

**Análise de Estabilidade e Controle
de Sistemas Lineares Incertos
por Funções de Lyapunov Dependentes de Parâmetros**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Domingos Cândido Wong Ramos
Engenheiro Eletricista - FEEC/UNICAMP
Mestre em Engenharia Elétrica - FEEC/UNICAMP

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** — FEEC/UNICAMP

em 14 de Abril de 2003 perante a Banca Examinadora

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres	FEEC/UNICAMP (Orientador)
Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri	DAS/UFSC
Profa. Dra. Vilma Alves de Oliveira	DEE/EESC/USP
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Maurício Carvalho de Oliveira	FEEC/UNICAMP

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por Domingos C. W. Ramos
e aprovada pela Comissão
Julgada em 14 / 04 / 2003
Pedro Luis Peres
Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	Be
Nº CHAMADA	Unicamp
	R147a
V	EX
TOMBO BCI	55760
PROC.	16-124103
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	17/09/03
Nº CPD	

CM00189203-5

Bibid. 30165

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R147a

Ramos, Domingos Cândido Wong

Análise de estabilidade e controle de sistemas lineares incertos por funções de Lyapunov dependentes de parâmetros / Domingos Cândido Wong Ramos.-- Campinas, SP:[s.n.], 2003.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria do controle. 2. Liapunov, Funções de.
3. Estabilidade. 4. Sistemas Lineares.
I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres, pela sublime orientação e paciência.

À todos que direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente contribuíram para a concretização deste trabalho.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Resumo

Este trabalho trata da obtenção de condições suficientes de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos (incerteza politópica), tanto contínuos quanto discretos no tempo, através de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMI's — Linear Matrix Inequalities). As condições de estabilidade robusta são usadas diretamente na determinação de domínios de estabilidade dos sistemas lineares incertos.

O problema de estabilização robusta, via realimentação de estados, também é tratado através da parametrização convexa da solução da equação de Lyapunov, no contexto de sistemas lineares com controladores que variam com os parâmetros, usando como ponto de partida as condições suficientes de estabilidade robusta estabelecidas neste trabalho. Adicionalmente, a determinação de domínios de não fragilidade de controladores (em casos de realimentação de estática de estados ou da saída, e realimentação dinâmica de saída) é ilustrada.

Tais condições suficientes de estabilidade robusta também são exploradas, em conjunto com os algoritmos genéticos (usados apenas como ferramentas de busca no universo de parâmetros do controlador), na obtenção de controladores robustos, trabalhando diretamente sobre o espaço dos parâmetros do controlador e permitindo a imposição de restrições de estrutura sobre os mesmos. Finalmente, a síntese de controladores que variam linearmente com os parâmetros incertos também é apresentada como uma extensão da aplicação da abordagem que envolve algoritmos genéticos.

Abstract

This work deals with the study of sufficient robust stability conditions for uncertain linear systems (polytopic uncertainty), in both continuous and discrete-time, using parameter dependent Lyapunov functions and Linear Matrix Inequalities (LMI's). The robust stability conditions are directly used to determine the stability domain of uncertain linear systems.

The state feedback stabilization problem is also treated through the convex parametrization of the solution of the associate Lyapunov equation, in the context of linear parameter varying systems, using as starting point the sufficient robust stability conditions obtained in this work. Additionally, the determination of the non-fragile stability domains for the controllers (static state or output feedback, and dynamic output feedback) is illustrated.

Those sufficient robust stability conditions are also exploited, in conjunction with genetic algorithms (here, used only as a search tool) to compute robust controllers, searching directly in the parameter domain of the controller, thus allowing the inclusion of additional controller structure constraints. Finally, the synthesis of LPV controllers is also presented as an extension of the combined robust stability conditions and genetic algorithms approach.

Sumário

1	Introdução Geral	1
2	Estabilidade Robusta	5
2.1	Estabilidade quadrática e domínio de estabilidade	6
	Artigo: Cálculo de domínio de estabilidade quadrática para sistemas lineares	7
2.1.1	Introdução	7
2.1.2	Definição do Problema	8
2.1.3	Condições Para Estabilidade Quadrática	10
2.1.4	Algoritmos	10
2.1.5	Exemplos	14
2.1.6	Conclusão	15
2.2	Estabilidade robusta de sistemas contínuos	16
	Artigo: An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems	18
2.2.1	Introduction	18
2.2.2	Robust Stability Condition	19
2.2.3	Maximum Stability Domain	21
2.2.4	Examples	22
2.2.5	Conclusion	23
	Artigo: An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems	24
2.2.6	Introduction	25
2.2.7	Robust Stability Condition	25
2.2.8	Maximum Stability Domain	27
2.2.9	Algorithm	28
2.2.10	Examples	31
2.2.11	Conclusion	33
2.3	Estabilidade robusta de sistemas discretos	34
	Artigo: A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems	35
2.3.1	Introduction	35

2.3.2	Robust Stability Condition	36
2.3.3	Examples	39
2.3.4	Conclusion	43
2.4	Desempenho numérico da estabilidade robusta	44
	Artigo: Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares	45
2.4.1	Introdução	45
2.4.2	Preliminares	47
2.4.3	Condições para Estabilidade Robusta	48
2.4.4	Exemplos	51
2.4.5	Conclusão	54
3	Síntese e Domínio de Estabilidade de Controladores	57
3.1	Síntese de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares	59
	Artigo: Robust parameter-dependent state-feedback controllers for linear uncertain systems	60
3.1.1	Introduction	60
3.1.2	Continuous-time Systems	61
3.1.3	Discrete-time Systems	64
3.1.4	Examples	67
3.1.5	Conclusion	69
3.2	Síntese de controle robusto usando algoritmo genético	71
	Artigo: Robust control synthesis via a genetic algorithm and LMIs	72
3.2.1	Introduction	72
3.2.2	Robust Stability Condition	75
3.2.3	Feasible Solution Search with a Genetic Algorithm	78
3.2.4	Extension to LPV Control	79
3.2.5	Examples	79
3.2.6	Conclusion	82
3.3	Domínio de estabilidade não-frágil de controladores robustos	83
	Artigo: Maximum non-fragile stability domains for robust control gains	84
3.3.1	Introduction	84
3.3.2	Stability Region Computation: Problem Formulation	85
3.3.3	Maximum Domain Determination	88
3.3.4	Examples	91
3.3.5	Conclusion	93
4	Conclusão Geral	95
	Bibliografia	97

Lista de Figuras

2.1	Ilustração do algoritmo (dois parâmetros): max-sym é o domínio simétrico máximo, max-unf é o domínio não simétrico infactível e max-nonsym é o domínio não simétrico factível máximo determinado pelo algoritmo.	14
2.2	Autovalores de $A + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ para α dentro do domínio de estabilidade quadrática não simétrico – Exemplo 3.	16
2.3	Eigenvalues of the uncertain system described by the vertices given by (2.18) (combined two-by-two).	24
2.4	Eigenvalues of $A_0 + \alpha E$ given in (2.35) for $\alpha \in (-1, 1)$	32
2.5	Eigenvalues of the convex combination of ρA_1 and ρA_2 for $\rho_{qs} = 1.0$ (Δ , $r_{qs} = 0.5070$ dashed), $\rho = 1.2871$ (\circ , $r = 0.6526$ dotted) and $\rho_{rs} = 1.9497$ ($*$, $r_{rs} = 0.9886$).	40
2.6	Eigenvalues of the convex combination of $\rho_{rs}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ taken pair-by-pair. . .	41
2.7	Eigenvalues of $A_0 + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2$ for the symmetric (left) and non-symmetric (right) estimated stability domains.	42
2.8	Complexidade numérica relativa ER/EE em função do número de estados n	52
2.9	Complexidade numérica relativa ER/EE em função do número de vértices N	53
2.10	Número de politopos estáveis identificados pelos critérios EQ (alto), EE (meio) e ER (baixo), para $2 \leq n \leq 7$ (abscissas) e $2 \leq N \leq 7$ (barras verticais, $N = 2$ à esquerda).	54
2.11	Autovalores das combinações dois-a-dois dos vértices dados em (2.62).	55
3.1	Eigenvalues of the closed-loop uncertain system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ (continuous-time case). The eigenvalues of the system at the vertices are represented by squares ($\xi_1 = 1$) and circles ($\xi_1 = 0$).	68
3.2	Nonlinear behavior of the elements of the parameter-dependent state feedback gain (continuous-time case).	69
3.3	Eigenvalues of the closed-loop uncertain system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ (discrete-time case). The eigenvalues of the system at the vertices are represented by squares ($\xi_1 = 1$) and circles ($\xi_1 = 0$).	70
3.4	Nonlinear behavior of the elements of the parameter-dependent state feedback gain (discrete-time case).	70

3.5	Genetic algorithm performance for the search of a robust control gain K with $m = 1$ (mean value is indicated by \circ and variance by \cdot).	80
3.6	Genetic algorithm performance for the search of an LPV robust control gain $K(\xi)$ with $m = 1$ (mean value is indicated by \circ and variance by \cdot).	81
3.7	Elements of the LPV state feedback gain (second example).	82
3.8	Eigenvalues of $A + BK$ for $A = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$, with $\alpha \in [0, 1]$, A_1, A_2 given by (3.62), and for K such that $K_m \preceq K \preceq K_M$ with K_m, K_M given by (3.65).	92
3.9	Pole location of the discrete-time system $A + BK$ for K such that $K_m \preceq K \preceq K_M$ with K_m, K_M given by (3.66).	94

Lista de Tabelas

2.1	Symmetric stability domains for the first example.	22
2.2	Non-symmetric stability domains for the first example.	23
2.3	Stability domains for the system given by (2.36).	33
2.4	Complexidade numérica dos critérios de estabilidade em função do número de estados n e do número de vértices N (a complexidade é proporcional a K^3L).	51
2.5	Número de politopos estáveis identificados pelos testes EQ (estabilidade quadrática), EE (estabilidade estendida) e ER (estabilidade robusta) quando aplicados a 1000 politopos estáveis para $2 \leq n \leq 7$, $2 \leq N \leq 7$	53

Capítulo 1

Introdução Geral

A estabilidade é uma das propriedades mais desejáveis de um sistema, e métodos de análise de estabilidade no espaço do tempo, no espaço de frequência e no espaço de estados, são usados para inferir sobre a mesma: polinômio característico, critério de Routh-Hurwitz, de Nyquist, de Nichols, de Kharitonov, e funções de Lyapunov quadráticas, entre outros [1], [10], [15], [42].

Neste trabalho, o problema de estabilidade de sistemas lineares a tempo contínuo e a tempo discreto, respectivamente descrito por equações diferenciais e por equações a diferenças, é tratado no espaço de estados e analisado usando funções de Lyapunov do tipo $v(x) = x'Px$, com a matriz de Lyapunov $P = P' > \mathbf{0}$, tanto para matrizes P constantes como para matrizes P dependentes de parâmetros, isto é, $P = P(\alpha)$ com α associado aos parâmetros incertos do sistema. Como metodologia, utilizam-se as desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMI's — *Linear Matrix Inequalities*).

Para um sistema linear precisamente conhecido, i.e. com a matriz de dinâmica do sistema A conhecida, a existência de uma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ de Lyapunov, tal que

$$A'P + PA < \mathbf{0} ,$$

no caso de sistemas a tempo contínuo, ou

$$A'PA - P < \mathbf{0} ,$$

no caso de sistemas a tempo discreto, garante a estabilidade do mesmo, pois $v(x) = x'Px > 0$ e $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$.

Mas, em geral, modelos lineares de sistemas são obtidos de aproximações de sistemas reais não-lineares, válidas para um determinado ponto de operação. Fora desse ponto de operação, a aproximação linear pode não ser mais válida. De maneira geral, um sistema possui parâmetros que variam com o ponto de operação, ou não são precisamente conhecidos. Além disso, outras imprecisões, como dinâmicas não modeladas, podem não estar contempladas em um modelo linear com matriz precisamente conhecida.

Quando o domínio de variação dos parâmetros do sistema é conhecido, pode-se definir um politopo de incerteza paramétrica de N vértices e escrever genericamente a matriz do sistema em

função desse politopo, através da combinação convexa dos vértices do politopo. Dado que os parâmetros de um sistema não são, em geral, precisamente conhecidos ou variam com o tempo, o conceito de estabilidade ganha um caráter de robustez.

O problema de avaliar a estabilidade de um sistema com incertezas nos parâmetros, neste caso, envolve formulações que, quando satisfeitas, garantam a estabilidade da planta, dentro do domínio de variação paramétrica politópica. Alguns critérios usados são o teorema de Kharitonov e a análise através de funções de Lyapunov [10], [14].

Uma abordagem bastante explorada, baseada em análise de Lyapunov, é o conceito de estabilidade quadrática que busca, através da existência de uma mesma matriz de Lyapunov solução $P = P' > \mathbf{0}$ para um problema de factibilidade, garantir a estabilidade robusta do sistema em face de variações paramétricas dentro de um politopo de incerteza. Assim, se uma matriz de Lyapunov $P = P' > \mathbf{0}$, tal que

$$A_i'P + PA_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N,$$

quando o sistema é a tempo contínuo, ou

$$A_i'PA_i - P < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N,$$

quando o sistema é a tempo discreto, então qualquer matriz pertencente ao politopo de incerteza \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \right\}$$

é assintoticamente estável.

O conceito de estabilidade quadrática, é adequado para analisar o problema de estabilidade de um sistema com incertezas, não importando a taxa de variação dos parâmetros. Entretanto, no caso de baixas taxas de variação de parâmetros, a análise pode ser bastante conservadora. Mais ainda, por depender apenas de uma matriz de Lyapunov P para testar a factibilidade do conjunto de desigualdades matriciais (uma LMI para cada vértice do politopo de incerteza), a quantidade de graus de liberdade é sensivelmente reduzida e, em certos casos, isso pode contribuir para o conservadorismo.

Outras alternativas têm sido investigadas para ampliar o alcance da análise quadrática, especialmente por introduzir mais graus de liberdade, como forma de diminuir o conservadorismo. Estes resultados incluem o conceito de estabilidade estendida [17], análise bi-quadrática [76], [77], funções de Lyapunov quadráticas por partes [66], e também funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [25], [27], [38].

Neste trabalho, foram pesquisadas condições suficientes de estabilidade robusta, baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, e descritas em termos de LMI's. As condições suficientes para estabilidade robusta obtidas, tanto para sistemas a tempo contínuo quanto para sistemas a tempo discreto, reduzem sensivelmente o conservadorismo e têm a análise quadrática como um caso particular. A matriz de Lyapunov $P(\alpha)$, é obtida da combinação linear de um

conjunto de matrizes $P_i = P_i'$, uma para cada um dos N vértices do politopo de incerteza, solução de um problema de factibilidade, e assegura a estabilidade de qualquer matriz $A(\alpha)$ do sistema incerto, i.e.,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0$$

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i : A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < \mathbf{0},$$

ou

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i : A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < \mathbf{0},$$

caso o sistema seja a tempo contínuo ou a tempo discreto, respectivamente.

Estas condições de estabilidade robusta, usadas num procedimento iterativo, permitiram a determinação de domínios de estabilidade, no espaço de variação dos parâmetros, com resultados melhores que a análise quadrática e o critério de estabilidade estendida [64], [63], [65]. De particular interesse é o caso em que tanto a planta quanto o controlador (previamente projetado para atender a certos requisitos desempenho) são precisamente conhecidos mas o controlador está sujeito a variações nos seus parâmetros. Neste contexto, a questão da análise de fragilidade do controlador foi abordada (em casos de realimentação de estática de estados ou da saída, e realimentação dinâmica de saída), verificando o domínio de variação dos elementos do mesmo, em que se preserva a estabilidade do sistema em malha fechada.

Partindo das mesmas condições de estabilidade robusta, procedimentos de síntese para estabilização de sistemas incertos, via realimentação de estados, foram também investigados, visando reduzir o possível conservadorismo da abordagem quadrática [13], amplamente utilizada no projeto de controladores e filtragem robusta com critérios \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Na abordagem quadrática [13], o ganho é uma única matriz constante, parametrizada. O ganho estabilizante, obtido com a nova abordagem, é também parametrizado, mas dependente dos parâmetros (de forma não-linear).

No entanto, existem problemas de controle robusto para os quais não se possuem ferramentas eficazes de síntese. Neste contexto, condições de análise de estabilidade robusta menos conservadoras podem ser utilizadas em conjunto com alguma heurística de busca dos parâmetros do controlador. Assim, um procedimento alternativo de síntese, em que o controlador não é parametrizado, foi estudado. Neste caso, as condições suficientes de estabilidade robusta foram exploradas, em conjunto com algoritmos genéticos, para a obtenção direta do controlador no espaço dos elementos do mesmo. Tal procedimento tem como vantagem adicional a inclusão de restrições estruturais na matriz do controlador.

Vale ressaltar, no entanto, que não se procurou obter algoritmos genéticos especializados e otimizados para tratar o problema de síntese, senão usá-los apenas como ferramentas de exploração do domínio de variação dos elementos da matriz do controlador.

O trabalho está organizado como segue. No capítulo 2 mostra-se como, a partir da percepção do conservadorismo da análise quadrática na estimação de domínios de estabilidade de sistema com

incerteza politópica, são desenvolvidas novas condições de estabilidade robusta, tendo como base a análise de estabilidade de Lyapunov e a descrição por LMI's. A função quadrática possui uma matriz de Lyapunov construída a partir da combinação convexa de múltiplas matrizes de Lyapunov. Ilustra-se também como as novas condições suficientes para a estabilidade robusta melhoram os resultados da análise quadrática e estuda-se comparativamente a complexidade e eficiência numéricas das mesmas em relação a outras condições que buscam reduzir o conservadorismo.

Os resultados principais (novas condições suficientes de estabilidade robusta para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto) e suas aplicações são apresentados na forma de artigos, já publicados, transcritos para o corpo do capítulo 2.

O capítulo 3 apresenta alguns resultados da aplicação direta das condições de estabilidade discutidas no capítulo 2 na síntese de controladores estabilizantes para plantas sujeitas à incerteza paramétrica politópica. Não se procura, em momento algum, tratar do problema de síntese como um problema de otimização (uma possível extensão em trabalhos futuros). No intuito de sintetizar controladores estabilizantes, também são explorados algoritmos genéticos, sem preocupação quanto à eficiência dos mesmos, mas apenas como ferramentas exploratórias do espaço dos parâmetros do controlador.

Um capítulo contendo as conclusões gerais e possíveis extensões dos resultados obtidos encerra o trabalho.

Capítulo 2

Estabilidade Robusta

Neste capítulo são apresentados artigos, publicados em revistas e em congressos, que tratam da estabilidade tanto de sistemas a tempo contínuo como para sistemas a tempo discreto.

De forma sucessiva, mostra-se primeiramente como o conceito de estabilidade quadrática pode ser usado para estimar o domínio de estabilidade de um sistema linear não precisamente conhecido, i.e., quanto os seus parâmetros poderiam variar a partir de um ponto de operação ou trajetória definida, de forma conjunta, e ainda ser verificada a estabilidade do mesmo. Tal estimativa do domínio de estabilidade é feita através de um algoritmo iterativo que envolve, a cada etapa, um teste de factibilidade de um conjunto de desigualdes matriciais lineares, uma para cada vértice do politopo de incerteza.

Em seguida, é definida uma nova condição suficiente para a estabilidade robusta de sistemas a tempo contínuo, a qual é baseada numa função quadrática construída a partir de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros. Tal condição de estabilidade robusta dá um novo impulso à estimativa dos domínios de estabilidade, uma vez que reduz o conservadorismo da abordagem por uma mesma função quadrática com matriz de Lyapunov fixa. Analogamente, uma condição suficiente para estabilidade robusta de sistemas a tempo discreto, menos conservadora, é desenvolvida no artigo seguinte.

Finalmente, no último artigo deste capítulo, é feita uma comparação numérica dos resultados obtidos pelos critérios de estabilidade robusta, quadrática, e outro que procura também reduzir o conservadorismo (denominado estabilidade estendida). A complexidade numérica das LMI's envolvidas em cada tipo de teste de estabilidade é analisada.

2.1 Estabilidade quadrática e domínio de estabilidade

Nesta seção é apresentado o artigo *Cálculo de Domínio de Estabilidade para Sistemas Lineares* [62].

CÁLCULO DE DOMÍNIO DE ESTABILIDADE QUADRÁTICA PARA SISTEMAS LINEARES

DOMINGOS C. W. RAMOS E PEDRO L. D. PERES

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
DT/FEEC/UNICAMP - CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brasil
e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br

Resumo—Um procedimento simples e construtivo para a determinação de domínios não simétricos de estabilidade quadrática é apresentado neste trabalho. O procedimento numérico é baseado em algoritmos de busca unidimensional e testes de factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares. São tratados tanto o caso de sistemas contínuos quanto o de sistemas discretos no tempo.

Abstract— A simple and constructive way to establish maximum nonsymmetric quadratic stability domains for linear systems is provided in this paper. The numerical procedure is based on unidimensional search and Linear Matrix Inequalities feasibility tests. Both continuous-time and discrete-time cases are addressed.

Key Words— Stability Domain; Linear Systems; Quadratic Stability; Linear Matrix Inequalities.

2.1.1 Introdução

Nos últimos anos, muitos autores têm investigado o problema do cálculo de domínios de estabilidade de sistemas descritos no espaço de estados [30], [48], [80], [81], [82], [86].

O uso de funções de Lyapunov é certamente a principal abordagem para este tipo de análise já que os limitantes do domínio de estabilidade podem ser obtidos em função da matriz de Lyapunov associada ao sistema e das direções de perturbação dadas [16], [51], [52], [53], [75]. Como é bem conhecido, o uso de uma mesma função de Lyapunov é apenas uma condição suficiente para a estabilidade robusta. Denominada estabilidade quadrática na literatura (veja, por exemplo, [9]), a análise de estabilidade baseado numa função de Lyapunov pode ser usada para a obtenção de ganhos de realimentação de estados [8], [13], especialmente quando parâmetros incertos variantes no tempo são considerados.

Entretanto, domínios de estabilidade calculados através de funções de Lyapunov, além de serem conservativos, podem requerer tanto esforço computacional quanto os procedimentos de programação convexa usados para testar a factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs — do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) [14]. Atualmente, a factibilidade de uma LMI pode ser verificada com grande eficiência através do método de pontos interiores [28]. Além disso, um conjunto de perturbações estruturadas afetando a planta nominal não pode ser tratado adequa-

damente quando o domínio de estabilidade é obtido somente em termos das normas de matrizes ou valores singulares como acontece na maioria dos métodos existentes. Os testes de estabilidade baseados em LMIs podem explorar adequadamente a estrutura de incertezas, permitindo em alguns casos a obtenção de domínios exatos de estabilidade quadrática.

O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento numérico para a determinação explícita de domínios de estabilidade quadrática simétricos e também domínios não simétricos para sistemas descritos no espaço de estados. São tratados tanto o caso contínuo quanto o discreto no tempo.

No caso de domínios de estabilidade quadrática simétricos, um único parâmetro pondera todas as perturbações. O volume do domínio de estabilidade é incrementado iterativamente através desse parâmetro seguindo um procedimento de busca unidimensional padrão, mantendo-se a estabilidade quadrática. A cada passo, são usadas ferramentas de programação convexa que testam a factibilidade de um conjunto de LMIs. Este procedimento converge para um ótimo global num número finito de passos (dentro de uma precisão estipulada).

Para domínios não simétricos de estabilidade quadrática, um procedimento iterativo é proposto. Primeiramente, obtém-se o máximo domínio simétrico de estabilidade quadrática. Em seguida, um domínio de estabilidade não simétrico é obtido pesquisando-se isoladamente cada direção de perturbação (geralmente inactível, pois caso contrário este é o domínio de estabilidade procurado). Finalmente, um procedimento heurístico é usado para incrementar cada lado do poliedro do domínio de estabilidade quadrática inicial, mantendo-se a factibilidade, dentro do domínio não simétrico inactível, até que se atinja o máximo domínio de estabilidade quadrática não simétrico em um número finito de passos (o volume do poliedro do domínio de estabilidade é usado como critério de parada).

A apresentação do trabalho é dividida da seguinte forma: primeiramente o problema a ser tratado é exposto na seção 2.1.2. Em seguida, a seção 2.1.3 apresenta as condições de estabilidade quadrática no espaço paramétrico. A seção 2.1.4 contém a descrição dos algoritmos para a obtenção dos domínios de estabilidade quadrática simétrico e não simétrico. Finalmente, um conjunto de exemplos e a conclusão são apresentados.

2.1.2 Definição do Problema

O sistema linear a ser estudado é descrito pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\delta[x(t)] = \left(A + \sum_{i=1}^N \alpha_i E_i \right) x(t) \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz nominal do sistema, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ são matrizes dadas que representam as direções de perturbação e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ são constantes que definem o peso das perturbações permitidas. O operador $\delta[x(t)]$ indica $\dot{x}(t)$ para sistemas a tempo contínuo e $x(t+1)$ para sistemas a tempo discreto. A seguinte hipótese é assumida:

- A é estável.

Esta hipótese usual garante a existência de valores de $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ não todos nulos como solução [51],[52].

O objetivo deste trabalho é determinar o maior domínio dentro do qual a estabilidade quadrática é garantida, isto é, deseja-se estabelecer para cada direção de perturbação $E_i, i = 1, \dots, N$ os intervalos $[-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$ para os quais a estabilidade quadrática do sistema (2.1) é verificada

$$\forall \alpha_i \in [-\alpha_m^i, \alpha_M^i], i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

Note que a relação (2.2) define um hipercubo de 2^N vértices no espaço de parâmetros.

Assim, os sistema (2.1) pode ser analisado de maneira equivalente através do seguinte sistema

$$\delta[x(t)] = \mathbb{A}x(t) \quad (2.3)$$

onde \mathbb{A} é uma matriz incerta que pertence a um domínio poliedral convexo \mathcal{D} definido pelos seus $\kappa \triangleq 2^N$ vértices, isto é,

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbb{A} : \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{\kappa} \xi_j \mathbb{A}_j ; \sum_{j=1}^{\kappa} \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\} \quad (2.4)$$

Desta maneira, qualquer comportamento dinâmico do sistema (2.1) associado a uma matriz \mathbb{A} pode ser descrito pela combinação convexa dos vértices \mathbb{A}_j do politopo \mathcal{D} .

Cada vértice \mathbb{A}_j é determinado pela matriz nominal do sistema A somada a uma das 2^N combinações dos extremos dos intervalos $[-\alpha_m^i, \alpha_M^i], i = 1, \dots, N$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= A + \sum_{i=1}^N (-\alpha_m^i) E_i \\ \mathbb{A}_2 &= A + \alpha_M^1 E_1 + \sum_{i=2}^N (-\alpha_m^i) E_i \\ &\vdots \\ \mathbb{A}_\kappa &= A + \sum_{i=1}^N \alpha_M^i E_i \end{aligned}$$

Em outras palavras, o domínio \mathcal{D} constitui-se na casca convexa de todas as possíveis variações de parâmetros do sistema (2.1). Um caso particular de domínio de estabilidade quadrática de especial interesse é aquele que envolve um único parâmetro em sua definição, isto é, o domínio simétrico. Neste caso, considera-se que

$$\alpha_m^i = \alpha_M^i = \bar{\alpha}, i = 1, \dots, N$$

e deseja-se determinar o maior $\bar{\alpha}$ tal que o sistema (2.1) permaneça quadraticamente estável

$$\forall \alpha_i \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}], i = 1, \dots, N$$

2.1.3 Condições Para Estabilidade Quadrática

As condições de estabilidade quadrática para domínios poliedrais convexos, sistemas a tempo contínuo e tempo discreto, são apresentadas nos lemas 1 e 2 respectivamente. Essas condições permitem determinar os intervalos de parâmetros $[-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$, $i = 1, \dots, N$ para os quais a estabilidade quadrática do sistema (2.1) é verificada.

Lema 1: O sistema contínuo (2.3) é quadraticamente estável se e somente se existe $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbb{A}_j' P + P \mathbb{A}_j < \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, \kappa \quad (2.5)$$

Prova: Imediata. Como a desigualdade acima é uma LMI, a factibilidade em todo o domínio pode ser testada pela verificação apenas nos vértices do poliedro do espaço de parâmetros. Para verificar este fato, basta fazer a soma das expressões em cada vértice ponderadas por ξ_j e observar que P é uma matriz de Lyapunov para todo o domínio.

Lema 2: O sistema discreto (2.3) é quadraticamente estável se e somente se existe $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} P & \mathbb{A}_j P \\ P \mathbb{A}_j' & P \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, \kappa \quad (2.6)$$

Prova: Imediata, como no caso contínuo. Note que, usando complemento de Schur, a desigualdade acima é equivalente a

$$\mathbb{A}_j P \mathbb{A}_j' - P < \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, \kappa \quad (2.7)$$

Como os sistemas (2.3) e (2.1) são equivalentes, se as condições estabelecidas pelos lemas 1 e 2 forem verificadas, pode-se concluir que (2.1) é quadraticamente estável para quaisquer valores de α_i tais que

$$\alpha_i \in [-\alpha_m^i, \alpha_M^i], \quad i = 1, \dots, N$$

Essa condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática é apenas suficiente para garantir a estabilidade do sistema (2.1). Métodos menos conservativos, baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, têm sido recentemente estudados, mas a maioria desses métodos pressupõe que o sistema possui uma estrutura particular de variações paramétricas (por exemplo, $A = A_0 + \theta E$), não podendo ser aplicados em casos mais gerais (veja, para maiores detalhes, [26] e referências internas).

2.1.4 Algoritmos

Caso Simétrico

A seguir, descreve-se o algoritmo usado para determinar o domínio máximo de estabilidade quadrática simétrico, para uma planta nominal A perturbada, tanto para o caso de sistemas a tempo contínuo como para o caso de sistemas a tempo discreto.

Partindo do intervalo $[0, \alpha_{MAX}]$ busca-se iterativamente o valor de $\bar{\alpha}$, testando a factibilidade do domínio definido pela casca convexa de todos os vetores $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ do espaço de parâmetros, até que a variação em $\bar{\alpha}$ seja menor que uma precisão definida tol . O ótimo global é obtido num número finito de passos p dado por

$$p = 2 \log_2(\alpha_{MAX}/tol)$$

Dados tol e α_{MAX} , que define o domínio de busca (o hipercubo no interior do qual será pesquisado o domínio de estabilidade máximo), ou seja,

$$|\alpha_i| \leq \alpha_{MAX}, i = 1 \dots N$$

Begin

If

- O intervalo $[0, \alpha_{MAX}]$ é factível, então $\bar{\alpha} = \alpha_{MAX}$ fornece o intervalo de estabilidade quadrática procurado. **Pare!**

Else

- Defina: $\alpha_{lb} = 0$, $\alpha_{ub} = \alpha_{MAX}$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_{lb} + \alpha_{ub})$, $\Delta\bar{\alpha} = \alpha_{ub} - \alpha_{lb}$.

While $\Delta\bar{\alpha} \geq tol$

IF

- O intervalo $[0, \bar{\alpha}]$ é factível, então $\alpha_{lb} = \bar{\alpha}$

Else

- $\alpha_{ub} = \bar{\alpha}$

End % If

- $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_{lb} + \alpha_{ub})$

End % While

- $\bar{\alpha} = \alpha_{lb}$; $[0, \bar{\alpha}]$ é o intervalo de estabilidade quadrática máximo procurado.

End % If

End

Como trata-se da busca de um domínio simétrico, em torno do sistema nominal A , pode-se trabalhar unicamente com o intervalo $[0, \bar{\alpha}]$. É claro que, a cada teste de factibilidade, os vértices \mathbb{A}_j do poliedro de incertezas \mathcal{D} têm que ser determinados em função de $[-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]$.

O algoritmo apresentado baseou a busca unidimensional em $\bar{\alpha}$ em um procedimento de biseção; outros algoritmos poderiam ser empregados, como Fibonacci ou razão áurea, com desempenho final bastante similar.

Caso Não Simétrico

O algoritmo descrito a seguir determina o domínio de estabilidade quadrática não simétrico máximo para sistemas descritos como em (2.1), tanto para tempo contínuo como para tempo discreto. Primeiro, um domínio de estabilidade quadrática simétrico factível máximo é obtido (algoritmo anterior). Em seguida, o domínio factível é aumentado iterativamente até se atingir o domínio máximo de estabilidade quadrática não simétrico. Como trata-se de um procedimento heurístico, não há garantia de que o ótimo global seja atingido.

Dados tol , ε e α_{MAX} , que define o domínio de busca (o hipercubo no qual será pesquisado o domínio de estabilidade máximo), ou seja,

$$|\alpha_i| \leq \alpha_{MAX}, i = 1 \dots N$$

Begin

- Considerando uma direção E_i de cada vez, $\forall i = 1, \dots, N$, encontrar o domínio não simétrico máximo (possivelmente infactível) determinando os valores máximos de α_i ($\alpha_\ell = 0, \forall \ell \neq i$) tais que a estabilidade nessa direção seja verificada. O número de iterações usadas neste procedimento de busca unidimensional para cada α_i , de forma a obter o máximo domínio independente (**max-ind**), é dado por $2 \log_2(\alpha_{MAX}/tol)$, onde tol é a precisão adotada na busca unidimensional.

If

- O domínio composto pelos domínios independentes máximos de cada α_i (**max-ind**) é quadraticamente estável, então este é o domínio de estabilidade quadrática não simétrico máximo procurado. **Pare!**

Else

- Este domínio não factível (quanto à estabilidade quadrática) é denominado **max-unf**.
- Encontrar o domínio máximo de estabilidade quadrática simétrico (algoritmo anterior) – **max-sym**.

- Tome o domínio de estabilidade quadrática máximo inicial, **max-nonsym**, como sendo o domínio **max-sym** e defina ΔV (variação absoluta de volume de **max-nonsym**) como sendo o volume do hipercubo dado por **max-sym**.

While $\Delta V \geq \varepsilon$

- **Fase de refinamento** – aumentar, através de um procedimento heurístico, o domínio factível **max-nonsym**, testando a estabilidade quadrática. O procedimento heurístico compreende basicamente o seguinte: estabelecer uma ordem de pesquisa nas direções de perturbação priorizando aquelas que hipoteticamente apresentam as melhores possibilidades de aumento do volume do hipercubo dado por **max-nonsym** (observando a diferença entre **max-unf** e **max-nonsym**); pesquisar o máximo crescimento em cada direção mantendo a factibilidade do hipercubo (a cada vez que se testa a factibilidade de **max-nonsym**, incrementa-se o contador de iterações); quando todas as direções tiverem sido pesquisadas, prosseguir a busca do máximo crescimento factível verificando novamente todas as direções, de acordo com a ordem de pesquisa já estabelecida. Parar quando já não houver melhoria significativa no volume do hipercubo **max-nonsym** dentro da precisão definida ε e um número de iterações menor que um limitante superior especificado.

End % While

- O domínio de estabilidade quadrática não simétrico máximo, **max-nonsym**, é o domínio de estabilidade factível máximo obtido no laço While.

End % If

End

Alguns comentários sobre o algoritmo:

1. Note que o algoritmo do caso simétrico é usado para a obtenção de **max-sym**. O ótimo global é obtido num número finito de passos p que depende de α_{MAX} e tol .
2. No segundo algoritmo, existe uma fase de refinamento (laço While) da solução dada pelo primeiro algoritmo, baseada numa heurística. O número de total de iterações (atualizado sempre que se testa a factibilidade do domínio **max-nonsym**) depende de tal heurística, além das características do sistema e dos parâmetros α_{MAX} , tol e ε . A figura 2.1 ilustra a pesquisa do domínio de estabilidade no plano $\alpha_1 \times \alpha_2$ para um caso genérico com $N = 2$.

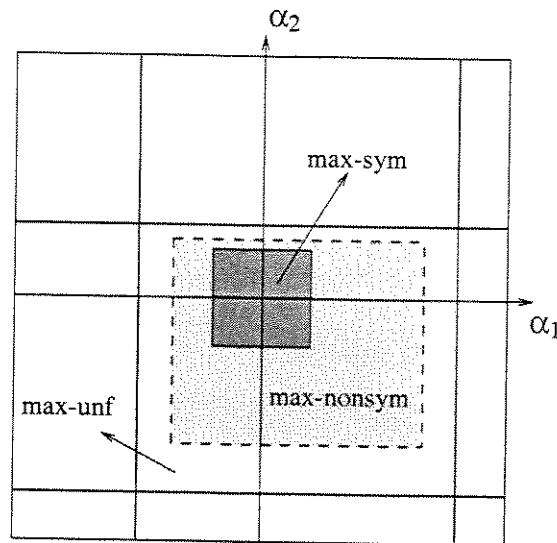


Figura 2.1: Ilustração do algoritmo (dois parâmetros): max-sym é o domínio simétrico máximo, max-unf é o domínio não simétrico inactível e max-nonsym é o domínio não simétrico factível máximo determinado pelo algoritmo.

2.1.5 Exemplos

Os exemplos aqui apresentados ilustram os resultados obtidos pelo procedimento proposto para determinar tanto o domínio simétrico quanto o domínio de estabilidade quadrática não simétrico. A determinação de tais domínios de estabilidade é feita no hipercubo definido por $|\alpha_i| \leq \alpha_{MAX} = 50$, com $tol = 1 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ conforme descrito nos algoritmos. Com esses valores, a fase de busca de domínio simétrico tem sempre $p = 25$ iterações.

Exemplo 1

Os dados deste exemplo foram obtidos do artigo de [53]; os mesmos também podem ser encontrados em [82] e outros artigos.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Na literatura, os valores obtidos para o domínio são: 0.4805 em [86] e [81]; 0.6575 em [82]; 0.8734 em [52] e 0.9745 em [53]. Usando o algoritmo proposto para determinar o domínio de estabilidade quadrática simétrico máximo obtém-se também o valor $\tilde{\alpha} = 0.9745$ em 25 iterações (valor este que coincide com o máximo obtido na literatura).

Não foi possível aumentar o domínio no caso não simétrico.

Exemplo 2

Considere A a matriz de um sistema contínuo e E_1 e E_2 as direções de perturbação dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O domínio de estabilidade simétrico máximo obtido é $|\alpha_i| \leq 0.1777, i = 1, 2$.

O seguinte domínio de estabilidade quadrática não simétrico máximo foi obtido (após 105 iterações na fase de refinamento):

$$\begin{bmatrix} -50 \\ -50 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.1799 \\ 0.3035 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Para o caso discreto, considere A a matriz do sistema e E_1 e E_2 as direções de perturbação dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1.4690 & -0.6917 & -1.3110 \\ 3.4573 & -2.0436 & -2.6117 \\ -1.3638 & 1.0790 & 0.7087 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O domínio de estabilidade simétrico máximo obtido é $|\alpha_i| \leq 0.2235, i = 1, 2$.

O seguinte domínio de estabilidade quadrática não simétrico máximo foi obtido (após 156 iterações na fase de refinamento):

$$\begin{bmatrix} -0.3217 \\ -0.3056 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.2235 \\ 0.2235 \end{bmatrix}$$

A figura 2.2 mostra os autovalores de $A + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ para vários pontos (α_1, α_2) do domínio máximo de estabilidade quadrática não simétrico obtido.

2.1.6 Conclusão

Neste trabalho foi proposto um procedimento para determinar o domínio de estabilidade quadrática simétrico (máximo global obtido num número finito de passos) e o domínio de estabilidade quadrática não simétrico máximo (sem garantia de convergência para o ótimo global). O método é baseado em busca unidimensional padrão e testes de factibilidade de um conjunto de LMIs. O procedimento pode ser aplicado para análise de domínio de estabilidade tanto para o caso de sistemas a tempo contínuo quanto a tempo discreto.

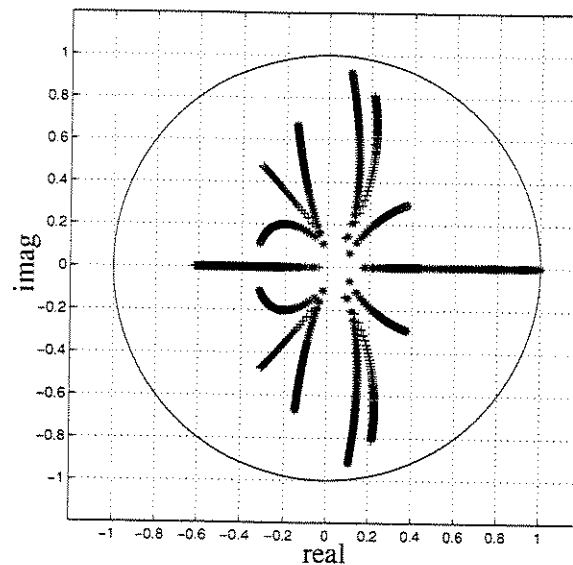


Figura 2.2: Autovalores de $A + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ para α dentro do domínio de estabilidade quadrática não simétrico – Exemplo 3.

2.2 Estabilidade robusta de sistemas contínuos

A seguir, são apresentados dois artigos já publicados. O primeiro, que trata da obtenção das condições suficientes de estabilidade robusta para sistemas incertos a tempo contínuo, intitula-se *An LMI Condition for the Robust Stability of Uncertain Continuous-time Linear Systems* [65].

O segundo artigo, *An LMI Approach to Compute Robust Stability Domains for Uncertain Linear Systems* [64], aborda extensão dos resultados de determinação do máximo domínio de estabilidade robusta de um sistema linear incerto, conforme já tratado na seção 2.1. Neste caso, usando as novas condições suficientes de estabilidade robusta num procedimento de busca unidimensional e teste de factibilidade de um conjunto de restrições, uma para cada vértice do politopo de incerteza convexo no qual varia a matriz de sistema A , descritas através de LMI's, os resultados obtidos melhoram a estimativa da análise quadrática.

Na seqüência, seguem os resumos dos artigos e a essência dos textos publicados.

- **Uma condição LMI para a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos a tempo contínuo — Resumo:**

Nesta nota é proposta uma nova condição suficiente para a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos a tempo contínuo com incertezas limitadas e convexas. Os resultados são baseados em desigualdades matriciais lineares formuladas nos vértices do politopo de incerteza, as quais fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que verifica a estabilidade de qualquer matriz pertencente ao domínio de incerteza. Uma forma simples

e construtiva para determinar domínios de estabilidade robusta pode ser formulada, através de procedimentos numéricos baseados em busca unidimensional e testes de factibilidade de desigualdades matriciais lineares.

- **Uma abordagem LMI para cálculo de domínios de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos a tempo contínuo — Resumo:**

Neste artigo é proposta uma forma simples e construtiva para determinar domínios de estabilidade robusta de sistema lineares incertos a tempo contínuo com incerteza politópica convexa.

Os resultados são baseados em condições suficientes de estabilidade formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares, as quais fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que verifica a estabilidade de qualquer matriz pertencente ao domínio de incerteza. Os procedimentos numéricos envolvidos são inteiramente baseados em busca unidimensional e testes de factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares.

AN LMI CONDITION FOR THE ROBUST STABILITY OF UNCERTAIN CONTINUOUS-TIME LINEAR SYSTEMS

DOMINGOS C. W. RAMOS AND PEDRO L. D. PERES

School of Electrical and Computer Engineering - University of Campinas
CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brazil
e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br

Abstract A new sufficient condition for the robust stability of continuous-time uncertain linear systems with convex bounded uncertainties is proposed in this note. The results are based on linear matrix inequalities formulated at the vertices of the uncertainty polytope, which provide a parameter dependent Lyapunov function that assures the stability of any matrix inside the uncertainty domain. With the aid of numerical procedures based on unidimensional search and linear matrix inequalities feasibility tests, a simple and constructive way to compute robust stability domains can be established.

Index Terms: Linear matrix inequalities (LMIs), Linear uncertain systems, Parameter dependent Lyapunov functions, Robust stability, Time-invariant uncertain parameters.

2.2.1 Introduction

The investigation of stability domains for state space models has been addressed in many papers during the last years. The use of Lyapunov functions is certainly the main approach for this kind of analysis, since bounds for the stability domains can be obtained in terms of the associated Lyapunov matrix and the allowed perturbation directions [53]. As is well known, the use of a parameter independent Lyapunov function to investigate the stability domain of a linear system is only a sufficient condition for robust stability. Denominated *Quadratic Stability* in the literature (see, for instance, [9]), this kind of Lyapunov stability analysis can be used to design robust state feedback control gains [13], [14], being specially adequate when time-varying uncertain parameters are considered (providing not too conservative results when the parameters vary fast).

Less conservative results based on parameter dependent Lyapunov functions have been obtained [25], [27], [76]. In most of these cases, the uncertainty must verify some matching condition or must have a particular structure, and intensive computation is needed to test the robust stability, sometimes involving scaling parameters. It is worth of mentioning that scaling parameters can be useful in some situations, mainly when stability domains can be computed without evaluating all the vertices of the polytope. Another recent and interesting approach for analysis and control design of uncertain systems is based on the use of piecewise Lyapunov functions [66] but the numerical solution of the problems also requires a high level of computational complexity.

Among the more recent papers on this subject, it is worth to mention the Lyapunov dependent parameter function approaches presented in [32], [57], [60] and also the LMI formulations given in [69]. In [32], sufficient conditions for diagonal and simultaneous stability of a class of system matrices have been proposed in terms of LMIs (Linear Matrix Inequalities) which are related to passivity and real positiveness conditions. In [57], the sufficient conditions for the existence of a parameter dependent Lyapunov function are obtained from a set of linear constraints imposed at the vertices of the uncertainty polytope. In [60], the sufficient conditions are expressed in terms of LMIs defined at the vertices of the uncertainty polytope. Although being more general and more tractable than the previous existing conditions, the results of [60] remain somewhat conservative since there are two matrices that must jointly verify the entire set of LMIs.

In this note, a less conservative sufficient condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems is proposed (see [63] for the corresponding discrete-time systems condition). The uncertain time-invariant parameters are supposed to belong to convex bounded domains (polytope type uncertainty). The robust stability condition is formulated in terms of LMIs involving only the vertices of the uncertainty domain. A simple feasibility test, which can be accomplished by highly performing interior point methods [28], provides a set of Lyapunov matrices that can be combined (convex combination) to form a parameter dependent Lyapunov function assessing the stability of any matrix inside the uncertain domain. These conditions encompass the quadratic stability of the uncertainty domain as a particular case. With these results, the problem of finding an estimate of the the maximum robust stability domain is then addressed by means of unidimensional searches and LMI feasibility tests. Examples illustrate the results.

2.2.2 Robust Stability Condition

Consider a continuous-time linear system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.8)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ and $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. The stability of (2.8) can be easily verified by means of a simple test, that is, A is asymptotically stable if and only if the following LMIs admit a feasible solution

$$P > 0 \quad ; \quad A'P + PA < -I \quad (2.9)$$

Suppose now that A is not precisely known, but belong to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} . In this way, any matrix inside the domain \mathcal{D} can be written as a convex combination of the vertices A_j of the uncertainty polytope, i.e.

$$\mathcal{D} = \left\{ A(\xi) : A(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j A_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\} \quad (2.10)$$

If there exists a common Lyapunov matrix P that verifies (2.9) for all $A(\xi) \in \mathcal{D}$, the stability of the uncertain domain \mathcal{D} can be assured (quadratic stability). Thanks to convexity, this can be easily verified through the existence of $P > \mathbf{0}$ such that $A'_j P + P A_j < -I$, $j = 1, \dots, N$.

Besides being only a sufficient condition for robust stability, quadratic stability has been extensively used for robust control and filter design purposes thanks mainly to its simplicity (see for instance [14]). However, it is well known that this approach frequently yields conservative results. A less conservative alternative to test the robust stability of an uncertain system is given in the following lemma.

Lemma 1: If there exist positive definite Lyapunov matrices P_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$A_j' P_j + P_j A_j < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

$$A_j' P_k + P_k A_j + A_k' P_j + P_j A_k < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad k = j+1, \dots, N \quad (2.12)$$

then

$$P(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j P_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 \quad ; \quad \xi_j \geq 0 \quad (2.13)$$

is a parameter dependent Lyapunov function for any $A(\xi) \in \mathcal{D}$.

Proof: It is clear that $P(\xi)$ given by (2.13) is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (2.13) and (2.10), the following is obtained:

$$A(\xi)' P(\xi) + P(\xi) A(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 (A_j' P_j + P_j A_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k (A_j' P_k + P_k A_j + A_k' P_j + P_j A_k) \quad (2.14)$$

Imposing conditions (2.11)-(2.12), one gets

$$A(\xi)' P(\xi) + P(\xi) A(\xi) < - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{0} \quad (2.15)$$

since

$$(N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\xi_j - \xi_k)^2 \geq 0 \quad (2.16)$$

□

It is interesting to note that, although the non-negativity of the ξ_j , $j = 1, \dots, N$ has been used in the proof (the majorization of the second term of the right-hand side in (2.14) only can be done if $\xi_j \xi_k \geq 0$), the proof does not require that $\sum_j \xi_j = 1$. In other words, if a polytope of matrices defined by the vertices A_j , $j = 1, \dots, N$ is known to be stable from the conditions of the above lemma, then any positive combination of the vertices A_j still generate stable matrices (it suffices that $\sum_j \xi_j = \rho > 0$).

This fact is not surprising, since a strictly positive scalar number does not affect the sign of the real part of the eigenvalues of a system matrix. In this sense, if a polytope is known to be stable (for instance, for direct computation of the eigenvalues of all convex combinations of A_j , $j = 1, \dots, N$),

then any positive combination of its vertices also produces stable matrices. An important remark is that the conditions of Lemma 1 present this property (note also that the same occurs with the quadratic stability condition).

In the case of a precisely known (i.e. $N = 1$) system, only equation (2.11) needs to be verified for $P_1 > \mathbf{0}$. Note also that a quadratically stable system always allows $P_1 = P_2 = \dots = P_N$ as a feasible solution to (2.11)-(2.12). In order to constrain somewhat the feasibility test, a criterion such as $\min \text{Tr}(\sum_{j=1}^N P_j)$ can be used. The aim of this objective function is to obtain solutions P_j as close as possible to the solution of a “nominal” Lyapunov equation, in the sense that for $N = 1$, the solution of (2.11) will be as close as possible to P_{Lyap} solution of $A_1' P_{Lyap} + P_{Lyap} A_1 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$.

Finally, note that the above set of LMIs produces $L = nN(N+3)/2$ rows with $K = Nn(n+1)/2$ scalar variables, imposing a numerical complexity of $O(K^3L)$ [14], [28]. Since L increases with N^2 , this dependence becomes the main influence for $N > 20$.

2.2.3 Maximum Stability Domain

Consider a continuous-time linear system described by the following state space equation

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i E_i \right) x(t) \quad (2.17)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the nominal matrix of the system, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, \kappa$ are given matrices representing the directions of perturbation and $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \kappa$ are constant values defining the amount of perturbations allowed. Clearly, for $\alpha_i \in [-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$, $i = 1, \dots, \kappa$ system (2.17) can be viewed as an uncertain dynamic system belonging to the convex compact set \mathcal{D} defined by its $N \triangleq 2^\kappa$ vertices as in (2.10).

Supposing that A_0 is asymptotically stable and using the results of Lemma 1, an algorithm can be constructed to compute an estimate of the maximum robust stability domain, i.e. to determine $[-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$ for each perturbation direction E_i , $i = 1, \dots, \kappa$, such that system (2.17) remains stable $\forall \alpha_i \in [-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$, $i = 1, \dots, \kappa$.

The procedure is divided in two parts. The first part is devoted to the search of symmetric domains of stability. The volume of the stability domain is parametrized in one single variable $\bar{\alpha}$, which is increased following standard unidimensional search while keeping stability. At each step, convex programming tools are used to test the feasibility of a set of LMIs (results of Lemma 1).

The second part is concerned with non-symmetric stability domains, having as starting point the maximum symmetric stability domain obtained from part one. Then, a non-symmetric domain is found by searching each perturbation direction E_i at a time. This line search provides a (generally) non-feasible domain which always contains the actual one (otherwise, if this domain is feasible, it is the maximum stability one). Finally, a procedure is used to heuristically increase each side of the initial symmetric domain towards the non-symmetric infeasible one. At each direction, the maximum domain is obtained in a finite number of steps. The volume of the stability domain is used as a stop criterion. For details concerning the algorithm, the reader is referred to [64].

2.2.4 Examples

The first example is borrowed from [20], where the stability domain radius (i.e. symmetric domain) is investigated. In [20], the stability analysis of rational parameter-dependent uncertain systems is performed through the so-called full block S-procedure. The system is given by (2.17) with

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}; E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

where a is a free parameter. Table 2.1 exhibits the stability radii obtained in [20], the maximum values of $\bar{\alpha}$ with the condition presented in [60] and with the conditions of Lemma 1 (symmetric domains).

a	ρ [20]	$\bar{\alpha}$ [60]	$\bar{\alpha}$
0.1	1.9662	1.9673	1.9673
0.3	1.9038	1.8788	1.9043
0.5	1.8400	1.7545	1.8411
0.7	1.7738	1.6280	1.7749
1.0	1.6650	1.4569	1.6661

Table 2.1: Symmetric stability domains for the first example.

Table 2.2 shows the results for maximum non-symmetric robust stability domains (investigated inside a hypercube with radius $\alpha_{MAX} = 40$). To obtain an augmentation of the total volume of the uncertainty domain, the initial symmetric polytope considered by the algorithm has been fixed as 90% of $\bar{\alpha}$ when the conditions from [60] were investigated (see [64] for details on the algorithm). The overall volume (area in this case) of the domains achieved with the results of Lemma 1 are always greater than the corresponding ones obtained with [60]. An important remark concerning the non-symmetric stability domains showed in table 2.2 is that the conditions of Lemma 1 provide a feasible solution for all the situations (including the intervals obtained from [60]). On the other hand, the conditions from [60] fail to find a feasible solution for the domains obtained with Lemma 1.

The second example is from [53], where a gradient method is used to compute symmetric quadratic stability bounds which are compared to the actual ones (obtained from eigenvalue calculation). The system to be investigated here is given by (2.17) with

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a	α_1 [60]	α_2 [60]	α_1	α_2
0.1	[-1.8121, 1.8121]	[-8.7159, 6.8826]	[-1.9673, 1.9673]	[-36.7771, 1.9716]
0.3	[-1.7360, 1.7360]	[-3.3957, 2.9042]	[-1.9043, 1.9043]	[-12.4066, 1.9063]
0.5	[-1.6349, 1.6349]	[-2.4309, 2.1650]	[-1.8411, 1.8411]	[-7.5276, 1.8411]
0.7	[-1.5332, 1.5332]	[-2.0063, 1.8242]	[-1.7749, 1.7749]	[-5.4351, 1.7749]
1.0	[-1.3971, 1.3971]	[-1.6463, 1.5217]	[-1.6661, 1.6661]	[-3.8662, 1.6662]

Table 2.2: Non-symmetric stability domains for the first example.

For this system, the actual symmetric stability domain is $\alpha_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, 3$. Using the results of [60], the maximum symmetric domain is $\bar{\alpha} = 0.9973$, and the non-symmetric domains are described by the intervals $\alpha_1 \in [-2.2344, 1.8035]$; $\alpha_2 \in [-0.9417, 2.2344]$; $\alpha_3 \in [-2.2388, 1.3726]$ ($\alpha_{MAX} = 4$ has been used to define the search domain).

Using the results of Lemma 1, the maximum symmetric stability domain obtained is $\bar{\alpha} = 0.9999$ and the robust non-symmetric domain obtained (using $\alpha_{MAX} = 4$) is given by $\alpha_1 \in [-4.0000, 2.9998]$; $\alpha_2 \in [-0.9999, 4.0000]$; $\alpha_3 \in [-4.0000, 1.2428]$. Again, the improvement of the stability domain is apparent.

In fact, the LMI conditions in [60] impose the existence of some common variables. As N grows, these conditions become more conservative. Although for $N = 2$ both conditions seem to provide equivalent results, it is easy to find randomly generated stable polytopes with $N \geq 3$ such that the conditions of Lemma 1 are verified but the conditions in [60] fail.

The third example (randomly generated) is given by

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4.0 & 3.0 \\ -8.6 & -4.2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -12.1 & 2.3 \\ -3.6 & 0.6 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} -6.1 & 4.7 \\ -20.9 & 5.9 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

which define a stable polytope (see figure 1). The sufficient conditions proposed in [60] fail in this case. Using Lemma 1, one gets the vertices of the parameter dependent Lyapunov matrix given by

$$P_1 = \begin{bmatrix} 27.945 & 13.056 \\ 13.056 & 9.444 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 48.097 & -14.270 \\ -14.270 & 12.884 \end{bmatrix}; P_3 = \begin{bmatrix} 63.592 & -18.502 \\ -18.502 & 14.544 \end{bmatrix}$$

2.2.5 Conclusion

A less conservative test for the robust stability of an uncertain continuous-time system with polytope type uncertainty has been proposed in this note. The conditions are formulated in terms of a set of LMIs described only in terms of the uncertainty domain vertices. With these conditions, an estimate of the maximum robust stability domains can be obtained by means of standard unidimensional search and LMI feasibility tests.

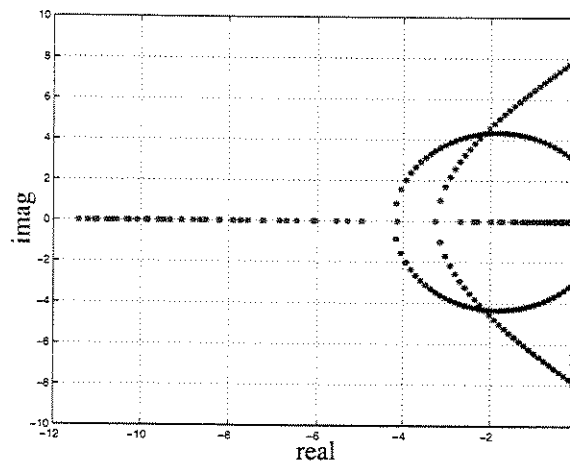


Figure 2.3: Eigenvalues of the uncertain system described by the vertices given by (2.18) (combined two-by-two).

AN LMI APPROACH TO COMPUTE ROBUST STABILITY DOMAINS FOR UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS

DOMINGOS C. W. RAMOS AND PEDRO L. D. PERES

School of Electrical and Computer Engineering - University of Campinas
 CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brazil
 e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br

Abstract

A simple and constructive way to establish maximum robust stability domains for continuous-time uncertain linear systems with convex bounded uncertainties is proposed in this paper. The results are based on sufficient conditions formulated in terms of linear matrix inequalities, which provide a parameter dependent Lyapunov function that assures the stability of any matrix inside the uncertainty domain. The numerical procedures are entirely based on unidimensional search and linear matrix inequalities feasibility tests.

Keywords: Robust Stability; Parameter Dependent Lyapunov Functions; Linear Matrix Inequalities; Time-Invariant Uncertain Parameters; Linear Uncertain Systems; Stability Domains;

2.2.6 Introduction

The investigation of stability domains for state space models has been addressed in many papers during the last years [30], [80], [86].

The use of Lyapunov functions is certainly the main approach for this kind of analysis, since bounds for the stability domains can be obtained in terms of the associated Lyapunov matrix and the allowed perturbation directions [52], [53], [75], [81], [82]. As is well known, the use of a single Lyapunov function to investigate the stability domain of a linear system is only a sufficient condition for robust stability. Denominated *Quadratic Stability* in the literature (see, for instance, [9]), this kind of Lyapunov stability analysis can be used to design robust state feedback control gains [8], [13], [14], being specially adequate when time-varying uncertain parameters are considered.

More recently, less conservative results based on parameter dependent Lyapunov functions have been obtained [25], [27], [76]. In most of these cases, the uncertainty must verify some matching condition or must have a particular structure, and intensive computation is needed (sometimes involving scaling parameters) to test the robust stability. Another recent and interesting approach for analysis and control design of uncertain systems is based on the use of piecewise Lyapunov functions [66], [78], but the numerical solution of the problems also requires a high level of computational complexity.

In this paper, a sufficient condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems is proposed. The uncertain time-invariant parameters are supposed to belong to convex bounded domains (polytope type uncertainty). The robust stability condition is formulated in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs) involving only the vertices of the uncertainty domain. A simple feasibility test, which can be accomplished by highly performing interior point methods [28], provides a set of Lyapunov matrices that can be combined (convex combination) to form a parameter dependent Lyapunov function assessing the stability of any matrix inside the uncertain domain. These conditions encompass the quadratic stability of the uncertainty domain as a particular case. The problem of finding the maximum robust stability domain is then addressed. A numerical procedure entirely based on unidimensional search and LMI feasibility tests is proposed. Examples illustrate the results.

2.2.7 Robust Stability Condition

Consider a continuous-time linear system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.19)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ and $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. The stability of (2.19) can be easily verified by means of a simple test, that is, A is asymptotically stable if and only if the following LMIs admit a feasible solution

$$P > 0 \quad ; \quad A'P + PA < -I \quad (2.20)$$

Suppose now that A is not precisely known, but belong to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} . In this way, any matrix inside the domain \mathcal{D} can be written as a convex combination of the vertices

A_j of the uncertainty polytope, i.e.

$$\mathcal{D} = \left\{ A(\xi) : A(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j A_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\} \quad (2.21)$$

If there exists a common Lyapunov matrix P that verifies (2.20) for all $A(\xi) \in \mathcal{D}$, the stability of the uncertain domain \mathcal{D} can be assured (quadratic stability). Thanks to convexity, this can be easily verified through the existence of P such that

$$P > 0 \quad ; \quad A_j' P + P A_j < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.22)$$

Besides being only a sufficient condition for robust stability, quadratic stability has been extensively used for robust control and filter design purposes thanks mainly to its simplicity (see for instance [14]). However, it is well known that this approach frequently yields conservative results.

A less conservative alternative to test the robust stability of an uncertain system is given in the following lemma.

Lemma 1: If there exist positive definite Lyapunov matrices P_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$A_j' P_j + P_j A_j < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.23)$$

$$A_j' P_k + P_k A_j + A_k' P_j + P_j A_k < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad k = j+1, \dots, N \quad (2.24)$$

then

$$P(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j P_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 \quad ; \quad \xi_j \geq 0 \quad (2.25)$$

is a parameter dependent Lyapunov function for any $A(\xi) \in \mathcal{D}$ such that

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j A_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 \quad ; \quad \xi_j \geq 0 \quad (2.26)$$

Proof: It is clear that $P(\xi)$ given by (2.25) is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (2.25)-(2.26), the following is obtained:

$$\begin{aligned} A(\xi)' P(\xi) + P(\xi) A(\xi) &= \sum_{j=1}^N \xi_j^2 (A_j' P_j + P_j A_j) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k (A_j' P_k + P_k A_j + A_k' P_j + P_j A_k) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Imposing conditions (2.23)-(2.24), one gets

$$A(\xi)'P(\xi) + P(\xi)A(\xi) < - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{0} \quad (2.28)$$

since

$$(N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\xi_j - \xi_k)^2 \geq 0 \quad (2.29)$$

□

Of course, in the case of a precisely known (i.e. $N = 1$) system, only equation (2.23) needs to be verified for $P_1 > \mathbf{0}$. Note also that a quadratically stable system always allows $P_1 = P_2 = \dots = P_N$ as a feasible solution to (2.23)-(2.24). In order to constrain somewhat the feasibility test, a criterion such as

$$\min \text{Tr} \left(\sum_{j=1}^N P_j \right) \quad (2.30)$$

can be used. The aim of this objective function is to obtain solutions P_j as close as possible to the solution of a “nominal” Lyapunov equation, in the sense that for $N = 1$, the solution of (2.23) will be as close as possible to P_{Lyap} solution of

$$A_1' P_{Lyap} + P_{Lyap} A_1 + \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

2.2.8 Maximum Stability Domain

Consider a continuous-time linear system described by the following state space equation

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i E_i \right) x(t) \quad (2.32)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the nominal matrix of the system, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, \kappa$ are given matrices representing the directions of perturbation and $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \kappa$ are constant values defining the amount of perturbations allowed.

The aim is to determine the maximum domain in which the stability of (2.32) is assured, i.e. to determine $[-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$ for each perturbation direction E_i , $i = 1, \dots, \kappa$, such that system (2.32) remains stable

$$\forall \alpha_i \in [-\alpha_m^i, \alpha_M^i], \quad i = 1, \dots, \kappa \quad (2.33)$$

The following assumption is made:

- A_0 is asymptotically stable.

This hypothesis assures the existence of finite intervals for at least one i [52]. Note that (2.33) defines a hypercube of 2^κ vertices in the parameter space. With that in mind, the stability analysis of system (2.32) can be performed using the following system description

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.34)$$

where A is an uncertain matrix belonging to the convex compact set \mathcal{D} defined by its $N \triangleq 2^\kappa$ vertices as in (2.21). In this way any dynamical behavior of the system (2.32) associated to a matrix A satisfying (2.34) can be described by the convex combination of the vertices A_j of the polytope \mathcal{D} . Each vertex A_j is determined from the nominal matrix of the system A_0 plus one of the 2^κ combinations of the extremes of the intervals $[-\alpha_m^i, \alpha_M^i]$, $i = 1, \dots, \kappa$. For example,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} (-\alpha_m^i) E_i \\ A_2 &= A_0 + \alpha_M^1 E_1 + \sum_{i=2}^{\kappa} (-\alpha_m^i) E_i \\ &\vdots \\ A_N &= A_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_M^i E_i \end{aligned}$$

In other words, the domain \mathcal{D} is the convex hull of all possible variations of the parameters of the system (2.32). A case of particular interest is the one involving only one parameter in its description, i.e., the symmetric domain. In that case, it is assumed that

$$\alpha_m^i = \alpha_M^i = \bar{\alpha}, \quad i = 1, \dots, \kappa$$

and one wants to determine the maximum value of $\bar{\alpha}$ such that system (2.32) remains stable

$$\forall \alpha_i \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}], \quad i = 1, \dots, \kappa$$

In the literature, the search for the maximum stability domain has been addressed by means of norm bounds associated to the quadratic Lyapunov function, or tests of robust stability based on piecewise or parameter dependent Lyapunov functions for a given $\bar{\alpha}$. In the following, an algorithm to compute the maximum robust stability domain is presented. The procedure uses the results of Lemma 1, being entirely based on unidimensional search and LMI feasibility tests.

2.2.9 Algorithm

The procedure is divided in two parts. The first part is devoted to the search of symmetric domains of stability. The volume of the stability domain is parametrized in one single variable $\bar{\alpha}$, which is increased following standard unidimensional search while keeping stability. At each step, convex programming tools are used to test the feasibility of a set of LMIs (results of Lemma 1).

The second part is concerned with non-symmetric stability domains, having as starting point the maximum symmetric stability domain obtained from part one. Then, a non-symmetric domain is found by searching each perturbation direction E_i at a time. This line search provides a (generally) non-feasible domain which always contains the actual one (otherwise, if this domain is feasible, it is the maximum stability one). Finally, a procedure is used to heuristically increase each side of the initial symmetric domain towards the non-symmetric infeasible one. At each direction, the maximum domain is obtained in a finite number of steps. The volume of the stability domain is used as a stop criterion.

Symmetric Domains

In the sequel, the algorithm for the determination of the maximum symmetric stability domain of a perturbed continuous-time linear nominal plant A_0 is described. Starting from the interval $[0, \alpha_{MAX}]$, which determines the search domain, the value of $\bar{\alpha}$ is increased iteratively, testing the feasibility of a set of LMIs (Lemma 1) in the domain defined by the convex hull of all vectors $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa)$ of the parameter space, until the difference between two consecutive values of $\bar{\alpha}$ is less than a predefined precision tol . The solution is obtained within a finite number p of steps given by ($\lceil \cdot \rceil$ means the nearest integer towards infinity)

$$p = \lceil \log_2(\alpha_{MAX}/tol) \rceil$$

Given tol and α_{MAX} , which defines the search domain (the hypercube in which interior the maximum stability domain is searched), i.e.

$$|\alpha_i| \leq \alpha_{MAX}, \quad i = 1, \dots, \kappa$$

Begin

If

- The interval $[0, \alpha_{MAX}]$ is feasible then $\bar{\alpha} = \alpha_{MAX}$ gives the robust stability domain. **Stop!**

Else

- Define: $\alpha_{lb} = 0$, $\alpha_{ub} = \alpha_{MAX}$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_{lb} + \alpha_{ub})$, $\Delta\bar{\alpha} = \alpha_{ub} - \alpha_{lb}$.

While $\Delta\bar{\alpha} \geq tol$

IF

- The interval $[0, \bar{\alpha}]$ is feasible then $\alpha_{lb} = \bar{\alpha}$

Else

```

    •  $\alpha_{ub} = \bar{\alpha}$ 

    End    % If

    •  $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_{lb} + \alpha_{ub})$ 

    End    % While

    •  $\bar{\alpha} = \alpha_{lb}$  ; The searched robust stability interval is  $[0, \bar{\alpha}]$ .

    End    % If

End

```

Since the domain is symmetric, the unidimensional search can be constrained to the interval $[0, \bar{\alpha}]$ in this case. Of course, the feasibility tests must be performed at all the vertices A_j of the polytope of uncertainties \mathcal{D} determined from the interval $[-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]$. A bisection procedure has been used for the line search on $\bar{\alpha}$ (other unidimensional searches like Fibonacci or golden section could be used with similar performance).

Non-symmetric Domains

The following algorithm describes the determination of the maximum non-symmetric robust stability domain for system (2.32) using the results of Lemma 1. Initially, the maximum feasible symmetric domain is computed (previous algorithm). Then, the domain is iteratively increased while keeping stability in order to get the possibly maximum non-symmetric robust stability domain.

Given tol , ε and α_{MAX} , which defines the searching domain (the hypercube in which interior the maximum stability domain search is performed), i.e.

$$|\alpha_i| \leq \alpha_{MAX}, i = 1, \dots, \kappa$$

Begin

- Taking each perturbation direction E_i at a time, $\forall i = 1, \dots, \kappa$, find the hypothetically maximum (possible infeasible) non-symmetric domain through the determination of the maximum values for α_i that keep feasibility on each direction i , i.e. $\alpha_\ell = 0, \forall \ell \neq i$. The number of iterations in that procedure is limited by $\lceil 2 \log_2(\alpha_{MAX}/tol) \rceil$ for each α_i , where tol is the specified precision of the bisection algorithm and the obtained domain is named “maximum independent domain” (**max-ind**).

If

- The **max-ind** domain is robustly stable, then this is the searched maximum non-symmetric stability domain. **Stop!**

Else

- **max-ind** is named **max-unf**.
- Take the maximum symmetric stability domain (previous procedure) – **max-sym**.
- Define **max-sym** as the initial value for **max-nonsym** and ΔV (absolute variation of the volume of **max-nonsym**) as the volume of the hypercube given by **max-sym**.

While $\Delta V \geq \varepsilon$

- **Refinement Phase** – enlarge (heuristically) the initial feasible maximum domain **max-nonsym**, while testing its stability. The heuristic procedure basically encompasses the following: definition of a sequence of the perturbation directions, E_i , to be used in the searching process prioritizing those which hypothetically encloses the best possibilities for the growth of the volume of the hypercube defined by **max-nonsym** (for example, exploiting the difference of **max-unf** and **max-nonsym**); search for the maximum growth in each direction while keeping the feasibility of the hypercube (each time a feasibility test of **max-nonsym** is performed, the iterations counter is increased by one); when all directions have been searched, continue looking for the maximum feasible growth of the domain, searching each direction according to the predefined sequence. Stop when no significant growth on the volume of the hypercube **max-nonsym** is produced within the given precision ε and a reasonable value of iterations.

End % While

- **max-nonsym**, the maximum non-symmetric stability domain, is the maximum feasible domain obtained in the **While** loop.

End % If

End

2.2.10 Examples

The first example illustrates the results of Lemma 1 for a two-vertices uncertain system. Consider the system (2.32) with $\kappa = 1$ and

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

As illustrated in figure 2.4, the uncertain system $A_0 + \alpha E$ is asymptotically stable for all $\alpha \in (-1, 1)$.

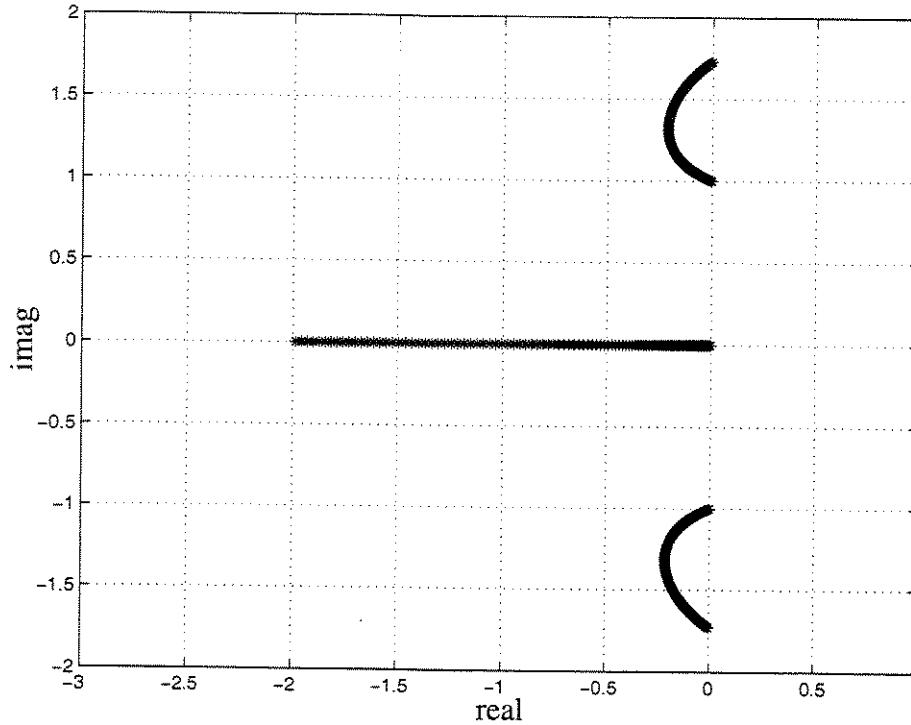


Figure 2.4: Eigenvalues of $A_0 + \alpha E$ given in (2.35) for $\alpha \in (-1, 1)$.

The maximum quadratically stable domain for this system is $[-0.5389, 0.5389]$, as can be verified through the use of the common Lyapunov matrix

$$P_{qs} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.4660 & 1.6932 & 0.8713 \\ 1.6932 & 7.1318 & 1.3276 \\ 0.8713 & 1.3276 & 2.8812 \end{bmatrix}$$

Using the results of Lemma 1, the system is found to be stable for all $\alpha \in [-0.99, 0.99]$ yielding the parameter dependent Lyapunov function $P(\xi) = \xi_1 P_1 + \xi_2 P_2$ with $\xi_1 + \xi_2 = 1$, $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ and

$$P_1 = \begin{bmatrix} 323.5963 & 151.1191 & 25.0872 \\ 151.1191 & 374.6609 & 150.1190 \\ 25.0872 & 150.1190 & 100.4846 \end{bmatrix} ; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 149.5077 & 1.7538 & 50.0001 \\ 1.7538 & 324.8847 & 0.7538 \\ 50.0001 & 0.7538 & 125.3770 \end{bmatrix}$$

Note that the results of Lemma 1 do not present any conservatism in this case.

The second example is borrowed from [20], where the stability domain radius (i.e. symmetric domain) is investigated. In [20], the stability analysis of rational parameter-dependent uncertain

systems is performed through the so-called full block S-procedure. The system is given by (2.32) with

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}; E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

where a is a free parameter. Table 2.3 exhibits the stability radii obtained in [20], the maximum values of $\bar{\alpha}$ (symmetric domains) and the maximum non-symmetric robust stability domains obtained with the results of Lemma 1 (investigated inside a hypercube with radius $\alpha_{MAX} = 4$). Although the improvements obtained in the symmetric stability domain are small, Lemma 1 provides important gains in some directions when investigating non-symmetric domains.

a	ρ	$\bar{\alpha}$	α_1	α_2
0.1	1.9662	1.9673	$[-1.9673, 1.9673]$	$[-3.9920, 1.9673]$
0.3	1.9038	1.9041	$[-1.9041, 1.9041]$	$[-3.9918, 1.9041]$
0.5	1.8400	1.8406	$[-1.8406, 1.8406]$	$[-3.9915, 1.8406]$
0.7	1.7738	1.7744	$[-1.7744, 1.7744]$	$[-3.9913, 1.7744]$
1.0	1.6650	1.6657	$[-1.6657, 1.6657]$	$[-3.8632, 1.6657]$

Table 2.3: Stability domains for the system given by (2.36).

The third example is from [53], where a gradient method is used to compute symmetric quadratic stability bounds which are compared to the actual ones (obtained from eigenvalue calculation). The system to be investigated here is given by (2.32) with

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

For this system, the actual symmetric stability domain is $\alpha_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, 3$. Using the results of Lemma 1, the maximum symmetric stability domain obtained is $\bar{\alpha} = 0.9987$, which is very close to the actual one. If the parameters are considered to be independent, the robust non-symmetric domain obtained (using $\alpha_{MAX} = 4$) is described by the parameter intervals

$$\alpha_1 \in [-3.9941, 2.9976] ; \alpha_2 \in [-0.9987, 3.9941] ; \alpha_3 \in [-3.9941, 0.9987]$$

Again, the improvement of the bounds is apparent.

2.2.11 Conclusion

A very simple and efficient procedure to establish an estimate of the maximum robust stability domains for continuous-time uncertain linear systems in convex bounded domains has been proposed in this paper. The method is based on standard unidimensional search and feasibility tests of a set of LMIs described only in terms of the uncertainty domain vertices.

2.3 Estabilidade robusta de sistemas discretos

Nesta seção é incluído o artigo *A Less Conservative LMI Condition for the Robust Stability of Discrete-time Uncertain Systems* [63], que discute a obtenção das condições suficientes de estabilidade robusta para sistemas incertos a tempo discreto.

- **Uma condição LMI menos conservadora para a estabilidade robusta de sistemas incertos a tempo discreto — Resumo:**

Neste artigo propõe-se uma nova condição menos conservadora para a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos a tempo discreto. As incertezas são supostas invariantes no tempo, e pertencendo a domínios limitados e convexos (incerteza politópica). A condição de estabilidade é formulada em termos de um conjunto de desigualdades matriciais lineares, envolvendo apenas os vértices do politopo de incerteza. Um teste de factibilidade simples e numericamente eficiente fornece um conjunto de matrizes de Lyapunov, cuja combinação convexa pode ser usada para verificar a estabilidade de qualquer matriz dinâmica pertencente ao domínio de incerteza. Exemplos ilustram os resultados.

A LESS CONSERVATIVE LMI CONDITION FOR THE ROBUST STABILITY OF DISCRETE-TIME UNCERTAIN SYSTEMS

DOMINGOS C. W. RAMOS, PEDRO L. D. PERES

*School of Electrical and Computer Engineering, University of Campinas,
DT-FEEC/UNICAMP, CP 6101, 13081-970, Campinas, SP, Brazil.*

e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br

Abstract

In this paper, a less conservative condition for the robust stability of uncertain discrete-time linear systems is proposed. The uncertain parameters, assumed to be time-invariant, are supposed to belong to convex bounded domains (polytope type uncertainty). The stability condition is formulated in terms of a set of linear matrix inequalities involving only the vertices of the polytope domain. A simple and numerically efficient feasibility test provides a set of Lyapunov matrices whose convex combination can be used to assess the stability of any dynamic matrix inside the uncertainty domain. Examples illustrate the results.

Keywords: Robust stability; Parameter dependent Lyapunov function; Linear matrix inequality; Discrete-time uncertain system; Time-invariant uncertainty

2.3.1 Introduction

The use of Lyapunov functions to investigate the stability of uncertain linear systems has been largely reported in the literature. During the last decades, the quadratic stability concept [9] has been widely used for robust analysis, control and filter design for uncertain linear systems. The use of a common Lyapunov function to assess the robust stability of an uncertain system has shown to be specially adequate for the analysis of time-varying parameters, providing in most of cases convex parametrizations of robust state feedback controllers and filters for linear uncertain systems. For an overview on this subject, see [14] and references therein.

However, the quadratic stability can lead sometimes to very conservative results. Recently, different strategies based on modified Lyapunov functions have been used to improve the computation of robust stability domains, as for instance parameter dependent [10], [20], [25], [27], [76] or piecewise [66], [78] Lyapunov functions. Most of these results are concerned with continuous-time systems, sometimes requiring intensive computation, scaling parameters or matching conditions to be satisfied. Concerning discrete-time systems, among others one may cite [3], [4], [39], [18] where some particular structure of uncertainties were considered. An interesting result has been presented in [17], where sufficient conditions for robust stability of uncertain discrete-time systems in convex bounded domains are given in terms of a set of linear matrix inequalities (LMIs) defined at the vertices of the uncertainty domain. Although these results represent an improvement on the esti-

mate of robust stability domains, some conservatism still remains since a common matrix variable is required to satisfy the whole ensemble of LMIs.

In this paper, a simple and easy-to-test robust stability condition for uncertain discrete-time linear systems is proposed. The uncertain time-invariant parameters are supposed to belong to a convex bounded domain (polytope type uncertainty). The robust stability of the uncertain system can be verified by means of a set of LMIs formulated in terms of the vertices of the uncertainty domain. If feasible, these LMIs provide a set of Lyapunov matrices that can be combined (convex combination) to form a parameter dependent Lyapunov function which assesses the stability of any dynamic matrix inside the uncertainty domain. These conditions, which encompass quadratic stability as a particular case, provide less conservative estimates of the robust stability domains, as illustrated through examples.

2.3.2 Robust Stability Condition

Consider the discrete-time linear system

$$x(t+1) = Ax(t) \quad (2.38)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ and $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is not precisely known, but belongs to a convex bounded (polytope type) uncertain domain \mathcal{D} . In this sense, any uncertain matrix can be written as a convex combination of the vertices A_i of the polytope \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i ; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 ; \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (2.39)$$

A well known sufficient condition for the robust stability of $A(\alpha) \in \mathcal{D}$ is the quadratic stability, that is, if there exists $P > \mathbf{0}$ such that

$$A(\alpha)'PA(\alpha) - P < -\mathbf{I} \quad (2.40)$$

then the uncertain system (2.38) with $A(\alpha) \in \mathcal{D}$ is robustly stable. As it has been shown, condition (2.40) is in fact a convex condition that can be completely verified through the feasibility of the following set of LMIs described at the vertices of the uncertainty domain \mathcal{D} , that is, if there exist $P > \mathbf{0}$ such that

$$A_i'PA_i - P < -\mathbf{I} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (2.41)$$

then the uncertain system (2.38) with $A(\alpha) \in \mathcal{D}$ is robustly stable. Note that, since there is no constraint on matrix P , the right-hand side of (2.40) (and (2.41)) can be arbitrarily fixed as $-\mathbf{I}$ without loss of generality.

Several control and filter design problems for uncertain discrete-time linear systems were addressed by means of the quadratic stabilizability approach and derived methodologies, sometimes incorporating performance criteria like the \mathcal{H}_2 and the \mathcal{H}_∞ norms (among others, one may cite [33],

[43], [35], [31], [59]). In most of cases, the convexity of (2.41) (or the associated LMIs obtained by Schur complement) has been preserved in order to assure an efficient numerical solution of the problems (see [14] and references therein).

However, the quadratic stability can sometimes be very conservative, since the same Lyapunov matrix $P > \mathbf{0}$ must verify (2.41) for all vertices of the uncertain domain. A less conservative test for the robust stability of an uncertain discrete-time system is given in the following lemma.

Lemma 1: If there exist positive definite Lyapunov matrices P_i , $i = 1, \dots, N$ such that

$$A_i' P_i A_i - P_i < -\mathbf{I} ; i = 1, \dots, N \quad (2.42)$$

$$A_i' P_i A_j + A_j' P_i A_i + A_i' P_j A_i - 2P_i - P_j < \frac{1}{(N-1)^2} \mathbf{I} \\ i = 1, \dots, N ; j \neq i, j = 1, \dots, N \quad (2.43)$$

$$A_j' P_i A_k + A_k' P_i A_j + A_i' P_j A_k + A_k' P_j A_i \\ + A_i' P_k A_j + A_j' P_k A_i - 2(P_i + P_j + P_k) < \frac{6}{(N-1)^2} \mathbf{I} \\ i = 1, \dots, N-2 ; j = i+1, \dots, N-1 ; k = j+1, \dots, N \quad (2.44)$$

then, for any $A(\alpha) \in \mathcal{D}$, $P(\alpha)$ given by

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i ; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 ; \alpha_i \geq 0 \quad (2.45)$$

is a parameter dependent positive definite Lyapunov function such that

$$A(\alpha)' P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) < \mathbf{0} \quad (2.46)$$

Proof: It is clear that $P(\alpha)$ given by (2.45) is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (2.45) and the definition of $A(\alpha) \in \mathcal{D}$ given in (2.39), one gets

$$A(\alpha)' P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) = A(\alpha)' P(\alpha) A(\alpha) - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^2 P(\alpha) = \\ = \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 (A_i' P_i A_i - P_i) \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j (A_i' P_i A_j + A_j' P_i A_i + A_i' P_j A_i - 2P_i - P_j)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \left(A'_j P_i A_k + A'_k P_i A_j + A'_i P_j A_k + A'_k P_j A_i \right. \\
& \quad \left. + A'_i P_k A_j + A'_j P_k A_i - 2(P_i + P_j + P_k) \right) \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Imposing conditions (2.42)-(2.44), one gets

$$\begin{aligned}
A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) & < - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j \right. \\
& \quad \left. - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \right) \mathbf{I} \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Now, to analyze the sign of the above expression, define Θ and Ω as below

$$\Theta \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (N-1) \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\Omega & \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^{N-1} \sum_{k \neq i, j, k=2}^N \alpha_i (\alpha_j - \alpha_k)^2 = \\
& = (N-2) \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j - 6 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \geq 0
\end{aligned}$$

and compute $(N-1)\Theta + \Omega$, which gives

$$(N-1)^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j - 6 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \geq 0$$

implying that (2.46) holds and the lemma is proved. \square

Note that a precisely known system ($N = 1$) only requires the existence of $P_1 > \mathbf{0}$ such that (2.42) is verified. In the case $N = 2$, of course, condition (2.44) does not need to be taken into account. Another important remark is that a quadratically stable system (i.e., a system admitting the same Lyapunov matrix satisfying (2.41)) always provides a feasible solution $P_1 = P_2 = \dots = P_N$ to the LMIs (2.42)-(2.44). This fact can be easily verified. First, note that in the quadratic stability case equation (2.42) reduces to equation (2.41). Second, computing the quadratic form with $P > \mathbf{0}$ and $j \neq k$

$$(A_j - A_k)'P(A_j - A_k) \geq \mathbf{0}$$

one gets $A'_j P A_k + A'_k P A_j \leq A'_j P A_j + A'_k P A_k$ implying, in this particular case, that the LMIs (2.43)-(2.44) are always feasible.

2.3.3 Examples

The first example illustrates the results of Lemma 1 for a two-vertices uncertain system parametrized by ρ given by the pair $(\rho A_1, \rho A_2)$ with

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0341 & -0.2571 & 0.7769 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0341 & -0.2571 & -0.7769 \end{bmatrix}$$

The robust stability of this system has been investigated by means of quadratic stability, using the results of [17] and using Lemma 1. The maximum value of ρ such that the system $(\rho A_1, \rho A_2)$ admits a common quadratic Lyapunov matrix is $\rho_{qs} = 1.0$ with

$$P_{qs} = \begin{bmatrix} 24.482 & 0.00 & 534.97 \\ 0.00 & 3346.7 & 0.00 \\ 534.97 & 0.00 & 15536.0 \end{bmatrix}$$

Using the results of [17], $\rho = 1.2871$ has been found and from the application of Lemma 1 one gets $\rho_{rs} = 1.9497$ with

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.5246 & -2.9629 & 6.3174 \\ -2.9629 & 22.9607 & -39.8354 \\ 6.3174 & -39.8354 & 113.4777 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 1.5246 & 2.9629 & 6.3174 \\ 2.9629 & 22.9607 & 39.8354 \\ 6.3174 & 39.8354 & 113.4777 \end{bmatrix}$$

By computing

$$r = \max_i \left| \lambda_i \left[\alpha_1 (\rho A_1) + \alpha_2 (\rho A_2) \right] \right|; \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

(where $|\cdot|$ means the absolute value of \cdot) one gets $r_{qs} = 0.5070$ (quadratic stability), $r = 0.6526$ (from [17]) and $r_{rs} = 0.9886$ (Lemma 1) as the maximum radius of the circle that contains the eigenvalues of the uncertain system. Note that the radius obtained with the results of Lemma 1 is very close to the unit circle. Figure 2.5 illustrates the stability domains associated to the uncertain pair $(\rho A_1, \rho A_2)$ with the maximum stability radii indicated for the three values of ρ . It can be noted that the conditions of Lemma 1 provide the best estimate for the robust stability domain.

A similar experiment has been performed with the uncertain discrete-time system described by the $N = 4$ vertex matrices $A_i \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ generated in order to provide a suitable pole location

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.7970 & 0.1023 & 0.2392 & -0.5628 & 0.4539 \\ -0.0932 & -0.2959 & 0.7038 & -0.2135 & -0.4529 \\ 0.4761 & -0.8786 & -0.6605 & -0.3839 & -0.6531 \\ -0.4290 & -0.5773 & 0.0009 & 0.4510 & 0.5222 \\ -0.0270 & 0.1544 & -0.4358 & -0.4583 & 0.1025 \end{bmatrix}$$

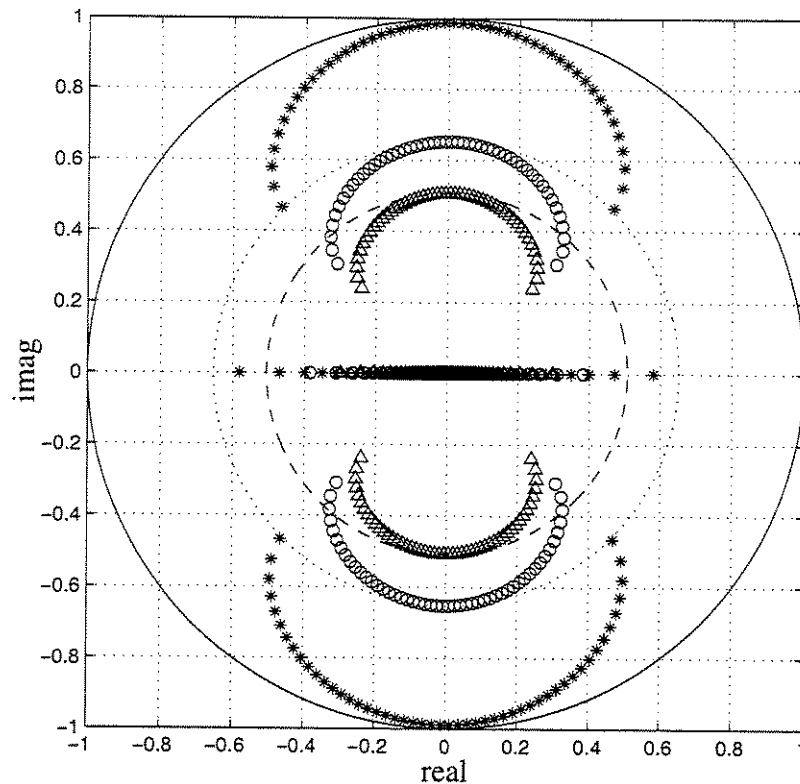


Figure 2.5: Eigenvalues of the convex combination of ρA_1 and ρA_2 for $\rho_{qs} = 1.0$ (Δ , $r_{qs} = 0.5070$ dashed), $\rho = 1.2871$ (\circ , $r = 0.6526$ dotted) and $\rho_{rs} = 1.9497$ ($*$, $r_{rs} = 0.9886$).

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1204 & -0.4321 & -0.5430 & -0.5713 & -0.2579 \\ -0.5015 & -0.0582 & 1.0519 & -0.2097 & -0.1361 \\ -0.2760 & -0.4405 & -0.0192 & -0.3769 & -0.0696 \\ -0.4404 & -0.5706 & 0.0106 & 0.4511 & 0.5311 \\ -0.8047 & 0.6074 & 0.2272 & -0.4511 & 0.7059 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.1280 & 0.0280 & -0.3349 & -0.4249 & 0.1838 \\ -0.3909 & -0.2629 & 0.9593 & -0.2749 & -0.3327 \\ -0.0724 & -0.8177 & -0.1899 & -0.4970 & -0.4317 \\ -0.4373 & -0.5763 & 0.0080 & 0.4492 & 0.5256 \\ -0.5941 & 0.2174 & 0.0508 & -0.5753 & 0.3315 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0.3178 & -0.2082 & -0.1487 & -0.6306 & 0.0249 \\ -0.3065 & -0.1578 & 0.8764 & -0.1834 & -0.2619 \\ 0.0832 & -0.6240 & -0.3425 & -0.3283 & -0.3014 \\ -0.4350 & -0.5734 & 0.0057 & 0.4518 & 0.5275 \\ -0.4332 & 0.4177 & -0.1070 & -0.4009 & 0.4662 \end{bmatrix}$$

The convex hull of $\rho(A_1, A_2, A_3, A_4)$ has been investigated for different values of ρ and the results are: $\rho_{qs} = 0.7100$ (quadratic stability domain), $\rho = 0.8333$ (using the results of [17]) and $\rho_{rs} = 1.1807$ (using Lemma 1), which represents a significantly larger stability domain. As shown in figure 2.6, the estimate of the robust stability domain obtained with the results of Lemma 1 is very close to the actual one.

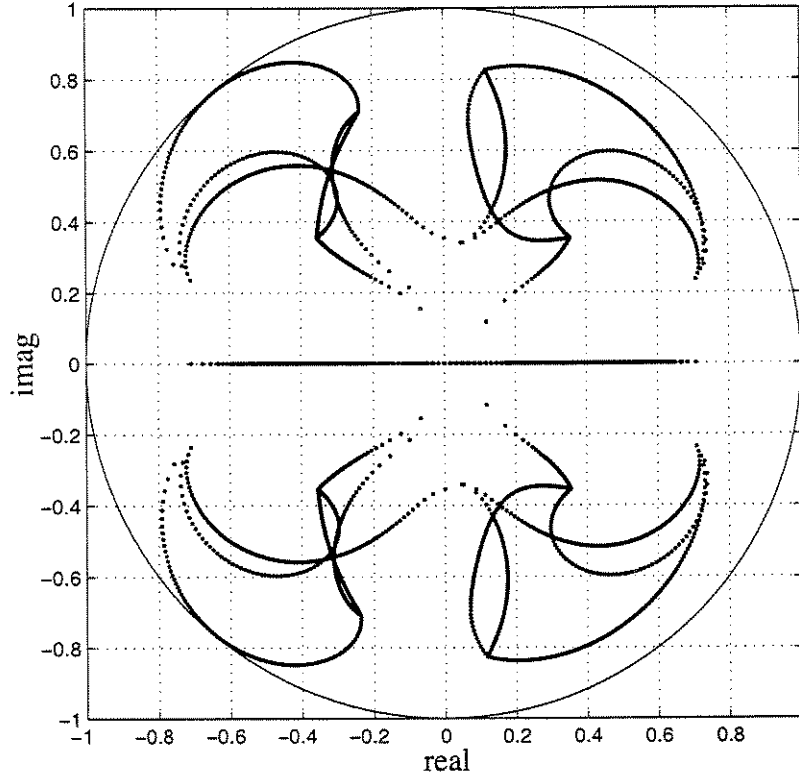


Figure 2.6: Eigenvalues of the convex combination of $\rho_{rs}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ taken pair-by-pair.

The third example illustrate the problem of estimating the maximum stability domain for an uncertain discrete-time system described by

$$x(t+1) = (A_0 + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2)x(t)$$

where $A_0 \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$ is a nominal matrix and $E_1 \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$, $E_2 \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$ are perturbation directions given by (the data has been randomly generated with A_0 asymptotically stable)

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.6197 & -0.2308 & -0.4580 & -0.4018 \\ 0.2307 & 0.1130 & -0.9080 & 0.2802 \\ 0.6707 & 0.7122 & 0.5902 & -0.2613 \\ 0.0557 & -0.6946 & -0.0155 & 0.5144 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.0301 & -0.0170 & -0.0042 & 0.0027 \\ -0.2259 & 0.1277 & 0.0314 & -0.0200 \\ 1.1936 & -0.6748 & -0.1660 & 0.1055 \\ 0.0922 & -0.0521 & -0.0128 & 0.0081 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.0155 & -0.0104 & 0.0213 & 0.0204 \\ -0.1165 & 0.0783 & -0.1597 & -0.1534 \\ 0.6156 & -0.4136 & 0.8436 & 0.8105 \\ 0.0476 & -0.0320 & 0.0652 & 0.0626 \end{bmatrix}$$

Using the results of Lemma 1 and a simple unidimensional search procedure, symmetric (i.e. $\beta_1 = \beta_2$) and non-symmetric stability domains were investigated. The robustly stable symmetric domain obtained is

$$\beta_1 = \beta_2 \in [-0.0615, 0.0615]$$

Assuming that the parameters β_1 and β_2 are independent, the robust stability domain is given by

$$\beta_1 \in [-0.0615, 0.8822] \quad ; \quad \beta_2 \in [-0.0793, 0.7977]$$

Figure 2.7 shows the eigenvalues of $A_0 + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2$ for the symmetric (left) and non-symmetric (right) estimated stability domains. Note that in both cases the root loci get very close to the unit circle.

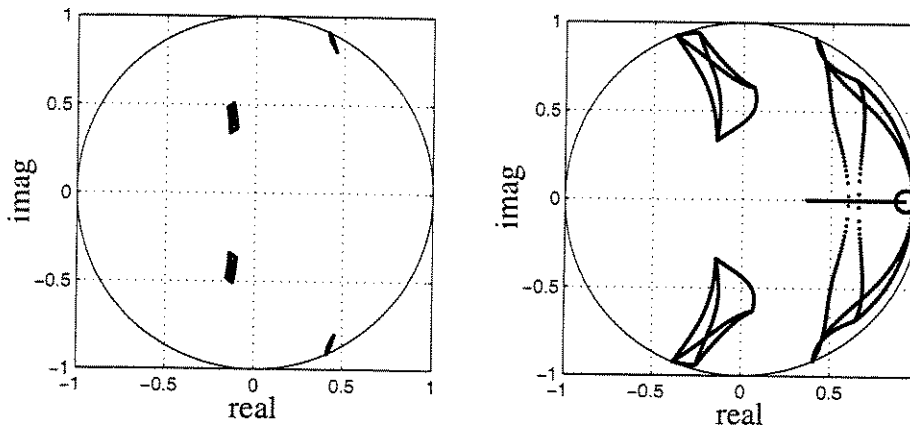


Figure 2.7: Eigenvalues of $A_0 + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2$ for the symmetric (left) and non-symmetric (right) estimated stability domains.

2.3.4 Conclusion

A new sufficient condition for the robust stability of uncertain time-invariant discrete-time linear systems in convex bounded domains has been presented in this note. The robust stability can be easily verified by means of the feasibility of a set of LMIs described only in terms of the vertices of the uncertainty domain. Although the extension to handle synthesis problems appears not to be immediate, the results represent a very good improvement in the estimation of robust stability domains. As an extension, the conditions could be applied to the computation of more realistic guaranteed costs and performance indices for uncertain systems.

2.4 Desempenho numérico da estabilidade robusta

Nesta seção é incluído o artigo *Estabilidade Robusta de Sistemas Contínuos no Tempo Através de Desigualdades Matriciais Lineares* [49], em que se faz uma análise da complexidade numérica da condição suficiente de estabilidade robusta proposta em função da ordem e da quantidade dos vértices do politopo de incerteza da matriz do sistema. Uma comparação da análise de complexidade numérica é feita em relação ao critério de estabilidade quadrática e a outra condição que procura reduzir o conservadorismo da análise quadrática, baseada em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e desigualdades matriciais lineares aumentadas com variáveis adicionais [17].

ESTABILIDADE ROBUSTA DE SISTEMAS CONTÍNUOS NO TEMPO ATRAVÉS DE DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

VALTER J. S. LEITE, VINÍCIUS F. MONTAGNER, DOMINGOS C. W. RAMOS, PEDRO L. D. PERES

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
DT/FEEC/UNICAMP - CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brasil
e-mails: {valter,montagne,domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br*

Resumo— Uma condição suficiente para a análise de estabilidade de sistemas lineares contínuos no tempo com incertezas politópicas é apresentada neste trabalho. A estabilidade robusta é garantida a partir da existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros obtida da factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares formuladas nos vértices do politopo de incertezas. Uma análise numérica mostra que a condição proposta fornece resultados menos conservativos quando comparada com a estabilidade quadrática ou com condições mais recentes baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e desigualdades matriciais lineares aumentadas com variáveis adicionais.

Abstract— A sufficient condition for the stability analysis of linear continuous-time uncertain systems with polytopic uncertainties is given in this paper. The robust stability is guaranteed by means of a parameter dependent Lyapunov function obtained from a feasibility test of a set of linear matrix inequalities described at the vertices of the uncertainty polytope. A numerical comparison shows that the condition proposed yields less conservative results than the ones obtained by quadratic stability and also than recent stability conditions based on parameter dependent Lyapunov function and augmented linear matrix inequalities with extra variables.

Key Words— Robust stability; parameter dependent Lyapunov function; linear matrix inequality; continuous-time systems; polytope type uncertainty.

2.4.1 Introdução

Uma das questões fundamentais na teoria de sistemas é a construção de funções de Lyapunov, tanto para a análise de estabilidade quanto para a síntese de controladores. Em particular, o estudo de sistemas lineares com parâmetros incertos avançou muito nos últimos vinte anos graças a técnicas de investigação de domínios de estabilidade e de controle robusto derivadas de funções de Lyapunov.

A chamada estabilidade quadrática, isto é, a existência de uma mesma função de Lyapunov, independente dos parâmetros incertos, assegurando a estabilidade robusta do sistema para o domínio de incertezas considerado, foi talvez o resultado mais importante da década de 80 [9]. A partir

das condições de estabilidade quadrática, inúmeros resultados de análise, controle e filtragem robusta com critérios como as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ puderam ser desenvolvidos (veja por exemplo [14] e referências internas). Essas condições, quase sempre formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*), tornaram-se facilmente testáveis numericamente com o aparecimento de pacotes computacionais especializados [28].

Embora a estabilidade quadrática seja especialmente adequada à análise de sistemas incertos com parâmetros variantes no tempo, os resultados obtidos podem ser bastante conservativos em muitas situações. Recentemente, várias extensões têm aparecido na literatura para a análise e síntese de controladores para sistemas lineares incertos. Resultados menos conservativos têm sido obtidos a partir de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [25], [27], [57], [76], mas na maioria dos casos alguma restrição estrutural deve ser verificada, ou o procedimento numérico para o teste de estabilidade depende de parâmetros de escalonamentos ou de discretização do espaço paramétrico em uma malha suficientemente fina. Alguns trabalhos têm abordado o problema através de funções de Lyapunov lineares por partes (por exemplo [66], [78]), mas a solução numérica, em geral, requer elevado esforço computacional.

Considerando apenas sistemas lineares incertos contínuos no tempo, dentre os testes de estabilidade robusta baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros destacam-se, por estarem formulados em termos de LMIs e pela facilidade de resolução numérica, as abordagens apresentadas em [19], [32] e [60]. Em [32], condições suficientes para a estabilidade diagonal simultânea de uma classe de sistemas foram propostas em termos de LMIs, sendo estabelecidas as conexões desses resultados com positividade real e passividade em sistemas lineares. Uma extensão desses resultados é apresentada em [60], tratando diferentes regiões dentro do plano complexo. A idéia principal contida nessas abordagens está no aumento da ordem das LMIs e na inclusão de novas variáveis, de maneira a obter, com esses graus de liberdade adicionais, resultados menos conservativos do que os que se consegue com a estabilidade quadrática [19]. A estabilidade robusta é garantida por uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, que se escreve a partir de matrizes de Lyapunov factíveis para um conjunto de LMIs descritas nos vértices do domínio de incertezas. Apesar de fornecer resultados melhores que os obtidos com a estabilidade quadrática, essas condições (chamadas aqui de estabilidade robusta estendida — EE) ainda são conservativas quando comparadas com o real domínio de estabilidade, provavelmente pelo fato de exigirem que uma ou mais variáveis satisfaçam conjuntamente todas as LMIs.

Neste trabalho, uma condição suficiente para a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos contínuos no tempo é apresentada. As incertezas são supostas não-variantes no tempo e pertencentes a um politopo, do qual se conhecem apenas os vértices. A condição de estabilidade robusta é formulada em termos de LMIs envolvendo apenas as matrizes vértices do politopo de incertezas. Um simples teste de factibilidade fornece um conjunto de matrizes que podem ser combinadas de maneira convexa para compor uma função de Lyapunov dependente de parâmetros assegurando a estabilidade de qualquer matriz dinâmica dentro do domínio de incertezas considerado. Essa condição, que contém a estabilidade quadrática como um caso particular, pode ser testada por métodos de eficiência numérica comprovada e de complexidade polinomial [28].

Uma exaustiva comparação numérica é feita entre os resultados obtidos com a estabilidade quadrática (EQ), a estabilidade robusta estendida (EE) e com a condição aqui apresentada (ER) para um conjunto de polítopos estáveis. Uma análise da complexidade numérica das LMIs envolvidas em cada tipo de teste também é apresentada. Além de mostrar que as condições ER produzem, de maneira geral, os resultados menos conservativos, os exemplos ilustram as situações nas quais há uma equivalência entre os resultados e também a proximidade com as condições necessárias.

2.4.2 Preliminares

Considere um sistema linear contínuo no tempo descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.49)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz precisamente conhecida. Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica de A , isto é, todos os autovalores de A possuírem parte real estritamente negativa, é que exista $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que as LMIs

$$P > 0 \quad ; \quad A'P + PA < 0 \quad (2.50)$$

sejam satisfeitas. Note que a desigualdade de Lyapunov acima poderia ser trocada, sem perda de generalidade, por $A'P + PA \leq -\epsilon I$ para qualquer $\epsilon > 0$. Essa propriedade é muitas vezes chamada de homogeneidade.

Suponha agora que A não é precisamente conhecida, mas pertence a um polítopo de incertezas \mathcal{A} . Nesse caso, qualquer matriz A dentro do domínio de incertezas pode ser escrita como a combinação convexa dos vértices A_j , $j = 1, \dots, N$, do polítopo, ou seja, $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ com

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\} \quad (2.51)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do polítopo \mathcal{A} é dada pela existência de uma matriz de Lyapunov $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que as LMIs

$$P > 0 \quad ; \quad A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0 \quad (2.52)$$

sejam verificadas para todo $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. Conhecida como estabilidade quadrática (EQ) na literatura [9], essa condição pode ser facilmente verificada na prática graças à convexidade da desigualdade de Lyapunov, que faz com que a condição (2.52) seja equivalente à verificação da existência de $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$P > 0 \quad ; \quad A_j'P + PA_j < 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.53)$$

Apesar de ser uma condição apenas suficiente para a estabilidade robusta do politopo \mathcal{A} , e que portanto pode produzir resultados conservativos, a estabilidade quadrática tem sido usada extensivamente para síntese de controladores e de filtros robustos nos mais diversos contextos, produzindo em muitos casos condições convexas para a determinação do controle ou do filtro (veja por exemplo [13], [33], [47]).

2.4.3 Condições para Estabilidade Robusta

A análise da estabilidade do sistema incerto (2.49) com $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ pode ser efetuada através do uso de uma função de Lyapunov dependente do parâmetro incerto α , ou seja, $A(\alpha)$ é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 \quad (2.54)$$

Note que o caso $P(\alpha) = P$ recai no clássico teste de estabilidade quadrática do sistema. Mesmo restringindo a busca de $P(\alpha)$ a funções de Lyapunov que se escrevem como uma combinação convexa de matrizes P_j , $j = 1, \dots, N$, condições menos conservativas do que a estabilidade quadrática podem ser obtidas. Observe ainda que a existência de matrizes P_j que verificam as desigualdades de Lyapunov nos vértices A_j , $j = 1, \dots, N$ do politopo \mathcal{A} é apenas condição necessária para a estabilidade robusta.

Uma condição suficiente para a análise da estabilidade robusta de $A(\alpha)$ foi apresentada em [32] e generalizada em [60]. Veja também [19] para uma discussão em um contexto mais geral.

Lema 1 Se existirem N matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} A_j'F' + FA_j & P_j - F + A_j'G \\ P_j - F' + G'A_j & -(G + G') \end{bmatrix} < 0 \quad (2.55)$$

$j = 1, \dots, N$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dado por

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.56)$$

é uma função de Lyapunov dependente do parâmetro α que assegura a estabilidade assintótica de qualquer $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Prova: Veja [32] ou [60].

A idéia principal por trás do Lema 1 é que o aumento da dimensão do problema e a criação de novas variáveis (matrizes F e G) propiciam um maior grau de liberdade para a verificação da condição (2.54) com $P(\alpha)$ dado por (2.56). Note que, com o aumento da dimensão da LMI, a

matriz de Lyapunov P não mais aparece envolvida em um produto com a matriz dinâmica A . É também interessante notar que, para A fixo,

$$A'P + PA = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A'F' + FA & P - F + A'G \\ P - F' + G'A & -(G + G') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix}$$

para escolhas arbitrárias de F e G . Até o presente, no entanto, não se conhecem possíveis extensões do Lema 1 para procedimentos de síntese.

Embora a condição de estabilidade robusta estendida do Lema 1 forneça resultados melhores do que a estabilidade quadrática, a exigência de que as matrizes F e G devam satisfazer todo o conjunto de LMIs torna o resultado conservativo, principalmente quando N cresce. O lema a seguir apresenta uma nova condição suficiente para a análise da estabilidade robusta de $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Lema 2 Se existirem N matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$A'_j P_j + P_j A_j < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} A'_j P_k + P_k A_j + A'_k P_j + P_j A_k < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \\ j = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad k = j+1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.58)$$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dada por (2.56) é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que assegura a estabilidade de qualquer $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Prova: Primeiramente, note que $P(\alpha)$ dada por (2.56) com $P_j > 0$, $j = 1, \dots, N$ é uma combinação convexa de matrizes definidas positivas e, portanto, também é definida positiva. Desenvolvendo a expressão (2.54), com $A(\alpha) \in \mathcal{A}$, obtém-se

$$\begin{aligned} A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 (A'_j P_j + P_j A_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k (A'_j P_k + P_k A_j + A'_k P_j + P_j A_k) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Impondo as condições (2.57)-(2.58) (note que $\alpha_j \alpha_k \geq 0$ para todo j e k), tem-se

$$\begin{aligned} A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) &< \\ &- \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

pois a expressão dentro dos parênteses é sempre maior ou igual a zero. De fato,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\alpha_j - \alpha_k)^2 = \\ & = (N-1) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Vários pontos sobre o Lema 2 merecem ser comentados. A primeira observação diz respeito ao fato de que a condição $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ não foi utilizada na demonstração. Embora se exija que os termos α_j sejam todos não negativos, não é necessário que a soma desses termos seja igual a unidade. Na verdade, basta apenas que os α_j não sejam todos nulos ou, equivalentemente, que $\sum_{j=1}^N \alpha_j = \rho$, $\rho > 0$. Em outras palavras, se um polítopo \mathcal{A} é estável graças à verificação das condições do Lema 2, então qualquer combinação positiva dos vértices A_j , $j = 1, \dots, N$ produz também polítopos estáveis. Pode parecer surpreendente que um teste realizado nos vértices de um polítopo conclua sobre a estabilidade de combinações lineares positivas desses mesmos vértices e, portanto, além da região delimitada pelo envelope convexo dos vértices. Mas se um polítopo de matrizes, representando um sistema linear incerto contínuo no tempo, é estável, isto é, $A(\alpha)$ tem autovalores com parte real estritamente negativa para todo valor de α , então qualquer combinação positiva dos vértices desse polítopo também produz matrizes estáveis. Dessa forma, $\rho A(\alpha)$, para $\rho > 0$, também terá autovalores com parte real negativa. As condições do Lema 2 reproduzem essa propriedade estrutural de polítopos estáveis. Note que a condição de estabilidade quadrática, se verificada, também garante a estabilidade de qualquer combinação positiva $\sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$, mas o mesmo não ocorre com a condição do Lema 1.

Para sistemas precisamente conhecidos, isto é, para $N = 1$, apenas a condição (2.57) precisa ser verificada para $P_1 = P'_1 > 0$. Para sistemas incertos quadraticamente estáveis, existe uma matriz P que verifica a condição (2.53) e, nesse caso, $P = P_1 = P_2 = \dots = P_N$ é uma solução factível para (2.57)-(2.58). Note que se a equação (2.57) é satisfeita para uma mesma matriz P , então (2.58) é sempre verificada. Portanto as condições do Lema 2 englobam a condição de estabilidade quadrática como um caso particular.

A idéia central do Lema 2 está na exploração da homogeneidade da desigualdade de Lyapunov, impondo, sem perda de generalidade, que as desigualdades de Lyapunov devam ser menores que $-\mathbf{I}$ nos vértices do polítopo, (2.57). Esta condição, necessária para a estabilidade do polítopo, permite que os termos cruzados assumam valores que podem até ser definidos positivos.

As condições suficientes aqui apresentadas para a estabilidade robusta de um polítopo de matrizes, ou seja, a estabilidade quadrática, a estabilidade robusta estendida do Lema 1 e a estabilidade robusta exposta no Lema 2, baseiam-se todas em testes de factibilidade de um conjunto de LMIs. Hoje em dia há algoritmos eficientes baseados em métodos de pontos interiores de complexidade em tempo polinomial. A complexidade de problemas formulados em termos de LMIs está associada ao número K de variáveis escalares e também com o número L de linhas do sistema de

equações. O número de operações em ponto flutuante ou o tempo necessário para se resolver um problema é proporcional a K^3L [14], [28]. A tabela 2.4 mostra os valores de K e L para cada um dos testes apresentados, sendo n o número de estados do sistema e N o número de vértices do politopo.

A complexidade numérica do critério EQ é a menor, mas os resultados produzidos são mais conservativos. Uma comparação mais detalhada da complexidade dos métodos EE e ER (menos conservativos que a EQ e ambos baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros) é mostrada nas figuras 2.8 e 2.9. A figura 2.8 mostra a complexidade relativa ER/EE em função do número de estados n para vários valores de N . Pode-se notar que a complexidade do critério ER torna-se maior que a do EE a partir de $N = 12$. Na figura 2.9 é mostrada a complexidade relativa ER/EE em função do número de vértices. Pode-se observar que a influência de N^2 no critério ER torna-se o fator preponderante para valores grandes de N ($N > 20$), independente do número de estados n .

Critério	K (variáveis escalares)	L (linhas)
EQ	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(N+1)n$
EE	$\frac{Nn(n+1)}{2} + 2n^2$	$3Nn$
ER	$\frac{Nn(n+1)}{2}$	$\frac{nN(N+3)}{2}$

Tabela 2.4: Complexidade numérica dos critérios de estabilidade em função do número de estados n e do número de vértices N (a complexidade é proporcional a K^3L).

2.4.4 Exemplos

Primeiramente, foi feita uma comparação exaustiva entre os critérios de estabilidade quadrática EQ, estabilidade estendida EE e estabilidade robusta ER. Para isso, foram gerados de maneira aleatória 1000 politopos estáveis para cada par (n, N) com $2 \leq n \leq 7$ e $2 \leq N \leq 7$. O número 1000 foi escolhido por ter sido verificado que os percentuais de sucesso de cada método não sofrem alterações significativas quando números maiores de politopos são investigados.

A geração dos politopos estáveis seguiu a seguinte seqüência de passos: (i) geração de N matrizes de dimensões $n \times n$ cujos elementos são valores reais uniformemente distribuídos no intervalo $[-1, 1]$; (ii) para cada vértice, determinação da maior parte real dos autovalores σ e subtração de $(\sigma + 1 \times 10^{-4})\mathbf{I}_n$, garantindo pelo menos um autovalor de cada vértice com parte real em -1×10^{-4} ; (iii) determinação da maior das partes reais de todos os autovalores do politopo gerado, σ_{max} , através de uma malha fina; (iv) subtração de $(\sigma_{max} + 1 \times 10^{-4})\mathbf{I}_n$ de cada uma das matrizes vértices do politopo.

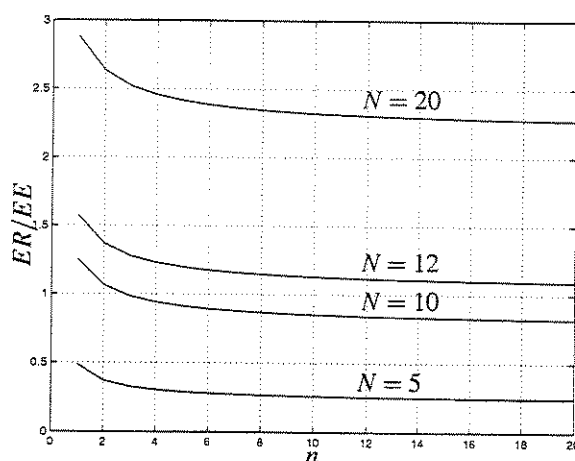


Figura 2.8: Complexidade numérica relativa ER/EE em função do número de estados n .

No total, foram gerados 36000 polítopos estáveis, e o resultado dos testes de estabilidade está apresentado na tabela 2.5. O critério quadrático mostra resultados mais conservativos, e essa tendência acentua-se com o aumento no número de vértices independentemente do número de estados. Em termos gerais, o critério ER é o menos conservativo, apresentando no entanto resultados similares e até um pouco piores que os do critério EE quando $N = 2$.

Nos casos em que $N = 2$, observa-se a equivalência exata entre os critérios EE e ER apenas quando $n = 2$ (caso inclusive em que ambas as condições parecem necessárias e suficientes). Para $3 \leq n \leq 7$, a condição ER perde, em média, em 1.8% dos casos.

Para um número de vértices superior a 2, a condição ER apresenta-se bem mais abrangente que a condição EE para todos os estados n . Em particular, quando $n \geq 4$ e $N \geq 4$, ER identifica no mínimo 2.5 vezes mais polítopos estáveis que a condição EE. Observa-se ainda que o aumento no número de vértices, independentemente do número de estados, prejudica de modo significativo a condição EE, enquanto a condição ER parece ser pouco afetada por esta variável. Em alguns casos, pode-se observar um número de polítopos estáveis identificados por ER superior a 10 vezes ao identificado por EE. Assim, a condição ER mostra-se bem mais abrangente que a condição EE para $N > 2$, produzindo resultados menos conservativos. Finalmente, vale ressaltar que as condições EE e ER contêm a EQ mas não estão contidas uma na outra (são condições suficientes independentes).

Embora a existência de $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ que satisfaça (2.54) seja uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de $A(\alpha)$, ainda não foi provado que a função de Lyapunov dependente de parâmetros, $P(\alpha)$, necessariamente deva ser uma função afim no parâmetro α .

Uma visualização dos resultados da tabela 2.5 é dada na figura 2.10, na qual são mostrados três gráficos na forma de barras comparando o número de polítopos estáveis identificados por cada método (no alto, EQ; no meio, EE e embaixo ER). Os eixos das abscissas referem-se ao número de estados do polítopo, cada qual com um grupo de 6 barras verticais que representam o número

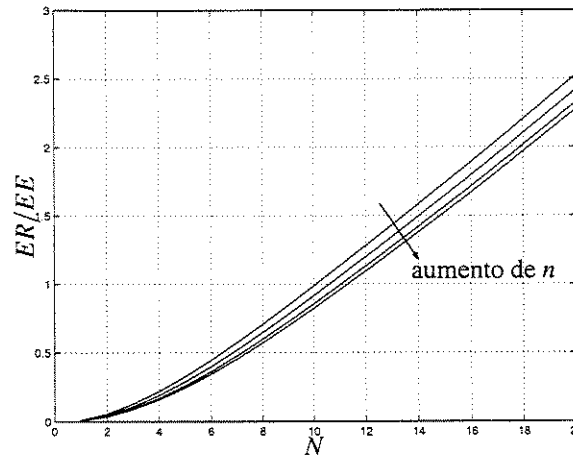


Figura 2.9: Complexidade numérica relativa ER/EE em função do número de vértices N .

n	N	EQ	EE	ER	n	N	EQ	EE	ER	n	N	EQ	EE	ER		
2	2	636	1000	1000	3	2	381	982	967	4	2	255	987	957		
	3	368	942	1000		3	3	144	719		919	3	3	63	651	912
	4	361	744	997		4	4	122	453		887	4	4	43	332	863
	5	341	704	998		5	5	100	392		872	5	5	42	249	861
	6	330	707	997		6	6	74	311		863	6	6	47	202	837
7	339	700	988	7	7	78	290	878	7	7	23	187	842			
5	2	242	983	965	6	2	191	995	982	7	2	192	997	985		
	3	33	593	907		3	3	32	598		943	3	3	15	569	931
	4	25	299	862		4	4	15	274		910	4	4	11	209	897
	5	16	208	847		5	5	11	146		892	5	5	7	137	870
	6	20	144	833		6	6	8	106		890	6	6	3	78	893
7	16	123	838	7	7	3	75	873	7	7	6	84	881			

Tabela 2.5: Número de politopos estáveis identificados pelos testes EQ (estabilidade quadrática), EE (estabilidade estendida) e ER (estabilidade robusta) quando aplicados a 1000 politopos estáveis para $2 \leq n \leq 7$, $2 \leq N \leq 7$.

de politopos identificados como estáveis. A barra mais à esquerda corresponde a $N = 2$ e a mais à direita a $N = 7$.

Um teste de estabilidade com $n = 2$ e $N = 2$ leva da ordem de 20 ms, independentemente do método. Para $n = 7$ e $N = 7$ o tempo médio foi de 0.145 s (EQ), 5.65 s (EE) e 5.22 s (ER). Os testes foram realizados em um computador AMD K7 ATHLON 1.4 GHz, com 256 Mbytes de memória RAM, usando *Matlab* e o pacote *LMI Control Toolbox* [28]. Pelas figuras 2.8 e 2.9, é evidente que

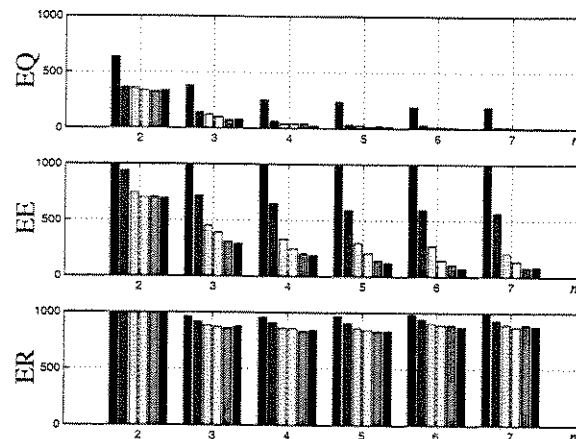


Figura 2.10: Número de polítopos estáveis identificados pelos critérios EQ (alto), EE (meio) e ER (baixo), para $2 \leq n \leq 7$ (abscissas) e $2 \leq N \leq 7$ (barras verticais, $N = 2$ à esquerda).

o teste ER deve tornar-se mais lento a partir de um certo número de vértices ($N > 12$), mas esse aumento de complexidade é o preço a ser pago para se obterem resultados menos conservativos.

Um exemplo muito simples, também gerado aleatoriamente, com $n = 2$ e $N = 3$, ilustra muito bem como um polítopo estável é resolvido pelo critério ER e não verifica nem a condição de estabilidade quadrática EQ nem a condição de Lema 1 (estabilidade EE). Os vértices do polítopo são dados pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.1 & 4.7 \\ -8.2 & -13.3 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.3 & -2.1 \\ 9.1 & 1.2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.3 & -6.0 \\ 9.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

e a região de estabilidade é ilustrada na figura 2.11 (autovalores das combinações dois-a-dois dos vértices). A parte real máxima obtida nesse caso é -0.05 .

2.4.5 Conclusão

Este trabalho mostrou que a formulação LMI apresentada para a verificação da estabilidade de um polítopo de matrizes associado a um sistema linear incerto contínuo no tempo produz resultados menos conservativos que os obtidos por métodos similares encontrados na literatura. O teste de factibilidade que garante a estabilidade do polítopo depende apenas das matrizes vértices e pode ser feito de maneira eficiente através de métodos numéricos de complexidade polinomial.

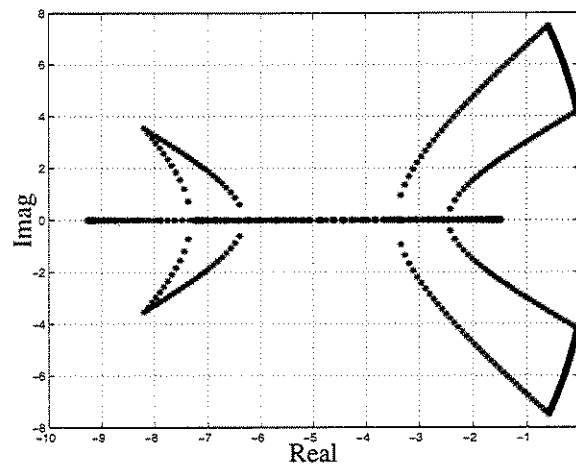


Figura 2.11: Autovalores das combinações dois-a-dois dos vértices dados em (2.62).

Capítulo 3

Síntese e Domínio de Estabilidade de Controladores

O problema de estabilização robusta (estabilização de sistemas não precisamente conhecidos, com incerteza paramétrica do tipo politópica) é tratado neste capítulo, e os principais resultados e a abordagem utilizada são apresentados pelos artigos, já publicados ou atualmente submetidos para aprovação, aqui transcritos. Consideram-se tanto o caso de sistemas descritos por equações diferenciais quanto sistemas descritos por equações a diferenças.

Partindo das condições suficientes de estabilidade robusta, discutidas no capítulo 2, formula-se um conjunto de restrições descritas por LMIs que, quando satisfeitas, produzem um ganho de realimentação de estados parametrizado, dependente dos parâmetros de forma não-linear, que estabiliza uma planta com incerteza paramétrica convexa invariante no tempo. Uma matriz de Lyapunov apropriada, dependente de parâmetros, que assegura a estabilidade do sistema realimentado é obtida como sub-produto do problema de estabilização. Tal ganho estabilizante é mais efetivo do que o obtido pela parametrização análoga, porém quadrática (no sentido de que com o ganho dependente de parâmetros é possível estabilizar sistemas não estabilizáveis por um ganho fixo derivado da condição quadrática).

Na seqüência, o artigo transcrito aborda a questão da estabilização de sistemas lineares incertos, com a preocupação adicional de reduzir o conservadorismo da amplamente utilizada abordagem quadrática, especialmente no contexto em que não se dispõe de uma formulação convexa que considere estruturas arbitrárias de controladores. Para isso, utilizam-se as condições de análise de estabilidade robusta do capítulo 2 e um algoritmo genético como ferramentas de síntese, de tal forma que o projeto do controlador é feito diretamente no espaço de variação dos seus elementos, permitindo a imediata incorporação de restrições de estrutura no procedimento de projeto. Os algoritmos genéticos são usados apenas para a busca de um controlador factível, sem preocupação com critérios de desempenho.

Finalmente, um artigo ainda não submetido trata da questão da sensibilidade de um controlador à variação dos seus parâmetros, por exemplo na realização do mesmo, também conhecida como problema da fragilidade do controlador (no sentido de que apesar do controlador ter sido projetado

para atender requisitos de robustez, a variação dos seus parâmetros pode levar à instabilidade do sistema em malha fechada).

O problema abordado no artigo parte do princípio que um determinado controlador (de realimentação estática de estados ou de saída, ou ainda de realimentação dinâmica de saída, com ou sem estrutura descentralizada) que atende determinadas especificações de desempenho é precisamente conhecido. Partindo deste ponto, procura-se obter, através de algoritmos de busca unidimensional envolvendo testes de factibilidade de um conjunto de LMIs, o domínio de não-fragilidade do controlador, i.e., o domínio de variação dos parâmetros do controlador precisamente conhecido no qual a estabilidade do sistema em malha fechada é preservada (no caso mais abrangente, a matriz do sistema em malha aberta pertence a um domínio poliedral convexo). Tanto os casos de sistemas contínuos quanto discretos no tempo são considerados.

3.1 Síntese de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares

O artigo *Robust Parameter-dependent State Feedback Controllers for Linear Uncertain Systems* [61], submetido para publicação, é transcrito na presente seção.

Na seqüência, seguem o resumo do artigo e a transcrição do texto submetido para publicação.

- **Controladores robustos dependentes de parâmetros por realimentação de estados para sistemas lineares incertos — Resumo:**

Neste artigo são fornecidas condições suficientes para a existência de um controlador robusto de realimentação de estados, dependente de parâmetros, para sistemas lineares incertos. Supõe-se que as incertezas pertencem a domínios limitados convexos (incerteza do tipo politópica). As condições de estabilizabilidade robusta são formuladas em termos de um conjunto de desigualdades matriciais lineares envolvendo apenas os vértices do domínio politópico. A partir dessas condições, o ganho de um controlador robusto dependente do vetor de parâmetros incertos, assim como uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, que pode ser usada para verificar a estabilidade do sistema em malha fechada, são obtidos. São tratados os casos de sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto. Exemplos ilustram os resultados.

ROBUST PARAMETER-DEPENDENT STATE-FEEDBACK CONTROLLERS FOR LINEAR UNCERTAIN SYSTEMS

DOMINGOS C. W. RAMOS AND PEDRO L. D. PERES

School of Electrical and Computer Engineering - University of Campinas
CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brazil
e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br

Abstract

In this paper, sufficient conditions for the existence of a robust parameter-dependent state feedback control law for linear uncertain systems are given. The uncertainties are supposed to belong to convex bounded domains (polytope type uncertainty). The robust stabilizability conditions are formulated in terms of a set of linear matrix inequalities only involving the vertices of the polytope domain. From these conditions, a robust control gain depending on the vector of uncertain parameters is obtained as well as a parameter dependent Lyapunov function which can be used to assess the closed-loop stability of the uncertain system. Both continuous-time and discrete-time systems are addressed. Examples illustrate the results.

Keywords: Parameter dependent control; Robust stability; Parameter dependent Lyapunov function; Linear parameter-varying systems; Linear matrix inequality; Convex optimization.

3.1.1 Introduction

The design of robust controllers has always been one of the major concerns in control systems theory and, undoubtedly, Lyapunov based methods are among the most useful techniques for robust feedback purposes. As a matter of fact, the Lyapunov functions have been extensively used during the last three decades to investigate stability domains as well as to assess robust performance indices for uncertain linear systems (see, for instance, [14] and references therein).

The use of a single Lyapunov function guaranteeing the stability of an entire uncertain domain (i.e. quadratic stability [9]) has allowed many robust control techniques to be developed, including as design specifications the \mathcal{H}_2 and/or the \mathcal{H}_∞ norms, pole location, etc. In most of the cases, these results (quadratic stabilizability) were formulated in terms of convex optimization problems such as LMIs (Linear Matrix Inequalities), which can be efficiently solved by means of polynomial time algorithms [29]. However, it is well known that quadratic stability can lead sometimes to very conservative results.

Recently, piecewise and parameter dependent Lyapunov functions have been used to improve the computation of stability bounds as well as to determine the existing conditions of less con-

servative robust controllers [10], [20], [25], [27], [66], [76], [78], [83]. Generally, the uncertain parameters appear explicitly in the stability conditions, many of them still formulated in terms of LMIs. In some cases, a robust feedback control law which does not depend on the uncertain parameters can be designed; in others, a parameter-dependent controller is obtained.

Many recent papers deal with the design of parameter dependent controllers. In fact, gain scheduling has proven to be a useful technique for control design in many fields of application [6], [7], [12], [40], [68]. See also [74], where a feedback control is obtained from the interpolation of a set of control gains in the context of fuzzy control systems, but closed-loop quadratic stability is required. For a good survey on gain-scheduling, see [50] and [67]. In particular, the design of gain-scheduling for Linear Parametric-Varying (LPV) systems has been addressed by several papers, which also analyze the properties of such controllers [11], [70]. However, the existing conditions for gain-scheduling design are, in general, difficult to be solved. Sometimes, matching conditions are required [25], [27], [76] or a linear fractional dependence on the uncertain parameters is supposed [5], [58].

In this paper, LMI conditions are proposed for the design of robust parameter-dependent state feedback controllers for linear uncertain systems. This result can be viewed as an extension of the robust stability analysis conditions recently appeared in [63]. The uncertain parameters are supposed to belong to convex bounded domains and assumed to be not explicitly dependent on the time variable. For instance, parameters can vary due to changes on the operating point of a system. The set of LMIs is defined at the vertices of the uncertainty polytope. A simple and easy to check feasibility test provides a state feedback control gain which depends on the vector of uncertain parameters and a parameter dependent Lyapunov function that can be used to assess the stability of the closed-loop uncertain system. Both continuous-time and discrete-time uncertain systems are investigated. Examples illustrate the results.

3.1.2 Continuous-time Systems

Consider a continuous-time linear system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Suppose that the pair (A, B) is not precisely known, but belongs to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} given by

$$\mathcal{D} = \left\{ (A, B)(\xi) : (A, B)(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j (A, B)_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\} \quad (3.2)$$

In this way, any matrix pair inside the domain \mathcal{D} can be written as a convex combination of the vertices $(A, B)_j$ of the uncertainty polytope.

The robust state feedback control problem to be addressed here is as follows: find (if one exists) a parameter dependent control gain $K(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that the closed loop uncertain system

$A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ admits a parameter dependent positive definite Lyapunov function $W(\xi)$ verifying

$$\left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right) W(\xi) + W(\xi) \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right)' < \mathbf{0} \quad (3.3)$$

In the affirmative case, the closed-loop uncertain system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ is asymptotically stable for all $(A, B) \in \mathcal{D}$.

A sufficient condition for the existence of such gain is given by the quadratic stabilizability concept [13]: if there exist a positive definite matrix $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that

$$A_j W + W A_j' + B_j Z + Z' B_j' < \mathbf{0} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

then the closed-loop system $A + BK$ with $K = ZW^{-1}$ is asymptotically stable for all $(A, B) \in \mathcal{D}$, that is

$$(A_j + B_j Z W^{-1}) W + W (A_j + B_j Z W^{-1})' < \mathbf{0} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

or equivalently

$$(A + B Z W^{-1}) W + W (A + B Z W^{-1})' < \mathbf{0} ; \quad \forall (A, B) \in \mathcal{D} \quad (3.6)$$

In this case, the same Lyapunov function W and the same control gain $K = ZW^{-1}$ are used for the entire uncertain domain.

Note that the right-hand side of (3.4) could be replaced by $-\mathbf{I}$ without loss of generality, since both inequalities hold if and only if a given pair $(A, B)_j$ is stabilizable by a linear gain. This homogeneity property will be exploited in the sequel. An interesting fact about continuous-time systems is that if (3.4) holds, than (3.6) is true not only $\forall (A, B) \in \mathcal{D}$ but also for all $(A, B)(\xi) = \sum_j \xi_j (A, B)_j$, $\xi_j \geq 0$ and $\sum_j \xi_j = \rho > 0$. This is not surprising, since if an uncertain polytope \mathcal{D} is known to be stable, then the stability of any closed-loop system ρA_{cl} with $A_{cl} \in \mathcal{D}$ and $\rho > 0$ is preserved (note that this is not true for discrete-time systems).

A parameter-dependent state feedback gain and a parameter dependent Lyapunov function, which provide less conservative results, can be obtained by means of the following lemma.

Lemma 1: Suppose there exist positive definite Lyapunov matrices $W_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and matrices $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 1, \dots, N$ such that

$$A_j W_j + W_j A_j' + B_j Z_j + Z_j' B_j' < -\mathbf{I} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & A_j W_k + W_k A_j' + A_k W_j + W_j A_k' + B_j Z_k + Z_k' B_j' + \\ & + B_k Z_j + Z_j' B_k' < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} ; \quad j = 1, \dots, N-1 ; \quad k = j+1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.8)$$

Then, the parameter-dependent state feedback control matrix given by

$$K(\xi) = Z(\xi)W(\xi)^{-1} \quad (3.9)$$

with

$$Z(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j Z_j ; W(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j W_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \quad (3.10)$$

is a robust stabilizing parameter dependent gain and $W(\xi)$ is a parameter dependent Lyapunov function for any $(A, B)(\xi) \in \mathcal{D}$.

Proof: From (3.10), it is clear that $W(\xi)$ is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (3.9)-(3.10), the following is obtained:

$$\begin{aligned} & \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right) W(\xi) + W(\xi) \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right)' = \\ & = A(\xi)W(\xi) + W(\xi)A(\xi)' + B(\xi)Z(\xi) + Z(\xi)'B(\xi)' = \\ & = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 \left(A_j W_j + W_j A_j' + B_j Z_j + Z_j' B_j' \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \left(A_j W_k + W_k A_j' + A_k W_j + W_j A_k' + B_j Z_k + \right. \\ & \left. + Z_k' B_j' + B_k Z_j + Z_j' B_k' \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Imposing conditions (3.7)-(3.8) (note that the majorization on the second term can be done only because $\xi_j \xi_k$ is always nonnegative), one gets

$$\begin{aligned} & \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right) W(\xi) + W(\xi) \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right)' < \\ & - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

since

$$(N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\xi_j - \xi_k)^2 \geq 0 \quad (3.13)$$

□

Note that if $W = W_j$ and $Z = Z_j$, $j = 1, \dots, N$ is a feasible solution to the conditions of Lemma 1, then the same control gain $K = ZW^{-1}$ can be used to stabilize the overall uncertain system. In other words, the parameter dependent gain obtained through the conditions of Lemma 1 encompasses the quadratic stabilizing state feedback gain as a particular case. In this case, only (3.7) needs to be verified since constraint (3.8) becomes redundant. This can be easily verified by adding versions of (3.7).

Note also that (3.7) exploits the homogeneity of the stabilizability condition at the vertices of \mathcal{D} (which is a necessary condition for the overall stabilizability) and that $\sum_j \xi_j = 1$ is not used (in fact, only $\sum_j \xi_j = \rho > 0$ is required).

3.1.3 Discrete-time Systems

Consider a discrete-time linear system

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.14)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Suppose that the pair (A, B) is not precisely known, but belongs to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} given by (3.2).

As in the continuous-time case, the robust state feedback control problem to be addressed here is as follows: find (if one exists) a parameter dependent control gain $K(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that the closed loop uncertain system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ admits a parameter dependent positive definite Lyapunov function $W(\xi)$ such that

$$\left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right) W(\xi) \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right)' - W(\xi) < \mathbf{0} \quad (3.15)$$

implying that $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ is asymptotically stable for all $(A, B) \in \mathcal{D}$. An equivalent condition can be obtained by applying the Schur complement [2] to (3.15), yielding¹

$$\begin{bmatrix} W(\xi) & \left(A(\xi) + B(\xi)K(\xi) \right) W(\xi) \\ * & W(\xi) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.16)$$

A sufficient condition for robust stabilization of the uncertain pair $(A, B) \in \mathcal{D}$, based on the quadratic stabilizability concept for discrete-time systems [33], is as follows: if there exist a positive definite matrix $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that

$$\begin{bmatrix} W & A_j W + B_j Z \\ * & W \end{bmatrix} > \mathbf{0} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

then the closed-loop system $A + BK$ with $K = ZW^{-1}$ is asymptotically stable for all $(A, B) \in \mathcal{D}$. Using Schur complement [2] and the convexity of (3.17), one gets

$$(A + BZW^{-1})W(A + BZW^{-1})' - W < \mathbf{0} ; \quad \forall (A, B) \in \mathcal{D} \quad (3.18)$$

In this case, the same Lyapunov function W and the same control gain $K = ZW^{-1}$ are used for the stabilization of the entire uncertain domain.

The following result provides a simple condition for the existence of a parameter dependent state feedback control of discrete-time uncertain systems.

Lemma 2: Suppose there exist positive definite Lyapunov matrices W_j and matrices Z_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$\begin{bmatrix} W_j & A_j W_j + B_j Z_j \\ * & W_j \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.19)$$

¹The symbol * indicates the block below the main diagonal for symmetric matrices.

$$\begin{bmatrix} 2W_j + W_k & A_j W_k + A_k W_j + B_j Z_k + B_k Z_j \\ * & 2W_j + W_k \end{bmatrix} > \frac{1}{(N-1)^2} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; j = 1, \dots, N; k \neq j; k = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} 2(W_j + W_k + W_\ell) & A_j W_k + A_k W_j + B_j Z_k + B_k Z_j + A_j W_\ell + A_\ell W_j + B_j Z_\ell + B_\ell Z_j + A_k W_\ell + A_\ell W_k + B_k Z_\ell + B_\ell Z_k \\ * & 2(W_j + W_k + W_\ell) \end{bmatrix} > \frac{6}{(N-1)^2} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (3.21)$$

Then, the state feedback control given by (3.9) with $Z(\xi)$ and $W(\xi)$ as in (3.10) is a robust stabilizing parameter dependent gain for the uncertain system. Moreover, $W(\xi)$ is a parameter dependent Lyapunov matrix assessing the closed-loop stability for any $(A, B)(\xi) \in \mathcal{D}$.

Proof: Since $W_j > \mathbf{0}$, $\forall j, j = 1, \dots, N$, it is clear that $W(\xi)$ given by (3.10) is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (3.2) and (3.9)-(3.10), the following is obtained:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W(\xi) & (A(\xi) + B(\xi)K(\xi))W(\xi) \\ * & W(\xi) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} W(\xi) & A(\xi)W(\xi) + B(\xi)Z(\xi) \\ * & W(\xi) \end{bmatrix} = \\ & = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 \begin{bmatrix} W_j & A_j W_j + B_j Z_j \\ * & W_j \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \begin{bmatrix} W_j + W_k & A_j W_k + A_k W_j + B_j Z_k + B_k Z_j \\ * & W_j + W_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Multiplying the right-hand side of (3.22) by $\sum_{j=1}^N \xi_j = 1$ yields

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W(\xi) & (A(\xi) + B(\xi)K(\xi))W(\xi) \\ * & W(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N \xi_j^3 \begin{bmatrix} W_j & A_j W_j + B_j Z_j \\ * & W_j \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j, k=1}^N \xi_j^2 \xi_k \begin{bmatrix} 2W_j + W_k & A_j W_k + A_k W_j + B_j Z_k + B_k Z_j \\ * & 2W_j + W_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \xi_j \xi_k \xi_\ell \begin{bmatrix} 2(W_j + W_k + W_\ell) & A_j W_k + A_k W_j + B_j Z_k + \\ & + B_k Z_j + A_j W_\ell + A_\ell W_j + \\ & + B_j Z_\ell + B_\ell Z_j + A_k W_\ell + \\ & + A_\ell W_k + B_k Z_\ell + B_\ell Z_k \\ * & 2(W_j + W_k + W_\ell) \end{bmatrix}$$

Imposing conditions (3.19)-(3.21) and using the fact that $\xi_j^2 \xi_k$ and $\xi_j \xi_k \xi_\ell$ are nonnegative, one gets

$$\begin{bmatrix} W(\xi) & (A(\xi) + B(\xi)K(\xi))W(\xi) \\ * & W(\xi) \end{bmatrix} > \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \xi_j \xi_k \xi_\ell \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.23)$$

for all $\xi_j \geq 0$ such that $\sum_{j=1}^N \xi_j = 1$. This last inequality can be verified by noting that $(N-1)\Theta + \Omega \geq 0$ with Θ and Ω defined as

$$\begin{aligned} \Theta &\triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \xi_j (\xi_j - \xi_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^3 - \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k \geq 0 \\ \Omega &\triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^{N-1} \sum_{\ell \neq j, k; \ell=2}^N \xi_j (\xi_k - \xi_\ell)^2 = \\ &= (N-2) \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k - 6 \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \xi_j \xi_k \xi_\ell \geq 0 \end{aligned}$$

This concludes the proof of the lemma. \square

Of course, (3.21) only need to be considered for uncertain systems with $N \geq 3$.

As in the continuous-time case, the conditions of Lemma 2 encompass the quadratic stabilizability conditions as a particular case, that is, if the system is quadratically stabilizable then $W = W_j$ and $Z = Z_j$, $j = 1, \dots, N$ is a feasible solution to (3.19) and (3.20)-(3.21) become redundant (this can be verified by appropriately adding versions of (3.19)). Note that the homogeneity property has also been used here, since the right-hand side of (3.19) can be imposed without loss of generality. In fact, using Schur complement on (3.19) yields $(A_j + B_j Z_j W_j^{-1}) W_j (A_j + B_j Z_j W_j^{-1})' - W_j < -\mathbf{I}$ which is a necessary condition for the stabilizability of the vertices of the polytope.

Note also that, after equation (3.22), a sufficient condition for robust stabilizability very similar to the continuous-time case could be imposed, but it would be too conservative because $\sum_j \xi_j = 1$ has not been taken into account.

3.1.4 Examples

To illustrate numerically the results provided by lemmas 1 and 2, two examples of non quadratically stabilizable systems are considered.

The first one is concerned with the continuous-time case. The system matrices (generated randomly) are given by

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.2621 & -0.3105 & 0.2355 \\ 0.0980 & 0.4249 & 0.7277 \\ 0.5562 & -0.0252 & 0.3461 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.5633 & -0.7756 & 0.8859 \\ 0.0501 & -1.0473 & 0.0258 \\ 0.6441 & -0.0683 & -0.1383 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5.2051 \\ 1.4951 \\ -2.6379 \end{bmatrix}$$

which define an uncertain domain with $N = 2$ vertices. This system is not quadratically stabilizable, but using the results of Lemma 1, it is possible to find a parameter dependent state feedback gain given by

$$K(\xi) = (\xi_1 Z_1 + \xi_2 Z_2)(\xi_1 W_1 + \xi_2 W_2)^{-1} \quad (3.24)$$

with $\xi_1 + \xi_2 = 1$ and matrices

$$W_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.4942 & 0.8208 & -1.4634 \\ 0.8208 & 0.6034 & -0.6875 \\ -1.4634 & -0.6875 & 1.0139 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.5245 & 0.7519 & -1.4190 \\ 0.7519 & 0.3969 & -0.3644 \\ -1.4190 & -0.3644 & 0.8186 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1.0547 & 0.0883 & -0.1325 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.5746 & 0.1683 & -0.3325 \end{bmatrix}$$

Figure 3.1 shows the eigenvalues of the closed-loop system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$, $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, $\xi_1 + \xi_2 = 1$ and Figure 3.2 shows the behavior of the elements of the parameter-dependent control gain $K(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \end{bmatrix}$.

Now, the discrete-time case results of Lemma 2 are applied to the following uncertain system (which is not quadratically stabilizable)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.7341 & -0.2929 & -2.1032 \\ -3.2247 & 1.4311 & -0.4320 \\ -0.5145 & 1.3814 & 2.7296 \end{bmatrix}$$

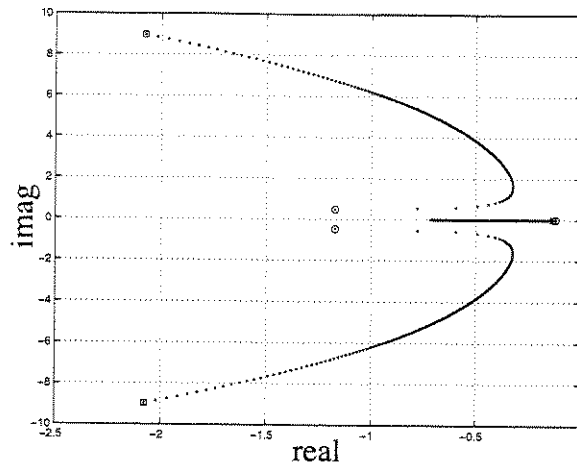


Figure 3.1: Eigenvalues of the closed-loop uncertain system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ (continuous-time case). The eigenvalues of the system at the vertices are represented by squares ($\xi_1 = 1$) and circles ($\xi_1 = 0$).

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8562 & -1.7971 & 0.1190 \\ 1.1157 & -0.9396 & -0.0345 \\ 0.2177 & 0.7609 & -0.5821 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.3905 \\ -2.9663 \\ -3.2642 \end{bmatrix}$$

Using the results of Lemma 2, a parameter-dependent state feedback gain as in (3.24) is obtained, with matrices

$$W_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.2498 & 0.4725 & -0.1766 \\ 0.4725 & 1.0697 & -0.5019 \\ -0.1766 & -0.5019 & 0.3548 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.3114 & 0.3954 & -0.1071 \\ 0.3954 & 0.7668 & -0.3846 \\ -0.1071 & -0.3846 & 0.3488 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = 10^4 \times [0.2277 \quad 0.2603 \quad 0.2311]$$

$$Z_2 = 10^4 \times [0.6545 \quad 1.3172 \quad -0.6843]$$

Figure 3.3 shows the root-loci for the closed-loop uncertain system while Figure 3.4 illustrates the behavior of the parameter-dependent state feedback control gain given by (3.24) for $\xi_1 \in [0, 1]$.

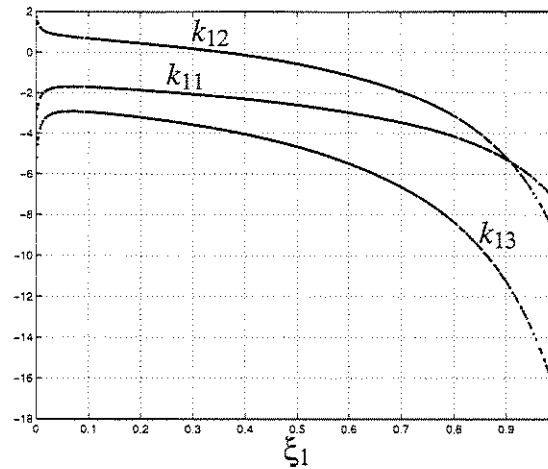


Figure 3.2: Nonlinear behavior of the elements of the parameter-dependent state feedback gain (continuous-time case).

3.1.5 Conclusion

A very simple LMI-based sufficient condition for computing robust parameter dependent state feedback gains for uncertain linear systems in convex bounded domains has been presented in this paper, for continuous as well as discrete-time systems. The conditions are formulated as a feasibility test of a set of LMIs and can be easily solved by polynomial time algorithms. The results provide robust stabilizing parameter dependent control in situations where a constant feedback cannot be obtained.

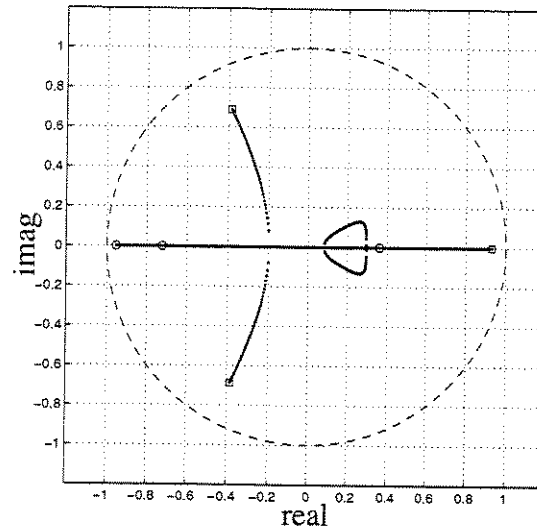


Figure 3.3: Eigenvalues of the closed-loop uncertain system $A(\xi) + B(\xi)K(\xi)$ (discrete-time case). The eigenvalues of the system at the vertices are represented by squares ($\xi_1 = 1$) and circles ($\xi_1 = 0$).

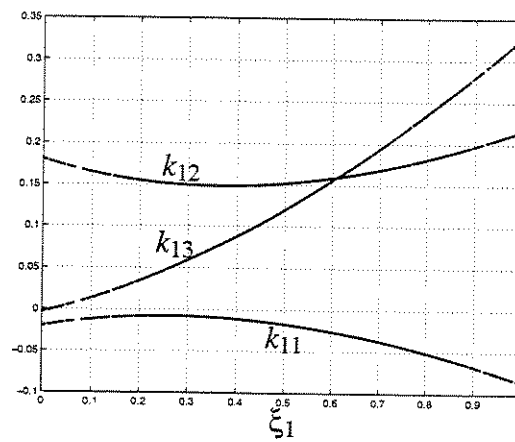


Figure 3.4: Nonlinear behavior of the elements of the parameter-dependent state feedback gain (discrete-time case).

3.2 Síntese de controle robusto usando algoritmo genético

Agora, segue o artigo *Robust Control Synthesis via a Genetic Algorithm and LMIs* [73], apresentado em congresso, que discute a obtenção de um ganho de controlador robusto de estrutura arbitrária, usando algoritmo genético.

- **Síntese de controle robusto usando um algoritmo genético e LMIs — Resumo:**

Este artigo trata do uso de algoritmos genéticos na síntese de controle robusto, no contexto da ausência de uma ferramenta convexa para tal. Para isso, uma condição de análise robusta é usada num problema de factibilidade, produzindo resultados menos conservadores que os recentes métodos de análise, baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (englobam a estabilidade quadrática), para sistemas lineares com incerteza politópica.

Dado que o projeto do controlador é baseado em um teste de factibilidade da estabilidade do sistema em malha fechada, para cada possível controlador candidato, formulado no espaço dos parâmetros do controlador, restrições adicionais são permitidas, tais como: controladores dinâmicos de baixa ordem, controladores de realimentação estática de saída, controle descentralizado, etc. O papel dos algoritmos genéticos no projeto de controladores menos conservadores e de estrutura restrita é discutido.

ROBUST CONTROL SYNTHESIS VIA A GENETIC ALGORITHM AND LMIs

RICARDO H. C. TAKAHASHI

*Department of Mathematics - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627 - 31270-010, Belo Horizonte - MG - Brazil
e-mails: taka@mat.ufmg.br*

DOMINGOS C. W. RAMOS AND PEDRO L. D. PERES

*School of Electrical and Computer Engineering - University of Campinas
CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brazil
e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br*

Abstract: This paper is concerned with the use of genetic algorithms for robust control synthesis, in a context where there is no convex formulation for such design. For that aim, a robustness analysis condition is given in terms of a linear matrix inequality feasibility problem, producing less conservative results than recent parameter dependent Lyapunov based methods (which encompasses quadratic stability) for polytopic uncertainties in linear systems. Since the design criterion is a closed-loop test formulated in the controller parameter space, any control structure constraint is allowed, such as: low-order dynamic controllers, static output feedback controllers, decentralized control, etc. The role of genetic algorithms for the design of “less conservative” and “structure-constrained” controllers is discussed.

Keywords: Genetic Algorithm, Linear Matrix Inequalities, Parameter Dependent Lyapunov Functions, Robust Control.

3.2.1 Introduction

This work deals with the following related questions: i) the need of conservativeness reduction in robust control design for linear systems (in the present case, with polytope type uncertainty in the system model); ii) the need of control system design methods for arbitrary controller structures, such as: reduced-order dynamic controllers, static output-feedback controllers, decentralized controllers, etc; iii) and the role of genetic algorithms in this conservativeness reduction and arbitrary structure control system design.

The field of robust control with small-gain-like robustness conditions started with the pioneering work of Zames at the late 70's [84, 85]. Nevertheless the conceptual synthesis that work at-

tained, it was composed with a theoretical structure of design mechanisms for control systems for which there was not any known computational tool available at that time. During the 80's, a sequence of works was developed with the aim of finding computational methods for "robust control design". Only in 1989 a practical solution to this problem was found [22], allowing the popularization of this kind of control design and the development of the first real-world applications.

A consequence of the robust control paradigm, as Zames realized [85], should be the definition of the control design problem as an optimization problem. The practical counterpart to this concept has emerged in the late 80's, first in the form of general linear optimization problems [13, 33] and later as *Linear Matrix Inequalities* — LMI's [14].

Immediately after the association of the robust control concept with the formalism of LMI's and with the powerful optimization tools of interior point methods, a lot of research effort has been devoted to the translation of former design conditions and methods to the new framework [14]. In a few years, a theoretical kernel of design algorithms became established, composed by problems with exact solutions (with necessary and sufficient conditions for solution existence and/or optimality) and problems with conservative solutions (with only sufficient conditions for solvability). When "exact" solutions were found, they appeared for the conceptually "pure" cases of static full-state-feedback and full-order dynamic output feedback. Even the problems that had exact solutions for these controller structures were solved with conservative methods only, or remained unsolved, in the case of other controller structures [23].

After this period, that roughly occurred in the 90's, a main challenge for the robust control theory arose: the development of less conservative design methods for the replacement of the conservative ones, and its extension to arbitrary structure controllers. This means that, although the exact solution of that problems could be even impossible, there should be methods for finding better solutions than the existing ones. A lot of theoretical effort is being devoted now to the development of methods that pursue this challenge. The present work is situated inside this stream.

The "polytope-type" system uncertainty description found a natural framework for its accounting in the LMI's formalism. Within this formalism, the examination of any affine condition over the set of polytope vertices indicates that the condition is satisfied inside the whole polytope. Due to this, and although the polytope uncertainty description was not new, the robust control with robustness to state-space polytopic system uncertainties has emerged with the development of LMI's for control design. Several robust control design methods were based on this reasoning, defining the so-called "guaranteed cost controllers" [14].

These guaranteed-cost controllers, however, suffered from some conservativeness, since the LMI affine condition that was used implies the system "quadratic stability", i.e., the closed loop system is stable in the whole uncertainty polytope for *a single* Lyapunov matrix [14]. This constraint, of course, is not necessary for stability, being necessary only for the solvability of that class of design algorithms.

The present work deals with the issue of conservativeness reduction for robust control synthesis in the case of polytope-type uncertainties, and arbitrary structure controllers. More precisely, some new less conservative conditions for stability analysis in polytopes are used. These conditions are

stated in the framework of LMI's, and are based on the determination of a set of Lyapunov functions that ensure the system stability in the whole polytope. They provide less conservative results even when compared with very recent parameter dependent Lyapunov methods [17, 27, 60], being very close to necessity in several examples [64, 63].

The parameterization in a standard LMI control synthesis algorithm involves the definition of some variables that render the problem convex and from which the controller can be restored after the optimization procedure. One of such variables is usually a Lyapunov matrix for the closed-loop system. This prevents the possibility of finding any controller that does not fulfill the quadratic stability assumption with such kind of parameterization. In order to obtain less conservative controllers exploring the above mentioned new robust stability conditions, the present work deals with the optimization variables directly in the controller parameter space. This renders the design algorithm non-convex.

The standard LMI convex parameterization, in general, also lose its convexity when a controller structure (different from the static state feedback or full order dynamic output feedback ones) is imposed. Here, as a by-product of the approach proposed, any controller structure can be easily introduced.

For the applicability of the above mentioned less conservative stability conditions as a method for control design, a non-convex optimization procedure must be used. In order to define a design methodology, this optimization procedure might be, in first place, repeatable, in the sense that the same solution is attained for any (or almost any) algorithm initialization. For general nonlinear optimization problems that are possibly non-convex, non-smooth (and even discontinuous), multimodal, etc, the class of stochastic optimization algorithms is well-suited to attain this specification. For these reasons, a Genetic Algorithm (GA) is used in this work.

Note that the genetic algorithms are being extensively used for the purpose of implementing the "less conservative" and/or "arbitrary structure" algorithms in several other instances of controller synthesis problems, due to the same reasons. Some examples of applications can be found in [55]. The reasoning that follows is valid, therefore, for any problem of this class.

The meaning of the solutions that are synthesized with the GA's should be understood. The solutions to convex problems found with suitable algorithms can be deterministically found and can be shown to be the exact ones. On the other hand, the solutions to general optimization problems that can be found with GA's are only probabilistically near the global solution.

This probabilistic behavior can lead to two classes of solutions: 1) Repeatable optimal solutions: these solutions, in spite of the probabilistic decision mechanics, are found almost always, no matter what are the initial conditions of the algorithm. 2) Singular-run optimal solutions: these solutions are found for some specific (and rare to occur) initial conditions only, and are not attained by most of the algorithm executions.

Of course, there are problems that have solutions between these classes. It is a matter of computational effort, in these cases, leading them to the first class, since any non-zero probability s of finding the optimal solution means a $(1 - s)$ probability of not finding this solution. Suppose, for instance, that the repeatable solutions are characterized by $s_r > 0.9$. In this case, $(1 - s_r) < 0.1$,

what can be (in a worst-case condition) additively attained with $(1-s)^k < (1-s_r)$ for a sufficiently large k . The repeatability of the solutions is a basic requisite for a computer-aided design system. This is automatically attained in convex optimization based systems, and can be attained in genetic-algorithm based systems, in the above defined sense. In this sense, the repeatable optimal solution does not need to be equal to the optimal solution, which can be a “singular-run optimal solution”. A given solvable problem can have, therefore, only repeatable solutions, only singular-run solutions, or both repeatable and singular-run ones. The repeatability of the GA optimization in a given problem, therefore, has two possible meanings: (i) the problem is sufficiently “simple” for the algorithm parameters complexity, leading to a highly probable solution that is systematically found; or (ii) up to the optimization algorithm complexity, there is no other solution.

Here, the optimization problem is of feasibility only (since, in the present case, it suffices a stable solution). Due to this, the repeatability should be understood as: for the same problem, the GA (almost) always finds a stabilizing solution, or otherwise it (almost) never finds any solution. Differently from problems where an optimal solution is searched, any repeatable solution is necessarily an exact solution.

3.2.2 Robust Stability Condition

Consider a linear system

$$\begin{aligned}\delta(x) &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.25}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^r$, and $\delta(\cdot)$ means the derivative operator for continuous-time systems, and the forward operator for discrete-time ones. Suppose that the quadruple (A, B, C, D) is not precisely known, but belongs to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} . In this way, any matrix pair inside the domain \mathcal{D} can be written as a convex combination of the vertices $(A, B, C, D)_j$ of the uncertainty polytope, i.e.

$$\mathcal{D} = \left\{ (A, B, C, D)(\xi) : (A, B, C, D)(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j (A, B, C, D)_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\}\tag{3.26}$$

Consider also a dynamic controller

$$\begin{aligned}\delta(z) &= Gz + Hy \\ u &= Fz + Ly\end{aligned}\tag{3.27}$$

where $z \in \mathbb{R}^{n_c}$. The closed-loop system becomes:

$$\begin{bmatrix} \delta(x) \\ \delta(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \triangleq \mathfrak{A} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}\tag{3.28}$$

with

$$\mathfrak{A} \triangleq A + B(\mathbf{I} - LD)^{-1}LC$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &\triangleq B(\mathbf{I} - LD)^{-1}F \quad ; \quad \mathfrak{C} \triangleq H(\mathbf{I} - DL)^{-1}C \\ \mathfrak{D} &\triangleq G + H(\mathbf{I} - DL)^{-1}DF\end{aligned}$$

Note that, in order to keep the polytope affine property, the following two conditions should both hold: i) either matrix B or C must be precisely known, or the controller must be strictly proper ($L = 0$); ii) matrix D must be precisely known (a particular case is the system being strictly proper, i.e. $D = 0$), or the controller must be strictly proper ($L = 0$). Note also that the above description encompasses the static state feedback case ($n_c = 0$, $C = \mathbf{I}$, $u = Lx$ and $\mathbb{A} = A + BL$) as well as the static output feedback case ($n_c = 0$, $u = Ly$, $y = Cx$ and $\mathbb{A} = A + BLC$).

With the above conditions, a new closed-loop polytope can be defined by $(A, B, C, D) \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{A} \in \mathcal{D}_c$. For a given controller, the robust stability of the closed-loop uncertain system \mathbb{A} can be verified through the results of Lemma 1 (continuous-time systems) and Lemma 2 (discrete-time systems). These LMI conditions encompass quadratic stability and are less conservative than other parameter dependent Lyapunov conditions recently appeared in the literature [17, 27, 60]. See [64, 63] for a numerical comparison.

Lemma 1: Suppose there exist positive definite Lyapunov matrices W_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$\mathbb{A}_j W_j + W_j \mathbb{A}'_j < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_j W_k + W_k \mathbb{A}'_j + \mathbb{A}_k W_j + W_j \mathbb{A}'_k &< \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \\ j &= 1, \dots, N-1 \\ k &= j+1, \dots, N\end{aligned} \quad (3.30)$$

Then,

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j W_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 \quad ; \quad \xi_j \geq 0 \quad (3.31)$$

is a parameter dependent Lyapunov function for any $\mathbb{A}(\xi) \in \mathcal{D}_c$.

Proof: From (3.31), $W(\xi)$ is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (3.31), the following is obtained:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\xi)W(\xi) + W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' &= \\ &\sum_{j=1}^N \xi_j^2 (\mathbb{A}_j W_j + W_j \mathbb{A}'_j) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k (\mathbb{A}_j W_k + W_k \mathbb{A}'_j \\ &\quad + \mathbb{A}_k W_j + W_j \mathbb{A}'_k)\end{aligned} \quad (3.32)$$

Imposing conditions (3.29)-(3.30) and the fact that $\xi_j \xi_k \geq 0$, one gets

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}(\xi)W(\xi) + W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' < \\ & - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \right) \mathbf{I} \\ & \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.33)$$

since

$$\begin{aligned} (N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k &= \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\xi_j - \xi_k)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

□

Lemma 2: If there exist positive definite Lyapunov matrices W_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$\mathbb{A}_j W_j \mathbb{A}_j' - W_j < -\mathbf{I} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_j W_j \mathbb{A}_k' + \mathbb{A}_k W_j \mathbb{A}_j' + \mathbb{A}_j W_k \mathbb{A}_j' - 2W_j - W_k \\ & < \frac{1}{(N-1)^2} \mathbf{I} ; \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ k \neq j, k = 1, \dots, N \end{array} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_k W_j \mathbb{A}_\ell' + \mathbb{A}_\ell W_j \mathbb{A}_k' + \mathbb{A}_j W_k \mathbb{A}_\ell' + \mathbb{A}_\ell W_k \mathbb{A}_j' \\ & + \mathbb{A}_j W_\ell \mathbb{A}_k' + \mathbb{A}_k W_\ell \mathbb{A}_j' \\ & - 2(W_j + W_k + W_\ell) < \frac{6}{(N-1)^2} \mathbf{I} \\ & \begin{array}{l} j = 1, \dots, N-2 \\ k = j+1, \dots, N-1 \\ \ell = k+1, \dots, N \end{array} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Then, $W(\xi)$ given by (3.31) is a parameter dependent positive definite Lyapunov matrix for any $\mathbb{A}(\xi) \in \mathcal{D}_c$.

Proof: See [63].

3.2.3 Feasible Solution Search with a Genetic Algorithm

The synthesis algorithm that searches for a feasible solution for the robust stabilization problem is as follows.

Define vector K as the vector of controller parameters. Note that, for constrained structure controllers, the space of controller parameters simply lose some dimensions in relation to the full-order dynamic controller defined by (3.27). This procedure can generate, for instance, static output feedback controllers, decentralized controllers, saturated controllers, reduced-order dynamic controllers (a PID controller, for instance), etc. The optimization is performed over the space of free controller parameters.

The overall search domain is defined in terms of upper and lower bounds to the entries of the state feedback gains. In other words, K_{ub} and K_{lb} are defined in such a way that the control parameter vector K satisfies the element-wise inequalities $K_{lb} \preceq K \preceq K_{ub}$.

Let a controller parameter vector K^i belonging to the parameter domain be given, where i stands for a fixed individual. Consider the set of closed-loop constraints (3.29), (3.30), (3.31) for the continuous-time system (or, equivalently, (3.35), (3.36), (3.37) for discrete-time systems), which can be stated as $\Phi(K^i) < 0$ in terms of LMI's. The following objective function is defined

$$\begin{aligned} f(K^i) &= \arg_t \min t \\ \text{subject to } &\Phi(K^i) < t \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.38)$$

This LMI system is solved by an algorithm that is set to stop as soon as a $t \leq 0$ is found, if it occurs. If no such t is found, the system is found to be unfeasible and a minimum $t > 0$ is found. Each candidate solution K^i is associated, in this way, to a value $f(K^i)$ that, in some sense, measures its “distance” to feasibility. Note that once a feasible solution is found, the search algorithm stops, which means that all vectors K^i are unfeasible in the course of the optimization procedure. The function to be minimized is $f(\cdot)$, as defined in (3.38).

The genetic algorithm used in the stabilizing control synthesis has been chosen among several similar alternatives that could be used in the same way. The particular implementation used here (based on [56]) has the following features that are stated for data reproducibility:

- the individuals are coded as vectors of floating point real numbers;
- the crossover operation is defined as the substitution of two individuals by two random convex combinations of them;
- the mutation operator is defined as the substitution of one individual by another that is the original with one element randomly (i.e. uniformly distributed inside the interval $[0, 1]$) selectively perturbed. Perturbations are greater in early generations than in later ones, allowing a tuning capability of the “optimal” solution, if it exists (the best practical solution);
- at each generation, only a subset of the population is randomly chosen to be modified by the “reproduction operations” of crossover and mutation;
- the selection procedure is defined as the “Stochastic Universal Sampling” [56];
- the algorithm is tailored to be “elitist” (i.e. the best individual of each generation is almost likely

to be preserved) and the best individual of all generations is reported as the solution of the problem;

- the “fitness function” uses the linear scaling.

The algorithm parameters used here are: population size: 80; crossover probability: 0.6; mutation probability: 0.05; maximum of generations: 100; number of individuals for “reproduction”: 32; scaling factor of fitness function: 1.8.

3.2.4 Extension to LPV Control

Another problem that can be addressed through the combination of the robust stability conditions of lemmas 1 and 2 and a genetic algorithm is the determination of an LPV control. For simplicity, this is presented here for the state-feedback case only. The generalization for the dynamic control case is straightforward.

Suppose that the input matrix B in (3.25) is precisely known and the uncertainty is only in matrix A , that is, A belongs to an uncertain domain described as in (3.26). The aim is to determine, if possible, a linear parametric varying state feedback control $K(\xi)$ given by

$$K(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j K_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \quad (3.39)$$

such that the closed-loop uncertain system $\mathbb{A} \triangleq A(\xi) + BK(\xi)$ is asymptotically stable for all $A \in \mathcal{D}_A$. Since the vertices A_j, K_j define closed-loop vertices \mathbb{A}_j , the robust stability results can be used in order to verify the feasibility of an LPV gain (3.39).

Note that the existence of such an LPV state feedback gain is a necessary condition for the existence of a robust state feedback control (i.e. $K_j = K, j = 1, \dots, N$), indicating that this procedure can be used as a previous test for the existence of robust gains. Of course, in this case the GA is required to search for a set of control gains $K_j, j = 1, \dots, N$, such that the robust stability conditions are satisfied.

3.2.5 Examples

In this section some cases of state-feedback controller design for non-quadratically stabilizable systems are presented. Since for state feedback control there is a convex test that can guarantee the impossibility of quadratic stabilizability [14], the property of conservativeness reduction of the proposed algorithm becomes clear.

For the purpose of giving a meaning to the computational time that is presented, the following informations are needed: a numerical evaluation of the algorithm has been performed in a PC with a Pentium-III 700 MHz and 64 Mbytes of RAM memory using Matlab code.

The upper and lower bounds to the gain entries (r, s) have been determined from the Linear Quadratic Regulator (with $Q = I$ and $R = I$ weighting matrices) solutions computed at each vertex

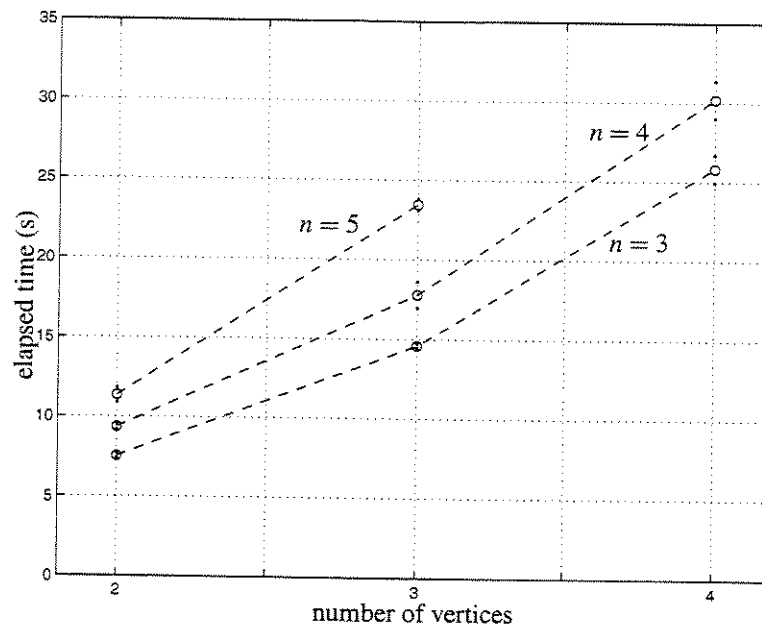


Figure 3.5: Genetic algorithm performance for the search of a robust control gain K with $m = 1$ (mean value is indicated by \circ and variance by \cdot).

$j, j = 1, \dots, N$ of the uncertainty polytope in the following way:

$$K_{ub}(r, s) = \max_j K_j(r, s) + 0.8 \left| \max_j K_j(r, s) \right|$$

$$K_{lb}(r, s) = \min_j K_j(r, s) - 0.8 \left| \min_j K_j(r, s) \right|$$

As first example, several randomly generated uncertain continuous-time systems not quadratically stabilizable have been investigated, with a single input through a precisely known matrix B and two situations: i) robust state feedback gain (figure 3.5) and ii) LPV state feedback gain (figure 3.6), for $N = 2, 3, 4$ (number of vertices) and $n = 3, 4, 5$ states. The average elapsed time and the variances for solution obtained in the initial population of gains $K^i, i = 1, \dots, 80$) indicated in the figures grows almost linearly with the number of vertices up to $N = 4$. For $N > 4$, the genetic algorithm fails to find a feasible solution in both situations. Note that these problems cannot be solved by means of classical known algorithms such as LMI optimization procedures, because the systems are not quadratically stabilizable. Despite the not too large number of vertices, these problems are hard to be solved.

Similar behavior is expected when the number of control inputs increases and $n > m$, but it seems that a quadratic stabilizing state feedback gain always exists whenever $n - m = 1$.

The second example is concerned with a continuous-time uncertain system with two vertices

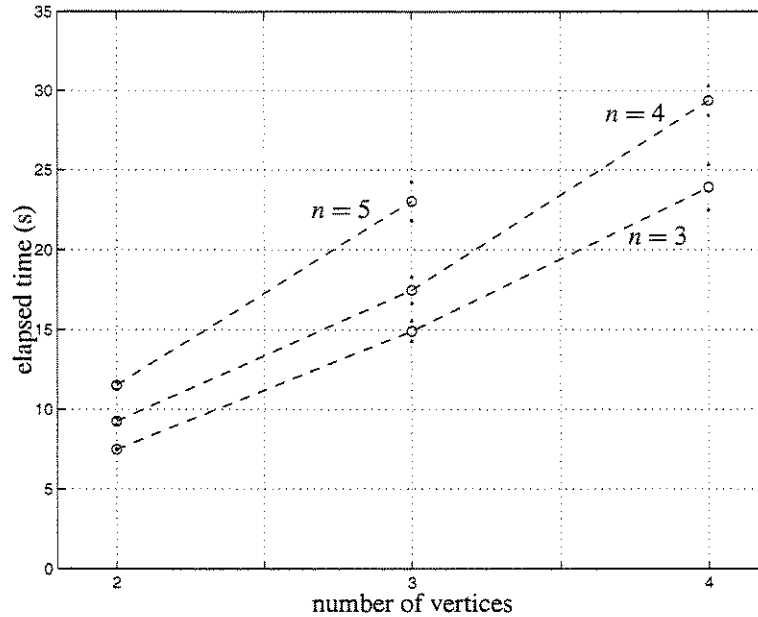


Figure 3.6: Genetic algorithm performance for the search of an LPV robust control gain $K(\xi)$ with $m = 1$ (mean value is indicated by \circ and variance by \cdot).

(not quadratically stabilizable) given by

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.634 & 0.019 & 0.621 \\ 0.858 & 0.290 & 0.738 \\ 0.685 & 0.401 & 0.323 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.624 & 0.009 & 0.811 \\ 0.360 & 0.061 & 0.234 \\ 0.233 & 0.271 & 0.456 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.402 \\ 0.405 \\ 0.355 \end{bmatrix}$$

Using the conditions of Lemma 1 and the genetic algorithm, the following robust state feedback control gain has been obtained

$$K_r = \begin{bmatrix} -2.882 & -0.506 & -4.461 \end{bmatrix}$$

as well as the LPV control given by $K(\xi) = \xi_1 K_1 + \xi_2 K_2$ with $\xi_1 + \xi_2 = 1$, $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ and

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3.725 & -3.647 & -3.948 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -6.346 & -0.464 & -5.116 \end{bmatrix}$$

figure 3.7 shows how the elements of $K(\xi)$ vary along with ξ_1 . As intuition would indicate, the entries of the robust state feedback control gain lies somewhere around the values of the elements

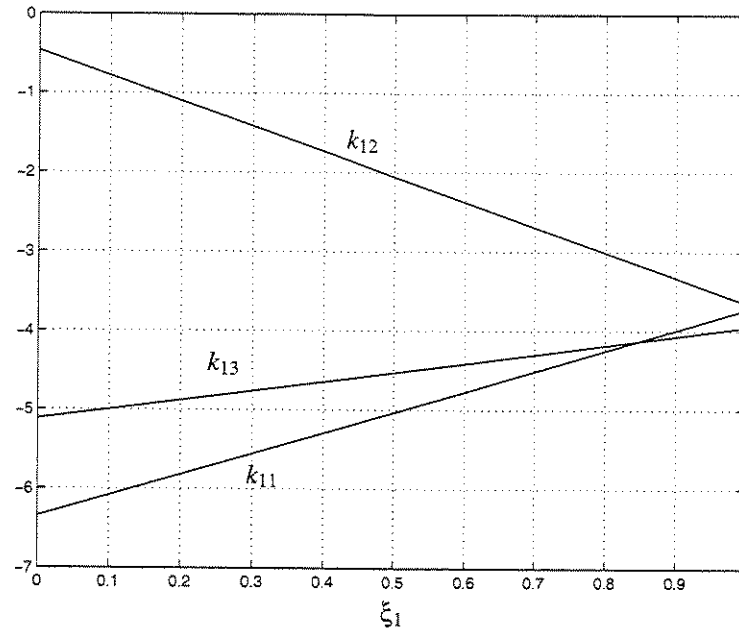


Figure 3.7: Elements of the LPV state feedback gain (second example).

of K_1 and K_2 . An interesting evaluation that can be performed by using the results of Lemma 1 is the determination of the maximum and minimum values for the entries of the control gain K such that the robust stability of the closed-loop system is guaranteed. For this particular example, the robust stability is guaranteed for all $K = [k_{11} \ k_{12} \ k_{13}]$ such that $-2.9757 \leq k_{11} \leq -2.7833$, $-0.5842 \leq k_{12} \leq -0.3968$, $-4.6026 \leq k_{13} \leq -4.3415$.

3.2.6 Conclusion

This paper has shown that a genetic algorithm can be employed as an effective *computer-aided-design* tool for the non-convex problem of finding robust stabilizing controllers under the assumptions of: (i) linear systems non-quadratically stabilizable with polytopic uncertainty; and (ii) structure-constrained controllers. A precise statement of the significance of the genetic algorithm outputs has been sketched here too.

3.3 Domínio de estabilidade não-frágil de controladores robustos

O artigo *Maximum Non-fragile Stability Domains for Robust Control Gains* [72], em preparação, que trata do problema da determinação do domínio de estabilidade não-frágil para um ganho de controlador robusto de estrutura arbitrária, é apresentado a seguir.

- **Domínios máximos de estabilidade não-frágil para ganhos de controlador Robusto — Resumo:**

Neste artigo, um algoritmo para estimar o domínio máximo de estabilidade não-frágil é proposto. Para um dado ganho de controlador robusto, um conjunto de condições de estabilidade descritas por LMIs facilmente testáveis é usado para estimar o maior politopo no qual o sistema robustamente controlado permanece estável. A realimentação de estados e de saída é analisada, tanto nos casos contínuo quanto discreto no tempo.

MAXIMUM NON-FRAGILE STABILITY DOMAINS FOR ROBUST CONTROL GAINS

RICARDO H. C. TAKAHASHI

*Department of Mathematics - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627 - 31270-010, Belo Horizonte - MG - Brazil
e-mails: taka@cpdee.ufmg.br*

DOMINGOS C. W. RAMOS AND PEDRO L. D. PERES

*School of Electrical and Computer Engineering - University of Campinas
CP 6101, 13081-970, Campinas - SP - Brazil
e-mails: {domingos,peres}@dt.fee.unicamp.br*

Abstract In this paper, an algorithm to compute maximum non-fragile stability domains is proposed. For a given robust control gain, simple and easy-to-check robust stability conditions based on linear matrix inequalities are used to compute the largest polytope inside which the robust controlled system remains stable. The output and the state feedback control are analyzed, in both continuous-time and discrete-time cases.

Keywords: Non-fragile control; Stability Domains; Linear Matrix Inequalities; Parameter Dependent Lyapunov Functions.

3.3.1 Introduction

The question of sensitivity of any design to its design parameters is a long standing issue, for instance, in the context of optimization methods. This question has been identified a long time ago, in the context of control design (see [21]). However, this precise question has been found to occur also in the context of robust control design methods in 1997 [45], what has caused some surprise due to a common-sense belief that robust control would take closed-loop systems away from the instability caused by any uncertainty. The sensitivity of robustly-designed controllers to variations in their own parameters has been named “fragility” in that reference. The controversy [41], [46], [54], that followed the publication of [45] perhaps has helped to establish an awareness on the role of the traditional robust control methods on preventing only the effect of the uncertainties that have been explicitly foreseen in the design, and nothing more.

Reference [45] has only raised the issue of fragility, leaving some questions unanswered:

- How to detect that a controller is fragile, i.e., it is “excessively” sensitive to parameter changes? The same question could be stated, in a more sensitive way, as: how to quantify the fragility of a controller?

In [45], the fragility has been measured with a method that seems to follow a “Monte Carlo” principle. There is no other reference to this issue in literature after that.

- How to design non-fragile controllers?

There is no solution to this question in [45]. After that reference, several solutions that are suitable for specific formats of controller parameter uncertainties, standing on non-convex algorithms were proposed [24], [37], [79]. In reference [71], it was shown that a large class of fragility problems can be mapped into some conventional robust control design methods, being solved with the same former convex algorithms. This means: the designer specifies the size of controller uncertainty as one of the design method inputs; the design algorithm returns a controller that is non-fragile, up to that uncertainty size.

The answers presented in [71] are not still completely satisfactory, however, because there are some kinds of controller design methods that cannot be put, at this moment, in a form that allows the non-fragile design.

This paper establishes the design of non-fragile controllers in a basis that is complementary to that employed in [71]. In the present paper, the proposed design procedure is:

1. Find a controller (that can be or not be based on a robust design method) using any known method of design;
2. Compute a stability region around that controller, using a new stability test that is less conservative than the traditional “quadratic stability - based” ones;
3. If the controller is found to be “fragile”, i.e., to lie near the stability boundary, move it to a region that is sufficiently far from that boundary.

Note that even a non-robust controller (i.e., a controller that has been design without any concern to its behavior in the presence of system uncertainties) can be “robustified” with this procedure, since other uncertainties than the controller parameter ones can be taken in account for the stability region computation and the controller redesign. This design method also approximately solves the question of how to quantify a controller “fragility”, by the computation of the stability region with low conservativeness.

3.3.2 Stability Region Computation: Problem Formulation

The problem of stability region computation is presented, in the following subsections, in ascending order of complexity: first for the state feedback control structure, second for the static output feedback controller, and finally for the dynamic output feedback controller. The three cases are written in a form that allows their insertion in the stability region computation engine, that will be presented in the next section.

Static State Feedback

Consider a linear uncertain system given by

$$\delta[x] = Ax + Bu \quad (3.40)$$

where $\delta[x] = \dot{x}$ for continuous-time systems and $\delta[x] = x(t+1)$ in the discrete-time case. Furthermore, $x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control and $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an uncertain dynamic matrix belonging to a polyhedral domain \mathcal{D}_A given by

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A : A = \sum_{\ell=1}^M \zeta_{\ell} A_{\ell} ; \sum_{\ell=1}^M \zeta_{\ell} = 1 ; \zeta_{\ell} \geq 0 \right\} \quad (3.41)$$

In other words, any $A \in \mathcal{D}_A$ can be written as a convex combination of the M vertices A_{ℓ} of \mathcal{D}_A .

Suppose that a robust state feedback control law $u = K_0 x$ has been determined, with $K_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, such that the closed-loop system $A + BK_0$ is stable for all $A \in \mathcal{D}_A$.

The problem to be investigated is as follows: determine the maximum polytopic domain \mathcal{D}_K such that the closed-loop system $A + BK$ remains stable for all $A \in \mathcal{D}_A$ and for all $K \in \mathcal{D}_K$. Since the robust control gain K_0 is supposed to be known, the search for the maximum non-fragile stability domain can be formulated in the following way.

Suppose that the nominal robust control gain K_0 can be perturbed in each one of its entries, that is,

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i E_i \quad (3.42)$$

where $\kappa \triangleq n \times m$ and E_i is a matrix of zeros with only an 1 at the perturbation direction to be investigated. For example, if $K_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The search for the maximum stability domain can be described in terms of the parameters α_i : find the positive values α_{mi} and α_{Mi} such that the closed-loop uncertain system given by

$$A + B(K_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i E_i)$$

remains stable for all α_i such that

$$\alpha_i \in [-\alpha_{mi}, \alpha_{Mi}] \quad ; \quad i = 1, \dots, \kappa$$

for all $A \in \mathcal{D}_A$.

Note that the parameter vectors α_m and α_M define a polyhedron with 2^k vertices inside which $\alpha \in \mathbb{R}^k$ can assume any value and the system remains stable. In terms of the control gain K , using vectors α_m and α_M one can easily determine K_m and K_M such that the closed-loop uncertain system $A + BK$ remains stable for all $A \in \mathcal{D}_A$ and for all K such that

$$K_m \preceq K \preceq K_M$$

(the above inequalities are element-wise). Of course, for $\alpha = 0$, the nominal robust control gain K_0 is recovered.

Since the uncertain system $A \in \mathcal{D}_A$ has already M vertices, for each pair α_m and α_M an uncertain closed-loop system with $N \triangleq M \times 2^k$ vertices is defined.

Static Output Feedback

Suppose now that the state is not available for feedback, but only an output vector y given by

$$y = Cx \quad (3.43)$$

where $y \in \mathbb{R}^p$ and $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. The problem of robust stabilization is to find a static output feedback gain $F_0 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ such that the closed loop system

$$A_{cl} \triangleq A + BF_0C \quad (3.44)$$

is stable for all $A \in \mathcal{D}_A$. Although more involved and not yet completely solved in the literature (see for instance [23] and references therein), for a given stabilizing gain F_0 , a maximum polytopic domain \mathcal{D}_F can be established such that $A + BFC$ is stable $\forall A \in \mathcal{D}_A$ and $\forall F \in \mathcal{D}_F$. Using a development similar to the one used in the state feedback case, F_m and F_M can be determined such that A_{cl} given by (3.44) is stable for all $A \in \mathcal{D}_A$ and for all F such that

$$F_m \preceq F \preceq F_M$$

Dynamic Output Feedback

The uncertain system (3.40)-(3.41) with the output given by (3.43) can be robustly stabilized by means of a dynamic output feedback controller with the following state space realization

$$\begin{aligned} \delta[x_c] &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c \end{aligned} \quad (3.45)$$

where $\delta[x_c] = \dot{x}_c$ for continuous-time controllers, $\delta[x_c] = x_c(t+1)$ in the discrete-time case and $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$.

Defining the augmented state vector

$$\tilde{x} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

the controlled closed-loop dynamic system matrix can be written as

$$\tilde{A}_{cl} \triangleq \tilde{A} + \tilde{B}G_0\tilde{C} \quad (3.46)$$

with

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

and the controller parameters of equation (3.45) appear in matrix G_0

$$G_0 \triangleq \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

In this formulation, the stability of the controlled closed-loop system can be inferred as in the case of static output feedback, and G_m, G_M can be determined such that \tilde{A}_{cl} given by (3.46) is stable for all $A \in \mathcal{D}_A$ and for all G such that

$$G_m \preceq G \preceq G_M$$

3.3.3 Maximum Domain Determination

Based on the sufficient robust stability conditions presented in the sequel, an algorithm has been constructed to iteratively increase the values of α_{mi} and α_{Mi} in order to get the maximum stability domain. The basic ideas are: a) define an overall domain for the search; b) choose a sequence of directions i to investigate; c) use a bisection method to improve the bounds while testing the robust stability; d) repeat until no significative improvement is obtained or the maximum number of iterations is attained.

The basic stability condition to be employed is different in the continuous-time and in the discrete-time cases.

Continuous-time Robust Stability Condition

Consider a continuous-time linear system

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) \quad (3.47)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$. Matrix \mathbb{A} is not precisely known, but belongs to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} . In this way, any matrix inside the domain \mathcal{D} can be written as a convex combination of the vertices A_j of the uncertainty polytope, i.e.

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbb{A}(\xi) : \mathbb{A}(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j A_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\} \quad (3.48)$$

The stability of the closed-loop uncertain system \mathbb{A} can be verified through the following result.

Lemma 1: Suppose there exist positive definite Lyapunov matrices W_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$\mathbb{A}_j W_j + W_j \mathbb{A}_j < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

$$\mathbb{A}_j W_k + W_k \mathbb{A}'_j + \mathbb{A}_k W_j + W_j \mathbb{A}'_k < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad k = j+1, \dots, N \quad (3.50)$$

Then,

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j W_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 \quad ; \quad \xi_j \geq 0 \quad (3.51)$$

is a parameter dependent Lyapunov function for any $\mathbb{A}(\xi) \in \mathcal{D}$.

Proof: From (3.51), $W(\xi)$ is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Using (3.51), the following is obtained:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\xi)W(\xi) + W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' &= \sum_{j=1}^N \xi_j^2 (\mathbb{A}_j W_j + W_j \mathbb{A}'_j) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k (\mathbb{A}_j W_k + W_k \mathbb{A}'_j + \mathbb{A}_k W_j + W_j \mathbb{A}'_k) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Imposing conditions (3.49)-(3.50), one gets

$$\mathbb{A}(\xi)W(\xi) + W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' < - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{0} \quad (3.53)$$

since

$$(N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\xi_j - \xi_k)^2 \geq 0 \quad (3.54)$$

□

Discrete-time Robust Stability Condition

Consider a closed-loop discrete-time linear system

$$x(t+1) = \mathbb{A}x(t) \quad (3.55)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$. Suppose that the matrix \mathbb{A} is not precisely known, but belongs to a polytope type uncertain domain \mathcal{D} given by (3.48).

The stability of the uncertain system (3.55) with $\mathbb{A} \in \mathcal{D}$ can be assessed through a parameter dependent positive definite Lyapunov function $W(\xi)$ such that

$$\mathbb{A}(\xi)W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' - W(\xi) < \mathbf{0} \quad (3.56)$$

If such $W(\xi)$ exists, the closed-loop uncertain system is stable for all $\mathbb{A}(\xi)$.

As in the case of continuous-time systems, the robust stability of the closed-loop uncertain system \mathbb{A} can be verified through the following result.

Lemma 2: If there exist positive definite Lyapunov matrices W_j , $j = 1, \dots, N$ such that

$$\mathbb{A}_j W_j \mathbb{A}'_j - W_j < -\mathbf{I} ; j = 1, \dots, N \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_j W_j \mathbb{A}'_k + \mathbb{A}_k W_j \mathbb{A}'_j + \mathbb{A}_j W_k \mathbb{A}'_j - 2W_j - W_k < \frac{1}{(N-1)^2} \mathbf{I} \\ j = 1, \dots, N ; k \neq j, k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_k W_j \mathbb{A}'_\ell + \mathbb{A}_\ell W_j \mathbb{A}'_k + \mathbb{A}_j W_k \mathbb{A}'_\ell + \mathbb{A}_\ell W_k \mathbb{A}'_j \\ + \mathbb{A}_j W_\ell \mathbb{A}'_k + \mathbb{A}_k W_\ell \mathbb{A}'_j - 2(W_j + W_k + W_\ell) < \frac{6}{(N-1)^2} \mathbf{I} \\ j = 1, \dots, N-2 ; k = j+1, \dots, N-1 ; \ell = k+1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.59)$$

Then, $W(\xi)$ given by (3.51) is a parameter dependent positive definite Lyapunov matrix for any $(A, B)(\xi) \in \mathcal{D}$.

Proof: Clearly, $W(\xi)$ given by (3.51) is a positive definite parameter dependent Lyapunov matrix. Then,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\xi)W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' - W(\xi) &= \mathbb{A}(\xi)W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \right)^2 W(\xi) = \\ &= \sum_{j=1}^N \xi_j^3 (\mathbb{A}_j W_j \mathbb{A}'_j - W_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k (\mathbb{A}_j W_j \mathbb{A}'_k + \mathbb{A}_k W_j \mathbb{A}'_j + \mathbb{A}_j W_k \mathbb{A}'_j - 2W_j - W_k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \xi_j \xi_k \xi_\ell (\mathbb{A}_k W_j \mathbb{A}'_\ell + \mathbb{A}_\ell W_j \mathbb{A}'_k + \mathbb{A}_j W_k \mathbb{A}'_\ell + \mathbb{A}_\ell W_k \mathbb{A}'_j \\ &\quad \quad \quad + \mathbb{A}_j W_\ell \mathbb{A}'_k + \mathbb{A}_k W_\ell \mathbb{A}'_j - 2(W_j + W_k + W_\ell)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Imposing conditions (3.57)-(3.59), one gets

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\xi)W(\xi)\mathbb{A}(\xi)' - W(\xi) &< - \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \xi_j \xi_k \xi_\ell \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

for all $\xi_j \geq 0$ such that $\sum_{j=1}^N \xi_j = 1$. This last inequality can be verified by noting that $(N-1)\Theta + \Omega \geq 0$ with Θ and Ω defined as

$$\begin{aligned} \Theta &\triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \xi_j (\xi_j - \xi_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \xi_j^3 - \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k \geq 0 \\ \Omega &\triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^{N-1} \sum_{\ell \neq j, k; \ell=2}^N \xi_j (\xi_k - \xi_\ell)^2 = \\ &= (N-2) \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \xi_j^2 \xi_k - 6 \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \xi_j \xi_k \xi_\ell \geq 0 \end{aligned}$$

This concludes the proof of the lemma. \square

3.3.4 Examples

The first example consists of an uncertain continuous-time system randomly generated with vertex matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4123 & 0.2332 & 0.8437 \\ 0.4248 & 0.3392 & 0.6307 \\ 0.5637 & 0.8711 & 0.7796 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.2003 & 0.7507 & 0.9537 \\ 0.7776 & 0.2725 & 0.2703 \\ 0.9960 & 0.1712 & 0.4658 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

and the input matrix

$$B = \begin{bmatrix} 0.0471 \\ 0.0570 \\ 0.4979 \end{bmatrix}$$

For this system, a robust state feedback gain can be determined. For instance, using an auxiliary output

$$z = C_2 x + D_2 u \quad (3.63)$$

with $C_2' D_2 = \mathbf{0}$ and $D_2' D_2 = \mathbf{I}$ and defining a disturbance input $B_1 w$ to the system, with

$$C_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad B_1 = \mathbf{I} \quad (3.64)$$

the guaranteed \mathcal{H}_2 state feedback control is given by (for instance, using the convex approach from [34])

$$K_0 = [-7.1012 \quad -10.1873 \quad -6.5463]$$

The maximum robust stability domain obtained by using the conditions of Lemma 1 for the $2 \times 2^3 = 16$ vertices closed-loop uncertain system is given by (the overall search domain for each one of the entries of the control gain K has been fixed as $k_{0ij} \pm 10$)

$$K_m = [-8.1635 \quad -20.1794 \quad -10.9770]; K_M = [-4.3248 \quad -9.0634 \quad -5.2078] \quad (3.65)$$

To illustrate, figure 3.8 shows the pole location for some instances (combined pair-by-pair) of the closed-loop system. Note that the maximization of the polytopic domain \mathcal{D}_K ends up with some poles getting very close to the imaginary axis.

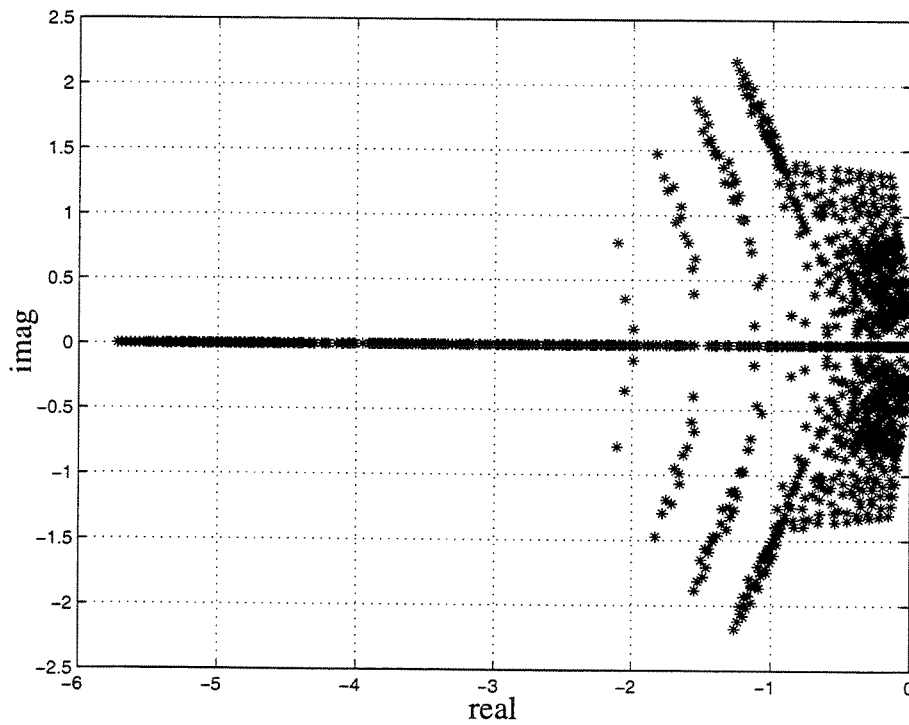


Figure 3.8: Eigenvalues of $A + BK$ for $A = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$, with $\alpha \in [0, 1]$, A_1, A_2 given by (3.62), and for K such that $K_m \preceq K \preceq K_M$ with K_m, K_M given by (3.65).

The second example is concerned with the static output feedback stabilization of an uncertain continuous-time system which represents the linearized dynamic equation of the VTOL helicopter (borrowed from [44] and also used in [36]). The data are

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 10.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & a & -0.7070 & b \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.4422 & -0.1761 \\ 3.5000 & 7.5922 \\ 5.5200 & -4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

with the uncertain parameters

$$-0.6319 \leq a \leq 1.3681 \ ; \ 1.2200 \leq b \leq 1.6200$$

which constitutes a 4 vertices uncertain system. In [36], a quadratically stabilizing output feedback gain has been obtained

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1.0086 \\ -6.1051 \end{bmatrix}$$

Using the results of Lemma 1, the maximum polytopic domain \mathcal{D}_F in which the uncertain system remains stable is given by (the search has been done inside the domain $f_{0ij} \pm 10$)

$$\begin{bmatrix} -0.2795 \\ -16.0959 \end{bmatrix} \leq F \leq \begin{bmatrix} 4.3606 \\ -4.0272 \end{bmatrix}$$

A precisely known discrete-time system has been considered as the third example. The system matrices are given by

$$A = \begin{bmatrix} -0.4326 & 0.2877 & 1.1892 \\ -1.6656 & -1.1465 & -0.0376 \\ 0.1253 & 1.1909 & 0.3273 \end{bmatrix} ; \ B = \begin{bmatrix} 0.1746 \\ -0.1867 \\ 0.7258 \end{bmatrix}$$

The optimal \mathcal{H}_2 state feedback control gain obtained through the solution of a discrete-time Riccati equation with $Q = \mathbf{I}$ and $R = \mathbf{I}$ is

$$K_0 = [-1.7842 \quad -1.9629 \quad 1.1528]$$

and the maximum non-fragile stability domain obtained from the conditions of Lemma 2 is (the search has been performed inside the domain $k_{0ij} \pm 10$)

$$K_m = [-2.0330 \quad -2.2371 \quad 0.8545] ; K_M = [-1.4892 \quad -1.7178 \quad 1.4394] \quad (3.66)$$

Figure 3.9 shows the closed-loop pole location inside the polytope \mathcal{D}_K with $2^3 = 8$ vertices defined by K_m and K_M as in (3.66).

3.3.5 Conclusion

A simple way to determine maximum non-fragile robust stability polytopic domains has been proposed. The conditions assuring robust stability are formulated in terms of a set of LMIs described at the vertices of the uncertain domain.

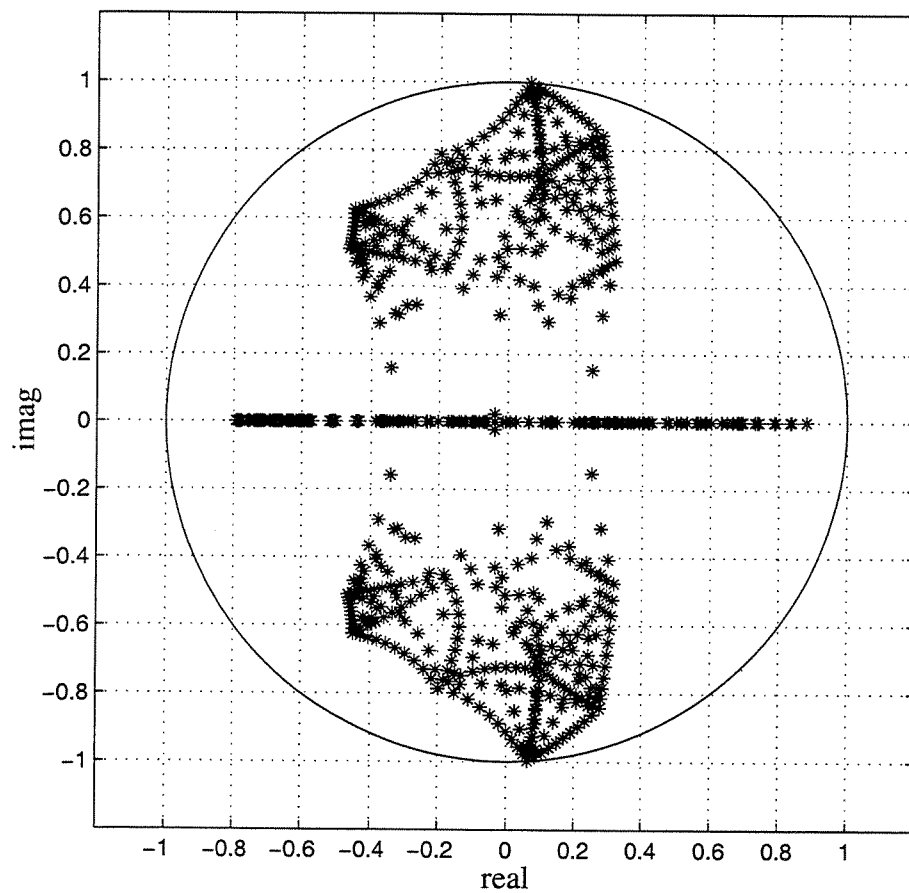


Figure 3.9: Pole location of the discrete-time system $A + BK$ for K such that $K_m \preceq K \preceq K_M$ with K_m, K_M given by (3.66).

Capítulo 4

Conclusão Geral

A análise de estabilidade e a síntese de controladores pode ser feita, entre outras maneiras, através do método de Lyapunov baseado em uma mesma função quadrática de Lyapunov, com uma matriz constante, e envolvendo a descrição das condições de estabilidade e de síntese através de LMIs.

Entretanto, como amplamente discutido na literatura relevante, apesar dessa abordagem (dita quadrática) ser amplamente difundida e abrangente (permite tratar, por exemplo, o caso em que o sistema linear é incerto com taxas de variação paramétrica arbitrárias), produz resultados conservadores em muitos casos, principalmente devido à limitação de graus de liberdade inerentes ao uso de uma mesma matriz de Lyapunov que satisfaça o conjunto de restrições.

Visando reduzir o conservadorismo, alternativas à abordagem quadrática têm sido recentemente pesquisadas, especialmente através de funções de Lyapunov lineares por partes [66], [78], funções bi-quadráticas [76], [77], e funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [17], [32], [60].

Neste contexto, e considerando sistemas lineares com incerteza paramétrica politópica invariante no tempo, foi objeto de estudo neste trabalho a obtenção de condições menos conservadoras que a amplamente usada análise de estabilidade quadrática de sistemas lineares incertos baseada em uma mesma matriz de Lyapunov e outras que também procuram reduzir o conservadorismo. Ao invés de uma função de Lyapunov com uma matriz fixa, foi usada uma função quadrática com matriz de Lyapunov dependente de parâmetros, obtida da combinação convexa de matrizes de Lyapunov, factíveis para um conjunto de LMIs descritas nos vértices do domínio de incerteza da matriz do sistema linear. Assim, os seguintes resultados principais foram obtidos:

- Uma condição suficiente de análise de estabilidade robusta, menos conservadora – para sistemas lineares a tempo contínuo que apresentam incerteza paramétrica politópica invariante no tempo [64], [65].
- Uma condição suficiente de análise de estabilidade robusta, menos conservadora – para sistemas lineares a tempo discreto que apresentam incerteza paramétrica politópica invariante no tempo [63].

Como extensões dos principais resultados, tratou-se o problema de estabilização por realimentação de estados com ganhos dependentes de parâmetros, tanto para o caso contínuo quanto discreto. Os controladores obtidos variam de forma não-linear em função do vetor de parâmetros. Os resultados se aplicam a sistemas com incertezas pertencentes a um politopo, e que variam lentamente em função do tempo (mudanças ocorrem de tempos em tempos, devido a condições de operação, temperatura, vento, etc.). Em outras palavras, despreza-se o termo $\dot{P}(\alpha(t))$ no cômputo da derivada da função de Lyapunov.

Para situações nas quais não se conhece um procedimento eficaz de síntese de controle robusto, foi proposta a utilização de algoritmos genéticos em conjunto com condições de análise robusta. O uso de algoritmos genéticos na síntese de controladores robustos permite incorporar restrições de estrutura, pois trabalha diretamente no espaço dos elementos do controlador. Também foi estudada uma estratégia de controle na qual os controladores variam linearmente em função dos parâmetros. Essa estratégia de síntese (otimização baseada em algoritmos genéticos atuando diretamente no espaço dos parâmetros do controlador) poderia ser expandida em várias direções, por exemplo, na busca de controladores com restrições de estrutura que mantêm as condições de estabilidade robusta e de não-fragilidade e, além disso, minimizam outros critérios como desempenho \mathcal{H}_2 e/ou \mathcal{H}_∞ .

Como possível aprofundamento do trabalho realizado pode-se apontar o tratamento de condições de estabilidade robusta e síntese de controladores robustos ou controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos considerando taxas arbitrárias de variação de parâmetros. Mais ainda, pode-se considerar a extensão dos resultados aqui obtidos ao problema de alocação de pólos de sistemas com incerteza, a estabilidade robusta de matrizes de polinômios, a análise de estabilidade em relação a regiões específicas do plano complexo (chamada por alguns autores de \mathcal{D} -estabilidade), a análise de estabilidade absoluta ou diagonal, etc. Em todos os casos enumerados, a inclusão de critérios adicionais de otimização seria de interesse relevante em vista da atualidade dessa abordagem na pesquisa atual, da disponibilidade de recursos computacionais e métodos de otimização eficientes, além das possíveis aplicações práticas.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Ackermann. *Robust Control: Systems with Uncertain Parameters*. Springer Verlag, London, England, 1993.
- [2] A. Albert. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(2):434–440, 1969.
- [3] F. Amato, M. Mattei, e A. Pironti. A note on quadratic stability of uncertain linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):227–229, February 1998.
- [4] F. Amato, M. Mattei, e A. Pironti. A robust stability problem for discrete-time systems subject to an uncertain parameter. *Automatica*, 34(4):521–523, April 1998.
- [5] A. Apkarian e P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled \mathcal{H}_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):853–864, 1995.
- [6] P. Apkarian e R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32, 1998.
- [7] P. Apkarian, P. Gahinet, e G. Becker. Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261, 1995.
- [8] B. R. Barmish. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(8):848–850, 1983.
- [9] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, August 1985.
- [10] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA, 1994.
- [11] G. Becker e A. Packard. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 23:205–215, 1994.
- [12] P. Bendotti e B. Bodenheimer. Linear parameter-varying versus linear time-invariant control design for a pressurized water reactor. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9:969–995, 1999.

- [13] J. Bernussou, P. L. D. Peres, e J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *System & Control Letters*, 13:65–72, 1989.
- [14] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- [15] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3 edition, 1999.
- [16] W. L. Chen e J. S. Gibson. A Lyapunov robustness bound for linear systems with periodic uncertainties. *Automatica*, 27:545–547, 1991.
- [17] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, e J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [18] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, e L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3):27–38, June 1999.
- [19] M. C. de Oliveira e R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, Lecture Notes in Control and Information Science, pages 241–257. Springer-Verlag, 2001.
- [20] M. Dettori e C. W. Scherer. Robust stability analysis for parameter-dependent systems using full block S-procedure. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2798–2799, Tampa, FL, December 1998.
- [21] P. Dorato. Non-fragile controller design: an overview. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, pages 2829–2831, Philadelphia, PA, June 1998.
- [22] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, e B. A. Francis. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, 1989.
- [23] L. El Ghaoui, F. Oustry, e M. Aitrami. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, August 1997.
- [24] D. Famularo, C. T. Abdallah, A. Jadbabaie, P. Dorato, e W. H. Haddad. Robust non-fragile LQ controllers: the static state feedback case. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, pages 1109–1113, Philadelphia, PA, June 1998.
- [25] E. Feron, P. Apkarian, e P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, July 1996.

- [26] P. Gahinet, P. Apkarian, e M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2026–2031, Lake Buena Vista, FL, December 1994.
- [27] P. Gahinet, P. Apkarian, e M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, March 1996.
- [28] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, e M. Chilali. *LMI Control Toolbox for use with Matlab*. User's Guide, The Math Works Inc., May, 1995.
- [29] P. Gahinet e A. Nemirovskii. General-purpose LMI solvers with benchmarks. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3162–3165, San Antonio, USA, 1994.
- [30] Z. Gao e P. J. Antsaklis. Explicit asymmetric bounds for robust stability of continuous and discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):332–335, 1993.
- [31] J. C. Geromel, J. Bernussou, G. Garcia, e M. C. de Oliveira. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 632–637, Tampa, FL, USA, December 1998.
- [32] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, e L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [33] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, e J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29:381–402, 1991.
- [34] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, e S. R. Souza. \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 19:23–27, 1992.
- [35] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, e S. R. Souza. \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864, 1993.
- [36] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, e S. R. Souza. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):997–1003, 1996.
- [37] W. H. Haddad e J. R. Corrado. Robust resilient dynamic controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variations. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, pages 2837–2841, Philadelphia, PA, June 1998.
- [38] W. M. Haddad e D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):54–69, January 1992.

- [39] W. M. Haddad e V. Kapila. Robust stabilization for discrete-time systems with slowly time-varying uncertainty. *Journal of The Franklin Institute*, 333B(1):71–84, January 1996.
- [40] R. A. Hyde e K. Glover. The application of scheduled \mathcal{H}_∞ controllers to a VSTOL aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7):1021–1039, July 1993.
- [41] D. Kaesbauer e J. Ackermann. How to escape from the fragility trap. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, pages 2832–2836, Philadelphia, PA, June 1998.
- [42] T. Kailath. *Linear System*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [43] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, e M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70, 1993.
- [44] L. Keel, S. P. Bhattacharyya, e J. W. Howze. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):68–78, 1988.
- [45] L. H. Keel e S. P. Bhattacharyya. Robust, fragile, or optimal? *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1098–1105, 1997.
- [46] L. H. Keel e S. P. Bhattacharyya. Comments on “Robust, fragile, or optimal?” — Authors’ reply. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(9):1268–1268, 1998.
- [47] P. P. Khargonekar e M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7):824–837, 1991.
- [48] S. R. Kolla e J. B. Farison. Improved stability robustness bounds using state transformations for linear discrete systems. *Automatica*, 26(5):933–935, 1990.
- [49] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, D. C. W. Ramos, e P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, pages 2878–2883, Natal, RN, Setembro 2002.
- [50] D. J. Leith e W. E. Leithead. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73(11):1001–1025, July 2000.
- [51] J. S. Luo, A. Johnson, e P. P. J. Van Den Bosch. Minimax guaranteed cost control for linear systems with large parameter uncertainty. In *12th IFAC World Congress*, volume 8, pages 51–54, Sidney, Australia, 1993.
- [52] J. S. Luo, A. Johnson, e P. P. J. Van Den Bosch. On Lyapunov stability robustness bounds for linear continuous-time systems. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 374–379, Groningen, The Netherlands, 1995.

- [53] J. S. Luo, A. Johnson, e P. P. J. Van den Bosch. Lyapunov stability robust analysis and robustness design for linear continuous-time systems. *International Journal of Control*, 61(6):1233–1251, 1995.
- [54] P. M. Mäkilä. Comments on “Robust, fragile, or optimal?”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(9):1265–1267, 1998.
- [55] C. I. Marrison e R. F. Stengel. Robust control system design using random search and genetic algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):835–839, June 1997.
- [56] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag, New York, USA, 1996.
- [57] T. Mori e H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1516–1519, August 2000.
- [58] A. Packard. Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22:79–92, 1994.
- [59] R. M. Palhares e P. L. D. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ filtering design with pole placement constraint via \mathcal{LM} Is. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(2):239–261, 1999.
- [60] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, e J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [61] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. Robust parameter-dependent state feedback controllers for linear uncertain systems. Submetido à publicação.
- [62] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. Cálculo de domínio de estabilidade quadrática para sistemas lineares. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, pages 354–359, Florianópolis, SC, Setembro 2000.
- [63] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.
- [64] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, volume 1, pages 4073–4078, Arlington, VA, June 2001.
- [65] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [66] A. Rantzer e M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):629–637, April 2000.

- [67] W. J. Rugh e J. S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10):1401–1425, October 2000.
- [68] S. M. Shahruz e S. Behtash. Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168:195–217, 1992.
- [69] U. Shaked. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):652–656, April 2001.
- [70] J. S. Shamma e M. Athans. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica*, 27(3):559–564, 1991.
- [71] R. H. C. Takahashi, D. A. Dutra, R. M. Palhares, e P. L. D. Peres. On robust non-fragile static state-feedback controller synthesis. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 4909–4914, Sydney, Australia, December 2000.
- [72] R. H. C. Takahashi, D. C. W. Ramos, e P. L. D. Peres. Maximum non-fragile stability domains for robust control gains. Submetido à publicação.
- [73] R. H. C. Takahashi, D. C. W. Ramos, e P. L. D. Peres. Robust control synthesis via a genetic algorithm and LMIs. In *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, volume 1, pages 690–695, Barcelona, Spain, July 2002.
- [74] K. Tanaka, T. Ikeda, e H. O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2):250–265, May 1998.
- [75] A. Tesi, F. Villoresi, e R. Genesio. On the stability domain estimation via a quadratic Lyapunov function: convexity and optimality properties for polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11):1650–1657, 1996.
- [76] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.
- [77] A. Trofino e C. E. de Souza. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303–1307, August 2001.
- [78] L. Xie, S. Shishkin, e M. Fu. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 31(3):165–171, August 1997.

- [79] Y. Yang e A. L. Tits. Generic pole assignment may produces very fragile designs. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1745–1746, Tampa, FL, December 1998.
- [80] R. K. Yedavalli. Improved measures of stability robustness for linear state model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30:577–579, 1985.
- [81] R. K. Yedavalli. Perturbations bounds for robust stability in linear state space models. *International Journal of Control*, 42:1507–1517, 1985.
- [82] R. K. Yedavalli e Z. Liang. Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:863–866, 1986.
- [83] J. Yu e A. Sideris. \mathcal{H}_∞ control with parametric Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 30:57–69, 1997.
- [84] G. Zames. On the metric complexity of causal linear systems: ε -entropy and ε -dimension for continuous time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2):222–230, 1979.
- [85] G. Zames. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximative Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):301–320, 1981.
- [86] K. Zhou e P. P. Khargonekar. Stability robustness bounds for linear state-spacemodels with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32:612–623, 1987.