

EQUILÍBRIO MAGNETOHIDRODINÂMICO DE
UM THETA-PINCH DE CAMPO REVERSO
COM ROTAÇÃO TOROIDAL AXISSIMÉTRICA

Por CARLOS SHINYA SHIBATA

Orientador: DR. PAULO HIROSHI SAKANAKA

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisi-
tos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.
Campinas, maio de 1983.

COMISSÃO JULGADORA

- Membros Titulares -

DR. PAULO HIROSHI SAKANAKA (Presidente)

Deptº de Eletrônica Quântica - IFGW - Unicamp

DR. ROBERTO LUZZI

Deptº de Física do Est. Sól. e Ciênc. dos Mat. - IFGW - Unicamp

DR. RICARDO MAGNUS OSÓRIO GALVÃO

Div. de Fís. Teórica - Inst. de Est. Avançados - Centro Técnico Aeroespacial

- Membros Suplentes -

DR. JOSÉ BUSNARDO NETO

Deptº de Eletrônica Quântica - IFGW - Unicamp

DR. IBERÊ LUIS CALDAS

Instituto de Física - Universidade de São Paulo

" O medo da loucura, na maioria das vezes, outra coisa não é senão o próprio medo de viver, de enfrentar as exigências do nosso aperfeiçoamento, de dominar nossos instintos. Entre a ingenuidade da vida instintiva e aquilo que deveríamos consciente e constantemente nos esforçar para atingir, medeia sempre um abismo. Não conseguimos atravessá-lo lançando sobre ele uma ponte, mas podemos tentar saltá-lo. E para cada tentativa, precisamos ter coragem. E antes de cada salto, havemos de sentir algum medo."

" Dar sentido à vida, é missão do amor. Vale dizer: quanto mais somos capazes de amar e de nos dedicarmos a alguém, tanto mais plena de sentido se torna a nossa vida."

(H. Hesse)

A maninha Sandy,
que me acompanhou em todos os saltos,
.... com muito carinho.

Agradecimentos

Ao Dr. P.H.Sakanaka, pela orientação recebida para a realização deste trabalho.

Aos Drs. L.Kai e B.K.Cheng do Deptº de Física da Universidade Federal do Paraná, pelo constante estímulo recebido durante e depois da minha estada naquela universidade.

Aos colegas do Grupo de Plasma da Unicamp, em especial aos mestres Y.Shigueoka e J.P.Leite Neto, pela amizade e pelas agradáveis discussões "político-desportivo-científicas".

Aos Físicos de Curitiba —mestre Uhlmann, Pauletto, Ângela, Tamara, Chris, Tai Chi, Ane, Diana — pequena mas amável "torcida", da qual jamais poderia me esquecer.

Às seguintes entidades, pelo inestimável apoio financeiro:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico,

CNEN - Comissão Nacional de Energia Nuclear,

Finep - Financiadora de Estudos e Projetos.

A todos, muito obrigado.

Comissão Julgadora	ii
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
RESUMO	1
 I. INTRODUÇÃO	
1.1 - Fusão Termonuclear Controlada como Fonte Alternativa de Energia..	2
1.2 - Fusão Termonuclear Controlada e Física de Plasmas	3
1.3 - Escopo e Relevância deste Trabalho	4
 II. EQUILÍBRIO MAGNETOHIDRODINÂMICO	
2.1 - Teoria MHD Ideal	7
2.2 - Equilíbrio MHD Estático em Sistemas Axissimétricos:	
Equação de Grad-Shafranov	10
2.3 - Equilíbrio MHD Estacionário em Sistemas Axissimétricos com	
Rotação Toroidal: Equação de Grad-Shafranov Modificada	16
A. Equação de Conservação de Momento	16
B. Dependência Funcional de ω	18
C. Equação de Grad-Shafranov Modificada	20
D. Perfis Arbitrários	24
2.4 - Fechamento do Sistema de Equações MHD: "Equação de Estado"	25
2.5 - Quadro Comparativo entre os Equilíbrios MHD	
Estático e Estacionário	26
 III. APLICAÇÃO A UM THETA-PINCH DE CAMPO REVERSO	
3.1 - Generalidades	27
3.2 - Equilíbrio Estático (Sem Rotação)	31
A. Solução da Equação de G-S por Separação de Variáveis	31
B. Condições de Contorno e Determinação das Constantes	32
3.3 - Equilíbrio Estacionário (Com Rotação)	37
A. Solução da Equação de GS-M por Separação de Variáveis	37
B. Expansão dos Parâmetros e Determinação das Constantes	39
3.4 - Cálculos Numéricos	48
A. Expressões Analíticas	48
B. Parâmetros Arbitrados	55
C. Constantes Calculadas	56
3.5 - Resultados	58
A. Figuras e Gráficos	58
B. Análise e Comentários	69

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 - Sobre a Equação de Grad-Shafranov Modificada	70
4.2 - Conclusões	71
4.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros	72

APÊNDICES

A. Significado Físico da Função de Fluxo ψ	73
B. Dependência Funcional de $f(\psi)$	76
C. Sobre as Equações de Estado Adiabático e Isotérmico	78
D. Parte Radial da Equação de G-S	79
E. Cálculo das Constantes C_1 e C_2	81
F. "Leis de Conservação"	82
G. Relação entre δa e \vec{F}_c	89

REFERÊNCIAS	92
-------------------	----

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos uma nova teoria que descreve o equilíbrio magnetohidrodinâmico de plasmas com rotação toroidal (azimutal, em configurações cilíndricas) axissimétrica. Esta técnica se constitui numa extensão da Equação de Grad-Shafranov (G-S), na qual o efeito da rotação é incluído de uma maneira totalmente auto-consistente, através do termo da força centrífuga na equação de conservação do momento.

Neste novo formalismo, supomos uma rotação puramente toroidal ($\vec{v} = v(r,z)\hat{\phi}$) do plasma em torno do seu eixo de simetria ($\vec{\omega} = \omega(r,z)\hat{z}$), e é mostrado inicialmente que $I \equiv rB_{\phi} = I(\psi)$ e que $\omega \equiv v/r = \omega(\psi)$, onde $\psi(r,z) \equiv$ fluxo poloidal/ 2π ; supondo ainda que a densidade de massa seja $\rho = \rho(\psi)$, segue-se que $g \equiv \frac{1}{2} \rho\omega^2 = g(\psi)$ e que $f \equiv p - r^2g = f(\psi)$, onde $p(r,z)$, é a pressão cinética. A seguir, é derivada uma equação diferencial para $\psi(r,z)$, semelhante à equação de G-S, mas que agora envolve três perfis arbitrários, $I(\psi)$, $f(\psi)$ e $g(\psi)$, ao contrário da equação de G-S original, que apresenta apenas duas funções arbitrárias, $I(\psi)$ e $p(\psi)$. Esta nova equação, a qual denominaremos de equação de Grad-Shafranov Modificada (GS-M), descreve tanto o equilíbrio com rotação, quanto o caso estacionário — i.e., é uma equação generalizada.

Elaborada a teoria, aplicamo-la a um theta-pinch de campo reverso: uma vez obtida a solução de equilíbrio estático (sem rotação), o efeito da força centrífuga é incluído utilizando-se o método da variação dos parâmetros, consistente com a conservação do número total de partículas, da energia térmica total e do fluxo magnético máximo. Os resultados mostram que a rotação provoca um achatamento axial do plasma, como também o deslocamento das superfícies isobáricas em relação às superfícies de fluxo.

I. INTRODUÇÃO

1.1 - Fusão Termonuclear Controlada como Fonte Alternativa de Energia^{1,2}

Como consequência do desenvolvimento tecnológico, a demanda mundial de energia vem crescendo assustadoramente nas últimas décadas. O consumo global de energia, que era da ordem de $0.3 \sim 0.5$ Q/século até 1850, saltou para 4.0 Q nos 100 anos seguintes, e está estimado em 15 Q só para o período 1951 \sim 2000 ($Q \equiv 10^{18}$ BTU $\approx 10^{21}$ Joules). Em contrapartida, as reservas mundiais de combustíveis fósseis, como o petróleo e o carvão mineral, estão estimados em 80 Q — quantidade esta que, se mantida a atual taxa de demanda energética, supriria as nossas necessidades apenas por mais um século.

Neste contexto sombrio, a energia nuclear, explorada comercialmente há quase três décadas (1956, Inglaterra), figura como o principal substituto dos combustíveis não-renováveis. Reatores à fissão, que utilizam principalmente o U-235, estão largamente difundidos nos EUA, Europa Ocidental, URSS e Japão. No entanto, baseado na reserva mundial de urânio, estes reatores seriam capazes de gerar energia da ordem de 3.0 Q, que está longe de satisfazer a demanda prevista. Com a entrada em operação dos chamados "reatores regeneradores rápidos" (*fast breeder reactors*), mais eficientes, esta produção de energia poderia ser ampliada até da ordem de 350 Q. Mesmo assim, se considerarmos um período de tempo de alguns séculos, tal quantidade não será ainda uma reserva tranquilizadora. Além do mais, quer nos reatores convencionais, quer nos regeneradores rápidos, a produção de resíduos altamente radiativos se constitui num grande obstáculo, que até agora não foi solucionado de uma maneira satisfatória.

Surge então como alternativa aos reatores à fissão um sistema no qual a energia útil é obtida através da fusão de núcleos le

ves, como o deutério, trítio, hélio e lítio. A abundância destes "combustíveis" na natureza é praticamente inesgotável: por exemplo, todo o deutério presente nos oceanos seria capaz de gerar 4×10^9 Q. Além do mais, os reatores a fusão liberam detritos muito menos radioativos que os a fissão. Contudo, esta imensa reserva de energia nuclear ainda não está sendo explorada pelo homem: apesar de as pesquisas nesta área terem sido iniciadas já na década de 50 (explosão da primeira Bomba-H: EUA, 1951), a fusão termonuclear *controlada* ainda se encontra no estágio de demonstração da sua viabilidade científica.

1.2 - Fusão Termonuclear Controlada e Física de Plasmas³

A denominação "plasma" para descrever um gás ionizado foi introduzida por Tonks e Langmuir, em 1929, nos seus estudos sobre oscilações em descargas elétricas — muito embora, já em 1906, Lord Rayleigh tenha estudado o comportamento coletivo de partículas carregadas devido às forças coulombianas de longo alcance. É neste "estado de plasma" — gás altamente ionizado — que ocorrem as reações de fusão termonuclear.

Numa temperatura superior a 10^8 K, a maioria dos elementos já se encontra ionizado; entretanto, para que dois núcleos colidam com energia térmica suficiente para vencer a repulsão coulombiana e se fundirem, a temperatura deve ser da ordem de 10^9 K, por exemplo, numa reação D-D. Nestas condições, a preocupação básica da Física de Plasmas relacionada com a fusão termonuclear controlada não é obter um plasma absolutamente estável, mas sim mantê-lo em situações próximas às de equilíbrio durante um tempo suficientemente "longo" (da ordem de 1 seg), para que a energia produzida pelas reações de fusão seja maior que a energia gasta para criar e confinar o plasma. Em outras palavras, os requisitos físicos básicos para a viabilidade de um reator a fusão, podem ser sumarizados co

mo segue: (i) um plasma *suficientemente* denso e (ii) a uma temperatura *suficientemente* alta, (iii) deve ser confinado por um tempo *suficientemente* longo. A forma mais elementar destas condições de suficiência é expressa pelo critério de Lawson¹:

$$n\tau_E \gtrsim f(T),$$

onde n é a densidade do plasma, T a sua temperatura, e τ_E o tempo de confinamento de energia; para uma temperatura otimizada de $T \approx 15$ keV, devemos ter tipicamente $f(T) \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ seg}$.

Devido a sua elevada temperatura, o confinamento destes plasmas termonucleares só é possível através de fortes campos magnéticos, em geral criados por correntes externas. Deste modo, podemos dizer também que a Física de Plasmas estuda fundamentalmente as interações entre as forças inerciais, as de gradiente de pressão e as de Lorentz, ocasionadas pelas correntes e campos magnéticos no interior do plasma.

1.3 - Escopo e Relevância deste Trabalho

Nesta tese, o "estado de equilíbrio" MHD acima referido é analisado para um sistema particular de confinamento magnético de plasma: o theta pinch de campo reverso (*field-reversed theta-pinch*, FRÖP), com rotação axissimétrica^{4,5} (Fig. 1-1a).

Por questão de clareza, a nossa escolha do assunto para o presente trabalho pode ser justificada por duas razões distintas. Em primeiro lugar, o estudo do FRÖP é de particular interesse para o Grupo de Plasma da Unicamp, tendo em vista o seu projeto de construção num futuro próximo, com posterior evolução para uma configuração de spheromak (Fig. 1-1b). Em segundo lugar, a rotação de plasmas, tanto em geometrias cilíndricas como toroidais, tem sido objeto de vários trabalhos teóricos⁶⁻⁹ ^{10,11}

e experimentais^{12,13}, em particular daqueles relacionados com injeção de partículas visando o aquecimento do plasma^{14~18}, ou com o estudo das instabilidades rotacionais^{19~30}. Ainda, muito embora não seja do nosso interesse imediato, esta rotação tem grande aplicação em centrífuga de plasmas para fins de separação de isótopos.^{31~33}

Iniciamos o capítulo II com uma breve discussão sobre a teoria MHD ideal (seção 2.1) e a derivação da equação de Grad-Shafranov (seção 2.2). As seções 2.3 e 2.4 se constituem na primeira parte desta tese propriamente dita — nelas apresentamos a generalização da equação de Grad-Shafranov para o equilíbrio estacionário; a comparação entre os equilíbrios com e sem rotação é feita na seção 2.5.

No capítulo III, segunda parte do nosso trabalho, este novo formalismo é aplicado a um FRÖP: nas suas 5 seções, abordamos desde o mecanismo de formação de um FRÖP até a apresentação dos perfis característicos do plasma, passando pela resolução analítica da equação de equilíbrio e pelos métodos de determinação das constantes.

Finalmente, no capítulo IV apresentamos algumas conclusões a respeito dos resultados obtidos.

Também, objetivando dar a esta tese um caráter eminentemente didático, procuramos, dentro do possível, apresentá-la de uma maneira mais simples mas auto-consistente. Assim, um grande número de referências é citado, como vimos há pouco, a respeito de tópicos que julgamos serem, embora de grande importância, não diretamente relacionados com a idéia central deste trabalho. Igualmente, as passagens algébricas mais extensas foram deixadas para os Apêndices, reunidos no final desta tese, a fim de evitarmos a "perda do fio da meada", por excesso de abstração matemática.

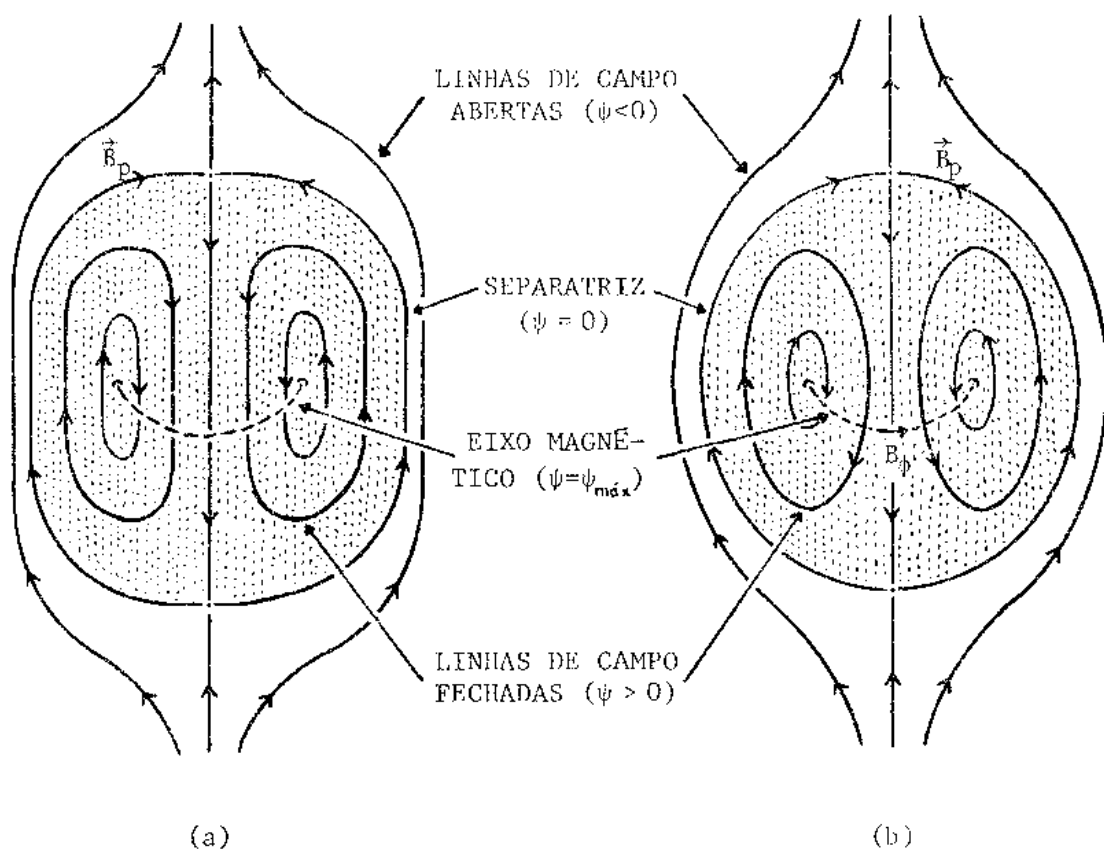


Fig. (1-1): Duas concepções de toros compactos: (a) theta-pinch de campo reverso, e (b) spheromak; a diferença estrutural fundamental é a ausência do campo toroidal na primeira configuração. Em ambos os casos, a área sombreada, contida na separatriz, representa a região de maior densidade de partículas.

II. EQUILÍBRIO MAGNETOHIDRODINÂMICO

2.1 - Teoria MHD Ideal^{34,35}

Na teoria magnetohidrodinâmica (MHD) ideal, o plasma é descrito como um fluido condutor ideal (resistividade nula), e este talvez seja o modelo físico mais simples que ainda resguarda uma auto-consistência, no sentido de, através de um sistema fechado de equações diferenciais, ser capaz de descrever qualitativa e quantitativamente, com razoável concordância com os fatos experimentais, o comportamento de plasmas a temperaturas term nucleares. Em particular, é o único modelo que leva em consideração a geometria global dos sistemas de confinamento. Do ponto de vista matemático, uma grande simplificação nas equações descritivas é obtida tirando-se os momentos da Equação de Boltzmann para o caso acolisional (Equação de Vlasov):

$$\frac{d}{dt} [f(\vec{r}, \vec{v}, t)] = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0,$$

o que é feita multiplicando-se a equação acima por diferentes potências de \vec{v} , e integrando-as sobre o espaço das velocidades — este procedimento reduz o número de variáveis independentes que figuram na função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, de sete para quatro.

Por outro lado, estas simplificações restringem a região de validade da teoria MHD ideal, e uma análise mais rigorosa neste aspecto pode ser encontrada nas Refs. [35] e [36]; limitaremos-nos aqui a apresentar as premissas fundamentais:

(a) não se consideram efeitos quânticos e/ou relativísticos;

(b) todos os efeitos dissipativos são ignorados, e o sistema é conservativo;

(c) na força de Lorentz, $\frac{q}{c} \vec{E}$ é desprezível frente a $\vec{j} \times \vec{B}$;

(d) na lei de Ampère, a corrente de deslocamento $\vec{\epsilon}$ desprezível se comparada com \vec{j} ;

(e) o campo elétrico no referencial que se move com uma velocidade \vec{v} é dado por:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} ,$$

onde \vec{E} é o campo no referencial fixo;

(f) sendo σ a condutividade elétrica do plasma, a lei de Ohm $\vec{\epsilon}$:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}' = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) ;$$

no caso ideal ($\sigma \rightarrow \infty$), para se ter um \vec{j} finito, devemos ter $\vec{E}' = 0$,
ou seja,

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 ,$$

e a densidade de corrente $\vec{\epsilon}$ determinada pela lei de Ampère, e não mais pela lei de Ohm. Neste caso também não há difusão das linhas de campo magnético através do meio condutor, e diz-se que as linhas de campo são "congeladas" no fluido (*frozen-in law*).

Apoiado nestas premissas, o conjunto de equações básicas que descrevem o plasma como um fluido MHD ideal $\vec{\epsilon}$:

(a) equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 ; \quad (2.1)$$

(b) equação da conservação de momento:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p ; \quad (2.2)$$

(c) lei de Ohm:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 ; \quad (2.3)$$

(d) equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} , \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \quad (2.6)$$

(e) equações de estado:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 , \quad (\text{fluido incompressível}) \quad (2.7a)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0 , \quad (\text{fluido adiabático}) \quad (2.7b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = 0 ; \quad (\text{fluido isotérmico}) \quad (2.7c)$$

onde ρ é a densidade de massa do plasma, p a sua pressão cinética (suposta escalar), \vec{E} e \vec{B} os campos elétrico e magnético, \vec{j} a densidade de corrente, \vec{v} a velocidade (macroscópica) do plasma, e γ a razão entre os calores específicos, e temos adotado o sistema MKS racionalizado. Mais tarde (seção 2.4), vamos estabelecer uma nova "equação de estado", dife-

rente das apresentadas acima, para o fechamento do sistema de equações MHD.

2.2 - Equilíbrio MHD Estático em Sistemas Axissimétricos:

Equação de Grad-Shafranov³⁷

Na última década, muitos autores têm se preocupado na obtenção de soluções analíticas e numéricas de configurações de equilíbrio estático ($\vec{v} = 0$) em sistemas de simetria axial (e.g. tokamaks³⁸⁻⁵³ e spheromaks⁵⁴⁻⁵⁶) e na análise da sua estabilidade MHD. Vamos apresentar aqui uma derivação sucinta da chamada equação de Grad-Shafranov, que é uma equação diferencial parcial de 2^{da} ordem e que engloba todas as equações de equilíbrio MHD estático em configurações axissimétricas.

Fazendo $\vec{v} = 0$ na Eq. (2.2) e usando a Eq. (2.5), obtemos:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{b}) \times \vec{b} = \mu_0 \vec{\nabla} p \quad (2.8)$$

Usando a identidade vetorial:

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \times \vec{b} - (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \times \vec{a}$$

para $\vec{a} = \vec{b} = \vec{B}$, obtemos:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}(B^2/2)$$

que substituída na Eq. (2.8) fornece:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}(B^2/2) = \mu_0 \vec{\nabla} p \quad (2.9)$$

Num sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) como mostra a Fig. (2-1), e em que todas as grandezas físicas são independentes de ϕ , temos que:

$$\left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right]_r = B_r \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B_\phi^2}{r} + B_z \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (2.10a)$$

$$\left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right]_\phi = B_r \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B_r B_\phi}{r} + B_z \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (2.10b)$$

$$\left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right]_z = B_r \frac{\partial B}{\partial r} + B_z \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (2.10c)$$

Também, lembrando que $B^2 = B_r^2 + B_\phi^2 + B_z^2$, temos:

$$\left[\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2} \right) \right]_r = B_r \frac{\partial B}{\partial r} + B_\phi \frac{\partial B}{\partial r} + B_z \frac{\partial B}{\partial r}, \quad (2.11a)$$

$$\left[\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2} \right) \right]_\phi = 0, \quad (2.11b)$$

$$\left[\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2} \right) \right]_z = B_r \frac{\partial B}{\partial z} + B_\phi \frac{\partial B}{\partial z} + B_z \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (2.11c)$$

e finalmente, para $p = p(r, z)$,

$$\left[\vec{\nabla} p \right]_r = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.12a)$$

$$\left[\vec{\nabla} p \right]_\phi = 0, \quad (2.12b)$$

$$\left[\vec{\nabla} p \right]_z = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.12c)$$

Escrevendo a Eq. (2.9) para cada componente e usando as expressões (2.10), (2.11) e (2.12), obtemos após algumas simplificações,

$$B_z \frac{\partial B}{\partial z} - B_z \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial r}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.13a)$$

$$B_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{B_r}{r} \frac{\partial l}{\partial r} = 0, \quad (2.13b)$$

$$- B_\phi \frac{\partial B_r}{\partial z} - B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} + B_r \frac{\partial B_z}{\partial r} = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2.13c)$$

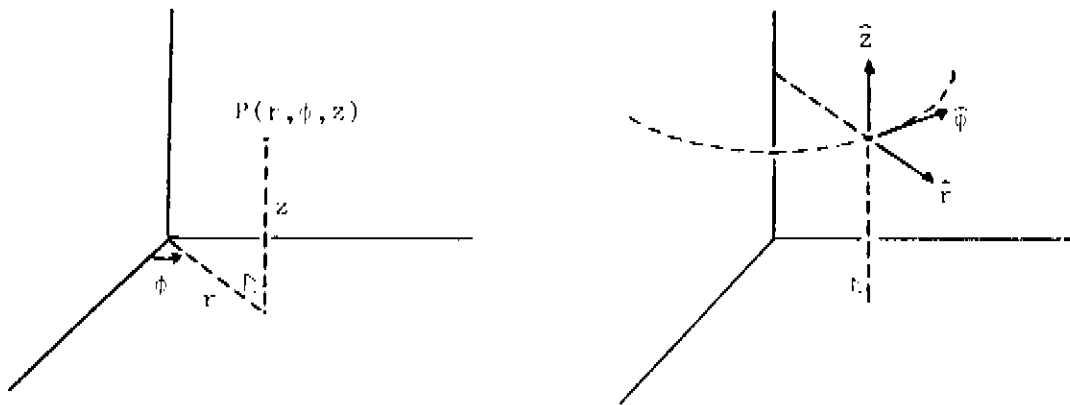


Fig. (2-1): Sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) e os seus versores ortonormais $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$.

onde temos definido a função escalar:

$$l(r, z) = r B_\phi(r, z). \quad (2.14)$$

Agora, vamos usar o fato de que, numa configuração axissimétrica, existe uma função de fluxo $\psi(r, z)$, tal que, qualquer campo vetorial de divergência nula pode ser escrito na forma⁵⁹:

$$\vec{B} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{\psi}}{r} + B_\phi \hat{\phi},$$

como pode ser facilmente verificado; combinando esta com a definição (2.14), temos:

$$\vec{B} = \frac{1}{r} (\vec{\hat{r}} \times \vec{\nabla} \psi + I \vec{\hat{\phi}}) , \quad (2.15)$$

donde:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad (2.16a)$$

$$B_\phi = \frac{I}{r} , \quad (2.16b)$$

$$B_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} . \quad (2.16c)$$

Substituindo estas componentes na Eq. (2.13b), obte

mos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial r} = 0 .$$

Note que o primeiro membro \tilde{c} exatamente o jacobiano de $\psi(r,z)$ e $I(r,z)$:

$$J \left(\frac{\psi, I}{r, z} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial I}{\partial r} & \frac{\partial I}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ou seja, nós temos que:

$$J \left(\frac{\psi, I}{r, z} \right) = 0 .$$

isto \tilde{c} , $I(r,z)$ \tilde{c} função de $\psi(r,z)$ somente⁶⁰:

$$I = I(\psi) , \quad (2.17)$$

e disto temos imediatamente que:

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{dI}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{dI}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad (2.18)$$

$$I \frac{dI}{d\psi} = \frac{1}{2} \frac{dI^2}{d\psi}. \quad (2.19)$$

Multiplicando agora as Eqs. (2.13a) e (2.13c) por r^2 e substituindo as componentes de \vec{B} por aquelas dadas nas relações (2.16a) - (2.16c), temos:

$$- \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] - I \frac{\partial I}{\partial r} = \mu_0 r^2 \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial z} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] - I \frac{\partial I}{\partial z} = \mu_0 r^2 \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Usando as relações (2.18) e (2.19) obtemos:

$$- \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \frac{1}{2} \frac{dI^2}{d\psi} \right] = \mu_0 r^2 \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.20a)$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \frac{1}{2} \frac{dI^2}{d\psi} \right] = \mu_0 r^2 \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.20b)$$

Dividindo membro a membro,

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} = J(\psi, p) = 0,$$

ou seja, como no caso anterior, a pressão \bar{p} função de $\psi(r, z)$ somente:

$$p = p(\psi); \quad (2.21)$$

e também:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.22)$$

Usando esta última numa das Eqs. (2.20), obtemos finalmente:

$$\Lambda^* \psi + \mu_0 r^2 p' + I I' = 0, \quad (2.23)$$

onde temos definido o operador:

$$\Lambda^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

e linha (*) indica derivada total em relação a ψ . A Eq. (2.23) é conhecida como Equação de Grad-Shafranov^{6,17,18} (G-S), e relaciona os três perfis envolvidos na equação de equilíbrio: \vec{B} , \vec{j} e p . Para resolver esta equação diferencial em $\psi(r, z)$, devemos obviamente especificar as funções arbitrárias que nela figuram, $p(\psi)$ e $I(\psi)$. A escolha de $p(\psi)$ significa por si só estarmos especificando o perfil da pressão que entra na equação de equilíbrio; entretanto, para resolvê-la completamente, devemos escolher *a priori* mais um perfil, de \vec{B} ou de \vec{j} . A especificação da outra função arbitrária que aparece na Eq. de G-S, $I(\psi)$, nos diz que, juntamente com $p(\psi)$, esta determina o perfil da densidade de corrente, como mostraremos a seguir.

Tomando a rotacional de $\vec{B}(r, z)$ em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \hat{r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \hat{z}.$$

Usando a Eq. (2.5) e as relações (2.14), (2.16) e (2.18), temos:

$$\vec{j}_r = - \frac{1}{\mu_0 r} \frac{dI}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$j_{\phi} = \frac{1}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0 r},$$

$$j_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{dI}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

ou, usando a própria Eq. de G-S na expressão para j_{ϕ} , temos as componentes de \vec{j} dadas por:

$$j_r = - \frac{I'}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.24a)$$

$$j_{\phi} = - \left(r p' + \frac{II'}{\mu_0 r} \right), \quad (2.24b)$$

$$j_z = \frac{I'}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.24c)$$

Note que, até agora, não foi feita nenhuma restrição quanto à função de fluxo ψ , a não ser o fato de ela ser axissimétrica. Entretanto, é fácil de verificar que:

$$\psi(r, z) \equiv \frac{\text{fluxo poloidal}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}_p \quad (2.25)$$

onde a integração é efetuada sobre a *área poloidal* do toro, definida como sendo localmente perpendicular às superfícies de fluxo ($\psi = \text{cte.}$) e às superfícies $\phi = \text{cte.}$ (ver Apêndice A).

2.3 - Equilíbrio MHD Estacionário em Sistemas Axissimétricos com Rotação Toroidal: Equação de Grad-Shafranov Modificada

A. Equação da Conservação de Momento —

Reescrevendo a Eq. (2.2) na forma Euleriana, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p ,$$

que, para o caso estacionário ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) reduz-se a:

$$\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p , \quad (2.26)$$

Supondo $\vec{v} = v(r, z) \hat{\phi}$, i.e., uma rotação axissimétrica puramente toroidal (azimutal), temos, usando as expressões (2.10) com $v_r = v_z = 0$ e

$$v_{\phi} = v :$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{v^2}{r} \hat{r} . \quad (2.27)$$

Ainda, lembrando que:

$$\vec{v} = \omega r \hat{\phi} , \quad (2.28)$$

onde \vec{v} (velocidade toroidal) e $\vec{\omega}$ (velocidade angular de rotação) estão relacionadas pela "regra da mão direita" (Fig. 2-2), temos finalmente a Eq. (2.26) na forma:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \omega^2 r \vec{V}r . \quad (2.29)$$

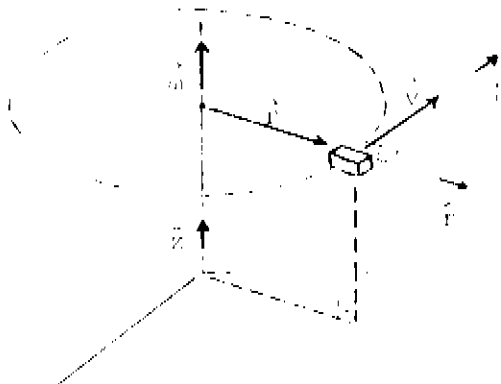


Fig. (2-2): Elemento de plasma em rotação toroidal, e os vetores \hat{r} , \hat{v} e $\hat{\omega}$ ($\hat{v} = \hat{\omega} \times \hat{r}$).

B. Dependência Funcional de ω —

Substituindo a Eq. (2.3) na Eq. (2.4) para o caso estacionário, temos:

$$\vec{\nabla}_x(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 ,$$

que pode ser desenvolvida como:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0 .$$

Para $\vec{v} = v(r, z)\hat{\phi}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 ,$$

donde:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} .$$

Lembrando mais uma vez que $v = v(r, z)$, $B_i = B_i(r, z)$, $i = r, \phi, z$, e usando as expressões (2.10), temos:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{vB_\phi}{r} \hat{r} + (B_r \frac{\partial v}{\partial r} + B_z \frac{\partial v}{\partial z}) \hat{\phi} ,$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -\frac{vB_\phi}{r} \hat{r} + \frac{vB_r}{r} \hat{\phi} ,$$

donde, igualando as componentes $\hat{\phi}$, temos:

$$B_z \frac{\partial v}{\partial z} = B_r \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) .$$

Ainda, uma vez que:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \equiv r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \therefore \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) ,$$

temos:

$$B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) + B_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = 0 .$$

Usando a definição (2.28), e as relações (2.16a) e (2.16c) para as componentes de \vec{B} , temos, já simplificando o r :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} \equiv J \left(\frac{\psi, \omega}{r, z} \right) = 0 ,$$

ou seja, mais uma vez,

$$\omega \equiv \frac{v(r, z)}{r} = \omega(\psi) . \quad (2.30)$$

Esta relação nos diz que, num fluido condutor ideal em rotação toroidal axissimétrica, a velocidade angular deve ser constante sobre uma mesma superfície de fluxo; e é conhecida como Lei de Isorotação de Ferraro,^{63, 64} que pode ser expressa pela equação:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}_x (\vec{v} \times \vec{B}) = J \left(\frac{\psi, \omega}{r, z} \right) \hat{\phi} . \quad (2.31)$$

Assim, quando $\omega \neq \omega(\psi)$, $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$, o que pode ser interpretado como segue: caso a velocidade angular não seja constante ao longo de uma linha de campo, as várias "partes" desta linha gastariam tempos diferentes pa-

ra completar uma volta em torno do eixo de simetria; e como as linhas estão "congeladas" no fluido, este cisalhamento criaria um campo magnético variável em tempo, na direção toroidal.

C. Equação de Grad-Shafranov Modificada —

Substituindo a Eq. (2.5) na nova equação de conservação de momento, Eq. (2.29), obtemos:

$$\vec{\nabla} p = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \rho \omega^2 r \hat{r}$$

ou:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} p - \mu_0 \rho \omega^2 r \hat{r} .$$

Note que esta equação é semelhante à Eq. (2.8), apenas com um termo adicional na sua componente radial; logo, usando as expressões (2.10), (2.11) e (2.12) temos, em analogia ao conjunto de Eqs. (2.13),

$$B_z \frac{\partial B}{\partial z} - B_z \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B}{r} \frac{\partial I}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial p}{\partial r} - \mu_0 \rho \omega^2 r , \quad (2.32a)$$

$$B_z \frac{\partial B}{\partial z} \phi + \frac{B}{r} \frac{\partial I}{\partial r} = 0 , \quad (2.32b)$$

$$- B_\phi \frac{\partial B}{\partial z} - B_r \frac{\partial B}{\partial z} + B_r \frac{\partial B}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial p}{\partial z} . \quad (2.32c)$$

Usando as relações (2.16) para as componentes de \vec{B} , a Eq. (2.32b) fornece novamente $I = I(\psi)$, e as outras duas podem ser escritas como:

$$(\Delta^* \psi + II') \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \mu_0 r^2 \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \omega^2 r \right) , \quad (2.33a)$$

$$(\Delta^* \psi + II') \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \mu_0 r^2 \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2.33b)$$

que são semelhantes às Eqs. (2.20). Note que agora a divisão membro a membro destas equações fornece:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} \equiv J\left(\frac{\psi, p}{r, z}\right) = - \rho \omega^2 r \frac{\partial \psi}{\partial z} \neq 0, \quad (2.34)$$

ou seja,

$$p = p(r, z) \neq p(\psi). \quad (2.35)$$

Multiplicando a Eq. (2.33a) por \hat{r} e a (2.33b) por \hat{z} , e somando:

$$(\Delta^* \psi + II') \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) = - \mu_0 r^2 \left(\frac{\partial p}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} \right) + \mu_0 \rho \omega^2 r^3 \hat{r},$$

ou seja,

$$(\Delta^* \psi + II') \vec{\nabla} \psi + \mu_0 r^2 \vec{\nabla} p - \mu_0 \rho \omega^2 r^3 \vec{\nabla} r = 0. \quad (2.36)$$

Consideremos agora a seguinte derivada:

$$\vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 \right) (r^2) \right] = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \vec{\nabla} (r^2) + r^2 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 \right)$$

donde:

$$\mu_0 \rho \omega^2 r^3 \vec{\nabla} r = \mu_0 r^2 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \right) - \mu_0 r^4 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 \right). \quad (2.37)$$

Supondo $\rho = \rho(\psi)$, e tendo em vista a lei de isorotação (2.30), podemos definir:

$$g(\psi) \equiv \frac{1}{2} \rho(\psi) \omega^2(\psi) \quad (2.38)$$

de modo que:

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{2}\rho\omega^2) = \vec{\nabla}g(\psi) = g' \vec{\nabla}\psi ,$$

e a Eq. (2.37) fica:

$$\mu_0 \rho \omega^2 r^3 \vec{\nabla}r = \mu_0 r^2 \vec{\nabla}(r^2 g) - \mu_0 r^4 g' \vec{\nabla}\psi = 0 .$$

Voltando esta na Eq. (2.36),

$$(\Delta^* \psi + II') \vec{\nabla}\psi + \mu_0 r^2 \vec{\nabla}p - \mu_0 r^2 \vec{\nabla}(r^2 g) + \mu_0 r^4 g' \vec{\nabla}\psi = 0 ,$$

ou, reagrupando os termos,

$$(\Delta^* \psi + II' + \mu_0 r^4 g') \vec{\nabla}\psi + \mu_0 r^2 \vec{\nabla}(p - r^2 g) = 0 . \quad (2.39)$$

Esta igualdade vetorial nos garante que a segunda expressão entre parênteses é função sô de ψ (ver Apêndice B), e permite definirmos:

$$f(\psi) \equiv p(r, z) - r^2 g(\psi) = p - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 , \quad (2.40)$$

de tal forma que:

$$\vec{\nabla}(p - r^2 g) = \vec{\nabla}f(\psi) = f' \vec{\nabla}\psi .$$

Com isso, a Eq. (2.39) fica:

$$(\Delta^* \psi + II' + \mu_0 r^2 f' + \mu_0 r^4 g') \vec{\nabla}\psi = 0 ;$$

para ser válida para $\hat{V}\psi$ não identicamente nulo, devemos ter:

$$\Lambda^* \psi + \mu_0 r^2 (f' + r^2 g') + II' = 0 . \quad (2.41)$$

A esta equação que descreve o equilíbrio MHD de um plasma com rotação axissimétrica, vamos denominar de "Equação de Grad-Shafranov Modificada" (GS-M). Observe que, pondo $\omega = 0$ nas Eqs. (2.38) e (2.40), obtemos respectivamente $g(\psi) = 0$ e $f(\psi) = p(\psi)$, e a Eq. (2.41) volta à forma da Equação de G-S original (sem rotação), na forma da Eq. (2.23).

Como a forma da Eq. (2.15) permanece válida para o campo magnético, os seus componentes são dados pelas relações (2.16):

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad (2.42a)$$

$$B_\phi = \frac{1}{r} , \quad (2.42b)$$

$$B_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} ; \quad (2.42c)$$

entretanto, usando a lei de Ampere e a Equação de GS-M, as componentes de \hat{j} passam a ser:

$$j_r = - \frac{I'}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad (2.43a)$$

$$j_\phi = \frac{\Lambda^* \psi}{\mu_0 r} = -(r f' + r^3 g' + \frac{II'}{\mu_0 r}) , \quad (2.43b)$$

$$j_z = \frac{I'}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r} . \quad (2.43c)$$

D. Perfis Arbitrários —

No final da seção 2.2, vimos que para resolvermos o problema de equilíbrio estático devemos arbitrar as funções $p(\psi)$ e $I(\psi)$ que figuram na Equação de G-S, o que fisicamente equivale a escolhermos duas das três grandezas que figuram na equação de conservação de momento, Eq. (2.8) — no caso, pressão e densidade de corrente — para determinar mos o perfil do campo magnético.

No equilíbrio com rotação, temos aparentemente fixa do quatro perfis arbitrários — $I(\psi)$, $\omega(\psi)$, $\rho(\psi)$ e $f(\psi)$ — se considerarmos que $g(\psi)$ é uma função derivada de $\rho(\psi)$ e $\omega(\psi)$, de acordo com a definição (2.38). Entretanto, a equação de conservação de momento para o equilíbrio estacionário, na forma da Eq. (2.29),

$$\vec{\nabla}p = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \omega^2 r \hat{r}, \quad (2.44)$$

mostra com clareza que o efeito da rotação, exercido através da força centrífuga

$$\vec{F}_c \equiv \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (2.45)$$

depende do produto $\rho(\psi)\omega^2(\psi)$, e não destes perfis separadamente. Logo, podemos dizer também que na realidade temos apenas três perfis arbitrários — $I(\psi)$, $g(\psi)$ e $f(\psi)$ — exatamente aqueles que figuram na Equação de GS-M; e $\rho(\psi)$ e $\omega(\psi)$ passam a ser interpretadas como funções derivadas de $g(\psi)$. É interessante observar que ambas as interpretações estão de acordo com os fatos: se se considerarmos $\rho(\psi)$ e $\omega(\psi)$ como dois perfis arbitrários separadamente, a Eq. (2.45) apresenta cinco perfis, e então devemos escolher quatro deles; e se supormos que a força centrífuga é representada pelo "perfil global" $g(\psi)$, a Eq. (2.45) passa a apresentar

quatro perfis, dos quais três são arbitrários. Estas duas alternativas, juntamente com o caso do equilíbrio sem rotação, são sumarizadas na seção 2.5.

2.4 - Fechamento do Sistema de Equações MHD: "Equação de Estado"

Considerando-se que a Eq. (2.6) não estabelece nenhuma relação entre duas (ou mais) grandezas, mas sim apenas determina uma condição inicial a ser satisfeita por \vec{B} , o sistema de equações MHD (2.1) - (2.5) apresenta 13 equações (escalares) e 14 incógnitas: ρ , p , \vec{v} , \vec{j} , \vec{B} e \vec{E} . Logo, torna-se necessária mais uma equação, especificamente uma que relacione a pressão (que só figura apenas numa das equações) com uma ou mais das variáveis citadas acima — o que descarta de imediato a utilidade da Eq. (2.7a) para fecharmos o nosso sistema. Igualmente, as equações de estado (2.7b) e (2.7c) se reduzem a identidades, tanto no caso estático como no caso estacionário com rotação puramente toroidal (ver Apêndice C). Diante disso, parece-nos inevitável lançarmos mão da equação de conservação de energia, ou então procurarmos alguma outra forma de equação de estado termodinâmico.

Vamos, entretanto, antes analisar um dos perfis arbitrários, nos casos sem e com rotação, respectivamente Eqs. (2.21) e (2.40):

$$p(r, z) = p(\psi) ; \quad (2.46a)$$

$$p(r, z) = f(\psi) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 . \quad (2.46b)$$

Os perfis $p(\psi)$ e $f(\psi)$ que figuram nos segundos membros, embora sejam funções matematicamente arbitrárias, as suas escolhas significam fisicamente a determinação de uma dependência funcional específica com a grande

za ψ , que por sua vez está relacionada de uma maneira implícita com o volume do plasma contido no tubo de fluxo $\psi = \text{cte.}$ (ver Apêndice A). Assim, uma vez escolhidos os perfis $p(\psi)$ e $f(\psi)$, as Eqs. (2.46) desempenham perfeitamente o objetivo da 14ª equação: estabelecer uma relação entre a pressão cinética e as outras quantidades, como ψ , ρ , ω , etc.

2.5 - Quadro Comparativo entre os Equilíbrios MHD Estático e Estacionário

		EQUILÍBRIO ESTÁTICO (Sem Rotação)	EQUILÍBRIO ESTACIONÁRIO (Com Rotação)	
EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO		$\vec{\nabla}p = \vec{j} \times \vec{B}$	$\vec{\nabla}p = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \omega^2 r \hat{r}$	$\vec{\nabla}p = \vec{j} \times \vec{B} + 2rg \hat{r}$
EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV		$\Delta^* \psi + \mu_0 r^2 p' + II' = 0$	$\Delta^* \psi + \mu_0 r^2 (f' + r^2 g') + II' = 0$	
PERFIS QUE FIGURAM NA EQ. DE CONSERV. DE MOMENTO	ARBITRÁRIOS	$I(\psi) \rightarrow \vec{j}(r, z)$ $p(\psi) \rightarrow p(r, z)$	$I(\psi) \rightarrow \vec{j}(r, z)$ $f(\psi) \rightarrow p(r, z)$ $\rho(\psi) \rightarrow \vec{F}_c(r, z)$ $\omega(\psi) \rightarrow \vec{F}_c(r, z)$	$I(\psi) \rightarrow \vec{j}(r, z)$ $f(\psi) \rightarrow p(r, z)$ $g(\psi) \rightarrow \vec{F}_c(r, z)$
	A SER DETERMINADO	$\vec{B}(r, z)$	$\vec{B}(r, z)$	$\vec{B}(r, z)$
RESOLUÇÃO DO PROBLEMA		Perfis Arbitrários e Condições de Contorno para $\psi(r, z)$		
COMPONENTES DE \vec{B} E \vec{j}		$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$; $j_r = -\frac{I'}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$;	$B_\phi = \frac{I}{r}$; $j_\phi = \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0 r}$;	$B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ $j_z = \frac{I'}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$

III. APLICAÇÃO A UM THETA-PINCH DE CAMPO REVERSO

3.1 - Generalidades

O theta-pinch de campo reverso, ou *field-reversed theta-pinch* (FR θ P), é um sistema linear-toroidal de confinamento magnético de plasmas termonucleares, cuja característica básica é a presença de linhas de campo magnético fechadas, como nos sistemas toroidais, não obstante a sua configuração cilíndrica. Também, muitas vezes o campo azimuthal (B_ϕ) é nulo ou desprezível se comparado ao campo poloidal \vec{B}_p ($\equiv B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$), ao passo que a densidade de corrente é puramente azimuthal. O confinamento e a implosão se devem à força de Lorentz $\vec{j} \times \vec{B}$, sempre dirigida para o eixo magnético (onde ψ é máximo e o campo poloidal é nulo), como mostra a Fig. (3-1).

Um esquema básico para a formação de um FR θ P, a partir de um theta-pinch padrão, é aquele proposto por Linford *et al*⁶⁵: através da produção de um campo de polarização reverso simultaneamente com a pré-ionização, durante o primeiro semi-ciclo da descarga do banco principal de capacitores, e o "pinch" ocorrendo durante o seu segundo semi-ciclo. Este campo reverso reconecta-se nas extremidades do cilindro, gerando uma configuração com linhas de campo fechadas; então o plasma sofre uma contração axial até atingir o equilíbrio (Fig. 3-2).

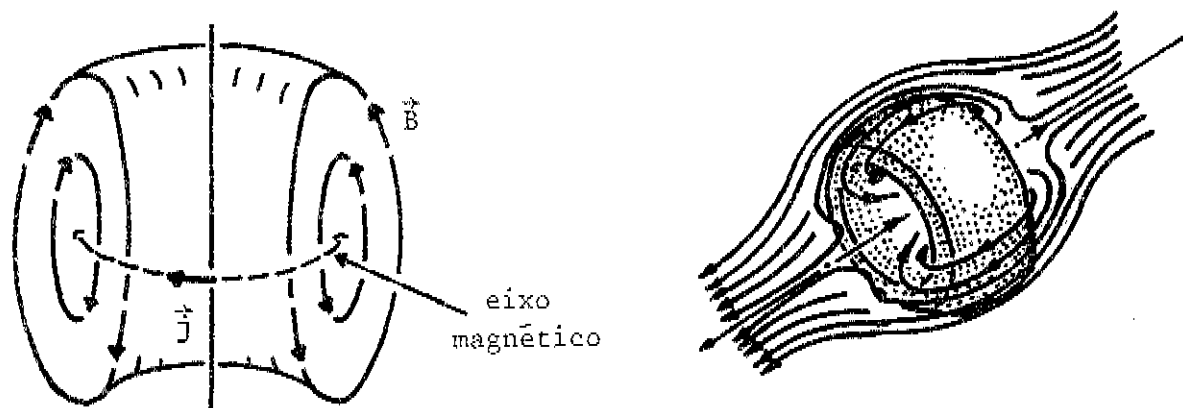


Fig. (3-1): Configuração típica de um FR θ P.

As pesquisas em FRÖP, tanto teóricas como experimentais, têm recebido grande motivação pela sua dupla vantagem: de um lado, a presença de uma estrutura fechada veio a superar um dos maiores problemas em theta-pinchs comuns — a rápida perda do plasma pelas extremidades; de outro lado, a sua geometria cilíndrica requer uma engenharia menos complexa se comparada a sistemas toroidais, como os tokamaks. Esses dois atrativos, associados à possibilidade de se obter um plasma de alto beta poloidal ($0.5 \sim 1.0$) a temperaturas termonucleares ($\sim \text{keV}$), fazem do FRÖP um forte candidato ao protótipo de um reator à fusão.

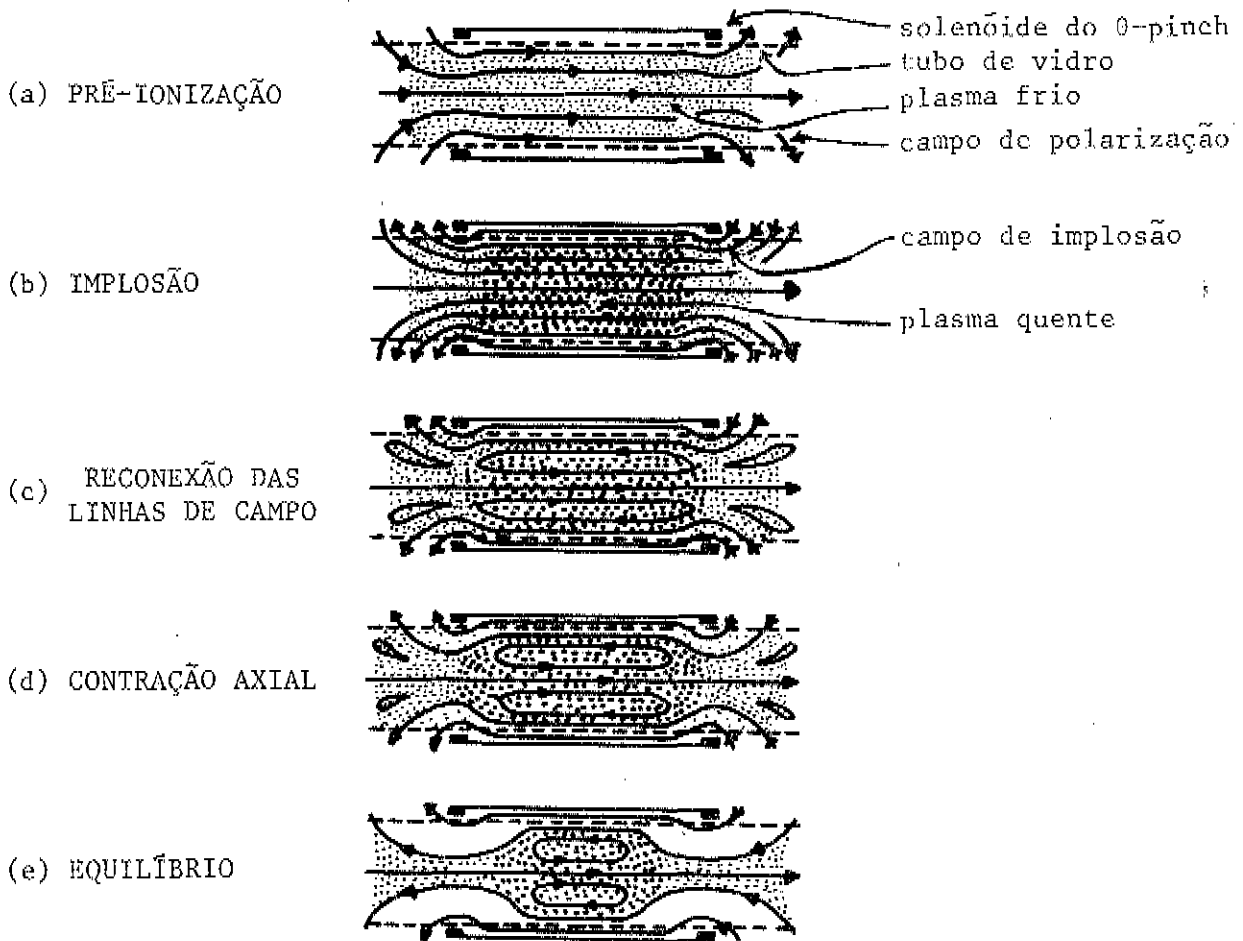


Fig. (3-2): Esquema de formação de um FRÖP.^{5,65}

A fim de obter um FRÖP com $B_\phi = 0$, façamos, de acordo com a Eq. (2.14),

$$I(\psi) = 0 ; \quad (3.1)$$

também, vamos arbitrar:

$$f(\psi) = 2a^2\psi^2/\mu_0 , \quad (3.2a)$$

$$\rho(\psi) = h\psi^\alpha , \quad \parallel (3.3a)$$

$$\omega(\psi) = c\psi^\varepsilon , \quad (3.4a)$$

e, usando a definição (2.38), temos que:

$$g(\psi) = \frac{1}{2} hc^2\psi^{(\alpha+2\varepsilon)}$$

Por simplicidade, façamos:

$$b \equiv \frac{1}{2} \mu_0 hc^2 ; \quad (3.6)$$

também, vamos supor que α e ε sejam tais que:

$$\alpha + 2\varepsilon = 1 \quad (\alpha, \varepsilon \geq 0) , \quad (3.7)$$

de modo que:

$$g(\psi) = b\psi/\mu_0 . \quad (3.5a)$$

Nos cálculos a seguir, vamos designar pelo índice "m" os valores das grandezas sobre o eixo magnético (localizado em $r = r_m$ e $z = 0$); e ainda definindo uma função de fluxo normalizado por:

$$\Psi(r, z) \equiv \frac{\psi(r, z)}{\psi(r_m, 0)} = \frac{\psi(r, z)}{\psi_m}, \quad (3.8)$$

podemos reescrever os perfis arbitrários (3.2a) - (3.5a) como:

$$f(\psi) = f_m \psi^2, \quad (3.2b)$$

$$\rho(\psi) = \rho_m \psi^\alpha, \quad (3.3b)$$

$$\omega(\psi) = \omega_m \psi^\epsilon, \quad (3.4b)$$

$$g(\psi) = g_m \psi. \quad (3.5b)$$

Derivando as Eqs. (3.1), (3.2a) e (3.5a), e substituindo-as na Eq. (2.41),

$$\Delta^* \psi + \mu_0 r^2 (f' + r^2 g') + II' = 0,$$

temos:

$$\Delta^* \psi + r^2 (4a^2 \psi + br^2) = 0. \quad (3.9a)$$

No final da seção 2.3-C vimos que a Equação de GS-M, (2.41), descreve igualmente os equilíbrios estático e estacionário, bastando, para este último caso, fazermos $g(\psi) = 0$. Então, tendo em vista a relação (3.5a), fazendo $b = 0$ na equação acima, temos:

$$\Delta^* \psi + 4a^2 r^2 \psi = 0; \quad (3.9b)$$

esta última é exatamente a Equação de G-S, que descreve o equilíbrio sem rotação, e a Eq. (3.9a), a Equação de GS-M, que descreve o equilíbrio com rotação.

3.2 - Equilíbrio Estático (Sem Rotação)

A. Solução da Equação de G-S por Separação de Variáveis -

Supondo uma solução separável do tipo:

$$\psi(r, z) = R(r) Z(z) , \quad (3.10)$$

a Eq. (3.9b) fica:

$$\frac{R''}{R} - \frac{R'}{rR} + \frac{Z''}{Z} + 4a^2 r^2 = 0 ,$$

onde as linhas indicam derivada em relação aos seus respectivos argumentos. Introduzindo uma constante de separação λ , temos:

$$\frac{R''}{R} - \frac{R'}{rR} + 4a^2 r^2 = \lambda^2 , \quad (3.11a)$$

$$- \frac{Z''}{Z} = \lambda^2 . \quad (3.11b)$$

Definindo uma nova variável:

$$x(r) \equiv ar^2 , \quad (3.12)$$

a Eq. (3.11a) pode ser escrita como (ver Apêndice D):

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{x}\right) R = 0 , \quad (3.13)$$

onde:

$$\eta \equiv \frac{\lambda^2}{8a} . \quad (3.14a)$$

A Eq. (3.13) é uma equação diferencial de Coulomb, cuja solução é (ver Apêndice D)⁶⁶:

$$R(r) = C_1 F_0(\eta, x) + C_2 G_0(\eta, x) \quad (3.15)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, e $F_0(\eta, x)$ e $G_0(\eta, x)$ são respectivamente as funções de onda de Coulomb (CWF) regular e logarítmica, de ordem zero. Em z , tomando-se a solução da Eq. (3.11b), simétrica em relação ao plano equatorial ($z = 0$), temos:

$$Z(z) = A \cos(\lambda z), \quad (3.16)$$

onde A é outra constante arbitrária.

Voltando as soluções (3.15) e (3.16) em (3.10), temos a solução da Eq. (3.9b):

$$\psi(r, z) = [C_1 F_0(\eta, x) + C_2 G_0(\eta, x)] \cos(\lambda z), \quad (3.17)$$

onde redefinimos as constantes $C_1 \equiv \Lambda C_1$ e $C_2 \equiv \Lambda C_2$.

B. Condições de Contorno e Determinação das Constantes —

De acordo com a definição física de ψ (ver Apêndice I), temos que:

(i) $\psi = 0$, sobre a separatriz,

(ii) $\psi \equiv \psi_m = \psi_{\max}$, sobre o eixo magnético;

onde, de acordo com o tipo de solução proposta em (3.10), a separatriz é um retângulo; e o eixo magnético está localizado em $r \equiv r_m$, $z = 0$, como mostra a Fig. (3-3). Com isso, as duas condições de contorno acima podem ser escritas como:

$$(i) \psi(r, z_0) = 0 \quad (\text{todo } r > 0), \quad (3.18a)$$

$$(ii) \psi(r_e, z) = 0 \quad (\text{todo } z), \quad (3.19a)$$

$$(iii) \psi(r_i, z) = 0 \quad (\text{todo } z), \quad (3.20a)$$

$$(iv) \psi(r_m, 0) \equiv \psi_m, \quad (3.21a)$$

$$(v) \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{(r_m, 0)} = 0, \quad (3.22a)$$

$$(vi) \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{(r_m, 0)} = 0. \quad (3.23a)$$

Ainda, na definição (3.14a), vamos considerar λ e η como "constantes independentes", e a dado por:

$$a = \frac{\lambda^2}{8\eta} \quad (3.14b)$$

como uma "constante derivada"; com isso, o conjunto de Eqs. (3.18a) - (3.23a) apresenta, em princípio, 6 incógnitas, a saber: C_1 , C_2 , λ , η , r_m e ψ_m , e se constitui num sistema fechado, uma vez que os parâmetros geométricos r_i , r_e e z_0 serão arbitrados.

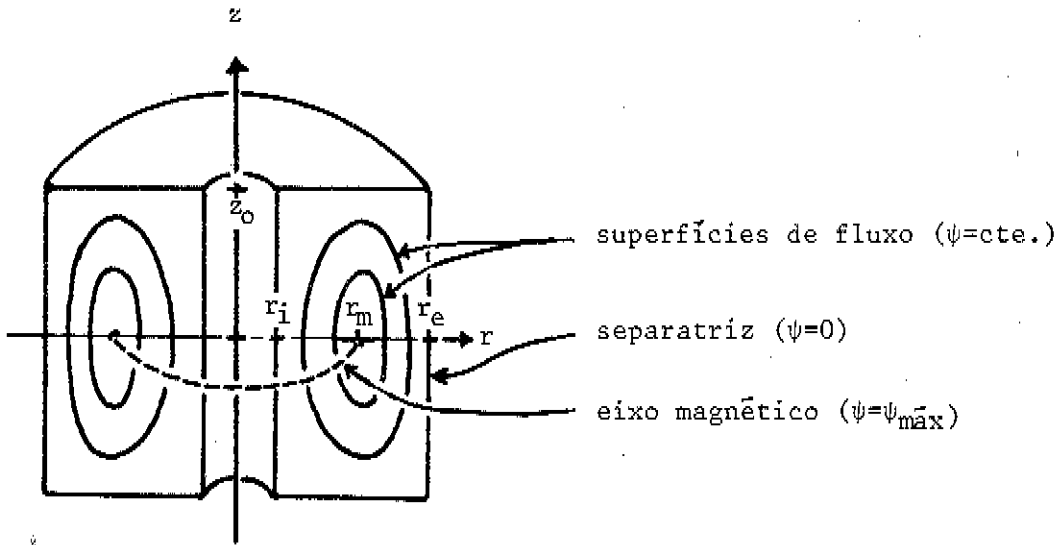


Fig. (3-3): Seção reta (plano $\phi = \text{cte.}$) de um FRÖP sem rotação, descrito pelos perfis (3-1) ~ (3.5).

Usando as notações compactas:

$$x_k \equiv x(r_k) = ar_k^2 ;$$

$$F_k \equiv F_o(\eta, x_k) , \quad G_k \equiv G_o(\eta, x_k) ,$$

$$F'_k \equiv \left. \frac{dF_o(\eta, x)}{dx} \right|_{x_k} , \quad G'_k \equiv \left. \frac{dG_o(\eta, x)}{dx} \right|_{x_k} ,$$

com $k = i, e, m$, e a expressão (3.17) para ψ , as condições de contorno (3.18a) ~ (3.23a) podem ser reescritas como:

$$\psi(r, z_0) = (C_1 F + C_2 G) \cos(\lambda z_0) = 0 , \quad (3.18b)$$

$$\psi(r_i, z) = (C_1 F_i + C_2 G_i) \cos(\lambda z) = 0 , \quad (3.19b)$$

$$\psi(r_e, z) = (C_1 F_e + C_2 G_e) \cos(\lambda z) = 0 , \quad (3.20b)$$

$$\psi(r_m, 0) = (C_1 F_m + C_2 G_m) = \psi_m, \quad (3.21b)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{(r_m, 0)} = 2ar_m (C_1 F'_m + C_2 G'_m) = 0, \quad (3.22b)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{(r_m, 0)} = -\lambda (C_1 F_m + C_2 G_m) \sin(0) = 0. \quad (3.23b)$$

Note que a Eq. (3.23b) é uma identidade, e só vem a confirmar o valor de z do eixo magnético ($z_m = 0$) que tínhamos fixado intuitivamente; e para $\lambda, a, r_m \neq 0$, as demais equações acima são:

$$\cos(\lambda z_0) = 0, \quad (3.18c)$$

$$C_1 F_i + C_2 G_i = 0, \quad (3.19c)$$

$$C_1 F_e + C_2 G_e = 0, \quad (3.20c)$$

$$C_1 F_m + C_2 G_m = \psi_m, \quad (3.21c)$$

$$C_1 F'_m + C_2 G'_m = 0. \quad (3.22c)$$

Da primeira, obtemos de imediato:

$$\lambda_n = (2n+1) \frac{\pi}{2z_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (3.24a)$$

em particular, vamos tomar a solução para $n = 0$:

$$\lambda = \frac{\pi}{2z_0}. \quad (3.24b)$$

A fim de compensarmos a inutilidade da condição

de contorno (3.23), vamos igualar a expressão (3.2a) com a definição (2.40) para o caso sem rotação ($\omega = 0$) :

$$2a^2\psi^2 = \mu_0 p ,$$

ou seja, sobre o eixo magnético,

$$\psi_m = \left(\frac{\mu_0 p_m}{2a^2} \right)^{1/2} . \quad (3.25)$$

Substituindo esta na Eq. (3.21c), ficamos finalmente com o sistema

$$C_1 F_i + C_2 G_i = 0 , \quad (3.19d)$$

$$C_1 F_e + C_2 G_e = 0 , \quad (3.20d)$$

$$C_1 F_m + C_2 G_m = (\mu_0 p_m / 2a^2)^{1/2} , \quad (3.21d)$$

$$C_1 F'_m + C_2 G'_m = 0 , \quad (3.22d)$$

com 4 incógnitas, C_1 , C_2 , η e $r_m(x_m)$. Observe que, tendo em vista a relação (3.14b), e com λ já calculado pela Eq. (3.24b), o cálculo de η determina também o valor de a . Trabalhando com as Eqs. (3.21d) e (3.22d), obtemos (ver Apêndice E):

$$C_1 = -\psi_m G'_o(\eta, x_m) , \quad (3.26a)$$

$$C_2 = \psi_m F'_o(\eta, x_m) . \quad (3.26b)$$

Como obviamente as funções $F_o(\eta, x_m)$, $G_o(\eta, x_m)$ e suas derivadas não são algebricamente inversíveis para η e x_m , a de

terminação de todas as constantes que figuram na solução (3.17) é feita pelo método de tentativas sucessivas, na seqüência abaixo:

- (i) arbitramos os valores de r_i , r_e , z_o e P_m ;
- (ii) calculamos λ pela Eq. (3.24b);
- (iii) chutamos η e x_m ;
- (iv) calculamos a pela Eq. (3.14b);
- (v) calculamos ψ_m pela Eq. (3.25);
- (vi) calculamos $x_k = ar_k^2$ ($k = i, e, m$) ;
- (vii) calculamos as expressões^{6,7} F_i , G_i , F_e , G_e , F'_m e G'_m ;
- (viii) calculamos C_1 e C_2 pelas Eqs. (2.26) ;
- (ix) procuramos obter simultaneamente, de acordo com as condições de contorno (3.19d) e (3.20d),

$$C_1 F_i + C_2 G_i = 0 ,$$

$$C_1 F_e + C_2 G_e = 0 .$$

3.3 - Equilíbrio Estacionário (Com Rotação)

A. Solução da Equação de GS-M por Separação de Variáveis -

Vamos reescrever a Eq. (3.9a) na forma:

$$(\Delta^* + 4a^2 r^2)\psi = -br^4 , \quad (3.27a)$$

o que nos sugere uma solução do tipo:

$$\psi(r, z) = H(r, z) + P(r) , \quad (3.28a)$$

onde $H(r, z)$ é a solução da equação homogênea:

$$\Delta^*H + 4a^2r^2H = 0 , \quad (3.27b)$$

e $P(r)$ a solução particular da equação não-homogênea:

$$\Delta^*P + 4a^2r^2P = -br^4 . \quad (3.27c)$$

É imediato que as Eqs. (3.9b) e (3.27b) são idênticas; logo $H(r,z)$ é dada pela expressão (3.17):

$$H(r,z) = [C_0 F_0(\eta, x) + C_1 G_0(\eta, x)] \cos(\lambda z) . \quad (3.28b)$$

Explicitando o operador Δ^* na Eq. (3.27c):

$$P'' - \frac{P'}{r} + 4a^2r^2P = -br^4 ;$$

supondo uma solução do tipo $P(r) = Ar^n$, obtemos:

$$n(n-2)Ar^{n-2} + 4a^2Ar^{n+2} + br^4 = 0 .$$

Para A e b não identicamente nulos, a única possibilidade é:

$$n = 2 ; \quad A = -b/4a^2 ,$$

donde:

$$P(r) = -\frac{br^2}{4a^2} = -\frac{bx}{4a^3} , \quad (3.28c)$$

onde também usamos a definição (3.12). Voltando as expressões (3.28b) e (3.28c) em (3.28a), obtemos a solução da Equação de GS-M:

$$\psi(r, z) = \left[C_1 F_0(\eta, x) + C_2 G_0(\eta, x) \right] \cos(\lambda z) - \frac{bx}{4a^3} . \quad (3.29)$$

Como esta solução não é do tipo $R(r) \cdot Z(z)$, a nova separatriz não será mais uma seção retangular, mas sim uma curva genérica, contudo ainda simétrica em z , como mostra a Fig. (3-4).

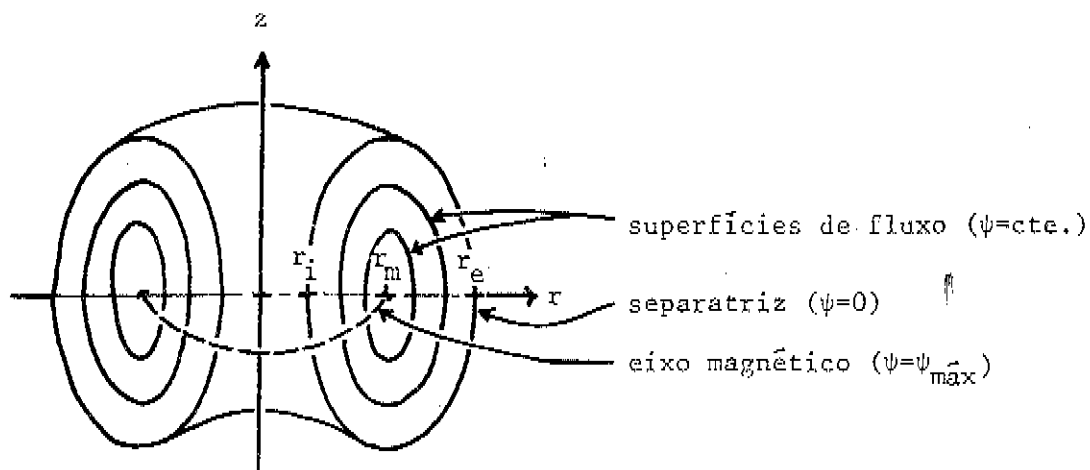


Fig. (3-4): Seção reta (plano $\phi = \text{cte}$) de um FRØP com rotação axissimétrica, descrito pelos perfis (3.1) ~ (3.5).

B. Expansão dos Parâmetros e Determinação das Constantes —

Comparando as soluções (3.17) e (3.29), verificamos que esta última apresenta uma constante arbitrária a mais, b , que obviamente está relacionada com o termo de rotação na Equação de GS-M; esta constante, em particular, pode ser determinada de uma maneira simples igualando-se as expressões (2.38) e (3.5a), para $\psi = \psi_m$:

$$b = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \rho_m \omega_m^2}{\psi_m} , \quad (3.30)$$

onde ρ_m e ω_m entrariam como valores de contorno. Com isso, e lembrando

do que a parte homogênea de (3.29) apresenta exatamente o mesmo número de constantes arbitrárias que a solução (3.17), o problema do equilíbrio com rotação ficaria resolvido na sua íntegra — i.e., com todas as constantes determinadas — usando as condições de contorno (3.18a) - (3.23a).

É evidente que este procedimento requer mais uma vez a escolha arbitrária da posição da separatriz, através dos parâmetros geométricos r_i , r_e e z_0 , sem as quais as condições (3.18a) ~ (3.20a) deixariam de ser úteis. Em outras palavras, todas as constantes arbitrárias que figuram na solução (3.29) podem ser determinadas simplesmente repetindo-se o esquema descrito na seção 3.2-B, e mais a expressão (3.30), o que fisicamente significa encararmos as duas soluções de equilíbrio — sem e com rotação — como sendo "estranhos" entre si.

Entretanto, este método, embora seja perfeitamente válido, na certa não nos possibilita uma comparação de resultados das duas configurações de equilíbrio — principalmente se se considerarmos que um desses resultados, dos mais significativos que esperamos obter, é a influência da rotação sobre a posição e a forma da separatriz. Assim sendo, a fim de simularmos os equilíbrios em plasmas distintos mas semelhantes, um sem rotação e o outro com rotação axissimétrica, vamos abandonar, para este segundo caso, aquelas três condições de contorno relacionadas com a posição da separatriz. Neste formalismo, todas as variações nos perfis característicos do plasma em equilíbrio estacionário serão calculadas de uma maneira auto-consistente com respeito ao plasma estático, no sentido de que, após a inclusão da rotação, todas as constantes arbitrárias serão consideradas como sendo desconhecidas, exceto aquela que exatamente traduz o efeito da rotação, b , dada por (3.30). Num raciocínio simplista, poder-se-ia pensar que esta inclusão auto-consistente do efeito da rotação poderia ser efetuada atribuindo-se os mesmos valores para as constantes que figuram na solução (3.17) e na parte homogênea da solução (3.29) — em outras palavras, considerando-se as Eqs. (3.17) e (3.27b) exatamente

iguais entre si — e a solução do equilíbrio estacionário seria modificada apenas pela inclusão da solução particular (3.27c), com a constante b dada por (3.30). No entanto, este procedimento falha a partir do momento em que, incluindo-se a rotação, afetamos o perfil de $f(\psi)$, definido por (2.40) — e que passa a ser diferente daquele utilizado para obtermos a expressão (3.25), relação esta que foi empregada em todos os cálculos subsequentes.

Dito isso, vamos distinguir as grandezas correspondentes ao equilíbrio estático daquelas relacionadas com o equilíbrio estacionário, pelos supra-índices $(^0)$ e $(^1)$, respectivamente; com isso, temos que:

$$\psi^\ell(r, z) = \left[C_1^\ell F(\eta^\ell, x) + C_2^\ell G(\eta^\ell, x) \right] \cos(\lambda^\ell z) - \frac{b^\ell x}{4(a^\ell)^3}, \quad (3.31)$$

$$\eta^\ell = \frac{(\lambda^\ell)^2}{8a^\ell}, \quad (3.32)$$

para $\ell = 0, 1$, e obviamente $b^0 = 0$; e também temos omitido o índice "o" em $F(\eta, x)$ e $G(\eta, x)$, por comodidade. É claro que as constantes designadas por $(^0)$ são aquelas obtidas na seção 3.2-B para o equilíbrio estático; e para a determinação de C_1^1 , C_2^1 , λ^1 , a^1 , r_m^1 e ψ_m^1 , continuam válidas, sem perda de generalidade, condições de contorno idênticas às (3.21a) ~ (3.23a):

$$(i) \quad \psi^1(r_m^1, 0) = \psi_m^1, \quad (3.33a)$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial \psi^1}{\partial r} \right|_{(r_m^1, 0)} = 0, \quad (3.33b)$$

$$(iii) \quad \left. \frac{\partial \psi^1}{\partial z} \right|_{(r_m^1, 0)} = 0, \quad (3.33c)$$

uma vez que estas estão baseadas unicamente no fato de que, por definição, $\psi^1(r, z)$ assume o seu valor máximo sobre o eixo magnético, agora localizado em $r = r_m^1$, $z = 0$. Naturalmente a condição (3.33c) torna a reproduzir uma identidade, e esta perda será mais uma vez compensada por uma relação semelhante \tilde{a} (3.25), só que agora com a inclusão do termo de rotação.

A fim de substituírmos as três condições de contorno relacionadas com a posição da separatriz, as quais vamos desconsiderar para o equilíbrio estacionário pelas razões acima expostas, vamos lançar mão das "leis de conservação" de certas quantidades, para as duas configurações de equilíbrio:

(i) número total de partículas -

$$N \equiv \int_{V^0} n^0(r, z) dV^0 = \int_{V^1} n^1(r, z) dV^1, \quad (3.34a)$$

(ii) energia térmica total -

$$W_T \equiv \int_{V^0} p^0(r, z) dV^0 = \int_{V^1} p^1(r, z) dV^1, \quad (3.35a)$$

(iii) fluxo magnético máximo -

$$\psi_m = \psi_m^0 = \psi_m^1, \quad (3.36a)$$

onde n é a densidade de partículas, e a integração é efetuada sobre o volume do plasma contido na separatriz.⁺ Aqui é importante ressaltar que

(+) Vamos supor que o plasma "existe", com uma densidade razoável, apenas na região limitada pela separatriz (i.e., envolvida pelas linhas de campo fechadas), onde o tempo de confinamento de partículas é sensivelmente maior que na região de campos abertos. Para maiores detalhes, veja as Refs. [68] e [69].

tais condições não são de fato leis de conservação, as quais deveriam ser rigorosamente seguidas por um mesmo plasma em duas situações diferentes, mas apenas três "condições de similitude" que traduzem a semelhança entre as duas configurações de equilíbrio (de plasmas distintos), a fim de nos possibilitar uma comparação mais plausível. Em outras palavras, as condições acima citadas apenas indicam que estamos analisando os equilíbrios de dois plasmas — um com rotação e outro, sem — os quais supostamente apresentam (i) o mesmo número de partículas, (ii) a mesma energia térmica, e (iii) o mesmo fluxo magnético máximo. Outrossim, vale lembrar que a condição (3.36a) também pode ser escrita na sua forma integral,

$$\int_{S_P^0} \vec{B}^0 \cdot d\vec{S}_P^0 = \int_{S_P^1} \vec{B}^1 \cdot d\vec{S}_P^1, \quad (3.36b)$$

de acordo com a definição (2.25), ou então, de maneira explícita como:

$$\sum_{\ell=0}^1 (-1)^\ell \left\{ [C_1^\ell F(\eta^\ell, x) + C_2^\ell G(\eta^\ell, x)] \cos(\lambda^\ell z) - \frac{b^\ell x}{4(a^\ell)^3} \right\}_{r=r_m^\ell, z=0} = 0, \quad (3.36c)$$

usando a expressão (3.31).

Dito isso, considerando-se que: (i) tanto o perfil de densidade quanto o de pressão são axissimétricos, e que (ii) a dependência desses perfis com a coordenada z é mantida apenas através de $\psi(r, z)$, que por sua vez é uma função par em z , podemos escrever, para um perfil genérico,

$$\int_V Q(r, z) dV = 4\pi \int_r \int_{z+} Q(r, z) r dr dz,$$

onde a integração em z é efetuada apenas no hemisfério superior ($z \geq 0$).

Ainda, de acordo com a Eq. (3.12) temos que $dx = 2zdr$, donde:

$$\int_V Q(r, z) dV = \frac{2\pi}{a} \int_x \int_{z+} Q(x, z) dx dz . \quad (3.37)$$

Substituindo os perfis (3.2a) e (3.3b) na expressão acima, e usando a solução (3.31) para $\ell = 0$, temos, para o equilíbrio estático (ver Apêndice F-1):

$$N^0 = \tilde{N}^0 \left\{ \int_{x_i^0}^{x_c^0} [\xi^0(x)]^\alpha dx \right\} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha\theta^0}(z) d\theta \right\} , \quad (3.34b)$$

$$W_T^0 = \tilde{W}_T^0 \left\{ \int_{x_i^0}^{x_c^0} [\xi^0(x)]^2 dx \right\} , \quad (3.35b)$$

onde temos definido as constantes:

$$\tilde{N}^0 \equiv \frac{2\gamma m_m^0}{\lambda^0 a^0 \psi_m^0 \alpha} , \quad \tilde{W}_T^0 \equiv \frac{\pi^2 a^0}{\mu_0 \lambda^0} ; \quad (3.38)$$

e as funções auxiliares,

$$\xi^0(x) \equiv C_1^0 F(\eta^0, x) + C_2^0 G(\eta^0, x) \quad (3.39a)$$

$$\theta^0(z) \equiv \lambda^0 z . \quad (3.39b)$$

Uma vez conhecidos todos os parâmetros envolvidos nas constantes \tilde{N}^0 e \tilde{W}_T^0 e nos integrandos, as expressões (3.34b) e (3.35b) são calculadas numericamente, pelo método de Simpson.⁷⁰

Para o equilíbrio com rotação temos, de forma inteiramente análoga (ver Apêndice F-2),

$$N^1 = \tilde{N}^1 \int_{x_i^1}^{x_e^1} \left\{ \int_0^{\theta_s(x)} [\xi^1(x) \cos\theta^1(z) - \zeta^1(x)]^\alpha d\theta \right\} dx , \quad (3.34c)$$

$$W_T^1 = \tilde{W}_T^1 \int_{x_i^1}^{x_e^1} \{ \theta_s^1(x) [[\xi^1(x)]^2 - 2[\zeta^1(x)]^2] + \zeta^1(x) [[\xi^1(x)]^2 - [\zeta^1(x)]^2]^{1/2} \} dx, \quad (3.35c)$$

onde temos definido as constantes:

$$\tilde{N}^1 \equiv \frac{2\pi n_m^1}{\lambda^1 a^1 \psi_m^\alpha}, \quad \tilde{W}_T^1 \equiv \frac{2\pi a^1}{\mu_0 \lambda^1}; \quad (3.40)$$

as funções auxiliares:

$$\xi^1(x) \equiv C_1^1 F(\eta^1, x) + C_2^1 G(\eta^1, x), \quad (3.41a)$$

$$\zeta^1(x) \equiv \frac{b^1 x}{4(a^1)^3}, \quad (3.41b)$$

$$\theta^1(z) \equiv \lambda^1 z; \quad (3.41c)$$

e a equação da separatriz,

$$\theta_s^1(x) \equiv \cos^{-1} \left[\frac{\zeta^1(x)}{\xi^1(x)} \right]. \quad (3.42)$$

Na expressão (3.34c), \bar{e} avaliada inicialmente a integral interna (em θ), e o resultado obtido \bar{e} integrado em x ; em todos os casos, N^1 e W_T^1 são mais uma vez calculados utilizando-se o método de Simpson.⁷⁰

Entretanto, ao contrário das expressões (3.34b) e (3.35b) que podem ser calculadas completamente — uma vez que todos os parâmetros envolvidos, ou serão arbitrados (r_i^0 , r_e^0 , z_o^0 , n_m^0 , etc.), ou podem ser calculados pelo esquema desenvolvido na seção 3.2-B (C_1^0 , C_2^0 , λ^0 , etc.) — agora temos que os parâmetros que figuram nas expressões (3.34c)

e (3.35c) são todos desconhecidos em princípio; exceção feita ao b^1 , que será dado pela Eq. (3.30):

$$b^1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \rho_m^1 \omega_m^2}{\psi_m} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 m n_m^1 \omega_m^2}{\psi_m} \quad (3.43)$$

Para determinarmos os valores dos novos parâmetros k^1 , vamos supor expansões do tipo:

$$k^1 = k^0 + \delta k, \quad (3.44)$$

para $k = C_1, C_2, a, \lambda, n_m, x_i$ e x_e . Aqui, é de particular interesse observar que δa está relacionado com a rotação, como segue (ver Apêndice G):

$$\frac{\delta a}{a^0} = -\frac{1}{4} \left| \frac{\vec{F}_c}{\vec{V}_p} \right|_m, \quad (3.45)$$

onde \vec{F}_c é a força centrífuga definida na Eq. (2.45), e o índice "m" indica o valor em $r = r_m^1$, $z = 0$; da relação acima também concluímos que:

$$\delta a < 0 \quad \therefore \quad a^1 < a^0. \quad (3.46)$$

A fim de determinarmos os valores das perturbações δk , tais que os parâmetros k^1 substituídas nas expressões (3.34b-c), (3.35b-c) e (3.36c) venham a satisfazer as condições (3.34a) ~ (3.36a), são feitos inicialmente variações individuais e sistemáticas em várias δk 's, de modo a se obter as influências de cada um desses parâmetros sobre as quantidades a serem "conservadas", N^k , W_T^k e ψ_m^k , onde os supra-índices (k) indicam que apenas aquele parâmetro fora perturbado. Um resultado típico destas variações está apresentado na Fig. (3-5).

Obtidas as tendências de cada uma das três quantidades frente às perturbações efetuadas individualmente em diversos parâmetros, o ajuste final com perturbações simultâneas é feito novamente por tentativas sucessivas.

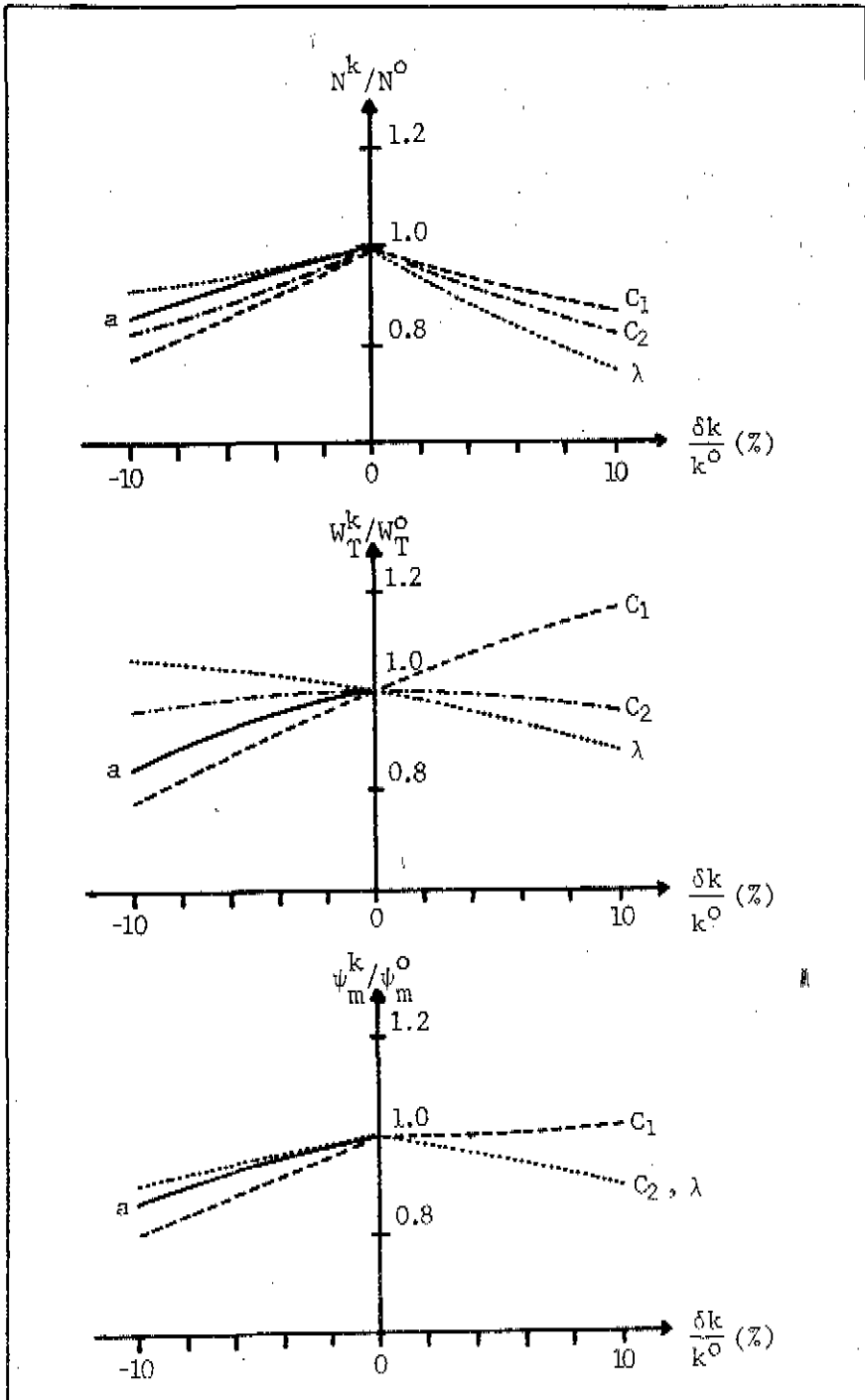


Fig. (3-5): Comportamento das grandezas N^k , W_T^k e ψ_m^k (normalizadas em relação aos respectivos valores na configuração estática), para as diversas perturbações em apenas um dos parâmetros k ($=a, \lambda, C_1, C_2$). Note que sô foram consideradas variações negativas em a , de acordo com a Eq. (3.46).

3.4 Cálculos Numéricos

A. Expressões Analíticas -

A1. Expressões Genéricas -

Vamos derivar todas as expressões a serem utilizadas nos cálculos numéricos, a partir da solução geral (3.31) na qual omitiremos o supra-índice ($\tilde{}$); lembrando-se que, para a configuração estática, devemos por $b \equiv 0$. Então, outra vez definindo:

$$\xi(x) \equiv C_1 F(\eta, x) + C_2 G(\eta, x), \quad (3.47a)$$

$$\zeta(x) \equiv \frac{bx}{4a^3}, \quad (3.47b)$$

a solução (3.31) fica:

$$\psi(r, z) = \zeta(x) \cos(\lambda z) - \xi(x); \quad (3.47c)$$

e, tendo em vista a relação (3.12), temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 2ar \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ar [\xi'(x) \cos(\lambda z) - \zeta'(x)], \quad (3.48a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\lambda \xi(x) \sin(\lambda z), \quad (3.48b)$$

onde:

$$\xi'(x) \equiv \frac{d\xi(x)}{dx} = C_1 \frac{dF(\eta, x)}{dx} + C_2 \frac{dG(\eta, x)}{dx}, \quad (3.49a)$$

$$\zeta'(x) \equiv \frac{d\zeta(x)}{dx} = \frac{b}{4a^3} . \quad (3.49b)$$

(i) Posição do Eixo Magnético— Como $\psi(r,z)$ deve assumir o valor máximo, as expressões (3.48a) e (3.48b) fornecem:

$$z_m = 0 , \quad (3.50a)$$

$$\xi'(x_m) - \zeta'(x_m) = 0 . \quad (3.50b)$$

(ii) Superfícies de Fluxo— Usando a definição (3.8) na Eq. (3.47c), obtemos:

$$z_f(\Psi;x) \doteq \frac{1}{\lambda} \cos^{-1} \left[\frac{\psi_m \Psi + \zeta(x)}{\xi(x)} \right] , \quad (3.51)$$

onde:

- $\Psi < 0$: linhas de campo externas à separatriz;
- $\Psi = 0$: equação da separatriz, (3.42);
- $0 < \Psi < 1$: linhas de campo internas à separatriz;
- $\Psi = 1$: eixo magnético.

(iii) Campo Magnético e Densidade de Corrente— Substituindo as Eqs. (3.1), (3.2a), (3.5a), (3.49a) e (3.49b) nas expressões (2.42a) ~ (2.42c) e (2.43a) ~ (2.43c), obtemos, respectivamente,

$$B_r = -(\lambda/r) \xi(x) \sin(\lambda z) , \quad (3.52a)$$

$$B_\phi = 0 , \quad (3.53a)$$

$$B_z = -2a[\xi'(x)\cos(\lambda z) - \zeta'(x)] ; \quad (3.54a)$$

$$j_r = 0 , \quad (3.55a)$$

$$j_\phi = - (r/\mu_0)(4a^2\psi + br^2) , \quad (3.56a)$$

$$j_z = 0 . \quad (3.57a)$$

(iv) Densidade de Partículas, Pressão Cinética e Temperatura —

Da Eq. (3.3b) é imediato que:

$$n = (n_m/\psi_m^\alpha)\psi^\alpha ; \quad (3.58a)$$

combinando a definição (2.40) com os perfis (3.2a) e (3.5a), temos:

$$p = (\psi/\mu_0)(2a^2\psi + br^2) ; \quad (3.59a)$$

e finalmente supondo $n_i \approx n_e = n$, $T_i \approx T_e = T$ e $p = \sum nT = 2nT$, temos:

$$T = p/2n . \quad (3.60a)$$

(v) Velocidades Angular e Tangencial — Das Eqs. (3.4a) e (2.28),

$$\omega = (\omega_m/\psi_m^\varepsilon)\psi^\varepsilon , \quad (3.61a)$$

$$v = (\omega_m/\psi_m^\varepsilon)r\psi^\varepsilon . \quad (3.62a)$$

(vi) Beta Normalizado e Número de Mach — Vamos definir:

$$\beta_N \equiv \frac{P}{P+B^2/2\mu_0} ; \quad (3.63a)$$

$$\mathcal{K} \equiv \frac{v}{\sqrt{T/m_1}} . \quad (3.64a)$$

(vii) Posição do Eixo de Pressão Máxima — Usando a Eq. (3.59a), uma das condições a serem satisfeitas, é:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} (4a^2\psi + br^2) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

em $r \equiv r_{mp}$, $z \equiv z_{mp}$; logo, usando a Eq. (3.48b), obtemos:

$$z_{mp} = 0 , \quad (3.65a)$$

e também de (3.47c),

$$\psi(r, z_{mp}) = \xi(x) - \zeta(x) .$$

Voltando esta na Eq. (3.59a), temos o perfil de pressão sobre o plano equatorial, na forma idêntica à Eq. (F.14):

$$p(r, z_{mp}) = (2a^2/\mu_0) [\xi^2(x) - \zeta^2(x)] ;$$

aplicando a segunda condição de pressão máxima à expressão acima, obtemos:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{(r_{mp}, z_{mp})} = 2ar_{mp} \frac{dp(x, z_{mp})}{dx} = \frac{8a^3 r_{mp}}{\mu_0} [\xi(x)\xi'(x) - \zeta(x)\zeta'(x)]$$

ou seja, $x_{mp}(r_{mp})$ é dado pela solução da equação:

$$\xi(x_{mp})\xi'(x_{mp}) - \zeta(x_{mp})\zeta'(x_{mp}) = 0 . \quad (3.65b)$$

Note que, no caso sem rotação, $\zeta = \zeta' \equiv 0$, $\xi(x_{mp}) \neq 0$, e a Eq. (3.65b) se reduz à Eq. (3.50b), ou seja, os eixos magnético e de pressão máxima são coincidentes.

(viii) Superfícies Isobáricas — Da Eq. (F.14):

$$p = (2a^2/\mu_0) [\xi^2(x) \cos^2(\lambda z) - \zeta^2(x)]$$

donde:

$$z_p(P; x) = \frac{1}{\lambda} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{\Pi P + \zeta^2(x)}}{\xi(x)} \right], \quad (3.66)$$

onde definimos pressão normalizada por:

$$P(r, z) \equiv \frac{p(r, z)}{p_m}, \quad (0 \leq P \leq 1)$$

e a constante Π por:

$$\Pi \equiv \frac{\mu_0 p_m}{2a^2}.$$

Note também que, se $P = 0$, a Eq. (3.66) se reduz à equação da separatriz, (3.42); e, mais uma vez no caso sem rotação ($\zeta \equiv 0$), obtemos:

$$z_p(P; x) = z_f(\psi^2; x),$$

uma vez que $p^0 = p^0(\psi) \sim \psi^2$.

A2. Perfis Radiais (em $z = z_m$) —

Para obtermos os perfis sobre o plano equatorial,

vamos fazer $z = z_m = 0$; donde, das Eqs. (3.47c), (3.48a) e (3.48b), temos:

$$\psi(r) = \xi(x) - \zeta(x) ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 2ar [\xi'(x) - \zeta'(x)] ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 .$$

Substituindo estas expressões nas Eqs. (3.52a) - (3.46a), obtemos:

$$B_r(r) = 0 , \quad (3.52b)$$

$$B_\phi(r) = 0 , \quad (3.53b)$$

$$B_z(r) = -2a [\xi'(x) - \zeta'(x)] \equiv B_p(r) ; \quad (3.54b)$$

$$j_r(r) = 0 , \quad (3.55b)$$

$$j_\phi(r) = -4a^2 r \xi(r) / \mu_0 , \quad (3.56b)$$

$$j_z(r) = 0 ; \quad (3.57b)$$

$$n(r) = (n_m / \psi_m^\alpha) [\xi(x) - \zeta(x)]^\alpha ; \quad (3.58b)$$

$$p(r) = (2a^2 / \mu_0) [\xi^2(x) - \zeta^2(x)] ; \quad (3.59b)$$

$$T(r) = p(r) / 2n(r) ; \quad (3.60b)$$

$$\omega(r) = (\omega_m / \psi_m^E) [\xi(x) - \zeta(x)]^E ; \quad (3.61b)$$

$$v(r) = r\omega(r) ; \quad (3.62b)$$

$$\beta_N(r) = \frac{p(r)}{p(r) + B_z^2(r) / 2\mu_0} ; \quad (3.63b)$$

$$\mathcal{W}(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{T(r) / m_i}} . \quad (3.64b)$$

A3. Perfis Longitudinais (em $r = r_m$) —

Designando pelo índice "m" os valores em $r = r_m$,

z variável⁺, temos que:

$$\psi(z) = \xi_m \cos(\lambda z) - \zeta_m ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 2ar_m [\xi'_m \cos(\lambda z) - \zeta'_m] ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\lambda \xi_m \sin(\lambda z) .$$

Com isso, os perfis sobre o cilindro $r = r_m$, que contém o eixo magnético, ficam:

$$B_r(z) = -(\lambda \xi_m / r_m) \sin(\lambda z) , \quad (3.52c)$$

$$B_\phi(z) = 0 , \quad (3.53c)$$

(+) Aqui, "m" não indica valor sobre o eixo magnético, situado em $r = r_m$, $z = 0$.

$$B_z(z) = -2a [\xi_m' \cos(\lambda z) - \zeta_m'] ; \quad (3.54c)$$

$$j_r(z) = 0 , \quad (3.55c)$$

$$j_\phi(z) = - (4a^2 r_m / \mu_0) [\psi(z) + \zeta_m] , \quad (3.56c)$$

$$j_z(z) = 0 ; \quad (3.57c)$$

$$n(z) = (n_m / \psi^2) [\xi_m \cos(\lambda z) - \zeta_m]^\alpha ; \quad (3.58c)$$

$$p(z) = (2a^2 / \mu_0) [\xi_m^2 \cos^2(\lambda z) - \zeta_m] ; \quad (3.59c)$$

$$T(z) = p(z) / 2n(z) ; \quad (3.60c)$$

$$\omega(z) = (\omega_m / \psi_m^E) [\xi_m \cos(\lambda z) - \zeta_m]^E ; \quad (3.61c)$$

$$v(z) = r_m \omega(z) ; \quad (3.62c)$$

$$\beta_N(z) = \frac{p(z)}{p(z) + B_p^2(z) / 2\mu_0} ; \quad (3.64c)$$

$$\mathcal{M}(z) = \frac{v(z)}{\sqrt{T(z) / m_i}} ; \quad (3.65c)$$

onde:

$$B_p(z) \equiv \sqrt{B_r^2(z) + B_z^2(z)} .$$

B. Parâmetros Arbitrados —

$$r_i^0 = 1.0 \text{ cm,}$$

$$r_e^0 = 10.0 \text{ cm,}$$

$$\begin{aligned}
 z_0^0 &= 25.0 \text{ cm}, \\
 n_m^0 &= 1.0 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}, \\
 T_m^0 &= 200 \text{ eV}, \\
 m_i = m_p &= 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}, \\
 \alpha &= 0.4, \\
 \epsilon &= 0.3.
 \end{aligned}$$

C. Constantes Calculadas —

Seguindo o esquema desenvolvido na seção 3.2-B, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \lambda^0 &= 6.28 \quad \text{m}^{-1}, \\
 \eta^0 &= 0.0153730368, \\
 a^0 &= 3.21 \times 10^2 \quad \text{m}^{-2}, \\
 \psi_m^0 &= 1.98 \times 10^{-4} \quad \text{T m}^2, \\
 C_1^0 &= 1.97 \times 10^{-4} \quad \text{T m}^2, \\
 C_2^0 &= -6.04 \times 10^{-6} \quad \text{T m}^2, \\
 x_m^0 &= 1.6273315169;
 \end{aligned}$$

usando estes valores, as expressões (3.34b), (3.35b) e (3.31) fornecem, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 N^0 &= 9.878890 \times 10^{17} \text{ partículas}, \\
 W_T^0 &= 2.484969 \times 10^1 \text{ J}, \\
 \psi_m^0 &= 1.975467 \times 10^{-4} \text{ T m}^2.
 \end{aligned}$$

Usando o método de perturbação proposto na seção 3.3-B, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 &= \lambda^0 + \delta\lambda = 7.50 \quad \text{m}^{-1}, \\
 \eta^1 &= \eta^0 + \delta\eta = 0.0292830591, \\
 a^1 &= a^0 + \delta a = 2.41 \times 10^2 \quad \text{m}^{-2}, \\
 \psi_m^1 &= 1.98 \times 10^{-4} \quad \text{T m}^2, \\
 C_1^1 &= C_1^0 + \delta C_1 = 3.04 \times 10^{-4} \quad \text{T m}^2, \\
 C_2^1 &= C_2^0 + \delta C_2 = -6.04 \times 10^{-6} \quad \text{T m}^2, \\
 x_m^1 &= x_m^0 + \delta x_m = 1.3936627448;
 \end{aligned}$$

e ainda:

$$\begin{aligned} n_m^1 &= n_m^0 + \delta n_m = 1.48 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}, \\ \omega_m^1 &= 2.26 \times 10^6 \text{ Hz}, \\ b^1 &= 4.02 \times 10^3 \text{ T/m}^6; \end{aligned}$$

e das expressões (3.34c), (3.35c) e (3.31), com os parâmetros acima, obtemos:

$$\begin{aligned} N^1 &= 9.878808 \times 10^{17} \text{ partículas}, \\ W_T^1 &= 2.484748 \times 10^1 \text{ J}, \\ \psi_m^1 &= 1.977388 \times 10^{-4} \text{ Tm}^2, \end{aligned}$$

ou seja, a "não-semelhança" entre as duas configurações, com respeito às três quantidades características acima, pode ser expressa quantitativamente por:

$$\begin{aligned} \epsilon_N &\equiv (N^1 - N^0) / N^0 = -0.0008 \%, \\ \epsilon_W &\equiv (W_T^1 - W_T^0) / W_T^0 = -0.0089 \%, \\ \epsilon_\psi &\equiv (\psi_m^1 - \psi_m^0) / \psi_m^0 = 0.0972 \%. \end{aligned}$$

Outros valores relevantes são: as posições dos eixos magnéticos,

$$\begin{aligned} r_m^0 &= 7.120 \text{ cm}, \quad z_m^0 = 0.0; \\ r_m^1 &= 7.608 \text{ cm}, \quad z_m^1 = 0.0; \end{aligned}$$

e a posição da separatriz na configuração com rotação:

$$\begin{aligned} r_i^1 &= 1.092 \text{ cm}, \\ r_e^1 &= 10.345 \text{ cm}, \\ z_o^1 &= 16.360 \text{ cm}; \end{aligned}$$

e a sua posição do eixo de pressão cinética máxima:

$$r_{mp}^1 = 8.026 \text{ cm}, \quad z_{mp}^1 = 0.0.$$

Outro resultado interessante é:

$$\frac{\delta a}{a^0} = \frac{a^1 - a^0}{a^0} \approx -0.25,$$

que levada em (3.45) fornece:

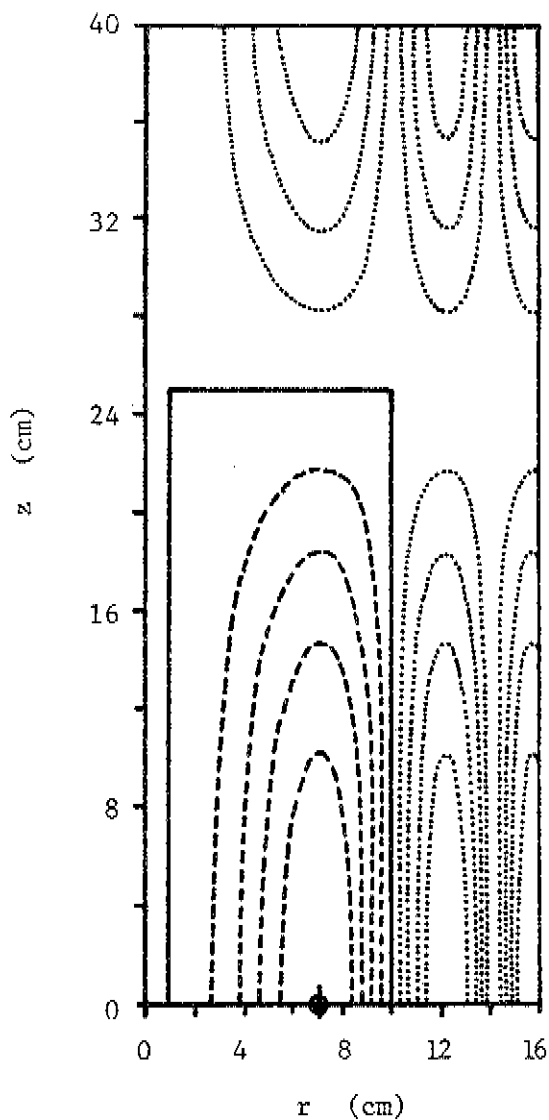
$$\left| \vec{F}_c \right|_m = \left| \vec{V}_p \right|_m ,$$

exatamente a equação de equilíbrio sobre o eixo magnético, na configuração com rotação, onde a força de Lorentz $\vec{j} \times \vec{B}$ é nula (pois $\vec{B}_p = 0$).

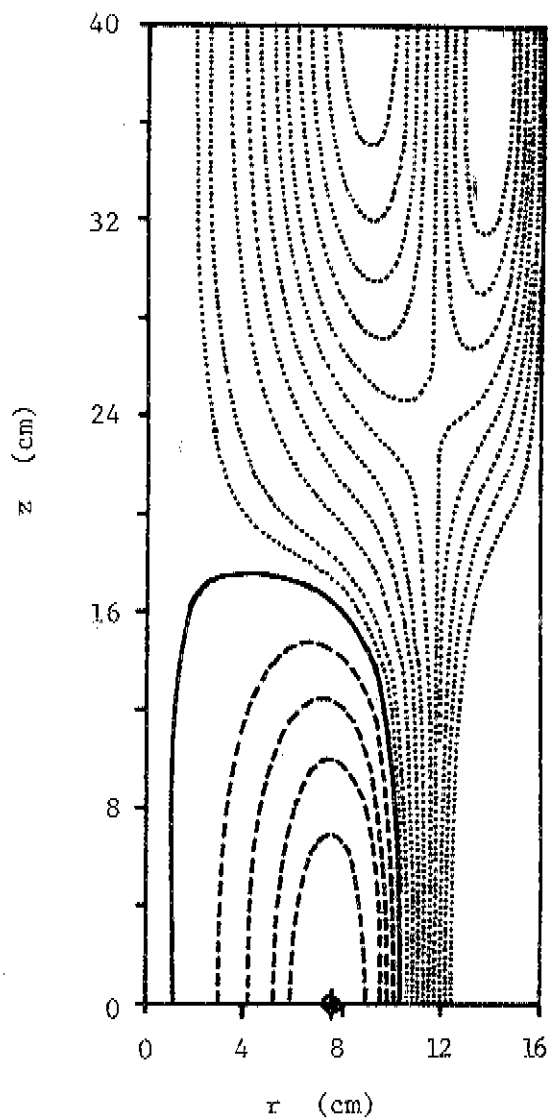
3.5 - Resultados

A. Figuras e Gráficos -

Nos gráficos que se seguem, as linhas tracejadas (-----) correspondem à configuração de equilíbrio estático (sem rotação), e as linhas cheias (———), ao equilíbrio estacionário (com rotação), salvo se indicadas em contrário. Os perfis radiais, sobre o plano equatorial ($z=0$), são plotados entre $0.0 \leq r^0 \leq 10.0$ cm e 1.092 cm $\leq r^1 \leq 10.345$ cm, e os perfis longitudinais, sobre o cilindro de raio $r = r_m$, que contém o eixo magnético, entre $0.0 \leq z^0 \leq 25.0$ cm e $0.0 \leq z^1 \leq 16.36$ cm, respectivamente, para os plasmas sem e com rotação.



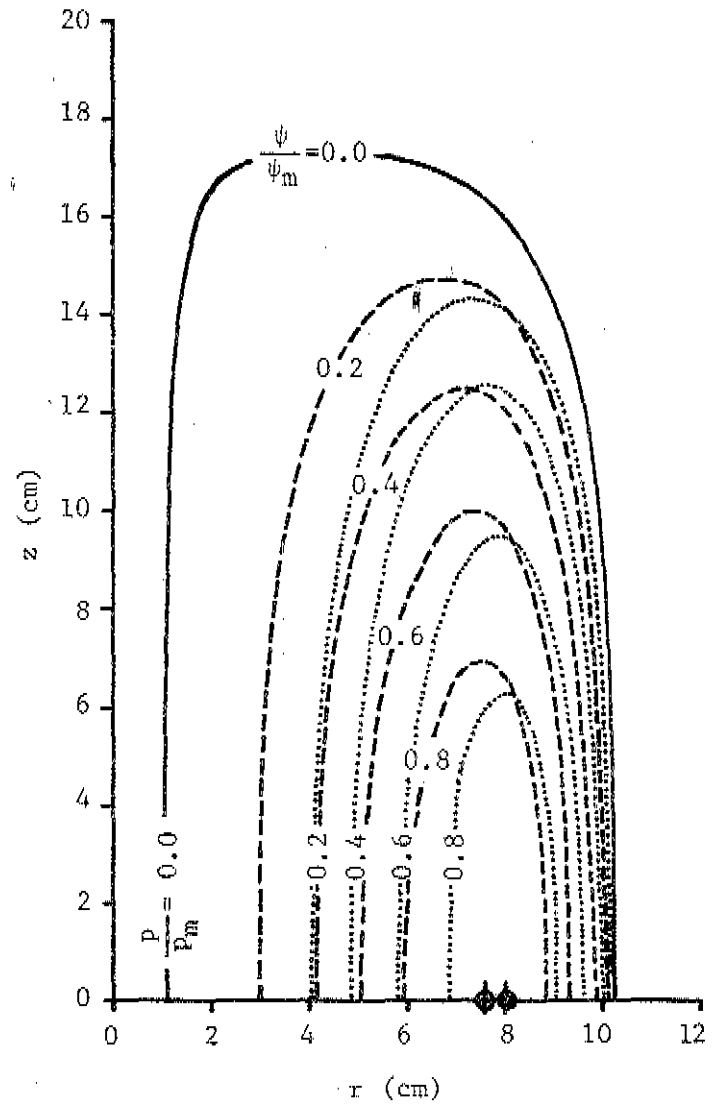
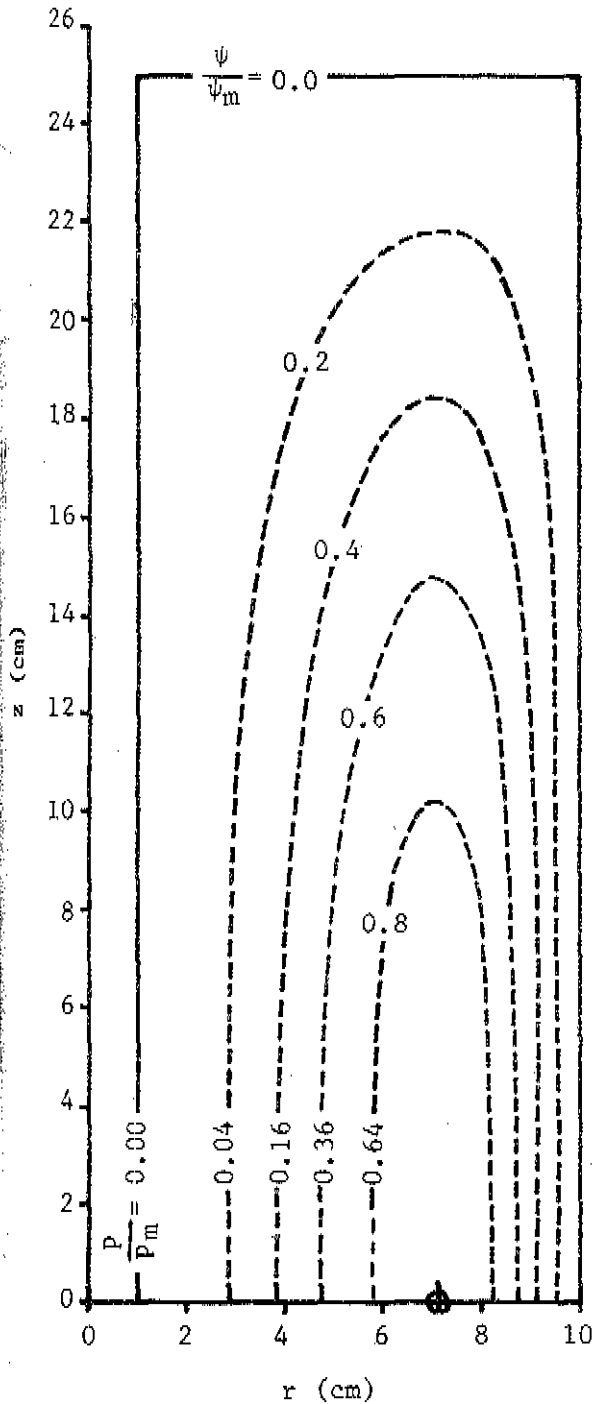
(a) Equilíbrio Estático



(b) Equilíbrio Estacionário

Fig. (3-6): Superfícies de Fluxo -

- (———) separatriz ($\psi=0$),
- (- - - -) sup. internas ($\psi>0$),
- (······) sup. externas ($\psi<0$);
- (◆) eixo magnético ($\psi=\psi_{\max}$).



(a) Equilíbrio Estático:

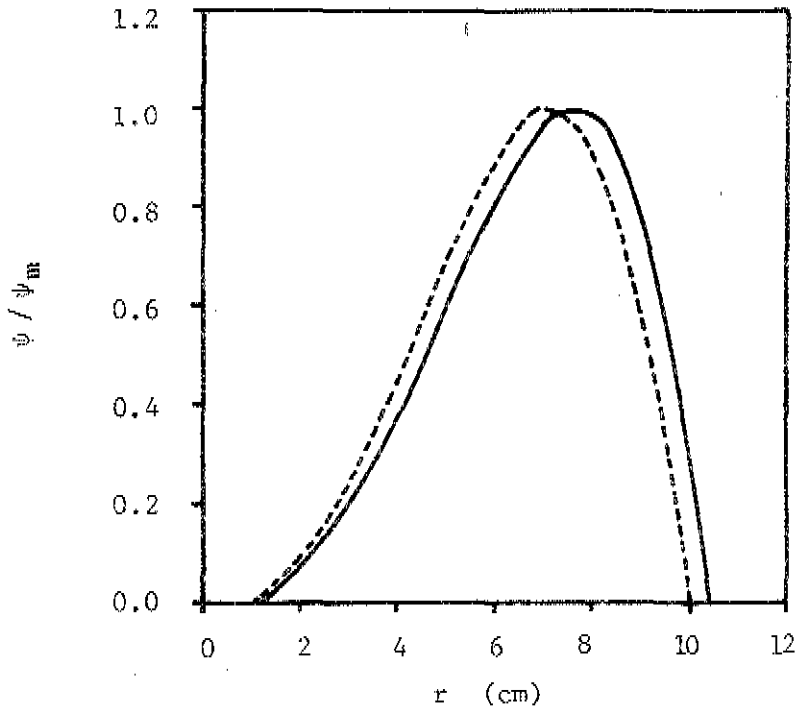
As superfícies de fluxo e iso-
báricas, e os eixos magnético
e de pressão máxima, coincidem
entre si.

(b) Equilíbrio Estacionário:

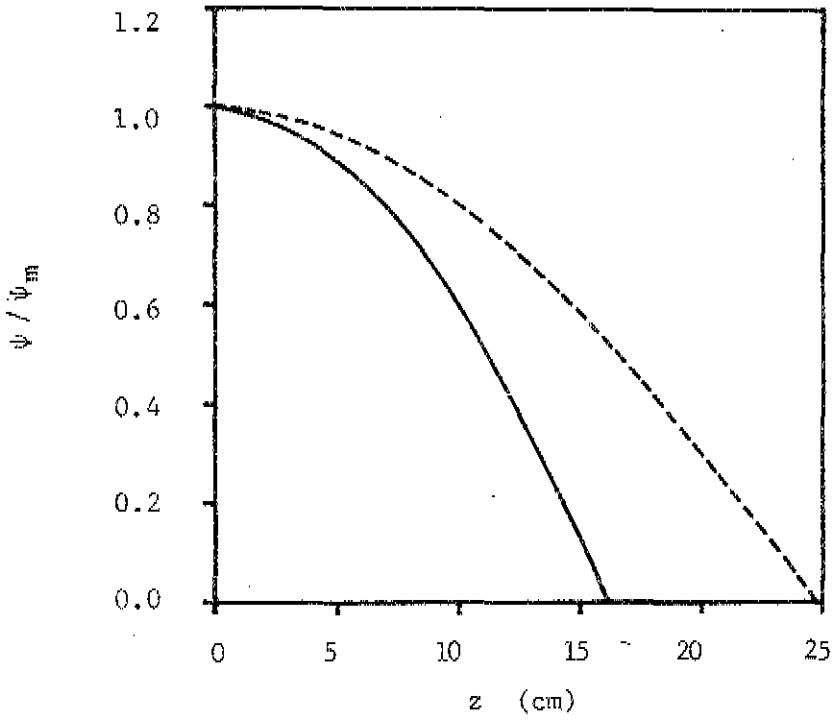
As superfícies isobáricas estão
deslocadas em relação às super-
fícies de fluxo; eixos magnético
(\diamond) e de pressão máxima (\blacklozenge).

Fig. (3-7): Superfícies de fluxo e superfícies isobáricas —

- (—————) separatriz;
- (- - - - -) superfícies de fluxo ($\psi = \text{cte.}$);
- (.....) superfícies isobáricas ($p = \text{cte.}$).



(a) Perfil radial, em $z = 0$



(b) Perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-8): Função de fluxo poloidal.

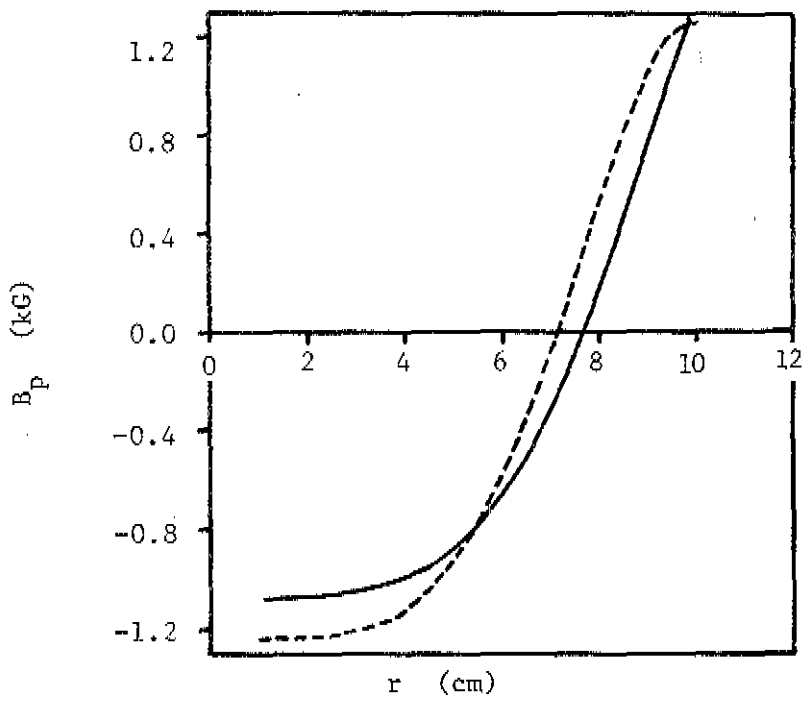
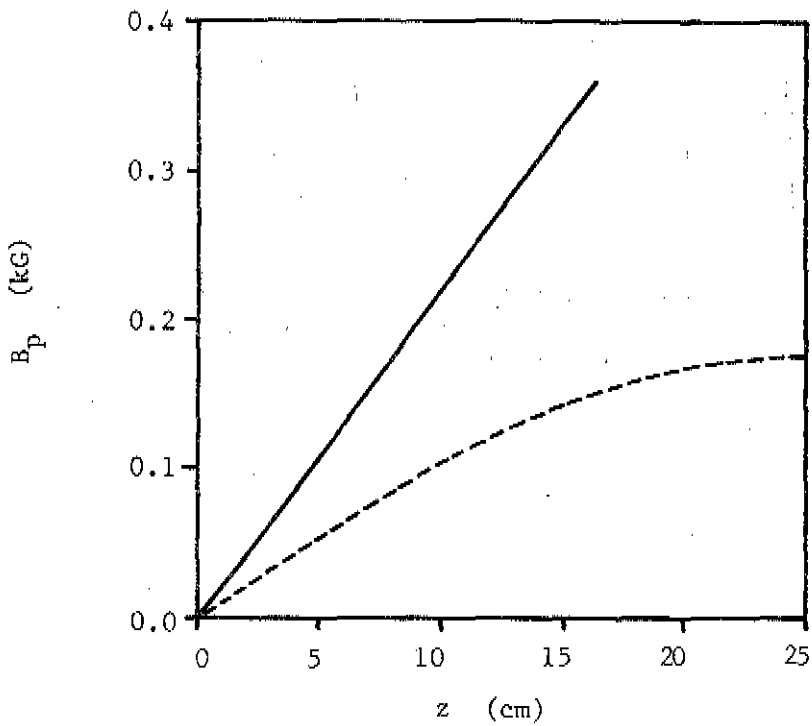
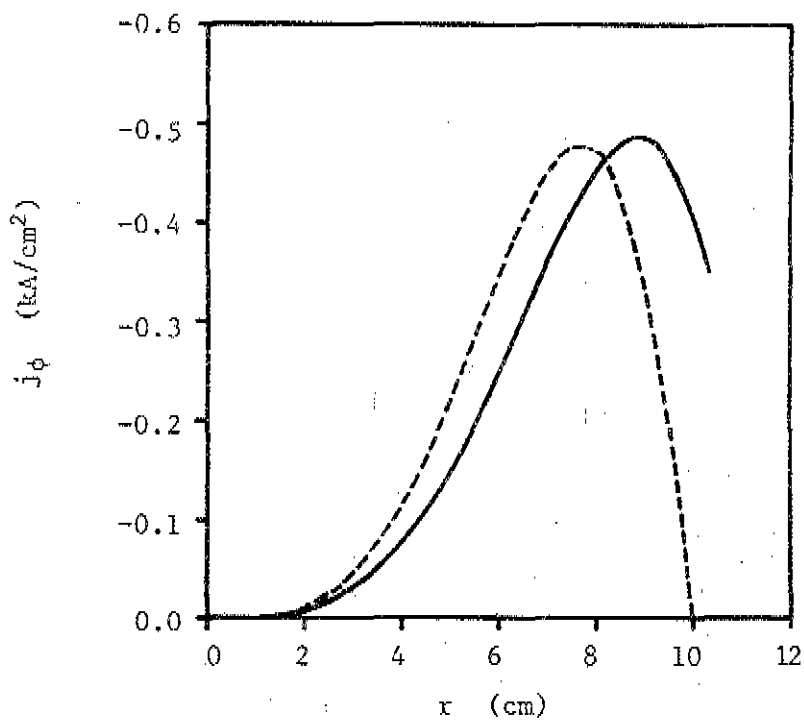
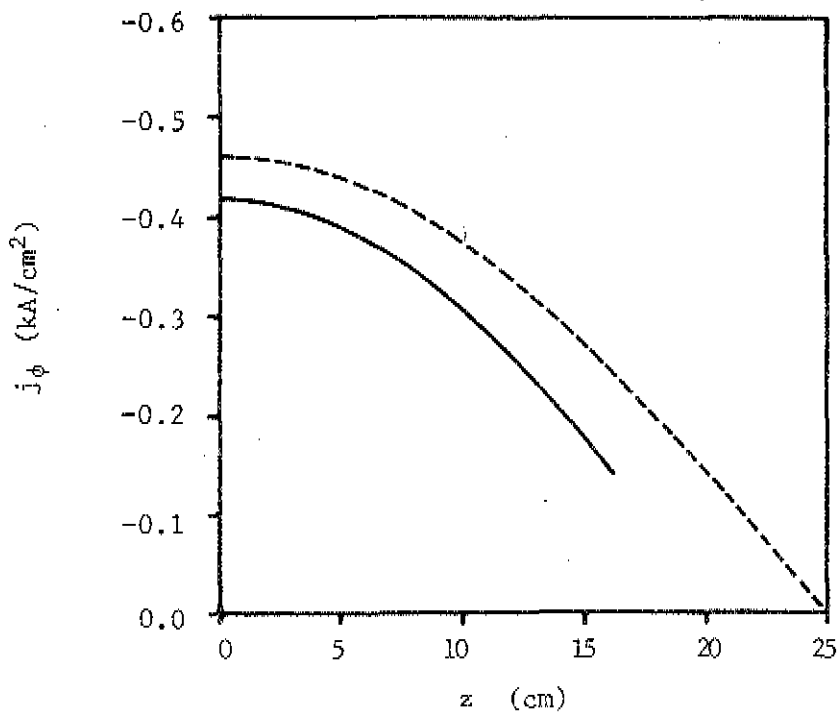
(a) Perfil radial, em $z = 0$ (b) Perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-9): Perfis de campo magnético poloidal.

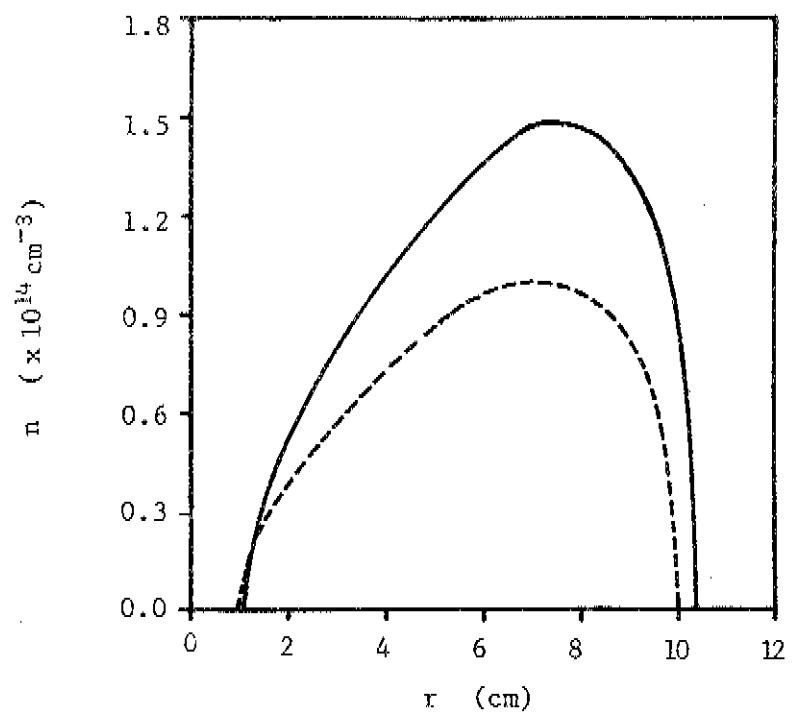


(a) Perfil radial, em $z = 0$

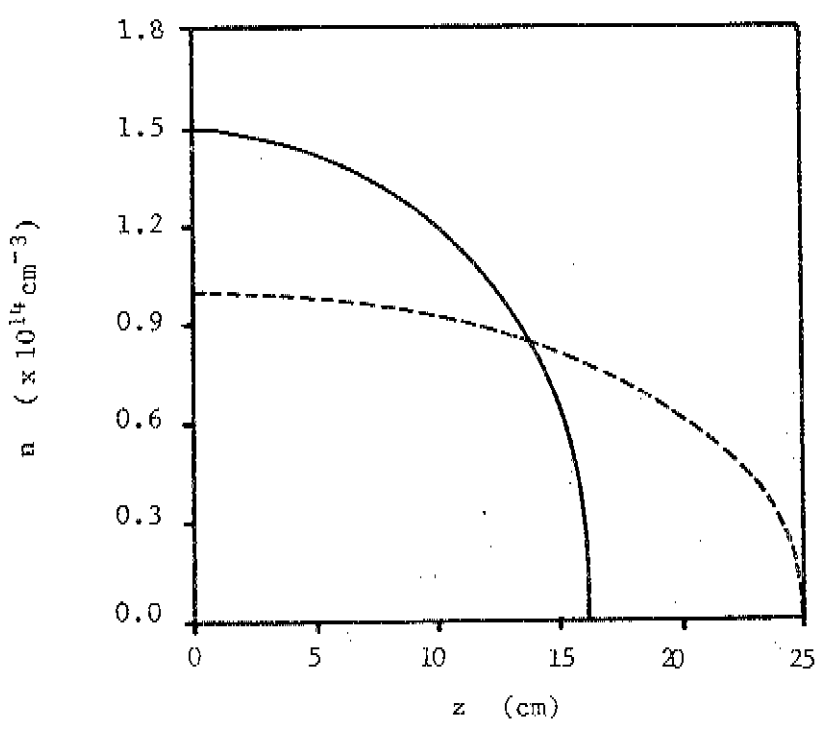


(b) Perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-10): Perfis de densidade de corrente toroidal.

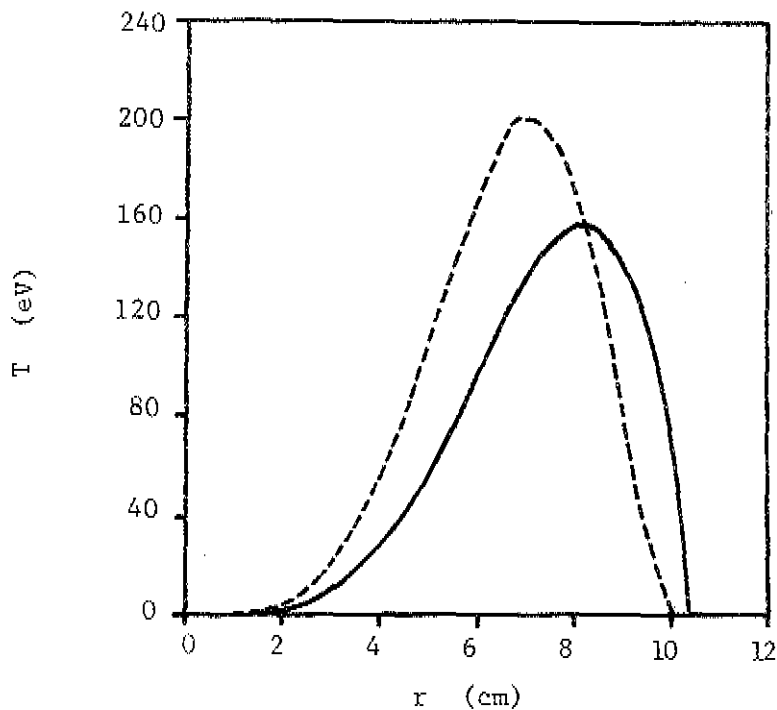


(a) Perfil radial, em $z = 0$

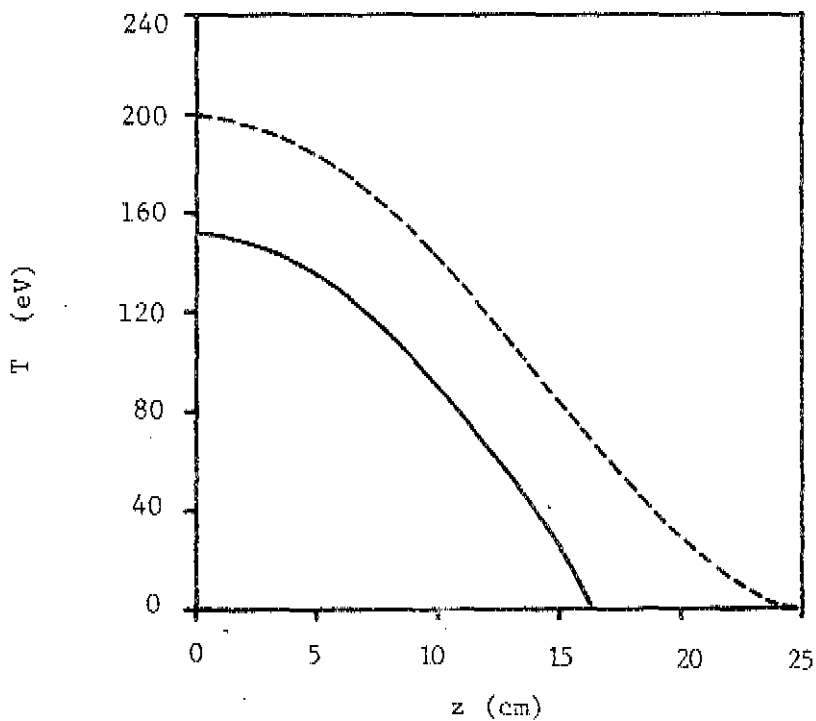


(b) perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-11): Perfis de densidade de partícula.



(a) Perfil radial, em $z = 0$



(b) Perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-12): Perfis de temperatura ($T_e = T_i$).

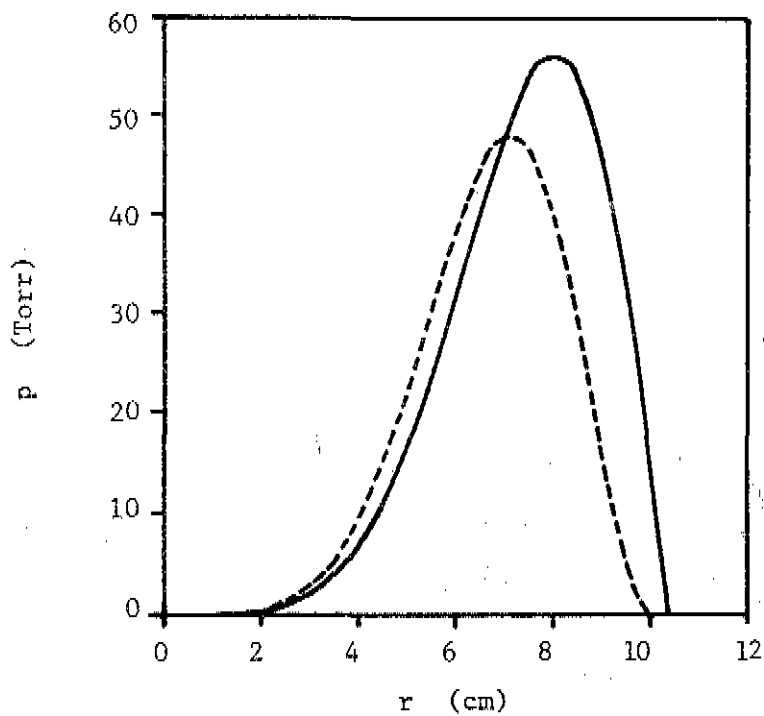
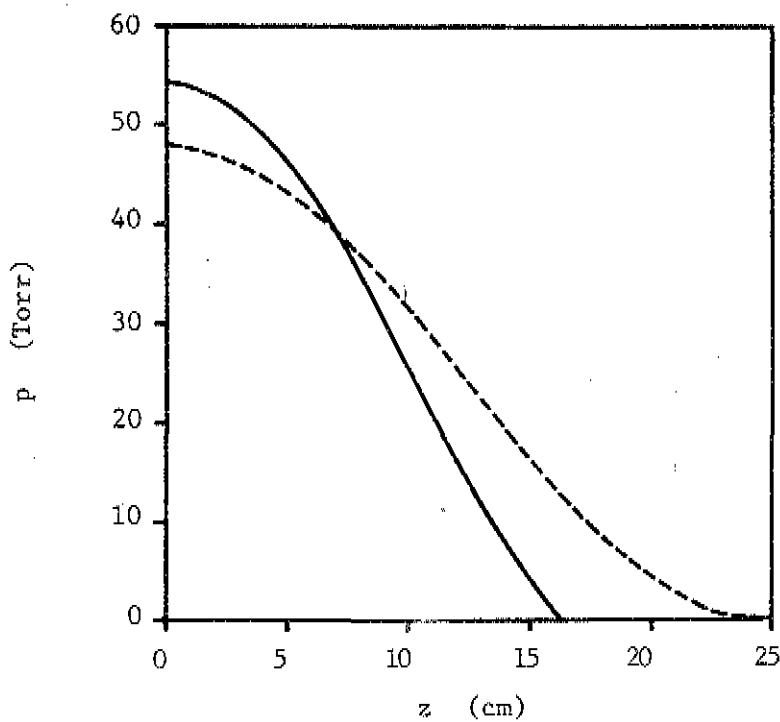
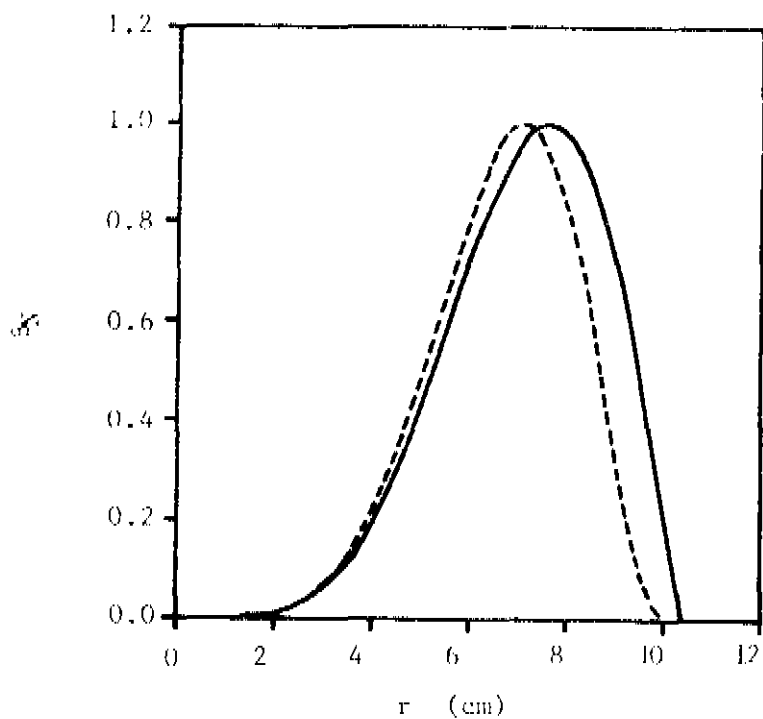
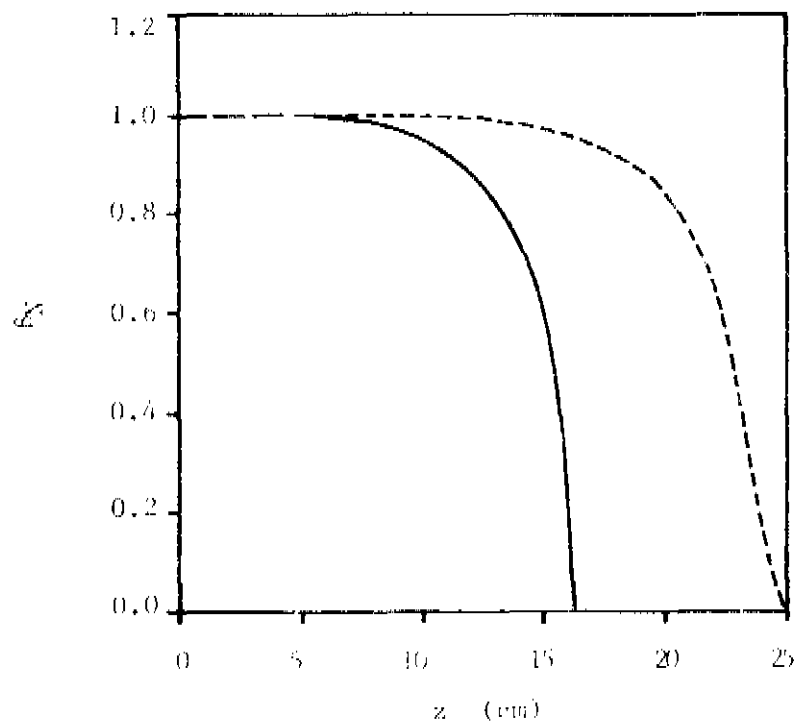
(a) Perfil radial, em $z = 0$ (b) Perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-13): Perfis de pressão cinética.

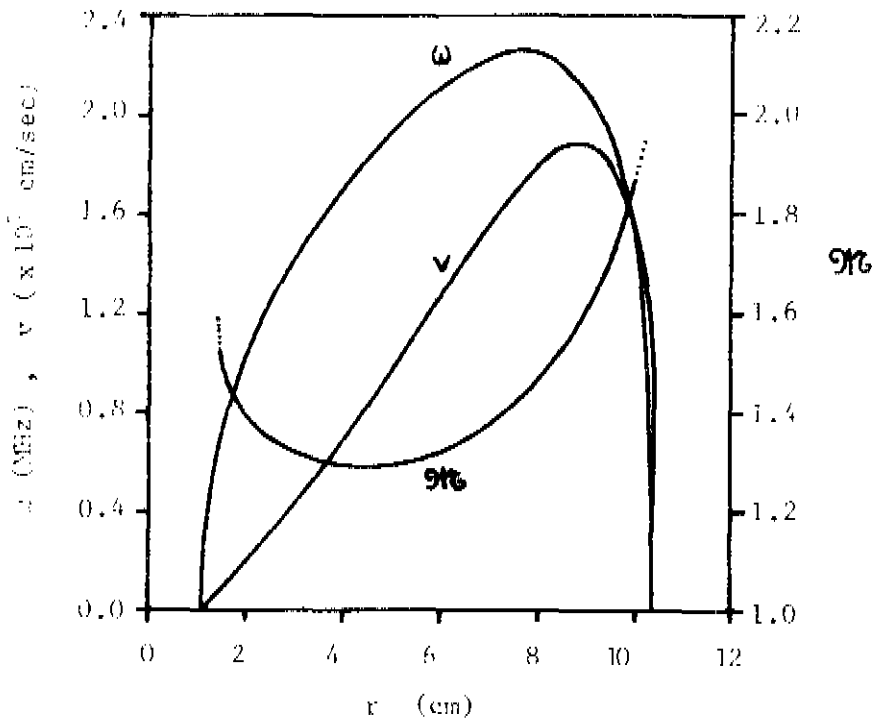


(a) Perfil radial, cm $z = 0$

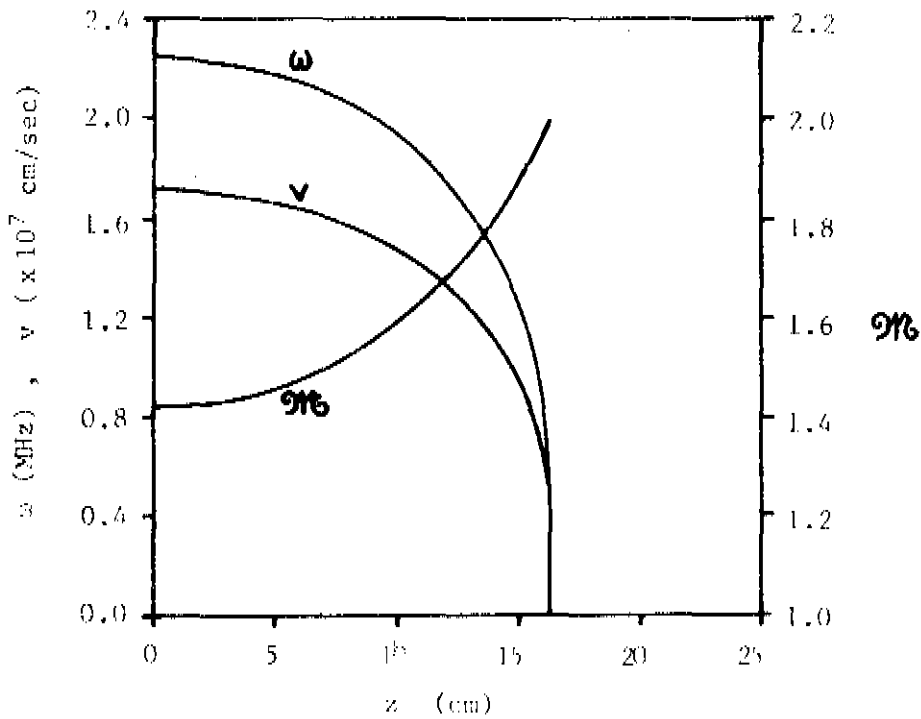


(b) Perfil longitudinal, cm $r = r_0$

Fig. (3-16): Beta poloidal normalizado.



(a) Perfil radial, em $z = 0$



(b) Perfil longitudinal, em $r = r_m$

Fig. (3-15): Perfis de velocidade angular, velocidade longitudinal e número de Mach.

B. Análise e Comentários —

(a) Configurações de equilíbrio estático com seções retangulares, como a mostrada na Fig. (3-6a), foram estudados, entre outros, por Sethian *et al*⁶, Maschke⁴², Suzuki⁴³ e Oshiyama e Fukutani⁴⁵; enquanto que configurações do tipo "elongated D(0)-shape", como a mostrada na Fig. (3-6b), foram obtidas em estudos de FRÖP com rotação por Steinhauer⁴, Eberhagen e Grossmann²⁰, Bodin *et al*⁷¹, e outros.

(b) Nessas mesmas figuras, as configurações das linhas de campo externas à separatriz ($\psi < 0$) — numa formação semelhante a imagens espectrais repetitivas, para separatrizes com ângulos ("cantos"), e com linhas abertas, para separatrizes suaves — estão de acordo com os resultados obtidos por Morozov e Solov'ev.⁷²

(c) A compressão axial do plasma e o seu deslocamento para fora do eixo de simetria, são condizentes com a ação da força centrífuga.

(d) A conseqüente diminuição do volume do plasma, para a configuração com rotação, é "compensada" pelo levantamento dos perfis de densidade e pressão cinética para, de acordo com a nossa hipótese, "conservar" o número total de partículas e a energia térmica total, respectivamente.

(e) As posições relativas entre as superfícies isobáricas e as superfícies de fluxo, apresentadas na Fig. (3-7), concordam qualitativamente com os resultados obtidos por Maschke e Perrin (M&P)⁷³, embora tal trabalho considere configurações verdadeiramente toroidais.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 - Sobre a Equação de Grad-Shafranov Modificada

No presente trabalho, somos encorajados a considerar como sendo o principal resultado a elaboração da equação de GS-M, em geral, e a sua aplicação ao FRØP, em particular. Abaixo, faremos uma rápida abordagem acerca destes dois pontos.

(a) A equação de GS-M é uma equação geral, capaz de descrever tanto o equilíbrio estático quanto o estacionário; conservando, não obstante, uma forma bastante simples, semelhante à equação de G-S padrão. Assim, uma vez que a resolução desta última tem sido largamente explorada nas literaturas (cf. Refs. [38] - [53]), a nossa equação, embora seja inovadora em termos físicos, não introduz nenhuma complexidade matemática adicional, possibilitando a sua resolução de uma maneira relativamente simples e padronizada.

(b) Na sua dedução foram feitas apenas duas hipóteses, que, ao nosso ver, não implicam em perda de generalidade: a de uma rotação puramente toroidal, que, embora seja uma situação específica, descreve um fenômeno de grande importância (cf. Refs. [5], [12], [13], [14], [19] - [33]); e a suposição de que $\rho = \rho(\psi)$ — possibilitando contudo uma grande variedade de perfis. Esta última hipótese é perfeitamente válida do ponto de vista físico, se se considerarmos que as linhas de campo, congeladas no fluido, estão sobre as superfícies de fluxo. Em particular, esta suposição nos parece ser mais ilustrativo (ou "familiar") do que aquela proposta por M&P,⁷³ de entropia constante sobre as superfícies de fluxo; em adição, a nossa equação, obtida com a hipótese de $\rho = \rho(\psi)$, é sensivelmente mais simples que a obtida por M&P,⁷³ com $S = S(\psi)$.

(c) Na resolução da equação de GS-M para o FRØP, parece que fomos duplamente felizes na escolha dos perfis arbitrários: de um lado, a equação diferencial resultante nos permitiu, via separação de variáveis, a obtermos uma solução analítica simples e exata para $\psi(r,z)$; e por outro lado, tais perfis, embora até certo ponto "preparadas" de tal maneira a nos livrar de complicações algébricas, forneceram resultados fisicamente significativos, condizente com trabalhos anteriores.

(d) Por fim, destacamos que o método da perturbação dos parâmetros, aqui baseado na suposta semelhança entre as duas configurações de equilíbrio, nos possibilitou uma comparação auto-consistente dos dois resultados. Os resultados dos cálculos numéricos mostram claramente a ação da força centrífuga sobre, entre outros aspectos, a deformação da separatriz e o deslocamento das superfícies isobáricas em relação às superfícies de fluxo; e acreditamos que tais fatos, devidos à rotação, exerçam grande influência sobre a estabilidade do plasma (cf. Refs. [19] - [30]).

4.2 - Conclusões

(a) A equação de GS-M descreve satisfatoriamente os equilíbrios MHD estático e estacionário em sistemas com simetria axial;

(b) a suposição de que $\rho = \rho(\psi)$ é fisicamente aceitável, além de nos proporcionar uma simplicidade matemática;

(c) a aplicação ao FRØP mostrou a validade do método da perturbação dos parâmetros para a obtenção de resultados comparativos entre configurações semelhantes, com e sem rotação.

4.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros

(a) Aperfeiçoar o formalismo numérico aqui desenvolvido, no sentido de torná-lo mais realista — incluindo, p.ex., os efeitos do campo externo, parede metálica, etc.;

(b) estender a sua aplicação a outros sistemas de confinamento com simetria axial, como p. ex. tokamaks e spheromaks;

(c) analisar o efeito da rotação sobre as instabilidades.

APÊNDICE A

SIGNIFICADO FÍSICO DA FUNÇÃO DE FLUXO ψ

Seja um toróide de seção arbitrária, mostrado na Fig. (A-1). Sendo $\vec{\phi}$ o versor normal às superfícies $\phi = \text{cte.}$ (i.e., é o próprio $\vec{\phi}$ em coordenadas cilíndricas) e $\vec{\psi}$ o versor normal às superfícies $\psi = \text{cte.}$ (superfícies ou "tubos" de fluxo), vamos definir uma "direção poloidal" por:

$$\vec{\chi} = \vec{\psi} \times \vec{\phi} ,$$

como mostra a Fig. (A-2). Com isso, o elemento de área da superfície poloidal, simultaneamente normal às superfícies de fluxo e às superfícies $\phi = \text{cte.}$, já integrada em ϕ (devido à sua simetria axial), é:

$$d\vec{s}_p = 2\pi r d\vec{r}_\psi \times \vec{\phi} ,$$

onde $d\vec{r}_\psi$ é o deslocamento ao longo da direção da variação de ψ , ou seja,

$$d\vec{r}_\psi = \frac{d\psi}{|\vec{\nabla}\psi|} \vec{\psi} ,$$

donde:

$$d\vec{s}_p = \frac{2\pi r d\psi}{|\vec{\nabla}\psi|} (\vec{\psi} \times \vec{\phi}) = \frac{2\pi r d\psi}{|\vec{\nabla}\psi|} \vec{\chi} . \quad (\text{A.1})$$

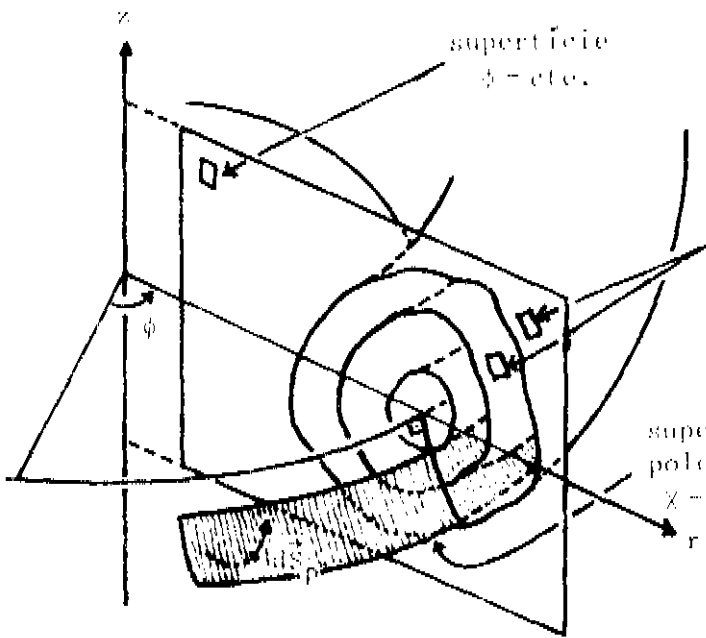


Fig. (A-1) : Sistema de coordenadas toroidais (ψ, ϕ, χ)

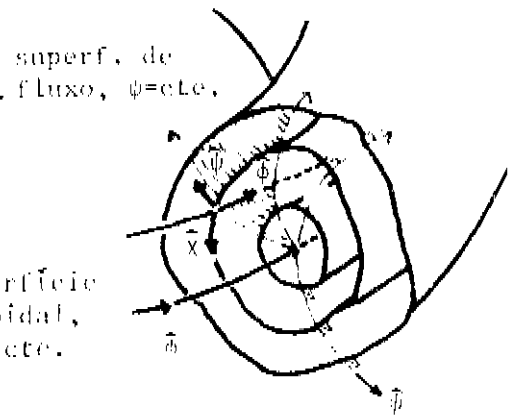


Fig. (A-2) : Vetores ortogonais ($\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\chi}$)

Por outro lado, usando as componentes (2.16a) e (2.16c), temos que:

$$\vec{\nabla}\psi(r, z) = \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{z} = (-rB_z) \hat{r} + (rB_r) \hat{z},$$

$$\hat{B}_p = \hat{B} = B_\phi \hat{\phi} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}, \quad (\text{A.2})$$

donde:

$$|\vec{\nabla}\psi| = [r^2 (B_r^2 + B_z^2)]^{1/2} = rB_p.$$

Substituindo esta na Eq. (A.1), temos:

$$d\vec{s}_p = \frac{2\pi r}{B_p} d\psi \hat{\chi};$$

multiplicando ambos os membros escalarmente por $\hat{\chi}$:

$$(\vec{B}_p \cdot \vec{\chi}) \cdot d\vec{s}_p = 2\pi \, d\psi ,$$

donde :

$$\psi = \int d\psi = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B}_p \cdot d\vec{s}_p .$$

Ainda, como $(\vec{\psi}, \vec{\phi}, \vec{\chi})$ são mutuamente ortogonais, temos, usando as Eqs. (A.1) e (A.2), que:

$$\vec{B}_p \cdot d\vec{s}_p = (\vec{B} - B_\phi \vec{\phi}) \cdot d\vec{s}_p \vec{\chi} = \vec{B} \cdot d\vec{s}_p ,$$

donde, finalmente,

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}_p$$

que é exatamente a Eq. (2.25).

APÊNDICE BDEPENDÊNCIA FUNCIONAL DE $f(\psi)$

Vamos reescrever a Eq. (2.39) na forma:

$$\alpha \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} f \quad (\text{B.1})$$

onde:

$$\alpha = \alpha(r, z) = - \frac{\Delta^* \psi + \Pi \Gamma + \mu_0 r^4 g'}{\mu_0 r^2},$$

$$f = f(r, z) = p - r^2 g,$$

$$\psi = \psi(r, z)$$

são funções escalares axissimétricas. Desenvolvendo a Eq. (B.1), temos:

$$\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right);$$

igualando as componentes \hat{r} e \hat{z} :

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z};$$

isolando α em cada expressão, e igualando-as:

$$\alpha = \frac{(\partial f / \partial r)}{(\partial \psi / \partial r)} = \frac{(\partial f / \partial z)}{(\partial \psi / \partial z)}$$

donde:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r} \equiv J \left(\frac{\psi, f}{r, z} \right) = 0 ,$$

ou seja,⁶⁰

$$f = p - r^2 g = f(\psi) .$$

APÊNDICE C

SOBRE AS EQUAÇÕES DE ESTADO ADIABÁTICO E ISOTÉRMICO

Sejam as equações de estado para um plasma adiabático e isotérmico, respectivamente, Eqs. (2.7b) e (2.7c):

$$\frac{d}{dt} (p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad .$$

Como de uma maneira geral $p = p(r, z)$ e $\rho = \rho(r, z)$, vamos designar por $Q(r, z)$ indistintamente as razões (p/ρ^γ) e (p/ρ) , de modo que:

$$\frac{dQ(r, z)}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) Q(r, z) = 0 \quad .$$

Para o caso estático, é imediato que a equação acima é uma identidade, pois $(d/dt) = 0$. Para o caso estacionário, temos:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) Q(r, z) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q(r, z) = 0 \quad .$$

Lembrando que $\vec{v} = v\hat{\phi}$ o primeiro membro fica:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q(r, z) = v\hat{\phi} \cdot \vec{\nabla} Q(r, z) = \frac{v}{r} \frac{\partial Q(r, z)}{\partial \phi} = 0 \quad ,$$

ou seja, também obtemos uma identidade. Ressaltamos, porém, que se o operador $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ for aplicado sobre uma grandeza vetorial $\vec{Q}(r, z)$, o resultado será não-nulo identicamente, como foi mostrada nas relações (2.10) ou na Eq. (2.27).

APÊNDICE DPARTE RADIAL DA EQUAÇÃO DE G-S

Vamos reescrever a Eq. (3.11a) na forma:

$$rR'' - R' + (4a^2 r^2 - \lambda^2)rR = 0 \quad (D.1)$$

Tendo em vista a definição (3.12), temos que:

$$\frac{dx}{dr} = 2ar \quad , \quad \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2ar} \quad ;$$

$$R' = \frac{dR}{dr} = 2ar \frac{dR}{dx} \quad ;$$

$$R'' = \frac{d^2R}{dr^2} = 4a^2 r^2 \frac{d^2R}{dx^2} + 2a \frac{dR}{dx} \quad .$$

Substituindo estas duas últimas expressões, juntamente com a própria definição (3.12), na Eq. (D.1), temos:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{4ax}\right)R = 0 \quad ,$$

ou, usando a definição (3.14a):

$$\eta = \frac{\lambda^2}{8a} \quad ,$$

temos:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{x}\right)R = 0 \quad , \quad (D.2)$$

que é exatamente a Eq. (3.13).

Seja agora a equação diferencial de Coulomb:⁶⁶

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \left[1 - \frac{2\eta}{x} - \frac{L(L+1)}{x^2} \right] R = 0 , \quad (D.3)$$

cuja solução geral \tilde{e} :

$$R(x) = C_1 F_L(\eta, x) + C_2 G_L(\eta, x) \quad (D.4)$$

onde $F_L(\eta, x)$ e $G_L(\eta, x)$ são respectivamente as funções de onda regular⁴ e irregular (logarítmica) de Coulomb (*Coulomb Wave Functions, CWF*), de ordem L ,^{66, 67} e C_1 e C_2 , constantes arbitrárias. A Eq. (D.3) só é definida para:

$$\begin{aligned} x &> 0 , \\ -\infty &< \eta < +\infty , \\ L &\geq 0, \text{ inteiro;} \end{aligned}$$

logo, comparando as Eqs. (D.2) e (D.3) entre si, devemos ter $L = 0$, e, da expressão (D.4), a solução da nossa equação fica:

$$R(x) = C_1 F_0(\eta, x) + C_2 G_0(\eta, x) , \quad (D.5)$$

que é a Eq. (3.15).

APÊNDICE ECÁLCULO DAS CONSTANTES C₁ E C₂

Sejam as Eqs. (3.21d) e (3.22d), respectivamente:

$$C_1 F'_m + C_2 G'_m = \psi_m \quad , \quad (E.1)$$

$$C_1 F''_m + C_2 G''_m = 0 \quad . \quad (E.2)$$

Multiplicando a Eq. (E.1) por G''_m e a Eq. (E.2) por G'_m , e subtraindo membro a membro:

$$- \begin{cases} C_1 F'_m G''_m + C_2 G'_m G''_m = \psi_m G''_m \\ C_1 F''_m G'_m + C_2 G''_m G'_m = 0 \end{cases}$$

$$- C_1 (F''_m G'_m - F'_m G''_m) = \psi_m G''_m$$

Pela propriedade do wronskiano do CWF, a expressão entre parênteses é igual à unidade⁶⁶, logo:

$$C_1 = - \psi_m G''_m(\eta, x_m) \quad ; \quad (E.3)$$

substituindo esta em (E.1) ou em (E.2), obtemos:

$$C_2 = \psi_m F''_m(\eta, x_m) \quad . \quad (E.4)$$

APÊNDICE F

"LEIS DE CONSERVAÇÃO"

F.1: Expressões para N^0 e W_T^0

Fazendo $\rho(\psi) = m n(\psi)$ e usando a definição (3.8),

a Eq. (3.3b) fica:

$$n^0(\psi^0) = n^0(r, z) = n_m^0 (\psi^0 / \psi_m^0)^{\alpha} ;$$

e combinando a definição (2.40) para o caso sem rotação com o perfil que escolhemos para $f(\psi)$, (3.2a), obtemos:

$$p^0(\psi^0) = p^0(r, z) = 2(a^0)^2 (\psi^0)^2 / \mu_0 .$$

Substituindo estas expressões na Eq. (3.37), temos:

$$N^0 = \int_{V^0} n^0(r, z) dV^0 = \frac{2\pi n_m^0}{a^0 \psi_m^{\alpha}} \int_x \int_{z+} [\psi^0(x, z)]^{\alpha} dx dz ,$$

$$W_T^0 = \int_{V^0} p^0(r, z) dV^0 = \frac{4\pi a^0}{\mu_0} \int_x \int_{z+} [\psi^0(x, z)]^2 dx dz .$$

Definindo:

$$\xi^0(x) = C_1^0 F(\eta^0, x) + C_2^0 (\eta^0, x) , \quad (F.1)$$

$$\theta^0(z) = \lambda^0 z , \quad d\theta = \lambda^0 dz , \quad (F.2)$$

a solução (3.31) para $\ell = 0$ fica:

$$\psi^0(x, z) = \xi^0(x) \cos\theta^0(z) , \quad (F.3)$$

donde:

$$N^0 = \frac{2\pi n^0}{\lambda^0 a^0 \psi_m^0} \left\{ \int_x [\xi^0(x)]^\alpha dx \right\} \left\{ \int_{0+} [\cos\theta^0(z)]^\alpha d\theta \right\} ,$$

$$W_T^0 = \frac{4\pi a^0}{\mu_0 \lambda^0} \left\{ \int_x [\xi^0(x)]' dx \right\} \left\{ \int_{0+} [\cos\theta^0(z)]^2 d\theta \right\} .$$

Definindo as constantes:

$$\tilde{N}^0 = \frac{2\pi n^0}{\lambda^0 a^0 \psi_m^0} , \quad \tilde{W}_T^0 = \frac{\pi^2 a^0}{\mu_0 \lambda^0} , \quad (F.4)$$

e considerando os limites de integração apresentados na Fig. (3-3), temos:

$$N^0 = \tilde{N}^0 \left\{ \int_{x_1^0}^{x_e^0} [\xi^0(x)]^\alpha dx \right\} \left\{ \int_0^{\theta_0} [\cos\theta^0(z)]^\alpha d\theta \right\} ,$$

$$W_T^0 = \frac{4\tilde{W}_T^0}{\pi} \left\{ \int_{x_1^0}^{x_e^0} [\xi^0(x)]' dx \right\} \left\{ \int_0^{\theta_0} [\cos\theta^0(z)]^2 d\theta \right\} ,$$

onde, de acordo com a definição (F.2),

$$\theta_0 = \theta^0(z_0) = \lambda^0 z_0 ,$$

que, combinada com a Eq. (3.24b) fornece:

$$\theta_0 = \pi/2 .$$

Com isso, temos que:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4},$$

donde, finalmente,

$$N^0 = \tilde{N}^0 \left\{ \int_{x_i^0}^{x_c^0} [\xi^0(x)]^\alpha dx \right\} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha} \theta^0(z) d\theta \right\}, \quad (F.5)$$

$$W_T^0 = \tilde{W}_T^0 \left\{ \int_{x_i^0}^{x_c^0} [\xi^0(x)]^2 dx \right\}, \quad (F.6)$$

que são exatamente as expressões (3.34b) e (3.35b).

F.2: Expressões para N^1 e W_T^1

Como no caso anterior, da Eq. (3.3b) temos que:

$$n^1(\psi^1) = n^1(r, z) = n_m^1 (\psi^1 / \psi_m^1)^\alpha. \quad (F.7)$$

Entretanto, agora a combinação das expressões (2.40) e (3.2a) fornece:

$$p^1(\psi^1) = p^1(r, z) = [2(a^1)^2(\psi^1)^2 + b^1 r^2 \psi^1] / \mu_0,$$

onde também usamos a Eq. (3.5a) para o $g(\psi^1)$; a expressão acima pode ser reescrita como:

$$p^1(r, z) = \frac{2(a^1)^2 \psi^1}{\mu_0} \left[\psi^1 + 2 \cdot \frac{b^1 r^2}{4(a^1)^3} \right]. \quad (F.8)$$

Definindo:

$$\xi^1(x) = C_1^1 F(\eta^1, x) + C_2^1 G(\eta^1, x) , \quad (\text{F.9})$$

$$\zeta^1(x) = \frac{b^1 x}{4(a^1)^3} , \quad (\text{F.10})$$

$$\theta^1(z) = \lambda^1 z , \quad d\theta = \lambda^1 dz , \quad (\text{F.11})$$

a solução (3.31) para $\ell = 1$ fica:

$$\psi^1(x, z) = \xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x) ; \quad (\text{F.12})$$

usando esta última em (F.7):

$$n^1(r, z) = (n_m^1 / \psi_m^{\ell\ell}) [\xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x)]^{\ell\ell} , \quad (\text{F.13})$$

e substituindo as expressões (F.10) e (F.12) em (F.8):

$$\begin{aligned} p^1(r, z) &= 2(a^1)^{\ell\ell} \psi^1 [\xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x)] / \mu_0 \\ &= 2(a^1)^2 [\xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x)] [\xi^1(x) \cos \theta^1(z) + \zeta^1(x)] / \mu_0 \end{aligned}$$

donde:

$$p^1(r, z) = 2(a^1)^{\ell\ell} \{ [\xi^1(x) \cos \theta^1(z)]^2 - [\zeta^1(x)]^2 \} / \mu_0 . \quad (\text{F.14})$$

Substituindo agora as expressões (F.11), (F.13) e (F.14) em (3.37):

$$N^1 = \frac{2\pi n^1}{\lambda^1 a^1 \psi_m^{\ell\ell}} \int_x \int_{\theta^1} \{ [\xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x)]^{\ell\ell} dx d\theta \} ,$$

$$W_T^1 = \frac{4\pi a^1}{\lambda^1 \alpha^1} \int_x \int_{0^+} \{ [\xi^1(x) \cos \theta^1(z)]^2 - [\zeta^1(x)]^2 \} dx d\theta ;$$

definindo as constantes:

$$\bar{N}^1 = \frac{2\pi m^1}{\lambda^1 \alpha^1 \psi_m^{\alpha}} , \quad \tilde{W}_T^1 = \frac{2\pi a^1}{\lambda^1 \alpha^1} , \quad (F.15)$$

temos:

$$N^1 = \bar{N}^1 \int_x \int_{0^+} \{ \xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x) \}^{\alpha} dx d\theta ,$$

$$W_T^1 = 2\tilde{W}_T^1 \int_x \int_{0^+} \{ [\xi^1(x) \cos \theta^1(z)]^2 - [\zeta^1(x)]^2 \} dx d\theta .$$

Pondo $\psi^1(r, z) = 0$ em (3.31), obtemos a equação da separatriz, esboçada na Fig. (3-4):

$$z_s^1(x) = \frac{1}{\lambda^1} \cos^{-1} \left[\frac{\xi^1(x)}{\zeta^1(x)} \right] , \quad (F.16)$$

ou, combinando esta com a definição (F.11),

$$\theta_s^1(x) = \lambda^1 z_s^1(x) = \cos^{-1} \left[\frac{\xi^1(x)}{\zeta^1(x)} \right] , \quad (F.17)$$

que $\tilde{\epsilon}$ é o limite de integração em $\theta(z)$, para cada posição em x ; com isso, temos:

$$N^1 = \bar{N}^1 \int_{x_1^1}^{x_2^1} \int_0^{\theta_s^1(x)} \{ \xi^1(x) \cos \theta^1(z) - \zeta^1(x) \}^{\alpha} d\theta dx , \quad (F.18)$$

$$W_T^1 = 2\bar{W}_T^1 \int_{x_1^1}^{x_0^1} \left\{ \int_{0_s^1}^{\theta_s^1(x)} \left[[\xi^1(x) \cos \theta^1(z)]^2 - [\zeta^1(x)]^2 \right] d\theta \right\} dx .$$

(F.19)

Note que a (F.18) já é a Eq. (3.34c); em (F.19), por simplicidade vamos omitir os supra-índices e as variáveis, e escrever a expressão entre chaves como:

$$I_\theta = \int_0^{\theta_s} (\xi^2 \cos^2 \theta - \zeta^2) d\theta .$$

Usando a expressão:

$$\int \cos^2 y dy = \frac{1}{2} (y + \sin y \cdot \cos y)$$

temos:

$$\begin{aligned} I_\theta &= \frac{1}{2} [\xi^2 (\theta_s + \sin \theta_s \cdot \cos \theta_s) - 2\zeta^2 \theta_s] \\ &= \frac{1}{2} [\theta_s (\xi^2 - 2\zeta^2) + \xi^2 \sin \theta_s \cdot \cos \theta_s] . \end{aligned}$$

De (F.17),

$$\cos \theta_s = (\zeta/\xi) ,$$

$$\sin \theta_s = \sqrt{1 - (\zeta/\xi)^2} = (\sqrt{\xi^2 - \zeta^2})/\xi ,$$

donde:

$$I_\theta = \frac{1}{2} [\theta_s (\xi^2 - 2\zeta^2) + \zeta (\xi^2 - \zeta^2)^{1/2}] .$$

Finalmente, voltando esta em (F.19).

$$W_T^1 = \bar{W}_T^1 \int_{x_1^1}^{x_e^1} \{ \theta_s(x) \{ [\xi^1(x)]^2 - 2[\zeta^1(x)]^2 \} + \zeta^1(x) \{ [\xi^1(x)]^2 - [\zeta^1(x)]^2 \}^{1/2} \} dx, \quad (F.20)$$

que é a Eq. (3.35c).

APÊNDICE C

RELAÇÃO ENTRE δa E \vec{F}_c

Combinando as expressões (2.40), (3.2a) e (3.5a) para os casos sem e com rotação, temos, respectivamente,

$$\mu_0 p^0 = 2(a^0)^2 (\psi^0)^2, \quad (G.1)$$

$$\mu_0 p^1 = 2(a^1)^2 (\psi^1)^2 + b^1 r^2 \psi^1; \quad (G.2)$$

usando a Eq. (3.43) e escrevendo as expressões acima sobre o eixo magnético:

$$\mu_0 p_m^0 = 2(a^0)^2 \psi_m^2 \quad (\text{em } r = r_m^0),$$

$$\mu_0 p_m^1 = 2(a^1)^2 \psi_m^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \rho_m^1 \omega^2 (r_m^1)^2 \quad (\text{em } r = r_m^1)$$

onde também já supomos a conservação do fluxo poloidal máximo. Supondo, em 1ª aproximação, que $p_m^0 = p_m^1$, e usando a definição (2.45) para a força centrífuga, temos:

$$2(a^0)^2 \psi_m^2 = 2(a^1)^2 \psi_m^2 + \frac{1}{2} \mu_0 r_m^1 v^1$$

ou:

$$(a^1)^2 = (a^0)^2 - \frac{1}{4} \frac{\mu_0 r_m^1 v^1}{\psi_m^2}.$$

Fazendo $a^1 = a^0 + \delta a$ e supondo $\delta a \ll a^0$, temos:

$$(a^0)^2 + 2(a^0)(\delta a) = (a^0)^2 - \frac{1}{4} \frac{\mu_0 r_m^1 v^1}{\psi_m^2}$$

donde:

$$\frac{\delta a}{a^0} \approx -\frac{1}{4} \frac{r_m^1 F_m^1}{2(a^0)^2 \psi_m^2 / \mu_0} .$$

Usando a expressão (G.1):

$$\frac{\delta a}{a^0} \approx -\frac{1}{4} \frac{F_m^1}{(P_m^0 / r_m^1)} ; \quad (G.3)$$

mas como estamos supondo $P_m^0 \approx P_m^1$, podemos escrever:

$$\frac{P_m^0}{r_m^1} \approx \frac{P_m^1}{r_m^1} \approx \left(\frac{\partial P^1}{\partial r} \right)_m . \quad (G.4)$$

Por outro lado, da expressão (G.2):

$$\mu_0 \frac{\partial p^1}{\partial z} = [4(a^1)^2 \psi^1 + b^1 r^2] \frac{\partial \psi^1}{\partial z} ,$$

e, usando a condição de contorno (3.33c),

$$\left(\frac{\partial p^1}{\partial z} \right)_m = 0 .$$

Então:

$$(\vec{V}_p)_m = \left(\frac{\partial p^1}{\partial r} \right)_m \hat{r} + \left(\frac{\partial p^1}{\partial z} \right)_m \hat{z} = \left(\frac{\partial p^1}{\partial r} \right)_m \hat{r} ;$$

combinando esta com a (G.4),

$$\frac{P_m^0}{r_m^1} \approx |(\vec{V}_p^1)|_m .$$

Voltando esta expressão em (G.3):

$$\frac{\delta a}{a^0} = -\frac{1}{4} \left[\frac{F_c}{V_p} \right]_m ,$$

onde convém lembrar que agora o índice "m" indica o valor sobre o novo eixo magnético, localizado em $r = r_m^1$, $z = 0$. Também, na Eq. (G.4) ressaltamos que, no equilíbrio com rotação, $p^1(r,z) \neq p^1(\psi^1)$, de acordo com a análise do jacobiano efetuada na Eq. (2.34); ou seja, $p^1(r,z)$ não assume o seu valor máximo em $r = r_m^1$, $z = 0$ (onde $\psi^1(r,z)$ é máximo), e então a derivada $(\partial p^1 / \partial r)_m$ é diferente de zero. Igualmente, se se substituíssemos, de acordo com a nossa suposição, p^1 por $p^0 = p^0(\psi^0)$, esta derivada continuaria dando um valor não-nulo, uma vez que $\psi^0(r,z)$ — e portanto $p^0(\psi^0)$ — tem o seu máximo em $r = r_m^0$ ($\neq r_m^1$), $z = 0$.

REFERÊNCIAS

1. Miyamoto, K., "Plasma Physics for Nuclear Fusion", MIT Press, Mass. (1980), chap. 1.
2. Kapitza, P.L., *Rev. Mod. Phys.* 51 (1979) 417.
3. Krall, N.A. and Trivelpiece, A.W., "Principles of Plasma Physics", McGraw-Hill Kōgakusha, Tokyo (1973), chap. 1.
4. Sethian, J.D. *et al*, *Phys. Fluids* 21 (1978) 1227.
5. Steinhauer, L.C., *Phys. Fluids* 24 (1981) 328.
6. Armstrong, W.T. *et al*, *Phys. Fluids* 24 (1981) 2068.
7. Hagenson, R.L. and Krakowski, R.A., in Proc. 3rd Symp. on the Phys. and Techn. of CT in the Mag. Fus. Energy Program, LANL, Los Alamos, (1980), p. 8.
8. Nogi, Y. *et al*, *ibid'*, p. 109.
9. Sakanaka, P.H. *et al*, IFGW/Unicamp, a ser apresentado na seção de painéis durante a 35ª Reunião Anual da SBPC (Julho-1983), Belém, PA.
10. Haines, M.G., *Adv. Phys.* 14 (1965) 167.
11. Hazeltine, R.D., *Phys. Fluids* 17 (1974) 961.
12. Bell, M.G., *Nuc. Fusion* 19 (1979) 33.
13. Wilcox, J.M., *Rev. Mod. Phys.* 31 (1959) 1045.
14. Suckewer, S. *et al*, *Phys. Rev. Lett.* 43 (1979) 207; *Nuc. Fusion* 21 (1981) 1301.
15. Stix, T.H., *Plasma Phys.* 14 (1972) 367.
16. Equipe TFR, in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research" (Proc.8th Int.Conf.,Brussels,1980) vol.II, IAEA, Vienna (1981) 547.
17. Cordey, J.G., in "Physics of Plasmas Close to Thermonuclear Conditions" (Proc.Int.School of Plasma Physics,Varena,1979) vol.I, CEC, Brussels (1980) 359.
18. Goldston, R.J., *ibid'*¹⁷, vol.II, p. 535.

19. Sudan, R.N. and Rosenbluth, M.N., *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976) 972;
Phys. Fluids 22 (1979) 282.
20. Granik, A.T., *J. Plasma Phys.* 24 (1980) 213.
21. Ludwig, G.O., *Plasma Phys.* 23 (1981) 303.
22. Kappraff, J. et al., *J. Plasma Phys.* 25 (1981) 111.
23. Freidberg, J.P. and Pearlstein, I.D., *Phys. Fluids* 21 (1978) 1207.
24. Spies, G.O. and Hellsten, T.A.K., *Phys. Fluids* 23 (1980) 2328.
25. Stix, T.H., *Phys. Fluids* 16 (1973) 1922.
26. Wheeler, G.M. and Pyle, R.V., *Phys. Fluids* 16 (1973) 1917.
27. Sudan, M.N. and Kaw, P.K., *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981) 575.
28. Hammer, J.H., *Nuc. Fusion* 21 (1981) 488.
29. Eberhagen, A. and Grossmann, W., *Z. Physik* 248 (1971) 130.
30. Aso, Y. et al., *Nuc. Fusion* 22 (1982) 843.
31. James, B.W. and Simpson, S.W., *Plasma Phys.* 18 (1976) 289; 20 (1978) 759.
32. Bonnevier, B., *Plasma Phys.* 13 (1971) 763.
33. Requin, G. and Samain, A., in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research" (Proc. 8th. Int. Conf., Brussels, 1980) vol. I, IAEA, Vienna (1981) 755.
34. Goedbloed, J.P., "Lecture Notes on Ideal MHD", IFGW/Unicamp, Campinas (1979), chap. 3.
35. Freidberg, J.P., *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982) 801.
36. Sakanaka, P.H., "Modern Plasma Physics", IAEA-SMR-61/3, Vienna (1981).
37. Thompson, W.B., "An Introduction to Plasma Physics", Addison-Wesley, Mass. (1964), chap. 4, §4.5.
38. Shafranov, V.D., in "Reviews of Plasma Physics", vol. 2, edited by M.A. Leontovich, Consultants Bureau, N.Y. (1966), p. 103.
39. Solov'ev, L.S., *Sov. Phys.-JETP* 26 (1968) 400.
40. Mukhovatov, V.S. and Shafranov, V.D., *Nuc. Fusion* 11 (1971) 605.
41. Callen, J.D. and Dory, R.A., *Phys. Fluids* 15 (1972) 1523.

42. Maschke, E.K., *Plasma Phys.* 15 (1973) 535.
43. Suzuki, Y., *Nuc. Fusion* 13 (1973) 369; 14 (1974) 354.
44. Pfirsch, D. and Rebban, E., *Nuc. Fusion* 14 (1974) 541.
45. Oshiyama, H. and Fukutani, Y., *Nuc. Fusion* 14 (1974) 193.
46. Yoshikawa, S., *Phys. Fluids* 17 (1974) 178.
47. Chu, M.S. *et al.*, *Phys. Fluids* 17 (1974) 1183.
48. Pantuso Sudano, J., *Phys. Fluids* 17 (1974) 1915.
49. Mazzucato, E., *Phys. Fluids* 18 (1975) 536.
50. Lai, C.S. and Verleun, M., *Phys. Fluids* 19 (1976) 1066.
51. Okada, O., *Phys. Fluids* 19 (1976) 2034.
52. Cenacchi, G. *et al.*, *Nuc. Fusion* 16 (1976) 451.
53. De Menna, L., *Nuc. Fusion* 17 (1977) 455.
54. Morikawa, G.K. *et al.*, *Phys. Fluids* 12(1969)1648; 13(1970)491; 14(1971)781.
55. Rosenbluth, M.N. and Bussac, M.N., *Nuc. Fusion* 19 (1979) 489.
56. Okabayashi, M. and Todd, A.M.M., *Nuc. Fusion* 20 (1980) 571.
57. Jardin, S.C., PPPL Report 1861 (January, 1982).
58. Goldenbaum, G.C., Maryland Univ. Plasma Preprint PL 82-053 (May, 1982)
59. Bateman, G., "MHD Instabilities", MIT Press, Mass. (1978), chap.4, §4.4 .
60. Maurer, W.A., "Cálculo Diferencial e Integral", vol.3, Edgard Blücher, S.P. (1968), cap. 7, §3.2 .
61. Grad, H. and Rubin, H., in Proc. 2nd Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, vol. 31, United Nations, Genova (1958), 190.
62. Shafranov, V.D., *Sov. Phys.-JETP* 33 (1958) 545; 37 (1960) 775.
63. Ferraro, V.C.A., *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 97 (1937) 458.
64. Allen, J.E. *et al.*, *Plasma Phys.* 18 (1976) 143.
65. Linford, R.K. *et al.*, in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research" (Proc.7th Int.Conf., Innsbruck, 1978) vol.II, IAEA, Vienna(1979)447.
66. Abramowitz, M., in "Handbook of Mathematical Functions", edited by M. Abramowitz and I.A.Stegun, Dover Pub., N.Y. (1970), chap. 14.

67. Barnett, A.R. *et al*, *Comp. Phys. Comm.* 8 (1974) 377.
68. Weitzner, H., *Phys. Fluids*: 20 (1977) 384.
69. Kaleck, A. *et al*, in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research"(Proc.3rd Int.Conf.,Novosibirski,1968)vol.II,(AEA,Vienna(1969)581.
70. O método de Simpson é largamente abordado em todos os livros de Cálculo Numérico; uma referência bastante didática é: McCormick, J.M. and Salvadori, M.G., "Numerical Methods in Fortran", Prentice-Hall, Inc., N.J. (1964), §3.3 .
71. Bodin, H.A.B. *et al*, *Nuc. Fusion Suppl. Pt. 2* (1962) 521.
72. Morozov, A.I. and Solov'ev, L.S., in "Reviews of Plasma Physics", vol 2, edited by M.A.Leontovich, Consultants Bureau, N.Y. (1966), p.1 .
73. Maschke, E.K. and Perrin, H., *Plasma Phys.* 22 (1980) 579.