}, \rho_2 \text{ ímpar},$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$\int_0^{2\pi} h_2(r) s_1(r) s_2(r) d\theta = \sum_{\substack{l=1 \\ k \text{ ímpar}}} \sum_{\substack{b \\ j \text{ par}}} \sum_{\substack{m \\ i \text{ par}}} \zeta_{ijk}^9 b_i a_j a_k r^{i-2} r^{j+1} r^{k+1},$$

onde $\zeta_{ijk}^9 = \sum_{\substack{\rho_1=1 \\ \rho_1 \text{ ímpar}}}^{l+2} i(i-1) \alpha_{1j} \alpha_{\frac{\rho_1+1}{2}k} M_9(i, \rho_1, 0)$. Assim $H_7(r) = \int_0^{2\pi} h_2(r) s_1(r) s_2(r) d\theta$ é

um polinômio em r de grau $2n + m - 1$ se m é par e $2m + n - 2$ se m é ímpar.

As fórmulas

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta (\text{sen } \theta) \theta^2 d\theta &= M_{10}(i, 0, 0) \neq 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta (\text{sen } \theta) \theta \text{sen}(\rho_1 \theta) d\theta &= 0, & \rho_1 \text{ par}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta (\text{sen } \theta) \theta \text{sen}(\rho_1 \theta) d\theta &= M_{11}(i, \rho_1, 0) \neq 0, & \rho_1 \text{ par}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \text{sen } \theta \text{sen}(\rho_1 \theta) \text{sen}(\rho_2 \theta) d\theta &= 0, & \rho_1, \rho_2 \text{ ímpar}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots$ implicam que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h_2(r) s_2^2(r) d\theta = & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{i=1}^m \zeta_{ijk}^{10} b_i a_j a_k r^{i-2} r^{j+1} r^{k+1} + \\ & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^b \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{\substack{i=1 \\ k \text{ ímpar}}}^m \zeta_{ijk}^{11} b_i a_j a_k r^{i-2} r^{j+1} r^{k+1}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta_{ijk}^{10} &= \delta_{jk}^1 i(i-1) \alpha_{1j} \alpha_{1k} M_{10}(i, \rho_1, 0), \\ \zeta_{ijk}^{11} &= \sum_{\substack{\rho_1=1 \\ \rho_1 \text{ par}}}^{b+2} \delta_{jk\rho_1}^2 i(i-1) \alpha_{1j} \alpha_{\frac{\rho_1+2}{2}k} M_{11}(i, \rho_1, 0), \end{aligned}$$

com

$$\delta_{jk}^1 = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 2 & \text{se } j \neq k, \end{cases} \quad \delta_{jk\rho_1}^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \rho_1 = 0, \\ 2 & \text{se } j \neq k, \rho_1 \neq 0. \end{cases}$$

Assim $H_8(r) = \int_0^{2\pi} h_2(r) s_2^2(r) d\theta$ é um polinômio em r de grau $m+2n$ se n é par e $m+2n-2$ se n é ímpar.

De

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\rho_1 \theta) d\theta = M_{12}(i, \rho_1, 0) \neq 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\rho_1 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1 \text{ ímpar},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta (\operatorname{sen} \theta) \theta d\theta = M_{13}(i, 0, 0) \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\rho_1 \theta) d\theta = M_{14}(i, \rho_1, 0) \neq 0, \quad \rho_1 \text{ par},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\rho_1 \theta) d\theta = 0, \quad \rho_1 \text{ par},$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h_2(r)(s_1(r) + s_2(r))g_2(r)d\theta = & \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^l \sum_{i=1}^m \zeta_{ijk}^{12} b_i a_j b_k r^{i-2} r^{j+1} r^k + \\ & \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^b \sum_{i=1}^m \zeta_{ijk}^{13} b_i a_j b_k r^{i-2} r^{j+1} r^k + \\ & \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ par}}}^l \sum_{i=1}^m \zeta_{ijk}^{14} b_i a_j b_k r^{i-2} r^{j+1} r^k, \end{aligned}$$

onde

$$\zeta_{ijk}^{12} = \begin{cases} \sum_{j+2}^{j+2} \frac{i(i-1)}{k+2} \alpha_{\frac{\rho_1+1}{2}j} M_{12}(i, \rho_1, 0) & \text{para } k+i \text{ par,} \\ \rho_1 = 1 \\ \rho_1 \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } k+i \text{ ímpar,} \end{cases}$$

$$\zeta_{ijk}^{13} = \frac{i(i-1)}{k+1} \alpha_{1j} M_{13}(i, 0, 0),$$

$$\zeta_{ijk}^{14} = \begin{cases} \sum_{j+2}^{j+2} \frac{i(i-1)}{k+2} \alpha_{\frac{\rho_1+2}{2}j} M_{14}(i, \rho_1, 0) & \text{para } k+i \text{ par,} \\ \rho_1 = 0 \\ \rho_1 \text{ par} \\ 0 & \text{para } k+i \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Assim $H_9(r) = \int_0^{2\pi} h_2(r)(s_1(r) + s_2(r))g_2(r)d\theta$ é um polinômio em r de grau $2m + n - 1$ se n é par e $2m + n - 2$ se n é ímpar.

Das integrais

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta d\theta = 0,$$

para $i = 1, 2, \dots$ temos que

$$H_{10}(r) = \int_0^{2\pi} h_2(r)g_2^2(r)d\theta = 0.$$

Concluimos que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(s, r)(y_1(s, r))^2 ds = \sum_{i=1}^{10} H_i$ cujo grau é o maior dos graus dos H_i . Assim concluimos a prova do lema. ■

As demonstrações dos próximos três lemas são similares à prova do lema anterior e serão omitidas.

Lema 2.4.4. *A integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(s, r)(y_2(s, r))ds$ é o polinômio*

$$\frac{\pi}{r}(E_0 + E_1 r + E_2 r^2 + \dots + E_\vartheta r^\vartheta), \quad (2.12)$$

$$\text{onde } \vartheta = \begin{cases} n + 2m & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ n + 2m - 1 & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ 3n + 2 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ 3n + 1 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \end{cases}$$

e

$$E_{2l+1} = \sum_{i+j+k=2l-1} \beta_{ijk}^2 a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l+1} \gamma_{ijk}^2 a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l} \delta_{ij}^2 b_i c_j +$$

$$\sum_{i+j=2l} \eta_{ij}^2 a_i d_j + \sum_{\substack{i+j+k=2l \\ i \text{ par}}} v_{ijk}^2 a_i a_j b_k \pi,$$

$$E_{2l} = \sum_{i+j+k=2l-2} \beta_{ijk}^2 a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l} \gamma_{ijk}^2 a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta_{ij}^2 b_i c_j +$$

$$\sum_{i+j=2l-1} \eta_{ij}^2 a_i d_j + \sum_{\substack{i+j+k=2l-1 \\ i \text{ par}}} v_{ijk}^2 a_i a_j b_k \pi + \sum_{\substack{i+j=2l-2 \\ i \text{ par}}} \varsigma_{ij}^2 a_i c_j \pi,$$

para $l = 0, 1, \dots, \frac{\vartheta}{2}$, onde $\beta_{ijk}^2, \gamma_{ijk}^2, \delta_{ij}^2, \eta_{ij}^2, v_{ijk}^2, \varsigma_{ij}^2$ são constantes reais.

Lema 2.4.5. A integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial F_2}{\partial r}(s, r)(y_1(s, r)) ds$ é o polinômio

$$\frac{\pi}{r}(F_0 + F_1 r + F_2 r^2 + \dots + F_\nu r^\nu), \quad (2.13)$$

$$\text{onde } \nu = \begin{cases} n + 2m & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ n + 2m - 1 & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ 3n + 2 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ 3n + 1 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \end{cases}$$

e

$$F_{2l+1} = \sum_{i+j+k=2l-1} \beta_{ijk}^3 a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l+1} \gamma_{ijk}^3 a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l} \delta_{ij}^3 b_i c_j +$$

$$\sum_{i+j=2l} \eta_{ij}^3 a_i d_j,$$

$$\begin{aligned}
F_{2l} = & \sum_{i+j+k=2l-2} \beta_{ijk}^3 a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l} \gamma_{ijk}^3 a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta_{ij}^3 b_i c_j + \\
& \sum_{i+j=2l-1} \eta_{ij}^3 a_i d_j + \sum_{\substack{i+j+k=2l-1 \\ i \text{ par}}} v_{ijk}^3 a_i a_j b_k \pi + \sum_{\substack{i+j+=2l-2 \\ i \text{ par}}} \varsigma_{ij}^3 a_i c_j \pi,
\end{aligned}$$

para $l = 0, 1, \dots, \frac{\nu}{2}$, onde $\beta_{ijk}^3, \gamma_{ijk}^3, \delta_{ij}^3, \eta_{ij}^3, v_{ijk}^3, \varsigma_{ij}^3$ são constantes reais.

Lema 2.4.6. A integral $\int_0^{2\pi} F_3(s, r) ds$ é o polinômio

$$\frac{\pi}{r} (G_0 + G_2 r^2 + \dots + G_\psi r^\psi), \quad (2.14)$$

$$\text{onde } \psi = \begin{cases} n + 2m & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ n + 2m - 1 & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ 3n + 2 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ 3n + 1 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned}
G_{2l} = & \sum_{i+j+k=2l-2} \beta_{ijk}^4 a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l} \gamma_{ijk}^4 a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta_{ij}^4 b_i c_j + \\
& \sum_{i+j=2l-1} \eta_{ij}^4 a_i d_j + p_{2l-2},
\end{aligned}$$

para $l = 0, 1, \dots, \frac{\psi}{2}$, onde $\beta_{ijk}^4, \gamma_{ijk}^4, \delta_{ij}^4, \eta_{ij}^4, v_{ijk}^4$ são constantes reais.

Pelos lemas 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5 e 2.4.6 obtemos

$$f_3(r) = \frac{\alpha}{r} (M_0 + M_1 r + M_2 r^2 + M_3 r^3 + M_4 r^4 + \dots + M_{\varrho-1} r^{\varrho-1} + M_\varrho r^\varrho),$$

onde

$$M_{2l+1} = \sum_{i+j+k=2l-1} \beta_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l+1} \gamma_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l} \delta_{ij} b_i c_j +$$

$$\sum_{i+j=2l} \eta_{ij} a_i d_j + \sum_{\substack{i+j=2l \\ i \text{ par}}} \nu_{ij} a_i a_j b_k \pi,$$

$$M_{2l} = \sum_{i+j+k=2l} \beta_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j+k=2l-2} \gamma_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta_{ij} b_i c_j$$

$$+ \sum_{i+j=2l-1} \eta_{ij} a_i d_j + \sum_{i+j+k=2l-2} \mu_{ijk} a_i a_j a_k + \varpi_{2l-2} p_{2l-2} +$$

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{\substack{i+j+k=2l-1 \\ i \text{ par}}} \nu_{ijk} a_i a_j b_k + \sum_{\substack{i+j=2l-2 \\ i \text{ par}}} \rho_{ijk} a_i c_j \\ \sum_{\substack{i+j+k=2l-2 \\ i \text{ par}}} \tau_{ijk} a_i a_j a_k \pi^2, \end{array} \right) \pi +$$

para $l = 0, 1, 2, \dots, \frac{\varrho}{2}$ e

$$\varrho = \begin{cases} n + 2m & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ n + 2m - 1 & \text{se } m > n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ 3n + 2 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ par,} \\ 3n + 1 & \text{se } m \leq n + 1 \text{ e } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Aplicando as igualdades $a_i = 0$, para todo i par e (2.10), obtemos que $M_0 = 0$ e $M_\kappa = 0$ para κ ímpar. Além disso, de (2.10) obtemos $c_k = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i \text{ ímpar} \\ j \text{ par}}} a_i b_j = 0$ para $k > b$. Então

$$\sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i \text{ ímpar} \\ j \text{ par}}} a_i b_j = 0$$

$M_k = 0$ para k maior que

$$\lambda = \begin{cases} n + m - 2 & \text{se } n, m \text{ ímpares,} \\ n + m - 1 & \text{se } n \text{ ímpar, } m \text{ par,} \\ n + m - 2 & \text{se } n, m \text{ pares,} \\ n + m - 1 & \text{se } n \text{ par, } m \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Assim

$$f_3(r) = \alpha r (M_2 + M_4 r^2 + M_6 r^4 + \dots + M_{\lambda-4} r^{\lambda-2} + M_{\lambda-2} r^\lambda)$$

onde

$$M_\omega = \sum_{\substack{i+j+k=\omega, \\ i \text{ ímpar} \\ j \text{ par} \\ k \text{ ímpar}}} \beta'_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{\substack{i+j=\omega-1, \\ i \text{ par} \\ j \text{ ímpar}}} \delta'_{ij} b_i c_j + \sum_{\substack{i+j=\omega-1, \\ i \text{ ímpar} \\ j \text{ par}}} \eta'_{ij} a_i d_j + \varpi_\omega p_{\omega-2}.$$

Consequentemente $f_3(z)$ é um polinômio de grau λ na variável r^2 . Então $f_3(z)$ tem até $\left[\frac{n+m-1}{2} \right]$ raízes positivas. Assim, pela teoria de “averaging” de terceira ordem concluímos que este é o número máximo de ciclos limites do sistema diferencial polinomial de Liénard (2.2) com $k = 3$ bifurcando das órbitas periódicas do centro $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. Isto completa a prova do Teorema 2.4.1.

A seguinte Tabela resume nosso resultado.

Tabela 2.5: Valores de $\tilde{H}_3(m, n)$. Os números escritos no estilo 6 coincidem com os correspondentes na Tabela 2.1. Os números escritos no estilo 6 são menores que os correspondentes da Tabela 2.1. Os números escritos no estilo **6** não estão presentes na Tabela 2.1.

		n																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	48	49	50	
m	1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→	
	2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	...	24	25	→	
	3	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	...	25	25	→	
	4	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	...	25	26	→	
	5	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	...	26	26	→	
	6	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	...	26	27	→	
	7	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	...	27	27	→	
	8	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	...	27	28	→	
	9	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	...	28	28	→	
	10	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	...	28	29	→	
	11	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	...	29	29	→	
	12	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	...	29	30	→	
	13	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	...	30	30	→	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	20	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	...	33	34	→	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	48	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	...	47	48	→	
	49	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	...	48	48	→	
	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		

CAPÍTULO 3

RESSONÂNCIA EM \mathbb{R}^4

Estudamos a bifurcação de ciclos limites de centros em dimensão 4 sob uma classe de sistemas diferenciais polinomiais. Nossos resultados estabelecem uma cota superior para o número de ciclos limites. Essa cota dependerá do grau do polinômio de perturbação considerado. Utilizaremos o método de “averaging” de primeira ordem.

3.1 Introdução

O problema de determinar o número máximo de ciclos limites que um dado sistema diferencial pode ter, tornou-se um dos principais tópicos em teoria qualitativa de sistemas diferenciais.

A segunda parte do 16º problema de Hilbert, resumidamente falando é, encontrar uma cota superior para o número de ciclos limites que um sistema diferencial polinomial planar com um determinado grau pode ter.

No capítulo anterior, estávamos interessados em encontrar o número de ciclos limites bifurcando de um centro planar quando o perturbamos dentro de uma classe de sistemas de Liénard. Relacionado a este problema existe um especial interesse na seguinte questão: *Quantos ciclos limites surgem de uma perturbação de um centro no plano?* Este problema tem sido estudado por muitos pesquisadores e muitos resultados foram obtidos, veja, por

exemplo, o livro [9]. Neste capítulo, nossa principal preocupação é trazer este problema para dimensão superior.

Consideremos o seguinte problema: *Quantos ciclos limites surgem das órbitas periódicas de um centro em \mathbb{R}^4 quando o perturbamos dentro de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais?* Mais precisamente, considere

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.1)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix},$$

com p e q inteiros positivos, primos entre si. Fazemos a seguinte perturbação

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x), \quad (3.2)$$

onde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro real e $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um campo vetorial polinomial $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x), F^4(x))$ da forma $F^k = F_1^k + F_N^k$ onde F_i^k , $i = 1, N$ são polinômios homogêneos de grau i nas variáveis $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e N é um número inteiro. Assim o sistema (3.2) fica

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p x_2 + \varepsilon(F_1^1(x) + F_N^1(x)), \\ \dot{x}_2 &= p x_1 + \varepsilon(F_1^2(x) + F_N^2(x)), \\ \dot{x}_3 &= -q x_4 + \varepsilon(F_1^3(x) + F_N^3(x)), \\ \dot{x}_4 &= q x_3 + \varepsilon(F_1^4(x) + F_N^4(x)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assumimos que

$$F_m^n = \sum_{i+j+k+l=m} a_{ijkl}^n x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l,$$

para $m = 1, N$ e $n = 1, 2, 3, 4$.

Nossos resultados são baseados na teoria de “averaging” de primeira ordem. Para aplicá-la, precisamos de uma conveniente mudança de coordenadas a qual escreve o sistema (3.3) na forma padrão de “averaging”.

Lema 3.1.1. *Mudando as variáveis (x_1, x_2, x_3, x_4) à (θ, r, R, s) por*

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(p \theta), & x_2 &= r \operatorname{sen}(p \theta), \\ x_3 &= R \cos(q(\theta + s)), & x_4 &= R \operatorname{sen}(q(\theta + s)), \end{aligned}$$

o sistema (3.3) é transformado em um sistema da forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon H_1(\theta, r, R, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon H_2(\theta, r, R, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{ds}{d\theta} &= \varepsilon H_3(\theta, r, R, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde,

$$\begin{aligned} H_1 &= (F_1^1 + F_N^1) \cos(p \theta) + (F_1^2 + F_N^2) \operatorname{sen}(p \theta), \\ H_2 &= (F_1^3 + F_N^3) \cos(q(\theta + s)) + (F_1^4 + F_N^4) \operatorname{sen}(q(\theta + s)), \\ H_3 &= \frac{1}{qR} ((F_1^4 + F_N^4) \cos(q(\theta + s)) - (F_1^3 + F_N^3) \operatorname{sen}(q(\theta + s))) - \\ &\quad \frac{1}{pr} ((F_1^2 + F_N^2) \cos(p \theta) - (F_1^1 + F_N^1) \operatorname{sen}(p \theta)). \end{aligned}$$

Tomamos ε_f suficientemente pequeno, n arbitrariamente grande e $D_n = (1/n, n) \times (1/n, n) \times \mathbb{S}^1$. Então o campo de vetores do sistema (3.4) está bem definido e é contínuo em $\mathbb{S}^1 \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ onde $\theta, s \in \mathbb{S}^1$, $r, R \in [\frac{1}{n}, n)$ e $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Além disso, ele é 2π -periódico em relação à θ e analítico em relação à (r, R, s, ε) .

Demonstração: O sistema (3.3) nas variáveis (θ, r, R, s) fica

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon \frac{1}{pr} ((F_1^2 + F_N^2) \cos(p \theta) - (F_1^1 + F_N^1) \operatorname{sen}(p \theta)), \\ \dot{r} &= \varepsilon H_1(\theta, r, R, s), \\ \dot{R} &= \varepsilon H_2(\theta, r, R, s), \\ \dot{s} &= \varepsilon H_3(\theta, r, R, s). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Note que para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, $\dot{\theta}(t) > 0$ para cada t onde $(\theta, r, R, s) \in \mathbb{S}^1 \times D_n$. Eliminamos a variável t no sistema acima considerando θ a nova variável independente. O lado direito do novo sistema está bem definido, é contínuo em $\mathbb{R} \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$, é 2π -periódico em relação à variável independente θ e analítico em relação à (r, R, s) . Após uma expansão em relação ao pequeno parâmetro ε , obtemos (3.4). ■

3.2 As funções $h_i(r, R, s)$ para $i = 1, 2, 3$

Nosso objetivo é aplicar o Teorema 1.3.5 em (3.4). Assim o próximo passo é encontrar a correspondente função (1.13). Vamos denotá-la por $h : D_n \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h = (h_1, h_2, h_3)^T$. Para cada $i = 1, 2, 3$, a componente h_i é definida pela fórmula

$$h_i(r, R, s) = \int_0^{2\pi} H_i(\theta, r, R, s) d\theta,$$

onde as funções H_i são dadas em (3.4).

Para calcular a exata expressão de h , usamos o seguinte lema cuja prova pode ser vista em [4].

Lema 3.2.1. *Sejam n um número inteiro não negativo, α e β números reais. As seguintes afirmações se verificam*

$$(a) \cos^n \alpha = \sum_{i=0}^{[n/2]} b_i \cos((n-2i)\alpha);$$

$$(b) \sin^n \alpha = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n/2} b_i \cos((n-2i)\alpha) & \text{se } n \text{ é par;} \\ \sum_{i=0}^{(n-1)/2} b_i \sin((n-2i)\alpha) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(c) *A expressão $\cos^i \alpha \sin^j \alpha \cos^k \beta \sin^l \beta$, onde i, j, k, l são inteiros não negativos, é igual*

à

$$\sum_{m=0}^{[\frac{i+j}{2}]} \sum_{M=0}^{[\frac{k+l}{2}]} c_{mM} \cos(((i+j-2m)\alpha) \pm ((k+l-2M)\beta)),$$

ou

$$\sum_{m=0}^{[\frac{i+j}{2}]} \sum_{M=0}^{[\frac{k+l}{2}]} d_{mM} \sin(((i+j-2m)\alpha) \pm ((k+l-2M)\beta)),$$

se $j+l$ é par ou ímpar, respectivamente.

Lema 3.2.2. *As seguintes afirmações se verificam.*

(a) *Se $N = p + q - 1$ é par então*

$$h_1(r, R, s) = a_1 r + r^{q-1} R^p (b_1 \sin(pqs) + c_1 \cos(pqs)).$$

(b) Se $N = p + q - 1$ é ímpar então

$$h_1(r, R, s) = a_1 r + r^{q-1} R^p (b_1 \operatorname{sen}(pqs) + c_1 \operatorname{cos}(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^1 r^{N-2M} R^{2M},$$

onde a_1, b_1, c_1 e d_M^1 's dependem dos coeficientes de perturbação de $F(x)$.

Demonstração: Escrevemos $H_1 = H_1^1 + H_1^N$ onde $H_1^j = F_j^1 \operatorname{cos}(p\theta) + F_j^2 \operatorname{sen}(p\theta)$ e $h_1 = h_1^1 + h_1^N$ com $h_1^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1^j(\theta, r, R, s) d\theta, j = 1, N$. Assim

$$\begin{aligned} h_1^1(r, R, s) &= \\ &\sum_{i+j+k+l=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^1 r^{i+j} R^{k+l} \operatorname{cos}^{i+1}(p\theta) \operatorname{sen}^j(p\theta) \operatorname{cos}^k(q(\theta+s)) \operatorname{sen}^l(q(\theta+s)) d\theta + \\ &\sum_{i+j+k+l=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^2 r^{i+j} R^{k+l} \operatorname{cos}^i(p\theta) \operatorname{sen}^{j+1}(p\theta) \operatorname{cos}^k(q(\theta+s)) \operatorname{sen}^l(q(\theta+s)) d\theta = \\ &\frac{a_{1000}^1 + a_{0100}^2}{2} r. \end{aligned}$$

Agora calculamos

$$\begin{aligned} h_1^N(r, R, s) &= \\ &\sum_{i+j+k+l=N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^1 r^{i+j} R^{k+l} \operatorname{cos}^{i+1}(p\theta) \operatorname{sen}^j(p\theta) \operatorname{cos}^k(q(\theta+s)) \operatorname{sen}^l(q(\theta+s)) d\theta + \\ &\sum_{i+j+k+l=N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^2 r^{i+j} R^{k+l} \operatorname{cos}^i(p\theta) \operatorname{sen}^{j+1}(p\theta) \operatorname{cos}^k(q(\theta+s)) \operatorname{sen}^l(q(\theta+s)) d\theta. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.2.1 temos que

$$h_1^N(r, R, s) = \sum_{i+j+k+l=N} r^{i+j} R^{k+l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j+1}{2} \rfloor} \sum_{M=0}^{\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor} C_{mM}^{ijkl}(\theta) d\theta$$

onde $C_{mM}^{ijkl}(\theta)$ é

$$\begin{aligned} &C_{mM}^{ijkl} \operatorname{cos}(((i+j+1-2m)p\theta) \pm ((k+l-2M)q(\theta+s))) + \\ &d_{mM}^{ijkl} \operatorname{sen}(((i+j+1-2m)p\theta) \pm ((k+l-2M)q(\theta+s))), \end{aligned}$$

com c_{mM}^{ijkl} e d_{mM}^{ijkl} dependentes dos coeficientes da perturbação. Todas estas integrais em relação à θ são nulas exceto onde

$$p(i + j + 1 - 2m) = q(k + l - 2M). \quad (3.6)$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $p < q$. Como p e q são primos entre si, existe um inteiro positivo n tal que $i + j + 1 - 2m = nq$ e $k + l - 2M = np$. Além disso, é fácil ver que $0 \leq i + j + 1 - 2m \leq N + 1 = p + q$. Então $nq \leq p + q$, isto é, $n \leq \frac{p+q}{q} < 2$. Assim temos duas possibilidades: (1) $k + l - 2M = 0$, ou (2) $k + l - 2M = p$.

Primeiramente consideremos o caso onde $N = p + q - 1$ é par. Se $k + l - 2M = 0$ então $k + l$ é par. Daí $i + j = N - (k + l)$ é par pois N é par, o que contradiz (3.6). Se $k + l - 2M = p$ então (3.6) implica que $k + l + 2m = p$. Assim $m = 0$ e $k + l = p$. Assim $M = 0$ e $i + j = q - 1$. Portanto, neste caso, temos $h_1^N(r, R, s) = r^{q-1} R^p (b_1 \sin(pqs) + c_1 \cos(pqs))$ com b_1 e c_1 dependendo de c_{mM}^{ijkl} e d_{mM}^{ijkl} . Assim demonstramos a afirmação (a).

Agora consideremos o caso $N = p + q - 1$ ímpar. Se $k + l - 2M = 0$ então de (3.6) temos que $k + l + 2m = p + q$. Assim para cada M de 0 a $(N - 1)/2$, obtemos os termos $d_M^1 r^{N-2M} R^{2M}$. Se $k + l - 2M = p$ então (3.6) implica que $k + l + 2m = p$. Assim $m = 0$ e $k + l = p$. Consequentemente, $M = 0$ e $i + j = q - 1$. Finalmente temos $h_1^N(r, R, s) = r^{q-1} R^p (b_1 \sin(pqs) + c_1 \cos(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} r^{N-2M} R^{2M}$ com b_1 e c_1 dependentes de c_{mM}^{ijkl} e d_{mM}^{ijkl} . Isto demonstra a afirmação (b). ■

Lema 3.2.3. *As seguintes afirmações se verificam.*

(a) *Se $N = p + q - 1$ é par então*

$$h_2(r, R, s) = a_2 R + r^q R^{p-1} (b_2 \sin(pqs) + c_2 \cos(pqs)).$$

(b) *Se $N = p + q - 1$ é ímpar então*

$$h_2(r, R, s) = a_2 R + r^q R^{p-1} (b_2 \sin(pqs) + c_2 \cos(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^2 r^{N-(2M+1)} R^{2M+1},$$

onde a_2 , b_2 , c_2 e d_M^2 dependem dos coeficientes da perturbação.

Demonstração: Como no Lema 3.2.2 escrevemos

$$H_2 = H_2^1 + H_2^N \text{ onde } H_2^j = F_j^3 \cos(q(\theta + s)) + F_j^4 \text{sen}(q(\theta + s)), h_2 = h_2^1 + h_2^N \text{ e } h_2^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2^j(\theta, r, R, s) d\theta, j = 1, N. \text{ Assim}$$

$$h_2^1(r, R, s) =$$

$$\sum_{i+j+k+l=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^3 r^{i+j} R^{k+l} \cos^i(p\theta) \text{sen}^j(p\theta) \cos^{k+1}(q(\theta + s)) \text{sen}^l(q(\theta + s)) d\theta +$$

$$\sum_{i+j+k+l=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^4 r^{i+j} R^{k+l} \cos^i(p\theta) \text{sen}^j(p\theta) \cos^k(q(\theta + s)) \text{sen}^{l+1}(q(\theta + s)) d\theta =$$

$$\frac{a_{0010}^3 + a_{0001}^4}{2} R.$$

Agora calculamos $h_2^N(r, R, s)$. Encontramos uma similar expressão à obtida no Lema 3.2.2 exceto que os termos da integral que não são necessariamente nulos são dados por:

$$p(i + j - 2m) = q(k + l + 1 - 2M). \quad (3.7)$$

Primeiramente, consideramos o caso $N = p + q - 1$ par. Se $k + l + 1 - 2M = 0$ então $k + l$ é ímpar. Daí $i + j$ é ímpar o que contradiz (3.7). Se $k + l + 1 - 2M = p$ então (3.7) implica que $k + l + 2m = p - 1$. Assim $p - 1 + 2M + 1 + 2m = p$ e $m = M = 0$. Logo $k + l = p - 1$ e $i + j = q$.

No caso $N = p + q - 1$ ímpar temos o seguinte. Se $k + l + 1 - 2M = 0$ então (3.7) implica que $k + l + 2m = N$. Assim para cada M de 0 a $(N - 1)/2$, obtemos os termos $d_M^2 r^{N-(2M+1)} R^{2M+1}$. Se $k + l + 1 - 2M = p$ obtemos o mesmo que no caso N par, isto é, $k + l = p - 1$ e $i + j = q$.

Resumindo, se N é par então

$$h_2^N(r, R, s) = r^q R^{p-1} (b_2 \text{sen}(pqs) + c_2 \cos(pqs)),$$

e se N é ímpar

$$h_2^N(r, R, s) = r^q R^{p-1} (b_2 \text{sen}(pqs) + c_2 \cos(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^2 r^{N-(2M+1)} R^{2M+1},$$

com b_2 , c_2 e d_M^2 dependendo de c_{mM}^{ijkl} e d_{mM}^{ijkl} . Isto conclui a demonstração do lema. ■

Lema 3.2.4. *As seguintes afirmações se verificam.*

(a) *Se $N = p + q - 1$ é par então $h_3(r, R, s)$ é*

$$a_3 + r^{q-2} R^p (b_3 \operatorname{sen}(pqs) + c_3 \operatorname{cos}(pqs)) + r^q R^{p-2} (d_3 \operatorname{sen}(pqs) + e_3 \operatorname{cos}(pqs)).$$

(b) *Se $N = p + q - 1$ é ímpar então $h_3(r, R, s)$ é*

$$a_3 + r^{q-2} R^p (b_3 \operatorname{sen}(pqs) + c_3 \operatorname{cos}(pqs)) + r^q R^{p-2} (d_3 \operatorname{sen}(pqs) + e_3 \operatorname{cos}(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^3 r^{N-(2M+1)} R^{2M},$$

onde a_3 , b_3 , c_3 , d_3 , e_3 e d_M^3 dependem dos coeficientes da perturbação.

Demonstração: Escrevemos $H_3 = H_3^1 + H_3^N$ onde

$$H_3^j = \frac{1}{Rq} (F_j^4 \operatorname{cos}(q(\theta + s)) - F_j^3 \operatorname{sen}(q(\theta + s))) - \frac{1}{rp} (F_j^2 \operatorname{cos} \theta - F_j^1 \operatorname{sen} \theta),$$

e $h_3 = h_3^1 + h_3^N$ onde $h_3^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_3^j(\theta, r, R, s) d\theta$, $j = 1, N$.

Usando os mesmos argumentos dos Lemas 3.2.2 e 3.2.3 obtemos

$$h_3^1(r, R, s) = \frac{a_{0010}^4 - a_{0001}^3}{2q} - \frac{a_{1000}^2 - a_{0100}^1}{2p}.$$

Agora calculemos $h_3^N(r, R, s)$. De forma análoga aos Lemas 3.2.2 e 3.2.3 obtemos duas somas da forma

$$h_3^N(r, R, s) = \sum_{i+j+k+l=N} r^{i+j} R^{k+l-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} \sum_{M=0}^{\lfloor \frac{k+l+1}{2} \rfloor} C_{mM}^{ijkl}(\theta) d\theta + \sum_{i+j+k+l=N} r^{i+j-1} R^{k+l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{i+j+1}{2} \rfloor} \sum_{M=0}^{\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor} E_{mM}^{ijkl}(\theta) d\theta,$$

onde $C_{mM}^{ijkl}(\theta)$ é

$$c_{mM}^{ijkl} \operatorname{cos}(((i+j-2m)p\theta) \pm ((k+l+1-2M)q(\theta+s))) + d_{mM}^{ijkl} \operatorname{sen}(((i+j-2m)p\theta) \pm ((k+l+1-2M)q(\theta+s))),$$

e $E_{mM}^{ijkl}(\theta)$ é

$$e_{mM}^{ijkl} \cos(((i+j+1-2m)p\theta) \pm ((k+l-2M)q(\theta+s))) + \\ f_{mM}^{ijkl} \sin(((i+j+1-2m)p\theta) \pm ((k+l-2M)q(\theta+s))),$$

com c_{mM}^{ijkl} , d_{mM}^{ijkl} , e_{mM}^{ijkl} e f_{mM}^{ijkl} dependendo dos coeficientes da perturbação.

Na primeira soma os termos cujas integrais não são necessariamente nulas são dadas por

$$p(i+j-2m) = q(k+l+1-2M), \quad (3.8)$$

e na segunda soma por

$$p(i+j+1-2m) = q(k+l-2M). \quad (3.9)$$

Os mesmos argumentos usados no Lemas 3.2.2 e 3.2.3 mostra que, na primeira soma se N é par então os termos que permanecem são $r^q R^{p-2}(d_3 \sin(pqs) + e_3 \cos(pqs))$ e se N é ímpar $r^{N-(2M+1)} R^{2M}$ com M de 0 a $(N-1)/2$, e $r^q R^{p-2}(d_3 \sin(pqs) + e_3 \cos(pqs))$.

Na segunda soma, se N é par então o termo $r^{q-2} R^p(b_3 \sin(pqs) + c_3 \cos(pqs))$ permanece. Se N é ímpar obtemos os termos $d_M^3 r^{N-(2M+1)} R^{2M}$ com M de 0 a $(N-1)/2$ e $r^{q-2} R^p(b_3 \sin(pqs) + c_3 \cos(pqs))$. Isto conclui a demonstração do lema. ■

Lema 3.2.5. *Sejam $p, q, \alpha, \beta, \gamma$ e δ números inteiros não negativos tais que $\alpha + \beta = q - 1$*

e $\gamma + \delta = p$. Então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^\alpha(p\theta) \sin^\beta(p\theta) \cos^\gamma(q(\theta+s)) \sin^\delta(q(\theta+s)) d\theta =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{(-1)^{\frac{\beta+\delta}{2}}}{2^{p+q-1}} \cos(pqs) & \text{se } \beta, \delta \text{ pares;} \\ \frac{(-1)^{\frac{\beta+\delta-1}{2}}}{2^{p+q-1}} \sin(pqs) & \text{se } \beta \text{ par, } \delta \text{ ímpar;} \\ -\frac{(-1)^{\frac{\beta+\delta-1}{2}}}{2^{p+q-1}} \sin(pqs) & \text{se } \beta \text{ ímpar, } \delta \text{ par;} \\ \frac{(-1)^{\frac{\beta+\delta-2}{2}}}{2^{p+q-1}} \cos(pqs) & \text{se } \beta, \delta \text{ ímpares.} \end{array} \right.$$

Demonstração: A expressão $\cos^\alpha(p\theta) \sin^\beta(p\theta) \cos^\gamma(q(\theta + s)) \sin^\delta(q(\theta + s))$ pode ser escrita por $\left(\frac{e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}}{2}\right)^\alpha \left(\frac{e^{ip\theta} - e^{-ip\theta}}{2i}\right)^\beta \left(\frac{e^{iq(\theta+s)} + e^{-iq(\theta+s)}}{2}\right)^\gamma \left(\frac{e^{iq(\theta+s)} - e^{-iq(\theta+s)}}{2i}\right)^\delta$. Na expansão dessa expressão somente consideramos os termos $e^{ip\theta}$, $e^{-ip\theta}$, $e^{iq(\theta+s)}$ e $e^{-iq(\theta+s)}$ que possuem grau superior, isto é, $\alpha + \beta = q - 1$ e $\gamma + \delta = p$, pois a integral dos outros termos no intervalo $[0, 2\pi]$ são zero. Assim temos $\left(\frac{e^{ipq\theta} + (-1)^\beta e^{-ipq\theta}}{2^q i^\beta}\right) \left(\frac{e^{ipq(\theta+s)} + (-1)^\delta e^{-ipq(\theta+s)}}{2^p i^\delta}\right)$.

Logo

$$\frac{e^{ipq\theta} + (-1)^\beta e^{-ipq\theta}}{2^q i^\beta} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{\beta}{2}}}{2^{q-1}} \cos(pq\theta) & \text{se } \beta \text{ par} \\ \frac{(-1)^{\frac{\beta-1}{2}}}{2^{q-1}} \sin(pq\theta) & \text{se } \beta \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\frac{e^{ipq(\theta+s)} + (-1)^\delta e^{-ipq(\theta+s)}}{2^p i^\delta} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{\delta}{2}}}{2^{p-1}} \cos(pq(\theta + s)) & \text{se } \delta \text{ par,} \\ \frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{2^{p-1}} \sin(pq(\theta + s)) & \text{se } \delta \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Para β, δ pares temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^\alpha(p\theta) \sin^\beta(p\theta) \cos^\gamma(q(\theta + s)) \sin^\delta(q(\theta + s)) d\theta = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{(-1)^{\frac{\beta}{2}}}{2^{q-1}} \cos(pq\theta) \right) \left(\frac{(-1)^{\frac{\delta}{2}}}{2^{p-1}} \cos(pq(\theta + s)) \right) d\theta = \\ & \frac{(-1)^{\frac{\beta+\delta}{2}}}{2^{p+q-1}} \cos(pqs). \end{aligned}$$

Os outros casos são similares e concluímos a demonstração. ■

Lema 3.2.6. A função h_3 do Lema 3.2.4 é tal que $b_3 = -c_1/p$, $c_3 = b_1/p$, $d_3 = -c_2/q$ e $e_3 = b_2/q$.

Demonstração: Seja $a_{ijkl}^1 x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l$ um monômio de F_N^1 tal que $i + j = q - 1$ e $k + l = p$. Pelas expressões de h_1 e h_3 estes monômios aparecem em h_1 como

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^1 \cos^{i+1}(p\theta) \sin^j(p\theta) \cos^k(q(\theta + s)) \sin^l(q(\theta + s)) d\theta \quad (3.10)$$

e em h_3 como

$$\frac{1}{2p\pi} \int_0^{2\pi} a_{ijkl}^1 \cos^i(p\theta) \sin^{j+1}(p\theta) \cos^k(q(\theta+s)) \sin^l(q(\theta+s)) d\theta. \quad (3.11)$$

Pelo Lema 3.2.5 temos que (3.10) e (3.11) são iguais a (veja Tabela 3.1):

Tabela 3.1: Valores das integrais (3.10) e (3.11).

	3.10	3.11
j, l pares	$\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l}}{2^N} \cos(pqs)$	$-\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l}}{2^N p} \sin(pqs)$
j par l ímpar	$\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l-1}}{2^N} \sin(pqs)$	$\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l-1}}{2^N p} \cos(pqs)$
j ímpar, l par	$-\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l-1}}{2^N} \sin(pqs)$	$\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l+1}}{2^N p} \cos(pqs)$
j, l , ímpares	$\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l-2}}{2^N} \cos(pqs)$	$\frac{a_{ijkl}^1 (-1)^{j+l}}{2^N p} \sin(pqs)$

Para j, l pares, o coeficiente a_{ijkl}^1 do monômio aparece na soma que determina o coeficiente de $r^{q-1}R^p \cos(pqs)$ em h_1 , e também aparece na soma que determina o coeficiente de $r^{q-2}R^p \sin(pqs)$ em h_3 com sinal oposto e dividido por p .

Para j par e l ímpar, o coeficiente a_{ijkl}^1 do monômio aparece na soma que determina o coeficiente de $r^{q-1}R^p \sin(pqs)$ em h_1 , e aparece na soma que determina o coeficiente de $r^{q-2}R^p \cos(pqs)$ em h_3 dividido por p .

Para j, l ímpares, o coeficiente a_{ijkl}^1 do monômio aparece na soma que determina o coeficiente de $r^{q-1}R^p \cos(pqs)$ em h_1 , e na soma que determina o coeficiente de $r^{q-2}R^p \sin(pqs)$ em h_3 dividido por p .

Para j ímpar e l par, o coeficiente a_{ijkl}^1 do monômio aparece na soma que determina o coeficiente de $r^{q-1}R^p \cos(pqs)$ em h_1 , e na soma que determina o coeficiente de $r^{q-2}R^p \sin(pqs)$ em h_3 com sinal oposto e dividido por p .

Podemos fazer o mesmo para todos os monômios de F_N^2, F_N^3 e F_N^4 e finalmente provamos que $b_3 = -c_1/p, c_3 = b_1/p, d_3 = -c_2/q$ e $e_3 = b_2/q$. ■

3.3 Caso N par

Nesta seção consideraremos $N = p + q - 1$ par.

Proposição 3.3.1. *Se N é par então*

$$\begin{aligned}
h_1(r, R, s) &= a_1 r + r^{q-1} R^p (b_1 \operatorname{sen}(pqs) + c_1 \operatorname{cos}(pqs)), \\
h_2(r, R, s) &= a_2 R + r^q R^{p-1} (b_2 \operatorname{sen}(pqs) + c_2 \operatorname{cos}(pqs)), \\
h_3(r, R, s) &= a_3 + r^{q-2} R^p \left(-\frac{c_1}{p} \operatorname{sen}(pqs) + \frac{b_1}{p} \operatorname{cos}(pqs) \right) + \\
&\quad r^q R^{p-2} \left(-\frac{c_2}{q} \operatorname{sen}(pqs) + \frac{b_2}{q} \operatorname{cos}(pqs) \right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Demonstração: A demonstração segue diretamente dos Lemas 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.6.

■

Teorema 3.3.2. *Considere p, q números inteiros primos entre si com $p + q > 2$, $p > 1$ e $N = p + q - 1$. Então para $N \geq 2$ par e $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno as seguintes afirmações se verificam.*

- (a) *Se a função deslocamento de ordem ε não é identicamente nula, então o número máximo de ciclos limites da equação diferencial (3.2) que bifurcam das órbitas periódicas do sistema (3.1) é menor ou igual a $2pq$.*
- (b) *Existe exemplo da equação diferencial (3.2) possuindo $2pq$ ciclos limites que bifurcam das órbitas periódicas do sistema (3.1).*

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.3.1, as funções $h_1(r, R, s)$, $h_2(r, R, s)$ e $h_3(r, R, s)$ são dadas por (3.12). Consideremos a seguinte mudança de variáveis: $A = \frac{R}{r}$, $B = r^{q-1} R^{p-1}$, $u = \operatorname{sen}(pqs)$, $v = \operatorname{cos}(pqs)$. Nessas novas variáveis o sistema (3.12) fica:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_1(A, B, u, v) &= h_1(r, R, s)/r = a_1 + AB(b_1 u + c_1 v), \\
\tilde{h}_2(A, B, u, v) &= h_2(r, R, s)/r = a_2 A + B(b_2 u + c_2 v), \\
\tilde{h}_3(A, B, u, v) &= R h_3(r, R, s)/r = a_3 A + B \left(-\frac{c_2}{q} u + \frac{b_2}{q} v \right) + A^2 B \left(-\frac{c_1}{p} u + \frac{b_1}{p} v \right), \\
\tilde{h}_4(A, B, u, v) &= u^2 + v^2 - 1.
\end{aligned}$$

Seja $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i(A, B, u, v)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Devemos resolver $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4) = (0, 0, 0, 0)$.

De $\tilde{h}_2 = 0$ temos

$$B = \frac{-A a_2}{b_2 u + c_2 v}.$$

Substituindo B em $\tilde{h}_1 = 0$, obtemos

$$A = \sqrt{\frac{a_1(b_2u + c_2v)}{a_2(b_1u + c_1v)}},$$

e então

$$B = \frac{-a_2}{b_2u + c_2v} \sqrt{\frac{a_1(b_2u + c_2v)}{a_2(b_1u + c_1v)}}.$$

Agora, substituindo A e B em $\tilde{h}_3 = 0$ temos

$$\frac{B_1u^2 + B_2uv + B_3v^2}{pq(b_2u + c_2v)(b_1u + c_1v)} = 0, \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= pqa_3b_1b_2 + pa_2b_1c_2 + qa_1b_2c_1, \\ B_2 &= pq(a_3b_2c_1 + a_3c_2b_1) + p(a_2c_1c_2 - a_2b_1b_2) + q(a_1c_1c_2 - a_1b_2b_1), \\ B_3 &= pqa_3c_2c_1 - pa_2c_1b_2 - qa_1c_2b_1. \end{aligned}$$

Os zeros de (3.13) são $u = v = 0$ ou um par de retas passando pela origem. Então o número máximo de soluções de (3.13) e $u^2 + v^2 = 1$ é 4. Note que para cada zero de $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4) = (0, 0, 0, 0)$, com $A > 0$ e $B > 0$, podemos encontrar pq zeros (r, R, s) de $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$. Observe que se para um zero (u_0, v_0) de (3.13) obtemos uma solução $B_0 > 0$, então para $(-u_0, -v_0)$ solução de (3.13) obtemos $-B_0 < 0$ que é impossível. Isto prova que o número máximo de zeros de $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$ é $2pq$. Portanto pelo Teorema 1.3.5, o número máximo de ciclos limites obtidos via teoria de “averaging” de primeira ordem para o sistema (3.3) é $2pq$. Isto completa a prova da afirmação (a) do Teorema 3.3.2.

Para encontrar um exemplo do sistema (3.2) possuindo $2pq$ ciclos limites, escolhemos os coeficientes a_{ijkl}^n de F todos zero exceto:

$$a_{1000}^1 = -2^{1-p} (16 + 4^p) p,$$

$$a_{0010}^3 = 2^{3-p} (1 + 4^p) q,$$

$$a_{0010}^4 = 30q,$$

$$a_{0q-10p}^1 = (1 + 4^{2-p}) p,$$

$$a_{q-10p0}^2 = 2^{-p} (16 + 4^p) p,$$

$$a_{0q0p-1}^3 = -4^{2-p} (1 + 4^p) q,$$

$$a_{q0p-10}^4 = -2^{2-p} (1 + 4^p) q.$$

Então o sistema (3.2) fica

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p x_2 + \varepsilon(-2^{1-p} (16 + 4^p) p x_1 + (1 + 4^{2-p}) p x_2^{q-1} x_4^p), \\ \dot{x}_2 &= p x_1 + \varepsilon(2^{-p} (16 + 4^p) p x_1^{q-1} x_3^p), \\ \dot{x}_3 &= -q x_4 + \varepsilon(2^{3-p} (1 + 4^p) q x_3 - 4^{2-p} (1 + 4^p) q x_2^q x_4^{p-1}), \\ \dot{x}_4 &= q x_3 + \varepsilon(30 q x_3 - 2^{2-p} (1 + 4^p) q x_1^q x_3^{p-1}). \end{aligned}$$

Calculando h_1 , h_2 e h_3 para este sistema obtemos

$$\begin{aligned} h_1(r, R, s) &= -2^{-p} (16 + 4^p) pr + r^{q-1} R^p (2^{-p} (16 + 4^p) p \cos(pqs) + (1 + 4^{2-p}) p \sin(pqs)), \\ h_2(r, R, s) &= 2^{2-p} (1 + 4^p) qR + r^q R^{p-1} (-2^{2-p} (1 + 4^p) q \cos(pqs) - 4^{2-p} (1 + 4^p) q \sin(pqs)), \\ h_3(r, R, s) &= 15 + r^q R^{p-2} (2^{2-p} (1 + 4^p) \sin(pqs) - 4^{2-p} (1 + 4^p) \cos(pqs)) + \\ &\quad r^{q-2} R^p ((1 + 4^{2-p}) \cos(pqs) + 2^{-p} (16 + 4^p) \sin(pqs)). \end{aligned}$$

Os zeros de $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$ são

$$(r, R, s) = \left(1, 1, k \frac{2\pi}{pq}\right), \quad k = 0, \dots, pq - 1$$

e

$$(r, R, s) = \left(2, 2^{p-1}, \frac{\pi}{2pq} + k \frac{2\pi}{pq}\right), \quad k = 0, \dots, pq - 1.$$

O determinante Jacobiano de $h = (h_1, h_2, h_3)$ calculado em $\left(1, 1, k\frac{2\pi}{pq}\right)$ para $k = 0, \dots, pq - 1$ é

$$32^{3-5p} p^2 q^2 (16 + 17 \cdot 4^p + 16^p)^2 (p + q - 2) \neq 0$$

e calculado em $\left(2, 2^{p-1}, \frac{\pi}{2pq} + k\frac{2\pi}{pq}\right)$ para $k = 0, \dots, pq - 1$ é

$$-32^{1-3p} p^2 q^2 (16 + 17 \cdot 4^p + 16^p)^2 (p + q - 2) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema 1.3.5, concluímos a demonstração da afirmação (b) do Teorema 3.3.2 finalizando sua demonstração. ■

3.4 Caso N ímpar

Nesta seção consideraremos $N = p + q - 1$ ímpar.

Proposição 3.4.1. *Se N é ímpar então*

$$h_1(r, R, s) = a_1 r + r^{q-1} R^p (b_1 \operatorname{sen}(pqs) + c_1 \operatorname{cos}(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^1 r^{N-2M} R^{2M},$$

$$h_2(r, R, s) = a_2 R + r^q R^{p-1} (b_2 \operatorname{sen}(pqs) + c_2 \operatorname{cos}(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^2 r^{N-(2M+1)} R^{2M+1},$$

$$\begin{aligned} h_3(r, R, s) = & a_3 + r^{q-2} R^p (b_3 \operatorname{sen}(pqs) + c_3 \operatorname{cos}(pqs)) \\ & + r^q R^{p-2} (d_3 \operatorname{sen}(pqs) + e_3 \operatorname{cos}(pqs)) + \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^3 r^{N-(2M+1)} R^{2M}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Demonstração: A demonstração segue diretamente dos Lemas 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.6. ■

Teorema 3.4.2. *Considere p, q números inteiros primos entre si com $p + q > 2$, $p > 1$ e $N = p + q - 1$. Então para $N \geq 3$ ímpar e $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, se a função deslocamento de ordem ε não é identicamente nula, então o número máximo de ciclos limites*

do sistema diferencial (3.2) que bifurca das órbitas periódicas do sistema (3.1) é no máximo $pq(N+1)$ se $p \geq 2$. Quando $p = 1$ este número é $q(q+2)$.

Demonstração: As funções $h_1(r, R, s)$, $h_2(r, R, s)$ e $h_3(r, R, s)$ são dadas na Proposição 3.4.1. Fazendo a mudança de coordenadas $A = \frac{R}{r}$, $B = r^{q-1}R^{p-1}$, $u = \text{sen}(pqs)$, $v = \text{cos}(pqs)$ obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1(A, B, u, v) &= h_1(r, R, s)/r = a_1 + AB(b_1u + c_1v) + A^{1-p}B \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^1 A^{2M}, \\ \tilde{h}_2(A, B, u, v) &= h_2(r, R, s)/r = a_2A + B(b_2u + c_2v) + A^{2-p}B \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^2 A^{2M}, \\ \tilde{h}_3(A, B, u, v) &= Rh_3(r, R, s)/r = a_3A + B \left(-\frac{c_2}{q}u + \frac{b_2}{q}v \right) + \\ &A^2B \left(-\frac{c_1}{p}u + \frac{b_1}{p}v \right) + A^{2-p}B \sum_{M=0}^{\frac{N-1}{2}} d_M^3 A^{2M}, \\ \tilde{h}_4(A, B, u, v) &= u^2 + v^2 - 1.\end{aligned}$$

Resolvemos $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3) = (0, 0, 0)$ e encontramos uma solução $B = A^{p-1}B_1(A^2)$, $u = A^{2-p}U(A^2)$, $v = A^{2-p}V(A^2)$, onde $B_1(z)$ é o quociente de um polinômio de grau 2 por um polinômio de grau $(N+3)/2$, $U(z)$ e $V(z)$ são o quociente de um polinômio de grau $(N+1)/2$ por um polinômio de grau 2.

Substituindo u e v em $\tilde{h}_4 = 0$ temos as seguintes situações:

Se $p = 1$ então obtemos o quociente de um polinômio de grau $q+2$ na variável A^2 por um polinômio de grau 4 em A^2 . Então o número máximo de raízes positivas A do numerador de \tilde{h}_4 é $q+2$.

Se $p = 2$ então $u = U(A^2)$, $v = V(A^2)$ e daí obtemos o quociente de um polinômio de grau $N+1$ na variável A^2 por um polinômio de grau 4 em A^2 . Neste caso o número máximo de raízes positivas A do numerador de \tilde{h}_4 é $N+1$.

Se $p > 2$ então $u = \frac{U(A^2)}{A^{p-2}}$ e $v = \frac{V(A^2)}{A^{p-2}}$. Logo, obtemos o quociente de um polinômio de grau $N+1$ na variável A^2 por um polinômio de grau $p+2$. Como $p+2 < N+1$ obtemos que o número máximo de raízes positivas A do numerador de \tilde{h}_4 é $N+1$.

Para cada solução A_0 temos no máximo um $B_0 = B(A_0) > 0$ e um par $(u_0, v_0) = (u(A_0), v(A_0))$. Para cada par (u_0, v_0) podemos encontrar $s_1, \dots, s_{pq} \in [0, 2\pi)$ tais que

$\text{sen}(pqs_i) = u_0$ e $\text{cos}(pqs_i) = v_0$ para $i = 1, \dots, pq$. Assim, pelo Teorema 1.3.5, o número máximo de ciclo limites obtidos via teoria de “averaging” para o sistema (3.2) é $q(q + 2)$ se $p = 1$ e $pq(N + 1)$ se $p \geq 2$. Isto completa a prova do Teorema 3.4.2. ■

CAPÍTULO 4

TORO FOLHEADO POR ÓRBITAS PERIÓDICAS

Fornecemos um algoritmo para estudar toros invariantes folheados por órbitas periódicas de um sistema perturbado o qual surge do conjunto de órbitas periódicas de um sistema linear em $p : q$ ressonância. Ilustraremos o algoritmo com uma aplicação.

4.1 Introdução

Um dos principais problemas em teoria de perturbação é detectar a persistência de certas propriedades, ou seja, queremos analisar como certas propriedades de um sistema não perturbado se comportam ao perturbá-lo. Frequentemente o sistema não perturbado é linear e os objetos a serem estudados são equilíbrios, órbitas periódicas ou toros invariantes.

Consideremos o sistema de dimensão quatro:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{4.1}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, p e q são números inteiros primos entre si. Claramente todas as órbitas do sistema (4.1) são periódicas.

Perturbamos o sistema (4.1) da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \varepsilon F(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

onde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro real e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ é uma função \mathcal{C}^2 definida em um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^4 .

4.2 O algoritmo

Nesta seção descreveremos o algoritmo para estudar o toro invariante folheado por órbitas periódicas do sistema perturbado (4.2) que surge do conjunto de órbitas periódicas do sistema não perturbado (4.1). Tal algoritmo é baseado na teoria de “averaging” de primeira ordem.

Fazendo um reescalonamento da variável independente por $t = \frac{1}{q}\tau$, podemos assumir que a parte linear do sistema diferencial (4.2) é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha = -p/q$.

Seja $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$. Assim pela mudança de variáveis de (x, y, z, w) à (r, θ, R, φ) por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = R \cos \left(\theta + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \varphi \right), \quad w = R \sin \left(\theta + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \varphi \right),$$

o sistema (4.2) é transformado no sistema

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \varphi), \\
\dot{\theta} &= \alpha + \varepsilon G_2(r, \theta, R, \varphi), \\
\dot{R} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \varphi), \\
\dot{\varphi} &= \alpha + \varepsilon G_4(r, \theta, R, \varphi),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

com

$$\begin{aligned}
G_1 &= \cos \theta \bar{F}_1(r, \theta, R, \varphi) + \sin \theta \bar{F}_2(r, \theta, R, \varphi), \\
G_2 &= \frac{1}{r} [\cos \theta \bar{F}_2(r, \theta, R, \varphi) - \sin \theta \bar{F}_1(r, \theta, R, \varphi)], \\
G_3 &= \cos \left(\theta + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \varphi \right) \bar{F}_3(r, \theta, R, \varphi) + \sin \left(\theta + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \varphi \right) \bar{F}_4(r, \theta, R, \varphi), \\
G_4 &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{1}{R} \left(\cos \left(\theta + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \varphi \right) \bar{F}_4(r, \theta, R, \varphi) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sin \left(\theta + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \varphi \right) \bar{F}_3(r, \theta, R, \varphi) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{r} (\sin \theta \bar{F}_1(r, \theta, R, \varphi) - \cos \theta \bar{F}_2(r, \theta, R, \varphi)) \right],
\end{aligned}$$

onde

$$\bar{F}_k(r, \theta, R, \varphi) = F_k \left(r \cos \theta, r \sin \theta, R \cos \left(\theta + \frac{(1-n)}{n} \varphi \right), R \sin \left(\theta + \frac{(1-n)}{n} \varphi \right) \right),$$

para $k = 1, 2, 3, 4$.

Tomando θ como nova variável independente o sistema (4.3) fica

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{\alpha} G_1(r, \theta, R, \varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
\frac{dR}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{\alpha} G_3(r, \theta, R, \varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
\frac{d\varphi}{d\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} G_4(r, \theta, R, \varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Da última equação do sistema (4.4) temos que qualquer solução $(r(\theta), R(\theta), \varphi(\theta))$ do sistema (4.4) é da forma $\varphi(\theta) = \theta + \varphi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Substituindo essa expressão de $\varphi(\theta)$ no sistema (4.4) podemos reduzi-lo à

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{\alpha} G_1(r, \theta, R, \theta + \varphi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
\frac{dR}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{\alpha} G_3(r, \theta, R, \theta + \varphi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora estudaremos a existência de órbitas periódicas do sistema (4.5) via teoria de “averaging”, isto é, aplicando o Teorema 1.3.5. Calculamos o sistema promediado do sistema (4.5) obtendo

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon g_1(r, R, \varphi_0), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon g_3(r, R, \varphi_0),\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde

$$g_k(r, R, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_k(r, \theta, R, \theta + \varphi_0) d\theta, \quad k = 1, 3.$$

Assumimos que para todo $\varphi_0 \in \mathbb{S}^1$ o sistema promediado (4.6) possui um ponto singular $(r(\varphi_0), R(\varphi_0))$ tal que

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_3)}{\partial(r, R)} \Big|_{r=r(\varphi_0), R=R(\varphi_0)} \right) \neq 0.\tag{4.7}$$

Logo, aplicando o Teorema 1.3.5 ao sistema diferencial φ_0 -paramétrico (4.5), obtemos que o sistema (4.5) para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno e para cada $\varphi_0 \in \mathbb{S}^1$ possui uma única órbita periódica

$$\left(r(\theta; (r(\varphi_0), R(\varphi_0))), R(\theta; (r(\varphi_0), R(\varphi_0))) \right),$$

tal que

$$\left(r(0; (r(\varphi_0), R(\varphi_0))), R(0; (r(\varphi_0), R(\varphi_0))) \right) \rightarrow (r(\varphi_0), R(\varphi_0)) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Retornando ao sistema diferencial (4.4), obtemos que este sistema para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno possui uma família contínua de órbitas periódicas dependendo de um parâmetro $\varphi_0 \in \mathbb{S}^1$, isto é, temos que o sistema (4.4) possui um toro invariante folheado por órbitas periódicas. Consequentemente os sistemas diferenciais (4.3) e (4.2) (os quais em novas variáveis podem ser escritos como o sistema (4.4)) possui um toro invariante folheado por órbitas periódicas.

Isto completa o algoritmo para detectar toros invariantes folheados por órbitas periódicas de um sistema em $p : q$ ressonância.

4.3 Aplicação do algoritmo

Nesta seção, aplicaremos o algoritmo descrito na seção anterior em um sistema diferencial em $1 : 2$ ressonância.

Teorema 4.3.1. *Considere o sistema diferencial*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y - \varepsilon(z + 1) \left(y + 2w + \frac{4x}{x^2 + y^2} \right), \\
\dot{y} &= x + \varepsilon y \left(w + 1 - \frac{2}{x^2 + y^2} \right), \\
\dot{z} &= -2w, \\
\dot{w} &= 2z + \varepsilon(y + 1)w \left(\frac{2}{w^2 + z^2} - \frac{1}{2} \right),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

definido em

$$\{\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \neq (x, y, 0, 0) \text{ and } \mathbf{x} \neq (0, 0, z, w)\},$$

onde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro real. Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno o sistema perturbado (4.8) possui um toro invariante bi-dimensional folheado por órbitas periódicas o qual converge ao toro

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 6 + 4 \cos \varphi, z^2 + w^2 = 4 \text{ com } \varphi \in \mathbb{S}^1\}, \tag{4.9}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração: Neste sistema $\alpha = 1/2$ e o sistema (4.3) fica

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -\varepsilon \frac{1}{4r} (6 - r^2 + (r^2 + 2) \cos(2\theta) + 2R \cos(\varphi - \theta) + 4R \cos(\varphi + \theta) + \\
&\quad 2R \cos(\varphi + 3\theta) + r(2R \sin \varphi + r \sin(2\theta) + 2R(r \cos(\varphi + 2\theta) \sin \theta + \\
&\quad R \cos \theta \sin(2(\varphi + \theta)) + \sin(\varphi + 2\theta))), \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2r^2} \sin \theta (2R \cos \varphi + (r^2 + 2) \cos \theta + 2R \cos(\varphi + 2\theta) + \\
&\quad r(2R(R \cos(\varphi + \theta) + 1) \sin(\varphi + \theta) + r(\sin \theta + R \sin(\varphi + 2\theta)))), \\
\dot{R} &= -\varepsilon \frac{1}{4R} (R^2 - 4) (r \sin \theta + 1) \sin^2(\varphi + \theta), \\
\dot{\varphi} &= \frac{1}{2} + \varepsilon \left(-\frac{1}{8R^2} (R^2 - 4) (r \sin \theta + 1) \sin(2(\varphi + \theta)) - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2r^2} \sin \theta (2R \cos \varphi + (r^2 + 2) \cos \theta + 2R \cos(\varphi + 2\theta) + \right. \\
&\quad \left. r(2R(R \cos(\varphi + \theta) + 1) \sin(\varphi + \theta) + r(\sin \theta + R \sin(\varphi + 2\theta)))) \right).
\end{aligned}$$

Escrevemos o sistema (4.4):

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= -\varepsilon \frac{1}{4r} (6 - r^2 + (r^2 + 2) \cos(2\theta) + 2R \cos(\varphi_0) + 4R \cos(2\theta + \varphi_0) + \\
&\quad 2R \cos(4\theta + \varphi_0) + r(2R \sin(\theta + \varphi_0) + r \sin(2\theta) + 2R(r \cos(3\theta + \varphi_0) \sin \theta + \\
&\quad R \cos \theta \sin(2(2\theta + \varphi_0)) + \sin(3\theta + \varphi_0))) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
\frac{dR}{d\theta} &= -\varepsilon \frac{1}{4R} (R^2 - 4) (1 + r \sin \theta) \sin^2(2\theta + \varphi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Calculando o sistema promediado do sistema (4.10), temos

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \frac{1}{2r} (r^2 - 6 - 2R \cos \varphi_0), \\
\frac{dR}{d\theta} &= -\varepsilon \frac{R^2 - 4}{4R}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O único ponto singular do sistema (4.11) com r e R positivos é

$$r = \sqrt{6 + 4 \cos \varphi_0}, \quad R = 2.$$

Para este ponto singular o determinate (4.7) é sempre $-1/2$ independentemente de φ_0 .

Assim, pelo algoritmo segue a demonstração do Teorema 4.3.1. ■

CAPÍTULO 5

EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções periódicas de perturbações das equações diferenciais

$$x^{(iv)} + \alpha x'' + x = 0, \quad (5.1)$$

e

$$x^{(vi)} + \lambda_1 x^{(iv)} + \lambda_2 x'' + x = 0, \quad (5.2)$$

onde α , λ_1 e λ_2 são parâmetros reais.

5.1 Introdução

O Teorema do Centro de Lyapunov para sistemas conservativos afirma que em torno de um ponto de equilíbrio elíptico p não ressonante, existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas convergindo para p com período limitado.

Utilizaremos a reversibilidade de (5.1) e (5.2) no estudo de existência de órbitas periódicas. Note que o Teorema do Centro de Lyapunov também vale para pontos fixos simétricos em sistemas reversíveis. Devaney, [10] foi o primeiro a demonstrar este fato.

Teorema 5.1.1. (Teorema do Centro de Lyapunov) *Considere a equação diferencial reversível*

$$\dot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (5.3)$$

Seja x_0 um ponto fixo de (5.3) e denotemos por $A = DF(x_0)$ a derivada de F em x_0 . Assumimos a seguinte relação de não ressonância:

$\pm\omega i$ são autovalores simples de A e $k\omega i$ não é autovalor de A para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então existe uma família a um parâmetro de soluções periódicas $x_a(t)$ de (5.3), parametrizada por $a \geq 0$, com períodos próximos a $2\pi/\omega$ onde $x_0(t) \equiv 0$.

O objetivo deste capítulo é fornecer resultados similares ao Teorema do Centro de Lyapunov para perturbações reversíveis das equações diferenciais (5.1) e (5.2).

5.2 Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^4

Analisaremos a existência de órbitas periódicas em torno da origem de perturbações reversíveis da família de equações diferenciais (5.1) da seguinte forma:

$$x^{(iv)} + \alpha x'' + x + f(x) = 0, \quad (5.4)$$

com $f(x) = x^3 + o(x^4)$, onde $o(x^4)$ denota os termos de ordem superior a 3.

Note que (5.4) também pode ser escrita como um sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\alpha x_2 - x_1 - f(x_1), \end{cases} \quad (5.5)$$

o qual é R -reversível com

$$R(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1, -y_1, x_2, -y_2). \quad (5.6)$$

O problema linearizado na origem é:

$$x'''' + \alpha x'' + x = 0 \quad (5.7)$$

e o correspondente polinômio característico é:

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.8)$$

É fácil checar que:

- quando $\alpha < -2$ temos quatro autovalores reais distintos $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2 < 0$,
- quando $-2 < \alpha < 2$ temos quatro autovalores complexos distintos $\pm(\lambda \pm i\mu)$,
- quando $\alpha > 2$ temos quatro autovalores imaginários $\pm i\mu_1, \pm i\mu_2, \mu_1 < \mu_2 < 0$,
- quando $\alpha = -2$ temos autovalores ± 1 duplos,
- quando $\alpha = 2$ temos autovalores imaginários duplos $\pm i$.

Primeiramente, estudaremos a existência de soluções periódicas de (5.4) quando $\alpha = 2$ usando a Redução de Lyapunov Schmidt. Observe que neste caso temos 1:1 ressonância e a linearização de (5.5) na origem é dada por $\dot{x} = Ax$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A forma de Jordan de A é dada por:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A mudança de coordenadas que leva A a A_0 transforma R em R_0 onde

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos o sistema na forma normal de Belitskii, e a partir daí, o inserimos numa família genérica a um parâmetro mantendo a reversibilidade da seguinte forma:

$$\dot{x} = A_\lambda x + \tilde{f}(x, \lambda) + \mathcal{O}(\|x\|^4),$$

com

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{f}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}^1(x, \lambda) \\ \tilde{f}^2(x, \lambda) \\ \tilde{f}^3(x, \lambda) \\ \tilde{f}^4(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

onde

$$\tilde{f}^1(x, \lambda) = y_1(a_1(\lambda)x_2y_1 + a_2(\lambda)y_1^2 + a_2(\lambda)x_1^2 - a_1(\lambda)x_1y_2),$$

$$\tilde{f}^2(x, \lambda) = -x_1(a_1(\lambda)x_2y_1 + a_2(\lambda)y_1^2 + a_2(\lambda)x_1^2 - a_1(\lambda)x_1y_2),$$

$$\tilde{f}^3(x, \lambda) = b_1(\lambda)x_1^3 + b_2(\lambda)y_2x_1^2 + a_1(\lambda)y_1y_2x_2 + a_2(\lambda)y_1^2y_2 + b_3(\lambda)x_1x_2y_1 + b_1(\lambda)y_1^2x_1 - a_1(\lambda)y_2^2x_1,$$

$$\tilde{f}^4(x, \lambda) = b_1(\lambda)x_1^2y_1 + b_1(\lambda)y_1^3 - a_1(\lambda)x_2^2y_1 - b_3(\lambda)y_1x_1y_2 - a_2(\lambda)x_1^2x_2 - b_2(\lambda)y_1^2x_2 + a_1(\lambda)y_2x_2x_1.$$

Os coeficientes a_i e b_i , $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ dependem de λ de modo C^∞ e

$$a_1(0) = \frac{1}{32} \quad b_1(0) = -\frac{12}{1024}$$

$$a_2(0) = \frac{3}{1024} \quad b_2(0) = -\frac{63}{1024}$$

$$b_3(0) = \frac{66}{1024}.$$

Neste caso,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e a equação de redução de Lyapunov-Schmidt

$$B(x, \lambda, \sigma) = (1 + \sigma)Sx - A_\lambda x - \tilde{f}(x, \lambda)$$

restrita ao conjunto

$$Fix(R) = \{x_1 = y_2 = 0\},$$

fica:

$$\begin{cases} -\sigma x_1 - y_2 + x_1(a_2(\lambda)x_1^2 - a_1(\lambda)x_1y_2) = 0, \\ \sigma y_2 - \lambda x_1 - b_1(\lambda)x_1^3 + a_1(\lambda)y_2^2x_1 - b_2(\lambda)x_1^2y_2 = 0. \end{cases}$$

A primeira equação pode ser resolvida para y_2 , isto é,

$$y_2 = -\sigma x_1 + \mathcal{O}(\|x_1, y_2\|)^3.$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$\sigma^2 x_1 + x_1 \lambda + b_1(\lambda)x_1^3 + \mathcal{O}(\|x_1, \sigma\|)^4 = 0.$$

Deste modo, $x_1 = 0$ ou

$$\lambda = -\sigma^2 - b_1(\lambda)x_1^2 + \mathcal{O}(\|x_1, \sigma\|)^3. \quad (5.9)$$

Como b_1 depende diferencialmente de λ , segue que se $b_1(0) \neq 0$ então $b_1(\lambda) \neq 0$ para $|\lambda|$ pequeno. Portanto a forma quadrática em (5.9) é não degenerada e determina o comportamento qualitativo das soluções desta equação em torno da origem. Como $b_1(0) < 0$ temos o seguinte diagrama de bifurcação:

Figura 5.1: Diagrama de bifurcação de (5.9).

Deste modo, concluímos que: (veja Figura 5.1)

- Para $\lambda < 0$ não existem órbitas periódicas próximas à origem.
- Para $\lambda = 0$ existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas.
- Para $\lambda > 0$ existem duas famílias a um parâmetro distintas de órbitas periódicas simétricas.

5.3 Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^6

Nesta seção estudaremos a existência de órbitas periódicas simétricas próximas à origem de perturbações da família de equações diferenciais (5.2). Tal equação pode ser escrita na forma do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= -\lambda_1 x_3 - \lambda_2 x_2 - x_1\end{aligned}\tag{5.10}$$

Primeiramente, estudaremos perturbações reversíveis do tipo:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 + f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\
 \dot{y}_1 &= x_2 + f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\
 \dot{x}_2 &= y_2 + f_3(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\
 \dot{y}_2 &= x_3 + f_4(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\
 \dot{x}_3 &= y_3 + f_5(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\
 \dot{y}_3 &= -\lambda_1 x_3 - \lambda_2 x_2 - x_1 + f_6(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3),
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

com $f_i(x) = o(\|x\|^2)$, $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ e $i = 1, \dots, 6$.

A seguir, consideraremos perturbações reversíveis da forma,

$$x^{vi} + \lambda_1 x^{(iv)} + \lambda_2 x'' + x + f(x) = 0, \tag{5.12}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 \\
 \dot{y}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= y_3 \\
 \dot{y}_3 &= -\lambda_1 x_3 - \lambda_2 x_2 - x_1 + f(x_1),
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

com $f(x_1) = o(x_1^2)$.

O correspondente polinômio característico da equação diferencial (5.2) linearizado na origem é:

$$\lambda^6 + \lambda_1 \lambda^4 + \lambda_2 \lambda^2 + 1.$$

Logo seus autovalores são dados pelas raízes quadradas positivas e negativas dos zeros de um polinômio p de grau 3.

$$p(x) = x^3 - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x + 1.$$

Se denotarmos por x_1 , x_2 e x_3 os zeros de p , então os autovalores serão $\pm\sqrt{x_1}$, $\pm\sqrt{x_2}$ e $\pm\sqrt{x_3}$.

Estamos interessados nos casos onde todos os autovalores sejam imaginários puros.

Suponhamos que x_1 , x_2 e x_3 sejam raízes negativas de p . Logo

$$x_1 x_2 x_3 = -1.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $x_1 = -\frac{1}{x_2x_3}$. Daí

$$\lambda_1 = -(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{x_2x_3} - x_2 - x_3$$

e

$$\lambda_2 = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = x_2x_3 - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}.$$

Denotemos $\pm\alpha_j = \pm\sqrt{x_j}$, $j = 1, 2, 3$.

Focaremos nosso estudo nas seguintes relações de ressonância que podemos encontrar:

1) $\alpha : 1 : p$ ressonante

Definição 5.3.1. Dizemos que os autovalores $\pm i\alpha_j$, $j = 1, 2, 3$ estão em $\alpha : 1 : p$ ressonância se

$$p\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{e}$$

$$\alpha_1 \neq k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \quad \forall k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo: Considere $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{7}{2}$. Os autovalores são $\pm i$, $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ e $\pm i\sqrt{2}$ que estão em $\alpha : 1 : 2$ ressonância.

2) Não ressonante.

Definição 5.3.2. Dizemos que os autovalores $\pm i\alpha_j$, $j = 1, 2, 3$ são não ressonantes se eles satisfazem:

$$\sum_{j=1}^3 k_j\alpha_j = 0, \quad k_j \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow k_j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

ou seja, são linearmente independentes sob os inteiros.

Exemplo: Se tomarmos $\lambda_1 = \frac{31}{6}$ e $\lambda_2 = \frac{41}{6}$ então temos como autovalores $\pm i\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{3}$ e $\pm i\frac{1}{\sqrt{6}}$ e portanto não ressonantes.

5.3.1 Caso $\alpha : 1 : 2$ ressonante

Nesta seção utilizaremos a redução de Lyapunov- Schmidt para encontrar soluções periódicas simétricas com período próximo a 2π e π para perturbações reversíveis da equação (5.2) quando seus autovalores possuem a relação de ressonância do tipo $\alpha : 1 : 2$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para isso, primeiramente encontraremos a forma normal de Belitskii até ordem 3.

Se denotarmos a perturbação (5.11) por $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^6$, podemos supor, sem perda de generalidade, que a matriz $A = DX(0)$ tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Além disso, vamos supor que X é R reversível onde R é a involução linear em \mathbb{R}^6 dada por

$$R(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = (x_1, -y_1, x_2, -y_2, x_3, -y_3).$$

Obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6)$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados pelas condições acima. Então X é conjugado, numa vizinhança da origem, a seguinte forma normal:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 &= -y_2 + b_1(x_3 y_2 - x_2 y_3) - y_2(b_2(x_1^2 + y_1^2) + b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + b_1(x_2 x_3 + y_2 y_3) + x_2(b_2(x_1^2 + y_1^2) + b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_3 &= -2y_3 - 2c_1 x_2 y_2 - y_3(c_2(x_1^2 + y_1^2) + c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_3 &= 2x_3 + c_1(x_2^2 - y_2^2) + x_3(c_2(x_1^2 + y_1^2) + c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Demonstração: Considere o campo em coordenadas complexas (z_1, z_2, z_3) onde $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$. Nestas coordenadas,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $\dot{x} = Ax + h(x) + o(|x|^4)$ com $h(x) = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$ e $x = (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)$, temos que a condição

$$A^*h(x) = Dh(x)A^*x,$$

implica que

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \alpha i h_1, \\ Dh_2(x) &= -\alpha i h_2, \\ Dh_3(x) &= i h_3, \\ Dh_4(x) &= -i h_4, \\ Dh_5(x) &= 2i h_5, \\ Dh_6(x) &= -2i h_6, \end{aligned}$$

onde

$$D := \alpha i z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha i \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + i z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - i \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + 2i z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} - 2i \bar{z}_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_3}.$$

Vejam os quais monômios da forma $u = z_1^{k_1} \bar{z}_1^{k_2} z_2^{k_3} \bar{z}_2^{k_4} z_3^{k_5} \bar{z}_3^{k_6}$ estão na forma normal até ordem 3. Neste caso teremos $|k| = \sum_{j=1}^6 k_j = 2, 3$ com $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$.

Primeiramente, analisemos h_1 . De $Dh_1 = \alpha i h_1$ temos que

$$\alpha i u = Du \Rightarrow \alpha i u = (\alpha i k_1 - \alpha i k_2 + i k_3 - i k_4 + 2i k_5 - 2i k_6) u \Rightarrow$$

$$k_1 - k_2 = 1 \quad \text{e} \quad k_3 - k_4 + 2(k_5 - k_6) = 0.$$

Não existem elementos k que satisfazem as condições acima e ainda $|k| = 2$. Logo h_1 não possui monômios de ordem 2.

Os elementos k que satisfazem as condições acima e ainda $|k| = 3$ são dados por

$$(2, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 1),$$

que representam respectivamente

$$z_1^2 \bar{z}_1, z_1 z_2 \bar{z}_2 \text{ e } z_1 z_3 \bar{z}_3.$$

Logo,

$$h_1 = \tilde{a}_1 z_1^2 \bar{z}_1 + \tilde{a}_2 z_1 z_2 \bar{z}_2 + \tilde{a}_3 z_1 z_3 \bar{z}_3.$$

Similarmente, para h_2 obtemos

$$h_2 = \tilde{b}_1 \bar{z}_1^2 z_1 + \tilde{b}_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_2 + \tilde{b}_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_3.$$

Sabemos que $\overline{h_1} = h_2$. Então $\overline{\tilde{a}_j} = \tilde{b}_j$, $j = 1, 2, 3$.

Da R reversibilidade, onde $R(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) = (\bar{z}_1, z_1, \bar{z}_2, z_2, \bar{z}_3, z_3)$, temos $\tilde{b}_j = -\tilde{a}_j$, $j = 1, 2, 3$. Segue daí que $\tilde{a}_j = ia_j$, $a_j \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$h_1 = i(a_1 z_1^2 \bar{z}_1 + a_2 z_1 z_2 \bar{z}_2 + a_3 z_1 z_3 \bar{z}_3),$$

$$h_2 = -i(a_1 \bar{z}_1^2 z_1 + a_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_2 + a_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_3).$$

Cálculos análogos seguem para h_3 , h_4 , h_5 e h_6 .

Obtemos assim a forma normal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha i z_1 + i z_1 (a_1 |z_1|^2 + a_2 |z_2|^2 + a_3 |z_3|^2) + o(\|z\|^4) \\ \dot{z}_2 &= i z_2 + i (b_1 \bar{z}_2 z_3 + b_2 z_2^2 \bar{z}_2 + b_3 z_2 z_3 \bar{z}_3 + b_4 z_1 \bar{z}_1 z_2) + o(\|z\|^4) \\ \dot{z}_3 &= 2i z_3 + i (c_1 z_2^2 + c_2 z_3^2 \bar{z}_3 + c_3 z_2 \bar{z}_2 z_3 + c_4 z_1 \bar{z}_1 z_3) + o(\|z\|^4), \end{aligned}$$

com $z = (z_1, z_2, z_3)$, ou ainda, em coordenadas $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1 (a_1 (x_1^2 + y_1^2) + a_2 (x_2^2 + y_2^2) + a_3 (x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1 (a_1 (x_1^2 + y_1^2) + a_2 (x_2^2 + y_2^2) + a_3 (x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 &= -y_2 + b_1 (x_3 y_2 - x_2 y_3) - y_2 (b_2 (x_1^2 + y_1^2) + b_3 (x_2^2 + y_2^2) + b_4 (x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + b_1 (x_2 x_3 + y_2 y_3) + x_2 (b_2 (x_1^2 + y_1^2) + b_3 (x_2^2 + y_2^2) + b_4 (x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_3 &= -2y_3 - 2c_1 x_2 y_2 - y_3 (c_2 (x_1^2 + y_1^2) + c_3 (x_2^2 + y_2^2) + c_4 (x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_3 &= 2x_3 + c_1 (x_2^2 - y_2^2) + x_3 (c_2 (x_1^2 + y_1^2) + c_3 (x_2^2 + y_2^2) + c_4 (x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \end{aligned}$$

■

Definimos os conjuntos:

$$\mathcal{U}^0 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^2 X \text{ expressa-se por (5.14) com } b_1 c_1 > 0\}.$$

$$\mathcal{U}^1 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se por (5.14) com } c_4 \neq 0\}.$$

Aplicando a Redução de Lyapunov- Schmidt, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.4. *As seguintes afirmações se verificam:*

- i) *Cada $X \in \mathcal{U}^0$ possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π ;*
- ii) *Cada $X \in \mathcal{U}^1$ possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para π .*

Demonstração: Para encontrarmos as soluções periódicas de período próximo à 2π a aplicação de redução $B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dada por:

$$B(u_4, \sigma) = (1 + \sigma)S_4 u_4 - A_4 u_4 - \tilde{h}(u_4) + o(\|u_4\|^3)$$

onde

$$S_4 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_4 = \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} h_3 &= b_1(x_3 y_2 - x_2 y_3) \\ h_4 &= b_1(x_2 x_3 + y_2 y_3) \\ h_5 &= -2c_1 x_2 y_2 \\ h_6 &= c_1(x_2^2 - y_2^2) \end{aligned}$$

Assim, devemos estudar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -\sigma y_2 - b_1(x_3 y_2 - x_2 y_3) + o(\|x\|^3) = 0 & \text{(a);} \\ \sigma x_2 - b_1(x_2 x_3 + y_2 y_3) + o(\|x\|^3) = 0 & \text{(b);} \\ -2\sigma y_3 + 2c_1 x_2 y_2 + o(\|x\|^3) = 0 & \text{(c);} \\ 2\sigma x_3 - c_1(x_2^2 - y_2^2) + o(\|x\|^3) = 0 & \text{(d),} \end{cases} \quad (5.15)$$

onde $x = (x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Das equações (c) e (d) obtemos respectivamente:

$$y_3 = \frac{2c_1x_2y_2 + o(\|x\|^3)}{2\sigma}, \quad x_3 = \frac{c_1(x_2^2 - y_2^2) + o(\|x\|^3)}{2\sigma} \quad (5.16)$$

que ao substituirmos em (a) e (b), nos fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -2\sigma^2y_2 + b_1c_1x_2^2y_2 + b_1c_1y_2^3 + \tilde{\varphi}_1(x_2, y_2) = 0 \\ 2\sigma^2x_2 - b_1c_1x_2y_2^2 - b_1c_1x_2^3 + \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2) = 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

onde $\tilde{\varphi}_i(x_2, y_2) = o(\|(x_2, y_2)\|^3)$, $i = 1, 2$. Da R -reversibilidade de B segue que

$$\begin{aligned} R(\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2), \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2)) &= -(\tilde{\varphi}_1R(x_2, y_2), \tilde{\varphi}_2R(x_2, y_2)) \Rightarrow \\ (\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2), -\tilde{\varphi}_2(x_2, y_2)) &= (-\tilde{\varphi}_1(x_2, -y_2), -\tilde{\varphi}_2(x_2, -y_2)) \Rightarrow \\ \tilde{\varphi}_1(x_2, y_2) &= -\tilde{\varphi}_1(x_2, -y_2) \end{aligned}$$

logo $\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2) = y_2\Theta(x_2, y_2)$, onde $\Theta(x_2, y_2) = \Theta(x_2, -y_2)$.

Como $s_\phi B(u, \sigma) = B(s_\phi u, \sigma)$, onde $u = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ e $s_\phi u = \exp(-\phi S_0)u$ temos que se $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $B = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ então

$$\begin{pmatrix} f_1(u)C_1 + f_2(u)S_1 \\ -f_1(u)S_1 + f_2(u)C_1 \\ f_4(u) \\ -f_3(u) \\ -f_5(u) \\ -f_6(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) \\ f_2(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) \\ f_3(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) \\ f_4(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) \\ f_5(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) \\ f_6(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) \end{pmatrix},$$

onde $C_1 = \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)$ e $S_1 = \sen\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)$. Assim, a igualdade

$$f_3(C_1x_1 + S_1y_1, -S_1x_1 + C_1y_1, y_2, -x_2, -x_3, -y_3) = f_4(u),$$

tem a seguinte consequência no sistema (5.17):

$$\tilde{\varphi}_2(x_2, y_2) = \tilde{\varphi}_1(y_2, -x_2) = -x_2\Theta(y_2, -x_2) = -x_2\Theta(y_2, x_2) = -x_2\Theta_1(x_2, y_2).$$

Portanto o sistema (5.17) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} y_2(-2\sigma^2 + b_1c_1x_2^2 + b_1c_1y_2^2 + \Theta(x_2, y_2)) &= 0 \\ -x_2(-2\sigma^2 + b_1c_1y_2^2 + b_1c_1x_2^2 + \Theta_1(x_2, y_2)) &= 0. \end{aligned}$$

Para obter soluções R -simétricas tomamos $y_2 = 0$. Daí

$$-x_2(-2\sigma^2 + b_1c_1x_2^2 + \Theta_1(x_2, 0)) = 0,$$

e soluções não triviais para o sistema (5.15) são

$$x_2 \approx \pm \sqrt{\frac{2\sigma^2}{b_1c_1}}, \quad x_3 \approx \frac{\sigma}{b_1} \quad y_2 = y_3 = 0$$

se $b_1c_1 > 0$.

Em \mathcal{U}^0 o sistema (5.15) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero que equivalem à mesma órbita pois B é s_ϕ -equivariante. Logo X possui uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge para 2π .

Para soluções periódicas de período próximo a π , temos a aplicação de redução $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$B(u_2, \sigma) = (1 + \sigma)S_2u_2 - A_2u_2 - \tilde{h}(u_2) + o(\|u_2\|^4)$$

onde

$$S_2 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} h_5 \\ h_6 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} h_5 &= -y_3c_4(x_3^2 + y_3^2) \\ h_6 &= x_3c_4(x_3^2 + y_3^2). \end{aligned}$$

Portanto estudaremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -2\sigma y_3 + y_3(c_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_3(x_3, y_3) = 0 \\ 2\sigma x_3 - x_3(c_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_4(x_3, y_3) = 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $\tilde{\varphi}_i(x_3, y_3) = o(\|(x_3, y_3)\|^4)$, $i = 1, 2$.

Como no caso anterior, da R -reversibilidade de B temos $\tilde{\varphi}_3(x_3, y_3) = y_3\Theta_2(x_3, y_3)$, com $\Theta_2(x_3, y_3) = \Theta_2(x_3, -y_3)$.

Agora tomando $\phi = \frac{\pi}{4}$ a relação $s_\phi B(u, \sigma) = B(s_\phi u, \sigma)$ implica que

$$\tilde{\varphi}_4(x_3, y_3) = \tilde{\varphi}_3(y_3, -x_3) = -x_3\Theta_2(y_3, -x_3) = -x_3\Theta_2(y_3, x_3) = -x_3\Theta_3(x_3, y_3).$$

Dessa forma o sistema (5.18) torna-se

$$\begin{cases} y_3(-2\sigma + c_4(x_3^2 + y_3^2) + \Theta_2(x_3, y_3)) = 0 \\ x_3(2\sigma - c_4(x_3^2 + y_3^2) + \Theta_3(x_3, y_3)) = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Para encontrarmos as órbitas periódicas simétricas, restringimos o estudo ao conjunto *FixR*. Assim, temos $x_3(2\sigma - c_4x_3^2 + \Theta_2(x_3)) = 0$ cujas soluções não nulas são:

$$x_3 \approx \pm \sqrt{\frac{2\sigma}{c_4}},$$

desde que $\frac{\sigma}{c_4} > 0$.

Em \mathcal{U}^1 o sistema (5.18) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero que equivalem à mesma órbita pois B é s_ϕ -equivariante. Concluimos que existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a π . ■

Agora consideremos perturbações de (5.2) da forma (5.12) com $f(x) = ax^3 + o(x^4)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $o(x^4)$ denota os termos de ordem superior a 3.

O sistema (5.13) pode ser escrito da forma

$$\dot{X} = AX + F(X) \quad (5.20)$$

onde $X = (x_1, y_2, x_2, y_2, x_3, y_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda_2 & 0 & -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

e

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ ax_1^3 + o(\|x_1\|^4) \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Considere λ_1 e λ_2 tais que os autovalores de A estejam em ressonância do tipo $\alpha : 1 : 2$. Deste modo, existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ onde J é a matriz de Jordan de A da forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos P e sua inversa P^{-1} por

$$P = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ j_{61} & j_{62} & j_{63} & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} & l_{26} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} & l_{36} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & l_{45} & l_{46} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & l_{56} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3.5. *Existe uma transformação $x = \Phi(y)$ com $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, tangente à identidade, que transforma (5.13) com $f(x_1) = ax_1^3 + o(x_1^4)$, $a \in \mathbb{R}$, na forma normal (5.14) até ordem 3 com coeficientes:*

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3a}{8}(j_{12}^3 l_{16} - j_{11}^3 l_{26}), & b_1 &= 0, \\
a_2 &= \frac{3a}{8}(2j_{14}^2 j_{12} l_{16} - 2j_{13}^2 j_{11} l_{26}), & b_2 &= \frac{3a}{8}(2j_{12}^2 j_{14} l_{36} - 2j_{11}^2 j_{13} l_{46}), \\
a_3 &= \frac{3a}{8}(2j_{16}^2 j_{12} l_{16} - 2j_{15}^2 j_{11} l_{26}), & b_3 &= \frac{3a}{8}(-j_{13}^3 l_{46} + j_{14}^3 l_{36}), \\
& & b_4 &= \frac{3a}{8}(-2j_{15}^2 j_{13} l_{46} + 2j_{16}^2 j_{14} l_{36}), \\
c_1 &= 0, \\
c_2 &= \frac{3a}{8}(2j_{12}^2 j_{16} l_{56} - 2j_{11}^2 j_{15} l_{66}), \\
c_3 &= \frac{3a}{8}(2j_{14}^2 j_{16} l_{56} - 2j_{13}^2 j_{15} l_{66}), \\
c_4 &= \frac{3a}{8}(j_{16}^3 l_{56} - j_{15}^3 l_{66}),
\end{aligned}$$

onde j_{ik} e l_{ik} $k = 1, \dots, 6$ são as entradas de matriz P e P^{-1} dadas acima.

Demonstração: A transformação $x = P\tilde{x}$ com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$,

$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_3)^T$ leva o sistema (5.13) ao seguinte sistema $\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + F(\tilde{X})$ com mesma parte linear que (5.14) com:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= -\alpha\tilde{y}_1 + a l_{16} (j_{11}\tilde{x}_1 + j_{12}\tilde{y}_1 + j_{13}\tilde{x}_2 + j_{14}\tilde{y}_2 + j_{15}\tilde{x}_3 + j_{16}\tilde{y}_3)^3 + o(\|\tilde{x}\|^4) \\
\dot{\tilde{y}}_1 &= \alpha\tilde{x}_1 + a l_{26} (j_{11}\tilde{x}_1 + j_{12}\tilde{y}_1 + j_{13}\tilde{x}_2 + j_{14}\tilde{y}_2 + j_{15}\tilde{x}_3 + j_{16}\tilde{y}_3)^3 + o(\|\tilde{x}\|^4) \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{y}_2 + a l_{36} (j_{11}\tilde{x}_1 + j_{12}\tilde{y}_1 + j_{13}\tilde{x}_2 + j_{14}\tilde{y}_2 + j_{15}\tilde{x}_3 + j_{16}\tilde{y}_3)^3 + o(\|\tilde{x}\|^4) \\
\dot{\tilde{y}}_2 &= \tilde{x}_2 + a l_{46} (j_{11}\tilde{x}_1 + j_{12}\tilde{y}_1 + j_{13}\tilde{x}_2 + j_{14}\tilde{y}_2 + j_{15}\tilde{x}_3 + j_{16}\tilde{y}_3)^3 + o(\|\tilde{x}\|^4) \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -2\tilde{y}_3 + a l_{56} (j_{11}\tilde{x}_1 + j_{12}\tilde{y}_1 + j_{13}\tilde{x}_2 + j_{14}\tilde{y}_2 + j_{15}\tilde{x}_3 + j_{16}\tilde{y}_3)^3 + o(\|\tilde{x}\|^4) \\
\dot{\tilde{y}}_3 &= 2\tilde{x}_3 + a l_{66} (j_{11}\tilde{x}_1 + j_{12}\tilde{y}_1 + j_{13}\tilde{x}_2 + j_{14}\tilde{y}_2 + j_{15}\tilde{x}_3 + j_{16}\tilde{y}_3)^3 + o(\|\tilde{x}\|^4).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Levamos (5.23) na forma normal (5.14) até ordem 3 por uma transformação $\tilde{x} = \Phi(y) = y + G(y)$. O difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ foi encontrado usando o programa MATHEMATICA

6.0 da seguinte maneira: Definimos $G(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) =$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\ g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\ g_3(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\ g_4(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\ g_5(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \\ g_6(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \end{pmatrix}$$

onde $g_i = \sum_{|k|=3} a_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} x_1^{k_1} y_1^{k_2} x_2^{k_3} y_2^{k_4} x_3^{k_5} y_3^{k_6}$ com $|k| = \sum_{i=1}^6 k_i$.

Impomos a condição $R\Phi = \Phi R$ e calculamos $B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = J\Phi - D\Phi J$.

Assim, nosso sistema fica: $\dot{X} = AX + F(X) + B(X)$, com $X = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$. Igualando esse campo ao campo dado na forma normal (5.14) obtemos os coeficientes de Φ e também os coeficientes da forma normal de (5.13). ■

Definição 5.3.6. Dizemos que um campo vetorial R -reversível

$$\dot{X} = AX + F(X), \quad x \in \mathbb{R}^{2n},$$

com A uma matriz $2n \times 2n$ real e $F = (f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ satisfaz a condição de normalidade sobre $FixR$ se

$$\langle A, NF \rangle|_{FixR} = 0,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar canônico do \mathbb{R}^{2n} e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos os conjuntos

$\mathcal{U} = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se na forma normal de Belitskii dada por (5.14) com}$

$$a_i, b_i, c_i, i = 1, \dots, 4 \text{ dados pelo Lema 5.3.5}\}$$

e os subconjuntos

$\mathcal{U}^0 = \{X \in \mathcal{U}; X \text{ satisfaz a condi\c{c}o de normalidade sobre } FixR\}$ e

$\mathcal{U}^1 = \{X \in \mathcal{U}; c_4 \neq 0\}$.

Teorema 5.3.7. *As seguintes afirma\c{c}oes se verificam:*

i) Cada $X \in \mathcal{U}^0$ possui 1 ou 2 fam\u00edlias a um par\u00e2metro de solu\c{c}oes peri\u00f3dicas sim\u00e9tricas convergindo para a origem com per\u00edodo convergindo para 2π ;

ii) Cada $X \in \mathcal{U}^1$ possui uma fam\u00edlia a um par\u00e2metro de solu\c{c}oes peri\u00f3dicas sim\u00e9tricas convergindo para a origem com per\u00edodo convergindo para 2π e uma fam\u00edlia a um par\u00e2metro de solu\c{c}oes peri\u00f3dicas sim\u00e9tricas convergindo para a origem com per\u00edodo convergindo para π .

Demonstra\c{c}o: Para encontrarmos as solu\c{c}oes peri\u00f3dicas de per\u00edodo pr\u00f3ximo \u00e0 2π a aplica\c{c}o de redu\c{c}o $B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ \u00e9 dada por:

$$B(u_4, \sigma) = (1 + \sigma)S_4u_4 - A_4u_4 - \tilde{h}(u_4) + o(\|u_4\|^4)$$

onde

$$S_4 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_4 = \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}$$

Assim, devemos estudar o seguinte sistema de equa\c{c}oes:

$$\begin{cases} -\sigma y_2 + y_2(b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0 & \text{(a);} \\ \sigma x_2 - x_2(b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0 & \text{(b);} \\ -2\sigma y_3 + y_3(c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0 & \text{(c);} \\ 2\sigma x_3 - x_3(c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0 & \text{(d).} \end{cases} \quad (5.24)$$

onde $b_i, c_i, i = 1, 2$ s\u00e3o dados pelo Lema 5.3.5, $\tilde{\varphi}_j(x_2, y_2, x_3, y_3) = o(\|x\|^4)$, $x = (x_2, y_2, x_3, y_3)$, $j = 1, \dots, 4$.

Da R -reversibilidade de B , segue que

$$\begin{aligned} & R(\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3)) = \\ & -(\tilde{\varphi}_1R(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_2R(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_3R(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_4R(x_2, y_2, x_3, y_3)). \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) &= -\tilde{\varphi}_1(x_2, -y_2, x_3, -y_3) \\ \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) &= -\tilde{\varphi}_3(x_2, -y_2, x_3, -y_3),\end{aligned}$$

e assim,

$$\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) = y_2\Theta_1(x_2, y_2, x_3, y_3) + y_3\Theta_2(x_2, y_2, x_3, y_3)$$

e

$$\tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) = y_2\Theta_5(x_2, y_2, x_3, y_3) + y_3\Theta_6(x_2, y_2, x_3, y_3).$$

Como $s_\phi B(u, \sigma) = B(s_\phi u, \sigma)$ se $\phi = \frac{\pi}{2}$ obtemos

$$\tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = \tilde{\varphi}_1(y_2, -x_2, -x_3, y_3) = -x_2\Theta_1(y_2, -x_2, -x_3, y_3) + y_3\Theta_2(y_2, -x_2, -x_3, y_3) \Rightarrow$$

$$\tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = x_2\Theta_3(x_2, y_2, x_3, y_3) + y_3\Theta_4(x_2, y_2, x_3, y_3).$$

Da mesma forma, se $\phi = \frac{\pi}{4}$, obtemos

$$\begin{aligned}-\tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3) &= \tilde{\varphi}_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2, -y_3, x_3\right) = \\ &\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2\right)\Theta_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2, -y_3, x_3\right) + \\ &x_3\Theta_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2, -y_3, x_3\right).\end{aligned}$$

Daí

$$\tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3) = x_2\Theta_7(x_2, y_2, x_3, y_3) + x_3\Theta_8(x_2, y_2, x_3, y_3) + y_2\Theta_9(x_2, y_2, x_3, y_3).$$

Portanto o sistema (5.24) restrito ao *Fix R* pode ser escrito por:

$$\begin{cases} \sigma x_2 - x_2(b_3x_2^2 + b_4x_3^2) + x_2\Theta_3(x_2, x_3) = 0, \\ 2\sigma x_3 - x_3(c_3x_2^2 + c_4x_3^2) + x_2\Theta_7(x_2, x_3) + x_3\Theta_8(x_2, x_3) = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Se $x_2 = 0$ então $x_3(2\sigma - c_4x_3^2 + \Theta_8(0, x_3)) = 0$. Assim se $c_4 \neq 0$ obtemos duas soluções não nulas para (5.3.1) que tendem a 0 quando $\sigma \rightarrow 0$ dadas por

$$x_2 = 0 \quad y_2 = 0 \quad x_3 \approx \sqrt{\frac{2\sigma}{c_4}} \quad y_3 = 0,$$

que pela Redução de Lyapunov-Schmidt implicam na existência de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas.

Por outro lado, impondo a condição de normalidade, $\langle A_4, F \rangle = 0$, com A_4 dada acima e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ obtemos

$$x_2 f_4(x_2, 0, x_3, 0) + 2x_3 f_2(x_2, 0, x_3, 0) = 0.$$

Daí nos pontos $(x_2, 0, 0, 0)$ temos $x_2 f_4(x_2, 0, 0, 0) = 0$. Isto implica que $f_4(x_2, 0, x_3, 0) = x_3 \tilde{f}_4(x_2, x_3)$. Analogamente, temos $f_2(x_2, 0, x_3, 0) = x_2 \tilde{f}_2(x_2, x_3)$. Assim, o sistema (5.33) fica

$$\begin{cases} x_2(\sigma - b_3 x_2^2 - b_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}_3(x_2, x_3)) = 0 & , \\ x_3(2\sigma - c_3 x_2^2 - c_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}_8(x_2, x_3)) = 0 & . \end{cases}$$

Genericamente, este sistema possui 2 ou 4 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Pelo método de redução de Liapunov-Schmidt elas representam 1 ou 2 famílias a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio.

Para soluções periódicas de período próximo a π , temos a aplicação de redução $B_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$B_2(u_2, \sigma) = (1 + \sigma)S_2 u_2 - A_2 u_2 - \tilde{h}(u_2) + o(\|u_2\|^4)$$

onde

$$S_2 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}$$

Portanto devemos resolver a seguinte equação:

$$2\sigma x_3 - c_4 x_3^3 + x_3 \tilde{\Theta}_8(x_3) = 0 \tag{5.26}$$

que tem como solução não nula

$$x_3 \approx \pm \sqrt{\frac{2\sigma}{c_4}},$$

se $c_4 \neq 0$.

Em \mathcal{U}^1 a equação (5.26) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Concluimos que existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a π .

Exemplo: Considere $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{7}{2}$ em (5.13) com $f(x_1) = x_1^3$.

Primeiramente, fazemos um rescalonamento do tempo por: $t = \sqrt{2}\tau$ transformando o sistema (5.13) em:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sqrt{2}y_1 \\
\dot{y}_1 &= \sqrt{2}x_2 \\
\dot{x}_2 &= \sqrt{2}y_2 \\
\dot{y}_2 &= \sqrt{2}x_3 \\
\dot{x}_3 &= \sqrt{2}y_3 \\
\dot{y}_3 &= -\sqrt{2}\lambda_1x_3 - \sqrt{2}\lambda_2x_2 - \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_1^3.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

A transformação $x = P\tilde{x}$ com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_3)^T$ com

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

leva o sistema (5.41) ao seguinte sistema

$$\dot{\tilde{X}} = J\tilde{X} + F(\tilde{X}) \tag{5.28}$$

com mesma parte linear que (5.14) com $\alpha = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= -\sqrt{2}\tilde{y}_1 - 2\sqrt{2} \left(\tilde{y}_1 + 4\sqrt{2}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{4\sqrt{2}} \right)^3 \\
\dot{\tilde{y}}_1 &= \sqrt{2}\tilde{x}_1 \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{y}_2 + \frac{1}{3}\sqrt{2} \left(\tilde{y}_1 + 4\sqrt{2}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{4\sqrt{2}} \right)^3 \\
\dot{\tilde{y}}_2 &= \tilde{x}_2 \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -2\tilde{y}_3 + \frac{8}{3}\sqrt{2} \left(\tilde{y}_1 + 4\sqrt{2}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{4\sqrt{2}} \right)^3 \\
\dot{\tilde{y}}_3 &= 2\tilde{x}_3.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Assim, pelo Lema 5.3.5, existe um difeomorfismo Φ que leva $F(\tilde{X})$ no jato de ordem 3 da forma normal (5.14) com coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-3}{4} & b_1 &= 0 & c_1 &= 0 \\ a_2 &= -48 & b_2 &= \sqrt{2} & c_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ a_3 &= \frac{-3}{64} & b_3 &= 16\sqrt{2} & c_3 &= 8\sqrt{2} \\ & & b_4 &= \frac{\sqrt{2}}{32} & c_4 &= \frac{1}{128\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

isto é, Φ transforma (5.28) em $\dot{\tilde{X}} = J\tilde{X} + J^3\tilde{X} + R(\tilde{X})$, onde $R(\tilde{X}) = o(\|\tilde{X}\|^4)$. Aplicando o Teorema 5.3.7 segue imediatamente que

- (i) $X \in \mathcal{U}^1$ e portanto possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π e uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para π , já que neste caso, $c_4 \neq 0$.

Por outro lado, se perturbarmos (5.20) da forma

$$\dot{X} = AX + F(X) + \tilde{h}(X) \tag{5.30}$$

com $F = (0, 0, 0, 0, 0, x_1^3)^T$ e $\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)^T$ onde para cada $i = 1, \dots, 6$ temos $h_i(X) = o(\|X\|^4)$, tal que $\tilde{h}(x) = P(-R)P^{-1}(X)$. Assim Φ transforma (5.30) em $\dot{\tilde{X}} = J\tilde{X} + J^3\tilde{X}$ e assim podemos aplicar o Teorema 5.3.7 e concluímos (i) e também:

- (ii) $X \in \mathcal{U}^0$ e portanto possui 1 ou 2 famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π .

5.3.2 Caso $\alpha : 1 : 3$ ressonante

Encontraremos soluções periódicas simétricas com período próximos à 2π e $2\pi/3$ para perturbações reversíveis da equação (5.2) quando seus autovalores possuem a relação de ressonância do tipo $\alpha : 1 : 3$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Utilizaremos a forma normal de Belitskii até ordem 3.

Sem perda de generalidade podemos supor que a matriz $A = DX(0)$ tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Teorema 5.3.8. *Seja $X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6)$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados pelas condições acima. Então X é conjugado, numa vizinhança da origem, a seguinte forma normal:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 &= -y_2 + 2b_1x_2x_3y_2 - b_1x_2^2y_3 + b_1y_2^2y_3 - y_2(b_2(x_1^2 + y_1^2) + b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + 2b_1x_2y_2y_3 + b_1x_2^2x_3 - b_1y_2^2x_3 + x_2(b_2(x_1^2 + y_1^2) + b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_3 &= -3y_3 - 3c_1x_2^2y_2 + c_1y_2^3 - y_3(c_2(x_1^2 + y_1^2) + c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_3 &= 3x_3 - 3c_1x_2y_2^2 + c_1x_2^3 + x_3(c_2(x_1^2 + y_1^2) + c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \end{aligned} \tag{5.31}$$

onde $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Demonstração: Consideremos o campo em coordenadas complexas (z_1, z_2, z_3) onde $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$. Nestas coordenadas, temos que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}.$$

A condição

$$A^*h(x) = Dh(x)A^*x,$$

implica que

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \alpha ih_1, \\ Dh_2(x) &= -\alpha ih_2, \\ Dh_3(x) &= ih_3, \\ Dh_4(x) &= -ih_4, \\ Dh_5(x) &= 3ih_5, \\ Dh_6(x) &= -3ih_6, \end{aligned}$$

onde

$$D := \alpha iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha i \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + iz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - i \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + 3iz_3 \frac{\partial}{\partial z_3} - 3i \bar{z}_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_3}.$$

Sejam $u = z_1^{k_1} \bar{z}_1^{k_2} z_2^{k_3} \bar{z}_2^{k_4} z_3^{k_5} \bar{z}_3^{k_6}$, $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$. Vejamos quais desses monômios estão na forma normal até ordem 3.

A análise de h_1 é idêntica ao caso anterior. Para h_3 , da relação $Dh_3 = ih_3$, obtemos

$$iu = (\alpha ik_1 - \alpha ik_2 + ik_3 - ik_4 + 3ik_5 - 3ik_6)u \Rightarrow$$

$$k_1 - k_2 = 0 \quad \text{e} \quad k_3 - k_4 + 3(k_5 - k_6) = 1.$$

Não existem elementos de ordem 2 que satisfazem as condições acima e os de ordem 3 são:

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 1, 0, 0),$$

que representam respectivamente,

$$z_2 z_3 \bar{z}_3, \bar{z}_2^2 z_3, z_1 \bar{z}_1 z_2 \text{ e } z_2^2 \bar{z}_2.$$

Assim

$$h_3 = \tilde{c}_1 z_2 z_3 \bar{z}_3 + \tilde{c}_2 \bar{z}_2^2 z_3 + \tilde{c}_3 z_1 \bar{z}_1 z_2 + \tilde{c}_4 z_2^2 \bar{z}_2.$$

Analogamente, encontramos

$$h_4 = \tilde{d}_1 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_3 + \tilde{d}_2 z_2^2 \bar{z}_3 + \tilde{d}_3 z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \tilde{d}_4 z_2 \bar{z}_2^2.$$

De $\bar{h}_3 = h_4$ e pela R reversibilidade, temos $\tilde{c}_j = ic_j$, $\tilde{d}_j = -ic_j$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 4$.

Cálculos análogos seguem para h_5 e h_6 .

Obtemos assim a forma normal

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \alpha iz_1 + iz_1(a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2 + a_3|z_3|^2) + o(\|z\|^4) \\ \dot{z}_2 &= iz_2 + i(b_1z_1\bar{z}_1z_2 + b_2z_2^2\bar{z}_2 + b_3z_2z_3\bar{z}_3 + b_4\bar{z}_2^2z_3) + o(\|z\|^4) \\ \dot{z}_3 &= 3iz_3 + i(c_1z_1\bar{z}_1z_3 + c_2z_2\bar{z}_2z_3 + c_3z_3^2\bar{z}_3 + c_4z_2^3) + o(\|z\|^4),\end{aligned}$$

com $z = (z_1, z_2, z_3)$ que em coordenadas $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ fica

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 &= -y_2 + 2b_1x_2x_3y_2 - b_1x_2^2y_3 + b_1y_2^2y_3 - y_2(b_2(x_1^2 + y_1^2) + b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + 2b_1x_2y_2y_3 + b_1x_2^2x_3 - b_1y_2^2x_3 + x_2(b_2(x_1^2 + y_1^2) + b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_3 &= -3y_3 - 3c_1x_2^2y_2 + c_1y_2^3 - y_3(c_2(x_1^2 + y_1^2) + c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_3 &= 3x_3 - 3c_1x_2y_2^2 + c_1x_2^3 + x_3(c_2(x_1^2 + y_1^2) + c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4),\end{aligned}$$

com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ e finalizamos a demonstração. ■

Definimos os conjuntos

$$\mathcal{U}^0 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3X \text{ expressa-se por (5.31) com } c_4 \neq 0\},$$

$$\mathcal{U}^1 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3X \text{ expressa-se por (5.31) com } b_3 \neq 0\},$$

$$\mathcal{U}^2 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3X \text{ expressa-se por (5.31) com } A \geq 0, \frac{B - b_1c_1\sqrt{A}}{C} \neq 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{U}_0^i = \{X \in \mathcal{U}^i; X \text{ satisfaz a condição de normalidade sobre } FixR\}, i = 0, 1, 2.$$

Considerando o campo vetorial na forma normal de Belitskii, utilizaremos a redução de Lyapunov-Schmidt para estudar a existência de soluções periódicas simétricas e garantir o seguinte resultado:

Teorema 5.3.9. *As seguintes afirmações se verificam:*

- i) Cada $X \in \mathcal{U}_0^0 \cup \mathcal{U}_0^1$ possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π ;
- iii) Cada $X \in \mathcal{U}_0^2$ possui duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π .
- iv) Cada $X \in \mathcal{U}^0$ possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para $\frac{2\pi}{3}$.

Demonstração: Para encontrarmos as soluções periódicas de período próximo à 2π a aplicação de redução $B_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dada por:

$$B(u_4, \sigma) = (1 + \sigma)S_4u_4 - A_4u_4 - \tilde{h}(u)_4 + o(\|u_4\|^4),$$

onde

$$S_4 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_4 = \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} h_3 &= 2b_1x_2x_3y_2 - b_1x_2^2y_3 + b_1y_2^2y_3 - y_2(b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) \\ h_4 &= 2b_1x_2y_2y_3 + b_1x_2^2x_3 - b_1y_2^2x_3 + x_2(b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) \\ h_5 &= -3c_1x_2^2y_2 + c_1y_2^3 - y_3(c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) \\ h_6 &= -3c_1x_2y_2^2 + c_1x_2^3 + x_3(c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)). \end{aligned}$$

De $B_4(u, \sigma) = 0$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} -\sigma y_2 - b_1(2x_2x_3y_2 - x_2^2y_3 + y_2^2y_3) + y_2(b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \\ \sigma x_2 - b_1(2x_2y_2y_3 + x_2^2x_3 - y_2^2x_3) - x_2(b_3(x_2^2 + y_2^2) + b_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \\ -3\sigma y_3 + c_1(3x_2^2y_2 - y_2^3) + y_3(c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \\ 3\sigma x_3 + c_1(3x_2y_2^2 - x_2^3) - x_3(c_3(x_2^2 + y_2^2) + c_4(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \end{cases} \quad (5.32)$$

onde $\tilde{\varphi}_j(x_2, y_2, x_3, y_3) = o(\|x\|^4)$, $x = (x_2, y_2, x_3, y_3)$, $j = 1, \dots, 4$.

Da R -reversibilidade de B , segue que

$$\begin{aligned} &R(\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3)) = \\ &-(\tilde{\varphi}_1R(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_2R(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_3R(x_2, y_2, x_3, y_3), \tilde{\varphi}_4R(x_2, y_2, x_3, y_3)). \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) &= -\tilde{\varphi}_1(x_2, -y_2, x_3, -y_3) \\ \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) &= -\tilde{\varphi}_3(x_2, -y_2, x_3, -y_3), \end{aligned}$$

e assim,

$$\tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) = y_2\Theta_1(x_2, y_2, x_3, y_3) + y_3\Theta_2(x_2, y_2, x_3, y_3)$$

e

$$\tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) = y_2\Theta_5(x_2, y_2, x_3, y_3) + y_3\Theta_6(x_2, y_2, x_3, y_3).$$

Como $s_\phi B(u, \sigma) = B(s_\phi u, \sigma)$ se $\phi = \frac{\pi}{2}$ obtemos

$$\tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = \tilde{\varphi}_1(y_2, -x_2, -y_3, x_3) = -x_2\Theta_1(y_2, -x_2, -y_3, x_3) + x_3\Theta_2(y_2, -x_2, -y_3, x_3) \Rightarrow$$

$$\tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = x_2\Theta_3(x_2, y_2, x_3, y_3) + x_3\Theta_4(x_2, y_2, x_3, y_3).$$

Da mesma forma

$$\tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3) = x_2\Theta_7(x_2, y_2, x_3, y_3) + x_3\Theta_8(x_2, y_2, x_3, y_3).$$

Portanto o sistema (5.32) restrito ao *Fix R* pode ser escrito por:

$$\begin{cases} \sigma x_2 - b_1 x_2^2 x_3 - b_3 x_2^3 - b_4 x_2 x_3^2 + x_2 \Theta_3(x_2, x_3) + x_3 \Theta_4(x_2, x_3) = 0, \\ 3\sigma x_3 - c_1 x_2^3 - c_3 x_2^2 x_3 - c_4 x_3^3 + x_2 \Theta_7(x_2, x_3) + x_3 \Theta_8(x_2, x_3) = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Impondo a condição de normalidade, $\langle A_4, F \rangle|_{Fix R} = 0$, com A_4 dada acima e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ obtemos

$$x_2 f_4(x_2, 0, x_3, 0) + 3x_3 f_2(x_2, 0, x_3, 0) = 0.$$

Daí nos pontos $(x_2, 0, 0, 0)$ temos $x_2 f_4(x_2, 0, 0, 0) = 0$. Isto implica que $f_4(x_2, 0, x_3, 0) = x_3 \tilde{f}_4(x_2, x_3)$. Analogamente, temos $f_2(x_2, 0, x_3, 0) = x_2 \tilde{f}_2(x_2, x_3)$. Assim, o sistema (5.33) fica

$$\begin{cases} x_2(\sigma - b_1 x_2 x_3 - b_3 x_2^2 - b_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}_3(x_2, x_3)) = 0 & (G_1), \\ x_3(3\sigma - c_3 x_2^2 - c_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}_8(x_2, x_3)) = 0 & (G_2). \end{cases}$$

De G_1 temos $x_2 = 0$ ou $\sigma - b_1 x_2 x_3 - b_3 x_2^2 - b_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}_3(x_2, x_3) = 0$.

Se $x_2 = 0$ então $x_3(3\sigma - c_4 x_3^2 + \Theta_8(x_3)) = 0$. Assim, se $c_4 \neq 0$ então as soluções não nulas para o sistema (5.3.2) são

$$x_2 = 0 \quad x_3 \approx \pm \sqrt{\frac{3\sigma}{c_4}}.$$

Se $\sigma - b_1 x_2 x_3 - b_3 x_2^2 - b_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}_3(x_2, x_3) = 0$ então ao substituirmos em G_2 obtemos:

$$x_3(3b_1 x_2 x_3 + 3b_3 x_2^2 + 3b_4 x_3^2 - c_3 x_2^2 - c_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}(x_2, x_3)) = 0.$$

Novamente, podemos ter $x_3 = 0$ ou $3b_1 x_2 x_3 + 3b_3 x_2^2 + 3b_4 x_3^2 - c_3 x_2^2 - c_4 x_3^2 + \tilde{\Theta}(x_2, x_3) = 0$.

Se $x_3 = 0$ temos como solução não trivial

$$x_2 \approx \pm \sqrt{\frac{\sigma}{b_3}} \quad x_3 = 0.$$

Se $3b_1x_2x_3 + 3b_3x_2^2 + 3b_4x_3^2 - c_3x_2^2 - c_4x_3^2 + \tilde{\Theta}(x_2, x_3) = 0$, utilizando o programa Mathematica encontramos 4 soluções não nulas:

$$x_2 = \pm \left(\frac{3b_1 \pm \sqrt{A}}{2\sqrt{2}(3b_3 - c_3)} \right) \sqrt{\frac{s(B - b_1c_3\sqrt{A})}{C}} \quad x_3 = \pm \sqrt{\frac{s(B - b_1c_3\sqrt{A})}{2C}},$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 9b_1^2 + 36b_3b_4 - 12b_4c_3 + 12b_3c_4 - 4c_3c_4 \\ B &= 36b_3^2b_4 + 3b_1^2c_3 - 18b_3b_4c_3 + 2b_4c_3^2 + 6b_3^2c_4 - 2b_3c_3c_4 \\ C &= 36b_3^2b_4^2 + 6b_1^2b_4c_3 - 12b_3b_4^2c_3 + b_4^2c_3^2 + 12b_3^2b_4c_4 + b_1^2c_3c_4 - 2b_3b_4c_3c_4 + b_3^2c_4^2 \end{aligned}$$

Em $\mathcal{U}_0^0 \cup \mathcal{U}_0^1$ o sistema (5.32) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Assim existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a 2π .

Em \mathcal{U}_0^2 o sistema (5.32) possui 4 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Assim existem duas famílias a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a 2π .

Para soluções periódicas de período próximo a $2\pi/3$, temos a aplicação de redução $B_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$B_2(u_2, \sigma) = (1 + \sigma)S_2u_2 - A_2u_2 - \tilde{h}(u_2) + o(\|u_2\|^4)$$

onde

$$S_2 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}$$

Portanto devemos resolver a seguinte equação:

$$3\sigma x_3 - c_4 x_3^3 + x_3 \tilde{\Theta}_8(x_3) = 0 \tag{5.34}$$

que tem como solução não nula

$$x_3 \approx \pm \sqrt{\frac{3\sigma}{c_4}},$$

se $c_4 \neq 0$.

Em \mathcal{U}^0 a equação (5.34) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Concluimos que existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a $\frac{2\pi}{3}$.

Agora consideremos perturbações de (5.2) da forma (5.12) com $f(x) = ax^3 + o(x^4)$, $a \in \mathbb{R}$.

O sistema (5.13) pode ser escrito da forma $\dot{X} = AX + F(X)$, onde $X = (x_1, y_2, x_2, y_2, x_3, y_3)$, A e F são dados por (5.21) e (5.22), respectivamente.

Considere λ_1 e λ_2 tais que os autovalores de A estejam em ressonância do tipo $\alpha : 1 : 3$. Deste modo, existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ onde J é a matriz de Jordan de A da forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por P e sua inversa P^{-1} por

$$P = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ j_{61} & j_{62} & j_{63} & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} & l_{26} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} & l_{36} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & l_{45} & l_{46} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & l_{56} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3.10. *Existe uma transformação $x = \Phi(y)$ com $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, tangente à identidade, que transforma (5.13) com $f(x_1) = ax_1^3 + o(x_1^4)$, $a \in \mathbb{R}$ na forma normal (5.31) até ordem 3 com coeficientes:*

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{3a}{8}(j_{12}^3 l_{16} - j_{11}^3 l_{26}), & b_1 &= \frac{3a}{8}(j_{13}^2 j_{15} l_{46} + j_{14}^2 j_{16} l_{36}), \\
a_2 &= -\frac{3a}{8}(2j_{14}^2 j_{12} l_{16} - 2j_{13}^2 j_{11} l_{26}), & b_2 &= -\frac{3a}{8}(2j_{12}^2 j_{14} l_{36} - 2j_{11}^2 j_{13} l_{46}), \\
a_3 &= -\frac{3a}{8}(2j_{16}^2 j_{12} l_{16} - 2j_{15}^2 j_{11} l_{26}), & b_3 &= -\frac{3a}{8}(-j_{13}^3 l_{46} + j_{14}^3 l_{36}), \\
& & b_4 &= -\frac{3a}{8}(-2j_{15}^2 j_{13} l_{46} + 2j_{16}^2 j_{14} l_{36}), \\
c_1 &= \frac{a}{8}(j_{14}^3 l_{56} + j_{13}^3 l_{66}), \\
c_2 &= -\frac{3a}{8}(2j_{12}^2 j_{16} l_{56} - 2j_{11}^2 j_{15} l_{66}), \\
c_3 &= -\frac{3a}{8}(2j_{14}^2 j_{16} l_{56} - 2j_{13}^2 j_{15} l_{66}), \\
c_4 &= -\frac{3a}{8}(j_{16}^3 l_{56} - j_{15}^3 l_{66}),
\end{aligned}$$

onde j_{ik} e l_{ik} $k = 1, \dots, 6$ são as entradas de matriz P e P^{-1} dadas acima.

Encontramos os coeficientes da forma normal utilizando o programa MATHEMATICA 6.0 da mesma forma do caso $\alpha : 1 : 2$.

Exemplo: Considere (5.13) com $f(x_1) = x_1^3 + h(x_1)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{13}{3}$. Neste caso, os autovalores de A são $\pm i$, $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ e $\pm i\sqrt{3}$ que estão em ressonância $\alpha : 1 : 3$.

Primeiramente, fazemos um rescalonamento do tempo por: $t = \sqrt{3}\tau$ transformando o sistema (5.13) em:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sqrt{3}y_1 \\
\dot{y}_1 &= \sqrt{3}x_2 \\
\dot{x}_2 &= \sqrt{3}y_2 \\
\dot{y}_2 &= \sqrt{3}x_3 \\
\dot{x}_3 &= \sqrt{3}y_3 \\
\dot{y}_3 &= -\sqrt{3}\lambda_1 x_3 - \sqrt{3}\lambda_2 x_2 - \sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}x_1^3 + \sqrt{3}h(x_1).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

A transformação $x = P\tilde{x}$ com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_3)^T$ com

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 9\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{9\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 9 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

leva o sistema (5.41) ao seguinte sistema

$$\dot{\tilde{X}} = J\tilde{X} + F(\tilde{X}) + H(\tilde{X}) \quad (5.36)$$

com mesma parte linear que (5.14) com $\alpha = \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\sqrt{3}\tilde{y}_1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\tilde{y}_1 + 9\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{9\sqrt{3}} \right)^3 + h \left(\tilde{y}_1 + 9\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{9\sqrt{3}} \right) \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \sqrt{3}\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{y}_2 + \frac{1}{16}\sqrt{3} \left(\tilde{y}_1 + 9\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{9\sqrt{3}} \right)^3 + h \left(\tilde{y}_1 + 9\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{9\sqrt{3}} \right) \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -3\tilde{y}_3 + \frac{27}{16}\sqrt{3} \left(\tilde{y}_1 + 9\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{9\sqrt{3}} \right)^3 + h \left(\tilde{y}_1 + 9\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{9\sqrt{3}} \right) \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= 3\tilde{x}_3 \end{aligned} \quad (5.37)$$

e $H(\tilde{X}) = P^{-1}\tilde{h}P(\tilde{X})$, $\tilde{h} = (0, 0, 0, 0, 0, h)$.

Assim, pelo Lema 5.3.10, existe um difeomorfismo Φ que leva $F(\tilde{X})$ no jato de ordem 3 da forma normal (5.31) com coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{9\sqrt{3}}{32} & b_1 &= \frac{81}{128} & c_1 &= \frac{177147}{128} \\ a_2 &= \frac{2187\sqrt{3}}{16} & b_2 &= -\frac{81}{64} & c_2 &= -\frac{9}{64} \\ a_3 &= \frac{\sqrt{3}}{432} & b_3 &= -\frac{19683}{128} & c_3 &= -\frac{2187}{64} \\ & & b_4 &= -\frac{1}{192} & c_4 &= -\frac{1}{3456} \end{aligned}$$

Note que este exemplo não satisfaz a condição de normalidade sobre $FixR$ já que $c_1 \neq 0$. Assim, o Teorema 5.3.9 não pode ser aplicado.

5.3.3 Caso $\alpha : 1 : p$, $p > 3$ ressonante

Sem perda de generalidade, podemos supor que $A = DX(0)$ é da forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 3$. Obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.11. *Seja $X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6)$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados pelas condições acima. Então X é conjugado, numa vizinhança da origem, a seguinte forma normal:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 &= -y_2 - y_2(b_1(x_1^2 + y_1^2) + b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + x_2(b_1(x_1^2 + y_1^2) + b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_3 &= -p y_3 - y_3(c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_3 &= p x_3 + x_3(c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4), \end{aligned} \tag{5.38}$$

com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Demonstração: Considerando o campo em coordenadas complexas temos que

$$A = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ip & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ip \end{pmatrix}.$$

A condição

$$A^*h(x) = Dh(x)A^*x,$$

implica que

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \alpha ih_1, \\ Dh_2(x) &= -\alpha ih_2, \\ Dh_3(x) &= ih_3, \\ Dh_4(x) &= -ih_4, \\ Dh_5(x) &= pih_5, \\ Dh_6(x) &= -pih_6, \end{aligned}$$

onde

$$D := \alpha iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha i \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + iz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - i \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + piz_3 \frac{\partial}{\partial z_3} - pi \bar{z}_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_3}.$$

A análise de h_1 e h_2 é exatamente igual à dos casos anteriores.

Para h_3 temos que $Dh_3(x) = ih_3$ implica que

$$iu = (i\alpha k_1 - i\alpha k_2 + ik_3 - ik_4 + ipk_5 - ipk_6)u \Rightarrow$$

$$k_1 - k_2 = 0 \quad \text{e} \quad k_3 - k_4 + p(k_5 - k_6) = 1.$$

Não existem elementos de ordem 2 que satisfazem as condições acima e os de ordem 3 são:

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 2, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Assim

$$h_3 = \tilde{c}_1 z_2 z_3 \bar{z}_3 + \tilde{c}_2 z_2^2 \bar{z}_2 + \tilde{c}_3 z_1 \bar{z}_1 z_2.$$

Analogamente, encontramos h_4

$$h_4 = \tilde{d}_1 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_3 + \tilde{d}_2 z_2 \bar{z}_2^2 + \tilde{d}_3 z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Como anteriormente temos $\tilde{c}_j = ic_j$, $\tilde{d}_j = -ic_j$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 4$.

Para h_5 , de $Dh_5(x) = iph_5$ temos que

$$ipu = (i\alpha k_1 - i\alpha k_2 + ik_3 - ik_4 + ipk_5 - ipk_6)u \Rightarrow$$

$$k_1 - k_2 = 0 \quad \text{e} \quad k_3 - k_4 + p(k_5 - k_6) = p.$$

Não existem elementos de ordem 2 que satisfazem as condições acima e os de ordem 3 são:

$$(0, 0, 0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Daí

$$h_5 = \tilde{e}_1 z_3^2 \bar{z}_3 + \tilde{e}_2 z_2 \bar{z}_2 z_3 + \tilde{e}_3 z_1 \bar{z}_1 z_3.$$

Analogamente,

$$h_6 = \tilde{f}_1 z_3 \bar{z}_3^2 + \tilde{f}_2 z_2 \bar{z}_2 \bar{z}_3 + \tilde{f}_3 z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_3,$$

com $\tilde{e}_j = ie_j$, $\tilde{f}_j = -ie_j$, $e_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 4$.

Obtemos assim a forma normal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\alpha z_1 + iz_1(a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2 + a_3|z_3|^2) + o(\|z\|^4) \\ \dot{z}_2 &= iz_2 + iz_2(b_1|z_1|^2 + b_2|z_2|^2 + b_3|z_3|^2) + o(\|z\|^4) \\ \dot{z}_3 &= ipz_3 + iz_3(c_1|z_1|^2 + c_2|z_2|^2 + c_3|z_3|^2) + o(\|z\|^4), \end{aligned}$$

com $z = (z_1, z_2, z_3)$, que em coordenadas $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ fica

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1(a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + a_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 &= -y_2 - y_2(b_1(x_1^2 + y_1^2) + b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + x_2(b_1(x_1^2 + y_1^2) + b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{x}_3 &= -py_3 - y_3(c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4) \\ \dot{y}_3 &= px_3 + x_3(c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) + o(\|x\|^4), \end{aligned}$$

e finalizamos a demonstração. ■

Definimos os conjuntos

$$\mathcal{U}^0 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se por (5.38) com } c_3 \neq 0\},$$

$$\mathcal{U}^1 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se por (5.38) com } b_2 \neq 0\},$$

$$\mathcal{U}^2 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se por (5.38) com } b_2(p(b_3 + b_2) - (c_2 + c_3)) \neq 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{U}_0^i = \{X \in \mathcal{U}^i; X \text{ satisfaz a condição de normalidade sobre } \text{Fix}R\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$\mathcal{U}^3 = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se por (5.38) com } c_3 \neq 0\}.$$

Para órbitas periódicas temos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.12. *As seguintes afirmações se verificam:*

- i) Cada $X \in \mathcal{U}_0^0 \cup \mathcal{U}_0^1$ possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π .
- ii) Cada $X \in \mathcal{U}_0^2$ possui duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π .
- iii) Cada $X \in \mathcal{U}^3$ possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para $\frac{2\pi}{p}$.

Demonstração: Para encontrarmos as soluções periódicas de período próximo à 2π a aplicação de redução $B_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dada por:

$$B(u_4, \sigma) = (1 + \sigma)S_4u_4 - A_4u_4 - \tilde{h}(u_4) + o(\|u_4\|^4),$$

onde

$$S_4 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_4 = \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} h_3 &= -y_2(b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) \\ h_4 &= x_2(b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) \\ h_5 &= -y_3(c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) \\ h_6 &= x_3(c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)). \end{aligned}$$

De $B_4(u, \sigma) = 0$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} -\sigma y_2 + y_2(b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_1(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \\ \sigma x_2 - x_2(b_2(x_2^2 + y_2^2) + b_3(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_2(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \\ -p\sigma y_3 + y_3(c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_3(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \\ p\sigma x_3 - x_3(c_2(x_2^2 + y_2^2) + c_3(x_3^2 + y_3^2)) + \tilde{\varphi}_4(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \end{cases} \quad (5.39)$$

onde $\tilde{\varphi}_j(x_2, y_2, x_3, y_3) = o(\|x\|^4)$, $j = 1, \dots, 4$.

Impondo a condição de normalidade, $\langle A_4, F \rangle|_{FixR} = 0$, com A_4 dada acima e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ obtemos

$$x_2 f_4(x_2, 0, x_3, 0) + p x_3 f_2(x_2, 0, x_3, 0) = 0.$$

Daí nos pontos $(x_2, 0, 0, 0)$ temos $x_2 f_4(x_2, 0, 0, 0) = 0$. Isto implica que $f_4(x_2, 0, x_3, 0) = x_3 \tilde{f}_4(x_2, x_3)$. Analogamente, temos $f_2(x_2, 0, x_3, 0) = x_2 \tilde{f}_2(x_2, x_3)$. Assim, o sistema (5.39) restrito ao *FixR* fica

$$\begin{cases} x_2(\sigma - b_2 x_2^2 - b_3 x_3^2 + \Theta_1(\|(x_2, x_3)\|^3)) = 0 & (G_1), \\ x_3(p\sigma - c_2 x_2^2 - c_3 x_3^2 + \Theta_2(\|(x_2, x_3)\|^3)) = 0 & (G_2). \end{cases}$$

De G_1 obtemos $x_2 = 0$ ou $\sigma = b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + \Theta_1(\|(x_2, x_3)\|^3)$.

Se $x_2 = 0$ então $x_3(p\sigma - c_3 x_3^2 + \Theta_2(\|(x_2, x_3)\|^3)) = 0$. E daí uma solução não trivial é

$$x_2 = 0 \quad x_3 = \pm \sqrt{\frac{p\sigma}{c_3}},$$

se $c_3 \neq 0$.

Se $\sigma = b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + \Theta_1(\|(x_2, x_3)\|^3)$ então $x_3(pb_2 x_2^2 + pb_3 x_3^2 - c_2 x_2^2 - c_3 x_3^2 + \bar{\Theta}(\|(x_2, x_3)\|^3)) = 0$. Assim podemos ter $x_3 = 0$ ou $pb_2 x_2^2 + pb_3 x_3^2 - c_2 x_2^2 - c_3 x_3^2 + \bar{\Theta}(\|(x_2, x_3)\|^3) = 0$. Caso $x_3 = 0$ temos $\sigma = b_2 x_2^2 + \Theta_1(\|(x_2, x_3)\|^3)$ e portanto uma solução não nula é:

$$x_2 \approx \pm \sqrt{\frac{\sigma}{b_2}},$$

se $b_2 \neq 0$.

Caso $pb_2 x_2^2 + pb_3 x_3^2 - c_2 x_2^2 - c_3 x_3^2 + \bar{\Theta}(\|(x_2, x_3)\|^3) = 0$, se $pb_2 - c_2 \neq 0$ essa equação pode ser resolvida para x_2^2 em termos de x_3 , daí:

$$x_2^2 \approx \frac{-(pb_3 - c_3)x_3^2}{pb_2 - c_2}$$

e portanto $x_3^2 \approx \frac{\sigma}{-b_2 \left(\frac{pb_3 - c_3}{pb_2 - c_2} + 1 \right)}$. Dessa forma as soluções não triviais são dadas por

$$x_2 \approx \pm \sqrt{\frac{\sigma(pb_3 - c_3)}{-b_2(p(b_3 + b_2) - (c_2 + c_3))}} \quad x_3 \approx \pm \sqrt{\frac{\sigma(pb_2 - c_2)}{-b_2(p(b_3 + b_2) - (c_2 + c_3))}},$$

se $b_2(p(b_3 + b_2) - (c_2 + c_3)) \neq 0$.

Em \mathcal{U}_0^0 e em \mathcal{U}_0^1 o sistema (5.39) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Assim existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a 2π .

Em \mathcal{U}_0^2 o sistema (5.39) possui 4 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Assim existem duas famílias a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a 2π .

Para soluções periódicas de período próximo a $2\pi/p$, temos a aplicação de redução $B_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$B_2(u_2, \sigma) = (1 + \sigma)S_2u_2 - A_2u_2 - \tilde{h}(u_2) + o(\|u_2\|^4),$$

onde

$$S_2 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}.$$

Portanto devemos resolver a seguinte equação:

$$x_3(p\sigma - c_3x_3^2 + \tilde{\Theta}_2(x_3)) = 0 \tag{5.40}$$

que tem como solução não nula

$$x_3 \approx \pm \sqrt{\frac{p\sigma}{c_3}},$$

se $c_3 \neq 0$.

Em \mathcal{U}^3 a equação (5.40) possui 2 soluções não nulas que tendem a zero quando σ tende a zero. Concluimos que existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge a $\frac{2\pi}{p}$.

Agora consideremos perturbações de (5.2) da forma (5.12) com $f(x) = ax^3 + o(x^4)$, $a \in \mathbb{R}$, onde $o(x^4)$ denota os termos de ordem superior a 3.

O sistema (5.13) pode ser escrito da forma $\dot{X} = AX + F(X)$, onde $X = (x_1, y_2, x_2, y_2, x_3, y_3)$, A e F são dados por (5.21) e (5.22), respectivamente.

Considere λ_1 e λ_2 tais que os autovalores de A estejam em ressonância do tipo $\alpha : 1 : p$, $p > 3$. Deste modo, existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ onde J é a matriz de Jordan de A da forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos P e sua inversa P^{-1} por

$$P = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ j_{61} & j_{62} & j_{63} & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} & l_{26} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} & l_{36} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & l_{45} & l_{46} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & l_{56} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3.13. *Existe uma transformação $x = y + \Phi(y)$ com $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, tangente à identidade, que transforma (5.13) com $f(x_1) = ax_1^3 + o(x_1^4)$, $a \in \mathbb{R}$ na forma normal (5.38) até ordem 3 com coeficientes:*

$$a_1 = -\frac{3a}{8}(j_{12}^3 l_{16} - j_{11}^3 l_{26}), \quad b_1 = -\frac{3a}{8}(2j_{12}^2 j_{14} l_{36} - 2j_{11}^2 j_{13} l_{46}),$$

$$a_2 = -\frac{3a}{8}(2j_{14}^2 j_{12} l_{16} - 2j_{13}^2 j_{11} l_{26}), \quad b_2 = -\frac{3a}{8}(-j_{13}^3 l_{46} + j_{14}^3 l_{36}),$$

$$a_3 = -\frac{3a}{8}(2j_{16}^2 j_{12} l_{16} - 2j_{15}^2 j_{11} l_{26}), \quad b_3 = -\frac{3a}{8}(-2j_{15}^2 j_{13} l_{46} + 2j_{16}^2 j_{14} l_{36}),$$

$$c_1 = -\frac{3a}{8}(2j_{12}^2 j_{16} l_{56} - 2j_{11}^2 j_{15} l_{66}),$$

$$c_2 = -\frac{3a}{8}(2j_{14}^2 j_{16} l_{56} - 2j_{13}^2 j_{15} l_{66}),$$

$$c_3 = -\frac{3a}{8}(j_{16}^3 l_{56} - j_{15}^3 l_{66}),$$

onde j_{ik} e l_{ik} $k = 1, \dots, 6$ são as entradas de matriz P e P^{-1} dadas acima.

Encontramos os coeficientes da forma normal utilizando o programa MATHEMATICA 6.0 da mesma forma do caso $\alpha : 1 : 2$.

Exemplo: Considere (5.13) com $f(x_1) = x_1^3$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{31}{5}$. Assim, os autovalores de A são $\pm i$, $\pm \frac{i}{\sqrt{5}}$ e $\pm i\sqrt{5}$, que estão em ressonância $\alpha : 1 : 5$.

Primeiramente, fazemos um rescalonamento do tempo por: $t = \sqrt{5}\tau$ transformando o sistema (5.13) em:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sqrt{5}y_1 \\
 \dot{y}_1 &= \sqrt{5}x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \sqrt{5}y_2 \\
 \dot{y}_2 &= \sqrt{5}x_3 \\
 \dot{x}_3 &= \sqrt{5}y_3 \\
 \dot{y}_3 &= -\sqrt{5}\lambda_1 x_3 - \sqrt{5}\lambda_2 x_2 - \sqrt{5}x_1 + \sqrt{5}x_1^3.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

A transformação $x = P\tilde{x}$ com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_3)^T$ com

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 25\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{25\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 25 & 0 & \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & -5 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{5} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

leva o sistema (5.41) ao seguinte sistema

$$\tilde{X} = J\tilde{X} + F(\tilde{X}) \tag{5.42}$$

com mesma parte linear que (5.14) com $\alpha = \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= -\sqrt{5}\tilde{y}_1 - \frac{5\sqrt{5}}{16} \left(\tilde{y}_1 + 25\sqrt{5}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{25\sqrt{5}} \right)^3 \\
\dot{\tilde{y}}_1 &= \sqrt{5}\tilde{x}_1 \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{y}_2 + \frac{1}{96}\sqrt{5} \left(\tilde{y}_1 + 25\sqrt{5}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{25\sqrt{5}} \right)^3 \\
\dot{\tilde{y}}_2 &= \tilde{x}_2 \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= -5\tilde{y}_3 + \frac{125}{96}\sqrt{5} \left(\tilde{y}_1 + 25\sqrt{5}\tilde{y}_2 + \frac{\tilde{y}_3}{25\sqrt{5}} \right)^3 \\
\dot{\tilde{y}}_3 &= 5\tilde{x}_3.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Assim, pelo Lema 5.3.13, existe um difeomorfismo Φ que leva $F(\tilde{X})$ no jato de ordem 3 da forma normal (5.38) com coeficientes dados por:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{15\sqrt{5}}{128} & b_1 &= -\frac{125}{128} & c_1 &= -\frac{5}{128} \\
a_2 &= \frac{46875\sqrt{5}}{64} & b_2 &= -\frac{390625}{256} & c_2 &= -\frac{15625}{128} \\
a_3 &= \frac{3\sqrt{5}}{40000} & b_3 &= -\frac{1}{3200} & c_3 &= -\frac{1}{160000},
\end{aligned}$$

Isto é, Φ transforma (5.42) em $\tilde{X} = J\tilde{X} + J^3\tilde{X} + R(\tilde{X})$. Como não sabemos se $R(\tilde{X})$ satisfaz a condição de normalidade, não podemos aplicar o Teorema 5.3.12. Por outro lado, podemos perturbar (5.41) com uma função $\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$ tal que $\tilde{h}(x) = P(-R)P^{-1}(\tilde{X})$. Desta forma, nosso sistema fica $\dot{\tilde{X}} = J\tilde{X} + J^3\tilde{X}$ e aplicando o Teorema 5.3.12 segue imediatamente que:

- i) $X \in \mathcal{U}_0^0 \cup \mathcal{U}_0^1$ e portanto possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π .
- ii) $X \in \mathcal{U}_0^2$ e portanto possui duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para 2π .
- iii) $X \in \mathcal{U}^3$ e portanto possui duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para $\frac{2\pi}{5}$,

$$\begin{aligned}
&\text{já que } b_3 = \frac{19683}{128} \neq 0, \quad c_4 = -\frac{1}{3456} \neq 0, \quad A = \frac{504549}{16384} > 0 \quad \text{e} \\
&B = -\frac{1152(1768 + 27\sqrt{6229})}{429981275} \neq 0.
\end{aligned}$$

5.3.4 Caso $\alpha : 1 : 1$ ressonante não semi-simples

Este caso é análogo ao caso da Seção 5.2 onde analisamos a presença de ressonância $1 : 1$ não semi-simples em \mathbb{R}^4 .

5.3.5 Caso $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ não ressonante

O Teorema do Centro de Lyapunov garante a existência de três famílias a um parâmetro de soluções periódicas com períodos próximos $\frac{2\pi}{\alpha_i}$, $i = 1, 2, 3$ para perturbações da equação (5.2). Nesta seção utilizaremos a redução de Lyapunov-Schmidt para encontrar um resultado similar. Para isso, primeiramente, encontraremos a forma normal de Belitskii. Sem perda de generalidade podemos supor

$$A = DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$.

Teorema 5.3.14. *Seja $X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6)$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados pelas condições acima. Então X é formalmente conjugado, numa vizinhança da origem, a seguinte forma normal:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha_1 y_1 - y_1 \varphi_1(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2) \\ \dot{y}_1 &= \alpha_1 x_1 + x_1 \varphi_1(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2) \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 y_2 - y_2 \varphi_2(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2) \\ \dot{y}_2 &= \alpha_2 x_2 + x_2 \varphi_2(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2) \\ \dot{x}_3 &= -\alpha_3 y_3 - y_3 \varphi_3(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2) \\ \dot{y}_3 &= \alpha_3 x_3 + x_3 \varphi_3(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Demonstração: Considerando o campo em coordenadas complexas temos que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 i \end{pmatrix}.$$

Se $h(x) = (h_1(x), \dots, h_6(x))$ a condição

$$A^*h(x) = Dh(x)A^*x,$$

com $x = (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)$, implica que

$$Dh_1(x) = -\alpha_1 i h_1,$$

$$Dh_2(x) = \alpha_1 i h_2,$$

$$Dh_3(x) = -\alpha_2 i h_3,$$

$$Dh_4(x) = \alpha_2 i h_4,$$

$$Dh_5(x) = -\alpha_3 i h_5,$$

$$Dh_6(x) = \alpha_3 i h_6,$$

onde

$$D := -i\alpha_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i\alpha_1 \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - i\alpha_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + i\alpha_2 \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - i\alpha_3 z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} + i\alpha_3 \bar{z}_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_3}.$$

Seja $u = z_1^{k_1} \bar{z}_1^{k_2} z_2^{k_3} \bar{z}_2^{k_4} z_3^{k_5} \bar{z}_3^{k_6}$.

De $Dh_1(x) = -i\alpha_1 h_1$ temos

$$-i\alpha_1 u = (-i\alpha_1 k_1 + i\alpha_1 k_2 - i\alpha_2 k_3 + i\alpha_2 k_4 - i\alpha_3 k_5 + i\alpha_3 k_6)u \Rightarrow$$

$$-\alpha_1 = -\alpha_1(k_1 - k_2) - \alpha_2(k_3 - k_4) - \alpha_3(k_5 - k_6).$$

Como os autovalores são não ressonantes, devemos ter

$$k_1 - k_2 = 1 \quad k_3 = k_4 \quad k_5 = k_6,$$

isto é,

$$u = z_1^{k_2+1} \bar{z}_1^{k_2} z_2^{k_3} \bar{z}_2^{k_3} z_3^{k_5} \bar{z}_3^{k_5}.$$

Daí

$$h_1 = z_1 \varphi_1(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2).$$

Analogamente

$$h_2 = \bar{z}_1 \varphi_2(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2).$$

Se denotarmos por $\tilde{\phi}_1$ e $\tilde{\phi}_2$ os coeficientes de φ_1 e φ_2 , respectivamente, teremos $\overline{\tilde{\phi}_1} = \tilde{\phi}_2$, já que $\overline{h_1} = h_2$. Da R reversibilidade temos que $\tilde{\phi}_2 = -\tilde{\phi}_1$. Daí $\tilde{\phi}_1 = i\phi_1$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$.

Assim

$$h_1 = iz_1 \varphi_1(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)$$

$$h_2 = -i\bar{z}_1 \varphi_1(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2).$$

De maneira análoga obtemos h_3, h_4, h_5 e h_6 e a forma normal:

$$\dot{z}_1 = i\alpha_1 z_1 + iz_1 \varphi_1(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)$$

$$\dot{z}_2 = i\alpha_2 z_2 + iz_2 \varphi_2(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)$$

$$\dot{z}_3 = i\alpha_3 z_3 + iz_3 \varphi_3(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2),$$

que escrito em nas coordenadas $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ é dado por

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 y_1 - y_1 \varphi_1(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2)$$

$$\dot{y}_1 = \alpha_1 x_1 + x_1 \varphi_1(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2)$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 y_2 - y_2 \varphi_2(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2)$$

$$\dot{y}_2 = \alpha_2 x_2 + x_2 \varphi_2(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2)$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha_3 y_3 - y_3 \varphi_3(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2)$$

$$\dot{y}_3 = \alpha_3 x_3 + x_3 \varphi_3(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, x_3^2 + y_3^2).$$

■

Defina

$$\mathcal{U}^i = \{X \in \mathfrak{X}_R(\mathbb{R}^6); J^3 X \text{ expressa-se por (5.44) com } a_i \neq 0$$

onde a_i é o coeficiente do monômio x_i^2 em $\varphi_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

Utilizando a Redução de Lyapunov-Schmidt, obtemos:

Teorema 5.3.15. *Cada $X \in \mathcal{U}^j$ possui 1 família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com períodos convergindo para $\frac{2\pi}{\alpha_j}$, $j = 1, 2, 3$.*

Demonstração: Para encontrarmos as soluções periódicas de período próximo à $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ a aplicação de redução $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$B(u, \sigma) = (1 + \sigma)Su - Au - \tilde{h}(u) + o(\|u\|^4),$$

onde

$$S = A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto devemos encontrar as soluções não triviais do sistema

$$\begin{aligned} -\sigma\alpha_1 y_1 + y_1(a_1(x_1^2 + y_1^2)) + y_1\tilde{\varphi}_1(\|(x_1, y_1)\|^4) &= 0 \\ \sigma\alpha_1 x_1 - x_1(a_1(x_1^2 + y_1^2)) + x_1\tilde{\varphi}_2(\|(x_1, y_1)\|^4) &= 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Para obter as soluções R -simétricas fazemos $y_1 = 0$ e assim

$$x_1(\sigma\alpha_1 + a_1x_1^2 + \tilde{\varphi}_2(\|(x_1)\|^4)) = 0,$$

e soluções não triviais para o sistema (5.45) são dadas por

$$x_1 \approx \pm \sqrt{\frac{\sigma\alpha_1}{a_1}} \quad y_1 = 0,$$

se $a_1 \neq 0$.

Similarmente obtemos os resultados para órbitas periódicas simétricas com períodos próximos à $\frac{2\pi}{\alpha_2}$ e $\frac{2\pi}{\alpha_3}$. ■

Agora consideremos perturbações de (5.2) da forma (5.12) com $f(x) = ax^3 + o(x^4)$, $a \in \mathbb{R}$ onde $o(x^4)$ denota os termos de ordem superior a 3.

O sistema (5.13) pode ser escrito da forma $\dot{X} = AX + F(X)$, onde $X = (x_1, y_2, x_2, y_2, x_3, y_3)$, A e F são dados por (5.21) e (5.22), respectivamente.

Considere λ_1 e λ_2 tais que os autovalores de A sejam do tipo $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ não ressonantes, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Deste modo, existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ onde J é a matriz de Jordan de A da forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos P e sua inversa P^{-1} por

$$P = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ j_{61} & j_{62} & j_{63} & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} & l_{26} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} & l_{36} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & l_{45} & l_{46} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & l_{56} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3.16. *Existe uma transformação $x = \Phi(y)$ com $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, tangente à identidade, que transforma (5.13) com $f(x_1) = ax_1^3 + o(x_1^4)$, $a \in \mathbb{R}$, na forma normal (5.44) até ordem 3 com coeficientes:*

$$a_1 = -aj_{12}^3l_{16}, \quad b_1 = -3aj_{12}^2j_{14}l_{36},$$

$$a_2 = -3aj_{14}^2j_{12}l_{16}, \quad b_2 = -aj_{14}^3l_{36},$$

$$a_3 = -3a2j_{16}^2j_{12}l_{16}, \quad b_3 = -3aj_{16}^2j_{14}l_{36},$$

$$c_1 = -3aj_{12}^2j_{16}l_{56},$$

$$c_2 = -3aj_{14}^2j_{16}l_{56},$$

$$c_3 = -aj_{16}^3l_{56},$$

onde j_{ik} e l_{ik} $k = 1, \dots, 6$ são as entradas de matriz P e P^{-1} dadas acima.

Encontramos os coeficientes da forma normal utilizando o programa MATHEMATICA 6.0 da mesma forma do caso $\alpha : 1 : 2$.

Exemplo: Considere (5.13) com $f(x_1) = x_1^3$, $\lambda_1 = \frac{31}{6}$ e $\lambda_2 = \frac{41}{6}$. Neste caso os autovalores de A são $\pm i\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{3}$ e $\pm \frac{i}{\sqrt{6}}$.

A transformação $x = P\tilde{x}$ com $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_3)^T$ com

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{9\sqrt{2}} & 0 & 36\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 36 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -6\sqrt{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

leva o sistema (5.41) ao seguinte sistema $\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + F(\tilde{X})$ com mesma parte linear que (5.44) com $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$ e $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\sqrt{2}\tilde{y}_1 - \frac{24}{11} \left(\frac{\tilde{y}_1}{4\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}_2}{9\sqrt{3}} + 36\sqrt{6}\tilde{y}_3 \right)^3 \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \sqrt{2}\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\sqrt{3}\tilde{y}_2 + \frac{54}{17} \left(\frac{\tilde{y}_1}{4\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}_2}{9\sqrt{3}} + 36\sqrt{6}\tilde{y}_3 \right)^3 \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \sqrt{3}\tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -\frac{\tilde{y}_3}{\sqrt{6}} + \frac{1}{187} \left(\frac{\tilde{y}_1}{4\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}_2}{9\sqrt{3}} + 36\sqrt{6}\tilde{y}_3 \right)^3 \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Assim, os coeficientes da forma normal estabelecidos no Lema 5.3.16 são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3\sqrt{2}}{352} & b_1 &= -\frac{3\sqrt{3}}{272} & c_1 &= -\frac{81}{748\sqrt{6}} \\ a_2 &= \frac{\sqrt{2}}{297} & b_2 &= -\frac{2\sqrt{3}}{4131} & c_2 &= -\frac{8}{561\sqrt{6}} \\ a_3 &= \frac{69984\sqrt{2}}{11} & b_3 &= -\frac{46656\sqrt{3}}{17} & c_3 &= -\frac{1679616}{187\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Daí do Teorema 5.3.12 segue imediatamente que $X \in \mathcal{U}^j$ e portanto possui uma família a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para a origem com período convergindo para $\frac{2\pi}{\alpha_j}$, $j = 1, 2, 3$ com $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$ e $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, já que $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $c_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

CAPÍTULO 6

EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS

Neste capítulo estudaremos a existência, persistência e propriedades de soluções homoclínicas de perturbações das equações diferenciais (5.1) e (5.2).

6.1 Uma Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^4

Considere a equação diferencial:

$$x^{(iv)} - \alpha(p)x'' + x + \beta(p, k)x^{\frac{2}{p}+1} - \gamma(p, k)x^{\frac{4}{p}+1} = 0 \quad (6.1)$$

onde $\alpha(p) = \frac{p^4 + 1}{p^2}$, $\beta(p, k) = \frac{p^6 + 5p^5 + 8p^4 + 4p^3 - p^2 - p}{p^2 k^{\frac{2}{p}}}$, $\gamma(p, k) = \frac{p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p}{k^{\frac{4}{p}}}$,
 $p, k \in \mathbb{R}$, $p, k > 0$.

Proposição 6.1.1. *A equação diferencial (6.1) é reversível, Hamiltoniana e possui solução simétrica homoclínica à 0.*

Demonstração: Podemos escrever (6.1) como o sistema $X_{p,k}$ representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= w, \\ \dot{z} &= x + \beta(p, k)x^{\frac{2}{p}+1} - \gamma(p, k)x^{\frac{4}{p}+1}, \\ \dot{w} &= -z + \alpha(p)y,\end{aligned}\tag{6.2}$$

com função Hamiltoniana

$$H(x, y, z, w) = zy + \frac{w^2}{2} - \frac{\alpha(p)y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - F(x, p, k),$$

onde F é uma primitiva de $f(x, p, k) = \beta(p, k)x^{\frac{2}{p}+1} + \gamma(p, k)x^{\frac{4}{p}+1}$.

O sistema (6.2) é reversível com $R(x, y, z, w) = (x, -y, -z, w)$, onde o conjunto de pontos fixos é $Fix(R) = \{(x, y, z, w); y = z = 0\}$. Uma solução homoclínica Γ é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= k \operatorname{sech}^p(t), \\ y(t) &= -kp \operatorname{sech}^{p+1}(t) \sinh(t), \\ z(t) &= -\frac{k(2p^4 + 6p^3 + 4p^2 + \cosh(2t) + 1) \operatorname{sech}^{p+3}(t) \sinh(t)}{2p}, \\ w(t) &= k(p+1)p \operatorname{sech}^{p+2}(t) \sinh^2(t) - kp \operatorname{sech}^p(t),\end{aligned}\tag{6.3}$$

a qual intercepta o conjunto de pontos fixos da involução R no ponto $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (k, 0, 0, -kp)$, isto é, Γ é simétrica em relação à R .

■

Observação 6.1.2. Descreveremos o método utilizado para encontrar a equação diferencial (6.1). Consideremos a conhecida solução homoclínica à zero, $x(t) = k \operatorname{sech}^p(t)$, $p, k \in \mathbb{R}$, $p, k \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}x'(t) &= -kp \operatorname{sech}^{p+1}(t) \sinh(t), \\ x''(t) &= -kp \operatorname{sech}^p(t) + kp(1+p) \operatorname{sech}^{p+2}(t) \sinh^2(t) = \\ &= kp^2 \operatorname{sech}^p(t) - kp(1+p) \operatorname{sech}^{p+2}(t),\end{aligned}$$

o que resulta em

$$x'' - p^2x + \frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}}x^{1+\frac{2}{p}} = 0.\tag{6.4}$$

Multiplicando (6.4) por x' e integrando obtemos

$$H(x, x') = \frac{x'^2}{2} - \frac{p^2x^2}{2} + \frac{p^2x^{2+\frac{2}{p}}}{2k^{\frac{2}{p}}} = E = cte.\tag{6.5}$$

Derivando (6.4) duas vezes encontramos

$$x^{(iv)} - p^2 x'' + \frac{p(p+1)(p+2)}{pk^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{2}{p} x^{\frac{2}{p}-1} x'^2 + x^{\frac{2}{p}} x'' \right) = 0. \quad (6.6)$$

Substituindo (6.4) e $H(x, x') = 0$ em 6.6, obtemos

$$x^{iv} - p^2 x'' + \left(p^2 + \frac{2}{p} \right) A(p, k) x^{\frac{2}{p}+1} - \left(\frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} + \frac{2p}{k^{\frac{2}{p}}} \right) A(p, k) x^{\frac{4}{p}+1} \quad (6.7)$$

onde $A(p, k) = \frac{p(1+p)(2+p)}{pk^{\frac{2}{p}}}$.

Agora somamos e subtraímos o termo $\frac{p^4+1}{p^2} x''$ em (6.7,) e por (6.4) e obtemos:

$$x^{iv} - \frac{p^4+1}{p^2} x'' + x + \frac{p^6+5p^5+8p^4+4p^3-p^2-p}{p^2 k^{\frac{2}{p}}} x^{\frac{2}{p}+1} - \frac{p^4+6p^3+11p^2+6p}{k^{\frac{4}{p}}} x^{\frac{4}{p}+1} = 0$$

e assim obtemos a equação diferencial (6.1).

6.1.1 Propriedades da Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^4

Após o resultado sobre a existência de uma órbita homoclínica simétrica Γ em zero para cada $p, k > 0$, estudaremos algumas de suas propriedades.

Lema 6.1.3. *Sejam α, β números reais tais que $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Para toda função $h(t)$ contínua e limitada em \mathbb{R} , a equação*

$$x^{(iv)} + \alpha x'' + \beta x - h(t) = 0, \quad (6.8)$$

possui uma única solução limitada.

Demonstração: Consideremos a equação $x^{(iv)} + \alpha x'' + \beta x = 0$ e a correspondente equação característica

$$\lambda^4 + \alpha \lambda^2 + \beta = 0. \quad (6.9)$$

Como $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ temos que (6.9) não possui raízes imaginárias puras $\lambda = i\omega$ pois caso contrário teríamos $\omega^4 - \alpha\omega^2 + \beta = 0$ o que seria um absurdo.

A equação (6.8) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= x_3 \\x'_3 &= x_4 \\x'_4 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 + h(t),\end{aligned}\tag{6.10}$$

ou ainda,

$$x' = Ax + H(t)\tag{6.11}$$

$$\text{com } v = (x_1, x_2, x_3, x_4), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Como o sistema homogêneo $x' = Ax$ não tem autovalores imaginários puros e $H(t)$ é contínua e limitada em \mathbb{R} , então (6.11) tem uma única solução limitada em \mathbb{R} . (Veja [7].)

Portanto, para toda função $h(t)$ contínua e limitada em \mathbb{R} , a equação (6.8) tem uma única solução limitada.

■

Proposição 6.1.4. *Para cada $p > 0$ e $k > 0$ fixados, a solução homoclínica Γ dada por (6.3) é não-degenerada e elementar.*

Demonstração: Consideremos a equação variacional ao longo de Γ .

$$\dot{x} = D_1(\Gamma)x.\tag{6.12}$$

Temos que provar que o espaço de soluções globalmente limitadas de (6.12) tem dimensão 1 e daí gerado por $\dot{\Gamma}$.

A equação variacional ao longo de Γ é dada por

$$x^{iv} - \alpha(p)x'' + g(t, p, k)x = 0\tag{6.13}$$

$$\text{com } g(t, p, k) = 1 + \beta(p, k) \left(\frac{2+p}{p} \right) k^{\frac{2}{p}} \operatorname{sech}^2(t) - \gamma(p, k) \left(\frac{4+p}{p} \right) k^{\frac{4}{p}} \operatorname{sech}^4(t).$$

Se x é limitada então

$$x^{iv} - \alpha(p)x'' + g(t, p, k)x = 0 \Leftrightarrow x^{iv} - \alpha(p)x'' + x = x - g(t, p, k)x = h(t).$$

Como para cada p e k fixados temos que $-\alpha(p) < 0$ e que a função $g(t, p, k)$ é contínua e limitada. Portanto $h(t)$ é contínua e limitada e pelo Lema 6.1.3 x é única solução limitada. Como $\dot{\Gamma}$ é solução limitada de (6.12) então $x = \dot{\Gamma}$. ■

Teorema 6.1.5. *Sejam $p > 0$ e $k > 0$ tais que $X_{p,k}$ seja C^2 . Então a equação diferencial (6.1) possui uma solução homoclínica em relação à origem. Tal órbita persiste sob perturbações C^∞ que mantém a reversibilidade do sistema original. Além disso, ela é o limite de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas.*

Demonstração: A demonstração segue diretamente da Proposição 6.1.4, da Observação 1.1.12 e do Teorema 1.1.15. ■

6.2 Uma Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^6

Considere a equação diferencial

$$x^{(vi)} - \alpha(p, k)x^{(iv)} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x'' + x + A(p, k)x^{\frac{2}{p}+1} + B(p, k)x^{\frac{4}{p}+1} + C(p, k)x^{\frac{6}{p}+1} = 0 \quad (6.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \frac{p^4 + 1}{p^2}, \\ \beta(p, k) &= \frac{p^6 + 5p^5 + 8p^4 + 4p^3 - p^2 - p}{p^2 k^{\frac{2}{p}}}, \\ \gamma(p, k) &= \frac{p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p}{k^{\frac{4}{p}}}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$A(p, k) = \beta(p, k) \left(\frac{2}{p} + 1\right) (2p + p^2) - \frac{1 + p}{p k^{\frac{2}{p}}},$$

$$B(p, k) = \beta(p, k) \left(\frac{2}{p} + 1\right) \left(\frac{-2p}{k^{\frac{2}{p}}} - \frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}}\right) - \gamma(p, k) \left(\frac{4}{p} + 1\right) (4p + p^2),$$

$$C(p, k) = -\gamma(p, k) \left(\frac{4}{p} + 1\right) \left(\frac{-4p}{k^{\frac{2}{p}}} - \frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}}\right),$$

$p, k \in \mathbb{R}, p, k > 0$.

Proposição 6.2.1. *A equação diferencial (6.14) é reversível e possui solução homoclínica em 0.*

Demonstração: Podemos escrever a equação diferencial (6.14) como um sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= x_6, \\ \dot{x}_6 &= \alpha(p)x_5 - \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x_3 - x_1 - Ax^{\frac{2}{p}+1} - Bx^{\frac{4}{p}+1} - Cx^{\frac{6}{p}+1},\end{aligned}\tag{6.16}$$

Este sistema é reversível com $R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5, -x_6)$ e $Fix(R) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_6)$.

Uma solução homoclínica Γ do sistema (6.16) é dada por

$$(x_0(t), x'_0(t), x''_0(t), x'''_0(t), x_0^{iv}(t), x_0^v(t)),$$

onde $x_0(t) = k \operatorname{sech}(t)^p$. A solução Γ intercepta $Fix(R)$ em

$$(x_0(0), x'_0(0), x''_0(0), x'''_0(0), x_0^{iv}(0), x_0^v(0)) = (k, 0, -kp, 0, kp^2 + 2kp(1+p), 0).$$

Desta forma, Γ é simétrica em relação a R . ■

Observação 6.2.2. Descreveremos o método utilizado para encontrar a equação diferencial (6.14). Provamos na seção anterior que a equação diferencial (6.1) possui solução homoclínica à 0 dada por $x(t) = k \operatorname{sech}(t)^p$. Assim derivamos (6.1) duas vezes e encontramos:

$$\begin{aligned}x^{vi} - \alpha(p)x^{iv} + x'' + \beta(p, k) \left(\frac{2+p}{p}\right) \left(\frac{2}{p}x^{\frac{2}{p}-1}(x')^2 + x^{\frac{2}{p}}x''\right) - \\ \gamma(p, k) \left(\frac{4+p}{p}\right) \left(\frac{4}{p}x^{\frac{4}{p}-1}(x')^2 + x^{\frac{4}{p}}x''\right) = 0,\end{aligned}\tag{6.17}$$

onde $\alpha(p)$, $\beta(p, k)$ e $\gamma(p, k)$ são dados na Proposição 6.15.

Substituímos (6.4) e $H(x, x') = 0$ com H dada por (6.5) em (6.17) encontramos

$$x^{(vi)} - \alpha(p)x^{(iv)} + x'' + \beta(p, k) \left(\frac{2+p}{p} \right) \left((2p+p^2)x^{\frac{2}{p}+1} + \left(\frac{-2p-p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} \right) x^{\frac{4}{p}+1} \right) - \gamma(p, k) \left(\frac{4+p}{p} \right) \left((4p+p^2)x^{\frac{4}{p}+1} + \left(\frac{-4p-p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} \right) x^{\frac{6}{p}+1} \right) = 0. \quad (6.18)$$

Somamos e subtraímos o termo $\frac{x''}{p^2}$ em (6.18) e por (6.4) obtemos

$$x^{vi} - \alpha(p)x^{iv} + \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) x'' + x + \left(\beta(p, k) \left(\frac{2+p}{p} \right) (2p+p^2) - \frac{1+p}{pk^{\frac{2}{p}}} \right) x^{\frac{2}{p}+1} + \left(\beta(p, k) \left(\frac{2+p}{p} \right) \left(\frac{-2p-p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} \right) - \gamma(p, k) \left(\frac{4+p}{p} \right) (4p+p^2) \right) x^{\frac{4}{p}+1} - \gamma(p, k) \left(\frac{4+p}{p} \right) \left(\frac{-4p-p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} \right) x^{\frac{6}{p}+1} = 0. \quad (6.19)$$

E assim encontramos (6.14).

6.2.1 Propriedades da Órbita Homoclínica em \mathbb{R}^6

Lema 6.2.3. *Sejam α, β números reais tais que $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Para toda função $h(t)$ contínua e limitada em \mathbb{R} , a equação*

$$x^{(vi)} + \beta x^{(iv)} + \alpha x'' - x - h(t) = 0, \quad (6.20)$$

possui uma única solução limitada x_0 .

Demonstração: A equação diferencial (6.20) é equivalente ao sistema $\dot{X} = AX + H(t)$ com

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

O sistema homogêneo $\dot{X} = AX$ não possui autovalores imaginários puros $\lambda = i\omega$, pois caso contrário teríamos $-\omega^6 + \beta\omega^4 - \alpha\omega^2 - 1 = 0$, o que é um absurdo pois $\beta < 0$ e $\alpha > 0$.

Portanto, para toda função $h(t)$ contínua e limitada em \mathbb{R} , a equação diferencial (6.20) possui uma única solução limitada.

■

Proposição 6.2.4. *Para cada $p > 1$ e $k > 0$ fixados, a solução homoclínica Γ é não-degenerada e elementar.*

Demonstração: Consideremos a equação variacional ao longo de Γ ,

$$\dot{x} = D_1(\Gamma)x. \quad (6.21)$$

Temos que mostrar que o espaço de soluções globalmente limitadas de (6.21) tem dimensão 1 e daí gerado por $\dot{\Gamma}$.

A equação (6.21) é dada por

$$x^{(vi)} - \alpha(p)^{(iv)} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x'' + g(t, p, k)x = 0,$$

onde $g(t, p, k) =$

$$1 + A(p, k) \left(\frac{2+p}{p}\right) k^{\frac{2}{p}} \operatorname{sech}(t)^2 + B(p, k) \left(\frac{4+p}{p}\right) k^{\frac{4}{p}} \operatorname{sech}(t)^4 + C(p, k) \left(\frac{6+p}{p}\right) k^{\frac{6}{p}} \operatorname{sech}(t)^6.$$

Para cada $p > 1$, $k > 0$, temos $1 - \frac{1}{p^2} > 0$, $-\alpha(p) < 0$, $g(t, p, k) < 0$ é contínua e limitada. Assim, se x é uma solução limitada de (6.21), então

$$x^{(vi)} - \alpha(p)^{(iv)} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x'' + g(t, p, k)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^{(vi)} - \alpha(p)^{(iv)} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x'' - x = -x - g(t, p, k)x = h(t, p, k),$$

com $h(t, p, k)$ contínua e limitada. Logo pelo Lema 6.2.3 x é única solução limitada. Como $\dot{\Gamma}$ é solução limitada de (6.21) temos que $x = \dot{\Gamma}$ é única solução limitada.

■

Teorema 6.2.5. *Para cada $p > 1$ e $k > 0$ fixados, a equação diferencial (6.14) possui uma solução homoclínica na origem. Tal órbita persiste sob perturbações C^∞ que mantém a reversibilidade do sistema original. Além disso, ela é o limite de uma família a um parâmetro de órbitas periódicas.*

Demonstração: A demonstração segue diretamente da Proposição 6.2.4, da Observação 1.1.12 e do Teorema 1.1.15. ■

PERSPECTIVAS FUTURAS

Dentre as perspectivas futuras de continuidade deste trabalho destacamos o estudo de duas equações diferenciais que generalizam as equações estudadas nos Capítulos 2, 5 e 6 desta tese:

(I) Considere a seguinte equação diferencial:

$$x^{(2n)} + \alpha_{\frac{2n-2}{2}} x^{(2n-2)} + \dots + \alpha_1 x^{(2)} = kx \quad (6.22)$$

com $n \in \mathbb{N}$, α_i , $i = 1, \dots, \frac{2n-2}{2}$ e k são parâmetros reais. Esta equação pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{2n} &= -\alpha_{\frac{2n-2}{2}} x_{2n-1} - \dots - \alpha_1 x_3 + kx_1. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Considerando perturbações de (6.22) da forma:

$$x^{(2n)} + \alpha_{\frac{2n-2}{2}} x^{(2n-2)} + \dots + \alpha_1 x^{(2)} = kx + f(x), \quad (6.24)$$

com f uma função real com $f(0) = 0$ e perturbações de (6.23) da forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{2n} &= -\alpha \frac{2n-2}{2} x_{2n-1} - \dots - \alpha_1 x_3 + kx_1 + f_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}),
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

com f_i funções reais com $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, 2n$, as seguintes questões estão dentro de nossas perspectivas de futuros estudos:

- 1) Classificação de pontos de equilíbrio ressonantes e exibição de formas normais.
- 2) Para perturbações (6.24) e (6.25) que preservam a estrutura de reversibilidade ou Hamiltoniana, procurar resultados equivalentes ao Teorema do Centro de Lyapunov.
- 3) Sob perturbações (6.24) e (6.25) que preservam a estrutura de reversibilidade ou Hamiltoniana, estudar a existência e persistência de órbitas homoclínicas limitantes de famílias a um parâmetro de órbitas periódicas.
- 4) Para perturbações (6.24) e (6.25) que não preservam reversibilidade, verificar a existência de ciclos limites e órbitas homoclínicas.

(II) Usando teoria de “averaging”, objetivamos encontrar o número máximo de ciclos limites que podem bifurcar de um centro linear reversível quando o perturbamos sobre uma classe de equações diferenciais polinomiais generalizadas de Kukles como segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y, \\
 \dot{y} &= -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_{n_1}^k(x) + g_{n_2}^k(x)y + h_{n_3}^k(x)y^2 + d_0^k y^3),
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

onde para cada k os polinômios $f_{n_1}^k(x)$, $g_{n_2}^k(x)$ e $h_{n_3}^k(x)$ têm graus n_1 , n_2 e n_3 respectivamente, d_0^k é um número real e ε é um pequeno parâmetro real, isto é, o número máximo de *ciclos limites de média amplitude* que podem bifurcar do centro linear $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, perturbado como em (6.26).

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. ABRAHAM, J. E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2nd edn, Benjamin-Cummings, (1978).
- [2] A. BUICA AND J. LLIBRE, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128**, 7-22.
- [3] C. BUZZI, L. A. ROBERTO AND M. A. TEIXEIRA, *Braching of periodic orbits in reversible Hamiltonian systems*, Preprint
- [4] C.A. BUZZI, J. LLIBRE, J.C. MEDRADO AND J. TORREGROSA, *Bifurcation of limit cycles from a center in resonance $1 : N$* , Dynamical Systems **24** , 123–137.
- [5] T.R. BLOWS AND N. G. LLOYD, *The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95** (1984), 359–366.
- [6] W. A. COPPEL, *Some quadratic systems with at most one limit cycles*, Dynamics Reported, Vol.2, Wiley, New York, 1998, 61–68.
- [7] W. A. COPPEL, *Dichotomies in Stability Theory*, Lecture Notes in Mathematics **629**, Springer-Verlag, Berlin (1978).
- [8] C.J. CHRISTOPHER AND S. LYNCH, *Small-amplitude limit cycle bifurcations for Liénard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces*, Nonlinearity **12** (1999), 1099–1112.

- [9] C. CHRISTOPHER AND C. LI, *Limit cycles of differential equations*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [10] R. L. DEVANEY, *Reversible diffeomorphisms and flows*, Trans. Am. Math. Soc. **218** (1976), 89-113.
- [11] F. DUMORTIER AND C. LI, *On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations*, Nonlinearity **9** (1996), 1489–1500.
- [12] F. DUMORTIER AND C. LI, *Quadratic Liénard equations with quadratic damping*, J. Diff. Eqs. **139** (1997), 41–59.
- [13] F. DUMORTIER, D. PANAZZOLO AND R. ROUSSARIE, *More limit cycles than expected in Liénard systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1895–1904.
- [14] F. DUMORTIER AND C. ROUSSEAU, *Cubic Liénard equations with linear damping*, Nonlinearity **3** (1990), 1015–1039.
- [15] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [16] A. GASULL AND J. TORREGROSA, *Small-Amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity*, J. Diff. Eqs. **159** (1998), 1015–1039.
- [17] M. GOLUBITSKY, M. KRUPA AND C. LIM, *Time-reversibility and particle sedimentation*, SIAM J. Appl. Math., **51** (1991), 49–72.
- [18] A. JACQUEMARD, M. F. S. LIMA AND M. A. TEIXEIRA, *Degenerate resonances and branching of periodic orbits*, Annali di Matematica, **187** (2008), 105–117.
- [19] N.G. LLOYD, *Limit cycles of polynomial systems-some recent developments*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 127, Cambridge University Press, 1988, 192–234.
- [20] J. LLIBRE, M. A. TEIXEIRA AND J. TORREGROSA, *Limit Cycles Bifurcating from a k -dimensional Isochronous Center Contained in \mathbb{R}^n with $k \leq n$* , Math. Phys. Anal. Geom. **10** (2007), 237–249.

- [21] A. LIÉNARD, *Étude des oscillations entretenues*, Revue Générale de l'Électricité **23** (1928), 946–954.
- [22] N. G. LLOYD AND S. LYNCH, *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems*, Proc. Royal Soc. London Ser. A **418** (1988), 199–208.
- [23] S. LYNCH, *Generalized quadratic Liénard equations*, Applied Math. Letters **11** (1998), 7–10.
- [24] S. LYNCH, *Generalized cubic Liénard equations*, Applied Math. Letters **12** (1999), 1–6.
- [25] S. LYNCH AND C. J. CHRISTOPHER, *Limit cycles in highly non-linear differential equations*, J. Sound Vib. **224** (1999), 505–517.
- [26] S. LYNCH, *Limit cycles of generalized Liénard equations*, Applied Math. Letters **8** (1995), 15–17.
- [27] A. LINS, W. DE MELO AND C.C. PUGH, *On Liénard's Equation*, Lecture Notes in Math **597**, Springer, Berlin, (1977), pp. 335–357.
- [28] J. MONTALDI, M. ROBERTS AND I. STEWART, *Existence of nonlinear normal modes of symmetric Hamiltonian systems*, Nonlinearity **3**, (1990), pp. 695–730.
- [29] L. F. ROBERTO, *Órbitas periódicas em sistemas mecânicos*, Tese de doutorado, Unicamp, 2008.
- [30] J. MOSER, *Periodic orbits near equilibrium and theorem by Alan Weinstein*, Commun. Pure Appl. Math., **29** (1996), 727–747.
- [31] G.S. RYCHKOV, *The maximum number of limit cycles of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5, \dot{y} = -x$ is two*, Differential'nye Uravneniya **11** (1975), 380–391.
- [32] J. A. SANDERS AND F. VERHULST, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1985.
- [33] K. SCHMITT AND R. C. THOMPSON, *Nonlinear Analysis and Differential Equations An Introduction*, Univ. of Utah Lecture Notes, Univ. of Utah Press, Salt Lake City, (2004).

- [34] S. SMALE, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (1998), 7–15.
- [35] C. W. SHI, *Bifurcations of Symmetric Periodic Orbits near Equilibrium in Reversible Systems*, Int. J. Bifurcation and Chaos **7** (1997), 569–584.
- [36] F. VERHULST, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [37] T. WAGENKNECHT, *An analytical study of a two degrees of freedom Hamiltonian System associated the Reversible Hyperbolic Umbilic*, Thesis, University Ilmenau, Germany, 1999.
- [38] A. WEINSTEIN, *Normal modes for nonlinear Hamiltonian System*, Invent. Math., **20** (1973), 47–57.
- [39] A. VANDERBAUWHEDE, *Local bifurcation and symmetry*, Res. Notes in Math., **75**, Pitman, Boston, (1982).
- [40] A. VANDERBAUWHEDE AND B. FIEDLER, *Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems*, ZAMP **43** (1992), 292–318.
- [41] P. YU AND M. HAN, *Limit cycles in generalized Liénard systems*, Chaos, Solitons and Fractals **30** (2006), 1048–1068.

ÍNDICE REMISSIVO

- $\alpha : 1 : p$ ressonância, 76
- Alternativa de Fredholm, 12
- bifurcação, xv
- campo vetorial, 1
 - conservativo, 2
 - reversível, 1
- ciclo limite, 6
 - de média amplitude, 21
 - de pequena amplitude, 18
- equação
 - polinomial clássica de Liénard, 17
 - polinomial generalizada de Liénard, 17
 - variacional, 4
- Fix(R), 2
- forma normal de Belitskii, 6
- grau de Brouwer, 7
- integral primeira, 2
- método de averaging, 6
 - de primeira ordem, 8
 - de segunda ordem, 8
 - de terceira ordem, 9
- número de Hilbert, 18
- não ressonante, 76
- órbita, 2
 - elementar, 4
 - homoclínica, 3
 - não degenerada, 3
 - simétrica, 2
- ponto
 - de equilíbrio simétrico, 2
 - homoclínico, 3
- sistema
 - não-perturbado, xv
 - perturbado, xv
- variedade
 - estável, 3
 - instável, 3