

FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**UMA PROPOSTA DE REDUÇÃO DA EXPOSIÇÃO AO RISCO  
FINANCEIRO DO PRODUTOR AGRÍCOLA PELO USO DE  
DERIVATIVOS: APLICAÇÃO AO CASO DO BIODIESEL**

**ODAIL PAGLIARDI**

UNICAMP – Campinas  
Brasil, 2007

FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**UMA PROPOSTA DE REDUÇÃO DA EXPOSIÇÃO AO RISCO  
FINANCEIRO DO PRODUTOR AGRÍCOLA PELO USO DE  
DERIVATIVOS: APLICAÇÃO AO CASO DO BIODIESEL**

Tese submetida à banca examinadora para  
obtenção do título de Doutor em Engenharia  
Agrícola na área de concentração de  
Máquinas Agrícolas.

**ODAIL PAGLIARDI**

ORIENTADOR: INÁCIO MARIA DAL FABBRO  
CO-ORIENTADOR: PEDRO JOSÉ CATUOGNO

UNICAMP – Campinas  
Brasil, 2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE -  
UNICAMP

P148p      Pagliardi, Odail  
              Uma proposta de redução da exposição ao risco  
              financeiro do produtor agrícola pelo uso de derivativos:  
              aplicação ao caso do biodiesel. / Odail Pagliardi.--  
              Campinas, SP: [s.n.], 2007.

              Orientadores: Inácio Maria Dal Fabbro, Pedro José  
              Catuogno

              Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de  
              Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola.

              1. Derivativos (Finanças). 2. Método de Monte Carlo.  
              3. Biodiesel. 4. Mercado de opções. I. Dal Fabbro,  
              Inácio Maria. II. Catuogno, Pedro José. III. Universidade  
              Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia  
              Agrícola. IV. Título.

Título em Inglês: A proposal of reducing farmer exposition to financial risk  
supported by derivatives: application to the biodiesel case

Palavras-chave em Inglês: Black-Scholes, Monte Carlo simulation, Pricing,  
American exotic options, Raw material of the  
biodiesel, Derivatives

Área de concentração: Máquinas Agrícolas

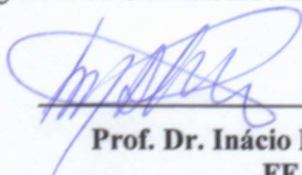
Titulação: Doutor em Engenharia Agrícola

Banca examinadora: Kil Jin Park, Luiz Henrique Antunes Rodrigues, Paulo  
Régis Rufino, Gabriel Alves da Costa Lima

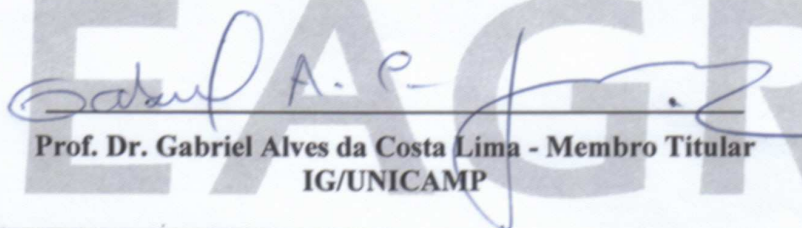
Data da defesa: 27/09/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Agrícola

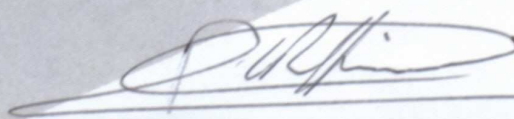
Este exemplar corresponde à redação final da **Tese Doutorado** defendida por **Odail Pagliardi**, aprovada pela Comissão Julgadora em 27 de setembro de 2007, na Faculdade de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual de Campinas.



**Prof. Dr. Inácio Maria Dal Fabbro - Orientador**  
**FEAGRI/UNICAMP**




**Prof. Dr. Gabriel Alves da Costa Lima - Membro Titular**  
**IG/UNICAMP**



**Prof. Dr. Paulo Régis Caron Rufino - Membro Titular**  
**IMECC/UNICAMP**



**Prof. Dr. Kil Jin Park - Membro Titular**  
**FEAGRI/UNICAMP**



**Prof. Dr. Luiz Henrique Antunes Rodrigues - Membro Titular**  
**FEAGRI/UNICAMP**

**Aos meus pais Cesira e Antonio  
(in memoriam)**

## AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho foi possível graças à cooperação de diversos amigos e, principalmente de meus familiares. Farei algumas citações, mesmo sabendo que estarei cometendo a injustiça de deixar de fora alguns nomes importantes que auxiliaram na confecção desta obra.

Inicialmente, não poderia deixar de agradecer a Faculdade de Engenharia Agrícola e meu orientador e amigo, Inácio Maria Dal Fabbro, por permitirem o desenvolvimento deste trabalho, um tanto incomum para a instituição, já que explora bastante os aspectos financeiros.

Um agradecimento especial ao professor Paulo Régis C. Ruffino que, pacientemente, me acolheu no curso de Cálculo Estocástico, pilar básico para a compreensão dos modelos da classe de derivativos financeiros. Também credito outro agradecimento especial ao professor Pedro José Catuogno, que não poupou esforços, se debruçando nos meus apontamentos, procurando dar luz às minhas idéias nem sempre tão claras. Seu conhecimento, dedicação e compreensão auxiliaram significativamente na conclusão deste trabalho. Não poderia de deixar de lembrar do Gabriel A. Costa Lima, pelo incentivo e auxílio na indicação de obras bibliográficas imprescindíveis para a quantificação de derivativos.

Devem-se creditar, ainda, os devidos agradecimentos aos professores constituintes da banca examinadora, composta por Luiz Henrique Antunes Rodrigues (Lique), Kil Jin Park, Paulo Régis C. Ruffino, Pedro José Catuogno e Gabriel Alves Costa Lima, cujas sugestões, comentários e críticas foram de grande valia.

Quanto ao programa computacional utilizado, deve ser lembrado os devidos agradecimentos aos responsáveis pela divulgação do programa SAS nas universidades, em especial na Unicamp.

Enfim, finalizo os agradecimentos estendendo-os a todos os professores, alunos e funcionários da Faculdade Agrícola pelos incentivos proporcionados.

Quaisquer eventuais erros, omissões e opiniões aqui expostos são, evidentemente, de responsabilidade do autor.

# ÍNDICE

Resumo.....	x
Summary.....	xi
<b>Estrutura do Trabalho.....</b>	<b>1</b>
Roteiro de Orientação.....	4
<b>Introdução.....</b>	<b>9</b>
Contratos Futuros.....	13
Contratos Futuros para <i>Commodities</i> Físicas.....	16
Crescimento dos Mercados Futuro de <i>Commodities</i> Físicas.....	16
Importância de Contratos Futuros.....	18
O Complexo Soja.....	21
Cultura Milho.....	22
Modelo Matemático.....	24
Revisão Bibliográfica.....	31
<b>Cap. 1. Métodos Numéricos.....</b>	<b>33</b>
1.1. Método de Monte Carlo.....	33
1.1.1. Conceito do Método.....	33
1.1.2. Aplicação do Método de Monte Carlo às Opções.....	35
1.1.3. Vantagens do Método de Monte Carlo.....	39
1.2. Modelos baseados em <i>Lattice</i> .....	40
1.3. Métodos de Diferenças Finitas.....	47
1.3.1. Equações de Diferenças.....	47
1.3.2. Método de Crank-Nicolson.....	51
Conclusão.....	55
<b>Cap. 2. Utilização de Derivativos Exóticos “Path Dependent”.....</b>	<b>56</b>
2.1. Introdução.....	56
2.1. Opções com Barreiras.....	57
2.1.1. Vantagens das Opções com Barreiras.....	60

2.2. Derivativos Asiáticos.....	61
2.3.1. Vantagens das Opções Asiáticas.....	62
2.3.2. Estrutura das Opções Exóticas “ <i>Path-Dependent</i> ” .....	63
Conclusão.....	68

**Cap. 3. Avaliação de Opções Asiáticas Tipo Americana Utilizando o Algoritmo de Longstaff e Schwartz.....69**

3.1. Introdução.....	69
3.2. Algoritmo de Longstaff e Schwartz.....	70
3.2.1. Operacionalização.....	70
3.2.2. Opção Asiática Americana.....	78
3.2.3. Convergência do LS-Algoritmo.....	81
3.2.4. Resultados Obtidos.....	86
Conclusão.....	99

**Cap. 4. Avaliação de Opções Americanas pela Simulação de Monte Carlo Envolvendo uma Cesta de Ativos Correlacionados.....100**

4.1. Introdução.....	100
4.2. Modelo Proposto.....	101

**Conclusão.....117**

**Apêndices. Definições e Conceitos**

**Apêndice A. Modelo de Black-Scholes.....121**

Rudimentos do Cálculo Estocástico.....	121
Introdução.....	126
Opção de compra européia.....	127
Avaliação da Opção de Venda Tipo Européia.....	139
Derivativos no Mercado de Câmbio.....	140



<b>Apêndice B. Analogia com a Equação de Difusão.....</b>	<b>146</b>
<b>Apêndice C. Modelos de Opções com Volatilidades Estocásticas e “Past Dependent” e Modelos com ativos correlacionados.....</b>	<b>151</b>
Introdução.....	151
Método Binomial.....	154
Método das Diferenças Finitas.....	158
<b>Apêndice D. Opções com barreira .....</b>	<b>165</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>169</b>
<b>Anexo. Preços Nominais dos Óleos Insumos para a Produção do Biodiesel.....</b>	<b>175</b>

## RESUMO

O objetivo do trabalho foi apresentar, via mercado de opções, um modelo para orientação dos agentes financeiros quanto à redução de risco financeiro presente em um empreendimento do setor agrícola. Devido ao momento vivido pelos biocombustíveis, o biodiesel foi o ativo escolhido para análise, inclusive pela riqueza apresentada na modelagem. O biodiesel tem como matérias-primas, os óleos de origem vegetal e das gorduras animais. Nesse sentido, a cesta de insumos para a produção final do biodiesel pode ser composta com diferentes proporções desses insumos, cujos preços de mercado estão correlacionados e, adicionalmente, suas volatilidades estão variando no decorrer dos diversos períodos de análise.

O modelo proposto para analisar essa cesta é o tradicional modelo de Black-Scholes. Contudo, a equação diferencial para estimar o valor da opção da cesta, ou seja, o prêmio (“seguro”), é bem complexa, pois estão presentes os preços individuais dos insumos. Métodos numéricos devem ser utilizados para estimar as opções americanas. Todavia, devido à dimensão do problema, ou seja, devido ao número de ativos presentes, cujos preços estão correlacionados e com volatilidades não constantes, foi utilizada a simulação de Monte Carlo. Para possibilitar o uso desse instrumento nas opções americanas lançou-se mãos do algoritmo desenvolvido por Longstaff e Schwartz.

Dois produtos foram propostos no trabalho, uma opção asiática e outra com barreira, ambas opções exóticas do tipo americanas. A asiática permite amenizar a volatilidade do ativo e, assim, limita a ação de grandes grupos no controle dos preços do ativo. Quanto à opção com barreira, está presente a idéia de preço mínimo.

**Palavras Chaves:** Modelo de Black-Scholes, simulação de Monte Carlo, precificação, opções americanas exóticas, insumos do biodiesel, derivativos.

## SUMMARY

The aim of this research was to present a model to guide the agents involved in the market to reduce the financial risk of a project in the agriculture. Due the moment favorable to the bio-combustible and of the richness of the modeling involved, the biodiesel was chosen to analyze. The biodiesel production includes a basket of vegetal oils and also animal fats, representing the “basic raw material”. The basket can be composed by different proportions of oils, which prices have inter-relations and the assets have not constant volatilities.

The methodology proposed to be applied to the basket of oils is the traditional Black-Scholes model. However, the differential equation to evaluate of the basket, *i.e.* the premium is very complex because all the oil prices are present. Numerical methods are proposed to estimate the American options. Nevertheless due the dimension of the problem, *i.e.* due the number of assts, with correlations among the prices, and volatilities not constants, it was employed the Monte Carlo simulation, assisted by the Longstaff-Schwartz algorithm to make possible the employment of that tool at the American options.

Two American exotic options have been presented: one Asian option and another one with barrier. The Asian one allows smooth the volatility of the basket and then avoids that great enterprises control the market. The barrier option is the choice of a minimum basket price.

**Key words:** Black-Scholes model, Monte Carlo simulation, pricing, American exotic options, raw material of the biodiesel, derivatives.

## ESTRUTURA DO TRABALHO

O objetivo central do trabalho é apresentar um produto financeiro que auxilie na redução do risco financeiro com o uso de derivativos na área agrícola, sendo aplicado no biodiesel. Este combustível tem várias oleaginosas como matérias-primas e, inclusive, gorduras de origem animal, e assim, é importante, montar uma cesta constituída desses insumos para obtenção do produto final de forma a otimizar a produção. Os preços dos produtos dessa cesta guardam certo grau de correlação entre si. Assim, as opções financeiras, produtos negociados na BM&F, permitem diluir riscos dando mais estabilidade nos preços dos insumos do biodiesel.

Devido ao fato do mercado de futuros ser ainda um tabu para os produtores agrícolas, a introdução tem a incumbência de realçar a importância dos contratos futuros como um instrumento de “seguro” contra variações de preços. Mais especificamente, o trabalho estará centralizado no mercado de opções (de compra e de venda) basicamente na *commodity* soja, mostrando o mercado desse produto (e o milho), também mostrando a importância dos derivativos na confecção de um produto financeiro que auxilie os agentes financeiros visando proteção de riscos agrícolas.

No capítulo 1 procura-se apresentar os conceitos relativos aos métodos numéricos mais utilizados nas avaliações de opções, que tem como base o modelo de Black-Scholes [1973]. O método binomial pode ser estendido às opções cujos *payoffs* (valor de liquidação no vencimento) dependem de mais de um ativo, porém a complexidade cresce quando se trabalha com mais de dois ativos. Embora os métodos de diferenças finitas (ou elementos finitos) sejam mais precisos, e que podem ser estendidos para trabalhar com variáveis de estados múltiplos, existe uma complexidade crescente quando se abordam opções que envolvem mais de um ativo. Uma grade de 100 pontos num espaço unidimensional representa uma grade com 100x100 pontos no espaço bidimensional e, portanto, exigindo um esforço computacional 100 vezes maior. Com o objetivo de obter tempos computacionais mais razoáveis, utilizam-se grades de tamanhos maiores e, neste sentido, são desejáveis os empregos de métodos implícitos em problemas envolvendo mais de uma variável de estado. Entretanto esses

métodos são de implantação complexa. Nesse sentido, a simulação de Monte Carlo é um instrumento altamente flexível e será o principal método empregado no trabalho mesmo exigindo um grande número de simulações para se determinar os preços dos ativos.

Existem diversos tipos de opções, denominadas de exóticas, que podem ser úteis nas avaliações dos preços “justos” das opções sobre a *commodity* soja e que estão expostos no capítulo 2. Assim, após apresentar uma visão do mercado futuro (feita na introdução), procura-se dar condições de se definir a melhor estratégia para o produtor ou agente financeiro confeccionar a opção mais apropriada (tipo asiática, *lookback*, etc.), no sentido de se proteger com o menor custo possível. São apresentadas as formas aproximadas para determinação dos preços de opções desses derivativos, porém todas do tipo européias. O problema sempre se torna complexo quando envolve opções tipo americanas.

Problema adicional está no fato de que a *commodity* soja está vinculada às produções e disponibilidades de outras culturas, destacadamente o milho. Portanto, existindo correlação entre os preços dessas culturas, deve-se considerar um modelo adequado para a determinação de preços das opções. Neste trabalho também fez-se referência a ativos cujas volatilidades seguem processos estocásticos e “*past dependent*”, mostrando que o problema da determinação do preço da opção torna-se bem mais complexo. Afinal, os ativos podem estar correlacionados, terem volatilidades seguindo processos estocásticos e, ainda, como situação comum, considerar a opção como sendo do tipo americana.

O problema envolvendo diversas equações estocásticas, inclusive considerando as possíveis correlações, a estimativa dos preços de opções tipo européias são facilmente analisados utilizando-se a simulação de Monte Carlo. Porém muitos autores sempre acreditaram na impossibilidade de aplicar esse método nas opções americanas. Somente após os trabalhos de Longstaff e Schwartz [2001] percebeu-se a possibilidade de se obter tempos de paradas ótimas e, conseqüentemente, precificar as opções americanas via simulação de Monte Carlo. Assim, no capítulo 3 estão as opções americanas, que permitem o exercício (de compra ou de venda) a qualquer momento e essa condição conduz a um problema de fronteira livre. A dificuldade está em se determinar o tempo de parada e, portanto, de obter um preço justo para esse tipo de opção cujo problema de fronteira livre (o problema com obstáculo) pode ser abordado via inequações variacionais.

Nesse mesmo capítulo 3, mostra-se um exemplo que possibilita a análise de opções americanas com a simulação de Monte Carlo justificando o conceito de tempos de paradas ótimas para as opções americanas. Sua inclusão torna o modelo mais realista para o mercado futuro.

Em seguida, no capítulo 4, está a realização final do trabalho, ou seja, disponibiliza-se um produto financeiro para o agente produtor ou consumidor do biodiesel. Com base nesse produto final, o agente poderá montar uma estratégia de seguro contra situações desfavoráveis em relação às variações dos preços de mercado para a soja e demais insumos do biocombustível. Dentre um leque de trajetórias possíveis para os preços previstos pelo modelo, o agente deve se posicionar nas estratégias que lhes são de seu maior interesse e previsibilidade. Assim, são apresentadas as diversas estratégias com as opções, mostrando sua funcionalidade e, conseqüentemente, quais as vantagens obtidas pelos diversos agentes se seguirem às estratégias apresentadas. Isso servirá como referência para futuros contratos envolvendo a cadeia produtiva do biodiesel, inclusive da soja e demais insumos.

Também, são apresentadas sugestões de se utilizar esse algoritmo em diversas situações em problemas envolvendo otimização de operações na área da engenharia.

O trabalho inclui ainda, alguns apêndices. No Apêndice A está a base do modelo de Black-Scholes [1973]: a obtenção da expressão analítica para se estimar uma opção de compra e venda, ambas européias, e sua adaptabilidade para se conseguir estimar opções cambiais. No Apêndice B mostra-se a analogia entre a equação diferencial de Black-Scholes [1973] e a equação de difusão (equação de transferência de calor). No Apêndice C, por sua vez, estão os modelos com ativos correlacionados, envolvendo volatilidades não-constantes e “*past dependent*”. Por último, o Apêndice D mostra os fundamentos matemáticos da opção com barreira.

O trabalho procura apresentar alguns programas computacionais úteis para o usuário na confecção de produtos derivativos. No texto, encontram-se alguns esquemas dos programas numéricos (algoritmos) para estimar as opções: simulação de Monte Carlo, modelos baseados em *lattice*, e métodos de diferenças finitas.

## Roteiro de Orientação

A intenção específica desse item é auxiliar o leitor na leitura e compreensão do conteúdo principal desse trabalho, que é a quantificação de uma opção americana com a simulação de Monte Carlo, utilizando o algoritmo proposto por Longstaff e Schwartz. Assim, antecipa-se o conteúdo principal do material aqui exposto.

Começa-se apresentando a equação diferencial que rege o valor  $V$  (seguro) de uma opção de compra européia, devido a Black e Scholes (e, também, a Merton) que é

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

sujeito a

$$V(S, T) = \max(S_T - K, 0)$$

com  $K$  sendo o preço de compra,  $S_T$  sendo o preço do ativo no vencimento,  $r$  a taxa de juros livre de risco e  $\sigma$  a volatilidade dos retornos devido às variações dos preços. A solução analítica da equação diferencial de Black-Scholes, para a opção de compra, é dado por:

$$V = S \cdot N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

e

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

lembrando que  $S$  é o preço do ativo no instante  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) de assinatura do contrato,  $r$  a taxa livre de risco,  $\sigma$  a volatilidade,  $N$  sendo a distribuição normal padronizada e  $T$  é a data final do contrato. Caso fosse opção de venda, o payoff (valor do contrato no seu vencimento) seria:

$$V(S, T) = \max(K - S_T, 0)$$

A solução analítica foi obtida em condições especiais (Apêndice A). O problema torna-se complexo quando a opção é americana devendo recorrer a métodos numéricos (capítulo 1). Ainda, em se tratando de uma cesta composta por vários insumos, como é o caso da produção do biodiesel, que pode ser composta pelos óleos de origem vegetal (destacadamente, soja, algodão, girassol e amendoim), a simulação é o caminho mais viável e, talvez, único para a quantificação da opção americana. Isso se deve principalmente porque os preços dos insumos estão correlacionados e suas volatilidades não são constantes. A solução do problema proposto será obtida via LS-algoritmo (devido a Longstaff e Schwartz), descrito no capítulo 3.

Começa-se apresentando as trajetórias dos preços ( $S$ ) de um ativo regido pela seguinte equação diferencial:

$$dS_i = \left( r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) S_i dt + \sigma_i S_i dz_i \quad i=1,2$$

cujos processos de Wiener  $dz_i = \varepsilon_i \sqrt{dt}$  estão correlacionados por

$$dz_1 dz_2 = \rho dt$$

com  $z_i$  gerados de uma distribuição normal padronizada bivariada com correlação  $\rho$ , as quais são obtidas gerando variáveis normais independentes  $\varepsilon_i$  e combinando-as de forma que

$$\begin{aligned} z_1 &= \varepsilon_1 \\ z_2 &= \rho \cdot \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Supondo tratar-se de uma opção de compra americana com  $r=10\%$ ,  $t= 1$  ano e *payoff* de  $V(S_1, S_2, T) = \max(S_1 - S_2 - K, 0)$  com  $K=1$ , se ambos tiverem preços iniciais iguais a



100 e ambos com volatilidades iguais de 10%, o seguro ficaria em torno de 4,5 se a correlação  $\rho=20\%$  e em torno de 2,6 se a correlação subir para  $\rho=70\%$ . Isso mostra a importância de considerar as correlações entre os preços dos ativos, muito comum na agricultura.

Assim, supõe-se negociar uma opção de venda americana cujo preço corrente do ativo é de  $S=1,00$  e deseja-se vendê-lo futuramente por  $K=1,10$ , com uma taxa de juro de 6% ao período. Supõe-se que existam oito trajetórias e 3 períodos para vencimento do título, conforme descrito na tabela 1.

Tab.1. Trajetórias dos preços obtidos via simulação de Monte Carlo.

Trajectoria	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1,0	1,09	1,08	1,34
2	1,0	1,16	1,26	1,54
3	1,0	1,22	1,07	1,03
4	1,0	0,93	0,97	0,92
5	1,0	1,11	1,56	1,52
6	1,0	0,76	0,77	0,90
7	1,0	0,92	0,84	1,01
8	1,0	0,88	1,22	1,34

O objetivo é determinar o valor da opção, ou seja, o seguro que deve ser pago para se ter o direito de vender o ativo pelo preço combinado de 1,10 em qualquer um dos três períodos. Como a solução desse problema é:

$$\mathbf{E}[\max(K-S_t, 0)\exp(-r.t)]$$

a Lei dos Grandes Números, um dos pilares da Teoria de Probabilidades, garante que a estimativa do valor esperado é obtida tomando a média aritmética dos valores  $\max(K-S_t, 0)$ , obtidos no período em questão. Considerando esse resultado, o fluxo de caixa no período 3, supondo as trajetórias apresentadas na tabela 1, fica:

Tab.2. Fluxo de caixa no período 3

Trajectoria	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1				$(1,10-1,34)^+=0$
2				$(1,10-1,54)^+=0$
3				$(1,10-1,03)^+=0,07$
4				$(1,10-0,92)^+=0,18$
5				$(1,10-1,52)^+=0$
6				$(1,10-0,90)^+=0,20$
7				$(1,10-1,01)^+=0,09$
8				$(1,10-1,34)^+=0$

Assim, caso fosse uma opção europeia, em que o exercício só pode ocorrer no último período, o valor da opção (seguro) seria:

$$(0,07 + 0,18 + 0,20 + 0,09) / 8$$

Contudo, trata-se de uma opção americana em que é permite, ao seu proprietário, antecipar o exercício. O *payoff* (valor do título na liquidação) seria obtido de:

$$\max(K-X_2, 0) = \max(1,10 - X_2, 0)$$

com  $X_2$  sendo o conjunto (vetor) de preços das 8 trajetórias obtidas no período 2 (ver tab.3).

Agora, precisa-se de um critério ótimo de parada, ou seja, um referencial para comparar com o *payoff* do período 2. A sugestão foi dada por Longstaff e Schwartz, utilizando-se do conceito de esperança condicional, ou seja, regressão entre os *payoff* do período 3 descontado de 6% (variável dependente) para representar o valor real no período 2 e os preços do período 2 (variável independente). Trata-se de um critério de otimização, já que utiliza-se mínimos quadrados para estimar os parâmetros da regressão (no caso, quadrática). Com a equação de regressão, que é  $E[Y | X_2] = -1,07 - 2,98 X_2 + 1,81(X_2)^2$ , basta substituir os preços  $X_2$  para se obter o valor esperado do *payoff* no período 2. Assim, em cada trajetória, só exerce o direito (de parada) no período 2 se o valor ofertado pela simulação superar o valor esperado. Isso acontece as trajetórias 4, 5 e 7 (ver tabela 3).

Tab. 3. Decisão de antecipação (ou continuação) de exercício ótimo no período 2.

Trajatória	Exercício = $(K-X_2)^+$	$-1,070 + 2,983 \cdot (X_2) - 1,813 \cdot (X_2)^2$	Exerc>Espera
1	$1,10-1,08=0,02$	0,0369	—
2	—	—	—
3	$1,10-1,07=0,03$	0,0461	—
4	$1,10-0,97=0,13$	0,1176	Sim
5	—	—	—
6	$1,10-0,77=0,33$	0,1520	Sim
7	$1,10-0,84=0,26$	0,1565	Sim
8	—	—	—

Repete-se o processo para o período 1, obtendo o fluxo final de caixa (ver tab.4). Agora, basta atualizar esses valores utilizando a taxa de juro de 6% em cada período. No caso de 0,07, da segunda trajetória, desconta-se 3 períodos (i.e., multiplica-se por  $\exp(-0,06 \times 3)$ ), pois o seguro é pago na hora da assinatura do contrato. Os demais valores (0,17; 0,34; 0,18; 0,22) desconta-se apenas um período. A solução do problema, isto é o valor do seguro, é obtido somando os valores obtidos na operação anterior e dividindo por 8.

Essa é a essência do método utilizado no trabalho a ser apresentado. Os métodos tradicionais para quantificar opções americanas são os numéricos, porém em se tratando de uma cesta composta por mais que dois ativos, como é o caso do biodiesel, em que está presente um conjunto de óleos vegetais, a solução mais coerente é utilizar simulação. E a simulação de Monte Carlo descrita acima, que deu origem ao LS-algoritmo tem muita flexibilidade em tratar com esses tipos de problemas.

## INTRODUÇÃO

Não busco compreender para crer, mas creio para compreender.  
Por isso creio, porque se não cresse, jamais compreenderia.  
Santo Anselmo (1033-1109)

O Estado brasileiro tem auxiliado o produtor rural com concessão de crédito agrícola para compras de equipamentos, insumos e para comercialização vindo a alavancar o progresso da agricultura. Ainda, o setor agrícola conta com o seguro agrícola, isto é, contra a perda física da produção. O Seguro de Cédula do Produtor Rural — CPR, é um título emitido pelo produtor rural ou suas associações, inclusive cooperativas, ao segurado, na hipótese comprovada de falta de cumprimento, por parte do tomador de obrigações estabelecidas no CPR. O produtor rural, através do CPR vende a termo sua produção agropecuária, recebe o valor da venda no ato da formalização do negócio e se compromete a entregar o produto vendido na quantidade, qualidade e em local e data estipulados pelo título.

Contudo, o setor do seguro no Brasil está longe de proteger adequadamente o produtor rural. Cunha [2002] apresenta os princípios para nortear a criação de um seguro agrícola, privado, de participação voluntária e moldado às condições e necessidades dos agricultores brasileiros. O seguro deve ser “eficiente”, no sentido de minimizar as distorções na locação dos recursos da sociedade e deve contribuir para a redução do risco agrícola. Ainda, o seguro deve ser sustentável do ponto de vista financeiro e orçamentário.

Considera-se virtualmente impossível a criação de um seguro que atenda a essas características sem que o mercado de seguros privados seja minimamente desenvolvido. No seguro agrícola, apenas cinco seguradoras (ACE, AGF Brasil, Aliança do Brasil, Mapfre Vera Cruz e Brasileira Rural) atuam no mercado e nenhuma delas ultrapassa seis anos de experiência na modalidade agrícola. De um modo geral, alguns profissionais são alocados para desenvolver a carreira agrícola. Na camada intermediária, onde atuam os corretores, a situação é ainda mais crítica. Existe grande dificuldade em vender seguro agrícola em virtude do desconhecimento e de dificuldades de acesso aos produtores [Ozaki, 2007, p.85]. Essa inexperiência e falta de profissionalismo no ramo dificulta a “eficiência” do seguro agrícola.

No caso de eventos catastróficos, as seguradoras podem recorrer ao Fundo de Estabilização do Seguro Rural — FESR, para recuperar parte dos prejuízos. Teoricamente, os repasses de recursos para as seguradoras deveriam ser imediatos. Contudo, na prática, o resgate de recursos pelas seguradoras tem sido demorado [Ozaki, 2007]. Haverá substituição do FESR pelo Fundo de Catástrofe. Atualmente, o FESR tem somente R\$ 200 milhões em caixa e as regras atuais não permitem que se ofereça proteção necessária em caso de quebra generalizada da safra. O Fundo de Catástrofe será voltado para proteger as seguradoras em caso de catástrofes agrícolas causadas por problemas climáticos e funcionará como uma espécie de resseguro.

Para desenvolver o setor de seguros é indispensável um número razoável de companhias seguradoras na área agrícola. Não se pode falar em sustentabilidade de um seguro sem que esteja presentes diversos mecanismos destacando o resseguro, o co-seguro, o consórcio (*pool*) de seguradoras e os fundos de estabilização. Atualmente, parcela apreciável dos resseguros realizados no país é contratada no exterior. As resseguradoras exercem um papel central em qualquer ramo de seguros. Por seu intermédio, as seguradoras transferem boa parcela de seu risco. Entretanto, atualmente, a IRB Brasil Re detém o monopólio do resseguro, se constituindo num entrave para o desenvolvimento do setor de seguro. Somente com a abertura desse mercado, pode-se desenvolver o setor com a criação e diversificação de novos produtos.

Com exceção do setor agrícola, as seguradoras têm conseguido atuar de maneira eficaz no mercado brasileiro. O mercado de seguro agrícola no Brasil continua incipiente. Há pelo menos quatro décadas tenta-se dotar o país de um sistema de seguro agrícola capaz de proteger o agricultor contra os riscos de perdas físicas da produção.

O mercado de seguro agrícola exige a participação efetiva do Estado. O seguro deve ser visto pelos gestores públicos, como o principal instrumento de política pública para gerenciar o risco no agronegócio. Para isso é fundamental a criação de uma instituição governamental autônoma com o objetivo de desenvolver, regulamentar e normatizar o mercado de seguro rural no Brasil. O governo deve estimular as seguradoras a reduzirem custos de gerenciamento de seguros agrícolas, admitindo tratar-se de uma “indústria nascente”.

O desenvolvimento do setor de seguro promoveria as condições necessárias para a criação de fundos específicos para o setor, na medida que forneceria segurança necessária aos investidores e, em parte, amenizaria o problema do excesso de garantias exigidos na agricultura. Haveria, também, um maior incentivo, por significativa parcela do setor privado, em monitorar e selecionar adequadamente o tomador de empréstimo, evitando distorções ocorridas, principalmente no crédito governamental.

Com os recursos provenientes de fontes ligadas ao setor de seguro agrícola, o produtor poderá investir em tecnologia e, conseqüentemente, aumentar sua produtividade. O incremento na lucratividade proporcionará aumentar a competitividade do setor beneficiando toda a economia.

O desenvolvimento do seguro agrícola poderia ampliar o ingresso dos produtores rurais no mercado de capitais com emissão de títulos garantidos pelo seguro, facilitando o acesso e o barateamento do crédito.

Diferentemente de outros ramos, precificar contratos no seguro agrícola não é tarefa simples, principalmente por não existirem informações completas relacionadas às produções municipais, como produtividade, e muito menos se considerar em nível de propriedade.

Até o presente momento, só se fez referência à produção física, sem comentar preços de comercialização. A tarefa de “melhor suprir” o setor agrícola pode ter o auxílio do mercado de capitais: a Bolsa de Mercadoria e Futuros — BM&F. Assim, além dos preços mínimos proporcionados pelo governo para determinados produtos, existem instrumentos negociados na BM&F que diluem riscos e, assegurando preços futuros.

A ampliação desse mercado de títulos no setor agrícola, com a participação de diversos agentes financeiros, possibilitará mais transparência ao setor. A Bolsa conduz, naturalmente, a um ambiente competitivo, exigindo um suprimento razoavelmente completo de informações pertinentes ao setor.

O mercado de opções, produto pertencente à classe de derivativos, é um instrumento que garante, de forma eficiente, preços de comercialização. Trata-se, assim, de um “seguro”. Porém a dificuldade está em se criar um produto financeiro adequado, dentro do mercado de opções, que possibilite a garantia de significativa parcela da produção agrícola. Explicando melhor, a questão está em responder qual o preço justo a ser pago (“seguro”) para se ter o direito de comprar ou de vender uma mercadoria por um preço acordado antecipadamente,

mesmo antes de sua produção. De posse deste produto financeiro, tanto o produtor da mercadoria quanto seu utilizador estará garantido contra eventuais variações no preço do ativo considerado.

Mais uma vez clama-se pela presença do Estado, com um fundo de estabilização para atenuar os riscos das corretoras e, com isso, reduzir os custos de corretagem, que hoje variam entre 2 a 4% do valor negociado. A presença do Estado pode ampliar a participação dos produtores agrícolas nesse mercado de capitais.

Em todos os países em que o Seguro Agrícola foi operacionalizado com sucesso, o Estado tem forte participação. Não existe, internacionalmente, experiências massivas sem a participação do Estado. Nesses países, o governo percebeu que é a forma mais eficiente da sociedade enfrentar as adversidades climáticas na agricultura. Como ocorreu nos Estados Unidos, Canadá, México, Espanha, dentre outros países, o governo subvenciona boa parte dos prêmios dos produtores. Nos Estados Unidos, além de subvencionar o prêmio, o governo subvenciona o custo administrativo e operacional das seguradoras.

Essa participação mais ativa do Estado tem como resultados estabelecer uma política agrícola anticíclica eficiente com reflexos positivos para toda a economia. Ainda, permite que o próprio Estado tenha maior estabilidade de arrecadação tributária, melhor controle da inflação e, inclusive, evitando o êxodo rural.

No Brasil, as *commodities* agrícolas são negociadas na BM&F com volume muito inferior à capacidade produtiva do país. O número de contratos não condiz com o seu potencial. A soja, importante produto na pauta de importações e produto que deve se tornar estratégico para a produção interna do biodiesel, está longe de atingir 1% dos contratos agrícolas negociados na BM&F. Ainda, o mesmo se pode afirmar para os produtos agrícolas quando comparados ao número de contratos totais negociados.

Contudo, o objetivo central do trabalho é apresentar um produto financeiro que permita a determinação e a estabilidade nos preços do biodiesel. Este combustível tem várias oleaginosas como matérias-primas e, inclusive, gorduras de origem animal, e assim, é importante, para os agentes financeiros, montar uma cesta constituída desses insumos para obtenção do produto final de forma a otimizar a produção. Os preços dos produtos dessa cesta guardam certo grau de correlação entre si. Assim, as opções financeiras devem permitir a estabilidade nos preços dos insumos de biodiesel, destacadamente a soja, que deve se

constituir na principal matéria-prima do combustível, a qual deseja-se determinar o preço justo dessa cesta.

A presença do Estado no mercado de futuros para os bioenergéticos é fundamental. Trata-se de produtos estratégicos para o país já que os governos centrais mostram interesse em investir em plantas produtoras de álcool e biodiesel. O próprio governo americano, quando da visita de seu presidente em 31 de março, resultando em uma declaração entre os Estados Unidos e o Brasil, assumiram o compromisso de um desenvolvimento conjunto na área de biocombustíveis [Foco Economia e Negócios, 1º de abril de 2007], inclusive sinalizando para a queda de barreiras para esses energéticos renováveis. Esses energéticos de origem vegetal são importantes para amenizar a dependência do petróleo e, nas grandes cidades, sua adição aos combustíveis fósseis certamente causará um menor impacto ambiental, com conseqüências benéficas à saúde da população.

## **CONTRATOS FUTUROS**

O setor agrícola, por estar sujeito às mais diversas situações de risco, exige mecanismos que possibilitem produzir com boas perspectivas de sucesso. Assim, os agentes financeiros necessitam de ferramentas, algumas disponíveis no mercado financeiro, que os auxiliem na montagem de estratégias com a finalidade de diminuir exposição a riscos, tão comum na área agrícola. Dentre esses riscos está o da variação de preços dos produtos, tornando instável seu mercado. Porém, este pode ser atenuado via utilização de algumas ferramentas disponíveis nas Bolsas de Mercadorias e Futuros. Trata-se do mercado de derivativos, que é um instrumento poderoso para atenuar riscos.

O conceito de risco é de grande importância para os administradores de corporações, pois as empresas estão sempre assumindo riscos. A idéia do risco estar diretamente ligada ao rendimento do negócio é fundamental para a administração. Evidentemente, as empresas (ou pessoas físicas) desejam compensações por optar pela alternativa de maior risco.

Para empresas ligadas ao setor primário, mais especificamente à agroindústria, as maiores fontes de risco, atualmente, são as incertezas relacionadas às adversidades climáticas e às mudanças na economia (oscilações nas taxas de juros, déficit público elevado, etc.) que refletem diretamente na taxa de câmbio. Assim, como as *commodities* são negociadas nas



bolsas internacionais, suas cotações estão ligadas à moeda estrangeira (dólar). Ainda, os insumos agrícolas de origem química são importados bem como grande parcela dos maquinários agrícolas e, portanto, têm seus preços vinculados ao dólar. É importante ter em mente que os riscos de prejuízos são grandes nas empresas com máquinas pesadas, grandes e de utilização específica, como é o caso da área rural ligada ao setor exportador.

O mercado de derivativos (futuros, opções, a termo etc.) tem instrumentos que permitem atenuar riscos de ativos negociados a futuro, que podem ser *commodities* agrícolas ou minerais, taxas de câmbio, taxas de juros, índices, dentre os principais. Os derivativos, instrumentos importantes no cenário financeiro, têm se desenvolvido significativamente no último quarto do século passado. O volume de transações dos produtos do mercado futuro tem-se elevado, juntamente com o crescimento e a complexidade exigida pela economia mundial. O principal propósito do mercado de derivativos é servir como instrumento de gestão de risco de preço, permitindo aos participantes obter proteção (“seguro”) contra variações desfavoráveis nos preços dos insumos e produtos com os quais estão envolvidos.

As negociações a futuro — *contrate agora, pague depois* — estão em uso há séculos. A partir do momento que um comerciante acordava a compra da produção do plantador de batata, arroz ou qualquer outro produto, evitava-se uma série de transtornos. Em tempos de excesso de produção, apenas uma pequena parcela de produtores conseguia vender o fruto de seu trabalho, mal cobrindo os custos envolvidos. A outra parcela arcava com prejuízos ou, simplesmente, jogava fora sua produção por falta de comprador.

Quando havia quebra de safra, os produtores que não eram atingidos conseguiam preços atraentes para seus produtos. Contudo, os demais sofriam as conseqüências juntamente com os comerciantes. Estes últimos, não conseguindo adquirir o produto, tinham seus negócios interrompidos com riscos de falência. Assim, qualquer das duas situações era extremamente danosa à economia.

Retrocedendo no tempo, têm-se notícias de transações futuras praticadas pelos romanos e pelos fenícios, que emitiram contratos sobre as cargas transportadas em seus navios. Na Holanda do século XVII, houve um considerável mercado sobre tulipas, porém faliu no inverno de 1637, quando muitos emissores se recusaram a honrar seus compromissos. Na Inglaterra, o mercado futuro foi declarado ilegal pela lei Bernard, de 1733 a 1860 e, vindo novamente a ser banida na década de 1930. Mas é com a comercialização do arroz no Japão

feudal do século XVII, ainda não aberto ao Ocidente, que está a verdadeira origem do mercado futuro [Fobes, 1994]. É no Japão, em 1730, que as negociações a futuro ressurgem sob a forma de recibos de arroz — o arroz escritural —, com especificações de condições de pagamentos, qualidade, quantidade e prazo de entrega futuro. Esses recibos eram amplamente negociados e aceitos como moeda corrente.

O tipo de contrato envolvendo apenas um comprador e um vendedor — conhecido como *contrato a termo (forward market)* — ameniza os riscos do negócio, contudo não é garantia para sua realização. Se uma das partes deixa de cumprir o acordo, implica em problemas para a outra automaticamente. Assim, no século XIX e inclusive no século passado, o mercado futuro teve má reputação, sendo associado às atividades especulativas e inclusive de práticas corruptas. Porém, o mercado futuro se sofisticou de modo a evitar quebra de contrato, criando-se mecanismos para garantir a realização dos contratos firmados.

A partir de 1837, nos Estados Unidos, percebeu-se a necessidade de criar uma instituição que auxiliasse a comercialização da safra da região de Chicago, uma das maiores do mundo. Assim, um grupo de 82 mercadores fundou, em 1848, a Chicago Board of Trade — CBOT, a primeira bolsa a negociar, formalmente, contratos para liquidação futura de farinha e feno. Esta é atualmente a maior bolsa de futuros do mundo.

No Brasil, a experiência com mercados futuros ocorre em 1917 — praticamente um século após a criação da CBOT —, quando foi fundada a primeira bolsa de *commodities* agrícolas, a Bolsa de Mercadoria de São Paulo – BMSP. No ano seguinte, a BMSP iniciou suas operações com futuros de algodão que rapidamente tornou-se sua principal atividade pela importância do produto no mercado. Porém, foi somente a partir da década de setenta que começaram as negociações dos diversos contratos de *commodities* agropecuários e, na década de oitenta instituiu, pela primeira vez, um contrato futuro de atividades financeiras referenciado em ouro.

Os contratos futuros de soja começaram a operar na Bolsa de Mercadoria de São Paulo (BMSP) em 1978. Porém, somente em 8 de dezembro de 1999, a Bolsa de Mercadoria & Futuros — BM&F (criada em 9 de maio de 1991 devido sua fusão com a BMSP) começa a operar contratos agropecuários com liquidação em dólar. É o início do processo de internacionalização dos mercados agropecuários que facilita a participação de investidores estrangeiros no mercado brasileiro.

Atualmente, a Bolsa de Mercadorias e Futuros — BM&F ocupa o sexto lugar no ranking das maiores bolsas de futuros do mundo, tendo atingido o volume de 110.674.608 contratos negociados no seu pregão em 2003, sendo que a parcela dos produtos agropecuários significou 777.675 contratos. Contudo, o grande referencial de futuros é a CBOT. A Bolsa de Chicago, a mais tradicional bolsa de mercados futuros de *commodities*, fecha em média, 900 mil contratos por dia. O giro financeiro diário chega a meio trilhão de dólares, cifra espantosa quando comparada a BM&F de São Paulo, que atingiu US\$ 5,8 trilhões em todo o ano de 2005.

### **Contratos Futuros para *Commodities* Físicas**

Os mercados futuros foram organizados em resposta aos riscos associados com as condições sazonais das *commodities*, tais como trigo e milho. Fazendeiros faziam contratos futuros (*forward*) com os usuários para dispor de suas colheitas; e os mercados futuros cresceriam vindo a fornecer um instrumento financeiro para *hedgear* o risco via *contrato forward*. O principal mercado futuro americano está em Chicago, uma vez que esta cidade foi o principal ponto para depósitos de grãos, visando suas transferências para o leste. Hoje, contratos futuros são negociados não somente com produtos agrícolas sazonais, mas também para *commodities* reais, como os metais. A maior expansão em negociações futuras ocorreu nas décadas de 1970 e 1980, com advento de futuros financeiros.

Alguns importantes contratos futuros com *commodities* físicas seriam relacionadas com grãos e oleaginosas (*oil seeds*), fibras, café, açúcar, metais, petróleo. Os contratos mais antigos são aqueles relacionados aos grãos, cujo início se deu em 1859. Os mais recentes contratos são os com produtos derivados do petróleo: óleo cru e diesel datam dos anos 1970 enquanto com gasolina iniciou em 1981.

### **O Crescimento dos Mercados Futuros de *Commodities* Físicas**

Podem-se citar três importantes razões para assegurar o crescimento do mercado de futuros.

**Incerteza**. Já que a principal hipótese para os mercados futuros é o *hedge de risco*, estes não seriam importantes se os preços das *commodities* fossem previsíveis. Se os preços do trigo se mantivessem não haveria razão para realizar contratos futuros sobre o trigo. Futuros cambiais

não existiriam num sistema de taxas cambiais fixas. Negócios futuros sobre o café deixariam de existir se os cartéis internacionais “estabilizassem” os preços num nível fixo. As incertezas sobre os preços crescem das incertezas nas ofertas e nas demandas das *commodities*. Mesmo com a previsão de aumento na produção de determinada *commodity* agrícola, sua oferta pode ser insuficiente devido às condições climáticas adversas, que afetam substancialmente a produção e a colheita. Deve-se considerar também o fato de que a diminuição da oferta (ou encarecimento) de determinado produto pode estimular a procura por uma *commodity* alternativa. Assim, ocorrendo a escalada dos preços do petróleo, por exemplo, incentiva a produção do álcool derivado da cana-de-açúcar em substituição ao uso da gasolina e das oleaginosas para adicionar ao diesel. Enquanto existir conflitos no Oriente Médio, essa é uma situação presente.

Poucas *commodities*, como ouro e prata, têm ofertas praticamente fixas, cujas demandas crescem sensivelmente apenas em razão de instabilidades financeiras internacionais. O ouro é como muitos produtos financeiros, vindo a depender da taxa de juros, inflação e outros fatores macroeconômicos.

**Armazenagem e Deliberação.** Contratos futuros para as *commodities* físicas podem exigir armazenagem em local apropriado. A maioria das *commodities* agrícolas, como soja, café, trigo, deve ser estocada em local conveniente para ser entregue na data prevista pelo contrato. Essa armazenagem é importante para o sucesso dos contratos futuros dessas *commodities*. Contudo, algumas *commodities* têm produção que dispensam armazenagem, como no caso de ovos frescos, pois descaracterizaria o contrato (afinal, armazenados deixariam de ser ovos frescos).

**Mercado Amplo e Competitivo.** Mercados futuros não prosperam se o mercado para a *commodity* especificada for pequeno, ou seja, se existir uma negociação insuficiente para manter liquidez nesse mercado. Em mercados pequenos é preferível a negociação direta entre produtor e usuário para o produto.

Um mercado futuro com liquidez, para determinada *commodity*, deve apresentar um grande número de contratos padronizados disponíveis e negociados pelos seus participantes. Essas padronizações têm graus de dificuldades dependendo da *commodity* considerada. O ouro tem padronização simples, porém padronizar os contratos para o boi gordo não é tão simples. A soja, o café ou outro grão, devido aos diferentes tipos existentes, tem uma grade de padrão

bem mais complexa, sempre visando poder substituir uma qualidade por outra com alteração na quantidade, se necessário.

### **Importância de Contratos Futuros**

Recentemente, no início do ano de 2007, assistiu-se a uma superprodução de batatas no extremo sul do país (Rio Grande do Sul), com os produtores perdendo sua produção quando os preços atingiram valores irrisórios (cerca de R\$ 0,01/kg), que não justificavam nem mesmo os custos de transportes da mercadoria aos centros de distribuição de alimentos. Nestas condições, os produtores não podiam acionar o seguro contra danos à produção, pois, afinal, isso não ocorreu. Houve um excesso de produção, bem acima da demanda, refletindo diretamente no preço. Porém, se o produtor tivesse recorrido ao mercado futuro, negociando a venda da batata no início da plantação por R\$ 30,00/saca, esse valor estaria assegurado qualquer que fosse a situação, por mais desfavorável que fosse. Esse produtor compraria um título, que pode ser a opção de venda de seu produto por aqueles R\$ 30,00/saca, que representaria o “seguro” contra possíveis variações de preços. Conseqüentemente, esse produtor receberia essa quantia no final do contrato.

A grande vantagem dessa modalidade de aplicação, é que o produtor tem a opção de só vender seu produto se desejar, representando um direito e não uma obrigação. Assim, se o preço da batata atingisse R\$ 40,00/saca devida a uma quebra de safra, o produtor pode desistir do contrato, ficando com o produto para negociar no mercado pelo preço vigente. Evidentemente, esse título (“seguro”) tem um custo e é importante sua justa quantificação.

No mercado de opções, seus produtos classificam-se em opções de compra (*call option*) e opções de venda (*put option*). A opção de compra é um contrato que dá o direito (não a obrigação) a seu titular de decidir por comprar ou não o ativo. Para se ter esse direito, deve-se pagar um prêmio (ou se preferir, um sinal sem devolução, que é o “seguro”) que é transferido, no início da operação, a quem está vendendo o contrato de compra.

Mais especificamente, uma opção de compra (*call option*) é um instrumento financeiro que dá ao proprietário, o direito de comprar uma mercadoria no futuro, por um valor predeterminado. Uma opção de venda, por sua vez, é um instrumento financeiro que permite a seu proprietário decidir pela venda do ativo, no futuro, por um valor contratado a priori.

Evidentemente, o comprador da opção de venda pagará um prêmio para aquele que está disposto a aceitar o contrato, que é o vendedor da opção.

Existem ainda outros dois tipos de opções: a americana e a européia. A primeira permite que o proprietário do título exerça seu direito a qualquer momento até o final do contrato. Porém, a opção tipo européia exige que o detentor do título só exerça seu direito ao final do contrato.

Seu mecanismo operacional é simples. Seja um produtor de soja que deseje, na próxima safra ocorrendo em três meses, aumentar a área plantada. Assim, necessita adquirir maquinários que somam US\$ 10.000.000,00 e, como a taxa cambial hoje é de R\$ 2,40 por dólar, este produtor deseja reservar até o final do terceiro mês, a quantia de R\$ 24.000.000,00. Contudo, se o real se desvalorizar perante o dólar, atingindo R\$ 3,00 por dólar, o produtor deverá dispor de R\$ 30.000.000,00 daqui a três meses, ou seja, R\$ 6.000.000,00 acima do previsto inicialmente. Se esse produtor fizer um contrato de compra de opção de compra do dólar comercial, pagando R\$ 2,40 por dólar, no final dos três meses ele desembolsará essa cifra de R\$ 24.000.000,00 e adquire os US\$ 10.000.000,00 para comprar maquinários. Evidentemente, isso tem um custo, que é o prêmio, ditado pelo mercado, por exemplo, de R\$ 0,05 por dólar negociado. Este transfere para quem está vendendo o dólar pela cotação negociada, de R\$ 2,40 por dólar, ou seja, para quem está assumindo o risco da variação cambial, sem qualquer devolução desse prêmio.

A partir do momento que o produtor contratar a opção de compra, ele fica numa posição privilegiada, só comprando o dólar se este se situar acima daqueles R\$ 2,40. Assim, se o dólar, na ocasião de encerrar o contrato ficar nos R\$ 2,25, por exemplo, o produtor da soja não compra o dólar contratado, perdendo apenas aquele prêmio, de R\$ 0,05 por dólar, pago no início da operação. Ele comprará o dólar no mercado a vista, por R\$ 2,25 a unidade, por ser mais barato.

Contudo, se o dólar disparar atingindo R\$ 3,00, por exemplo, o titular da opção exercerá seu direito, comprando por R\$ 2,40, com lucro de R\$ 0,60 por dólar. O importante é observar que o maquinário estará garantido pelos R\$ 24.000.000,00 previstos inicialmente.

Trata-se, portanto, de uma garantia, de um seguro contra variações no câmbio, ou seja, contra variações de preços futuros dos ativos. Aliás, esse é o espírito da bolsa.

Convém, agora, analisar esse mesmo produtor pelo outro lado, o de vendedor de sua produção. O produtor de soja, necessitou de financiamento para a produção, para comprar os diversos insumos, contratar mão-de-obra e fazer um seguro agrícola que lhe garanta a colheita. Todos os custos, acrescido do lucro desejado, somam, por exemplo, R\$ 28,00 por saca. Assim, qualquer problema com pragas e/ou excesso ou escassez de chuvas, o seguro deve cobrir o prejuízo (ou parte dele) do produtor. Porém, se a safra for bem sucedida, nada garante que o preço se situe acima desses R\$ 28,00 por saca, podendo nem mesmo cobrir os custos se seu valor for bem inferior a essa cifra.

O mercado de opções pode representar esse seguro contra a queda de preços. Esse produtor de soja, procura a Bolsa de Mercadorias e compra um contrato de opção de venda, pelo preço desejado, de R\$ 28,00 a saca. O produtor de soja, comprador da opção, deve pagar o prêmio para o vendedor, este último acreditando numa subida no preço da soja e conseqüentemente procura especular.

Portanto, o produtor de soja estará garantido contra uma queda no seu produto, pois se situar abaixo de R\$ 28,00, por exemplo, ficando em R\$ 25,00 a saca, ele vende por R\$ 28,00 e não tem prejuízo. Evidentemente, se o preço subir a R\$ 50,00, por exemplo, o produtor tem o direito de não vender seu produto pelo contratado. Ele venderá a soja no mercado à vista e não no mercado futuro. Conseqüentemente, o único custo é aquele pago para ter a opção, que é o prêmio a ser transferido a quem aceita vender o contrato de opção de venda.

É importante salientar que o produtor pode se tornar um especulador, principalmente ao fazer uma opção americana, pois ele exercerá seu direito a qualquer instante, desde que o mercado lhe seja favorável.

Também é importante destacar que, para o iniciante no mercado de opções, é tentador a aplicação de pelo menos uma determinada estratégia, que seria do produtor colocar o preço (de exercício) para vender a soja a R\$ 100,00 a saca, ou seja, com preço bem alto. Observe que, no outro lado, estarão os que aceitam assumir o risco da operação e estes exigirão um prêmio condizente com esse risco. Se o mercado estiver sinalizando para um prêmio de R\$ 80,00, o produtor da soja estará vendendo a saca por R\$ 20,00 ( $=R\$ 100 - R\$ 80$ ). Afinal, o prêmio representa o custo de transferência do risco da operação para os especuladores.

## **O Complexo da Soja**

A soja se constituiu numa das principais fontes de alimentos sob a forma de grão e óleo. Essa cultura, introduzida no Brasil no final do século XIX, só após os anos sessenta é que se difundiu, com o Rio Grande do Sul e Paraná se tornando grandes estados produtores a partir de 1975. E a partir dos anos oitenta, a cultura vem respondendo pela maior área cultivada no país, excluindo pastagens, sendo o produto líder na pauta de exportações.

Nos Estados Unidos, a soja foi alavancada pela demanda de farelo para a fabricação de ração animal. No Brasil, o processo foi impulsionado pelo crescente consumo de óleo para o consumo alimentar. Paralelamente, o grande volume de soja esmagado fez com que o país se constituísse, recentemente, num dos maiores fornecedores de farelo, no mercado internacional. Hoje, existe uma grande perspectiva de crescimento da produção de soja, devido à obrigatoriedade de adição de 2% de biodiesel no óleo mineral, principalmente para diminuir a demanda de Diesel, com efeito ambiental benéfico. Já existem algumas plantas industriais para a produção de biodiesel sendo implantadas no país e, como a soja é uma importante matéria-prima devido a seu preço extremamente competitivo, existe uma grande perspectiva de aumento de sua área plantada.

Estados Unidos, Brasil e Argentina respondem por 80% da produção mundial de soja, porém caso não houvesse a ajuda de subsídios aos produtores norte-americanos, certamente o Brasil seria líder absoluto com perspectivas de aumentar seus limites de expansão. Só no ano de 2000, o governo americano concedeu a fantástica soma de US\$ 32 bilhões a título de subsídios e pagamentos diretos à sua produção agrícola. Apenas para a soja foram destinados US\$ 2,86 bilhões [Santo, 2001, p.301].

A implantação da indústria da soja no Brasil ocorreu no início da década de cinquenta, com a implantação da primeira fábrica, a Incobras. A seguir veio a Igol e, em 1958, entrou em operação a Saring (do Grupo Bunge y Born), resultante da fusão de dois moinhos, que passaram ao esmagamento de soja. Contudo, depois da implantação pioneira, a evolução dessa indústria foi lenta. O desenvolvimento do complexo da soja no Brasil deve ser interpretado no quadro mais geral de modernização, cabendo ao Estado o papel central, seja como financiador, seja como articulador de diferentes interesses. A partir de 1974, o Estado lança um conjunto de programas destinados a suprir as deficiências de infra-estrutura, destacando-se a difusão do crédito rural, privilegiando as culturas do trigo e da soja. Hoje, a soja se espalha por todo o



território nacional, cujo início se deu pelo Rio Grande do Sul, posteriormente, vindo a revolucionar a agricultura dos cerrados.

As cooperativas de produtores de soja são as principais intermediárias entre os produtores associados e a indústria a montante (fertilizantes, defensivos, herbicidas, máquinas e equipamentos) e a jusante (processadores, trituradores, etc.). As cooperativas agrícolas ligadas à soja são verdadeiras agroindústrias, porém algumas como no caso da Cooperativa de Agricultores da Região de Orlandia Ltda. (CAROL), com especialização na soja, atua na área do comércio varejista, mesmo com controle acionário de uma associação de grandes corporações: das empresas Eximcoop, Dinamilho e Carol Corretora de Seguros e, ainda, uma Cooperativa de Crédito.

A política de dar prioridade ao segmento de trituração fez parte da estratégia de desenvolvimento da agroindústria da soja por parte do Estado, no decorrer dos anos setenta para atingir dois objetivos: (a) elevação das receitas de exportações de produtos agrícolas de maior valor agregado e (b) manutenção dos preços internos dos derivados em níveis sustentáveis e que não comprometessem a política anti-inflacionária [Panzutti, 1996 (cap.1)].

O ingresso dessas empresas no mercado da indústria da trituração fez com que enfrentassem algumas barreiras de entrada, tais como: (a) controle das fontes de fornecimento de matéria-prima e condições de armazenagem; (b) presença de economias de escala; e (c) acesso ao comércio exterior [Mazzali, 1991].

O primeiro aspecto diz respeito a que somente as grandes empresas dispõem de uma rede de captação direta de colheita, evitando interrupção da produção industrial na entressafra. Quanto ao segundo, que para ser mais eficiente, exigirá instalações de grande porte, compatíveis com as capacidades de algumas cooperativas, que se industrializaram já na década de 70. Finalmente, o comércio exterior, dominado por um pequeno número de grandes empresas como a Cargill, Continental Grins, Cock Industrias, Louis Dreyfuz, Bunge & Born, Central Soya, só permitiu o ingresso de cooperativas via criação de *tradings* ou alianças entre cooperativas. Outra grande indústria que está ampliando suas instalações no país é a ADM (Archer Daniels Midland).

**Cultura Milho.** O milho ocupa lugar de destaque em termos de volume de produção de grãos no planeta. Esta gramínea é umas das espécies que a humanidade mais promoveu em termos

de melhoramento genético, existindo uma grande quantidade de variedades espalhadas pelo mundo.

O milho é a cultura com maior área cultivada no Brasil, ao lado da soja. O milho é cultivado em todo o território nacional, com tecnologia que vai dos mais rústicos até as práticas mais sofisticadas, como a chamada agricultura de precisão. A confiabilidade dos números sobre produção e consumo no Brasil é ainda deficiente, constituindo num dos problemas na gestão de política agrícola. Estima-se que aproximadamente 20% da produção sejam absorvidas como auto-consumo nas propriedades rurais

O milho é uma cultura estratégica para o agronegócio brasileiro e para os Estados Unidos, por ser um produto básico na composição do alimento de aves, suínos e bovinos. Além disso, a variedade de subprodutos que a indústria processa e comercializa, criou uma extensa e diversificada cadeia produtiva. Os Estados Unidos são os maiores produtores de milho, seguidos pela China e pelo Brasil.

Um dos fatores de maior inibição à produção de milho no Brasil é a falta de liquidez após a colheita. A demanda internacional pela soja impulsiona prioritariamente o sistema produtivo na sua direção, relegando as demais culturas de grãos a um segundo plano. A dificuldade em vender milho no período de pico da safra e a necessidade de carregamento do estoque não vendido têm levado à queda nos preços, atingindo níveis desestimulantes.

A realidade do mercado, em que parte da cadeia produtiva está na dependência do governo, exige alterações. O antigo instrumento EGF, muito utilizado e eficaz no passado, tem sido pouco utilizado. O fim do mecanismo do EGF-COV (Empréstimo do Governo Federal com Opção de Venda para o governo) provocou desinteresse dos bancos, em função do risco ao final do contrato. Quando o produtor procura o agente financeiro pretendendo contratar o EGF, encontra dificuldades porque sua atitude é percebida como falta de alternativa de venda. Portanto, o seu mercado é muito ofertante, logo o risco é maior.

O caminho recomendável é a promoção de venda a futuro, com mecanismos de mercado assimilando e administrando riscos e o carregamento de estoque e a exportação. Uma das deficiências do governo e do mercado tem sido a incapacidade de criar formas eficazes de carregamento do estoque até a entressafra. Enquanto isso, o sinal de mercado indutor da produção fica na dependência do movimento pendular de escassez /preços altos seguidos de excedentes /preços baixos.

## Modelo Matemático

A agricultura é um setor exposto às mais diversas situações de riscos, a qual exige mecanismos que amenizem tais inconvenientes. O mercado de derivativo possui um instrumento importante para atenuar riscos, que é o mercado de opções. Assim, de posse desse contrato, pode-se comprar ou vender o ativo (caso desejar) em data futura, por preço pré-acordado, bastando pagar o chamado prêmio para se obter o direito (não a obrigação) a exercer o direito.

A dificuldade está em determinar o preço justo a ser pago por esse “seguro”. Após o trabalho pioneiro de Black, Scholes [1973] e Merton [1973], que lhes conferiram o Prêmio Nobel de Economia em 1997, o assunto tem despertado grande interesse dos pesquisadores. Trata-se, basicamente, de analisar o processo estocástico que modela os retornos dos preços do ativo:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad (1)$$

com  $S$  sendo os preços do ativo,  $\sigma$  e  $\mu$  representando, respectivamente, a volatilidade e tendência desses retornos,  $dt$  o incremento temporal e  $dz$  sendo processos de Wiener. Devido às condições impostas no modelo, obtida para as opções de compra (*call option*) européias, a solução analítica obtida resulta de hipóteses restritivas, destacando-se: preços do ativo considerado na opção têm distribuição lognormal, a volatilidade dos retornos ( $\sigma$ ) do ativo é considerada constante durante a vida do contrato e taxa de juros livre de risco ( $r$ ) do mercado financeiro também é constante. Assim, a equação diferencial de Black-Scholes, que permite avaliar o preço da opção  $V$  é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2)$$

sujeito a condição inicial:

$$V(S,0)=0$$

e as condições de contorno:

$$V(0,T)=0$$

$$V(S,T) = \max(K - S_T, 0) \quad (3)$$

se a opção for de venda (*put*). Muda apenas a condição de contorno para

$$V(S,T) = \max(S_T - K, 0) \quad (4)$$

se a opção for de compra (*call*), com  $K$  sendo o preço de venda e compra, respectivamente. A solução analítica da equação diferencial de Black-Scholes, para a opção de compra, é dado por:

$$V = S \cdot N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (5)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

e

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

lembrando que  $S$  é o preço do ativo no instante  $t$  de assinatura do contrato no instante  $t$  de assinatura do contrato,  $r$  a taxa livre de risco,  $\sigma$  a volatilidade,  $N$  sendo a distribuição normal padronizada e  $T$  é a data final do contrato, com  $0 \leq t \leq T$ .

Com as limitações impostas, o modelo de Black-Scholes se mostra inadequado em muitas situações. O trabalho de MacBeth e Merville [1979] mostrou limitações do modelo quando o preço corrente de mercado para o ativo se situava acima do preço de exercício (lembrando tratar-se de opção de compra). Em se tratando de volatilidade não constante, que é o caso típico, ou ainda, da volatilidade seguir uma trajetória estocástica, o modelo torna-se ineficiente. Ainda, em condições especiais, a solução analítica da equação só se justifica em opções europeias, ou seja, com exercício só ocorrendo obrigatoriamente no final do contrato.

Saindo da classe de opções do tipo européias, ou seja, considerando as opções americanas, cujos exercícios podem ser antecipados, ou ainda, observando as chamadas opções exóticas, estas não possuem soluções analíticas. Para estudar essas opções, podem-se usar soluções aproximadas ou abordá-las utilizando métodos numéricos. Estes métodos seriam:

- Métodos *Lattice* (binomial, trinomial, etc.);
- Simulação de Monte Carlo;
- Métodos de Diferenças Finitas;
- Métodos de Elementos Finitos.

O método de diferenças finitas tem uso bem popular na solução da equação diferencial de Black-Scholes, podendo ser aplicado o método explícito, cuja vantagem é sua fácil compreensão e não necessidade de promover a inversão da matriz representativa do sistema de equações algébricas resultante, pois sua solução é quase direta. Também, pode-se utilizar o método implícito, destacando-se o Crank-Nicolson, o qual é mais complexo de se entender e exige algum esforço algébrico naquela matriz resultante. Porém, sua vantagem está na convergência e estabilidade incondicional do método. Esta situação só ocorre no método explícito caso haja uma escolha adequada da malha de discretização.

Existe a possibilidade de agrupar as equações diferenciais de segunda ordem em classes as quais relatam situações físicas bem definidas: difusão, propagação de onda e situações de equilíbrio. Assim, observando a equação de Black-Scholes e assumindo a terminologia dos polinômios quadráticos, esta representa um processo de difusão sendo modelada por uma equação parabólica semelhante à tradicional equação de transferência de calor:

$$u_t - ku_{xx} = 0 \tag{6}$$

Conseqüentemente, pode-se solucionar a equação (2) como se fosse uma equação de calor que, do ponto de vista computacional, é mais recomendável que a equação original do derivativo. Porém, com as mudanças de variáveis empregadas na simplificação da equação, altera-se o *payoff* (valor de liquidação no vencimento), dificultando seu entendimento a qual é muito simples e bastante claro no modelo original. Assim, considerando uma opção de venda (*put*), a condição inicial seria:

$$u(x,0) = \max [e^{-0,5(k_2-1)x} - e^{-0,5(k_2+1)x}, 0] \quad (7)$$

enquanto as condições de contornos ficariam:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x,t) &= e^{0,5(k_2-1)x + 0,25(k_2-1)^2 x} \end{aligned} \quad (8)$$

(ver Apêndice B). Numa opção de compra (*call*) a condição inicial se apresentaria como:

$$u(x,0) = \max [e^{-0,5(k_2+1)x} - e^{-0,5(k_2-1)x}, 0] \quad (9)$$

e as condições de contornos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) &= e^{0,5(k_2+1)x + 0,25(k_2+1)^2 x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Ainda, aumentando o número de variáveis referentes aos ativos financeiros considerados, no modelo, seu tratamento matemático se torna bem mais complexo, assim como a implantação de um algoritmo para a solução numérica da equação diferencial do calor com as condições de contorno referente ao *payoff*.

Diferentemente das opções européias, cujo acerto só ocorre no final do contrato, opções do tipo americanas permitem o exercício de compra ou venda do ativo a qualquer instante da vida útil do contrato. Frequentemente, o mercado trabalha mais com essa modalidade e, assim, a dificuldade está em se determinar qual o momento de exercer o direito. Trata-se, portanto, de determinar o tempo de parada ótimo para comprar ou vender o ativo e, conseqüentemente, constitui-se num problema de fronteira livre (problema com obstáculo) via inequações variacionais. Trata-se de uma das mais simples formas de análise do problema com fronteira livre, pois, além de independente do tempo, é de fácil interpretação física. Assim, não é sem razão que ele pode ser usado para introduzir complementariedade linear e inequações variacionais, as quais são cruciais para o sucesso dos métodos numéricos envolvendo problemas de opções americanas.

O método dos elementos finitos é particularmente bem-sucedido para resolver equações diferenciais parciais com fronteiras livres na forma de inequações variacionais. Contudo, freqüentemente essa metodologia conduz ao mesmo problema numérico oferecido pela forma do problema de complementariedade linear das diferenças finitas. Por essa razão, neste trabalho, não será feita nenhuma referência ao método dos elementos finitos.

Em se tratando de opções do tipo *plain vanilla*, ou seja, as tradicionais, envolvendo apenas um ativo objeto, o método *lattice* apresenta soluções bastante razoáveis, porém, sua precisão fica comprometida quando se trabalham com dois ou mais ativos que estejam correlacionados. Outros métodos podem ser aplicados em situações mais complexas, envolvendo dois ativos correlacionados (pelo fator  $\rho$ ) cuja equação diferencial que rege o preço justo da opção de compra é dado por:

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = v_1 S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + v_2 S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - rC \quad (11)$$

A solução dessa equação pelo método das diferenças finitas exige algum esforço analítico para aplicar a técnica *Alternating Direction Implicit (ADI)*, já que o *payoff* (valor de liquidação no vencimento), que representa a condição de contorno da equação diferencial, sofre modificação. Não se recorrendo a esse expediente, o esforço computacional se torna bem acentuado, inclusive com a possibilidade de ocorrência de instabilidade e dificuldade de convergência da solução da equação. Nesse sentido, o método sugerido por Longstaff e Schwartz [2001] acendeu uma luz na solução desses problemas, a qual utiliza, basicamente, a simulação de Monte Carlo, permitindo aplicar essa metodologia nas opções americanas. Ainda mais, sua aplicabilidade se estende além das opções comuns, do tipo *plain vanilla*, permitindo tratar com opções mais complexas, conhecidas por opções exóticas (asiáticas, com barreiras, etc.). A versatilidade desse método permite considerar diversos ativos correlacionados cujas volatilidades não são constantes. Conseqüentemente, a metodologia de Longstaff e Schwartz pode ser empregada na estimativa de preços de opções americanas que envolvem diversos ativos. Esta situação é considerada neste trabalho com o LS-algoritmo sendo empregado numa cesta de insumos para se determinar um preço justo a ser incorporado no produto final.

Importante destacar que tal situação não se encontra apenas no plano teórico. Essa situação pode ser aplicada num programa energético que deve ganhar notoriedade num futuro

bem próximo. Trata-se do Programa Nacional do Biodiesel, criado em 30 de outubro de 2002 e instituído sob coordenação do Ministério da Ciência e Tecnologia. O projeto de lei n.3368 propunha que 2% de biodiesel fossem misturados ao diesel mineral (e daí o nome B2) e, em 2006, a exigência se concretizou com a perspectiva de atingir 10% futuramente. O biodiesel é um combustível obtido a partir da reação química de ácidos graxos (óleos e gorduras) e álcool de cadeia curta, mediante a presença de um catalizador. Esse combustível pode ser obtido de diversos insumos de origem vegetal: soja, amendoim, caroço de algodão, mamona, milho e, também, de origem animal: bovinos, suínos, caprinos. Sua importância pode ser bem acentuada nos grandes centros populacionais, pois diminui sensivelmente a poluição ocasionada pelos veículos automotivos. Também deve ser lembrado que o biodiesel pode ser obtido do óleo de cozinha após se utilizado nas frituras de alimentos. Assim sua utilização na produção do biodiesel preserva a rede de esgoto, já que fatalmente este seria seu destino final. Pode-se, ainda, adicionar a questão social devido a possibilidade de constituir cooperativas de coletas do óleo utilizado e, assim, oferecendo renda aos associados.

É desejável obter um modelo que ofereça um preço justo resultante de uma cesta formada pelos principais insumos para a produção do biodiesel. Como esses produtos têm suas particulares sazonalidades, é fundamental apresentar preços com tendências estáveis, evitando os tradicionais picos e depressões, tão nocivos à economia. Nesse sentido, uma equação diferencial envolvendo vários ativos para determinação do preço do produto final, i.e., o óleo que dará origem ao biodiesel se apresenta como um modelo bastante realista e este será o objetivo final desse trabalho. A questão estará calcada na *commodity* soja, já que representa a principal matéria-prima para a obtenção do biodiesel e que está fortemente correlacionada ao milho, ambos importantes insumos na fabricação de alimentos para animais e aves. A soja também estará associada ao amendoim, caroço de algodão, mamona e, também, de origem animal: bovinos, suínos, caprinos. Nesse sentido, a modelagem para se determinar um derivativo final deve considerar essas situações.

Além disso, deve-se considerar a possibilidade de se trabalhar com opções com barreiras, permitindo estabelecer preços mínimos viáveis para o vendedor da matéria-prima.

Outra possibilidade é operar com opções asiáticas para evitar grandes saltos nos preços do produto considerado. Ela permite maior estabilidade nos preços devido ao mecanismo de incorporar a média de preços durante um intervalo de tempo, ou de vários mercados



simultaneamente, diminuindo sensivelmente a manipulação de preços do ativo por grandes corporações em data próxima ao final do contrato.

Porém, as opções asiáticas tipo americanas são particularmente complexas porque não apenas permitem antecipar o exercício como também são *path dependent*, já que a média  $A_t$  depende do caminho percorrido pelos preços. Em geral, esses tipos de problemas são difíceis de se resolverem pela técnica das diferenças finitas. Estes tipos de problemas ocorrem tipicamente nas opções asiáticas, a qual se constitui num contrato que dá o direito ao seu proprietário de comprar ou vender um determinado ativo pela média dos preços atingidos pelo ativo num determinado período. Tal produto financeiro é importante para empresas que necessitam comprar *commodities* agrícolas num período fixo do ano (na safra), porém devem vender seu produto regularmente durante todo o ano. O mesmo tipo de opção é também usado no mercado cambial por empresas as quais têm vendas contínuas numa única moeda, mas devem comprar matérias-primas em diferentes moedas e em datas pré-estabelecidas. Evidentemente, nestes casos, o ativo objeto é a taxa cambial. As opções asiáticas permitem que os agentes eliminem perdas devidas aos movimentos no câmbio sem a necessidade de fazer, continuamente, operações de *hedge*.

Nas opções asiáticas, seus preços de exercícios devem depender da média geométrica ou da aritmética de seus preços, as quais podem ser mensuradas de forma contínua ou discreta. No caso de uma opção americana tipo asiática com a média  $A$  dada por:

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau$$

a média é obtida desde a origem até o tempo  $t$  considerado, ou seja, o início do tempo utilizado na janela está fixa na origem. Embora essa opção seja complexa, pode-se avaliá-la com várias técnicas transformando o problema *path-dependent* num processo markoviano. O preço da opção  $V(S, A, t)$  pode ser calculado como a solução de uma equação diferencial parcial bidimensional:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{t}(S - A) \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

com a seguinte condição final  $V(S, A, T) = \Psi(S, A)$ , ou seja, uma condição plausível. Esse tipo de problema pode ser resolvido com técnicas de diferenças finitas.

Em contraste com o caso anterior, as opções americanas do tipo asiática com janela temporal de comprimento constante, são calculadas como:

$$A(t) = \int_{t-t_0}^t S(\tau) d\tau$$

O início da janela temporal não é fixa na origem, se movendo juntamente com o tempo. A versão européia desse tipo de opção é facilmente resolvida. Contudo, a solução da versão americana da opção asiática não pode ser obtida via técnicas padrões. A razão é que o problema é não-markoviano e não pode se transformado numa equação diferencial parcial bidimensional ou num problema de complementaridade. Com o preço  $S(\tau)$  se movendo na janela  $t-t_0 < \tau < t$  resulta em um número infinito de variáveis e, conseqüentemente, não se pode formular como sendo um problema de diferenças finitas. Outras técnicas, como Monte Carlo sobre Monte Carlo, podem solucionar o problema, embora exija nesse caso um tremendo esforço computacional. Nessa situação o LS-algoritmo se mostra como solução viável. Essa flexibilidade é obtida devido ao método de Monte Carlo trabalhar com a esperança matemática e com a lei dos grandes números que garante a distribuição normal.

### **Revisão Bibliográfica**

Esse trabalho deve dar uma contribuição significativa na área agrícola, já que a literatura acadêmica brasileira é escassa quando voltada para a análise de previsão de preços futuros e *hedging*. Castro [1998] procurou contribuir na questão da liquidação financeira da soja e do boi gordo. Esse trabalho mostrou a eficiência do *hedging* sobre especificações alternativas de liquidação e, também, analisou um indicador de eficiência entre localizações de produção de soja e os preços futuros da soja e boi gordo. Rochelle [1997] verificou a utilidade da liquidação financeira sobre o risco de base do contrato futuro de boi gordo da BM&F. Lamounier [2002], por sua vez, analisou os preços a vista (*spot*) no mercado de café em termos de volumes de contratos e de recursos financeiros na BM&F observando os padrões comportamentais da séries de preços de longo prazos via modelos econométricos temporais.

Aliás, a maior parte dos artigos relacionados a preços futuros se baseia em modelos econométricos temporais.

## Capítulo 1

# MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, para cada método numérico utilizado no presente trabalho, são apresentados os fundamentos teóricos e suas aplicações para descrever o comportamento dos preços dos diversos derivativos. O primeiro método apresentado é a simulação de Monte Carlo, seguidos pelos modelos baseados em *lattice* e, por últimos, os métodos de diferenças finitas, mais especificamente, o método de Crank-Nicolson.

## 1.1. MÉTODO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo fornece soluções aproximadas a uma variedade de problemas matemáticos realizando experimentos amostrais estatísticos. O método se aplica a problemas com absolutamente nenhum conteúdo probabilístico, bem como naqueles com estrutura inerentemente probabilístico.

A simulação de Monte Carlo foi utilizada de forma bem intensiva quando do desenvolvimento da energia atômica ocorrida após a Segunda Guerra Mundial, devido à necessidade de se resolver problemas de difusão de nêutrons ou transporte através de um meio isotrópico. Esses problemas multidimensionais se mostraram adequados para uma abordagem com equações de diferenças. Isto porque se sabia que as equações resultantes (equação diferencial e equação integral) tinham processos estocásticos análogos. Assim John Von Neumann e Stanislaw Ulam sugeriram que experimentos amostrais, usando modelos de caminhos aleatórios (*random walk*), forneciam aproximações prontamente úteis para as soluções desejadas.

### 1.1.1. Conceito do Método

O método de Monte Carlo, por ser considerado simples e flexível, é aplicado em problemas de diversos tipos e graus de complexidade. Contudo, seu inconveniente é o número de simulações, necessários para se obter uma boa precisão.

Para entender o método, considere uma variável aleatória,  $\xi$ , definida em um intervalo conveniente e uma função,  $p(x)$ , chamada de densidade de probabilidade da variável aleatória  $\xi$ . A probabilidade de  $\xi$  cair dentro do intervalo  $(a, b)$  é dado por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x) dx . \quad (1.1.1)$$

A quantidade

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_a^b x \cdot p(x) dx \quad (1.1.2)$$

é chamada de *valor esperado* da variável aleatória  $\xi$ , enquanto

$$\text{Var}(\xi) = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] \quad (1.1.3)$$

é a *variância* da variável aleatória  $\xi$ .

A justificativa para se empregar o método de Monte Carlo se baseia em um dos importantes princípios da estatística. Seja  $\xi_1, \xi_2, \dots$  denotando uma seqüência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas e mutuamente independentes<sup>(\*)</sup>. Seja, ainda,  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ . Se a esperança  $\mu = \mathbf{E}[\xi_i]$  existe, a lei fraca dos grandes números estabelece que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 0 . \quad (1.1.4)$$

---

<sup>(\*)</sup> O teorema é válido para condições mais gerais: as variáveis  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  não necessitam ser identicamente distribuídas e mutuamente independentes, bastando que nenhum deles se sobressaia na soma deles.

A lei dos grandes números afirma que, quando cresce o tamanho da amostra, para estimar a média  $\mu$  pode-se utilizar o valor  $\frac{S_n}{n}$ .

Uma interpretação bem simples desse importante conceito pode ser visto em Sobol [1983, p.4-5]. Assim, se o interesse é quantificar  $\mu$ , tendo definido as variáveis aleatórias  $\xi$  tais que sua esperança seja  $\mathbf{E}[\xi] = \mu$  e sua variância  $\text{Var}(\xi)$  seja finita, basta selecionar  $n$  variáveis aleatórias independentes  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . A estimativa para  $\mu$  é:

$$\mu \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (1.1.5)$$

a qual é usualmente chamado método de Monte Carlo para estimar  $\mu$ .

Entretanto, há a necessidade de uma equação que modele  $\xi$  na equação (1.1.5) por meio de números aleatórios  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  extraídos de alguma distribuição de probabilidades, ou seja,

$$\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \quad (1.1.6)$$

Ambas as relações (1.1.5) e (1.1.6) definem completamente o algoritmo de Monte Carlo para estimar  $\mu$ .

Boyle [1977] foi o primeiro pesquisador a aplicar o método de Monte Carlo para avaliar opções.

### 1.1.2. Aplicação do Método de Monte Carlo às Opções

Tendo a equação estocástica que determina o comportamento dos preços do ativo, então pode-se simular o possível caminho percorrido pelo preço e calcular o valor da opção. Como o valor de uma opção, sob a hipótese de risco neutro, é a esperança de seu *payoff* (valor de liquidação no vencimento), isto é,

$$C = \mathbf{E} \left[ (S_T - K)^+ e^{-r(T-t)} \right] \quad (1.1.7)$$

(no caso de uma opção de compra). A essência do método de Monte Carlo é estimar essa esperança calculando a média de um grande número de *payoffs* descontados. Reiterando, essa é a idéia básica do método de Monte Carlo. Este valor da opção é considerado como uma estimativa aleatória dos possíveis valores que a opção pode assumir. Esse procedimento é repetido  $N$  vezes para se obter a distribuição dos valores da opção, cuja média é uma estimativa (procurada) do valor da opção.

Pode-se estimar os valores das opções européias sobre um ativo, admitindo que seus preços seguem um movimento browniano

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ \quad (1.1.8)$$

com  $S$  sendo o valor do ativo,  $\mu$  a tendência seguida pelo ativo,  $\sigma$  a volatilidade dos preços dos ativos,  $dt$  sendo a tradicional diferencial no tempo, enquanto  $dZ$  é a diferencial que também segue o processo de Wiener

$$dZ = \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \quad (1.1.9)$$

com  $\varepsilon$  sendo um número aleatório extraído de uma distribuição normal  $N(0,1)$ .

Logo, discretizando a trajetória dos preços do ativo, resulta:

$$\frac{\Delta S}{S_t} \sim N(\mu \cdot \Delta t; \sigma \sqrt{\Delta t}) \quad (1.1.10)$$

ou seja, as taxas de retorno dos preços do ativo seguem uma distribuição lognormal:

$$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t; \sigma\sqrt{\Delta t}\right]. \quad (1.1.11)$$

Portanto, os preços do ativo, nas trajetórias  $j$ ,  $1 < j < N$ , seguem a equação

$$S_{i+1}^j = S_i^j \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_i\right] \quad (1.1.12)$$

com  $r$  sendo a taxa de juros livre de risco,  $S_0$  o preço inicial do ativo objeto e as demais variáveis seguem as mesmas considerações já expostas. Observe que  $r=\mu$ , pois o ambiente operacional é o de neutralidade ao risco [ver apêndice].

Como exemplo, apresentam-se  $N$  caminhos, sendo que cada caminho  $j$  é composto de 5 intervalos, conforme figura abaixo:

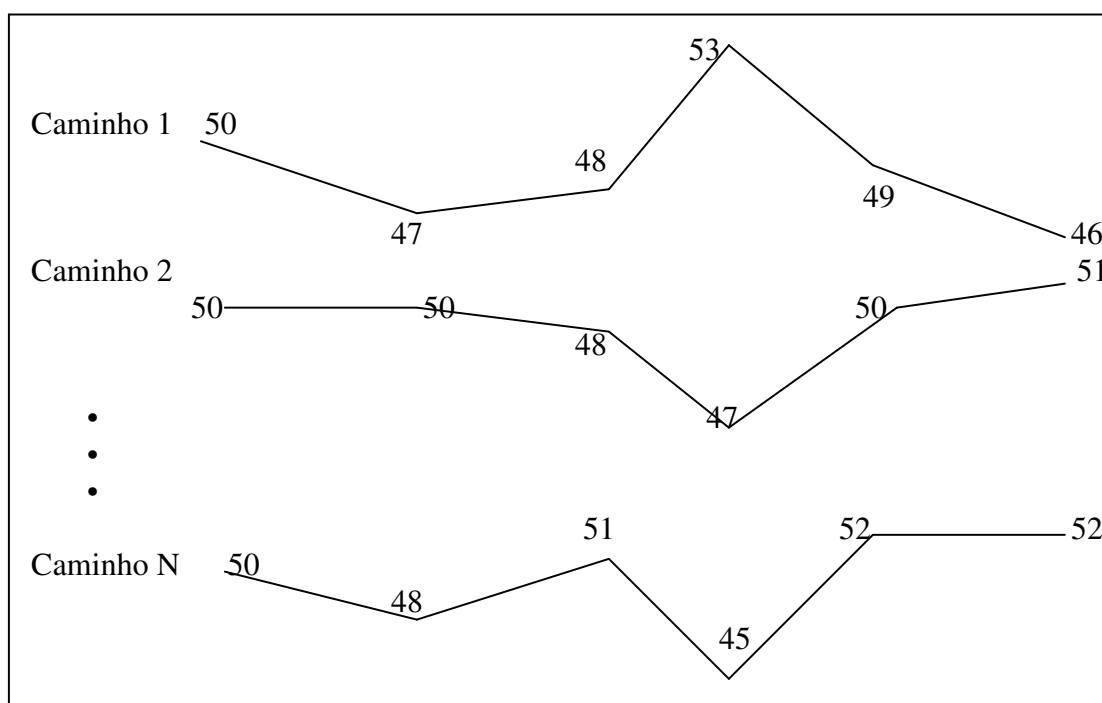


Figura 1. Possíveis caminhos percorridos pelos preços do ativo objeto.

Os caminhos  $j$  percorridos pelos preços dos ativos, cujo preço inicial é 50, a taxa livre de risco é 20% ao ano, volatilidade de 40% ao ano e tempo restante para maturação de 0,5 ano, são obtidos dividindo esse tempo em cinco intervalos, isto é,  $\Delta t = 0,5/5 = 0,1$ . Assim, no caminho  $j=1$ , a expressão (1.1.12) fica:

$$S_1 = 50 \exp \left[ \left( 0,2 - \frac{(0,4)^2}{2} \right) 0,1 + 0,4 \sqrt{0,1} \cdot \varepsilon_0 \right]$$

com  $\varepsilon_0 = -0,584404$ , sendo extraído aleatoriamente de uma distribuição normal padrão, e obtendo  $S_1 = 47$ . Repete-se o raciocínio para o segundo trecho, obtendo  $S_2 = 48$ , até chegar ao final do primeiro trajeto cujo preço é  $S_5 = 46$ .



É importante que o gerador de número aleatórios,  $\varepsilon_i$ , não apresente viés, o que prejudicaria sensivelmente as simulações. Agora basta calcular o valor da opção, já que o preço de exercício  $K$  é dado. Supondo tratar-se de uma opção de compra europeia, com exercício de 45, o preço da opção seria  $(S_T^1 - K)^+ = (46 - 45)^+ = 1$ , cujo valor presente seria  $C_1 = 1 \times e^{-0,1 \times 5} = 0,6065$ , se utilizada a taxa livre de risco como fator de desconto.

Após simular os  $N$  caminhos dos possíveis preços do ativo, pode-se estimar o valor de uma opção de compra pelo método de Monte Carlo, que seria:

$$\hat{C} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (S_T^j - K)^+$$

com  $S_T^j$  sendo o preço do ativo na maturidade  $T$ .

Apresenta-se a seguir um programa computacional para previsão de preços das opções tipo *plan vanilla* apenas para tornar familiar o método de Monte Carlo. O programa é confeccionado em GwBasic por ser encontrado na Internet sendo de domínio público, e auxiliar na compreensão do método.

Quadro 1. Monte Carlo para uma opção de compra (*call option*) tipo europeia.

```

10 PRINT "Simulação de Monte Carlo – call option europeia"
20 INPUT "Preço do ativo ="; so
30 INPUT "Preço de exercício ="; k
40 INPUT "Volatilidade do ativo (em %) ="; sig
50 sig=sig/100
60 INPUT "Taxa de juros livre de risco (%) ="; r
70 r=r/100
80 INPUT "Tempo para o ativo maturar (em anos) ="; t
90 INPUT "Número de estágios ="; m
100 INPUT "Número de simulações ="; n
110 dt=t/m
120 nudt=(r-0.5*sig*sig)*dt
130 sigsdt=sig*SQR(dt)
140 soma=0 : soma2=0
150 FOR i=1 to n

```

```

160.   s=so
170   FOR j=1 to m
180       ki=ki+1 : z1=rnd(ki)
190       ki=ki+1 : z2=rnd(ki)
200       z=SQR(-2*log(z1)/log(10))*cos(2*3.141596*z2)
210       s=s*exp(nudt+sigsdt*z)
220   NEXT
230   pay=s-k
240   IF pay<0 THEN pay=0
250   soma=soma+pay
260   soma2=soma2+pay*pay
270 NEXT
280 premio=soma/n*exp(-r*t)
290 PRINT "Valor call européia="; premio
300 desvio=SQR((soma2-soma*soma/n)*exp(-2*r*t)/(n-1))
310 erro=desvio/SQR(n)
320 PRINT "Erro Padrão ="; erro
330 END

```

Este esquema operacional pode ser estendido para os diversos tipos de opções, inclusive para as exóticas. Para avaliar as opções dos tipos européias cujo valor depende da história de comportamento dos preços do ativo e também do preço de exercício, o método de Monte Carlo é de fácil aplicação. Contudo esse método pode ser estendido às opções americanas a ser apresentado nesse trabalho.

### 1.1.3. Vantagens do Método de Monte Carlo

Comparado a outros procedimentos, a simulação de Monte Carlo é eficiente do ponto de vista numérico quando existem diversas variáveis. Este fato decorre da simulação de Monte Carlo crescer de forma aproximadamente linear com o número de variáveis, enquanto o tempo de processamento de muitos outros procedimentos cresce exponencialmente com o número de variáveis. Outra vantagem de Monte Carlo é fornecer um desvio padrão do erro para a estimativa realizada. Contudo, a limitação do método é que, em princípio, só pode ser usado em derivativos do tipo europeu. Essa limitação é contrabalanceada com o fato de que a simulação de Monte Carlo trabalha bem com *payoffs* complexos, inclusive com formas

funcionais complexas para as médias e variâncias. Em particular, pode ser usado quando o *payoff* depende de alguma função do caminho complexo seguido pela variável, não exatamente aquele de seu valor terminal.

A simulação de Monte Carlo tem sido utilizada para análise de opções em que a volatilidade do ativo objeto é estocástica [Johnson e Shanno, 1987]. As trajetórias para ambos, preço do ativo e volatilidade, são simulados conjuntamente. O valor da volatilidade, em determinado instante, determina a distribuição de probabilidade originada pela amostra do preço do ativo.

## 1.2. MODELOS BASEADOS EM *LATTICE*

Os modelos conhecidos como *lattices* visam, via passeio aleatório (*random walk*) discreto, modelar um movimento browniano correspondente. Os modelos binomiais e trinomiais, da “classe *lattice*”, são considerados muito intuitivos e flexíveis, podendo ser aplicados tanto nas opções européias quanto americanas, se estendendo às opções dependentes das trajetórias (*path-dependent*).

O modelo binomial, desenvolvido independentemente por Bartter e Reudleman [1979] e Cox, Ross e Rubinstein [1979], pressupõe que o ativo-objeto segue um processo multiplicativo binomial no decorrer do tempo. A cada intervalo de tempo, o preço do ativo  $S$  tem a possibilidade de ter seu valor aumentado, atingindo  $uS$ , com probabilidade  $q$  ou ter seu valor diminuído para  $dS$ , com probabilidade  $1-q$ . A condição  $d < 1-r < u$  deve ser obedecida para se eliminar a possibilidade de arbitragem. Continuam válidas as hipóteses habituais do modelo de Black-Scholes [1973], inclusive, desprezando os custos operacionais (como impostos, corretagens) e permitindo a venda a descoberto sem qualquer restrição.

A idéia básica do método pode ser observada considerando uma opção de compra (*call*) européia com exercício  $K$ , sobre determinado ativo de preço corrente  $S$ . O tempo de expiração do contrato é de um período, podendo emprestar ou tomar emprestado recursos financeiros à mesma taxa de juros  $r$ , no período. Assim, pode-se aplicar em debêntures ou tomar dinheiro emprestado junto a uma instituição financeira na mesma taxa de juros. Nestas condições, consideram-se as seguintes operações:

- Comprar uma opção ao preço corrente  $C$  para adquirir  $\delta$  ativos ao preço corrente de  $S$  cada um;
- Adquirir  $B$  debêntures a taxa de juros  $r$  (no período considerado).

O movimento dos preços do ativo segue o diagrama:

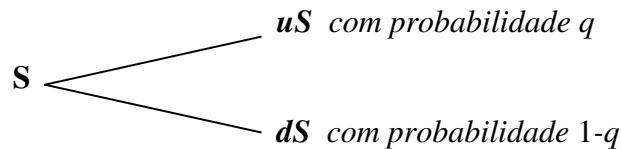


Figura 2. Desenvolvimento dos preços do ativo.

Para avaliar a opção de compra (*call*) sobre o ativo, denota-se por  $C$  seu preço corrente e  $C_u$  e  $C_d$  seus preços no final do período, respectivamente, se o preço do ativo subir ( $uS$ ) ou cair ( $dS$ ). Portanto,

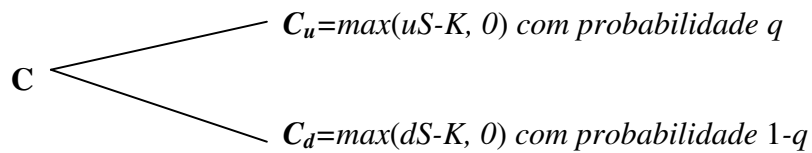


Figura 3. *Payoff* de uma árvore com uma única ramificação.

Assim, supondo que a carteira de investimento contenha  $\delta$  ativos e  $B$  debêntures rendendo a taxa de juros livre de risco  $r$ , seu valor  $V$  atual será:

$$V = \delta S + B. \tag{1.2.1}$$

No final do período, essa carteira valerá:

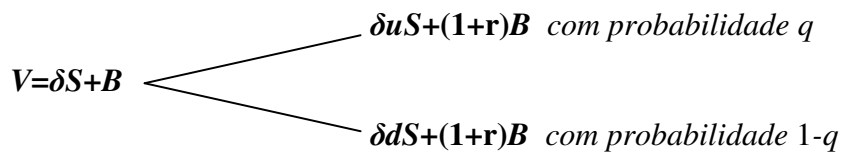


Figura 4. Valor da carteira de uma árvore com uma ramificação.

A idéia é escolher  $\delta$  e  $B$  de forma a obter *hedging* para a carteira e conseqüentemente, as opções possuem o mesmo valor no final do período. Isso requer que

$$\delta uS + (1+r)B = C_u$$

$$\delta dS + (1+r)B = C_d.$$

Resolvendo o sistema resulta em:

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}. \quad (1.2.2)$$

Portanto, o preço da opção de compra européia ou americana será:

$$\begin{aligned} V &= \delta S + B \\ &= \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)} \\ &= \left[ \left( \frac{(1+r)-d}{u-d} \right) C_u + \left( \frac{u-(1+r)}{u-d} \right) C_d \right] \frac{1}{(1+r)} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

desde que este valor supere  $S-K$  e, em contrário se anulará. Definindo

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \quad (1.2.4)$$

a equação (1.2.3) pode ser simplificada:

$$C = [pC_u + (1-p)C_d] \cdot e^{-r}. \quad (1.2.5)$$

Deve-se observar que na fórmula acima, não aparece a probabilidade  $q$  do preço do ativo subir e também de  $1-q$  do preço cair. O valor da opção de compra independe das preferências em relação ao risco, já que utilizou-se a estratégia de impossibilidade de arbitragem.

Essa situação pode ser ampliada para dois períodos ou mais períodos, até que o número de períodos preencha o tempo referente à maturidade,  $T$ . Assim, estendendo o procedimento para  $n$  períodos e “replicando” a carteira de forma a conseguir *hedging* em cada período, a opção de compra européia assume a seguinte fórmula:

$$C = \left[ \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} \max\{u^j d^{n-j} S - K, 0\} \right] \frac{1}{(1+r)^n}. \quad (1.2.6)$$

Wilmott, Howison e Dewynne [1993] apresentam uma maneira de se escolher os parâmetros  $p$ ,  $u$  e  $d$  do modelo binomial, de forma que o passeio aleatório discreto, representado pela árvore binomial, e o passeio aleatório contínuo, possuam a mesma média e variância. Os autores apresentam as duas seguintes equações:

$$\begin{aligned} pu + (1-p)d &= e^{r \cdot \Delta t} \\ pu^2 + (1-p)d^2 &= e^{(2r + \sigma^2) \cdot \Delta t} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

com  $u > 0$ ,  $d > 0$  e  $0 \leq p \leq 1$ ;  $r$  é a taxa anual de juros livre de risco, composta continuamente. A primeira equação acima é proveniente do valor esperado dos preços do ativo ao final de cada período de tempo  $\Delta t$ ; a segunda, é deduzida da variância do ativo-objeto, também ao final do período  $\Delta t$ . Neste sentido, as duas equações em (1.2.7) determinam as propriedades estatísticas importantes do passeio aleatório e, conseqüentemente, uma terceira equação, para que se possa solucionar o sistema de equações apresentado, pode ser escolhido de forma arbitrária. Assim, se

$$u = 1/d,$$

introduzida por Cox, Ross e Rubinstein [1979], resulta em:

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

e, portanto, (1.2.4) torna-se

$$p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}. \quad (1.2.8)$$

Deve-se construir um *lattice* de preços possíveis para o ativo. Conhecendo o preço do ativo  $S$  no tempo corrente  $t$ , divide-se o tempo restante de vida do derivativo em  $M$  passos-

tempo iguais, ou seja,  $\Delta t = \frac{T}{M}$ . Pode-se mostrar que no  $m$ -ésimo passo-tempo,  $m\Delta t$  existem  $m+1$  possibilidades para o valor do ativo:

$$d^{m-n}u^n S = u^{2n-m} S, \quad n=0,1,\dots,M.$$

No passo final,  $m\Delta t$ , tem-se  $M+1$  valores possíveis para o ativo.

Assumindo conhecer a função *payoff* da opção de compra (*call*), na expiração tem-se

$$C_{M,n} = \max(S_{M,n} - K, 0), \quad n=0,1,\dots,M$$

com  $K$  sendo o preço de exercício, correspondendo aos possíveis valores na expiração.

Pode-se encontrar o valor esperado do derivativo no passo anterior,  $(M-1)\Delta t$ , para o preço  $S_{M-1,n}$ ,  $n=0,1,\dots,M-1$ , desde que se conheça a probabilidade  $p$  do ativo com preço  $S_{M-1,n}$  se mover até  $S_{M,n+1}$  durante o passo-tempo e a probabilidade  $1-p$  do ativo se mover para  $S_{M,n}$ . Usando o argumento de risco neutro pode-se calcular o valor do ativo em cada preço para o passo-tempo  $M-1$ . Esse raciocínio pode ser feito para o passo anterior e assim sucessivamente até o passo-tempo nulo, que representa o valor do derivativo no tempo corrente.

A opção europeia pode ser estimada após denotar seu valor por  $V_{m,n}$  no passo-tempo  $m\Delta t$ , cujo preço é  $S_{m,n}$ , com  $0 \leq n \leq m$ . Calculando o valor esperado de uma opção de compra no passo-tempo  $m+1$ , desde que se conheça o preço  $S_{m,n}$  e a taxa de desconto  $r$ , tem-se:

$$V_{m,n} = e^{-r\Delta t} [pV_{m+1,n+1} - (1-p)V_{m+1,n}]$$

Conhecendo o valor de  $V_{M,n}$ ,  $n=0,1,\dots,M$ , da função *payoff*, pode-se recursivamente, determinar os valores de  $V_{m,n}$ , para  $n=0,1,\dots,m$ , com  $m < M$ , até atingir o valor corrente da opção,  $V_{0,0}$ .

O valor da opção americana, por sua vez, é avaliada após construir a árvore de preços do ativo

$$S_{m,n} = u^{2n-m} S_{0,0}, \quad n=0,1,\dots,m$$

com  $S_{0,0}$  sendo o valor corrente e  $S_{m,n}$  o valor possível da opção de compra no passo-tempo  $m$ . No período  $m\Delta t$ , calcula-se o valor possível da opção cuja função *payoff* é:

$$C_{M,n} = \max(S_{M,n} - K, 0).$$

Considerando a situação no passo-tempo  $m$ , a opção pode ser exercida antecipadamente se resultar em lucro, mais especificamente, o valor de uma opção de compra americana será:

$$C_{m,n} = \max[S_{m,n} - K, e^{-r\Delta t} (pV_{m+1,n+1} - (1-p)V_{m+1,n})]$$

A seguir é apresentado um programa em GwBasic para obter as estimativas da opções de compra e venda do tipo americana.

Quadro2. Programa em GwBasic para estimar opções de compra e venda do tipo americana utilizando o modelo binomial.

```

10 PRINT "Arvore Binomial = Opção Americana"
20 INPUT "Preço do ativo=";s
30 INPUT "Exercício=";k
40 INPUT "Taxa de juros livre de risco=";r
50 INPUT "dividendo (ou taxa de juros externa) =";div
60 INPUT "desvio padrão=";sigma
70 INPUT "tempo de maturação (em anos)=";t
80 INPUT "número de períodos=";n
90 delt=t/n
100 dim s(n+1), u(n+1), z(n+1)
110 desc=exp(-r*delt)
120 u=exp(sigma*SQR(delt))
130 d=1/u
140 p=(exp((r-div)*delt)-d)/(u-d)
150 s(0)=s
160 FOR i=1 to n

```



```

170   FOR j=i to 1 step -1
180       s(j)=u*s(j-1)
190   NEXT
200   s(0)=d*s(0)
210 NEXT
220 FOR j=0 to n
230   cal(j)=s(j)-k
240   IF cal(j)<0 THEN cal(j)=0
250   put(j)=k-s(j)
260   IF put(j)<0 THEN put(j)=0
270 NEXT
280 FOR i=n to 1 step -1
290   FOR j=0 to n-1
300       put(j)=(p*put(j+1)+(1-p)*put(j))*desc
310       IF put(j)<k-s*u^j*d^abs(j-i+1) THEN put(j)<k-s*u^j*d^abs(j-i+1)
320       cal(j)=(p*cal(j+1)+(1-p)*cal(j))*desc
330       IF cal(j)<s*u^j*d^abs(j-i+1)-k THEN cal(j)<s*u^j*d^abs(j-i+1)-k
340   NEXT
350 NEXT
360 PRINT "American call="; cal(0)
370 PRINT "American put="; put(0)
380 END

```

Assim, se  $S=120,5$ ,  $div=0$ ,  $K=115$ ,  $sigma=10,58\%$ ,  $r=21,2\%$  e  $t=0,1984$  ano (72,4 dias) o método binomial com  $N=30$  forneceria o valor de 10,30 para a *call* americana e de 0,08 para a *put* americana. Aumentar o número de estágio seria infrutífero, pois com 30 estágios a estimativa é bastante razoável e a convergência a partir daí se torna lenta.

Quando se trabalha com árvores binomiais, essa metodologia produz resultados satisfatórios em se tratando de apenas um ativo-objeto. Contudo, o grande inconveniente da árvore é que quando a volatilidade é muito pequena, algumas vezes, o método conduz à probabilidades muito pequena ou negativa. Esta última possibilidade é totalmente desprovida de significado físico.

### 1.3. MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS

Os métodos binomiais, apresentados anteriormente, podem ser entendidos como sendo um método de resolução de uma equação diferencial parcial. Contudo, para se resolver numericamente uma equação diferencial é mais conveniente utilizar o método de diferenças finitas por ser mais flexível, mais preciso e principalmente por conter a difusão (volatilidade) na estrutura da árvore. Mesmo a “árvore” sendo fixa, no método de diferenças finitas parâmetros mudam refletindo uma alteração na difusão.

Embora a grade possa assumir a forma que se desejar, quando se resolve a equação de Black-Scholes [1973] há um forte apelo em se tomar a grade com passos  $\log S$  constantes para os preços. Uma vez feito isso, se  $x = \log S$  então é como tomar passos de tamanhos  $x$  constantes.

Existe a possibilidade de transformar a equação de Black-Scholes na equação de transferência de calor. Embora conveniente do ponto de vista numérico, evita-se essa transformação por considerar mais interessante resolver a equação em termos das variáveis financeiras reais. No caso de opções com barreiras, a transformação numa equação do calor pode causar dificuldades algébricas além de mudar as condições iniciais e de contorno. E, em determinados problemas, como aqueles envolvendo volatilidade dependendo do tempo e do preço do ativo, assim como os produtos relacionados com taxas de juros, a própria transformação em uma expressão mais simples fica comprometida.

#### 1.3.1. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

A idéia básica, dos vários métodos de diferenças finitas existentes, é substituir as derivadas da equação por aproximações baseadas em expressões das séries de Taylor no conjunto de pontos da região de interesse. Assim, a equação diferencial é convertida em um conjunto de equações de diferenças, as quais são resolvidas iterativamente.

A equação diferencial que rege o comportamento dos preços da opção deve satisfazer:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (1.3.1)$$

com  $f$  sendo os preços do derivativo,  $\sigma$  a volatilidade dos retornos do ativo e  $r$  a taxa de juros livre de risco. Para intervalos de tempos, de 0 a  $T$ , com  $T$  sendo o final do contrato, divide-o em um número finito de subintervalos igualmente espaçados, de tamanhos  $\Delta t = T/N$ . Também, escolhe-se um número finito de preços do ativo de forma a dividir o intervalo considerado em  $M+1$  subintervalos de comprimentos iguais a  $\Delta S$ .

O ponto  $(i,j)$  da grade correspondente ao tempo  $j\Delta t$  e o preço do ativo  $i\Delta S$ . Por sua vez, a notação  $f_{ij}$  denota o valor da opção no ponto  $(i,j)$ .

Assim, para um ponto  $(i,j)$  na grade,  $\frac{\partial f}{\partial S}$  pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta S} \quad (1.3.2)$$

ou por

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{ij} - f_{i-1,j}}{\Delta S} \quad (1.3.3)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} \quad (1.3.4)$$

As duas equações são conhecidas como aproximações de diferenças progressivas (*forward difference approximation*) e aproximações de diferenças regressivas (*backward difference approximation*) respectivamente enquanto a terceira é uma aproximação central simétrica. Por

último, necessita-se de uma aproximação para  $\frac{\partial f}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta t} \quad (1.3.5)$$

A justificativa para essa abordagem, que se constitui em desenvolver as séries de Taylor para as diversas expressões, podem ser vistas, por exemplo em Wilmott, Dewynne e Howison [1993].

Utilizando-se  $\log S$  em lugar de  $S$ , a variável preço do ativo torna o método de diferenças finitas mais eficiente do ponto de vista computacional. Assim, se  $x = \log S$ , a equação (1.3.1) se escreveria como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf . \quad (1.3.6)$$

O *payoff* para a opção de venda e de compra, respectivamente, ficariam:

$$\max\{K - e^x, 0\} \quad \text{e} \quad \max\{e^x - K, 0\} \quad (1.3.7)$$

A equação de diferenças correspondente à equação (1.3.6) ficaria:

$$p_u f_{i+1,j} + p_m f_{ij} + p_d f_{i-1,j} = f_{i,j+1} \quad (1.3.8)$$

sendo

$$p_u = -\frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu}{\Delta x} \right)$$

$$p_m = 1 + \Delta t \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} + r \Delta t$$

$$p_d = -\frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} - \frac{\nu}{\Delta x} \right)$$

com  $\nu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ . Cada equação de (1.3.8), para  $i = -M+1, \dots, M-1$ , não pode ser resolvida isoladamente. Porém, as condições de contorno:

$$f_{M,j} - f_{M-1,j} = \lambda_U$$

$$f_{-M+1,j} - f_{-M,j} = \lambda_L$$

para representar um sistema de  $2M+1$  equações lineares a qual, implicitamente, determina os  $2M+1$  valores da opção para cada passo no tempo  $j$ . Os parâmetros  $\lambda_U$  e  $\lambda_L$ , das condições de

contorno são determinados segundo o tipo de opção. No caso de uma opção de compra (*call option*) tem-se

$$\lambda_U = S_{M,j} - S_{M-1,j}$$

$$\lambda_L = 0$$

e, em se tratando de uma opção de venda (*put option*),

$$\lambda_U = 0$$

$$\lambda_L = -(S_{-M+1,j} - S_{-M,j})$$

Esse conjunto de equações tem uma estrutura especial denominada tridiagonal. Cada equação tem duas variáveis em comum com as duas equações, superior e inferior, ou seja, é válida a relação:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_u & p_m & p_d & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_u & p_m & p_d & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & p_u & p_m & p_d & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & p_u & p_m & p_d \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{M,j} \\ f_{M-1,j} \\ f_{M-2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{-M+2,j} \\ f_{-M+1,j} \\ f_{-M,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_U \\ f_{M-1,j+1} \\ f_{M-2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{M-1,j+1} \\ f_{M,j+1} \\ \lambda_L \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

Esse sistema de equações tridiagonal pode ser resolvido de forma muito eficiente, sem recorrer a inversão de matrizes, como pode ser visto em Clewlow e Strickland [2001, p.65-76].

### 1.3.2. MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

Um esquema que é um refinamento do método de diferença implícito, para solucionar numericamente a equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \nu \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0$$

com  $\nu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ , é o de Crank-Nicolson, o qual avalia a opção no ponto  $\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$  situado entre as colunas da grade. A aproximação usada para  $\frac{\partial f}{\partial t}$  no ponto  $\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$  é obtida da fórmula de diferenças central:

$$\frac{\partial f}{\partial t}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\Delta t}(f(x, t) - f(x, t + \Delta t)), \quad (1.3.10)$$

cuja precisão é  $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ . A aproximação usada para  $\frac{\partial f}{\partial x}$  no ponto  $\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$  é, considerado como a média das aproximações de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  nos pontos  $(x, t + \Delta t)$  e  $(x, t)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, t + \Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{f_{i+1, j+1} - f_{i-1, j+1}}{\Delta x} + \frac{f_{i+1, j} - f_{i-1, j}}{\Delta x}\right\}. \end{aligned}$$

Por último, a aproximação para  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$  é a média aritmética das aproximações de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t + \Delta t) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), \text{ ou seja,}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t + \Delta t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}\right).\end{aligned}$$

O esquema de Crank-Nicolson pode ser escrito como:

$$p_u f_{i+1,j} + p_m f_{i,j} + p_d f_{i-1,j} = -p_u f_{i+1,j+1} - (p_m - 2)f_{i,j+1} - p_d f_{i-1,j+1} \quad (1.3.11)$$

sendo que

$$p_u = -\frac{1}{4}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu}{\Delta x}\right)$$

$$p_m = 1 + \Delta t\frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} + r\frac{\Delta t}{2}$$

$$p_d = -\frac{1}{4}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} - \frac{\nu}{\Delta x}\right).$$

O lado direito de (1.3.11) tem todos os termos conhecidos e, assim, o conjunto de equações (1.3.9), para  $i = -M+1, \dots, M-1$ , junto com as condições de contorno

$$f_{M,j} - f_{M-1,j} = \lambda_U$$

$$f_{-M+1,j} - f_{-M,j} = \lambda_L$$

representam num sistema de equações tridiagonais (semelhante ao esquema anterior do método implícito).

A utilidade desse método está na incondicional estabilidade e convergência. Ainda, pode-se conseguir de boa precisão para a solução, com convergência bem mais rápida.

No quadro a seguir encontra-se o método de Crank Nicolson para estimar o preço de uma opção de venda (*put option*) tipo americana

Quadro 3. Método de Crank Nicolson para uma opção de venda (*put option*) tipo americana.

```

10 PRINT "Método de Crank Nicolson – put option americana"
20 INPUT "Preço do ativo ="; so
30 INPUT "Preço de exercício ="; k
40 INPUT "Volatilidade do ativo (em %) ="; sig
50 sig=sig/100
60 INPUT "Taxa de juros livre de risco (%) ="; r : r=r/100
70 INPUT "Dividendo ou Taxa de juros externa (%) ="; div : div=div/100
80 INPUT "Tempo para o ativo maturar (em anos) ="; t
90 INPUT "Número de divisão do tempo ="; n
100 INPUT "Número de divisão dos preços ="; m1 : m=2*m1
110 DIM sold(m+1), snew(m+1), st(m+1) pp(m+1), pmp(m+1)
120 dt=t/n
130 INPUT "Tamanho passo preço (dx)=";dx
140 nu=r-div-0.5*sig*sig
150 edx=exp(dx)
160 pu=-0.25*dt*(sig/dx)^2+nu/dx
170 pm=1+dt*(sig/dx)^2+0,5*r*dt
180 pd=-0.25*dt*(sig/dx)^2-nu/dx
190 st(0)=s*exp(-m/2*dx)
200 FOR i=1 to m
210     st(i)=st(i-1)*edx
220 NEXT
230 FOR i=0 to m
240     sold(i)=k-st(i)
250     IF sold(i)<0 THEN sold(i)=0
260 NEXT
270 lambdaL=-1*(St(1)-St(0))
280 lambdaU=0
290 FOR j=n-1 to 1 step -1
300     pmp(1)=pm+pd
310     pp(1)=-pu*sold(2)-(pm-2)*sold(1)-pd*sold(0)+pd*lambdaL
320     FOR i=2 to m-1
330         pmp(i)=pm-pu*pd/pmp(i-1)
340         pp(i)=sold(i)-pp(i-1)*pd/pmp(i-1)
350     NEXT
360     snew(m)=(pp(m-1)+pmp(m-1)*lambdaU)/(pu+pmp(m-1))
370     snew(m-1)=snew(m)-lambdaU

```



```

380   FOR i=m-2 to 1 step-1
390        $snew(i)=(pp(i)-pu*snew(i+1))/pmp(i)$ 
400   NEXT
410    $snew(0)=st(0)$ 
420   FOR i=0 to m
430        $sold(i)=new(i)$ 
440       IF  $sold(i)<k-st(i)$  THEN  $sold(i)=k-st(i)$ 
450   NEXT
460 NEXT
470 PRINT "Valor put americana=";  $sold(m/2)$ 
480 END

```

A seguir é apresentado o Método de Diferenças Finitas Explícito para uma opção de compra (*call option*) tipo americana. Mantém-se o mesmo esquema acima, porém alterando apenas os caracteres em negritos, cujos números de referências são:

Quadro 4. Método de Crank Nicolson para uma opção de compra (*call option*) tipo americana.

```

240  $sold(i)=st(i)-k$ 
270  $lambdaU=St(m)-St(m-1)$ 
280  $lambdaL=0$ 
440 IF  $sold(i)<st(i)-k$  THEN  $sold(i)=st(i)-k$ 

```

**Observação.** O método dos elementos finitos, não explorado nesse trabalho, basicamente substitui a equação diferencial por um funcional a qual deve ser minimizado. A equação resultante dessa minimização é a solução da equação diferencial original. Uma das vantagens de se utilizar o método dos elementos finitos é a flexibilidade em trabalhar com condições de contornos bem complexas. Contudo, embora o método dos elementos finitos seja conceitualmente distinto do método de diferenças finitas, se aplicado, forneceria a mesma matriz responsável pelo sistema de equações algébricas obtido no método das diferenças finitas. Willmot, Dewynne e Howison [1993] dedicam todo um apêndice para mostrar essa característica. Esta foi a razão de não se utilizar o método dos elementos finitos.

## Conclusão

Esse capítulo explorou os métodos numéricos a serem utilizados neste trabalho. Assim, na primeira parte, apresentaram-se os fundamentos da Simulação de Monte Carlo, cuja técnica é facilmente implantada, tornando bastante versátil no estudo de opções mais sofisticadas. Como o valor de uma opção, sob a hipótese de risco neutro, é a esperança de seu *payoff* (valor de liquidação do vencimento), a essência de Monte Carlo é estimar essa esperança calculando a média de um grande número de *payoffs* descontados. O segundo método, da árvore binomial, é de simples aplicação quando envolve apenas um ativo, ou talvez dois. Nesses dois primeiros métodos, exploraram-se os caminhos aleatórios percorridos pelos preços dos ativos. Porém, no terceiro método apresentado, das diferenças finitas, o alvo foi a equação diferencial. A vantagem desse método sobre a árvore binomial é sua maior precisão e maior flexibilidade de trabalho.

## Capítulo 2

# UTILIZAÇÃO DE DERIVATIVOS EXÓTICOS “PATH DEPENDENT”

### 2.1. Introdução

O mercado tem disponibilizado uma lista de derivativos para investidores e administradores de risco, conhecidos como *plain vanilla*. Porém, em anos recentes, a engenharia financeira tem criado uma variedade de opções complexas, conhecidas como opções exóticas, devido aos *payoffs* (valor de liquidação no vencimento) associados a estes produtos financeiros. Assim, o número de derivativos é virtualmente ilimitado, devido a grande flexibilidade na determinação de datas de pagamento e fórmula de cálculo dos valores dos fluxos financeiros entre as partes envolvidas. Essa flexibilidade permite escolher um instrumento derivativo que ajuste melhor às necessidades específicas entre as partes envolvidas.

Para uma opção *plain vanilla*, seu valor, em qualquer momento da vida útil, depende apenas do preço corrente do ativo, preço de exercício, volatilidade do ativo, além do tempo de expiração do contrato, taxa de juro livre de risco do mercado e possíveis dividendos envolvidos em caso de ações, ou da taxa externa de juro no caso de opção cambial. Além disso, o *payoff* de uma opção *plain vanilla* depende apenas do preço final do ativo, independente de sua trajetória percorrida.

Muitas opções exóticas exibem a chamada trajetória dependente (*path dependent*), ou seja, o preço da ação depende de valores dos preços prévios ou futuros do ativo. Por exemplo, uma opção *lookback* depende do preço mínimo (ou máximo) atingido pelo ativo em períodos anteriores. O preço de uma opção *average price* (ou seja, asiática) depende da média futura dos preços do ativo. Numa opção com barreira, a validade do contrato está condicionada à possibilidade do preço atingir ou não certo valor.

A importância das opções exóticas não deve ser negligenciada devido ao fato delas oferecerem um seguro adequado para o investidor, de acordo com suas necessidades. Assim, a opção asiática permite amenizar o risco com um menor desembolso, ou seja, barateia o seguro.

Quanto à opção com barreira, esta fornece um seguro limitado, porém, seu valor pode decrescer com o valor associado à barreira escolhida. Essa opção se assemelha ao seguro de carro em que é escolhida a chamada franquia (barreira); quanto mais alta for essa franquia, menor o custo do seguro. Por último, a opção *lookback* permite ganhos por parte de seu proprietário em todas as situações e, conseqüentemente, seu seguro é mais elevado que as demais modalidades.

As opções exóticas tipos européias podem ser analisadas como uma extensão da estrutura da opção *plain vanilla*. Contudo, as opções tipos americanas são analisadas via simulação, métodos numéricos ou mesmo algum método aproximado.

Duas opções exóticas são apresentadas neste capítulo: asiáticas e com barreiras.

## 2.2 Opções com Barreiras.

Opções com barreiras são opções cujo *payoff* depende de se o preço do ativo venha atingir um certo nível durante o período considerado no contrato.

Um tipo de opção com barreira é um *knockout option*. Essa é similar a uma opção regular, tipo *plain vanilla*, exceto que, quando o preço do ativo atinge uma determinada barreira,  $H$ , a opção perde validade. No caso da opção *knockout*, a barreira geralmente está abaixo do preço de exercício ( $H < K$ ). Comumente, essa opção é denominada de *down-and-out option*; e no caso de uma *put knockout*,  $H > K$ , a opção referida é como *up-and-out option* (nomes utilizados neste trabalho).

Os derivativos com barreiras possuem duas formas de cálculo do valor de liquidação. A primeira é válida até que o valor do ativo atinja ou ultrapasse um patamar preestabelecido, conhecido como barreira. A partir daí, vale a segunda forma de cálculo.

Conseqüentemente, uma opção com barreira “*in*” não tem valor até que seu preço atinja um certo valor previamente acordado, preço este conhecido como barreira. Quando isso acontece, a opção torna-se do tipo comum (*plain vanilla*). Caso os preços do ativo não atinjam essa barreira, a opção não terá validade e, seu titular terá direito apenas a um prêmio consolação (*rebate*), que é pago no final do contrato.

Por sua vez, uma opção com barreira “*out*” se comporta como uma opção *plain vanilla*, desde que os preços do ativo não atinjam a barreira. Atingindo essa barreira, a opção perde a

validade cabendo apenas um prêmio de consolação a seu titular. Nesse caso, esse prêmio é pago imediatamente ao se atingir a barreira.

As opções com barreiras permitem que se obtenha quatro tipos de opções: *down-and-in call (put)*, *down-and-out call (put)*, *up-and-in call (put)*, *up-and-out call (put)*.

***Down-and-out call.*** Uma opção de compra *down-and-out* com preço de exercício  $K$ , expirando no instante  $T$  e tendo como barreira  $H$ , permite que seu proprietário adquira o produto desde que seu preço não caia abaixo de  $H$ , durante a existência do contrato. Caso o preço atinja a barreira  $H$ , o seu titular não terá direito algum, a não ser um prêmio de consolação, *Rebate*. Assim, uma opção *down-and-out* se comporta como uma opção tradicional desde que não atinja ou ultrapasse a barreira, pois neste caso o contrato perderia validade.

A avaliação para opção de compra *down-and-out* foi apresentada pela primeira vez por Cox e Rubinstein [1985].

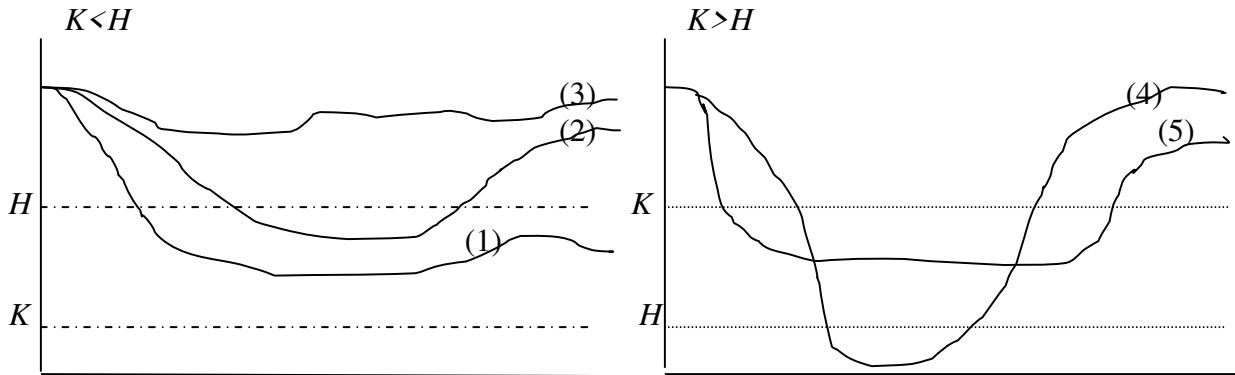
***Down-and-in call.*** Uma opção de compra *down-and-in*, com preço de exercício  $K$ , expirando no instante  $T$  e tendo como barreira  $H$ , dá o direito a seu titular de adquirir o produto desde que seu preço, em algum instante de sua vida útil, atinja ou rompa a barreira  $H$ . Nesse instante, o contrato se comporta como uma opção tradicional, porém deixando de ter validade se o preço não atingir a barreira  $H$ . Ao seu titular caberá apenas um possível prêmio de consolação, *Rebate*.

***Up-and-out call.*** Uma opção de compra *up-and-out*, expirando no instante  $T$ , permite que seu possuidor adquira o produto pelo preço de exercício  $K$ , desde que seu preço, durante a vida útil da opção, não atinja a barreira  $H$ . Caso atinja a barreira  $H$ , o contrato não tem validade.

***Up-and-in call.*** Uma opção de compra *up-and-in* permite que seu possuidor adquira o produto pelo preço de exercício  $K$ , desde que seu preço atinja a barreira proposta  $H$ , em algum instante do período de vigência do título. Se o preço do ativo, em qualquer instante não atingir a essa barreira, o contrato deixa de ser válido.

Todas as opções de venda (*put options*) são definidas de forma similar às apresentadas acima. Assim, também uma opção de venda com barreira apresenta duas situações: uma com características de uma opção tradicional e outra cessando a validade do contrato, dependendo do preço atingir ou não um patamar estabelecido.

Como exemplo, seja uma opção com barreira “in”, com duas possibilidades: numa o preço de exercício é maior que a barreira (figura 1), e noutra, ocorre o contrário (figura 2). No primeiro caso, analisam-se três possíveis trajetórias.



Figuras 1 e 2. Alternativas possíveis das trajetórias da opção com barreira down-and-in.

Assim, na figura 1, o preço inicial excede a barreira (e o exercício). Na trajetória (1), o preço do ativo atingirá a barreira e, portanto, a opção se comporta como uma usual (*plain vanilla*). A trajetória (2) apresenta comportamento semelhante, contudo situa-se, no final, acima da barreira. É importante distinguir esses dois casos devido às possibilidades associadas já que as trajetórias são diferentes. A trajetória (3) não atinge a barreira e o *payoff* se resume no pagamento de um prêmio consolação ao titular da opção. Por sua vez tem-se a figura 2, com a trajetória (4) atingindo a barreira: a opção se comporta como uma *plain vanilla*, terminando com o preço ficando acima do exercício. Finalmente, na trajetória (5), os preços do ativo não atingem a barreira e o *payoff* é o prêmio de consolação.

Portanto, no caso de uma opção de compra, mais especificamente uma *down-and-in call* existem três possíveis resultados para o *payoff*:

Trajectoria	Situaçao	Barreira	Payoff
1	$K \leq S_T \leq H$	Atinge	$S_T - K$
2	$K \leq H \leq S_T$	Atinge	$S_T - K$
3	$K \leq H \leq S_T$	Não atinge	Consolação
4	$H \leq K \leq S_T$	Atinge	$S_T - K$
5	$H \leq K \leq S_T$	Não atinge	Consolação

Kolb [1999, p.537-540] apresenta as possíveis expressões para os valores dos *payoffs* de acordo com o particular caminho percorrido pelos preços do ativo, tanto para as situações “*in*” quanto para as “*out*”. Tomando como exemplo, a opção com as seguintes características:  $S=100$ ,  $K=100$ ,  $T=1$  ano,  $\sigma=0,2$ ,  $r=0,1$ ,  $\delta=0,05$ ,  $H=97$ ,  $Rebate=2$ , o valor da *down-and-in call* ficaria 6,6461. A correspondente opção de compra (*call*) européia tradicional teria valor de 9,9032, acima do valor ofertado pela opção exótica.

As justificativas para as expressões apresentadas se encontram no Apêndice D.

### 2.2.1 Vantagens das Opções com Barreiras

Opções com barreiras oferecem uma proteção limitada contra exposições em relação a uma variável risco, pois seus valores no vencimento são vinculados a condição de se atingir (ou não atingir) a barreira. Em contrapartida, os custos dessas opções são menores que as das opções comuns (*plain vanilla*). Eventualmente, as exposições de risco de uma empresa podem ser neutralizáveis por meio de opções com barreiras. Nesses casos, sua utilização é vantajosa, pois reduz o custo de gerenciamento de risco.

Como exemplo, considere uma propriedade agrícola, produzindo soja, com pretensão de expandir sua produção, devido a possibilidade de crescimento do mercado. Para isso, precisa adquirir máquinas importadas pelas quais teria de pagar US\$ 10 milhões em três anos. Porém, esses novos equipamentos apenas deverão ser utilizados na próxima safra, que ocorrerá em seis meses. Portanto, a empresa agrícola tem naturalmente a opção de desistir do contrato ao longo do período de seis meses, caso julgue que o projeto não seja vantajoso. Um dos critérios de decisão da viabilidade de investimento é quanto ao câmbio, cujos analistas podem chegar a conclusão de que o projeto deve ser abandonado se o dólar (supondo que hoje está em R\$ 2,20 por dólar) não superar a barreira dos R\$3,00 durante esses seis meses. Nesse caso, essa empresa pode comprar uma opção de compra (*call*) cambial do tipo *up-and-out*, para se proteger do eventual desembolso dos US\$ 10 milhões. A opção de compra seria “ativada” caso o dólar atingisse o patamar considerado, passando a se comportar como uma opção comum.

### 2.3. Derivativos Asiáticos

Derivativo asiático é aquele cujo valor de liquidação no vencimento (*payoff*) depende da média (normalmente aritmética, podendo também ser geométrica) dos valores do ativo calculado dentro de certo período de apuração da vida útil da opção. Estes tipos de opções têm custos menores que as opções regulares (*plain vanilla*) e atendem de forma apropriada às necessidades das empresas. Desafortunadamente, muitas das opções não têm uma fórmula fechada de avaliação, exigindo o uso de métodos numéricos.

Quando o preço médio é usado no *payoff* em substituição ao preço final do ativo, a opção asiática denomina-se *average price options*. Assim, o *payoff* de uma opção de compra (*call*), cujos preços teriam média  $S_{ave}$  do período considerado, seria  $\max\{S_{ave} - K, 0\}$ , enquanto no caso de uma opção de venda (*put*) ficaria  $\max\{K - S_{ave}, 0\}$ .

Outro tipo de opção asiática é uma opção *average strike*, na qual a média representa o preço de exercício da opção. Uma opção de compra (*call*) teria *payoff* de  $\max\{S - S_{ave}, 0\}$  enquanto a opção de venda (*put*) *average strike* ficaria  $\max\{S_{ave} - S, 0\}$ . Uma opção *average strike* pode garantir que a média de preços pagos por um ativo, freqüentemente negociado num intervalo de tempo, tenha valor abaixo do preço final do ativo.

Numa opção de compra européia (*average price*) com média aritmética, paga-se a diferença, se positiva, entre a média aritmética e o preço de exercício  $K$ , na maturidade  $T$ . A média aritmética é obtida de um conjunto de observações de preços  $S_{t_j}$  do ativo nas datas  $t_j$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ :

$$S_{ave} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_{t_j}$$

Infelizmente, não existe solução analítica para determinação de preços para uma opção asiática com média aritmética; entretanto existe uma fórmula analítica simples para opções asiáticas européias para preços médios tomados geometricamente. Isto porque desde que a média geométrica é essencialmente o produto de variáveis lognormalmente distribuídas então ela também tem distribuição lognormal.

Como exemplo, Kolb [1999, p.551-554] considera a opção européia asiática cuja média geométrica já foi percorrida em meio ano e a opção expira nos próximos seis meses



(meio ano). Considera, ainda, uma ação com  $S=100$ ,  $K=90$ ,  $\sigma=0,2$ ,  $r=0,1$ ,  $\delta=0,05$  (dividendo). Se a média dos preços no intervalo de tempo considerado foi de  $A=95$ , o valor da opção fica 7,5634 e a correspondente *call option* europeia tem valor de 13,1652.

Kema e Vorst [1990, p.113-129], assumindo preços lognormalmente distribuídos e com  $G_T=(S_{ave})$  como a média geométrica dos preços, também apresentaram uma fórmula analítica para avaliar a opção europeia tipo asiática.

Porém, é mais comum uma opção asiática ser definida em termos de média aritmética e, neste caso, não tem uma fórmula analítica definida. Isto porque a distribuição da média aritmética de um conjunto de distribuições lognormais não tem propriedades analiticamente tratáveis. Entretanto, existe uma aproximação analítica para avaliar opções sobre a média aritmética. Isso envolve os dois primeiros momentos da distribuição de probabilidades exatamente da média e, em seguida, assume-se que a distribuição da média aritmética é lognormal com os mesmos dois momentos [Turnbull e Wakeman, 1991, p.377-398].

Contudo, os métodos numéricos permitem determinar os preços das opções europeias sem maiores dificuldades, principalmente se for utilizada a simulação de Monte Carlo. Opções asiáticas e as opções com barreiras serão objetos de análise da cesta de produtos energéticos considerados como matéria-prima do biodiesel.

### **2.3.1 Vantagem da opção asiática**

Os períodos considerados para determinar a média nas opções asiáticas são muito úteis para a administração de risco, pois freqüentemente as empresas estão expostas a preços médios de seus insumos, e não a preços determinados em datas específicas. Assim, uma empresa, que compra insumo soja, por exemplo, necessários para fabricar farelo e/ou óleo, de forma igualmente distribuída ao longo do ano, teria seu custo de compra vinculado ao valor médio dos preços da soja no ano. Isso evitaria os custos elevados devidos aos preços ocorridos nos picos, ou possíveis manipulações de grandes grupos com retenção do produto visando sua valorização, pois o preço acordado é uma média dos valores ocorridos no período de vigência do contrato.

O produtor rural, por sua vez, adquire significativa parcela de insumos importados e, portanto, se vinculados ao dólar médio do ano, e não ao de fechamento, expõe sua produção a menores riscos. Assim, é perfeitamente plausível a utilização de derivativos asiáticos no

gerenciamento de riscos de variações de preços, tanto para o produtor como da empresa consumidora do produto.

Tais derivativos também são úteis para empresas cujas exposições aos fatores de risco tenham montantes conhecidos, mas suas datas de ocorrências não sejam definidas precisamente com antecedência.

Como frisado, uma opção asiática é extremamente útil no combate à manipulação de preços. Assim, por se tratar da média de preços de determinado período, torna-se mais difícil que uma empresa manipule os preços de suas ações, ou de seus produtos, em determinado dia, visando obter uma condição favorável.

Uma vantagem significativa da opção asiática é ser mais barata que suas contrapartidas *plain vanilla (call e put)*, pois a utilização da média na determinação dos valores de liquidação (*payoff*) tem efeito de redução da volatilidade.

O preço médio da *commodity* deve ser usado como preço de exercício da opção, cujo valor do contrato da opção (*payoff*) será o valor terminal do preço do ativo menos seu valor médio. Outra forma de estabelecer o *payoff* de uma *call option* tipo asiática é considerar a média dos preços do ativo menos o preço de exercício. Desafortunadamente, muitas das opções asiáticas não têm uma fórmula-fechada de avaliação, exigindo o uso de métodos numéricos.

### 2.3.2. Estrutura das Opções Exóticas *Path-Dependent*

Dentre as diversas opções, três se destacam por serem *path-dependent*: com barreiras, asiáticas e *lookback*, sendo que estas duas últimas são bastante interessantes sob a ótica da modelagem matemática.

Uma estrutura que permite avaliar as três opções *path-dependent* é obtida introduzindo a variável

$$A = \int_0^t f(S(\tau), \tau) d\tau$$

com  $f$  sendo uma função de  $S$  e  $t$ . Já que o processo é markoviano, ou seja, a história dos preços correntes do ativo independe dos preços passados, pode-se tratar  $A$ ,  $S$  e  $t$  como

variáveis independentes. O valor de uma opção exótica *path-dependent*,  $V(A, S, t)$  é solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S, A, t)) \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

a qual é obtida após aplicar o lema de Ito [Oksendal, 2000] à função  $V(S, A, t)$  e assumir a hipótese de risco neutro [Black e Scholes, 1973], com  $D$  podendo representar os dividendos de valores constantes e pagos continuamente quando se tratar de opção empresariais ou relação entre taxas internas e externas de juros no caso de mercado cambial. A condição final depende do *payoff*, mais especificamente, de  $S$  e  $A$ , pois o tempo é terminal,  $T$ :

$$V(S, I, t) = \Psi(S, I)$$

com  $\Psi$  sendo a função *payoff* conhecida e adequadamente escolhida.

Na opção asiática, o *payoff*, a história está associada ao trajeto aleatório (*random walk*) percorrido pelos preços do ativo. Assim, é conveniente lembrar que nesse caso, essa opção auxilia quem tem necessidade de adquirir o produto de uma única vez, quando de sua produção, contudo a venda do produto está escalonada durante os vários períodos do ano. Também dificulta o controle de preços do produto por grandes grupos. Ainda, a opção asiática depende da forma de se obter a média, ou seja:

- Período considerado para computar a média;
- Escolha da média geométrica ou aritmética;
- Escolha da ponderação para os preços, as quais pode ser maior para os preços mais recentes ou, simplesmente, excluir qualquer tipo de ponderação; e
- Escolha discreta ou contínua para a amostragem dos preços do ativo.

Diferentes escolhas representam diferentes valores para a opção asiática.

Na opção de compra europeia tipo *average strike*, por exemplo, a média é

$$A = \int_0^T S(\tau) d\tau \text{ e o } \textit{payoff} \text{ se torna:}$$

$$\Psi(S, A, T) = \max\left(S - \frac{A}{T}, 0\right)$$

que, no caso de uma opção americana, fica:

$$\Psi(S, A, t) = \max\left(S - \frac{A}{t}, 0\right)$$

Essa escolha é natural para essa particular opção. Em geral, as opções asiáticas dependem de três variáveis independentes, contudo, estas permitem reduções de homogeneidade (*reduction similarity*), ou seja, o valor da opção fica reduzido a uma função de duas variáveis.

Para uma opção cujos preços são obtidos continuamente, a média aritmética

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau$$

permite introduzir a variável

$$A = \int_0^t S(\tau) d\tau$$

e a equação diferencial para se obter o valor da opção  $V$  é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S, A, t)) \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

No caso da média geométrica, definida por:

$$\exp\left(\frac{1}{t} \int_0^t \log S(\tau) d\tau\right)$$

representa o limite quando  $t \rightarrow \infty$  da média geométrica discreta

$$\left( \prod_{j=1}^N S(t_j) \right)^{\frac{1}{N}}$$

Nesta situação, define-se:

$$A = \int_0^t \log S(\tau) d\tau$$

e a equação diferencial para se obter o valor da opção é:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \log S \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S, A, t)) \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Quando se trabalha com amostragem obtida de forma discreta, a média aritmética dos preços fica:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S(t_j)$$

É conveniente assumir

$$A = \sum_{j=1}^{j(t)} S(t_j)$$

com  $j(t)$  sendo o maior inteiro tal que  $t_{j(t)} < t$ . Com essa estrutura, permite-se, de forma bastante simples, medir quantidades *path-dependent* discretas que realizam saltos (*jumps*).

A situação torna-se complexa em se considerando opções asiáticas americanas cujas janelas temporais têm larguras constantes, quando a variável  $A$  é escrita como:

$$A = \int_{t-t_0}^t S(\tau) d\tau$$

ou seja, o início da janela temporal não é fixa na origem, se movendo com o tempo. A solução dessa opção não pode ser obtida via técnicas numéricas padrões, devido ao problema ser não-markoviano e, portanto, não podendo ser transformado numa equação diferencial parcial bidimensional ou num problema de complementaridade. Como o preço  $S(\tau)$  se move na janela  $t - t_0 < \tau < t$  resulta num número infinito de variáveis e, conseqüentemente, não pode ser formulado como um problema de diferenças finitas. Técnicas como Monte Carlo sobre Monte Carlo podem solucionar, porém exige-se um tremendo esforço computacional. Nestas situações, pode-se utilizar um algoritmo baseado na simulação de Monte Carlo, a ser apresentado no capítulo 4.

Simulação é uma técnica amplamente usada para solucionar problemas que são intratáveis do ponto de vista analítico. Devido à inerente complexidade que envolve o problema, ou devido à presença de incertezas, ou os dois, a simulação de Monte Carlo se apresenta de forma bastante oportuna como um método bastante flexível na abordagem desses problemas. Afinal, no caso do produto final ser base para o biodiesel, os preços de seus componentes estão correlacionados e descrevem trajetórias estocásticas. Assim, o método de Monte Carlo se aplica de forma bem mais cômoda, nessa complexa situação, que os demais métodos numéricos. Essa flexibilidade é obtida devido ao método de Monte Carlo trabalhar com a esperança matemática e com a lei dos grandes números que garante a distribuição normal.

No presente trabalho, só se fará uso de janelas cujo ponto inicial está fixo na origem.

**Observação.** Um derivativo *lookback* é um contrato no qual, na maturação, permite que seu titular obter vantagem em escolher o máximo ou o mínimo atingido pelo processo de preços do ativo, durante todo o período de existência do contrato. Nesse sentido, ao comprador de uma *lookback call* será permitido comprá-lo no menor preço da vida útil da opção; ao comprador de uma *lookback put* será permitido vender no preço máximo atingido pelo ativo. Naturalmente, essa situação vantajosa representará um prêmio mais oneroso que a correspondente *plain vanilla*, pois nesse tipo de opção sempre ocorrerá o exercício. Assim, diz que ao proprietário de uma opção *lookback* é permitido “comprar na baixa e vender na alta”. Goldman, Sosin e Gatto [1979, p.1111-1127] apresentam fórmulas de avaliação para as *lookback* européias.

## **Conclusão**

Nesse capítulo, explorou-se uma pequena, porém importante fração dos produtos da classe de opções exóticas, que podem ser úteis aos participantes do mercado financeiro. Sua vantagem está em obter segurança com preços mais favoráveis quando comparadas às opções tradicionais. A análise tem focado nas opções européias, que podem ser adaptadas a partir de uma opção usual (*plain vanilla*). Contudo, algumas opções exóticas, envolvendo as opções do tipo americanas, só podem ser avaliadas com o auxílio de métodos numéricos, que serão objeto de estudo posterior, mais especificamente, as opções exóticas tipo americanas serão abordadas pelo método de Monte Carlo.

## Capítulo 3

# AVALIAÇÃO DE OPÇÕES TIPO AMERICANA UTILIZANDO O ALGORITMO DE LONGSTAFF E SCHWARTZ

### 3.1. Introdução

O problema de avaliação de preços de derivativos, com característica de exercício tipo americana e, ainda, dependentes de múltiplos fatores, constitui-se num dos problemas fundamentais da teoria de matemática financeira. Esses derivativos são comuns no mercado financeiro, aparecendo com destaque nas *commodities*, operações cambiais, *swaps* e em concessão de crédito. Até recentemente, havia a crença de que não existia solução para este problema devido a complexidade das equações diferenciais associadas ao problema; os métodos de simulação pareciam impraticáveis do ponto de vista computacional. Apesar dos avanços obtidos, a avaliação das opções americanas e de seus tempos ótimos de paradas, na presença de múltiplos fatores, pelas técnicas *lattice* e pelo método de diferenças finitas são impraticáveis, cuja operacionalidade se torna bem complexa quando cresce o número de fatores envolvidos. Porém, os métodos de simulação se destacam das alternativas tradicionais na avaliação de preços e gerenciamento de riscos de derivativos tipos americanos. Ainda, as simulações permitem analisar variáveis de estados seguindo processos estocásticos gerais, inclusive com *jump-diffusion* [Merton, 1976 e Cox e Ross, 1976] e processos não-markovianos [Heath, Jarrow e Merton, 1992]. Ainda, os métodos de simulação são utilizados em situações bem complexas, devido ser uma técnica computacional de simples implementação e tratamento bastante transparente e flexível.

Neste sentido, Longstaff e Schwartz [2001] propuseram uma forma efetiva de aplicar o método de Monte Carlo para o cálculo de tempos ótimos de paradas para opções americanas e, dessa maneira, avaliar os preços desses produtos financeiros de forma simples e eficiente. Portanto, o algoritmo de Longstaff & Schwartz (LS-algoritmo) constitui-se numa poderosa ferramenta de avaliação de preços de opções americanas, podendo ser aplicada aos preços das opções exóticas e opções com trajetórias dependentes (*path-dependent*), com *payoffs* (valor de liquidação no vencimento) e valores das opções dependendo dos valores do ativo-objeto, cuja



média é obtida sobre uma dada janela temporal. Até recentemente, somente opções asiáticas americanas tinham sido consideradas, cujo ponto inicial da janela temporal, usada para se obter a média, é fixado. Opções asiáticas americanas com “*rolling time-window*”, i.e. com uma janela temporal de tamanho constante e movendo-se no tempo, são particularmente complexas, já que eles constituem um problema com um número finito de variáveis de estado.

Assim, este capítulo começa revisando o artigo de Longstaff e Schwartz, e aplicando essa metodologia para estimar o preço de uma opção asiática do tipo americana. Depois, acrescenta-se no modelo mais de um ativo no *payoff*, mostrando sua flexibilidade.

## 3.2. Algoritmo de Longstaff e Schwartz

### 3.2.1. Operacionalização

Para entender a abordagem intuitiva do algoritmo apresentado por Longstaff e Schwartz [2001], deve lembrar que em se tratando de opção tipo americana, a qualquer instante o proprietário pode exercer seu direito. Consequentemente, no algoritmo, o proprietário da opção americana compara, otimamente, o *payoff* (valor de liquidação no vencimento) do exercício imediato com o *payoff* esperado de continuação e, então exerce seu direito se o *payoff* imediato é maior. Logo a estratégia de exercício ótimo é fundamentalmente determinada pela esperança condicional do *payoff* de continuação para manter a validade da opção. A questão-chave da abordagem é que essa esperança condicional pode ser estimada de informação “*cross-sectional*”, por simulação com uso de mínimos quadrados. Especificamente, faz-se uma regressão após obter os *payoffs* de continuação sobre as funções dos valores das variáveis de estados. O valor ajustado dessa regressão fornece uma estimativa direta da função esperança condicional. Estimando a função esperança condicional para cada data de possível exercício, obtém-se uma especificação completa da estratégia ótima para exercer o direito ao longo de cada trajetória. Com essa especificação, as opções americanas podem então ser avaliadas de forma mais adequada por simulação. Essa técnica será referida como método LS-algoritmo, e será descrita a seguir.

Para determinar o valor de uma opção, o primeiro passo do algoritmo é gerar  $N$  trajetórias descrevendo um movimento browniano geométrico para o ativo

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot \exp\left((r - \delta - 0,5\sigma^2)\Delta t + \sigma\xi\sqrt{\Delta t}\right)$$

com  $r$  sendo a taxa livre de risco,  $\delta$  a taxa de dividendo,  $\sigma$  a volatilidade e  $\xi$  representando uma desvio aleatório extraído de uma distribuição normal. O incremento temporal é  $\Delta t$ . Cada uma das  $N$  trajetórias é gerada usando o método geométrico browniano e discretizando as trajetórias em  $M$  passos-tempo para o intervalo temporal  $t=0, 1, \dots, T$ . As  $N$  trajetórias geram um conjunto de preços que são armazenados num arranjo matricial  $N \times M$ , juntamente com uma matriz fluxo de caixa  $\mathbf{C}$ , de mesma dimensão, inicializada com zeros.

O valor da opção no último passo-tempo  $t_M$  pode ser computado para cada uma das  $N$  trajetórias dada pela função *payoff*  $\mathbf{P}(S_{i,M}, K)$  e o exercício  $K$  da opção (em que  $S_{i,M}$  é o valor do ativo para a trajetória  $i$  no passo-tempo  $M$ , ou seja,  $S_M=S(T)$ ). Esses valores são colocados na matriz de fluxo de caixa  $C_{i,M}$ . Descontando esses valores até atingir o tempo inicial, em seguida obtém a média, resultando no preço correspondente à opção europeia.

O próximo passo do algoritmo é percorrer os passos-tempo discretos começando em  $M-1$  e decrescendo até o ponto inicial, realizando as seguintes tarefas em cada passo-tempo:

- Para cada trajetória  $i$  com  $\mathbf{P}(S_{i,M}, K) > 0$  no passo  $j$  (ou seja, no tempo  $t_j$ ), i.e. a trajetória estando “*in the money*”, o valor para exercício imediato  $\mathbf{P}(S_{i,j}, K)$  entra no vetor  $\mathbf{e}$ .
- Valor para continuação, na qual é o valor descontado  $\exp(-r(m-j)\Delta t)C_{ij}$  da matriz fluxo de caixa  $\mathbf{C}$ , sendo  $m > j$  é a única coluna não-nula de linha  $i$  e  $S_{ij}$  entra na regressão para todas as trajetórias  $i$  que estão “*in the money*”.
- A regressão é realizada produzindo uma função regressão  $R(S)$ , com o auxílio do método dos mínimos quadrados. O valor estimado para continuação  $R(S_{ij})$  é comparado com o valor do exercício imediato. Se  $R(S_{ij}) < e_i$ , isto é, do exercício imediato é maior que o valor estimado para continuação, a opção é exercida,  $C_{im}$  assume o valor zero, e  $C_{ij}$  é posto no valor de exercício imediato.

O último passo do algoritmo desconta todas as entradas não-nulas na matriz fluxo de caixa retrocedida no tempo inicial e a média sobre as trajetórias representa a aproximação LS-algoritmo para todos os valores da opção.

Para ilustrar o procedimento, apresenta-se um exemplo numérico.

**Exemplo de Opção Americana.** Na data final de exercício, a estratégia ótima de exercício para uma opção americana é exercer o direito à opção se esta estiver “*in the money*”. Entretanto, antes de atingir a data final do contrato, a estratégia ótima é obtida comparando o valor imediato de exercício com o fluxo de caixa esperado para a chamada continuação e, então exercer o direito se o valor do exercício imediato for maior. Logo, a chave para a otimalidade no exercício do direito na opção americana é identificar o valor esperado condicional de continuação. Nessa abordagem, usa-se a informação *cross-sectional* das trajetórias simuladas para identificar a função esperança condicional. Isso é conseguido com uma regressão feita nos fluxos de caixa subseqüentes obtidos da continuação sobre um conjunto de funções bases dos valores da variável de estado relevante. O valor ajustado dessa regressão é uma estimativa não-viesada eficiente da função esperança condicional e permite estimar com maior precisão a regra de parada ótima para a opção.

Assim, para compreender a idéia intuitiva dessa abordagem LS-algoritmo considera-se uma opção de venda (*put*) americana sobre uma ação que não paga dividendo, ou um ativo qualquer, cujo preço corrente é  $S=1,0$ . O exercício, de preço  $K=1,10$ , pode ser exercido nos períodos 1, 2 e 3, com o período 3 representando a data de expiração da opção. A taxa de juros livre de risco é de 6% ao período. São usadas apenas oito trajetórias amostrais dos preços da ação. Na tradicional hipótese de medida de risco neutro, essas trajetórias amostrais são geradas e mostradas na tabela 1, apresentada a seguir.

Tab.1. Trajetórias dos preços obtidos via simulação de Monte Carlo.

Trajectoria	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1,0	1,09	1,08	1,34
2	1,0	1,16	1,26	1,54
3	1,0	1,22	1,07	1,03
4	1,0	0,93	0,97	0,92
5	1,0	1,11	1,56	1,52
6	1,0	0,76	0,77	0,90
7	1,0	0,92	0,84	1,01
8	1,0	0,88	1,22	1,34

O objetivo é obter a regra ótima de parada que maximiza o valor da opção em cada ponto ao longo de cada trajetória. Como o algoritmo é recursivo, primeiro deve-se computar as matrizes intermediárias. O fluxo de caixa da matriz no período 3 seria idêntico à uma opção européia, conforme a tabela 2.

Tab.2. Fluxo de caixa no período 3

Trajectoria	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1				$(1,10-1,34)^+=0$
2				$(1,10-1,54)^+=0$
3				$(1,10-1,03)^+=0,07$
4				$(1,10-0,92)^+=0,18$
5				$(1,10-1,52)^+=0$
6				$(1,10-0,90)^+=0,20$
7				$(1,10-1,01)^+=0,09$
8				$(1,10-1,34)^+=0$

Se a *put* está “*in the money*” no período 2, o detentor da opção deve então decidir se exerce o direito à opção ou continua mantendo esse direito até a data final de expiração no período 3. A matriz de preços da opção mostra a existência de somente cinco trajetórias para a qual a opção está “*in the money*” no período 2. Denota-se por  $X_2$  os preços do ativo no período 2 para essas cinco trajetórias e ainda denota-se por  $Y$  o correspondente fluxo de caixa descontado aceito no período 3, se a *put* não é exercida no período 2. Usam-se apenas trajetórias “*in the money*” já que elas permitem uma melhor estimativa da função esperança condicional na região de direito de exercício, sendo relevante e melhorando significativamente a eficiência do algoritmo.

Tab.3. Fluxo de caixa no período 3

Trajatória	$X_2$ =preço em $t=2$	$(K-X_3)^+ \times (e^{-0,06 \times 1})$
1	1,08	$0,00 \times 0,94176=0,0000$
2	—	—
3	1,07	$0,07 \times 0,94176=0,0659$
4	0,97	$0,18 \times 0,94176=0,1706$
5	—	—
6	0,77	$0,20 \times 0,94176=0,1883$
7	0,84	$0,09 \times 0,94176=0,0848$
8	—	—

Para estimar o fluxo de caixa de continuação da vida condicional da opção sobre os preços do ativo em  $t=2$ , faz-se uma regressão  $\mathbf{E}[Y|X_2] = a_0 + a_1(X_2) + a_2(X_2)^2$ . Essa especificação é uma das mais simples e o resultado é  $\mathbf{E}[Y|X_2] = -1,070 + 2,983(X_2) - 1,813(X_2)^2$ . De posse dessa função esperança condicional, compara-se o valor de exercício imediato em  $t=2$  (2ª coluna abaixo) com o valor da continuação (3ª coluna abaixo).

Tab. 4. Decisão de antecipação (ou continuação) de exercício ótimo no período 2.

Trajatória	Exercício = $(K-X_2)^+$	$-1,070 + 2,983 \cdot (X_2) - 1,813 \cdot (X_2)^2$	Exerc>Espera
1	$1,10-1,08=0,02$	0,0369	—
2	—	—	—
3	$1,10-1,07=0,03$	0,0461	—
4	$1,10-0,97=0,13$	0,1176	Sim
5	—	—	—
6	$1,10-0,77=0,33$	0,1520	Sim
7	$1,10-0,84=0,26$	0,1565	Sim
8	—	—	—

Isso conduz à seguinte matriz a qual mostra o fluxo de caixa obtido pelo detentor condicional da opção que não exerce o seu direito em  $t=2$ .

Tab. 5. Fluxo de caixa no período 2

Trajectoria	$t=1$	$\frac{(K-X_2)^+}{t=2}$	$\frac{(K-X_3)^+}{t=3}$
1		0,00	0,00
2		0,00	0,00
3		0,00	0,07
4		0,13	0,00 <del>0,18</del>
5		0,00	0,00
6		0,33	0,00 <del>0,20</del>
7		0,26	0,00 <del>0,09</del>
8		0,00	0,00

Observe que quando a opção é exercida no período 2, o fluxo de caixa no final da coluna se anula. Isto porque, uma vez que a opção é exercida não existem fluxos de caixas adicionais pois a opção só pode ser exercida uma única vez.

Procedendo recursivamente, examina-se se a opção deveria ser exercida no período 1. Novamente, da matriz de preços do ativo existem cinco trajetórias “*in the money*” no período 1. Para essas trajetórias, novamente na definição de  $Y$ , utiliza-se o fluxo real de caixa ocorrido ao longo de cada trajetória (o valor esperado condicional no período 2 não é usado para definir  $Y$  no período 1). Isto porque o “retorno” do valor esperado condicional pode conduzir a um viés para cima no valor da opção.

Desde que a opção somente pode ser exercida uma única vez, os fluxos de caixas futuros ocorrem nos períodos 2 ou no 3, porém não em ambos. Os fluxos de caixa obtidos no período 2 são descontados em um período, atingindo o período 1. Similarmente,  $X_1$  representa os preços do ativo no período 1 para as trajetórias em que a opção está “*in the money*”. Os vetores  $X_1$  e  $Y$  são dados pelos elementos abaixo.

Tab. 6. Fluxo de caixa no período 1

Trajatória	$X_1$ =preço em $t=1$	$(K-X_2)^+ \times (e^{-0,06 \times 1})$
1	1,09	0,00 x 0,94176=0,0000
2	—	—
3	—	—
4	0,93	0,13 x 0,94176=0,1224
5	—	—
6	0,76	0,33 x 0,94176=0,3108
7	0,92	0,26 x 0,94176=0,2449
8	0,88	0,00 x 0,94176=0,0000

A função esperança condicional no período 1 é estimado novamente por regressão obtendo  $E[Y|X_1] = 2,038 - 3,335(X_1) + 1,356(X_1)^2$ . Substituindo os valores do vetor  $X_1$  na equação de regressão tem-se a função estimativa da esperança condicional. Esses valores continuação estimados e os valores de exercícios imediatos no período 1 estão nas colunas 2 e 3, respectivamente. Comparando as duas colunas percebe-se que os exercícios ótimos ocorrem nas trajetórias 4,6,7 e 8.

Tab. 7. Decisão de antecipação (ou continuação) de exercício ótimo no período 1.

Trajatória	Exercício = $(K-X_1)^+$	$2,038 - 3,335 \cdot (X_1) + 1,356 \cdot (X_1)^2$	Exerc>Espera
1	1,10-1,09=0,01	0,0139	—
2	—	—	—
3	—	—	—
4	1,10-0,93=0,17	0,1092	Sim
5	—	—	—
6	1,10-0,76=0,34	0,2866	Sim
7	1,10-0,92=0,18	0,1175	Sim
8	1,10-0,88=0,22	0,1533	Sim

Tendo identificado as estratégias de se exercer a opção nos períodos 1, 2 e 3, a regra de parada pode, agora, ser representada pela matriz abaixo, com o algarismo 1 representando a data em que a opção deve ser exercida.

Tab. 8. Regra de parada ótima da opção.

Trajectoria	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Com essa especificação da regra de parada ótima, é imediata a determinação dos fluxos de caixa obtidos por essa regra de parada. Isso é feito simplesmente exercendo a opção na data de exercício, ou seja, observando onde existe 1 na matriz acima. Isso conduz à seguinte matriz de fluxo de caixa da opção (Tab. 9).

Tab. 9. Fluxo de caixa da opção.

Trajectoria	$(K-X_1)^+$ $t=1$	$(K-X_2)^+$ $t=2$	$(K-X_3)^+$ $t=3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,17	0,00	<del>0,13</del>
5	0,00	0,00	0,00
6	0,34	0,00	<del>0,33</del>
7	0,18	0,00	<del>0,26</del>
8	0,22	0,00	0,00



Tendo identificado o fluxo de caixa gerado pela put americana em cada data ao longo de cada trajetória, a opção agora pode ser avaliada descontando cada fluxo de caixa na matriz fluxo de caixa da opção pela taxa de juro e retrocedendo até o período  $t=0$ ; a partir daí, faz-se a média aritmética sobre todas as trajetórias. Aplicando esse procedimento resulta o valor de 0,1144 para a opção put americana. Observe que este valor é obtido fazendo:

$$[0,07 \exp(-0,06 \times 3) + 0,17 \exp(-0,06) + 0,34 \exp(-0,06) + 0,18 \exp(-0,06) + 0,22 \exp(-0,06)] / 8$$

O trabalho de Longstaff e Schwartz mostrou que as diferenças obtidas entre os métodos das diferenças finitas e o LS-algoritmo são tipicamente muito pequenas quando se estima uma opção *put* americana. Das 20 diferenças ocorridas no exemplo fornecido pelos autores, 16 foram menores ou iguais a um erro de 1% em valor absoluto. A conclusão foi que, esses resultados sugerem que o LS-algoritmo oferece uma boa aproximação, obtendo valores bem próximos ao fornecido pelo método das diferenças finitas.

### 3.2.2. Opção Asiática Americana.

O caso de uma opção asiática americana tipo *fixed-started time window* foi considerado por Longstaff e Schwartz [2001], cuja média  $A$  é fornecida por:

$$A = \int_0^t S(\tau) d\tau \tag{3.1}$$

A média é, assim, obtida desde o início até o tempo  $t$ , isto é, o início da janela utilizada na média é fixa.

Embora essa opção seja complexa, pode-se avaliá-la com diferentes técnicas desde que transformando o problema de um único caminho dependente (*path dependent-one*) num problema markoviano. O preço da opção  $V(S, A, t)$  pode ser estimado como solução da equação diferencial bidimensional:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{t}(S - A) \frac{\partial V}{\partial A} - rV + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

sujeito a condição terminal  $V(S, A, T)$  específica do *payoff* considerado. Esse problema pode ser resolvido pelo método das diferenças finitas ou pelo LS-algoritmo.

Em contraste com o caso anterior, a média da opção asiática tipo americana, possuindo uma janela tempo de tamanho constante (*constant-width time window*) pode ser calculada por:

$$A = \int_{t-t_0}^t S(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Agora, o ponto inicial da janela, para se obter a média não está fixado na origem. Neste caso, a janela temporal de tamanho constante,  $t_0$ , está se movendo com respeito ao tempo  $t$ . Pode-se considerar o seguinte *payoff*:

$$\max \left( S - \frac{A}{t_0}, 0 \right). \quad (3.4)$$

A versão européia dessa opção é facilmente resolvida: primeiro, seu valor para  $T-t_0 < t < T$  é calculado considerando a média aritmética dos preços (*arithmetic average strike*). Conhecendo o valor para  $t-t_0$ , é possível resolver retroativamente para tempos  $t < T$ .

A versão americana dessa opção, entretanto, não pode ser feita usando as técnicas padrões. A razão é que o problema é não-markoviano e não pode ser transformado numa equação diferencial parcial de dimensão finita ou num problema de complementaridade. Necessita-se lembrar que todo preço  $S(\tau)$  para  $t-t_0 < \tau < t$  tem o objetivo de ser capaz de implantar o movimento da janela. Isso resulta num numero finito de variáveis e, portanto, não pode ser formulado como um problema de diferenças finitas. Outras técnicas, tais como Monte Carlo numa simulação de Monte Carlo são possíveis, contudo resulta num alto custo (devido ao esforço exigido) computacional. Nesse sentido a Kellogg College da Universidade de Oxford [2003] apresentou uma abordagem utilizando o LS-algoritmo para solucionar o problema em questão.

**Exemplo de Opção Asiática Americana.** O LS-algoritmo aplicado nas opções asiáticas americanas segue o mesmo procedimento descrito anteriormente, somente com algumas modificações iniciais, mais especificamente nos preços, que será descrito a seguir.

Assim, considera-se uma opção de venda (*put*) asiática americana, sobre uma ação que não paga dividendos, com preço corrente  $S=1,0$ . O exercício, preço com valor  $K=1,1$ , pode ser exercido nos períodos 1, 2 e 3, com o período 3 representando a data de expiração da opção. A taxa de juros livre de risco é de 6% ao período. Novamente, são usadas apenas oito trajetórias amostrais dos preços da ação. Essas trajetórias amostrais são geradas pelo modelo de simulação de Monte Carlo, na tradicional hipótese de medida de risco neutro, e são mostradas na matriz apresentada a seguir.

Tab. 10. Trajetórias dos preços  $S(I,J)$  obtidos na simulação de Monte Carlo.

Trajectoria	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1,000	1,090	1,065	1,850
2	1,000	1,160	1,350	2,105
3	1,000	1,220	0,910	0,970
4	1,000	0,930	1,015	0,805
5	1,000	1,110	2,000	1,438
6	1,000	0,760	0,774	1,175
7	1,000	0,920	0,757	1,341
8	1,000	0,880	1,560	1,585

Agora, deve-se proceder a obtenção da matriz representativa das médias pois esta é a característica da opção asiática.

Tab. 11. Matriz das médias das trajetórias  $A(I, J) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J S(I, j)$

Trajet.	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1,090	$\frac{1,090 + 1,065}{2} = 1,080$	$\frac{1,090 + 1,065 + 1,850}{3} = 1,340$
2	1,160	$\frac{1,160 + 1,350}{2} = 1,260$	$\frac{1,160 + 1,350 + 2,105}{3} = 1,540$
3	1,220	$\frac{1,220 + 0,910}{2} = 1,070$	$\frac{1,220 + 0,910 + 0,970}{3} = 1,030$
4	0,930	$\frac{1,930 + 1,015}{2} = 0,970$	$\frac{1,930 + 1,015 + 0,805}{3} = 0,920$
5	1,110	$\frac{1,110 + 2,000}{2} = 1,560$	$\frac{1,110 + 2,000 + 1,438}{3} = 1,520$
6	0,760	$\frac{0,760 + 0,774}{2} = 0,770$	$\frac{0,760 + 0,774 + 1,175}{3} = 0,900$
7	0,920	$\frac{0,920 + 0,757}{2} = 0,840$	$\frac{0,920 + 0,757 + 1,341}{3} = 1,010$
8	0,880	$\frac{0,880 + 1,560}{2} = 1,220$	$\frac{0,880 + 1,560 + 1,585}{3} = 1,340$

O objetivo é obter a regra ótima de parada que maximiza o valor da opção em cada ponto ao longo de cada trajetória. Como o algoritmo é recursivo, primeiro deve-se computar as matrizes intermediárias.

A partir de agora tudo se repete, como ocorrido na opção americana descrita acima, observando que a tabela 11 é idêntica a tabela 1.

### 3.2.3. Convergência do LS-Algorithm

Antes de oferecer a justificativa teórica para o LS-algoritmo baseado em Catuogno, Ferrando e Gonzalez [2006], apresenta-se alguns conceitos básicos, as quais podem ser complementados observando o apêndice A.

Uma opção do tipo americana é um processo estocástico adaptado não-negativo  $Z=(Z_t)_{t=0,1,\dots,T}$  cujos valores  $Z_n$  podem ser entendidos como o benefício obtido pelo proprietário, por exercer a opção em qualquer período  $n$ . O valor da opção  $Z$  no  $n$ -ésimo período  $Z_n$  é dado pela fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}
U_T &= Z_T \\
U_{n-1} &= \max \left\{ Z_{n-1}, B_{n-1} \mathbf{E} \left[ \frac{U_n}{B_n} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Desta forma, se  $\tilde{U} = (\tilde{U}_n)_{n=0,1,\dots,T}$  é um supermartingale sob P este é o menor supermartingale que domina  $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_n)_{n=0,1,\dots,T}$ .

Ainda, seja  $Z = (Z_n)_{n=0,1,\dots,T}$  um processo adaptado não negativo. O envelope de Snell de Z é um processo estocástico  $U = (U_n)_{n=0,1,\dots,T}$  definido por

$$\begin{aligned}
U_T &= Z_T \\
U_n &= \max \left\{ Z_n, \mathbf{E} \left[ U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por último, se  $\nu_0 = \inf \{n : U_n = Z_n\}$  é um tempo de parada então  $U^{\nu_0} = (U_{\nu_0 \wedge n})_{n=1,2,\dots,T}$  é um martingale.

Destas colocações pode-ser concluir que no tempo de parada  $\nu_0$  verifica a seguinte igualdade:

$$U_0 = \mathbf{E}(Z_{\nu_0} \mid \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau} \mathbf{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_0) \tag{3.7}$$

com  $\tau$  pertencente ao conjunto de tempos de parada entre 0 e T.

Também é possível afirmar que se  $\nu_n = \inf \{j \geq n : U_j = Z_j\}$  é um tempo de parada então  $U^{\nu_n} = (U_{\nu_n \wedge m})_{m=1,2,\dots,T}$  é um martingale e

$$U_n = \mathbf{E}(Z_{\nu_n} \mid \mathcal{F}_n) = \sup_{\tau} \mathbf{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_n). \tag{3.8}$$

Definição. Um tempo de parada  $\nu$  é ótimo para um processo adaptado  $Z = (Z_n)_{n=0,1,\dots,T}$  se:

$$\mathbf{E}(Z_v | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau} \mathbf{E}(Z_{\tau} | \mathcal{F}_0). \quad (3.9)$$

Está claro que  $v_0$  é ótimo de  $Z$  e, ainda mais, trata-se de um minimal.

Considere agora, o envelope de Snell, assumindo que a decomposição de Doob-Meyer de  $U$  é dado por  $U=M-A$  com  $M$  sendo um martingale e  $A$  um processo previsível não-decrescente com  $A=0$ .

Proposição 1. O maior tempo ótimo de parada para  $Z$  é dado por:

$$V_{\max} = \begin{cases} T & \text{se } A_T = 0 \\ \inf\{n : A_{n+1} \neq 0\} & \text{se } A_T > 0 \end{cases}. \quad (3.10)$$

Finalmente, no caso de cadeias de Markov, o envelope de Snell toma uma forma mais simplificada.

Proposição 2. Seja  $X = (X_n)_{n=0,1,\dots,\infty}$  uma cadeia de Markov homogênea com espaços de estados  $E$  e matriz de transição  $P$ . Seja  $\psi : \{0,1,\dots,T\} \times E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  e  $Z = (Z_n = \psi(n, X_n))_{n=0,1,\dots,T}$  um processo adaptado não-negativo. Então, o envelope de Snell  $U = (U_n)_{n=0,1,\dots,T}$  tem a forma  $U_n = u(n, X_n)$ , com a função  $u : \{0,1,\dots,T\} \times E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  sendo definida recursivamente por

$$\begin{aligned} U(T,x) &= \psi(T,x) \\ U(n,x) &= \max\{\psi(n,x), Pu(n+1,x)\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

## LS-ALGORITMO

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  um espaço de probabilidade,  $(\mathcal{F}_n)_{n=1,\dots,T}$  uma filtração e  $Z = (Z_n)_{n=0,1,\dots,T}$  um processo estocástico não-negativo. A seguir assume-se que  $Z_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$  para todo  $n=0,1,\dots,T$ . Como o envelope de Snell  $U = (U_n)_{n=0,1,\dots,T}$  para  $Z$  é definida recursivamente por

$$\begin{aligned}
U_T &= Z_T \\
U_n &= \max\{Z_n, \mathbf{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

e ocorrendo que

$$U_n = \sup_{\tau} \mathbf{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_n)$$

resulta em  $U_n = \mathbf{E}(Z_{v_0} \mid \mathcal{F}_n)$  com  $v_n = \inf\{j \geq n : U_j = Z_j\}$ .

Agora, pode escrever recursivamente os tempos ótimos de paradas  $(v_n)_{n=0,1,\dots,T}$  por

$$\begin{aligned}
v_T &= T \\
v_n &= n \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n \geq E[Z_{v_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]\}} + v_{n+1} \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n < E[Z_{v_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]\}}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Deve-se assumir que  $X = (X_n)_{n=0,1,\dots,\infty}$  é uma cadeia de Markov homogênea com espaços de estados  $E$  e matriz de transição  $P$ . Sejam ainda,  $\psi : \{0,1,\dots,T\} \times E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  e  $Z = (Z_n = \psi(n, X_n))_{n=0,1,\dots,T}$  um processo adaptado não-negativo. Da última proposição tem-se que  $U_n = u(n, X_n)$  com a função  $u : \{0,1,\dots,T\} \times E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  sendo definida recursivamente por:

$$\begin{aligned}
u(T, x) &= \psi(T, x) \\
u(n, x) &= \max\{\psi(n, x), Pu(n+1, x)\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Como se trata de uma cadeia de Markov vale a propriedade forte de Markov, isto é:

$$\mathbf{E}(Z_{v_{n+1}} \mid \square_n) = \mathbf{E}(Z_{v_{n+1}} \mid X_n). \tag{3.15}$$

O LS-algoritmo introduzido por Longstaff e Schwartz [2001] utiliza as equações (3.13) para calcular  $v_0$  e assim  $U_0 = \mathbf{E}(Z_{v_0} \mid X_0)$ . O problema se reduz em calcular as esperanças condicionais  $U_n = \mathbf{E}(Z_{v_{n+1}} \mid X_n)$ . Se  $\{\phi_m^n\}_{m=0,1,\dots}$  é uma base ortonormal de  $L^2(\sigma(X_n), \mathbf{P})$  então

$$U_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n \phi_m^n. \tag{3.16}$$

Definindo  $U_n^M = \sum_{m=0}^{M-1} a_m^n \phi_m^n$  a aproximação dada pelos  $M$  primeiros termos, tem-se que os tempos de paradas  $V_n^M$  são obtidos pela substituição de  $U_n$  por suas aproximações na sistema de equações (3.13) que definem os tempos de paradas ótimos,

$$\begin{aligned} V_T^M &= T \\ V_n^M &= n \cdot 1_{\{Z_n \geq U_n^M\}} + V_{n+1}^M \cdot 1_{\{Z_n < U_n^M\}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

O único problema que resta é estimar os coeficientes  $a_m^n$  com  $n=0,1,\dots,T$  e  $m=0,1,\dots,M$ . Esta estimativa é feita utilizando  $N > M$  simulações de caminhos  $w_k$  definidos por

$$X(w_k) = \{X_n(w_k) : n = 0, 1, \dots, T\},$$

e assumindo que  $X_0(w_k) = x$  para todo  $k=1,\dots,T$ . Os coeficientes estimados  $\hat{a}_{M,N,m}^n$  são determinados por algum mecanismo de estimação a partir dos  $N$  caminhos simulados, e com estes coeficientes estimados constrói-se as aproximações  $\hat{U}_{N,n}^M$  de  $U_n^M$  definidas por

$$U_{T,n}^M = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{a}_{M,T,m}^n \phi_m^n. \quad (3.18)$$

Assim, pode-se re-estimar os tempos de paradas ótimos por

$$\begin{aligned} \hat{V}_T^M &= T \\ \hat{V}_n^M &= n \cdot 1_{\{Z_n \geq \hat{U}_n^M\}} + \hat{V}_{n+1}^M \cdot 1_{\{Z_n < \hat{U}_n^M\}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

e uma aproximação natural para  $U_0$  será  $\hat{U}_{N,0}^M$ .

O mecanismo de estimação do LS-algoritmo é o mínimo quadrado, obtendo-se os coeficientes

$\hat{a}_{M,N,m}^n$  como solução do seguinte problema de minimização:



$$\min \sum_{k=1}^N \left( \sum_{m=0}^{M-1} \hat{a}_{M,T,m}^n \phi_m^n(w_k) - Z_{\hat{V}_{N,n+1}^M}(w_k) \right)^2. \quad (3.20)$$

Isso completa a demonstração.

### 3.2.4. Resultados Obtidos

Inicialmente apresentou-se um exemplo ilustrativo do LS-algoritmo, método desenvolvido por Longstaff e Schwartz [2001], para avaliar uma opção de venda (*put option*) do tipo americana. Em seguida, apresentou-se a justificativa de convergência do LS-algoritmo. Agora, é mostrada a performance do LS-algoritmo, admitindo-se a aplicação do método numa opção de venda de um ativo com exercício de  $K=40$ , taxa livre de risco de 6% anuais e tempo de maturação de um ano. Admite-se a hipótese de risco-neutro para os preços do ativo, que se supõe seguir um processo cuja equação diferencial estocástica é

$$dS = rSdt + \sigma SdZ$$

com  $r$  e  $\sigma$  constantes e  $Z$  apresentando um movimento browniano padronizado. A opção foi avaliada considerando volatilidades de 20% e 40%. A eficiência do LS-algoritmo é obtida comparando com o método tradicional das diferenças finitas. Adicionalmente, a tabela 12 mostra os resultados obtidos na avaliação da opção de venda do tipo européia. Evidentemente, o valor da opção européia é inferior à correspondente americana, devido à possibilidade de antecipação do exercício dessa última modalidade.

A metodologia, utilizada pelos autores Longstaff e Schwartz [2001, p.126-127], considerou uma constante acrescida dos três primeiros termos do polinômio de Laguerre como função base para a confecção da função de regressão utilizada para determinar a função esperança. Esses autores testaram diversas funções para a escolha da função base de regressão: polinômios de Laguerre, Hermite, Legendre, Chebyshev, Gegenbauer e Jacobi, inclusive as séries de Fourier, mostrando que os resultados do LS-algoritmo independem da função base escolhida. Esses autores argumentam que a utilização de mais de três funções bases do polinômio de Laguerre não altera o resultado numérico e, assim, três funções bases são

suficientes para se obter a convergência desejada do LS-algoritmo. A estimativa do LS-algoritmo baseou-se em 100 mil trajetórias (metade sendo antitética na simulação de Monte Carlo) e 50 pontos de exercícios anuais. Na aplicação das diferenças finitas utilizou-se um esquema com 40 mil passos para o tempo e 1.000 passos para os preços do ativo. Consequentemente, os resultados parciais obtidos estão na tabela 12. As diferenças apresentadas entre o método das diferenças finitas e o LS-algoritmo são tipicamente muito pequenas. Segundo os próprios autores do LS-algoritmo, das 20 diferenças observadas, 16 são menores ou iguais a 1% em valores absolutos; conseqüentemente o LS-algoritmo é capaz de uma aproximação adequada se comparada com o método das diferenças finitas.

Tab.12. Comparação entre o método de diferenças finitas e o LS-algoritmo para avaliar uma opção de venda americana com preço de exercício de 40, taxa de juros de 6% aa, com maturação de 1 ano.

S	$\sigma$	Diferenças Finitas	LS- Algoritmo	Fórmula Fechada Européia	Valor de Antecipação do Exercício
38	0,2	3,250	3,244	2,852	0,392
38	0,4	6,148	6,139	5,834	0,305
40	0,2	2,314	2,313	2,066	0,247
40	0,4	5,312	5,308	5,060	0,248
42	0,2	1,617	1,617	1,465	0,152
42	0,4	4,582	4,588	4,379	0,209
44	0,2	1,110	1,118	1,017	0,101
44	0,4	3,948	3,957	3,783	0,174

Fonte: Longstaff e Schwartz [2001, p.207, tab.1 (parcial)].

A tabela 12 também mostra os resultados parciais obtidos pelo LS-algoritmo, cujos valores de antecipação de exercício são obtidos pelas diferenças entre as estimativas das opções americana e européia.

A seguir apresenta-se a performance do método LS-algoritmo numa aplicação no mercado financeiro brasileiro (tabela 13). Poder-se-ia considerar uma polinomial quadrática, ou mesmo cúbica, com melhor precisão, porém o esforço computacional seria bem expressivo.

Neste sentido, o polinômio do primeiro grau se mostrou eficiente, tanto na precisão da estimativa quanto na rapidez de obtenção dos resultados. Ainda, deve-se considerar o fato de que trabalhando com uma cesta de ativos, a qual exige um esforço computacional considerável do ponto de vista computacional, o operador financeiro necessita de eficiência e rapidez nos resultados para se posicionar no mercado financeiro. A linguagem de programação utilizada foi o SAS — Statistical Analysis System (*SAS language*).

A avaliação dos métodos foi feita nas opções de compra (*call option*) da Telebrás com vencimento em junho de 1997, período em que as ações da empresa possuíam grande liquidez, correspondendo a quase 50% do índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA). Os dados referentes às opções da Telebrás (preço de fechamento diário da ação TEL4) foram obtidos junto a BOVESPA. A taxa de juros livre de riscos utilizada no modelo foi o CDI Over médio, fornecido pelo sistema CETIP (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos). Para anualizar a taxa de juro diária empregou-se a fórmula:

$$r_{anual} = \left( 1 + \frac{30 \times r_{diário}}{n_{dias-operação-mês}} \right)^{252} - 1 \quad (3.21)$$

lembrando que no ano de 1997 ocorreram 252 dias de operação. A volatilidade utilizada para avaliar a opção de compra foi a volatilidade implícita, ou seja, considerou-se o valor da opção operada pelo mercado, colocou-se na fórmula de Black-Scholes e, em seguida, avaliou-se a volatilidade do ativo. Por sua vez, um polinômio do primeiro grau é utilizado para avaliar a função esperança para a tomada de decisões, avaliada pelo LS-algoritmo utilizando-se 10 tempos de exercícios e 10 mil trajetórias.

Tab. 13. Comparação entre os diversos métodos de avaliação de uma opção de compra americana da Telebrás (TEL4) operada na BOVESPA.

$K$	$S$	$\sigma$ (%)	$r$ (%) anuais	$t$ (anos)	Árvore Binomial	Crank- Nicolson	LS- Algoritmo	Valor de Mercado
115	119,7	9,17	21,00	0,2143	9,790	9,797	9,752	9,80
	120,5	10,58	21,20	0,1984	10,303	10,297	10,290	10,30
	118,9	10,33	22,53	0,2460	10,197	10,195	10,112	10,20
120	122,5	10,58	21,92	0,2738	9,687	9,693	9,770	9,70
	119,0	18,49	21,10	0,2183	6,610	6,603	6,678	6,60
	135,2	20,34	22,02	0,1389	18,900	18,901	19,003	18,90
	126,8	21,47	21,92	0,1627	11,810	11,809	11,803	11,80
125	145,0	16,91	21,30	0,0833	22,199	22,199	22,099	22,20
	137,0	27,03	22,02	0,1032	15,295	15,318	15,382	15,30
145	147,5	12,40	21,10	0,0278	3,552	3,549	3,554	3,55
	147,7	15,96	20,69	0,0714	5,600	5,592	5,578	5,60
	147,8	14,78	21,10	0,0317	4,090	4,087	4,079	4,10
150	147,5	13,49	21,10	0,0238	0,549	0,557	0,526	0,55
	145,0	18,34	21,30	0,0833	2,051	2,050	1,977	2,05
	144,4	23,03	20,80	0,0556	1,586	1,600	1,585	1,60

Notas:  $K$ ,  $S$ ,  $\sigma$ ,  $r$  e  $t$  seguem a nomenclatura usual.

No método de diferenças finitas utilizou-se grade de 30x60 com  $\Delta x=0,01$ .

No método binomial utilizaram-se 30 estágios.

No LS-algoritmo utilizaram-se 10 exercícios (estágios) e 10 mil simulações (trajetórias).

As avaliações das opções asiáticas do tipo americanas são mais complexas que as tradicionais *plain vanilla*, devido ao fluxo de caixa ser *path dependent*, já que a média  $A_t$  depende de seu caminho percorrido pelos preços. Longstaff e Schwartz [2001, p.209] avaliaram a opção asiática pelo método das diferenças finitas, transformando o problema *path-dependent* num problema markoviano. Isso é conseguido introduzindo a média dos preços como uma segunda variável de estado no problema. O preço da opção  $H(S, A, t)$  apresentada no exemplo (tabela 14), fornecido pelos autores Longstaff e Schwartz, é a solução da equação diferencial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + rS \frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{0,25+t} (S - A) \frac{\partial H}{\partial A} + \frac{\partial H}{\partial t} - rH = 0 \quad (3.22)$$

sujeito a condição de expiração:

$$H(S, A, T) = \max(0, A_T - S), \quad (3.23)$$

neste caso com  $t$  variando no intervalo  $0,25 \leq t \leq T$ , que representa o intervalo permitido para o exercício da opção.

No exemplo da tabela 14 considerou-se o preço do ativo (*strike price*),  $S$ , variando de 80 a 120; a taxa livre de risco de 6% anuais; a volatilidade de 20%; e o tempo de maturação como sendo de dois anos. Adicionalmente, considerou-se o valor médio inicial dos preços do ativo,  $A$ , tendo três valores (90, 100, 110). Essa média dos preços do ativo é contabilizada sobre o período que começa três meses após a data de apreciação do exercício. Assim, a opção só pode ser exercida após três meses da assinatura do contrato. As funções bases da regressão foram constituídas de uma constante, os dois primeiros termos polinomiais de Laguerre avaliadas no preço do ativo, acrescidos dos produtos cruzados desse polinômio de Laguerre até o termo de terceira ordem. Logo, foram utilizadas oito funções bases na regressão. Os autores argumentam que esta estrutura é o suficiente para uma convergência adequada.

As diferenças finitas foram obtidas utilizando-se a metodologia *Alternating Direction Implicit* (ADI) com 100 mil passos anuais e 200 passos tanto para os preços do ativo quanto para a média dos preços desse mesmo ativo. Por sua vez, o LS-algoritmo se baseou em 50 mil (sendo metade antitética) trajetórias e 100 pontos de discretização anuais.

Tab. 14. Comparação entre o método de diferenças finitas (algoritmo ADI) e o LS-algoritmo para avaliar uma opção asiática de venda americana com taxa de juros de 6% aa, com maturação de 1 ano.

A	S	Diferenças Finitas (ADI)	LS- Algoritmo	Simulação Européia	Valor de Antecipação do Exercício
90	80	0,949	0,961	0,951	0,010
90	90	3,267	3,309	3,233	0,076
90	100	7,889	7,886	7,573	0,313
90	110	14,538	14,518	13,783	0,735
90	120	22,423	22,378	21,201	1,177
100	80	1,108	1,101	1,085	0,016
100	90	3,567	3,700	3,570	0,130
100	100	8,151	8,669	8,156	0,513
100	110	14,558	15,703	14,565	1,138
100	120	22,097	23,775	22,101	1,674
110	80	1,288	1,265	1,235	0,030
110	90	4,136	4,186	3,936	0,250
110	100	9,821	9,830	8,768	1,062
110	110	17,399	17,362	15,368	1,994
110	120	25,453	25,406	23,013	2,393

Fonte: Longstaff e Schwartz [2001, p.208, tab.2 (parcial)].

Pizzi e Pellizzari [2003] discutiram as vantagens e desvantagens de se utilizar regressão linear e regressão não-paramétrica e sugerem que, utilizando-se dessa última técnica, consegue-se boa precisão nas estimativas dos preços da opção americana, com menores números de simulações e datas de exercícios. Esses autores utilizaram o LS-algoritmo para avaliar opções americanas com múltiplos ativos. A técnica de regressão não-paramétrica foi implantada na determinação da função esperança condicional para decidir o tempo de se exercer o direito no contrato. A técnica utilizada foi a *Locally Weighted Regression Smoother* [Cleveland and Devlin, 1988] e a Regressão *Splines*, com 500 e 2000 trajetórias, respectivamente, e 10 exercícios anuais. Os valores obtidos são concordantes com

aqueles obtidos por Longstaff e Schwartz [2001]. Os autores observaram que aumentando o valor de exercício,  $K$ , melhora a precisão do método.

Apresentou-se (ver Apêndice C) dois métodos para solucionar o problema de dois ativos correlacionados. O diagrama da árvore binomial considera os seguintes processos estocásticos:

$$dS_1 = \nu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1$$

$$dS_2 = \nu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2$$

com os ativos tendo correlação  $\rho$ , i.e.,  $dz_1 \cdot dz_2 = \rho \cdot dt$ . Esse problema pode ser descrito pela equação diferencial parcial que rege o preço da opção de compra dado por:

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \nu_1 S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + \nu_2 S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - rC$$

a qual pode-se aplicar o método das diferenças finitas, mais especificamente, o método *Alternating Direction Implicit* (ADI).

A aplicação do LS-algoritmo foi feita considerando uma função linear em vez de se utilizar o polinômio de Laguerre. Essa simplificação é oportuna, pois torna o processo de computação do algoritmo mais rápido com uma aceitável aproximação. Afinal, os operadores do mercado financeiro desejam rapidez na obtenção de respostas com razoável precisão e estão conscientes que os modelos são apenas instrumentos auxiliares de previsão. Esses métodos numéricos não tem nada de infalíveis e o mercado tem mostrado isso com alguma frequência.

Assim, para estimar o preço da opção sobre dois ativos correlacionados via LS-algoritmo, tomou-se como base da esperança condicional, um polinômio do primeiro grau e utilizou-se dez pontos de exercícios (10 estágios) e 10 mil trajetórias. Considerou-se os preços dos ativos  $S_1=100$  e  $S_2=100$  numa primeira etapa e  $S_1=90$  e  $S_2=100$  na etapa seguinte, ambos com exercícios  $K=1$ . As volatilidades dos dois ativos variam de 10% a 30%, a taxa livre de risco é de 6%, a correlação entre os dois ativos variam em três níveis e o tempo é de um ano. Os resultados comparativos do método binomial (ver apêndice C) e do LS-algoritmo estão nas

tabelas 15 e 16. Poder-se-ia também comparar com o método das diferenças finitas (ADI), contudo é de difícil programação como pode também ser observado no apêndice C.

Tab. 15. Comparação entre o LS-algoritmo e o método binomial para duas variáveis quando aplicado a uma opção de compra americana, cujo *payoff* é  $\max(0, S_1 - S_2 - K)$ , com  $S_1 = S_2 = 100$  e  $K=1$ . Os preços das opções são estimados para três correlações entre os ativos:  $\rho=0,2$ ,  $\rho=0,5$  e  $\rho=0,7$ . Considerou-se, ainda,  $r=6\%$ ,  $div.1 = 0$ ,  $div.2 = 0$  e  $t=1$  ano.

$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=1$  e correlação de  $\rho=0,2$  entre os dois ativos.

$S_1$	$S_2$	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
100	100	10	10	4,589	4,498
		10	20	7,680	7,618
		10	30	11,291	11,373
100	100	20	10	7,734	7,641
		20	20	9,577	9,448
		20	30	12,441	13,240
100	100	30	10	11,392	10,763
		30	20	12,499	12,118
		30	30	14,527	14,169



$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=1$  e correlação de  $\rho=0,5$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
100	100	10	10	3,329	3,318
		10	20	6,412	6,665
		10	30	10,015	9,663
100	100	20	10	6,475	6,501
		20	20	7,455	7,518
		20	30	10,014	9,916
100	100	30	10	10,128	10,303
		30	20	10,085	9,977
		30	30	11,361	11,346

$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=1$  e correlação de  $\rho=0,7$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
100	100	10	10	2,630	2,575
		10	20	5,418	5,279
		10	30	9,070	8,819
100	100	20	10	5,490	5,505
		20	20	5,636	5,535
		20	30	8,010	7,964
100	100	30	10	9,193	8,784
		30	20	8,096	7,854
		30	30	8,634	8,754

**Notas:**  $r=6\%$ ,  $div.1 = 0$ ,  $div.2 = 0$ ,  $t=1$  ano.

No método binomial foram utilizados 30 passos.

O LS-algoritmo considerou 10 pontos de exercícios (passos) e 10.000 simulações.

Deve-se destacar a importância em se considerar a correlação entre os ativos. Para os dois ativos com volatilidades iguais a 10%, se a correlação entre eles for de 20%, a opção (seguro) está sinalizando para algo em torno de 4,50; porém, se a correlação entre eles atingir 70%, esse seguro cai para valores próximos a 2,60, ou seja, aproximadamente 60% do valor anterior.

Tab. 16. Comparação entre o LS-algoritmo e o método binomial para duas variáveis quando aplicado a uma opção de compra americana, cujo *payoff* é  $\max(0, S_1 - S_2 - K)$ , com  $S_1 = 90$ ,  $S_2 = 100$  e  $K=1$ . Os preços das opções dos ativos são estimados para três correlações:  $\rho=0,3$ ,  $\rho=0,5$  e  $\rho=0,7$ . Considerou-se, ainda,  $r=6\%$ ,  $div.1 = div.2 = 0$  e  $t=1$  ano.

$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=1$  e correlação de  $\rho = 0,3$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
90	100	10	10	0,972	1,016
		10	20	3,136	3,137
		10	30	6,169	6,211
90	100	20	10	3,162	3,179
		20	20	4,537	4,510
		20	30	6,877	6,939
90	100	30	10	6,246	6,160
		30	20	6,923	6,917
		30	30	8,527	8,566

$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=1$  e correlação de  $\rho=0,5$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma1 (%)	Sigma2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
90	100	10	10	0,578	0,572
		10	20	2,464	2,418
		10	30	5,418	5,296
90	100	20	10	2,484	2,442
		20	20	3,337	3,332
		20	30	5,419	5,476
90	100	30	10	5,495	5,416
		30	20	5,465	5,456
		30	30	6,572	6,722

$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=1$  e correlação de  $\rho=0,7$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
90	100	10	10	0,221	0,213
		10	20	1,744	1,754
		10	30	4,614	4,588
90	100	20	10	1,752	1,785
		20	20	1,970	1,936
		20	30	3,740	3,756
90	100	30	10	4,689	4,704
		30	20	3,779	3,819
		30	30	4,229	4,389

**Notas:**  $r=6%$ ,  $div.1 = 0$ ,  $div.2 = 0$ ,  $t=1$  ano.

No método binomial foram utilizados 30 passos.

O LS-algoritmo considerou 10 pontos de exercícios (passos) e 10.000 simulações.

Quando os ativos têm preços correntes diferentes, mesmo com mesmas volatilidades, os valores das opções divergem significativamente quando se alteram suas correlações de preços. Basta observar o comportamento da opção quando as volatilidades são de 10%. Com correlação de 30%, a opção é de aproximadamente 1,00 enquanto se a correlação passa para 70%, o valor da opção fica pouco acima de 0,20, quase a quinta parte do resultado anterior.

Tab. 17. Comparação entre o LS-algoritmo e o método binomial para duas variáveis quando aplicado a uma opção de compra americana, cujo *payoff* é  $\max(0, S_1 - S_2 - K)$ , com  $S_1 = 90$ ,  $S_2 = 100$  e  $K=10$ . Os preços das opções dos ativos são estimados para três correlações:  $\rho=0,3$ ,  $\rho=0,5$  e  $\rho=0,7$ . Considerou-se, ainda,  $r=6\%$ ,  $div.1 = div.2 = 0$  e  $t=1$  ano.

*Payoff* =  $(S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=10$  e correlação de  $\rho=0,2$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
90	100	10	10	0,267	0,260
		10	20	1,459	1,451
		10	30	3,666	3,827
90	100	20	10	1,771	1,758
		20	20	2,830	2,892
		20	30	4,709	4,766
90	100	30	10	4,440	4,633
		30	20	5,168	5,224
		30	30	6,634	6,691

*Payof* =  $(S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=10$  e correlação de  $\rho=0,5$  entre os dois ativos.

S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
90	100	10	10	0,075	0,076
		10	20	0,808	0,830
		10	30	2,725	2,793
90	100	20	10	1,097	1,112
		20	20	1,519	1,532
		20	30	2,900	2,907
90	100	30	10	3,531	3,528
		30	20	3,394	3,320
		30	30	4,175	4,084

$Payoff = (S_1 - S_2 - K)^+$  com  $K=10$  e correlação de  $\rho=0,7$  entre os dois ativos.

$S_1$	$S_2$	Sigma 1 (%)	Sigma 2 (%)	Binomial	LS-algoritmo
90	100	10	10	0,012	0,011
		10	20	0,415	0,410
		10	30	2,072	2,105
90	100	20	10	0,660	0,697
		20	20	0,664	0,633
		20	30	1,601	1,554
90	100	30	10	2,893	2,927
		30	20	2,097	2,050
		30	30	2,311	2,282

**Notas:**  $r=6\%$ ,  $div.1 = 0$ ,  $div.2 = 0$ ,  $t=1$  ano.

No método binomial foram utilizados 30 passos.

O LS-algoritmo considerou 10 pontos de exercícios (passos) e 10.000 simulações.

Deve-se observar que quando se altera o preço de exercício ( $K=10$ ), as variações nos preços das opções alteram de forma mais sensível. Os ativos com volatilidades iguais a 10%, quando a correlação passa de 20% para 70%, os valores das opções, respectivamente, passam de 0,26 para 0,01. Assim, um é 26 vezes o valor do outro.

Os resultados obtidos nas tabelas 15 a 17 mostram a importância de se considerar a correlação entre os ativos, principalmente em se tratando de produtos agrícolas, devido à possibilidade de complementariedade ou substituição entre eles. De uma forma geral, as variações nos preços das opções, constituídas por dois ativos, diminuem sensivelmente quando cresce a correlação nos preços dos ativos, principalmente se suas volatilidades são baixas.

Novamente realça-se a importância da simulação que se apresenta como uma técnica amplamente útil para solucionar problemas que são intratáveis do ponto de vista analítico. Devido à inerente complexidade que envolve o problema, ou devido à presença de incertezas, ou os dois, a simulação de Monte Carlo se apresenta de forma bastante oportuna como um método bastante flexível na abordagem desses problemas. Afinal, os ativos estão correlacionados, com seus preços descrevendo trajetórias estocásticas. Conseqüentemente, o método de Monte Carlo se aplica de forma bem mais cômoda, nessa complexa situação, que

os demais métodos numéricos. E o LS-algoritmo se enquadra perfeitamente como uma técnica interessante para solucionar tais problemas.

## **Conclusão**

Este capítulo apresentou o LS-algoritmo, considerado uma poderosa ferramenta para estimar os valores de opções americanas por simulação. Em essência, essa abordagem utiliza o método de mínimos quadrados para estimar a esperança condicional do *payoff* para que o portador da opção continue (isto é, não exerça ainda seu direito). O LS-algoritmo foi aplicado em opções americanas considerando dois ativos correlacionados. A função utilizada neste trabalho, para a esperança condicional, foi o polinômio do primeiro grau devido à necessidade do analista de mercado de clamar por respostas rápidas e com razoável precisão. Essa técnica é importante devido, também, à sua perfeita aplicabilidade em situações envolvendo *path-dependent* e múltiplos fatores (ou seja, com diversos produtos no *payoff*) e mesmo quando o ativo segue um processo “*jump-diffusion*”. Além disso, essa técnica é bem mais flexível que o método *lattice* (das árvores binomiais e trinomiais) e o método de diferenças finitas.

## **Capítulo 4.**

# **AVALIAÇÃO DE OPÇÕES AMERICANAS ENVOLVENDO UMA CESTA DE ATIVOS CORRELACIONADOS**

## **4.1. Introdução**

A agricultura está sujeita a situações bem peculiares, pois se chove bastante ou se ocorre uma estiagem prolongada, sofre a perda da safra. Contudo, se o clima favorece de forma excepcional, pode ocorrer uma superprodução, com a oferta superando a demanda. Isto representa prejuízo para o produtor que não consegue receita suficiente para cobrir seus custos. Nesse sentido, a confecção de um contrato que garanta o preço do produto é fundamental para a agricultura. A Bolsa de Mercadorias e Futuros — BM&F oferece produtos financeiros com esse objetivo.

Nos capítulos anteriores angariou-se informações pertinentes à elaboração de uma cesta de insumos para a produção do biodiesel. A estabilidade do preço do biocombustível está fortemente relacionada aos preços de seus insumos, que são os óleos de origem vegetal e animal. Assim, é essencial modelar um esquema que possibilite otimizar essa cesta de insumos, oferecendo um seguro adequado para evitar perdas devido às variações de seus preços. Conseqüentemente, permite-se, também, a estabilização dos preços do biodiesel.

Uma opção de compra ou de venda pode perfeitamente se moldar nos objetivos dos agentes financeiros participantes do mercado de biodiesel. Apresentam-se dois produtos financeiros para a cesta: uma opção asiática e outra com barreira, ambas opções do tipo americana. Essa escolha é devido à possibilidade de tornar o custo mais acessível para o comprador do título, pois seu risco será amenizado. Cabe nesse capítulo, apresentar esses dois títulos para a precificação da cesta de insumos (óleos vegetais) para a fabricação do biodiesel.

## 4.2. Modelo Proposto

Derivativo é uma família de contratos financeiros dependendo de seus respectivos *payoffs* sobre valores de alguma variável, que pode ser o preço de uma ação, de uma carteira de ações, de *commodities*, de taxa de juros, de índices ou, mesmo, de um ativo não financeiro genérico. Os contratos devem ser emitidos por duas partes para possibilitar uma negociação específica. Futuros e opções são dois contratos típicos da classe de derivativos.

Diferentemente das opções européias, as opções americanas permitem o exercício em qualquer momento até a expiração do contrato. Esta situação torna esse tipo de contrato mais complexo de ser analisado. Evidentemente, a vantagem de antecipação do exercício faz com que as opções americanas tenham maior valor em relação às européias.

Neste capítulo, cabe apresentar o produto final do trabalho, ou seja, um modelo que permite estimar o preço da opção americana de uma cesta de ativos, referencial para estabelecer o preço do biodiesel.

O governo adquire o biodiesel através da Petrobras, cujos preços são obtidos via leilão. O primeiro leilão realizou-se com preço atingindo R\$ 2,00 cada litro, acima do preço unitário do óleo diesel. Atualmente, o último leilão teve cotação de R\$ 1,90, ainda superior ao diesel, porém deve cair, sinalizando para um preço de equilíbrio. Deve-se ressaltar que nesse preço já está presente o subsídio do governo federal com isenção de IPI e CIDE (imposto do combustível). Os produtores pleiteiam, também, subsídio no ICMS que é um imposto estadual.

A estabilidade do preço pode ser auxiliada via mercado de opções, objetivando oferecer um “seguro” (*hedge*) ao vendedor da matéria-prima do biocombustível. As matérias-primas que podem compor o quadro de produtos na fabricação do biodiesel são as oleaginosas e as gorduras de origem animal.

O governo pode apresentar uma cesta de produtos que dará origem ao óleo bruto que, adicionado à estimativa do preço de processamento do biocombustível, pode oferecer um preço de consenso no mercado para o biodiesel.

No presente trabalho, serão considerados apenas os óleos provenientes da soja, algodão, girassol e amendoim utilizados para produzir o biocombustível. Contudo, a metodologia a ser utilizada permite acrescentar outros insumos sem maiores dificuldades.

Consideram quatro ativos seguindo os seguintes processos estocásticos:



$$dS_i = \nu_i S_i dt + \sigma_i S_i dz_i \quad (4.1)$$

com o índice  $i=1,2,3,4$  representando os insumos, respectivamente, óleos de soja, algodão, girassol e amendoim. Por considerar o óleo de soja como matéria-prima principal, a ser justificado posteriormente, ele estará correlacionado ( $\rho_{1j}$ ) com os demais insumos pela relação:

$$dz_1 \cdot dz_j = \rho_{1j} dt \quad (4.2)$$

com o índice  $j=2,3,4$  representando algodão, girassol e amendoim. Assim, por exemplo,  $\rho_{13}$  significa a correlação entre soja e girassol. As gerações das variáveis  $z_1$  com  $z_j, j=2,3,4$ , de uma distribuição normal bivariada com correlação  $\rho_{1j}$  são obtidos gerando variáveis normais padronizadas independentes  $\varepsilon_j, j=1,2,3,4$ , para depois combiná-las de forma que

$$\begin{aligned} z_1 &= \varepsilon_1 \\ z_j &= \rho_{1j} \cdot \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \varepsilon_j \quad j=2,3,4. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\nu_i = r - 0,5\sigma_i^2$$

com  $r$  sendo a taxa de juros livre de risco e  $z_i$  o processo de Wiener.

Seguindo os passos do modelo de Black-Scholes, ou seja, após aplicar a fórmula de Itô [ver por exemplo, Øksendal, 2000] e impor a condição de risco-neutro (Apêndice A), a equação que permite determinar o valor da opção sobre a cesta de produtos pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C}{\partial t} &= \nu_1 S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + \nu_2 S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \nu_3 S_3 \frac{\partial C}{\partial S_3} + \nu_4 S_4 \frac{\partial C}{\partial S_4} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 S_3^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_3^2} + \frac{1}{2} \sigma_4^2 S_4^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_4^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$+ \rho_{12} \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} + \rho_{13} \sigma_1 S_1 \sigma_3 S_3 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_3} + \rho_{14} \sigma_1 S_1 \sigma_4 S_4 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_4} - rC$$

representando a equação diferencial que rege o preço da opção da cesta de biodiesel.

Aplicar o método das diferenças finitas, mais especificamente, o método *Alternating Direction Implicit* (ADI) exige um esforço matemático para transformar a equação diferencial, simplificando-a numa equação padrão de transferência de calor, como feito no apêndice B. Caso não se utilize desse expediente, o esforço agora se torna computacional. Ainda, em se tratando de uma opção americana, defronta-se com um problema de fronteira livre, aumentando sua complexidade. E o problema se torna ainda mais complexo quando se consideram opções com barreiras ou sendo opções asiáticas.

No primeiro caso, a barreira pode ser interessante para o vendedor do óleo insumo na produção de biodiesel. O vendedor pode estar interessado em vender a matéria-prima por R\$ 1,50 /kg (preço de exercício). Assim, a sugestão é uma opção de venda com barreira (*down-and-in put option*), porém com barreira no valor de R\$ 1,30, já que acredita suportar esse preço mínimo. Trata-se de uma opção de venda, na qual terá validade somente se o preço da cesta atingir ou romper essa barreira de R\$ 1,30. A partir daí, esse produtor venderá sua matéria-prima caso o preço fique abaixo dos R\$ 1,50, que se constitui no exercício da opção. Trata-se de uma proteção parcial, na qual assegura ao produtor um preço mínimo para o insumo em condições mais favoráveis se comparado ao valor de uma opção tradicional.

As opções asiáticas tipo americanas são particularmente complexas porque não apenas permitem antecipar o exercício como também são *path dependent*, já que a média  $A_t$  depende do caminho percorrido pelos preços. Em geral, esses tipos de problemas são difíceis de se resolverem pela técnica das diferenças finitas. Nesses casos deve-se avaliar a opção pelo método das diferenças finitas, transformando o problema do *path-dependent* num problema markoviano, ou seja, esquece o passado ficando apenas com as informações correntes para avaliar o futuro. Isso é conseguido introduzindo a média dos preços como uma outra variável de estado no problema. Consequentemente, a equação diferencial que rege o preço da opção

asiática é acrescida dos termos  $\frac{\partial C}{\partial A_t}$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial C}{\partial t} &= \nu_1 S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + \nu_2 S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \nu_3 S_3 \frac{\partial C}{\partial S_3} + \nu_4 S_4 \frac{\partial C}{\partial S_4} \\
&+ \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 S_3^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_3^2} + \frac{1}{2} \sigma_4^2 S_4^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_4^2} \\
&+ \frac{1}{t+t_0} \left[ (S_1 - A_1) \frac{\partial C}{\partial A_1} + (S_2 - A_2) \frac{\partial C}{\partial A_2} + (S_3 - A_3) \frac{\partial C}{\partial A_3} + (S_4 - A_4) \frac{\partial C}{\partial A_4} \right] \\
&+ \rho_{12} \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} + \rho_{13} \sigma_1 S_1 \sigma_3 S_3 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_3} + \rho_{14} \sigma_1 S_1 \sigma_4 S_4 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_4} - rC
\end{aligned} \tag{4.4}$$

sujeito a uma condição de expiração do tipo  $\max(0, A_T - S)$ , neste caso com  $t$  variando no intervalo  $t_0 \leq t \leq T$ , que representa o intervalo permitido para o exercício da opção. A equação (4.4) representa a equação diferencial definitiva para reger o preço da opção asiática para o biodiesel.

Por conseguinte, a venda da cesta baseando-se no seu preço médio (média aritmética), oferece maior estabilidade dos preços, pois amenizam-se os picos e as depressões nos preços durante a vigência do contrato, apresentando “volatilidades mais comportadas”.

O LS-algoritmo é uma técnica que permite solucionar problemas intratáveis do ponto de vista analítico e complexa resolução computacional, como ocorre com a equação (4.4), se apresentando de forma bastante oportuna como um método bastante flexível. O valor da opção é obtido de

$$S_i(t+dt) = S_i(t) \cdot \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) dt + \sigma_i \sqrt{dt} \cdot z_i \right] \tag{4.5}$$

para  $i=1,2,3,4$  representando as trajetórias dos preços para os insumos considerados. As volatilidades, por sua vez, não serão consideradas estocásticas, sendo funções determinísticas e estando sujeitas a variações preestabelecidas segundo a ótica do observador.

Os modelos envolvendo volatilidades estocásticas, ou mesmo taxas de juros estocásticas, embora bastantes elegantes, devem ser observados com o devido cuidado. Alguns autores sugerem utilizar modelos estocásticos com “*mean reversion*”. O problema está na subjetividade em se estimar os parâmetros para a avaliação do derivativo [ver Vasicek, 1977, p.177-188, Hull e White, 1987, p.281-300, Cox e Ross, 1976, p.145-166, Hull e White, 1988,

p.29-61, Hull e White, 1990, p.87-100, Kloeden, Platen e Schurz, 1994, p.264-269]. Pelo menos num espaço de tempo razoável, como é o período de um contrato financeiro, parece mais viável considerar a trajetória com volatilidade, que após crescer (ou decrescer), retrocede, porém sem atingir novamente a sua média. Este posicionamento parece coerente em face da cesta, considerada nesse trabalho, ser um produto energético. Assim, como tem ocorrido com a volatilidade dos preços do petróleo, pode-se supor que este comportamento se reproduzirá também para a cesta composta por esses energéticos renováveis. Embora a função volatilidade não seja estocástica, parece viável considerá-la como uma função determinística e discreta, crescendo inicialmente para posterior queda, porém de forma menos sensível e sem atingir os patamares anteriores.

Outro agravante com relação aos modelos que consideram volatilidades seguindo trajetórias estocásticas é que estes deixam de ser processos markovianos. Conseqüentemente, estes modelos exigem abordagens mais cuidadosas. Assim, nesse trabalho, considera-se a taxa livre de risco como sendo constante e evita-se considerar o modelo com volatilidade estocástica. Porém supõe-se que as volatilidades sigam trajetórias predeterminadas, ou seja, funções conhecidas que devem refletir expectativas futuras segundo a ótica do modelador. Estas expectativas consideram a política econômica do país, perspectivas quanto às disponibilidades de produtos essenciais no mercado internacional, condições meteorológicas, dentre outras variáveis. Contudo essa função pode ser bem simples, podendo ser até mesmo discreta ou função escada, como será tratado nesse trabalho. Assim, se existe uma perspectiva com relação às possíveis instabilidades nos preços futuros dos ativos considerados, que se elevariam futuramente, suas volatilidades são representadas por funções crescentes e bastantes simples: uma reta, parábola ou exponencial. Da mesma forma, se as expectativas são de um ambiente bem ameno para o futuro, com perspectivas de quedas nos preços dos ativos, seus preços apresentam volatilidades representadas por funções decrescentes, também sendo uma reta, parábola ou exponencial. Pode-se, inclusive, utilizar uma função do tipo senoidal, caso considere as volatilidades devem oscilar, havendo a possibilidade de colocar um amortecedor se existem perspectivas futuras de estabilização. Outra possibilidade é utilizar uma função exponencial ou logarítmica se imaginar um crescimento na volatilidade, respectivamente, acelerada ou com possível estabilização. Com essa estratégia permite considerar o modelo como sendo markoviano e, também, evita-se a estimativa bem intuitiva de alguns parâmetros.

As informações dos preços dos insumos (ver Anexo) para determinar as volatilidades e correlações, referem-se ao período de janeiro de 2002 a dezembro de 2006, disponíveis em Agriannual 2005 (para a soja) e AGPYA 2006 (para os demais insumos). Os desvios padrões (volatilidades) foram obtidos considerando o período de janeiro de 2004 a dezembro de 2005 (24 dados). Contudo, as correlações foram determinadas com base apenas no ano de 2005 (12 dados). Estes valores estão disponíveis na tabela 1, juntamente com algumas estatísticas relevantes dos produtos.

Tab.1. Principais informações estatísticas dos preços dos insumos presentes na produção do biodiesel (preços em R\$/kg) – Janeiro de 2002 a dezembro de 2005.

Insumos (óleos)	Média dos Preços	Desvio Padrão	Preço mínimo	Preço máximo	Correlação com Soja
Soja	1,62	0,396	0,860	2,341	1,000
Algodão	1,43	0,295	0,947	1,907	0,955
Girassol	1,59	0,247	1,050	2,049	0,913
Amendoim	2,63	0,761	1,376	4,207	0,588

Como já frisado, as volatilidades não são consideradas constantes, todavia também não são estocásticas. Essas volatilidades são representadas por funções determinísticas, seguindo trajetórias predeterminadas pelo analista. No presente trabalho, consideram-se funções discretas para descrever as volatilidades que são baseadas na história dos quatro óleos insumos do biodiesel. Observam-se as volatilidades mensais, no decurso de um ano, obtendo os 13 valores (“volatilidade móvel”) que servirão de base para estimar a volatilidade anual histórica [ver Hull, 1992, p.215] a ser considerada na obtenção de um preço para a opção de compra ou venda da cesta para produção do biodiesel. Os resultados estão na tabela 2.

Tab.2 Estimativas das volatilidades dos óleos componentes da cesta para produzir o biodiesel (volatilidades históricas em percentagens) – Janeiro de 2004 a dezembro de 2005.

<b>Mês/ano</b>	<b>Soja</b>	<b>Algodão</b>	<b>Girassol</b>	<b>Amendoim</b>
Jan 03 - Jan 2004	9,424	9,242	8,894	15,205
Fev 03 - Fev 2004	11,568	9,326	9,349	12,846
Mar 03 - Mar 2004	11,401	8,952	8,658	11,235
Abr 03 - Abr 2004	11,010	7,590	7,232	11,187
Mai 03 - Mai 2004	10,790	7,396	7,280	11,541
Jun03 - Jun 2004	11,904	9,918	8,153	10,806
Jul 03 - Jul 2004	11,909	9,929	8,189	11,472
Ago 03 - Ago 2004	11,690	9,934	7,618	10,726
Set 03 -Set 2003	11,593	10,196	7,584	10,651
Out 03 - Out 2004	10,079	10,036	6,547	9,746
Nov 03 - Nov 2004	10,021	7,959	5,961	7,998
Dez 03 - Dez 2004	9,874	7,123	6,987	6,783
Jan 04 - Jan 2005	9,954	6,603	6,945	6,784
Fev 04 - Fev 2005	7,313	7,878	6,005	6,534
Mar 04 - Mar 2005	11,436	11,598	7,718	6,993
Abr 04 - Abr 2005	11,548	11,604	8,016	7,000
Mai 04 - Mai 2005	12,037	11,842	7,750	5,476
Jun04 - Jun 2005	11,620	10,790	7,297	5,505
Jul 04 - Jul 2005	11,544	11,144	7,167	4,202
Ago 04 - Ago 2005	11,459	11,665	7,347	3,993
Set 04 -Set 2005	11,477	11,615	7,682	4,316
Out 04 - Out 2005	11,031	11,577	7,196	4,295
Nov 04 - Nov 2005	11,019	11,656	7,672	4,213
Dez 04 - Dez 2005	11,048	11,720	7,407	4,387

Os valores discretos das volatilidades dos insumos, a serem utilizados para estimar o preço da opção americana exótica, podem perfeitamente coincidir com seus valores históricos.

Contudo o analista pode imaginar alguns pontos com novas configurações e alterar segundo suas expectativas.

Há a necessidade de ponderar os preços dos insumos com a produção efetiva dos óleos considerados como componentes do biodiesel. Isto porque o amendoim é o insumo com maior preço, todavia a soja é a maior responsável pela produção do biocombustível. Estes valores estão expostos na tabela 3.

Tab. 3. Produção brasileira das principais oleaginosas e de seus respectivos óleos vegetais para produção do biodiesel.

Oleaginosas	Produção em grãos (t)	(%)	Produção de óleo (1000 t)	(%)
Soja	56.865.475	95,0	5.613,2	88,93
Algodão	2.296.186	4,0	558,0	8,84
Girassol	77.872	0,4	75,8	1,20
Amendoim	228.347	0,4	65,0	1,03
Total	59.467.880		6.312,0	

Fonte: Produção vegetal (grãos): Anuário Estatístico do Brasil – 2007.

Produção óleo vegetal: Apud Comissão de Biodiesel da Abiove – 2003.

As informações sobre a produção de óleos vegetais, ou seja, dos insumos do biodiesel, foram apresentadas pela Comissão de Biodiesel da Abiove — 2003, no 1º. Fórum Brasil-Alemanha de Biocombustíveis em 4 de novembro de 2004, São Paulo e, em seguida, estes sofreram pequenas adaptações para se estimar o preço da cesta de óleos vegetais.

O *payoff* do modelo apresentado é o seguinte:

$$\max[K - (\text{soja} + \text{algodão} + \text{girassol} + \text{amendoim}), 0]$$

com soja, algodão, girassol e amendoim representando suas participações na produção do óleo destinado ao biodiesel, multiplicada por seus respectivos preços;  $K$  é o preço de exercício. Assim, considerando os valores da tabela 3, tem-se:

$$\max [K - \{0,8893 (\text{preço soja}) + 0,0884 (\text{preço algodão}) + 0,0120 (\text{preço girassol}) + 0,0103 (\text{preço amendoim})\}, 0].$$

Este *payoff* será utilizado nas duas opções, na asiática e na com barreira.

A aplicação do LS-algoritmo para obtenção de uma opção de venda (*put option*) asiática e de uma opção com barreira, ambas americanas, foi feita considerando uma taxa de juros livre de risco de 10% ao ano e um contrato para um período de um ano. As volatilidades variam mensalmente, cuja referência é o ano de 2005 (ver tabela 2). Foram considerados quatro exercícios,  $K = R\$ 1.620,00$ ,  $K = R\$ 1.700,00$ ,  $K = R\$ 1.800,00$  e  $K = R\$ 2.630,00$  para as duas opções, sendo que no caso da com barreira, este preço mínimo foi de R\$ 1.600,00. Os preços correntes unitários para os quatro insumos são relativos à tonelada, cujos valores seriam de R\$ 1.620,00 para a soja, R\$ 1.430,00 para o algodão, R\$ 1.590,00 para o girassol e R\$ 2.630,00 para o amendoim. Como o óleo de soja é o principal insumo na produção do biodiesel, este deve ser a referência na correlação com os preços dos óleos de algodão, girassol e amendoim. As correlações da soja com os demais insumos, algodão, girassol e amendoim, são 90%, 95% e 50%, respectivamente. Quanto às participações dos insumos, foram considerados três cenários conforme a tabela 4 abaixo.

Tab.4. Simulação para os insumos do biodiesel: percentuais dos óleos vegetais e resultados para as opções de vendas americanas asiáticas e com barreira de R\$ 1.600,00 por tonelada.

Óleos Vegetais		Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Soja		88,93%	80%	65%
Algodão		8,84	15	15
Girassol		1,20	3	15
Amendoim		1,03	2	5
<b>Asiática</b>	<b>K=1620</b>	R\$ 0,37879	R\$ 0,25481	R\$ 0,01883
	<b>K=1700</b>	R\$ 12,7588	R\$ 13,1365	R\$ 4,03571
	<b>K=1800</b>	R\$ 87,5146	R\$ 89,9416	R\$ 62,5300
	<b>K=2630</b>	R\$ 913,147	R\$ 915,740	R\$ 886,549
<b>Barreira</b>	<b>K=1620</b>	R\$ 0,34271	R\$ 0,28774	R\$ 0,02267
	<b>K=1700</b>	R\$ 12,3026	R\$ 13,1964	R\$ 3,18539
	<b>K=1800</b>	R\$ 86,2205	R\$ 88,2651	R\$ 53,5470
	<b>K=2630</b>	R\$ 889,949	R\$ 906,179	R\$ 310,701



Observe que o cenário 1 representa a situação presente (ver tab.3), com a soja contribuindo com quase 90% para a produção do biodiesel. O cenário 2 prevê aumento da produção, com alteração na participação dos insumos, ou seja, a soja continua sendo o principal componente, porém os demais insumos praticamente dobram suas participações no biocombustível. Pode-se observar, também, que os valores das diversas opções de vendas só alteram sensivelmente quando o percentual do amendoim é alterado, já que seu óleo tem valor unitário bem superior aos demais insumos, como é visto no cenário 3. Todavia, quando aumenta a participação do óleo de algodão, aumenta o valor da opção de venda devido ao seu menor preço em comparação aos demais componentes.

Deve-se destacar que se na cesta só participasse o óleo de soja (com 100%), a opção de venda asiática ficaria em R\$ 0,334 e a com barreira em R\$ 0,303 para um exercício de R\$ 1.620,00. Como não poderia deixar de ocorrer, esses valores estão próximos aos obtidos no cenário 1 da tabela 4. Considerando ainda esse exercício de R\$ 1.620,00 por tonelada do óleo resultante, atualmente (cenário 1) o seguro representaria 0,023% desse exercício. Todavia, se desejar vender a cesta por R\$ 2.630,00 por tonelada (que é o preço do óleo de amendoim), o valor de seguro sobe consideravelmente, representando 34,72% do valor de exercício.

Observe que com a participação do óleo de amendoim passando de 1% (cenário 1) para 5% (cenário 3) o valor da opção de venda tem variação grande se o exercício contratado for de R\$ 1.620,00: 20 vezes para a asiática e 15 vezes para a com barreira, aproximadamente. Ainda, no caso do exercício de R\$ 2.630,00 (preço do amendoim), a diferença entre os cenários 1 e 3 é de 1,03 vezes na asiática e quase 3 vezes na com barreira. Também, percebe-se que quando o valor do exercício cresce, a opção de venda com barreira torna-se mais interessante, pois apresenta um menor valor para o prêmio (seguro).

É também importante destacar a situação do produtor de óleo de amendoim produzindo majoritariamente esse produto. Devido ao preço desse óleo ser 60% superior ao óleo de soja, este produtor teria grande dificuldade de participar de um programa amplo de biocombustíveis, pois a venda do produto em torno de R\$ 2.630,00 por tonelada, representaria um seguro próximo a R\$ 900,00.

Isso representa um alerta à utilização de óleo de mamona para se produzir biodiesel devido tratar-se de um óleo nobre, utilizado pela engenharia aeronáutica e, inclusive, para

confeccionar próteses humanas. Seu preço no mercado internacional é cinco vezes o da soja e não justifica utilizar o óleo de mamona para a queima em motores de explosão veicular.

Por último, cabe destacar a possível inclusão de óleos de origem animal (gorduras bovinas, suínas e caprinas) na produção de biodiesel, pois seria extremamente interessante devido a seus preços convidativos. A inclusão de todos como um único componente, ou mesmo separadamente, seria de fácil implementação no algoritmo proposto no trabalho.

Esses elementos devem ser cuidadosamente observados pelos responsáveis pelo desenvolvimento do Programa Nacional do Biodiesel, havendo a necessidade de uma participação efetiva do Estado nesse processo.

Evidentemente, são muitas as possibilidades de se confeccionar uma estratégia a qual deve ser feita segundo as necessidades do interessado. Dependendo da participação dos óleos na cesta do biodiesel, correlação entre preços, volatilidades envolvidas e da estrutura do produtor, pode-se escolher um produto derivativo que melhor venha adequar aos seus interesses. Foi o que ocorreu no cenário 3 (tabela 4) quando a opção da cesta com barreira de exercício  $K = R\$ 2.630,00$  por tonelada atingiu um valor muito inferior à opção asiática nas mesmas características. A questão está longe de se esgotar nestas poucas linhas, exigindo muita reflexão sobre o assunto, no sentido de contribuir em torno do tema relevante para a agricultura, setor importante dentro da economia nacional.

A seguir apresentam-se os dois programas (SAS language) relativos ao LS-algoritmo para resolução das opções de vendas asiática e com barreira, ambas dos tipos americanas.

***LS-algoritmo = American put com barreira down-and-in***

```
data nova;
so1= 1620; so2=1430; so3=1590; so4=2730;
exerc=1620;
rho12=0.9; rho13=0.95; rho14=0.5;
r=0,10; t=1; est=12; sim=10000; bar=1600; chave=0;
dt=t/est; shro12=sqrt(1-rho12* rho12);
shro13=sqrt(1-rho13* rho13);
shro14=sqrt(1-rho14* rho14);
```

```

array sig1(12);
array sig2(12);
array sig3(12);
array sig4(12);
array price(10000, 12);
array payoff(10000, 12);
array deoff(10000, 12);
array esper(10000, 12);
array x(10000);
array y(10000);
sig1(1)= 0,0954; sig1(2)= 0,07313; sig1(3)= 0,11436; sig1(4)= 0,11548;
sig1(5)= 0,12037; sig1(6)= 0,11620; sig1(7)= 0,11544; sig1(8)= 0,11459;
sig1(9)= 0,11477; sig1(10)= 0,11031; sig1(11)= 0,11019; sig1(12)= 0,11048;
sig2(1)= 0,0603; sig2(2)= 0,07878; sig2(3)= 0,11598; sig2(4)= 0,11604;
sig2(5)= 0,11842; sig2(6)= 0,10790; sig2(7)= 0,11144; sig2(8)= 0,11665;
sig2(9)= 0,11615; sig2(10)= 0,11577; sig2(11)= 0,11656; sig2(12)= 0,11720;
sig3(1)= 0,06945; sig3(2)= 0,06005; sig3(3)= 0,07718; sig3(4)= 0,08016;
sig3(5)= 0,07750; sig3(6)= 0,07297; sig3(7)= 0,07167; sig3(8)= 0,07347;
sig3(9)= 0,07682; sig3(10)= 0,07196; sig3(11)= 0,07672; sig3(12)= 0,07407;
sig4(1)= 0,06784; sig4(2)= 0,06534; sig4(3)= 0,06993; sig4(4)= 0,07000;
sig4(5)= 0,05476; sig4(6)= 0,05505; sig4(7)= 0,04202; sig4(8)= 0,03993;
sig4(9)= 0,04316; sig4(10)= 0,04295; sig4(11)= 0,04213; sig4(12)= 0,04387;
    st1=so1; st2=so2; st3=so3; st4=so4;
    do j=1 to est;
        z1=rannor (-876); z2=rannor (-876); z3=rannor (-876); z4=rannor (-876);
        z12=rho12*z1+shro12*z2;
        z13=rho13*z1+shro13*z3;
        z14=rho14*z1+shro14*z4;
        st1=st1*exp(r-0.5*sig1(j)*sig1(j)*dt+ sig1(j)*sqrt(dt)*z1);
        st2=st2*exp(r-0.5*sig2(j)*sig2(j)*dt+ sig2(j)*sqrt(dt)*z12);
        st3=st3*exp(r-0.5*sig3(j)*sig3(j)*dt+ sig3(j)*sqrt(dt)*z13);
        st4=st4*exp(r-0.5*sig4(j)*sig4(j)*dt+ sig4(j)*sqrt(dt)*z14);
        price(i,j)=0.8890*st1+0.0884*st2+0.0120*st3+0.0103*st4;
        if chave(i,j)=0 then payoff(i,j)=0 and deoff(i,j)=0;
        if price(i,j)<bar then chave=1;
        if chave=1 then do;
            payoff(i,j)=max(0, exer-price(i,j));
            if j>1 then deoff(i,j-1)=payoff(i,j)*exp(-r*dt);

```

```

        end;
    end;
end;
do jj=est-1 to 1 by -1;
    psim=0; somx=0; somy=0; somxy=0; somx2=0; somy2=0;
    do i=1 to sim;
        if payoff(i,jj)>0 then do;
            psim=psim+1;
            x(psim)=price(i,jj);
            y(psim)=deoff(i,jj);
            somx=somx+x(psim);
            somy=somy+y(psim);
            somxy=somxy+x(psim)*y(psim);
            somx2=somx2+x(psim)*x(psim);
            somy2=somy2+y(psim)*y(psim);
        end;
    end;
end;
a0=(somy*somx2-somx*somxy)/(psim*somx2-somx*somx);
a1=(psim*somxy-somx*somy)/(psim*somx2-somx*somx);
do i=1 to sim;
    esper(i,jj)=0;
    if payoff(i,jj)>0 then do;
        esper(i,jj)=a0+a1*price(i,jj);
        if payoff(i,jj)<esper(i,jj) then payoff(i,jj)=0;
        else
            do ik=jj+1 to est;
                payoff(i,ik)=0;
            end;
        end;
    end;
end;
end;
end;
resul=0;
do i=1 to sim;
    do j=1 to est;
        if payoff(i,j)>0 then resul=resul+ payoff(i,j)*exp(-r*j*dt);
    end;
end;
end;
put=resul/sim;

```

```

output;
run;
proc print data=nova;
var put;
run;

```

***LS-algoritmo = American put asiática***

```

data nova;
so1=1620; so2=1430; so3=1590; so4=2730;
exerc=1620;
rho12=0.9; rho13=0.95; rho14=0.5;
r=0,10; t=1; est=12; sim=10000;
dt=t/est; shro12=sqrt(1-rho12* rho12);
shro13=sqrt(1-rho13* rho13);
shro14=sqrt(1-rho14* rho14);
array sig1(12);
array sig2(12);
array sig3(12);
array sig4(12);
array cesta(10000, 12);
array price1(10000, 12);
array price2(10000, 12);
array price3(10000, 12);
array price4(10000, 12);
array payoff(10000, 12);
array deoff(10000, 12);
array esper(10000, 12);
array x(10000);
array y(10000);
sig1(1)= 0,0954; sig1(2)= 0,07313; sig1(3)= 0,11436; sig1(4)= 0,11548;
sig1(5)= 0,12037; sig1(6)= 0,11620; sig1(7)= 0,11544; sig1(8)= 0,11459;
sig1(9)= 0,11477; sig1(10)= 0,11031; sig1(11)= 0,11019; sig1(12)= 0,11048;
sig2(1)= 0,0603; sig2(2)= 0,07878; sig2(3)= 0,11598; sig2(4)= 0,11604;
sig2(5)= 0,11842; sig2(6)= 0,10790; sig2(7)= 0,11144; sig2(8)= 0,11665;
sig2(9)= 0,11615; sig2(10)= 0,11577; sig2(11)= 0,11656; sig2(12)= 0,11720;
sig3(1)= 0,06945; sig3(2)= 0,06005; sig3(3)= 0,07718; sig3(4)= 0,08016;
sig3(5)= 0,07750; sig3(6)= 0,07297; sig3(7)= 0,07167; sig3(8)= 0,07347;

```

```

sig3(9)= 0,07682; sig3(10)= 0,07196; sig3(11)= 0,07672; sig3(12)= 0,07407;
sig4(1)= 0,06784; sig4(2)= 0,06534; sig4(3)= 0,06993; sig4(4)= 0,07000;
sig4(5)= 0,05476; sig4(6)= 0,05505; sig4(7)= 0,04202; sig4(8)= 0,03993;
sig4(9)= 0,04316; sig4(10)= 0,04295; sig4(11)= 0,04213; sig4(12)= 0,04387;
  st1=so1; st2=so2; st3=so3; st4=so4;
  soma1=0; soma2=0; soma3=0; soma4=0;
  do j=1 to est;
    z1=rannor (-876); z2=rannor (-876); z3=rannor (-876); z4=rannor (-876);
    z12=rho12*z1+shro12*z2;
    z13=rho13*z1+shro13*z3;
    z14=rho14*z1+shro14*z4;
    st1=st1*exp(r-0.5*sig1(j)*sig1(j)*dt+ sig1(j)*sqrt(dt)*z1);
    st2=st2*exp(r-0.5*sig2(j)*sig2(j)*dt+ sig2(j)*sqrt(dt)*z12);
    st3=st3*exp(r-0.5*sig3(j)*sig3(j)*dt+ sig3(j)*sqrt(dt)*z13);
    st4=st4*exp(r-0.5*sig4(j)*sig4(j)*dt+ sig4(j)*sqrt(dt)*z14);
    soma1=soma1+st1;
    soma2=soma2+st2;
    soma3=soma3+st3;
    soma4=soma4+st4;
    price1(i,j)=soma1/j;
    price2(i,j)=soma2/j;
    price3(i,j)=soma3/j;
    price4(i,j)=soma4/j;
    cesta(i,j)=0.8890*price1(i,j)+0.0884* price2(i,j)+
                0.0120* price3(i,j)+0.0103* price4(i,j);
    payoff(i,j)=max(0, exer-cesta(i,j));
    if j>1 then deoff(i,j-1)=payoff(i,j)*exp(-r*dt);
  end;
end;
do jj=est-1 to 1 by -1;
  psim=0; somx=0; somy=0; somxy=0;somx2=0; somy2=0;
  do i=1 to sim;
    if payoff(i,jj)>0 then do;
      psim=psim+1;
      x(psim)=price(i,jj);
      y(psim)=deoff(i,jj);
      somx=somx+x(psim);
      somy=somy+y(psim);
    end;
  end;
end;

```

```

        somxy=somxy+x(psim)*y(psim);
        somx2=somx2+x(psim)*x(psim);
        somy2=somy2+y(psim)*y(psim);
    end;
end;
a0=(somy*somx2-somx*somxy)/(psim*somx2-somx*somx);
a1=(psim*somxy-somx*somy)/(psim*somx2-somx*somx);
do i=1 to sim;
    esper(i,jj)=0;
    if payoff(i,jj)>0 then do;
        esper(i,jj)=a0+a1*price(i,jj);
        if payoff(i,jj)<esper(i,jj) then payoff(i,jj)=0;
    else
        do ik=jj+1 to est;
            payoff(i,ik)=0;
        end;
    end;
end;
end;
end;
result=0;
do i=1 to sim;
    do j=1 to est;
        if payoff(i,j)>0 then result=result+ payoff(i,j)*exp(-r*j*dt);
    end;
end;
end;
put=result/sim;
output;
run;
proc print data=nova; var put; run;

```

## CONCLUSÃO

A agricultura brasileira, para os chamados produtos de exportações, tem expandido sua área plantada, cuja incorporação tecnológica tem permitido aumentar a produtividade por área e a produção física. A revolução ocorrida no campo possibilitou a inovação tecnológica, com os produtores adquirindo as mais modernas máquinas (tratores, colheitadeiras e equipamentos dotados de computadores de bordo, GPS e ar condicionado). Os insumos mais recentes têm sido aplicados com técnicas de ponta (plantio direto e agricultura de precisão). Tem ocorrido um esforço em agregar valor à produção primária, fazendo com que os grãos se transformem em óleo ou farelo, industrializando e distribuindo tais produtos. Mesmo com o pouco auxílio do governo, o produtor rural tem adotado práticas de competitividade visando superar os problemas defrontados com as exportações. O grande produtor tem contornado parte do custo-Brasil com relação à infra-estrutura, permitindo o escoamento de sua safra por via férrea, construída pelo setor privado ou por rodovias recuperados com seus próprios recursos. Todavia, o governo deve contribuir desonerando e simplificando a tributação e o financiamento ao *agribusiness*. Cuidados também devem ser dispensados com a formação de recursos humanos, profissionalizando seus colaboradores com o objetivo de melhorar seus serviços e reduzir custos, sem esquecer o adequado tratamento da questão ambiental. Não basta utilizar a melhor tecnologia se o produtor não sabe gerenciar. Uma eficiente gerência financeira é indispensável na tomada de crédito, compra de insumos, aquisição de equipamentos e venda da produção. Todas as fases relacionadas à produção exigem completos conhecimentos dos custos envolvidos, incluindo as questões relativas aos impostos. Os seguros dos equipamentos, principalmente o seguro agrícola relativo às possíveis perdas de safras, inclusive um seguro contra as possíveis variações dos preços agrícolas, devem ser bem equacionados pelo produtor. Neste sentido é importante que haja um esforço de coordenação conjunta entre o governo e o setor privado, envolvendo as cooperativas, as agro-empresas e a Bolsa de Mercadoria e Futuros — BM&F. Esta última tem um papel relevante na agricultura pois oferece contratos financeiros, mais especificamente os contratos futuros da classe de derivativos, que possibilitem fazer um seguro contra essas possíveis variações desfavoráveis



de preços dos produtos no mercado. Mais uma vez clama-se pela presença do Estado, com um fundo de estabilização para atenuar os riscos das corretoras e, com isso, reduzir os custos de corretagem. A presença do Estado, a exemplo do que ocorre nos países industrializados, certamente ampliará a participação dos produtores agrícolas nesse mercado de capitais, oferecendo uma dinâmica maior ao setor. Portanto, a BM&F deve divulgar a importância do serviço que pode prestar aos produtores, envolvendo as corretoras nesse processo. A idoneidade e a competência na prestação de serviços das corretoras no atendimento ao cliente são condições necessárias para o sucesso do processo. Quanto maior o envolvimento da BM&F com os produtores e as corretoras, maior o poder de persuasão sobre o governo, clamando por sua assistência e auxílio com o objetivo de tornar a agricultura mais competitiva e compatível com seu potencial.

Contudo, o presente trabalho teve um papel específico ao analisar um biocombustível específico. Este pode ser útil ao governo como referência na aquisição do biodiesel, hoje sob a responsabilidade da Petrobras, tendo a finalidade de auxiliar na determinação e possível estabilidade de um preço conveniente para o biodiesel. Atualmente, o preço proposto pelo governo se encontra em regime experimental e sofrerá reajuste futuramente como ocorrido com o Programa Nacional do Álcool — Proalcool. À medida que o governo tiver informações relevantes quanto aos custos industriais para a produção do biodiesel, poderá adquirir o produto no mercado por um preço mais competitivo, pois terá condições de estimar um preço mais “enxuto” para a cesta de insumos presentes na operação de fabricação do biocombustível.

Para atingir esse objetivo, lançam-se mãos das opções financeiras, analisando uma cesta composta com os preços das matérias-primas responsáveis pela produção de biodiesel. O trabalho apresentado procurou oferecer uma metodologia bastante prática para o operador de mercado avaliar o preço de uma opção americana sobre um produto base para a produção do biodiesel baseado no LS-algoritmo, cuja referência é o modelo de Black-Scholes. Porém, considerou-se as volatilidades como não-constantes para os óleos vegetais responsáveis para a produção do biodiesel. É importante considerar volatilidades não-constantes devido ao fato de alguns óleos apresentarem sensibilidades marcantes como ocorreu no caso do óleo de amendoim que teve volatilidades com trajetórias fortemente descendentes de janeiro de 2004, quando sua volatilidade era de 15%, para atingir 4% em dezembro de 2005. A soja teve

comportamento mais estável, praticamente variando entre 10 e 12%, embora ocorrendo um sensível pico em maio de 2005 e uma maior depressão em fevereiro de 2005.

Foi observado ainda que, devido ao maior preço do óleo de amendoim, se sua participação cresce na cesta de produtos para produzir o biodiesel, o preço da opção (seguro) também cresce, se acentuando à medida que o valor do exercício contratado se afasta do preço corrente da soja. Isto pode ser um ponto de reflexão para as autoridades governamentais que desejam beneficiar os pequenos produtores, que produzem óleo de mamona, no programa do biodiesel, já que o seguro ficaria bastante alto se comparado à soja ou a uma cesta composta prioritariamente com soja.

Outro aspecto importante, considerado nesse trabalho, foi observar a correlação entre os óleos vegetais. Alta correlação entre os preços significa possibilidade de complementar ou mesmo substituir um óleo por outro. Consequentemente, variações nas correlações dos insumos envolvidos ocasionam diferenças acentuadas nos valores das opções. Foi o que ocorreu quando considerou-se dois ativos com mesmo preço ( $S_1=S_2=100$ ) e volatilidades iguais (10%), para um *payoff* de  $\max(S_1-S_2-K, 0)$ , cujo preço de exercício  $K$  é 1. Para uma correlação alta, de 70%, o valor de compra ficava em torno de 2,6, passando para algo próximo de 4,5 caso a correlação fosse baixa, de 20%, ou seja, essa diferença praticamente dobra, mostrando a importância de considerar as correlações entre os preços. Aliás, correlação entre preços é uma questão bastante presente na agricultura. Evidentemente, essa diferença seria bem maior caso os preços dos dois ativos não fossem iguais, podendo atingir diferenças bastantes relevantes do valor da opção com baixa correlação comparativamente com uma de alta, como apresentado no trabalho.

Os resultados mostram a importância do mercado de futuros com o objetivo de assegurar receita e, até mesmo, viabilizar a sobrevivência da empresa. Mantida a estrutura atual de participação dos insumos na cesta para a produção de biodiesel, a venda dessa cesta por R\$ 1.620,00, a qual corresponde ao preço da tonelada do óleo de soja, teria um seguro de 0,023% do valor do exercício. Assim, se o governo subsidiar os custos relativos à corretagem e da BM&F, certamente o país terá uma agricultura mais competitiva no cenário internacional. Evidentemente, à medida que aumenta o preço de venda da cesta, o prêmio da opção (seguro) aumenta. Assim, se a cesta for negociada a R\$ 2.630,00 por tonelada, preço corrente do óleo de amendoim, seu prêmio salta para mais de R\$ 900,00. Isso mostra a dificuldade de pequenos

agricultores virem a participar do Programa Nacional do Biodiesel que cultivam produtos cujos óleos tem preços superiores ao da soja.

Quanto à metodologia, o LS-algoritmo para avaliar uma opção americana foi simplificado nesse trabalho, sendo considerado uma função do primeiro grau como base da regressão (lembrando que Longstaff e Schwartz utilizaram polinômios de Laguerre até terceira ordem) e 10 mil trajetórias na simulação. Provavelmente, um número menor de trajetórias fosse suficiente para orientar satisfatoriamente o operador de mercado em suas estratégias. Todavia, essa questão não foi aqui explorada. Afinal, o objetivo principal dessa obra foi apresentar uma metodologia bem flexível para permitir explorar situações bem complexas relativo à valoração de opções de cesta com a que caracteriza o caso do biodiesel. Para finalizar, na tabela 4 do capítulo 4 estão algumas poucas simulações de avaliação de opções de venda para as cestas de biodiesel. Alterando as participações dos óleos na cesta percebe-se que o valor da opção pode mudar sensivelmente de acordo com a estratégia escolhida. É o caso da opção da cesta com barreira de R\$ 1.620,00 por tonelada, cujo preço de exercício de venda é de R\$ 2.630,00, com prêmio de 310,00 (cenário 3). Este valor é bem inferior aos obtidos, nas mesmas situações, aos outros cenários, sinalizando para a importância de uma escolha adequada de “seguro” para as diversas situações. Há muito espaço a ser explorado, pois a opção escolhida depende da estratégia desejada, do perfil do produtor e da estrutura produtiva considerada para a cesta de biodiesel, ou seja, com ela é constituída em termos de participação dos óleos, correlações entre preços e volatilidades. Assim, desejando dar ênfase à agricultura familiar, para incluir o pequeno agricultor produzindo, por exemplo, óleo de mamona, no programa de biodiesel, o governo talvez possa adotar a opção *lookback*, quando a venda ocorre no pico dos preços da cesta. Nesse caso, é imperiosa a ajuda governamental, pois tal tipo de opção apresenta um valor bem elevado. Ainda, é importante haver subsídios governamentais para auxiliar todos os produtores indistintamente e, assim, amenizar os custos relativos à corretagem e da BM&F, para tornar a agricultura brasileira mais competitiva no cenário internacional.

## APÊNDICE A

### MODELO DE BLACK-SCHOLES

Opções sobre ações foram inicialmente negociados de forma institucionalizada em 1973. Desde então tem ocorrido um vertiginoso crescimento do mercado de opções com ações, câmbio, índices diversos e *commodities*. Fisher Black e Myron Scholes fizeram uma importante contribuição para se obter valores para as opções (*call* e *put*) dos tipos européias sobre ações. Nesse capítulo será analisado o modelo de Black-Scholes [1973].

Inicialmente será apresentado um pequeno lembrete dos principais conceitos do cálculo estocástico a serem abordados neste trabalho.

#### Rudimentos do Cálculo Estocástico

O ponto de partida na teoria da probabilidade é a apresentação da terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , conhecida como espaço de probabilidade, na qual:

$\Omega$  : conjunto de resultados de experimentos a qual é associada uma certa probabilidade;

$\mathcal{F}$ : sigma álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ ; isto é, conjunto de informações disponíveis até certa data;

$\mathbf{P}$ : medida de probabilidade, ou seja, uma aplicação que atribui graus de incerteza aos eventos.

O centro das atenções estará focado no chamado movimento Browniano ou processo de Wiener definido [ver Revuz e Yor, 1990 e Øksendal, 2000] a seguir.

Definição 1.1. Duas medidas  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são equivalentes se para dado evento  $A$  no espaço de probabilidades ocorrer:

$$\mathbf{P}(A) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}(A) > 0,$$

ou seja, se  $A$  é possível sob  $\mathbf{P}$  então é possível sob  $\mathbf{Q}$  e se  $A$  é impossível sob  $\mathbf{P}$  é também impossível sob  $\mathbf{Q}$  (e vice versa).

Só tem sentido definir as derivadas de Radon-Nikodym  $\frac{dQ}{dP}$  e  $\frac{dP}{dQ}$  se  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  forem equivalentes. Assim, dada as medidas  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  e um horizonte de tempo  $T$ , define-se a variável aleatória  $\frac{dQ}{dP}$  numa  $\mathbf{P}$ -trajetória possível, a qual assume valores reais positivos, por:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [X_T] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{dQ}{dP} X_T \right]$$

e

(A.1)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [X_t | \mathcal{F}_s] = \xi_s^{-1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\xi_t X_T | \mathcal{F}_s], \quad s \leq t \leq T,$$

com  $X_t$  sendo o *claim* no tempo  $t$  e lembrando que  $\xi_t$  é o processo  $\xi_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[ \frac{dQ}{dP} | \mathcal{F}_s \right]$ .

Definição 1.2. Um movimento Browniano, ou ainda, um processo de Wiener  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  é definido como um processo Gaussiano contínuo com incrementos independentes, tais que:

$$W(0) = 0 \quad a.s., \quad \mathbf{E}[W(t)] = 0, \quad var(W(t) - W(s)) = t - s$$

para todo  $0 \leq s \leq t$ . De acordo com essa definição  $W(t) - W(s)$  tem distribuição Gaussiana,  $N(0, t-s)$ , para todo  $0 \leq s \leq t$  e os incrementos  $W(t_2) - W(t_1)$  e  $W(t_4) - W(t_3)$  são independentes para todo  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ .

Como o movimento Browniano segue uma distribuição normal será útil identificar essa propriedade. Uma variável aleatória  $X$  segue uma distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$  sob a medida  $\mathbf{P}$  se e somente se

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\exp(\theta X)] = \exp(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2 \sigma^2), \quad \text{para todo } \theta \in \mathbf{R}. \quad (A.2)$$

Assim, a determinação de  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\exp(\theta X)]$  se resume em calcular  $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[ \frac{dQ}{dP} \exp(\theta W_T) \right]$ , ou seja,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\exp(\theta W_T)] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T + \theta W_T)]$$

$$= \exp(-1/2\gamma^2 T + 1/2(\theta - \gamma)^2 T) \quad (\text{A.3})$$

porque  $W_T$  é uma normal  $N(0, T)$  com respeito a  $\mathbf{P}$ . Simplificando a expressão acima fica:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\exp(\theta W_T)] = \exp(-\theta\gamma T + 1/2(\theta - \gamma)^2 T) \quad (\text{A.4})$$

a qual é a função geratriz de momento da normal  $N(-\gamma T, T)$ . Logo, a distribuição marginal de  $W_T$ , sob  $\mathbf{Q}$ , é também uma variável normal  $N(-\gamma T, T)$ .

Tomando  $t < T$ , a distribuição marginal de  $W_t$  sob  $\mathbf{Q}$  é um movimento Browniano, porém acrescido de uma constante *drift*  $-\gamma$ . Assim, o processo também terá uma distribuição marginal  $N(-\gamma t, t)$  no tempo  $T$ , porém a mudança de  $\mathbf{P}$  para  $\mathbf{Q}$  via  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp(-\gamma W_T - 1/2\gamma^2 T)$

estará sujeita ao *drift*  $-\gamma$ . Logo o processo  $W$  é um movimento Browniano com respeito a  $\mathbf{P}$  e um movimento Browniano com constante *drift*  $-\gamma$  sob  $\mathbf{Q}$ . Lembrando os dois resultados presentes em (A.1) de  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ , prova-se que  $\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$  é um movimento Browniano sob  $\mathbf{Q}$ .

Portanto, como  $\tilde{W}_t$  é uma normal  $N(0, t)$  sob  $\mathbf{Q}$ , pode-se expressar de forma equivalente,  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\exp(\theta \tilde{W}_t)] = \exp(1/2\theta^2 t)$ . Ainda mais, como  $\tilde{W}_{t+s} - \tilde{W}_t$  também é uma normal  $N(0, t)$  independente de  $\mathcal{F}_s$ , esta propriedade equivale a  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\exp(\theta(\tilde{W}_{t+s} - \tilde{W}_t)) | \mathcal{F}_s] = \exp(1/2\theta^2 t)$ .

A transformação de uma equação diferencial estocástica sob a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$  numa diferencial estocástica sob  $\mathbf{Q}$  é muito comum e pode ser feita com o auxílio do teorema de Girsanov. Especificamente, se  $W_t$  é um movimento  $\mathbf{P}$ -Browniano e  $\gamma_t$  é um

processo  $\mathcal{F}$ -mensurável, satisfazendo a condição  $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[ \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt\right) \right] < \infty$ , então existe uma

medida  $\mathbf{Q}$  tal que

(i)  $\mathbf{Q}$  é equivalente a  $\mathbf{P}$ ,

$$(ii) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt\right) \quad (\text{A.5})$$

$$(iii) \quad \tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds \quad \text{é um movimento } \mathbf{Q}\text{-Browniano.} \quad (A.6)$$

A recíproca é verdadeira. Logo, se  $W_t$  é um movimento  $\mathbf{P}$ -Browniano e  $\mathbf{Q}$  é uma medida equivalente a  $\mathbf{P}$ , então existe um processo  $\gamma_t$ , que é  $\mathcal{F}$ -mensurável, tal que

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

é um movimento  $\mathbf{Q}$ -Browniano. Ainda mais, a derivada de Radon-Nikodym de  $\mathbf{Q}$  com respeito a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$  (no tempo  $T$ ) é  $\exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$ .

Este teorema é um instrumento poderoso para controlar o *drift* de qualquer processo. Seja  $X$  um processo estocástico descrito por

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (A.7)$$

com  $W$  sendo um processo de Wiener sob a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ , muito comum na área financeira. Esse processo pode ser re-escrito como

$$dX_t = \sigma_t \left( dW_t + \left( \frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t} \right) dt \right) + v_t dt$$

sendo  $v_t dt$  o *drift* (que substituí  $\mu_t dt$ ) do processo  $X$  sob  $\mathbf{Q}$ . Colocando  $\gamma_t = \frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t}$  e supondo que  $\gamma$  satisfaz as condições do teorema de Girsanov então existe uma nova medida  $\mathbf{Q}$  tal que

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - v_s}{\sigma_s} ds \quad (A.8)$$

é um processo de Wiener. Portanto, isso significa que o processo  $X$  sob  $\mathbf{Q}$  toma a forma

$$dX_t = \sigma_t \tilde{W}_t + v_t dt$$

com  $\tilde{W}$  sendo um processo **Q**-Wiener.

Exemplo 1.1. Na equação diferencial estocástica

$$dX_t = (\mu dt + \sigma dW_t)$$

com  $W$  sendo um processo **Q**-Wiener, pode-se aplicar o teorema de Girsanov colocando

$\gamma_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$ . Logo existe uma medida **Q** sob a qual  $\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$  é um processo de

Wiener. Portanto  $X$  tem a representação

$$dX_t = (\sigma d\tilde{W}_t + r dt)$$

com  $\tilde{W}_t$  sendo um processo **Q**-Wiener.

Definição 1.3. Um processo estocástico  $\{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$  adaptado de variáveis aleatórias reais é um martingale com respeito a medida **P** se e somente se

$$\mathbf{E}_P[|M_t|] < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{e}$$

$$\mathbf{E}_P[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{para todo } 0 < s < t \leq T$$

Se  $\mathbf{E}_P[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$  trata-se de um supermartingale.

Assim, o processo  $S_t = c$  constante, para todo  $t$ , é um martingale com respeito a qualquer medida, pois  $\mathbf{E}_P[S_t | \mathcal{F}_s] = c$ . Note também que todo movimento **P**-Browniano é um **P**-martingale. De fato,

$$\mathbf{E}_P[W_t | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_P[W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbf{E}_P[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = W_s + 0$$

devido ao primeiro termo ser um martingale e, o segundo termo, ser um incremento  $W_t - W_s$  independente de  $\mathcal{F}_s$ .



Importante para a teoria financeira é o fato de que se o *claim*  $X$  depende apenas dos eventos ocorridos até o tempo  $T$ , então o processo  $N_t = \mathbf{E}_P[X | \mathcal{F}_t]$  é um **P**-martingale. Outra propriedade interessante é que um processo  $X_t$  sendo um **P**-martingale, então o teorema de representação de martingale permite escrever:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s dW_s$$

com  $\phi_t$  sendo um processo  $\mathcal{F}_t$ -mensurável adequado. Nestas condições,  $X$  é um martingale pois a forma integral do incremento  $dX_t = \phi_t dW_t$  não possui o termo *drift*. Logo uma forma de identificar se um processo estocástico  $X$ , com volatilidade  $\sigma_t$ , isto é,

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$$

satisfazendo a condição  $\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^T \sigma_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty$ , é um martingale, é verificar se o *drift*  $\mu_t$  é nulo. A

recíproca é verdadeira (ou seja, se o *drift* é nulo então se trata de um martingale).

## Introdução

As opções se classificam como opções de compra (*call option*) ou opções de venda (*put option*). Uma opção de compra é um instrumento financeiro que dá o direito ao proprietário de comprar um ativo, no futuro (tempo determinado), por um valor especificado a priori. Uma opção de venda, por sua vez, é um instrumento financeiro que dá o direito ao proprietário de vender um ativo, no futuro, por um valor especificado a priori.

Existem dois tipos de opções: a americana e a européia. A primeira permite que o proprietário do título exerça seu direito antes do final do contrato, enquanto a européia, exige que o detentor do título só exerça seu direito no final do contrato, ou seja, na sua expiração.

O modelo de Black-Scholes [1973] apresenta algumas simplificações. Assume-se que a distribuição dos retornos financeiros do ativo é log-normal, que a ação considerada não paga

dividendos, que a volatilidade do ativo permanece constante, assim como a taxa de juros em toda a vida do contrato. Os custos de transação não são considerados. Com essas hipóteses pode-se analisar a *call option* do tipo européia.

## Opção de Compra Européia

Nesse tópico é admitido um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  composto de um ativo livre de risco,  $B_t$ , e um ativo com risco,  $S_t$ , com o parâmetro  $t$  assumindo valores em  $[0, T]$ .

Supõe-se que as evoluções dos preços, do ativo livre de risco, é escrito pela seguinte equação diferencial

$$dB(t) = r \cdot B(t) dt, \quad B(0) = 1 \tag{A.9}$$

com  $r$  sendo uma constante não negativa, representando a taxa de juros instantânea do título, cuja solução de (A.1) é dado por

$$B(t) = e^{r \cdot t} \quad t \geq 0. \tag{A.10}$$

Agora, observa-se a evolução do processo de preços da ação  $S$ , a qual é descrita como uma equação diferencial linear estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{A.11}$$

com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$  sendo constantes e  $S_0 \in \mathbb{R}^+$  sendo o preço inicial da ação.

Finalmente,  $W_t$  é um movimento Browniano unidimensional definido em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Considere que (A.11) é meramente uma notação simplificada para a seguinte equação integral de Itô:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dW_u, \quad t \in [0, T]. \tag{A.12}$$

É elementar checar, usando a fórmula de Ito [Øksendal, 2000], que o processo  $S$ , o qual é igual a

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right] \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.13})$$

é a única solução de (A.3) iniciando em  $S_0$  quando  $t=0$ . De fato, sabe-se que

$\langle S, S \rangle_t = \int_0^t \sigma^2 S_u^2 du$ . Logo, assumindo  $S_t > 0$  e aplicando a fórmula de Itô com  $Y(t) = f(t, x) = \log x$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \log S_t &= \log S_0 + \int_0^t \frac{dS}{S_u} + \frac{1}{2} \int_0^t \left(-\frac{1}{S_u^2}\right) \sigma^2 S_u^2 du \\ &= \log S_0 + \int_0^t (\mu du + \sigma dW_u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 du \\ &= \log S_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) du + \int_0^t \sigma dW_u \\ &= \log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right]$$

e  $\log S_t$  se apresenta como um movimento Browniano com *drift*  $(\mu - 1/2 \sigma^2)$  e volatilidade  $\sigma$ .

O mercado de Black-Scholes consiste de dois ativos financeiros, cujos preços são variáveis aleatórias não negativas:  $S_t$  denotando o ativo de risco (uma ação) e  $B_t$  o ativo livre de risco (um título governamental), com  $B_0 = 1$ . Se os retornos do ativo livre de risco no período considerado são constantes e iguais a  $r$ , conforme (A.9), obtém-se  $B_t = (1+r)^t$ , ou operando continuamente,  $B_t = e^{rt}$ . O coeficiente  $\beta_t = 1/B_t$  é interpretado como o fator de desconto.

Uma estratégia de negócios é definido como um processo estocástico  $\phi = (\phi_t^B, \phi_t^S)$  em  $\mathbf{R}^2$ , com  $\phi_t^B$  e  $\phi_t^S$  denotando o número dos dois ativos na carteira de investimento, mantidos no tempo  $t$ . O valor do portfolio no tempo é dado por

$$V_t(\phi) = \phi_t^B B_t + \phi_t^S S_t$$

cujo valor descontado é

$$\tilde{V}_t(\phi) = \beta_t (\phi_t^B B_t + \phi_t^S S_t)$$

com  $\beta_t = 1/B_t$ .

Uma estratégia é auto-financiável, se a seguinte equação é satisfeita para todo  $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ :

$$\phi_t^B B_t + \phi_t^S S_t = \phi_{t+1}^B B_t + \phi_{t+1}^S S_t. \quad (\text{A.14})$$

A interpretação é a seguinte: no tempo  $t$ , uma vez que os novos preços estão cotados, o investidor reajusta o número de papéis de sua carteira, de  $\phi_t^B$  e  $\phi_t^S$  para  $\phi_{t+1}^B$  e  $\phi_{t+1}^S$ , respectivamente, sem acrescentar ou consumir qualquer riqueza. A equação (A.6) é equivalente a

$$V_{t+1}(\phi) - V_t(\phi) = \phi_{t+1}^B (B_{t+1} - B_t) + \phi_{t+1}^S (S_{t+1} - S_t)$$

Assim, os lucros ou perdas numa estratégia autofinanciável são devidos às variações dos preços. Ainda, a equação (A.14) é equivalente a

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t (\phi_j^B \Delta B_j - \phi_j^S \Delta S_j) \quad (\text{A.15})$$

para todo  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  e  $\Delta B_j = B_{j+1} - B_j$ ; idem para  $\Delta S_j$ .

Por sua vez tem-se a noção de arbitragem, que é entendido como a possibilidade de lucro livre de risco. É importante analisar a conexão entre martingale e arbitragem, num

espaço de probabilidades finito  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , equipado de um filtro  $\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Contudo, deve-se trabalhar com uma classe especial de processo estocástico, que são os processos adaptados. A idéia é que, num determinado instante  $t$ , uma variável aleatória  $X_t$  não contém informações sobre todas as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}$ , mas apenas sobre parte dela, ou seja, sobre certo subconjunto sub- $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_t$  de  $\mathcal{F}$ . Assim, uma seqüência  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$  de variáveis aleatórias é dita adaptado se para todo  $t$ ,  $X_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

Seja  $\mathbf{Q}$  uma medida de probabilidade na qual os preços descontados do ativo, por algum indexador, se constituem num martingale. Seja, ainda,  $h$  uma variável aleatória não negativa  $\mathcal{F}_T$  mensurável. Se  $\phi$  for uma estratégia tal que

$$V_T(\phi) = h \tag{A.16}$$

diz-se tratar de uma estratégia replicável (*replicating claim*).

A seqüência  $\{\tilde{V}_t\}_{0 \leq t \leq T}$  sendo um martingale com respeito a medida  $\mathbf{Q}$ , escreve-se

$$V_0(\phi) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\tilde{V}_T(\phi)]$$

isto é,  $V_0(\phi) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(B_T)^{-1}h]$ , ou de forma mais geral,

$$V_t(\phi) = B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(B_T)^{-1}h \mid \mathcal{F}_t], \quad t=0,1, \dots, T. \tag{A.17}$$

Nesse caso, a qualquer período, o valor de uma adequada estratégia replicável  $h$ , é completamente determinada por  $h$ . Parece bastante natural chamar  $V_t(\phi)$  o preço da opção, isto é, a riqueza necessária, no tempo  $t$ , para replicar  $h$  no tempo  $T$ , seguindo a estratégia  $\phi$ . Evidentemente, no tempo zero, um investidor vende a opção por  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(B_T)^{-1}h]$ .

Assim, o investidor pode seguir uma estratégia replicável  $\phi$  com o objetivo de obter uma quantidade financeira  $h$ , no tempo  $T$  [Musielá e Rutkowski, 1997]. Em outras palavras, o investidor realizou um *hedge* perfeito.

Assume-se, agora, que o mercado está especificado pelas seguintes equações do ativo livre de risco  $B_t$  e o ativo com risco  $S_t$ :

$$\begin{aligned}
dB(t) &= r \cdot B(t) dt, \\
dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^*
\end{aligned}
\tag{A.18}$$

com  $W^*$  sendo um processo de Wiener sob a medida  $\mathbf{P}$ . A segunda equação tem solução

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^*\right]$$

conforme (A.13). Porém, os preços descontados do ativo se escreveriam como  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
d\tilde{S}_t &= e^{-rt} dS_t - r e^{-rt} S_t dt \\
&= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} S_t (\mu dt + \sigma dW_t^*) \\
&= \tilde{S}_t ((\mu - r) dt + \sigma dW_t^*).
\end{aligned}
\tag{A.19}$$

#### Equação Diferencial de Black-Scholes.

Assume-se que o preço da opção,  $c_t$ , satisfaz a igualdade  $c_t = v(S_t, t)$  para alguma função  $v : \mathbf{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ . Assume-se, ainda, que a estratégia  $\phi$  tenha a seguinte forma:

$$\phi_t = (\phi_t^S, \phi_t^B) = (g(S_t, t), k(S_t, t)) \tag{A.20}$$

para  $t \in [0, T]$ , com  $g, k : \mathbf{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  sendo funções desconhecidas. O processo de riqueza  $V(\phi)$ , que se identifica como

$$V_t(\phi) = g(S_t, t) S_t + k(S_t, t) B_t = v(S_t, t), \tag{A.21}$$

cuja igualdade com  $v(S_t, t)$  ocorre devido a hipótese que a estratégia  $\phi$  é replicável. Por sua vez, para que  $\phi$  seja ser autofinanciável, precisa satisfazer a relação

$$dV_t(\phi) = g(S_t, t) dS_t + k(S_t, t) dB_t.$$

Sob as hipóteses apresentadas, isto é, usando as equações (A.18), esta última equação pode ser escrita como

$$dV_t(\phi) = (\mu - r)S_t g(S_t, t)dt + \sigma S_t g(S_t, t)dW_t + rv(S_t, t)dt \quad (\text{A.22})$$

já que, da segunda igualdade de (A.21) obtém-se

$$\phi_t^B = k(S_t, t) = (B_t)^{-1}(v(S_t, t) - g(S_t, t)S_t) \quad (\text{A.23})$$

Como  $v \in C^{2,1}$  no domínio *aberto*  $(0, \infty) \times (0, T)$ , então a função riqueza após o uso da fórmula de Itô fica

$$dv(S_t, t) = \left( \frac{\partial v}{\partial t}(S_t, t) + \mu S_t \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S_t, t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) dW_t.$$

A subtração entre  $v(S_t, t)$  e  $V_t(\phi)$  é nula e assim  $dv(S_t, t) - dV_t(\phi) = 0$  também, ou seja:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial v}{\partial t}(S_t, t) + \mu S_t \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S_t, t) \right) dt + \\ & + \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) dW_t + (r - \mu)S_t g(S_t, t)dt - \\ & - \sigma S_t g(S_t, t) dW_t - rv(S_t, t)dt = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se

$$g(S_t, t) = \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) = \phi_t^s, \quad (\text{A.24})$$

então elimina-se o componente estocástico da carteira e também a tendência do ativo,  $\mu$ , e tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S_t, t) + r S_t \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) - rv(S_t, t) = 0 \quad (\text{A.25})$$

o qual é conhecida como equação diferencial parcial de Black-Scholes.

Desde que  $C_T = v(S_T, T) = (S_T - K)^+$ , impõe-se também as condições terminais  $v(s, T) = (s - K)^+$  para  $s \in \mathbf{R}^+$ . Logo resta checar que a estratégia (*replicating strategy*)  $\phi$ , a qual é igual a

$$\phi_t^S = g(S_t, t) = \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S} \quad \text{e} \quad \phi_t^B = h(S_t, t) = B_t^{-1}(v(S_t, t) - g(S_t, t)S_t) \quad (\text{A.26})$$

(devido a (A.23) e (A.24)) é realmente auto-financiável. Assim, deve-se checar que

$$dV_t(\phi) = \phi_t^S dS_t + \phi_t^B dB_t.$$

Já que  $V_t(\phi) = \phi_t^S S_t + \phi_t^B B_t = v(S_t, t)$ , aplicando-se a fórmula de Itô obtém-se

$$dV_t(\phi) = \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S_t, t)dt + \frac{\partial v}{\partial t}(S_t, t)dt.$$

Em vista de (A.17), a última equação pode ser posta na seguinte forma:

$$dV_t(\phi) = \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t)dS_t + rv(S_t, t)dt - rS_t \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t)dt$$

e portanto

$$dV_t(\phi) = \phi_t^S dS_t + rB_t \frac{v(S_t, t) - S_t \phi_t^S}{B_t} dt = \phi_t^S dS_t + \phi_t^B dB_t.$$

Isso completa a verificação da propriedade de auto-financiável.

### Fórmula de Black-Scholes.

Agora, considera-se o caso do modelo de Black-Scholes

$$dB(t) = rB(t)dt$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t)$$



com  $r$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sendo constantes, exatamente como em (A.18). Lembre-se que  $r$  é a taxa de juros associada ao título de renda fixa,  $B$ , e  $\mu$  e  $\sigma$  são, respectivamente, a média dos rendimentos e volatilidade do título com risco e ainda  $W^*$  sendo um processo de Wiener sob a medida  $\mathbf{P}$ .

Lembrando a equação (A.19),  $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t^* + (\mu - r)\tilde{S}_t dt$ , após a aplicação do teorema de Girsanov (exemplo 1.1), garante-se que

$$W_t = W_t^* - \frac{r - \mu}{\sigma} t, \quad t \in [0, T],$$

é um martingale<sup>(\*)</sup>. Assim, com a nova medida  $\mathbf{Q}$  a equação (A.12) torna-se

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t \tag{A.27}$$

que é um martingale, e  $\mathbf{Q}$  é uma medida martingale para  $\tilde{S}_t$ . Logo  $\tilde{S}_t$  segue a equação diferencial

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t (r dt + \sigma dW_t)$$

conforme exemplo 1.1, cuja solução é:

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

com  $W_t$  sendo  $\mathbf{Q}$ -movimento browniano, de acordo com (A.13).

---

<sup>(\*)</sup> Note que o objetivo é obter um rendimento para o título com risco igual ao do título livre de risco, ou seja, que  $\mu=r$ .

Foi visto que os preços dos derivativos na data presente,  $t$ , cujo preço é  $s$ , é computado pelo valor esperado do final do pagamento  $\mathbf{E}_{t,s}^Q[\Phi(S(T))]$ , que pode ser descontado ao valor presente através de  $e^{-r(T-t)}$ . O ponto importante a notar é que não se utiliza a medida de probabilidade  $\mathbf{P}$ , e sim a medida  $\mathbf{Q}$ . Assim, está-se ajustando o processo para torná-lo um martingale, ou seja, sob a medida  $\mathbf{Q}$ , o processo descontado  $\frac{S(t)}{B(t)}$  é um martingale.

Sabe-se que o preço livre de arbitragem de um *simple claim*  $\Phi(S(T))$  é dado por

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{t,s}^Q[\Phi(S(T))] \quad (\text{A.28})$$

(conforme (A.17)), com  $\mathbf{E}_{t,s}^Q[\ ]$  indicando, como usualmente, que sob a expectativa  $\mathbf{Q}$ , e sob as condições iniciais  $S(t)$ , a  $\mathbf{Q}$ -dinâmica de  $S$  seja dada por

$$\begin{aligned} dS(u) &= rS(u)du + \sigma S(u)dW(u) \\ S(t) &= s \end{aligned}$$

Logo, a variável aleatória  $S_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável,  $W_T - W_t$  é independente de  $\mathcal{F}_t$  e portanto  $W_T - W_t$  é uma gaussiana de média zero e variância  $T-t$ . Assim, a expressão (A.19) correspondente à Feynman-Kac [Karatzas e Shreve, 1988], se torna:

$$F(t,s) = \mathbf{E}_{t,s}^Q[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (\text{A.29})$$

Pode-se, então, escrever  $S(t)$  explicitamente como

$$S(T) = s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right\} \quad (\text{A.30})$$

Assim, pode-se ainda escrever  $S(T) = s.e^Y$ , sendo que  $Y$  é uma variável estocástica com a distribuição

$$N\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right]$$

e obtém-se a seguinte fórmula de determinação de preços

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s.e^y) f(y) dy \quad (\text{A.31})$$

com  $f$  sendo a função densidade para a variável estocástica  $Y$  acima.

A equação (A.30) é uma fórmula integral, na qual para uma escolha genérica da função restrição  $\Phi$ , deve ser avaliada numericamente. Existem, entretanto, alguns poucos casos particulares que (A.30) podem ser avaliados “mais ou menos” analiticamente, e o mais conhecido deles é o da opção de compra europeia, que tem a forma  $\Phi(x) = \max[x-K, 0]$ .

A partir de agora, o foco recairá nas opções europeias, a qual será definida como uma variável aleatória  $h = \Phi(S_T) = (S_T - K)^+ := \max(S_T - K, 0)$  no caso de uma *call option* (opção de compra). Assim, o valor da opção  $c_t = V_t$ , no tempo  $t$ , é escrito como uma função de  $S_t$  e  $t$ . Conseqüentemente, a equação (A.29), devido (A.30), se escreve como:

$$F(t, s) = c_t = V_t = E_{t,s}^Q \left[ e^{-r(T-t)} \Phi \left( S_t e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (W_T - W_t)} \right) \mid \square_t \right] \quad (\text{A.32})$$

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left( s e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot z} \right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz .$$

Como  $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$ , a expressão acima se torna

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left( s e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot z} - K \right)^+ \varphi(z) dz$$

com  $\varphi$  sendo a função densidade da distribuição normal padronizada  $N(0,1)$ , i.e.,  $\varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Conseqüentemente, o integrando na integral acima se anula quando

$$s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot z\right\} < K,$$

ou seja quando

$$z < \frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Portanto,  $F(t,s)$  é escrito como

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} se^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot z} \varphi(z) dz - e^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} K \varphi(z) dz. \quad (\text{A.33})$$

A segunda integral acima é

$$e^{-r(T-t)} \text{Prob}(S_T \geq K) = e^{-r(T-t)} K \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \varphi(z) dz$$

a qual por simetria fica

$$e^{-r(T-t)} \text{Prob}(S_T \geq K) = e^{-r(T-t)} K \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz = e^{-r(T-t)} KN(d_2)$$

com  $d_2 = d_2(t, s) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ . Em outras palavras, o valor de  $N(d_2)$  é a probabilidade do preço do ativo exceder o preço de exercício no momento de expiração da opção.

A avaliação da primeira integral em (A.33) é ligeiramente mais trabalhosa.

$$\begin{aligned}
 e^{-r(T-t)} \mathbf{E}[\tilde{S}_T \mid S_T \geq K] &= \frac{\int_{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} s e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot z} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz}{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \\
 &= \frac{\int_{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} s e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot z - \frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz}{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \\
 &= s \frac{\int_{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T-t} - z)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz}{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}
 \end{aligned}$$

Agora é conveniente tornar a distribuição normal  $N(\sigma\sqrt{T-t}, 1)$  na distribuição normal padronizada  $N(0, 1)$ , isto é,  $y = z - \sigma\sqrt{T-t}$ . Assim,

$$e^{-r(T-t)} \mathbf{E}[\tilde{S}_T \mid S_T \geq K] = s \frac{\int_{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy}{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$$

e, por simetria vem:

$$e^{-r(T-t)} \mathbf{E}[\tilde{S}_T \mid S_T \geq K] = s \frac{\frac{\ln(S/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \sigma\sqrt{T-t}}{\frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Logo,

$$e^{-r(T-t)} \mathbf{E}[\tilde{S}_T \mid S_T \geq K] = S \mathbf{N}(d_1)$$

$$\text{com } d_1 = d_1(t, s) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} - \sigma \sqrt{T-t} = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

Portanto, a expressão (A.19) fica:

$$F(t, s) = V(C) = S \mathbf{N}(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2) \quad (\text{A.34})$$

com

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (\text{A.34a})$$

e

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t} \cdot \quad (\text{A.34b})$$

que é a equação do modelo de Black-Scholes.

## Avaliação da Opção de Venda Tipo Européia

Na ausência de oportunidade de arbitragem, Klemkosky e Resnick [1979] analisaram a chamada relação de paridade (*put-call parity*) de uma opção de venda européia. Observando que os *payoffs* das opções de compra e venda, na expressão do contrato satisfazem a igualdade

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$$

basta aplicar a fórmula de avaliação de risco neutro para obter a seguinte expressão:

$$c(S, t; K) - p(S, t; K) = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (\text{A.35})$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

Assim, essa expressão de paridade pode ser usada para se obter uma fórmula fechada para a opção de venda (*put*) europeia. Seja  $p : \mathbf{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ , a função

$$p(s, t) = Ke^{-rt} N(-d_2) - s N(-d_1), \quad (\text{A.36})$$

com

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (\text{A.36a})$$

e

$$d_2 = \frac{\ln \frac{s}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}. \quad (\text{A.36b})$$

Logo, a avaliação da opção de venda (*put*) europeia segue diretamente da relação de paridade *put-call* europeia e da avaliação da opção de compra (*call*) europeia.

## Derivativos no Mercado de Câmbio

Um modelo livre de arbitragem para um mercado de títulos domésticos é assumido na negociação com ativos estrangeiros, tais como bônus estrangeiro livre de risco e ações estrangeiras (e seus derivativos). O trabalho se processará dentro do clássico modelo de Black-Scholes. Mais especificamente, ambas as taxas de juros livre de risco, doméstica e estrangeira, são assumidas como sendo constantes, enquanto a ação estrangeira e a taxa de câmbio são modeladas por meio de um movimento geométrico Browniano. Isso implica que o preço da

ação estrangeira, bem como o preço doméstico corrente de uma unidade da moeda estrangeira (*i.e.*, a taxa de câmbio) terá distribuição de probabilidade lognormal em tempos futuros.

Todos os processos considerados estão no espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  junto com uma específica filtração. Esse modelo é baseado num movimento Browniano com  $B_t^d$  sendo o título doméstico e  $B_t^f$  sua contrapartida em moeda estrangeira, ambos livre de risco. Considera-se ainda,  $X_t$  o valor, em moeda doméstica, de uma unidade da moeda estrangeira. Logo, as dinâmicas desses processos se escrevem como:

$$\text{Título doméstico: } dB_t^d = r_d B_t^d dt \quad (\text{A.37})$$

$$\text{Título estrangeiro: } dB_t^f = r_f B_t^f dt \quad (\text{A.38})$$

$$\text{Taxa cambial: } dX_t = X_t(\mu_X dt + \sigma_X dW_t^*) \quad (\text{A.39})$$

com  $W_t^*$  sendo um movimento  $\mathbf{P}$ -Browniano,  $r_d$  e  $r_f$ , sendo as taxas de juros doméstica e estrangeira, respectivamente. Ainda, o processo taxa de câmbio  $X$ , a qual é usada para converter *payoffs* estrangeiros em moeda doméstica, apresenta  $\mu_X \in \mathbf{R}$  como sendo a constante *drift* e  $\sigma_X \in \mathbf{R}$  denotando o vetor constante volatilidade. Observe que  $X_t$  representa o preço doméstico, no tempo  $t$ , de uma unidade de moeda estrangeira.

Consequentemente, as poupanças, doméstica e estrangeira, satisfazem

$$B_t^d = \exp(r_d t), \quad B_t^f = \exp(r_f t), \quad \text{para } t \in [0, T],$$

e em vista de (A.13), a taxa de câmbio no tempo  $t$  é

$$X_t = X_0 \exp\left(\sigma_X W_t^* + \left(\mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t\right). \quad (\text{A.40})$$

Convém alertar que é tentador utilizar o modelo de Black-Scholes diretamente do processo  $X_t$ , a taxa de câmbio, como se tratasse de uma ação,  $S_t$ . Bastaria trocar  $S_t$  por  $X_t$ . Contudo esse procedimento é incorreto. Quando se adquire uma ação, cada unidade é negociada no final de certo tempo. Porém, isso não ocorre com uma moeda, a menos que o seu



proprietário deseje entesourá-la. Racionalmente, essa moeda será empregada no mercado financeiro, na compra de um título que renderá juros. Assim, a moeda se só se assemelha a uma ação se esta pagar dividendo.

Consequentemente,  $B_t^f$  unidades de moeda estrangeira valem  $\bar{B}_t^f = B_t^f \cdot X_t$  em unidades domésticas. Assim, a possibilidade de comprar moeda estrangeira e investi-la na taxa de juros estrangeira, é equivalente a investir, num certo período, num ativo doméstico cujo preço é:

$$\bar{B}_t^f = B_t^f \cdot X_t = \exp(r_f t) X_t, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.41})$$

Essa expressão, usando (a), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{B}_t^f &= \exp(r_f t) X_0 \exp\left(\sigma_X W_t^* + \left(\mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t\right) \\ &= X_0 \exp\left(\sigma_X W_t^* + \left(\mu_X + r_f - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t\right). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Consequentemente, tem-se dois títulos nesse mercado,  $B_t^d$  e  $\bar{B}_t^f$ , ambos expressos em moeda nacional.

Examina-se, a seguir, uma estratégia de negócio  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ , a qual trata-se de um processo estocástico adaptado. Seja  $\varphi^1 \bar{B}_t^f$  o investimento feito no título estrangeiro (e convertido na taxa cambial) enquanto  $\varphi^2 B_t^d$  é a parte relativa ao título doméstico, ambos tomados no tempo  $t$ . O valor dessa carteira é:

$$V_t(\varphi) = \varphi^1 \bar{B}_t^f + \varphi^2 B_t^d, \quad t \in [0, T] \quad (\text{A.43})$$

com  $\bar{B}_t^f = B_t^f \cdot X_t$  e  $B_t^d = e^{r_d t}$ , conforme (A.37). Para que (A.43) seja auto-financiável, deve-se impor

$$dV_t(\varphi) = \varphi^1 d\bar{B}_t^f + \varphi^2 dB_t^d. \quad (\text{A.44})$$

Assim, o processo riqueza descontado (pelo título doméstico) ficaria:

$$d\tilde{V}_t(\varphi) = \varphi^1 d(e^{-r_d t} \bar{B}_t^f) = \varphi^1 \bar{B}_t^f. \quad (\text{A.45})$$

De fato [Elliott e Kopp, pág 153],

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\varphi) &= d(e^{-r_d t} V(\varphi)) \\ &= -r_d \tilde{V}_t(\varphi) dt + e^{-r_d t} dV(\varphi) \\ &= -r_d e^{-r_d t} (\varphi_t^2 e^{r_d t} + \varphi_t^1 \bar{B}_t^f) dt + e^{-r_d t} \varphi_t^2 d(e^{r_d t}) + e^{-r_d t} \varphi_t^1 \bar{B}_t^f \\ &= \varphi_t^1 (-r_d e^{-r_d t} dt + e^{-r_d t} d\bar{B}_t^f) \\ &= \varphi_t^1 \bar{B}_t^f. \end{aligned}$$

Por outro lado, em virtude de (A.42),

$$d\bar{B}_t^f = \bar{B}_t^f [\sigma_X dW_t^* + (\mu_X - r_d) dt]$$

Aplicando o teorema de Girsanov com

$$\gamma_t = \frac{\mu_X + r_f - r_d}{\sigma_X} \quad (\text{A.46})$$

pode-se garantir a existência de uma medida  $\mathbf{Q}$  sob a qual

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu_X + r_f - r_d}{\sigma_X} t \quad (\text{A.47})$$

é um processo de Wiener. Portanto,  $\bar{B}^f$  segue a equação estocástica

$$d\bar{B}_t^f = \bar{B}_t^f [\sigma_X dW_t + (r_f - r_d) dt] \quad (\text{A.48})$$

com  $W_t$  sendo um processo  $\mathbf{Q}$ -Wiener. Nessa dinâmica, o valor da carteira descontada  $\tilde{V}_t(\varphi)$ , de qualquer estratégia de negócio  $\varphi$ , é autofinanciável e segue um martingale sob a medida  $\mathbf{Q}$ .

Logo, isso justifica a fórmula de avaliação de risco neutro, (A.17) correspondente à Feynman-Kac [Karatzas e Shreve, 1988], que é:

$$V_t = B_t \mathbf{E}_Q [ B_T^{-1} (X_T - K)^+ | \mathcal{F}_t ]$$

já que  $d\bar{B}_T^f = e^{r_f T} X_T$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} C_t^X &= V_t = B_t \mathbf{E}_Q [ B_T^{-1} (X_T - K)^+ | \mathcal{F}_t ] \\ &= e^{r_d t} \mathbf{E}_Q [ e^{-r_d T} (X_T - K)^+ | \mathcal{F}_t ] \\ &= e^{-r_d (T-t)} \mathbf{E}_Q [ (X_T - K)^+ | \mathcal{F}_t ] \\ &= e^{-r_d (T-t)} \mathbf{E}_Q [ (e^{-r_f T} \bar{B}_T^f - K)^+ | \mathcal{F}_t ] \\ &= e^{-r_f T} \{ e^{-r_d (T-t)} \mathbf{E}_Q [ (\bar{B}_T^f - K e^{r_f T})^+ | \mathcal{F}_t ] \} \end{aligned}$$

Observe que, entre as chaves, se encontra a fórmula padrão de Black-Scholes (conforme (A.29) e com a opção sendo européia), e assim, o preço de arbitragem, em unidades de moeda doméstica, de uma opção de compra européia de uma moeda, é dado pela expressão

$$\begin{aligned} C_t^X &= e^{-r_f T} \left[ \bar{B}_t^f N(d_1) - K e^{r_f T} e^{-r_d (T-t)} N(d_2) \right] \\ &= X_t e^{-r_f (T-t)} N(d_1) - K e^{-r_d (T-t)} N(d_2) \end{aligned} \tag{A.49}$$

com N sendo a função distribuição padrão cumulativa Gaussiana, e  $d_1$ ,  $d_2$  são dados por

$$d_{1,2}(X_t, t) = \frac{\ln \left( \frac{X_t e^{-r_f (T-t)}}{K} \right) + \left( r_d - r_f \pm \frac{\sigma_X^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma_X \sqrt{T-t}}$$

ou, se preferir,

$$d_{1,2}(X_t, t) = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r_d - r_f \pm \frac{\sigma_X^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_X \sqrt{T-t}}. \quad (\text{A.49a})$$

Ainda, o *hedge* associado a essa estratégia é

$$\varphi_t^1 = e^{r_d T} N(d_1) \quad (\text{A.50a})$$

$$\varphi_t^2 = -Ke^{r_d T} N(d_2) \quad (\text{A.50b})$$

[Baxter e Rennie, 1996, p.104].

Nota. Alternativamente, para se obter a fórmula de avaliação para uma opção de compra sobre uma ação que paga dividendos,  $v(S_t, t)$ , ou sobre um contrato cambial, ou ainda para qualquer *claim* européia da forma  $X=g(X_t)$ , basta solucionar a equação diferencial:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S_t, t) + rS_t(r - \delta) \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t) - rv(S_t, t) = 0$$

com  $\delta$  sendo o valor do dividendo que a ação paga durante a vigência do contrato da opção. Em se tratando de opção cambial,  $\delta=r_f$ , isto é, a taxa de juros estrangeira considerada, ou seja, a expressão entre parênteses acima se escreve como a diferença entre a taxa doméstica de juros e a estrangeira.

## APÊNDICE B

### ANALOGIA COM A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

A equação diferencial de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (\text{B.1})$$

com a condição de contorno:

$$C(S, T) = (S - K)^+, \quad (\text{B.2})$$

pode ser simplificada com as seguintes mudanças de variáveis:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad C(S, t) = Kv(x, t). \quad (\text{B.3})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial C}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = K \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} = \frac{K}{S} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{K}{S} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{S}$$

e logo,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

que, por sua vez,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = K \frac{\partial v}{\partial \tau} \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2} K \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

Substituindo na equação original fica:

$$-\frac{\sigma^2}{2} K \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{K}{S^2} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + rS \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0$$

e simplificando vem:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{\sigma^2} r v$$

ou

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 r v$$

com  $k_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$ . De  $t = T - \frac{2}{\sigma^2} \tau$  vem que se  $t=T$  implica em  $\tau=0$ . Logo, de  $C(S, t) = Kv(x, t)$

fica que  $C(S, T) = Kv(x, 0)$ , e portanto,

$$v(x, 0) = \frac{1}{K} C(S, t) = \frac{1}{K} (S - K)^+ = \left( \frac{S}{K} - 1 \right)^+ = (e^x - 1)^+$$

pois,  $S = Ke^x \Rightarrow \frac{S}{K} = e^x$ .

Agora, seja

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau).$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \beta u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Substituindo em

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 v$$

que após dividir por  $e^{\alpha x + \beta \tau}$  fica:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\alpha u + (k_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 u$$

Para eliminar o termo em  $u$  deve-se ter:

$$\beta = \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1$$

e para eliminar o termo em  $\frac{\partial u}{\partial x}$  deve-se ter:

$$0 = 2\alpha + (k_1 - 1)$$

Portanto,  $\alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1)$  e  $\beta = -\frac{1}{4}(k_1 - 1)^2$ . Logo,

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1 - 1)x - \frac{1}{4}(k_1 - 1)^2 \tau} u(x, \tau)$$

E, por último, pode-se escrever

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0$$

A condição de contorno ficaria um pouco modificada, como se segue. De  $t = T - \frac{2}{\sigma^2} \tau$  vem que se  $t=T$  implica em  $\tau=0$ . Logo,

$$C(S, T) = K v(x, 0) = K e^{\alpha x + \beta \cdot 0} u(x, 0)$$

Assim,

$$(S - K)^+ = K e^{\alpha x} u(x, 0) \Rightarrow \left( \frac{S}{K} - 1 \right)^+ = e^{\alpha x} u(x, 0)$$

e, com  $S = K e^x$  tem-se

$$u(x, 0) = e^{-\alpha x} (e^x - 1)^+ = (e^{-\alpha x + x} - e^{-\alpha x})^+ = (e^{(1-\alpha)x} - e^{-\alpha x})^+$$

Porém,  $1 - \alpha = \frac{1}{2}(k_1 + 1)$  e portanto,

$$u(x, 0) = \left( e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} \right)^+$$

Portanto, a função *payoff* para a opção européia determina a condição inicial para  $u(x, \tau)$ , enquanto as condições de contorno determinam o comportamento de  $u(x, \tau)$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Assim, para uma opção de venda (*put*), a condição  $(K-S)^+$ , com as novas variáveis, fica

$$u(x, 0) = \max \left( e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x}, 0 \right)$$

e as condições de contorno satisfazem a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) \sim e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x + \frac{1}{4}(k_2-1)^2 \tau}$$

No caso de uma opção de compra (*call*), as condições iniciais e de contornos ficariam:



$$u(x,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x}, 0\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) \sim e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x + \frac{1}{4}(k_2+1)^2 \tau} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0$$

Os valores da opção  $V(S, t)$ , nas variáveis financeiras, devem ser recuperadas da variável adimensional  $u(x, \tau)$  [Willmot, Dewynne e Howison, 1993, p.267-268]:

$$V = K \cdot e^{-0,5 \cdot (k_1-1) \ln\left(\frac{S}{K}\right) - (0,25 \cdot (k_2-1) + k_1) \frac{T-t}{2} \sigma^2} u\left(\ln \frac{S}{K}, \frac{\sigma^2}{2} (T-t)\right).$$

## APÊNDICE C

# MODELOS DE OPÇÕES COM VOLATILIDADES NÃO-CONSTANTES E “*PAST DEPENDENT*” E MODELOS COM CORRELAÇÃO ENTRE ATIVOS

### Introdução

O modelo original de Black-Scholes [1973] impõe condições bastante restritivas em seus parâmetros e, assim, estando sujeito a diversas críticas. Destaca-se o fato da volatilidade do ativo ser considerada constante durante toda a vida útil do contrato. Esta condição deve ser revista para se ter um modelo mais realista e, portanto, mais eficiente. Ainda, para determinar o preço de uma opção com *payoff* (valor de liquidação no vencimento) dependendo de um ou mais ativos, ou seja, havendo correlação entre os ativos considerados, deve-se modelar todos esses ativos conjuntamente. Esta situação é muito comum quando se procura estimar o preço da opção definida sobre uma cesta de índices composta por um conjunto de ativos.

O método binomial tem estrutura relativamente simples para abordar esse tipo de problema envolvendo ativos correlacionados, porém, a complexidade aumenta consideravelmente com o número de ativos envolvidos. Quanto ao método das diferenças finitas, em geral, estes podem ser estendidos para trabalhar com múltiplas variáveis de estado. Neste caso, os métodos implícitos são escolhidos pela sua eficiência, contudo, sua implantação se torna bem complexa.

Em se tratando do envolvimento de volatilidade, de acordo com diversos autores, a classe de modelos que melhor se ajusta aos dados empíricos são os modelos de volatilidade estocástica. Kloeden, Platen e Schurz [1994, p.264-269] apresentam uma maneira eficiente de abordar o problema da volatilidade estocástica pelo método de diferença finita, sendo o Método de Euler recomendável pela sua simplicidade, compreensão e facilidade de implantação computacional.

Por sua vez, Hull e White [1988] avaliaram os preços de opções de ações assumindo que ambos, retornos dos preços e a volatilidade da ação seguissem movimentos brownianos

independentes (não há correlação entre os processos de Wiener). Esses autores consideram um processo satisfazendo o seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas:

$$dB_t = r(t, X_t)B_t dt \quad (C.1)$$

$$dS_t = r(t, X_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1 \quad (C.2)$$

$$d\sigma_t = -q(\sigma_t - \xi_t)dt + p\sigma_t dW_t^2 \quad (C.3)$$

$$d\xi_t = \frac{1}{\alpha}(\sigma_t - \xi_t)dt \quad (C.4)$$

com  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $W^1$ ,  $W^2$  sendo processos de Wiener independentes sob certa medida  $\mathbf{P}$ .

O preço do ativo livre de risco  $B$  tem estrutura usual com uma taxa de juros instantânea  $r$  e o preço do ativo com risco  $S$  segue um movimento geométrico browniano já que tanto o *drift* quanto a volatilidade não são constantes. O *drift*  $r(t, X_t)$  significa que o processo preço descontado do ativo,  $S/B$ , é um martingale sob a medida  $\mathbf{P}$  usada na previsão de preços. Os processos  $\sigma$  e  $\xi$  são interpretados como a volatilidade instantânea e a volatilidade média ponderada do ativo respectivamente. A equação (C.3) para  $\sigma$  mostra que a volatilidade instantânea  $\sigma_t$  é perturbada por um “ruído” externo com parâmetro de intensidade  $p$  e, ao mesmo tempo, é puxado de volta continuamente para a volatilidade média  $\xi_t$ , a qual é conhecido como “*mean reversion*”. O parâmetro  $q$  mede a intensidade da força restauradora ou do ajustamento da velocidade.

A equação (C.4) para a volatilidade média  $\xi$  pode ser resolvida explicitamente por:

$$\xi_t = \xi_0 \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\alpha}\right) \sigma_s ds \quad 0 \leq t \leq T, \quad (C.5)$$

mostrando que  $\xi_t$  é uma média dos valores  $\sigma_s$  ( $0 \leq s \leq T$ ) ponderados com um fator exponencial. Para grandes valores de  $\alpha$  obtém-se  $\xi_t \approx \xi_0$ , enquanto um pequeno valor de  $\alpha$  conduz a  $\xi_t \approx \sigma_t$ . Logo, o parâmetro  $\alpha$  mede o comprimento da “*past-dependence*” da volatilidade média.

A volatilidade estocástica no modelo proposto conduz a um risco implícito a qual não permite replicagem geral do *payoff* sem custo adicional. O preço de uma opção do tipo européia é obtido de:

$$V_t = v(t, X_t) = \mathbf{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^t r(s, X_s) ds \right\} f(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{C.6})$$

com  $f(S)$  sendo o *payoff* e  $\mathcal{F}_t$  sendo a sigma álgebra gerada por  $X$  até o tempo  $t$ . Novamente, aqui a estratégia de *hedging* é similar ao modelo original de Black-Scholes:

$$\zeta_t = \frac{\partial}{\partial S} v(t, X_t) \quad \text{e} \quad \eta_t = \frac{V_t - \zeta_t S_t}{B_t}. \quad (\text{C.7})$$

Entretanto, exceto em casos especiais, a estratégia acima  $\phi = (\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$  não será auto-financiável, porém é ainda auto-financiável na média. Em geral, não existe solução explícita para o preço da opção ou para a estratégia de *hedging* para esse modelo proposto, exigindo também a utilização de métodos numéricos para sua determinação [Kloeden, Platen e Schurz, 1994, p.264-269]. Esses autores utilizaram o modelo citado (equações C.1 a C.4) considerando os parâmetros  $p=0,3$  e  $q=1,0$ , com tempo de expiração  $T=1$  ano. Ainda, consideravam os valores iniciais  $K=S_0 =1,0$ ,  $\sigma_0 =0,1$  e  $\xi_0 =0,1$ , para a opção de compra (*call*) européia. Finalmente, simularam as trajetórias da última equação com  $\alpha=0,1$ , aplicando o método denominado de esquema forte com passos  $\delta = \Delta_n = 2^{-9}$  e as integrais de Wiener aproximadas com  $p=10$ .

Um problema apresentado nos modelos acima, embora bastantes elegantes do ponto de vista teórico, é que alguns parâmetros devem ser estimados para a avaliação do derivativo. E isto é feito de forma um tanto intuitivo devido a confecção do modelo. Outro agravante com relação aos modelos que consideram volatilidades seguindo trajetórias estocásticas é que deixam de ser processos markovianos. Assim, nesse trabalho, evita-se considerar o modelo com volatilidade estocástica, porém supõe-se que a volatilidade siga uma trajetória predeterminada, ou seja, uma função conhecida que deve refletir expectativas futuras. Estas expectativas consideram a política econômica do país, perspectivas quanto às disponibilidades de produtos essenciais no mercado internacional, de condições meteorológicas, dentre outras variáveis. Contudo essa função pode ser bem simples. Assim, se existe uma sensibilidade com relação as possíveis instabilidades nos preços futuros dos ativos considerados, suas volatilidades têm representações que refletem o comportamento previsto, ou seja, as funções

das volatilidades serão crescentes. Se as expectativas são de uma ambiente bem ameno para o futuro, os preços dos ativos apresentam volatilidades cujas funções têm representações decrescentes. Com essa estratégia permite considerar o modelo como sendo markoviano e, também, evita-se a necessidade de estimar alguns parâmetros, pois estes serão supridos por funções representativas das volatilidades dos preços dos ativos.

Em se tratando de apenas dois ativos correlacionados o método binomial é extremamente interessante. Contudo, os métodos das diferenças finitas se apresentam com muita eficiência, que não deve ser desprezado. Assim, apresentam-se estes dois métodos a seguir.

## Método Binomial

Os métodos tipo lattice para avaliação de preços de opções com duas variáveis de estados foram introduzidos por Boyle [1988] e Boyle, Evnine e Gibbs [1989]. Em seguida, Hull e White [1990, p.87-100] apresentaram um método numérico para analisar o problema envolvendo opções sobre dois ativos. Num ambiente de risco-neutro consideram-se dois ativos seguindo os seguintes processos:

$$dS_1 = rS_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1 \quad (C.8)$$

$$dS_2 = rS_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2 \quad (C.9)$$

cujos processos de Wiener,  $dz_1$  e  $dz_2$ , têm correlação instantânea  $\rho$ . Isso significa que

$$d \log S_1 = \left( r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 dz_1 \quad (C.10)$$

$$d \log S_2 = \left( r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \sigma_2 dz_2. \quad (C.11)$$

A seguir, definem-se duas novas variáveis não correlacionadas:

$$x_1 = \sigma_2 \log S_1 + \sigma_1 \ln S_1 \quad (C.12)$$

$$x_2 = \sigma_2 \log S_1 - \sigma_1 \ln S_1. \quad (C.13)$$

Essas novas variáveis seguem os processos

$$dx_1 = \left[ \sigma_2 \left( r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) + \sigma_1 \left( r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \right] dt + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(1+\rho)} \cdot dz_A \quad (\text{C.14})$$

$$dx_2 = \left[ \sigma_2 \left( r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) - \sigma_1 \left( r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \right] dt + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(1-\rho)} \cdot dz_B \quad (\text{C.15})$$

com  $dz_A$  e  $dz_B$  sendo processos de Wiener não correlacionados.

As variáveis podem ser modeladas usando duas árvores binomiais separadas que, no tempo  $\Delta t$ , tem uma probabilidade  $p_i$  de crescer de  $h_i$  e uma probabilidade  $1-p_i$  de decrescer de  $h_i$ . As variáveis  $h_i$  e  $p_i$  são escolhidas de forma que a árvore apresente valores corretos para os dois primeiros momentos da distribuição de  $x_1$  e  $x_2$ . Como as variáveis não estão correlacionadas, as duas árvores binomiais podem ser combinadas conjuntamente para fornecer uma árvore tridimensional, cujas probabilidades dos movimentos em de  $x_1$  e  $x_2$ , no tempo  $\Delta t$ , são os seguintes:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 : & \quad x_1 \text{ cresce de } h_1 \text{ e } x_2, \text{ cresce de } h_2 \\ p_1 (1-p_2) : & \quad x_1 \text{ cresce de } h_1 \text{ e } x_2, \text{ decresce de } h_2 \\ (1-p_1) p_2 : & \quad x_1 \text{ decresce de } h_1 \text{ e } x_2, \text{ cresce de } h_2 \\ (1-p_1)(1-p_2) : & \quad x_1 \text{ decresce de } h_1 \text{ e } x_2, \text{ decresce de } h_2. \end{aligned}$$

Em cada nó da árvore,  $S_1$  e  $S_2$  podem ser calculados a partir de  $x_1$  e  $x_2$  usando a relação inversa:

$$S_1 = \exp\left(\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}\right) \quad (\text{C.16})$$

$$S_2 = \exp\left(\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_1}\right). \quad (\text{C.17})$$

Para avaliar o derivativo, volta-se na árvore tridimensional.

Clelland e Strickland [2002, p.44-51], seguindo os passos do trabalho de Hull e White [1990] modelam o processo da árvore binomial. Consideram o caso da opção cujo *payoff* (valor de liquidação no vencimento) se baseia nos valores de dois ativos,  $S_1$  e  $S_2$ , seguindo a dinâmica de Wiener:

$$dS_1 = (r - \delta_1)S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1 \quad (\text{C.18})$$

$$dS_2 = (r - \delta_2)S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2 \quad (\text{C.19})$$

esses dois ativos tem correlação  $\rho$ , isto é,  $dz_1 dz_2 = \rho dt$ , lembrando que toda a simbologia usada se mantém, como anteriormente.

Para modelar a evolução conjunta de  $S_1$  e  $S_2$ , com o modelo binomial de duas variáveis, primeiro considera-se a árvore binomial multiplicativa de duas variáveis conforme a figura 1:

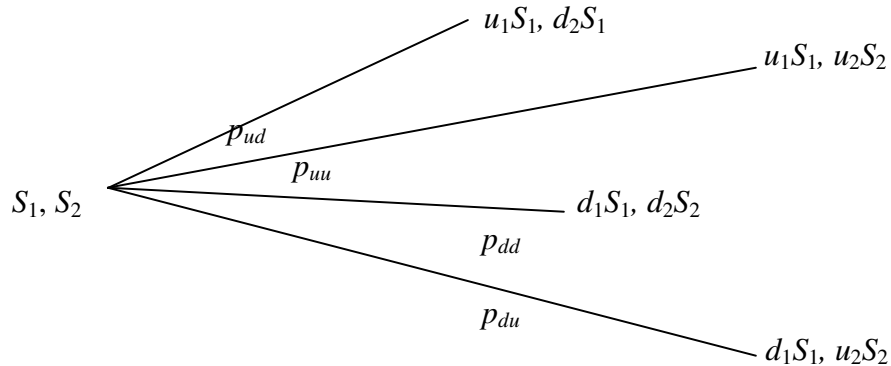


Fig. 1. Processo binomial multiplicativo de duas variáveis.

Têm-se quatro ramos, em vez de dois, correspondendo as quatro possibilidades de combinação dos dois ativos terem seus preços majorados ou diminuídos. Essa extensão é feita de forma semelhante a uma árvore com um único ativo. É conveniente trabalhar os processos dos preços dos ativos em logaritmos naturais:

$$dx_1 = v_1 dt + \sigma_1 dz_1 \quad (\text{C.20})$$

$$dx_2 = v_2 dt + \sigma_2 dz_2 \quad (\text{C.21})$$

com  $v_1 = r - \delta_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2$  e  $v_2 = r - \delta_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2$ . A figura 2 mostra o primeiro passo da árvore binomial aditiva de duas variáveis, supondo ter escolhido incrementos iguais tanto na subida como na descida de preços de cada ativo.

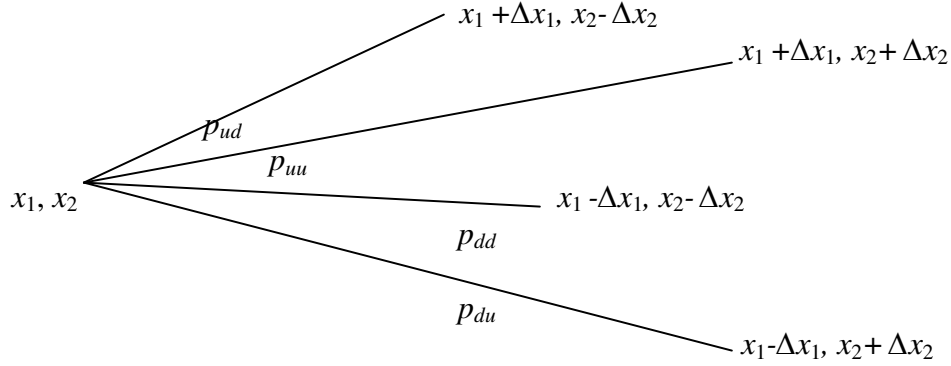


Figura 2. Processo binomial aditivo de duas variáveis.

As probabilidades  $p_{uu}$ ,  $p_{ud}$ ,  $p_{du}$ ,  $p_{dd}$ , e os saltos de tamanhos  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ ,  $\Delta x_3$ ,  $\Delta x_4$ , são escolhidos de forma a satisfazer as médias e as variâncias (dois primeiros momentos) do processo risco-neutro:

$$\mathbf{E}[\Delta x_1] = (p_{uu} + p_{ud})\Delta x_1 - (p_{du} + p_{dd})\Delta x_1 = v_1 \Delta t \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{E}[\Delta x_1^2] = (p_{uu} + p_{ud})\Delta x_1^2 - (p_{du} + p_{dd})\Delta x_1^2 = \sigma_1^2 \Delta t \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{E}[\Delta x_2] = (p_{uu} + p_{du})\Delta x_2 - (p_{ud} + p_{dd})\Delta x_2 = v_2 \Delta t \quad (\text{C.24})$$

$$\mathbf{E}[\Delta x_2^2] = (p_{uu} + p_{du})\Delta x_2^2 - (p_{ud} + p_{dd})\Delta x_2^2 = \sigma_2^2 \Delta t \quad (\text{C.25})$$

$$\mathbf{E}[\Delta x_1 \Delta x_2] = (p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd})\Delta x_1 \Delta x_2 = \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t, \quad (\text{C.26})$$

cujas probabilidades devem ter soma unitária, isto é:

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1. \quad (\text{C.27})$$

A solução desse sistema de equações é:

$$\Delta x_1 = \sigma_1 \sqrt{\Delta t} \quad (\text{C.28})$$



$$\Delta x_2 = \sigma_2 \sqrt{\Delta t} \quad (\text{C.29})$$

$$p_{uu} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_2 v_1 \Delta t + \Delta x_1 v_2 \Delta t + \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (\text{C.30})$$

$$p_{ud} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_2 v_1 \Delta t - \Delta x_1 v_2 \Delta t - \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (\text{C.31})$$

$$p_{du} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 - \Delta x_2 v_1 \Delta t + \Delta x_1 v_2 \Delta t - \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (\text{C.32})$$

$$p_{dd} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 - \Delta x_2 v_1 \Delta t - \Delta x_1 v_2 \Delta t + \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (\text{C.33})$$

Nessa árvore, os nós  $(i, j, k)$  indicam, no passo tempo  $i$ , o nível  $j$  do ativo 1 e o nível  $k$  do ativo 2, ou seja,

$$S_{ijk}^1 = S_1 \exp(j\Delta x_1) \quad \text{e} \quad S_{ijk}^2 = S_2 \exp(k\Delta x_2)$$

Como exemplo de uso da árvore binomial de duas variáveis, pode-se considerar o *spread* de uma opção americana sobre a diferença de dois ativos  $S_1$  e  $S_2$ , com preços de exercícios  $K$ , na qual tem *payoff* de

$$\max(S_{1T} - S_{2T} - K, 0).$$

Observe que esse processo, embora de estrutura simples, cresce exponencialmente com o número de ativos envolvidos. Assim, com dois ativos o modelo binomial é perfeitamente tratável do ponto de vista numérico, porém com a adição de mais ativos a determinação do preço do derivativo torna-se pouco eficiente e bem mais complexo quando comparado a apenas uma variável. Nesses casos o método de diferenças finitas é bem mais eficiente.

## Método de Diferenças Finitas

Os métodos de diferenças finitas podem ser estendidos para trabalhar com múltiplas variáveis de estado. Entretanto, em caso de se ter 100 pontos na grade, em uma dimensão, isto representa 100x100 pontos em duas dimensões e, portanto um esforço computacional 100 vezes maior.

Com o objetivo de obter um razoável período computacional usam-se tamanhos de malhas maiores. Assim, os métodos implícitos são os mais desejáveis, embora sua implementação seja bem mais complexa.

Muitos problemas de determinação de derivativos são resolvidos pela *Alternating Direction Implicit* (ADI), que acaba fazendo uma boa negociação entre eficiência, precisão e tratabilidade computacional. São métodos mais eficientes, porém com implementação um tanto complexo [Smith, 1975 e Press et al., 1992]. A aplicação desse método é observada a seguir.

Sejam dois ativos, de preços  $S_1$  e  $S_2$ , que se supõe seguirem movimentos brownianos:

$$\begin{aligned} dS_1 &= (r - \delta_1)S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1 \\ dS_2 &= (r - \delta_2)S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2 \end{aligned}$$

Os dois movimentos brownianos  $dz_1$  e  $dz_2$  têm correlação instantânea  $\rho$ , ou seja,  $dz_1 \cdot dz_2 = \rho dt$ .

A equação diferencial que governa o preço da opção [Cox, Ingersoll e Ross, 1985] é obtida de:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial c}{\partial t} &= (r - \delta_1)S_1 \frac{\partial c}{\partial S_1} + (r - \delta_2)S_2 \frac{\partial c}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_2^2} \\ &+ \rho\sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_1 \partial S_2} - rc \end{aligned} \tag{C.34}$$

Se aplicar diretamente o método de Crank-Nicolson à equação (C.34) acima, obtém-se um sistema de  $(2M_j - 1).(2N_k - 1)$  equações lineares, cada qual contendo nove incógnitas referentes aos valores da opção no passo-tempo  $i$ . Junto com as  $2.(2M_j - 1).(2N_k - 1)$  condições de contornos têm-se um sistema de  $(2M_j - 1).(2N_k - 1)$  equações lineares para  $(2M_j - 1).(2N_k - 1)$  das incógnitas dos valores da opção. O método AID é uma adaptação do método de Crank-Nicolson a qual permite obter uma matriz tridiagonal simples. Depois de aplicar o método ADI ao sistema (C.1), deve-se transformá-la em uma equação padrão de difusão. Primeiramente, usa-se uma transformação logarítmica nos preços do ativo  $x_1 = \ln(S_1)$  e  $x_2 = \ln(S_2)$ , a qual fornece uma equação diferencial com coeficientes constantes:

$$-\frac{\partial c}{\partial t} = v_1 \frac{\partial c}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial c}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_1 \partial x_2} - rc \quad (\text{C.35})$$

com  $v_1 = r - \delta_1 - 0,5\sigma_1^2$  e  $v_2 = r - \delta_2 - 0,5\sigma_2^2$ .

No segundo passo, o método ADI não permite que se manuseie o sistema composto pelas derivadas cruzadas de segunda ordem da equação (C.35) envolvendo a correlação entre os ativos. Deve-se, portanto, fazer uma transformação para um espaço de variáveis a qual não estão correlacionados. Isso pode ser conseguido computando os autovalores ( $\lambda_i$ ) e os autovetores ( $e_{ij}$ ) da matriz covariância de  $x_1$  e  $x_2$ :

$$\left[ \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \lambda \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.36})$$

Os autovetores fornecem uma combinação linear de  $x_1$  e  $x_2$  a qual estão correlacionados:

$$\begin{aligned} y_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 \\ y_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 \\ \alpha_1 &= e_{11}v_1 + e_{12}v_2 \\ \alpha_2 &= e_{21}v_1 + e_{22}v_2 \\ dy_1 &= \alpha e_1 dt + \sqrt{\lambda_1} dw_1 \\ dy_2 &= \alpha e_2 dt + \sqrt{\lambda_2} dw_2 \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

com  $dw_1$  e  $dw_2$  sendo os movimento brownianos que estão correlacionados.

Sob essa transformação, a equação diferencial (C.35) torna-se:

$$-\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial c}{\partial y_1} + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y_2^2} - rc \quad (\text{C.38})$$

Agora, o método ADI simplifica fazendo com que o termo de ordem zero,  $rc$ , e o termo de primeira ordem:

$$\alpha_1 \frac{\partial c}{\partial y_1} + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial y_2}$$

se anulem. Isso é conseguido com a transformação:

$$c(y_1, y_2, t) = \exp(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 t) \cdot U(y_1, y_2, t)$$

Aplicando essa transformação na equação (C.38) e observando a simplificação acima, obtém-se:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} \quad (\text{C.39})$$

e

$$a_1 = -\frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_2}{\lambda_2}, \quad a_3 = \frac{\alpha_1^2}{2\lambda_1} + \frac{\alpha_2^2}{2\lambda_2} + r$$

Finalmente, transforma-se de forma que os coeficientes do termo de segunda ordem sejam iguais, ou seja, faz-se:

$$y_2' = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} y_2$$

conduzindo a:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \lambda_1 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y_2'^2} \right). \quad (\text{C.40})$$

O método ADI pode ser aplicado a esta equação, que é a forma padrão de uma equação diferencial de difusão bidimensional. O método ADI permite substituir as derivadas parciais por diferenças finitas, utilizando o método de Crank-Nicolson, em dois estágios. No primeiro, as derivadas com respeito ao passo  $y_1$  são substituídas por aproximações de diferenças finitas

no passo-tempo  $i+1/2$ , enquanto as derivadas com respeito a  $y_2'$  são aproximadas por diferenças finitas no passo  $i+1$ . Isso fornece a seguinte equação de diferenças finitas:

$$-\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i+1/2,j,k}}{\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{1}{2}\lambda_1 \left[ \frac{u_{i+1/2,j+1,k} - 2u_{i+1/2,j,k} + u_{i+1/2,j-1,k}}{\Delta y_1^2} + \frac{u_{i+1,j,k+1} - 2u_{i+1,j,k} + u_{i+1,j,k-1}}{\Delta y_2'^2} \right]$$

a qual pode ser reescrita como:

$$p_u u_{i+1/2,j+1,k} + p_m u_{i+1/2,j,k} + p_d u_{i+1/2,j-1,k} = -\frac{2}{\Delta t} u_{i+1,j,k} - \frac{1}{2}\lambda_1 \frac{u_{i+1,j,k+1} - 2u_{i+1,j,k} + u_{i+1,j,k-1}}{\Delta y_2'^2} \quad (\text{C.41})$$

com

$$p_u = \frac{\lambda_1}{2\Delta y_1^2}, \quad p_m = -\frac{2}{\Delta t} - \frac{\lambda_1}{\Delta y_1^2}, \quad p_d = \frac{\lambda_1}{2\Delta y_1^2}$$

No segundo estágio, deve-se proceder às derivadas com respeito a  $y_2'$  as quais são substituídas por diferenças finitas no passo-tempo  $i$ , enquanto as derivadas com respeito a  $y_1$  são substituídas por aproximadas por diferenças finitas no passo-tempo  $i+1/2$ . Isso fornece a seguinte equação de diferenças finitas:

$$-\frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i,j,k}}{\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{1}{2}\lambda_1 \left[ \frac{u_{i+1/2,j+1,k} - 2u_{i+1/2,j,k} + u_{i+1/2,j-1,k}}{\Delta y_1^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta y_2'^2} \right]$$

a qual pode ser reescrita como

$$p_u u_{i,j,k+1} + p_m u_{i,j,k} + p_d u_{i,j,k-1} = -\frac{2}{\Delta t} u_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}}{\Delta y_1'^2} \quad (C.42)$$

com

$$p_u = \frac{\lambda_1}{2\Delta y_2'^2}, \quad p_m = -\frac{2}{\Delta t} - \frac{\lambda_1}{\Delta y_2'^2}, \quad p_d = \frac{\lambda_1}{2\Delta y_2'^2}$$

As equações (C.36) e (C.39) representam um sistema de equações tridiagonais. Cada passo individualmente é instável e não convergente, mas juntos eles são incondicionalmente estáveis e convergentes.

Evidentemente deve-se trabalhar também com as condições inicial e de contorno do problema. Supondo o *payoff* (valor de liquidação no vencimento) sendo:

$$\max(S_1 - S_2 - K, 0)$$

após as transformações propostas fica:

$$\max\{e^{x_1} - e^{x_2} - K, 0\}$$

com

$$x_1 = \frac{-e_{12}e_{22}y_1 + e_{11}e_{12}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}y_2'}{e_{12}e_{21} - e_{12}e_{22}}$$

e

$$x_2 = \frac{e_{21}y_1 - e_{11}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}y_2'}{e_{12}e_{21} - e_{12}e_{22}}$$

Após resolver a equação diferencial numericamente, deve-se retornar às variáveis originais.

Existem métodos mais eficientes que o *alternating direction implicit* (ADI), porém sua implantação computacional é bem complexa (ver por exemplo Smith, 1975 e Press et al., 1992).

A dificuldade aumenta quando se tem de operar com três ou mais ativos seguindo processos de Wiener, já que a equação diferencial para avaliar o derivativo torna-se bem complexa. Porém, em situações que envolvem opções tipo americanas, destaca-se a simulação de Monte Carlo.

## APÊNDICE D

### OPÇÕES COM BARREIRAS

Considere o tradicional modelo de Black-Scholes

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

$$dB = rB dt$$

com  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $r$  sendo constantes. Seu valor de liquidação no vencimento (*contingente claim Z*) em  $T$ , tem a forma:  $\Phi(S(T))$ . O contrato *down-and-out call option* é definido como:

$$\begin{aligned} &\Phi(S(T)), \text{ se } S(t) > H, \quad \text{para todo } t \in [0, T] \\ &0, \quad \text{se } S(t) \leq H, \quad \text{para algum } t \in [0, T] \end{aligned}$$

com  $H$  sendo um número real,  $H < S_0$ , conhecido como barreira. Caso não atinja a barreira, trata-se de uma *call option* tradicional.

A expressão

$$\Phi_H(x) = \begin{cases} \Phi(x), & \text{para } x > H \\ 0, & \text{para } x \leq H. \end{cases}$$

equivale a  $\Phi_H(x) = \Phi(x) \mathbf{1}_{\{x > H\}}$ , com  $\mathbf{1}$  denotando a função indicadora ou característica.

A função que apresenta o preço correspondente a uma opção *down-and-out* é dado por:

$$F_{HO}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi_H) - \left(\frac{H}{s}\right)^{\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} F\left(t, \frac{H^2}{s}, \Phi_H\right) \quad (D.1)$$

para  $S > H$ . A prova dessa expressão ser feita assumindo  $t=0$ , sem perda de generalidade. Assumindo que  $S(0)=s > H$  e considerando a avaliação em risco neutro, vem:



$$\begin{aligned}
F_{Ho}(0, s; \Phi) &= e^{-rT} \mathbf{E}_{0,s}^Q [ \Phi(S(T)) \cdot \mathbf{1}_{\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S(t) > H \}} ] \\
&= e^{-rT} \mathbf{E}_{0,s}^Q [ \Phi_H(S_H(T)) \cdot \mathbf{1}_{\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S(t) > H \}} ] \\
&= e^{-rT} \mathbf{E}_{0,s}^Q [ \Phi_H(S_H(T)) ].
\end{aligned}$$

Resta determinar este valor esperado, que é

$$\mathbf{E}_{0,s}^Q [ \Phi(S_H(T)) ] = \int_H^{\infty} \Phi_H(x) h(x) dx, \tag{D.2}$$

Com  $h$  sendo a função densidade conjunta para a variável estocástica  $S_H(t)$ . lembre que o apêndice A vem:

$$S(T) = \exp \left( \ln s + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right) = e^{X(T)}$$

com  $X$  sendo o processo definido por

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \cdot dW(t) \\
X(0) &= \ln s
\end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$S_H(t) = \exp \{ X_{\ln H}(t) \}$$

e (D.2) pode ser escrito como

$$\mathbf{E}_{0,s}^Q [ \Phi_H(S_H(T)) ] = \int_{\ln H}^{\infty} \Phi_H(e^x) f(x) dx$$

com  $f$  sendo a função densidade da variável estocástica  $X_{\ln H}(T)$ . Essa função densidade conjunta é determinada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) \\ &\quad - \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (\ln s - \ln H)\right\} \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \ln s + 2 \ln H, \sigma\sqrt{T}\right) \\ &= \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) - \left(\frac{H}{s}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln\left(\frac{H^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0,s}^Q[\Phi_H(S_H(T))] &= \int_{\ln H}^{\infty} \Phi_H(e^x) f(x) dx \\ &= \int_{\ln H}^{\infty} \Phi_H(e^x) \cdot \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) dx \\ &\quad - \left(\frac{H}{s}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \int_{\ln H}^{\infty} \Phi_H(e^x) \cdot \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln\left(\frac{H^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) dx \\ &= \int_{\ln H}^{\infty} \Phi_H(e^x) \cdot \varphi\left(x; \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) dx \\ &\quad - \left(\frac{H}{s}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \int_{\ln H}^{\infty} \Phi_H(e^x) \cdot \varphi\left(x; \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln\left(\frac{H^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) dx \end{aligned}$$

Inspecionando esta última equação, vê-se que a função densidade da primeira integral é a densidade de  $X(T)$  sob a medida  $\mathbf{Q}$ , dado o valor inicial  $S(0)=s$ . A densidade na segunda integral, por sua vez, é também a densidade de  $X(T)$ , sob  $\mathbf{Q}$ , dado o ponto inicial  $S(0) = \frac{H^2}{s}$ .

Portanto,

$$\mathbf{E}_{0,s}^Q[\Phi_H(S_H(T))] = \mathbf{E}_{0,s}^Q[\Phi_H(S(T))] - \left(\frac{H}{S}\right)^2 \sigma^2 \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbf{E}_{0,s}^Q[\Phi_H(S(T))],$$

sendo o resultado esperado (equação D.1).

As linhas de desenvolvimento para as demais opções com barreiras seguem o esquema acima, podendo ser consultados Elliott e Kopp [1999, p.172-185] e Björk [1998, p.182-197].

## BIBLIOGRAFIA

Barone-Adesi G. and R.E. Whaley. *Efficient analytic approximations of American option values*. Journal of Finance, 42, 1987, 301-320.

Bartter, B. and R. Reudleman, R. *Two state option pricing*. Journal of Finance, 34, 1979, 1093-1110.

Baxter, M. and A. Rennie. *Financial calculus: An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, UK, 1996.

Björk, T. *Arbitrage theory in continuous time*. U.K. Oxford University Press, 1998.

Black, F. and M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Financial Economics. 81, May-June 1973, 637-659.

Boyle, P.P. *A lattice framework for option pricing with two variables*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23, 1988, 1-16.

Boyle, P.P. *Options: A Monte Carlo approach*. Journal of Financial Economics, 4, 1977, 323-38.

Boyle, P.P., Evnine, J. and Gibbs, S. *Numerical evaluation of multivariate contingent claims*. Review of Financial Studies, 2, 1989, 241-250.

Castro Jr., L. *Impactos da liquidação financeira sobre hedging nos contratos futuros das commodities boi gordo e soja*. Piracicaba-SP: ESALQ-USP, 1998 (tese de doutorado).

Catuogno, P.; S. Ferrando e A. Gonzalez. *Proyecto Finanzas: calculando el tiempo de parada de las americanas según el LS-algoritmo*. Preprint 2006.

Clewlow, L. and C. Strickland. *Implementing derivatives models*. England: John Wiley, 2001.

Cleveland, W. and Devlin, S.J. *Locally weighted regression: An approach to regression analysis by local fitting*. *Journal of American Statistical Society*, 85, 1988, 596-610.

Cox, J. C., and S. A. Ross. *The valuation of option for alternative stochastic processes*. *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, 145-166.

Cox, J. C., and M. Rubinstein. *Option market*. New Jersey: Prentice Hall, 1985.

Cox, J. C.; S. A. Ross and M. Rubinstein. *Option pricing: a simplified approach*. *Journal of Financial Economics*, 7, October 1979, 229-263.

Cunha, A.S. *Um seguro agrícola “eficiente”*. Departamento de Economia – Universidade de Brasília. Texto para discussão n.255, out. 2002.

Elliott, R.C. and P.E. Kopp. *Mathematics of financial markets*. New York, Spring-Verlag 1999.

Forbes, F.L. *Mercados Futuros: uma introdução*. Bolsa de Mercadorias e Futuros. São Paulo, 1994.

Goldman, B.; H. Sosin, and M.A. Gatto. *Path dependent options: Buy at the low and sell at the high*. *Journal of Finance*, 34, December 1979, 1111-1127.

Heath, D.; R. Jarrow, and A. Merton. *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation*. *Econometrica*, 60, 1992, 77-105.

Hull, J. *Options, futures, and other derivative securities*. Prentice Hall, USA, 1992.

Hull, J. and A. White. *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*. Journal of Finance, 42, 1987, 281-300.

Hull, J. and A. White. *An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility*. Advances in Future and Options Research, 3, 1988, 29-61.

Hull, J. and A. White. *Valuing derivative securities using the explicit finite difference methods*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, 1990, 87-100.

Johnson, H.E and D. Shanno. *Options pricing when the variance is changing*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, July 1987, 143-51.

Karatzas, I. and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

Kemna, A. and A. Vorst. *A pricing method for options based on average asset values*. Journal of Banking and Finance, 14, March 1990, 113-129.

Klemkosky, R.C., and B.G. Resnick. *Put-call parity and market efficiency*. Journal of Finance, 34, December 1979, 1141-1155.

Kloeden, P.E.; E. Platen; and H. Schurz. *Numerical solution of SDE through computer experiments*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Kellogg College of Oxford University. *Valuing American-Asian options with the Longstaff-Schwartz algorithm*. University of Oxford, UK, 2003.

Kolb, R.W. *Futures, options, & swaps*. Blackwell, Massachusetts (3rd. edition), 1999.

Lamounier, W.M. *Comportamento dos preços no mercado spot de café do Brasil: análise nos domínios do tempo e da frequência*. Minas Gerais, Universidade Federal de Viçosa, 2002 (tese de doutorado).

Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz. *Valuing American option by simulation: A simple least square approach*. *Review of Financial Studies*, 14, 2001, 113-147.

Macbeth. J. and L. Merville. *An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model*. *Journal of Finance*, 34 (5), 1979, 1173-1186.

Mazzali, L. *O processo recente de reorganização agroindustrial: do complexo à organização em “rede”*. São Paulo: Fundação Getulio Vargas, 1995 (tese doutorado).

Merton, R. C. *Theory of rational option pricing*. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1973, 141-183.

Merton, R. C. *Option pricing when underlying stocks returns are discontinuous*. *Journal of Financial Economics*, 3, March 1976, 125-144.

Musiela, M. and M. Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*. Berlin: Springer, 1998.

Øksendal, B. *Stochastic differential equation: an introduction with applications to physics and engineering*. Berlin: Springer, 2000 (5<sup>th</sup> edition).

Ozaki, V.A. *O papel do seguro na gestão do risco agrícola e os empecilhos para o seu desenvolvimento*. *Revista Brasileira de Risco e Seguro*, Rio de Janeiro, 2 (4), out/nov 2000, 775-92.

Panzutti, R. *Estratégias de financiamento das cooperativas agrícolas no Estado de São Paulo: caso da Cooperativa Agrícola da Região de Orlandia*. Campinas-SP: Universidade Estadual de Campinas, 1996 (tese doutorado).

Pizzi, C. and P. Pellizzari. *Monte Carlo pricing of American using nonparametric regression*. Torino, Italy: IV Workshop di Finanza Quantitativa, 2003.

Press, W.H., S.A. Teukolsky and B.P. Flannery. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge, UK: Cambridge Press, 1992 (2<sup>nd</sup> edition).

Revuz, D. and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Berlin: Springer-Verlag, 1994, (2<sup>nd</sup> edition).

Rochelle, T. C. P. *O contrato futuro de boi gordo: uma análise do impacto da introdução da liquidação financeira sobre o risco de base*. Piracicaba-SP: ESALQ-USP, 1997 (tese de mestrado).

Santo, B.R.E. *Os caminhos da agricultura brasileira*. São Paulo: Evoluir, 2001.

Smith, D.G. *Numerical solution of partial differential equations*. Oxford Mathematical Books, Oxford University Press, 1975.

Sobol, I. *O método de Monte Carlo*. Moscou, Editora Mir, 1983.

Turnbull, S.M. and L.M. Wakeman *A quick algorithm for pricing European average option*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26, September 1991, 337-389.

Wilmott, P.; J. Dewynne, and S. Howison. *Option pricing: mathematical models and computation*. UK: Oxford, 1993.



Vasicek, O. *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5, 1977, 177-188.

ANEXO: Preços Nominais dos Insumos para o Biodiesel (2002-2005 = R\$/kg)

Obs.	Período	Soja	Sebo	Algodão	Girassol	Amendoim
1	Jan 02	1.082	1.040	0.079	1.279	1.415
2	Fev 02	0.933	0.076	1.128	1.251	1.440
3	Mar 02	0.860	0.075	1.101	1.176	1.392
4	Abr 02	0.896	0.076	0.947	1.104	1.376
5	Mai 02	1.042	0.078	0.975	1.245	1.404
6	Jun 02	1.273	0.079	1.129	1.444	1.498
7	Jul 02	1.333	0.080	1.265	1.588	1.635
8	Ago 02	1.669	0.081	1.421	1.779	1.770
9	Set 02	1.838	0.082	1.554	1.724	1.928
10	Out 02	2.082	0.084	1.785	1.986	2.188
11	Nov 02	2.253	0.085	1.806	2.049	2.067
12	Dez 02	2.341	0.084	1.885	2.000	2.157
13	Jan 03	2.004	0.083	1.808	1.898	2.063
14	Fev 03	2.038	0.083	1.846	1.950	2.542
15	Mar 03	1.943	0.083	1.744	1.789	2.968
16	Abr 03	1.800	0.083	1.569	1.613	3.066
17	Mai 03	1.674	0.080	1.528	1.599	3.039
18	Jun 03	1.660	0.080	1.531	1.591	3.390
19	Jul 03	1.642	0.081	1.532	1.532	3.583
20	Ago 03	1.576	0.083	1.544	1.444	3.871
21	Set 03	1.655	0.084	1.535	1.482	3.929
22	Out 03	1.936	0.084	1.608	1.640	4.207
23	Nov 03	1.963	0.084	1.807	1.745	3.628
24	Dez 03	1.998	0.086	1.907	1.750	3.253
25	Jan 04	1.974	0.069	1.751	1.771	3.209
26	Fev 04	2.300	0.069	1.811	1.893	3.312
27	Mar 04	2.235	0.069	1.819	1.825	3.275
28	Abr 04	2.130	0.069	1.758	1.784	3.333
29	Mai 04	2.010	0.069	1.783	1.851	3.596
30	Jun 04	1.813	0.069	1.552	1.721	3.454
31	Jul 04	1.826	0.069	1.537	1.652	3.095
32	Ago 04	1.824	0.069	1.520	1.643	3.117
33	Set 04	1.803	0.069	1.440	1.657	2.989
34	Out 04	1.627	0.069	1.372	1.740	2.927
35	Nov 04	1.570	0.069	1.360	1.741	2.897
36	Dez 04	1.530	0.069	1.348	1.600	2.827
37	Jan 05	1.542	0.069	1.317	1.567	2.801
38	Fev 05	1.335	0.069	1.138	1.504	2.702
39	Mar 05	1.561	0.069	1.334	1.655	2.813
40	Abr 05	1.455	0.069	1.285	1.560	2.678
41	Mai 05	1.300	0.069	1.163	1.501	2.551
42	Jun 05	1.273	0.069	1.139	1.491	2.437
43	Jul 05	1.264	0.069	1.037	1.478	2.309
44	Ago 05	1.223	0.069	1.088	1.410	2.210
45	Set 05	1.214	0.069	1.076	1.313	2.065
46	Out 05	1.208	0.069	1.068	1.228	2.009
47	Nov 05	1.178	0.069	1.010	1.110	1.968
48	Dez 05	1.172	0.069	1.017	1.050	1.050