TÓPICOS EM TEORIA DA APROXIMAÇÃO SOBRE ANÉIS VALORIZADOS

Maria Zoraide Martins Costa Soares

Orientador

Prof. Dr. João Bosco Prolla

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

janeiro de 1982

Ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor João Bosco Prolla por ter me introduzido neste assunto, por seu estímulo e segura orientação.

Ao grupo de Teoria da Aproximação pelo incentivo.

TÓPICOS EM TEORIA DA APROXIMAÇÃO SOBRE

ANÉIS VALORIZADOS

TÓPICOS EM TEORIA DA APROXIMAÇÃO SOBRE ANÉIS VALORIZADOS

Maria Zoraide Martins Costa Soares

INTRODUÇÃO

Em 1944, J. Dieudonné [5] provou um análogo do Teorema de Stone-Weierstrass para o caso de funções a valores no corpo dos números p-ádicos. Este resultado foi estendido, em 1950, por I. Kaplansky [7] para funções com valores num corpo munido de um valor absoluto não-arquimediano. Em 1968, Chernoff, Rasala e Waterhouse [4] completaram a generalização estendendo o Teorema de Stone-Weierstrass para corpos munidos de valorização de Krull.

Quando consideramos funções a valores vetoriais, no caso real ou complexo, tem-se a dificuldade extra da perda da estrutura de *álgebra* para $C(X;E)$. O caminho a seguir foi indicado por L. Nachbin, que mesmo no caso escalar, introduziu a idéia de considerar sub-espaços vetorias W de $C(X;E)$ que são módulos sobre uma álgebra A de funções escalares. (Ver Buck [2], Glicksberg [6] e Nachbin [12] e [13]). Esta idéia mostrou-se muito fecunda no estudo do problema de caracterizar a aderência de subespaços de $C(X;E)$. Para um apanhado geral dos resultados possíveis nesta linha ver, por exemplo, Prolla [17].

No caso de espaços localmente F-convexos sobre um corpo valorizado $(F,|\cdot|)$, em particular no caso de espaços normados não arquimedianos, os primeiros resultados para subespaços de funções vetoriais foram obtidos por Prolla |20|, e generalizados para espaços ponderados por Carneiro |3|.

Embora Carneiro tenha tratado o caso mais geral da aproximação ponderada, em contraste com Prolla [15] que considerou apenas o caso da aproximação uniforme sobre compactos, em sua Tese, Carneiro restringiu-se ao caso de *corpos locais*. Nesta Tese vamos eliminar esta hipótese considerando módulos sobre álgebras de funções escalares contínuas e que levam o espaço de definição num subconjunto relativamente compacto de F. Para isso, introduzimos no Capítulo 1 as definições necessárias e damos alguns exemplos de espaços de Nachbin. Como nossa generalização permite tratar uma classe mais ampla de espaços vetoriais topológicos do que a classe dos espaços localmente F-convexos definimos no Capítulo 2, a classe dos espaços que chamamos de quase não arquimedianos, e que servirá de reservatório de exemplos.

No Capítulo 3, apresentamos o resultado central da caracterização da aderência de submódulos. Utilizamos aqui a noção de localizabilidade introduzida por L. Nachbin. O método de demonstração que utilizamos é baseado numa idéia de Machado e Prolla|8|.

No Capítulo 4, damos algumas aplicações dos resultados gerais para poder descrever a aderência das álgebras polinomiais e dos espaços de Stone-Weierstrass. Os resultados apresentados aqui generalizam e estendem resultados de Carneiro [3] e Prolla e Machado [15].

Em Teoria da Aproximação há dois problemas centrais: o primeiro é de descrever a aderência de um subconjunto A (que em geral está munido de alguma estrutura algébrica adicional) num espaço topológico X; se o espaço X for métrico, isto significa que queremos descrever os pontos cuja distância a A é nula:

$$f \in \overline{A} \Leftrightarrow \operatorname{dist}(f;A) = 0.$$

Se $f \in X$ é tal que $\operatorname{dist}(f;A) > 0$, surge o segundo problema: substituir A por um elemento de A cometendo o menor erro possível. Isto significa que buscamos um elemento de A que melhor aproxime f. Se em vez de um único f lidamos com um certo conjunto B, põe-se o problema da *melhor aproximação simultânea*: buscamos um elemento de A que melhor aproxime simultaneamente todos os elementos de B. No Capítulo 5, tratamos deste problema no contexto dos espaços normados não arquimedianos, generalizando os resultados de Prolla [19].

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÃO E EXEMPLOS DE ESPAÇOS DE NACHBIN

Seja F um anel de divisão. Uma *valorização* (ou *valor absoluto*) *em* F é uma aplicação $|\cdot|: F \to \mathbb{R}$ tal que, quaisquer que sejam λ, $\mu \in F$, se tem

(a) $|\lambda| \geq 0$; $|\lambda| = 0$ se, e só se, $\lambda = 0$;

(b) $|\lambda\mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$;

(c) $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$.

Um anel de *divisão valorizado* é um par $(F,|\cdot|)$, onde F é um anel de divisão e $|\cdot|$ é uma valorização em F.

Uma valorização em F é dita *não-arquimediana* (n.a) se, quaisquer que sejam λ, $\mu \in F$, se tem

(d) $|\lambda + \mu| \leq \max(|\lambda|, |\mu|)$.

Em todo anel de divisão F sempre existe uma valorização n.a., dita valorização *trivial*, definida pondo $|\lambda| = 1$ se $\lambda \neq 0$, e $|\lambda| = 0$ se $\lambda = 0$. Neste caso $(F,|\cdot|)$ é dito um *anel de divisão trivialmente valorizado*; em caso contrário, isto é toda vez que $|\cdot|$ não é a valorização trivial de F, diremos que $(F,|\cdot|)$ é um *anel de divisão não-trivialmente valorizado*.

Os fatos básicos sobre anéis de divisão valorizados, necessários ao desenvolvimento desta Tese, podem ser encontrados no

Capítulo 1 de Prolla [18]. Lembramos, em particular, que todo anel de divisão valorizado $(F,|\cdot|)$ é, de modo natural, um espaço topológico, de fato é mesmo um espaço métrico, definindo-se a distância entre λ e μ em F por

$$(*) \qquad d(\lambda,\mu) = |\lambda - \mu|.$$

Seja $(F,|\cdot|)$ um anel de divisão valorizado. Um *espaço vetorial topológico sobre* $(F,|\cdot|)$, é um par (E, τ) onde E é um espaço vetorial sobre F, e τ é uma topologia sobre E tal que as aplicações

$$(x,y) \in E \times E \to x + y \in E$$

$$(\lambda,x) \in F \times E \to \lambda x \in E$$

são contínuas, quando $E \times E$ e $F \times F$ estão munidos de suas topologias produtos e a topologia de F sendo a sua topologia natural, definida pela métrica (*).

Os fatos básicos sobre espaços vetoriais topológicos, necessários ao desenvolvimento, desta Tese podem ser encontrados no Capítulo 2 de Prolla [19]. Lembramos, em particular, o seguinte resultado.

1.1. TEOREMA: *Seja* $(F,|\cdot|)$ *um anel de divisão não-trivialmente valorizado, e seja* E *um espaço vetorial sobre* F. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base* *de filtro sobre* E *tal que*

(a) *para cada* $V \in \mathcal{B}$, *existe* $U \in \mathcal{B}$ *tal que* $U + U \subset V$;

(b) *para algum* $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$, *dado* $V \in \mathcal{B}$, *existe* $W \in \mathcal{B}$ *tal que* $W \subset \lambda V$;

(c) *cada* $V \in \mathcal{B}$ *é equilibrado e absorvente.*

Então existe uma topologia τ *sobre* E *tal que* (E,τ) *é um espaço vetorial topológico sobre* $(F,|\cdot|)$ *e* $\mathcal{B}$ *é um sistema fundamental de vizinhanças da origem em* (E,τ).

Para uma demonstração desse resultado ver teorema 2.15, Prolla [18], ou Capítulo I, §1, nº 5, proposição 4, Bourbaki [1].

Seja X um conjunto não vazio e E um espaço vetorial sobre um anel de divisão F. O conjunto de todas as aplicações $f : X \to E$ será indicado por $F(X;E)$. Este conjunto será sempre munido da estrutura de espaço vetorial sobre F obtida por meio da definição pontual das operações vetoriais: para todo $x \in X$ e $\lambda \in F$, define-se

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

quando $f, g \in F(X;E)$.

Quando (E,τ) é um espaço vetorial topológico sobre $(F,|\cdot|)$ indicaremos por $\ell_\infty(X;E)$ o subespaço vetorial de $F(X;E)$ de todas as aplicações $f : X \to E$ *limitadas*, isto é, tais que $f(X)$ é um subconjunto limitado de (E,τ).

Quando X é um espaço topológico e (E,τ) é um espaço vetorial topológico sobre $(\mathbb{F},|\cdot|)$, indicaremos por $C(X;E)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X;E)$ de todas as aplicações $f : X \to E$ contínuas.

Por definição,

$$C_b(X;E) = C(X;E) \cap \ell_\infty(X;E).$$

Finalmente, indicaremos por $C^*(X;E)$ o subespaço vetorial de $C(X;E)$ de todas as aplicações $f : X \to E$ contínuas tais que $f(X)$ tem aderência compacta em E.

Quando $E = \mathbb{F}$, $\mathcal{F}(X;E)$ será munido de sua estrutura de *álgebra linear* sobre $\mathbb{F}$, definida por

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

para todo $x \in X$; $f,g \in \mathcal{F}(X;E)$.

Quando (E,τ) é $(\mathbb{F},|\cdot|)$ munido de sua topologia natural, o espaço $\ell_\infty(X;E)$ é uma *subálgebra* de $\mathcal{F}(X;E)$. O mesmo acontece quando estão definidos com $C(X;\mathbb{F})$, $C_b(X;\mathbb{F})$ e $C^*(X;\mathbb{F})$.

1.2. DEFINIÇÃO: Seja X um espaço topológico e (E,τ) um espaço vetorial topológico sobre $(\mathbb{F},|\cdot|)$. Uma função $g : X \to E$ é dita *nula no infinito* se, para toda vizinhança aberta N da origem em

(E,τ), o conjunto $\{x \in X;\ g(x) \notin N\}$ é compacto. Indicaremos por $\mathcal{B}_o(X;E)$ o conjunto de todas as $g \in \ell_\infty(X;E)$ que são nulas no infinito, i.é.,

$$\mathcal{B}_o(X;E) = \{g \in \ell_\infty(X;E);\quad g \text{ é nula no infinito}\}.$$

1.3. DEFINIÇÃO: Seja X um espaço topológico e (E,τ) um espaço vetorial topológico sobre $(F,|\cdot|)$. Dado um subespaço vetorial $L \subset \mathcal{F}(X;E)$, diz-se que *uma função* $v : X \to F$ *é um* *L-peso* se $vf \in \mathcal{B}_o(X;E)$ para toda função $f \in L$.

De agora em diante, e até o fim deste capítulo, sempre suporemos que X é um espaço topológico não vazio, $(F,|\cdot|)$ é um anel de divisão não trivialmente valorizado e que (E,τ) é um espaço vetorial topológico sobre $(F,|\cdot|)$. Mais ainda, L sempre indicará um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X;E)$ e V um conjunto não vazio de L-pesos.

Nesta circunstâncias, queremos definir uma topologia τ_V sobre L que torne o par (L,τ_V) um espaço vetorial topológico sobre $(F,|\cdot|)$. Para isso, vamos escolher e fixar um sistema fundamental $\mathcal{N}_E$ de vizinhanças da origem em (E,τ), que suporemos equilibradas e abertas. Para cada $v \in V$ e $N \in \mathcal{N}_E$ definiremos

$$W(v;N) = \{f \in L;\ v(x)f(x) \in N, \quad \text{para todo} \quad x \in X\}.$$

Se $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ e $N \in \mathcal{N}_E$,

$$W(v_1,v_2,\ldots,v_m;N) = \bigcap_{i=1}^{m} W(v_i;N)$$

Seja $\mathcal{B}$ a coleção, evidentemente não vazia, de todos os conjuntos da forma $W(v_1,v_2,\ldots,v_m;N)$ onde $v_1,v_2,\ldots,v_m \in V$, $N \in \mathcal{N}_E$ e $m \in \mathbb{N}$.

1.4. PROPOSIÇÃO: *A coleção $\mathcal{B}$ é uma base de filtro sobre* L *que satisfaz as condições* (a), (b) *e* (c) *do Teorema 1.1.*

Para a demonstração da Proposição 1.4 vamos necessitar da seguinte proposição que enunciaremos como lema.

1.5. LEMA: *Seja* N *uma vizinhança equilibrada da origem em* (E,τ). *Se* $|\mu| = |\lambda|$, *então* $\lambda N = \mu N$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $|\mu| = |\lambda| = 0$ nada há a demonstrar, pois $\lambda N = \mu N = \{0\}$.

Suponhamos $|\mu| = |\lambda| \neq 0$. Para todo $z \in N$ vem

$$\mu^{-1}z = \mu^{-1}\lambda\lambda^{-1}z \in \mu^{-1}\lambda N \subset N$$

se $\lambda^{-1}z \in N$, pois $|\mu^{-1}\lambda| = 1$ e N é equilibrada. Logo $\lambda N \subset \mu N$. Como a condição $|\mu| = |\lambda| \neq 0$ é simétrica em λ e μ, $\mu N \subset \lambda N$ também é verdadeira.

1.6. DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 1.4: $\mathcal{B}$ *é base de filtro sobre* L:

Evidentemente, $\mathcal{B}$ é não vazia e todos os elementos de $\mathcal{B}$ são conjuntos não vazios: $0 \in B$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Por outro lado, dados dois conjuntos B_1 e B_2 de $\mathcal{B}$, sua intersecção $B_1 \cap B_2$ contém um conjunto B_3 de $\mathcal{B}$. Com efeito, existem $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $w_1, w_2, \ldots, w_m \in V$ e N_1 e N_2 de $\mathcal{N}_E$ tais que

$$B_1 = W(v_1, v_2, \ldots, v_n; N_1)$$

e

$$B_2 = W(w_1, w_2, \ldots, w_m; N_2).$$

Como $\mathcal{N}_E$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem em (E, τ), existe $N_3 \in \mathcal{N}_E$ com $N_3 \subset N_1 \cap N_2$.

Claramente,

$$B_3 = W(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m; N_3)$$

pertence a $\mathcal{B}$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(a) Seja $W(v_1, \ldots, v_r; N) \in \mathcal{B}$. Existe $M \in \mathcal{N}_E$ tal que $M + M \subset N$. Tomemos f e $g \in W(v_1, \ldots, v_r; M)$. Para $1 \leq i \leq r$ e para todo $x \in X$

$$(v_i f)(x) + (v_i g)(x) \in M + M \subset N$$

e portanto,

$$W(v_1, \ldots, v_r; M) + W(v_1, \ldots, v_r; M) \subset W(v_1, \ldots, v_r; N).$$

(b) Sejam $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ e $W(v_1,\ldots,v_r;N) \in \mathcal{B}$. Existe uma vizinhança $M \in \mathcal{N}_E$ tal que $M \subset \lambda N$. Tomemos $f \in W(v_1,\ldots,v_r;M)$. Para $1 \leq i \leq r$ e para todo $x \in X$,

$$v_i(x)(\lambda^{-1}f)(x) = \lambda^{-1}(\lambda v_i(x)\lambda^{-1})f(x).$$

Como $v_i(x)f(x) \in M$ e $|v_i(x)| = |\lambda v_i(x)\lambda^{-1}|$ temos pelo Lema 1.5 que $(\lambda v_i(x)\lambda^{-1})f(x) \in M$ e por conseguinte, $v_i(x)(\lambda^{-1}f)(x) \in \lambda^{-1}M \subset N$. Provamos que

$$\lambda^{-1}f \in W(v_1, \ldots, v_r;N)$$

e portanto

$$W(v_1,\ldots,v_r;M) \subset \lambda W(v_1,\ldots,v_r;N).$$

(c) Mostraremos que $W(v_1,\ldots,v_r;N)$ é equilibrado. Sejam $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$ e $f \in W(v_1,\ldots,v_r;N)$. Para $1 \leq i \leq r$ e para todo $x \in X$,

$$v_i(x)(\lambda f)(x) = \lambda(\lambda^{-1}v_i(x)\lambda)f(x).$$

Por hipótese, $v_i(x)f(x) \in N$ e como $|v_i(x)| = |\lambda^{-1}v_i(x)\lambda|$, temos pelo Lema 1.5 que

$$(\lambda^{-1}v_i(x)\lambda)f(x) \in N$$

e portanto,

$$v_i(x)(\lambda f)(x) \in \lambda N \subset N \quad \text{porque } N \text{ é equilibrada.}$$

Provamos que $f \in \lambda^{-1}W(v_1,\ldots,v_r;N)$, logo

$$\lambda W(v_1,\ldots,v_r;N) \subset W(v_1,\ldots,v_r;N).$$

Demonstraremos agora que todo elemento de $\mathcal{B}$ é absorvente. Consideraremos, para esse efeito, uma função $f \in L$ e um elemento $W(v_1,\ldots,v_r;N) \in \mathcal{B}$. Para cada i, $1 \leq i \leq r$, $v_i f \in \mathcal{B}_o(X;E)$. Logo $(v_i f)(X)$ é limitado em E e consequentemente, $\bigcup_{i=1}^{r} (v_i f)(X)$ é também limitado em E; assim, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, $(v_i f)(X) \subset \lambda N$, $1 \leq i \leq r$. Com isso, $f \in W(v_1,\ldots,v_r;\lambda N)$. Para todo $x \in X$ e $1 \leq i \leq r$, $v_i(x)\lambda^{-1}f(x) = \lambda^{-1}(\lambda v_i(x)\lambda^{-1})f(x)$. Pelo Lema 1.5, $(\lambda v_i(x)\lambda^{-1})f(x) \in \lambda N$ e portanto $v_i(x)\lambda^{-1}f(x) \in N$ o que implica que $\lambda^{-1}f \in W(v_1,\ldots,v_r;N)$ ou $f \in \lambda W(v_1,\ldots,v_r;N)$.

Isto termina a demonstração da Proposição 1.4. Pelo Teorema 1.1, existe uma topologia sobre L, que indicaremos por τ_V tal que (L,τ_V) é um espaço vetorial topológico sobre $(F,|\cdot|)$ e $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem em (L,τ_V).

1.7. DEFINIÇÃO: Se $L \subset \mathcal{F}(X;E)$ é um subespaço vetorial e V é uma coleção de L-pesos, o espaço vetorial topológico (L,τ_V) é dito um *espaço de Nachbin*.

O nome de espaço de Nachbin para os espaços (L,τ_V) foi sugerido por Machado e Prolla [9].

Se (E,τ) é um espaço vetorial topológico de Hausdorff e se V não se anula em X, isto é dado $x \in X$ existe um elemento $v \in V$ tal que $v(x) \neq 0$, a topologia τ_V é de Hausdorff.

1.8. EXEMPLOS DE ESPAÇOS DE NACHBIN

1.8.1: Consideremos o espaço vetorial $L = C(X;E)$. Para cada subconjunto compacto $K \subset X$, denotemos por χ_K a sua função característica, com valores em F. Tomemos uma função f em L e uma vizinhança aberta da origem N em (E,τ). O conjunto

$$B = \{x \in X;\ f(x) \notin N\}$$

é fechado por causa da continuidade de f. Como K é compacto vem que

$$K \cap B = \{x \in X;\ \chi_K(x)f(x) \notin N\}$$

é compacto. Logo $\chi_K f \in \mathcal{B}_o(X;E)$ para todo subconjunto compacto K de X.

Em $C(X;E)$, um sistema fundamental de vizinhanças do zero na topologia compacto-aberta, κ, é dado por

$$W(K;N) = \{f \in C(X;E);\ f(K) \subset N\}$$

para todo subconjunto compacto K de X e toda vizinhança aberta

$N \in \mathcal{N}_E$.

Tomemos $K_1, K_2, \ldots, K_r$ subconjuntos compactos de X e $K = \bigcap_{i=1}^{r} K_i$ então,

$$W(K;N) = W(\chi_{K_1}, \ldots, \chi_{K_r}; N)$$

para toda vizinhança aberta e equilibrada $N \in \mathcal{N}_E$.

Concluímos que a topologia τ_V em L coincide com a topologia compacto-aberta κ.

1.8.2: Tomemos X localmente compacto, Hausdorff e $L = C_o(X;E)$ o conjunto das funções de $C(X;E)$ que são nulas no infinito, isto é, $C_o(X;E) = B_o(X;E) \cap C(X;E)$. Equivalentemente, $C_o(X;E)$ é o conjunto de todas as $f \in C(X;E)$ tais que, dada uma vizinhança N da origem em E existe um compacto $K \subset X$ tal que $f(x) \in N$ para todo $x \notin K$. Vemos então que $C_o(X;E)$ é um subespaço vetorial de $C(X;E)$.

A função v de X em F definida por $v(x) = 1$ para todo $x \in X$ é um L-peso.

Em $C_b(X;E)$, um sistema fundamental de vizinhanças do zero na topologia da convergência uniforme, σ, em X é dado por:

$$W(N) = \{f \in C_b(X;E);\ f(X) \subset N\}$$

para toda vizinhaça aberta e equilibrada $N \in \mathcal{N}_E$.

Por outro lado, a topologia τ_V em L tem para sistema fundamental de vizinhanças da origem os conjuntos da forma

$$W(1;N) = \{f \in L;\ f(x) \in N, \text{ para todo } x \in X\}$$

para toda vizinhança aberta e equilibrada $N \in \mathcal{N}_E$.

Portanto, a topologia τ_V em L, coincide com a topologia da convergência uniforme σ.

1.8.3: Consideremos ainda X locamente compacto. Tomemos para L o espaço vetorial $\mathcal{C}_b(X;E)$.

Para cada função $f \in \mathcal{C}_b(X;E)$ e para cada vizinhança aberta e equilibrada $N \in \mathcal{N}_E$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| > \delta$, $f(X) \subset \lambda N$. Fixemos $\lambda_o \in F$ satisfazendo $|\lambda_o| > \delta$.

Seja φ uma função de $C_o(X;F)$. Se $x \in X$ é tal que $|\varphi(x)| < \frac{1}{|\lambda_o|}$ então $\varphi(x)f(x) \in \varphi(x)\lambda_o N \subset N$.

Provamos que o conjunto fechado

$$\{x \in X;\ \varphi(x)f(x) \notin N\}$$

está contido no compacto

$$\{x \in X;\ |\varphi(x)| \geq \frac{1}{|\lambda_o|}\}.$$

Logo, $\{x \in X;\ \varphi(x)f(x) \notin N\}$ é compacto e portanto $V = \mathcal{C}_o(X;E)$ é um conjunto de L-pesos.

A topologia τ_V em $L = \mathcal{C}_b(X;E)$ definida por $V = \mathcal{C}_o(X;F)$ será chamada *topologia estrita* (em analogia com o caso $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e indicada por β.

Vamos agora demonstrar o seguinte resultado:

1.9. PROPOSIÇÃO: *Em* $C_b(X;E)$, *onde* X *é um espaço localmente compacto e* (E,τ) *é um espaço vetorial topológico sobre* $(F,|\cdot|)$, *temos que a topologia compacto-aberta* κ *é menos fina que a topologia estrita* β, *esta, menos fina que a topologia da convergência uniforme* σ; *isto é,* $\kappa \leq \beta \leq \sigma$.

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r \in C_o(X;F)$. Como para cada i, $1 \leq i \leq r$, $\varphi_i(X)$ é limitado em F, temos que $B = \bigcup_{i=1}^{r} \varphi_i(X)$ é também um limitado em F, portanto existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| > \delta$ e para todo $b \in B$, $|b| < |\lambda|$.

Seja $N \in \mathcal{N}_E$ uma vizinhança aberta e equilibrada. Fixemos $\lambda_o \in F$ com $|\lambda_o| > \delta$ e tomemos $M = \lambda_o^{-1}N$.

Se $g \in W(1;M)$, para todo $1 \leq i \leq r$ e $x \in X$, temos que

$$\varphi_i(x)g(x) \in \varphi_i(x)M = \varphi_i(x)\lambda_o^{-1}N \subset N$$

o que implica que $g \in W(v_1, \ldots, v_r;N)$. Com isto provamos que $\beta \leq \sigma$.

Tomemos $K \subset X$ compacto, $N \in \mathcal{N}_E$ aberta e equilibrada e U uma vizinhança compacta de K. Seja $\varphi \in C_o(X;F)$ a função definida por $\varphi(x) = 1$ se $x \in K$, $\varphi(x) = 0$ se $x \notin U$ e $|\varphi(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$.

Se $f \in W(\varphi;N)$, temos que para todo $x \in K$, $f(x) = \varphi(x)f(x) \in N$ e portanto $f \in W(\chi_K;N)$.

Provamos finalmente que $\kappa \leq \beta$.

Vamos estabelecer um resultado de caracter auxiliar.

1.10. PROPOSIÇÃO: *Se* V *é uma família de* L*-pesos que não se anula em* X*, então para cada* $x \in X$*, a aplicação linear* $\delta_x : (L,\tau_V) \to (E,\tau)$ *definida por* $\delta_x(f) = f(x)$ *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos um ponto $x_o \in X$, uma vizinhança aberta e equilibrada $N \in \mathcal{N}_E$ e $v \in V$ tal que $v(x_o) \neq 0$. Seja $M = v(x_o)N \in \mathcal{N}_E$. Sabemos que $W(v;M)$ é uma vizinhança do zero na topologia τ_V. Para toda função $g \in W(v;M)$ e para todo $x \in X$, $v(x)g(x) \in M$. Fazendo $x = x_o$, vem que

$$g(x_o) = (v(x_o))^{-1}v(x_o) \cdot g(x_o) \in (v(x_o))^{-1}M = N.$$

Portanto, δ_{x_o} é contínua em 0 e, como é linear, δ_{x_o} é contínua em L.

Outros conceitos que venhamos a utilizar sem definição explícita poderão ser encontrados num dos tratados usuais de análise não arquimediana: Monna [11] e Narici, Beckenstein e Bachman [14].

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS QUASE NÃO ARQUIMEDIANOS

Consideremos um espaço vetorial topológico (E,τ) sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F,|\cdot|)$.

2.1. DEFINIÇÃO: Dizemos que um subconjunto S de E é *quase não arquimediano*, se existe $\delta_S > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais) e para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta_S$,

$$\underbrace{S + S + \ldots + S}_{n\text{-vezes}} \subset \lambda S$$

2.2. DEFINIÇÃO: Um espaço vetorial topológico é *quase não arquimediano* se existe um sistema fundamental de vizinhanças do zero quase não arquimedianas.

Observamos que todo conjunto não arquimediano é quase não arquimediano. Com efeito, um conjunto $S \subset E$ é dito *não arquimediano* se $S + S \subset S$. Segue-se daí que $\underbrace{S + S + \ldots + S}_{n\text{-vezes}} \subset S$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, todo espaço vetorial topológico não arquimediano é um espaço vetorial topológico quase não arquimediano.

Vamos demonstrar agora um resultado básico.

2.3. PROPOSIÇÃO: *Todo espaço vetorial topológico quase não arquimediano possui um sistema fundamental de vizinhanças do zero, abertas, quase não arquimedianas e equilibradas.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam (E,τ) um espaço vetorial quase não arquimediano e $\mathcal{W}$ um sistema fundamental de vizinhanças quase não arquimedianas do zero em (E,τ). Seja $W \in \mathcal{W}$. Existe $\delta_W > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta_W$, $\underbrace{W + \ldots + W}_{\text{n-vezes}} \subset \lambda W$.

Fixemos $\lambda_o \in F$ com $|\lambda_o| \geq \delta_W$.

Designemos por K o núcleo equilibrado de W, que é por definição o maior conjunto equilibrado contido em W.

Como $\lambda_o^{-1}K$ é equilibrado, temos que $\lambda_o^{-1}K + \ldots + \lambda_o^{-1}K$ também é equilibrado. Mas,

$$\lambda_o^{-1}K + \ldots + \lambda_o^{-1}K \subset \lambda_o^{-1}W + \ldots + \lambda_o^{-1}W \subset W$$

e como K é o maior conjunto equilibrado contido em W, vem que

$$\lambda_o^{-1}K + \ldots + \lambda_o^{-1}K \subset K .$$

Chamemos de V o interior de K. Então V é vizinhança aberta do zero e além disso,

$$V + \ldots + V \subset K + \ldots + K \subset \lambda_o K .$$

Mas como $\lambda_o^{-1}V + \ldots + \lambda_o^{-1}V$ é aberto e $\lambda_o^{-1}V + \ldots + \lambda_o^{-1}V \subset K$ temos que $\lambda_o^{-1}V + \ldots + \lambda_o^{-1}V \subset V$.

Demonstramos pois que V é quase não arquimediana.

Mostraremos agora que V é equilibrada.

Seja $\mu \in F$ com $|\mu| \leq 1$. Se $\mu = 0$ então para todo $x \in V$, $\mu x = 0 \in V$. Suponhamos $\mu \neq 0$. A aplicação φ definida em E por $t \to \varphi(t) = \mu t \in E$ é um homeomorfismo e assim $\varphi(V) = \mu V$ é aberto em E. Além disso, $\varphi(V) \subset \varphi(K)$ isto significa que $\mu V \subset \mu K$. Como K é equilibrado, $\mu K \subset K$ e portanto

$$\mu V \subset \text{interior}\ (\mu K) \subset \text{interior}\ (K) = V.$$

Demonstramos pois que V é equilibrada.

2.4. DEFINIÇÃO: Consideremos um espaço vetorial E e $\|\cdot\|$ uma seminorma em E. Diremos que $(E, \|\cdot\|)$ é *quase não arquimediano* se existe uma constante $C \geq 1$ tal que para toda família finita $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$,

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq C \max\{\|x_i\|;\ i = 1, \ldots, n\}$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

2.5: EXEMPLOS DE ESPAÇOS NORMADOS QUASE NÃO ARQUIMEDIANOS

2.5.1: Seja $(F,|\cdot|)$ uma anel de divisão não trivialmente valorizado tal que $|\cdot|$ é não arquimediano. Consideremos o espaço vetorial $E = F \times F$. Definimos em E a norma

$$\|(x,y)\| = |x| + |y| \quad \text{para todo} \quad x,\ y \in F.$$

Esta norma não é não arquimediana. Com efeito,

$$\|(1,0) + (0,1)\| = \|(1,1)\| = 2 \quad \text{mas} \quad \|(1,0)\| = 1 \ \text{e} \ \|(0,1)\| = 1.$$

Portanto $\|(1,0) + (0,1)\| > \max\{\|(1,0)\|, \|(0,1)\|\}$. Mas ela é quase não arquimediana com constante $C = 2$. Com efeito, para toda família finita de pontos $(x_i,y_i) \in E$, $1 \leq i \leq n$ temos que

$$\|(x_1,y_1) + \dots + (x_n,y_n)\| = \|(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i)\| = |\sum_{i=1}^{n} x_i| + |\sum_{i=1}^{n} y_i| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} (|x_i| + |y_i|) + \max_{1\leq i\leq n} (|y_i| + |x_i|) =$$

$$= 2 \max_{1\leq i\leq n} (|x_i| + |y_i|) = 2 \max_{1\leq i\leq n} \|(x_i,y_i)\|.$$

2.5.2: Tomemos $E = F^m$, $m \geq 2$, com a norma ℓ_1 (isto é, $\|(x_1,\dots,x_m)\| = \sum_{C=1}^{m} |x_i|$). Então E é quase não arquimediano com constante $C = m$.

Demonstração análoga à do exemplo 2.5.1.

2.5.3: Consideremos um espaço normado não arquimediano $(E, \|\cdot\|)$ e tomemos $G = (E^m$, norma $l_1)$ então, G é um espaço normado quase não arquimediano.

Vamos demonstrar a seguir que o exemplo 2.5.1 não pode ser melhorado para $E = F$ em vez de $E = F \times F$. Com efeito vamos ver que para um anel de divisão F munido de uma valorização $|\cdot|$, as noções de quase não arquimediana e de não arquimediana coincidem.

2.6. PROPOSIÇÃO: *Seja* $|\cdot| : F \to \mathbb{R}^+$ *uma valorização no anel de divisão* F. *São equivalentes:*

(1) $|\cdot|$ *é não arquimediana;*

(2) $|\cdot|$ *é quase não arquimediana;*

(3) *existe uma constante* $M \geq 1$ *tal que* $|n| \leq M$ *para todo inteiro natural* $n \in F$.

DEMONSTRAÇÃO: (1) $\Rightarrow$ (2): é claro.

(2) $\Rightarrow$ (3): se $|\cdot|$ é quase não arquimediano, existe uma constante $C \geq 1$ tal que para todo inteiro natural $n \in F$,

$$|n| = |1 + \dots + 1| \leq C \max \{1,\dots,1\} = C,$$

fazendo $M = C$ segue o resultado.

(3) $\Rightarrow$ (1): tomemos x e y em F e suponhamos que $|x| \geq |y| > 0$. Neste caso, temos que $1 \geq |x^{-1}y|$.

Então, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$|x + y|^n = |x(1 + x^{-1}y)|^n = |x|^n |1 + x^{-1}y|^n = |x|^n |(1 + x^{-1}y)^n| =$$

$$|x|^n \cdot |\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{-1}y)^k| \leq |x|^n \cdot \sum_{k=0}^{n} |\binom{n}{k}| \cdot |x^{-1}y|^k \leq |x|^n \cdot M \cdot (n+1).$$

Portanto,

$$|x + y| \leq |x| \cdot (M(n + 1))^{1/n}.$$

Tomando o limite, quando $n \to \infty$, vem

$$|x + y| \leq |x| = \max \{|x|, |y|\}.$$

Antes de enunciarmos a Proposição 2.7 relembramos que um espaço vetorial topológico (E,τ) é próprio se $E \neq \overline{\{0\}}$.

2.7. PROPOSIÇÃO: *Se (E,τ) é um espaço vetorial topológico próprio e quase não arquimediano sobre $(F,|\cdot|)$, então a valorização $|\cdot|$ é não arquimediana.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (3) da Proposição 2.6, basta demonstrarmos que existe uma constante $M \geq 1$ tal que $|n| \leq M$ para todo inteiro natural $n \in F$.

Como (E,τ) é próprio, tomemos $x_o \in E$ tal que $x_o \notin \overline{\{0\}}$.

Tomemos $A = \{nx_o, n \in F\} \subset Fx_o \subset E$ e uma vizinhança do zero

W, quase não arquimediana, e equilibrada (veja Proposição 2.3). Existe então $\delta_W > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta_W$, $\underbrace{W + \ldots + W}_{m\text{-vezes}} \subset \lambda W$. Fixemos $\lambda_o \in F$ com $|\lambda_o| \geq \delta_W$.

O conjunto $\lambda_o^{-1}W$ é ainda uma vizinhança do zero e portanto é absorvente. Logo, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mu \in F$ com $|\mu| \geq \delta$, $x_o \in \mu(\lambda_o^{-1}W)$.

Tomemos $n \in F$ e $\mu_o \in F$ com $|\mu_o| \geq \delta$. Então

$$n \cdot \mu_o^{-1} x_o = (1 + 1 + \ldots + 1)\mu_o^{-1} x_o = \mu_o^{-1} x_o + \mu_o^{-1} x_o + \ldots + \mu_o^{-1} x_o \in$$

$$\lambda_o^{-1} W + \lambda_o^{-1} W + \ldots + \lambda_o^{-1} W = \lambda_o^{-1}(W + W + \ldots + W) \subset W.$$

(Nas somas acima, todas as parcelas são repetidas o mesmo número de vezes, a saber $n \in \mathbb{N}$).

Como $|n\mu_o^{-1}| = |\mu_o^{-1} n|$, vem pelo Lema 1.5, $n x_o \in \mu_o W$.

Concluímos que A é limitado em (E,τ).

Consideremos a aplicação linear

$$\varphi : Fx_o \subset E \to F \quad \text{definida por} \quad \varphi(\lambda x_o) = \lambda$$

para todo $\lambda \in F$. Como φ é contínua,

$$\varphi(A) = \{\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-vezes}} ;\ n \in \mathbb{N}\} \subset F$$

é limitado como subconjunto de $(F,|\cdot|)$. Logo existe constante M que podemos supor $M \geq 1$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-vezes}}| \leq M.$$

CAPÍTULO 3

LOCALIZABILIDADE

Durante todo este capítulo X é um espaço topológico não vazio; $(F,|\cdot|)$ um anel de divisão com valorização não trivial; (E,τ) um espaço vetorial topológico, próprio, sobre $(F,|\cdot|)$.

Se $A \subset C(X;F)$ é um subconjunto não vazio, definimos uma relação de equivalência em X da seguinte maneira: para todo par $x, y \in X$, x é equivalente a y módulo A se e somente se $a(x) = a(y)$ para todo $a \in A$. Denotaremos por

$$\Delta = \{(x,y);\ x \equiv y (\text{mod } A)\} \subset X \times X,$$

por $\Delta(x)$ a classe de equivalência de $x \in X$, e por P_A o conjunto de todas tais classes de equivalência módulo A.

O conjunto $A \subset C(X;F)$ é *separador* em X se as classes de equivalência $\Delta(x)$, $x \in X$ são conjuntos reduzidos a pontos; isto é, $\Delta(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$.

Durante todo o restante deste capítulo, L sempre indicará um subespaço vetorial de $F(X;E)$ e V um conjunto de L-pesos. Então (L,τ_V) indicará o correspondente espaço de Nachbin.

Se $A \subset C(X;F)$ é uma subálgebra e $W \subset L$ um subespaço vetorial que é um A-módulo; isto é, se $a \in A$ e $w \in W$ então $a \cdot w \in W$; queremos descrever a aderência de W em L na topologia τ_V. Para tal, daremos o conceito de localizabilidade e mais dois resultados básicos que estão enunciados como lemas.

3.1. DEFINIÇÃO: Se W é um subespaço vetorial de L e A um subconjunto de $C(X;F)$, denotemos por $L_A(W)$ *o conjuntos das funções* $f \in L$ *tais que para todo* $x \in X$, *para toda vizinhança* $N \in \mathcal{N}_E$, *para toda família* $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ de V, *existe* g_x *em* W *tal que* $v_i(y)(f(y) - g_x(y)) \in N$, *para todo* $y \in \Delta(x)$ *e* $1 \leq i \leq r$.

3.2. DEFINIÇÃO: Dizemos que o A-módulo $W \subset L$ é *localizável sob* A se $\overline{W} = L_A(W)$, onde a barra indica o fecho na topologia τ_V.

Observamos que $\overline{W} \subset L_A(W)$, portanto W é localizável sob A se $L_A(W) \subset \overline{W}$.

Os casos real e complexo auto-adjunto do problema de localizabilidade foi introduzido e resolvido, para funções escalares, por L. Nachbin [12] e [13].

O caso complexo não auto-adjunto foi resolvido por Machado e Prolla [8]. Uma exposição completa desses resultados se encontra em Prolla [16].

3.3. LEMA: *Suponhamos* $(F, |\cdot|)$ *não arquimediano e* $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra contendo as constantes. Dada uma classe de equivalência* $\Delta(x)$ *e um subconjunto compacto* $K \subset X$ *disjunto de* $\Delta(x)$, *existe uma função* $b \in A$ *tal que*

(1) $|b(x)| \leq 1$ *para todo* $x \in X$;

(2) $|b(t)| < 1$ *para todo* $t \in K$;

(3) $b(y) = 1$ *para todo* $y \in \Lambda(x)$.

DEMONSTRAÇÃO: Escolhemos $y_o \in \Delta(x)$. Para cada $t \in K$, como A contém as constantes, existe $a_t \in A$ tal que $1 = a_t(y_o) \neq a_t(t) = 0$.

Como $(F, |\cdot|)$ é não arquimediano, A contém as constantes e $\overline{a_t(X)}$ é compacto em F, podemos aplicar o Lema de Kaplansky [7]. Portanto, existe um polinômio p com coeficientes em F, satisfazendo: $p(1) = 1$, $p(0) = 0$ e $|p(s)| \leq 1$ para $s \in \overline{a_t(X)}$.

Definimos $b_t = p(a_t)$. Obtemos então $b_t \in A$, $b_t(y_o) = 1$, $0 = b_t(t) \neq 1$ e $|b_t(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$.

Seja

$$U_t = \{x \in X;\ |b_t(x)| < 1\}.$$

U_t é aberto em X e como $b_t(t) = 0$, temos que $t \in U_t$. Da compacidade de K, existem $t_1, t_2, \ldots, t_n \in K$, tais que

$$K \subset U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}.$$

Tomemos $b = b_{t_1} \cdot b_{t_2} \cdot \ldots \cdot b_{t_n}$. Então $b \in A$,

$$b(y) = 1 \quad \text{para todo} \quad y \in \Delta(x),$$

$$|b(x)| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X \quad \text{e}$$

$$|b(t)| < 1 \quad \text{para todo} \quad t \in K \quad \text{pois}$$

$$K \subset U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}.$$

O primeiro lema está, pois, demonstrado.

3.4. LEMA: *Suponhamos* $(F,|\cdot|)$ *não arquimediano e* $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra contendo as constantes. Para cada classe de equivalência* $\Delta(x)$, *seja* $K_x \subset X$ *um compacto disjunto de* $\Delta(x)$. *Então existem classes de equivalência* $\Delta(x_1), \Delta(x_2), \ldots, \Delta(x_n)$ *tais que dado* $0 < \delta < 1$, *existem* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ *satisfazendo*

(1) $|a_i(x)| \leq 1$ *para todo* $x \in X$ *e* $i = 1,\ldots,n$;

(2) $|a_i(t)| < \delta$ *para todo* $t \in K_{x_i}$ *e* $i = 1,\ldots,n$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i(x) = 1$ *para todo* $x \in X$.

DEMONSTRAÇÃO: Escolhamos um elemento $\Delta(x_1)$ em P_A. Seja P a coleção de todos os $\Delta(x) \in P_A$ tais que $\Delta(x) \cap K_{x_1} \neq \emptyset$.

Para cada $\Delta(x) \in P$ seja $b_x \in A$ dada pelo Lema 3.3 e consideremos o número real r_x, dado por

$$0 \leq \sup\{|b_x(t)|;\ t \in K_x\} = r_x < 1$$

e o conjunto

$$B_x = \{t \in X;\ |b_x(t)| \geq 1\}.$$

Para todo $x \in X$, temos que $\Delta(x) \subset B_x$ e a coleção $\{B_x;\ \Delta(x) \in P\}$ é uma cobertura aberta-fechada do compacto K_{x_1}. Por compacidade, existem $\Delta(x_2)$, $\Delta(x_3),\ldots,\Delta(x_n) \in P$ tais que a coleção finita $\{B_{x_2}, B_{x_3}, \ldots, B_{x_n}\}$ é uma cobertura de K_{x_1}.

Cada $b_i = b_{x_i} \in A$, $i = 2,\ldots,n$ é tal que

$$b_i(y) = 1 \quad \text{para todo} \quad y \in \Delta(x_i);$$

$$|b_i(t)| \geq 1 \quad \text{para todo} \quad t \in B_{x_i};$$

$$|b_i(t)| \leq r_i \quad \text{para todo} \quad t \in K_{x_i} \quad (\text{onde } r_i = r_{x_i}) \text{ e}$$

$$|b_i(x)| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Seja $0 < \delta < 1$. Tomemos o compacto $K = \bigcup_{j=2}^{n} \overline{b_j(X)}$ e D o aberto-fechado definido por

$$D = \{z \in F;\ |z| \geq 1\}.$$

Consideremos χ_D a função característica de D, que é contínua.

Por Weierstrass-Kaplansky [7], exite p, polinômio em F tal que $|p(t) - \chi_D(t)| < \delta$ para todo $t \in K$.

Sejam $g_i = p(b_i) \in A$, $i = 2,\ldots,n$ e

$$a_2 = g_2$$

$$a_3 = (1 - g_2)g_3$$

$$a_n = (1 - g_2)(1 - g_3) \quad \ldots \quad (1 - g_{n-1})g_n .$$

Então, $a_i \in A$, $a_i(t) = (1 - g_2(t)) \ \ldots \ (1 - g_{i-1}(t))g_i(t)$ para todo $t \in X$ e $i = 2,\ldots,n$.

Para cada $x \in X$ e cada $j = 2, \ldots, n$, temos dois casos a considerar:

1º) se $|b_j(x)| < 1$ então $|1 - g_j(x)| = |1 - p(b_j(x))| = 1$

2º) se $|b_j(x)| = 1$ então $|1 - g_j(x)| = |1 - p(b_j(x))| < \delta$.

Ainda, se $x \in K_{x_j}$ então $|b_j(x)| \leq r_j < 1$ e

$$|g_j(x)| = |p(b_j(x))| = |p(b_j(x)) - 0| < \delta.$$

Portanto, para $2 \leq i \leq n$, temos que

$$|a_i(x)| < \delta \quad \text{para todo} \quad x \in K_{x_i} \quad \text{e}$$

$$|a_i(x)| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Definiremos agora, para todo $t \in X$,

$$a_i(t) = (1 - g_2(t))(1 - g_3(t)) \ \ldots \ (1 - g_n(t)).$$

Seja $x \in X$, $2 \leq i \leq n$. Se $|b_i(x)| = 1$, então

$$|1 - g_i(x)| = |1 - p(b_i(x)| < \delta < 1.$$

Se $|b_i(x)| < 1$, então $|1 - g_i(x)| = |1 - p(b_i(x))| = 1$.

Portanto, $|a_1(x)| \leq 1$, para todo $x \in X$.

Se $x \in K_{x_1}$, então $x \in B_{x_i}$ para algum $i \in \{2, \ldots, n\}$. Logo $|b_i(x)| = 1$ e $|1 - g_i(x)| < \delta$. Portanto

$$|a_i(x)| < \delta \qquad \text{se} \qquad x \in K_{x_1}.$$

Finalmente, observemos que para todo $x \in X$:

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(x) = 1 - \prod_{i=2}^{n} (1 - g_i(x)).$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) = 1, \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

O Lema está, pois, demonstrado.

3.5. TEOREMA: *Sejam* X *um espaço topológico não vazio;* (E,τ) *um espaço vetorial topológico quase não arquimediano próprio sobre* $(F,|\cdot|)$; (L,τ_V) *um espaço de Nachbin contido em* $F(X;E)$; $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra e* W *um subespaço vetorial de* L *que é um* A*-módulo.*

Então W *é localizável sob* A *em* L.

DEMONSTRAÇÃO: Podemos sem perda de generalidades supor que A contém as constantes.

Tomemos $f \in L_A(W)$, $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ e uma vizinhança $N \in \mathcal{N}_E$.

Como (E,τ) é quase não arquimediano, existe uma vizinhança do zero em E, M, aberta, equilibrada e quase não arquimediana tal que $M \subset N$. Existe também $\delta_M > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta_M$, $\underbrace{M + \ldots + M}_{n\text{-vezes}} \subset \lambda M$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Fixemos $\lambda_o \in F$ com $|\lambda_o| \leq \delta_M$ e tomemos $U = \lambda_o^{-1}M$.

Da definição de $L_A(W)$, temos que para toda classe de equivalência $\Lambda(x) \in P_A$, existe $g_x \in W$ tal que $v_i(y)(f(y) - g_x(y)) \in U$, para todo $y \in \Delta(x)$ e $1 \leq i \leq r$.

Como U é aberto e para cada $1 \leq i \leq r$ $v_i(f - g_x)$ é nula no infinito, o conjunto

$$K_x^i = \{t \in X;\ v_i(t)(f(t) - g_x(t)) \notin U\} \qquad \text{é compacto.}$$

Consideremos o compacto

$$K_x = \bigcup_{i=1}^{r} K_x^i$$

como $K_x^i \cap \Delta(x) = \emptyset$, temos que $K_x \cap \Delta(x) = \emptyset$.

Pelo Lema 3.4 existem $\Delta(x_1), \Delta(x_2), \ldots, \Delta(x_n) \in P_A$ tais que para cada $0 < \delta < 1$, existem funções $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ satisfazendo:

(1) $|a_j(x)| \leq 1$, $\forall x \in X$ e $j = 1, \ldots, n$;

(2) $|a_j(t)| < \delta$, $\forall t \in K_j = K_{x_j}$;

(3) $\sum_{j=1}^{n} a_j(x) = 1, \quad \forall x \in X.$

Denotemos por g_j as correspondentes funções g_{x_j}.

Tomemos

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{n} v_i(f - g_j)(X) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i .$$

Como B é limitado em E, existe $\delta^{-1} > 1$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta^{-1}$, $B \subset \lambda U$. Para este $1 > \delta > 0$ consideremos as funções $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ que satisfazem (1) a (3). Definiremos

$$g = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n .$$

Então, $g \in W$ e para $1 \leq i \leq r$ e para $x \in X$,

$$v_i(x)(f(x) - g(x)) = v_i(x)(f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j(x) g_j(x)) =$$

$$= v_i(x)(\sum_{j=1}^{n} a_j(x) f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j(x) g_j(x)) =$$

$$= v_i(x) \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(f(x) - g_j(x)).$$

Vamos considerar dois casos

1º) $x \in K_j$. Então $|a_j(x)| < \delta$ e ainda, se $a_j(x) \neq 0$ então $|(a_j(x))^{-1}| > \delta^{-1}$ e portanto $(a_j(x))^{-1} U \supset B$. Logo

$$a_j(x)v_i(x)(f(x) - g_j(x)) \in a_j(x)B \subset a_j(x)(a_j(x))^{-1}U = U = \lambda_o^{-1}M$$

e por causa do Lema 1.5, pois $\lambda_o^{-1}M$ é equilibrado,

$$v_i(x)a_j(x)(f(x) - g_j(x)) \in \lambda_o^{-1}M.$$

2º) $x \in K_j$. Então $|a_j(x)| \leq 1$ é da definição de K_j e do fato de U ser equilibrada, temos que:

$$a_j(x)v_i(x)(f(x) - g_j(x)) \in a_j(x)U \subset U = \lambda_o^{-1}M.$$

Novamente, usando o Lema 1.5, obtemos

$$v_i(x)a_j(x)(f(x) - g_j(x)) \in \lambda_o^{-1}M.$$

Portanto, para todo $x \in X$ e $1 \leq i \leq r$.

$$v_i(x)(f(x) - g(x)) = v_i(x) \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(f(x) - g_j(x)) \in$$

$$\in \underbrace{\lambda_o^{-1}M + \ldots + \lambda_o^{-1}M}_{\text{n-vezes}} \subset M \subset N$$

o que nos diz que

$$f - g \in W(v_1, v_2, \ldots, v_r; N).$$

Portanto, f pertence a aderência de W em τ_V.

3.6. OBSERVAÇÃO: Uma análise da demonstração do Teorema 3.5 mostra que, se (E,τ) é um espaço vetorial topológico *não arquimediano* sobre $(F,|\cdot|)$, e as outras hipóteses de 3.5 permanecem inalteradas, vale o segueinte resultado (que será utilizado em 3.9). Sejam $f \in L$, $v_1,v_2,\ldots,v_r \in V$ e N uma vizinhança não arquimediana da origem em E. Se, dado $x \in X$, existe $g_x \in W$ tal que

$$v_i(y)(f(y) - g_x(y)) \in N, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

para todo $y \in \Delta(x)$, então existe $g \in W$ tal que

$$v_i(x)(f(x) - g(x)) \in N \qquad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Veremos a seguir algumas consequências do Teorema 3.5.

3.7. COLORÁRIO: *Nas hipóteses do Teorema 3.5, se* A *é uma subálgebra separadora e* V *não se anula em* X. *Então* $f \in L$ *pertence a aderência de* W *na topologia* τ_V *se e somente se* $f(x)$ *pertence a aderência de* $W(x) = \{g(x);\ g \in W\}$ *em* (E,τ).

DEMONSTRAÇÃO: *Necessidade* (mesmo que A não seja separadora). Tomemos $x \in X$ e $f \in \overline{W}$. Da continuidade da aplicação linear δ_x, proposição 1.10 temos que $f(x) = \delta_x(f) \in \delta_x(\overline{W}) \subset \overline{\delta_x(W)} = \overline{W(x)}$.

Suficiência: Sejam $f \in L$; $N \in \mathcal{N}_E$; $v_1,v_2,\ldots,v_r \in V$ e $x \in X$. Seja $J = \{1 \leq i \leq r;\ v_i(x) \neq 0\}$.

Tomemos $N_i = (v_i(x))^{-1}N$, para $i \in J$. Seja $M \in \mathcal{N}_E$ com $M \subset \bigcap_{i \in J} N_i$.

Como $f(x) \in \overline{W(x)}$, existe $g_x \in W$ tal que $f(x) - g_x(x) \in M$. Logo, para $i \in J$,

$$v_i(x)(f(x) - g_x(x)) \in v_i(x)M \subset v_i(x)N_i = N.$$

Se $i \notin J$,

$$v_i(x)(f(x) - g_x(x)) = 0 \in N.$$

Mas como A é separadora, as classes de equivalência módulo A são da forma $\Delta(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$, portanto $f \in L_A(W)$. Pelo Teorema 3.5, $f \in \overline{W}$.

Consideremos um subespaço vetorial W de L e A a subálgebra de $C^*(X;F)$ de todas as funções $\varphi \in C^*(X;F)$ tais que $\varphi \cdot g \in W$ para toda $g \in W$.

A é de fato uma subálgebra pois dadas φ_1 e $\varphi_2 \in A$ e $g \in W$,

$$(\varphi_1\varphi_2)g = \varphi_1(\varphi_2 g) \in W$$

portanto $\varphi_1\varphi_2 \in A$. É claro também que W é um A-módulo.

Como consequência do Teorema 3.5, o seguinte resultado é válido:

3.8. COROLÁRIO: *Sejam* X *e* (E,τ) *como no Teorema 3.5. Seja* W *um subespaço vetorial de* L. *Então para toda função* $f \in L$, *temos que* $f \in \overline{W}$ *se e somente se* $f \in L_A(W)$, *onde*

$$A = \{\varphi \in C^*(X;F); \quad \varphi g \in W, \quad \forall g \in W\}.$$

Observamos que se W contém as constantes então $A \otimes E \subset W$ e assim, $\overline{A \otimes E} \subset \overline{W} = L_A(W)$

3.9. TEOREMA: *Consideremos* X *um espaço localmente compacto;* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço normado não arquimediano sobre* $(F, |\cdot|)$; $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra e* W *um subespaço vetorial de* $C_o(X;E)$ *que é um* A-*módulo. Então, para toda* $f \in C_o(X;E)$,

$$\text{dist}(f;W) = \sup_{x\in X} \text{dist}(f|_{\Delta(x)}; W|_{\Delta(x)})$$

onde

$$\text{dist}(f;W) = \inf\{\|f - g\|; \quad g \in W\}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Denotemos por $d = \text{dist}(f;W) = \inf\{\|f - g\|; g \in W\}$ e por

$$c = \sup_{x\in X} \text{dist}(f|_{\Delta(x)}; W|_{\Delta(x)}) = \sup_{x\in X} \inf\{\|f|_{\Delta(x)} - g|_{\Delta(x)}\|; \ g \in W\}.$$

Temos sempre que $c \leq d$.

Mostraremos que $d < c + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Como c é um sup, para todo $x \in X$,

$$\inf \{\| f|_{\Delta(x)} - g|_{\Delta(x)} \| ; g \in W\} < c + \varepsilon$$

Da definição de ínfimo, existe $h_x \in W$ tal que

$$\| f(y) - h_x(y) \| < c + \varepsilon$$

para todo $y \in \Delta(x)$. Pela Observação 3.6, existe $h \in W$ tal que

$$\| f(x) - h(x) \| < c + \varepsilon$$

para todo $x \in X$. Assim

$$d = \inf \{\| f - g \| ; g \in W\} \leq \| f - h \| < c + \varepsilon,$$

conforme queríamos demonstrar.

3.10. COROLÁRIO: *Suponhamos que* X *é um espaço localmente compacto, 0-dimensional e de Hausdorff; que* $(E, \|\cdot\|)$ *é um espaço normado não arquimediano sobre* $(F, |\cdot|)$ *e* $W \subset C_o(X;E)$ *é um* $C^*(X;F)$-*módulo. Então*

$$\operatorname{dist}(f;W) = \sup_{x \in X} \operatorname{dist}(f(x); W(x))$$

para todo $f \in C_o(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Resulta das hipóteses feitas sobre X que $C^*(X;F)$ é separador, isto é $\Delta(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$, se $A = C^*(X;F)$.

CAPÍTULO 4

ENVOLTÓRIA DE STONE-WEIERSTRASS, ÁLGEBRAS POLINOMIAIS

Consideremos um espaço topológico X não vazio e Hausdorff, (E,τ) um espaço vetorial topológico, próprio sobre um anel de divisão com valorização não trivial $(F,|\cdot|)$ e (L,τ_V) um espaço de Nachbin contido em $\mathcal{F}(X;E)$.

Se W é um subespaço vetorial de L, $\Delta_W \subset X \times X$ indicará o conjunto de todos os pares (x,y) tais que $x \equiv y \pmod W$ ($\Leftrightarrow g(x) = g(y)$ para toda $g \in W$).

Definimos a função

$$\delta_W : \Delta_W \to F$$

como segue

$$\delta_W(x,y) = 0 \qquad \text{se} \qquad 0 = \delta_x|_W = \delta_y|_W$$

$$\delta_W(x,y) = 1 \qquad \text{se} \qquad 0 \neq \delta_x|_W = \delta_y|_W$$

onde $\delta_x|_W$ é a restrição da aplicação δ_x a W (veja a Proposição 1.10).

Observamos que se $(x,y) \in \Delta_W$ então $f(x) = \delta_W(x,y) f(y)$ para toda $f \in W$.

4.1. DEFINIÇÃO: Seja W um subespaço vetorial de L. A *envoltória de Stone-Weierstrass* de W *em* L, representada por $\Delta_L(W)$ é definida como o conjunto das funções $f \in L$ tais que $(x,y) \in \Delta_W$ então $f(x) = \delta_W(x,y)f(y)$.

Demonstraremos algumas propriedades da envoltória de Stone-Weierstrass.

4.2. PROPOSIÇÃO: *Suponhamos que* V *é não-nula sobre* X. *Seja* W *um subespaço vetorial de* (L,τ_V). *A envoltória de Stone-Weierstrass de* W *em* L *é um subespaço vetorial fechado que contém a aderência de* W *na topologia* τ_V.

DEMONSTRAÇÃO: É imediato que $\Delta_L(W)$ é um subespaço vetorial de L e que $W \subset \Delta_L(W)$.

Tomemos $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ um net em $\Delta_L(W)$ convergindo para $f \in L$ na topologia τ_V e $(x,y) \in \Delta_W$. Como $f_\alpha(x)$ converge para $f(x)$, $f_\alpha(y)$ converge para $f(y)$ em E e $f_\alpha \in \Delta(W)$ para todo $\alpha \in \Lambda$, temos que $f_\alpha(x) = \delta_W(x,y)f_\alpha(y)$, portanto $f(x) = \delta_W(x,y)f(y)$ o que implica que $f \in \Delta_L(W)$.

Como consequência, obtemos que $\overline{W} \subset \Delta_L(W)$.

A proposição está demonstrada.

4.3. PROPOSIÇÃO: *Consideremos* W *um subespaço vetorial de* L. *Para toda função* $f \in L$, *são equivalentes:*

(1) $f \in \Delta_L(W)$;

(2) a) *se* $x \in X$ *é tal que* $g(x) = 0$ *para todo* $g \in W$, *então* $f(x) = 0$

b) *se* $x, y \in X$ *são tais que* $g(x) = g(y)$ *para todo* $g \in W$, *então* $f(x) = f(y)$.

DEMONSTRAÇÃO: (1) $\Rightarrow$ (2): a) tomemos $x \in X$ tal que $g(x) = 0$ para toda $g \in W$. Então $0 = \delta_x|_W$ e portanto $\delta_W(x,x) = 0$. Mas como por hipótese $f \in \Delta_L(W)$, temos que

$$f(x) = \delta_W(x,x)f(x) = 0 \cdot f(x) = 0;$$

b) Tomemos $x, y \in X$ tais que $g(x) = g(y)$ para todo $g \in W$. Consideremos dois casos: Se

$$0 = \delta_x|_W = \delta_y|_W \quad \text{então} \quad \delta_W(x,y) = 0.$$

Mas como por hipótese $f \in \Delta_L(W)$, obtemos que

$$f(x) = \delta_W(x,y)f(y) = 0 \cdot f(y) = 0$$

e

$$f(y) = \delta_W(y,x)f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$$

e portanto $f(x) = f(y)$.

Se

$$0 \neq \delta_x|_W = \delta_y|_W \quad \text{então} \quad \delta_W(x,y) = 1.$$

Mas como por hipótese $f \in \Delta_L(W)$, obtemos que

$$f(x) = \delta_W(x,y)f(y) = 1 \cdot f(y) = f(y).$$

(2) ⇒ (1): Tomemos $(x,y) \in \Delta_W$. Consideremos dois casos:
Se

$$\delta_W(x,y) = 0,$$

da definição de δ_W vem que $g(x) = g(y) = 0$ para todo $g \in W$. Por a) temos que $f(x) = 0 = f(y)$ e portanto $f(x) = \delta_W(x,y)f(y)$.
Se

$$\delta_W(x,y) = 1,$$

também da definição de δ_W vem que $g(x) = g(y)$ para todo $g \in W$. Por b) temos que $f(x) = f(y)$ e portanto $f(x) = \delta_W(x,y)f(y)$.

A proposição está demonstrada.

4.4. PROPOSIÇÃO: *Suponhamos que* (E,τ) *é de Hausdorff. Consideremos* $A \subset C(X;F)$ *uma subálgebra e* W *um subespaço vetorial de* (L,τ_V). *Suponhamos que as classes de equivalência módulo* A *e módulo* W *coincidam. Então* $L_A(W) \subset \Delta_L(W)$.

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos $f \in L_A(W)$ e $x \in X$ tal que $g(x) = 0$ para toda $g \in W$. Suponhamos que $f(x) \neq 0$. Como E é Hausdorff, existe

$N \in \mathcal{N}_E$ tal que $f(x) \notin N$.

Escolhamos $v \in V$ tal que $v(x) \neq 0$ e $M = v(x)N$. Seja $\Delta(x)$ a classe de equivalência de x módulo A. Como por hipótese $f \in L_A(W)$, existe $g \in W$ tal que

$$v(y)(f(y) - g(y)) \in M, \quad \text{para todo} \quad y \in \Delta(x).$$

Em particular, fazendo $y = x$, temos

$$f(x) = (v(x))^{-1}v(x)(f(x) - 0) =$$

$$= (v(x))^{-1}v(x)(f(x) - g(x)) \in (v(x))^{-1}M = N.$$

O que é uma contradição, portanto $f(x) = 0$.

Tomemos x e $y \in X$ tais que $g(x) = g(y)$ para todo $g \in W$. Suponhamos $f(x) \neq f(y)$. Como E é Hausdorff, existe $N \in \mathcal{N}_E$ tal que $f(x) - f(y) \notin N$.

Escolhamos v_1 e $v_2 \in V$ tais que $v_1(x) \neq 0$ e $v_2(y) \neq 0$ e $M \in \mathcal{N}_E$ tal que $M - M \subset N$.

Como por hipótese as classes de equivalência módulo A e módulo W coincidem, temos que $y \in \Delta(x)$.

Se $f \in L_A(W)$, existe $g \in W$ tal que

$$v_i(t)(f(t) - g(t)) \in v_1(x)M \cap v_2(y)M$$

para todo $t \in \Delta(x)$ e $i = 1,2$.

Em particular, para $t = x$ obtemos

$$v_1(x)(f(x) - g(x)) \in v_1(x)M \cap v_2(y)M \subset v_1(x)M$$

e para $t = y$

$$v_2(y)(f(y) - g(y)) \in v_1(x)M \cap v_2(y)M \subset v_2(y)M.$$

Assim,

$$f(x) - f(y) = f(x) - g(x) - (f(y) - g(y)) =$$

$$= (v_1(x))^{-1}v_1(x)(f(x) - g(x)) - (v_1(y))^{-1}v_1(y)(f(y) - g(y)) \in$$

$$\in (v_1(x))^{-1}v_1(x)M - (v_1(y))^{-1}v_1(y)M \subset M - M \subset N.$$

O que é uma contradição, portanto $f(x) = f(y)$.

Está, pois, demonstrada a proposição.

4.5. DEFINIÇÃO: Consideremos W um subespaço vetorial fechado de (L, τ_V). Diremos que W é um *espaço de Stone-Weierstrass* se a envoltória de Stone-Weierstrass de W em L coincide com W, isto é se $W = \Delta_L(W)$.

Quando V é não nula sobre X, podemos reformular a Definição 4.5 do seguinte modo: W é um espaço de Stone-Weierstrass se e só se $\Delta_L(W) \subset W$. Com efeito basta aplicar a Proposição 4.2.

4.6. DEFINIÇÃO: Consideremos W um subespaço vetorial de $C(X;E)$. Diremos que W é *uma álgebra polinomial* se o conjunto

$$A = \{\varphi \circ g; \quad \varphi \in E', \ g \in W\}$$

é uma subálgebra de $C(X;F)$ tal que $A \otimes E \subset W$, onde $A \otimes E$ consiste de todas as somas finitas de funções da forma $x \to a(x)v$ onde $a \in A$ e $v \in E$.

Quando $W \subset C(X;E)$, indicaremos por $\Delta(W)$ a envoltória de Stone-Weierstrass de W em $C(X;E)$.

4.7. PROPOSIÇÃO: *Suponhamos que* E', *o dual topológico de* E, *seja separador e* $W \subset C(X;E)$ *seja uma álgebra polinomial. Então*

$$\Delta(W) = L_A(A \otimes E) = L_A(W).$$

DEMONSTRAÇÃO: Do fato de W ser uma álgebra polinomial temos que $A \otimes E \subset W$ e portanto, $L_A(A \otimes E) \subset L_A(W)$. Mas como A e W definem a mesma relação de equivalência em X, usando a Proposição 4.4 obtemos $L_A(W) \subset \Delta(W)$.

Tomemos $f \in \Delta(W)$, $\Delta(x) \in P_A$, $y \in \Delta(x)$ e $g \in W$. Como A e W definem a mesma relação de equivalência, temos que $g(x) = g(y)$ e do fato de $f \in \Delta(W)$, temos pela Proposição 4.3 que $f(x) = f(y)$. Portanto, f é constante em $\Delta(x)$. Seja u esse valor constante.

Tomemos $N \in \mathcal{N}_E$ e $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$.

Se $u = 0$ então $0 \in A \otimes E$ e $v_i(x)(f(x) - 0) = 0 \in N$, para

$1 \leq i \leq r$.

Se $u \neq 0$, fixemos $x_o \in \Delta(x)$. Mas como $f \in \Delta(W)$ e $f(x_o) = u \neq 0$, existe $g \in W$ tal que $g(x_o) = v \neq 0$. Do fato de W e A definirem a mesma relação de equivalência em X, temos que g é constante em $\Delta(x)$.

Tomemos $\emptyset \in E'$ tal que $\emptyset(v) = 1$. Definamos $h = (\emptyset \circ g) \otimes u$, então $h \in A \otimes E$ e para $1 \leq i \leq r$ e $y \in \Delta(x)$, temos que

$$v_i(y)(f(y) - h(y)) = v_i(y)(f(y) - \emptyset(g(y)) \cdot u) =$$

$$= v_i(y)(u - \emptyset(v) \cdot u) = v_i(y)(u - 1 \cdot u) = v_i(y) \cdot 0 = 0 \in N.$$

Portanto, $f \in L_A(A \otimes E)$.

4.8. PROPOSIÇÃO: *Consideremos* L *uma subálgebra polinomial de* $C(X;E)$ *e* W *um subespaço vetorial de* L. *A envoltória de Stone-Weierstrass de* W *em* L *é uma álgebra polinomial.*

DEMONSTRAÇÃO: Primeiramente, mostraremos que $\emptyset \circ f \otimes u \in \Delta_L(W)$ para todo $\emptyset \in E'$, $f \in \Delta_L(W)$ e $u \in E$.

Sejam $(x,y) \in \Delta_W$.

$$\emptyset(f(x)) \cdot u = \emptyset(\delta_W(x,y)f(y)) \cdot u = \delta_W(x,y)\emptyset(f(y)) \cdot u$$

Portanto,

$$A \otimes E \subset \Delta_L(W) \quad \text{onde} \quad A = \{\emptyset \circ f;\ \emptyset \in E',\ f \in \Delta_L(W)\}.$$

Mostraremos agora que A é um subespaço vetorial de $C(X;F)$.

É fácil ver que A é invariante sob a multiplicação por qualquer escalar $\lambda \in F$.

Sejam $\emptyset \circ f$ e $\psi \circ g$ em A. Se $\emptyset = 0$, $\emptyset \circ f + \psi \circ g = \psi \circ g \in A$. Se $\emptyset \neq 0$, escolhamos $v \in E$ tal que $\emptyset(v) = 1$. Como $A \otimes E \subset \Delta_L(W)$ temos que as aplicações $x \to \emptyset(f(x))v$ e $x \to \psi(g(x))v$ pertencem a $\Delta_L(W)$. Seja $h \in \Delta_L(W)$ a função definida por

$x \to [\emptyset(f(x)) + \psi(g(x))]v$ então $\emptyset \circ h \in A$ e

$$\emptyset(h(x)) = [\emptyset(f(x)) + \psi(g(x))]\emptyset(v) = [\emptyset \circ f + \psi \circ g](x)$$

para todo $x \in X$. Logo, A é um subespaço de $C(X;F)$.

Resta mostrarmos que A é uma subálgebra de $C(X;F)$. Sejam $\emptyset \circ f$ e $\psi \circ g$ em A. Se $\emptyset = 0$ então $(\emptyset \circ f)(\psi \circ g) = 0 \in A$. Se $\emptyset \neq 0$, escolhamos $v \in E$ tal que $\emptyset(v) = 1$. Como L é uma álgebra polinomial, a aplicação h definida por

$h(x) = \emptyset(f(x)) \cdot \psi(g(x)) \cdot v$ pertence a L.

Tomemos $(x,y) \in \Delta_W$.

$$h(x) = \emptyset(f(x))\psi(g(x))v = \emptyset(\delta_W(x,y)f(y))\psi(\delta_W(x,y)g(y)) \cdot v =$$

$$= \delta_W(x,y)\emptyset(f(y)) \cdot \psi(g(y))v = \delta_W(x,y)h(y)$$

portanto, $h \in \Delta_L(W)$ e consequentemente, $\emptyset \circ h \in A$ e

$$\emptyset(h(x)) = [\emptyset(f(x))\psi(g(x))]\emptyset(v) = [(\emptyset \circ f) \cdot (\psi \circ g)](x)$$

para todo $x \in X$. Logo, A é uma subálgebra de $C(X;F)$.

4.9. PROPOSIÇÃO: *Consideremos* (E,τ) *um espaço vetorial topológico quase não arquimediano sobre um anel de divisão com valorização não arquimediana* $(F,|\cdot|)$ *com* E' *separador;* (L,τ_V) *um espaço de Nachbin tal que* $L \subset C(X;E)$ *é uma álgebra polinomial, e* V *não se anule em* X. *Seja* $W \subset L$ *uma subálgebra polinomial. Consideremos as seguintes afirmações:*

(1) $f \in \overline{W}$;

(2) *dados* $x, y \in X$, $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$, $N \in \mathcal{N}_E$, *existe* $g \in W$ *tal que* $v_i(x)(f(x) - g(x)) \in N$

$$v_i(y)(f(y) - g(y)) \in N,$$

para $1 \leq i \leq r$;

(3) a) *se* $x \in X$ *é tal que* $g(x) = 0$ *para todo* $g \in W$ *então* $f(x) = 0$;

b) *se* $x, y \in X$ *são tais que* $g(x) = g(y)$ *para todo* $g \in W$ *então* $f(x) = f(y)$;

(4) $f \in \Delta_L(W)$;

(5) $f \in L_A(A \otimes E)$, *onde* $A = \{\varphi \circ g;\ \varphi \in E',\ g \in W\}$.

Então (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5). *Se* $A \subset C^*(X;F)$ *então* (5) $\Rightarrow$ (1).

DEMONSTRAÇÃO: (1) $\Rightarrow$ (2) claro; (2) $\Rightarrow$ (3) decorre da demonstração da Proposição 4.4; (3) $\Rightarrow$ (4) Proposição 4.3; (4) $\Rightarrow$ (5) Proposição 4.7; (5) $\Rightarrow$ (1) Proposição 4.7 e Teorema 3.5.

4.10. COROLÁRIO: *Nas hipóteses do Teorema anterior, suponhamos que* $A \subset C^*(X;F)$, *e que* W *é fechado em* (L,τ_V). *Então* W *é álgebra polonomial se e só se* W *é um espaço de Stone-Weierstrass.*

DEMONSTRAÇÃO: Aplicar o Teorem 4.9 e a Proposição 4.8.

CAPÍTULO 5

APROXIMAÇÃO SIMULTÂNEA

§ 1. TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS PARA PORTADORES

Neste capítulo vamos extender alguns resultados de Machado-Prolla [16] para o caso de espaços normados não arquimedianos, e outros resultados de Prolla [19] para o caso em que X deixa de ser compacto, o que novamente nos obriga a considerar $C^*(X;F)$ em vez de $C_b(X;F) = C(X;F)$ (X compacto).

Consideremos X um espaço localmente compacto, Hausdorff, $(E,\|\cdot\|)$ um espaço normado sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F,|\cdot|)$ e o espaço vetorial $C_o(X;E)$ com a norma

$$f \to \|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ x \in X\}.$$

Se $A \subset C^*(X;F)$ é uma subálgebra e $W \subset C_o(X;E)$ um subespaço que é um A-módulo, temos sob as hipóteses do Teorema 3.9 que para toda $f \in C_o(X;E)$

$$\operatorname{dist}(f;W) = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(f|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)}).$$

Nosso objetivo agora é generalizar esta fórmula para funções de conjuntos.

5.1. DEFINIÇÃO: *Um portador* φ *de* X *em* E é uma aplicação de X nos subconjuntos não vazios de E.

5.2. DEFINIÇÃO: Consideremos φ um portador de X em E. Definimos a *distância de* φ *a uma função* $g \in C_o(X;E)$ por

$$\mathrm{dist}(\varphi;g) = \sup_{x \in X} \{ \sup_{y \in \varphi(x)} \| y - g(x) \| \}$$

e *a distância de* φ *a um subconjunto* $W \subset C_o(X;E)$ por

$$\mathrm{dist}(\varphi;W) = \inf \{ \mathrm{dist}(\varphi;g);\ g \in W \}.$$

5.3. DEFINIÇÃO: Consideremos φ um portador de X em E. Dizemos que φ é *semicontínuo superiormente com respeito a* $W \subset C_o(X;E)$, se dados $w \in W$ e $r > 0$, para cada $x \in X$ tal que

$$\varphi(x) \in B(w(x);r)$$

e dada $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x tal que

$$\varphi(y) \subset B(w(y);\ r + \varepsilon)$$

para todo $y \in U$. (Se $v \in E$ e $\delta > 0$, denotamos por $B(v;\delta)$ o conjunto $\{u \in E;\ \| u - v \| < \delta\}$).

A seguir, daremos alguns exemplos de portadores semicontínuos superiormente.

5.4. EXEMPLO: Tomemos $f \in C_o(X;E)$ e definimos $\varphi(x) = \{f(x)\}$, $x \in X$. Então φ é semicontínuo superiormente com respeito a todo $W \subset C_o(X;E)$. Além disso, para cada $w \in W$ e $r > 0$, o conjunto

$$\{x \in X;\ \varphi(x) \subset B(w(x);r)\} = \{x \in X;\ \|f(x) - w(x)\| < r\}$$

é aberto.

5.5. EXEMPLO: Consideremos $N \subset C_o(X;E)$ um subconjunto equicontínuo. Definiremos um portador φ de X em E, pondo

$$\varphi(x) = \{f(x);\ f \in N\},$$

para todo $x \in X$. Mostraremos que φ é semicontínuo superiormente com respeito a todo $W \subset C_o(X;E)$. Tomemos $w \in W$, $r > 0$ e $x \in X$ com $\varphi(x) \subset B(w(x);r)$. Seja $\varepsilon > 0$. Se N é equicontínuo então $N - \{w\}$ também é equicontínuo, portanto existe U vizinhança de x tal que $\|f(y) - w(y) - (f(x) - w(x))\| < \varepsilon$ para todo $y \in U$.

Assim, para todo $y \in U$

$$\|f(y) - w(y)\| = \|f(y) - w(y) - (f(x) - w(x)) + (f(x) - w(x))\| \leq$$

$$\leq \|f(y) - w(y) - (f(x) - w(x))\| + \|f(x) - w(x)\| < \varepsilon + r.$$

5.6. DEFINIÇÃO: Consideremos φ um portador de X em E e $W \subset C_o(X;E)$. Dizemos que φ *é nulo no infinito com respeito* a W se para cada $w \in W$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$\{x \in X;\ \varphi(x) \cap (E \setminus B(w(x);\varepsilon)) \neq \emptyset\}$$

é relativamente compacto.

5.7. TEOREMA: *Se* $(E, \|\cdot\|)$ *é um espaço vetorial normado não arquimediano sobre* $(F, |\cdot|)$; $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra e* $W \subset C_o(X;E)$ *um subespaço vetorial que é um* A-*módulo; então para cada portador* φ *de* X *em* E *que é semicontínuo superiormente e nulo no infinito com respecto a* W, *temos:*

$$\mathrm{dist}(\varphi;W) = \sup_{x \in X} \mathrm{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)})$$

(Novamente $\Delta(x)$ denota a classe de equivalência de x mod A).

DEMONSTRAÇÃO: Designemos $\lambda = \sup\limits_{x \in X} \mathrm{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)})$. Temos sempre que $\lambda \leq \mathrm{dist}(\varphi;W)$.

Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $g_x \in W$ tal que

$$\mathrm{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};g_x|_{\Delta(x)}) < \lambda + \varepsilon.$$

isto implica que

$$\|t - g_x(y)\| < \lambda + \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \varphi(y) \quad \text{e} \quad y \in \Delta(x).$$

Como φ é semicontínua superiormente com respeito a W, existe uma vizinhança U_x de x tal que

$$\| t - g_x(z) \| < \lambda + \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \varphi(y) \quad \text{e} \quad z \in U_x$$

consequentemente, $\Delta(x) \subset U_x$.

Como φ é nula no infinito com respeito a W, o fecho K_x de

$$S_x = \{y \in X;\ \varphi(y) \cap (E \setminus B(w(y);\ \lambda + \varepsilon)) \neq \emptyset\}$$

é compacto e temos ainda que $\Delta(x) \cap K_x \neq \emptyset$. De fato, se $z \in \Delta(x) \cap K_x$, como $\Delta(x) \subset U_x$ e K_x é o fêcho de S_x, existe $y \in U_x \cap S_x$. Mas $\varphi(y) \subset B(w(y); \lambda + \varepsilon)$ para todo $y \in U_x$ e y não pode estar em S_x.

Pelo Lema 3.4 existe um conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que para cada $0 < \delta < 1$ existem funções $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_o$ satisfazendo:

(1) $|a_i(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$, $i = 1, \ldots, n$;

(2) $|a_i(t)| < \delta$ para todo $t \in K_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i(x) = 1$ para todo $x \in X$;

onde A_o é a subálgebra gerada por A e pelas constantes.

Escolhamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que

$$\delta \cdot \max_{1\le i\le n} \| t - g_{x_i}(x)\| < \lambda + \varepsilon$$

e para esse δ sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_o$ satisfazendo (1) a (3).

Definamos $g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{x_i}$. Então $g \in W$ e para cada $x \in X$ e $t \in \varphi(x)$, temos que:

$$\| t - g(x)\| = \| \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, t - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, g_{x_i}(x)\| =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, (t - g_{x_i}(x))\| .$$

Se $x \in K_{x_i}$, então

$$\| a_i(x)(t - g_{x_i}(x)\| < \delta \cdot \| t - g_{x_i}(x)\| \le$$

$$\le \delta \cdot \max_{1\le i\le n} \| t - g_{x_i}(x)\| < \lambda + \varepsilon$$

Se $x \notin K_{x_i}$, então

$$\| a_i(x)(t - g_{x_i}(x))\| \le 1 \cdot \| t - g_{x_i}(x)\| < \lambda + \varepsilon$$

Assim, para todo $x \in X$ e $t \in \varphi(x)$,

$$\| t - g(x)\| = \| \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, (t - g_{x_i}(x))\| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \| a_i(x)(t - g_{x_i}))\| < \lambda + \varepsilon .$$

Portanto,

$$\operatorname{dist}(\varphi;g) \leq \lambda + \varepsilon$$

e consequentemente, $\operatorname{dist}(\varphi;W) \leq \lambda + \varepsilon$, pois g era arbitrária em W.

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, temos que

$$\operatorname{dist}(\varphi;W) \leq \lambda = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)})$$

Está, pois, demonstrado o teorema.

5.8. DEFINIÇÃO: Uma família de funções $N \subset C_o(X;E)$ é dita *coletivamente nula no infinito* se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$ e $f \in N$.

5.9. EXEMPLO: Seja $N \subset C_o(X;E)$ um subconjunto totalmente limitado. Mostraremos que N é coletivamente nulo no infinito. Seja $\varepsilon > 0$. Como N é totalmente limitado, existe um conjunto finito $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\} \subset N$ tal que para cada $f \in N$, existe $1 \leq i \leq n$ com $\|f - f_i\| < \varepsilon/2$. Como para cada $1 \leq i \leq n$, f_i é nula no infinito, existe um conjunto compacto $K_i \subset X$ tal que $\|f_i(x)\| < \varepsilon/2$ se $x \notin K_i$. Seja $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Então para todo $x \notin K$ e $f \in N$, $\|f(x)\| < \varepsilon$.

5.10. PROPOSIÇÃO: *Se* $N \subset C_o(X;E)$ *é uma família coletivamente nula no infinito e* $N \subset C_o(X;E)$, *então o portador definido por*

$$\varphi(x) = \{f(x);\ f \in N\},$$

para todo $x \in X$, *é nulo no infinito com respeito a* W.

DEMONSTRAÇÃO: Se $N \subset C_o(X;E)$ é coletivamente nulo no infinito e $w \in C_o(X;E)$, então $G = \{f - w;\ f \in N\}$ é ainda coletivamente nulo no infinito.

Seja $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ o compacto tal que $\|f(x) - w(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$ e $f \in N$.

Então,

$$\varphi(x) \subset B(w(x);\varepsilon)$$

para todo $x \notin K$ e

$$X \setminus \{x \in X;\ \varphi(x) \subset B(w(x);\varepsilon)) \neq \emptyset\} \subset K.$$

Portanto, o conjunto

$$\{x \in X;\ \varphi(x) \cap (E \setminus B(w(x);\varepsilon)) \neq \emptyset\}$$

é relativamente compacto.

5.11. TEOREMA: *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$; $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra;* $W \subset C_o(X;E)$

um subespaço vetorial que é um A-*módulo;* $N \subset C_o(X;E)$ *um subconjunto totalmente limitado e definimos para cada* $x \in X$, $\varphi(x) = \{f(x);\ f \in N\}$. *Então,*

$$\operatorname{dist}(\varphi;W) = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)}).$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Exemplo 5.5, φ é semicontínuo superiormente com respeito a W. Pelo Exemplo 5.9, N é coletivamente nulo no infinito. Pela Proposição 5.10, φ é nulo no infinito com respeito a W e finalmente, pelo Teorema 5.7, temos que

$$\operatorname{dist}(\varphi;W) = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)}).$$

§2. MELHOR APROXIMAÇÃO SIMULTÂNEA

5.12. DEFINIÇÃO: Consideremos $(N, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre $(F,|\cdot|)$, $W \subset N$ e B um subconjunto limitado não vazio de N.

Definimos *o raio de Chebyshev de* B *relativo a* W por:

$$\operatorname{rad}_W(B) = \inf\{\sup_{f\in B} \|w - f\|;\ w \in W\}.$$

Se $W = N$, escrevemos

$$\operatorname{rad}_N(B) = \operatorname{rad}(B)$$

e diremos que rad(B) é o *raio de Chebyshev de* B.

Os elementos $w_o \in W$ onde o ínfimo é assumido são chamados *centros de Chebyshev de* B *relativos a* W e são denotados por $\text{cent}_W(B)$.

Se $W = N$, escrevemos $\text{cent}_N(B) = \text{cent}(B)$, e seus elementos são ditos *centros de Chebyshev de* B.

Dizemos que W *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* N se $\text{cent}_W(B) \neq \emptyset$ para todo subconjunto $B \subset N$, limitado e não vazio.

Quando $W = N$, e $\text{cent}(B) \neq \emptyset$ para todo subconjunto limitado e não vazio $B \subset N$, dizemos que N *admite centros de Chebyshev*.

Os principais problemas da teoria da *melhor aproximação (simultânea)* são os seguintes (em ordem decrescente de generalidade):

PROBLEMA 1: Dado $W \subset N$, determinar se W tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em N. Em particular, determinar se N admite centros de Chebyshev.

PROBLEMA 2: Dado $W \subset N$, determinar a classe $\mathcal{B}$ de todos os limitados não-vazios $B \subset N$ tais que $\text{cent}_W(B) \neq \emptyset$.

PROBLEMA 3: Dado $W \subset N$, determinar se W é proximinal em N, isto é determinar se a classe $\mathcal{B}$ do problema 2 inclui todos os conjuntos da forma $B = \{f\}$, $f \in N$.

Suponhamos que $N = C_o(X;E)$ com a norma do sup e $W \subset C_o(X;E)$. Para cada $B \subset C_o(X;E)$, limitado e não vazio, define-se o portador

$$\varphi_B(x) = \{f(x);\ f \in B\}$$

para todo $x \in X$. Resulta então

$$\mathrm{dist}(\varphi_B;W) = \mathrm{rad}_W(B).$$

Como consequência imediata do Teorema 5.11 temos a seguinte fórmula de localizabilidade para os raios de Chebyshev

5.13. TEOREMA: *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$, $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra, e* $W \subset C_o(X;E)$ *um subespaço vetorial que é um* A*-módulo. Para todo subconjunto totalmente limitado não vazio* $B \subset C_o(X;E)$ *temos*

$$\mathrm{rad}_W(B) = \sup_{x\in X} \mathrm{rad}_{W[x]}(B[x]).$$

OBSERVAÇÃO: Para cada $x \in X$, $W[x]$ e $B[x]$ indicam as restrições de W e B, respectivamente, à classe de equivalência $\Delta(x)$. Portanto são ambos subconjuntos de $C_o(\Delta(x);E)$.

5.14. DEFINIÇÃO: Consideremos Δ uma relação de equivalência em X e para cada $x \in X$, $\Delta(x)$ a sua classe de equivalência módulo Δ.

Dizemos que um portador φ de X em E é *Δ-limitado* se

$$\varphi(\Delta(x)) = \cup \{\varphi(t);\ t \in \Delta(x)\}$$

é um subconjunto limitado de E, para todo $x \in X$.

Definimos também

$$\delta(\varphi) = \sup_{x\in X} \operatorname{rad}(\varphi(\Delta(x))).$$

5.15. TEOREMA: *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado não arquimediano sobre $(F,|\cdot|)$, $A \subset C^*(X;F)$ uma subálgebra. Se $W \subset C_o(X;E)$ é um subespaço vetorial que é um A-módulo, tal que, para cada $x \in X$ e $z \in E$, existe $w \in W$ tal que $w(t) = z$ para todo $t \in \Delta(x)$. Então para todo portador φ de X em E que é Δ-limitado, semi-contínuo superiormente e nulo no infinito com respeito a W, temos:*

$$\operatorname{dist}(\varphi;W) \leq \delta(\varphi).$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 5.7, temos:

$$\operatorname{dist}(\varphi;W) = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};W|_{\Delta(x)}) =$$

$$= \sup_{x\in X}\inf_{w\in W} \operatorname{dist}(\varphi|_{\Delta(x)};w) =$$

$$= \sup_{x\in X}\ \inf_{w\in W}\ \sup_{t\in\Delta(x)}\ \sup_{y\in\varphi(t)} \|y - w(t)\|.$$

Tomemos $x \in X$. Para $z \in E$, escolhamos $w_z \in W$ tal que $w_z(t) = z$ para todo $t \in \Delta(x)$. Assim,

$$\inf_{w \in W} \sup_{t \in \Delta(x)} \sup_{y \in \varphi(t)} \| y - w(t) \| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \Delta(x)} \sup_{y \in \varphi(t)} \| y - w_z(t) \| = \sup_{y \in \varphi(\Delta(x))} \| y - z \| .$$

Como $z \in E$ foi tomado arbitrariamente, obtemos:

$$\inf_{w \in W} \sup_{t \in \Delta(x)} \sup_{y \in \varphi(t)} \| y - w(t) \| \leq \inf_{z \in E} \sup_{y \in \varphi(\Delta(x))} \| y - z \| .$$

Portanto,

$$\operatorname{dist}(\varphi; W) \leq \delta(\varphi).$$

§3. SUBESPAÇOS DE STONE-WEIERSTRASS

5.16. DEFINIÇÃO: Um subespaço vetorial $W \subset C_o(X;E)$ é dito um *subespaço de Stone-Weierstrass* se existe um espaço localmente compacto de Hausdorff Y e uma sobrejeção contínua e própria $\pi : X \to Y$ tal que

$$W = \{ g \circ \pi ;\ g \in C_o(Y;E) \}.$$

Denotaremos por W_π o subespaço de Stone-Weierstrass determinado por π.

Se $W_\pi \subset C_o(X;E)$ é um subespaço de Stone-Weierstrass então

$$A_\pi = \{\varphi \circ \pi;\ \varphi \in C^*(Y;F)\}$$

é uma subálgebra de $C^*(X;F)$ que contém as constantes e tal que $\{\pi^{-1}(y);\ y \in Y\}$ é o conjunto das classes de equivalência módulo A. Assim, W é um A-módulo.

Observamos que W_π é fechado em $C_o(X;E)$.

Mostraremos a seguir que esta definição de espaço de Stone-Weierstrass coincide com a Definição 4.5; para isso, mostraremos que $\Delta(W_\pi) \subset W_\pi$, onde $\Delta(W_\pi)$ é a envoltória de Stone - Weierstrass de W_π em $C_o(X;E)$.

Tomemos $f \in \Delta(W_\pi)$. Devemos mostrar que f é constante em $\pi^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$.

Sejam t e t' em X tais que $\pi(t) = \pi(t')$. Então $g(t) = g(t')$ para toda $g \in W_\pi$. Assim, o par $(t,t') \in \Delta_{W_\pi}$.

Se $\delta(t,t') = 0$ então $\delta_t|_{W_\pi} = \delta_{t'}|_{W_\pi} = 0$ e como por hipótese $f \in \Delta(W_\pi)$, temos que $f(t) = 0 \cdot f(t') = 0$.

Se $\delta(t,t') = 1$ então $0 \neq \delta_t|_{W_\pi} = \delta_{t'}|_{W_\pi}$ e novamente como $f \in \Delta(W_\pi)$, temos que $f(t) = 1 \cdot f(t') = f(t')$.

Portanto,

$$f \in W_\pi .$$

Tomemos $f \in C_o(X;E)$. Como π é própria, $\pi^{-1}(y)$ é compacto e portanto $f(\pi^{-1}(y))$ é compacto, e assim limitado em E, para todo $y \in Y$.

Definimos

$$\delta(f) = \sup_{y \in Y} \operatorname{rad}(f(\pi^{-1}(y)))$$

Se $w \in W_\pi$ então

$$\| f - w \| = \sup_{y \in Y} \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \| f(t) - w(t) \| \geq \delta(f).$$

Assim,

$$\delta(f) \leq \operatorname{dist}(f;W_\pi).$$

5.17. TEOREMA: *Se* $(E, \|\cdot\|)$ *é um espaço normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$ *e* $W_\pi \subset C_o(X;E)$ *um subespaço de Stone- Weierstrass. Então, para toda* $f \in C_o(X;E)$,

$$\operatorname{dist}(f;W_\pi) = \delta(f)$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 5.15,

$$\operatorname{dist}(f;W_\pi) \leq \delta(f)$$

e pelas observações anteriores,

$$\delta(f) \leq \mathrm{dist}(f; W_\pi).$$

O teorema está, pois, demonstrado.

Vamos generalizar o resultado acima para o caso de aproximação simultânea. Consideremos então um subconjunto limitado e equicontínuo $B \subset C_o(X;E)$ e o portador φ_B de X em E definido por

$$\varphi_B(x) = \{f(x);\ f \in B\}$$

para todo $x \in X$.

Como B é limitado, segue que φ_B é Δ-limitado para toda relação de equivalência Δ em X.

Para cada $y \in Y$, definimos

$$B(\pi^{-1}(y)) = \cup\ \{f(\pi^{-1}(y));\ f \in B\}$$

e

$$\delta(B) = \sup\ \{\mathrm{rad}(B(\pi^{-1}(y));\ y \in Y\}.$$

Então

$$\delta(B) = \delta(\varphi_B)$$

e com as hipóteses do Teorema 5.15,

$$\mathrm{rad}_{W_\pi}(B) \leq \delta(B)$$

para W_π um espaço de Stone-Weierstrass.

Inversamente, cada $w \in W_\pi$ é constante em $\pi^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\varphi_B;w) &= \sup_{y\in Y}\ \sup_{t\in\pi^{-1}(y)}\ \sup_{z\in\varphi_B(t)} \|z - w(t)\| \geq \\
&\geq \sup_{y\in Y}\ \inf_{v\in E}\ \sup_{t\in\pi^{-1}(y)}\ \sup_{z\in\varphi_B(t)} \|z - v\| = \\
&= \sup_{y\in Y}\ \inf_{v\in E}\ \sup_{t\in\pi^{-1}(y)}\ \sup_{f\in N} \|f(t) - v\| = \\
&= \sup_{y\in Y} \operatorname{rad}(B(\pi^{-1}(y)) = \delta(B).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\delta(B) \leq \operatorname{dist}(\varphi_B;W_\pi) = \operatorname{rad}_{W_\pi}(B)$$

e provamos o seguinte resultado:

5.18. TEOREMA: *Se* $(E, \|\cdot\|)$ *é um espaço normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$ *e* $W_\pi \subset C_o(X;E)$ *é um espaço de Stone-Weierstrass, então, para todo subconjunto limitado e equicontínuo* $B \subset C_o(X;E)$, *temos:*

$$\operatorname{rad}_{W_\pi}(B) = \sup_{y\in Y} \operatorname{rad}(B(\pi^{-1}(y))).$$

5.19. DEFINIÇÃO: Sejam $(N, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre $(F,|\cdot|)$, $M \subset N$ um subespaço vetorial fechado e $f \in N$. *Uma melhor aproximação de* f *em* M é um elemento $g \in M$ tal que

$$\|f - g\| = \inf_{h \in M} \|f - h\| = \operatorname{dist}(f;M).$$

Denotaremos por $P_M(f)$ o conjunto de todas as melhores aproximações de f em M.

M é dito *proximinal* se $P_M(f)$ contém pelo menos um ponto para toda $f \in N$.

5.20. DEFINIÇÃO: Sejam X e Z espaços topológicos e φ um portador de X em Z. Dizemos que φ *é semicontínuo inferiormente se*

$$\{x \in X;\ \varphi(x) \cap G \neq \emptyset\}$$

é aberto em X para todo subconjunto aberto $G \subset Z$.

Uma aplicação contínua $f : X \to Z$ é chamada *uma seleção contínua para um portador* φ se $f(x) \in \varphi(x)$ para todo $x \in X$.

O seguinte resultado é uma consequência de Michael [10], Teorema 2, página 233.

5.21. TEOREMA: *Sejam* X *um espaço compacto,* T_1 *e* 0*-dimensional e* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado* $(F,|\cdot|)$. *Então, todo portador* φ *de* X *em* *subconjuntos não vazios e fechados de* E *que é semicontínuo inferiormente, admite uma seleção contínua.*

5.22. LEMA: *Existe uma isometria linear de* $C_o(X;E)$ *em* $C(X_\omega;E)$ *onde* X_ω *é o compactificado de Alexandroff de* X.

DEMONSTRAÇÃO: Denotemos por J_ω o subespaço vetorial de $C(X_\omega;E)$ definido por $J_\omega = \{f \in C(X_\omega;E);\ f(\omega) = 0\}$.

Mostraremos que J_ω é fechado em $C(X_\omega;E)$. Tomemos $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset J_\omega$ e $f \in C(X_\omega;E)$ tal que f_α converge para f. Então

$$\|f_\alpha - f\| = \sup_{x \in X_\omega} \|f_\alpha(x) - f(x)\| \to 0$$

pois, se $x \in X$ então $f_\alpha(x) \to f(x)$ em E e se $x = \omega$ então $f_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$ e segue que $f(x) = 0$. Portanto, $f \in J_\omega$ e J_ω é fechado.

Tomemos $f \in C_o(X;E)$ e definamos $f_\omega : X_\omega \to E$ por $f_\omega(x) = 0$ se $x \in X$ e $f_\omega(\omega) = 0$.

Mostraremos que f_ω é contínua. Tomemos $x_o \in X_\omega$ e $x_\alpha \in X_\omega$ com $x_\alpha \to x_o$ $(\alpha \in \Lambda)$.

Se x_α e $x_o \in X$ como $f_\omega = f$ em X, temos da continuidade de f que $f_\omega(x_\alpha) \to f(x_o)$.

Se $x_o = \omega$, consideremos $\Delta = \{\alpha \in \Lambda;\ x_\alpha = \omega\}$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Como f é nula no infinito, o conjunto $K_\varepsilon = \{x \in X;\ \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$

é compacto e o complementar de K_ε em X_ω, V_ε, é uma vizinhança de ω em X_ω. Como $x_\alpha \to \omega$, existe $\alpha_o \in \Lambda$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_o$, $x_\alpha \in V_\varepsilon$. Consideremos $\alpha \geq \alpha_o$. Se $\alpha \in \Delta$, $f_\omega(x_\alpha) = 0$. Se $\alpha \notin \Delta$ então $\|f_\omega(x_\alpha)\| = \|f(x_\alpha)\| < \varepsilon$ pois $x_\alpha \in V_\varepsilon \cap X$. Logo $f_\omega(x_\alpha) \to 0 = f_\omega(\omega)$.

Definamos agora a aplicação

$$T : C_o(X;E) \to C(X_\omega;E)$$

$$f \to T(f) = f_\omega$$

T está bem definida e é linear. Demonstraremos que T é uma isometria.

$$\|T(f)\| = \|f_\omega\| = \sup_{x\in X_\omega} \|f_\omega(x)\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\| = \|f\|,$$

para toda $f \in C_o(X;E)$.

Além disso, $\|T\| \leq 1$.

Tomemos $g \in J_\omega$ e f a restrição de g a X, então $f \in C(X;E)$. Seja $\varepsilon > 0$. Da continuidade de g existe V vizinhança de ω tal que $t \in V$ implica $\|g(t)\| < \varepsilon$. Mas V é o complementar em X_ω de um compacto $K \subset X$. Se $x \in X \setminus K \subset V$ temos que $\|f(x)\| = \|g(x)\| < \varepsilon$ e portanto $f \in C_o(X;E)$.

Além disso, $g = f_\omega = T(f)$ e mostramos que $J_\omega = T(C_o(X;E))$.

Podemos identificar $C_o(X;E)$ com o subespaço fechado J_ω de $C(X_\omega;E)$.

5.23. LEMA: *O compactificado de Alexandroff* X_ω *em um espaço topológico* X *localmente compacto, Hausdorff e* 0*-dimensional é ainda* 0*-dimensional e Hausdorff.*

DEMONSTRAÇÃO: Como X é localmente compacto e $C_o(X;E)$ é isométrico a J_ω, basta mostrarmos que $C_o(X;F)$ é separador, onde $(F,|\cdot|)$ é um anel de divisão com valorização não arquimediana.

Tomemos x e y pontos distintos de X. Se X é localmente compacto e 0-dimensional, existem compactos abertos fechados disjuntos K_x e K_y contendo x e y respectivamente. A função característica de K_x, χ_{K_x}, é contínua, nula no infinito e $\chi_K(x) = 1 \neq 0 = \chi_{K_x}(y)$. Portanto, $C_o(X;F)$ é separador.

5.24. TEOREMA: *Consideremos um espaço topológico* X, *localmente compacto,* 0*-dimensional e* T_1. $(E,\|\cdot\|)$ *um espaço normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$ *tal que* $\text{cent}(K) \neq \emptyset$ *para todo subconjunto compacto* $K \subset E$.

Então todo espaço de Stone-Weierstrass $W_\pi \subset C_o(X;E)$ *é proximinal.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\pi : X \to Y$ a aplicação contínua e própria sobre um espaço localmente compacto Y tal que

$$W_\pi = \{g \circ \pi;\ g \in C_o(Y;E)\}.$$

Tomemos $f \in C_o(X;E)$ tal que $f \notin W_\pi$. Então $\delta = \text{dist}(f;W_\pi) > 0$ porque W_π é um subespaço fechado.

Consideremos $Y_\omega = Y \cup \{\omega\}$ o compactificado de Alexandroff de Y.

Para cada $y \in Y$ seja $\varphi(y)$ o seguinte conjunto

$$\varphi(y) = \{s \in E;\ \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| \leq \delta\}$$

Por outro lado, para cada $y \in Y_\omega$, definimos

$$\varphi_\omega(y) = \varphi(y) \quad \text{se} \quad y \in Y$$

e

$$\varphi_\omega(y) = \{0\} \quad \text{se} \quad y = \omega$$

Afirmação: φ_ω é um portador de Y_ω nos subconjuntos fechados e não vazios de E.

Tomemos $y \in Y_\omega$. Se $y = \omega$ então $\varphi_\omega(y) = \{0\}$ e portanto $\varphi_\omega(y)$ é fechado e diferente do vazio. Se $y \in Y$ então $\varphi_\omega(y) = \varphi(y)$ é fechado em E. Como $\pi^{-1}(y)$ é um subconjunto compacto de X e f é contínua, o conjunto

$$K = \{f(x);\ x \in \pi^{-1}(y)\} \quad \text{é compacto em} \quad E.$$

Por hipótese existe $s_o \in E$ tal que

$$\sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s_o\| = rad(K).$$

Também temos que $rad(K) \leq \delta$. De fato, tomemos $g \in W$. Então

$$rad(K) = \inf_{z\in E} \sup_{x\in\pi^{-1}(y)} \|f(x) - z\| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\pi^{-1}(y)} \|f(x) - g(x)\| \leq \|f - g\|$$

Como g era arbitrária,

$$rad(K) \leq \inf_{g\in W} \|f - g\|.$$

Assim, temos que $s_o \in \varphi_\omega(y) = \varphi(y)$ e portanto $\varphi_\omega(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$.

Mostraremos que φ_ω é semicontínuo inferiormente. Seja $G \subset E$ aberto tal que $\varphi_\omega(y_o) \cap G \neq \emptyset$. Se $y_o \in Y$, escolhamos $s_o \in \varphi_\omega(y_o) \cap G$. Como $\varphi_\omega(y_o) = \varphi(y_o)$, temos que

$$\sup_{x\in\pi^{-1}(y_o)} \|f(x) - s_o\| \leq \delta.$$

Isto significa que $f(\pi^{-1}(y_o)) \subset B(s_o;\delta)$, onde $B(s_o;\delta) = \{s \in E; \|s - s_o\| \leq \delta\}$. Notamos que $B(s_o;\delta)$ é aberta é que $\pi^{-1}(y_o) \subset f^{-1}(B(s_o;\delta))$. Como a aplicação π é fechada, existe um aberto saturado V em X com

$$\pi^{-1}(y_o) \subset V \subset f^{-1}(B(s_o;\delta)).$$

Então $U = \pi(V)$ é aberto em Y (porque $\pi^{-1}(U) = V$) e para todo $y \in U$,

$$\pi^{-1}(y) \subset V \subset f^{-1}(B(s_o;\delta)).$$

Assim, $f(\pi^{-1}(y)) \subset B(s_o;\delta)$ para todo $y \in U$, isto é,

$$\| f(t) - s_o \| \leq \delta$$

para todo $t \in \pi^{-1}(y)$, $y \in U$.

Mas isto significa que $s_o \in \varphi(y) = \varphi_\omega(y)$ para todo $y \in U$. Portanto, φ_ω é semicontínuo inferiormente em Y.

Se $y_o = \omega$, $\varphi_\omega(y_o) \cap G = \{0\} \cap G \neq \emptyset$, portanto $0 \in G$. Como f é nula no infinito, o conjunto

$$K_\delta = \{x \in X; \| f(x)\| \geq \delta\}$$

é compacto, e como π é contínua, $\pi(K_\delta)$ é compacto em Y. Se $y \notin \pi(K_\delta)$ temos que $\| f(\pi^{-1}(y))\| < \delta$ e portanto

$$\sup_{\pi^{-1}(y) \notin K_\delta} \| f(\pi^{-1}(y))\| \leq \delta$$

assim $0 \in \varphi_\omega(y)$ para $y \notin \pi(K_\delta)$, obtemos que $\varphi_\omega(y) \cap G \neq \emptyset$ para $\pi^{-1}(y) \notin K_\delta$ e φ_ω é semicontínuo contínuo inferiormente.

Pelo teorema da seleção de Michael, i.é., Teorema 5.21, existe $g_\omega \in C(Y_\omega;E)$ tal que $g_\omega(y) \in \varphi_\omega(y)$ para todo $y \in Y_\omega$, e além disso, $g_\omega(\omega) = 0$. Seja $g \in C_o(Y;E)$ a restrição de g_ω a Y. Então $g(y) \in \varphi(y)$ para todo $y \in Y$. Tomemos $w = g \circ \pi$. Então, $w \in W_\pi$ e, para cada $x \in X$, seja $y = \pi(x)$. Então

$$\|f(x) - w(x)\| = \|f(x) - g(y)\| \leq \delta$$

Assim,

$$\|f - w\| \leq \operatorname{dist}(f;W_\pi)$$

Demonstramos, pois, que W_π é proximinal em $C_o(X;E)$.

5.25. TEOREMA: *Consideremos um espaço topológico* X, *localmente compacto, 0-dimensional e* T_1. $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$. *Se* E *admite centros de Chebyshev, e* $W_\pi \subset C_o(X;E)$ *é um subespaço de Stone-Weierstrass, então* $\operatorname{cent}_{W_\pi}(B) \neq \emptyset$ *para todo subconjunto limitado* $B \subset C_o(X;E)$ *que é equicontínuo em todo ponto de* X *e coletivamente nulo no infinito.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\pi : X \to Y$ a aplicação contínua e própria sobre um espaço localmente compacto Y tal que

$$W_\pi = \{g \circ \pi;\ g \in C_o(Y;E)\}.$$

Seja $B \subset C_o(X;E)$ um subconjunto não vazio, limitado que é equicontínuo em todo ponto de X.

Seja

$$\delta = \mathrm{rad}_W (B).$$

CASO I: $\delta > 0$. Consideremos $Y_\omega = Y \cup \{\omega\}$ compactificado de Alexandroff de Y.

Para cada $y \in Y$ seja $\varphi(y)$ o seguinte conjunto

$$\varphi(y) = \{s \in E;\ \sup_{f \in B}\ \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| \leq \delta\}.$$

Por outro lado, para cada $y \in Y_\omega$, definimos

$$\varphi_\omega(y) = \varphi(y) \qquad \text{se} \qquad y \in Y$$

e

$$\varphi_\omega(y) = \{0\} \qquad \text{se} \qquad y = \omega .$$

Afirmamos que φ_ω é um portador de Y_ω nos subconjuntos fechados e não vazios de E. De fato. Tomemos $y \in Y_\omega$. Se $y = \omega$ então $\varphi_\omega(y) = \{0\}$ e portanto $\varphi_\omega(y)$ é fechado e diferente do vazio. Se $y \in Y$ então $\varphi_\omega(y) = \varphi(y)$ é fechado em E. Como $B \subset C_o(X;E)$ é limitado,

$$B(y) = \{f(x);\ x \in \pi^{-1}(y),\ f \in B\}$$

é limitado em E, e por hipótese $\text{cent}(B(y)) \neq \emptyset$, i.é., existe $s_o \in E$ tal que

$$\sup_{f \in B} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \| f(x) - s_o \| = \text{rad}(B(y)).$$

Para cada $g \in W_\pi$, temos

$$\text{rad}(B(y)) \leq \sup_{f \in B} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \| f(x) - g(x) \|$$

porque g é constante em $\pi^{-1}(y)$. Assim

$$\text{rad}(B(y)) \leq \sup_{y \in Y} \sup_{f \in B} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \| f(x) - g(x) \|$$

$$= \sup_{f \in B} \sup_{y \in Y} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \| f(x) - g(x) \|$$

$$= \sup_{f \in B} \| f - g \| .$$

Como g era arbitrária,

$$\text{rad}(B(y)) \leq \inf_{g \in W_\pi} \sup_{f \in B} \| f - g \| = \text{rad}_{W_\pi}(B)$$

e portanto,

$$\text{rad}(B(y)) \leq \delta .$$

e $s_o \in \varphi_\omega(y) = \varphi(y)$ e $\varphi_\omega(y)$ é não vazio.

Mostraremos agora que φ_ω é semicontínuo inferiormente.

Seja $G \subset E$ aberto tal que $\varphi_\omega(y_o) \cap G \neq \emptyset$. Se $y_o \in Y$, escolhamos $s_o \in \varphi_\omega(y_o) \cap G = \varphi(y_o) \cap G$, então

$$\sup_{f\in B} \sup_{x\in\pi^{-1}(y_o)} \| f(x) - s_o \| \leq \delta.$$

Como $\pi^{-1}(y_o)$ é um subconjunto compacto de X, existe uma cobertura aberta e finita $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de $\pi^{-1}(y_o)$, com $V_i \cap \pi^{-1}(y_o) \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n$, tal que

$$x, x' \in V_i \Rightarrow \| f(x) - f(x') \| < \delta$$

para toda $f \in B$. Isto é possível porque o conjunto $B \subset C_o(X;E)$ é equicontínuo em todo ponto de X.

Seja $V_o = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$. Temos que $\| f(x) - s_o \| \leq \delta$ para todo $x \in V_o$ e $f \in B$. Além disso, dado $x \in V_o$ escolhamos V_i tal que $x \in V_i$, e escolhamos $t \in V_i \cap \pi^{-1}(y_o)$. Então, para toda $f \in B$

$$\| f(x) - s_o \| \leq \max (\| f(x) - f(t) \|, \| f(t) - s_o \|) \leq \delta.$$

Logo,

$$\pi^{-1}(y_o) \subset V_o \subset \bigcap_{f\in B} f^{-1}(B(s_o;\delta)).$$

Como a aplicação π é fechada, existe um aberto saturado V em X com

$$\pi^{-1}(y_o) \subset V \subset V_o .$$

Então $U = \pi(V)$ é uma vizinhança aberta de y_o em Y, e para todo $y \in U$, $\pi^{-1}(y) \in V \subset f^{-1}(B(s_o;\delta))$ para toda $f \in B$. Assim,

$$\| f(x) - s_o\| \leq \delta \qquad \text{para todo} \qquad x \in \pi^{-1}(y) \quad \text{e} \quad f \in B.$$

Mas isto significa que $s_o \in \varphi_\omega(y)$ para todo $y \in U$, e φ_ω é semicontínuo inferiormente em Y.

Se, $y_o = \omega$, $\varphi_\omega(y_o) \cap G = \{0\} \cap G \neq \emptyset$, portanto $0 \in G$. Como B é coletivamente nulo no infinito, o conjunto

$$K_\delta = \{x \in X;\ \| f(x)\| \geq \delta,\ f \in B\}$$

é compacto, e como π é contínua, $\pi(K_\delta)$ é compacto em Y. Se $y \notin \pi(K_\delta)$ temos que $\| f(\pi^{-1}(y))\| < \delta$ para toda $f \in B$ e portanto

$$\sup_{\pi^{-1}(y) \notin K_\delta} \| f(\pi^{-1}(y))\| \leq \delta$$

e

$$\sup_{f \in B} \sup_{\pi^{-1}(y) \notin K_\delta} \| f(\pi^{-1}(y))\| \leq \delta$$

e assim, $0 \in \varphi_\omega(y)$ para $y \notin \pi(K_\delta)$. Obtemos que $\varphi_\omega(y) \cap G \neq \emptyset$ para $\pi^{-1}(y) \not\subset K_\delta$ e φ_ω é semicontínuo inferiormente.

Pelo Teorema 5.21, existe $g_\omega \in C(Y_\omega;E)$ tal que $g_\omega(y) \in \varphi_\omega(y)$ para todo $y \in Y_\omega$ e além disso $g_\omega(\omega) = 0$. Seja $g \in C_0(Y;E)$ a restrição de g_ω a Y. Então $g(y) \in \varphi(y)$ para todo $y \in Y$. Seja $w = g \circ \pi$. Então $w \in W_\pi$ e para cada $x \in X$, seja $y = \pi(x)$. Então para toda $f \in B$ temos

$$\|f(x) - w(x)\| = \|f(x) - g(y)\| \leq \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|f(t) - g(y)\| \leq \delta$$

Assim,

$$\sup_{f \in B} \|f - w\| \leq \delta,$$

e portanto, $w \in \mathrm{cent}_{W_\pi}(B)$.

CASO II: $\delta = 0$. Então $\mathrm{rad}_{W_\pi}(B) = 0$ o que implica que $B = \{f\}$ e $\mathrm{dist}(f;W_\pi) = \mathrm{rad}_{W_\pi}(B) = 0$. Logo, $f \in W_\pi$ e não há nada para provarmos.

5.26. TEOREMA: *Consideremos um espaço topológico* X, *localmente compacto, 0-dimensional e* T_1; $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço normado não arquimediano sobre* $(F,|\cdot|)$; $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra separadora; um subespaço vetorial fechado* $W \subset C_0(X;E)$ *que é um A-módulo tal que* $W(x)$ *é proximinal em* E *para todo* $x \in X$.

Então, W *é proximinal em* $C_o(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos $f \in C_o(X;E)$ com $f \notin \overline{W}$ e seja $\delta = \mathrm{dist}(f;\overline{W}) > 0$. Consideremos $X_\omega = X \cup \{\omega\}$ o compactificado de Alexandroff de X. Para cada $x \in X$, seja $\varphi(x)$ o seguinte conjunto

$$\varphi(x) = W(x) \cap \{s \in E; \ \|f(x) - s\| < \delta\}.$$

Por outro lado, para cada $x \in X_\omega$, definimos:

$$\varphi_\omega(x) = \varphi(x) \qquad \text{se} \qquad x \in X$$

e

$$\varphi_\omega(x) = \{0\} \qquad \text{se} \qquad x = \omega.$$

Afirmamos que φ_ω é um portador de X_ω nos subconjuntos fechados e não vazios de E. De fato. Seja $x \in X_\omega$. Se $x = \omega$ então $\varphi_\omega(x) = \{0\}$ e assim, $\varphi_\omega(x)$ é fechado e diferente do vazio. Se $x \in X$, existe $w \in W$ tal que

$$\|w(x) - f(x)\| \leq \mathrm{dist}(f(x);W(x)) \leq \delta$$

e portanto $\varphi(x) \neq \emptyset$ e como $W(x)$ é fechado, temos que $\varphi(x)$ é também fechado.

Mostraremos que φ_ω é semicontínuo inferiormente. Seja $G \subset E$ aberto tal que $\varphi_\omega(x_o) \cap G \neq \emptyset$. Se $x_o \in X$, escolhamos $s_o \in \varphi(x_o) \cap G$. Existe $w \in W$ tal que $s_o = w(x_o)$ e $\|f(x_o) - w(x_o)\| \leq \delta$.

Assim, $x_o \in (f - w)^{-1}(B(0;\delta))$ onde $B(0;\delta) = \{s \in E; \|s\| \leq \delta\}$. Por continuidade, exite uma vizinhança U de x_o tal que $w(x) \in G$ e $x \in (f - w)^{-1}(B(0;\delta))$ para todo $x \in U$, porque $B(0;\delta)$ e aberta. Então, $w(x) \in \varphi(x) \cap G = \varphi_\omega(x) \cap G$ para todo $x \in U$ e portanto φ_ω restrito a X é semicontínuo inferiormente.

Se $x_o = \omega$ então $\varphi_\omega(x_o) \cap G = \{0\} \cap G \neq \emptyset$, portanto $0 \in G$. Como f é nula no infinito, o conjunto

$$K_\delta = \{x \in X; \|f(x)\| \geq \delta\}$$

é compacto. Se $x \notin K_\delta$, temos que $0 \in B(f(x);\delta)$ e como $0 \in W(x)$ vem que $0 \in \varphi(x) = \varphi_\omega(x)$ e consequentemente, $\varphi_\omega(x) \cap G = \varphi(x) \cap G \neq \emptyset$ para todo $x \notin K_\delta$.

Portanto, φ_ω é semicontínuo inferiormente.

Usando o Teorema 5.21, existe $g_\omega \in C(X_\omega;E)$ tal que $g_\omega(x) \in \varphi_\omega(x)$ para todo $x \in X_\omega$, além disso, $g_\omega(\omega) = 0$.

Seja $g \in C_o(X;E)$ a restrição de g_ω a X, então $g(x) \in \varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Assim, $g(x) \in W(x)$. Devido ao Teorema 3.5, $g \in \overline{W}$. Como W é fechado, $g \in W$. Por outro lado,

$$\|f(x) - f(x)\| \leq \delta = \mathrm{dist}(f;W) \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Assim,

$$\|f - g\| \leq \mathrm{dist}(f;W) \quad \text{e portanto } W \text{ é proximinal em } C_o(X;E).$$

5.27. TEOREMA: *Suponhamos* X *e* E *como no Teorema 5.26. Consideremos* $A \subset C^*(X;F)$ *uma subálgebra separadora e* $W \subset C_o(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado que é um* A*-módulo e tal que para todo* $x \in X$, $W(x)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* E.

Então, $\text{cent}_W(B) \neq \emptyset$ *para todo subconjunto limitado, coletivamente nulo no infinito e equicontínuo* $B \subset C_o(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Designemos por $B \subset C_o(X;E)$ um subconjunto limitado, equicontínuo em todo ponto $x \in X$ e coletivamente nulo no infinito.

Seja $\delta = \text{rad}_W(B)$. Se $\delta = 0$ então $B = \{f\}$ com $f \in W$ e não há nada para provarmos.

Suponhamos $\delta > 0$.

Designemos por X_ω o compactificado de Alexandroff de X. Para cada $x \in X$, seja $\varphi(x)$ o seguinte conjunto

$$\varphi(x) = W(x) \cap \{s \in E;\ \sup_{f \in B} \|f(x) - s\| \leq \delta\}.$$

Por outro lado, para cada $x \in X_\omega$, definimos

$$\varphi_\omega(x) = \varphi(x) \qquad \text{se} \qquad x \in X$$

e

$$\varphi_\omega(x) = \{0\} \qquad \text{se} \qquad x = \omega.$$

Afirmamos que φ_ω é um portador de X_ω nos subconjuntos fechados e não vazios de E. De fato. Seja $x \in X_\omega$. Se $x = \omega$ então $\varphi_\omega(x) = \{0\} \neq \emptyset$ e $\varphi_\omega(x)$ é fechado em E. Se $x \neq \omega$, tomemos $B(x) = \{f(x);\ f \in B\}$, então $B(x)$ e limitado em E, e existe $w \in W$ tal que

$$\sup_{f\in B} \|f(x) - w(x)\| \leq \mathrm{rad}_{W(x)}(B(x))$$

mas,

$$\mathrm{rad}_{W(x)}(B(x)) = \inf_{w\in W} \sup_{f\in B} \|f(x) - w(x)\| \leq \inf_{w\in W} \sup_{f\in B} \|f - w\| = \delta$$

e portanto

$$\varphi(x) = \varphi(x) \neq \emptyset$$

e também é fechado em E.

Mostraremos agora que $\varphi_\omega(x)$ é semicontínuo inferiormente; i.é.

$$\{x \in X_\omega\ ;\ \varphi_\omega(x) \cap G \neq \emptyset\}$$

é aberto, para todo subconjunto aberto $G \subset E$.

Seja $x_o \in X_\omega$ tal que $\varphi_\omega(x_o) \cap G \neq \emptyset$. Suponhamos primeiramente que $x_o \in X$. Escolhamos $s_o \in \varphi(x_o) \cap G$. Existe $w \in W$ tal que $s_o = w(x_o)$ e $\sup_{f\in B} \|f(x_o) - w(x_o)\| \leq \delta$. Assim,

$$x_o \in (f - w)^{-1}(B(0;\delta))$$

para toda $f \in B$ onde

$$B(0;\delta) = \{s \in E; \ \|s\| \leq \delta\}.$$

Por causa da continuidade de w e da equicontinuidade de $\{f - w;\ f \in B\}$, existe uma vizinhaça aberta U de x_o tal que $w(x) \in G$ e $x \in (f - w)^{-1}(B(0;\delta))$ para toda $f \in B$ e $x \in U$. Então

$$w(x) \in \varphi(x) \cap G = \varphi_\omega(x) \cap G$$

para todo $x \in U$.

Se $x_o = \omega$, temos inicialmente que $0 \in G$ pois

$$\varphi_\omega(x_o) \cap G = \{0\} \cap G \neq \emptyset.$$

Como B é coletivamente nulo no infinito, existe um subconjunto compacto K_δ tal que $\|f(x)\| < \delta$ para todo $x \notin K_\delta$ e $f \in B$. Assim, $0 \in B(f(x);\delta)$ para todo $x \notin K_\delta$ e toda $f \in B$. Mas como $0 \in W(x)$, vem que $0 \in \varphi(x)$ para todo $x \notin K_\delta$. Consequentemente, $\varphi(x) \cap G \neq \emptyset$ para todo $x \notin K_\delta$.

Com isto, demonstramos que φ_ω é semicontínuo inferiormente em X_ω.

Novamente, devido ao Teorema 5.21, existe $g_\omega \in C(X_\omega;E)$ tal que $g_\omega(x) \in \varphi_\omega(x)$ e $g_\omega(\omega) = 0$.

Seja $g \in C_o(X;E)$ a restrição de g_ω a X. Então $g(x) \in \varphi(x)$. Assim, $g(x) \in W(x)$ para todo $x \in X$. Por causa do Teorema 3.5, $g \in \overline{W}$. Como W é fechado, $g \in W$.

Por outro lado,

$$\sup_{f\in B} \|f(x) - g(x)\| \leq \delta$$

para todo $x \in X$ e assim,

$$\sup_{f\in B} \|f - g\| \leq \delta = \text{rad}_W(B).$$

Portanto,

$$g \in \text{cent}_W(B).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N., *Espaces Vectoriels Topologiques* - Chapitres 1 et 2, Deuxième édition, Hermann, Paris, 1966.

[2] BUCK, R. C., Approximation properties of vector-valued functions, *Pacific J. Math.* 53(1974), 85 - 94.

[3] CARNEIRO, J. P. Q., Aproximação ponderada não - arquimediana, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* 50(1978), 1 - 34.

[4] CHERNOFF, P.R., RASALA, R.A., e W. C. WATERHOUSE, The Stone-Weierstrass theorem for valuable fields, *Pacific J. Math.* 27(1968), 233 - 240.

[5] DIEUDONNÉ, J., Sur les fonctions continues p-adiques, *Bull. Sci. Math.* 68(1944), 79 - 95.

[6] GLICKSBERG, I., Bishop's generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14(1963), 329 - 333.

[7] KAPLANSKY, I., The Weierstrass theorem in fields with valuations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1(1950), 356 - 357.

[8] MACHADO, S., e J. B. PROLLA, The general complex case of the Bernstein - Nachbin approximation problem, *Ann. Inst. Fourier, (Grenoble)* 28(1978), 193 - 206.

[9] MACHADO, S., e J. B. PROLLA, An introduction to Nachbin spaces, *Rendiconti del Circolo Matem. Palermo*, Serie II, 21 (1972), 119 - 139.

[10] MICHAEL, E., Selected selection theorems, *Amer. Math. Monthly* 63(1956), 233 - 238.

[11] MONNA, A. F., *Analyse non-archimédienne*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 56, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[12] NACHBIN, L., Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions: real and self-adjoint complex cases, *Annals of Math.* 81(1965), 289 - 302.

[13] NACHBIN, L., *Elements of Approximation Thoery*, D. Van Nostrand Co., Inc., 1967. Reprinted by R. Krieger Co., Inc., 1976.

[14] NARICI, L., BECKENSTEIN, E., e G. BACHMAN, *Functional analysis and Valuation Theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 5, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

[15] PROLLA, J. B., e S. MACHADO, Weighted Grothendieck subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 186(1973), 147 - 158.

[16] PROLLA, J. B., e S. MACHADO, Stone-Weierstrass theorems for set-valued mappings, por aparecer.

[17] PROLLA, J. B., *Approximation of Vector Valued Functions*, North-Holland, Publ. Co., Amsterdam, 1977.

[18] PROLLA, J. B., *Topics in Functional Analyses over valued Division Rings*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, por aparecer.

[19] PROLLA, J. B., Best simultaneous approximation, por aparecer.

[20] PROLLA, J. B., Non-archimedean function spaces. In: *Linear Spaces and Approximation*, edited by P. L. Butzer and B. Sz.-Nagy, ISNM 40, Birkhäuser Verlag Basel, 1978, 101 - 117.