

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação - IMECC, da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de

Mestre em Matemática Aplicada.

Elia Rosário Castro San Miguel

MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À
ESCOAMENTO ROTATIVO DE GASES

Profº Dr. J. T. Sielawa
Orientador

Profº R. I. Cignoli
Coordenador de Pós Graduação

Campinas, abril de 1.983

UNICAMP

BIBLIOTECA CENTRAL

MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À
ESCOAMENTO ROTATIVO DE GASES

Elia Rosário Castro San Miquel

A Banca examinadora será composta pelos seguintes professores:

Dr. Jerzy T. Sielawa (orientador)

Dr. Miguel T. Netto (coorientador)

Dr. Mário Martinez

Dr. José V. Zaço (suplente).

Este trabalho foi realizado sob os auspícios do Instituto de Estudos Avançados - IEAv., do Centro Técnico Aeroespacial - C.T.A.

Aos meus pais,
que, na distância, sempre foram
o meu maior incentivo.

Agradecimentos

Ao Instituto de Estudos Avançados - CTA - através da Divi
são de Energia Nuclear, que me forneceu os meios materiais para a execu
ção deste trabalho.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Com
putação - UNICAMP - pelas facilidades concedidas à realização deste tra
balho.

Ao meu orientador Dr. Jerzy Tadeusz Siciawa pela paciên
cia, sugestões, auxílio e incentivo que me deu sempre que necessário.

Aos professores Mario Martines, J.L. Boldrini, e Miguel
Taube Neto pelos comentários, sugestões e estímulo recebidos.

Aos amigos e colegas pelo estímulo e em especial a Enir
Ducker pelas idéias e sugestões dadas.

Ao Júlio pelas palavras de apoio e confiança nos momentos
adequados e necessários.

A todos os que me prestaram direta ou indiretamente sua
importante contribuição.

Numerical analysis is a science

- Computation is an art. -

MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À
ESCOAMENTO ROTATIVO DE GASES

Elia Rosário Castro San Miquel

A Banca examinadora será composta pelos seguintes professores:

Dr. Jerzy T. Sielawa (orientador)

Dr. Miguel T. Netto (coorientador)

Dr. Mário Martinez

Dr. José V. Zaço (suplente).

Este trabalho foi realizado sob os auspícios do Instituto de Estudos Avançados - IEAv., do Centro Técnico Aeroespacial - C.T.A.

Aos meus pais,
que, na distância, sempre foram
o meu maior incentivo.

Agradecimentos

Ao Instituto de Estudos Avançados - CTA - através da Divi
são de Energia Nuclear, que me forneceu os meios materiais para a execu
ção deste trabalho.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Com
putação - UNICAMP - pelas facilidades concedidas à realização deste tra
balho.

Ao meu orientador Dr. Jerzy Tadeusz Siciawa pela paciên
cia, sugestões, auxílio e incentivo que me deu sempre que necessário.

Aos professores Mario Martines, J.L. Boldrini, e Miguel
Taube Neto pelos comentários, sugestões e estímulo recebidos.

Aos amigos e colegas pelo estímulo e em especial a Enir
Ducker pelas idéias e sugestões dadas.

Ao Júlio pelas palavras de apoio e confiança nos momentos
adequados e necessários.

A todos os que me prestaram direta ou indiretamente sua
importante contribuição.

Numerical analysis is a science

- Computation is an art. -

I N D I C E

	<u>PÁG.</u>
Índice	i
Índice de Figuras	v
Sumário	vi
Abstract	vii
Lista de Símbolos	viii
CAPÍTULO 1 - Introdução	1
1.1 - Histórico	1
1.2 - Introdução	2
CAPÍTULO 2 - Formulação Matemática	4
2.1 - Sistema de Equações de Conservação na Forma Invariante	4
2.2 - Sistema de Equações de Conservação em Coordenadas Cilíndricas	7
2.3 - Sistema de Equações de Conservação em Coordenadas Cilíndricas com Geometria em Regime Permanente	10
2.4 - Condições de Contorno	11
2.5 - Geometria da Centrífuga	12
2.6 - Rotação Rígida e Desvio da Rotação Rígi da do Gás	13
2.7 - Linearização das Variáveis de Perturba ção	17
2.8 - Adimensionalização das Equações Lineari zadas	20
2.9 - Condições de Contorno no Caso das Variá veis da Perturbação	25
CAPÍTULO 3 - Propriedades de Simetria e Anti-Sime tria do Sistema	29
3.1 - Introdução	29

PÁG.

3.2 - Decomposição das Condições de Contorno nas Partes Simétrica e Anti-simétrica ..	30
3.3 - Caso Simétrico	31
3.4 - Caso Anti-simétrico	33
3.5 - Características Especiais das Propriedades de Simetria e Anti-simetria	35
CAPÍTULO 4 - Método de Diferenças Finitas	37
4.1 - Introdução	37
4.2 - Diferenças Finitas de Primeira Ordem ...	38
4.2.a - Primeira Derivada	38
4.3 - Diferenças Finitas de Segunda Ordem	40
4.3.a - Diferenças Centrais	40
4.3.b - Diferenças "Forward"	42
4.3.c - Diferenças "Backward"	44
4.4 - Configurações Especiais	47
CAPÍTULO 5 - Obtenção do Sistema Final em Diferenças Finitas	50
5.1 - Introdução	50
5.2 - Rede Representativa da Centrífuga	51
5.3 - Aplicação de Diferenças Finitas ao Sistema	52
5.4 - Condições de Contorno	56
5.5 - Condições de Contorno para o caso ($z = 0, L/2$)	62
5.6 - Verificação das Propriedades de Simetria e Anti-simetria, para o Sistema em Diferenças Finitas	64
5.6.a - Caso Simétrico	64
5.6.b - Caso Anti-simétrico	65
CAPÍTULO 6 - Técnicas Computacionais	68
6.1 - Introdução	68

	<u>PÁG.</u>
6.2 - Representação de Variáveis	70
6.3 - Resolução do Sistema	72
6.4 - Documentação do Programa	73
6.4.a - Introdução - SCOA	73
6.4.b - Programa Principal	73
6.4.c - Subprogramas	74
6.4.d - Entrada	77
6.4.e - Saída	77
CAPÍTULO 7 - Conclusões	78
7.1 - Resultados Numéricos	78
7.2 - Valores dos Parâmetros	81
7.3 - Sugestões para Trabalhos Posteriores	82
Bibliografia	1
APÊNDICE A - Equação de Navier Stokes	A.1
A.1 - A Equação de Navier Stokes	A.1
A.2 - Relação entre Diádicas	A.1
APÊNDICE B - Integração pelo Método dos Trapézios com Intervalo Variável	B.1
APÊNDICE C - Inversa de uma Matriz pelo Método de Jordan	C.1
C.1 - Introdução	C.1
C.2 - Método de Jordan	C.1
APÊNDICE D - Resolução de Sistema em Matriz Particio nada	D.1
D.1 - Cálculo da Inversa	D.1
D.2 - Solução de Sistema Linear	D.2

PÁG.

D.2.a - Caso $b_2 = 0$ e $b_1 \neq 0$	D.2
D.2.b - Caso $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$	D.3

ANEXO 1 - Listagem do Programa SCOA	1
---	---

INDICE DE FIGURAS

	<u>PÁG.</u>
2.1 - Sistema de Coordenadas Cilíndricas	7
2.2 - Forma Geométrica da Centrífuga	13
2.3 - Contra-corrente numa Centrífuga	25
3.1 - Simplificação na Centrífuga	35
4.1 - Rede para Diferenças Finitas de Primeira Or dem	38
4.2 - Rede para Diferenças Finitas Centrais de Se gunda Ordem	40
4.3 - Rede para Diferenças Finitas Forward de Segun da Ordem	43
4.4 - Rede para Diferenças Finitas Backward de Se gunda Ordem	44
4.5 - Pontos de Configuração Especial	48
5.1 - Rede Representativa da Centrífuga	51
7.1.a - Caso Simétrico $\epsilon > 0$	78
7.1.b - Caso Simétrico $\epsilon < 0$	79
7.2.a - Caso Anti-simétrico $\epsilon > 0$	80
7.2.b - Caso Anti-simétrico $\epsilon < 0$	80

S U M Á R I O

É apresentado um método numérico para resolver as equações de movimento do escoamento secundário linearizado, no estado permanente axi-simétrico de um gás dentro de um cilindro em rotação. As condições de contorno nas paredes sólidas são decompostas nos casos simétrico e anti-simétrico. Devido a certas propriedades de invariância, novas condições de contorno são formuladas, para ambos os casos, no plano médio do cilindro. Em consequência, somente foi necessário um quarto de rede representativa do cilindro na solução numérica de qualquer dos casos. No sentido de obter resultados numéricos, é usado o método de diferenças finitas de segunda ordem. A solução final é obtida pela superposição das duas soluções particulares. Os resultados numéricos estão de acordo com as soluções analíticas aproximadas.

A B S T R A C T

A numerical method to solve the linearized, steady state, axisymmetric equations of motion of a secondary flow of a gas within a rotating cylinder is presented. The boundary conditions at the solid surfaces are decomposed into symmetric and antisymmetric cases. Due to certain invariance properties, new boundary conditions for both cases are developed at the middle plane of the cylinder. In consequence; only a fourth of the cross-sectional area of the cylinder has to be considered in the numerical solution of either case. In order to obtain the numerical results, a finite difference second order method was used. Great care had to be taken in choosing grid points due to the violent variations of flow parameters. The final solution is obtained by the superposition of the two particular solutions. The numerical results are in good agreement with analytical approximate solutions.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $A = \frac{\Omega^2 r_w^2}{2RT_0}$ - parâmetro adimensional que caracteriza o desempenho da centrífuga.
- A, B, C, D - matrizes de partição.
- Br - número de Brinkman.
- c_p, c_v - calores específicos a pressão e volume constantes.
- \vec{D} - diádica de deformações.
- e - energia interna.
- $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ - versores do sistema cilíndrico.
- E - número de Ekman.
- E' - número de Ekman baseado no segundo coeficiente de viscosidade.
- f - função genérica.
- \vec{g} - forças de volume no sistema inercial.
- $H = e^{-A[1 - (r/r_w)^2]}$

- n_i - distância horizontal entre os pontos nodais ($i, i+1$).
- \vec{i} - diádica unitária.
- I - matriz identidade.
- i - índice de linha na rede.
- j - índice de coluna.
- k - coeficiente de condutibilidade térmica (constante).
- k_j - distância vertical entre os pontos nodais ($j, j+1$).
- m - massa.
- p - pressão.
- $Pr = \frac{\gamma \mu c_v}{k}$ - número de Prandtl.
- q_v^* - taxa de incremento volumétrico de calor.
- \vec{q} - vetor fluxo de calor.
- R - constante do gás.

- r - coordenada do sistema cilíndrico.
- r_w - raio do cilindro.
- \mathbb{T} - tensor (diádica) de tensões.
- T - temperatura.
- T_0 - temperatura inicial.
- t - tempo.
- U - componente radial de velocidade.
- U_s, V_s, W_s, T_s - valores prescritos nas paredes.
- u - componente radial adimensional de perturbação.
- V - componente angular de velocidade.
- v - componente angular adimensional de perturbação.
- W - componente axial de velocidade.
- w - componente axial adimensional de perturbação.

- X - matriz geral.

- X^{-1} - inversa da matriz X.

- Z - coordenada cilíndrica.

- (*) - variáveis na rotação rígida.

- (~) - variáveis de perturbação.

- (-) - variáveis adimensionalizadas.

- (-) - variáveis de substituição.

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - partições da matriz X^{-1} .

- $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ -

- ϵ_1, ϵ_2 - variáveis de substituição para as partes simétrica e anti-simétrica respectivamente.

- θ - coordenada cilíndrica.

- μ - 1º/ coeficiente de viscosidade.

- μ' - 2º/ coeficiente de viscosidade.

- ρ - densidade.

- τ - volume fechado.
- ϕ - função de dissipação viscosa.
- Ω - velocidade angular do cilindro.
- ω - velocidade angular do gás.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Histórico

O estudo do campo de velocidade em cilindros em rotação é recente, algumas tentativas foram feitas para obter soluções analíticas ou numéricas do escoamento axissimétrico do gás.

Em 1.967, Gareth e Williams ⁽²⁾ apresentaram um método para integrar numericamente as equações de Navier-Stokes em três dimensões para o caso de escoamento incompressível. O sistema de equações na forma cilíndrica em coordenadas polares junto com a equação de Poisson para a pressão são integradas com respeito ao tempo por um processo iterativo. Todas as equações que governam o escoamento estão representadas por uma forma adequada em diferenças finitas.

Em 1.976, Kai ⁽³⁾ estudou um sistema não linear e usou o método de Newton modificado para resolver as equações de Navier-Stokes expressas em diferenças finitas. O gás contido no cilindro, foi admitido como sendo perfeito.

Também em 1.976, Soubbramayer e Laharque ⁽⁴⁾ fizeram um estudo numérico para computar o escoamento e a concentração isotópica numa centrífuga de gás. O método usado é o método de elementos finitos com solução direta ao invés de diferenças finitas e processos iterativos. O sistema de equações representativo depende basicamente do processo mecânico para gerar fluxo de contra-corrente e da condição térmica das paredes.

Finalmente em 1.977, Lopes ⁽⁵⁾ estudou o escoamento numa centrífuga mecânica girando em torno de seu eixo com uma velocidade angular w . A tampa superior do cilindro, é livre e gira com uma velocidade menor $(w - \Delta w)$ e a uma

distância pequena da tampa existe um disco com dois orifícios periféricos: um anular e outro circular. As paredes do cilindro estão numa temperatura constante T_0 .

1.2 - Introdução

O propósito deste trabalho é apresentar um método para resolver numericamente um sistema de equações diferenciais parciais composto por: a equação de continuidade, as três equações de momento de Navier - Stokes em coordenadas cilíndricas, radial azimutal e axial e a equação de energia.

Este sistema é associado ao estudo de escoamento axissimétrico compressível num cilindro de raio r_0 ; com duas tampas, uma superior e outra inferior.

Se todo o conjunto girar com uma velocidade angular Ω , sabe-se que a rotação do cilindro produz um escoamento de "corpo rígido" do gás nele contido. O movimento do gás é governado pelas equações de Navier - Stokes e o escoamento é axissimétrico.

Se uma das tampas do cilindro girar com uma velocidade de um pouco diferente, por exemplo $(1 + \epsilon)\Omega$; dentro do cilindro se produzirá um escoamento secundário. Este escoamento envolverá velocidades axiais que formarão o chamado fluxo de contra - corrente.

Uma forma adequada das equações em diferenças finitas fornece uma integração computacionalmente estável com uma representação razoável das características espaciais do escoamento.

Usamos para a representação o método de diferenças finitas de segunda ordem. Um grande cuidado deve ser tomado na escolha da conformação da rede representativa, no sentido de levar em consideração as variações violentas dos parâmetros do escoamento, como citado no trabalho de Sielwó - San Miguel (1).

O número de pontos nodais da rede, e consequentemente o número de incógnitas, está restrito à capacidade da memória do computador. Para contornar este problema usamos as propriedades do sistema representativo de equações, para decompor o escoamento em dois casos: simétrico e anti-simétrico. Com esta simplificação obtemos um melhor aproveitamento da rede, já que somente 1/4 do total da mesma é necessária para obter os resultados finais.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No capítulo "2" apresentamos o equacionamento básico e a dedução do sistema em variáveis de interesse na sua forma final a ser resolvido.

- No capítulo "3" estudamos a decomposição do sistema de equações nos casos simétrico e anti-simétrico, provando a invariância das equações.

- Nos capítulos "4" e "5" fazemos primeiro uma abordagem e análise do método de diferenças finitas de segunda ordem e depois sua aplicação ao sistema de equações estudado. Logo apresentamos a obtenção do sistema de equações em diferenças finitas na sua forma final. Também é verificada a invariância do sistema expresso em diferenças finitas, nas formas simétrica e anti-simétrica.

- No capítulo "6" apresentamos as técnicas computacionais utilizadas para efeito de melhor aproveitamento dos recursos do computador, destacando as estruturas de armazenamento apropriados para este caso. A segunda parte está composta pela documentação e organização do programa, assim como as instruções para futuros usuários do programa utilizado para resolver o problema.

Finalmente no capítulo "7" apresentamos uma análise dos resultados obtidos para grupos de dados e parâmetros de interesse. São sugeridos alguns tópicos de interesse para continuação do trabalho.

C A P Í T U L O 2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Em nosso estudo basear-nos-emos nas três equações de conservação: de massa, de quantidade de movimento e de energia. Notemos que a equação de conservação da quantidade de movimento é vetorial e que, portanto equivale a três equações escalares.

O gás cujo escoamento será considerado, é admitido como perfeito.

As tensões no gás durante o movimento dependem linearmente da taxa de deformações.

2.1 - Sistema de Equações de Conservação na Forma Invariante

As equações de conservação de massa, da quantidade de movimento e de energia, são respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad < (2.1a)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad < (2.1b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} e = \frac{1}{\rho} \vec{T}^T : (\vec{\nabla} \vec{U}) + q_v^* - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad < (2.1c)$$

onde:

ρ = densidade;

\vec{U} = velocidade no sistema inercial;

\vec{g} = forças de volume por unidade de massa;

\vec{T} = diádica (tensor) de tensões;

e = energia interna;

\dot{q}_v = taxa de incremento volumétrico de calor

\vec{q} = vetor fluxo de calor

o símbolo ":" denota duplo produto escalar e o índice superior T denota transposição.

Para apresentar o sistema de equações acima, em termos de variáveis de interesse, efetuaremos as seguintes transformações:

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

Admitindo que o fluido seja Newtoniano obtem-se,

$$\vec{T} = (-p + \mu' \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \vec{I} + \mu \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})^T \right] \quad (2.2)$$

onde:

p = pressão

\vec{I} = diádica unitária

μ = coeficiente de viscosidade

μ' = segundo coeficiente de viscosidade.

Substituindo (2.2) em (2.1b) e considerando $\rho = \text{cte}$, obtemos a equação de conservação da quantidade de Movimento na forma da equação de Navier - Stokes. (vide Apêndice A)

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + (\mu + \mu') \vec{\nabla} (\vec{\nabla} U) + \mu \nabla^2 U \quad (2.3)$$

Equação da Conservação de Energia

Admitimos:

i) a lei de Fourier para o fluxo de calor

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$$

onde:

k = coeficiente de condutibilidade térmica (cte.);

T = temperatura

ii) gás perfeito-térmica e caloricamente

$$p = \rho (C_p - C_v) T = \rho R T$$

$$e = C_v T = \frac{1}{\gamma} C_p T$$

onde:

R = constante do gás;

C_p e C_v são calores específicos à pressão e a volume constantes respectivamente e onde

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Assim a equação (2.1c) de energia pode ser escrita na forma:

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \right) = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - k \nabla^2 T + \rho q_v^* + \phi \quad (2.4)$$

onde:

ϕ é a função de dissipação viscosa definida:

$$\phi = \mu \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) : (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right]^T + (\vec{\nabla} \vec{U}) : (\vec{\nabla} \vec{U}) + \mu' (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})^2 \quad (2.5)$$

Desprezando as forças de volume e o termo q_v^* ; obtemos as equações de conservação na sua forma usual em gás dinâmica.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (2.6a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \right) = -\vec{\nabla} p + (\mu + \mu') \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \mu \nabla^2 \vec{U} \quad (2.6b)$$

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \right) = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - k \nabla^2 T + \phi \quad (2.6c)$$

onde:

ϕ é dada por (2.5).

Considerando as três equações acima e a equação de estado no gás perfeito:

$$p = \rho R T$$

obtemos um sistema de quatro equações com quatro incógnitas, sendo que uma equação e uma incógnita são vetoriais.

2.2 - Sistema de Equações de Conservação em Coordenadas Cilíndricas

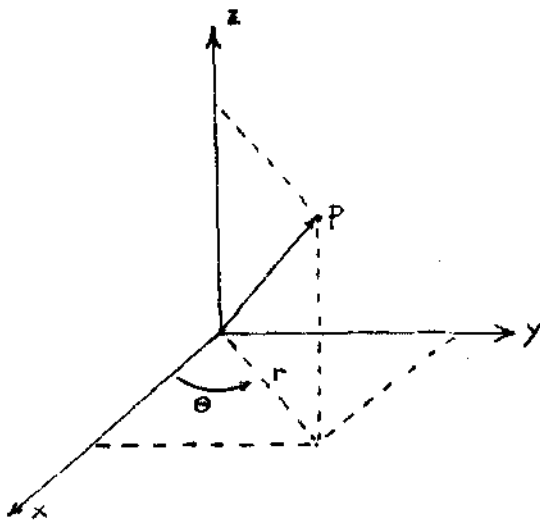


Fig. 2.1 Sistema de Coordenadas cilíndricas.

Admitindo o sistema acima ilustrado, com coordenadas r , θ e z ; tomando \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_z como respectivos versores do sistema cilíndrico e chamando:

$$\vec{U} = U\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_z \quad (2.7)$$

desdobramos a equação de quantidade de movimento em três equações escalares: radial, azimutal e axial; o sistema (2.6) fica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho U) + \frac{\rho U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W) = 0 \quad < (2.8a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{r} + \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \\ + (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad < (2.8b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} \right) + \\ + (\mu + \mu') \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad < (2.8c)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) + \\ + (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad < (2.8d)$$

$$\begin{aligned} \rho C_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ - P \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \phi \end{aligned} \quad (2.8e)$$

$$p = \rho R T \quad (2.8f)$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right)^2 \right\} + \\ + \mu \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\}^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde:

μ e μ' podem ser relacionados pela hipótese de Stokes.

$$\mu' = -\frac{2}{3} \mu \quad (2.10)$$

As passagens mais importantes da obtenção do sistema acima, podem ser encontradas no trabalho de Sielawa, MMF (6).

2.3 - Sistema das Equações de Conservação em Coordenadas Cilíndricas com Geometria em Regime Permanente

Admitindo simetria axial e regime permanente, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} () = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} () = 0$$

o sistema (2.8) fica:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho U) + \frac{\rho U}{r} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W) = 0 \quad < \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(U + \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r^2} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{U}{r^2} \right) + \\ + (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) &< \quad (2.11b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(U \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} \right) &= \\ = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{V}{r^2} \right) &< \quad (2.11c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) + \\ + (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) &< \quad (2.11d) \end{aligned}$$

$$\rho^{Cv} \left(U \frac{\partial T}{\partial r} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -p \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) +$$

$$+ k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \phi \quad (2.11e)$$

$$p = \rho R T \quad (2.11f)$$

onde a função dissipação fica:

$$\phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{U}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right)^2 \right\} + \mu' \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\}^2 \quad (2.12)$$

2.4 - Condições de Contorno

O sistema (2.11) representa escoamento viscoso no regime do continuum, logo a condição de contorno para a velocidade \vec{U} nas paredes sólidas e a de aderência ("non-slip").

No sistema cilíndrico

$$U = U_s$$

$$V = V_s$$

$$W = W_s$$

Admitiremos valores prescritos para a temperatura T_s na parede sólida:

$$T = T_s$$

No caso da densidade s \tilde{o} existe uma condi \tilde{c} o de con-
torno no sentido global, de que dentro de um volume fecha
do por paredes s \tilde{o} lidas, no regime permanente a quantidade
de massa m permanece constante, isto \tilde{e} :

$$\int_{\tau} \rho \, d\tau = m$$

As condi \tilde{c} o \tilde{e} s de contorno no eixo de simetria ($r = 0$)
podem ser obtidas do sistema (2.11) de uma maneira natural.

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Observamos que das cinco equa \tilde{c} o \tilde{e} s (2.11) obtemos so-
mente quatro condi \tilde{c} o \tilde{e} s de contorno, pois a mesma condi \tilde{c} o
 $U = 0$ \tilde{e} obtida de duas equa \tilde{c} o \tilde{e} s (2.11a) e (2.11b). Esta
condi \tilde{c} o "perdida" para a densidade pode ser substitu \tilde{i} da
pela de fluxo vertical global, chamada tamb \tilde{e} m de condi \tilde{c} o
de refluxo nulo. Esta condi \tilde{c} o \tilde{e} \tilde{e} amplamente discutida no
trabalho de Sielawa, MMF (6).

$$\int_0^1 \rho^* w \, dr = 0$$

onde:

ρ^* \tilde{e} associado as vari \tilde{a} veis de perturba \tilde{c} o a ser
definidas na se \tilde{c} o 2.6

2.5 - Geometria da Centr \tilde{i} fuga

Consideramos um cilindro circular, contendo g \tilde{a} s, gi-
rando em regime permanente em torno do seu eixo de sime

tria. Colocamos coordenadas cilíndricas de maneira ao eixo z coincidir com o eixo de simetria (Fig. 2.2). Admitimos que o plano $z = 0$ é o plano horizontal de simetria, a tampa superior está localizada em $z = L/2$ e a tampa inferior em $z = -L/2$, onde L é o comprimento do cilindro e r_w o seu raio.

Dentro do cilindro temos um gás perfeito governado pelo sistema de equações (2.11).

Estamos interessados em determinar numericamente qual será o escoamento do gás no regime permanente, provocado pelo giro do cilindro e das tampas com uma velocidade angular Ω .

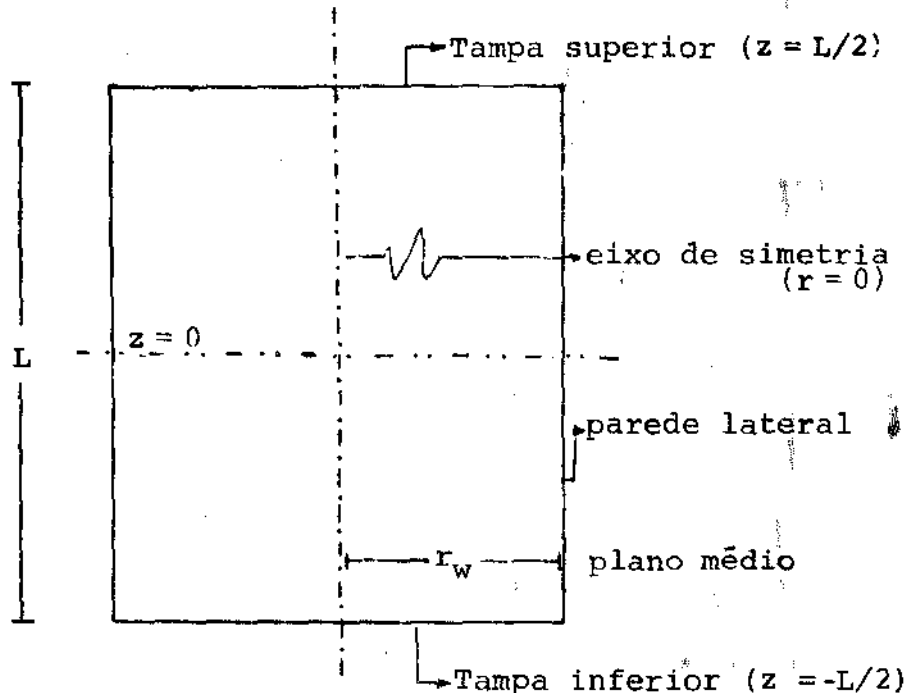


Fig: 2.2 Forma geométrica da centrífuga.

2.6 - Rotação Rígida e Desvio da Rotação Rígida do Gás

Como é conhecido na literatura ⁽⁶⁾, usando as hipóteses $w = 0$ $\partial v / \partial z = 0$, e resolvendo o sistema (2.11), obtemos os parâmetros da rotação rígida:

$$U^* = 0$$

$$V^* = \Omega r$$

$$W^* = 0$$

$$p^* = p_w e^{-A[1 - (r/r_w)^2]}$$

$$\rho^* = \rho_w e^{-A[1 - (r/r_w)^2]}$$

$$T^* = T_0$$

onde:

$$A = \frac{\Omega^2 r_w^2}{2 RT_0} \quad (2.12)$$

é um parâmetro que caracteriza o desempenho da centrífuga e ρ_w e p_w são densidade e pressão na parede respectivamente.

As hipóteses $W = 0$ e $\partial V / \partial z = 0$ podem não ser satisfeitas se o escoamento dentro do cilindro não for correspondente ao corpo rígido; o que poderia acontecer por exemplo:

- i) Se uma das tampas girar com velocidade angular diferente do resto do cilindro (por exemplo $\Omega - \Delta \Omega$); pela condição de aderência, a condição de contorno nas duas tampas será $V = \Omega r$ e $V = (\Omega - \Delta \Omega)r$.
- ii) Se a temperatura prescrita T_0 nas paredes, não for constante, podem-se criar correntes térmicas dentro do gás com $W \neq 0$;
- iii) Se houver injeção e retirada de massa haverá certamente regiões dentro do cilindro onde $W \neq 0$.

Neste caso é desejado que haja uma perturbação da rotação rígida na forma de um escoamento secundário de con

tracorrente sob o ponto de vista do desempenho de separação. Neste tipo de escoamento uma parte do gás sobe junto as paredes e uma outra desce junto ao eixo.

Para analisar este tipo de escoamento introduzimos "variáveis de perturbação" \tilde{U} , \tilde{V} , \tilde{W} , \tilde{p} , $\tilde{\rho}$, \tilde{T} tais que:

$$U = U^* + \tilde{U} = \bar{U} \quad \triangleleft \quad (2.13a)$$

$$V = V^* + \tilde{V} = \Omega r + \tilde{V} \quad \triangleleft \quad (2.13b)$$

$$W = W^* + \tilde{W} = \tilde{W} \quad \triangleleft \quad (2.13c)$$

$$p = p^* + \tilde{p} = p_w^H + \tilde{p} \quad \triangleleft \quad (2.13d)$$

$$\rho = \rho^* + \tilde{\rho} = \rho_w^H + \tilde{\rho} \quad \triangleleft \quad (2.13e)$$

$$T = T^* + \tilde{T} = T_o + \tilde{T} \quad \triangleleft \quad (2.13f)$$

onde:

$$H = e^{-A} \left[1 - (r/r_w)^2 \right] \quad \triangleleft \quad (2.14)$$

Note-se que:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{2Ar}{r_w^2} H$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

e tem-se ainda:

$$p_w = \rho_w R T_o \quad \triangleleft \quad (2.15)$$

Substituindo estes parâmetros no sistema de equações (2.11) obtemos:

$$\rho_w H \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{(2A r' + r_w^2)}{r_w^2 r} \rho_w H \tilde{U} + \rho_w H \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{U})}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r} \tilde{\rho} \tilde{U} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{W})}{\partial z} = 0 \quad (2.16a)$$

$$- 2 \Omega \rho_w H \tilde{V} - \Omega^2 r \tilde{\rho} + \rho_w H \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tilde{V}^2 \right) -$$

$$- 2 \Omega \tilde{\rho} \tilde{V} + \tilde{\rho} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \tilde{\rho} \tilde{W} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tilde{\rho} \tilde{V}^2 =$$

$$= - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{U}}{r^2} \right) +$$

$$+ (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) \quad (2.16b)$$

$$2 \Omega \rho_w H \tilde{U} + \rho_w H \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tilde{U} \tilde{V} \right) - 2 \Omega \tilde{\rho} \tilde{U} +$$

$$+ \tilde{\rho} \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \tilde{\rho} \tilde{W} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tilde{\rho} \tilde{U} \tilde{V} =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{V}}{r^2} \right) \quad (2.16c)$$

$$\rho_w H \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) + \tilde{\rho} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \tilde{\rho} \tilde{W} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} =$$

$$= - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) \quad (2.16d)$$

$$\begin{aligned}
& c_v \rho_w H \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) + c_v \tilde{\rho} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + c_v \tilde{\rho} \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = \\
& = -P_w H \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) - \tilde{p} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \frac{1}{r} \tilde{p} \tilde{U} - \tilde{p} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} + \\
& + k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) + \phi \quad < (2.16e)
\end{aligned}$$

$$\tilde{p} = \rho_w H R \tilde{T} + R T_o \tilde{\rho} + R \tilde{\rho} \tilde{T} \quad < (2.16f)$$

onde

$$\begin{aligned}
\phi = \mu & \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{U}}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{\tilde{V}}{r} \right)^2 \right\} + \mu' \left\{ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right\}^2
\end{aligned}$$

Os termos sem variáveis de perturbação cancelaram-se mutuamente no processo da dedução das equações (2.16) e os termos foram ordenados por aparecimento de variáveis de perturbação.

2.7 - Linearização das Variáveis de Perturbação

Se considerarmos pequena a perturbação da rotação rígida, os termos de ordem maior que um, (isto é, contendo produtos das variáveis de perturbação) podem ser desprezadas nas equações (2.16). Assim obtemos:

$$\rho_w H \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{2Ar^2 + r_w^2}{r_w^2 r} \rho_w H \tilde{U} + \rho_w H \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = 0 \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} -2 \Omega \rho_w H \tilde{V} - \Omega^2 r \tilde{\rho} &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{U}}{r^2} \right) + \\ &+ (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.17b)$$

$$2 \Omega \rho_w H \tilde{U} = \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{V}}{r^2} \right) \quad (2.17c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial z^2} \right) + \\ &+ (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.17d)$$

$$\rho_w H \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) \quad (2.17e)$$

$$\tilde{p} = \rho_w H R \tilde{T} + R T_0 \tilde{\rho} \quad (2.17f)$$

onde A é definido pela equação (2.12) e a relação entre \tilde{p}_w e $\tilde{\rho}_w$ é definido pela equação (2.15).

Dividindo-se a primeira equação por $\rho_w H$, obtemos:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = - \frac{2 Ar}{r_w^2} \tilde{U}$$

E usando o resultado acima no sistema (2.17) obtemos :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \frac{2 Ar^2 + r_w^2}{r_w^2 r} \tilde{U} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = 0 \quad < (2.18a)$$

$$\begin{aligned} -2 \Omega \rho_w H \tilde{V} - \Omega^2 r \tilde{p} &= \\ &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} + \left(\frac{\mu}{r} - \frac{2 (\mu + \mu') Ar}{r_w^2} \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + \\ &+ \mu \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} - \left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{2 (\mu + \mu') A}{r_w^2} \right) \tilde{U} \end{aligned} \quad < (2.18b)$$

$$2 \Omega \rho_w H \tilde{U} = \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{V}}{r^2} \right) \quad < (2.18c)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial z^2} \right) - 2 (\mu + \mu') \frac{Ar}{r_w^2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \quad < (2.18d)$$

$$- \frac{2A}{r_w^2} \rho_w r H \tilde{U} = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) \quad < (2.18e)$$

$$\tilde{p} = \rho_w H R \tilde{T} + R T_o \tilde{p} \quad < \quad (2.18f)$$

Note-se que do sistema acima pode-se facilmente eliminar \tilde{p} (ou então $\tilde{\rho}$) por meio da equação de estado (2.18f).

2.8 - Adimensionalização das Equações Linearizadas

Para adimensionalizar as equações (2.18) fazemos as seguintes substituições:

$$r = r_w \hat{r} \quad < \quad (2.19a)$$

$$z = r_w \hat{z} \quad < \quad (2.19b)$$

$$\tilde{U} = \Omega r_w \hat{U} \quad < \quad (2.19c)$$

$$\tilde{V} = \Omega r_w \hat{V} \quad < \quad (2.19d)$$

$$\tilde{W} = \Omega r_w \hat{W} \quad < \quad (2.19e)$$

$$\tilde{p} = p^* \hat{p} = p_w H \hat{p} \quad < \quad (2.19f)$$

$$\tilde{\rho} = \rho^* \hat{\rho} = \rho_w H \hat{\rho} \quad < \quad (2.19g)$$

$$\tilde{T} = T^* \hat{T} = T_o \hat{T} \quad < \quad (2.19h)$$

Com a escolha acima obtemos um sistema simples e conveniente no tratamento matemático.

As relações dos parâmetros "hat" com as variáveis originais do sistema (2.13) são:

$$U = \Omega r_w \hat{U}$$

$$V = \Omega r + \Omega r_w \hat{V} = \Omega r_w (\hat{r} + \hat{V})$$

$$W = \Omega r_w \hat{W}$$

$$p = p^* (1 + \hat{p}) = p_w H (1 + \hat{p})$$

$$\rho = \rho^* (1 + \hat{\rho}) = \rho_w H (1 + \hat{\rho})$$

$$T = T^* (1 + \hat{T}) = T_o (1 + \hat{T})$$

Substituindo-se (2.19) nas equações (2.18) obtem-se:

$$\frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Omega r_w \hat{U} \right) + \frac{2 A r_w^2 \hat{r}^2 + r_w^2}{r_w^3 \hat{r}^2} \Omega r_w \hat{U} +$$

$$+ \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Omega r_w \hat{W} \right) = 0 \quad < \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned}
 - 2 \Omega^2 r_w \rho_w H \hat{V} - \Omega^2 r_w \rho_w H \hat{r} \hat{\rho} &= - \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(p_w H \hat{\rho} \right) + \\
 + \frac{\mu}{r_w^2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} \left(\Omega r_w \hat{U} \right) + \left(\frac{\mu}{r_w \hat{r}} - \frac{2 (\mu + \mu') A r_w \hat{r}}{r_w^2} \right) \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\Omega r_w \hat{U} \right) + \\
 + \frac{\mu}{r_w^2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \left(\Omega r_w \hat{U} \right) - \left(\frac{\mu}{r_w^2 \hat{r}^2} + \frac{2 (\mu + \mu') A}{\hat{r}^2} \right) \Omega r_w \hat{U} &< (2.20b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \Omega^2 r_w \rho_w H \hat{U} &= \frac{\mu}{r_w^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} \left(\Omega r_w \hat{V} \right) + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\Omega r_w \hat{V} \right) + \right. \\
 + \left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \left(\Omega r_w \hat{V} \right) - \frac{\Omega r_w \hat{V}}{\hat{r}^2} \right] &< (2.20c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(p_w H \hat{\rho} \right) &= \frac{\mu}{r_w^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} \left(\Omega r_w \hat{W} \right) + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\Omega r_w \hat{W} \right) + \right. \\
 + \left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \left(\Omega r_w \hat{W} \right) \right] - 2 (\mu + \mu') \frac{A \hat{r}}{r_w^2} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\Omega r_w \hat{U} \right) &< (2.20d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - 2 A \Omega p_w H \hat{r} \hat{U} &= \frac{k}{r_w^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} \left(T_o \hat{T} \right) + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(T_o \hat{T} \right) + \right. \\
 + \left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \left(T_o \hat{T} \right) \right] &< (2.20e)
 \end{aligned}$$

$$p_w H \hat{\rho} = \rho_w R T_o H \hat{T} + \rho_w R T_o H \hat{\rho} < (2.20f)$$

Agora expressando H em termos de \hat{r} temos:

$$H = e^{-A(1-\hat{r}^2)} < (2.21)$$

de onde vem que

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{r}} = 2A\hat{r} e^{-A(1-\hat{r}^2)} = 2A\hat{r}H$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

e definimos ainda dois números adimensionais:

i) Número de Ekman

$$E = \frac{\mu}{\rho_w \Omega r_w^2}$$

ii) Número de Ekman baseado no segundo coeficiente de viscosidade

$$E' = \frac{\mu'}{\rho_w \Omega r_w^2}$$

iii) Número de Brinkman

$$Br = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (Pr) A$$

onde:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\gamma \mu c_v}{k}$$

é o número de Prandtl.

Observamos a título de informação que nas ultracentrifugas modernas de UF₆ as ordens de grandeza dos números E e Br, nas condições de trabalho são 10⁻⁶ e 1 respectivamente.

Admitindo a hipótese de Stokes (2.10) a relação entre E e E' seria:

$$E' = - \frac{2}{3} E \quad < \quad (2.22)$$

Introduzindo todas estas equações o sistema (2.20) pode ser escrito na forma:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{r}} + \frac{2A}{\hat{r}} \hat{r}^2 + 1 \hat{U} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (2.23a)$$

$$-2\hat{V} - \hat{r} \hat{\rho} + \hat{r} \hat{p} = -\frac{1}{2A} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} + \frac{E}{H} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{r}^2} + \left[\frac{E}{H\hat{r}} - \frac{2A(E+E')}{H} \hat{r} \right] \frac{\partial \hat{U}}{\partial r} + \frac{E}{H} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{z}^2} - \left[\frac{E}{H\hat{r}^2} + \frac{2(E+E')}{H} A \right] \hat{U} \quad (2.23b)$$

$$2\hat{U} = \frac{E}{H} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{z}^2} - \frac{V}{\hat{r}^2} \right) \quad (2.23c)$$

$$\frac{1}{2A} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = \frac{E}{H} \left(\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{z}^2} \right) - \frac{2(E+E')}{H} A \hat{r} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} \quad (2.23d)$$

$$-4(Br) \hat{r} \hat{U} = \frac{E}{H} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{z}^2} \right) \quad (2.23e)$$

$$\hat{p} = \hat{T} + \hat{\rho} \quad (2.23f)$$

Eliminando $\hat{\rho}$ da equação de estado (2.23f), omitindo o símbolo ($\hat{\cdot}$) das variáveis r, z, p, T e chamando:

$$\begin{aligned} u &= \hat{U} \\ v &= \hat{V} \\ w &= \hat{W} \end{aligned}$$

e ainda vendo a hipótese de Stokes que relaciona E com E' , equação (2.22), o sistema (2.23) fica:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2A}{r} r^2 + 1 u + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.24a)$$

$$-2v + rT = -\frac{1}{2A} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{E}{H} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{2Ar}{3} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{3} A \right) u \quad < (2.24b)$$

$$2 u = \frac{E}{H} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad < (2.24c)$$

$$\frac{1}{2A} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{E}{H} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w + \partial^2 W}{\partial r \partial z^2} - \frac{2}{3} Ar \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad < (2.24d)$$

$$4 (Br) r u = \frac{E}{H} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad < (2.24e)$$

Agora lembrando H da equação (2.14):

$$H = e^{-A} (1 - r^2)$$

e desfazendo-se de r nos denominadores para evitar indefinições, obtemos:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} + (2 Ar^2 + 1)u + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad < (2.25a)$$

$$r^3 T - 2r^2 v + \frac{1}{2A} r^2 \frac{\partial p}{\partial r} = E e^A (1-r^2) \left\{ r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \right.$$

$$\left. r \left(1 - \frac{2}{3} Ar^2 \right) \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{2}{3} Ar^2 \right) u \right\} \quad < (2.25b)$$

$$2 r^2 u = E e^A (1 - r^2) \left(r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v \right) \quad < (2.25c)$$

$$r \frac{\partial p}{\partial z} = 2AE e^A (1 - r^2) \left\{ r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} + r \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{2}{3} Ar^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \quad < (2.25d)$$

$$4 (Br) r^2 u = -E e^A (1-r^2) \left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad < (2.25e)$$

2.9 - Condições de Contorno no Caso das Variáveis da Per turbação

Como já foi dito anteriormente a configuração mais desejada sob o ponto de vista da separação é a chamada con
tracorrente mostrada na figura 2.3.

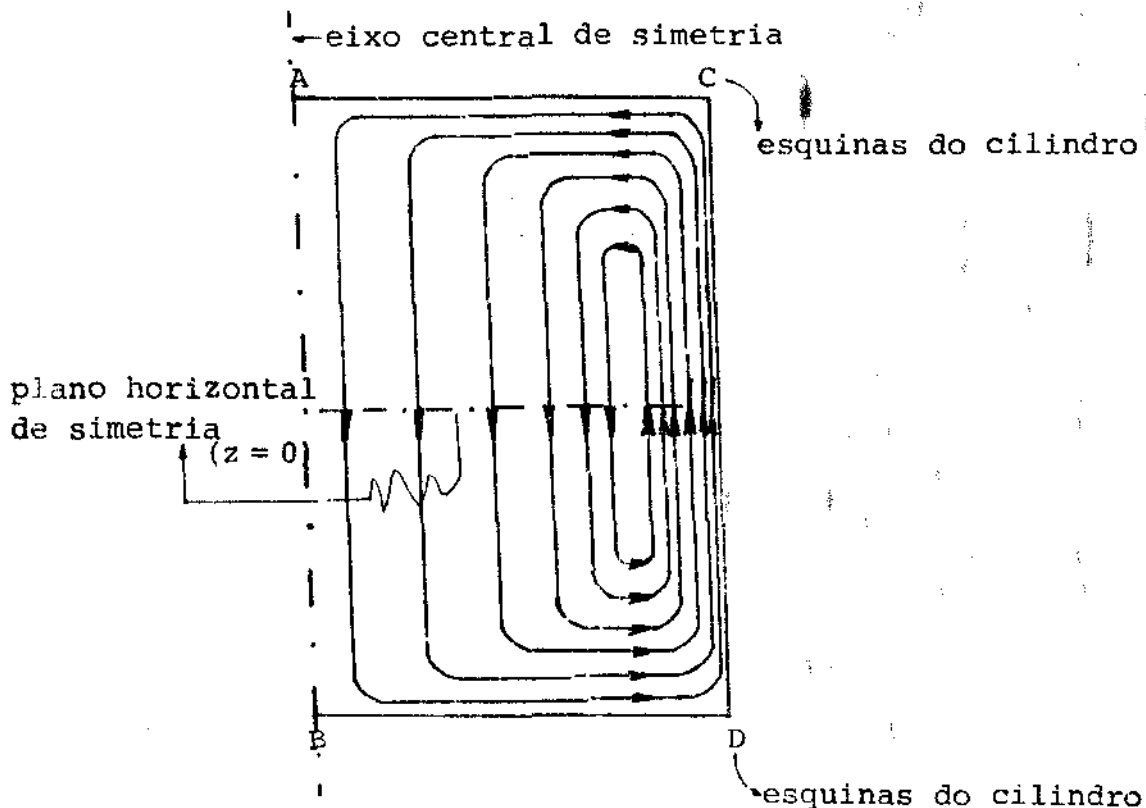


Fig: 2.3 Contra-corrente numa centrífuga.

Neste tipo de escoamento, uma parte do gás sobe (ou então desce) junto à parede do cilindro e na região central junto ao eixo de rotação, o gás efetua o movimento no sentido contrário.

A contracorrente pode ser gerada por vários proces
sos, dos quais destacam-se:

- i) processo mecânico - o cilindro gira com uma velocida
de angular Ω ao passo que as duas
tampas giram com velocidades diferentes $\Omega + \Delta\Omega$.
- ii) processo térmico - a temperatura das paredes não é

imposta uniformemente.

iii) processo exogêneo - forçando a contracorrente por meio de uma configuração adequada de injeção e retirada de massa.

No nosso trabalho consideramos o processo (i), admitindo-se que a injeção e retirada tenham efeitos desprezíveis (sob o ponto de vista de geração) sobre o escoamento secundário.

As condições de contorno para as variáveis de perturbação; u , v , w e T podem ser obtidas recorrendo-se à seção (2.4) e às equações (2.25). No eixo, substituiu-se nas equações (2.25) o valor $r = 0$. Assim obtém-se $u = 0$, $v = 0$, $\partial w / \partial r = 0$, $\partial T / \partial r = 0$, sendo que o primeiro resultado (isto é, $u = 0$) vem de duas equações. É necessário ainda, formular uma quinta condição visto que tem cinco equações diferenciais. A condição escolhida aqui (fora dos pontos de eixo que coincidem com as tampas) é de 'refluxo' global nulo.

Nas extremidades do eixo admite-se $p = 0$ e $T = 0$. A primeira condição vem do fato de que as equações (2.25) não permitem a obtenção do valor de p e sim das suas derivadas, $\partial p / \partial r$ e $\partial p / \partial z$. Assim, o valor de p pode ser arbitrado num dos pontos como sendo 0. Como na outra extremidade as condições são simétricas ou anti-simétricas, o valor de p continua sendo 0.

No caso de paredes sólidas, a quinta condição de contorno vem da equação radial da quantidade de movimento, substituindo-se as respectivas condições de contorno.

Eis as condições de contorno na forma detalhada:

- Parede Lateral

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

$$T = 0$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{2A} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

- Tampa Superior

$$u = 0$$

$$v = \epsilon r$$

$$w = 0$$

$$T = 0$$

$$\frac{1}{2A} \frac{\partial p}{\partial r} - E e^A (1 - r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 r \epsilon$$

- Tampa Inferior

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

$$T = 0$$

$$\frac{1}{2A} \frac{\partial p}{\partial r} - E e^A (1 - r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- Eixo Central

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\partial r$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\partial r$$

$$\int_0^1 \rho_0(r) \omega r dr \quad \text{onde} \quad \rho_0(r) = e^A r^2$$

-- Esquinas do cilindro (vide fig: 2.3)

A & B: $u = 0$

$v = 0$

$w = 0$

$T = 0$

$p = 0$

C: $u = 0$

$v = 0$

$w = 0$

$T = 0$

$\frac{\partial p}{\partial r} = 2e$

∂r

D: $u = 0$

$v = 0$

$w = 0$

$T = 0$

$\frac{\partial p}{\partial r} = 0$

∂r

C A P Í T U L O 3

PROPRIEDADES DE SIMETRIA E ANTI-SIMETRIA DO SISTEMA

3.1 - Introdução

Nas equações de conservação e nas condições de contorno obtidas no capítulo anterior, podemos considerar separadamente dois tipos de efeito mecânico para obter fluxo secundário de contra-corrente : o caso simétrico e o caso anti-simétrico.

Note-se que as condições de contorno descritas na seção 2.9 saem de maneira "natural" das próprias diferenciais que governam o sistema.

Lembramos que neste trabalho o escoamento secundário será gerado pelo processo mecânico de girar as tampas com velocidade angular ligeiramente diferente em relação à parede do cilindro.

Denotando por ω a velocidade angular genérica, admitiremos aqui que

a) na parede do cilindro ($r = 1$)

$$\omega (r = 1) = \Omega$$

b) nas tampas

$$\omega (z = \pm L/2r_0) = \Omega + (\Delta \Omega) i$$

onde,

$$i = 1 - \text{tampa inferior } (z = L/2r_0)$$

$$i = 2 - \text{tampa superior } (z = L/2r_0)$$

É fácil ver da seção (2.9) que todas as outras condições de contorno são homogêneas (isto é, nulas).

Como o sistema final também é homogêneo, se todos os

valores $(\Delta \Omega)_i$ fossem nulos, a solução do sistema seria trivial ($u=0, v=0, w=0, T=0, p=0$), não haveria portanto escoamento secundário. Logo a condição para v nas tampas:

$$v = \frac{(\Delta \Omega)_i}{\Omega} r \quad \text{em } z = (-1)^i L/2 r_w \quad < (3.1)$$

é do tipo forçante.

3.2 - Decomposição das Condições de Contorno nas Partes Simétrica e Anti-simétrica

Denotando:

$$\epsilon_1 = \frac{(\Delta \Omega)_1 + (\Delta \Omega)_2}{2\Omega}$$

$$\epsilon_2 = \frac{(\Delta \Omega)_1 - (\Delta \Omega)_2}{2\Omega}$$

a condição forçante (3.1) pode ser escrita como:

$$v = (\epsilon_1 + \epsilon_2)r \quad \text{em } z = L/2r_w \quad < (3.2a)$$

$$v = (\epsilon_1 - \epsilon_2)r \quad \text{em } z = L/2r_w \quad < (3.2b)$$

Como visto no trabalho de Sielawa, MMF⁽⁶⁾ a solução do sistema final (2.25) com as condições de contorno (3.2) e as demais homogêneas, pode ser obtida por superposição das seguintes duas soluções.

i) referente as condições forçantes, chamadas de anti-simétricas:

$$v = \epsilon_1 r \quad \text{em } z = \mp L/2r_w \quad < (3.3)$$

com as demais condições de contorno homogêneas.

ii) referente as condições forçantes, chamadas de anti-métricas:

$$v = \frac{+}{-} s_2 r \quad \text{em } z = \frac{\bar{r}}{r} L/2r_w \quad < (3.4)$$

com as demais condições de contorno homogêneas.

Note-se que todas as condições de contorno (incluindo as homogêneas) simétricas são invariantes se z for trocado por $(-z)$ e que todas as condições anti-simétricas trocam de sinal se z for trocado por $-z$.

A vantagem da decomposição acima consiste em certas propriedades de invariâncias que o sistema (2.25) possui em relação à substituição de z por $(-z)$ no caso simétrico ou, então anti-simétrico.

3.3 - Caso Simétrico

Note-se que substituindo

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -z \\ \bar{r} &= r \\ \bar{u} &= u \\ \bar{w} &= -w \end{aligned}$$

a equação (2.35a) passa a ser:

$$\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + (2A \bar{r}^2 + 1) + \bar{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

isto é, não muda a sua forma.

Ainda note-se que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = - \frac{\partial}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial}{\partial r}$$

e que:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

É fácil ver que todas as equações (2.25) permanecerão invariantes no caso simétrico se for substituído

$$\begin{aligned}
 \bar{r} &= r \\
 \bar{z} &= -z \\
 \bar{u} &= u \\
 \bar{v} &= v \\
 \bar{w} &= -w \\
 \bar{T} &= T \\
 \bar{p} &= p
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

E as condições de contorno (3.3) ficam

$$\bar{v} = \varepsilon_1 r \quad \text{em} \quad z = \pm L/2r_w$$

portanto também apresentam a mesma invariância.

Concluindo, ve-se que no caso simétrico pode-se fazer as substituições (3.5) obtendo-se a mesma solução em termos das variáveis \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} , \bar{T} que em termos de u , v , w , p e T .

Em particular tem-se:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(\bar{r}, \bar{z}) &= u(r, z) \implies u(r, -z) = u(r, z) \\
 \bar{v}(\bar{r}, \bar{z}) &= v(r, z) \implies v(r, -z) = v(r, z) \\
 \bar{w}(\bar{r}, \bar{z}) &= w(r, z) \implies w(r, -z) = -w(r, z) \\
 \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) &= T(r, z) \implies T(r, -z) = T(r, z) \\
 \bar{p}(\bar{r}, \bar{z}) &= p(r, z) \implies p(r, -z) = p(r, z)
 \end{aligned}$$

Assim verificamos que u , v , p e T são funções pares em relação a z , ao passo que w é impar.

Logo para $z = 0$ (eixo horizontal de simetria) podemos formular as seguintes relações válidas para o caso simétrico.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad < \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad < \quad (3.6b)$$

$$w = 0 \quad < \quad (3.6c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad < \quad (3.6d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad < \quad (3.6e)$$

Estes resultados são consequência imediata de serem pares ou ímpares as funções em questão.

3.4 - Caso Anti-simétrico

Neste caso com $\bar{r} = r$ e $\bar{z} = z$, não podemos admitir como no caso simétrico que $\bar{v} = v$, pois as condições de contorno (3.4), isto é:

$$\left\{ \begin{array}{ll} v = \varepsilon_2 r & \text{em } z = -L/2r_w \\ v = -\varepsilon_2 r & \text{em } z = L/2r_w \end{array} \right.$$

ficam

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{v} = \varepsilon_2 r & \text{em } \bar{z} = L/2r_w \\ \bar{v} = -\varepsilon_2 r & \text{em } \bar{z} = -L/2r_w \end{array} \right.$$

e portanto não são invariantes em relação a transformação, pois trocam de sinal. A solução, nesta situação, é simples, basta admitir $\bar{v} = -v$, pois assim as condições de contorno serão:

$$v = -\varepsilon_2 r \quad \text{em } \bar{z} = L/2r_w$$

$$\bar{v} = \epsilon_2 r \quad \text{em} \quad \bar{z} = -L/2rw$$

e portanto idênticas com as originais e apenas escritas nu ma sequência diferente.

Analisando a equação (2.25c) vemos que v troca de sinal, logo a variável u deve fazer o mesmo. Assim obte mos:

$$\bar{u} = -u$$

Da equação (2.25a) resulta que como u troca de sinal, a variável w não pode trocar; já que no termo onde ela se encontra em $\partial w / \partial z$, a variável z trocou de sinal.

Assim sucessivamente obtemos que o sistema (2.25) fi nal e as condições de contorno (3.4), bem como as condi ções de contorno homogêneas são invariantes em relação a transformação.

$$\bar{r} = r$$

$$\bar{z} = -z$$

$$\bar{u} = -u$$

$$\bar{v} = -v$$

$$\bar{w} = w$$

$$\bar{p} = -p$$

$$\bar{T} = -T$$

Recorrendo ao mesmo raciocínio do caso anteri or, isto é, das equações (3.5) obtemos as seguintes rela ções no caso anti-simétrico

$$u(r, -z) = -u(r, z)$$

$$v(r, -z) = -v(r, z)$$

$$w(r, -z) = w(r, z)$$

$$p(r, -z) = -p(r, z)$$

$$T(r, -z) = -T(r, z)$$

Observemos que u , v , p e T são funções ímpares em relação a z , ao passo que w é par. Assim analogamente, as equações (3.6), podem ser formuladas as seguintes relações válidas no caso anti-simétrico, no plano médio da centrífuga, $z = 0$:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ p &= 0 \\ T &= 0 \end{aligned} \quad < (3.7)$$

3.5 - Características Especiais das Propriedades de Simetria e Anti-simetria.

Tendo verificado a invariância do sistema de equações e das condições de contorno no caso simétrico (ou então anti-simétrico), notamos que basta resolver a metade da metade da centrífuga, isto é a metade da figura (2.2), para obter um perfil do escoamento desejado. (vide a fig. 3.1).

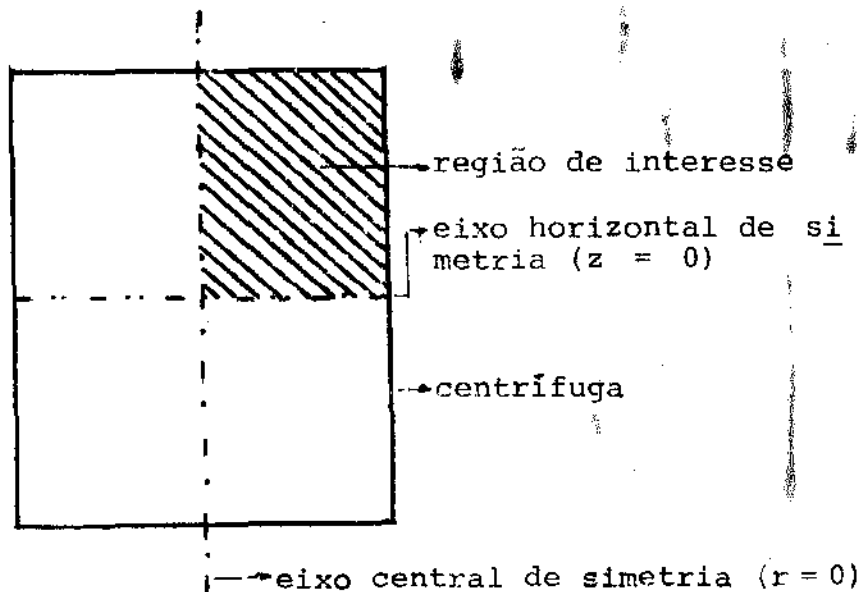


Fig: 3.1 Simplificação na centrífuga.

Esta simplificação é possível já que com as propriedades acima descritas, a centrífuga vem a possuir além de um eixo central de simetria ($r = 0$), um plano horizontal de simetria ou anti-simetria ($z = 0$).

A importância desta simplificação se destaca no sentido numérico já que possibilita um melhor aproveitamento da rede representativa.

C A P Í T U L O 4

MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

4.1 - Introdução

Com o método de diferenças finitas obtemos a solução numérica de equações diferenciais sobre uma rede ou quadrículado uniforme. Um ponto genérico da rede é chamado de:

$$(x_i, y_j) = (x_0 + i (\Delta x); y_0 + j (\Delta y))$$

com referência a uma origem (x_0, y_0) , onde Δx e Δy são respectivamente intervalos nas direções x e y . Observamos a título de informação que em geral são utilizados intervalos de tamanho fixo.

Para qualquer função $f(x)$ podemos definir os operadores diferenciais Δ , ∇ e δ para o intervalo h como:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$$

$$\delta f(x) = f(x + \frac{1}{2} h) - f(x - \frac{1}{2} h)$$

e chamamos

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k \quad \text{- diferenças "forward"}$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1} \quad \text{- diferenças "backward"}$$

$$\delta f_k = f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}} \quad \text{- diferenças centrais.}$$

Como já foi citado anteriormente, é comum o uso de intervalos de tamanho fixo no método de diferenças finitas, tanto na direção horizontal x como na direção vertical y na rede representativa. No presente trabalho, dada a configuração especial do escoamento secundário de contra-corrente na centrífuga é desejado obter um melhor aproveitamento da

rede. Neste sentido estudamos a possibilidade de usar intervalos de tamanho variável; de tamanho normal nas regiões de menor interesse e rede mais densa nas regiões de maior variação de parâmetros.

Assim apresentamos a seguir o método de diferenças finitas para intervalos de tamanho variável.

4.2 - Diferenças Finitas de Primeira Ordem

DEFINIÇÃO: Uma função f calculada no ponto (x_i, y_j) se designará por f_{ij} .

4.2.a - Primeira Derivada

Quando uma função f e suas derivadas são funções finitas e contínuas de x e y , temos pelo teorema de Taylor

$$f_{i+1,j} = f_{ij} + h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} \quad < (4.1)$$

$$f_{i-1,j} = f_{ij} - h_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} \quad < (4.2)$$

onde h_i é o intervalo entre x_i e x_{i+1} e h_{i-1} é o intervalo entre x_{i-1} e x_i como ilustrado na fig: 4.1

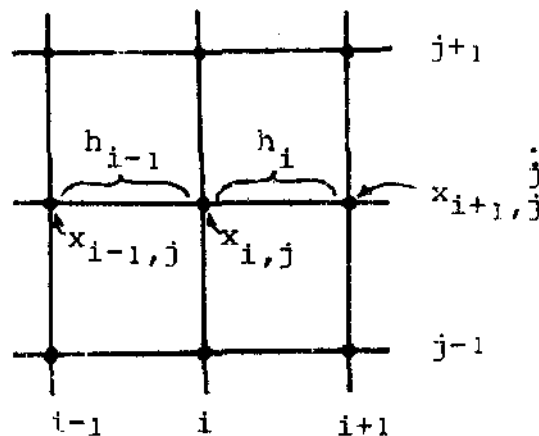


Fig: 4.1 Rede para diferenças finitas de primeira ordem.

Das relações (4.1) e (4.2) obtemos a aproximação da derivada $\partial f / \partial x$ no ponto i, j . Assim,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{h_i} \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i-1,j}}{h_{i-1}} \quad (4.4)$$

Chamamos a equação (4.3) de diferença FORWARD e a equação (4.4) de diferença BACKWARD.

Se desejarmos aproximar a derivada da função no ponto (i, j) usando os intervalos anterior e posterior ao ponto, temos então que somar as expressões (4.1) e (4.2), assim obtemos:

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = f_{ij} - f_{ij} + (h_i + h_{i-1}) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{h_i + h_{i-1}} \quad (4.5)$$

que chamamos de diferença de primeira ordem central.

Analogamente às expressões acima pode-se deduzir facilmente as expressões para a segunda derivada e para a derivada mista.

Reverendo as considerações de Collatz (7) nosso interesse se concentrou num refinamento do método de diferenças finitas aplicado à equações diferenciais parciais. Este é o método de diferenças finitas de segunda ordem, amplamente usado na sua forma geral, isto é, de intervalos de tamanho fixo, para problemas físicos e de engenharia.

Como já foi citado anteriormente, devido ao interesse em usar redes representativas com tamanho de intervalo variável, apresentamos a seguir a reformulação do método para este caso.

4.3 - Diferenças Finitas de Segunda Ordem.

4.3.a - Diferenças Centrais

Seja uma porção da rede representativa como ilustra do abaixo:

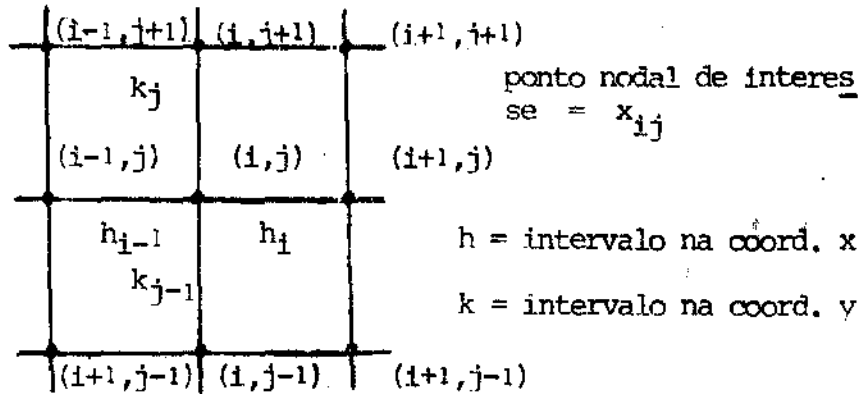


Fig: 4.2 Rede para diferenças finitas centrais de 2ª ordem.

i) Primeira e Segunda Derivada (em x)

Usando a expansão da função em série de Taylor temos:

$$f(x+h_i) = f(x) + h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{2} h_i^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad (4.5)$$

$$f(x-h_{i-1}) = f(x) - h_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{2} h_{i-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad (4.6)$$

Multiplicando a equação (4.5) por h_{i-1}^2 e a equação (4.6) por $(-h_i^2)$ e somando as expressões, obtemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{h_{i-1}}{h_i (h_i + h_{i-1})} f_{i+1,j} + \frac{h_{i-1} - h_i}{h_i h_{i-1}} f_{ij} - \frac{h_i}{h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} f_{i-1,j} \quad (4.7)$$

Agora para obter a segunda derivada, multiplicamos a equação (4.5) por h_{i-1} e a equação (4.6) por h_i e so

mando as expressões, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{ij} &= \frac{2}{h_i (h_i + h_{i-1})} f_{i+1,j} - \frac{2}{h_i h_{i-1}} f_{ij} + \\ &+ \frac{2}{h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} f_{i-1,j} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para obter a primeira e segunda derivada em y basta substituir o símbolo h por k, o índice i por j e a variável x por y.

ii) Derivada Mista

Pela expansão da série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} f_{i+1,j+1} &= f_{ij} + h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{ij} + k_j \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} h_i^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{ij} + h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{ij} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} f_{i+1,j-1} &= f_{ij} + h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{ij} - \\ &- k_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ij} + \frac{1}{2} h_i^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{ij} - \\ &- h_i k_{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{ij} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
 f_{i-1,j-1} &= f_{ij} - h_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} - \\
 &- k_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} + \frac{1}{2} h_{i-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} + \\
 &+ h_{i-1} k_{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{i-1,j+1} &= f_{ij} - h_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \\
 &+ k_j \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} + \frac{1}{2} h_{i-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} - \\
 &- h_{i-1} k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Somando primeiro as expressões (4.9) e (4.10); (4.11) e (4.12) duas a duas e logo somando o resultado da primeira soma com a segunda, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{ij} &= \frac{1}{(h_i + h_{i+1})(k_j + k_{j-1})} \cdot \\
 &\cdot \left\{ f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} \right\}
 \end{aligned}$$

4.3.b - Diferenças "Forward"

As diferenças finitas do tipo "forward" são de especial interesse para pontos de fronteira da rede.

Convém mencionar que em geral são usadas redes representativas incluindo uma cela a mais nos sentidos vertical

e horizontal, como ilustrado na figura 4.3. Consideramos isto desnecessário já que é adicionada informação não existente à cela o que acarreta em erros numéricos, usando as diferenças do tipo "forward" pode se usar a rede representativa original como ilustrado na mesma figura.

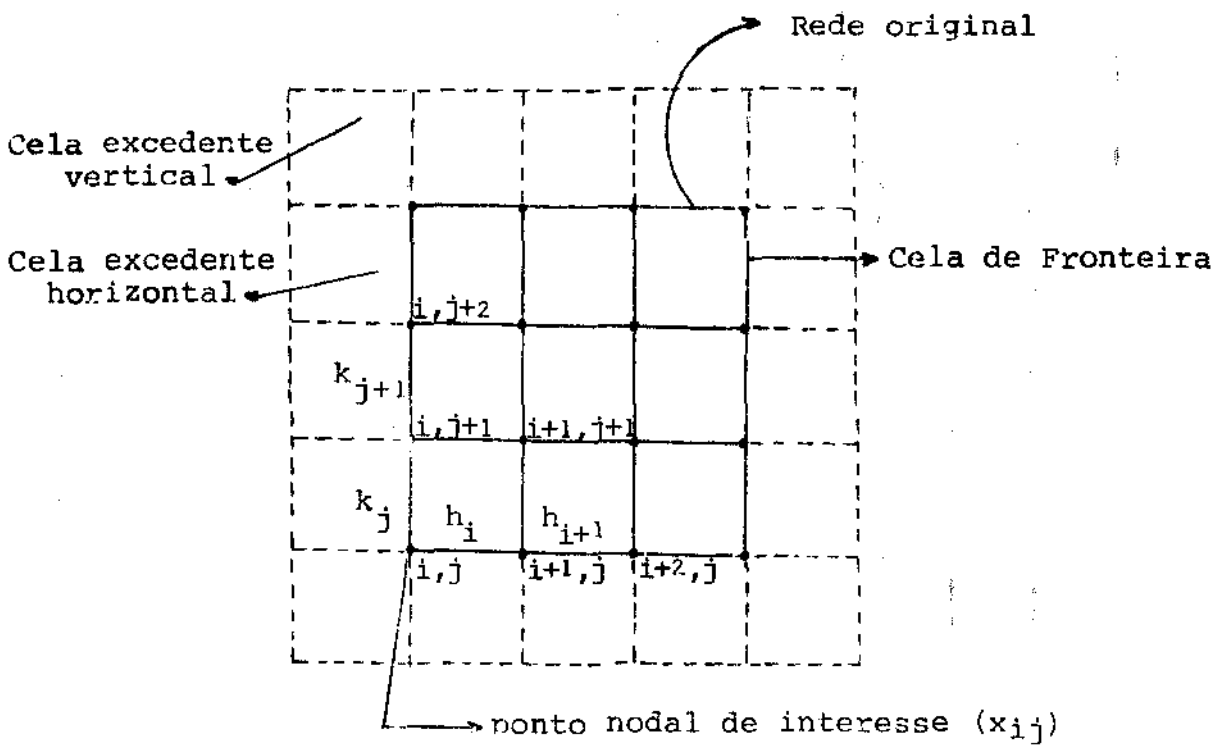


Figura 4.3 Rede para diferenças finitas Forward de segunda ordem.

ii) Derivada Mista

Vejamos a expansão em série de Taylor do ponto $x_{i+1,j+1}$.

$$f_{i+1,j+1} = f_{ij} + h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + k_j \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} + \frac{1}{2} h_i^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} + h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} k_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij} \quad (4.19)$$

Agora substituindo as equações (4.17) e (4.18) em $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e fazendo um desenvolvimento análogo para $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, da equação (4.19), obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{1}{h_i k_j} \cdot \left\{ f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} + f_{ij+1} + f_{ij} \right\} \quad (4.20)$$

4.3.c - Diferenças "Backward"

As considerações feitas para as diferenças finitas de segunda ordem "forward" são também aplicáveis neste caso :

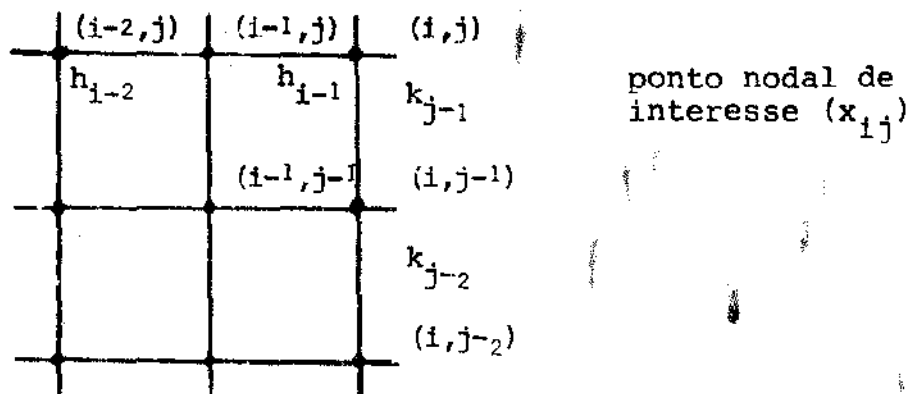


Fig: 4.4 - Rede para diferenças finitas "Backward" de 2ª Ordem.

i) Primeira e Segunda Derivada (em x)

Primeiro chamamos:

$$h = h_i \quad < (4.14a)$$

$$H = h_i + h_{i+1} \quad < (4.14b)$$

Usando novamente a expansão em série de Taylor, temos:

$$f(x+H) = f_{ij} + H \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{2} H^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad < (4.15)$$

$$f(x+h) = f_{ij} + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad < (4.16)$$

Multiplicando a equação (4.15) por h^2 e a equação (4.16) por $-H^2$, expandindo H pela relação 4.14 e somando as expressões resultantes, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} &= \frac{-h_i}{h_{i+1} (h_i + h_{i+1})} f_{i+2,j} + \frac{(h_i + h_{i+1})}{h_i h_{i+1}} f_{i+1,j} - \\ &- \frac{2h_i + h_{i+1}}{h_i (h_i + h_{i+1})} f_{ij} \end{aligned} \quad < (4.17)$$

Efetuada cálculos análogos, das mesmas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} &= \frac{2}{h_{i+1} (h_i + h_{i+1})} f_{i+2,j} - \frac{2}{h_i h_{i+1}} f_{i+1,j} + \\ &+ \frac{2}{h_i (h_i + h_{i+1})} f_{ij} \end{aligned} \quad < (4.18)$$

i) Primeira e Segunda Derivada (em x)

Chamamos:

$$h = h_{i-1}$$

$$H = h_{i-1} + h_{i-2}$$

e temos pela expansão em série de Taylor:

$$f(x-H) = f_{ij} - H \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + H^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad < (4.21)$$

$$f(x-h) = f_{ij} - h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad < (4.22)$$

Multiplicando a equação (4.21) por h^2 e a equação (4.22) por $-H^2$ e somando as expressões para a primeira derivada e; multiplicando a equação (4.21) por h e a equação (4.22) por $-H$ e somando as expressões para a segunda derivada, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} &= \frac{h_{i-1}}{h_{i-2} (h_{i-1} + h_{i-1})} f_{i-2,j} - \frac{(h_{i-1} + h_{i-2})}{h_{i-1} h_{i-2}} f_{i-1,j} + \\ &+ \frac{2h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_{i-2})} f_{ij} \quad < (4.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} &= \frac{2}{h_{i-2} (h_{i-1} + h_{i-1})} f_{i-2,j} - \frac{2}{h_{i-1} h_{i-2}} f_{i-1,j} + \\ &+ \frac{2}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_{i-2})} f_{ij} \quad < (4.24) \end{aligned}$$

ii) Derivada Mista

Expandindo a série de Taylor para o ponto x_{i-1}, y_{j-1} , obtemos:

$$\begin{aligned} f(x-h, y-k) &= f_{ij} - h_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} - k_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} h_{i-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} + h_{i-1} k_{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} + \\ &+ k_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij} \end{aligned}$$

Desenvolvendo cada uma das expressões derivadas em diferenças finitas "backward", obteremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{1}{h_{i-1} k_{j-1}} \left\{ f_{i-1, j-1} - f_{i-1, j} - f_{i, j-1} + f_{i, j} \right\}$$

Note-se que a derivada mista em diferenças finitas "backward" é simétrica em relação a expressão da derivada mista em diferenças finitas "forward".

4.4 - Configurações Especiais

Observamos que numa rede, além das configurações acima descritas, ainda possuímos duas configurações para as quais é necessário definir a derivada mista já que a primeira e segunda derivada podem usar o caso "forward" ou o caso "backward", respectivamente.

Viça a figura (4.5).

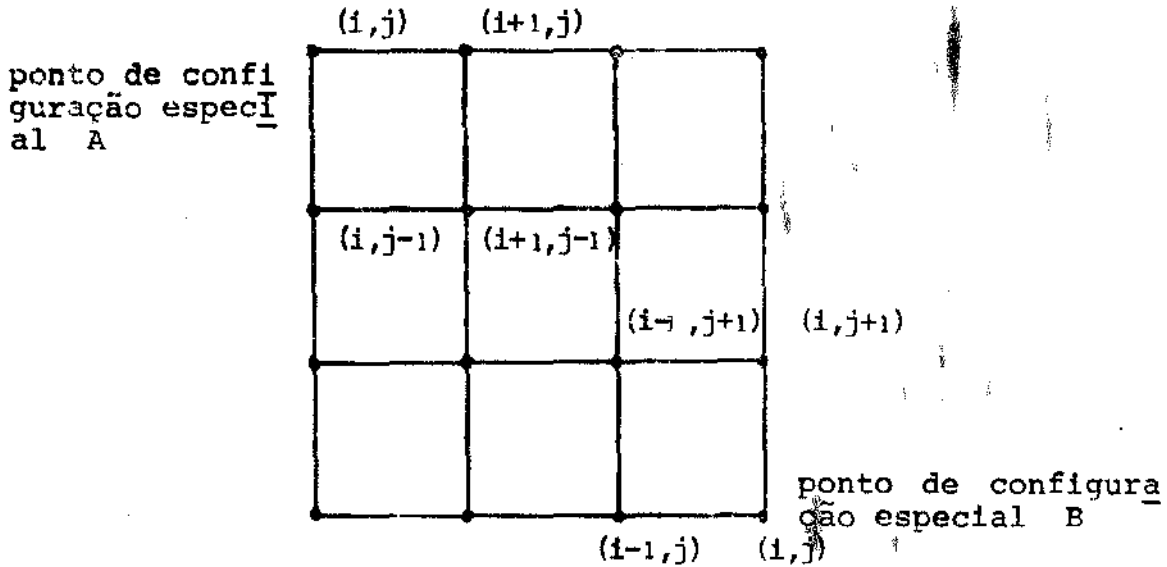


Figura 4.5 - Pontos de Configuração Especial

Primeiro vejamos o desenvolvimento em série de Taylor do ponto $(i+1, j-1)$ para obter a derivada mista do ponto A.

$$\begin{aligned}
 f(x+h, y-k) &= f_{ij} + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} - k_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} + \\
 &+ \frac{1}{2} h_1^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} + h_1 k_{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_j} + \\
 &+ k_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij}
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo as derivadas em x usando as diferenças finitas "forward" e as derivadas em y usando as diferenças finitas "backward", obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_j} &= \frac{1}{h_1 k_{j-1}} \left\{ - f_{i+1, j-1} + f_{i, j-1} + \right. \\
 &\left. + f_{i+1, j} - f_{ij} \right\}
 \end{aligned}$$

Agora vejamos o desenvolvimento em série de Taylor do ponto $(i-1, j+1)$.

$$\begin{aligned}
 f(x-h, y+k) &= f_{ij} - h_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + k_j \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} + \\
 &+ \frac{1}{2} h_{i-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} + h_{i-1} k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} + \\
 &+ k_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij}
 \end{aligned}$$

desenvolvendo as derivadas em x e y usando as diferenças finitas "backward" e "forward" respectivamente obtemos: a derivada mista para o ponto B .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} &= \frac{1}{h_{i-1} k_j} \left\{ -f_{i-1, j+1} + f_{i-1, j} + \right. \\
 &+ \left. f_{i, j+1} - f_{ij} \right\}
 \end{aligned}$$

C A P Í T U L O 5

OBTENÇÃO DO SISTEMA FINAL EM DIFERENÇAS FINITAS

5.1 - Introdução

Rearranjando os termos do sistema de equações (2.25) de maneira a aparecer primeiro os termos com a variável u, depois v, w, t e p respectivamente, obtemos:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} + (2Ar^2+1) u + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad < (5.1a)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \left(1 - \frac{2}{3} Ar^2 \right) \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{2}{3} Ar^2 \right) u + \frac{1}{E} e^{-A(1-r^2)} 2 r^2 v - \frac{1}{E} e^{-A(1-r^2)} r^3 T - \frac{1}{E} e^{-A(1-r^2)} \frac{1}{2A} r^2 \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad < (5.1b)$$

4933

$$- \frac{1}{E} e^{-A(1-r^2)} 2 r^2 u + r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v = 0 \quad < (5.1c)$$

$$- \frac{2}{3} A r^2 \frac{\partial u}{\partial z} + r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} + r \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - r \frac{1}{2A} \frac{1}{E} e^{-A(1-r^2)} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad < (5.1d)$$

$$4 (Br)r^2 e^{-A(1-r^2)} \frac{1}{E} u + r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1e)$$

Note-se que os termos foram arranjados de maneira a aparecerem na sequência da ordem de diferenciação e que também cada expressão diferencial está isolada individualmente multiplicada por um coeficiente.

5.2 - Rede Representativa da Centrífuga

Seja uma centrífuga como ilustrada na figura 2.2. Fazemos o seguinte arranjo de rede para aplicar o método de diferenças finitas ao sistema de equações (5.1) que governa o escoamento dentro da centrífuga.

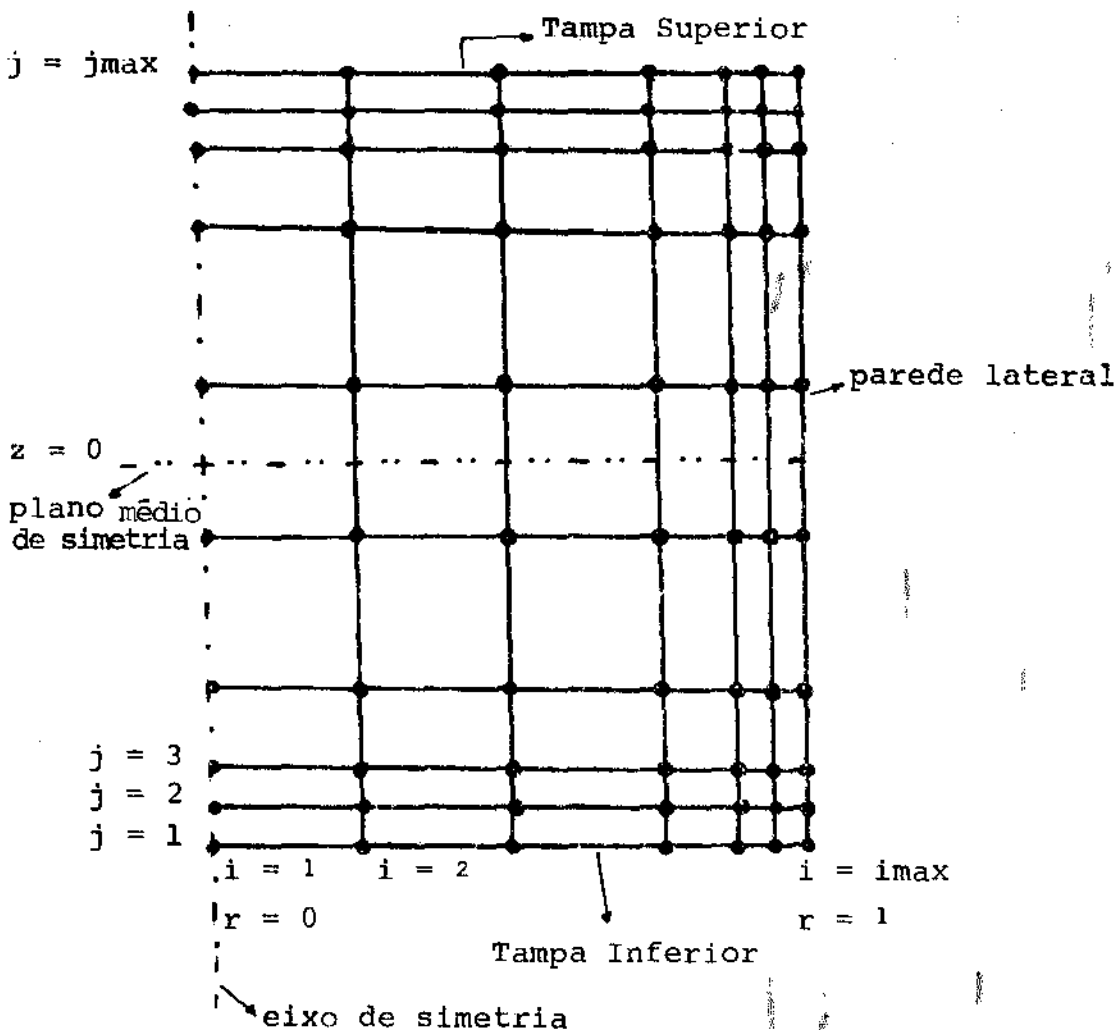


Fig: 5.1 Rede representativa da centrífuga.

Lembramos que, da figura 5.1 só será resolvida a metade, isto é, a partir do plano médio ($z = 0$). A rede na figura 5.1 serve para o caso simétrico ou anti-simétrico.

Para colocar o sistema de equações (5.1) num esquema prático de computação, elas serão expressas em diferenças finitas num arranjo de rede onde r está no intervalo $0 < r < 1$ e $-L/2 < z < L/2$ como ilustrado na figura 5.1.

As coordenadas (r, z) são substituídas por um sistema de rede discreto (i, j) tal que

$$r_i = \sum_{\alpha=1}^i h_{\alpha} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \text{imax}-1)$$

$$z_j = \sum_{\alpha=1}^j k_{\alpha} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \text{jmax}-1)$$

da a coordenada do ponto nodal na rede.

Usamos aqui intervalos de tamanho variável para melhor aproveitamento da rede nas regiões de ampla variação dos parâmetros.

5.3 - Aplicação de Diferenças Finitas ao Sistema

Usando as expressões obtidas no capítulo 4, para representar diferenciais em diferenças finitas de intervalo variável especificamente as diferenças finitas centrais de segunda ordem, e utilizando a rede representativa acima descrita nas coordenadas r e z , obtemos a aproximação desejada como abaixo descrita.

Primeiro definimos as constantes para as expressões em r :

$$hc_1 = \frac{h_{i-1}}{h_i (h_{i-1} + h_i)} \quad (5.2a)$$

$$hc_2 = \frac{h_i - h_{i-1}}{h_i h_{i-1}} < (5.2b)$$

$$hc_3 = \frac{h_i}{h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} < (5.2c)$$

$$hc_4 = \frac{2}{h_i (h_{i-1} + h_i)} < (5.2d)$$

$$hc_5 = \frac{2}{h_i h_{i-1}} < (5.2e)$$

$$hc_6 = \frac{2}{h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} < (5.2f)$$

As constantes para as expressões derivadas em z:

$$kc_1 = \frac{k_{j-1}}{k_j (k_{j-1} + k_j)} < (5.3a)$$

$$kc_2 = \frac{k_j - k_{j-1}}{k_j k_{j-1}} < (5.3b)$$

$$kc_3 = \frac{k_j}{k_{j-1} (k_j + k_{j-1})} < (5.3c)$$

$$kc_4 = \frac{2}{k_j (k_j + k_{j-1})} < (5.3d)$$

$$kc_5 = \frac{2}{k_j k_{j-1}} \quad < (5.3e)$$

$$kc_6 = \frac{2}{k_{j-1} (k_j + k_{j-1})} \quad < (5.3f)$$

Com as contantes (5.2) e (5.3) podemos aplicar diretamente as diferenças finitas ao sistema (5.1).

1) Equação de Continuidade

Na equação (5.1a) substituímos as expressões $\partial u / \partial r$, $\partial w / \partial z$ e a variável u por:

$$u = u_{ij}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = hc_1 u_{i+1, j} + hc_2 u_{ij} - hc_3 u_{i-1, j}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = kc_1 w_{i, j+1} + kc_2 w_{ij} - kc_3 w_{i, j-1}$$

e obtemos rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} & \left[-r_i hc_1 \right] u_{i+1, j} + \left[r_i hc_2 + 2A r_{i+1}^2 \right] u_{ij} - \\ & - \left[r_i hc_3 \right] u_{i-1, j} + \left[r_i kc_1 \right] w_{i, j+1} + \\ & + \left[r_i kc_2 \right] w_{ij} - \left[r_i kc_3 \right] w_{i, j-1} = 0 \quad < (5.4a) \end{aligned}$$

ii) Equação da Quantidade de Movimento Radial

Substituindo as expressões com primeira derivada de forma análoga à equação de continuidade e as expressões de segunda derivada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = hc_4 u_{i+1, j} - hc_5 u_{ij} + hc_6 u_{i-1, j}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = kc_4 u_{i,j+1} - kc_5 u_{ij} + kc_6 u_{i,j-1}$$

e assim sucessivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[r_i^2 hc_4 + r_i (1 - \frac{2}{3} A r_i^2) hc_1 \right] u_{i+1,j} + \left[-r_i^2 hc_5 + \right. \\ & \left. + r_i (1 - \frac{2}{3} A r_i^2) hc_2 - r_i^2 kc_5 - (1 + \frac{2}{3} A r_i^2) \right] u_{i,j} + \\ & \left[r_i hc_6 - r_i (1 - \frac{2}{3} A r_i^2) hc_3 \right] u_{i-1,j} + \\ & \left[r_i kc_4 \right] u_{i,j+1} + \left[r_i^2 kc_6 \right] u_{i,j-1} + \left[E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} 2 r_i^2 \right] v_{i,j} - \\ & - \left[E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} r_i^3 \right] T_{i,j} - \left[E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} \frac{1}{2A} r_i^2 hc_1 \right] P_{i+1,j} - \\ & - \left[E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} \frac{1}{2A} r_i^2 hc_2 \right] P_{i,j} + \\ & + \left[E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} \frac{1}{2A} r_i^2 hc_3 \right] P_{i-1,j} = 0 \quad < \quad (5.4b) \end{aligned}$$

Para as três equações restantes do sistema (5.1) por um processo análogo ao utilizado para as duas equações anteriores, obtemos:

iii) Equação da Quantidade de Movimento Angular

$$\begin{aligned} & \left[-2 E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} r_i^2 \right] u_{i,j} + \left[r_i (r_i hc_4 + hc_1) \right] v_{i+1,j} + \\ & + \left[r_i (hc_6 r_i - hc_3) \right] v_{i-1,j} + \\ & + \left[r_i^2 (-hc_5 - kc_5) + r_i hc_2 - 1 \right] v_{i,j} + \\ & + \left[r_i^2 kc_4 \right] v_{i,j+1} + \left[r_i^2 kc_6 \right] v_{i,j-1} = 0 \quad < \quad (5.4c) \end{aligned}$$

iv) Equação da Quantidade de Movimento Axial

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{2}{3A} r_i^2 kc_1 \right] u_{i,j+1} - \left[\frac{2}{3A} r_i^2 kc_2 \right] u_{ij} + \\
& + \left[\frac{2}{3A} r_i^2 kc_3 \right] u_{i,j-1} + \left[r_j kc_4 + hc_1 \right] w_{i+1,j} + \\
& + \left[r_i hc_6 - hc_3 \right] w_{i-1,j} + \left[hc_2 - r_i hc_5 - r_i kc_5 \right] w_{ij} + \\
& + \left[r_i kc_4 \right] w_{i,j+1} + \left[r_i kc_6 \right] w_{i,j-1} + \\
& + \left[-E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} r_{i/2A} kc_1 \right] p_{i,j+1} + \\
& + \left[-E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} r_{i/2A} kc_2 \right] p_{ij} + \\
& + \left[E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} r_{i/2A} kc_3 \right] p_{i,j-1} = 0 \quad < (5.4d)
\end{aligned}$$

v) Equação de Energia

$$\begin{aligned}
& \left[4 (Br) r_i^2 E^{-1} e^{-A(1-r_i^2)} \right] u_{i,j} + \left[r_i hc_4 + hc_1 \right] T_{i+1,j} + \\
& + \left[r_i hc_6 - hc_3 \right] T_{i-1,j} + \\
& + \left[hc_2 - r_i hc_5 - r_i kc_5 \right] T_{i,j} + \left[r_i kc_4 \right] T_{i,j+1} + \\
& + \left[-r_i kc_6 \right] T_{i,j-1} = 0 \quad < (5.4e)
\end{aligned}$$

5.4 - Condições de Contorno

Como na rede representativa os pontos de fronteira correspondem às condições de contorno, agora usamos as diferenças finitas do tipo "forward" para o eixo central e a tampa inferior; e as diferenças finitas do tipo "backward" para a parede lateral e a tampa superior.

Aplicando as expressões obtidas no capítulo 4 para diferenças finitas "backward" e "forward" nas condições de contorno da seção (2.9) do capítulo 2, teremos:

i) Eixo Central ($r_i = 0$; $i = 1$)

$$u_{i,j} = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad j_{\max} - 1$$

$$v_{i,j} = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad j_{\max} - 1$$

$$w_{i+1,j} - w_{ij} = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad j_{\max} - 1$$

$$T_{i+1,j} - T_{ij} = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad j_{\max} - 1$$

No caso da condição de contorno de refluxo global nulo, isto é:

$$\int_0^1 \rho_0(r) w \, dr = 0$$

e por causa de termos uma rede com intervalo variável usamos a regra dos trapézios modificada para este tipo de intervalos como descrito no APÊNDICE B.

Assim para esta condição de contorno, temos:

$$\frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left[r_{i+1} e^{(Ar_{i+1}^2)} \right] w_{i+1,j} = 0$$

$$i = 1, \dots \quad i_{\max} - 2$$

$$j = 2, \dots \quad j_{\max} - 1$$

ii) Tampa Inferior ($j = 1$)

$$u_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad i_{\max}$$

$$v_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad i_{\max} \text{ (caso geral)}$$

$$= \epsilon r_i \quad i = 1, 2, \dots \quad i_{\max} \text{ (caso simétrico)}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\epsilon r_i \quad i = 1, 2, \dots, \text{imax} \text{ (caso anti-simétrico)} \\
 w_{ij} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots \\
 T_{ij} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

A última condição de contorno para a tampa inferior é separada em três expressões, para os pontos do meio da tampa e para as esquinas, sendo que para os pontos do meio da tampa é:

$$\begin{aligned}
 &\left[-E e^{A(1-r_i^2)} \frac{2}{k_j (k_j + k_{j+1})} \right] u_{i,j+2} + \\
 &+ \left[E e^{A(1-r_i^2)} \frac{2}{k_j k_{j+1}} \right] u_{i,j+1} + \\
 &+ \left[\frac{1}{2A} \frac{h_{i-1}}{h_i (h_{i-1} + h_j)} \right] P_{i+1,j} + \\
 &+ \left[\frac{1}{2A} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_i h_{i-1}} \right] P_{i,j} - \\
 &- \left[\frac{1}{2A} \frac{h_i}{h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \right] P_{i-1,j} = 0 \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

$$i = 2, \dots, \text{imax} - 1$$

lembramos que esta condição não é homogênea (isto é, igual a 0) nos casos simétrico e anti-simétrico. No caso simétrico a condição de contorno acima deixa de ser nula, ou seja a expressão da esquerda passa a ser igual a:

$$\epsilon r_i \quad i = 2, 3, \dots, \text{imax} - 1$$

e no caso anti-simétrico a expressão da esquerda da condição de contorno (5.5) passa a ser igual a:

$$-er_i \quad i = 2, 3, \dots, \text{imax} - 1$$

Os pontos da esquina da tampa inferior tem as seguintes condições de contorno:

- Ponto da esquina (i = 1 ; j = 1)

$$\left[\frac{-h_i}{h_{i+1} (h_i + h_{i+1})} \right] P_{i+2,j} + \left[\frac{h_i + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} \right] P_{i+1,j} - \left[\frac{2h_i + h_{i+1}}{h_i (h_i + h_{i+1})} \right] P_{i,j} = 0$$

ou

$$P_{1,1} = 1$$

- Ponto da esquina (i = imax ; j = 1)

$$\left[\frac{h_i}{h_{i-2} (h_{i-1} + h_{i-2})} \right] P_{i-2,j} - \left[\frac{h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1} h_{i-2}} \right] P_{i+1,j} + \left[\frac{2h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_{i-2})} \right] P_{i,j} = 0$$

Para esta última condição de contorno no ponto de esquina, também temos mudança nos casos simétrico e anti-simétrico. No caso simétrico a condição deixa de ser homogênea e o lado esquerdo passa a ser igual a:

iii) Tampa Superior (j = jmax)

$$\begin{aligned}
 u_{ij} &= 0 & i = 1, \dots & \quad \text{imax} \\
 v_{ij} &= 0 & i = 1, \dots & \quad \text{imax (caso geral)} \\
 &= r_i & i = 1, \dots & \quad \text{imax (casos simétrico, e anti-simétrico)} \\
 w_{ij} &= 0 & i = 1, \dots & \quad \text{imax} \\
 T_{ij} &= 0 & i = 1, \dots & \quad \text{imax}
 \end{aligned}$$

Analogamente à tampa inferior, a última condição de contorno e separada em três expressões, para os pontos do meio, temos:

$$\begin{aligned}
 &\left[-E e^{A(1-r_i^2)} \frac{2}{k_{j-2} (k_{j-1} + k_{j-2})} \right] u_{i,j-2} + \\
 &+ \left[E e^{A(1-r_i^2)} \frac{2}{k_{j-1} k_{j-2}} \right] u_{i,j-1} + \\
 &+ \left[\frac{1}{2A} \frac{h_{i-1}}{h_i (h_i + h_{i-1})} \right] P_{i+1,j} + \\
 &+ \left[\frac{1}{2A} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_i h_{i-1}} \right] P_{i,j} - \\
 &- \left[\frac{1}{2A} \frac{h_i}{h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \right] P_{i,j} = 0
 \end{aligned}$$

$$i = 2, \dots, \text{imax} - 1$$

para o caso geral, nos casos simétrico e anti-simétrico a condição acima deixa de ser nula, e a expressão da esquerda passa a ser igual a:

$$2\varepsilon r_i$$

- Ponto da esquina ($i = 1$; $j = j_{\max}$)

$$\left[\frac{-h_i}{h_{i+1} (h_i + h_{i+1})} \right] P_{i+2,j} + \left[\frac{h_i + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} \right] P_{i+1,j} - \left[\frac{2h_i + h_{i+1}}{h_i (h_i + h_{i+1})} \right] P_{i,j} = 0$$

- Ponto da esquina ($i = i_{\max}$; $j = j_{\max}$)

$$\left[\frac{h_{i-1}}{h_{i-2} (h_{i-2} + h_{i-1})} \right] P_{i-2,j} - \left[\frac{(h_{i-1} + h_{i-2})}{h_{i-1} h_{i-2}} \right] P_{i-1,j} + \left[\frac{2h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_{i-2})} \right] P_{i,j} = 0$$

A condição de contorno acima deixa de ser homogênea nos casos simétrico e anti-simétrico e a expressão da esquerda passa a ser igual a:

$$2\varepsilon$$

iv) Parede Lateral ($r_i = 1$; $i = i_{\max}$)

$$u_{ij} = 0 \quad j = 2, \dots, j_{\max} - 1$$

$$v_{ij} = 0 \quad j = 2, \dots, j_{\max} - 1$$

$$w_{ij} = 0 \quad j = 2, \dots, j_{\max} - 1$$

$$T_{ij} = 0 \quad j = 2, \dots, j_{\max} - 1$$

E a última condição de contorno é igual a:

$$\begin{aligned} & \left[-E \frac{2}{h_{i-2} (h_{i-1} + h_{i-2})} \right] u_{i-2,j} + \left[E \frac{2}{h_{i-1} h_{i-2}} \right] u_{i-1,j} + \\ & + \left[\frac{1}{2A} \frac{h_{i-1}}{h_{i-2} (h_{i-1} + h_{i-2})} \right] p_{i-2,j} - \\ & - \left[\frac{1}{2A} \frac{h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1} h_{i-2}} \right] p_{i-1,j} + \\ & + \left[\frac{1}{2A} \frac{2h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_{i-2})} \right] p_{i,j} = 0 \\ & j = 2, \dots, j_{\max} - 1 \end{aligned}$$

5.5 - Condições de Contorno para o Caso ($z = 0, L/2$)

Tomando a região $0 < z < L/2$, isto é, entre o plano médio e a tampa superior, temos somente 1/4 da rede total para resolver no caso anti-simétrico. É de particular interesse esta solução dadas as grandes vantagens em relação ao tamanho da rede e conseqüentemente à memória do computador.

Como estamos no plano médio horizontal de simetria, usamos as condições de contorno (3.7) obtidas na seção (3.3) do capítulo 3. Estas condições serão expressas em diferenças finitas a seguir.

As condições de contorno para o eixo central de simetria, a parede lateral e a tampa superior continuam as mesmas, sendo que para o plano médio $z = 0$, obtemos:

$$u_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, j_{\max}$$

$$v_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, i_{\max}$$

$$T_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, i_{\max}$$

$$p_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, i_{\max}$$

A quinta condição é separada em três expressões, para as esquinas e para os pontos do meio; temos então, para os pontos do meio:

$$\left[\frac{-k_j}{k_{j+1} (k_j + k_{j+1})} \right] w_{i,j+2} + \left[\frac{k_j + k_{j+1}}{k_j k_{j+1}} \right] w_{i,j+1} - \left[- \frac{2k_j + k_{j+1}}{k_j (k_j + k_{j+1})} \right] w_{i,j} = 0$$

i) Ponto da esquina ($i = 1$; $r = 0$)

$$\left[\frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}) (r_{i+1} e^{(Ar_{i+1})^2}) \right] w_{i,j} = 0$$

$$i = 1, \dots, i_{\max} - 2$$

ii) Ponto da esquina ($i = i_{\max}$; $r = 1$)

$$w_{i,j} = 0$$

5.6 - Verificação das Propriedades de Simetria e Anti-Simetria, para o Sistema em Diferenças Finitas.

5.6.a - Caso Simétrico

Verificamos que substituindo:

$$\bar{z}_j = z_j$$

$$\bar{r}_i = r_i$$

$$\bar{u}_{ij} = u_{ij}$$

$$\bar{w}_{ij} = w_{ij}$$

$$\bar{v}_{ij} = v_{ij}$$

$$\bar{T}_{ij} = T_{ij}$$

$$\bar{p}_{ij} = p_{ij}$$

temos a seguinte mudança nas constantes k , definidas pelas relações (5.3) como:

$$k_j = z_{j+1} - z_j \quad \text{e} \quad z_j = -z_j$$

portanto:

$$\begin{aligned} \bar{k}_j &= \bar{z}_{j+1} - \bar{z}_j \\ &= -z_{j+1} + z_j \end{aligned}$$

de onde vem que:

$$\bar{k}_j = -k_j$$

daqui obtemos que:

$$\bar{k}c_1 = \frac{-\bar{k}_{j-1}}{-k_j (-k_{j-1} - k_j)} = \frac{k_{j-1}}{k_j (k_j + k_{j-1})} = -kc_1$$

analogamente

$$\bar{k}_{c2} = -k_{c2}$$

$$\bar{k}_{c3} = -k_{c3}$$

$$\bar{k}_{c4} = k_{c4}$$

$$\bar{k}_{c5} = k_{c5}$$

$$\bar{k}_{c6} = k_{c6}$$

Agora substituindo as expressões acima na equação de continuidade (5.4a) em diferenças finitas, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[r_i h c_1 \right] u_{i+1,j} - \left[r_i h c_3 \right] u_{i-1,j} + \\ & + \left[r_i h c_2 + 2A r_i^2 \right] u_{i,j} + \left[r_i (-k_{c1}) \right] (-w_{i,j+1}) + \\ & + \left[r_i (-k_{c2}) \right] (-w_{i,j}) - \left[r_i (-k_{c3}) \right] (-w_{i,j-1}) = 0 \end{aligned}$$

E verificamos que a invariância também é mantida no caso da equação expressa em diferenças finitas.

É fácil verificar que todas as equações (5.4) permanecerão invariantes com as substituições acima descritas, assim o sistema de equações que governa o escoamento mantém a invariância se expresso em diferenças finitas.

Ademais as condições de contorno para o caso simétrico continuam invariantes se expressas em diferenças finitas.

Note-se que as constantes h_c não mudam de sinal, pois r não muda.

5.6.b - Caso Anti-Simétrico

Neste caso fazemos a substituição:

$$\bar{u}_{ij} = -u_{ij}$$

$$\bar{v}_{i,j} = -v_{i,j}$$

$$\bar{w}_{i,j} = -w_{i,j}$$

$$\bar{t}_{i,j} = -T_{i,j}$$

$$\bar{p}_{i,j} = -P_{i,j}$$

$$\bar{r}_i = r_i$$

$$\bar{z}_j = z_j$$

As variações de sinal para as constantes h_c e k_c , valem para este caso.

Efetuada as substituições necessárias na equação (5.4a), obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[r_i h_{c1} \right] (-u_{i+1,j}) - \left[r_i h_{c3} \right] (-u_{i-1,j}) + \\ & + \left[r_i h_{c2} + 2A r_i^2 + 1 \right] (-u_{i,j}) + \\ & + \left[r_i (-kc1) \right] w_{i,j+1} + \left[r_i (kc2) \right] w_{i,j} - \\ & - \left[r_i (-kc3) \right] w_{i,j-1} = 0 \end{aligned}$$

ou seja, verificamos que a equação inteira muda de sinal, neste caso basta multiplicar ambos os lados da equação por -1, e obtemos a mesma equação (5.4a), ou seja, a equação permanece invariante.

Analogamente verificamos a invariância do resto das equações (5.4) no caso anti-simétrico.

Nas condições de contorno para as tampas se verifica uma espécie de troca simétrica de condições pois possuímos para a tampa superior:

$$-v_{i,j} = \epsilon r_i \quad \text{ou} \quad v_{i,j} = -\epsilon r_i$$

para a tampa inferior:

$$-v_{i,j} = -\epsilon r_i \quad \text{ou} \quad v_{i,j} = \epsilon r_i$$

ou seja, as condições de contorno da tampa inferior passam a ser as condições de contorno para a tampa superior e vice-versa.

Deste modo fica provado que o sistema de equações parciais que governa o escoamento com as condições de contorno expressos na forma de diferenças finitas, conserva as propriedades de simetria e anti-simetria expostas no capítulo 3.

C A P Í T U L O 6

TÉCNICAS COMPUTACIONAIS

6.1 - Introdução

A aplicação das equações em diferenças finitas obtidas no capítulo 5, equações (5.4a) - (5.4e), a cada um dos pontos nodais da rede na figura 5.1 fornece um sistema linear algébrico de equações que inclui $5 \cdot i_{max} \cdot j_{max}$ incógnitas.

O sistema de equações simultâneas pode ser escrito na forma

$$A \cdot x = b \quad (6.1)$$

onde se chamarmos a equação (5.4a) de y_p , a (5.4b) de y_u ; (5.4c) de y_v ; (5.4d) de y_w e (5.4e) de y_T ; temos:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} y_{p11} \\ y_{u11} \\ y_{v11} \\ y_{w11} \\ y_{T11} \\ y_{p21} \\ \vdots \\ y_{pimax, 1} \\ y_{uimax, 1} \\ \vdots \\ y_{wimax, jmax} \\ y_{Timax, jmax} \end{array} \right\} \quad e \quad x = \left\{ \begin{array}{l} u_{11} \\ v_{11} \\ w_{11} \\ T_{11} \\ p_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{imax, 1} \\ v_{imax, 1} \\ \vdots \\ w_{imax, jmax} \\ T_{imax, jmax} \end{array} \right\}$$

Note-se que o sistema (6.1) é quase homogêneo pois o vetor \underline{b} constante possui elementos diferentes de zero apenas para as condições de contorno nas tampas, (as chamadas condições de contorno forçantes).

Agora observamos que, nas condições de contorno já temos algumas incógnitas identificadas, isto é, nas condições de contorno homogêneas e nas condições forçantes, sabemos certamente para o primeiro caso por exemplo que:

$$u_{11} = 0$$

$$w_{11} = 0$$

$$T_{11} = 0$$

e no segundo caso que:

$$v_{11} = 0$$

$$v_{21} = \epsilon r_i$$

e assim sucessivamente para as demais condições de contorno homogêneas e forçantes; logo, sendo estas incógnitas já conhecidas torna-se desnecessário incluí-las no sistema de equações (6.1). Para obter um sistema de tratamento computacional simples, desprezamos as condições de contorno homogêneas e, levamos em consideração somente as condições de contorno forçantes.

Para simplificar o número de incógnitas definimos a constante N_{eq} , que é o número de equações e consequentemente o número de incógnitas:

N_{eq} = número total de incógnitas - número de incógnitas homogêneas.

portanto:

$$N_{eq} = 5 * i_{max} * j_{max} - 8 i_{max} - 7(j_{max} - 2)$$

onde:

$6 \text{ imax} =$ variáveis homogêneas nas tampas

e:

$7(\text{jmax} - 2) =$ variáveis homogêneas na parede e no eixo;

e ainda definimos mais duas constantes: NeqA , para os casos simétrico e anti-simétrico e NeqB para o caso de resolução a partir do plano médio $z=0$:

$$\text{NeqA} = 5 \cdot \text{imax} \cdot \text{jmax} - 6 \text{ imax} - 7(\text{jmax}-2)$$

$$\text{NeqB} = 5 \cdot \text{imax} \cdot \text{jmax} - 7 \text{ imax} - 7(\text{jmax}-2)$$

Com esta simplificação redefinimos o sistema (6.1):

$$A' x' = b' \quad (6.2)$$

onde A' e x' são as variáveis A e x respectivamente sem as incógnitas conhecidas das condições de contorno homogêneas.

Temos então um sistema linear de grande porte, onde A' é uma matriz esparsa, mas sem uma característica especial de esparsividade; x é um vetor "misto" de incógnitas, isto é, composto por u, v, w, T e p e ainda mais o sistema é quase homogêneo.

6.2 - Representação de Variáveis

Para tornar fácil a manipulação das variáveis em questão usamos técnicas especiais de representação de variáveis.

1) Representação do Vetor de Incógnitas x

É usada uma variável tipo vetor de três dimensões:

$$x(i, j, k)$$

onde,

i - coluna do ponto nodal

j - linha do ponto nodal

k - variável em questão;

onde,

k = 1 - variável u

k = 2 - variável v

k = 3 - variável w

k = 4 - variável T

k = 5 - variável p

Eliminando se por um processo booleano simples as variáveis conhecidas das condições de contorno homogêneas, sem alterar a estrutura acima definida.

ii) Representação da Matriz de Coeficientes

Como as equações serão aplicadas a cada ponto nodal respectivamente, teremos em cada ponto (exceto nos da fronteira), 5 equações, onde cada equação é uma linha da matriz A.

Usando a mesma idéia do vetor x, definimos:

$$AL(i, j, k)$$

onde,

$$i = 1, 2, \dots \quad imax$$

$$j = 1, 2, \dots \quad jmax$$

$$k = 1, 2, \dots \quad 5$$

como um outro vetor que armazenará os coeficientes de uma equação. Este vetor (equação) será gravado em disco cada vez que for calculado.

Ao término da aplicação teremos guardado em disco a matriz de coeficientes A por linha.

Pelo mesmo processo booleano de eliminação de incógnitas conhecidas usado no vetor x , é fácil obter a matriz A' .

6.3 - Resolução do Sistema

É fácil observar que para um número de pontos nodais pequeno já possuímos um sistema de equações grande. Como é de interesse o melhor aproveitamento da rede no sentido de obter mais informação é sempre desejado ampliar o número de pontos nodais; assim o número de incógnitas e as dimensões da matriz se tornam rapidamente impráticas e de difícil e custosa manipulação devido à dimensão limitada da memória do computador.

Portanto temos dois tipos de resolução:

- i) Quando a rede possui um número de celas que leva a um número de incógnitas condizente à memória do computador utilizado, o sistema (6.2) pode ser resolvido por qualquer método de resolução de um sistema linear associado a uma matriz de coeficientes geral.

Neste trabalho a matriz é invertida usando-se o método de Jordan (vide Apêndice C) com pivotamento parcial, reduzindo a matriz A' na matriz identidade através de uma sucessão de transformações elementares que também fornecerão o vetor b , onde estará o resultado.

- i. Quando o número de celas da rede leva a uma matriz de coeficientes que não cabe na memória do computador se efetua uma partição da mesma assim:

$$A_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} & A & & B \\ \hline & & & \\ & C & & D \end{array} \right]$$

e resolve-se o sistema através de um processo (vide Apêndice D) simples de resolução de matriz particionada. A única restrição é que as matrizes A e D devem ser quadradas e não singulares.

Desta maneira de cada vez só será necessário alocar na memória 1/4 dos coeficientes da matriz em questão.

O armazenamento das variáveis em disco é feita por acesso direto aleatório.

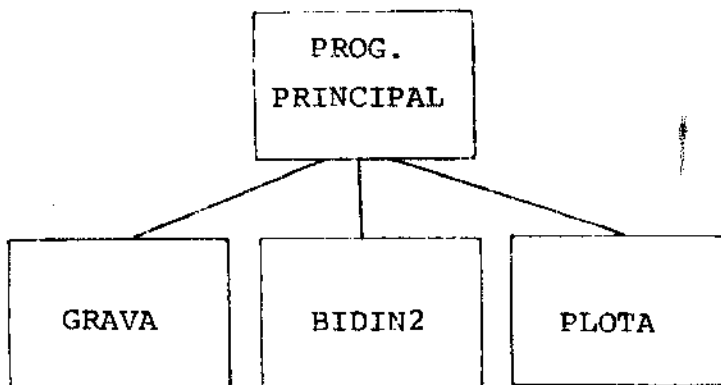
6.4 - Documentação do Programa

6.4.a - Introdução - SCOA

SCOA é uma coleção de subrotinas FORTRAN designado para operar como um sistema flexível e expandível para escoamento rotativo de gases. SCOA está escrito em FORTRAN V usando atualmente cerca de 100 K de memória e disco magnético para armazenamento de variáveis intermediárias.

6.4.b - Programa Principal

O programa principal segue a seguinte organização:



O programa principal inicialmente lê os dados de entrada, com os mesmos e com as equações expressas em diferenças finitas monta a matriz associada de coeficientes por linha. Uma vez montada a matriz, chama a subrotina BIDIN2 que resolverá o sistema, obtendo os resultados; chama a rotina PLOTA se for desejado obter o perfil das curvas plotado e, finalmente imprime os resultados.

Os parâmetros principais de decisão seguem o seguinte esquema:

VARIÁVEL	DEFAULT	DESCRIÇÃO
IUIN	21	Arquivo de entrada
IUOU	23	Arquivo de saída
KPLO	Ø	Ø - não plota as curvas 1 - plota as curvas

6.4.c - Subprogramas

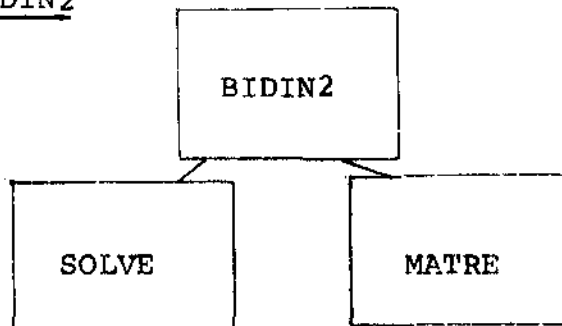
i) GRAVA

É uma subrotina que grava cada linha da matriz num arquivo.

As variáveis principais seguem o seguinte esquema:

PALAVRA	DEFAULT	DESCRIÇÃO
IUNIT	2	Arquivo onde é gravada a matriz

ii) BIDIN2

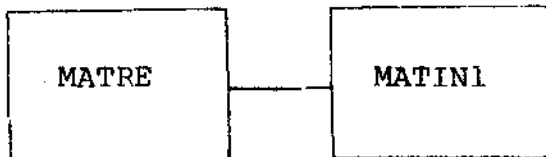


A subrotina BIDIN2 monta a matriz de coeficientes eliminando as variáveis conhecidas das condições de contorno homogêneas por um processo booleano. Dependendo do parâmetro KPAR, resolve o sistema usando as rotinas MATRE ou SOLVE.

Esquema das Variáveis Principais:

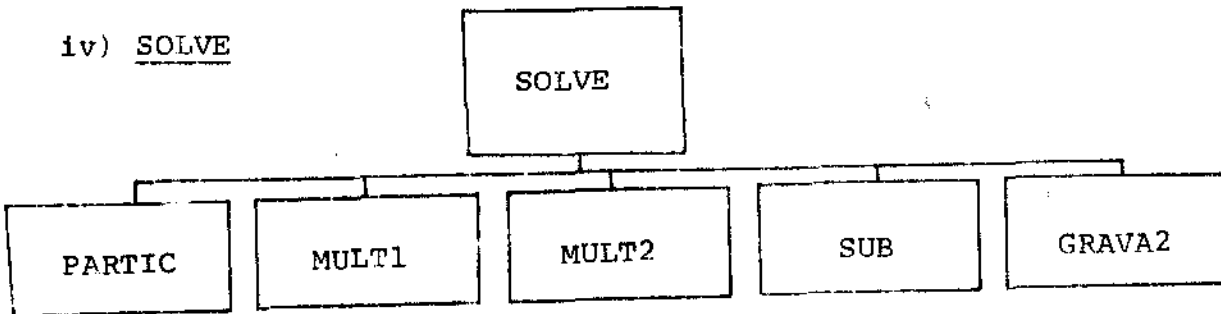
PALAVRA	DEFAULT	DESCRIÇÃO
KP	0	0 - chama a rotina MATRE (resolve a matriz reduzida) 1 - chama a rotina SOLVE (resolve a matriz particio nada)
IUTM	10	arquivo onde é guardado a ma triz reduzida

iii) MATRE



A subrotina MATRE resolve um sistema linear pelo método de Jordan (vide Apêndice C), usando a subrotina MATINI.

iv) SOLVE



A subrotina SOLVE resolve um sistema linear particio nado (vide Apêndice D), onde:

PARTIC - subrotina que particiona a matriz

Esquema das Variáveis Principais:

PALAVRA	DEFAULT	DESCRIÇÃO
NEQ1	$Neq/2$	1. ^a dimensão da partição
NEQ2	$Neq/2+1$	2. ^a dimensão da partição
IUTA	11	arquivo onde é armazenada a partição A
IUTB	12	arquivo onde é armazenada a partição B
IUTC	13	arquivo onde é armazenada a partição C
IUTD	14	arquivo onde é armazenada a partição D

MULT1 - rotina que multiplica duas matrizes sendo que uma na memória e outra no disco.

MULT2 - rotina que multiplica uma matriz no disco por um vetor.

SUB - rotina que subtrai duas matrizes em disco.

GRAVA2 - rotina que regrava uma partição da matriz após ter efetuado alguma operação.

v) PLOTA



PLOTA é uma subrotina que plota os perfis associados a velocidade axial w se desejado.

DRAW, é uma rotina que serve como interface entre o programa SCOA e as rotinas UNIPLOT do sistema CDC que possibilitam a plotagem das curvas.

6.4.d - Entrada

Os seguintes parâmetros deverão ser dados de entrada no arquivo IUIN.

{ NL - número de pontos nodais na linha.
NC - número de pontos nodais na coluna.

{ A - constante A
E - número de Ekman
EPS - epsilon para a velocidade v.

{HH(I)- intervalos horizontais entre os pontos nodais.

{HK(J)- intervalos verticais entre os pontos nodais.

{ KPLO - 0 - não se desejam curvas plotadas
1 - se desejam curvas plotadas
KPAR - 0 - a matriz cabe na memória, resolução direta
1 - a matriz deve ser particionada.

Cada agrupamento corresponde a uma linha, o formato de entrada é livre bastando um branco entre dois números .

6.4.e - Saída

Obtem-se como saída, além dos parâmetros de entrada, as coordenadas R(I) e o valor de cada variável u, v, w, p e T em cada ponto nodal.

Se desejado obtem-se as curvas por linha da velocidade de axial, isto é, variável w.

C A P Í T U L O 7

CONCLUSÕES

7.1 - Resultados Numéricos

Foram efetuados cálculos primeiro no semi-plano inteiro nos casos simétrico e anti-simétrico. Foi verificada que as soluções comportaram-se da maneira prevista. Isto é, por exemplo:

i) No caso simétrico, na linha central obteve-se

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

e

$$w = 0$$

e além disso, recuperou-se as propriedades de que

$$u(r, -z) = u(r, z)$$

$$v(r, -z) = v(r, z)$$

$$w(r, -z) = -w(r, z)$$

$$p(r, -z) = p(r, z)$$

$$T(r, -z) = T(r, z)$$

Neste caso obteve-se o padrão típico do escoamento secundário na forma de duas configurações de contra-corrente, nas duas metades do semi-plano (vide a Fig. 7.1 a, b).

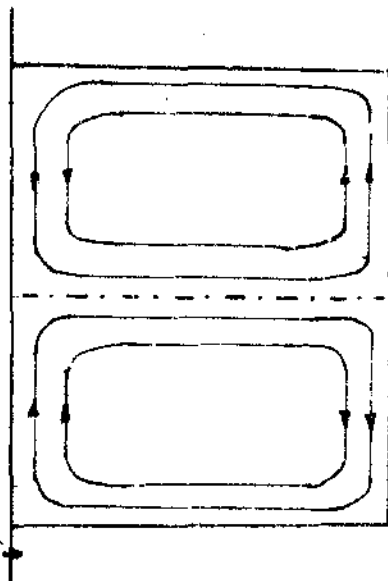


Figura 7.1a $\epsilon > 0$

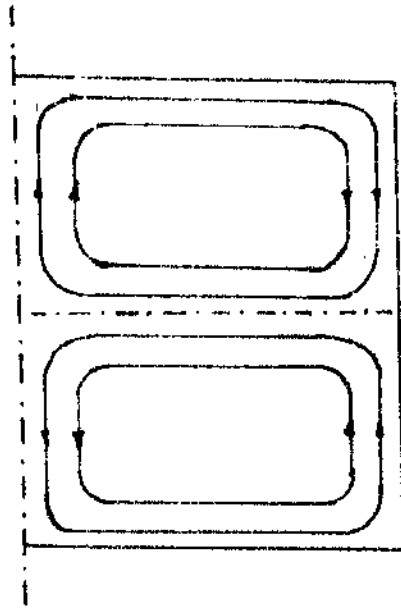


Figura 7.1b - $\epsilon < 0$

dependendo do sinal de ϵ nas tampas.

ii) No caso anti-simétrico, na linha central obteve-se

$$u = v = p = T = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

e além disso, recuperou-se também as propriedades de que

$$u(r, -z) = -u(r, z)$$

$$v(r, -z) = -v(r, z)$$

$$w(r, -z) = w(r, z)$$

$$T(r, -z) = -T(r, z)$$

$$p(r, -z) = -p(r, z)$$

Neste caso obteve-se o padrão típico do escoamento secundário na forma de contra-corrente abrangendo todo o semi-plano (vide fig. 7.2 a, b).

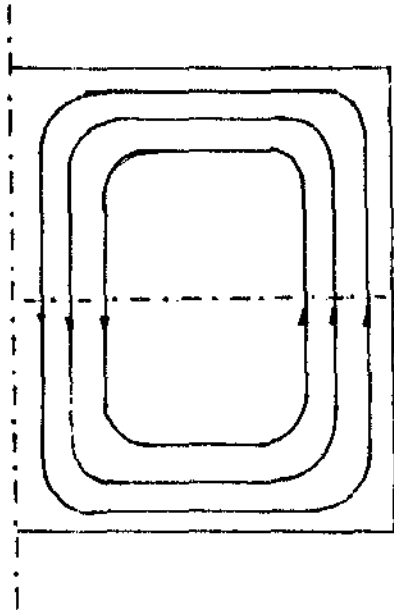


Figura 7.2a $\epsilon > 0$

ou

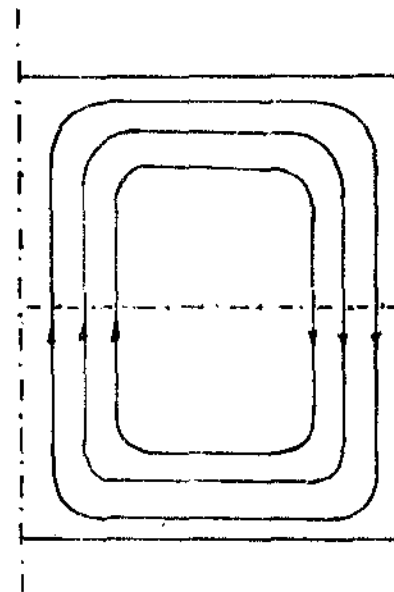


Figura 7.2b $\epsilon < 0$

dependendo do sinal de ϵ nas tampas.

Em seguida passou-se à solução do sistema no caso da metade do semi-plano em consideração.

Como era esperado, os resultados da metade do semi-plano coincidiram com os resultados anteriores.

É importante observar que passando aos semi-planos, o número dos pontos nodais e em consequência das equações e das incógnitas diminui aproximadamente até a metade.

Assim obtém-se melhor aproveitamento da memória, do tempo e outros recursos do computador.

Desta maneira torna-se possível recorrendo-se ao mesmo computador, ampliar o número de pontos nodais na rede, aumentando-se assim a precisão dos resultados.

7.2 - Valores dos Parâmetros

Os cálculos foram efetuados para valores moderados de A e E e para $Br \ll 1$. No caso de $A \gg 1$ e/ou de $E \ll 1$ aparecem violentas variações nos resultados numéricos perto das superfícies sólidas.

Este fato deve-se a criação, nestas condições, de certas camadas junto às paredes verticais e horizontais, como é bem conhecido da teoria ⁽⁶⁾.

Junto às paredes horizontais (discos) forma-se a chamada camada de Ekman, de espessura adimensional $E^{1/2}$. Dentro das camadas em questão os parâmetros do escoamento, (como u , v , w , p e T) sofrem pronunciadas variações (as vezes maiores do que no núcleo central do cilindro).

Neste caso aparecem também várias instabilidades no cálculo numérico, exigindo o maior cuidado na efetuação prática dos mesmos.

O parâmetro Br , se admitido como zero, desacopla a equação de energia das demais equações do sistema. Neste caso, se as condições de contorno fossem $T = T_e = Cte$ nas paredes, a solução da equação de energia dentro do cilindro será

$$T = T_e$$

facilitando a solução das demais equações.

Nos casos práticos o valor de Br é relativamente pequeno (no máximo na ordem de 0,1), fazendo com que o acoplamento entre a equação de energia com as demais equações seja fraco e sem muita importância.

O parâmetro ϵ entra nas equações de maneira linear, resultando no fato de que todos os resultados u, v, w, T, p são proporcionais ao valor de ϵ .

7.3 - Sugestões para Trabalhos Posteriores

Desde que a presente análise se restringe ao caso linearizado das equações 2.11 seria interessante determinar a solução numérica do mesmo sistema sem a linearização, usando a presente solução como o ponto de partida nas iterações.

Uma outra sugestão é estudar a esparsidade da matriz de coeficientes do sistema já discretizado e aproveitar esta esparsidade para obter melhoramentos da programação no sentido de diminuir o tempo de computação e a memória utilizada.

B I B L I O G R A F I A

- (1) SIELAWA, J.T.; SAN MIGUEL, E.R.C. - "Numerical Solutions of Linearized Secondary Gas Flow within Rotating Cylinder". Submetido e aceito para apresentação. Proceedings of 3rd International Conference of Numerical Methods in Laminar Turbulent Flow. Seattle, Washington, USA, 1.983
- (2) GARETH, P. WILLIAMS. - "Numerical Integration of the Three-dimensional Navier-Stokes equation for incompressible Flow". Journal of Fluid Mechanics, vol. 37. GREAT BRITAIN, 1.969
- (3) KAI, TSUNETOSHI. - "Basic Characteristics of Centrifuges (III) - Analysis of Fluid Flow in Centrifuges". Journal of Nuclear Science and Technology, vol. 14 TOKYO, JAPAN, 1.977
- (4) SOUBBRAMAYER; LAHARGUE, J.P. - "CENTAURE - A numerical Model for the Computation of the Flow and isotopic concentration fields in a Gas Centrifuge". Second Workshop of Gases in Strong Rotation. Cadarache, FRANCE, 1.977
- (5) LOPEZ, S. - "Comparison between the Flow in a Mechanically driven centrifuge with a baffle end that in an externally driven centrifuge, calculated by means of a numerical code using the finite difference method". Second Workshop on Gases in Strong Rotation. Cadarache, FRANCE, 1.977

- (6) SIELAWA, M.M.F. - "Escoamento Secundário gerado térmica ou mecanicamente dentro de um fluido em rotação". Tese de doutorado, ITA. São José dos Campos, SÃO PAULO, 1.982
- (7) COLLATZ, L. - "The numerical treatment of differential equations". Springer-Verlag - Zürich, 1.966
- (8) COHEN, A.M. - "Análisis Numérico". Editorial Reverte S/A. Barcelona, ESPAÑA, 1.977
- (9) BLUM, E.K. - "Numerical Analysis and Computation Theory and Practice". Adisson-Wesley Pub. Company, USA, 1.972
- (10) FROBERG, C.E. - "Introduction to numerical analysis". Adisson-Wesley Pub. Company, USA, 1.972

APÊNDICE A

EQUAÇÃO DE NAVIER STOKES

Nas equações de fluxo de fluídos viscosos com índice baixo de viscosidade é importante levar em conta as tensões de cisalhamento. A lei de Newton para fricção implica a existência de tensões de cisalhamento entre as partículas do fluído durante o movimento. Estas tensões demonstram ser proporcionais, à velocidade angular de deformação das partículas. Esta é a idéia na qual está baseada a lei de Newton para fricção no caso do escoamento geral tridimensional de um fluído viscoso com escoamento compressível.

A.1 - A Equação de Navier Stokes

Na dedução das equações de movimento para fluídos viscosos, observamos que além de considerar as tensões normais atuando sobre o elemento do fluído, devem ser consideradas também tensões de cisalhamento.

A.2 - Relação entre Diádicas

Num fluído newtoniano a relação entre a diádica de tensão \vec{T} e a diádica de deformação \vec{D} é linear e isotrópica.

Neste caso devemos ter:

$$\vec{T} = (\alpha + \mu' \vec{D} : \vec{T}) \vec{I} + 2 \mu \vec{D} \quad (A.1)$$

onde o símbolo ":" denota o duplo produto escalar

$$\alpha = -p$$

μ e μ' - o primeiro e segundo coeficiente de viscosidade respectivamente.

Na ausência de movimento temos $\vec{D} = 0$, a única tensão é de pressão, então a diádica de tensões vem a ser

$$\vec{T} = -p \cdot \vec{I} \quad (A.2)$$

onde p = pressão.

Substituindo $\vec{D} = 0$ em (A.1) e comparando com (A.2), vem

$$\alpha = -p$$

e portanto

$$\vec{T} = (-p + \lambda \vec{D} : \vec{I}) \vec{I} + 2 \mu \vec{D} \quad (A.3)$$

comparando (A.3) com

$$\vec{T} = -p \cdot \vec{I} + \vec{\tau} \quad (A.4)$$

onde $\vec{\tau}$ é a diádica de tensões viscosas, vem que:

$$\vec{\tau} = (\lambda \vec{D} : \vec{I}) \vec{I} + 2 \mu \vec{D} \quad (A.5)$$

Como sabemos que a diádica de deformação é

$$\vec{D} = \frac{1}{2} (\vec{L} + \vec{L}^T) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{v} \vec{v} + (\vec{v} \vec{v})^T \right\} \quad (A.6)$$

onde

$$\vec{L} = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

é chamada de "gradiente taxa de deformação".

Então temos que

$$\vec{T} = (-p + \lambda \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \cdot \vec{I} + \mu \left\{ \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^T \right\} \quad (A.7a)$$

e

$$\vec{\tau} = (\lambda \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \cdot \vec{I} + \mu \left\{ (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^T \right\} \quad (A.7b)$$

ou em notação tensorial:

$$T_{ij} = \left(-p + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (A.8)$$

$$T_{ij} = \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (A.9)$$

onde

δ_{ij} é o chamado operador de Kronecker.

Tomando a forma diferencial da equação da quantidade de movimento temos:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (A.10)$$

onde

ρ - massa específica

\vec{g} - forças de volume por unidade de massa

e decompondo \vec{T} de acordo com (A.4) temos:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot p + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (A.11)$$

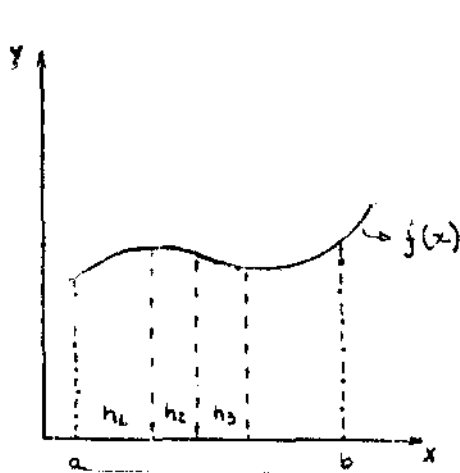
Agora substituindo (A.7b) em (A.11) e admitindo μ e λ constantes, temos:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

que é a equação de Navier-Stokes.

APÊNDICE BINTEGRAÇÃO PELO MÉTODO DOS TRAPÉZIOS COM INTERVALO VARIÁVEL

Desejamos integrar uma curva $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. A função $f(x)$ é contínua no intervalo (Fig: B.1)



$$\int_a^b f(x) dx$$

$$h_1 \neq h_2 \neq h_3$$

$$f(a) = f(x_0)$$

$$f(b) = f(x_n)$$

Fig: B.1 Curva $f(x)$

Na ordem 1 teríamos pela regra dos trapézios:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \\ &= \frac{h_1}{2} f(x_0) + \frac{h_1 + h_2}{2} f(x_1) + \frac{h_2}{2} f(x_2) \end{aligned}$$

e generalizando teremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h_1}{2} f(x_0) + \frac{h_1 + h_2}{2} f(x_1) + \frac{h_{n-1} + h_n}{2} \\ & f(x_{n-1}) + \frac{h_n}{2} f(x_n) \end{aligned}$$

APÊNDICE C

INVERSA DE UMA MATRIZ PELO MÉTODO DE JORDAN

C.1 - Introdução

Seja A uma matriz quadrada não singular do tipo (n, n). Nosso problema é determinar X que satisfaça a relação.

$$A \cdot X = I \quad < (C.1)$$

isto é

$$X = \text{inversa de } A \quad X = A^{-1}$$

Denotamos por x_1, x_2, x_n os vetores correspondentes a primeira, segunda, ... nésima coluna de X respectivamente e de forma análoga definimos os vetores unitários I_1, I_2, \dots, I_n .

Assim a equação (C.1) pode ser substituída pelo sistema linear de n equações.

$$Ax_r = I_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad < (C.2)$$

O sistema tem solução única desde que $\text{Det } A \neq 0$. A solução pode ser calculada pelo método de eliminação de Gauss, mas, neste trabalho preferimos a modificação de Jordan pelo fato de que, embora o método de Gauss seja mais rápido, a modificação de Jordan demanda menos memória de computador para armazenar resultados intermediários.

C.2 - Método de Jordan

Começamos escrevendo A e I uma ao lado da outra. Logo eliminamos x_1 de todas as equações menos a segunda e assim sucessivamente.

Como pode se verificar facilmente, somente n^2 elemen

tos não triviais precisam ser estocados durante todo o processo.

Cada passo na eliminação fornece uma coluna na matriz unitária à esquerda e no final temos I no lado esquerdo, e A^{-1} no lado direito.

No p-ésimo passo teremos o seguinte esquema:

	(1)	(2)	...	(p)	(p+1)	...	(n)	(1)	(2)	...	(p)	(p+1)	...	(n)
(1)	1	0		0	a_{1p+1}^p	...	a_{1n}^p	a_{11}^p	a_{12}^p		a_{1p}^p	0		0
(2)	0	1		0	a_{2p+1}^p		a_{2n}^p	a_{21}^p	a_{22}^p		a_{2p}^p	0		0
...														
(p)	0	0		1	a_{pp+1}^p	...	a_{pn}^p	a_{p1}^p	a_{p2}^p		a_{pp}^p	0		0
(p+1)	0	0		0	a_{p+1p+1}^p		a_{p+1n}^p	a_{p+11}^p	a_{p+12}^p		a_{p+1p}^p	1		0
...														
(n)	0	0		0	a_{np+1}^p		a_{nn}^p	a_{n1}^p	a_{n2}^p		a_{np}^p	0		1

Esquema C.1 Iteração p no Método de Jordán

A seguinte fórmula é usada para a p-ésima redução da p-ésima linha.

$$a_{jk}^p = \frac{a_{jk}^{p-1} p_k}{a_{jp}^{p-1} p_p}$$

para as outras linhas temos:

$$a_{jk}^p = a_{jk}^{p-1} - a_{jp}^{p-1} \frac{a_{jk}^{p-1} p_k}{a_{jp}^{p-1} p_p}$$

Depois de n passos obtemos a inversa A^{-1} . Somente os n^2 elementos que estão enquadrados no esquema precisam ser armazenados, o elemento impresso forte $a_{p+1, p+1}^p$ é o elemento pivot para o próximo passo.

Notamos que os pivots no Método de Jordan são escolhidos como no método de Gauss, mas como os elementos são também eliminados das linhas pivotadas anteriormente. Os atuais pivots não são afetados desde que os outros elementos prévios ao pivot na coluna são zero, isto é, o pivotamento no Método de Jordan é parcial (10).

APÊNDICE D

RESOLUÇÃO DE SISTEMA LINEAR EM MATRIZ PARTICIONADA

Sabe-se que dada uma matriz Y , $n \times m$, podemos parti-
cioná-la de acordo ao nosso interesse. Para problemas asso-
ciados a sistemas lineares, onde a matriz de coeficientes é
muito grande, é usual utilizar uma partição da mesma em 4 sub-
matrizes.

D.1 - Cálculo da Inversa

Seja x uma matriz, $n \times n$, particionada em 4, onde A e
 D são matrizes quadradas tais
 $\text{Det } A \neq 0$ e, $\text{Det } D \neq 0$. (8)

$$x = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$x^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Se a inversa de x é x^{-1} en-
tão temos que

$$x \cdot x^{-1} = I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

- $\Rightarrow A\alpha + B\gamma = I$ < (D.1)
- $A\beta + B\delta = O$ < (D.2)
- $C\alpha + D\gamma = O$ < (D.3)
- $C\beta + D\delta = I$ < (D.4)

de (D.1) temos:

$$\gamma = -D^{-1} C$$

de (D.2) temos:

$$\beta = -A^{-1} B$$

$$A\alpha + B(-D^{-1} C\alpha) = I$$

$$\alpha = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

substituindo em D.4, temos:

$$\delta = (D - CA^{-1}B)^{-1}$$

e analogamente, obtemos:

$$\alpha = -D^{-1}C (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

$$\beta = -A^{-1}B (D - CA^{-1}B)^{-1}$$

Calculando cada uma das expressões α , β , γ e δ , obtemos a inversa da matriz x .

D.2 - Solução de Sistema Linear

Seja a matriz $X \times n \times m$ como definida anteriormente associada a um sistema linear de equações

$$X * y = b$$

onde

y - vetor de incógnitas e

b - vetor constante.

o sistema particionado fica,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (D.5)$$

D.2.a - Caso $b_2 = 0$ e $b_1 \neq 0$

Se no sistema D.5 substituirmos $b_2 = 0$, temos:

$$A y_1 + B y_2 = b_1 \quad (D.6a)$$

$$C y_1 + D y_2 = b_2 = 0 \quad (D.6b)$$

$$Cy_1 + Dy_2 = 0 \quad Y_1 = -D^{-1} Cy_2 \quad (D.7)$$

Substituindo D.7 em D.6a, obtemos:

$$Y_1 = (A - BD^{-1}C)^{-1} b_1$$

$$Y_2 = -D^{-1}C \left[(A - BD^{-1}C)^{-1} b_1 \right]$$

ficando assim o sistema resolvido (9).

D.2.b - Caso $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$

Temos do sistema (D.5):

$$\begin{cases} A Y_1 + B Y_2 = b_1 & < (D.8a) \\ C Y_1 + D Y_2 = b_2 & < (D.8b) \end{cases}$$

De (D.8b) obtemos:

$$Dy_2 = b_2 - CY_1$$

$$\Rightarrow Y_2 = D^{-1} (b_2 - CY_1) \quad (D.9)$$

Substituindo (D.9) em (D.8a), obtemos:

$$AY_1 + B \left[D^{-1} (b_2 - CY_1) \right]$$

$$\Rightarrow Y_1 = (A - BD^{-1}C)^{-1} \left[b_1 - BD^{-1}b_2 \right]$$

$$\Rightarrow Y_2 = D^{-1} \left(b_2 - \left\{ C (A - BD^{-1}C)^{-1} \left[b_1 - BD^{-1}b_2 \right] \right\} \right).$$