

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIA

# TRAÇO DE INTERSEÇÃO DE SUPERFÍCIES REGULARES COM PASSOS CIRCULARES

Lenimar Nunes de Andrade

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr-Ing. Wu, Shin-Ting

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
Elétrica e de Computação, FEEC - UNICAMP,  
como requisito parcial para obtenção do título  
de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Julho - 1998

Campinas - SP

Este exemplar é a versão final da tese  
entendida por Lenimar Nunes de An-  
drade  
Julgada em 2 07 1998  
Wu Shin Ting  
Orientador

9912274

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.º	
T.º	37917
PR.º	229/99
C	D <input checked="" type="checkbox"/>
PR.º	28,11,00
DA.º	12/06/99
N.º CPO.	

CM-00124089-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Andrade, Lenimar Nunes de  
An24t Traço de interseção de superfícies  
regulares com passos circulares / Lenimar Nunes de Andrade. –  
Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientadora: Wu Shin-Ting  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Computação gráfica. 2. Superfícies (Matemática).  
3. Curvatura. 4. Cálculo diferencial. 5. Cálculos  
numéricos. 6. Cálculo vetorial. 7. Geometria diferencial.  
8. Equações diferenciais não-lineares - Soluções numéricas.

I. Wu Shin-Ting. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV.  
Título.

# Traço de Interseção de Superfícies Regulares com Passos Circulares

por

**Lenimar Nunes de Andrade**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual  
Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Modelagem Geométrica

Aprovada em 2/julho/1998 por:

**Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Wu Shin-Ting (FEEC/UNICAMP)**

**Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC/UNICAMP)**

**Prof. Dr. Paulo César Pinto Carvalho (IMPA/CNPQ)**

**Prof. Dr. Léo Pini Magalhães (FEEC/UNICAMP)**

**Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi (FEEC/UNICAMP)**

# Agradecimentos

- À Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Wu Shin-Ting pela eficiente e indispensável orientação durante a realização deste trabalho.
- Aos amigos Antônio de Andrade e Silva e Hélio Pires de Almeida. Este trabalho não teria sido concluído sem a ajuda e o apoio permanentes dos mesmos.
- Aos amigos Marcelo Martins dos Santos, Antônio Sales da Silva, Martinho da Costa Araújo e Ir. Gomes Pinheiro pela ajuda e pelas palavras de estímulo desde as épocas mais remotas.
- À minha esposa Luíza Amélia pela ajuda e pelo incentivo.
- Aos colegas do Departamento de Matemática da UFPB/Campus I que nos apoiaram.
- À Universidade Federal da Paraíba e ao PICD/CAPES pelo suporte financeiro.
- À Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC/UNICAMP), Prof. Dr. Paulo César Pinto Cavalho (IMPA/Rio de Janeiro), Prof. Dr. Léo Pini Magalhães (FEEC/UNICAMP), Prof. Dr. Clés Luiz Tozzi (FEEC/UNICAMP) pelos comentários e sugestões.

**Aos meus filhos**

**Diana,**

**Euler,**

**Marina e**

**Débora.**

# Resumo

Neste trabalho apresentamos uma técnica mista para o cálculo da interseção de duas superfícies regulares. Nossa técnica consiste em uma variação da técnica da subdivisão dos domínios combinada com trechos de caminhada. Através da subdivisão obtemos pontos próximos da interseção distribuídos aleatoriamente por todo o domínio da parametrização. Selecionamos alguns deles e iniciamos trechos de caminhada usando o que denominamos passo circular. Para uma maior precisão numérica, a caminhada usa em cada ponto uma construção de um círculo osculador aproximado. Para avaliar nossa técnica, fizemos comparações com as técnicas de caminhada já existentes. Baseado nos testes que fizemos podemos afirmar que nossa técnica mista é eficiente.

# Abstract

In this research we present a mixed technique for determining the intersection between two regular surfaces. Our technique is a variation of the domain subdivision technique combined with marching technique. The domain subdivision gives us approximated initial points distributing randomly on the parametrization domain. We choose some of these points and march along the curve using the so-called circular step. In order to get a better numerical precision, we proposed the construction of an approximated osculating circle to each point of the curve to determine circular steps. For evaluating our technique, we compared the proposed technique with the existing ones. According to these tests we can assert that our mixed technique is efficient.

# Lista de Figuras

2.1	Círculos osculadores em dois pontos $P_1$ e $P_2$ de uma curva . . . . .	11
3.1	Interseção cilindro/helicóide usando técnica numérica . . . . .	17
3.2	Técnica da caminhada . . . . .	19
3.3	Processo iterativo da técnica da caminhada . . . . .	20
3.4	Aproximação por uma interseção plano/plano . . . . .	27
3.5	Critérios de linearidade na subdivisão . . . . .	28
3.6	Diversos casos da interseção plano/plano . . . . .	29
3.7	A técnica da subdivisão dos domínios . . . . .	30
4.1	Caminhando com um passo circular . . . . .	34
4.2	Um passo circular . . . . .	35
4.3	Construção do círculo osculador aproximado . . . . .	36
4.4	Rotação $[M_x]$ em torno do eixo x . . . . .	37
4.5	Rotação $[M_y]$ em torno do eixo y . . . . .	38
4.6	Calculando ponto sobre o círculo osculador aproximado . . . . .	39
5.1	$f(t) = (1 + \cos(t), \text{sen}(t), 2\text{sen}(t/2))$ , $t = -1,5$ . . . . .	50
5.2	$f(t) = (1 + \cos(t), \text{sen}(t), 2\text{sen}(t/2))$ , $t = 0,5$ . . . . .	51
5.3	$f(t) = (1 + \cos(t), \text{sen}(t), 2\text{sen}(t/2))$ , $t = 2$ . . . . .	51
5.4	$f(t) = (1 + \cos(t), \text{sen}(t), 2\text{sen}(t/2))$ , $t = 5,5$ . . . . .	52
5.5	Interseção Cilindro/Parabolóide (Exemplo 5.1.3) . . . . .	58
5.6	Interseção Toro/Toro (Exemplo 5.1.4) . . . . .	59
5.7	Inteseção Toro/Cilindro (Exemplo 5.1.5) . . . . .	60
5.8	Interseção Cilindro/Toro (Exemplo 5.1.6) . . . . .	61



5.9	Superfícies com parametrizações racionais (Exemplo 5.1.7) . . . . .	62
5.10	Interseção entre superfícies de Bézier (Exemplo 5.1.8) . . . . .	63
5.11	Interseção Cilindro/Helicóide (Exemplo 5.4.1) . . . . .	64
5.12	Interseção com uma singularidade no $(0, 0)$ (Exemplo 5.4.2) . . . . .	65
5.13	Interseção com circunferências muito próximas (Exemplo 5.4.3) . . . . .	66
5.14	Interseção com elipses muito próximas (Exemplo 5.4.4) . . . . .	67
5.15	Interseção com hipérbolas muito próximas (Exemplo 5.4.5) . . . . .	68
6.1	Caixas limitantes que se interceptam . . . . .	76
6.2	Caixas limitantes que não se interceptam . . . . .	77
6.3	Subdivisões recursivas . . . . .	77
6.4	Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.1) . . . . .	83
6.5	Interseção dos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ (Exemplo 6.2.1) . . . . .	84
6.6	Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.2) . . . . .	85
6.7	Interseção de $x = 10 - \frac{y^2+z^2}{4}$ e $x^2 + y^2 = 9$ (Exemplo 6.2.2) . . . . .	86
6.8	Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.3) . . . . .	89
6.9	Interseção cone/toro (Exemplo 6.2.3) . . . . .	89
6.10	Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.4) . . . . .	90
6.11	Superfície de Bézier/Sup. Racional (Exemplo 6.2.4) . . . . .	90
6.12	Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.5) . . . . .	91
6.13	Interseção “mola”/esfera (Exemplo 6.2.5) . . . . .	91
6.14	Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.6) . . . . .	92
6.15	Exemplo 6.2.6 . . . . .	92
6.16	Interseção “mola”/esfera (Exemplo 6.2.5) . . . . .	93
6.17	Superfícies do Exemplo 6.2.6 . . . . .	93

# Lista de Tabelas

2.1	Resolução de um sistema não-linear (Exemplo 2.1.1) . . . . .	8
2.2	Resolução de um sistema não-linear (Exemplo 2.1.2) . . . . .	8
3.1	Exemplo de aplicação do método da subdivisão . . . . .	29
5.1	Exemplo 5.1.1 . . . . .	50
5.2	Exemplo 5.1.2 . . . . .	53
5.3	Interseção Cilindro/Parabolóide . . . . .	55
5.4	Interseção Toro/Toro . . . . .	56
5.5	Interseção Cilindro/Toro . . . . .	57
5.6	Interseção Cilindro/Toro . . . . .	69
5.7	Interseção entre duas superfícies racionais . . . . .	70
5.8	Interseção entre duas superfícies de Bézier . . . . .	71
5.9	Comparando passo circular com passo tangencial adaptativo . . . . .	72
5.10	Exemplo 5.3.1 . . . . .	73
B.1	Cálculo aproximado de derivadas de algumas funções . . . . .	99

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Breve histórico e objetivos do trabalho . . . . .	1
1.2	Apresentação geral do trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>4</b>
2.1	Métodos numéricos . . . . .	4
2.1.1	Determinação de derivadas . . . . .	4
2.1.2	Sistemas não-lineares . . . . .	5
2.2	Geometria Diferencial . . . . .	9
2.2.1	Definição de curva e de superfície regulares . . . . .	9
2.2.2	Círculo osculador a uma curva . . . . .	10
2.2.3	Contato entre curvas . . . . .	12
2.2.4	Outros resultados importantes . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>14</b>
3.1	Técnicas analíticas . . . . .	15
3.2	Técnicas de discretização . . . . .	15
3.3	Técnicas de Imersão . . . . .	17
3.4	Técnica de caminhada . . . . .	19
3.4.1	Determinação do ponto inicial . . . . .	19
3.4.2	Determinação do passo da caminhada . . . . .	21
3.4.3	Uma descrição analítica da técnica da caminhada . . . . .	24
3.4.4	Comentários . . . . .	26

3.5	Técnica de Subdivisão . . . . .	27
3.6	Técnicas mistas . . . . .	31
3.7	Resumo das características de cada técnica . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Um Novo Algoritmo de Caminhada</b>	<b>33</b>
4.1	Caminhada com passo circular . . . . .	33
4.1.1	Construção de um círculo osculador aproximado . . . . .	33
4.1.2	Passo circular . . . . .	37
4.2	Análise da convergência . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Avaliação da Técnica</b>	<b>49</b>
5.1	Comparação com o Passo Tangencial . . . . .	49
5.1.1	Pontos obtidos a partir de pontos sobre uma curva . . . . .	49
5.1.2	Passo Circular x Passo Tangencial Constante . . . . .	52
5.2	Passo Circular x Passo Tangencial Adaptativo . . . . .	57
5.3	Comparação com o Passo de Stoyanov . . . . .	62
5.4	Outros exemplos . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>74</b>
6.1	Determinação de pontos iniciais . . . . .	74
6.2	Exemplos . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>94</b>
7.1	Considerações finais . . . . .	94
7.2	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	95
<b>A</b>	<b>Um resultado sobre o círculo osculador</b>	<b>96</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo Aproximado de Derivadas</b>	<b>98</b>
<b>C</b>	<b>Alguns Detalhes de Implementação</b>	<b>100</b>
C.1	Os resultados mostrados pelo programa . . . . .	100
C.2	A configuração do programa . . . . .	101
C.3	Algumas constantes, macros, tipos e variáveis globais . . . . .	102

C.4	Tipos utilizados na subdivisão . . . . .	103
C.5	Cálculo de derivadas e do vetor tangente . . . . .	106
C.6	Como os pontos dos gráficos são desenhados na tela . . . . .	108

# Capítulo 1

## Introdução

Neste Capítulo apresentamos uma descrição geral deste trabalho.

### 1.1 Breve histórico e objetivos do trabalho

Neste trabalho pretendemos apresentar uma contribuição ao cálculo da interseção de duas superfícies regulares.

Sob o ponto de vista histórico o problema de interseção de superfícies vem de muitos séculos atrás. As clássicas curvas conhecidas como cônicas (elipse, hipérbole, parábola) são obtidas através da interseção entre duas superfícies: um plano e um cone.

Outra aplicação prática do cálculo de interseções ocorre no desenho das curvas de nível de uma superfície (neste caso, são interseções de planos horizontais com o gráfico da própria superfície).

A literatura existente sobre o assunto cita inúmeras outras aplicações do problema de interseções como por exemplo:

- Aplicações em CAD e em Robótica (colisões de objetos)
- Simulações de processos manufaturados
- Aplicações em Geometria Computacional
- Representação de silhuetas de objetos complexos

O problema do cálculo de interseção de superfícies dadas por equações paramétricas é um importante e difícil problema de Modelagem Geométrica. Se as superfícies forem definidas por parametriza-

ções  $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$  e  $G(r, s) = (g_1(r, s), g_2(r, s), g_3(r, s))$ , então os pontos da curva-interseção são definidos pelas soluções do sistema (em geral não-linear) com 3 equações e 4 variáveis:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = g_1(r, s) \\ f_2(u, v) = g_2(r, s) , \\ f_3(u, v) = g_3(r, s) \end{cases}$$

submetidas às restrições:  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ ,  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ ,  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , e  $s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$ .

Este sistema pode não ter solução, ter uma única solução ou uma infinidade de soluções dependendo das superfícies não se interceptarem, forem tangentes em um único ponto ou se interceptarem segundo uma curva ou segundo um trecho de superfície. Neste trabalho nós nos dedicamos ao caso em que a interseção é uma curva.

O bom desempenho de diversos métodos de cálculo de interseções (por exemplo, os que usam algum tipo de método numérico) depende principalmente de boas estimativas iniciais para determinadas seqüências de pontos. Essas boas estimativas podem ser necessárias *antes* de iniciar determinadas tarefas ou então *durante* a execução das mesmas. Uma má estimativa inicial pode levar a falhas na aplicação de determinados algoritmos, tornando impossível o cálculo da interseção. Por outro lado, quanto melhor a estimativa inicial, mais provável e mais rápida a convergência de pontos para a interseção.

No Capítulo 3 descrevemos uma técnica chamada *Caminhada* que envolve basicamente três etapas:

- Estimativa de pontos iniciais da curva interseção;
- Traço da curva interseção;
- Ordenação dos pontos obtidos.

Nossa contribuição está relacionada com o traço da curva interseção na Técnica de Caminhada. Nosso objetivo é apresentar uma nova maneira de traçar a curva interseção que seja eficiente e de simples implementação.

Acreditamos ter atingido o objetivo deste trabalho com a proposta, descrita no Capítulo 4, da construção de um círculo osculador aproximado que fornece pontos bem próximos da curva interseção. Como consequência da proximidade dos pontos obtidos temos convergência mais rápida de determinados algoritmos, além de uma boa distribuição e ordenação dos pontos obtidos.

A eficiência da nossa proposta foi comprovada uma parte teoricamente e outra parte empiricamente, através da análise de exemplos e comparações com as técnicas existentes.

## 1.2 Apresentação geral do trabalho

No Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos básicos, indispensáveis para o completo entendimento deste trabalho. Entre eles, destacamos conceitos básicos de Geometria Diferencial (por exemplo, o conceito de círculo osculador em um ponto de uma curva) e de Análise Numérica (resolução de sistemas não-lineares).

No Capítulo 3 citamos as diferentes técnicas utilizadas atualmente no cálculo das interseções. Duas delas são apresentadas com detalhes: a técnica da caminhada e a da subdivisão dos domínios. Damos uma ênfase especial à descrição da técnica de caminhada.

No Capítulo 4 apresentamos nosso resultado principal: um algoritmo para a construção de um círculo osculador aproximado que pode ser usado de forma eficiente em técnicas do tipo caminhada. Denominamos a técnica descrita de *caminhada com passo circular*.

Nos Capítulos 5 e 6 apresentamos diversos exemplos, tabelas e gráficos. Comparamos outros métodos existentes de caminhada com a caminhada com passo circular, descrita no capítulo 4. Apresentamos também uma variação da técnica da subdivisão para ser usada conjuntamente com a caminhada com passo circular.

No Capítulo 7 apresentamos algumas palavras finais e conclusões.

No Apêndice A apresentamos a demonstração de um importante resultado sobre o círculo osculador, no Apêndice B citamos alguns itens sobre o cálculo numérico aproximado de derivadas e no apêndice C mencionamos alguns trechos da implementação na linguagem de programação C que fizemos do algoritmo descrito no Capítulo 4 .



## Capítulo 2

# Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos, como o conceito de círculo osculador em um ponto de uma curva, as definições de curvas e superfícies regulares, o cálculo de vetores normais ou tangentes a curvas ou superfícies, algumas técnicas básicas para a resolução de sistemas não-lineares. Todos esses conceitos são indispensáveis para o completo entendimento deste trabalho.

### 2.1 Métodos numéricos

#### 2.1.1 Determinação de derivadas

Um dos conceitos básicos mais importantes utilizados neste trabalho é o cálculo de derivadas de forma aproximada e numérica.

Supondo que uma função  $f(x)$  tenha derivada no ponto  $x = a$ , usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} &= f'(a) + f'(a) = 2f'(a)\end{aligned}$$

Logo, se  $f$  for derivável em  $a$ , então

$$f'(a) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Dessa forma, podemos calcular aproximadamente o valor de  $f'(a)$  através da expressão

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \tag{2.1}$$

onde  $h$  é escolhido próximo de 0.

A fórmula 2.1 fornece melhores resultados numéricos do que

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que é mais conhecida, conforme o que é mencionado em [2] ou em [31].

Para o cálculo das derivadas parciais podemos utilizar as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) &\approx \frac{f(a+h, b, c) - f(a-h, b, c)}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) &\approx \frac{f(a, b+h, c) - f(a, b-h, c)}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) &\approx \frac{f(a, b, c+h) - f(a, b, c-h)}{2h}\end{aligned}$$

No cálculo aproximado de derivadas, optamos por escolher o valor de  $h$  como sendo constante e igual a 0,000001 por achar que este valor fornece uma precisão numérica aceitável, conforme mencionado no Apêndice B.

Um detalhe importante na implementação de métodos numéricos é a escolha de um critério para comparação de números reais. No nosso caso, escolhemos uma constante  $\epsilon = 10^{-6}$  e quando precisar testar se dois números reais  $x$  e  $y$  são iguais, testamos se o módulo da diferença entre eles é menor do que a constante escolhida, ou seja, substituímos um teste de verificação da igualdade  $x = y$  pelo teste de verificação da desigualdade  $|x - y| < \epsilon$ .

Outro item importante é estabelecer um critério para saber quando uma seqüência de pontos no plano ou no espaço tridimensional converge. Como as nossas seqüências são todas do tipo  $x_{n+1} = f(x_n)$  para alguma função  $f$ , ou seja, o termo  $x_{n+1}$  é construído a partir do termo anterior  $x_n$ , então adotamos como critério de convergência a observação da distância entre pontos consecutivos da seqüência. Dizemos que a seqüência  $(x_n)$  converge quando  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é uma constante próxima de 0 pré-fixada (por exemplo igual a  $10^{-6}$ ) e, neste caso, consideramos o limite da seqüência como sendo o termo  $x_{n+1}$ .

### 2.1.2 Sistemas não-lineares

O problema da determinação da interseção entre duas superfícies corresponde analiticamente à resolução de um sistema não-linear  $3 \times 4$  com algumas condições de contorno que definem os domínios. Alguns

trabalhos (como [1]) escrevem as desigualdades usadas para definir os domínios em forma de igualdade e, com isso, os sistemas associados ao cálculo da interseção de duas superfícies são considerados como sendo não-lineares de ordem  $7 \times 8$ .

Diversos métodos numéricos para a resolução de sistemas não-lineares podem ser encontrados em [2], [10], [31] e [32]), como por exemplo:

- Método de Newton
- Método de Newton modificado
- Método do Gradiente
- Método das Aproximações Sucessivas

### 2.1.2.1. Método de Newton

Provavelmente o mais amplamente utilizado pela sua simplicidade, eficiência e rapidez com que encontra uma solução.

Uma vez estimada uma aproximação inicial  $X_0$  para o sistema de equações, este método consiste na definição de uma seqüência de pontos

$$X_n = X_{n-1} - J^{-1}(X_{n-1}) \cdot f(X_{n-1})$$

onde  $J^{-1}(X_{n-1})$  é a inversa da matriz jacobiana do sistema calculada no ponto  $X_{n-1}$

Quando essa seqüência de pontos converge, ela converge para uma solução do sistema  $f(X) = 0$ . No caso  $3 \times 3$ , o sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ f_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

e sua matriz jacobiana  $3 \times 3$  pode ser escrita na forma

$$J(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

A matriz jacobiana e sua inversa são calculadas a cada iteração.

### 2.1.2.2. Método de Newton Modificado

Semelhante ao Método de Newton com a diferença de não calcular a inversa da matriz jacobiana a cada iteração. Inicia-se da mesma forma que o Método de Newton, mas quando for encontrada uma solução grosseira (por exemplo, após 2 ou 3 iterações iniciais), pode-se fixar a matriz jacobiana encontrada até o final do cálculo da solução.

Em sistemas maiores isto pode ser uma economia de grande valor pois a cada iteração evita-se o cálculo de  $n^2$  derivadas parciais e o cálculo de uma matriz inversa  $n \times n$  onde  $n$  é a quantidade de equações do sistema. Em sistemas  $3 \times 3$  não conseguimos detectar uma vantagem significativa no uso desse método.

### 2.1.2.3. Método do gradiente

Dada uma aproximação inicial  $X_0$  da solução do sistema, este método consiste em determinar se a seqüência de pontos

$$X_n = X_{n-1} - \mu_{n-1} J(X_{n-1})^t f(X_{n-1})$$

converge ou não. Se convergir, então converge para uma solução do sistema.

$J(X_{n-1})^t$  é a transposta da matriz jacobiana calculada no ponto  $X_{n-1}$  e

$$\mu_{n-1} = \frac{f(X_{n-1}) \cdot (J(X_{n-1})J(X_{n-1})^t f(X_{n-1}))}{|JJ^t f(X_{n-1})|^2}.$$

### 2.1.2.4. Método das aproximações sucessivas

Para poder ser utilizado, as equações do sistema devem ser escritas de modo que na  $i$ -ésima equação a  $i$ -ésima variável deva aparecer isolada no primeiro membro. Em outras palavras, a  $i$ -ésima equação do sistema deve ser escrita na forma  $x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Com as equações assim escritas, este método consiste na determinação do limite da seqüência  $X_k = (\varphi_1(X_{k-1}), \varphi_2(X_{k-1}), \dots, \varphi_n(X_{k-1}))$  construída a partir de uma aproximação inicial  $X_0$  dada.

O sucesso na aplicação deste método depende não só da aproximação inicial, mas também do modo de isolar as variáveis nos primeiros membros, ou seja, depende também das escolhas das funções  $\varphi_i$ .

### 2.1.2.5. Exemplos e comentários gerais

**Exemplo 2.1.1** *Consideremos o seguinte sistema  $3 \times 3$  não-linear:*

<i>Método</i>	<i>Apr.Inicial</i>	<i>Solução encontrada</i>	<i>Iterações</i>	<i>Tempo</i>
<i>Newton</i>	(10, 10, 10)	(0, 44260151, -3, 09331693, -2, 99032904)	22	0,0054 s
<i>N.Modif.</i>	(10, 10, 10)	(0, 44260151, -3, 09331693, -2, 99032904)	27	0,0050 s
<i>Gradiente</i>	(10, 10, 10)	(-1, 08824781, -3, 81262210, 0, 48763077)	315	0,0738 s

Tabela 2.1: Resolução de um sistema não-linear (Exemplo 2.1.1)

<i>Método</i>	<i>Apr.Inicial</i>	<i>Solução encontrada</i>	<i>Iterações</i>	<i>Tempo</i>
<i>Newton</i>	(1, 2, 3)	(-0, 12156165, 20, 42199296, 88, 51361130)	70	0,0379 s
<i>N.Modif.</i>	(1, 2, 3)	(-0, 12156165, 20, 42199296, 88, 51361130)	71	0,0373 s
<i>Gradiente</i>	(1, 2, 3)	—	—	—

Tabela 2.2: Resolução de um sistema não-linear (Exemplo 2.1.2)

$$\begin{cases} -13x^2 + xy + 3x + y^2 + 2z & = 1 \\ x^3 - 7xy^2 - xy - 3z^3 - 4xyz^2 & = 101 \\ x^4 - 2x^2 + 15x - zy^3 + 10z^2 + 2y - z & = 4 \end{cases}$$

Resolvendo-o pelos métodos de Newton, de Newton Modificado e pelo método do Gradiente, obtivemos os resultados mostrados na Tabela 2.1.

É mostrada a quantidade de iterações necessárias para encontrar a solução do sistema e o tempo gasto em todo o processo de convergência. Em cada caso, a aproximação inicial foi escolhida sem nenhum tipo de critério, aleatoriamente.

**Exemplo 2.1.2** Consideremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2 \cos(x) \operatorname{sen}(z) + x^3 - yz \cos(y) & = 4 \\ -2y^2 + 5x^4 y^3 z - 4e^{-z} z^2 & = -11 \\ 103x^2 - 14y^2 \cos(xy) + 21xyz & = 3 \end{cases}$$

Resolvendo-o pelos métodos de Newton, de Newton Modificado e do Gradiente obtivemos os resultados mostrados na Tabela 2.2.

Mesmo utilizando uma mesma aproximação inicial, os métodos de Newton e do Gradiente podem convergir para soluções bastante distintas (exemplo 2.1.1).

No desempenho global, o método de Newton Modificado tende a ser mais rápido do que o método de Newton. No entanto, exige uma quantidade maior de iterações para a convergência da solução. O ganho de velocidade ocorre porque as iterações do Newton Modificado são mais rápidas do que as do Método de Newton. Com as mesmas aproximações iniciais, ambos tendem a encontrar as mesmas soluções.

No exemplo 2.1.2 o Método do Gradiente não conseguiu encontrar a solução com aproximação inicial dada. Em outros exemplos pode ocorrer o contrário: o Método do Gradiente pode encontrar uma solução com a aproximação dada e o Método de Newton não a encontrar.

Para calcular o tempo nos exemplos 2.1.1 e 2.1.2, cada sistema foi resolvido 1000 vezes consecutivas obtendo-se um tempo gasto total  $T$ . O tempo mostrado nessas tabelas é o valor de  $T/1000$ . Foi utilizado um microcomputador com microprocessador 80486 a 66 MHz.

## 2.2 Geometria Diferencial

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos de Geometria Diferencial. As referências bibliográficas para esta seção são [35], [26] e [8].

### 2.2.1 Definição de curva e de superfície regulares

Uma *curva parametrizada diferenciável* do espaço tridimensional é uma função diferenciável  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in \mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  cujo domínio  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto. A variável  $t \in I$  é dita *parâmetro* da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dos pontos  $f(t)$ ,  $t \in I$  é chamado *traço* da curva. Uma curva parametrizada diferenciável  $f$  para a qual  $f'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$  é dita *regular*.

Se  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  for a parametrização de uma curva regular, então o vetor unitário tangente a  $f$  no ponto  $t = t_0$  é o vetor  $\vec{T} = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|}$ .

Dizemos que uma curva  $f$  está *parametrizada pelo comprimento de arco* quando  $|f'(s)| = 1$  para todo  $s$  no domínio da parametrização. Neste caso, pode-se mostrar que o vetor tangente  $f'(s)$  é perpendicular ao vetor  $f''(s)$  e que o comprimento do arco da curva com extremidades nos pontos  $f(s_1)$  e  $f(s_2)$  é dado por  $|s_2 - s_1|$ .

Dizemos que um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se, para cada ponto  $P$  de  $S$ , existir

uma vizinhança  $V$  de  $P$  em  $\mathbb{R}^3$ , um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e uma função  $F : U \rightarrow V \cap S$  que leva um ponto  $(u, v) \in U$  para um ponto  $(x, y, z) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \in V \cap S$  e que possui as seguintes propriedades:

1.  $F$  é diferenciável
2. A função inversa  $F^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  é contínua
3.  $|\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)| \neq 0$  para todo ponto  $(u, v) \in U$ .

A função  $F$  é chamada uma *parametrização* da superfície  $S$  na vizinhança do ponto  $P$ .

Esferas, parabolóides, planos, hiperbolóides, cilindros são alguns exemplos de superfícies regulares. Se  $z = f(x, y)$  for uma função diferenciável, então o seu gráfico é uma superfície regular que pode ser parametrizada por  $F(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .

Se  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  for uma superfície parametrizada, então fixado  $(u_0, v_0) \in U$ , as curvas  $f(t) = F(u_0, t)$  e  $g(t) = F(t, v_0)$  são chamadas *curvas coordenadas* de  $F$  em  $(u_0, v_0)$ .

Para o trabalho que apresentamos, o cálculo de determinados vetores tangentes ou vetores normais em determinados pontos de uma curva ou de uma superfície é algo da maior relevância. O bom funcionamento de alguns algoritmos apresentados dependem da possibilidade de cálculo desses tipos de vetores.

Sejam  $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ ,  $u_1 \leq u \leq u_2$ ,  $v_1 \leq v \leq v_2$  e  $G(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$ ,  $u_3 \leq u \leq u_4$ ,  $v_3 \leq v \leq v_4$  parametrizações de duas superfícies regulares. O *plano tangente a  $F$*  no ponto  $(u_0, v_0)$  é o plano que passa pelo ponto  $F(u_0, v_0)$  e é paralelo aos vetores  $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)$  e  $\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$ . Um *vetor normal* ao plano tangente a  $F$  em  $(u_0, v_0)$  é o vetor  $\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$ . Pelo fato da superfície  $F$  ser regular, a existência do vetor normal fica garantida pela condição 3 da definição de superfície regular.

Seja  $P = F(u_0, v_0) = G(r_0, s_0)$  um ponto pertencente à curva-interseção de duas superfícies  $F$  e  $G$ . Devido ao fato de  $\vec{n}_1 = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$  ser um vetor normal a  $F$  em  $P$  e  $\vec{n}_2 = \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, s_0) \times \frac{\partial G}{\partial s}(r_0, s_0)$  ser normal a  $G$  em  $P$ , temos que  $\vec{t} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  é um *vetor tangente à interseção* no ponto  $P$ .

### 2.2.2 Círculo osculador a uma curva

Se  $f$  possuir derivada segunda, então como  $\vec{T} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$  tem norma 1,  $\vec{T}$  é perpendicular ao vetor  $\vec{N} = \frac{d}{dt} \left( \frac{f'(t)}{|f'(t)|} \right) = \frac{f''(t)}{|f'(t)|} - \left( \frac{f'(t) \cdot f''(t)}{|f'(t)|^3} \right) f'(t) = \frac{1}{|f'(t)|} (f''(t) - \left( \frac{f'(t) \cdot f''(t)}{|f'(t)|^2} \right) f'(t))$ .

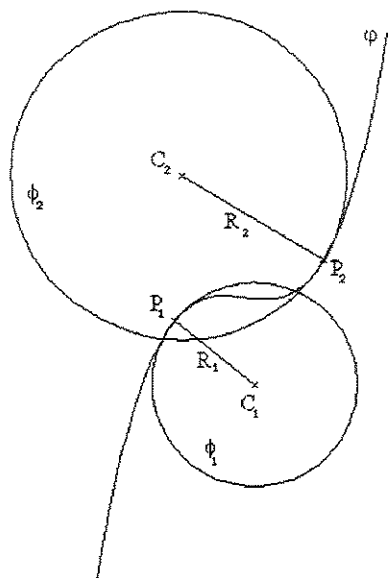


Figura 2.1: Círculos osculadores em dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  de uma curva

O plano que contém o ponto  $f(t_0)$  e os vetores  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$  é chamado *plano osculador* da curva  $f(t)$  no ponto em que  $t = t_0$ .

Se  $f$  possuir derivada segunda, então a *curvatura* de  $f(t)$  em  $t = t_0$  é o número real

$$\kappa = \frac{|f'(t_0) \times f''(t_0)|}{|f'(t_0)|^3}.$$

Seu inverso multiplicativo  $R = 1/\kappa$  é chamado *raio de curvatura* de  $f(t)$  no ponto  $t_0$ .

O círculo de raio  $R$ , tangente à curva  $f(t)$  no ponto  $t = t_0$  situado no plano osculador e do mesmo lado da concavidade de  $f(t)$ , é chamado *círculo osculador* ou *circunferência osculatriz* de  $f(t)$  em  $t_0$ .

Se  $P, Q, R$  forem pontos sobre uma mesma curva  $f(t)$ , então pode ser mostrado que o círculo osculador de  $f(t)$  em  $Q$  é o limite de todos os círculos que passam pelos pontos  $P, Q, R$  quando  $P$  tende a  $Q$  e  $R$  tende a  $Q$ .

O círculo osculador sempre se adapta ao formato da curva. Sendo o seu raio inversamente proporcional à curvatura, ele tem raio “grande” nos trechos da curva que forem “quase retos” e raio “pequeno” onde ela for “muito” curva. Isto está ilustrado na figura 2.1, onde é mostrada uma curva  $\varphi$  e círculos osculares  $\phi_1$  e  $\phi_2$  nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente.

Dadas as equações paramétricas de uma curva  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  o centro  $C(t)$  do círculo



osculador no ponto  $t = t_0$  é dado pela expressão

$$C(t_0) = f(t_0) + R \frac{\vec{N}(t_0)}{|\vec{N}(t_0)|},$$

isto é,

$$C(t_0) = f(t_0) + \left( \frac{|f'(t_0)|^3}{|f'(t_0) \times f''(t_0)|} \right) \frac{\vec{N}(t_0)}{|\vec{N}(t_0)|},$$

onde

$$\vec{N}(t_0) = f''(t_0) - \left( \frac{f'(t_0) \cdot f''(t_0)}{|f'(t_0)|^2} \right) f'(t_0).$$

### 2.2.3 Contato entre curvas

Sejam  $f(s)$  e  $g(s)$  duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Dizemos que essas curvas têm um contato de ordem  $m \geq 0$  em  $s = s_0$ , se  $f(s_0) = g(s_0)$ ,  $f'(s_0) \neq -g'(s_0)$  e

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s) - g(s)}{(s - s_0)^m} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s) - g(s)}{(s - s_0)^{m+1}} \neq 0.$$

Se as curvas  $f(t)$  e  $g(t)$  são tais que  $f(t_0) = g(t_0)$ ,  $f'(t_0) \neq 0$  e todas as derivadas de  $f(t)$  e  $g(t)$  em  $t = t_0$  coincidem até ordem  $m$ , então pode ser mostrado que  $f(t)$  e  $g(t)$  têm pelo menos contato de ordem  $m$ . Assim, pelo menos os  $m + 1$  primeiros termos das séries de Taylor de  $f(t)$  e de  $g(t)$  coincidem e, portanto, quanto maior a ordem do contato, melhor a aproximação de  $f(t)$  e de  $g(t)$  em uma vizinhança do ponto  $t = t_0$ .

A reta tangente a  $f(s)$  no ponto  $s = s_0$  é parametrizada por  $g(s) = f(s_0) + (s - s_0)g'(s_0)$ . Como neste caso temos  $g(s_0) = f(s_0)$ ,  $g'(s_0) = f'(s_0)$  e  $g''(s_0) = 0$ , o contato entre a reta tangente e a curva  $f(s)$  em  $s_0$  é de ordem 1 (se  $f''(s_0) \neq 0$ ).

É possível mostrar também que o contato entre o círculo osculador  $g(t)$  e a curva  $f(t)$  é de ordem 2 nos pontos em que a torção é diferente de zero e é de ordem maior do que ou igual a 3 nos pontos em que a torção for nula e  $\frac{d\kappa}{ds} = 0$  (ver apêndice A). A torção no ponto  $t = a$  é definida por

$$\tau(a) = \frac{f'(a) \times f''(a) \cdot f'''(a)}{|f'(a) \times f''(a)|^2}.$$

Se  $f(s)$  for uma curva regular definida em um intervalo aberto  $I$ , parametrizada pelo comprimento de arco, então o *Triedro de Frenet* em  $s \in I$  é o conjunto de vetores  $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$  definidos por  $\vec{T}(s) = f'(s)$ ,  $\vec{N}(s) = \frac{f''(s)}{|f''(s)|}$ ,  $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ . As relações que existem entre esses vetores são

conhecidas como *Equações de Frenet* e são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix}$$

## 2.2.4 Outros resultados importantes

Encerramos este capítulo com dois importantes teoremas: o *Teorema da Função Implícita* e o *Teorema Fundamental das Curvas*.

**Teorema 2.2.1 (Teorema da Função Implícita)** *Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável de classe  $C^k$  e  $F_1, \dots, F_n$  as funções coordenadas de  $F$ . Denotemos por  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  e  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  os pontos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^{n+m}$ , respectivamente. Fixado  $(a, b) \in A$  e  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(a, b) = c$ , se a matriz determinada por  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  tem posto  $n$  (isto é, determinante diferente de 0), então existe uma vizinhança  $U$  de  $b$  em  $\mathbb{R}^m$  e uma única função  $G : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diferenciável de classe  $C^k$  tal que  $G(b) = a$  e  $F(G(y), y) = c$ , para todo  $y \in U$ .*

Uma curva no espaço pode ser definida implicitamente pelas equações de duas superfícies, digamos  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$  com  $F$  e  $G$  diferenciáveis. Se um ponto  $(x, y, z)$  for tal que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0$$

então, segue do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança de  $z$  onde podemos escrever  $x$  e  $y$  em função de  $z$ :

$$x = x(z), y = y(z), z = z.$$

Isto define localmente uma curva regular com parâmetro  $z$ :  $f(z) = (x(z), y(z), z)$ .

**Teorema 2.2.2 (Teorema Fundamental das Curvas)** *Sejam  $\kappa(s)$  e  $\tau(s)$  funções contínuas com  $s \in [a, b]$ . Então, a menos da posição no espaço, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\alpha(s)$  cuja curvatura é  $\kappa(s)$  e cuja torção é  $\tau(s)$ .*

## Capítulo 3

# Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresentamos algumas técnicas básicas para o cálculo da interseção de duas superfícies regulares, definidas por equações paramétricas.

As técnicas para o cálculo da interseção de duas superfícies podem ser classificadas em 6 grandes categorias:

- Técnicas analíticas (algébricas)
- Técnicas de discretização
- Técnicas de imersão (*embedding schemes*)
- Técnicas de caminhada (*marching*)
- Técnicas de subdivisão
- Técnicas mistas

Damos destaque para as técnicas de caminhada e da subdivisão dos domínios, que são as mais utilizadas nos diversos trabalhos sobre determinação de interseção de superfícies. A técnica de discretização conhecida como *lattice evaluation* também é brevemente apresentada.

Trabalhos recentes como [14], [13] ou [20] têm usado aritmética intervalar ou aritmética afim para melhorar a precisão dos resultados obtidos com as diferentes técnicas.

### 3.1 Técnicas analíticas

Também conhecidas como *Eliminação Algébrica*, consistem na obtenção da equação da interseção através de técnicas puramente algébricas.

Para determinados tipos de superfícies, teoricamente, podemos determinar a interseção delas obtendo uma representação algébrica (por exemplo, polinomial) para a curva procurada através da substituição das equações paramétricas de uma das superfícies nas equações paramétricas da outra superfície. Em geral esse método não é eficiente e aplica-se apenas a um pequeno número de casos. Além disso, a equação da curva obtida pode ter um grau muito maior do que o das superfícies envolvidas. É citado em [18] que o alto grau dos polinômios resultantes do processo de eliminação algébrica consome uma enorme quantidade de recursos computacionais e contribui com uma substancial perda de precisão dos resultados, resultando em um método não atrativo para aplicações práticas.

Alguns trabalhos como [21] e [16] usam recursos de Geometria Algébrica na determinação da interseção de determinados tipos de superfícies (que admitem parametrização polinomial ou formada por quocientes de polinômios).

**Exemplo 3.1.1** *Vamos determinar a interseção entre os cilindros  $x^2 + z^2 = a^2$  e  $y^2 + z^2 = b^2$ . Da segunda equação, obtemos  $y^2 = b^2 - z^2$ , ou seja,  $y = \pm\sqrt{b^2 - z^2}$ . A primeira equação pode ser escrita na forma  $x = a \cos(t)$ ,  $z = a \sin(t)$  com  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, as equações paramétricas da curva-interseção dos cilindros são  $x = a \cos(t)$ ,  $y = \pm\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2(t)}$ ,  $z = a \sin(t)$ .*

*Apesar da vantagem da obtenção de um resultado exato, este tipo de solução só é possível nos casos mais simples.*

### 3.2 Técnicas de discretização

As técnicas de discretização fazem uso de uma redução da dimensão do cálculo da interseção: ao invés de calcular a interseção entre duas superfícies diretamente, calculam a interseção entre uma das superfícies e algumas curvas coordenadas da outra superfície.

A técnica de discretização "*lattice evaluation*" consiste na fixação do valor de uma das variáveis, seguida da resolução do sistema não-linear  $3 \times 3$  assim obtido. O sistema a ser resolvido possui uma

das seguintes formas:

$$\begin{cases} f_1(u, v) - g_1(r, C) = 0 \\ f_2(u, v) - g_2(r, C) = 0, \\ f_3(u, v) - g_3(r, C) = 0 \end{cases}$$

com  $C$  percorrendo todos os valores do conjunto  $\{s_{\min}, s_{\min} + \text{incr}_s, s_{\min} + 2\text{incr}_s, s_{\min} + 3\text{incr}_s, \dots, s_{\max}\}$ ; ou

$$\begin{cases} f_1(u, v) - g_1(C, s) = 0 \\ f_2(u, v) - g_2(C, s) = 0, \\ f_3(u, v) - g_3(C, s) = 0 \end{cases}$$

com  $C$  percorrendo todos os valores do conjunto  $\{r_{\min}, r_{\min} + \text{incr}_r, r_{\min} + 2\text{incr}_r, r_{\min} + 3\text{incr}_r, \dots, r_{\max}\}$ ; ou

$$\begin{cases} f_1(u, C) - g_1(r, s) = 0 \\ f_2(u, C) - g_2(r, s) = 0, \\ f_3(u, C) - g_3(r, s) = 0 \end{cases}$$

com  $C$  percorrendo todos os valores do conjunto  $\{v_{\min}, v_{\min} + \text{incr}_v, v_{\min} + 2\text{incr}_v, v_{\min} + 3\text{incr}_v, \dots, v_{\max}\}$ ; ou

$$\begin{cases} f_1(C, v) - g_1(r, s) = 0 \\ f_2(C, v) - g_2(r, s) = 0 \\ f_3(C, v) - g_3(r, s) = 0 \end{cases}$$

com  $C$  percorrendo todos os valores do conjunto  $\{u_{\min}, u_{\min} + \text{incr}_u, u_{\min} + 2\text{incr}_u, u_{\min} + 3\text{incr}_u, \dots, u_{\max}\}$ .

Para cada sistema mostrado,  $C$  é uma constante escolhida percorrendo-se o domínio da parametrização da superfície, incrementado de um valor fixado, de modo a percorrer todo o intervalo  $[u_{\min}, u_{\max}]$  ou  $[v_{\min}, v_{\max}]$  ou  $[r_{\min}, r_{\max}]$  ou  $[s_{\min}, s_{\max}]$ .

As constantes  $\text{incr}_u$ ,  $\text{incr}_v$ ,  $\text{incr}_r$ , e  $\text{incr}_s$  são pré-fixadas e estão relacionadas com a grade de curvas coordenadas. Por exemplo,  $\text{incr}_u$  pode ser escolhido como sendo igual a  $\frac{u_{\max} - u_{\min}}{N}$  onde  $N$  é a quantidade de curvas coordenadas.

Os sistemas listados anteriormente podem ser resolvidos com uma das técnicas numéricas citadas na seção 2.1.2, por exemplo o Método de Newton.

**Exemplo 3.2.1** Na Figura 3.1 é mostrada uma interseção entre um helicóide (parametrizado por  $F(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$ ) e um cilindro (parametrizado por  $G(r, s) = (3 \cos(r), 3 \sin(r), s)$ ), usando a técnica numérica lattice evaluation. Os sistemas não-lineares obtidos foram resolvidos pelo Método de Newton. Foram usados incrementos  $\text{incr}_u = \text{incr}_v = \text{incr}_r = \text{incr}_s = 0,01$ .

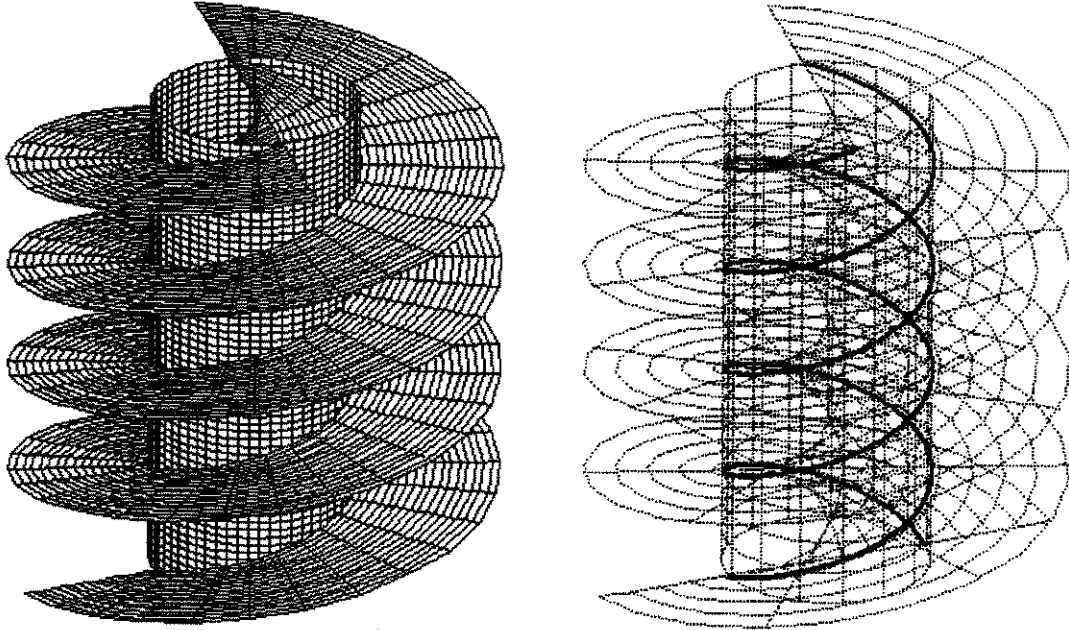


Figura 3.1: Interseção cilindro/helicóide usando técnica numérica

### 3.3 Técnicas de Imersão

De um modo geral, as técnicas de imersão consistem na resolução de sistemas não-lineares ou de sistemas de equações diferenciais construídos a partir das equações das superfícies. As referências bibliográficas para essas técnicas são [17], [1], [29], [24] e [22].

Esses métodos geralmente dependem de aproximações iniciais e de uma boa escolha de grade das curvas coordenadas.

Em [1] é apresentado um critério numérico para a determinação de pontos de bifurcação na curva-interseção. Os pontos de bifurcação normalmente correspondem a pontos onde os vetores normais a cada superfície são paralelos, o que oferece problemas, por exemplo, no cálculo dos vetores tangentes à curva-interseção naqueles pontos.

Inicialmente, o autor mostra que encontrar um  $x$  que satisfaça à desigualdade  $a \leq x \leq b$  é o mesmo que encontrar um  $\lambda$  que satisfaça à equação  $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\text{sen}(\lambda)$ . Dessa forma, o proble-

ma de determinar a interseção de duas superfícies  $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$  e  $G(r, s) = (g_1(r, s), g_2(r, s), g_3(r, s))$  com as restrições  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ ,  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ ,  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ ,  $s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$ , equivale à resolução do sistema  $7 \times 8$

$$H(u, v, r, s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

onde

$$H(u, v, r, s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \begin{bmatrix} f_1(u, v) - g_1(r, s) \\ f_2(u, v) - g_2(r, s) \\ f_3(u, v) - g_3(r, s) \\ u - \left( \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \text{sen}(\lambda_1) \right) \\ v - \left( \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} + \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2} \text{sen}(\lambda_2) \right) \\ r - \left( \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} + \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} \text{sen}(\lambda_3) \right) \\ s - \left( \frac{s_{\max} + s_{\min}}{2} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2} \text{sen}(\lambda_4) \right) \end{bmatrix}$$

A matriz jacobiana de  $H$  é uma matriz  $7 \times 8$  formado pelas derivadas parciais das funções envolvidas. Daí o autor classifica os pontos de bifurcação como sendo os pontos em que os determinantes de algumas submatrizes obtidas a partir da matriz jacobiana de  $H$  mudam de sinal. Como é comum nos métodos numéricos em geral, exige que sejam fornecidos valores iniciais que, neste caso, são do tipo  $(u_0, v_0, r_0, s_0, \lambda_{1_0}, \lambda_{2_0}, \lambda_{3_0}, \lambda_{4_0})$ .

Em Grandine–Klein IV [17] é apresentada uma técnica de imersão que permite a determinação de pontos de retorno (*turning points*) e pontos críticos (incluindo os pontos onde a curva interseção intercepta a fronteira) nos domínios das parametrização. A partir desses pontos, o algoritmo desenvolvido pelos autores determina pontos iniciais  $(x_0, x_1)$  em cada ramo da interseção.

A interseção das superfícies  $F(u, v)$  e  $G(r, s)$  corresponde ao cálculo do núcleo da aplicação  $f$  de  $F(u, v) \times G(r, s)$  em  $\mathbb{R}$ . Em certos casos, esse núcleo pode ser representado por  $x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , isto é,  $f(x(t)) = 0$ , onde  $x(t)$  pode ser calculado através das seguintes condições de contorno:

$$x''(t) \cdot x'(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1.$$

Quando a superfície  $G$  é um plano, os pontos de retorno podem ser calculados resolvendo-se as equações  $F(u, v) = 0$  e  $F_u \text{sen} \theta - F_v \cos \theta = 0$ , onde  $\theta$  está relacionado com o ângulo entre a curva interseção e a fronteira do domínio da parametrização. De um modo geral, os pontos de retorno da

interseção de  $F(u, v)$  e  $G(r, s)$  são soluções de um sistema de equações diferenciais do tipo

$$\begin{cases} F(u, v) - G(r, s) & = 0 \\ (F_u \operatorname{sen} \theta - F_v \operatorname{cos} \theta) \cdot G_s \times G_t & = 0 \end{cases}$$

### 3.4 Técnica de caminhada

Também chamada de “*Rastreamento Incremental*”, consiste na obtenção de uma seqüência de pontos da curva-interseção partindo de um ponto dado inicialmente e seguindo-se uma determinada direção para obtenção de novos pontos.

Dependem da geometria diferencial local da curva (ou seja, seu funcionamento depende do cálculo de derivadas e de certos vetores tangentes ou normais), do comprimento do passo escolhido e de uma boa escolha para os pontos iniciais da caminhada.

O Método da Caminhada requer um ponto da interseção e uma direção de caminhada para assim obter uma estimativa do próximo ponto da interseção. A direção de caminhada pode ser definida por um vetor tangente à curva (Figura 3.2).

#### 3.4.1 Determinação do ponto inicial

Suponhamos que seja dado um ponto  $P_0 = (p_1, p_2, p_3)$  próximo da interseção, que corresponda aproximadamente a  $(u_0, v_0)$  no domínio de  $F$  e a  $(r_0, s_0)$  no domínio de  $G$ . Esses valores iniciais podem ser bem estimados se for usado antes, por exemplo, o Método da Subdivisão (como em [7]) ou algum algoritmo específico (como em [28]).

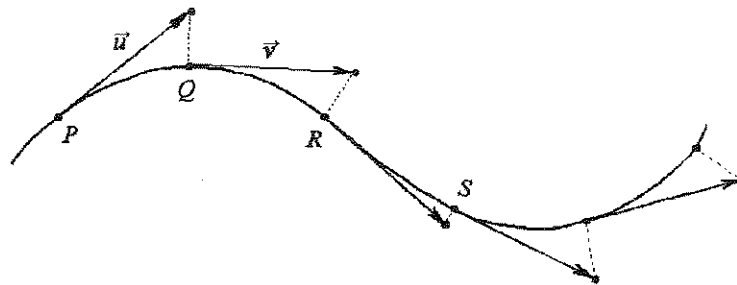


Figura 3.2: Técnica da caminhada

A partir de  $P_0$  podemos definir uma seqüência de pontos que converge para um ponto da interseção da seguinte forma: determinamos o ponto A da superfície  $F$  que está mais próximo de  $P_0$  e o ponto



$B$  da superfície  $G$  que está mais próximo de  $P_0$  (Figura 3.3).

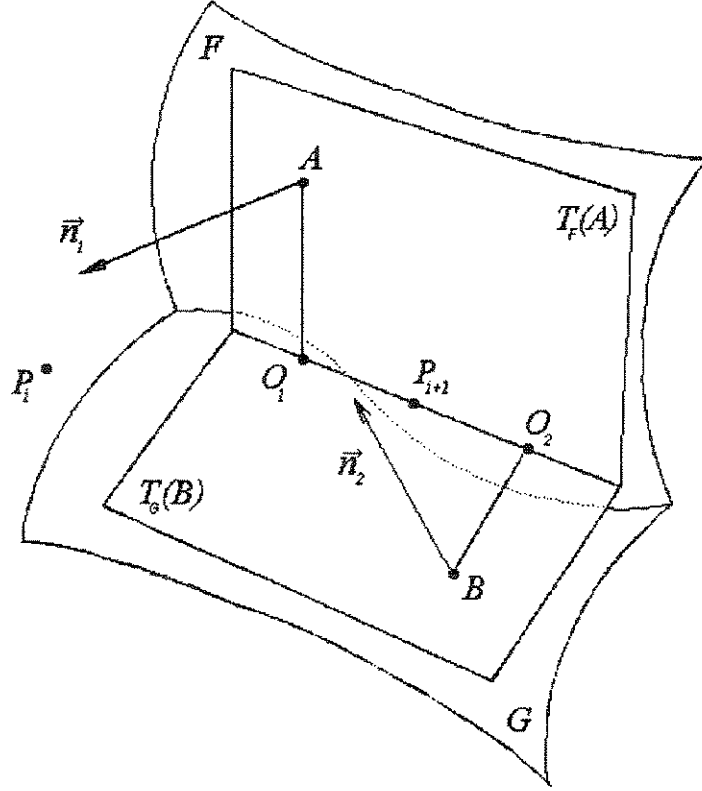


Figura 3.3: Processo iterativo da técnica da caminhada

O ponto  $A$  é calculado como sendo  $A = F(u, v)$ , onde  $(u, v)$  é o limite da seqüência

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + (J_F^t J_F)^{-1} J_F^t \begin{bmatrix} p_1 - f_1(u_i, v_i) \\ p_2 - f_2(u_i, v_i) \\ p_3 - f_3(u_i, v_i) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde  $J_F$  é a matriz jacobiana de  $F$

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_i, v_i) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_i, v_i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_i, v_i) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_i, v_i) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u_i, v_i) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u_i, v_i) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A matriz  $3 \times 3$   $(J_F^t J_F)^{-1} J_F^t$  é chamada *matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose* de  $J_F$ . A seqüência 3.1 é obtida através da resolução de uma equação do tipo  $J_F U = P_0 - F(u_i, v_i)$  onde  $U = \begin{bmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix}$ .

Analogamente o ponto  $B$  pode ser calculado como sendo  $B = G(r, s)$ , onde  $(r, s)$  é o limite da seqüência

$$\begin{bmatrix} r_{i+1} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ s_i \end{bmatrix} + (J_G^t J_G)^{-1} J_G^t \begin{bmatrix} p_1 - g_1(r_i, s_i) \\ p_2 - g_2(r_i, s_i) \\ p_3 - g_3(r_i, s_i) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde  $J_G$  é a matriz jacobiana de  $G$

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r_i, s_i) & \frac{\partial f_1}{\partial s}(r_i, s_i) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(r_i, s_i) & \frac{\partial f_2}{\partial s}(r_i, s_i) \\ \frac{\partial g_3}{\partial r}(r_i, s_i) & \frac{\partial f_3}{\partial s}(r_i, s_i) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Em 3.3,  $(J_G^t J_G)^{-1} J_G^t$  é a matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose de  $J_G$ , obtida na resolução da equação  $J_G S = P_0 - G(r_i, s_i)$ , onde  $S = \begin{bmatrix} r_{i+1} \\ s_{i+1} \end{bmatrix}$ .

Conhecidos  $A$  e  $B$ , podemos calcular o vetor normal  $\vec{n}_1$  à superfície  $F$  no ponto  $A = (a_1, a_2)$  pela equação:

$$\vec{n}_1 = \frac{\partial F}{\partial u}(a_1, a_2) \times \frac{\partial F}{\partial v}(a_1, a_2)$$

e o vetor normal  $\vec{n}_2$  a  $G$  em  $B = (b_1, b_2)$  por

$$\vec{n}_2 = \frac{\partial G}{\partial r}(b_1, b_2) \times \frac{\partial G}{\partial s}(b_1, b_2)$$

Usando estes vetores normais e os pontos  $A$  e  $B$ , podemos calcular as equações dos planos tangentes  $T_F(A)$  e  $T_G(B)$  às superfícies  $F$  and  $G$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Se esses planos forem paralelos ou coincidentes (ou seja, se eles não se interceptarem segundo uma reta  $R$ ), então deve-se voltar ao início do algoritmo e escolher outro ponto inicial  $P_0$ .

Em seguida, calculamos a projeção ortogonal  $O_1$  de  $A$  na reta  $R$ , interseção de  $T_F(A)$  e  $T_G(B)$ , a projeção ortogonal  $O_2$  de  $B$  na reta  $R$  e o ponto médio  $P_1$  do segmento de reta  $\overline{O_1 O_2}$ . Substituímos  $P_0$  por  $P_1$  e repetimos todo esse procedimento várias vezes até obtermos um ponto suficientemente próximo da interseção.

### 3.4.2 Determinação do passo da caminhada

Uma vez calculado um ponto  $P = F(u_P, v_P) = G(r_P, s_P)$  da interseção e o vetor tangente  $\vec{T} = n_1(u_P, v_P) \times n_2(r_P, s_P)$ , então o método da caminhada com *passo tangencial* estima o ponto  $P + L \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$  como sendo o próximo ponto aproximado da interseção.  $L$  é o comprimento do passo da caminhada que pode ser constante ou não.

Nos casos em que  $L$  não for constante, o mais comum é considerá-lo como sendo diretamente proporcional ao raio de curvatura aproximado da curva e, neste caso, ele é chamado de *passo adaptativo*: muda de tamanho de acordo com o tamanho do raio de curvatura. Se a curva passar pelos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , então o raio de curvatura aproximado é dado pela expressão

$$\frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc},$$

onde  $p = \frac{a+b+c}{2}$  e  $a, b, c$  são as medidas dos lados do triângulo definido pelos pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$ .

Ao invés de usar a direção do vetor tangente  $\vec{T}$ , podemos utilizar outra direção de caminhada, estimada a partir de mais de um ponto da curva e seus respectivos vetores tangentes. Ao invés de considerarmos que a aproximação do próximo ponto esteja sobre a reta tangente, podemos supor que o próximo ponto esteja sobre outro tipo de curva. Por exemplo, no trabalho de Stoyanov [34] é considerado que o próximo ponto aproximado esteja sobre uma parábola  $p(h)$  que aproxima localmente a curva-interseção. No ponto  $s_0$ , a parábola definida por Stoyanov é do tipo  $p(h) = r(s_0) + hr'(s_0) + \frac{1}{2}h^2r''(s_0)$  onde  $r(h) = F(u(h), v(h)) = G(r(h), s(h))$  é a curva-interseção. Os coeficientes  $r(s_0)$ ,  $r'(s_0)$  e  $r''(s_0)$  são calculados resolvendo-se vários sistemas lineares. Por exemplo,  $r''(s_0)$  é encontrado resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0)x + (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)y = \vec{n}_0 \cdot (F_{uu}u'(s_0)^2 + 2F_{uv}u'(s_0)v'(s_0) + F_{vv}v'(s_0)^2) \\ (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_0)x + (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1)y = \vec{n}_1 \cdot (G_{rr}r'(s_0)^2 + 2G_{rs}r'(s_0)s'(s_0) + G_{ss}s'(s_0)^2) \end{cases}$$

onde  $\vec{n}_0$  e  $\vec{n}_1$  são os vetores normais às superfícies nos pontos  $(u(s_0), v(s_0))$  e  $(r(s_0), s(s_0))$ , respectivamente. Stoyanov usa um comprimento de passo  $L$  que depende da curvatura  $\kappa$  no ponto corrente da curva-interseção e de uma constante  $D$  pré-definida:  $L = 2D\sqrt{2(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{D^2\kappa^2}})}$ .

**Exemplo 3.4.1** Consideremos o cone parametrizado por  $F(u, v) = (v, \sqrt{3}v \cos(u), \sqrt{3}v \sin(u))$  e o toro parametrizado por  $G(r, s) = (\cos(r)(1 + \cos(s)), \sin(r)(1 + \cos(s)), \sin(s))$ .

Inicialmente, escolhemos (de forma arbitrária) o ponto inicial  $P_0 = (1, 1, 1)$  e  $(u_0, v_0) = (1, 1)$ ,  $(r_0, s_0) = (1, 1)$  como sendo pontos nos domínios cujas imagens são “próximas” de  $P_0$ .

O cálculo das matrizes jacobianas nos fornece

$$J_F(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,457470 & 0,935831 \\ 0,935831 & 1,457470 \end{bmatrix}$$

e

$$J_G(r_0, s_0) = \begin{bmatrix} -1,296120 & -0,454649 \\ 0,832229 & -0,708073 \\ 0 & 0,540302 \end{bmatrix}$$

de onde obtemos

$$(u_1, v_1) = (u_0, v_0) + (J_F^t J_F)^{-1} J_F^t \begin{bmatrix} 1 - f_1(u_0, v_0) \\ 1 - f_2(u_0, v_0) \\ 1 - f_3(u_0, v_0) \end{bmatrix} = (0,826120; 0,848325)$$

Inicia-se assim uma seqüência de pontos

$$(u_0, v_0) \rightarrow (u_1, v_1) \rightarrow (u_2, v_2) \rightarrow \dots$$

que converge para o ponto  $(0,785398; 0,862372)$

O critério de convergência utilizado foi observar se a distância entre dois pontos consecutivos  $(u_i, v_i)$  e  $(u_{i+1}, v_{i+1})$  é inferior a um certo valor pré-fixado (por exemplo,  $10^{-6}$ ).

De modo semelhante iniciamos a construção da seqüência  $(r_n, s_n)$ :

$$(r_1, s_1) = (r_0, s_0) + (J_G^t J_G)^{-1} J_G^t \begin{bmatrix} 1 - g_1(r_0, s_0) \\ 1 - g_2(r_0, s_0) \\ 1 - g_3(r_0, s_0) \end{bmatrix} = (0,804474; 1,219051)$$

que converge para  $(0,785398; 1,178097)$ .

O ponto  $(0,785398; 0,862372)$  para o qual a seqüência  $(u_n, v_n)$  converge tem imagem pela função  $F$  igual ao ponto  $P_1 = (0,811937; 1,032429; 0,956403)$ .

Usando agora  $P_1$  para construir novas seqüências  $(u_n, v_n)$  e  $(r_n, s_n)$  podemos obter um ponto  $P_2 = (0,809648; 1,031196; 0,950389)$ , depois um ponto  $P_3$ , etc. A seqüência dos  $P_n$  assim construída converge para

$$P = (0,809650; 1,031195; 0,950388) = F(0,744642; 0,809650) = G(0,905172; 1,254481)$$

A rigor,  $F(0,744642; 0,809650) \neq G(0,905172; 1,254481)$ . No entanto, a distância entre esses dois pontos no espaço 3D é inferior a  $2,2 \cdot 10^{-12}$ . Logo, dentro de uma certa tolerância, podemos considerar o ponto  $Q$  como sendo pertencente à interseção das superfícies  $F$  e  $G$ .

Conhecido o ponto  $P$ , podemos determinar o vetor tangente  $\vec{T}$  à curva-interseção em  $P$

$$\vec{T} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0,980037; 3,265897; -1,038863),$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right) \\ &= (0; -0,950387; 1,031198) \times (1; 1,273633; 1,173823) \\ &= (-2,428953; 1,031198; 0,950387)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{n}_2 &= \left( \frac{\partial g_1}{\partial r}, \frac{\partial g_2}{\partial r}, \frac{\partial g_3}{\partial r} \right) \times \left( \frac{\partial g_1}{\partial s}, \frac{\partial g_2}{\partial s}, \frac{\partial g_3}{\partial s} \right) \\ &= (-1,031198; 0,809651; 0) \times (-0,586911; -0,747510; 0,311070) \\ &= (0,251858; 0,320775; 1,246024).\end{aligned}$$

Em  $\bar{n}_1$  as derivadas parciais são calculadas no ponto  $(0,744642; 0,809650)$  e em  $\bar{n}_2$  no ponto  $(0,905172; 1,254481)$ .

Caminhando sobre a reta tangente e escolhido um tamanho de passo  $L = 0,02$ , o próximo ponto aproximado será

$$\begin{aligned}Q_0 &= P + L \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = (0,809650; 1,031195; 0,950388) + 0,02(0,274942; 0,916224; -0,291445) = \\ &(0,823397; 1,077006; 0,935816)\end{aligned}$$

A partir de  $Q_0$  construímos uma seqüência

$$Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots$$

que converge para o ponto

$$Q = (0,823199; 1,076669; 0,934747) = F(0,714957; 0,823199) = G(0,918030; 1,207548)$$

E assim, a caminhada  $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow \dots$  prossegue ao longo da curva.

### 3.4.3 Uma descrição analítica da técnica da caminhada

Müllenheim [27] apresenta uma descrição analítica da técnica da caminhada que é uma variação da técnica com maior apelo geométrico apresentada em Barnhill-Kersey [7]. Além disso, Müllenheim demonstrou, usando recursos de Análise Numérica, que as seqüências mencionadas realmente convergem para pontos da interseção. Em [28] ele mostra alguns critérios para escolha de valores iniciais. A principal diferença na técnica apresentada por ele está na maneira de se calcular o próximo ponto aproximado, ele o estima no domínio das parametrizações.

1. Denotemos por  $(x^*, y^*)$  o ponto da interseção a ser obtido,  $(u_0, v_0)$  uma aproximação desse ponto no domínio da superfície  $F$  e  $(r_0, s_0)$  uma aproximação desse mesmo ponto no domínio da superfície  $G$ . O objetivo é obter uma seqüência de pontos a partir desses pontos iniciais que convirja para  $(x^*, y^*)$ .
2. Sejam  $T_F(u, v)$  e  $T_G(r, s)$  as parametrizações dos planos tangentes às superfícies  $F$  e  $G$  nos pontos  $(u_0, v_0)$  e  $(r_0, s_0)$  respectivamente. Logo,

$$T_F(u, v) = (f_1(u_0, v_0), f_2(u_0, v_0), f_3(u_0, v_0)) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$$

$$T_G(r, s) = (g_1(r_0, s_0), g_2(r_0, s_0), g_3(r_0, s_0)) + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial s} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - r_0 \\ s - s_0 \end{bmatrix}$$

3. Determinam-se as funções inversas  $T_F^{-1}(X, Y, Z)$  e  $T_G^{-1}(X, Y, Z)$ . Isto pode ser feito resolvendo-se os dois seguintes sistemas lineares  $2 \times 3$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u} x + \frac{\partial f_1}{\partial v} y = X - f_1(u_0, v_0) + \frac{\partial f_1}{\partial u} u_0 + \frac{\partial f_1}{\partial v} v_0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} x + \frac{\partial f_2}{\partial v} y = Y - f_2(u_0, v_0) + \frac{\partial f_2}{\partial u} u_0 + \frac{\partial f_2}{\partial v} v_0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} x + \frac{\partial f_3}{\partial v} y = Z - f_3(u_0, v_0) + \frac{\partial f_3}{\partial u} u_0 + \frac{\partial f_3}{\partial v} v_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial r} x + \frac{\partial g_1}{\partial s} y = X - g_1(r_0, s_0) + \frac{\partial g_1}{\partial r} r_0 + \frac{\partial g_1}{\partial s} s_0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} x + \frac{\partial g_2}{\partial s} y = Y - g_2(r_0, s_0) + \frac{\partial g_2}{\partial r} r_0 + \frac{\partial g_2}{\partial s} s_0 \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} x + \frac{\partial g_3}{\partial s} y = Z - g_3(r_0, s_0) + \frac{\partial g_3}{\partial r} r_0 + \frac{\partial g_3}{\partial s} s_0 \end{cases}$$

Todas as derivadas parciais são calculadas em  $(u_0, v_0)$  ou em  $(r_0, s_0)$ .

4. Determina-se a interseção dos planos tangentes  $T_F(u, v)$  e  $T_G(r, s)$ . Isto corresponde à resolução de um sistema linear com 3 equações e 4 variáveis  $u, v, r$  e  $s$ .
5. Determinam-se as projeções ortogonais  $P_1$  e  $Q_1$  dos pontos  $T_F(u_0, v_0)$  e  $T_G(r_0, s_0)$  na interseção dos planos obtida no item anterior e determina-se o ponto médio  $M_1 = (m_1, m_2, m_3)$  do segmento de reta  $\overline{P_1 Q_1}$ .
6. O ponto  $M_1$  é um ponto da interseção dos planos  $T_F$  e  $T_G$ . Logo, podemos calcular suas imagens inversas  $T_F^{-1}(m_1, m_2, m_3)$  e  $T_G^{-1}(m_1, m_2, m_3)$ . Obtemos assim um ponto  $(u_1, v_1)$  no domínio de  $F$  e um ponto  $(r_1, s_1)$  no domínio de  $G$ .

7. Repete-se todos os itens anteriores para, a partir de  $(u_1, v_1)$ , obtermos outro ponto  $(u_2, v_2)$ , depois um ponto  $(u_3, v_3)$  e assim sucessivamente teremos uma seqüência de pontos

$$(u_0, v_0) \rightarrow (u_1, v_1) \rightarrow (u_2, v_2) \rightarrow (u_3, v_3) \rightarrow \dots$$

Fazemos o mesmo com os pontos no domínio de  $G$  para obtermos outra seqüência de pontos

$$(r_0, s_0) \rightarrow (r_1, s_1) \rightarrow (r_2, s_2) \rightarrow (r_3, s_3) \rightarrow \dots$$

Quando essas seqüências convergem, elas convergem para pontos  $(u^*, v^*)$ ,  $(r^*, s^*)$  nos domínios de  $F$  e  $G$  respectivamente que correspondem a um ponto da interseção dessas superfícies.

8. Uma vez obtidos os pontos  $(u^*, v^*)$  e  $(r^*, s^*)$ , podemos obter um vetor tangente  $\vec{T} = (t_1, t_2, t_3)$  à curva-interseção e também as imagens inversas  $T_F^{-1}(t_1, t_2, t_3) = (v_1, v_2)$  e  $T_G^{-1}(t_1, t_2, t_3) = (w_1, w_2)$
9. Repetem-se todos os passos anteriores tomando-se como aproximação do próximo ponto da curva os pontos  $(u^*, v^*) \pm \xi_1(v_1, v_2)$  (no domínio de  $F$ ) e  $(r^*, s^*) \pm \xi_2(w_1, w_2)$  (no domínio de  $G$ ) onde  $\xi_1$  e  $\xi_2$  devem ser escolhidos convenientemente pequenos (próximos de 0) para que a seqüência de pontos convirja para um novo ponto da interseção.

### 3.4.4 Comentários

Em geral, deve-se prosseguir na caminhada até que uma das curvas nos domínios (cujas imagens correspondem à interseção no espaço 3D) atinjam uma das fronteiras dos mesmos ou quando houver uma volta ao ponto inicial.

O comprimento do passo não pode ser grande. Em geral ele tem de ser próximo de 0. Comprimentos mal escolhidos podem levar a pontos mal aproximados e à não convergência das seqüências de pontos construídas durante a caminhada.

Um problema sério que pode surgir durante a caminhada é o vetor tangente se anular. Isto ocorre nos pontos de tangência das superfícies em que os vetores normais  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  a  $F$  e a  $G$ , respectivamente, são paralelos e, conseqüentemente, seu produto vetorial  $\vec{T} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ . Nestes casos, de acordo com Barnhill-Kersey [7], podemos adotar um dos seguintes procedimentos especiais:

- Considerar o vetor tangente  $\vec{T}$  como sendo a diferença entre os dois últimos pontos  $P_1$  e  $P_2$  obtidos, isto é,  $\vec{T} = P_2 - P_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ .

- Sendo possível obter um vetor normal a uma das superfícies então também é possível obter a equação do plano tangente a uma das superfícies. Assim, podemos fazer uma amostragem radial em torno do ponto atual da curva-interseção, ou seja, definir uma circunferência no plano tangente com centro no ponto atual e testar vários pontos sobre a circunferência assim definida para tentar escolher o próximo ponto aproximado da caminhada.

### 3.5 Técnica de Subdivisão

Consiste na decomposição recursiva do problema em outro mais simples e semelhante. A decomposição é feita até ser obtido um problema que permita uma resolução direta. Para uma eficiente aplicação dessa técnica os domínios precisam ser subdivididos em um grande número de partes o que pode levar a enormes intervalos de tempo gastos nos cálculos efetuados.

A idéia principal da técnica de subdivisão consiste na subdivisão do domínio de definição das parametrizações das superfícies de modo que os pequenos pedaços das superfícies associados às pequenas partes subdivididas nos domínios possam ser aproximadas por pequenos planos ou pequenos triângulos (Figuras 3.4 e 3.7). Dessa forma, as interseções desses triângulos fornecem pontos próximos da interseção das superfícies.

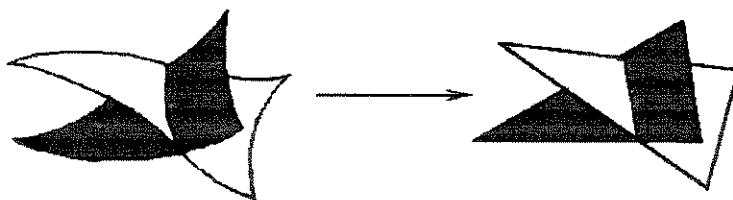


Figura 3.4: Aproximação por uma interseção plano/plano

Uma das principais vantagens desse método é o fato de não depender de valores iniciais para aproximação de raízes de equações ou de sistemas de equações. É aplicado a todo o domínio da parametrização, não importando as propriedades de carácter local (como, por exemplo, pontos de singularidade). Dizemos assim que é um método de natureza *global* (ao contrário da caminhada, que devido ao fato de depender de propriedades em cada ponto da curva, é um método de natureza *local*).

Quando a aplicação da técnica requer a resolução de algum sistema de equações, esse sistema será sempre linear. Em caso de implementação, surgem diversos casos de interseção dos triângulos a serem



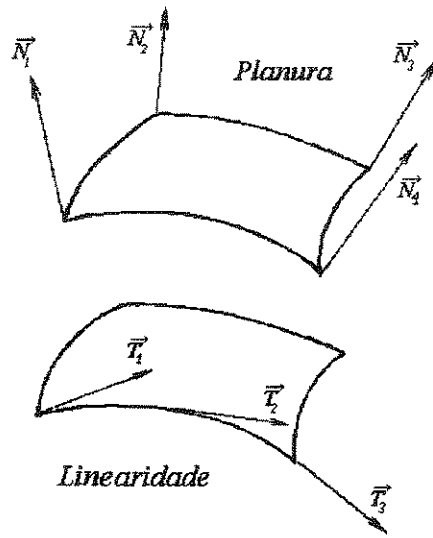


Figura 3.5: Critérios de linearidade na subdivisão

considerados. Geometricamente, esses casos estão exemplificados na Figura 3.6.

Normalmente, o teste de linearidade para saber se a superfície pode ser aproximada por um plano consiste na observação dos ângulos entre vetores normais nos “vértices” dos pedaços de superfícies e na variação dos ângulos dos vetores tangentes nas bordas (Figura 3.5). Assim, o processo de subdivisão recursiva termina quando o maior ângulo entre os vetores normais nos vértices for inferior a uma certa constante pré-fixada e o maior ângulo calculado nas bordas for inferior a outra constante, também pré-fixada.

Barnhill-Kersey [7] nomeiam o maior ângulo entre os vetores normais de *planura* (*flatness*) e o maior ângulo calculado nas bordas de *linearidade*. Dessa forma, a planura e a linearidade fornecem critérios para medirmos quão plano é um determinado trecho de superfície.

**Exemplo 3.5.1** Consideremos as superfícies parametrizadas por  $F(u, v) = (u, v, \cos(u^2 + v^2))$  e  $G(r, s) = (r, s, r^2 - s^2)$ , ambas definidas no domínio  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

A Tabela 3.1 resume os resultados de um teste que fizemos com o método da subdivisão. O teste consistiu na subdivisão dos domínios em  $N^2$  partes iguais. Em seguida, percorremos todas as  $N^2$  sub-regiões e calculamos todas as planuras (em graus) e linearidades (também em graus). As colunas “Planura” e “Linearidade” na Tabela 3.1 apresentam, respectivamente, a planura e linearidade máximas encontradas. Resolvendo sistemas lineares, calculamos várias interseções plano/plano que seriam aproximações de pequenos pedaços das superfícies. Alguns desses pontos encontrados são mostrados

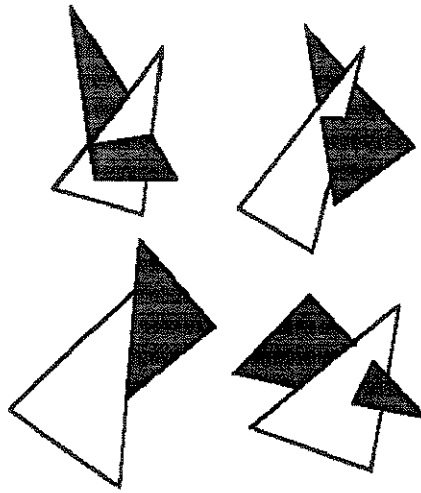


Figura 3.6: Diversos casos da interseção plano/plano

$N$	Planura	Linearidade	Ponto 1	Ponto 2
10	22,77	16,73	(-0.88227, -1.00000, -0.21190)	(-0.88158, -0.88158, -0.00000)
50	3,01	0,85	(-0.88659, -1.00000, -0.21372)	(-0.88633, -0.96633, -0.14821)
100	1,50	0,42	(-0.88665, -1.00000, -0.21375)	(-0.88652, -0.98652, -0.18730)
500	0,30	0,08	(-0.88669, -1.00000, -0.21377)	(-0.88667, -0.99867, -0.21116)

Tabela 3.1: Exemplo de aplicação do método da subdivisão

nas colunas “Ponto 1” e “Ponto 2”. Esses dois pontos correspondem às extremidades de segmentos de retas da interseção plano/plano.

Observe que os valores encontrados quando  $N = 10$  são muito mal aproximados. No entanto, os valores encontrados quando  $N = 500$  são aproximações muito boas (da ordem de  $10^{-6}$ ) de pontos da interseção das superfícies.

A maior desvantagem da técnica da subdivisão está na grande quantidade de tempo de computação que pode ser consumido durante a sua execução. De um modo geral, as subdivisões mais eficientes têm sido feitas usando-se caixas limitantes (*bounding boxes*) e estruturas de *quadtrees*. Isto pode ser feito da seguinte maneira:

- Os domínios de cada parametrização são subdivididos em 4 partes iguais cada um.

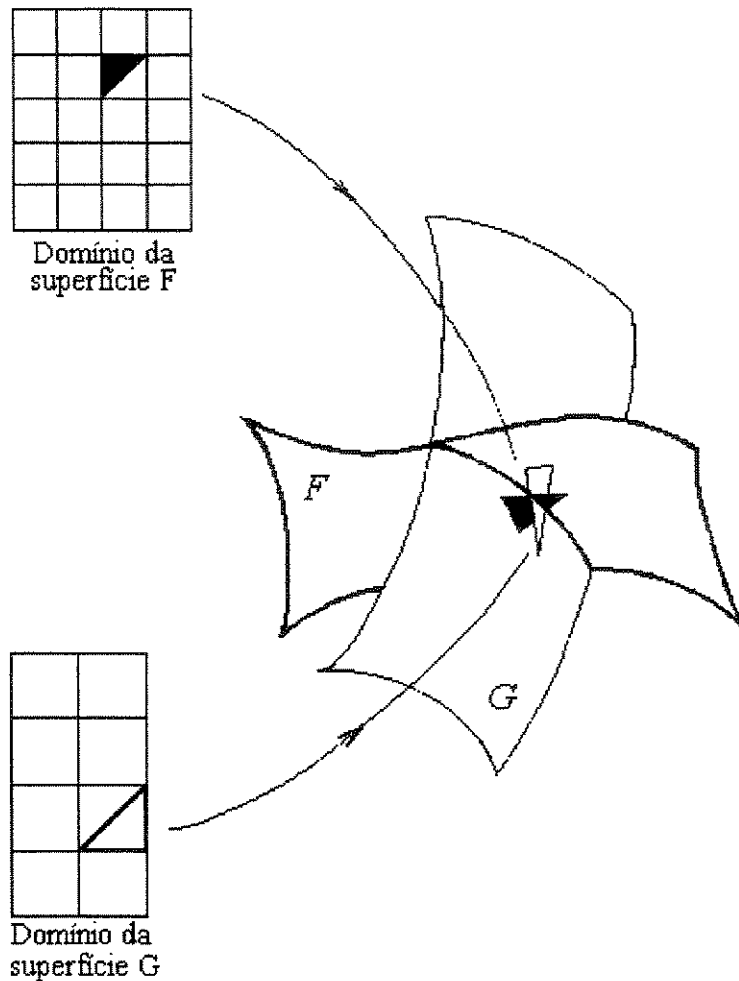


Figura 3.7: A técnica da subdivisão dos domínios

- Para cada uma das partes subdivididas é determinado um paralelepípedo (caixa limitante) no espaço 3D que envolva todo a parte do gráfico da superfície que corresponda àquela parte. Dessa forma são constituídas 4 caixas para as partes do domínio de  $F$  e mais 4 caixas para as partes subdivididas do domínio de  $G$ . Existem muitas maneiras de construir essas caixas, a mais simples delas consiste em avaliar os máximos/mínimos das funções envolvidas quando restritas a cada parte.
- Consideramos os pares formados por uma caixa correspondente a uma parte do domínio de  $F$  e outra caixa correspondente a uma caixa no domínio de  $G$  e verificamos se elas se interceptam. São verificadas interseções em um total de 16 pares de caixas distintos.

- Para cada par de caixas que se interceptarem, verificamos os valores da linearidade e da planura. Se esses valores forem inferiores aos valores pré-fixados, então o processo de subdivisão recursiva se encerra com a aproximação de trechos de superfícies por planos e fazendo-se as interseções desses planos.
- Se houver interseção do par de caixas, mas a linearidade ou a planura forem “grandes”, então o processo de subdivisão recursiva continua naquelas partes envolvidas
- Se não houver interseção dos pares de caixas então as superfícies não se interceptam naqueles trechos e passamos assim a ignorar aquelas partes

### 3.6 Técnicas mistas

Os trabalhos mais recentes combinam mais de uma das técnicas mencionadas anteriormente para obter novas técnicas. Geralmente, as técnicas assim formadas são muito eficientes. Barnhill-Kersey [7] mencionam subdivisão combinada com caminhada com passo tangencial adaptativo. Koparkar [22] cita uma combinação de técnica numérica com subdivisão.

As técnicas mistas geralmente aproveitam as vantagens de técnicas distintas, superando assim desvantagens do uso isolado das mesmas.

### 3.7 Resumo das características de cada técnica

A seguir, apresentamos as principais características das técnicas utilizadas atualmente para a determinação da interseção de duas superfícies regulares.

**Técnicas analíticas** Obtenção da equação da curva-interseção por métodos algébricos

- Vantagem: os resultados obtidos são exatos.
- Desvantagens: só se aplica a alguns poucos casos; os graus das equações da curva-interseção podem ser muito maior do que os graus das equações das superfícies envolvidas; difícil implementação.
- Referências: [16], [18], [21]

**Técnicas de Imersão** Obtenção dos ramos da curva-interseção com uso da Teoria de Homotopia.

- Vantagem: grande variedade de casos que podem ser resolvidos.
- Desvantagens: dificuldade na definição de uma função homotópica conveniente; dificuldade na resolução de sistemas de equações diferenciais.
- Referências: [17], [1], [29], [32]

**Técnicas de Discretização** Obtenção de pontos aproximados através de uma discretização dos domínios das parametrizações combinada com resolução de sistemas não-lineares.

- Vantagem: simples implementação.
- Desvantagens: depende da *grade* usada na discretização e de aproximações iniciais para resolução dos sistemas de equações.
- Referências: [18], [29]

**Técnicas de caminhada** Obtenção de pontos da curva-interseção a partir de um ponto e direção iniciais

- Vantagem: rapidez na execução.
- Desvantagens: dependem de aproximações iniciais e do cálculo de vetores tangentes à curva.
- Referências: [7], [6], [27], [34]

**Técnicas de subdivisão** Subdivisão recursiva dos domínios até ser possível uma aproximação por um problema mais simples

- Vantagens: não depende de propriedades locais das superfícies; abrangência por todo o domínio.
- Desvantagens: depende da escolha de um critério que sinalize o final do processo recursivo; lentidão durante a execução.
- Referências: [19], [18], [9]

**Técnicas mistas** Mais de uma técnica funcionando conjuntamente

- Vantagem: procura aproveitar o que cada uma das técnicas envolvidas tem de melhor.
- Desvantagens: herdadas de alguma das técnicas envolvidas.
- Referências: [7], [22]

## Capítulo 4

# Um Novo Algoritmo de Caminhada

Neste Capítulo descrevemos a principal contribuição deste trabalho: uma nova maneira de estimar o próximo ponto na técnica da caminhada para a determinação da interseção de superfícies regulares.

Descrevemos a construção de uma circunferência que mostrou ser eficiente na estimativa do próximo ponto aproximado na técnica de caminhada.

No final deste Capítulo, mostramos que nossa circunferência tende ao círculo osculador no ponto de contato da curva com a circunferência, desde que se tome o comprimento do passo  $L$  suficientemente pequeno ( $L \rightarrow 0$ ).

### 4.1 Caminhada com passo circular

#### 4.1.1 Construção de um círculo osculador aproximado

Podemos utilizar o método da subdivisão para obtermos pontos próximos da curva-interseção das superfícies  $F(u, v)$  e  $G(r, s)$ . Com um desses pontos iniciais, sucessivos pontos na interseção podem ser obtidos caminhando-se ao longo da interseção segundo a técnica de caminhada descrita em capítulo anterior. Quanto mais próxima a direção de caminhada da curva-interseção, mais precisa e mais facilmente ela será obtida. Como já foi mencionado anteriormente, existem algumas maneiras de melhorar a forma de caminhada tradicional – que usa o vetor tangente para estimar o próximo ponto aproximado (seção 3.4).

Nesta seção, apresentamos uma nova maneira de calcular o passo da interseção baseado no conceito de círculo osculador a uma curva, conceito este definido na seção 2.3.2. Teoricamente falando, o círculo

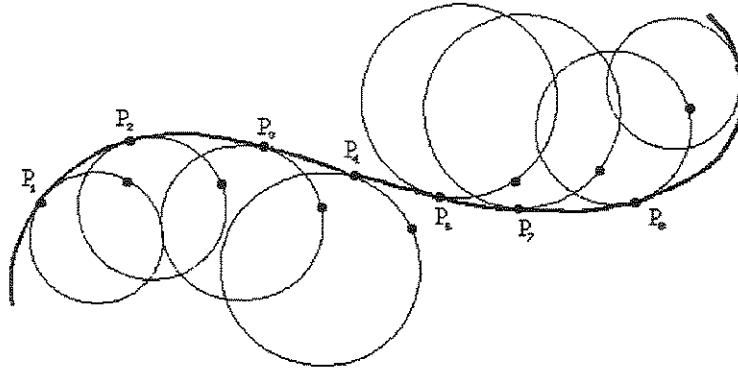


Figura 4.1: Caminhando com um passo circular

osculador é o círculo que melhor se aproxima da curva na vizinhança de um ponto dado. Assim, mantendo-se sobre o círculo osculador durante a caminhada podemos obter melhores resultados do que usando o vetor tangente tradicionalmente utilizado (Figura 4.1).

Como não conhecemos as equações paramétricas da curva-interseção, não é trivial calcularmos o círculo osculador exato em cada ponto da curva. Para contornar este problema sem abandonar a idéia de círculo osculador, propomos um algoritmo simples e eficiente para calcular um círculo osculador aproximado em cada ponto corrente da curva-interseção. Vamos chamar o passo da caminhada nesse círculo osculador aproximado de *passo circular*. Na nossa construção, são usadas operações simples como produtos de matrizes de ordem 3 e resolução de sistema linear  $3 \times 3$ .

Suponhamos que sejam dados dois pontos “vizinhos”  $P$  e  $Q$  na curva interseção, cujos vetores tangentes sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  respectivamente. Fixado o passo de caminhada  $L$  e construída a circunferência de raio  $R$  descrita nesta seção, o próximo ponto aproximado da interseção pode ser estimado caminhando-se  $L$  ou  $L \cdot R$  unidades sobre a circunferência a partir de  $Q$ , no sentido de  $P$  para  $Q$  (Figura 4.2). O produto  $L \cdot R$  corresponde à medida do ângulo central de  $L$  radianos que o arco de comprimento  $L \cdot R$  unidades determina na circunferência construída (de um modo geral, o ângulo central  $\theta$  é igual à divisão do comprimento do arco pelo comprimento do raio da circunferência, isto é,  $\theta = \frac{L}{R}$ ).

Quando  $R < 1$ , temos que  $L \cdot R < L$ . Logo, o arco de comprimento  $L \cdot R$  unidades construído na circunferência a partir do ponto  $Q$  tem extremidade  $A$  mais próxima de  $Q$  do que um arco de comprimento  $L$ . Neste caso escolhemos o comprimento do arco como sendo  $L \cdot R$  unidades de comprimento para obtermos um ponto  $A$  mais próximo da curva interseção.

Analogamente, quando  $R > 1$  temos  $L \cdot R > L$  e, neste caso, o comprimento do arco  $AQ$  que

fornece uma melhor aproximação é o menor deles, ou seja, o de comprimento  $L$  unidades.

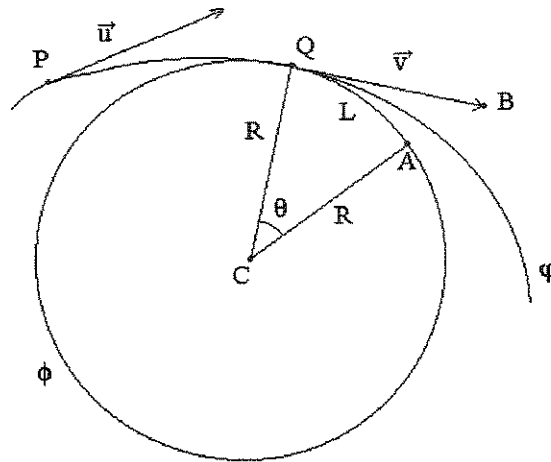


Figura 4.2: Um passo circular

O centro da circunferência desejada é obtido calculando-se a interseção entre os planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  (ver Figura 4.3) onde:

- $\pi_1$  : plano que passa pelo ponto  $P$  e tem  $\vec{u}$  como vetor normal;
- $\pi_2$  : plano que passa pelo ponto  $Q$  e tem  $\vec{v}$  como vetor normal;
- $\pi_3$  : plano que passa por  $Q$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  (isto é, seu vetor normal é  $\vec{u} \times \vec{v}$ ).

De um modo geral, a equação do plano que passa pelo ponto  $p = (x_0, y_0, z_0)$  e tem como vetor normal  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  é dada por

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \vec{w} = 0$$

ou seja

$$w_1x + w_2y + w_3z = x_0w_1 + y_0w_2 + z_0w_3.$$

Sendo  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $P = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $Q = (q_1, q_2, q_3)$  e  $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3) = \vec{u} \times \vec{v}$  então a interseção dos planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  corresponde à resolução do sistema linear, formado pelas equações desses três planos:

$$\begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 \\ v_1x + v_2y + v_3z = q_1v_1 + q_2v_2 + q_3v_3 \\ N_1x + N_2y + N_3z = q_1N_1 + q_2N_2 + q_3N_3 \end{cases}$$



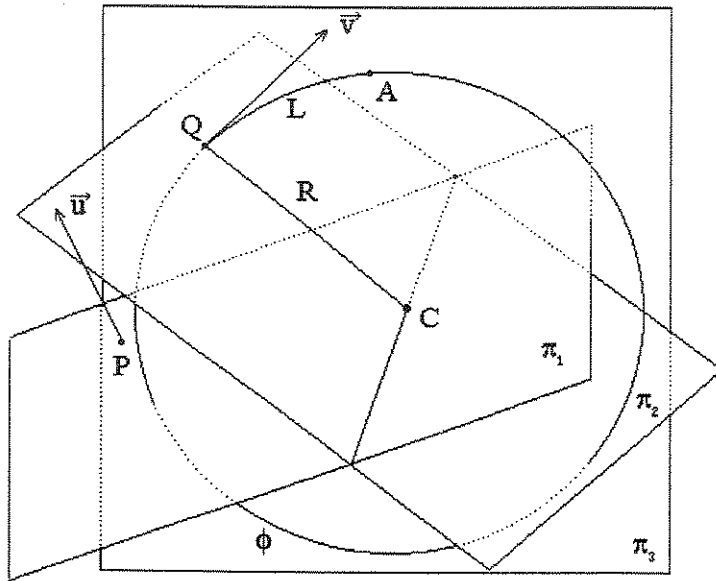


Figura 4.3: Construção do círculo osculador aproximado

O determinante da matriz principal deste sistema é

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{N}$$

cujo módulo é numericamente igual ao volume do paralelepípedo definido por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{N}$ . Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não forem paralelos, então a área da base desse paralelepípedo será diferente de zero e sua altura  $|\vec{N}| = |\vec{u} \times \vec{v}|$  também será diferente de zero e daí o seu volume não será nulo. Logo, o determinante mencionado acima não será nulo e, conseqüentemente, o sistema linear anterior sempre terá uma única solução  $C$  se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não forem paralelos.

Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  forem paralelos,  $PQ$  é aproximadamente um segmento de reta (raio de curvatura =  $\infty$ ) e, neste caso, a melhor escolha é escolher o passo com o vetor tangente no ponto  $Q$ .

Conhecendo o vetor  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (n_1, n_2, n_3)$  normal ao plano  $\pi_3$  da circunferência, calculamos a projeção ortogonal do ponto  $P$  no plano  $\pi_3$ . Vamos denotar essa projeção de  $P$  em  $\pi_3$  por  $P_{\pi_3}$ . Ela pode ser calculada através da interseção do plano  $\pi_3$  com a reta que passa por  $P$  na direção do vetor  $\vec{n}$ . Sob o ponto de vista analítico,  $P_{\pi_3}$  pode ser obtido somando-se a  $P$  o vetor  $(tn_1, tn_2, tn_3)$ , onde

$$t = \frac{n_1(q_1 - p_1) + n_2(q_2 - p_2) + n_3(q_3 - p_3)}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

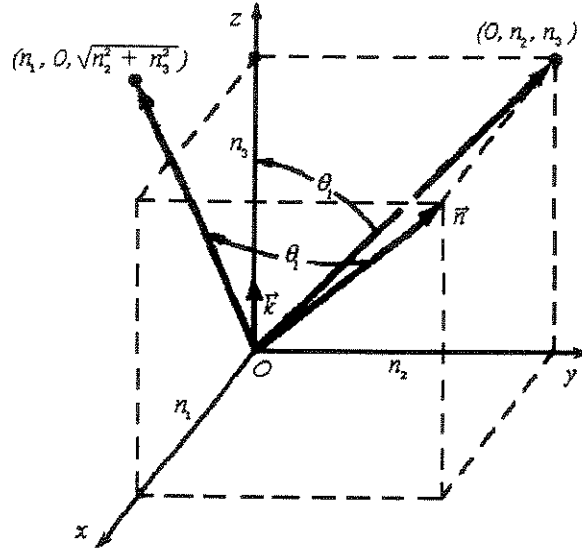


Figura 4.4: Rotação  $[M_x]$  em torno do eixo  $x$

Aplicando a  $P_{\pi_3}$  e a  $Q$  uma translação  $T(x) = x - C$  seguida de uma rotação  $M$  que leve o vetor  $\vec{n}$  a ficar paralelo ao vetor  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , obtemos os pontos  $P'$  e  $Q'$  no plano  $z = 0$ ,  $P' = M(T(P_{\pi_3}))$  e  $Q' = M(T(Q))$  (ver Figura 4.6). O ponto  $Q'$  assim obtido está sobre uma circunferência de raio  $R$  e centro na origem.

#### 4.1.2 Passo circular

Usamos  $P'$  e  $Q'$  para determinarmos outro ponto  $S'$  sobre esta circunferência de tal forma que o arco de circunferência  $Q'S'$  tenha comprimento  $L$  (se o raio do círculo  $R$  for maior do que 1) ou comprimento  $L \cdot R$  (se o raio for menor do que ou igual a 1). É importante observar se o sentido de  $P' = (p'_1, p'_2, 0)$  para  $Q' = (q'_1, q'_2, 0)$  é horário ou anti-horário. Isto pode ser feito observando se o produto misto dos vetores  $\vec{k} \cdot (\overrightarrow{OP'} \times \overrightarrow{OQ'}) = p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1$  é positivo ou negativo.

Sendo  $\alpha$  o ângulo entre os vetores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  e o vetor  $\overrightarrow{OQ'}$ , calculamos o ponto  $S' = (R \cos(\beta), R \sin(\beta), 0)$ , onde

$$\beta = \begin{cases} \alpha + L, & \text{se } R \leq 1 \text{ e } p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 > 0 \\ \alpha - L, & \text{se } R \leq 1 \text{ e } p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 < 0 \\ \alpha + L/R, & \text{se } R > 1 \text{ e } p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 > 0 \\ \alpha - L/R, & \text{se } R > 1 \text{ e } p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 < 0 \end{cases}$$

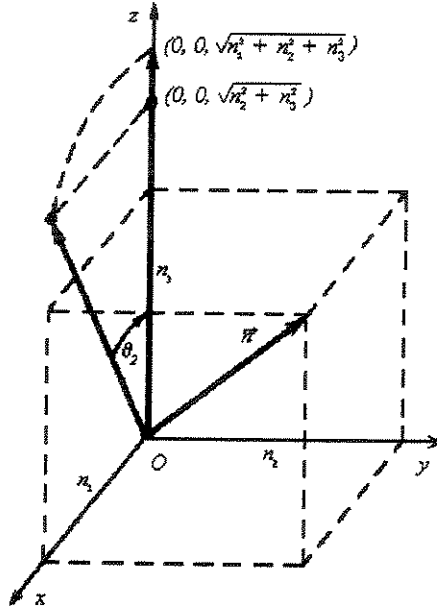


Figura 4.5: Rotação  $[M_y]$  em torno do eixo  $y$

Aplicando-se as transformações inversas  $M^{-1}$  e  $T^{-1}$  a  $S'$  obtemos o ponto  $S$  na circunferência desejada (o círculo osculador aproximado). O cálculo de  $T^{-1}$  é imediato:  $T^{-1}(x) = x + C$ .

Em coordenadas cartesianas, a rotação  $M$  é dada por  $M(x, y, z) = [x \ y \ z][M]$  onde

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} & 0 & \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \frac{-n_1 n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \\ \frac{-n_1 n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} & \frac{-n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz representa a composição (produto) de duas rotações : uma  $M_x$  em torno do eixo  $x$  (Figura 4.4) e outra  $M_y$  em torno do eixo  $y$  (Figura 4.5).

$M_x$  é uma rotação de  $\theta_1$  radianos em torno do eixo  $x$ , onde  $\theta_1$  é tal que:  $\text{sen}(\theta_1) = \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}$  e  $\text{cos}(\theta_1) = \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}$ . Logo,

$$[M_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) \\ 0 & \text{sen}(\theta_1) & \text{cos}(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & -\frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \\ 0 & \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \end{bmatrix}$$

$M_y$  é uma rotação de  $-\theta_2$  radianos em torno do eixo  $y$ , onde  $\theta_2$  é tal que  $\text{sen}(\theta_2) = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$  e

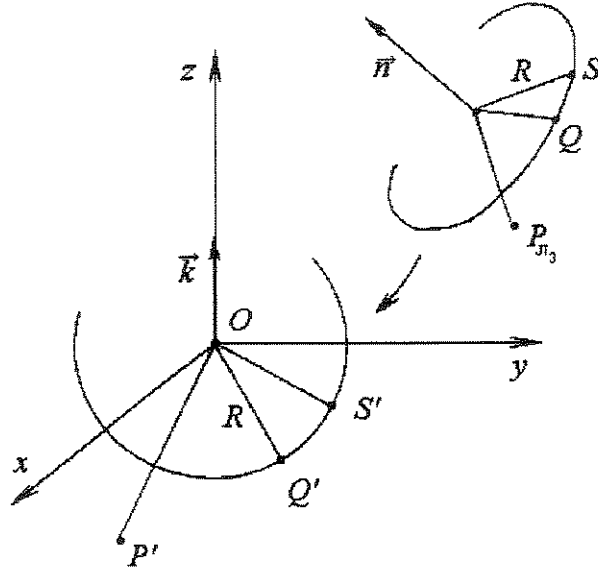


Figura 4.6: Calculando ponto sobre o círculo osculador aproximado

$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$ . Logo,

$$[M_y] = \begin{bmatrix} \cos(-\theta_2) & 0 & -\text{sen}(-\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-\theta_2) & 0 & \cos(-\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} & 0 & \frac{-n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} & 0 & \frac{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \end{bmatrix}$$

No caso particular em que  $n_2 = n_3 = 0$ ,  $\vec{n} = (n_1, 0, 0)$  será paralelo ao eixo  $x$  e desse modo basta uma rotação de  $\pm 90^\circ$  para que  $\vec{n}$  fique paralelo ao eixo  $z$ , ou seja,

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n_1}{|n_1|} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-n_1}{|n_1|} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $[M] = [M_x][M_y]$  é o produto de rotações, sua matriz será ortogonal, ou seja, sua inversa será a matriz transposta  $[M]^t$ .

**Exemplo 4.1.1** Suponhamos escolhido um tamanho do passo de caminhada  $L = 0,01$  e dois pontos na curva-interseção  $P = (-3; 4; 1)$  e  $Q = (-2, 5; 3; 1)$  com seus respectivos vetores tangentes  $\vec{u} = (0, 8; 1, 5; -0, 5)$  e  $\vec{v} = (1; 2; -1)$ . Nestas condições vamos calcular as coordenadas do próximo ponto  $S$  sobre a circunferência, conforme descrito no algoritmo.

Temos que  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-0,5; 0,3; 0,1)$  e, de acordo com o algoritmo descrito, o centro do círculo osculador aproximado (cujo vetor normal é  $\vec{n}$ ) é calculado resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 0,8x + 1,5y - 0,5z = 3,1 \\ x + 2y - z = 2,5 \\ -0,5x + 0,3y + 0,1z = 2,25 \end{cases}$$

cuja solução é  $C = (-0,928571; 4,257143; 5,085714)$ . O raio  $R$  pode ser calculado como sendo a distância entre  $C$  e  $Q$ , ou seja,  $R = 4,554433$ .

Projetando  $P$  ortogonalmente no plano  $\pi_3$  obtemos

$$P_{\pi_3} = (-2,214286; 3,528571; 0,842857)$$

e a matriz de rotação neste caso é:

$$M = \begin{bmatrix} 0,534522 & 0,000000 & -0,845154 \\ 0,801784 & 0,316228 & 0,507093 \\ 0,267261 & -0,948683 & 0,169031 \end{bmatrix}$$

que aplicada a  $P_{\pi_3} - C$  e a  $Q - C$  nos fornece

$$M(P_{\pi_3} - C) = P' = (-2,405351; 3,794733; 0,000000)$$

e

$$M(Q - C) = Q' = (-2,939874; 3,478505; 0,000000)$$

que são pontos no plano  $z = 0$  e  $Q'$  na circunferência de centro na origem e raio  $R$ .

Utilizando os valores de  $L$ ,  $R$  e as coordenadas de  $Q'$ , temos as seguintes medidas de ângulos:  $\beta = 2,272470$  e  $\theta = L/R = 0,002196$ . Como  $P'_x Q'_y - P'_y Q'_x$  é positivo, o ponto  $S'$  é da forma  $S' = (R \cos(\beta + \theta), R \sin(\beta + \theta), 0)$  ou seja,  $S' = (-2,947504; 3,472042; 0,000000)$ .

Finalmente, o ponto  $S$  procurado pode ser obtido multiplicando  $S'$  por  $M^t$  e somando o resultado com  $C$ , ou seja,

$$S = (-2,504079; 2,991838; 1,004092).$$

## 4.2 Análise da convergência

Nesta seção demonstramos que o nosso círculo construído na seção 4.1.2 convergir para o círculo osculador exato quando o tamanho do passo  $L$  tender para 0.

Dadas as equações paramétricas de uma curva  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  o centro  $C = (c_1, c_2, c_3)$  do círculo osculador aproximado, definido pelos pontos  $P = f(a - h)$ ,  $Q = f(a)$ , e seus respectivos vetores tangentes  $\vec{u} = f'(a - h)$  e  $\vec{v} = f'(a)$ , é a solução do sistema linear  $3 \times 3$

$$\begin{cases} C \cdot \vec{u} = P \cdot \vec{u} \\ C \cdot \vec{v} = Q \cdot \vec{v} \\ C \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = Q \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \end{cases} \quad (4.1)$$

Denotando, respectivamente, por  $*$ ,  $(p_1, p_2, p_3)$ ,  $(q_1, q_2, q_3)$ ,  $(u_1, u_2, u_3)$  e  $(v_1, v_2, v_3)$  a operação de multiplicação de dois números reais, as coordenadas de  $P$ , as coordenadas de  $Q$ , as coordenadas de  $\vec{u}$  e as coordenadas de  $\vec{v}$ , obtivemos com o auxílio do *MATHEMATICA* [36] a seguinte solução para o sistema linear 4.1

$$\begin{aligned} c_1 = & (p_1 * u_1 * (u_1 * (v_2^2 + v_3^2) - v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3)) \\ & + p_2 * u_2 * (u_1 * (v_2^2 + v_3^2) - v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3)) \\ & + p_3 * u_3 * (u_1 * (v_2^2 + v_3^2) - v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3)) \\ & - q_1 * (u_1 * v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3) - u_2^2 * (v_1^2 + v_3^2) + \\ & u_3 * (2 * u_2 * v_2 * v_3 - u_3 * (v_1^2 + v_2^2))) \\ & + (v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3) - u_1 * (v_2^2 + v_3^2)) * \\ & (q_2 * u_2 + q_3 * u_3) / (u_1^2 * (v_2^2 + v_3^2) \\ & - 2 * u_1 * v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3) + u_2^2 * (v_1^2 + v_3^2) \\ & - 2 * u_2 * u_3 * v_2 * v_3 + u_3^2 * (v_1^2 + v_2^2)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} c_2 = & -(p_1 * u_1 * (u_1 * v_1 * v_2 - u_2 * (v_1^2 + v_3^2) + u_3 * v_2 * v_3) \\ & + p_2 * u_2 * (u_1 * v_1 * v_2 - u_2 * (v_1^2 + v_3^2) + u_3 * v_2 * v_3) \\ & + p_3 * u_3 * (u_1 * v_1 * v_2 - u_2 * (v_1^2 + v_3^2) + u_3 * v_2 * v_3) \\ & - q_1 * u_1 * (u_1 * v_1 * v_2 - u_2 * (v_1^2 + v_3^2) + u_3 * v_2 * v_3) \\ & - q_2 * (u_1^2 * (v_2^2 + v_3^2) - u_1 * v_1 * (u_2 * v_2 + 2 * u_3 * v_3) - \\ & u_2 * u_3 * v_2 * v_3 + u_3^2 * (v_1^2 + v_2^2)) \\ & - q_3 * u_3 * (u_1 * v_1 * v_2 - u_2 * (v_1^2 + v_3^2) + u_3 * v_2 * v_3) \\ & / (u_1^2 * (v_2^2 + v_3^2) - 2 * u_1 * v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u_2^2 * (v_1^2 + v_3^2) - 2 * u_2 * u_3 * v_2 * v_3 \\
& +u_3^2 * (v_1^2 + v_2^2)) \tag{4.3} \\
c_3 = & -(p_1 * u_1 * (u_1 * v_1 * v_3 + u_2 * v_2 * v_3 - u_3 * (v_1^2 + v_2^2)) \\
& +p_2 * u_2 * (u_1 * v_1 * v_3 + u_2 * v_2 * v_3 - u_3 * (v_1^2 + v_2^2)) \\
& +p_3 * u_3 * (u_1 * v_1 * v_3 + u_2 * v_2 * v_3 - u_3 * (v_1^2 + v_2^2)) \\
& -q_1 * u_1 * (u_1 * v_1 * v_3 + u_2 * v_2 * v_3 - u_3 * (v_1^2 + v_2^2)) \\
& -q_2 * u_2 * (u_1 * v_1 * v_3 + u_2 * v_2 * v_3 - u_3 * (v_1^2 + v_2^2)) \\
& -q_3 * (u_1^2 * (v_2^2 + v_3^2) - u_1 * v_1 * (2 * u_2 * v_2 + u_3 * v_3) + \\
& u_2 * (u_2 * (v_1^2 + v_3^2) - u_3 * v_2 * v_3))) \\
& /((u_1^2 * (v_2^2 + v_3^2) - 2 * u_1 * v_1 * (u_2 * v_2 + u_3 * v_3) \\
& +u_2^2 * (v_1^2 + v_3^2) - 2 * u_2 * u_3 * v_2 * v_3 \\
& +u_3^2 * (v_1^2 + v_2^2))). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Como todas as funções envolvidas são contínuas, então há uma relação direta entre o tamanho do passo  $L$  e o incremento  $h$  utilizado no ponto  $Q = f(a)$ . Conseqüentemente, quando  $L$  tende a 0,  $h$  também tende a 0 e vice-versa.

Para provar algebricamente que  $C$  (círculo osculador aproximado) converge para  $C_E$  (círculo osculador exato) quando  $h \rightarrow 0$ , nós devemos:

1. Mostrar que o plano do círculo osculador aproximado coincide com o plano osculador exato quando  $h \rightarrow 0$ . Isto está demonstrado na Proposição 4.2.1 a seguir.
2. Calcular o limite quando  $h \rightarrow 0$  do centro de  $C$  (Equações 4.2, 4.3 e 4.4) e verificar que esse limite é o centro de  $C_E$ . Inicialmente, mostramos este resultado no caso particular em que a curva  $f(t)$  for uma curva plana (ver Proposição 4.2.2 e Corolário 4.2.1, a seguir). Depois, mostramos que o caso geral pode ser transladado e rotacionado de modo a obtermos equações semelhantes ao caso plano, de onde podemos calcular os limites das expressões obtidas.

**Proposição 4.2.1** *O plano do círculo osculador aproximado coincide com o plano do círculo osculador exato quando  $h \rightarrow 0$ .*

**Demonstração.** Os planos dos círculos osculadores exato e aproximado têm em comum o ponto  $Q$ .

Logo, basta mostrarmos que quando  $h \rightarrow 0$  os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares ao vetor  $\vec{N}(a) \times \vec{u}$  (o vetor normal ao plano do círculo osculador exato).

Expandindo  $\vec{v} \cdot (N(a) \times \vec{u})$ ,

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot (N(a) \times \vec{u}) &= f'(a) \cdot [f''(a) - ((f'(a) \cdot f''(a))/|f'(a)|^2)f'(a)] \times f'(a-h) \\
 &= f'(a) \cdot [f''(a) \times f'(a-h) \\
 &\quad - ((f'(a) \cdot f''(a))/|f'(a)|^2)f'(a) \times f'(a-h)] \\
 &= f'(a) \cdot [f''(a) \times f'(a-h) - 0] \\
 &= f'(a) \cdot [-f'(a-h) \times f''(a)] \\
 &= -(f'(a) \times f'(a-h)) \cdot f''(a).
 \end{aligned}$$

Aplicando as conhecidas propriedades:

- $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$

podemos verificar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\vec{v} \cdot (\vec{N}(a) \times \vec{u})] = -(f'(a) \times f'(a)) \cdot f''(a) = 0$$

Analogamente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\vec{u} \cdot (\vec{N}(a) \times \vec{u})] = f'(a) \cdot \vec{N}(a) \times f'(a) = -(f'(a) \times f'(a)) \cdot f''(a) = 0.$$

Logo, quando  $h \rightarrow 0$  os planos que contém  $C$  e  $C_E$  coincidem. ■

**Proposição 4.2.2** *Se a curva regular  $f(t)$  estiver contida no plano  $z = 0$ , então o centro do círculo osculador aproximado converge para o centro do círculo osculador exato, quando  $h \rightarrow 0$ .*

**Demonstração.** Neste caso, as equações 4.2, 4.3 e 4.4 ficam reduzidas, respectivamente, a

$$c_1 = \frac{-q_1 * u_2 * v_1 + p_1 * u_1 * v_2 + p_2 * u_2 * v_2 - q_2 * u_2 * v_2}{u_1 * v_2 - u_2 * v_1} \quad (4.5)$$

$$c_2 = \frac{-p_1 * u_1 * v_1 + q_1 * u_1 * v_1 - p_2 * u_2 * v_1 + q_2 * u_1 * v_2}{u_1 * v_2 - u_2 * v_1} \quad (4.6)$$

$$c_3 = 0 \quad (4.7)$$



Substituindo  $p_1 = f_1(a-h)$ ,  $p_2 = f_2(a-h)$ ,  $q_1 = f_1(a)$ ,  $q_2 = f_2(a)$ ,  $u_1 = f'_1(a-h)$ ,  $u_2 = f'_2(a-h)$ ,  $v_1 = f'_1(a)$ ,  $v_2 = f'_2(a)$  nas equações 4.5 e 4.6, obtemos  $c_1 = \frac{E_1}{E_3}$  e  $c_2 = \frac{E_2}{E_3}$  onde

$$E_1 = -f_1(a)f'_2(a-h)f'_1(a) + f_1(a-h)f'_1(a-h)f'_2(a) + f_2(a-h)f'_2(a-h)f'_2(a) - f_2(a)f'_2(a-h)f'_2(a) \quad (4.8)$$

$$E_2 = -f_1(a-h)f'_1(a-h)f'_1(a) + f_1(a)f'_1(a-h)f'_1(a) - f_2(a-h)f'_2(a-h)f'_1(a) + f_2(a)f'_1(a-h)f'_2(a) \quad (4.9)$$

$$E_3 = f'_1(a-h)f'_2(a) - f'_2(a-h)f'_1(a). \quad (4.10)$$

Observando que

$$\begin{aligned} E_3 &= f'_1(a-h)f'_2(a) + f'_1(a-h)f'_2(a-h) - f'_1(a-h)f'_2(a-h) - f'_2(a-h)f'_1(a) = \\ &= f'_1(a-h)(f'_2(a) - f'_2(a-h)) - f'_2(a-h)(f'_1(a) - f'_1(a-h)) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_3}{h} &= f'_1(a-h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_2(a) - f'_2(a-h)}{h} - f'_2(a-h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_1(a) - f'_1(a-h)}{h} = \\ &= f'_1(a-h)f''_2(a-h) - f''_1(a-h)f'_2(a-h). \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo os termos  $f_1(a-h)f'_2(a-h)f'_1(a)$  e  $f_1(a-h)f'_1(a)f'_2(a)$  na 4.8 obtemos:

$$\begin{aligned} E_1 &= -f_1(a)f'_2(a-h)f'_1(a) + f_1(a-h)f'_1(a-h)f'_2(a) + f_2(a-h)f'_2(a-h)f'_2(a) - f_2(a)f'_2(a-h)f'_2(a) \\ &+ f_1(a-h)f'_2(a-h)f'_1(a) - f_1(a-h)f'_2(a-h)f'_1(a) + f_1(a-h)f'_1(a)f'_2(a) - f_1(a-h)f'_1(a)f'_2(a) \\ &= -f'_2(a-h)f'_1(a)(f_1(a) - f_1(a-h)) - f'_2(a-h)f'_2(a)(f_2(a) - f_2(a-h)) - f_1(a-h)f'_2(a)(f'_1(a) - \\ &f'_1(a-h)) + f_1(a-h)f'_1(a)(f'_2(a) - f'_2(a-h)) \end{aligned}$$

e passando ao limite da expressão  $\frac{E_1}{h}$  com  $h$  tendendo a 0

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_1}{h} &= -f'_2(a-h) \lim_{h \rightarrow 0} f'_1(a) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(a) - f_1(a-h)}{h} \right) - f'_2(a-h) \lim_{h \rightarrow 0} f'_2(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(a) - f_2(a-h)}{h} \\ &- f_1(a-h) \left( \lim_{h \rightarrow 0} f'_1(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_2(a) - f'_2(a-h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f'_2(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_1(a) - f'_1(a-h)}{h} \right) = \\ &= -f'_2(a-h) \left( (f'_1(a-h))^2 + (f'_2(a-h))^2 \right) + f_1(a-h) \left( f'_1(a-h)f''_2(a-h) - f'_2(a-h)f''_1(a-h) \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_1}{E_3} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_1}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_3}{h}} = f_1(a-h) - \frac{f'_2(a-h) \left( (f'_1(a-h))^2 + (f'_2(a-h))^2 \right)}{f'_1(a-h)f''_2(a-h) - f'_2(a-h)f''_1(a-h)}$$

Fazemos algo semelhante com a equação 4.9, somando e subtraindo os termos  $f_2(a-h)f'_1(a-h)f'_2(a)$  e  $f_2(a-h)f'_1(a-h)f'_2(a-h)$  para obtermos

$$\begin{aligned} E_2 &= f'_1(a-h)f'_1(a)(f_1(a) - f_1(a-h)) - f_2(a-h)f'_2(a-h)(f'_1(a) - f'_1(a-h)) + f'_1(a-h)f'_2(a)(f_2(a) - \\ &f_2(a-h)) + f_2(a-h)f'_1(a-h)(f'_2(a) - f'_2(a-h)) \end{aligned}$$

e passando ao limite de  $\frac{E_2}{h}$  quando  $h$  tende a 0, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_2}{h} = f_1'(a)((f_1'(a))^2 + (f_2'(a))^2) + f_2(a)(f_1'(a)f_2''(a) - f_2'(a)f_1''(a))$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_2}{E_3} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_2}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_3}{h}} = f_2(a) + \frac{f_1'(a)((f_1'(a))^2 + (f_2'(a))^2)}{f_1'(a)f_2''(a) - f_1''(a)f_2'(a)}$$

Utilizamos nos cálculos desses limites as definições de derivadas das funções  $f_1(x)$ ,  $f_1'(x)$ ,  $f_2(x)$  e  $f_2'(x)$  no ponto  $x = a$ .

Mostramos assim que quando  $h$  tende a 0, o centro  $(c_1, c_2, 0)$  do círculo osculador aproximado coincide com o ponto

$$\left( f_1(a) - \frac{f_2'(a)((f_1'(a))^2 + (f_2'(a))^2)}{f_1'(a)f_2''(a) - f_1''(a)f_2'(a)}, f_2(a) + \frac{f_1'(a)((f_1'(a))^2 + (f_2'(a))^2)}{f_1'(a)f_2''(a) - f_1''(a)f_2'(a)}, 0 \right)$$

que é o centro do círculo osculador exato no ponto  $t = a$  da curva  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), 0)$ . ■

**Corolário 4.2.1** *Se  $f(t)$  for uma curva plana regular, então o círculo osculador aproximado coincide com o círculo osculador exato quando o passo  $h \rightarrow 0$ .*

**Demonstração.** Basta observar que se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  for um ponto qualquer da curva  $f(t)$  e  $\vec{N}_0$  for um vetor normal ao plano da curva, então, através da aplicação de uma translação que leve o ponto  $P_0$  a coincidir com a origem  $(0, 0, 0)$  seguida de uma rotação que leve o vetor  $\vec{N}_0$  a ficar paralelo ao vetor  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  obtemos a situação descrita na proposição 4.2.2. ■

**Proposição 4.2.3** *Se a curva interseção  $f(t)$  for uma curva no espaço  $\mathbb{R}^3$  então  $C$  converge para  $C_E$  quando  $h \rightarrow 0$ .*

**Demonstração.** Pela nossa construção, as transformações de rotação e translação definidas por

$$[RT] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_{14} \\ 0 & 1 & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & 1 & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{11}m_{14} + m_{12}m_{24} + m_{13}m_{34} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{21}m_{24} + m_{22}m_{24} + m_{23}m_{34} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{31}m_{14} + m_{32}m_{24} + m_{33}m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicadas à curva  $f(t)$  fornece um resultado da forma

$$\begin{aligned} H &= [RT]P = (h_1, h_2, h_3) \\ &= (m_{11}p_1 + m_{12}p_2 + m_{13}p_3 + (m_{11}m_{14} + m_{12}m_{24} + m_{13}m_{34}), \\ &= (m_{21}p_1 + m_{22}p_2 + m_{23}p_3 + (m_{21}m_{24} + m_{22}m_{24} + m_{23}m_{34}), 0), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} K &= [RT]Q = (k_1, k_2, k_3) \\ &= (m_{11}q_1 + m_{12}q_2 + m_{13}q_3 + (m_{11}m_{14} + m_{12}m_{24} + m_{13}m_{34}), \\ &= (m_{21}q_1 + m_{22}q_2 + m_{23}q_3 + (m_{21}m_{24} + m_{22}m_{24} + m_{23}m_{34}), 0), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \vec{U} &= [R]\vec{u} = (U_1, U_2, U_3) \\ &= (m_{11}u_1 + m_{12}u_2 + m_{13}u_3, m_{21}u_1 + m_{22}u_2 + m_{23}u_3, 0), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \vec{V} &= [R]\vec{v} = (V_1, V_2, V_3) \\ &= (m_{11}v_1 + m_{12}v_2 + m_{13}v_3, m_{21}v_1 + m_{22}v_2 + m_{23}v_3, 0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando a transformação  $[RT]$  a  $f(t)$  e usando a notação introduzida nas equações (4.2), (4.3) e (4.4) temos que essas equações assumem, respectivamente, o seguinte aspecto

$$c_1 = \frac{-k_1 * U_2 * V_1 + h_1 * U_1 * V_2 + h_2 * U_2 * V_2 - k_2 * U_2 * V_2}{U_1 * V_2 - U_2 * V_1}, \quad (4.15)$$

$$c_2 = \frac{-h_1 * U_1 * V_1 + k_1 * U_1 * V_1 - h_2 * U_2 * V_1 + k_2 * U_1 * V_2}{U_1 * V_2 - U_2 * V_1}, \quad (4.16)$$

$$c_3 = 0. \quad (4.17)$$

Para mostrar que  $C$  é o limite de  $C_E$ , basta mostrar que em  $t = a$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (c_1, c_2, c_3) = \{\lim_{h \rightarrow 0} [RT]\}CE(a).$$

Por construção, a transformação  $[RT]$  é aplicada em  $f(t)$ , de tal forma que nosso círculo em  $t = a$  pertença ao plano  $z = 0$ . Pela Proposição 4.2.1 o plano  $\pi_C$  que contém o nosso círculo tende ao plano  $\pi_{C_E}$  que contém o círculo osculador exato em  $t = a$  no limite. Então, o centro do círculo osculador exato de  $\{\lim_{h \rightarrow 0} [RT]\}f(t)$  em  $t = a$  deve ter coordenada  $z = 0$ .

Trocando  $h_1 = g_1(a - h)$ ,  $h_2 = g_2(a - h)$ ,  $k_1 = g_1(a)$ ,  $k_2 = g_2(a)$ ,  $U_1 = g'_1(a - h)$ ,  $U_2 = g'_2(a - h)$ ,  $V_1 = g'_1(a)$ , e  $V_2 = g'_2(a)$  nas equações (4.15) and (4.16), temos que podemos seguir a mesma idéia usada na demonstração da Proposição 4.2.2 para obter

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} c_1 &= g_1(a) - \frac{g'_2(a)((g'_1(a))^2 + (g'_2(a))^2)}{g'_1(a)g''_2(a) - g''_1(a)g'_2(a)}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} c_2 &= g_2(a) + \frac{g'_1(a)((g'_1(a))^2 + (g'_2(a))^2)}{g'_1(a)g''_2(a) - g''_1(a)g'_2(a)}.\end{aligned}$$

Como  $[RT]$  é uma isometria e

$$g(a) = \{\lim_{h \rightarrow 0} [RT]\}f(t) = (g_1(a), g_2(a), 0),$$

concluimos que

$$\left(g_1(a) - \frac{g'_2(a)((g'_1(a))^2 + (g'_2(a))^2)}{g'_1(a)g''_2(a) - g''_1(a)g'_2(a)}, g_2(a) + \frac{g'_1(a)((g'_1(a))^2 + (g'_2(a))^2)}{g'_1(a)g''_2(a) - g''_1(a)g'_2(a)}, 0\right)$$

corresponde ao centro do círculo osculador em  $t = a$  de  $\{\lim_{h \rightarrow 0} [RT]\}f(t)$ , que também pode ser escrito como  $\{\lim_{h \rightarrow 0} [RT]\}C_E(a)$ .

■

A seguir, apresentamos dois exemplos em forma de tabelas que ilustram a convergência do círculo osculador aproximado para o círculo osculador exato. Note que à medida que  $L$  diminui, o centro e o raio do círculo osculador aproximado se aproximam cada vez mais dos valores exatos (mostrados no início de cada tabela).

**Exemplo 4.3.1**

$f(t) = (2\text{sen}(2t), 2\text{sen}(t) \cos(2t), 2 \cos(t) \cos(2t))$ Centro do círculo osculador exato = $(-0, 208027, -0, 381297, -0, 097434)$ $a = 3, 000000$ Raio de curvatura exato = $1, 949832$			
$h$	Centro [Aproximado]	Raio	$\vec{v} \cdot (N(a) \times \vec{u})$
1,000000	(0,001112, -0,035206, 0,047659)	2,050621	133,255677
0,100000	(-0,132149, -0,257428, -0,042647)	1,978693	3,499547
0,010000	(-0,200408, -0,369531, -0,091083)	1,953199	0,034802
0,001000	(-0,207266, -0,380127, -0,096791)	1,950173	0,000348
0,000100	(-0,207951, -0,381180, -0,097370)	1,949866	0,000003
0,000010	(-0,208019, -0,381285, -0,097428)	1,949835	0,000000
0,000001	(-0,208026, -0,381296, -0,097434)	1,949832	0,000000

**Exemplo 4.3.2**

$f(t) = (t(t^2 - 1), \frac{t^3+t+1}{3+t^2}, \frac{t^3-4t^2+1}{5+2t^2+t^3})$ Centro do círculo osculador exato = $(-16, 065921, 99, 770405, 20, 272470)$ $a = -2, 000000$ Raio de curvatura exato = $103, 717985$			
$h$	Centro [Aproximado]	Raio	$\vec{v} \cdot (N(a) \times \vec{u})$
1,000000	(-6,612990, 5,793079, 8,572327)	11,755694	-9,709110
0,100000	(-14,522016, 84,937399, 22,870690)	89,816620	-0,093299
0,010000	(-15,907892, 98,255059, 20,563797)	102,287091	-0,000892
0,001000	(-16,050082, 99,618548, 20,301884)	103,574480	-0,000009
0,000100	(-16,064336, 99,755216, 20,275413)	103,703630	-0,000000
0,000010	(-16,065762, 99,768887, 20,272764)	103,716550	-0,000000
0,000001	(-16,065904, 99,770246, 20,272499)	103,717834	-0,000000

## Capítulo 5

# Avaliação da Técnica

Neste capítulo comparamos o método do passo circular descrito no Capítulo 4 com os métodos do passo tangencial constante e tangencial adaptativo. Fazemos também uma breve comparação com o método do passo parabólico descrito em [34] por Stoyanov que faz contato de ordem 2 com a curva interseção.

### 5.1 Comparação com o Passo Tangencial

#### 5.1.1 Pontos obtidos a partir de pontos sobre uma curva

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de pontos obtidos a partir de pontos de uma curva  $f(t)$  no espaço tridimensional usando-se dois métodos distintos: o passo circular e o passo tangencial. Os exemplos mostrados ilustram bem o que quase sempre ocorre: um ponto  $A$  calculado sobre o círculo osculador aproximado, construído de acordo com o que foi descrito no Capítulo 4 (passo circular), está mais próximo da curva  $f(t)$  do que um ponto  $B$  obtido utilizando-se somente o vetor tangente à curva (passo linear).

**Exemplo 5.1.1** *A interseção entre*

- *a esfera de centro  $(0, 0, 0)$  e raio 2 e*
- *o cilindro  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  (parametrizado por  $F(u, v) = (1 + \cos(u), \sin(u), v)$  )*

*é a curva*

$$f(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2 \sin(t/2)),$$

$t$	$d(A)$	$d(B)$	$\frac{d(A)}{d(B)}$	Figura	Raio de curvatura
-1,5	0,0096	0,0512	0,1875	Fig. 5.1	1,4803
0,5	0,0080	0,0416	0,1923	Fig. 5.2	1,9311
2,0	0,0120	0,0672	0,1785	Fig. 5.3	1,2115
5,5	0,0086	0,0422	0,2037	Fig. 5.4	1,8363

Tabela 5.1: Exemplo 5.1.1

onde  $t \in [-2\pi, 2\pi]$ .

Considerando o comprimento do passo como sendo  $L = 0,4$  e considerando, para todo  $t$ ,  $P = f(t - L)$  e  $Q = f(t)$ , calculamos os próximos pontos  $A$  e  $B$  atingidos, respectivamente, com os passos circular e tangencial a partir de  $Q$  e suas distâncias  $d(A)$  e  $d(B)$  da curva-interseção.

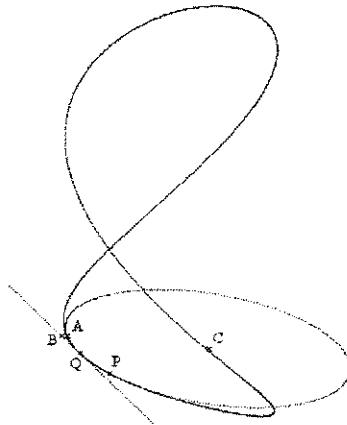


Figura 5.1:  $f(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))$ ,  $t = -1,5$

A Tabela 5.1 mostra alguns resultados para diversos pontos, em diferentes posições da curva (Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4).

Em todas as situações mostradas neste exemplo, o passo circular forneceu pontos com uma melhor aproximação da curva-interseção.

**Exemplo 5.1.2** Este exemplo procura constatar, empiricamente, a superioridade do método do passo circular sobre o passo tangencial. Ele mostra o ajuste do círculo osculador aproximado ao formato da curva ao longo de diferentes pontos da mesma. É mostrado também o desvio do tamanho do raio

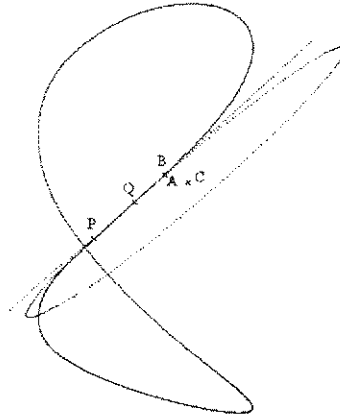


Figura 5.2:  $f(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))$ ,  $t = 0,5$

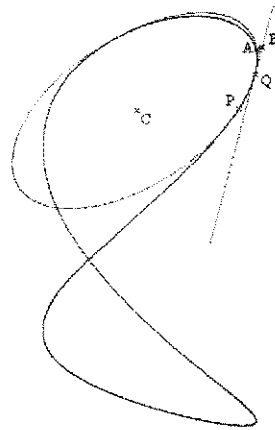


Figura 5.3:  $f(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))$ ,  $t = 2$

do círculo osculador aproximado com relação ao raio de curvatura exato. Seleccionamos vários pontos  $Q = f(t_2)$  das curvas

- $C_1: f(t) = (\frac{t^3-t+1}{t^2+1}, t^2 + 4t + 3, \frac{2t^3}{t^2+1} - 7t - 2)$
- $C_2: f(t) = (2 \cos(t), 2\sin(t), t)$
- $C_3: f(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{-1+t^2}{1+t^2})$
- $C_4: f(t) = (t, t^2, 0)$
- $C_5: f(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t}, 2e^t)$



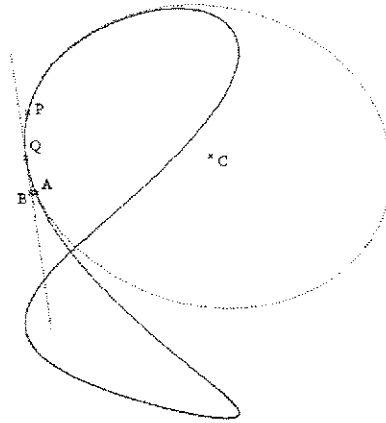


Figura 5.4:  $f(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))$ ,  $t = 5,5$

e computamos não só as distâncias do próximo ponto à curva-interseção ( $d(A)$  e  $d(B)$ ) como também o raio aproximado ( $R$ ) e o raio de curvatura exato ( $r$ ) em cada ponto. Os resultados são mostrados na Tabela 5.2.

Observamos que em todos esses casos  $d(A) < d(B)$  e que a razão  $\frac{R}{r}$  é próxima de 1,0, ou seja, o raio de curvatura aproximado é sempre próximo do raio de curvatura exato.

De um modo geral, toda curva  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  é parte da interseção entre as superfícies  $F(u, v) = (f_1(u), f_2(u), v)$  e  $G(u, v) = (f_1(u), v, f_3(u))$  (porque  $F(t, f_3(t)) = G(t, f_2(t)) = f(t)$ ). Por exemplo, a curva  $C_5$  anterior é uma parte da interseção das superfícies

$$F(u, v) = (e^u + e^{-u}, e^u - e^{-u}, v)$$

e

$$G(u, v) = (e^u + e^{-u}, v, 2e^u)$$

### 5.1.2 Passo Circular x Passo Tangencial Constante

Diversos experimentos numéricos foram feitos utilizando-se a caminhada com o método do passo circular e o método de caminhada com passo tangencial. A seguir, listamos alguns resultados obtidos onde podemos observar uma boa distribuição dos pontos obtidos com o passo circular de tamanho constante.

Para cada exemplo mostrado a seguir, computamos pontos da curva-interseção com duas técnicas de caminhada – passos circular e tangencial – com o mesmo comprimento de passo  $L$ . Na elaboração

Curva	$t_1$	$t_2$	$L$	$d_1$	$d_2$	$\frac{d_1}{d_2}$	$R$	$r$	$\frac{R}{r}$
$C_1$	0,0	0,1	0,1	0,00168	0,00169	0,995	27,752	27,749	1,0001
$C_1$	0,5	0,6	0,1	0,00027	0,00043	0,622	14,524	14,606	0,9943
$C_2$	2,0	2,5	0,5	0,00738	0,04950	0,149	2,505	2,500	1,0020
$C_3$	-1,0	-0,8	0,2	0,00059	0,01054	0,056	1,975	1,928	1,0243
$C_3$	2,0	2,2	0,2	0,00127	0,01511	0,084	1,436	1,387	1,0353
$C_4$	0,0	0,2	0,2	0,00218	0,02752	0,079	0,538	0,624	0,8621
$C_4$	2,2	2,4	0,2	0,00231	0,00233	0,990	52,070	58,934	0,8835
$C_5$	0,0	0,1	0,1	0,00019	0,00126	0,152	3,543	3,874	0,9145
$C_5$	0,3	0,4	0,1	0,00072	0,00094	0,762	6,823	7,765	0,8786
$C_5$	1,0	1,1	0,1	0,00352	0,00352	0,999	49,816	57,868	0,8608

Tabela 5.2: Exemplo 5.1.2

de todos esses exemplos foi utilizado um microcomputador com microprocessador Intel 80486 DX2 com *clock* de 66 MHz.

Em cada tabela mostrada nos exemplos utilizamos a seguinte legenda:

- $L$ : comprimento do passo da caminhada
- Método: Circular (se for usado a caminhada com passo circular) ou Tangente (se for usado a caminhada com passo tangencial com vetor de comprimento constante igual a  $L$ ). Em ambos os casos é executado o algoritmo de caminhada até parar (por exemplo, até atingir um ponto na fronteira do domínio).
- N pontos 1: Número total de pontos obtidos, incluindo pontos repetidos
- Tempo: Tempo (em segundos) com o qual o total de pontos foi obtido.
- N pts/s: Número de pontos obtidos por segundo ( $= \frac{\text{N pontos 1}}{\text{Tempo}}$ )
- N pontos 2: Total de pontos distintos obtidos. Neste item, foram considerados idênticos os pontos que estiverem a uma distância inferior a 0,1 unidades um do outro
- 1 it: Percentual de pontos distintos obtidos com apenas 1 iteração

- 2 it: Percentual de pontos distintos obtidos com 2 iterações
- 3 it: Percentual de pontos distintos obtidos com 3 iterações

O número de iterações a que as tabelas se referem é o número de iterações necessárias para a seqüência de pontos contruída a partir do ponto inicial convergir para um ponto da curva-interseção (conforme descrito no capítulo 3).

Na construção dos gráficos utilizamos uma quantidade mínima de pontos iniciais. Esses pontos iniciais foram obtidos utilizando-se a técnica da subdivisão (pontos assinalados com um “x” nos domínios) seguida de iterações pelo Método de Newton para obtenção de pontos em cada ramo da curva interseção (assinalados com um quadradinho branco nos domínios). Os pontos finais de cada trecho de caminhada estão assinalados com um quadradinho preto.

O que observamos em todos os exemplos é que quando o tamanho do passo  $L$  for escolhido “pequeno” o método da caminhada com passo circular encontra pontos mais rapidamente do que se fosse usado uma caminhada com passo tangencial com as mesmas condições iniciais.

### Exemplo 5.1.3 *As superfícies*

- *Cilindro:*  $F(u, v) = (v + 4\text{sen}(u), 1.5v, 5 + v + 4\cos(u)), -\pi \leq u \leq \pi, -9 \leq v \leq 9$
- *Parabolóide:*  $G(u, v) = (u, v, 9 - \frac{u^2 + v^2}{5}), -7.5 \leq u \leq 7.5, -7.5 \leq v \leq 7.5$

*interceptam-se segundo a curva mostrada na Figura 5.5. A Tabela 5.3 refere-se a este par de superfícies.*

*Neste exemplo temos curvas com topologias distintas nos domínios das parametrizações: em  $F$  temos uma curva desconexa (formada por dois pedaços) enquanto que em  $G$  temos uma curva conexa fechada.*

### Exemplo 5.1.4 *O par de superfícies*

- *Toro:*  $F(u, v) = ((3 + \cos(u))\text{sen}(v), (3 + \cos(u))\cos(v), \text{sen}(u)), -\pi \leq u \leq \pi, -\pi \leq v \leq \pi$
- *Toro:*  $G(u, v) = (\text{sen}(u), (3 + \cos(u))\text{sen}(v), (3 + \cos(u))\cos(v)), -\pi \leq u \leq \pi, -\pi \leq v \leq \pi$

*interceptam-se segundo a curva mostrada na Figura 5.6. A Tabela 5.4 refere-se a este par de superfícies.*

$L$	Método	N pontos 1	Tempo	N pts/s	N pontos 2	1 it	2 it	3 it
0,02	Circular	5538	32,29 s	171,50	542	100,0%	0,0%	0,0%
	Tangente	5774	36,52 s	158,10	340	5,0%	95,0%	0,0%
0,05	Circular	3275	21,14 s	154,91	556	73,74%	26,26%	0,0%
	Tangente	4064	26,97 s	150,68	356	0,28%	99,72%	0,0%
0,10	Circular	1627	12,52 s	129,95	517	23,4%	76,6%	0,0%
	Tangente	2034	14,94 s	136,14	325	0,31%	99,38%	0,31%
0,20	Circular	804	7,8 s	103,07	377	2,65%	97,35%	0,0%
	Tangente	1022	9 s	113,55	245	0,0%	72,24%	27,76%

Tabela 5.3: Interseção Cilindro/Parabolóide

Note que à medida que o passo aumenta, os pontos obtidos com o método do passo circular passam a ser obtidos ainda mais rapidamente do que os obtidos com o método do passo tangencial. Neste caso, isto ocorre devido a uma particularidade do formato da curva interseção: ela é formada por elipses, com formato mais próximo do círculo osculador aproximado do que qualquer reta tangente.

Este exemplo atesta a correspondência existente entre o número de pontos iniciais e o número de curvas desconexas nos domínios.

#### Exemplo 5.1.5 A interseção do par de superfícies $S_3$

- Toro:  $F(u, v) = ((10 - 5\text{sen}(u))\text{sen}(v), 5 \cos(u), (10 - 5\text{sen}(u)) \cos(v))$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$
- Cilindro:  $G(u, v) = (v, 5 \cos(u), 5\text{sen}(u))$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-20 \leq v \leq 20$

é mostrada na Figura 5.7. A Tabela 5.5 refere-se a este par de superfícies.

Este exemplo contém vários pontos de bifurcação na curva interseção e foi discutido em [1]. No domínios de  $F$  e  $G$  temos curvas com topologias distintas.

#### Exemplo 5.1.6 A interseção do par de superfícies

- Cilindro:  $F(u, v) = (1 + \cos(u), \text{sen}(u), v)$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$

$L$	Método	N pontos 1	Tempo	N pts/s	N pontos 2	1 it	2 it	3 it
0,02	Circular	4968	40,53 s	122,57	525	89,71%	10,29%	0,0%
	Tangente	5364	45,76 s	117,22	331	2,72%	97,28%	0,0%
0,05	Circular	1959	20,05 s	97,70	431	23,67%	76,33%	0,0%
	Tangente	4070	37,30 s	109,11	344	0,29%	99,71%	0,0%
0,10	Circular	951	11,64 s	81,70	349	6,88%	93,12%	0,0%
	Tangente	3642	35,16 s	103,58	225	0,89%	88,44%	10,67%
0,20	Circular	447	7,19 s	62,16	212	4,25%	95,75%	0,0%
	Tangente	3434	33,78 s	101,65	150	0,0%	42,0%	58,0%

Tabela 5.4: Interseção Toro/Toro

- *Toro*:  $G(u, v) = (\cos(u)(1 + \cos(v)), \sin(u)(1 + \cos(v)), \sin(v))$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$

é mostrada na Figura 5.8. A Tabela 5.6 refere-se a este exemplo.

Neste exemplo temos curvas com topologias distintas nos domínios. No domínio de  $F$  temos um ponto de bifurcação na curva e a curva é conexa. No domínio de  $G$  não temos pontos de bifurcação mas a curva é desconexa.

**Exemplo 5.1.7** A interseção do par de superfícies com as seguintes parametrizações racionais (quociente de polinômios):

- $F(u, v) = (u, v, \frac{10(u^2 - v^2)}{2 + u^4 + v^4})$ ,  $-4 \leq u \leq 4$ ,  $-4 \leq v \leq 4$
- $G(u, v) = (\frac{u}{v^2 + 1}, v, \frac{u - 1}{2})$ ,  $-4 \leq u \leq 5$ ,  $-4 \leq v \leq 4$

é mostrada na Figura 5.9. A Tabela 5.7 refere-se a este exemplo.

É interessante notar que temos nos domínios das parametrizações curvas com variação abrupta na curvatura e na direção do vetor tangente.

**Exemplo 5.1.8** A interseção do par de superfícies de Bézier parametrizadas por

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(v), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

$L$	Método	N pontos 1	Tempo	N pts/s	N pontos 2	1 it	2 it	3 it
0,02	Circular	7188	47,51 s	151,29	1059	100,0%	0,0%	0,0%
	Tangente	7194	51,25 s	140,37	551	36,12%	63,88%	0,0%
0,05	Circular	5558	37,24 s	149,24	1296	100,0%	0,0%	0,0%
	Tangente	5578	41,36 s	134,86	578	6,92%	93,08%	0,0%
0,10	Circular	3942	27,96 s	140,98	1435	85,99%	14,01%	0,0%
	Tangente	4890	36,20 s	135,08	586	2,73%	97,27%	0,0%
0,20	Circular	2016	16,81 s	119,92	846	38,42%	61,58%	0,0%
	Tangente	4546	35,26 s	128,92	304	1,32%	98,68%	0,0%

Tabela 5.5: Interseção Cilindro/Toro

e

$$G(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m C_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(v), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

onde  $m = 3, n = 3, J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, K_{m,j}(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}, B_{0,0} = (0, 0, 0), B_{0,1} = (1/3, 0, 1/2), B_{0,2} = (2/3, 0, 0), B_{0,3} = (1, 0, -1), B_{1,0} = (0, 1/3, 1), B_{1,1} = (1/3, 1/3, 1), B_{1,2} = (2/3, 1/3, 2), B_{1,3} = (1, 1/3, 1), B_{2,0} = (0, 2/3, 0), B_{2,1} = (1/3, 2/3, -1), B_{2,2} = (2/3, 2/3, 1), B_{2,3} = (1, 2/3, 2), B_{3,0} = (0, 1, 1), B_{3,1} = (1/3, 1, -1), B_{3,2} = (2/3, 1, 0), B_{3,3} = (1, 1, 1) C_{0,0} = (0, 0, -1), C_{0,1} = (1/3, 0, 0), C_{0,2} = (2/3, 0, -1), C_{0,3} = (1, 0, 1), C_{1,0} = (0, 1/3, -1), C_{1,1} = (1/3, 1/3, 0), C_{1,2} = (2/3, 1/3, 0), C_{1,3} = (1, 1/3, 1), C_{2,0} = (0, 2/3, -1), C_{2,1} = (1/3, 2/3, -1), C_{2,2} = (2/3, 2/3, 1), C_{2,3} = (1, 2/3, 0), C_{3,0} = (0, 1, 0), C_{3,1} = (1/3, 1, 0), C_{3,2} = (2/3, 1, 1), C_{3,3} = (1, 1, 1)$

é mostrada na Figura 5.10.

A Tabela 5.8 refere-se a este exemplo.

## 5.2 Passo Circular x Passo Tangencial Adaptativo

A técnica mais sofisticada de caminhada usando o passo tangencial consiste em reavaliar, ponto a ponto, o tamanho do passo  $L$ . Nestes casos, o tamanho do passo é escolhido como sendo diretamente proporcional a uma aproximação do raio de curvatura da curva-interseção. Este tipo de técnica é usualmente chamado de *caminhada com passo tangencial de tamanho adaptativo*.

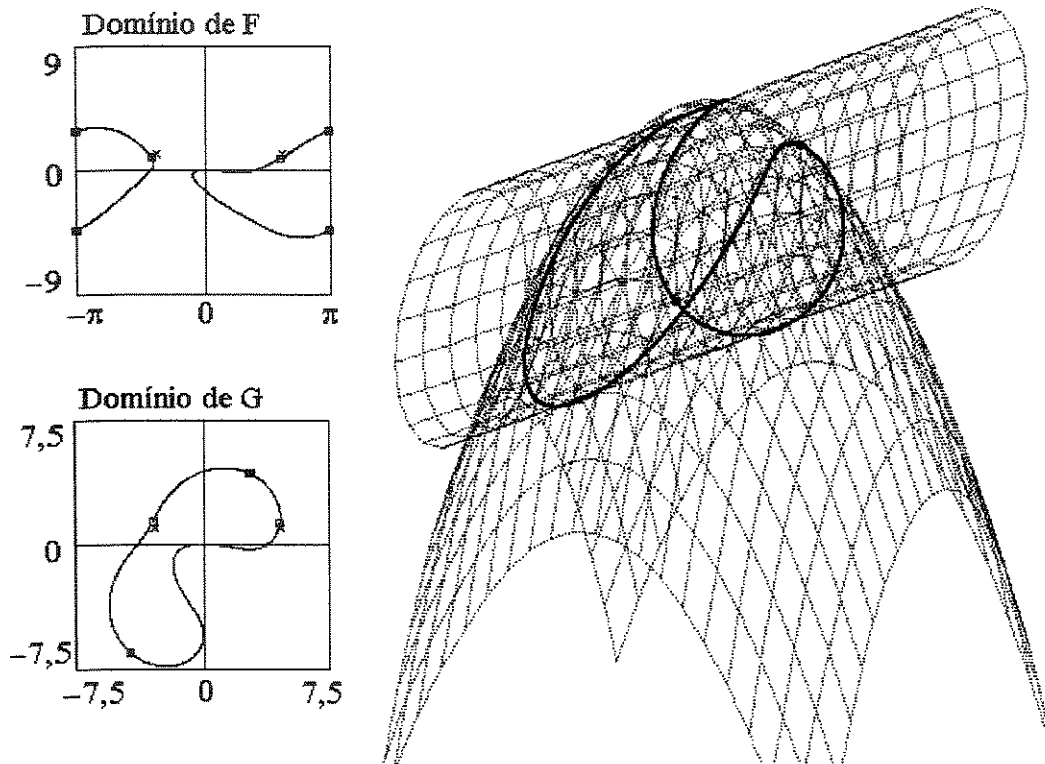


Figura 5.5: Interseção Cilindro/Parabolóide (Exemplo 5.1.3)

De acordo com [7], se a curva passar pelos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  então o comprimento do passo adaptativo poderá ser calculado por  $L(\rho) = \Delta\theta \cdot \rho$ , onde  $\Delta\theta$  é um valor constante escolhido *a priori* (chamado *ângulo de tolerância*) e

$$\rho = \frac{|\vec{a}||\vec{b}||\vec{a} - \vec{b}|}{2|\vec{a} \times \vec{b}|} \quad (5.1)$$

com  $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = R - P$ .

Na Equação 5.1,  $\rho$  é o raio da circunferência que passa pelos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Logo, quando a distância entre esses pontos tender a 0 ( $P \rightarrow Q$ ,  $R \rightarrow Q$ ),  $\rho$  tenderá para o raio de curvatura exato no ponto  $Q$ .

Ao usar pontos na direção do vetor tangente, o passo tangencial adaptativo é um método que fornece aproximadamente contato de ordem 1 com a curva interseção. Dessa forma, é de se esperar que ele forneça pontos menos próximos da interseção do que os obtidos com o método do passo circular com as mesmas condições iniciais, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

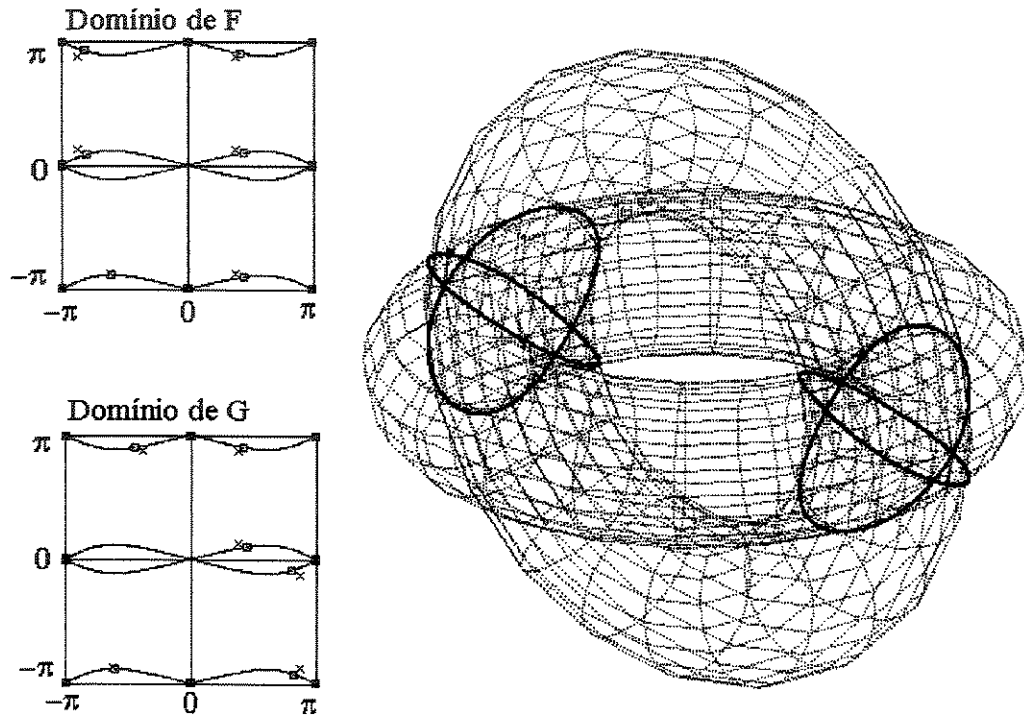


Figura 5.6: Interseção Toro/Toro (Exemplo 5.1.4)

**Exemplo 5.2.1** *Sejam  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  os pares de superfícies Cilindro/Parabolóide, Toro/Toro, Toro/Cilindro, Cilindro/Toro dos exemplos 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5 e 5.1.6, respectivamente.*

*Em cada um desses pares de superfícies, escolhemos um trecho com no máximo 200 pontos e observamos como o método do passo circular e do passo tangencial adaptativo se comportam. A Tabela 5.9 resume o que obtivemos, com relação aos seguintes parâmetros:*

- *L corresponde ao comprimento do passo quando é utilizado o passo circular, ou ao ângulo de tolerância quando é utilizado o passo tangencial adaptativo*
- *Npts 1 é o total de pontos obtidos (incluindo repetidos)*
- *Tempo é o tempo total gasto para encontrar o total de pontos*
- *Npts/s é igual a “Npts 1” dividido por “Tempo”.*
- *Npts 2 é o número de pontos distintos (pontos com distância inferior a 0,1 unidades um do outro são considerados idênticos)*



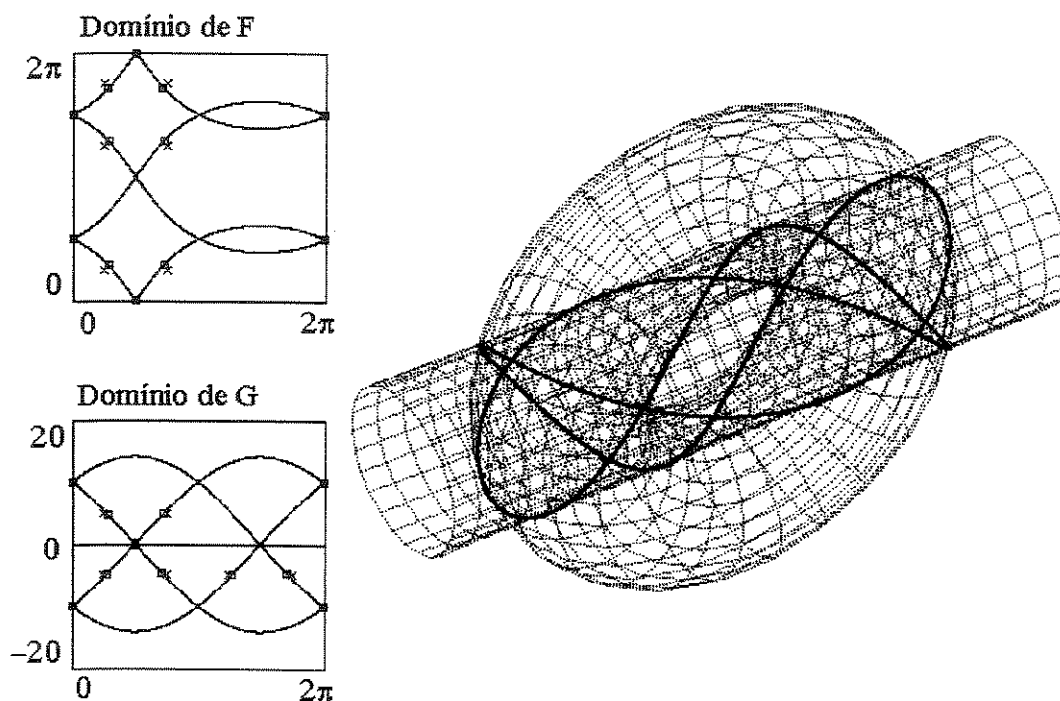


Figura 5.7: Inteseção Toro/Cilindro (Exemplo 5.1.5)

- 1 it, 2 it, 3 it *correspondem aos percentuais de pontos distintos que convergem para pontos da interseção com 1, 2, 3 iterações, respectivamente.*

*Os pontos iniciais utilizados neste exemplo foram obtidos por subdivisão dos domínios. Suas representações (conforme descrito no Capítulo 4) são*

- $(421, 423)$  para o par de superfícies  $S_1$
- $(111, 444)$  para o par de superfícies  $S_2$
- $(12, 32)$  para o par de superfícies  $S_3$
- $(124, 314)$  para o par de superfícies  $S_4$

A caminhada com passo tangencial de comprimento adaptativo usa uma seqüência de passos com comprimentos  $L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_n$ . Por exemplo, no caso em que  $\Delta\theta = 0,20$  da interseção

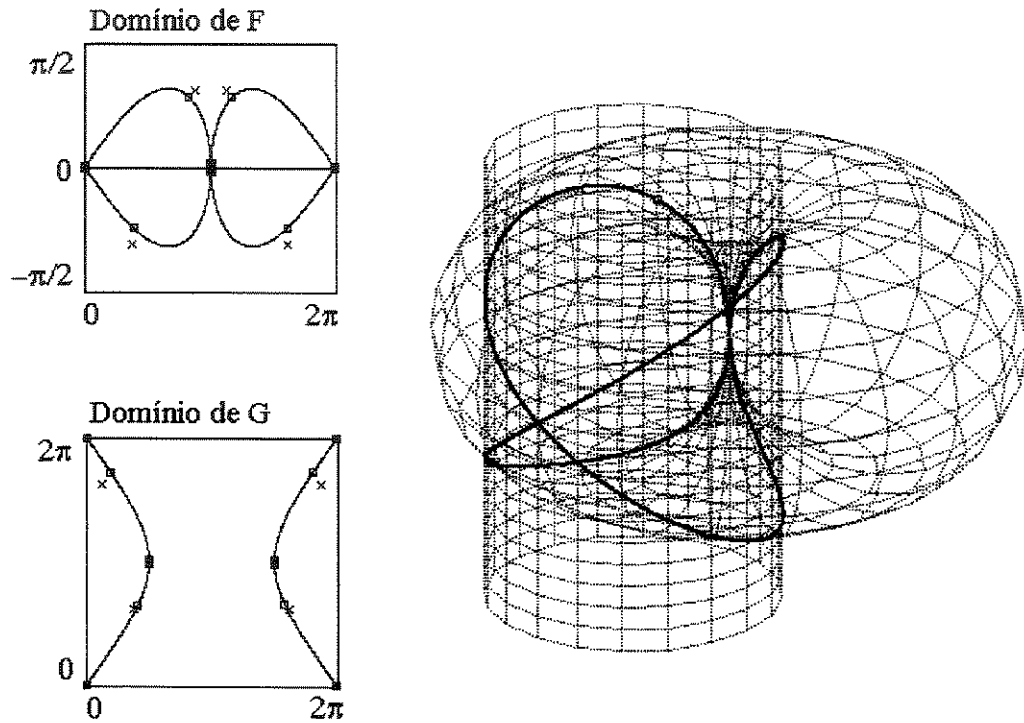


Figura 5.8: Interseção Cilindro/Toro (Exemplo 5.1.6)

Parabolóide/Cilindro ( $S_1$ ) mostrada anteriormente, obtivemos 55 pontos e a seguinte seqüência de valores para  $L_n$ :

0,606, 0,463, 0,413, 0,377, 0,321, 0,272, 0,260, 0,289, 0,359, 0,478, 0,658, 0,893, 1,157, 1,431, 1,609, 1,687, 1,841, 2,001, 1,854, 1,245, 0,625, 0,358, 0,320, 0,364, 1,493, 1,483, 1,011, 0,917, 0,940, 1,074, 1,013, 0,697, 0,490, 0,419, 0,382, 0,328, 0,276, 0,259, 0,284, 0,350, 0,463, 0,636, 0,867, 1,129, 1,404, 1,598, 1,677, 1,821, 1,993, 1,892, 1,320, 0,673, 0,372, 0,318, 0,358.

Poderíamos pensar também em usar uma seqüência como essa juntamente com a nossa construção de círculo osculador aproximado. Teríamos assim um método de caminhada que poderia ser chamado *passo circular adaptativo* ou então, tendo em vista que o círculo osculador aproximado já se adapta ao formato da curva, poderíamos chamar esse método de *passo circular super-adaptativo*.

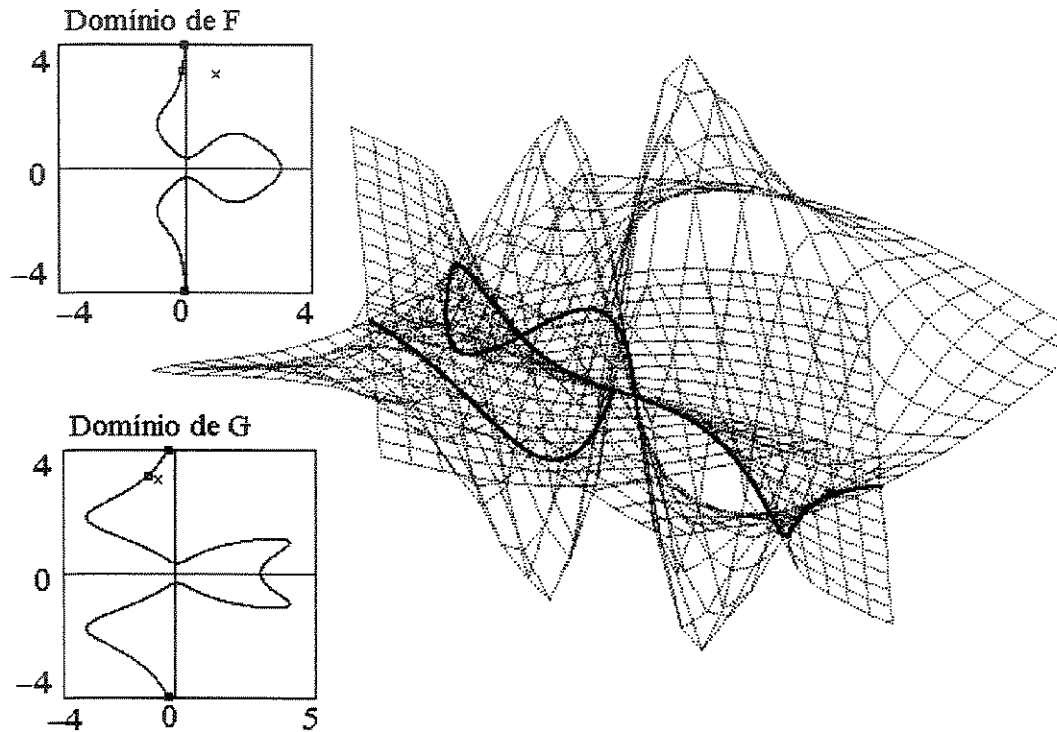


Figura 5.9: Superfícies com parametrizações racionais (Exemplo 5.1.7)

### 5.3 Comparação com o Passo de Stoyanov

Pela sua própria construção (descrita em [34]) o método de Stoyanov estima o próximo ponto aproximado da caminhada sobre a parábola

$$p(s) = f(s_0) + (s - s_0)f'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 f''(s_0)$$

onde  $f(s)$  representa a equação da curva-interseção parametrizada pelo comprimento de arco e  $s_0$  corresponde ao ponto corrente da curva (o ponto de contato entre a curva e a parábola). Pela definição de contato, temos que essa parábola faz um contato de ordem 2 com a interseção. Isto é claro porque a equação da interseção desenvolvida em série de Taylor inicia com os seguintes termos:

$$f(s) = f(s_0) + (s - s_0)f'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 r''(s_0) + \frac{1}{6}(s - s_0)^3 f'''(s_0) + \dots$$

de onde se pode notar que há coincidências de termos na expressão da parábola e na série de Taylor de  $f(s)$ .

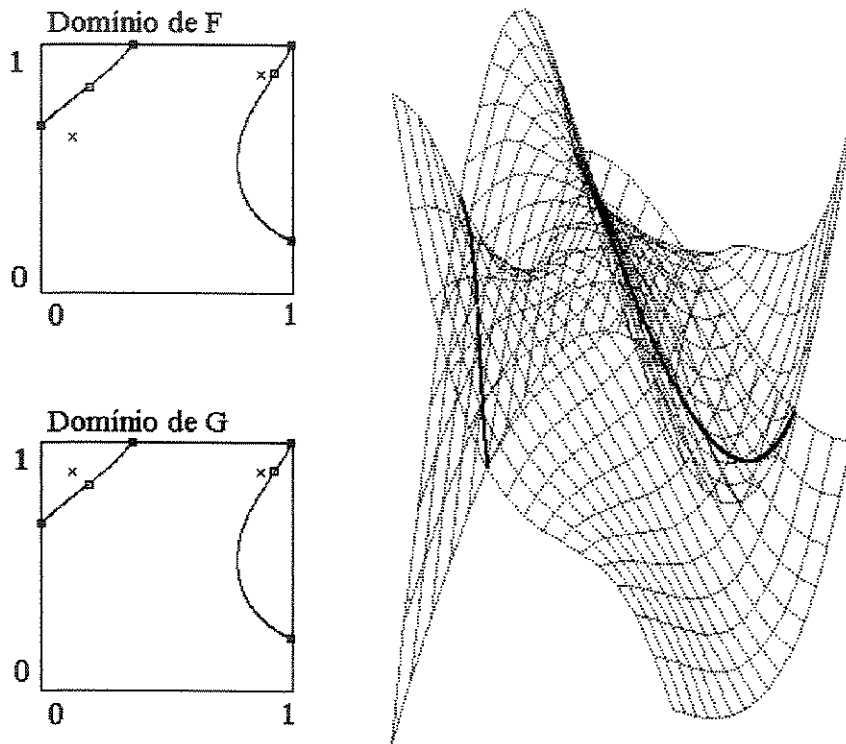


Figura 5.10: Interseção entre superfícies de Bézier (Exemplo 5.1.8)

É mostrado no apêndice A que o círculo osculador (exato) também faz contato de ordem 2 com a interseção  $f(s)$ .

Nem a nossa construção de círculo osculador é exata, nem a parábola de Stoyanov é construída de forma exata (ela usa diversas soluções de sistemas lineares cujos coeficientes são aproximações de derivadas  $f'(s_0)$  e  $f''(s_0)$  da parametrização da interseção).

Já que a parábola e o círculo osculador fazem contato de mesma ordem, então o que se espera é que ambos forneçam resultados com o mesmo nível de precisão. Certamente ambos são mais precisos do que os métodos que usam passo tangencial, porque nestes casos o contato é apenas de ordem 1.

Pelo que é mencionado no início do apêndice A, se uma curva plana  $g(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, fizer contato de ordem 2 em  $s = s_0$  com outra curva  $f(s)$ , então obrigatoriamente  $g(s)$  estará contida no plano osculador de  $f(s)$  no ponto em que  $s = s_0$  (é uma consequência das seguintes igualdades:  $f(s_0) = g(s_0)$ ,  $f'(s_0) = g'(s_0) = \vec{T}(s_0)$  e  $f''(s_0) = g''(s_0) = \vec{T}'(s_0) = \kappa(s_0)\vec{N}(s_0)$ ). Logo qualquer combinação linear dos vetores  $g'(s_0)$  e  $g''(s_0)$  deverá estar contida no plano paralelo aos

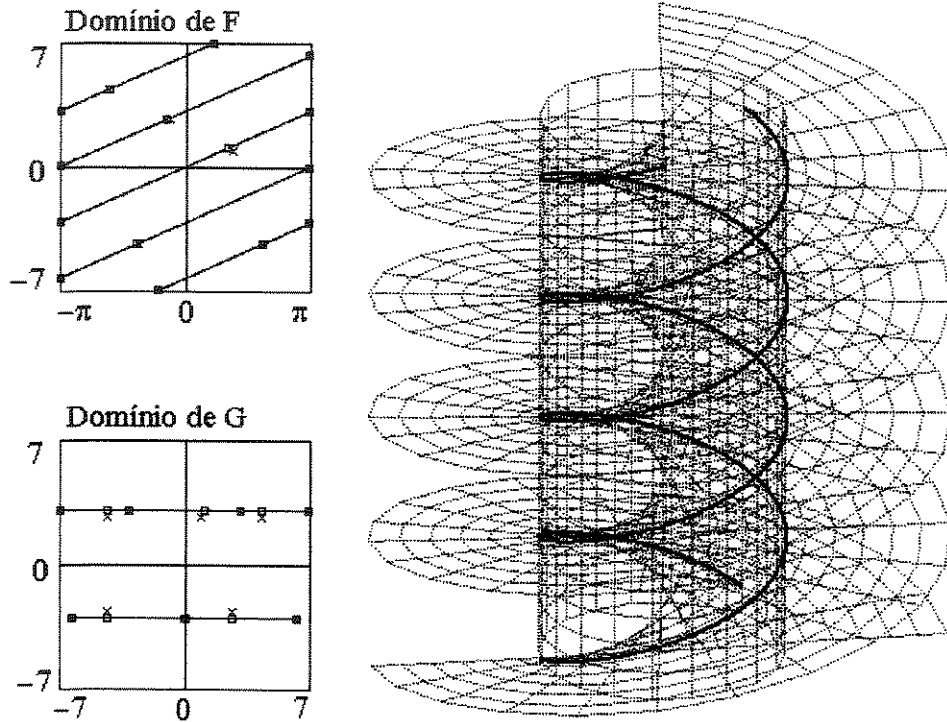


Figura 5.11: Interseção Cilindro/Helicóide (Exemplo 5.4.1)

vetores  $\vec{T}(s_0)$  e  $\vec{N}(s_0)$  e que passa pelo ponto  $g(s_0)$  – e, por definição, este plano é o plano osculador no ponto em que  $s = s_0$ ).

Logo, a parábola construída por Stoyanov também está contida no plano osculador. Por uma questão de simplicidade, vamos chamá-la nesta seção de “parábola osculadora”

Desse modo, nosso problema de comparação transforma-se no seguinte problema plano: dada uma curva  $f(s)$  parametrizada pelo comprimento de arco, em um ponto  $P$  em que  $s = s_0$ , existe um vetor tangente  $\vec{T}(s_0)$  e um vetor normal  $\vec{N}(s_0) = \vec{T}'(s_0)$ . No plano que contém  $P$ ,  $\vec{T}(s_0)$  e  $\vec{N}(s_0)$  desenhamos a parábola de Stoyanov

$$p(s) = P + (s - s_0)\vec{T} + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa\vec{N}$$

e, no mesmo plano, o círculo osculador

$$g(s) = P + \frac{1}{\kappa}\text{sen}(\kappa(s - s_0))\vec{T} + \frac{1}{\kappa}(1 - \text{cos}(\kappa(s - s_0)))\vec{N}.$$

Apesar das expressões acima aparentarem ser simples, elas escondem uma grande dificuldade: o cálculo

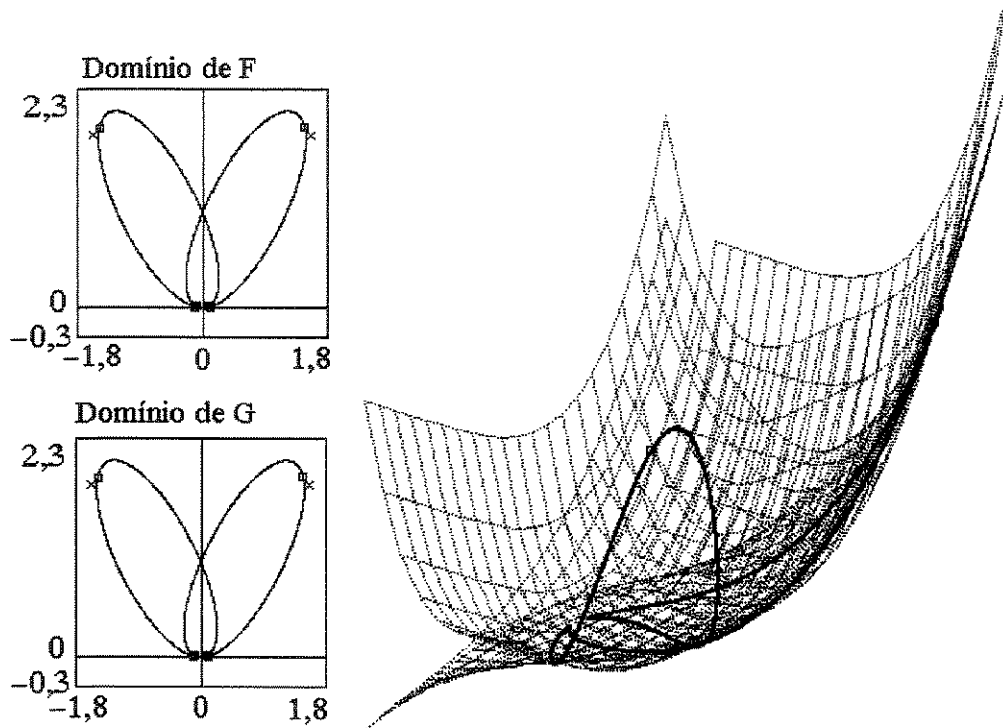


Figura 5.12: Interseção com uma singularidade no  $(0, 0)$  (Exemplo 5.4.2)

de  $\kappa$ ,  $\vec{N}$  e  $\vec{T}$ , uma vez que equação de  $f(s)$  não é conhecida.

O exemplo 5.3.1 mostra um teste que fizemos que compara o nível de aproximação do círculo osculador (exato) e de uma “parábola osculadora” (exata) na vizinhança de um ponto dado.

**Exemplo 5.3.1** Na Tabela 5.10, para o ponto da curva  $\alpha(s)$  em que  $s = s_0$  foram calculados o círculo osculador  $g(s)$  e a “parábola osculadora”  $p(s)$  no ponto  $\alpha(s_0)$ .

Foi atribuído um valor para  $L$  e calculado um ponto  $P_p = p(s + L)$  na parábola e outro ponto  $P_g = g(s + L)$  no círculo osculador e suas distâncias  $d_p$  e  $d_g$  da curva  $\alpha(s)$ , respectivamente.

Foram utilizadas as seguintes curvas parametrizadas pelo comprimento de arco:

$$F(s) = \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$G(s) = \left( \frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$H(s) = \left( \frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{2}, \frac{1}{2(s + \sqrt{s^2 + 1})}, \frac{\sqrt{2} \ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{2} \right)$$

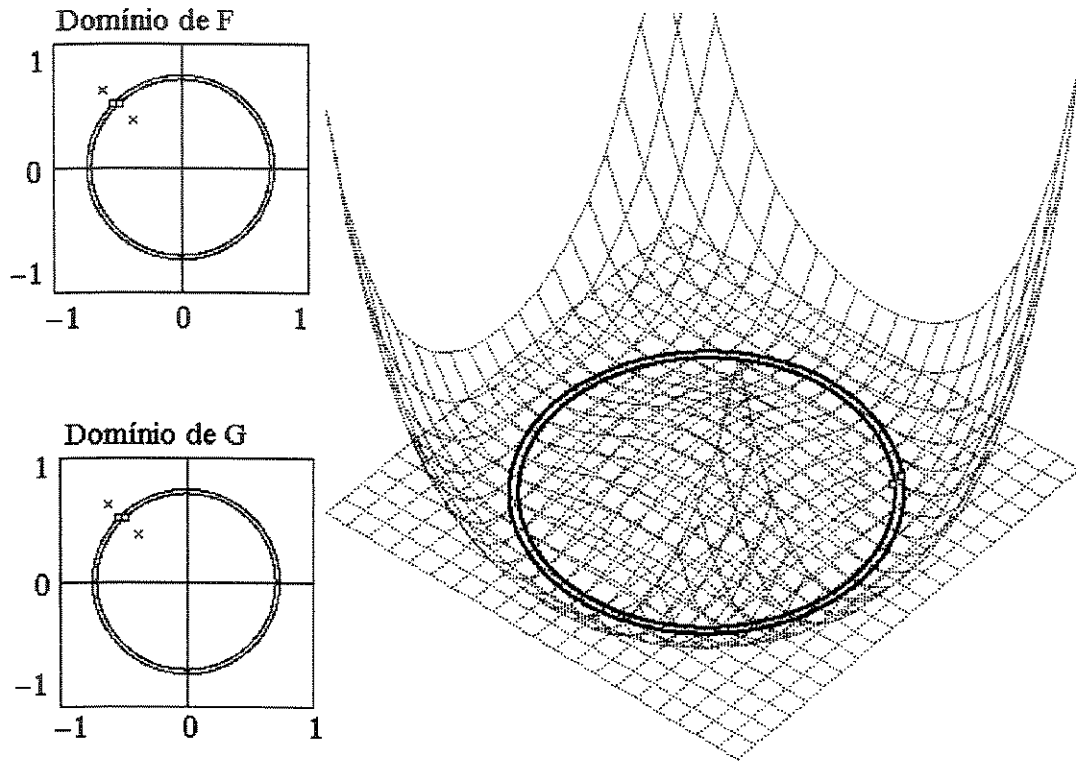


Figura 5.13: Interseção com circunferências muito próximas (Exemplo 5.4.3)

Nestes três casos testados os pontos obtidos foram bastante próximos da curva, sendo que o ponto  $g(s_0 + L)$  obtido sobre o círculo osculador está um pouco mais próximo da curva do que o ponto  $p(s_0 + L)$  obtido sobre a parábola.

## 5.4 Outros exemplos

**Exemplo 5.4.1** A interseção do par de superfícies

- Cilindro:  $F(u, v) = (3 \cos(u), 3 \sin(u), v)$ ,  $-\pi \leq u \leq \pi$ ,  $-7 \leq v \leq 7$
- Helicóide:  $G(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$ ,  $-7 \leq u \leq 7$ ,  $-7 \leq v \leq 7$

é mostrada na Figura 5.11.

Neste exemplo, a interseção das superfícies  $F$  e  $G$  é formada por duas hélices, logo, são curvas com torção constante e diferente de zero ao longo de toda a interseção. No Capítulo 3 este exemplo

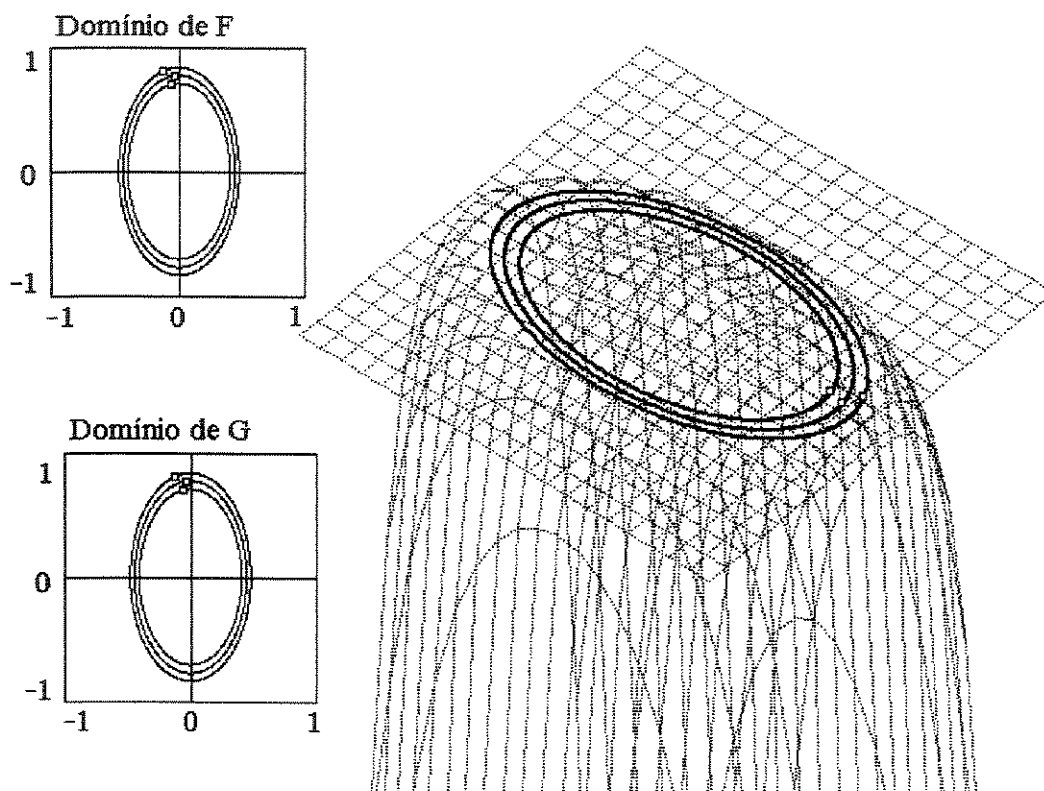


Figura 5.14: Interseção com elipses muito próximas (Exemplo 5.4.4)

foi construído de forma menos eficiente (mais demoradamente e com mais pontos iniciais) usando-se uma técnica de discretização (lattice evaluation).

**Exemplo 5.4.2** A interseção do par de superfícies

- Polinomial de grau 4:  $F(u, v) = (u, v, \frac{2u^4+v^4}{10})$ ,  $-1,8 \leq u \leq 1,8$ ,  $-0,3 \leq v \leq 2,3$
- Polinomial de grau 3:  $G(u, v) = (u, v, \frac{3u^2v-v^2+2v^3}{10})$ ,  $-1,8 \leq u \leq 1,8$ ,  $-0,3 \leq v \leq 2,3$

é mostrada na Figura 5.12.

Neste exemplo a curva interseção apresenta uma singularidade no ponto  $(0,0)$  e o método da caminhada se comporta de forma esperada: pára somente na singularidade. Temos também pontos de bifurcação em ambos os domínios. Este exemplo está citado em Garrity [16].

**Exemplo 5.4.3** A interseção do par de superfícies

- Polinomial de grau 4:  $F(u, v) = (u, v, u^4+v^4+2u^2v^2-\frac{21}{20}u^2-\frac{21}{20}v^2+\frac{11}{40})$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$



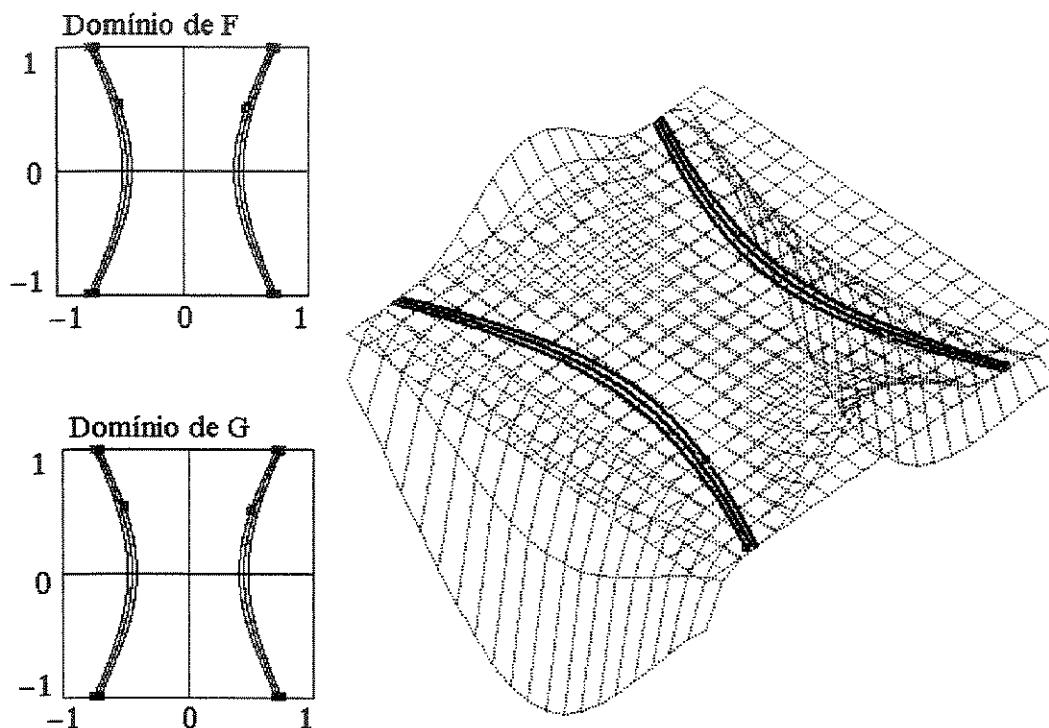


Figura 5.15: Interseção com hipérboles muito próximas (Exemplo 5.4.5)

- Plano:  $G(u, v) = (u, v, 0)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$

é mostrada na Figura 5.13.

Neste exemplo, a parametrização de  $F$  pode ser escrita na forma  $F(u, v) = (u, v, (0, 5 - u^2 - v^2), (0, 55 - u^2 - v^2))$ . A partir daí podemos encontrar as equações das circunferências que correspondem à curva-interseção nos domínios e observar que a distância mínima entre essas circunferências é igual a  $\sqrt{0,55} - \sqrt{0,5} \approx 0,03451$  unidades de comprimento.

Na caminhada com passo circular foi utilizado um passo constante igual a 0,05 unidades de comprimento.

Este exemplo atesta a robustez do método da caminhada com passo circular no tratamento de curvas com ramos muito próximos. Não houve troca de circunferências durante todo o percurso da caminhada, apesar do tamanho do passo ser maior do que a distância entre as circunferências.

**Exemplo 5.4.4** A interseção do par de superfícies

$L$	Método	N pontos 1	Tempo	N pts/s	N pontos 2	1 it	2 it	3 it
0,02	Circular	2508	18,84 s	133,12	286	100,0%	0,0%	0,0%
	Tangente	2364	20,65 s	114,47	232	0,86%	99,14%	0,0%
0,05	Circular	980	10,05 s	97,51	316	21,20%	78,80%	0,0%
	Tangente	952	9,8 s	97,14	257	0,0%	100,0%	0,0%
0,10	Circular	468	6,09 s	76,84	190	0,0%	100,0%	0,0%
	Tangente	648	7,69 s	84,26	240	0,0%	76,67%	23,33%
0,20	Circular	216	4,2 s	51,42	140	0,0%	80,0%	20,0%
	Tangente	480	6,7 s	71,64	130	0,0%	16,92%	83,08%

Tabela 5.6: Interseção Cilindro/Toro

- *Polinomial de grau 6:*  $F(u, v) = (u, v, \frac{21}{100} - \frac{321}{100}u^2 - \frac{107}{100}v^2 + \frac{81}{5}u^4 + \frac{54}{5}u^2v^2 + \frac{9}{5}v^4 - 27u^6 - 27u^4v^2 - 9u^2v^4 - v^6)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$
- *Plano:*  $G(u, v) = (u, v, 0)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$

é mostrada na Figura 5.14.

Neste exemplo, a parametrização de  $F$  pode ser escrita na forma  $F(u, v) = (u, v, (0, 5 - 3u^2 - v^2) (0, 6 - 3u^2 - v^2) (0, 7 - 3u^2 - v^2))$ . A partir daí podemos encontrar as equações das elipses que correspondem à curva-interseção nos domínios e observar que a distância mínima entre essas elipses é aproximadamente igual a 0,03583, para as duas elipses mais externas, e aproximadamente igual a 0,03896, para o caso das duas elipses mais internas. Na caminhada com passo circular foi utilizado um passo constante e igual a 0,05 unidades de comprimento, logo, maior do que a distância mínima entre as elipses mais próximas.

Este exemplo atesta a robustez do método da caminhada com passo circular no tratamento de curvas com ramos muito próximos. Não houve “troca de órbitas” durante todo o percurso da caminhada. Foram necessários apenas um único ponto inicial para cada “órbita”.

#### Exemplo 5.4.5 A interseção do par de superfícies

- *Polinomial de grau 6:*  $F(u, v) = (u, v, \frac{21}{100} - \frac{321}{100}u^2 + \frac{107}{100}v^2 + \frac{81}{5}u^4 - \frac{54}{5}u^2v^2 + \frac{9}{5}v^4 - 27u^6 + 27u^4v^2 - 9u^2v^4 + v^6)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$

$L$	Método	N pontos 1	Tempo	N pts/s	N pontos 2	1 it	2 it	3 it
0,02	Circular	5016	27,52 s	182,26	476	72,27%	27,73%	0,0%
	Tangente	4950	28,01 s	176,72	463	2,81%	97,19%	0,0%
0,05	Circular	3976	23,67 s	167,97	397	12,59%	87,41%	0,0%
	Tangente	3726	21,69 s	171,78	392	0,26%	99,74%	0,0%
0,10	Circular	2378	15,11 s	157,37	380	0,26%	99,74%	0,0%
	Tangente	2036	13,08 s	155,65	293	0,0%	88,40%	11,60%
0,20	Circular	1154	8,3 s	139,03	294	0,0%	91,16%	8,84%
	Tangente	1036	7,86 s	131,80	210	0,0%	43,33%	56,67%

Tabela 5.7: Interseção entre duas superfícies racionais

- Plano:  $G(u, v) = (u, v, 0)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$

é mostrada na Figura 5.15.

Neste exemplo, a parametrização de  $F$  pode ser escrita na forma  $F(u, v) = (u, v, (0, 5 - 3u^2 + v^2) (0, 6 - 3u^2 + v^2) (0, 7 - 3u^2 + v^2))$ . A partir daí podemos encontrar as equações das hipérbolas que correspondem à curva-interseção nos domínios e observar que a distância mínima entre essas hipérbolas é da ordem de 0,03 unidades de comprimento. Na caminhada com passo circular foi utilizado um passo constante e igual a 0,05 unidades de comprimento, logo, maior do que a distância mínima entre as hipérbolas.

Este exemplo também atesta a robustez do método da caminhada com passo circular no tratamento de curvas com ramos muito próximos.

$L$	Método	N pontos 1	Tempo	N pts/s	N pontos 2	1 it	2 it	3 it
0,02	Circular	538	142,81 s	3,76	35	62,86%	37,14%	0,0%
	Tangente	290	101,61 s	2,85	23	0,0%	100,0%	0,0%
0,05	Circular	205	71,35 s	2,87	29	13,79%	86,21%	0,0%
	Tangente	118	50,42 s	2,34	23	0,0%	82,61%	17,39%
0,10	Circular	91	41,63 s	2,18	26	0,0%	96,15%	3,85%
	Tangente	62	35,48 s	1,74	22	0,0%	72,73%	27,27%
0,20	Circular	29	25,87 s	1,12	15	0,0%	53,33%	46,67%
	Tangente	23	24,55 s	0,93	12	0,0%	33,33%	66,67%

Tabela 5.8: Interseção entre duas superfícies de Bézier

Sup.	$L$	Métod	Npts 1	Tempo	Npts/s	Npts 2	1 it	2 it	3 it
$S_1$	0,02	Circ.	200	3,46 s	57,80	44	100,0%	0,0%	0,0%
		Adap.	200	4,56 s	43,85	53	0,0%	100,0%	0,0%
	0,10	Circ.	188	3,57 s	52,66	185	14,05%	85,95%	0,0%
		Adap.	113	3,73 s	30,29	58	0,0%	34,48%	65,52%
$S_2$	0,02	Circ.	139	3,02 s	46,02	43	83,72%	16,28%	0,0%
		Adap.	36	2,47 s	14,57	14	7,14%	92,86%	0,0%
	0,05	Circ.	81	2,64 s	30,68	52	23,08%	76,92%	0,0%
		Adap.	18	2,26 s	7,96	14	0,0%	100,0%	0,0%
$S_3$	0,02	Circ.	200	2,64 s	75,75	40	100,0%	0,0%	0,0%
		Adap.	44	1,87 s	23,52	42	0,0%	100,0%	0,0%
	0,05	Circ.	200	2,63 s	76,04	100	0,0%	100,0%	0,0%
		Adap.	20	1,59 s	12,57	20	0,0%	35,0%	65,0%
$S_4$	0,02	Circ.	156	2,14 s	72,89	54	100,0%	0,0%	0,0%
		Adap.	200	3,68 s	54,34	40	2,50%	97,50%	0,0%
	0,05	Circ.	81	1,70 s	47,64	75	21,33%	78,67%	0,0%
		Adap.	110	2,47 s	44,53	52	0,0%	100,0%	0,0%

Tabela 5.9: Comparando passo circular com passo tangencial adaptativo

$\alpha(s)$	$s_0$	$L$	$d_p$	$d_g$
$F(s)$	-0,5	0,05	0,000007	0,000005
		0,10	0,000059	0,000042
	0,5	0,05	0,000007	0,000005
		0,10	0,000059	0,000042
$G(s)$	-0,5	0,05	0,000007	0,000006
		0,10	0,000056	0,000049
	0,5	0,05	0,000008	0,000007
		0,10	0,000065	0,000058
$H(s)$	-0,5	0,05	0,000013	0,000012
		0,10	0,000108	0,000093
	0,5	0,05	0,000013	0,000012
		0,10	0,000105	0,000092

Tabela 5.10: Exemplo 5.3.1

## Capítulo 6

# Resultados

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos construídos com o método da caminhada com passo circular. Uma vez que necessitamos de pontos iniciais para os diferentes trechos de caminhada, fizemos uso da subdivisão como técnica auxiliar.

Inicialmente, descrevemos a técnica de subdivisão utilizada. Depois, listamos com detalhes diversos exemplos. Tentamos ordenar os exemplos em ordem crescente de complexidade, iniciando com os mais simples e terminando com os mais complicados.

Em todos os exemplos mostrados foi utilizado um microcomputador 486 DX2 com *clock* de 66 MHz.

Alguns parâmetros utilizados nos exemplos foram definidos de forma empírica, por tentativas. Esses parâmetros são:

- o nível de precisão dos resultados obtidos no método da subdivisão;
- o comprimento do passo do método de caminhada.

### 6.1 Determinação de pontos iniciais

Nesta seção pretendemos descrever com detalhes o método de subdivisão a ser utilizado em conjunto com o método da caminhada. A principal diferença desta nossa descrição da descrição feita na seção 3.4 é que nós não utilizamos cálculo de planuras ou linearidades, nem resolvemos sistemas lineares. Além disso, selecionamos através de um critério bem definido alguns pontos obtidos no processo de subdivisão.

Inicialmente, os domínios das superfícies parametrizadas por  $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$  e  $G(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$  são subdivididos em quatro partes cada um. Numeramos essas partes obtidas com 1, 2, 3, 4 no sentido horário, iniciando na parte superior esquerda.

1	2
3	4

Domínio de  $F$

1	2
3	4

Domínio de  $G$

Determinamos uma caixa limitante (*bounding box*) que contenha todo o gráfico da superfície  $F$  quando o domínio da mesma for restrito à parte 1. Fazemos o mesmo com as partes 2, 3, 4 do domínio de  $F$  e com as partes 1, 2, 3, 4 do domínio de  $G$ . São construídas assim um total de 8 caixas distintas.

Uma caixa desse tipo pode ser construída da seguinte forma: restringindo-se à parte 1 do domínio de  $F$ , determina-se o máximo  $M_1$  e mínimo  $m_1$  de  $f_1(u, v)$ , o máximo  $M_2$  e o mínimo  $m_2$  de  $f_2(u, v)$  e o máximo  $M_3$  e o mínimo  $m_3$  de  $f_3(u, v)$ . Então, a caixa procurada é a que tem vértices

$$(m_1, m_2, m_3), (m_1, M_2, m_3), (M_1, m_2, m_3), (M_1, M_2, m_3),$$

$$(m_1, m_2, M_3), (m_1, M_2, M_3), (M_1, m_2, M_3), (M_1, M_2, M_3).$$

Pode-se proceder de forma análoga com as outras partes 2, 3, 4 no domínio de  $F$  e com as partes 1, 2, 3, 4 no domínio de  $G$ .

O valor máximo aproximado de uma função  $f(x, y)$  pode ser calculado subdividindo-se seu domínio em partes menores e comparando-se o valor de  $f$  nos vértices dessas partes menores. O mesmo pode ser feito com relação ao valor mínimo aproximado. Quanto mais subdivisões dos domínios, melhores os valores máximo ou mínimo aproximados encontrados e maior o tempo de computação dos mesmos.

Existem diversos artigos que propõem outras maneiras de se construir essas caixas limitantes, por exemplo Aziz e Bata [5] e também Dokken [11]. No entanto, esses trabalhos utilizam propriedades particulares de determinados tipos de superfícies (convexidade das superfícies de Bézier, por exemplo).

Para cada uma das partes 1, 2, 3, 4 do domínio de  $F$  e cada uma das partes 1, 2, 3, 4 do domínio de  $G$ , verificamos se elas se interceptam duas a duas. É fácil fazer essa verificação, basta observar as posições relativas dos vértices de cada caixa (veja as Figuras 6.1 e 6.2).

Se as caixas não se interceptarem, então as superfícies também não se interceptam naquelas regiões. Passamos a ignorar os pares de regiões nos quais as caixas não se interceptarem. Se as caixas se



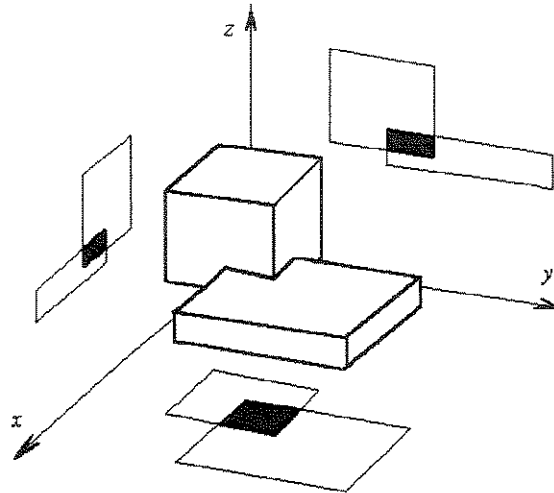


Figura 6.1: Caixas limitantes que se interceptam

interceptarem, então há chance das superfícies se interceptem nessas regiões e, neste caso, fazemos novas subdivisões de cada parte onde houver interseção das caixas, conforme mostra a Figura 6.3.

Repetimos os procedimentos anteriores até obtermos um nível de precisão pré-fixado. No caso deste nosso algoritmo, fixamos um nível de precisão *a priori*. Esse nível de precisão poderia ser determinado de outras formas, durante a execução do programa: bastaria usar os critérios de linearidade e planura mencionados no Capítulo 3.

Quando os três procedimentos anteriores forem aplicados um certo número pré-fixado de vezes, então os pontos contidos na pequena região  $A$  obtida no domínio de  $F$  e os pontos contidos na pequena região  $B$  do domínio de  $G$  são aproximações de pontos da interseção das superfícies. Podemos escolher assim um ponto em  $A$  e um ponto em  $B$  para obter pontos próximos da interseção de  $F$  e  $G$ . Neste nosso algoritmo de determinação de pontos iniciais, escolhemos o ponto central da região  $A$  e o ponto central da região  $B$  – com isso esperamos minimizar erros de aproximação.

Cada região  $A$  e cada região  $B$  assim obtida, pode ser identificada por uma seqüência de números 1, 2, 3, 4. Por exemplo, 12234 pode ser usado para identificar a região quando for escolhida a região 1 na primeira subdivisão, a região 2 na segunda e terceira subdivisões, a região 3 na quarta subdivisão e a região 4 na quinta subdivisão. Na Figura 6.3, na “1ª subdivisão” cada região pode ser identificada por um dos números 1, 2, 3 ou 4. Na “2ª subdivisão”, cada uma das regiões menores pode ser identificada por 11, 12, 13 ou 14. Nas regiões menores assinaladas na “3ª subdivisão”, cada uma pode

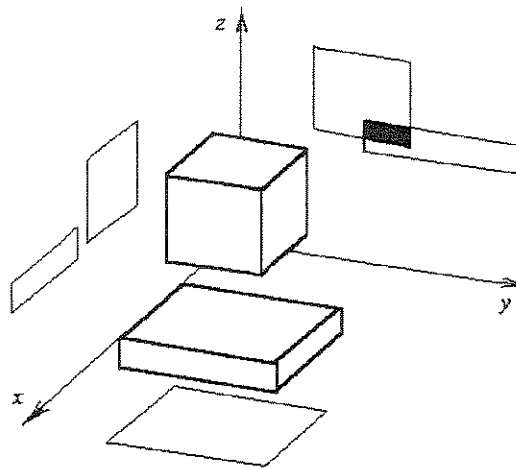


Figura 6.2: Caixas limitantes que não se interceptam

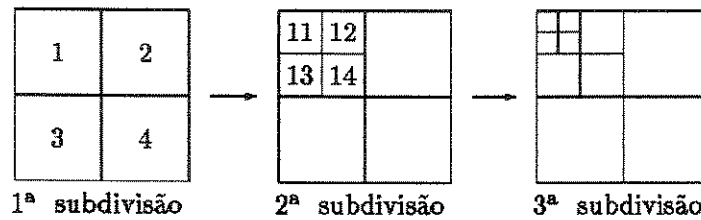


Figura 6.3: Subdivisões recursivas

ser identificada por 111, 112, 113 ou 114.

Com essa notação, fica fácil saber quando um ponto está próximo de outro no domínio de uma parametrização: basta olhar se os inícios de suas representações são parecidos. Quanto maior coincidência nos algarismos iniciais das duas representações, maior a proximidade dos pontos relacionados. Por exemplo, se um ponto tiver representação 21334111, então ele fica próximo de outro ponto que tenha representação 21334123, mas fica distante de outro que tenha representação 41111233.

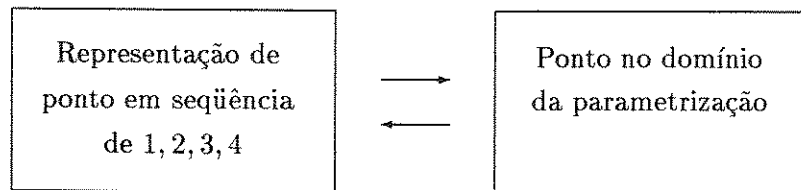
Dessa forma podemos escolher um ponto qualquer  $P_1$  em  $A$  e um ponto qualquer  $P_2$  em  $B$ , calcular a distância entre  $F(P_1)$  e  $G(P_2)$ . Quanto menor essa distância, melhor aproximado da interseção os pontos vão estar. Escrevendo-se essa distância entre colchetes, podemos, por exemplo, obter algo do tipo:

4222221223	1111111333	[0.003364]
4222221223	1111111334	[0.001364]
4221221223	1111111434	[0.002360]
4222121224	1111121443	[0.012365]
	⋮	

Temos assim duas vantagens:

- Podemos escolher os pontos que são as melhores aproximações para a interseção . Para isso, basta observar os que têm menores distâncias entre suas imagens (mostradas entre colchetes).
- Dado um ponto qualquer do domínio de uma parametrização, fica fácil determinar qual aproximação obtida pela subdivisão fica mais próxima desse ponto. Para isso, basta calcular a representação do ponto na seqüência de regiões da subdivisão e observar se há coincidência nos algarismos iniciais.

A conversão



é sempre muito fácil e rápida de ser feita. Antes, deve ficar convencionado qual ponto escolher na última e menor região obtida após a subdivisão do domínio. Após a última subdivisão, poderíamos escolher qualquer ponto, mas optamos por escolher sempre o ponto central da região – achamos que isso minimiza erros de aproximação.

Após a subdivisão dos domínios normalmente obtém-se muitos pontos que podem ser usados como ponto inicial da caminhada. Se a curva-interseção não for formada por muitos pedaços desconexos e não possuir muitos pontos de bifurcações, então são necessários somente poucos pontos iniciais. Nos exemplos mais simples, basta um único ponto inicial. Desse modo, é importante ter um critério de como selecionar os pontos iniciais do trecho de caminhada entre os muitos pontos obtidos na subdivisão. Nosso critério de seleção está descrito a seguir.

1. Inicialmente, escolhemos um inteiro  $n$  e dividimos o domínio em  $4^n$  partes iguais. De preferência  $n$  deve ser um valor pequeno (por exemplo,  $n = 3$ ), mas não há um critério bem definido de como escolhê-lo.
2. Para cada uma das  $4^n$  partes do item 1, verificamos se há algum ponto obtido na subdivisão que pertença àquela parte. Para isso basta comparar os  $n$  primeiros algarismos da representação dos pontos obtidos na subdivisão com as seqüências de 1, 2, 3, 4 que identificam cada subregião. Algumas subregiões vão conter mais de um ponto da subdivisão e outras subregiões não vão conter ponto algum.
3. Escolhemos entre os pontos encontrados em cada subregião do item 2, aqueles que têm a menor distância entre suas imagens, ou seja, em cada subregião escolhemos o que melhor se aproximar da interseção .

Escolhemos assim um máximo de  $4^n$  pontos que serão utilizados como pontos iniciais de trechos de caminhada. Os pontos assim escolhidos não vão estar muito próximos uns dos outros. Eles vão estar distribuídos ao longo de todo o domínio. A boa distribuição ocorre devido ao fato de dois quaisquer deles terem sido escolhidos em subregiões distintas escolhidas no total de  $4^n$  subregiões.

**Exemplo 6.1.1** *Consideremos o cilindro parametrizado por*

$$F(u, v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), v)$$

*e o toro parametrizado por*

$$G(u, v) = (\cos(u)(1 + \cos(v)), \operatorname{sen}(u)(1 + \cos(v)), \operatorname{sen}(v))$$

*definidas nas seguintes regiões*

$$\operatorname{Dom}(F) = [-3, 2; 3, 2] \times [-3, 2; 3, 2]$$

$$\operatorname{Dom}(G) = [-3, 2; 3, 2] \times [-3, 2; 3, 2]$$

*(isto é, o “u” e o “v” variando de -3,2 a 3,2 para F e para G).*

*Inicialmente, foi feita uma subdivisão “de nível 3” (isto é, os domínios foram subdivididos uma vez, depois outra vez e depois outra vez). A seqüência dos pontos encontrados inicia com:*

131 113 [0,688099]  
 132 114 [0,954636]  
 133 111 [0,341238]  
 ⋮

Nos domínios das parametrizações, esse terceiro ponto mostrado acima corresponde a  $P_1 = (-2, 8; 0, 4)$  no domínio de  $F$  e a  $P_2 = (-2, 8; 2, 8)$  no domínio de  $G$ . Com esses pontos, temos:

$$F(P_1) = (0,057778; -0,334988; 0,400000)$$

$$G(P_2) = (-0,054439; -0,019355; 0,334988)$$

Quanto mais próximo  $F(P_1)$  estiver de  $G(P_2)$ , mais próximo da interseção eles vão estar. Neste caso, eles são aproximações muito grosseiras de pontos da interseção,

Além disso, o ponto  $P_1$  pertence à região 13 no domínio de  $F$  e o ponto  $P_2$  pertence à região 11 do domínio de  $G$ .

**Exemplo 6.1.2** Considerando as mesmas superfícies do exemplo 6.1.1, fazendo-se uma subdivisão até nível 6, obtém-se uma seqüência de pontos que inicia com

133313 111131 [0,062878]  
 133331 111113 [0,059282]  
 133333 111111 [0,059009]  
 133333 111113 [0,042512]  
 133331 111131 [0,045146]  
 131344 123113 [0,116032]  
 131344 123114 [0,108835]  
 ⋮

Um dos melhores resultados que aparece nessa seqüência é o

$$131434 123141 [0,038293]$$

que corresponde a:

$$P_1 = (-2,65; 0,85), \quad F(P_1) = (0,118418; -0,472031; 0,850000)$$

$$P_2 = (-1,35; 2,15), \quad G(P_2) = (0,099132; -0,441654; 0,836899),$$

de onde podemos obter uma boa opção para o ponto inicial dos métodos de caminhada.

Podemos observar que todos esses pontos mostrados pertencem à região denotada por 13 no domínio de  $F$  e às regiões 11 ou 12 no domínio de  $G$ .

**Exemplo 6.1.3** Com as mesmas superfícies anteriores, usando uma subdivisão até nível 10, obtém-se a seguinte seqüência de pontos:

```

1333334134 1111113424 [0,002393]
1333334314 1111113133 [0,002369]
1333334314 1111113134 [0,002368]
1333334314 1111113143 [0,002368]
1333334314 1111113144 [0,002368]
1333334334 1111113113 [0,002364]
1333334334 1111113114 [0,002364]
      ⋮

```

Um dos melhores pontos encontrados nessa seqüência é:

```

1314334343 1231233432 [0,000805]

```

Esta representação corresponde a  $P_1 = (-2,734375; 0,803125)$  no domínio de  $F$  e a  $P_2 = (-1,365625; 2,209375)$  no domínio de  $G$ . Além disso,  $F(P_1) = (0,081774; -0,396056; 0,803125)$  e  $G(P_2) = (0,082298; -0,395473; 0,802944)$ .

Note a proximidade entre  $F(P_1)$  e  $G(P_2)$ . Isto significa que eles estão próximos da interseção das superfícies  $F$  e  $G$ .

A cada subdivisão, o comprimento dos lados das subregiões envolvidas reduzem-se à metade do comprimento do nível anterior. Assim, se o domínio da parametrização estiver contido no retângulo  $[a, b] \times [c, d]$ , então, após  $n$  subdivisões, os lados de cada subregião medirão  $\frac{b-a}{2^n}$  e  $\frac{d-c}{2^n}$ . Sendo  $C$  o centro dessa subregião, se a subregião contiver um ponto  $P$  da curva-interseção, então a distância  $d$  entre  $C$  e  $P$  não ultrapassa a metade do comprimento da diagonal da subregião, ou seja,  $d \leq \frac{\sqrt{(\frac{b-a}{2^n})^2 + (\frac{d-c}{2^n})^2}}{2} =$

$\frac{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}{2^{n+1}}$ . Logo, o erro  $E$  cometido quando se aproxima o ponto central da subregião pelo ponto da curva-interseção, satisfaz à seguinte desigualdade

$$E \leq \frac{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}{2^{n+1}}.$$

Então, para que o erro  $E$  não ultrapasse um valor pré-fixado  $\epsilon$ , basta que tenhamos

$$\frac{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}{2^{n+1}} \leq \epsilon$$

que é equivalente a

$$2^{n+1} \geq \frac{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}{\epsilon}$$

de onde finalmente obtemos

$$n \geq \log_2 \left[ \frac{\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}}{2\epsilon} \right] \quad (6.1)$$

A partir da desigualdade 6.1 podemos obter uma estimativa para o nível de subdivisões  $n$  de modo a obter pontos próximos da curva-interseção com erro não ultrapassando um valor  $\epsilon$  pré-fixado.

**Exemplo 6.1.4** *Se o domínio da parametrização da superfície  $F$  for  $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$ , então, para obtermos pontos da subdivisão com erro de aproximação não ultrapassando 0,01, devemos considerar um nível de subdivisão  $n$  que satisfaça à desigualdade  $n \geq \log_2 \frac{\sqrt{1+(2\pi)^2}}{0,02} = 8,3134$ . Assim, podemos considerar  $n = 9$  para obtermos um erro menor do que ou igual a 0,01 para os pontos obtidos por subdivisão no domínio de  $F$ .*

## 6.2 Exemplos

**Exemplo 6.2.1** *Consideremos os cilindros parametrizados por  $F(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$  e  $G(u, v) = (v, \cos(u), \sin(u))$ , definidos no retângulo  $[-\pi; \pi] \times [-2; 2]$ . Estes cilindros também podem ser descritos pelas equações cartesianas  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y^2 + z^2 = 1$ .*

*Usando o método da subdivisão descrito na Seção 6.1 com nível de precisão igual a 3 (ou seja, fazendo 3 subdivisões sucessivas) obtemos um total de 143 pontos. Dividindo os domínios em  $4^2 = 16$  partes e, para cada parte, escolhendo um ponto que pertença a ela que seja a melhor aproximação naquela parte, obtemos um total de 12 pontos que serão utilizados como pontos iniciais do método da caminhada (4 partes selecionadas não contém pontos obtidos na subdivisão). Ver Figura 6.4. De acordo com a notação do Capítulo 4, esses pontos são representados por (113, 423), (124, 241),*

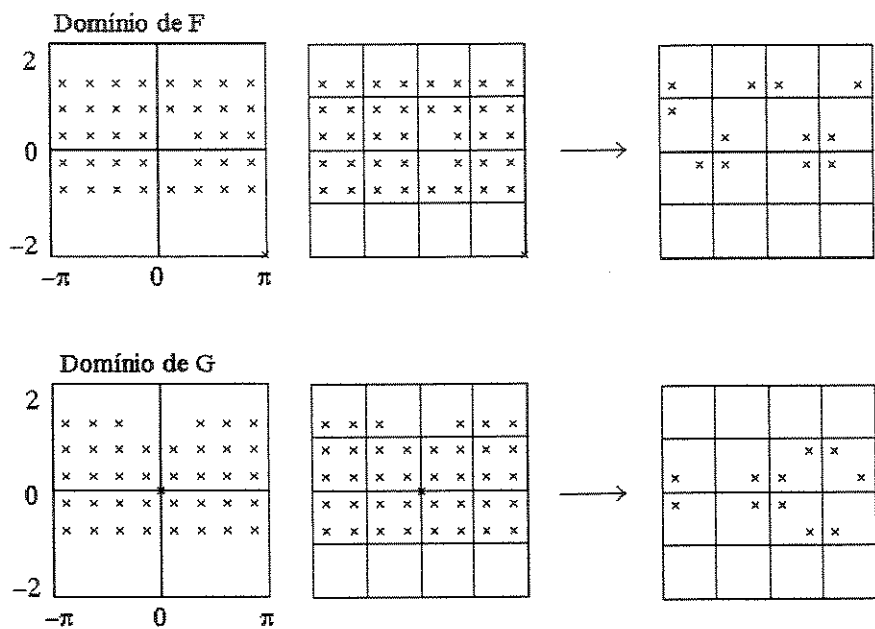


Figura 6.4: Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.1)

(131, 423), (143, 244), (213, 232), (224, 414), (234, 233), (243, 411), (312, 311), (321, 133), (412, 144), (421, 322).

Na primeira subdivisão, os valores máximo/mínimo de  $F$  e  $G$  foram encontrados subdividindo-se cada região em  $80 \times 80$  partes. Na segunda subdivisão os valores máximo/mínimo foram encontrados dividindo-se em  $40 \times 40$  partes e na terceira subdivisão em  $20 \times 20$  partes. Os valores máximo/mínimo são calculados comparando-se os valores das funções nos vértices de cada subregião e são utilizados na construção das caixas limitantes do método de subdivisão utilizado.

Todo o processo de subdivisão foi executado em 25,26 segundos.

A seguir, para cada um dos 12 pontos encontrados na subdivisão, foi iniciada uma caminhada com passo circular utilizando  $L = 0,03$ . Em cada trecho de caminhada procurou-se obter um máximo de 400 pontos.

Esses dois cilindros e sua interseção estão mostrados na Figura 6.5.

Neste exemplo, como é dos mais simples, podemos determinar analiticamente as equações da interseção. Trata-se de um conjunto de duas elipses

$$f_1(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$$



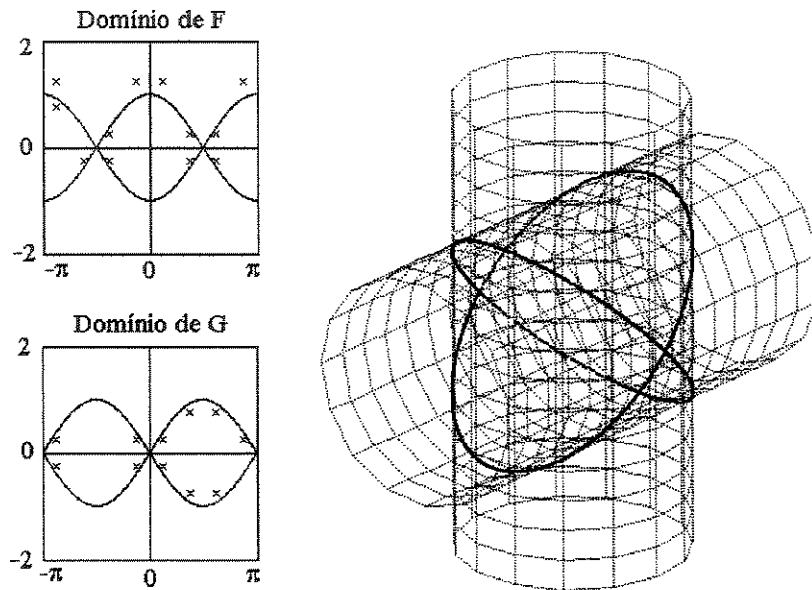


Figura 6.5: Interseção dos cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y^2 + z^2 = 1$  (Exemplo 6.2.1)

e

$$f_2(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), -\cos(t))$$

situadas nos planos  $x = z$  e  $x = -z$ , respectivamente. Conhecidas estas expressões, podemos avaliar quão próximos da interseção estão alguns valores encontrados pelo método da caminhada. Por exemplo, os pontos  $P_1 = (0, 560142; -0, 828397; 0, 560142)$ ,  $P_2 = (-0, 886867; -0, 462025; 0, 886867)$  e  $P_3 = (0, 709021; 0, 705187; 0, 709021)$  obtidos na caminhada com passo circular estão a distâncias de  $6, 05 \cdot 10^{-5}$ ,  $2, 52 \cdot 10^{-5}$  e  $2, 46 \cdot 10^{-5}$  unidades da curva-interseção, respectivamente.

No gráfico, estão mostrados também os domínios de  $F$  e  $G$ , além das curvas nos domínios de  $F$  e  $G$  cujas imagens correspondem à interseção das superfícies. Neste caso, excepcionalmente, podemos achar as equações dessas curvas desenhadas nos domínios. No domínio de  $F$  são as curvas  $v = \cos(u)$  e  $v = -\cos(u)$  e no domínio de  $G$  são as curvas  $v = \text{sen}(u)$  e  $v = -\text{sen}(u)$ . Conhecidas estas equações, podemos avaliar a precisão de alguns valores encontrados. Por exemplo, os pontos  $(0, 154922; 0, 988024)$ ,  $(3, 09473; -0, 998902)$  no domínio de  $F$  e  $(0, 788109; 0, 709021)$ ,  $(2, 10212; 0, 862136)$  no domínio de  $G$ , obtidos na caminhada com passo circular, estão a distâncias das curvas  $v = \pm \cos(u)$  ou  $v = \pm \text{sen}(u)$  respectivamente iguais a  $1, 47 \cdot 10^{-5}$ ,  $1, 96 \cdot 10^{-5}$ ,  $2, 00 \cdot 10^{-6}$

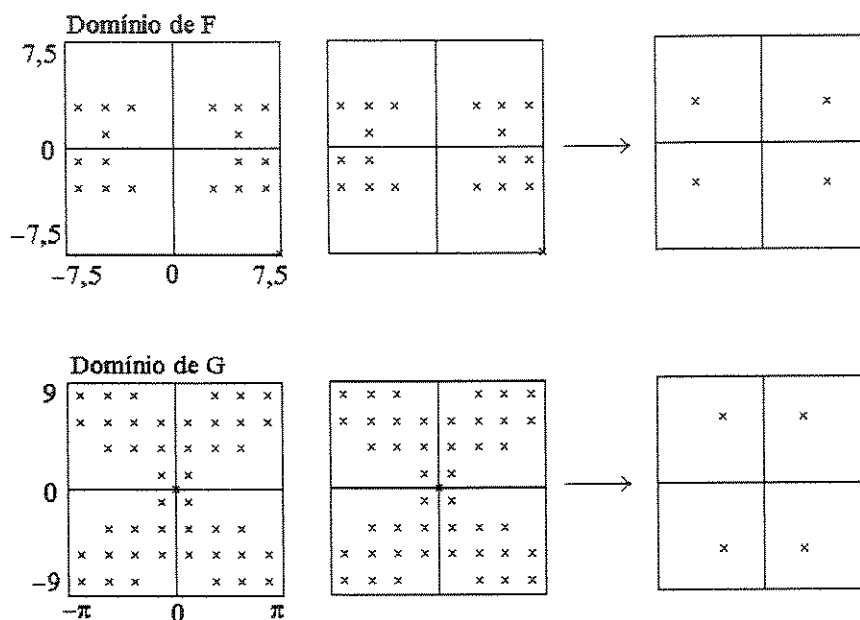


Figura 6.6: Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.2)

e  $1,64 \cdot 10^{-5}$  unidades.

Após a construção dos gráficos podemos observar que as curvas nos domínios possuem várias bifurcações. Logo, é necessário mais de um trecho de caminhada, cada um iniciando em pontos distintos do domínio. Os pontos de bifurcação nos domínios normalmente correspondem a pontos das superfícies nos quais os vetores normais  $\vec{N}_1$  e  $\vec{N}_2$  são paralelos e, conseqüentemente,  $\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$ .

Os pontos assinalados com um “x” nos domínios correspondem aos pontos obtidos na subdivisão.

**Exemplo 6.2.2** Consideremos o parabolóide parametrizado por  $F(u, v) = (10 - \frac{u^2+v^2}{4}, v, u)$  e o cilindro parametrizado por  $G(u, v) = (3 \cos(u), 3 \sin(u), v)$  definidos nos retângulos  $[-7, 5, 7, 5] \times [-7, 5, 7, 5]$  e  $[-\pi, \pi] \times [-9, 9]$ , respectivamente.

Usando o método da subdivisão descrito na Seção 6.1 com nível de precisão igual a 3 obtemos um total de 81 pontos. Dividindo os domínios em  $4^1$  partes e, para cada parte, escolhendo um ponto que pertença a ela que seja a melhor aproximação naquela parte, obtemos um total de 4 pontos que serão utilizados como pontos iniciais do método da caminhada (esses pontos podem ser representados por  $(132, 432)$ ,  $(241, 214)$ ,  $(314, 341)$ ,  $(423, 123)$ ). Ver Figura 6.6.

A subdivisão foi executada em 13,62 segundos. Para cada um dos 4 pontos encontrados na subdi-

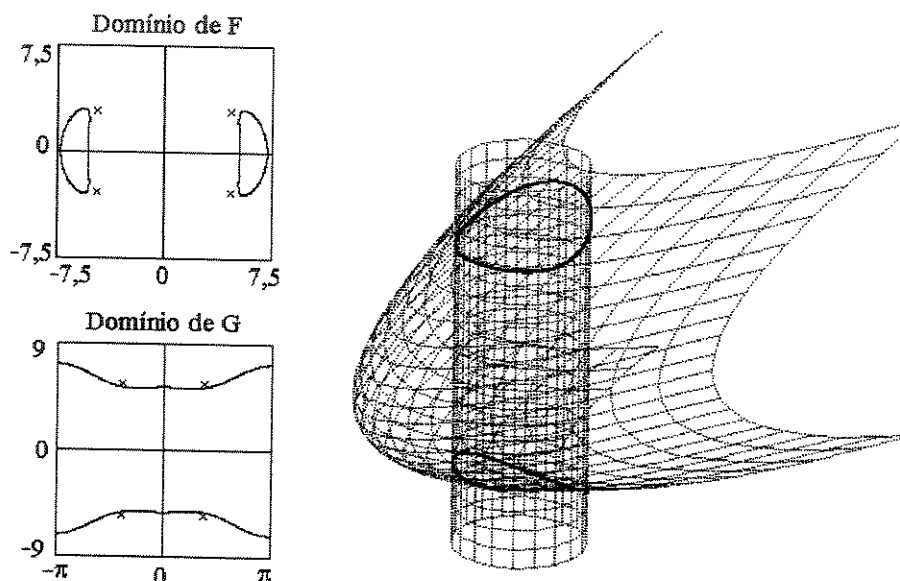


Figura 6.7: Interseção de  $x = 10 - \frac{y^2+z^2}{4}$  e  $x^2 + y^2 = 9$  (Exemplo 6.2.2)

visão, foi iniciado uma caminhada com passo circular utilizando  $L = 0,05$ .

O gráfico dessa interseção parabolóide/cilindro está mostrado na Figura 6.7. No gráfico, estão mostrados também os domínios de  $F$  e  $G$  e as curvas cujas imagens correspondem à interseção das superfícies. Os pontos assinalados com “x” correspondem aos quatro pontos obtidos na subdivisão.

Devido ao fato da curva-interseção ser formada por dois pedaços desconexos, são necessários pelo menos dois pontos iniciais para poder iniciar dois trechos de caminhada distintos. Não há, no presente momento, técnica conhecida que permita o conhecimento a priori de quantos pedaços desconexos a curva-interseção é formada. Essa observação que fazemos baseia-se exclusivamente na observação do gráfico após a sua construção.

**Exemplo 6.2.3** Consideremos o cone parametrizado por  $F(u, v) = (v, \sqrt{3}\cos(u)v, \sqrt{3}\sen(u)v)$   $-\pi \leq u \leq \pi$ ,  $-2 \leq v \leq 2$  e o toro parametrizado por

$$G(u, v) = (\cos(u)(1 + \cos(v)), \sen(u)(1 + \cos(v)), \sen(v)) \quad -\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi.$$

Usando o método da subdivisão da Seção 6.1 com nível de precisão igual a 5, obtivemos um total de 1663 pontos. Dividindo os domínios em  $4^2 = 16$  partes e, nas partes que contiverem pontos da subdivisão escolhendo um ponto melhor aproximado da interseção, obtemos um total de 16 pontos para

serem utilizados como pontos iniciais do método da caminhada (Figura 6.8).

Para cada um dos 16 pontos encontrados na subdivisão (que durou 2 minutos e 26,8 segundos), foi iniciado uma caminhada com passo circular utilizando  $L = 0,02$ .

Os gráficos dessas superfícies e da sua interseção, estão desenhados na Figura 6.9. Os pontos obtidos na subdivisão estão assinalados nos domínios com um “×”.

Após a construção dos gráficos, observamos que a interseção dessas superfícies é formada por dois trechos desconexos. Logo, é necessário mais de um ponto inicial para o método da caminhada.

**Exemplo 6.2.4** A interseção da superfície de Bézier parametrizada por

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(v), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

onde  $m = 3, n = 3, J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, K_{m,j}(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}, B_{0,0} = (0, 0, 1), B_{0,1} = (1/3, 0, 1), B_{0,2} = (2/3, 0, -1/2), B_{0,3} = (1, 0, 0), B_{1,0} = (0, 1/3, 3/2), B_{1,1} = (1/3, 1/3, 1/2), B_{1,2} = (2/3, 1/3, 0), B_{1,3} = (1, 1/3, -1/2), B_{2,0} = (0, 2/3, 1/3), B_{2,1} = (1/3, 2/3, 0), B_{2,2} = (2/3, 2/3, 2), B_{2,3} = (1, 2/3, 1), B_{3,0} = (0, 1, 1), B_{3,1} = (1/3, 1, 1), B_{3,2} = (2/3, 1, 0), B_{3,3} = (1, 1, 0)$  e a superfície com parametrização racional  $G(u, v) = (\frac{1+u}{1+v^2}, \frac{1-u}{1+v^2}, \frac{u+v}{u^2+v^2+1}), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$  está mostrada na Figura 6.11.

Na construção dessa figura foi utilizado o método da subdivisão da Seção 6.1 com nível de precisão igual a 2 e, após a subdivisão, foram obtidos 21 pontos e, entre eles, escolhidos 4<sup>1</sup> pontos para servirem de pontos iniciais dos trechos de caminhada (Figura 6.10). Todo o processo de subdivisão dos domínios foi executado em 27,47 segundos.

Para cada um dos 4 pontos selecionados entre os encontrados na subdivisão, foi iniciado uma caminhada com passo circular utilizando  $L = 0,01$ .

**Exemplo 6.2.5** Consideremos a “mola”  $F(u, v) = ((8+2 \cos(u)) \cos(v), (8+2 \cos(u)) \sin(v), 2 \sin(u) + v), -\pi \leq u \leq \pi, -9 \leq v \leq 11$  e a esfera  $G(u, v) = (9 \cos(u) \sin(v), 9 \sin(u) - 8, 9 \cos(u) \cos(v)), -\pi \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi$ .

Usando o método da subdivisão da Seção 6.1 com nível de precisão igual a 4 obtemos um total de 966 pontos. Dividindo os domínios em  $4^3 = 64$  partes, nas partes que contiverem pontos da subdivisão escolhemos um ponto, obtemos um total de 59 pontos que podem ser utilizados como pontos iniciais do método da caminhada (Figura 6.12). Como em todos os outros exemplos deste capítulo, esses dois parâmetros que controlam o nível de precisão dos resultados da subdivisão (o “4” e o “3” mencionados

no início deste parágrafo) são obtidos por tentativas. A subdivisão neste caso demorou 2 minutos e 9 segundos.

Para cada um dos 59 pontos encontrados na subdivisão, foi iniciado uma caminhada com passo circular utilizando  $L = 0,05$ . Os pontos obtidos na subdivisão estão assinalados nos domínios.

Os gráficos da esfera, da “mola” e da sua interseção estão mostrados na Figura 6.13.

Esta interseção não é completamente determinada se for usada uma subdivisão mais grosseira, com menos pontos e menos precisa do que a que foi realmente utilizada.

A interseção dessas superfícies é formada por 6 trechos desconexos, necessitando assim de vários pontos iniciais para o método da caminhada.

**Exemplo 6.2.6** Consideremos a superfície  $F(u, v) = ((4 + (2 + \cos(v))\cos(5u) - \sin(v)\sin(5u))\cos(u), (4 + (2 + \cos(v))\cos(5u) - \sin(v)\sin(5u))\sin(u), (2 + \cos(v))\sin(5u) + \sin(v)\cos(5u))$ ,  $-\pi \leq u \leq \pi$ ,  $-\pi \leq v \leq \pi$  e o parabolóide hiperbólico  $G(u, v) = (u, v, \frac{u^2 - v^2}{15})$ ,  $-6 \leq u \leq 6$ ,  $-6 \leq v \leq 6$ .

Usando o método da subdivisão da Seção 6.1 com nível de precisão igual a 5, após 13 minutos e 24 segundos, obtivemos um total de 8638 pontos. Dividindo os domínios em  $4^3 = 64$  partes e, nas partes que contiverem pontos da subdivisão escolhendo um ponto melhor aproximado da interseção, obtemos um total de 61 pontos que podem ser utilizados como pontos iniciais do método da caminhada (Figura 6.14).

Para cada um dos 61 pontos encontrados na subdivisão, foi iniciado uma caminhada com passo circular utilizando  $L = 0,05$ .

Os gráficos dessas superfícies, bem como sua sua interseção, estão desenhados na Figura 6.15. Os pontos obtidos na subdivisão estão assinalados nos domínios com um “x”. Observe a proximidades desses pontos assinalados com as curvas dos domínios que correspondem à interseção – isto ocorre porque a subdivisão utilizada (de em nível 5) é razoavelmente precisa.

A interseção dessas superfícies é formada por 10 trechos desconexos. Logo, são necessários pelo menos 10 pontos iniciais para o método da caminhada.

Esta interseção não é completamente determinada se for usada uma subdivisão mais grosseira, com menos precisão do que a que foi utilizada.

Com as mesmas condições iniciais (mesmo valor de  $L$ , mesmo número máximo de pontos em cada trecho de caminhada e os mesmos 61 pontos iniciais obtidos na subdivisão) o método da caminhada com passo tangencial de tamanho constante e igual a  $L$ , não consegue traçar toda a curva-interseção.

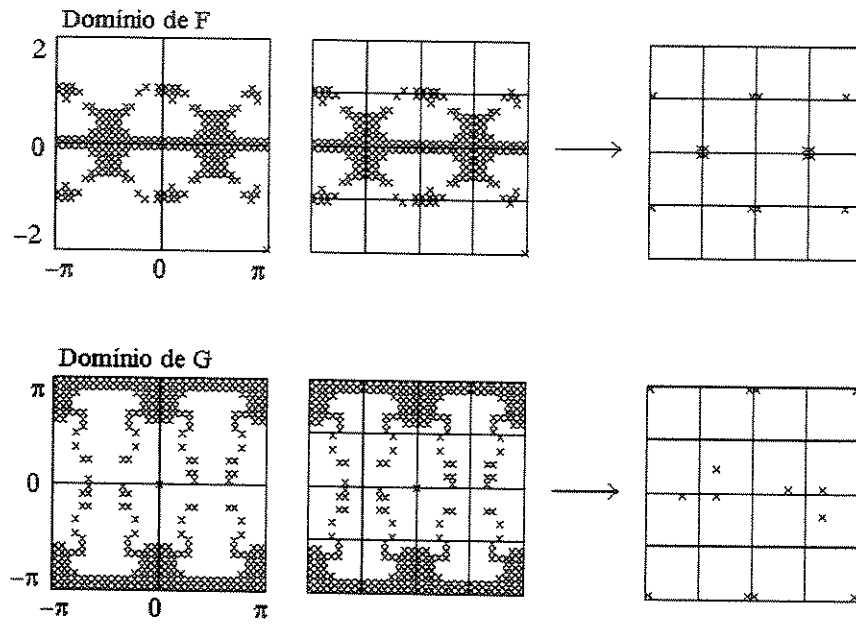


Figura 6.8: Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.3)

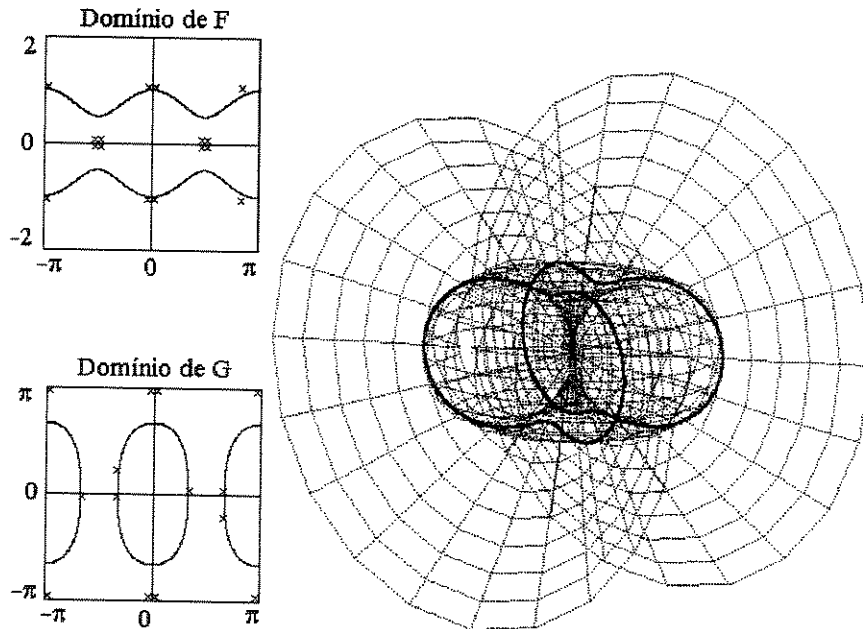


Figura 6.9: Interseção cone/toro (Exemplo 6.2.3)

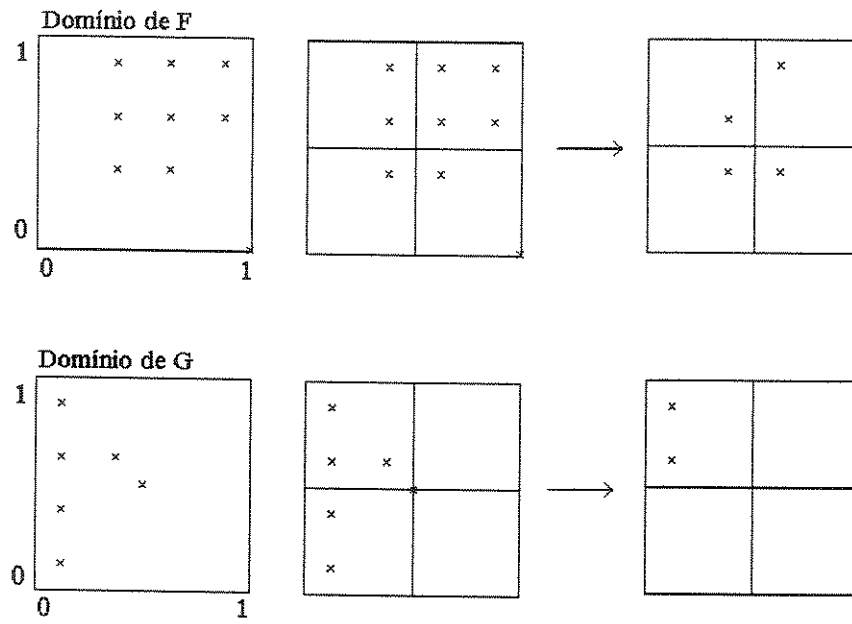


Figura 6.10: Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.4)

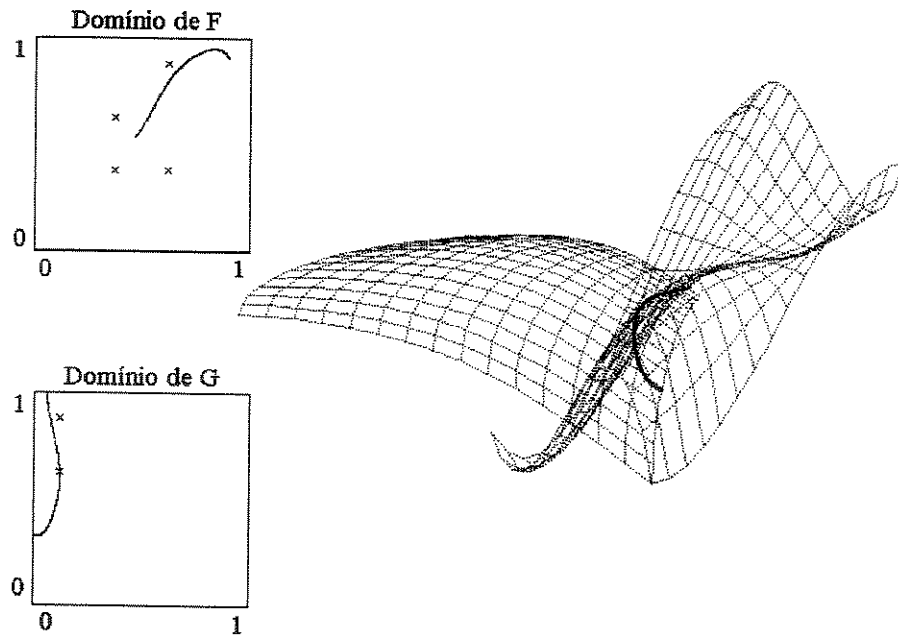


Figura 6.11: Superfície de Bézier/Sup. Racional (Exemplo 6.2.4)

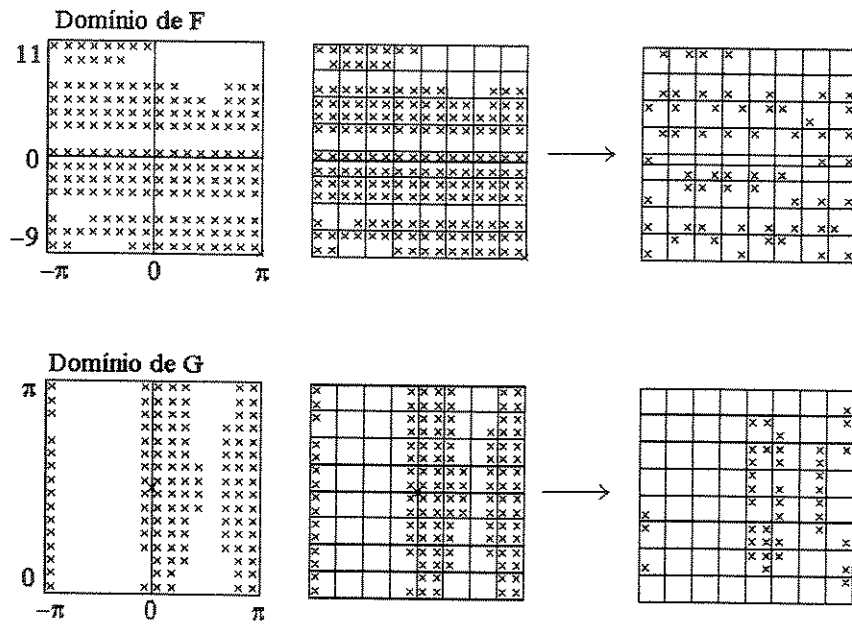


Figura 6.12: Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.5)

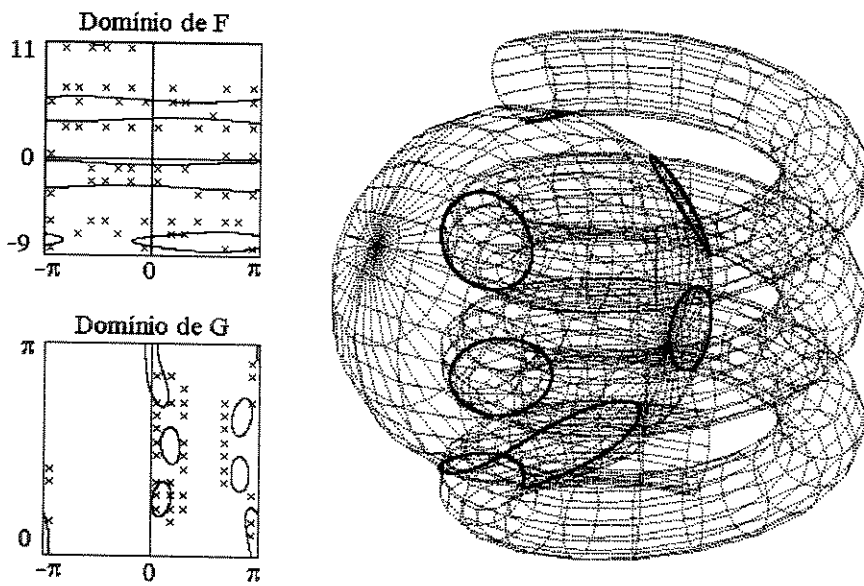


Figura 6.13: Interseção “mola”/esfera (Exemplo 6.2.5)



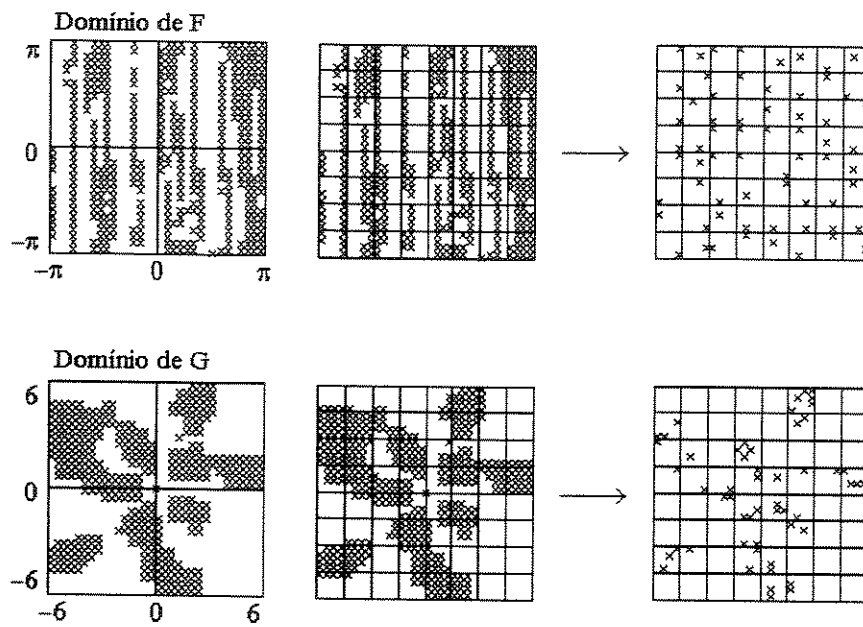


Figura 6.14: Selecionando pontos iniciais obtidos por subdivisão (Exemplo 6.2.6)

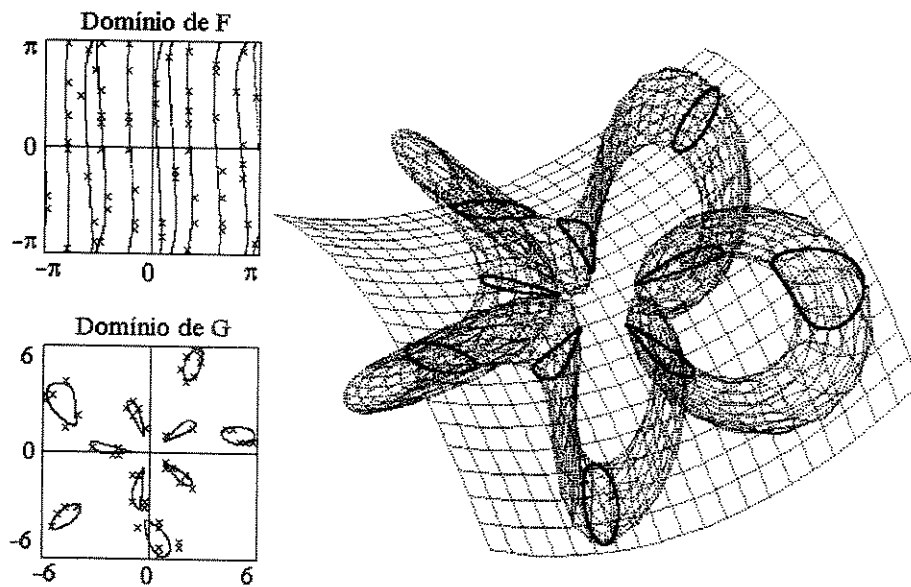


Figura 6.15: Exemplo 6.2.6

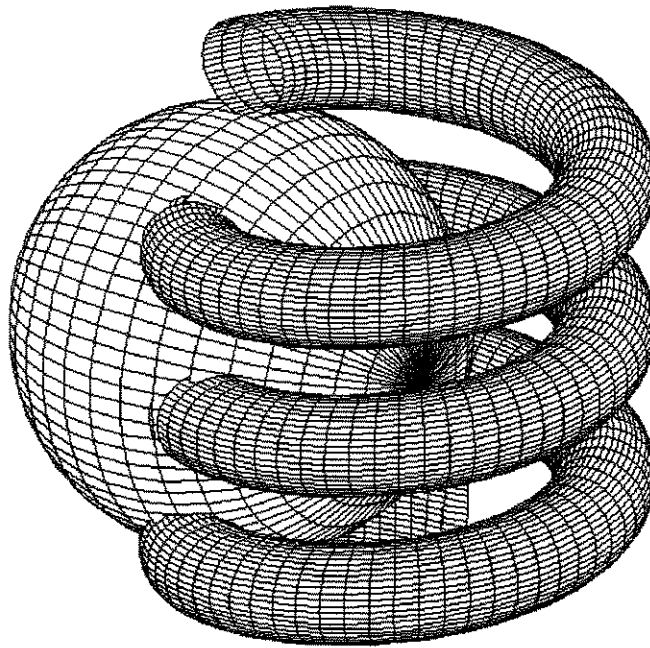


Figura 6.16: Interseção “mola”/esfera (Exemplo 6.2.5)

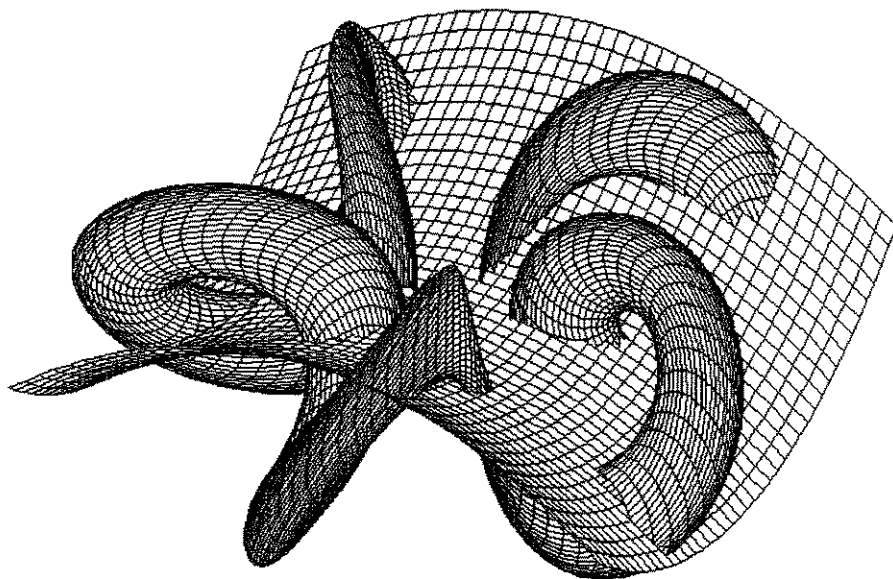


Figura 6.17: Superfícies do Exemplo 6.2.6

# Capítulo 7

## Conclusões

### 7.1 Considerações finais

Apresentamos um algoritmo que contribui com um importante item na determinação da interseção de duas superfícies regulares: a estimativa do próximo ponto da técnica de caminhada. Baseando-se em dois pontos da curva-interseção e seus respectivos vetores tangentes, propomos a construção de uma circunferência e estimamos o próximo ponto da curva sobre essa circunferência. Isto fornece pontos bastante próximos da interseção das superfícies.

De construção relativamente simples, nossa circunferência construída é uma aproximação do círculo osculador da curva-interseção e, conseqüentemente, tende a herdar interessantes propriedades do mesmo, por exemplo, o fato de se adaptar ao formato da curva e fazer um contato de 2ª ordem com a mesma, fornecendo assim aproximações melhores do que usando-se somente um contato de 1ª ordem (como a reta tangente).

A construção do nosso círculo osculador aproximado, apesar de simples, evidentemente é mais complicada do que a construção de uma simples reta tangente à curva-interseção. No entanto, no desempenho global, a caminhada com passo circular não consome muito mais tempo de CPU do que a caminhada usando o passo tangencial (constante ou adaptativo). Em diversos casos, a caminhada com passo circular consegue ser mais rápida do que a que usa um passo tangencial. Isto é possível porque os pontos mais próximos da curva-interseção (que sempre são obtidos com o passo circular) convergem mais rapidamente para a interseção do que aqueles obtidos pelo uso apenas do vetor tangente. Nos exemplos que testamos (incluindo os que são mostrados nas tabelas do capítulo 5) deu para confirmar

isto em muitos casos.

Além disso, os pontos obtidos com a caminhada com passo circular são melhor distribuídos do que os obtidos com os outros métodos mais simples de caminhada. Isto pode ser percebido observando-se a quantidade de pontos distintos que a aplicação de cada método oferece. Se for calculado o comprimento do trecho percorrido com cada técnica de caminhada, o passo circular fornece maiores trechos percorridos em quase todos os casos.

## 7.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Selecionar entre os pontos obtidos no processo de subdivisão aqueles que serão utilizados como pontos iniciais de trechos de caminhada é algo muito importante para o desempenho geral da técnica mista “subdivisão+caminhada”. Seria muito bom saber como descartar os pontos que levem a repetição de trechos já percorridos.
- Acreditamos ser possível a construção de um polinômio de grau 3 que faça contato de ordem 3 com a curva-interseção. Dessa forma, os pontos obtidos seriam bastante próximos da interseção, dispensando assim o uso das iterações da aplicação do método de Newton (que constrói seqüências de pontos que convergem para a interseção). Uma maneira de obter esse tipo de curva é tentando fazer uma generalização do trabalho de Stoyanov ([34]).
- Uma outra construção interessante que pode ser estudada futuramente é a da *esfera oscultriz* (ver [35]). Desse modo, seria possível a construção de uma curva com valores da torção  $\tau(s)$  e da curvatura  $\kappa(s)$  muito próximos da curva interseção exata. Logo, pelo *Teorema Fundamental das Curvas* (Teorema 2.2.2), a curva construída através da esfera oscultriz seria uma excelente aproximação para a curva interseção exata.

O grande desafio é construir uma curva que se aproxime bem a curva-interseção e que tenha um custo computacional não muito alto.

## Apêndice A

# Um resultado sobre o círculo osculador

Neste apêndice mostramos que a circunferência oscultriz (círculo osculador) em um ponto  $s = s_0$  de uma curva  $f(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s))$  parametrizada pelo comprimento de arco é a circunferência que melhor aproxima a curva  $f(s)$  no ponto  $f(s_0)$ , se  $\kappa(s_0) \neq 0$ . Este é um fato bem conhecido da Geometria Diferencial e pode ser encontrado em diversas referências, como por exemplo [26].

Para mostrar isso, vamos procurar determinar qual é a circunferência que faz o maior contato possível com  $f(s)$  em  $s = s_0$ .

Seja  $g(s)$  uma circunferência de raio  $R$  tal que  $g(s_0) = f(s_0)$ . Se tivermos também  $g'(s_0) = f'(s_0)$ , então, como  $f'(s_0) = \vec{T}(s_0) =$  vetor tangente a  $f(s)$  no ponto  $s = s_0$ , temos  $g'(s_0) = \vec{T}(s_0)$ .

Se  $g''(s_0) = f''(s_0)$ , então  $g''(s_0) = \vec{T}'(s_0) = \kappa(s_0)\vec{N}(s_0)$  onde  $\kappa(s_0)$  e  $\vec{N}(s_0)$  são a curvatura e o vetor normal a  $f(s)$  em  $s = s_0$ , respectivamente. Estamos utilizando a conhecida propriedade  $T'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$  (que é uma das equações de Frenet).

Como o plano osculador  $\mathcal{P}$  de  $f(s)$  em  $s = s_0$  é determinado pelo ponto  $f(s_0)$  e pelos vetores  $\vec{T}(s_0)$  e  $\vec{N}(s_0)$  e, além disso,  $g(s_0) = f(s_0)$ ,  $g'(s_0) = \vec{T}(s_0)$  e  $g''(s_0) = \kappa(s_0)\vec{N}(s_0)$  concluímos que o plano osculador de  $g(s)$  em  $s = s_0$  coincide com  $\mathcal{P}$ . Logo,  $g(s)$  pertence ao plano osculador a  $f(s)$  em  $s = s_0 \Rightarrow g(s) = C + x(s)\vec{T}(s_0) + y(s)\vec{N}(s_0)$ , onde  $C$  é o centro da circunferência  $g(s)$ .

Então  $R^2 = |g(s) - C|^2 = (g(s) - C) \cdot (g(s) - C) = (x(s)\vec{T}(s_0) + y(s)\vec{N}(s_0)) \cdot (x(s)\vec{T}(s_0) + y(s)\vec{N}(s_0)) = x(s)^2\vec{T}(s_0) \cdot \vec{T}(s_0) + 2x(s)y(s)\vec{T}(s_0) \cdot \vec{N}(s_0) + y(s)^2\vec{N}(s_0) \cdot \vec{N}(s_0) = x(s)^2 + y(s)^2$  uma vez que  $\vec{T}(s_0) \cdot \vec{T}(s_0) = \vec{T}(s_0) \cdot \vec{T}(s_0) = 1$  e  $\vec{T}(s_0) \cdot \vec{N}(s_0) = 0$ .

Obtemos assim  $x(s)^2 + y(s)^2 = R^2 \Rightarrow x(s) = R \cos(as + b)$  e  $y(s) = R \sin(as + b)$  para algum número real  $a$  e algum real  $b$  com  $0 \leq as + b < 2\pi$ .

Por outro lado,  $C - f(s_0) = R\vec{N}(s_0)$ , ou seja,  $C = f(s_0) + R\vec{N}(s_0)$  e substituindo na expressão anterior para  $g(s)$  obtemos

$$g(s) = f(s_0) + x(s)\vec{T}(s_0) + (y(s) + R)\vec{N}(s_0)$$

Como os vetores  $\vec{T}(s_0)$  e  $\vec{N}(s_0)$  são linearmente independentes e  $g(s_0) = f(s_0)$ , deveremos ter  $x(s_0) = 0$  e  $y(s_0) + R = 0 \Rightarrow x(s_0) = 0$  e  $y(s_0) = -R \Rightarrow \cos(as_0 + b) = 0$  e  $\sin(as_0 + b) = -1 \Rightarrow as_0 + b = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{3\pi}{2} - as_0 \Rightarrow x(s) = R \cos(a(s - s_0) + \frac{3\pi}{2}) = R \sin(a(s - s_0))$  e  $y(s) = R \sin(a(s - s_0) + \frac{3\pi}{2}) = -R \cos(a(s - s_0))$

Calculando a derivada de  $g(s)$  no ponto  $s_0$ , obtemos  $g'(s_0) = x'(s_0)\vec{T}(s_0) + y'(s_0)\vec{N}(s_0) = \vec{T}(s_0)$  e daí  $x'(s_0) = 1$  e  $y'(s_0) = 0 \Rightarrow x'(s_0) = aR \cos(a(s_0 - s_0)) = aR = 1$  ou seja  $a = 1/R$ .

Logo,

$$g(s) = f(s_0) + R \sin\left(\frac{s - s_0}{R}\right)\vec{T}(s_0) + R(1 - \cos\left(\frac{s - s_0}{R}\right))\vec{N}(s_0)$$

Derivando duas vezes com relação a  $s$ :

$$g''(s) = -\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s - s_0}{R}\right)\vec{T}(s_0) + \frac{1}{R} \cos\left(\frac{s - s_0}{R}\right)\vec{N}(s_0)$$

$\Rightarrow g''(s_0) = \frac{1}{R}\vec{N}(s_0) = \kappa(s_0)\vec{N}(s_0) \Rightarrow R = \frac{1}{\kappa(s_0)}$  isto  $R$  é o raio de curvatura de  $g(s)$  em  $s_0$ .

Desse modo,  $g(s)$  é uma circunferência com raio  $1/\kappa(s_0)$  situada no plano osculador a  $f(s)$  no ponto  $s = s_0$  e tangente a  $f(s)$  nesse mesmo ponto com  $f(s_0) = g(s_0)$ ,  $f'(s_0) = g'(s_0)$  e  $f''(s_0) = g''(s_0)$ . Logo,  $g(s)$  coincide com o círculo osculador a  $f(s)$  em  $s = s_0$ .

Se  $g(s)$  e  $f(s)$  tiverem contato em  $s_0$  de ordem 3, então  $g'''(s_0) = f'''(s_0)$ . Como  $g'''(s) = -\frac{1}{R^2} \cos\left(\frac{s - s_0}{R}\right)\vec{T}(s_0) - \frac{1}{R^2} \sin\left(\frac{s - s_0}{R}\right)\vec{N}(s_0)$ , temos  $g'''(s_0) = -\frac{1}{R^2}\vec{T}(s_0) = -\kappa(s_0)^2\vec{T}(s_0)$ . Por outro lado, derivando com relação a  $s$  a expressão  $g''(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$  e utilizando a equação de Frenet  $\vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)$  onde  $\tau(s)$  é a torção em  $s$  e  $\vec{B}(s)$  é o vetor binormal  $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ , obtemos  $g'''(s) = \kappa'(s)\vec{N}(s) + \kappa(s)\vec{N}'(s) = \kappa'(s)\vec{N}(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)) = \kappa'(s)\vec{N}(s) - \kappa(s)^2\vec{T}(s) + \kappa(s)\tau(s)\vec{B}(s) \Rightarrow$

$$g'''(s_0) = \kappa'(s_0)\vec{N}(s_0) - \kappa(s_0)^2\vec{T}(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)\vec{B}(s_0)$$

Comparando as duas últimas expressões obtidas para  $g'''(s_0)$  e usando o fato de que os vetores  $\vec{N}(s)$ ,  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{B}(s)$  são linearmente independentes, temos que  $\kappa'(s_0) = 0$  e  $\kappa(s_0)\tau(s_0) = 0$ . Pela nossa hipótese inicial  $\kappa(s_0) \neq 0$  obtemos  $\tau(s_0) = 0$ .

Assim, só haverá contato de ordem igual a 3 (ou de ordem superior) entre  $g(s)$  e  $f(s)$  no ponto  $s = s_0$  quando  $\kappa'(s_0) = \tau(s_0) = 0$ .

## Apêndice B

# Cálculo Aproximado de Derivadas

A Tabela B.1 mostra os resultados de um teste que fizemos para tentar justificar a escolha do valor  $h = 0,000001$ , usado em todos os cálculos de derivadas ao longo deste trabalho. Escolhemos três funções  $f_1(x) = \sin(3x)$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$  e  $f_3(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 4$  e calculamos suas derivadas  $f'(a)$ , onde  $a \in \{-1, 0, 1\}$ . Utilizamos  $h = 0,01$  e também  $h = 0,000001$ . É mostrado o erro cometido, ou seja, o módulo da diferença entre o valor aproximado e o valor exato encontrados.

Escolhida a expressão para aproximar a derivada primeira, podemos obter sem dificuldade uma expressão análoga para o cálculo da derivada segunda (supondo a sua existência):

$$f''(a) \approx \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} \approx \frac{\frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} - \frac{f(a) - f(a-2h)}{2h}}{2h} = \frac{f(a+2h) + f(a-2h) - 2f(a)}{4h^2}$$

Podem ser encontradas na literatura existente sobre o assunto (como [2], [10] e [32]) diversas maneiras de se calcular numericamente as derivadas. Por exemplo,

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h} + \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{3h} \quad (\text{B.1})$$

A fórmula B.1 é um caso particular de uma fórmula B.2 mais geral: sendo  $N \geq 1$  um inteiro qualquer

$$f'(a) \approx \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{nh} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(a+kh) \quad (\text{B.2})$$

Quanto maior o valor de  $N$ , melhor a precisão numérica.

Função	$a$	$h$	Derivada exata	Derivada aproximada	Erro
$f_1$	-1	0,010000	-2,969977	-2,969532	$4,45 \cdot 10^{-4}$
$f_1$	0	0,010000	3,000000	2,999550	$4,49 \cdot 10^{-4}$
$f_1$	1	0,010000	-2,969977	-2,969532	$4,45 \cdot 10^{-4}$
$f_1$	-1	0,000001	-2,969977	-2,969977	$2,48 \cdot 10^{-10}$
$f_1$	0	0,000001	3,000000	3,000000	$4,49 \cdot 10^{-12}$
$f_1$	1	0,000001	-2,969977	-2,969977	$2,48 \cdot 10^{-10}$
$f_2$	-1	0,010000	0,500000	0,500000	$1,25 \cdot 10^{-9}$
$f_2$	0	0,010000	-0,000000	0,000000	$0,00 \cdot 10^0$
$f_2$	1	0,010000	-0,500000	-0,500000	$1,25 \cdot 10^{-9}$
$f_2$	-1	0,000001	0,500000	0,500000	$1,33 \cdot 10^{-11}$
$f_2$	0	0,000001	-0,000000	0,000000	$0,00 \cdot 10^0$
$f_2$	1	0,000001	-0,500000	-0,500000	$1,33 \cdot 10^{-11}$
$f_3$	-1	0,010000	-21,000000	-21,000600	$6,00 \cdot 10^{-4}$
$f_3$	0	0,010000	-1,000000	-1,000200	$2,00 \cdot 10^{-4}$
$f_3$	1	0,010000	7,000000	7,000200	$2,00 \cdot 10^{-4}$
$f_3$	-1	0,000001	-21,000000	-21,000000	$5,56 \cdot 10^{-10}$
$f_3$	0	0,000001	-1,000000	-1,000000	$1,97 \cdot 10^{-12}$
$f_3$	1	0,000001	7,000000	7,000000	$1,85 \cdot 10^{-10}$

Tabela B.1: Cálculo aproximado de derivadas de algumas funções



## Apêndice C

# Alguns Detalhes de Implementação

### C.1 Os resultados mostrados pelo programa

Os principais algoritmos citados neste trabalho foram implementados na linguagem de programação C. Foram utilizados o Turbo C++ 3.0 para MS-DOS e o Borland C++ 4.02 para Windows 3.11.

O programa utilizado mostra seus resultados de duas maneiras: uma em forma de gráficos (como os mostrados no capítulo 6) e outra de forma puramente numérica, em forma de texto. Este tipo de saída possibilita determinadas análises da execução não contempladas pela saída gráfica (por exemplo, o número de iterações necessárias para encontrar cada ponto da interseção).

Outra importante utilidade da saída dos dados nessa forma numérica é que eles podem ser interpretados por outros programas.

A cada execução é criado um arquivo texto contendo em cada linha as informações correspondentes a cada ponto encontrado. Podem ser selecionados os valores que compõem ou não nesse tipo de arquivo, para isso basta alterar algumas constantes no arquivo de configuração do programa.

A seguir, mostramos como exemplo um início de um arquivo de dados gerado pelo programa. São mostrados os pontos da interseção, os pontos nos domínios de  $F$  e  $G$  que correspondem a esses pontos, seus vetores tangentes e, no final da linha, o número de iterações utilizadas.

```
(ponto inters) (pt dom F) (pt dom G) (vetor tg) [iter]
(-2.035 2.908 6.481) (-1.685 1.938) (-2.035 2.908) (0.581 0.725 -0.370) [2]
(-2.150 2.760 6.552) (-1.643 1.840) (-2.150 2.760) (0.562 0.751 -0.346) [1]
(-2.260 2.607 6.619) (-1.601 1.738) (-2.260 2.607) (0.543 0.777 -0.319) [2]
```

```
(-2.367 2.449 6.680) (-1.559 1.633) (-2.367 2.449) (0.524 0.801 -0.288) [1]
(-2.470 2.287 6.734) (-1.518 1.525) (-2.470 2.287) (0.507 0.824 -0.253) [1]
(-2.570 2.120 6.780) (-1.479 1.413) (-2.570 2.120) (0.492 0.845 -0.211) [2]
(-2.667 1.949 6.818) (-1.441 1.299) (-2.667 1.949) (0.479 0.863 -0.162) [1]
(-2.762 1.775 6.845) (-1.405 1.183) (-2.762 1.775) (0.469 0.877 -0.104) [2]
```

## C.2 A configuração do programa

As constantes mais importantes do programa podem ser facilmente alteradas. Para isso, basta que seja criado um arquivo texto com o mesmo nome do programa executável e que tenha extensão .cfg (por exemplo, "inters.cfg"). Nesse arquivo de configuração, as linhas que iniciarem com um ponto serão consideradas linhas de comentário. Além disso, tudo o que for escrito à direita de um ponto e vírgula também será considerado comentário.

Cada vez que o programa é executado, ele cria no final um arquivo texto CONFIG.TXT que mostra a configuração efetivamente utilizada.

Pode ser alterado um total de 88 constantes do programa. Um exemplo de tal arquivo de configuração, com valores de algumas constantes do programa está mostrado logo a seguir.

```
. Constantes usadas em todo o programa
.
arq_dados = DADOS.TXT      ; nome do arquivo de dados padrao
circular = sim             ; determina se usa metodo do passo circular
passo = 0.020000          ; passo L dos metodos de caminhada
h_erro = 0.00000100       ; erro usado no calculo de derivadas
z_erro = 0.00000100       ; erro na identificacao de dois numeros reais
.
. Constantes usadas no metodo da subdivisao
.
subdiv = sim               ; determina se usa metodo da subdivisao
nivel_sub = 3              ; nivel maximo de subdivisao
nivel_cla = 2              ; nivel de selecao de pontos subdiv.
```

```

arq_subdiv = SUBDIV.TXT ; arquivo com pts encontrados na subdivisao
.
. Constantes usadas na construcao dos graficos das superficies
.
fi =-0.400000          ; angulo de rotacao (eixo z)
teta =-0.700000       ; angulo de rotacao (eixo x)
uminf = 0.000000      ; valor minimo do parametro u (superf. F)
umaxf = 6.283185      ; valor maximo do parametro u (superf. F)
vminf =-1.570796     ; valor minimo do parametro v (superf. F)
vmaxf = 1.570796     ; valor maximo do parametro v (superf. F)
uming = 0.000000     ; valor minimo do parametro u (superf. G)
umaxg = 6.283185     ; valor maximo do parametro u (superf. G)
vming = 0.000000     ; valor minimo do parametro v (superf. G)
vmaxg = 6.283185     ; valor maximo do parametro v (superf. G)
n_pontos = 200        ; numero maximo de pontos em cada trecho
eixos = nao           ; determina se mostra eixos x, y, z
.
. Outras constantes
.
arq_config = CONFIG.TXT ; arquivo onde e' salva a configuracao
arq_erro = ERROS.MSG    ; nome do arquivo das mensagens de erro
decimais = 6             ; casas decimais mostradas
iteracoes = sim         ; determina se salva num. iteracoes em arquivo

```

### C.3 Algumas constantes, macros, tipos e variáveis globais

Duas das constantes mais importantes do programas são as constantes *h\_erro* e *z\_erro*. A constante *h\_erro* é usada no cálculo numérico de todas as derivadas e *z\_erro* é usada para identificar dois números reais: *x* será considerado “igual” a *y* quando  $|x - y| < z\_erro$ . O valor “padrão” de cada uma é tomado como sendo  $10^{-6}$ :

```
double h_erro = 1e-6, z_erro = 1e-6;
```

Uma constante simbólica também bastante utilizada no programa é a constante *INF*, o “infinito”, cujo valor “padrão” é  $3,4 \cdot 10^{38}$ . É usado para sinalizar determinadas situações em que ocorrer algum erro e é definido através de uma macro:

```
#define INF 3.4e38
```

Entre os vários tipos de dados implementados no programa, os mais utilizados são os tipos *ponto* e *ponto\_dominio*:

```
typedef struct { double x, y, z; } ponto;  
typedef struct { double u, v; } ponto_dominio;
```

O tipo *ponto* é usado para pontos no espaço tridimensional e o tipo *ponto\_dominio* é usado para pontos no plano (domínio da parametrização).

Algumas funções simples, como por exemplo o cálculo de  $x^2$ , a distância entre dois pontos  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  e o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

foram implementadas através de macros:

```
#define SQR(x) ((x)*(x))  
#define DISTANCIA(x1,y1,z1,x2,y2,z2) sqrt(SQR((x1)-(x2)) + SQR((y1)-(y2))\  
+ SQR((z1)-(z2)))  
#define Det3x3(a,b,c,d,e,f,g,h,i) ((a)*(e)*(i)+(c)*(d)*(h)+(b)*(f)*(g)\  
-(c)*(e)*(g)-(a)*(f)*(h)-(b)*(d)*(i))
```

## C.4 Tipos utilizados na subdivisão

No processo de subdivisão dos domínios, são utilizados os tipos *caixa* e *retangulo* definidos a seguir:

```
typedef struct { double x, y, z, X, Y, Z; } caixa;  
typedef struct { double xmin, xmax, ymin, ymax; } retangulo;
```

No tipo *caixa* são guardados um vértice  $(c.x, c.y, c.z)$  na parte inferior e um vértice  $(c.X, c.Y, c.Z)$  situado na parte superior da caixa e diagonalmente oposto. Uma *caixa* corresponde a um paralelepípedo no espaço 3D definido pelos dois vértices citados.

No tipo *retangulo* são guardadas informações a respeito do vértice inferior esquerdo e do superior direito de um retângulo do plano.

Para verificar se um ponto  $(a, b, c)$  pertence ao interior da caixa  $C$ , foi implementada uma macro *INTERIOR()* que é avaliada em 1 se o ponto pertencer ao interior da caixa (podendo estar inclusive nas faces da mesma) e é avaliada em 0 se o ponto estiver no exterior da mesma:

```
#define INTERIOR(a, b, c, C) (C.x <= a && a <= C.X && C.y <= b \
                             && b <= C.Y && C.z <= c && c <= C.Z)
```

O programa constrói uma caixa associada à região  $R$  do domínio estimando os valores máximos e mínimos das funções coordenadas  $f_1(u, v)$ ,  $f_2(u, v)$  e  $f_3(u, v)$  em várias subregiões de  $R$ . A quantidade de subregiões em que  $R$  é subdividida é definido pelo parâmetro  $N$  (que o programa usa como “padrão” os valores 80, 40, 20 ou 10, dependendo do tamanho da região a ser subdividida)

```
void DefineCaixa(caixa *C, int N, retangulo R, double (*f1)(double, double),
                double (*f2)(double, double), double (*f3)(double, double)) {
```

```
/* Define uma caixa ('bounding box') que limite F(u, v) quando (u, v) for
   restrito ao dominio R. Sao calculados maximos e minimos de F. */
```

```
double x, y, incrX, incrY;
incrX = (R.xmax - R.xmin)/N;
incrY = (R.ymax - R.ymin)/N;
R.xmax += 0.5*incrX;
R.ymax += 0.5*incrY;

C->X = C->Y = C->Z = -INF;
C->x = C->y = C->z = INF;
for (x = R.xmin; x <= R.xmax; x += incrX)
    for (y = R.ymin; y <= R.ymax; y += incrY) {
```

```

    if (f1(x, y) > C->X) C->X = f1(x, y);
    if (f1(x, y) < C->x) C->x = f1(x, y);
    if (f2(x, y) > C->Y) C->Y = f2(x, y);
    if (f2(x, y) < C->y) C->y = f2(x, y);
    if (f3(x, y) > C->Z) C->Z = f3(x, y);
    if (f3(x, y) < C->z) C->z = f3(x, y);
}
}

```

Para verificar se as caixas A e B se interceptam, o programa usa a seguinte função:

```

int IntCaixas(caixa A, caixa B) {

/* Verifica se as caixas A e B se interceptam. Retorna 1 se houver
   intersecao ou 0 em caso contrario. */
    if (INTERIOR(A.x, A.y, A.z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.X, A.y, A.z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.x, A.Y, A.z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.X, A.Y, A.z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.x, A.y, A.Z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.X, A.y, A.Z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.x, A.Y, A.Z, B)) return 1;
    if (INTERIOR(A.X, A.Y, A.Z, B)) return 1;

    if (INTERIOR(B.x, B.y, B.z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.X, B.y, B.z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.x, B.Y, B.z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.X, B.Y, B.z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.x, B.y, B.Z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.X, B.y, B.Z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.x, B.Y, B.Z, A)) return 1;
    if (INTERIOR(B.X, B.Y, B.Z, A)) return 1;
}

```

```

if (A.x <= B.x && B.X <= A.X && A.y <= B.y && B.Y <= A.Y &&
    B.z <= A.z && A.Z <= B.Z) return 1;
if (B.x <= A.x && A.X <= B.X && B.y <= A.y && A.Y <= B.Y &&
    A.z <= B.z && B.Z <= A.Z) return 1;

return 0;
}

```

## C.5 Cálculo de derivadas e do vetor tangente

Todas as derivadas calculadas pelo programa são calculadas através de macros, usando-se a constante  $h_{\text{erro}}$  como sendo o parâmetro  $h$ :

```

#define DER(f,a,h) ((f(a+h) - f(a-h))/(2.0*h))
#define DER2(f,a,h) ((-2.0*f(a) + f(a-2.0*h) + f(a+2.0*h))/(4.0*h*h))
#define DIF1(f,a,b,h) ((f(a+h,b) - f(a-h,b))/(2.0*h))
#define DIF2(f,a,b,h) ((f(a,b+h) - f(a,b-h))/(2.0*h))

```

$DER(f,a,h)$  calcula a derivada de  $f(x)$  no ponto  $x = a$ ,  $DER2(f,a,h)$  calcula a derivada segunda de  $f(x)$  no ponto  $x = a$  e  $DIF1(f,a,h)$  e  $DIF2(f,a,h)$  calculam as derivadas parciais de  $f(x,y)$  no ponto  $(a,b)$ .

É definido um tipo *vetor* (idêntico ao tipo *ponto*) e operações básicas com vetores como o cálculo do produto vetorial  $(v_1, v_2, v_3) = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$  e da norma de um vetor  $(v_1, v_2, v_3)$ :

```

typedef struct { double x, y, z; } vetor;
#define PROD_VET(v1,v2,v3,a1,a2,a3,b1,b2,b3) v1=(a2)*(b3)-(a3)*(b2);\
                                             v2=(a3)*(b1)-(a1)*(b3); v3=(a1)*(b2)-(a2)*(b1)
#define NORMA(v1, v2, v3) (sqrt((v1)*(v1)+(v2)*(v2)+(v3)*(v3)))

```

O cálculo do vetor tangente  $\vec{T}$ , efetuado muitas vezes ao longo de cada execução do programa, é efetuado pelo programa pela seguinte função que retorna o valor 1 se o cálculo tiver sido efetuado com sucesso e retorna 0 quando ocorrer algum erro:

```

int VetorTangente(vetor *T, double (*f1)(double, double),
    double (*f2)(double,double), double (*f3)(double,double), ponto_dominio pF,
    double (*g1)(double, double), double (*g2)(double, double),
    double (*g3)(double, double), ponto_dominio pG) {

    double a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2, d3,
    F_n1, F_n2, F_n3, G_n1, G_n2, G_n3, norma_T;

    /* Verifica se o ponto fornecido pertence 'a intersecao */
    if (DISTANCIA(f1(pF.u, pF.v), f2(pF.u, pF.v), f3(pF.u, pF.v),
        g1(pG.u, pG.v), g2(pG.u, pG.v), g3(pG.u, pG.v)) > z_erro) return 0;

    /* Calculo de 2 vetores tangentes 'a superficie F */
    a1 = DIF1(f1, pF.u, pF.v, h_erro);
    a2 = DIF1(f2, pF.u, pF.v, h_erro);
    a3 = DIF1(f3, pF.u, pF.v, h_erro);
    b1 = DIF2(f1, pF.u, pF.v, h_erro);
    b2 = DIF2(f2, pF.u, pF.v, h_erro);
    b3 = DIF2(f3, pF.u, pF.v, h_erro);

    /* Calculo de 2 vetores tangentes 'a superficie G */
    c1 = DIF1(g1, pG.u, pG.v, h_erro);
    c2 = DIF1(g2, pG.u, pG.v, h_erro);
    c3 = DIF1(g3, pG.u, pG.v, h_erro);
    d1 = DIF2(g1, pG.u, pG.v, h_erro);
    d2 = DIF2(g2, pG.u, pG.v, h_erro);
    d3 = DIF2(g3, pG.u, pG.v, h_erro);

    /* Vetor normal a F */
    PROD_VET(F_n1, F_n2, F_n3, a1, a2, a3, b1, b2, b3);
}

```



```

/* Vetor normal a G */
PROD_VET(G_n1, G_n2, G_n3, c1, c2, c3, d1, d2, d3);
/* Vetor tangente 'a intersecao */
PROD_VET(T->x, T->y, T->z, F_n1, F_n2, F_n3, G_n1, G_n2, G_n3);

norma_T = NORMA(T->x, T->y, T->z);
if (norma_T < z_erro) return 0;
T->x /= norma_T, T->y /= norma_T, T->z /= norma_T;
return 1;
}

```

## C.6 Como os pontos dos gráficos são desenhados na tela

Tendo sido determinados os valores das constantes  $X\_CENTRO$ ,  $Y\_CENTRO$  e  $TAM$  que correspondem à posição do gráfico na tela e à sua constante de ampliação, pode-se desenhar na tela qualquer ponto  $(X, Y)$  com *cor* especificada com a função *MarcaPonto()* :

```

void MarcaPonto(double X, double Y, int cor) {
    int a, b;
    a = (int) (X_CENTRO + X*TAM), b = (int) (Y_CENTRO - Y*TAM);
    putpixel(a, b, cor);
}

```

Escolhidos os valores de dois ângulos  $TETA$  e  $FI$ , então pode-se calcular a projeção axonométrica  $(proj\_X, proj\_Y)$  de qualquer ponto  $(x, y, z)$  no espaço 3D através de uma chamada à função *ProjetaPonto()*. Depois, para marcar  $(x, y, z)$  na tela, basta fazer uma chamada à função *MarcaPonto(proj\_X, proj\_Y, cor)*.

```

void ProjetaPonto(double x, double y, double z, double *proj_X, double *proj_Y){
    *proj_X = y*cos(TETA) + x*sin(TETA);
    *proj_Y = z*cos(FI) + x*cos(TETA)*sin(FI) - y*sin(FI)*sin(TETA);
}

```

# Referências Bibliográficas

- [1] Abdel-Malek, K. and Yeh, H. J. (1996), Determining intersection curves between surfaces of two solids, *Computer-Aided Design*, 28, 539–549.
- [2] Acton, F.S., (1990), *Numerical methods that work*, The mathematical association of America, Washington.
- [3] Andrade, L.N., Wu, S.T. (1996) Caminhando sobre uma interseção de superfícies com passos circulares, atas do IX Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, 1996.
- [4] Andrade, L.N., Wu, S.T. (1997) Marching along a regular surface/surface intersection with circular step, *preprint* submetido a *Computer Aided Geometric Design*.
- [5] Aziz, N.M., Bata, R. (1990), Bézier Surface/Surface Intersection, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 50–58.
- [6] Barnhill, R.E., Farin, G., Jordan, M. and Piper, B. R. (1987), Surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*, 4, 3–16.
- [7] Barnhill, R. E., and Kersey, S. N. (1990), A marching method for parametric surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*, 7, 257–280.
- [8] Carmo, M. P. (1976), *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- [9] Chang, L.C., Bein, W.W., Angel, E. (1994), Surface intersection using parallelism, *Computer Aided Geometric Design*, 11, 39–69.
- [10] Demidovitch, B., Maron, I. (1979) *Éléments de calcul numérique*, Éditions Mir, Moscou.

- [11] Dokken, T. (1985), Finding intersections of B-spline represented geometries using recursive subdivision techniques, *Computer Aided Geometric Design*, 2, 189–195.
- [12] Farin, G. (1990), *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*, Academic Press Inc., Boston.
- [13] Figueiredo, L. H., Stolfi, J., Adaptive enumeration of implicit surfaces with affine arithmetic, *Proceedings of Implicit Surfaces'95*, 161–170.
- [14] Figueiredo, L. H., Surface intersection using affine arithmetic, *Proceedings of Graphics Interface'96*, 168–175.
- [15] Foley, J.D., van Dam, A., Feiner S.K., Hughes, J.F. (1990), *Computer Graphics: principles and practice*, 2nd. edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [16] Garrity, T., On computing the intersection of a pair of algebraic surfaces (1989), *Computer Aided Geometric Design*, 6, 137–153.
- [17] Grandine, T. A., Klein IV, F. W. (1997), A new approach to the surface intersection problem, *Computer Aided Geometric Design*, 14, 111–134.
- [18] Hoschek, J., Lasser, D. (1993), *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A K Peters, Wellesley.
- [19] Houghton, E. G., Emmett, R. F. (1985), Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 2, 173–183.
- [20] Hu, C. Y., Maekawa, T., Sherbrooke, E. C., Patrikalakis, N. M. (1996), Robust interval algorithm for curve intersections, *Computer-Aided Design*, 28, 495–506.
- [21] Katz, S., Sederberg, T. W. (1988), Genus of the intersection curve of two rational surface patches, *Computer Aided Geometric Design*, 5, 253–258.
- [22] Koparkar, P. (1991), Surface intersection by switching from recursive subdivision to iterative refinement, *The Visual Computer*, 8, 47–63.
- [23] Kriezis, G. A., Prakash, P. V., Patrikalakis, N. M. (1990), Method for intersecting algebraic surfaces with rational polynomial patches, *Computer-Aided Design*, 22, 645–654.

- [24] Kriezis, G. A., Patrikalakis, N. M., Wolter, F. E. (1992) Topological and differential-equation methods for surface intersections, *Computer-Aided Design*, 24, 41–55.
- [25] Lasser, D. (1986), Intersection of parametric surfaces in the Bernstein-Bezier representation, *Computer-Aided Design*, 18, 186–192.
- [26] Lipschutz, M. (1969), *Theory and problems of Differential Geometry*, McGraw-Hill Inc., New York.
- [27] Müllenheim, G. (1990), Convergence of a surface/surface intersection algorithm, *Computer Aided Geometric Design*, 7, 415–423.
- [28] Müllenheim, G. (1991), On determining start points for a surface/surface intersection algorithm, *Computer Aided Geometric Design* 8 (1991), 401–408.
- [29] Patrikalakis, N. M. (1993), Surface-to-surface intersections, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 13, 89–95.
- [30] Plastock, R.A., Kalley, G. (1986) *Theory and problems of Computer Graphics*, McGraw-Hill, New York.
- [31] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. (1992) *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*, 2nd. edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [32] Ralston, A., Rabinowitz, P. (1978) *A first course in numerical analysis*, McGraw-Hill, New York.
- [33] Rogers, D.F., Adams, J.A., (1990) *Mathematical elements for Computer Graphics*, 2nd. edition, McGraw-Hill, New York.
- [34] Stoyanov, Tz. E. (1992), Marching along surface/surface intersection curves with an adaptive step length, *Computer Aided Geometric Design*, 9, 485–489.
- [35] Struik, D. J. (1961), *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover Publications Inc., New York.
- [36] Wolfram, S. (1988), *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*, 2nd. edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.