

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

MODELAMENTO LINEAR E CONTROLE ÓTIMO ESTOCÁSTICO DE
USINAS HIDRÁULICAS COM REPRESENTAÇÃO INDIVIDUALIZADA

OSCAR SALVIANO SILVA FILHO

Orientador : PROF. DR. JOSÉ CLÁUDIO GEROMEL

076/82

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS

DEZEMBRO 1982

Si38m

4765/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A

meus pais

AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meu agradecimento a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a existência deste trabalho. Particularmente sou grato ao :

Prof. Dr. José Cláudio Geromel, pela orientação, o qual nunca deixou faltar o apoio e estímulo que serviram de base na consolidação desta tese.

Prof. Dr. Ivanil Sebastião Bonatti e ao Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral pelas discussões e sugestões prestadas.

À Elza Aoki, pelo trabalho de datilografia.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma nova alternativa na obtenção de uma política ótima de operação para sistemas hidrotérmicos de geração de energia. Nosso interesse reside no estudo de operações a longo prazo (horizonte anual, discretização mensal), caracterizando portanto, um problema estocástico, não convexo de grande porte. Com objetivo de resolver este problema, estudamos um modelo linear estacionário do tipo ARMA para os aportes independentes (chuva, afluências ...) dos reservatórios de cada usina. Propomos um novo método de Programação Estocástica, que é caracterizado por dois subproblemas: determinação das trajetórias Médias e Variância Mínima. Com tal método, obtemos uma lei de controle ótimo para as usinas individualmente. A solução proposta leva em conta, todas as características do parque hidráulico nacional.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO GERAL	1
CAPÍTULO I : MODELAMENTO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS	3
I.1. - INTRODUÇÃO	4
I.2. - MODELAMENTO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS	7
I.2.1. - Subsistema Térmico e sua Função de Custo	7
I.2.2. - Subsistema Hidráulico e sua Função de Produção	8
I.2.3. - Formulação do Problema Hidrotérmico	11
I.3. - CONSIDERAÇÃO E MODELAMENTO DOS APORTES	14
I.4. - PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA	15
I.5. - CONTROLE ÓTIMO ESTOCÁSTICO DE USINAS HIDRÁULICAS	24
I.6. - CONCLUSÃO	31
CAPÍTULO II : ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS - MODELO ARMA	33
II.1. - INTRODUÇÃO	34
II.2. - FUNÇÕES DE AUTOCORRELAÇÃO E AUTOCORRELAÇÃO PARCIAL	36
II.2.1. - Estimação da Função de Autocorrelação	37
II.2.2. - Estimação da Função de Autocorrelação Parcial	39
II.3. - IDENTIFICAÇÃO DO MODELO	44
II.3.1. - Modelo Autoregressivo - Eq. de Yule-Walker	45
II.3.2. - Modelo Média-Móvel - Método de Newton-Raphson	47

II.3.3. - Modelo ARMA - Método de Solução	50
II.4. - MINIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA	52
II.4.1. - Método Matriz Estendida	54
II.4.2. - Método Matriz Estendida Generalizado	56
II.5. - APLICAÇÃO A UM SISTEMA REAL BRASILEIRO	68
II.5.1. - O Sistema Real em Estudo	68
II.5.2. - Parâmetros Estimados	70
II.5.3. - Testes de Aderência e Validade do Modelo	72
II.6. - CONCLUSÃO	79
 CAPÍTULO III : CONTROLADOR DE VARIÂNCIA MÍNIMA	 80
III.1. - INTRODUÇÃO	81
III.2. - A SOLUÇÃO DO CONTROLADOR DE VARIÂNCIA MÍNIMA	82
III.3. - APLICAÇÃO AO SISTEMA EM ESTUDO	95
III.4. - RESULTADOS OBTIDOS PARA O SISTEMA EM ESTUDO	100
III.5. - CONCLUSÃO	105
 CONCLUSÃO GERAL	 107
 BIBLIOGRAFIA	 110
 APÊNDICES	
A1 - PROGRAMA GERAL PARA MODELAMENTO LINEAR DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS	 114

A2 - PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VARIÂNCIA MÍNIMA	121
A3 - PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO E PREDIÇÃO DE 1 PASSO A FRENTE	126
A4 - TABELA DE MEDIDAS OBSERVADAS PARA OS APORTES	129

INTRODUÇÃO GERAL

Nesta tese estamos interessados em estudar e propor uma metodologia, capaz de resolver problemas de controle ótimo estocástico de grandes dimensões, caracterizados por terem dinâmica linear sujeita às perturbações aleatórias e limitantes nas variáveis de controle e estado.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro, estudamos aspectos relacionados com o modelamento das unidades térmicas e hidráulicas, formulando em seguida, o problema de controle ótimo das usinas hidrelétricas com representação individualizada, sujeitas a aportes estocásticos em cuja solução, será aplicada a metodologia proposta.

O capítulo II é dedicado ao estudo de séries temporais, sendo proposto um modelo do tipo ARMA para representar os aportes $y(k)$:

$$y(k) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \theta(k) + \hat{y}(k) \quad (a)$$

onde, $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$ são polinômios em z^{-1} (operador atraso) cujos parâmetros, são estimados utilizando um método aqui desenvolvido que chamamos de "Matriz Estendida Generalizado", e $\hat{y}(k)$ representa a média mensal das medidas observadas com período de 12 meses (sazonalidade).

No terceiro capítulo, a partir do modelo identificado (a) determinamos a lei de controle para cada usina, resolvendo um problema de Variância Mínima que leva em conta, os limitantes físicos destas usinas, respectivamente.

As idéias desenvolvidas nestes dois últimos capítulos, foram implementadas em um computador digital PDP-10 e aplicadas a uma parte do sistema Sudeste do Brasil o qual, é composto por 4 usinas interligadas em forma de árvore. Os principais resultados obtidos, são apresentados em forma de gráficos ou tabelas, no fim de cada capítulo e nos apêndices.

CAPÍTULO I

MODELAMENTO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

I.1. INTRODUÇÃO

Um sistema hidrotérmico de geração de energia é caracterizado por dois meios distintos de produção: geração hidráulica e térmica, que devem ser operados conjuntamente, de modo a satisfazer uma demanda definida pelo mercado consumidor. Na figura abaixo, apresentamos esquematicamente este sistema energético onde E_T , E_H e E_D representam respectivamente, a energia gerada pelo subsistema térmico, subsistema hidráulico e a consumida pelo mercado [GEROMEL e SALVIANO, 1982-A]

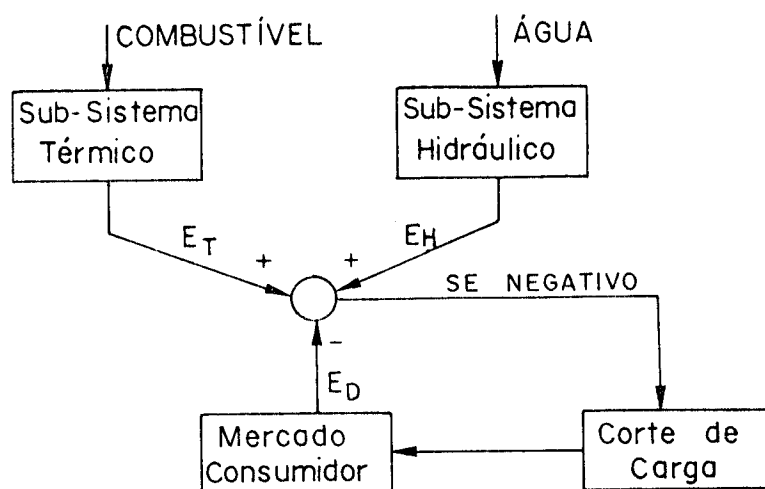


Fig. I.1. - Esquema energético de um mercado consumidor.

A política ótima de operação do sistema global - devido ao baixo custo de produção do meio hidráulico em relação ao meio térmico - depende quase que totalmente do subsistema hidráulico, tornando assim, importante a decisão de quando e quanto gerar com este subsistema, conhecendo certas limitações físicas, tais como: capacidades dos reservatórios, aportes de água devido as chuvas, afluências e os rendimentos das unidades geradoras. Ao subsistema térmico resta satisfazer o déficit da produção, isto é, gerar o equivalente a diferença entre a demanda e a produção de energia do parque hidráulico. Então, o problema de operação ótima deve ser encarado, como a minimiza

ção do custo total de combustível usado na geração termoelétrica, procurando equilibrar o uso temporal da energia hidráulica e térmica, afim de atender a demanda de eletricidade, em cada período [GEROMEL e LUNA, 1980].

Um aspecto importante do sistema hidrotérmico é seu ciclo de produção. Apesar dos subsistemas térmicos e hidráulicos estarem acoplados fisicamente, eles apresentam ciclos diferentes. Enquanto o ciclo térmico é semanal (ciclo de demanda), o ciclo hidráulico é anual (ciclo das águas). Isto sugere uma política ótima de operação a curto ou longo prazo, respectivamente.

Neste trabalho estudaremos o problema de otimização a *Longo Prazo*. Portanto, é oportuno conhecermos as principais características, relacionadas a um modelamento a longo prazo: demanda determinística, aportes de água aleatórios, os atrasos de transportes de água entre usinas desprezíveis e ainda, um problema não-convexo com horizonte de otimização anual discretizado mensalmente [SALVIANO e GEROMEL, 1982].

As realidades físicas deste modelamento, principalmente devido a aleatoriedade dos aportes de água, bem como a variação, igualmente aleatória, na altura dos reservatórios, nos conduzem a definir um problema de controle ótimo estocástico de grande dimensão e, portanto, de difícil solução. Na literatura, encontramos duas maneiras diferentes de tratamento deste problema: No primeiro, considera-se um modelo individualizado para cada usina hidráulica e os aportes determinísticos - muitas vezes utiliza-se uma condição de pior caso (ano mais seco do histórico). A principal característica deste enfoque, é a determinação do controle ótimo em cada usina como uma função do tempo e, portanto, em malha aberta, onde vários métodos de programação matemática, podem ser utilizados em sua solução [GEROMEL e LUNA, 1981].

O segundo enfoque, considera um modelo equivalente para o subsistema hidráulico, onde todos os reservatórios são agrupados em um único re

servatório hipotético; com isto, reduzimos consideravelmente a dimensão do problema de controle ótimo, contornando as dificuldades computacionais, e assim, viabilizando o uso de programação dinâmica estocástica. A característica deste modelamento é favorecer uma lei de controle em malha fechada, onde as variáveis de controle são funções das variáveis de estado, associadas a cada reservatório [PRONOVOST and BOULVA, 1978].

Neste capítulo apresentamos um estudo do tipo de modelamento, encontrado na literatura, para os subsistemas térmicos e hidráulicos. Em seguida, formulamos o problema geral de geração hidro-termoelétrica, que pode ser caracterizado, como um problema de controle ótimo estocástico de grande porte.

É propósito desenvolver uma maneira de solucionar este problema, considerando a natureza aleatória dos aportes independentes. Para tanto, na seção I.3, introduzimos uma noção do modelo geral tipo ARMA para estes aportes cujos parâmetros, são estimados a partir da metodologia clássica de [BOX and JENKINS, 1970]. Em seguida, na seção I.4, apresentamos uma alternativa para solucionar problemas estocásticos. Com vistas a isto, discutimos inicialmente, a respeito de dois métodos encontrados na literatura, e utilizados para transformar problemas estocásticos em determinísticos, eles são conhecidos como: CHANCE CONSTRAINT e TWO STAGE APPROACH. Estes métodos, como veremos, apresentam limitações que tornam inviável sua aplicação em nosso estudo. Nossa proposta é justamente a de construir uma metodologia, que não esteja sujeita a tais limitações. O método proposto, decompõe o problema estocástico em: determinação ótima da VARIÂNCIA (problema da variância mínima) e determinação ótima da MÉDIA. Consequentemente, definimos completamente as variáveis aleatórias correspondentes a equação dinâmica do modelo hidráulico, uma vez que vamos supor distribuição gaussiana para os aportes de água.

I.2. MODELAMENTO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

Nesta seção, apresentamos o tipo de modelamento utilizado para subsistemas térmicos e hidráulicos, como é encontrado na literatura. Conhecido o modelo podemos formular o problema de otimização cuja solução, será tratada em seções posteriores.

I.2.1. Subsistema Térmico e sua Função de Custo

Uma usina termoelétrica pode utilizar para seu funcionamento, os seguintes tipos de combustíveis: óleo, carvão, gás, ou combustível nuclear.

Consideremos um sistema constituído de M usinas termoelétricas, que tem suas características de geração dadas por: [GEROMEL e LUNA, 1980]

$$1 \leq i \leq M \left\{ \begin{array}{l} C_i(s_i(k)) \\ s_i(k) \in S_i = \{s_i(k) / \underline{s}_i \leq s_i(k) \leq \bar{s}_i\} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

onde, $C_i(\cdot)$ é a função custo de geração (em Cr\$), que é crescente com a quantidade de energia gerada $s_i(k)$ (MWh) pela térmica i , no instante k , genérico do horizonte de tempo em estudo. O custo incremental ($dC_i(\cdot)/ds_i$) é igualmente uma função crescente. Isto nos leva a concluir, que a função $C_i(\cdot)$ é estritamente convexa.

A quantidade de energia gerada é limitada inferiormente pela energia mínima que a usina pode produzir (\underline{s}_i) e superiormente, pela sua capacidade máxima de produção (\bar{s}_i). Este limitante é dado em (1.1) pelo conjunto S_i .

I.2.2. Subsistema Hidráulico e sua Função de Produção

Consideremos um conjunto de N usinas hidráulicas interconectadas. Cada usina é caracterizada pela dinâmica de seu reservatório, que pode ser descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}_i(t) = -u_i(t) + \sum_{j \in J_i} u_j(t) + y_i(t) \quad i=1 \dots N \quad (1.2)$$

$$x_i(0) = x_{i0}$$

a qual, define a evolução do volume de água armazenado no reservatório da usina i, no instante de tempo t. A equação (1.2), satisfaz o princípio da conservação da massa e é formada pelas seguintes variáveis: $x_i (10^6 m^3)$ é o volume de água armazenado, $u_i (m^3/seg.)$ é a quantidade de água turbinada na usina i; para efeito de simplicidade, não consideramos o volume d'água vertido, entretanto, este poderá ser introduzido neste estudo, sem nenhuma dificuldade adicional; $y_i (m^3/seg.)$ é a vazão correspondente aos aportes de água no reservatório i (chuva, afluências e etc...) e J_i é o conjunto dos índices correspondente as usinas, imediatamente à montante da i-ésima.

De modo a podermos escrever (1.2) na forma discreta, podemos tomar sua integral entre dois instantes consecutivos, $t - \Delta t$ e t. Temos:

$$\int_{t-\Delta t}^t \dot{x}_i(\tau) d\tau = - \int_{t-\Delta t}^t u_i(\tau) d\tau + \sum_{j \in J_i} \int_{t-\Delta t}^t u_j(\tau) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t y_i(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

considerando $t = k$ e assumindo $\Delta t = 1$ mês obtemos:

$$x_i(k) = x_i(k-1) - u_i(k-1) + \sum_{j \in J_i} u_j(k-1) + q_i(k) \quad (1.4)$$

$$x_i(0) = x_{i0}$$

É importante ressaltar que a equação (1.4), tem todas as variáveis dadas na mesma unidade ($10^6 m^3$) e

$$q_i(k) = \int_{t-\Delta t}^t y_i(\tau) d\tau \cong \frac{1}{2} \{y_i(t - \Delta t) + y_i(t)\} \Delta t \quad (1.5)$$

ou ainda, $q_i(k) = 0.5\{y_i(k - 1) + y_i(k)\}$.

Considerando todas as usinas do sistema em estudo $i=1\dots N$, podemos reescrever (1.4) na forma:

$$x(k) = x(k + 1) + Bu(k - 1) + q(k) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

onde,

$x_0 \in R^N$ - vetor estado inicial dado;

$$x(k) = [x_1 \dots x_N]^T \in R^N ;$$

$$u(k) = [u_1 \dots u_N]^T \in R^N ;$$

$$q(k) = [q_1 \dots q_N]^T \in R^N ;$$

e temos ainda a matriz quadrada B de dimensão $(N \times N)$ formada por elementos $-1, 0$ e 1 , correspondentes a estrutura de ligação das hidroelétricas. Esta matriz, apresenta importantes propriedades que vamos apresentar a seguir:

Seja,

$$\mathcal{B} \triangleq \{B / \{B\}_{i,j} = 0 \text{ se } i < j \text{ e } \{B\}_{ii} = -1\} \quad (1.7)$$

a classe \mathcal{B} define um conjunto de matrizes do tipo triangular inferior, que

se caracterizam por:

$$a) \det(B) = (-1)^N, \quad \forall B \in \mathcal{B} \implies B^{-1} \text{ existe}$$

$$b) B \in \mathcal{B} \implies B^{-1} \in \mathcal{B}$$

É importante, agora, considerarmos as restrições operativas a que está sujeito o modelo, ou seja, os limitantes superiores e inferiores das variáveis de estado e controle do subsistema hidroelétrico:

$$x(k) \in X = \{x(k) / \underline{x} \leq x(k) \leq \bar{x}\} \tag{1.9}$$

$$u(k) \in U = \{u(k) / \underline{u} \leq u(k) \leq \bar{u}\}$$

A função de produção de cada usina i no instante k é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_i(k), u_i(k)) &\triangleq (\text{rendimento}) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{turbinada} \\ \text{em 1 mês} \end{array} \right) \cdot g \cdot \left(\begin{array}{c} \text{altura} \\ \text{de} \\ \text{queda} \end{array} \right) \\ &\triangleq \pi_i \cdot u_i(k) \cdot (h_i(x_i(k)) - h_{0i}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

e significa, que a energia mensal gerada pela usina i , é função da quantidade de água turbinada e da altura da queda (energia potencial). A equação (1.10) é constituída por: uma constante π_i cujo valor depende do rendimento e da aceleração da gravidade. E de $h_i(\cdot)$, que é uma função polinomial que transforma um determinado volume armazenado $x_i(k)$, na altura de queda e, portanto, depende do perfil topográfico de cada reservatório (h_{0i} é uma constante que corresponde ao nível de canal de fuga).

Considerando as N usinas em questão, a equação (1.10) torna-se:

$$\Phi(x(k), u(k)) = \sum_{i=1}^N \pi_i \cdot u_i(k) \cdot [h_i(x_i(k)) - h_{0i}] \quad (1.11)$$

É interessante observar que apesar de $h_i(\cdot)$ ser uma função côncava, a função de produção $\phi_i(\cdot)$ não apresenta nenhuma propriedade de convexidade ou concavidade. Isto, se deve ao fato, de $\phi_i(\cdot)$ sendo função das variáveis $x_i(k)$ e $u_i(k)$ implicar na obtenção de uma matriz hessiana, tal que:

$$\lambda_1(H\phi_i) \cdot \lambda_2(H\phi_i) < 0 \quad ; \quad \forall x_i(k) \text{ e } u_i(k) \quad (1.12)$$

onde, $\lambda_1(\cdot)$ e $\lambda_2(\cdot)$ denotem os autovalores de (\cdot) o que confirma matematicamente, a ausência da propriedade citada acima. A consequência deste fato, é tornar difícil a solução do problema de otimização relativo ao subsistema hidráulico, uma vez que, pelo menos teoricamente, os métodos clássicos de de composição não podem ser utilizados.

Vamos em seguida, formular o problema hidrotérmico tendo como base, o modelamento estudado até então.

I.2.3. Formulação do Problema Hidrotérmico

Este problema consiste na otimização da operação de sistemas hi drotérmicos de geração, com interligações, aportes independentes estocásticos e demanda determinística. Isto corresponde a um problema de controle oti mo estocástico de grande porte, não linear, com restrições nas variáveis de controle e estado.

Inicialmente, seja $H(k)$ a energia total em (MWh) gerada pelo subsistema hidráulico e $s_i(k)$ a quantidade de energia (MWh) produzida pela térmica i , então temos

$$p(k) = \sum_{i=1}^M s_i(k) + H(k) \quad (1.13)$$

que deve ser compreendida, como sendo a energia total que o sistema global gera para $k=1,2,\dots$. Seja então, $\Pi(p(k))$ uma função convexa decrescente, que associa a cada nível de produção $p(k)$, um custo referente a uma possível necessidade de corte de carga - veja figura 1.1 - e conseqüentemente, $\Pi(p(k)) = 0$ se $p(k) \geq d(k)$ onde, $d(k)$ (MWh) é o nível de demanda fixada pelo mercado consumidor no instante k [GEROMEL e SALVIANO, 1982-A]. Com estas informações e o modelamento (1.1), podemos escrever a política de operação das unidades térmicas na forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^M C_i(s_i(k)) + \Pi(p(k)) \\ & \sum_{i=1}^M s_i(k) + H(k) = p(k) \\ & s_i(k) \in S_i \quad i=1,2,\dots,M \end{aligned} \quad (1.14)$$

De (1.14) podemos obter a função de custo relativa à produção $H(k)$, do subsistema hidráulico. Esta função $Q(H(k)) : R^+ \rightarrow R^+$ é diferenciável e decrescente, (como pode ser observada na figura 1.2) quando algumas hipóteses são feitas sobre (1.14). Estas hipóteses são fracas e serão, portanto, daqui em diante, assumidas [LYRA, FRIEDLANDER e GEROMEL, 1981].

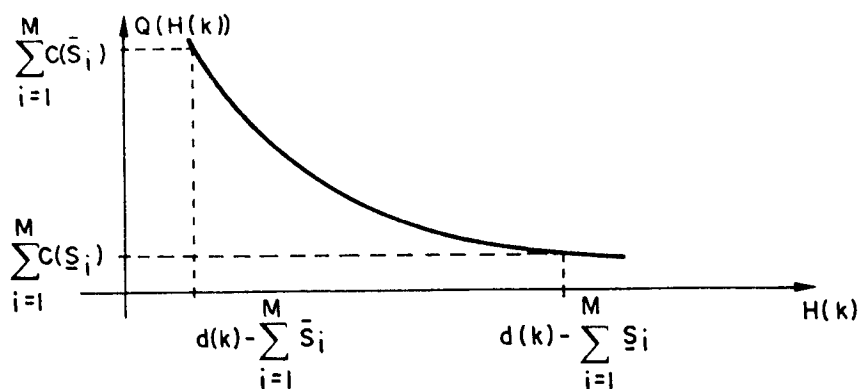


Fig. 1.2. - A função de custo relativa ao subsistema hidráulico.

Por outro lado, temos que a energia total gerada pelo subsistema hidráulico é dada a partir do conhecimento de (1.10) e (1.11).

$$H(k) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (1.15)$$

Com estas considerações, podemos escrever o problema de controle ótimo, não convexo e de grande porte para um conjunto de N usinas, que compõem o subsistema hidráulico na forma:

$$\begin{array}{l} \text{Min} \\ x_i(k) \in X_i \\ u_i(k) \in U_i \end{array} \quad \sum_{k=1}^T Q\left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x_i(k), u_i(k))\right)$$

$$x_i(k) = x_i(k-1) - u_i(k-1) + z_i(k-1) + q_i(k) \quad ; \quad x_i(0) = x_{i0} \quad (1.16)$$

$$z_i(k-1) = \sum_{j \in J_i} u_j(k-1)$$

a solução de (1.16), fornece a política ótima de operação de cada usina do parque hidráulico em questão.

Quando consideramos um planejamento a longo prazo - horizonte anual com discretização mensal - não podemos fugir da aleatoriedade, a que estão sujeitos os aportes independentes $y_i(k)$ (e por conseguinte $q_i(k)$) em cada usina. Consequentemente, (1.16) torna-se um problema de controle ótimo estocástico e como formulado, perde o sentido matemático. Nas seções seguintes, vamos estudar uma maneira de resolver (1.16) mantendo suas características estatísticas.

I.3. CONSIDERAÇÕES E MODELAMENTO DOS APORTES

A dificuldade de solução do problema (1.16) se deve, além de sua grande dimensão, a natureza estocástica da sua restrição dinâmica originada na variável aleatória $y(k)$ - sujeita às incertezas meteorológicas da região, onde se localiza as usinas (por exemplo chuva, evaporação, afluições e etc.). As únicas informações disponíveis sobre $y(k)$, são tabelas contendo medidas das vazões feitas nos rios mês a mês, a partir do ano de 1930, para cada usina (ver apêndice A4).

Utilizando as informações disponíveis, devemos propor um modelo para os aportes, tal que, satisfaça os seguintes requisitos:

- a) o modelo deve ser simples o suficiente para que o problema estocástico (1.16), seja de fácil solução;
- b) possamos prever, com um mês de antecedência, os aportes mais prováveis com boa precisão.

O modelo linear escolhido para representar os aportes de água em cada usina é do tipo ARMA, que se escreve:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(k) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \theta(k) + \hat{y}(k) \\ q(k) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})y(k) \end{array} \right. \quad (1.17)$$

onde, $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$ são polinômios em z^{-1} (operador atraso), $\theta(k)$ é um ruído branco com média nula e desvio padrão, σ_θ e $\hat{y}(k)$ é a média das vazões observadas num período de 12 meses (sazonalidade).

Como veremos no capítulo II, a equação (1.17) é obtida adotando o procedimento clássico para modelamento de séries temporais [BOX and JENKINS, 1970]. Assumiremos a hipótese de estacionariedade estatística, sendo $y(k)$ uma variável aleatória, com distribuição gaussiana de média $\bar{y}(k)$. Não será estudado as prováveis correlações espaciais, ou seja, correlações entre os aportes das diferentes usinas em consideração. Neste trabalho, estaremos interessados apenas nas correlações temporais, isto é, a dependência estatística de $y(k)$ em k (tempo).

No próximo capítulo estudaremos mais detalhadamente o modelamento (1.17), procurando mostrar uma maneira parsimoniosa de escolher a ordem do modelo, bem como uma maneira eficiente de estimar os parâmetros de $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$. Além disso, estaremos interessados nas características estatísticas do ruído $\theta(k)$. Finalizando, forneceremos um teste de aderência para testar a validade do modelo.

I.4. PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Nesta seção estudaremos métodos de programação estocástica, encontrados na literatura especializada, para solucionar (1.16), que é um problema de controle ótimo estocástico, cuja grande dimensão, impede seu tratamento utilizando programação dinâmica estocástica. Como veremos a seguir, tais métodos apresentam certas limitações, que impedem sua aplicação à solução do problema em questão. Em vista disto, propomos uma abordagem alternativa cuja característica, é decompor (1.16) em dois subproblemas: determinação da MÉDIA e da VARIÂNCIA.

Com o intuito de simplificar (1.16), que tem $q_i(k)$ dado por (1.17), vamos adotar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(z) \\ \text{z} \in & Z \\ & Az = \theta \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde, $f(\cdot)$ é uma função diferenciável ($f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), $z \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{rank}(A) = m \leq n$. Temos, ainda, $Z = \{z / \underline{z} < z < \bar{z}\}$ e $\theta \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de variáveis aleatórias gaussianas, tal que, $E\{\theta\} = \bar{\theta}$ e $E\{(\theta - \bar{\theta})(\theta - \bar{\theta})'\} = V_0$ (simétrica definida positiva).

Com o objetivo de estudar os métodos de programação estocástica, vamos tomar o problema (1.18) e substituir a igualdade da restrição por uma desigualdade:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(z) \\ \text{z} \in & Z \\ & Az \leq \theta \end{aligned} \tag{1.19}$$

Note que para uma dada ocorrência da variável aleatória θ , o problema (1.19) pode ser resolvido obtendo-se z^* como solução ótima, que representa, igualmente, uma variável aleatória mas geralmente não gaussiana. Então, o que significa resolver (1.19)? Na literatura, existem dois métodos que transformam (1.19) em problemas determinísticos cujas soluções ótimas, exigem certas considerações que, não se adaptam à solução do problema estocástico (1.16). Estes métodos são discutidos a seguir: [AVRIEL, 1976].

MÉTODO 1 - CHANCE CONSTRAINT

Este método impõe que a restrição aleatória de (1.19), seja satisfeita com uma determinada probabilidade, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(z) \\ \text{z} \in & Z \\ & \text{prob}(Az \leq \theta) \geq 1 - p_0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

onde, $0 \leq p_0 \leq 1$ é um valor de probabilidade dado.

Seja $F(\theta)$ a função distribuição de θ , então, temos que:

$$\text{prob}(Az \leq 0) = \text{prob}(\theta \geq Az) = 1 - F(Az) \quad (1.21)$$

e, supondo independência entre os elementos aleatórios do vetor θ , obtemos:

$$1 - F(Az) \geq 1 - p_0 \quad Az \leq F^{-1}(p_0) \quad (1.22)$$

chamando de θ_0 a $F^{-1}(p_0)$, temos que (1.20) pode ser escrito em sua forma final:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(z) \\ \text{z} \in & Z \\ & Az \leq \theta_0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Se z^* é a solução ótima de (1.23), então, z^* garante que a restrição estocástica em (1.19) terá p_0 como probabilidade de ser violada consequentemente, devemos impor p_0 suficientemente pequeno. No entanto, para assim proceder, pagamos o preço da deteriorização do valor ótimo do critério. Matematicamente, podemos analisar o fato definindo a seguinte função perturbação: [LASDON, 1968]

$$v(\omega) = \text{Min}_{z \in Z} \{f(z) / Az \leq \omega\} \quad (1.24)$$

onde, supondo Z e $f(\cdot)$ convexos, temos $v(\omega)$ decrescente e convexa, conforme constatamos na representação gráfica a seguir.

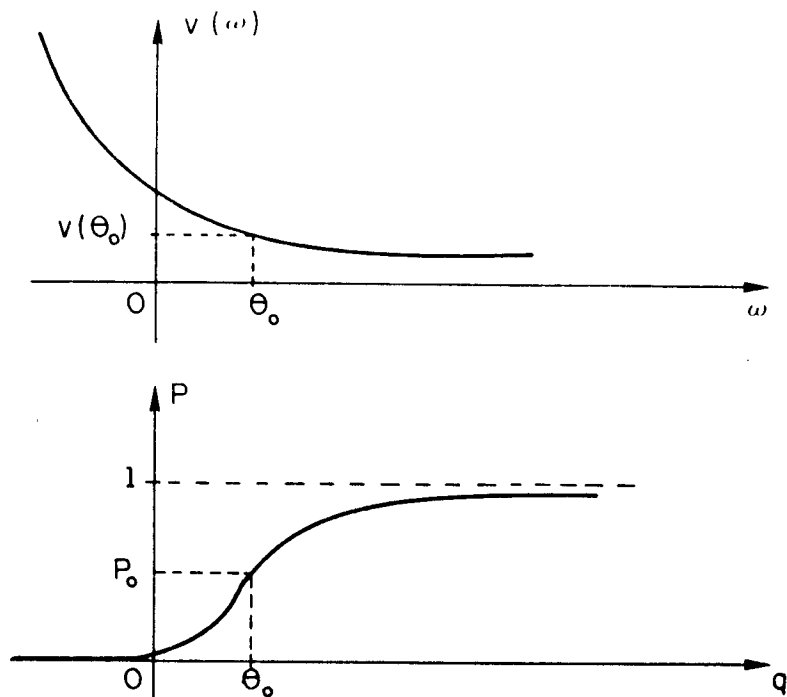


Fig. I.3.- Interpretação gráfica da função perturbação $v(\omega)$ para θ gaussiana.

Da figura 1.3, notamos que

$$p_0 \rightarrow 0 \implies \theta_0 \rightarrow -\infty \implies v(\theta_0) \rightarrow +\infty$$

ou seja,

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0} v(\theta_0(p_0)) = +\infty \tag{1.25}$$

cuja interpretação é, quanto mais desejarmos garantir que a restrição seja satisfeita, mais deveremos pagar com um acréscimo do valor mínimo da função objetivo.

MÉTODO 2 - TWO STAGE APPROACH

Este procedimento está baseado na interpretação econômica de (1.19). Suponhamos que θ seja um vetor de recursos e imaginemos que

$$Az = r \tag{1.26}$$

então se

$r_i \leq \theta_i \implies$ exportamos $\theta_i - r_i$ ao preço α_i / unidade,

$r_i \geq \theta_i \implies$ importamos $r_i - \theta_i$ ao preço β_i / unidade

É claro que $\alpha_i \leq \beta_i$ $i=1,2,\dots,m$. Temos, portanto, a seguinte função de custo.

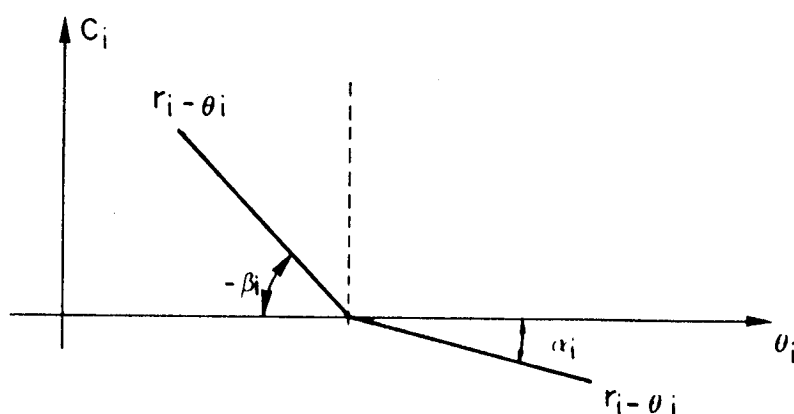


Fig. 1.4. - Função custo relativo a importação ou exportação de recursos.

Caracterizada a função custo, temos que (1.19) pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{r, z \in Z} \quad & f(z) + C(r) \\ \text{Az} = r \end{aligned} \tag{1.27}$$

onde, $C(r)$ é dada por

$$\begin{aligned} C(r) &= \sum_{i=1}^m E_{\theta_i} \{C_i(\theta_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \int_{-\infty}^{r_i} \beta_i (r_i - \xi) p_i(\xi) d\xi + \int_{r_i}^{+\infty} \alpha_i (r_i - \xi) p_i(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \tag{1.28}$$

As limitações observadas nos dois métodos acima e que tornam impraticável suas utilizações na solução do problema estocástico (1.16) são:

- a) O MÉTODO 1 se torna inviável, se substituirmos a restrição de desigualdade por $Az = \theta$;
- b) O MÉTODO 2 admite teoricamente a restrição de igualdade ($Az = \theta$), se for possível assumir que sempre na sua solução, teremos a possibilidade de importar ou exportar recursos.

Objetivando tratar o problema com restrições de igualdade e sem nenhuma ligação com aspectos econômicos - que viabilizam a aplicação do método 2 - propomos um terceiro método que chamaremos de Decomposição, uma vez que decompõe (1.18) em dois subproblemas como veremos a seguir:

MÉTODO 3 - DECOMPOSIÇÃO

Seja o problema (1.18), façamos a seguinte mudança de variável:

$$z = \bar{z} + \omega \quad (1.29)$$

onde, $\bar{z} = E\{z\}$ e $\omega \in R^n$ é uma variável aleatória com média nula, $E\{\omega\} = 0$. Então, podemos separar a restrição $Az = \theta$ em uma equação determinística $A\bar{z} = \hat{\theta}$ e outra estocástica $A\omega = \theta - \hat{\theta}$. Consequentemente, o problema (1.18) pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned} \text{critério} & : f(z) = f(\bar{z} + \omega) \\ \text{restrições} & : \begin{aligned} A\bar{z} &= \hat{\theta} \\ A\omega &= \theta - \hat{\theta} \\ \bar{z} + \omega &\in Z \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Imaginemos inicialmente, que conhecemos a função densidade de probabilidade da variável ω , então, podemos determinar \bar{z} resolvendo o problema da média:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\bar{z}} \quad & \Psi(\bar{z}) \\ & A\bar{z} = \hat{\theta} \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\text{prob}(\bar{z} + \omega \in Z) \geq 1 - p_0$$

onde, p_0 é dado e $\Psi(\bar{z}) = E_{\omega}\{f(\bar{z} + \omega)\}$. Resta, portanto, determinar as características estocásticas de ω . Sendo ω uma variável aleatória gaussiana, vamos considerar que $\omega = R(\theta - \hat{\theta})$ onde, R é uma matriz de coeficientes reais a determinar. É claro que sendo ω gaussiana com $\sigma_i^2 = E\{\omega_i^2\}$ temos:

$$\begin{aligned} \text{prob}(\underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i) &= \int_{\underline{z}_i - \bar{z}_i}^{\bar{z}_i - \bar{z}_i} p(\omega_i) d\omega_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\underline{z}_i - \bar{z}_i}^{\bar{z}_i - \bar{z}_i} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_i^2}{\sigma_i^2}\right] \frac{d\omega_i}{\sigma_i} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$i=1,2,\dots,M$

com a seguinte mudança de variável $\tau_i = \omega_i/\sigma_i$, reescrevemos (1.32) como:

$$\text{prob}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\underline{z}_i - \bar{z}_i}{\sigma_i}}^{\frac{\bar{z}_i - \bar{z}_i}{\sigma_i}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \tau_i^2\right] d\tau_i = \psi\left(\frac{\bar{z}_i - z_i}{\sigma_i}\right) \quad (1.33)$$

onde, a função $\psi(\cdot)$ é crescente em todo seu domínio. Isto nos leva a propor, o seguinte problema de maximização:

$$\text{Max}_{\sigma_i, i=1..M} \sum_{i=1}^M \text{prob}(\underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i) \quad (1.34)$$

cuja solução, deverá garantir a existência de z entre seus limitantes com máxima probabilidade. Resolver (1.34) é aproximadamente equivalente, tomando

por base a função $\psi(\cdot)$, a minimizar $\frac{E\{\omega_i^2\}}{(\bar{z}_i - \underline{z}_i)^2}$ que se escreve para o conjunto das M variáveis como segue:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{E\{\omega_i^2\}}{(\bar{z}_i - \underline{z}_i)^2} \right\} = \text{Min} E\{\omega'Q\omega\} \quad (1.35)$$

onde

$$Q = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(\bar{z}_i - \underline{z}_i)^2} \right\} \quad (1.36)$$

segundo a hipótese feita acima, onde $\omega = R \cdot (\theta - \hat{\theta})$ temos que

$$\begin{aligned} E\{\omega'Q\omega\} &= \text{tr} \{Q E\{\omega \omega'\}\} \\ &= \text{tr} \{Q E\{R(\theta - \hat{\theta}) (\theta - \hat{\theta})'R'\}\} \\ &= \text{tr} [Q R V_{\theta} R'] \end{aligned} \quad (1.37)$$

Consequentemente, (1.35) fica na forma:

$$\begin{aligned} \text{Min}_R \text{tr} [QRV_{\theta}R'] \\ AR = I \end{aligned} \quad (1.38)$$

cuja restrição ($AR = I$), é obtida imediatamente.

Resolvendo (1.38), estamos determinando a matriz R, que identifica estatisticamente a variável aleatória ω e torna possível resolver (1.31). Evidentemente, sua solução é simples bastando que para isto, tomemos sua função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\cdot) = \text{tr} \{QRV_{\theta}R'\} + \text{tr} \{\Lambda'[AR - I]\} \quad (1.39)$$

e as condições de otimalidade associadas [BERNUSSOU and GEROMEL, 1981]

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \Lambda} = AR - I \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial R} = 2QRV_{\theta} + A'\Lambda \quad (1.41)$$

cuja solução ótima, é

$$R^* = Q^{-1}\Lambda'(\Lambda Q^{-1}\Lambda')^{-1} \quad (1.42)$$

Em resumo, vamos formular os dois problemas que caracterizam esta metodologia :

a) DETERMINAÇÃO DA VARIÂNCIA MÍNIMA:

$$\text{Min}_R \text{tr}\{QRV_{\theta}R'\} / AR = I \quad (1.43)$$

que tem R^* como solução ótima.

b) DETERMINAÇÃO DA MÉDIA:

$$\text{Min } \Psi(\bar{z})$$

$$A\bar{z} = \hat{\theta} \quad (1.44)$$

$$\text{prob } (\bar{z} + \omega \in Z) \geq 1 - p_0$$

onde,

$$\psi(\bar{z}) \triangleq E_0\{f(\bar{z} + R^*(\theta - \bar{\theta}))\} \quad (1.45)$$

Na seção seguinte, aplicaremos este método na solução do problema estocástico (1.16). Veremos também, que devido a estrutura particular de sua dinâmica, simplificações adicionais poderão ser feitas.

I.5. CONTROLE ÓTIMO ESTOCÁSTICO DE USINAS HIDRÁULICAS

Nesta seção é nosso propósito aplicar as idéias desenvolvidas anteriormente, para solucionar o problema de controle ótimo estocástico de usinas hidráulicas - formulado na seção I.2.

As variáveis de saída e controle, que caracterizam a dinâmica do subsistema hidráulico, são aleatórias e supostas gaussianas. Então, para resolver o problema estocástico, faz-se necessário conhecer as características estatísticas - média e variância - destas variáveis.

Inicialmente, seja feita a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} x_i(k) &= \bar{x}_i(k) + \omega_i(k) \\ u_i(k) &= \bar{u}_i(k) + \eta_i(k) \end{aligned} \quad (1.46)$$

onde, $\bar{x}_i(k) = E\{x_i(k)\}$, $\bar{u}_i(k) = E\{u_i(k)\}$ e $\omega_i(k)$, $\eta_i(k)$ são variáveis aleatórias com média nula e variâncias $\sigma_{\omega_i}^2(k)$ e $\sigma_{\eta_i}^2(k)$, respectivamente.

Temos ainda, que as variáveis do problema devem satisfazer a seguinte restrição em probabilidade:

$$\begin{aligned} \text{prob}(x_i(k) \in X_i) &\geq 1 - P_x \\ \text{prob}(u_i(k) \in U_i) &\geq 1 - P_u \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde, P_x e P_u são probabilidades fornecidas, *a priori*, e indicam a possibilidade destas variáveis não pertencerem a seus intervalos limitantes X_i e U_i - definidos na seção I.2.

Suponhamos que as trajetórias médias $\bar{x}(k)$ e $\bar{u}(k)$ tenham sido fornecidas. E façamos $P_x = P_u \approx 0.2$ (por exemplo) de tal modo, a termos as trajetórias acima satisfazendo aproximadamente, os seguintes intervalos

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k) \in \bar{X}_i &= \left\{ \bar{x}_i(k) / \underline{x}_i + \sigma_{\omega_i}(k) \leq \bar{x}_i(k) \leq \bar{x}_i - \sigma_{\omega_i}(k) \right\} \\ \bar{u}_i(k) \in \bar{U}_i &= \left\{ \bar{u}_i(k) / \underline{u}_i + \sigma_{\eta_i}(k) \leq \bar{u}_i(k) \leq \bar{u}_i - \sigma_{\eta_i}(k) \right\} \end{aligned} \quad (1.48)$$

A seguir, ilustramos graficamente o posicionamento dos limitantes do intervalo \bar{X}_i num instante $k = t_1$ (mês).

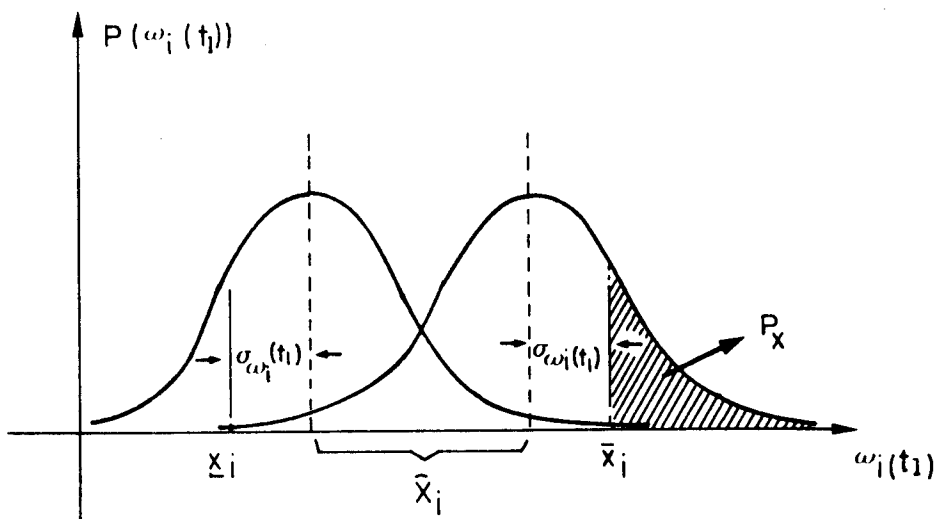


Fig. I.5. - Posicionamento dos limitantes de \bar{X}_i num instante t_1 .

Imaginemos agora, que o controle admita somente valores determinísticos, ou seja, $u_i(k) = \hat{u}_i(k) \in \hat{U}_i$. Surge, portanto, a seguinte questão: Que tipo de efeito tal controle trará na saída? Conforme será visto no capítulo III (seção III.1), existe uma relação importante entre a variância do controle e a da saída, enquanto uma aumenta, a outra tende a diminuir e vice-versa, segundo um parâmetro ponderador. Então, é claro que ao eliminarmos a aleatoriedade do controle ($\eta_i(k) = 0$), estaremos anulando sua variância e isto, corresponde a aumentar bastante a variância da saída. Consequentemente, teremos um estreitamento do intervalo \hat{X}_i , o que implica, que para assegurar com uma determinada probabilidade que $x_i(k) \in X_i$, devemos limitar consideravelmente $\hat{x}_i(k)$, que corresponde a diminuirmos a capacidade de armazenamento de cada reservatório. Este fato é ilustrado na figura abaixo.

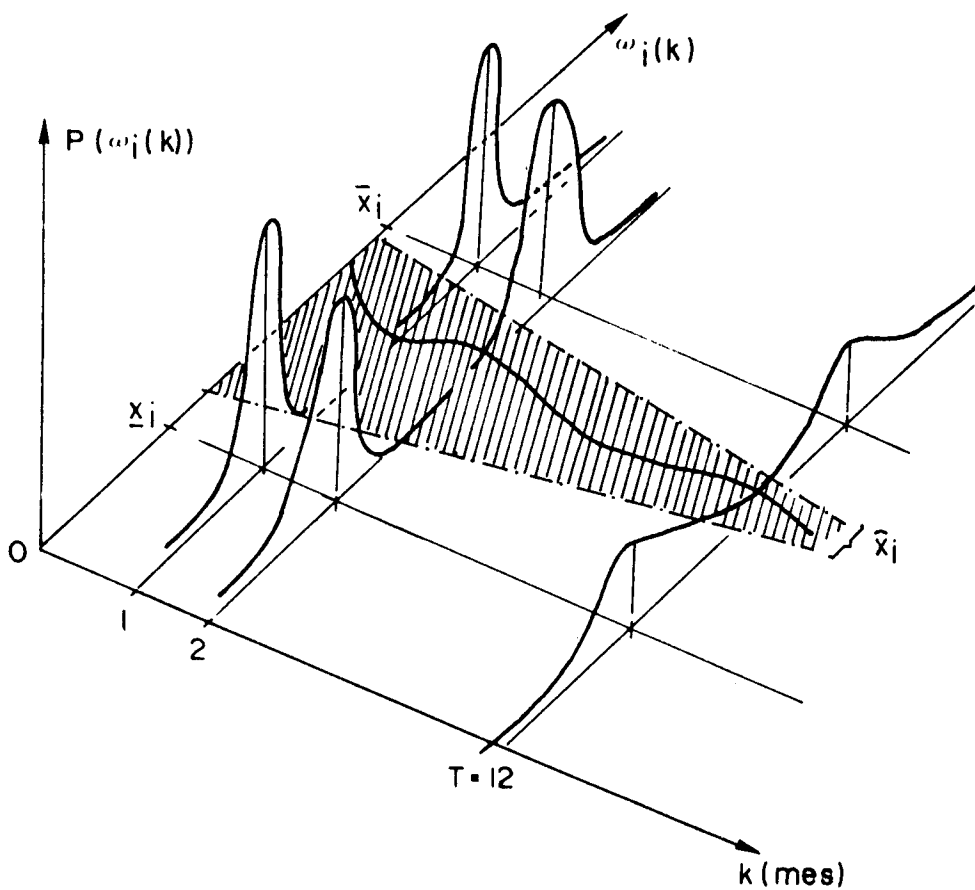


Fig. I.6. - Estreitamento do intervalo \hat{X}_i com o aumento da variância $\sigma_{\omega_i}(k)$ no tempo.

Com base nestas considerações, concluímos ser indispensável a utilização das características estocásticas do controle e da saída, para se determinar uma lei de controle, de tal modo, a podermos utilizar da melhor maneira possível, a capacidade de armazenamento dos reservatórios desse sistema. Assim sendo, levando em conta (1.47) e lembrando que desejamos obter \bar{X}_i e \bar{U}_i os menos restritivos possíveis, optamos por obter as características estocásticas de $\omega_i(k)$ e $\eta_i(k)$ tal que

$$\text{Max} \left\{ \text{prob}(x_i(k) \in X_i / z_j(k)) + \text{prob}(u_i(k-1) \in U_i) \right\} \quad (1.49)$$

onde, $z_j = \sum_{j \in J_i} u_j(k-1)$ representa toda informação referente aos controles das usinas \bar{a} montante da i -ésima. Lembramos ainda, que a facilidade do conhecimento de $z_j(k)$ reside no fato de tratarmos com um sistema cuja estrutura de interligação, é do tipo ÁRVORE. Esta hipótese não é necessária, porém, simplifica bastante a solução de (1.43), uma vez que o torna completamente desacoplado.

O problema (1.49) pode ser aproximado - conforme vimos na seção anterior - por um problema de VARIÂNCIA MÍNIMA:

$$\text{Min} \left[\frac{\sigma_{\omega_i}^2(k)}{(\bar{x}_i - \underline{x}_i)^2} + \frac{\sigma_{\eta_i}^2(k-1)}{(\bar{u}_i - \underline{u}_i)^2} / \delta_j(k-1) \right] \quad (1.50)$$

onde, $\delta_j(k-1) = \sum_{j \in J_i} \eta_j(k-1)$. Considerando que as variâncias em (1.50) estão divididas por constantes, temos que:

$$\text{Min} \left[\sigma_{\omega_i}^2(k) + \lambda_i \sigma_{\eta_i}^2(k-1) / \delta_j(k-1) \right] \quad (1.51)$$

definindo assim, o parâmetro ponderador λ_i - constante que depende do nível do reservatório e do volume máximo e mínimo de água turbinada para usina i :

$$\lambda_i \triangleq \frac{(\bar{x}_i - \underline{x}_i)^2}{(\bar{u}_i - \underline{u}_i)^2} \quad (1.52)$$

Finalmente, podemos escrever (1.51) como segue:

$$\text{Min } E \left\{ \omega_i^2(k) + \lambda_i \eta_i^2(k-1) / \delta_j(k-1) \right\} \quad (1.53)$$

sujeito a

$$\omega_i(k) = \omega_i(k-1) - \eta_i(k-1) + \delta_j(k-1) + q_i(k) - \bar{q}_i(k) ; \quad i=1 \dots N$$

onde, $\bar{q}_i(k) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1}) \hat{y}_i(k)$ representa o valor médio de $q_i(k)$.

Temos então (1.53), caracterizando um problema de controle de Variância Mínima [ASTROM, 1970] e sua solução, será assunto do capítulo III (veja 1.17).

A solução de (1.53) fornece uma lei de controle em malha fechada, para cada usina i , que torna os limitantes \bar{X}_i e \bar{U}_i os menos restritivos possíveis. A figura a seguir, serve para ilustrar tal fato e deve ser comparada com a fig. 1.6.

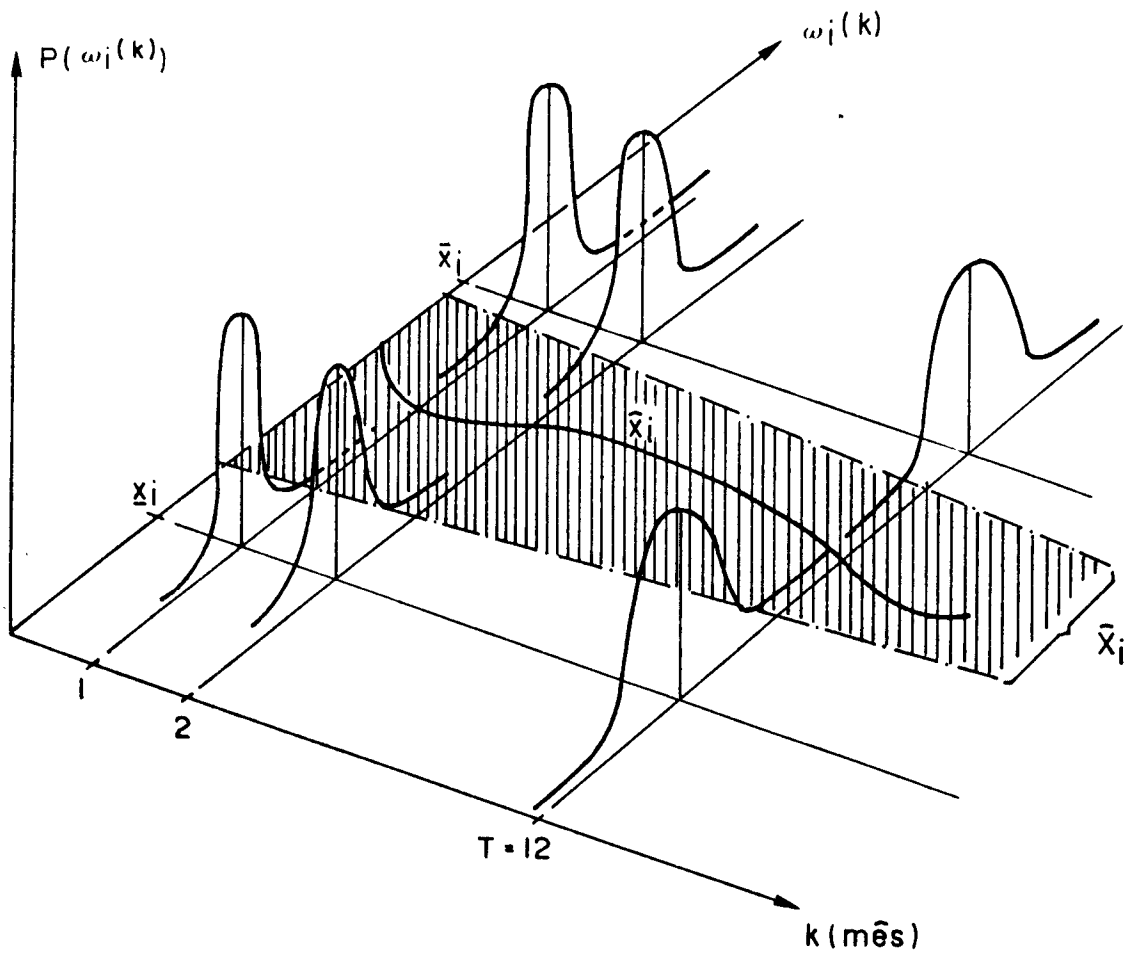


Fig. 1.7. - Influência da lei de controle no intervalo \bar{X}_i

Em regime estacionário, se desprezarmos as informações, *à priori*, é possível mostrar que as variáveis de saída e controle, tendem para processos estocásticos que satisfazem: [GEROMEL e SALVIANO, 1982-A]

$$\omega_i(k) \longrightarrow \sigma_{\omega_i} \theta_i \quad (1.54)$$

$$\eta_i(k) \longrightarrow -\sigma_{\eta_i} \theta_i \quad (1.55)$$

onde, θ_i representa uma variável aleatória gaussiana com média nula e desvio padrão unitário. Conseqüentemente, fica possível calcular o valor esperado do critério dado em (1.16), uma vez que conhecemos $\omega_i(k)$ e $\eta_i(k)$ em regime permanente:

$$P(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) = E \left\{ Q \left[\sum_{i=1}^N \phi_i(\bar{x}_i(k) + \sigma_{\omega i} \theta_i, \bar{u}_i(k) - \sigma_{\eta i} \theta_i) \right] \right\} \quad (1.56)$$

onde, $\bar{x}(k) = [\bar{x}_1(k), \dots, \bar{x}_N(k)]'$ e $\bar{u}(k) = [\bar{u}_1(k), \dots, \bar{u}_N(k)]'$

Com isso, podemos escrever o problema de determinação ótima da Média:

$$\begin{array}{l} \text{Min} \\ \bar{x}(k) \in \bar{X} \\ \bar{u}(k) \in \bar{U} \end{array} \sum_{k=1}^T P(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) \quad (1.57)$$

$$\bar{x}(k) = \bar{x}(k-1) + B\bar{u}(k-1) + \bar{q}(k), \quad \bar{x}(0) = x_0$$

onde, \bar{X} e \bar{U} são definidos em (1.48) e dependem das características estatísticas das variáveis de saída e controle, dadas em regime permanente por (1.54) e (1.55), respectivamente. É importante acrescentar que em razão de sua natureza determinística, o problema (1.57) pode ser resolvido por vários métodos existentes na literatura, temos por exemplo [GEROMEL e BAPTISTELLA, 1981].

A figura abaixo, ilustra a estrutura do controle ótimo obtido:

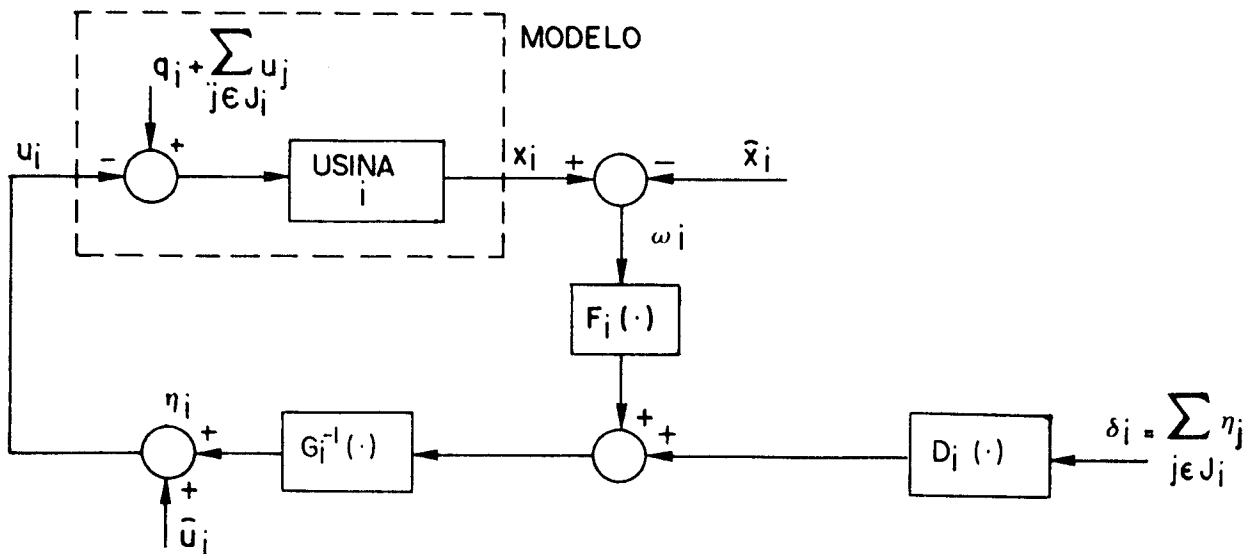


Fig. I.8. - Implementação do controlador ótimo para uma usina genérica.

Observamos na representação 1.8, a presença dos polinômios $G_i(\cdot)$ e $F_i(\cdot)$ que fazem parte da lei de controle ótimo, obtida resolvendo o problema (1.53). Isto será estudado amplamente no cap. III, onde veremos como obter estes polinômios de uma maneira otimizada. Já o polinômio $D_i(\cdot)$, é determinado no capítulo II e faz parte do modelo dos aportes de água de cada usina.

I.6. CONCLUSÃO

Neste capítulo foi inicialmente apresentado o modelamento das usinas térmicas e hidráulicas, baseado naquilo que é encontrado na literatura especializada. Em razão das características de operação e geração do sistema hidrotérmico, o subsistema hidráulico mereceu um enfoque maior na determinação de sua equação dinâmica (1.7) e sua função de produção (1.10). A consequência deste modelamento, foi a formulação do problema termoelétrico e do problema hidroelétrico, sendo este último, de grande interesse neste trabalho. Como foi suposto um planejamento de horizonte anual, os aportes independentes $q_i(k)$, $i=1\dots M$, da equação dinâmica (1.4) tem natureza aleatória, e o problema hidráulico é descrito como sendo de controle ótimo estocástico de grande dimensão e, portanto, de difícil solução. Para o tratamento deste problema (1.16), houve a necessidade inicial de se propor um modelo para os aportes aleatórios $y_i(k)$, sendo escolhido para tal, um processo do tipo ARMA, que satisfaz certos requisitos estipulados, *a priori*.

Supondo conhecido o modelo dos aportes, partimos em busca de um método capaz de solucionar o problema estocástico (1.16). Apresentamos dois métodos conhecidos na literatura como CHANCE CONSTRAINT e TWO STAGES APPROACH, ambos apresentam limitações que tornam inviável sua aplicação. Assim sendo, propusemos o método da Decomposição cuja vantagem, é não apresentar as limitações dos métodos anteriores. O método da Decomposição divide

o problema (1.16), em dois outros subproblemas. Um deles, é o problema de controle de variância mínima, que admite uma solução em malha fechada e que tem a propriedade de maximizar a probabilidade das variáveis de estado e controle - supostas gaussianas - satisfazerem certas restrições físicas.

Obtida a solução do problema de variância, em regime permanente estatístico, fica caracterizado o outro problema que visa determinar as trajetórias médias ótimas, a partir de um problema de controle ótimo clássico, correspondendo a parte do controle em malha aberta.

Observando a figura 1.8, sem nenhuma perturbação, temos o sistema global operando sobre as trajetórias médias ótimas, conseqüentemente, a parte do controle em malha fechada, procura acomodar as perturbações provenientes dos aportes aleatórios $q_i(k)$.

Finalizando podemos acrescentar que, utilizando Programação Dinâmica Estocástica, podemos determinar, em tese, esta estrutura de controle em malha fechada. No entanto, como estamos representando as usinas hidráulicas individualmente, este tipo de tratamento se torna inviável. Neste sentido a metodologia apresentada, possibilita resolver o problema estocástico referente ao sistema energético nacional.

CAPÍTULO II

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS - MODELO ARMA

II.1. INTRODUÇÃO

O propósito deste capítulo é construir um modelo linear estacionário, capaz de representar estatisticamente um conjunto de medidas relativas aos aportes independentes - águas de chuvas e afluências - do sistema hidráulico em estudo. O modelo proposto é do tipo ARMA, que reúne as propriedades dos processos autoregressivo (AR) e média-móvel (MA). No apêndice A.7. encontramos tabelas de medidas, dadas em $10^6 m^3$, para as quatro usinas em consideração.

A idéia básica é determinar a ordem dos parâmetros do processo ARMA de uma maneira parsimoniosa e, em seguida, submetê-los a um método de otimização. Neste sentido, tendo em vista o grande número de medidas, torna-se necessário identificar um método eficiente de estimar tais parâmetros. Para uma escolha parsimoniosa da ordem do modelo, é importante conhecer os aspectos estatísticos da série-temporal (medidas) principalmente, as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial [BOX and JENKINS, 1970].

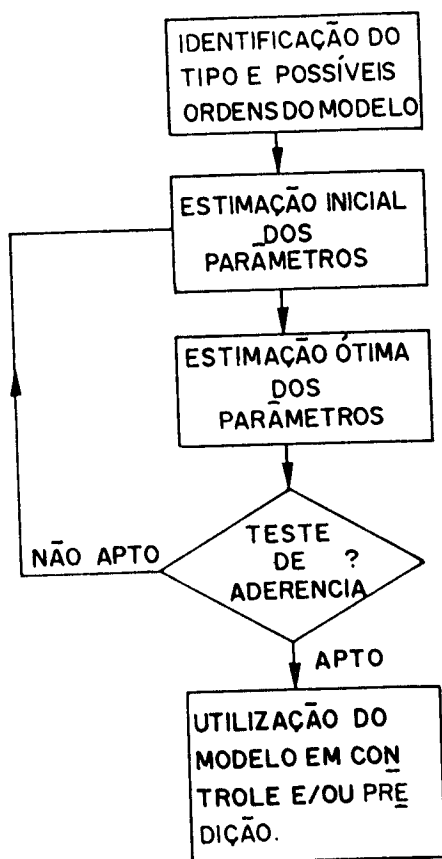
Em nosso estudo, consideramos somente as correlações temporais das medidas para cada usina; como foi dito anteriormente, não será objeto de discussões nesta tese, o problema de correlações espaciais. Assumiremos também, o equilíbrio estatístico das medidas, isto é, estacionariedade além de considerar as variáveis aleatórias gaussianas.

O procedimento para identificação do modelo é baseado em [BOX and JENKINS, 1970] onde, o objetivo principal é obter os valores $n(AR)$ e $m(MA)$ correspondentes a ordem do modelo ARMA e, determinar em seguida, uma estimativa inicial para os parâmetros.

Conhecida as ordens (n, m) e os parâmetros estimados inicialmente para o processo, torna-se necessário encontrar os parâmetros ótimos. Em vista disto, procuramos na literatura [AMARAL, 1980], um método capaz de ma-

ximizar a função de verossimilhança. Dentre os métodos analisados, optamos pelo "MATRIZ ESTENDIDA" por melhor se ajustar teoricamente ao modelo proposto (ARMA), no entanto, este método quando aplicado ao nosso exemplo (sistema hidráulico) não apresentou convergência para alguns casos testados. Isto nos conduziu a estudar um método que generaliza o anterior, e que apresenta convergência para todos os casos testados do sistema hidráulico em estudo.

Otimizado os parâmetros, o passo seguinte é estimar a variância de cada um, de modo a termos informações sobre a dispersão dos parâmetros [MENDEL, 1973]. Em seguida, testamos a sua validade. O teste de aderência utilizado é baseado na distribuição qui-quadrado (χ^2), e fornece a probabilidade do modelo ser aceito. A seguir, mostramos um diagrama de blocos do processo de estimação, o qual explicita as fases de construção do modelo, que estudaremos nas seções seguintes:



Finalizando o capítulo, aplicamos toda metodologia estudada ao sistema hidráulico, considerando uma representação individualizada para cada usina. Para tanto, desenvolvemos um programa conversacional, para estimação dos parâmetros do modelo. Este programa trata as medidas, como sendo variáveis aleatórias gaussianas estacionárias. Baseado nas funções de autocorrelação parcial, escolhemos parsimoniosamente o número de parâmetros necessários. Além disso, o programa estima o valor inicial dos parâmetros, que serão utilizados na inicialização do processo de otimização (MATRIZ ESTENDIDA GENERALIZADO), bem como a variância dos parâmetros ótimos estimados. Finalmente o modelo é testado, utilizando um teste de aderência baseado na distribuição Qui-Quadrado (χ^2). Os resultados obtidos para aceitação do modelo, bem como os parâmetros ótimos, são apresentados em tabelas. Nas seções seguintes, forneceremos mais informações sobre os programas desenvolvidos, que são encontrados nos apêndices.

II.2. FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO E AUTOCORRELAÇÃO PARCIAL

Na análise série-temporal, surge a necessidade de descrever o comportamento do processo e um dispositivo útil para isto, é a função de autocorrelação. Esta função é uma ferramenta básica de análise de dados, para identificação do modelo.

A função de autocorrelação parcial é utilizada, quando desconhecemos a ordem de um processo autoregressivo, em outras palavras, ela ajuda-nos a decidir o número de parâmetros independentes a serem incluídos em uma regressão múltipla.

Então, é muito importante estudar a "aparência" das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série-temporal dada, para termos

um guia de como escolher as ordens $n(\text{AR})$ e $m(\text{MA})$ do modelo.

Em conclusão temos que, enquanto a função de autocorrelação do processo AR, de ordem n , decai lentamente para zero, sua função de autocorrelação parcial assume o valor zero após n atrasos. Inversamente, a função de autocorrelação de um processo MA de ordem m é zerada após um atraso m , enquanto sua função de autocorrelação parcial decai lentamente para zero. No caso de tanto a função de autocorrelação quanto a função de autocorrelação parcial decaírem para zero lentamente, o processo sugerido é o ARMA. De modo que, a função de autocorrelação para um processo mixto, contendo n componentes AR e m componentes MA, é uma mistura de exponenciais e/ou de senóides amortecidas, após os primeiros $m-n$ atrasos. Da mesma forma, que a função de autocorrelação parcial é dominada pela mistura de exponenciais e/ou senóides amortecidas após os primeiros $n-m$ atrasos.

II.2.1. Estimação da Função de Autocorrelação

Supomos aqui a estacionariedade do processo. A covariância entre $y(k)$ e seu valor $y(k+\ell)$, separado por ℓ intervalos de tempo, é chamado de autocovariância de atraso ℓ e por definição, é dada como segue: [BOX and JENKINS, 1970].

$$\begin{aligned}\gamma(\ell) &\triangleq \text{cov}[y(k), y(k+\ell)] = \\ &= E\{(y(k) - \bar{y})(y(k+\ell) - \bar{y})\} \quad (2.1)\end{aligned}$$

onde, $\bar{y} \triangleq E\{y(k)\}$. Já a autocorrelação de atraso ℓ é

$$\begin{aligned} \rho(\ell) &= \frac{E\{(y(k) - \bar{y})(y(k+\ell) - \bar{y})\}}{\sqrt{E[(y(k) - \bar{y})^2] \cdot E[(y(k+\ell) - \bar{y})^2]}} \\ &= \frac{E\{(y(k) - \bar{y})(y(k+\ell) - \bar{y})\}}{\sigma_y^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como foi suposta a estacionariedade do processo, temos que a variância σ_y^2 é a mesma tanto no instante $k+\ell$, quanto no instante k .

Então considerando que $\gamma(0) = \sigma_y^2$, temos a autocorrelação escrita na forma

$$\rho(\ell) = \frac{\gamma(\ell)}{\gamma(0)} \quad ; \quad \ell=0,1,2,\dots \quad (2.3)$$

que nos leva a concluir que $\rho(0) = 1$.

A função de autocorrelação corresponde a representação gráfica do coeficiente de autocorrelação $\rho(\ell)$, como uma função do atraso ℓ . Esta função é adimensional, isto é, independe da escala de medidas da série temporal.

Na realidade, nós temos um conjunto de medidas $y(1), y(2), \dots, y(M)$, de onde é possível tomar uma estimativa das autocorrelações. A melhor estimativa de autocorrelação de atraso ℓ ($\rho(\ell)$), é

$$r(\ell) = \frac{c(\ell)}{c(0)} \quad (2.4)$$

onde,

$$c(\ell) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M-\ell} (y(k) - \bar{y})(y(k+\ell) - \bar{y}) \quad , \quad \ell=0,1,2,\dots \quad (2.5)$$

que $\hat{\gamma}$ é estimativa da autocovariância $\gamma(\ell)$, e \bar{y} é a média da série temporal.

No apêndice, encontramos um programa para estimação, que fornece a função de autocorrelação estimada para um atraso de até 24 meses. Com os resultados obtidos para as quatro usinas em estudo, apresentamos a seguir os gráficos desta função para atrasos de até 12 meses.

Estes gráficos, sugerem a utilização de um processo autoregressivo para modelamento do sistema de quatro usinas hidráulicas. O que nos leva a tal conclusão, é a função de autocorrelação apresentar um comportamento "exponencial decrescente" com os atrasos, e para alguns casos apresentando oscilações, o que certamente evidencia a possibilidade de termos um processo autoregressivo.

II.2.2. Estimação da Função de Autocorrelação Parcial

Considerando que o processo autoregressivo de ordem n , possui uma função de autocorrelação que é infinita em extensão, surge a necessidade de se encontrar uma maneira de descrever este processo levando em conta, n pontos não nulos das autocorrelações. A função de autocorrelação parcial, é capaz de realizar isto. Para tal, denotemos de α_{pj} , o j -ésimo coeficiente em um processo autoregressivo de ordem p , de modo que α_{pp} representa o último coeficiente. Note que α_{pp} , satisfaz a seguinte equação às diferenças:

$$\rho(j) = \alpha_{p1}\rho(j-1) + \dots + \alpha_{p(j-1)}\rho(j-p+1) + \alpha_{pp}\rho(j-p) \quad j=1,2,\dots,p \quad (2.6)$$

Tomando as p equações disponíveis, teremos então o que se conhece na literatura como equações de YULE-WALKER [BOX and JENKINS, 1970], colocadas a seguir na forma matricial:

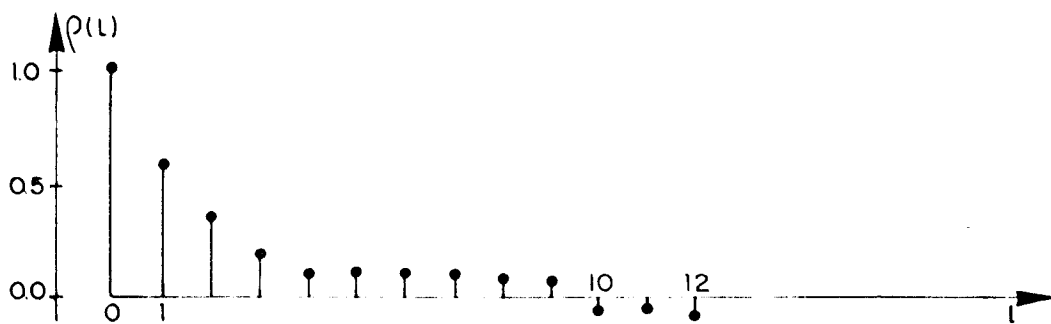


Fig. II.1. - Função de autocorrelação da usina de S. Simão.

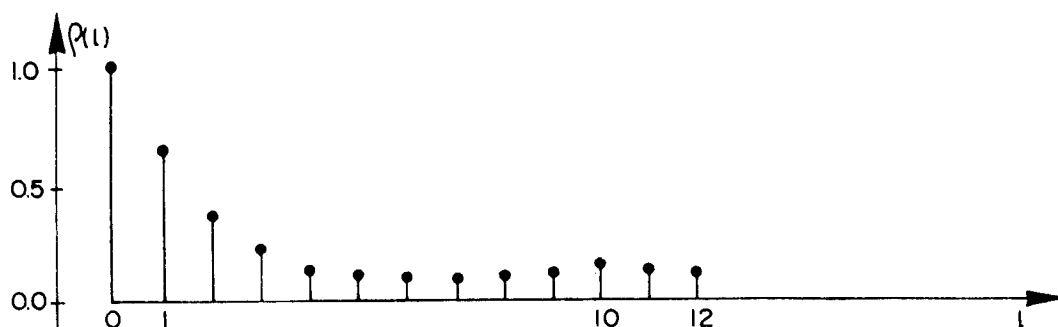


Fig. II.2. - Função de autocorrelação da usina de Marimondo.

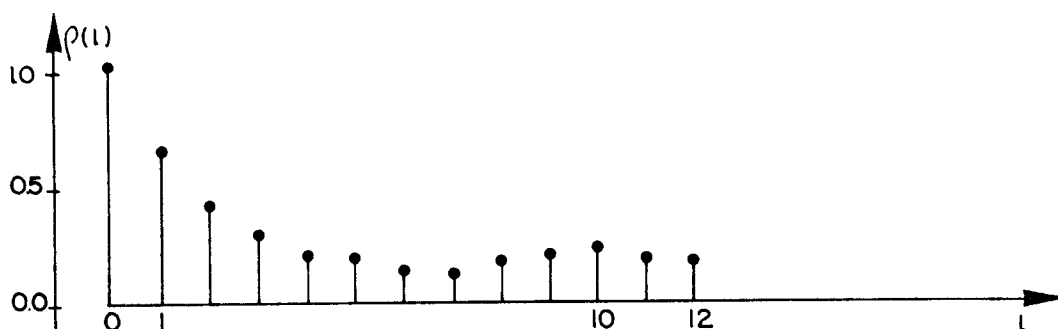


Fig. II.3. - Função de autocorrelação da usina de Água Vermelha.

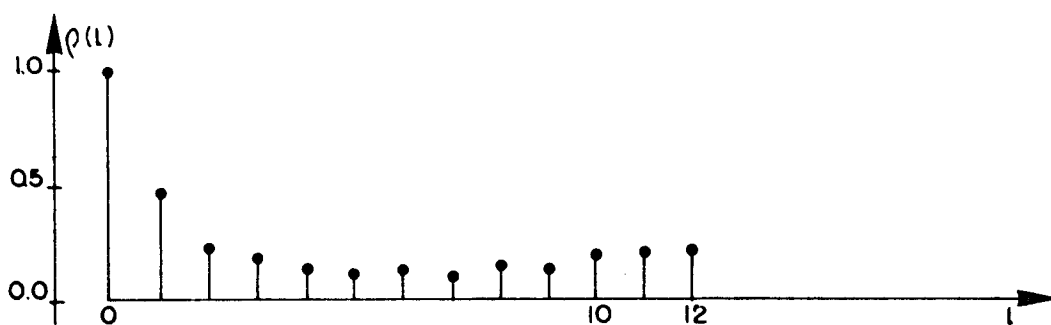


Fig. II.4. - Função de autocorrelação da usina de Ilha Solteira.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{p1} \\ \alpha_{p2} \\ \vdots \\ \alpha_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ou, simplesmente:

$$P_p \alpha_p = \rho_p \quad (2.8)$$

resolvendo este sistema de equações acima, sucessivamente para $p = 1, 2, 3, \dots$, podemos obter respectivamente, $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots$ e com estes pontos montar uma curva, que denominaremos de função de autocorrelação parcial. Portanto, a função de autocorrelação parcial nada mais é, que a quantidade α_{pp} vista como uma função do atraso p .

Uma importante conclusão a respeito desta função é que, para um processo autoregressivo de ordem n , ela possui componentes não-nulas para atrasos p menores ou iguais a n , e componentes nulas para $p > n$. Vamos em seguida, estudar um modo de estimar tal função.

A autocorrelação parcial pode ser estimada fixando sucessivamente, processos autoregressivos de ordem $1, 2, 3, \dots$ por mínimos quadrados e separando as estimativas $\hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{22}, \hat{\alpha}_{33}, \dots$ que são respectivamente, os últimos coeficientes em cada estágio. Se considerarmos que os valores dos parâmetros não estão muito próximo do limite não-estacionário, podemos empregar as estimativas de YULE-WALKER do processo autoregressivo. Então seja $\hat{\alpha}_{pp}$ o último coeficiente deste processo, satisfazendo a função de autocorrelação dada em (2.6). Ao substituirmos $\rho(j)$ por $r(j)$ - definido em (2.4) - obtemos a função de autocorrelação parcial estimada:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & \cdots & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{p1} \\ \hat{\alpha}_{p2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A solução de (2.9), sucessivamente, para $p=1, 2, 3, \dots$, fornece as quantidades $\hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{22}, \hat{\alpha}_{33}, \dots$, que definem as curvas que representam a função de autocorrelação parcial.

É importante compreender que, o conhecimento das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, são muito importantes na identificação do tipo de processo a ser utilizado na modelagem, ou seja, ajuda-nos a escolher entre um processo autoregressivo, média-móvel ou misto autoregressivo-média-móvel (ARMA). No entanto, a função de autocorrelação parcial pode ser utilizada - no caso do processo ser autoregressivo (AR) - para determinar a ordem do modelo. Para realizar isto, é importante o conhecimento do erro padrão da quantidade estimada $\hat{\alpha}_{pp}$ que denominaremos aqui, de Intervalo de Confiança (ICO), correspondendo a duas vezes este erro padrão e é dado por:

$$ICO = 2 \times \frac{1}{\sqrt{M}} \quad p \geq n+1$$

Analisando os pontos da curva de autocorrelação parcial em relação a este índice (ICO), identificamos a ordem do processo autoregressivo (AR).

No programa computacional desenvolvido, o sistema de equação (2.9) foi implementado e aplicado em nosso exemplo prático, obtendo tabelas cujos valores serão plotados a seguir:

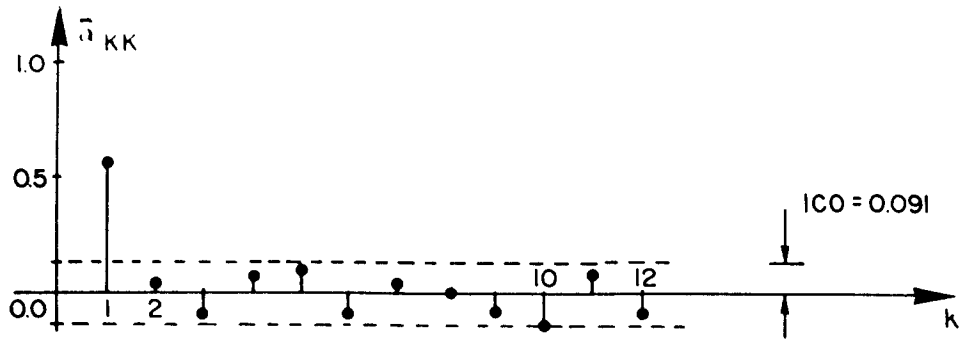


Fig. II.5. - Função de autocorrelação parcial da usina S. Simão.

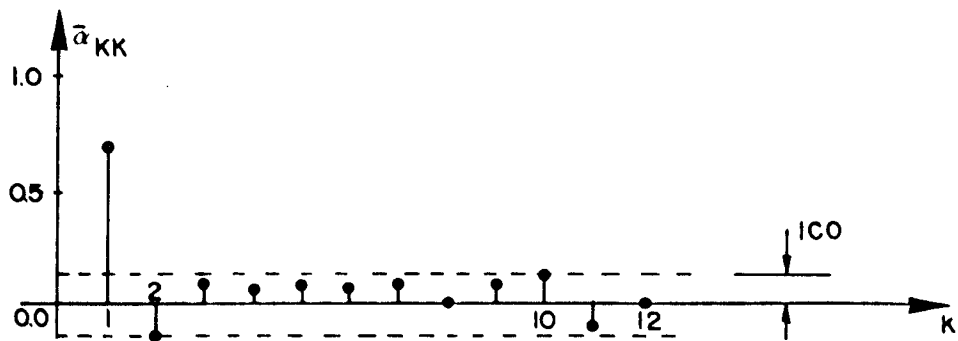


Fig. II.6. - Função de autocorrelação parcial da usina Marimbondo.

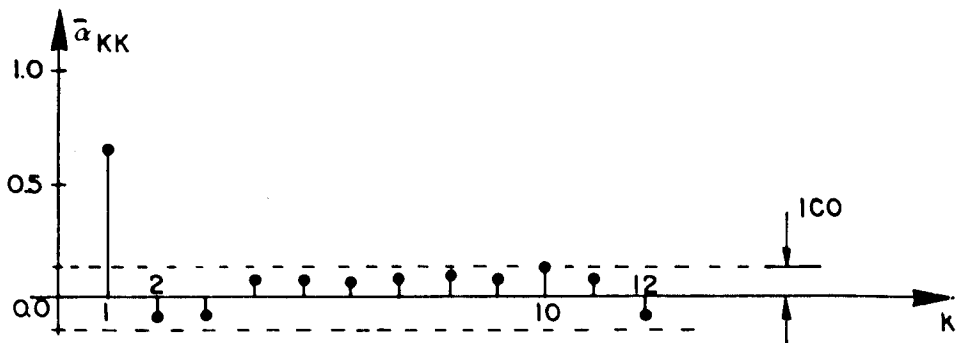


Fig. II.7. - Função de autocorrelação parcial da usina Água Vermelha.

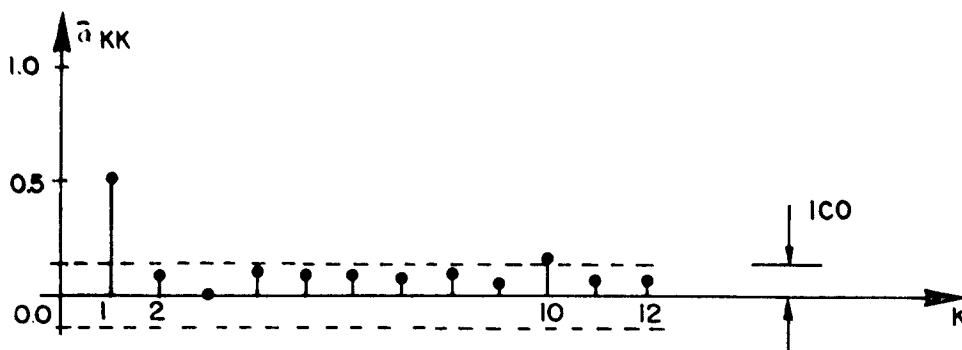


Fig. II.8. - Função de autocorrelação parcial da usina Ilha Solteira.

Analisando as quatro curvas anteriores, podemos concluir que, há forte possibilidade de nosso modelo, ser um processo autoregressivo de ordem 1 ou 10. A observação das características das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial possibilitam, a priori, reconhecer o tipo de processo - no caso em questão, temos um processo autoregressivo. A utilização da curva de autocorrelação parcial mais o Índice de Confiabilidade desta função - $IC0 = 2/\sqrt{M}$, em outras palavras, o erro padrão da autocorrelação parcial estimada - nos permite ter uma idéia inicial da ordem a ser adotada para o modelo. Com a utilização do teste de aderência, poderemos decidir pela ordem mais adequada.

II.3. IDENTIFICAÇÃO DO MODELO

A análise série-temporal das medidas, principalmente a utilização das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, ajuda-nos no processo de identificação e na escolha parsimoniosa da ordem do modelo. Quanto ao tipo de modelo a ser empregado, três possibilidades são levantadas: podemos ter um processo AUTOREGRESSIVO (AR), ou MÉDIA-MÓVEL (MA), ou então um processo mixto AUTOREGRESSIVO + MÉDIA-MÓVEL (ARMA). Já o problema da escolha parsimoniosa, significa encontrar a menor ordem possível para o modelo, o que implica na eliminação de parâmetros que pouco ou nada influenciam no processo e deste modo, tornam esta representação mais simples.

Tendo sido escolhida a ordem do modelo, o problema que segue é da estimação inicial dos parâmetros, bem como a estimação da variância do resíduo. A seguir, estudaremos processos de estimação para modelos AR, MA e ARMA.

II.3.1. Modelo Autoregressivo - Eq. Yule-Walker

Um processo autoregressivo \bar{e} definido como:

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + v(k) \quad (2.10)$$

onde notamos, que o valor corrente do processo $y(k)$ \bar{e} expresso como uma combinação linear dos valores anteriores, mais o ruído branco $v(k)$.

A expressão (2.10) pode ser colocada na forma:

$$y(k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y(k-j) + v(k) \quad ; \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.11)$$

onde, α_j , $j = 1, 2, \dots, n$ representam os parâmetros, $y(k)$ representa todas as M medidas e $v(k)$ \bar{e} o ruído branco com média nula, $E\{v(k)\} = 0$, e variância $E\{v^2(k)\} = \sigma_v^2$.

Multiplicando por $y(k-i)$ ambos os membros da equação (2.11) e utilizando o operador esperança em relação ao ruído, obtemos uma importante recorrência que \bar{e} a função de autocovariância do processo autoregressivo (estacionário), [BOX and JENKINS, 1970]:

$$E\{y(k-i) \cdot y(k)\} = \sum_{j=1}^n \alpha_j E\{y(k-i) \cdot y(k-j)\} + E\{y(k-i) \cdot v(k)\} \quad (2.12)$$

Como obviamente $v(k)$ e $y(k-i)$ são independentes para qualquer que seja $i = 1, 2, 3, \dots$, a equação (2.12) pode ser escrita como segue

$$c(i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot c(|i-j|) \quad k > 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.13)$$

onde, $c(i)$ representa a autocovariância do processo com um atraso i . Dividindo (2.13) pela variância do processo $c(0)$, temos:

$$r(i) = \sum_{j \neq i}^n \alpha_j \cdot r(|j - i|) + \alpha_i \quad k > 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.14)$$

esta equação (2.14), representa a função de autocorrelação estimada para o processo autoregressivo estacionário, e será de grande importância na obtenção dos parâmetros α_j .

Substituindo $i = 1, 2, \dots, n$ em (2.14), formamos um conjunto de equações lineares cujas incógnitas, são os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Colocando estas equações na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & r(1) & r(2) & \dots & r(n-1) \\ r(1) & 1 & r(1) & \dots & r(n-2) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ r(n-1) & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ou seja:

$$A \cdot \alpha = b \quad (2.16)$$

sendo, $A \in R^{n \times n}$ e admitindo a inversa, podemos escrever

$$\alpha^* = A^{-1} \cdot b \quad (2.17)$$

que é a equação de YULE-WALKER cuja solução, fornece os parâmetros do modelo autoregressivo.

É muito importante em nosso estudo, a estimação da variância do ruído para o processo AR. Considerando $i=0$, temos que $E\{y(k-i) \cdot v(k)\}$ é igual a

$$E\{v^2(k)\} = \sigma_v^2 \quad (2.18)$$

uma vez, que o único elemento de $y(k)$ correlato com $v(k)$ é o próprio $v(k)$. Assim sendo, temos de (2.12) que:

$$c(0) = \alpha_1 c(1) + \alpha_2 c(2) + \dots + \alpha_n c(n) + \sigma_v^2 \quad (2.19)$$

que é equivalente a

$$\sigma_v^2 = c(0) \left\{ 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j^* r(j) \right\} \quad (2.20)$$

onde, α_j^* , $j=1 \dots n$ são os parâmetros obtidos pela solução da equação de Yule-Walker.

II.3.2. Modelo Média-Móvel - Método Newton-Raphson

Um processo média-móvel é definido como:

$$y(k) = v(k) - \beta_1 v(k-1) - \dots - \beta_m v(k-m) \quad (2.21)$$

onde, observamos que o valor corrente do processo $y(k)$ é linearmente dependente de um número finito (m), de valores passados de $v(k)$. A equação (2.21) pode ser colocada na forma:

$$y(k) = - \sum_{j=1}^m \beta_j v(k-j) + v(k) \quad (2.22)$$

onde, β_j , $j = 1, 2, \dots, m$ representam os parâmetros que se deseja estimar. Tomemos agora, a função de autocovariância do processo, isto é

$$c(i) = E \left\{ \left(- \sum_{j=1}^m \beta_j v(k-j) + v(k) \right) \left(- \sum_{j=1}^m \beta_j v(k+i-j) + v(k+i) \right) \right\} \quad (2.23)$$

desenvolvendo a equação (2.23), obtemos

$$c(i) = \begin{cases} (-\beta_i + \beta_1 \cdot \beta_{i+1} + \beta_2 \cdot \beta_{i+2} + \dots + \beta_{m-i} \cdot \beta_m) \cdot \sigma_v^2 & ; i=1,2,\dots,m \\ 0 & ; i > m \end{cases} \quad (2.24)$$

e a variância do processo (σ_v^2) é obtida para $i=0$, ou seja:

$$\begin{aligned} c(0) &= (1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_m^2) E\{v(k)^2\} \\ &= (1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_m^2) \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

então, segue que:

$$\sigma_v^2 = \frac{c(0)}{(1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_m^2)} \quad (2.26)$$

Devemos notar que fazendo $i = 1, 2, \dots, m$ em (2.24) e (2.25), obtemos um sistema de equações não lineares que resolvido, fornece os parâmetros $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ do modelo em questão, bem como o desvio padrão do ruído σ_v . A seguir, analisamos a aplicação do método de Newton-Raphson (convergência quadrática) para a solução numérica deste sistema, como proposto por [BOX and JENKINS, 1970].

Seja a seguinte recorrência:

$$\tau \leftarrow \tau - h \tag{2.27}$$

onde, $h \in \mathbb{R}^{m+1}$ é obtido resolvendo-se a equação linear

$$T \cdot h = f \tag{2.28}$$

A recorrência (2.27) é usada para calcular o vetor $\tau \in \mathbb{R}^{m+1}$ na $(i+1)$ -ésima iteração, a partir de seu valor $\tau \in \mathbb{R}^{m+1}$, na i -ésima iteração, onde

$$\tau = [\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(m)]^T ;$$

$$f = [f(0), f(1), \dots, f(m)]^T$$

sendo, $f(j)$, $j=1 \dots m$ dados por

$$f(j) = \sum_{i=0}^{m-j} \tau(i) \cdot \tau(i+j) - c(j) \tag{2.29}$$

com, $c(j)$ dado pela equação (2.24). Além disso, temos que a matriz T , por definição, pode ser tomada como a soma de duas matrizes do tipo triangular, assim definidas:

$$T = \begin{bmatrix} \tau(0) & \tau(1) & \dots & \tau(m) \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau(m) & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau(0) & \tau(1) & \dots & \tau(m) \\ & \tau(0) & \dots & \tau(m-1) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \tau(0) \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

onde, os valores inicialmente assumidos para os $\tau(i)$ são

$$\tau(0) = \sqrt{c(0)} \quad \text{e} \quad \tau(1) = \tau(2) = \dots = \tau(m) = 0 \quad (2.31)$$

Finalmente, se $|f(j)| < \epsilon$, $j=0, 1, 2, \dots, m$, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, o processo \tilde{e} dito ter convergido e os parâmetros são estimados, segundo a equação:

$$\beta_j = - \frac{\tau(j)}{\tau(0)} \quad j=1 \dots m \quad (2.32)$$

A variância estimada para o ruído branco do processo média-móvel \tilde{e} :

$$\sigma_v^2 = \tau^2(0) \quad (2.33)$$

II.3.3. Modelo ARMA - Método de Solução

Muitas vezes, para obter um modelo parsimonioso \tilde{e} necessário incluir tanto componentes autoregressivas, quanto componentes média-móvel \tilde{e} assim, temos um modelo ARMA.

O processo ARMA \tilde{e} escrito como

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + v(k) - \beta_1 v(k-1) - \dots - \beta_m v(k-m) \quad (2.34)$$

ou equivalentemente,

$$y(k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y(k-j) - \sum_{i=1}^m \beta_i v(k-i) + v(k) \quad (2.35)$$

onde, α_j , $j=1, 2, \dots, n$ e β_i , $i=1, 2, \dots, m$ são respectivamente, os parâmetros autoregressivos e média-móvel a serem estimados.

Para determinarmos os parâmetros deste processo, começamos inicialmente estimando os parâmetros correspondentes ao processo autoregressivo (AR), utilizando para isto, a equação de YULE-WALKER (2.17). O conhecimento de tais parâmetros, permite-nos determinar a seguinte função de autocorrelação:

$$c'(j) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_i \alpha_k c(|j+i-k|) ; \quad \alpha_0 = -1 \quad (2.36)$$

que deve ser utilizado na recorrência (2.29), nada mais sendo que o procedimento do Método Newton-Raphson, estudado na seção anterior e que nos leva a estimação dos parâmetros Média-Móvel. Conhecido os parâmetros do processo AR e do processo MA, temos em mãos o modelo ARMA. No programa computacional encontrado no apêndice, utilizamos os métodos acima para estimar os parâmetros de um modelo geral ARMA.

Quanto ao valor estimado para a variância do ruído, temos que

$$\sigma_v^2 = \begin{cases} \tau(0)^2 & \text{se } m > 0 \\ c(0) \left\{ 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j^* r(j) \right\} & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

Fica, então, evidenciado que os parâmetros de um modelo ARMA, podem ser obtidos em duas etapas. Inicialmente os parâmetros relativos à parte AR são obtidas normalmente, em seguida, os coeficientes $c'(j)$ são calculados, permitindo a obtenção dos parâmetros relativos à parte MA do modelo.

II.4. MAXIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Nosso propósito nesta seção é otimizar os parâmetros do modelo, maximizando uma função de verossimilhança. Isto nos leva a estudar na literatura, algoritmos de estimação que consideram o modelo de natureza geral, isto é, do tipo ARMA onde é claro, as medidas apresentam forte correlação temporal e devem ser modeladas por um filtro linear. Dentre os algoritmos estudados [AMARAL, 1980], optamos pelo de "Mínimos Quadrados Estendidos" [GIMENO, 1981] ou também "MATRIZ ESTENDIDA", que tem por hipótese, o modelamento do ruído por um processo MÉDIA-MÓVEL. Este método, para algumas aplicações em nosso problema, não apresentou convergência. Em razão disto, propomos uma generalização deste método e o denominamos de "MATRIZ ESTENDIDA GENERALIZADO" cuja principal característica, é dividir o problema de otimização, em questão, em dois níveis: um coordenador e um subproblema. Quanto a convergência deste método, nada se pode afirmar teoricamente, no entanto, nesse problema (modelamento de usinas) ela foi sempre observada.

Vamos agora, formular o problema de maximização da função de verossimilhança cuja solução, necessita da utilização dos métodos acima comentados. A importância da utilização da função de verossimilhança em teoria de estimação, reside no fato de que toda informação existente nos dados a respeito dos parâmetros, está contida na função de verossimilhança [BOX and JENKINS, 1970].

Seja o ruído do processo $\{v(k)\}$ uma sequência de variáveis aleatórias, com variância σ_v^2 conhecida, que podemos representar segundo a distribuição normal:

$$p(v(1), v(2), \dots, v(M) / \gamma) \propto \sigma_v^{-M} \text{EXP} \left\{ - \left(\sum_{k=1}^M v^2(k) / 2\sigma_v^2 \right) \right\} \quad (2.37)$$

onde, γ contém os parâmetros desconhecidos. Esta expressão (2.37) é dita ser a função de verossimilhança. Por uma questão de conveniência, nós utilizamos o operador logaritmo nesta função, temos portanto:

$$\mathcal{L}(\gamma, \sigma_v) = -M \ln \sigma_v - \frac{1}{2\sigma_v^2} \sum_{k=1}^M v^2(k) \quad (2.38)$$

A idéia é determinar o valor máximo de (2.38) - ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA - que é equivalente a minimização da seguinte função:

$$J(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M v^2(k) \quad (2.39)$$

No nosso caso, este problema de minimização pode ser colocado da seguinte forma:

$$\text{Min}_{\alpha_j, \beta_j} J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M v^2(k)$$

s.a.

(2.40)

$$v(k) = y(k) - \sum_{j=1}^n \alpha_j y(k-j) + \sum_{i=1}^m \beta_i v(k-i)$$

Sendo o critério $J(\alpha, \beta)$ uma função não-quadrática nos parâmetros desconhecidos, sua minimização necessita de algum procedimento iterativo de procura do mínimo. A seguir, serão apresentados os métodos de Iteração Direta (Matriz Estendida) e Decomposição Mixta (Matriz Estendida Generalizado).

II.4.1. Método da Matriz Estendida

Tomemos o problema de minimização (2.40), que pode ser colocado em notação vetorial como segue

$$\text{Min } \frac{1}{2} v'v$$

$$\text{s.a.} \tag{2.41}$$

$$v = y - Z_M \gamma$$

onde, v representa o vetor que contém a sequência de ruídos, $v' = [v(1), v(2), \dots, v(M)] \in R^M$, $y \in R^M$ é o vetor de medidas e

$$Z_M = [Z_1 \vdots Z_2] \tag{2.42}$$

com, $Z_M \in R^{M \times (n+m)}$, $Z_1 \in R^{M \times n}$ e $Z_2 \in R^{M \times m}$;

$$\gamma' = [\alpha' \vdots \beta'] \tag{2.43}$$

com, $\alpha \in R^n$ e $\beta \in R^m$.

A matriz Z_M é dada por M linhas, cuja k -ésima é escrita como segue:

$$\begin{aligned} z_M(k) &= [-y(k-1) \dots -y(k-n) \vdots v(k-1) \dots v(k-m)] \\ &= [z_1(k) \vdots z_2(k)] \end{aligned} \tag{2.44}$$

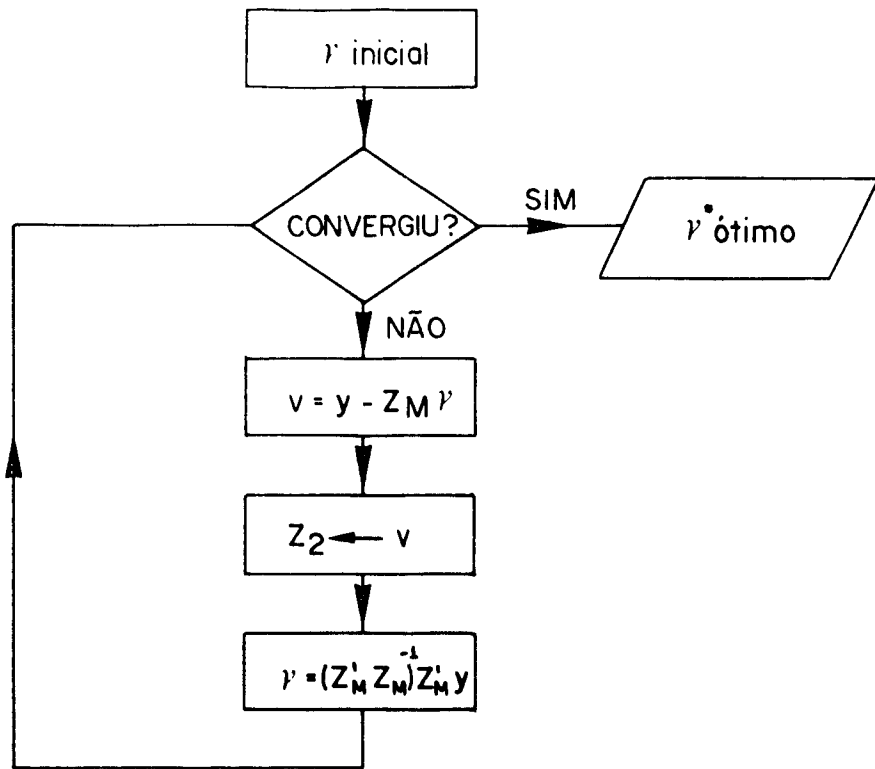
Logo, concluímos que Z_1 e Z_2 são matrizes dependentes, respectivamente, da sequência de medidas observadas $\{y(k)\}$ e da sequência de ruído estimados $\{v(k)\}$.

A solução do problema de minimização (2.41) supondo Z_M conhecida é:

$$\gamma = \begin{bmatrix} Z_M^1 & Z_M \end{bmatrix}^{-1} Z_M^1 y \quad (2.45)$$

que na literatura, representa o estimador de Mínimos Quadrados. No entanto, Z_M depende de $v(k)$ e conseqüentemente, (2.45) não é a solução ótima de (2.41).

O Método da Matriz Estendida utiliza, entretanto, o estimador (2.45) iterativamente, para obter-se a solução ótima do problema em questão. Um fato importante é que a sequência de ruídos $\{v(k-1), v(k-2), \dots, v(k-m)\}$ é desconhecida, pois não há possibilidade de medi-los. Então, torna-se necessário supor-los conhecidos (todos nulos, por exemplo) e utilizar o estimador (2.45) como mínimos quadrados, para fornecer valores assintoticamente não polarizados ($v(k)$ é suposto ruído branco). Estimado os parâmetros γ uma consequência direta, é a estimação dos valores desconhecidos do ruído, ou seja, a substituição da sequência estimada $\{v(k)\}$ em lugar dos valores supostos verdadeiros e monta-se com isto a matriz Z_2 , tornando completa a matriz geral $Z_T = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}$, a qual é chamada "Matriz Estendida" por ser uma extensão da matriz Z_1 do estimador de mínimos quadrados. O processo deve ser repetido iterativamente, até a convergência dos parâmetros para um determinado valor. A seguir, temos um diagrama de blocos do procedimento acima:



É óbvio que no caso do processo ser autoregressivo, o método converge em apenas 1 passo, uma vez que temos então caracterizado, o método de mínimos quadrados.

Esta mesma eficiência, não é observada para o processo mixto Autoregressivo + média-móvel (ARMA). Quando aumentamos a ordem da parte Média-Móvel (MA) deste processo para valores superiores a 1, não conseguimos convergência do algoritmo. Isto significa, que o algoritmo "Matriz Estendida" não pode ser utilizado no nosso problema particular. Assim sendo na seção seguinte, propomos um algoritmo que mantém a mesma estrutura da "Matriz Estendida", porém, com a vantagem de sempre termos observado sua convergência em todos os exemplos testados.

II.4.2. Método de Matriz Estendida Generalizado

Uma vez que o método da seção anterior apresentou sérios proble

mas de convergência para o processo geral ARMA, tornou-se necessário estudar um novo algoritmo iterativo, para solucionar o problema de maximização da função de verossimilhança (2.40). Este algoritmo baseia-se em um método de decomposição mixta, o qual divide o problema (2.40) em dois níveis. Este método que trataremos mais adiante é uma generalização do Método Matriz Estendida antes porém, vamos considerar alguns aspectos teóricos:

O problema em estudo pode ser colocado em uma forma mais compacta, como sendo:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Q(x) \\ x \\ Ax = h(x) \end{array} \right. \quad (2.46)$$

onde, Q é uma função Quadrática. Equivalentemente, escreve-se (2.46) na forma:

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Q(x) \\ x, y \\ \lambda : Ax = h(y) \\ \mu : y = x \end{array} \right. \quad (2.47)$$

onde, λ e μ são as variáveis duais associadas às restrições. A solução de (2.47) é conseguida, escrevendo a função Lagrangeana e determinando as condições de otimalidade a ela associados.

Seja, então, o Lagrangeano de (2.47) dado por:

$$\mathcal{L}(x, y, \mu, \lambda) = Q(x) + \lambda'(Ax - h(y)) + \mu'(y - x) \quad (2.48)$$

e as condições de otimalidade são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = y - x = 0 \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mu - J_h'(y) \cdot \lambda = 0$$

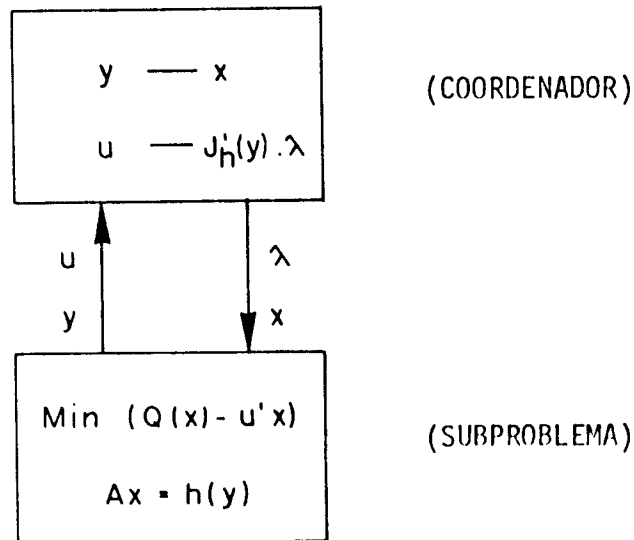
onde, $J_h(y)$ representa a matriz Jacobiana. Temos, portanto, que x e y são ótimos se: [GEOFFRION, 1971]

$$y = x$$

$$\mu = J_h'(y) \cdot \lambda \tag{2.50}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x \{Q(x) - \mu^T x\} \\ \Lambda x = h(y) \end{array} \right.$$

Podemos agora escrever de uma forma representativa, o método da decomposição mixta.



Observações:

- 1) Se impormos a variável dual $\mu = 0$ em todas iterações, estaremos utilizando o algoritmo estudado na seção anterior.
- 2) Em seguida veremos que no caso em estudo $h(y)$ é uma função extremamente complicada, não permitindo que possamos afirmar, teoricamente, Nada sobre a convergência do método proposto. Entretanto na implementação prática, dentre os inúmeros casos resolvidos, não se verificou divergência.

Vamos agora, aplicar este método para solucionar nosso problema em questão. Trata-se da estimação ótima dos parâmetros de um processo ARMA, que em nosso estudo se escreve na seguinte forma:

$$y(k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y(k-j) - \sum_{i=1}^m \beta_i v(k-i) + v(k) \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.51)$$

onde, $y(k) \in R^M$ (medidas), $v(k) \in R^M$ (ruído branco, caracterizado por $E\{v(k)\} = 0$ e $E\{v^2(k)\} = \sigma_v^2$).

É nosso interesse resolver o problema de minimizar a seguinte função:

$$\text{Min}_{\alpha_j, \beta_j} \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} v^2(k) \middle/ y(0) \dots y(-n+1), v(0) \dots v(-m+1) \right\} \quad (2.52)$$

podemos escrever o problema (2.52) considerando as restrições e associando a estas, as variáveis duais $\lambda(k)$ e $\mu(k)$:

$$\text{Min}_{\alpha_j, \beta_j} \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} v^2(k) \tag{2.53}$$

$$v(k) = \sum_{i=1}^m \beta_i \pi(k-i) + \left(y(k) - \sum_{j=1}^n \alpha_j y(k-j) \right) \left\{ \lambda_1 \dots \lambda_M \right.$$

onde, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi(0) = v(0) \\ \vdots \\ \pi(-m+1) = v(-m+1) \end{array} \right\} \text{dados iniciais}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi(1) = v(1) \\ \vdots \\ \pi(M) = v(M) \end{array} \right\} \mu_1 \dots \mu_M$$

sendo que, a variável $\pi(k)$ assume os mesmos valores do ruído $v(k)$ em cada instante k .

Montamos a seguir, a função Lagrangeano para o problema (2.53):

$$\mathfrak{L}(\cdot) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} v^2(k) + \lambda(k) \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \pi(k-i) + \left(y(k) - \sum_{j=1}^n \alpha_j y(k-j) \right) - v(k) \right] + \mu(k) \cdot (-\pi(k) + v(k)) \quad k=1 \dots M \tag{2.54}$$

Extraímos então, as condições de otimalidade da função Lagrangeano com rela-

çãõ a $\pi(k)$ e $\mu(k)$:

- Condições de Estacionariedade:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \pi(k)} &= \frac{\partial}{\partial \pi(k)} \left\{ \sum_{k=1}^M \lambda(k) \sum_{i=1}^m \beta_i \pi(k-i) - \sum_{k=1}^M \mu(k) \pi(k) \right\} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial \pi(k)} \left\{ \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^m \lambda(k) \cdot \beta_i \cdot \pi(k-i) \right\} - \mu(k) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial \pi(k)} \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\sum_{i=1}^m \lambda(k+i) \cdot \beta_i \right] \pi(k) \right\} - \mu(k) = 0
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu(k) = \sum_{i=1}^m \lambda(k+i) \beta_i \quad ; \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.55)$$

$$\text{b) } \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \pi(k)} = \pi(k) - v(k) = 0$$

ou seja,

$$\pi(k) = v(k) \quad ; \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.56)$$

Então, podemos escrever o problema (2.53) da seguinte maneira (ver anteriormente):

$$\text{Min}_{\beta_j, \alpha_j} \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} v^2(k) + \mu(k) v(k)$$

$$v(k) = \sum_{i=1}^m \beta_j \pi(k-i) + y(k) - \sum_{j=1}^M \alpha_j y(k-j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(0) = v(0) \\ \vdots \\ \pi(-m+1) = v(-m+1) \end{array} \right. \quad (2.57)$$

com,

$$\pi(k) = v(k)$$

$$\mu(k) = \sum_{i=1}^m \lambda(k+i) \cdot \beta_j$$

Vamos reescrever o problema (2.57), supondo uma notação matricial. Para isso, reescreveremos o modelo ARMA (2.35) como segue:

$$y = Z_M \cdot \gamma + v \quad (2.58)$$

onde, y e $v \in R^M$, $\gamma \in R^{(n+m)}$ e $Z_M \in R^{M \times (n+m)}$ da qual, obtemos a expressão para o ruído (resíduo)

$$v = y - Z_M \cdot \gamma \quad (2.59)$$

onde, temos que :

$$v = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(?) \\ \vdots \\ v(M) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix}$$

$$Z_M = \begin{bmatrix} y(0) & y(-1) & \dots & y(-n+1) & | & -\pi(0) & -\pi(-1) & \dots & -\pi(-m+1) \\ y(1) & y(0) & \dots & y(-n+2) & | & -\pi(1) & -\pi(0) & \dots & -\pi(-m+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(M-1) & y(M-2) & \dots & y(M-n) & | & -\pi(M-1) & -\pi(M-2) & \dots & -\pi(M-n) \end{bmatrix}$$

e

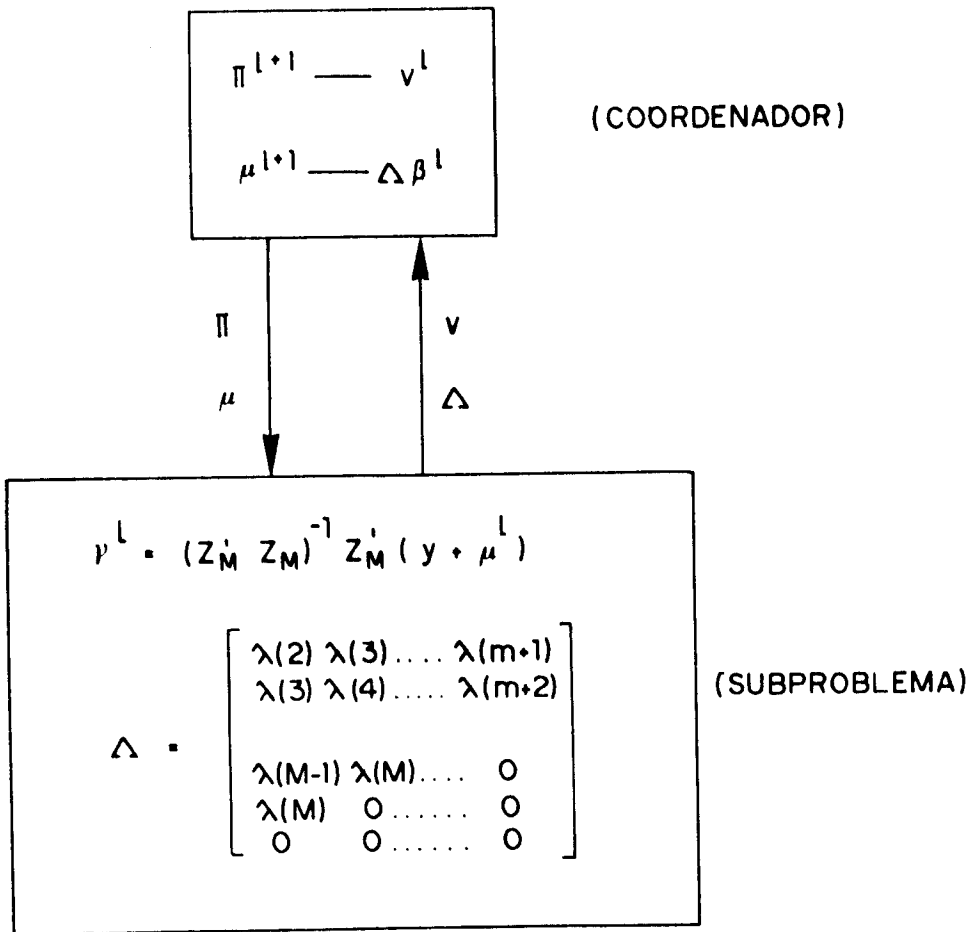
$$\gamma = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Temos ainda que a função objetivo em (2.57), pode ser escrita da seguinte maneira

$$\text{MIN } \frac{1}{2} v'v + \mu'v \tag{2.60}$$

sendo, $\mu' = [\mu(1) \dots \mu(M)]$

Com estas considerações, podemos reescrever o problema (2.57) de uma maneira bastante clara, destacando as duas partes que representam o problema da decomposição-mixta (matriz estendida generalizado) : o coordenador e o subprograma.



onde, a variável dual $\lambda(k)$ que compõe a matriz Λ , pode ser obtida a partir da condição de estacionaridade da função Lagrangeana (2.54), com respeito a $v(k)$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial v(k)} = v(k) - \lambda(k) + \mu(k) = 0$$

$$\lambda(k) = v(k) + \mu(k) \quad ; \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.61)$$

Então, a matriz Λ pode ser escrita como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} v(2) + \mu(2) & v(3) + \mu(3) & \dots & v(m+1) + \mu(m+1) \\ v(3) + \mu(3) & v(4) + \mu(4) & \dots & v(m+2) + \mu(m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v(M-1) + \mu(M-1) & v(M) + \mu(M) & \dots & 0 \\ v(M) + \mu(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Este método foi implementado computacionalmente; detalhes a respeito, podem ser obtidos no apêndice.

Estudaremos agora o problema da variância estimada para os parâmetros. A importância do conhecimento destes valores, é que eles fornecem uma medida de dispersão para os parâmetros. Vamos então, procurar uma maneira de estimar tais variâncias, começando por estabelecer o seguinte teorema:

[MENDEL, 1973]

Teorema 2.1

Se Z_M é determinístico e se as componentes y são igualmente distribuídas com média Zero e variância $\sigma_v^2 I$, então para o estimador de mínimos quadrados temos:

$$E\{y\} = \hat{y} = y \tag{2.62}$$

$$Cov\{y\} = \sigma_v^2 [Z_M' Z_M]^{-1}$$

Prova:

Seja o nosso processo dado por

$$y = Z_M \gamma + v$$

onde, Z_M independe de v . Utilizando o estimador de mínimos quadrados

$$\gamma = (Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' y \quad (2.63)$$

temos, então:

$$\begin{aligned} E\{\gamma\} &= E\left\{(Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' y\right\} \\ &= (Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' E\{Z_M \gamma + v\} \\ &= (Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' Z_M \gamma + E\{v\} \\ &= \gamma \end{aligned} \quad (2.64)$$

o que confirma ser este estimador sem bias. Seja agora

$$\begin{aligned} \gamma - \hat{\gamma} &= (Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' [Z_M \gamma + v] - \gamma \\ &= (Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' v \end{aligned} \quad (2.65)$$

então,

$$\begin{aligned} E\{(\gamma - \hat{\gamma})(\gamma - \hat{\gamma})'\} &= E\left\{(Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' v v' Z_M (Z_M' Z_M)^{-1}\right\} \\ &= (Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' E\{v v'\} Z_M (Z_M' Z_M)^{-1} \\ &= \sigma_v^2 (Z_M' Z_M)^{-1} \end{aligned} \quad (2.66)$$

c.q.d.

Do teorema 2.1, observamos que para calcular a $\text{cov}\{\gamma\}$ é importante o conhecimento da variância do ruído $v(k)$. Em nosso estudo, consideramos $\sigma_v^2 = E\{v^2(k)\}$ como sendo a somatória de todas medidas do ruído, dividido pelo total de medidas, isto é:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M v^2(k) \quad (2.67)$$

sabendo que nosso critério de máxima verossimilhança é $J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M v^2(k)$, podemos escrever a variância do ruído estimado na seguinte forma:

$$\sigma_v^2 = \frac{2}{M} J \quad (2.68)$$

Uma vez que no decorrer das iterações a matriz Z_M é função do vetor ruído v , temos que a covariância dos parâmetros é dada por

$$\text{Cov}\{\gamma\} = E\left\{(Z_M' Z_M)^{-1} Z_M' v v' Z_M (Z_M' Z_M)^{-1}\right\} \quad (2.69)$$

cuja solução, não pode ser fornecida pelo teorema 2.1. No entanto, ao determinarmos o parâmetro ótimo γ^* estamos também determinando Z_M^* , que tendo sido fixado independe de v e desta maneira, permite que a solução de (2.69) possa ser dada aproximadamente pelo teorema 2.1, ou seja: [BOX and JENKINS, 1970]

$$\text{Cov}\{\gamma^*\} = \sigma_v^2 \cdot (Z_M^{*'} Z_M^*)^{-1} \quad (2.70)$$

onde, $\sigma_v^2 = \frac{2}{M} J^*$

Nota:

Em nosso programa, como poderá ser visto no apêndice, determinamos o desvio de cada parâmetro otimizado γ_k^* , isto é

$$\sigma_{\gamma_k^*} = \pm \sigma_v \sqrt{\left\{ (Z_M^{*'} Z_M^*)^{-1} \right\}_{kk}}$$

o que nos fornece uma opção de escolha, no sentido de considerar o parâmetro importante ou desprezível para nosso modelo em estudo. Esta escolha é feita comparando o valor estimado do parâmetro com o desvio estimado, no caso deste último ser maior é possível desprezarmos este parâmetro. É claro que isto é apenas uma opção ficando portanto, a critério do usuário decidir quais parâmetros desprezar [CASTRUCCI e GARCIA, 1981].

II.5. APLICAÇÃO A UM SISTEMA REAL BRASILEIRO

Veremos a seguir, a aplicação dos métodos estudados nas seções anteriores para um sistema real de quatro usinas hidráulicas. Concluindo com análise de resultados, que nos levarão a decidir por um modelo adequado.

II.5.1. O Sistema Real em Estudo

O sistema é constituído por quatro usinas hidráulicas, distribuídas na forma de árvore como mostra a figura 2.9.

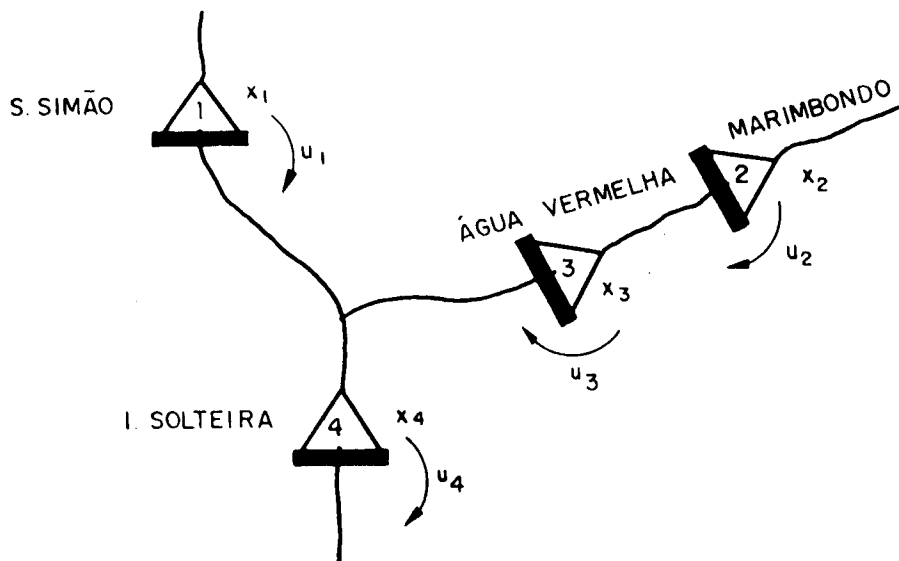


Fig. II.9. - Representação esquemática do parque hidráulico em estudo.

Este sistema, representa uma parte importante do parque hidráulico da região sudeste brasileira.

Associado a cada usina, possuímos uma tabela contendo todas as manifestações meteorológicas medidas em volume de água naquela região, a partir do ano de 1930 até o ano de 1970, tomadas mês a mês, o que fornecem conjuntos de 480 medidas, que serão utilizados com os métodos vistos anteriormente para gerar o modelo desejado.

O modelo obtido do conhecimento teórico, visto em seções anteriores - que se destinam a representar as usinas (individualmente) - escreve-se na seguinte forma:

$$y(k) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \theta(k) + \tilde{y}(k) \quad (2.71)$$

trata-se, portanto, de um modelo ARMA, onde os polinômios $C(z^{-1})$ e $D(z^{-1})$ contêm respectivamente, os parâmetros estimados de um processo média-móvel

(MA) e autoregressivo (AR). Estes polinômios são dados por:

$$C(z^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_i z^{-i}$$

$$D(z^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i z^{-i}$$

É claro que os parâmetros α_i e β_i são estimados e otimizados e tem seus desvios estimados, de modo a poder eliminar os parâmetros de pouca influência no modelo. Na seção seguinte, fornecemos os resultados obtidos para as usinas, utilizando nosso algoritmo de estimação.

II.5.2. Parâmetros Estimados

Para podermos estimar os parâmetros houve a necessidade justificada pela teoria em seções anteriores, de estudar as características estatísticas de nossas medidas. Neste sentido, idealizamos a subrotina ANSER para análise de séries temporais, onde fornecida a tabela de medidas (estatisticamente estacionárias), obtemos a média, a variância, as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para cada mês. A importância de se conhecer as características estatísticas das medidas, reside no fato de se conseguir uma imagem do modelo que pretendemos estudar.

Tendo analisado as características estatísticas fornecidas pela subrotina ANSER, podemos determinar os parâmetros iniciais do modelo escolhido bastando para isto, fornecer o número de parâmetros autoregressivos e média-móvel. É importante citar que uma particularidade estatística observada para as quatro usinas é a forte correlação temporal relativa ao atraso 10, o

que sugere, \bar{a} priori, um modelo de ordem 10. No entanto, procurou-se estudar diferentes tipos de modelos, ou seja, tomamos o modelo autoregressivo para diferentes ordens, por exemplo AR(1), AR(2) e AR(10), bem como o modelo ARMA.

As subrotinas ESTPAR e MAXVER procuram, respectivamente, estimar os parâmetros iniciais e otimizá-los. A seguir mostramos tabelas de alguns modelos estudados, como o AR(1), AR(10) e ARMA(1, 1) que consideramos suficiente uma vez que o aumento da ordem além de 1, 10 ou (1, 1) não implicou numa melhora do modelo.

TABELA 2.1. - MODELO AR(1)

	SÃO SIMÃO	MARIMBONDO	A. VERMELHA	I. SOLTEIRA
α_1	0.591 ± 0.037	0.652 ± 0.035	0.644 ± 0.035	0.448 ± 0.041
$\sigma_\theta (10^6 m^3)$	656	446	174	810

TABELA 2.2. - MODELO AR(10)

	SÃO SIMÃO	MARIMBONDO	A. VERMELHA	I. SOLTEIRA
α_1	0.585 ± 0.046	0.723 ± 0.046	0.638 ± 0.046	0.413 ± 0.046
α_2	0.034 ± 0.053	- 0.138 ± 0.056	- 0.005 ± 0.054	0.009 ± 0.049
α_{10}	- 0.090 ± 0.053	0.085 ± 0.057	0.103 ± 0.055	0.109 ± 0.049
$\sigma_\theta (10^6 m^3)$	648	440	170	800

TABELA 2.3. - MODELO ARMA(1, 1)

	SÃO SIMÃO	MARIMBONDO	A. VERMELHA	I. SOLTEIRA
α_1	0.6 ± 0.063	0.553 ± 0.052	0.629 ± 0.054	0.505 ± 0.091
β_1	0.013 ± 0.078	- 0.175 ± 0.069	- 0.025 ± 0.071	0.072 ± 0.10
$\sigma_\theta (10^6 m^3)$	656	440	174	810

É importante notar que na escolha de um modelo de ordem grande, como foi o caso daquele de ordem 10, não foram considerados grande parte dos parâmetros, ou melhor, considerou-se apenas as componentes α_1 , α_2 e α_{10} . Isto é devido ao fato de conhecermos a variância dos parâmetros otimizados. Esta informação foi importante, para podermos desprezar todas aquelas componentes cujos valores, fossem inferiores a um desvio padrão. É por este motivo que nas tabelas acima, cada um dos parâmetros vem acompanhado de seu respectivo desvio. No modelo AR(10), a segunda componente (α_2) para algumas usinas poderia ter sido desprezada, só não sendo, pelo fato de querermos estabelecer um modelo geral, válido para todas as usinas consideradas.

Na seção seguinte, explicaremos o teste de aderência utilizado destacando então, o modelo final obtido.

II.5.3. Teste de Aderência e Validade do Modelo

Tendo sido identificado o modelo e estimado os parâmetros ótimos, surge a necessidade de testar sua validade isto é, saber se o modelo identificado é adequado [CASTRUCCI e GARCIA, 1981].

Dentre os testes de aderência observados, preferimos aquele que testa a função de autocorrelação do resíduo e o preditor de um passo à frente. Portanto, seja o resíduo dado por (2.59) e a função de autocorrelação estimada para o resíduo v definida por $r_v(k)$, onde $k=1, 2, \dots, N$, sendo N um número suficientemente grande. Em nossa aplicação consideramos N igual a 12, que corresponde exatamente a um horizonte de 1 ano que \bar{e} o intervalo de tempo que desejamos estudar. Podemos escrever o seguinte índice estatístico:

$$Q = M \cdot \sum_{k=1}^N r_v^2(k) \quad (2.73)$$

cuja distribuição tem aproximadamente, a distribuição de qui-quadrado com $N-n-m$ graus de liberdade ($\chi^2(N-n-m)$), onde n e m corresponde respectivamente, as ordens de um processo mixto autoregressivo + média móvel (ARMA) [BOX and JENKINS, 1970]. Tendo obtido o índice Q , tomamos uma tabela χ^2 e determinamos a seguinte probabilidade:

$$\text{prob} \left\{ \chi_{N-n-m}^2 > Q \right\} = \varepsilon \quad (2.74)$$

onde, ε \bar{e} a probabilidade que o modelo tem para ser aceito. Quando o valor de Q \bar{e} muito grande sabemos, antecipadamente, que o modelo ser \bar{a} rejeitado. Modelos com probabilidade na faixa de 75% a 100% são ditos adequados. No entanto, na faixa inferior a 75% sua aceitação tornar-se \bar{a} duvidosa, podendo serem considerados inadequados.

Aplicando o teste visto acima, aos prováveis modelos \bar{e} possível decidir aquele que possui maior porcentagem de aceitação e, portanto, deve \bar{r} a ser tomado como o modelo padrão. A seguir, fornecemos uma tabela que relaciona usinas, ordens do modelo e a porcentagem de aceitação para aqueles ca-

sos estudados anteriormente AR(1), AR(10) e AR(1, 1) :

TABELA 2.4. - ACEITAÇÃO DO MODELO

USINA	Nº AR	Nº MA	% ACEITAÇÃO
SÃO SIMÃO	1	0	75
	10	0	75
	1	1	50
MARIMBONDO	1	0	25
	10	0	75
	1	1	50
ÁGUA VERMELHA	1	0	50
	10	0	99
	1	1	25
ILHA SOLTEIRA	1	0	5
	10	0	95
	1	1	5

Observando a tabela acima, podemos dizer que o modelo de ordem 10 é aquele que oferece as melhores condições para representar as usinas. No tamos que a porcentagem de aceitação, está na faixa de 75% a 100% o que elimina qualquer dúvida quanto a sua utilização.

Então, nosso modelo para as quatro usinas é um processo autoregressivo de ordem 10, AR(10)

$$y(k) = \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} - \alpha_{10} z^{-10})} \theta(k) + \tilde{y}(k) \quad (2.75)$$

cujos parâmetros, são repetidos a seguir:

TABELA 2.5. - MODELO PADRÃO DAS USINAS (AR(10))

	SÃO SIMÃO	MARIMBONDO	ÁGUA VERMELHA	ILHA SOLTEIRA
α_1	0.585 ± 0.046	0.723 ± 0.046	0.638 ± 0.046	0.413 ± 0.046
α_2	0.034 ± 0.053	- 0.138 ± 0.056	- 0.005 ± 0.054	0.009 ± 0.049
α_{10}	- 0.09 ± 0.053	0.085 ± 0.057	0.103 ± 0.055	0.109 ± 0.049
$\sigma_\theta (10^6 m^3)$	648	440	170	800
% <u>ACEITAÇÃO</u>	> 75	> 75	> 99	> 95

Tendo determinado os parâmetros do modelo e testado sua validade utilizando um teste de aderência do tipo qui-quadrado (χ^2), conforme tabela acima, vamos agora desenvolver a equação do preditor de um passo \tilde{a} frente para este modelo, tentando com isto, observar a tendência apresentada pelos valores obtidos na predição, em relação \tilde{a} aqueles medidos [BOX and JENKINS, 1970].

Seja a equação do modelo, na sua forma padrão (2.75), dada por

$$y(k) = \frac{1}{D(z^{-1})} \theta(k) + \tilde{y}(k) \quad (2.76)$$

onde, $D(z^{-1}) = 1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} - \alpha_{10} z^{-10}$ que pode ser reescrita como segue :

$$D(z^{-1}) = 1 - z^{-1} \cdot D_*(z^{-1}) \quad (2.77)$$

sendo, $D_*(z^{-1}) = \alpha_1 + \alpha_2 z^{-1} + \alpha_{10} z^{-9}$. Então, nosso modelo (2.76) utilizando a relação (2.77), passa a ser :

$$y(k) - D_*(z^{-1}) y(k-1) = \theta(k) + \hat{y}(k) - D_*(z^{-1}) \hat{y}(k-1) \quad (2.78)$$

deslocando k um instante \bar{a} frente e tomando a esperança matemática neste instante $(k+1)$, obtemos :

$$E\{y(k+1)\} - D_*(z^{-1}) y(k) = \hat{y}(k+1) - D_*(z^{-1}) \hat{y}(k) \quad (2.79)$$

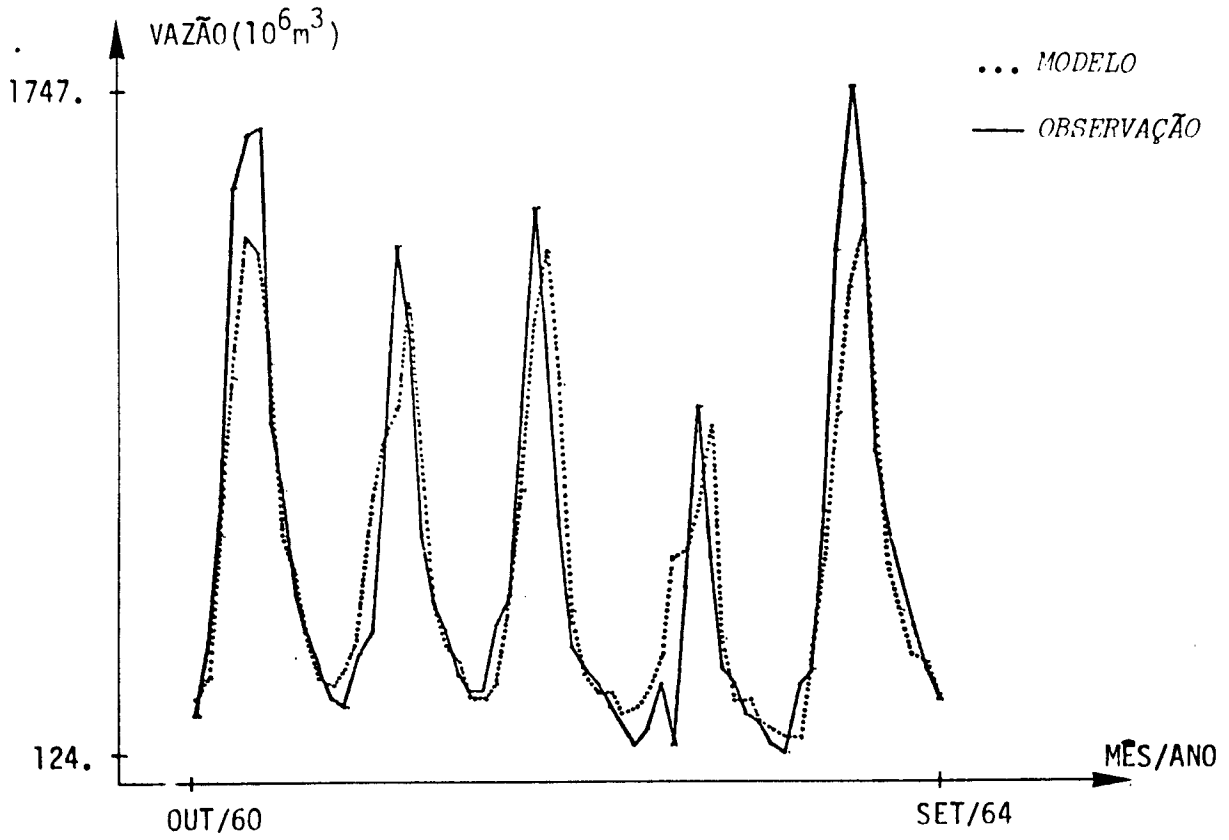
dado que $E\{\theta(k+1)\} = 0$, ou seja, o valor mais provável para o ruído um passo \bar{a} frente é zero. Considerando a seguinte notação $y_k(1) = E\{y(k+1)\}$, obtemos

$$y_k(1) = \hat{y}(k+1) + D_*(z^{-1}) \cdot (y(k) - \hat{y}(k)) \quad (2.80)$$

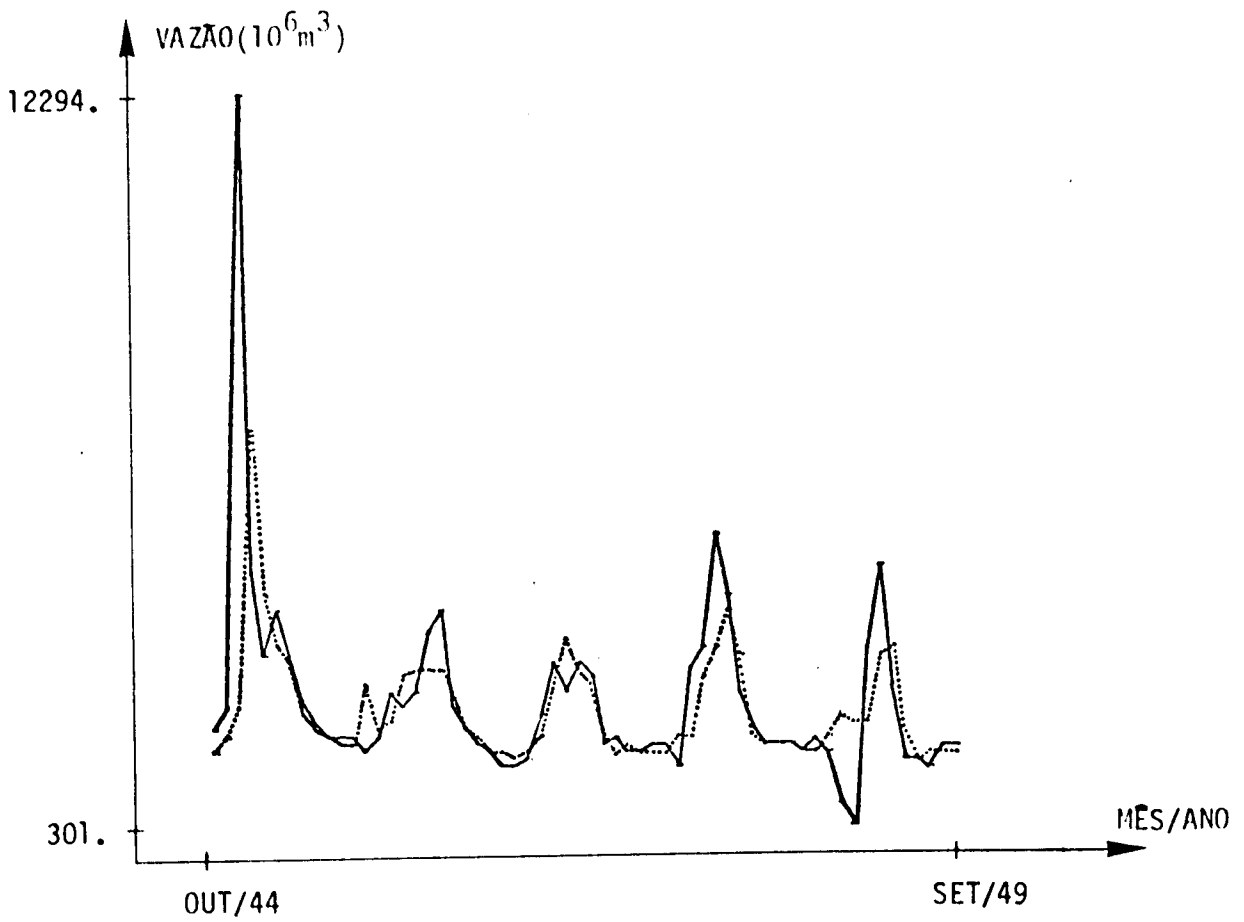
que representa a equação do preditor de 1 passo \bar{a} frente.

No apêndice, encontramos um programa que utiliza (2.80) para prever medidas 1 mês \bar{a} frente. Além disso, o programa está preparado para traçar as curvas das medidas observadas e previstas simultaneamente permitindo assim, que tenhamos uma idéia do comportamento da curva de predição e da curva original observada. Em seguida, fornecemos uma amostra destas curvas para cada usina do sistema em estudo.

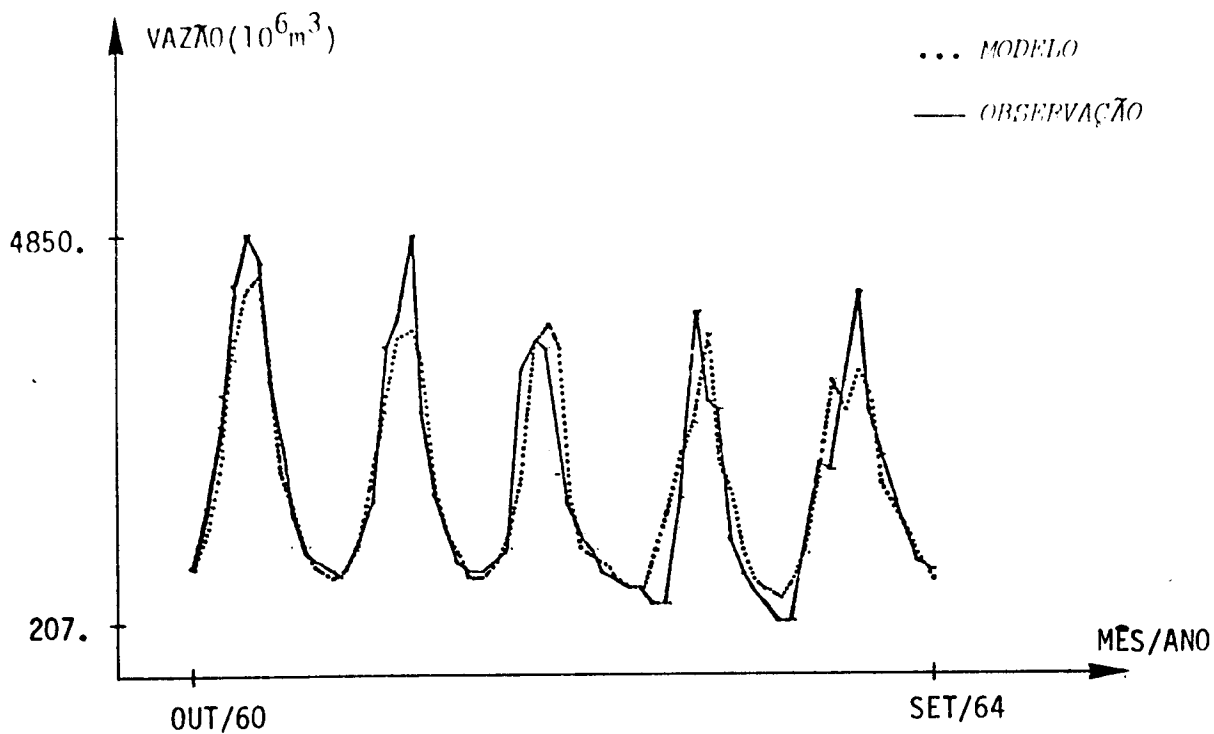
Por estes gráficos, podemos facilmente observar a grande concordância entre os valores medidos e aqueles estimados segundo o modelo aqui desenvolvido.



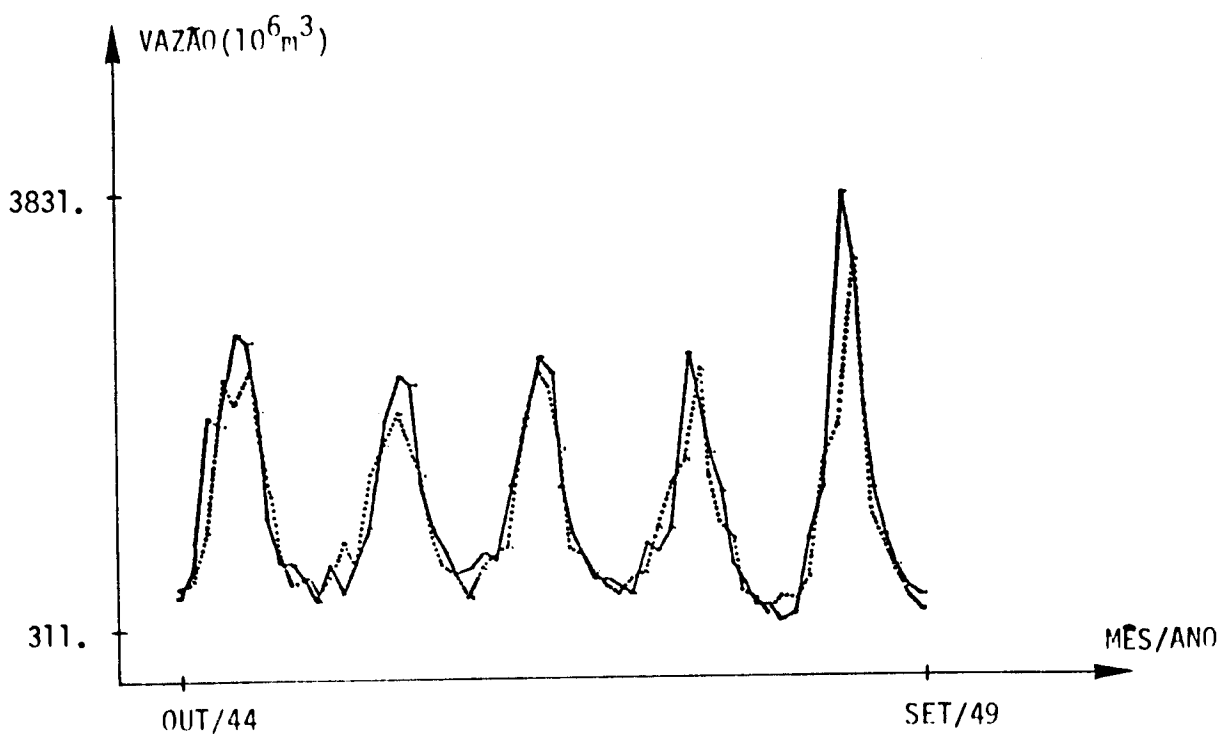
(a) - Água Vermelha



(b) - I. Solteira



(c) - São Simão



(d) - Marimbondo

Fig. II.10.(a,b,c e d) - Predição e medidas observadas de aportes d'água em cada usina do sistema em estudo.

II.6. CONCLUSÃO

Neste capítulo, vimos como obter \hat{a} partir de um conjunto de medidas, um modelo linear capaz de representá-las da melhor maneira possível. Para tanto, fizemos um estudo estatístico das medidas, supondo estacionariedade. Da análise estatística, passamos ao problema de identificação do modelo, ou seja, determinação da ordem e estimação inicial do parâmetro.

Neste sentido, foi de grande importância o conhecimento das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial. O passo seguinte foi a determinação ótima dos parâmetros, \hat{a} partir da proposição de um método de decomposição - mixta para o problema de maximização da função de verossimilhança o qual, denominamos: "Método Matriz Estendida Generalizado". Além disso, procuramos estimar o desvio para cada um dos parâmetros, o que permitiu decidir aqueles que deviam ser conservados no modelo. Finalmente, utilizamos um teste de aderência com base na distribuição de Qui-Quadrado, para obter o modelo adequado.

Os resultados numéricos são apresentados em tabelas, para quatro usinas do sistema sudeste brasileiro, utilizando um programa de computador cujo algoritmo, baseou-se inteiramente nas idéias desenvolvidas neste capítulo. Determinamos um modelo autoregressivo de ordem 10 (AR(10)), como padrão para as usinas estudadas.

CAPÍTULO III

CONTROLADOR DE VARIÂNCIA MÍNIMA

III.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos estudar o problema de variância mínima, com o objetivo de aplicar em nosso sistema hidráulico.

Na seção III.2 será feito um estudo teórico do controlador de variância mínima, que consistirá na determinação de um preditor de ℓ passos à frente para a saída, tornando o problema de otimização (variância mínima) fácil de ser resolvido, derivando daí, a lei de controle ótima. Relacionado a isto, estudaremos o comportamento do parâmetro ponderador λ com respeito à esta lei de controle. Estudaremos também, a função de transferência em malha fechada do sistema e utilizaremos sua equação característica para estudar a estabilidade. Neste sentido, veremos como o parâmetro λ afeta as raízes da equação característica, ou seja, como este parâmetro afeta o comportamento do sistema em malha fechada. Concluindo esta seção, analisaremos uma maneira eficiente de determinar a variância para a saída e para o controle - lembrando ser esta, a motivação deste estudo.

Na seção III.3 aplicaremos os resultados obtidos ao sistema hidráulico, anteriormente estudado (ver cap. II). Para isso, utilizaremos o método de programação estocástica desenvolvida no capítulo I no qual, o problema de variância mínima corresponde à determinação ótima da variância das variáveis aleatórias, associadas à dinâmica de cada reservatório. Procuraremos ainda, escrever os polinômios desconhecidos de uma forma geral, derivada do modelo obtido para representar os aportes de água em cada usina (ver capítulo II). Utilizando tais polinômios, escreveremos a lei de controle ótimo e determinaremos a equação característica, assim sendo, poderemos observar com certa facilidade, a influência do parâmetro λ em suas raízes. Em seguida apresentaremos um teorema, que garantirá a estabilidade do sistema em malha fechada, para qualquer valor positivo de λ . Serão ainda apresentados, alguns aspectos do algoritmo computacional utilizado e concluiremos com o fluxogra-

ma do programa, onde destacam-se os dados de entrada e as subrotinas utilizadas - identificando sua utilização.

Na seção III.4 apresentamos os principais resultados obtidos para cada usina; em destaque, temos as curvas que relacionam a variância de saída com a variância de entrada quando variamos de um incremento $\Delta\lambda$, o parâmetro ponderador λ . Também serão mostrados, os valores de desvios na saída e no controle para o valor de $\lambda = \lambda^*$ escolhido para cada usina (ver cap. I).

A grande vantagem do programa desenvolvido para resolver o problema é sua aplicação de espectro amplo, isto é, ele pode ser aplicado a diferentes tipos de problemas, onde se deseje minimizar a variância de um processo estocástico linear.

III.2. A SOLUÇÃO DO CONTROLADOR DE VARIÂNCIA MÍNIMA

Nesta seção, estudaremos aspectos relacionados a teoria do controlador de variância mínima para um dado sistema [CLARKE, COPE and GAWTHROP, 1975]. E finalizaremos o estudo com um exemplo de aplicação.

O sistema em estudo - de ordem n e atraso ℓ - é dado pela equação a diferença, a seguir:

$$\sum_{i=0}^n a_i \omega(k-i) = \sum_{i=0}^n b_i \eta(k-i-\ell) + \sum_{i=0}^n c_i \theta(k-i) + d(k) \quad (3.1)$$

a equação (3.1) apresenta-se na forma generalizada adotada por [CLARKE, COPE and GAWTHROP, 1975], sendo $a_0 = c_0 = 1$ e $b_0 \neq 0$. Abaixo, fornecemos o significado das variáveis utilizadas em (3.1):

$\omega(k)$ - Estado (ou saída) do sistema no instante k

$\eta(k)$ - Controle (ou entrada) do sistema no instante k

$\theta(k)$ - Ruído branco gerado no instante k , com média nula e desvio padrão σ_θ

$d(k)$ - Variável de entrada no instante k

O sistema (3.1) pode ser escrito mais concisamente, em termos do operador atraso z^{-1} , na forma:

$$A(z^{-1})\omega(k) = z^{-\ell}B(z^{-1})\eta(k) + C(z^{-1})\theta(k) + d(k) \quad (3.2)$$

onde,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n} \quad ;$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n} \quad ;$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n}$$

será tomado por hipótese, em nosso estudo, que as raízes do polinômio $C(z^{-1})$ estarão dentro ou sobre o círculo unitário em z , tal que, $C^{-1}(z^{-1})$ representará uma função de transferência de estabilidade garantida.

O critério em estudo é:

$$\text{Min } J = E \left\{ (\omega(k+\ell))^2 + \lambda \eta^2(k) \right\} \quad (3.3)$$

que tomando (3.2) como restrição, representa o problema de Variância Mínima.

O parâmetro $\lambda \geq 0$ pondera a entrada $\eta(k)$ por isso, será chamado de "parâmetro de ponderação". Uma característica importante neste estudo é a possibilidade de representar uma curva, que relaciona a variância da saída $E\{\omega^2(k)\}$ com a variância da entrada $E\{\eta^2(k)\}$, quando variamos o parâmetro de ponderação λ . A figura 3.1., exemplifica uma curva típica deste relacionamento.

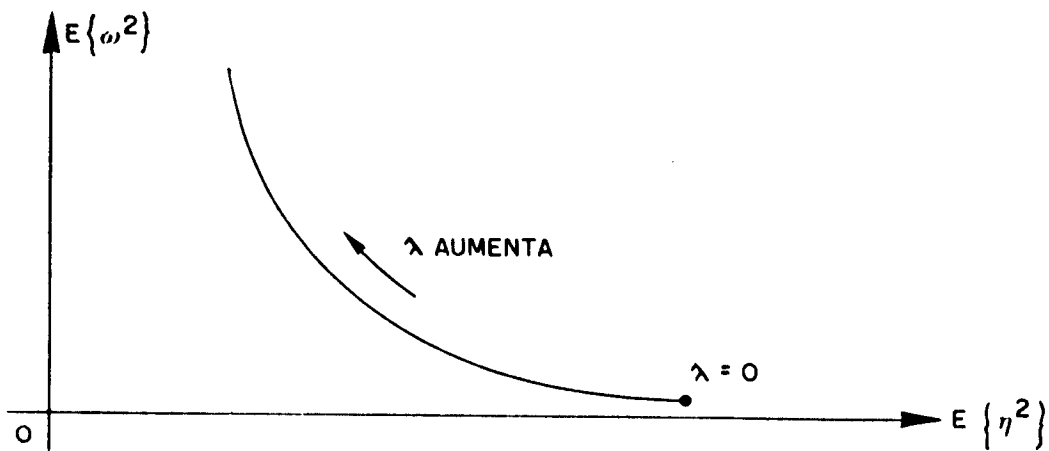


Fig. III.1. - $E\{\omega^2\}$ versus $E\{\eta^2\}$, parametrizada em λ

Para que possamos derivar a lei de controle é necessário determinar o preditor de ℓ passos à frente da saída $\omega(k)$, isto significa, obter uma equação capaz de prever o primeiro valor de $\omega(k+\ell)$, afetado pelo sinal de entrada $\eta(k)$. Tendo encontrado o preditor de ℓ passos à frente para a saída, torna-se direto a minimização de (3.3) com a consequente obtenção da lei de controle para o sistema (3.1). Então precisamos, inicialmente, encontrar a equação do preditor.

Consideremos, novamente, o sistema (3.2) e façamos um deslocamento de ℓ passos à frente no instante k , de tal forma a ficarmos com a seguinte equação:

$$A(z^{-1})\omega(k+\ell) = B(z^{-1})\eta(k) + z^\ell C(z^{-1})\theta(k) + z^\ell d(k) \quad (3.4)$$

ou ainda, na forma

$$\omega(k+\ell) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \eta(k) + z^\ell \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \theta(k) + z^\ell \frac{d(k)}{A(z^{-1})} \quad (3.5)$$

Eliminando $\theta(k)$ para instantes futuros, a equação (3.5) torna-se o preditor de ℓ passos à frente para saída ω . Com esse propósito, vamos expandir o polinômio associado ao ruído $\theta(k)$ em (3.5), e separarmos os correspondentes termos futuros:

$$z^\ell \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \theta(k) = (\theta(k+\ell) + e_1 \theta(k+\ell-1) + \dots + e_{\ell-1} \theta(k+1)) + (e_\ell \theta(k) + e_{\ell+1} \theta(k-1) + \dots + e_{\ell+n} \theta(k+\ell-n)) \quad (3.6)$$

É importante notar que, a divisão do polinômio $C(z^{-1})$ pelo polinômio $A(z^{-1})$, fornece a seguinte identidade [ASTROM, 1970]:

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1}) \cdot E(z^{-1}) + z^{-\ell} F(z^{-1}) \quad (3.7)$$

onde, $E(z^{-1})$ representa o quociente e $z^{-\ell} F(z^{-1})$ o resto da divisão. Comparando (3.6) com a identidade polinomial (3.7), podemos escrever os polinômios E e F em termos dos coeficientes de (3.6), conforme veremos a seguir:

$$E(z^{-1}) = 1 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{\ell-1} z^{1-\ell}$$

$$\frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} = (e_\ell + e_{\ell+1} z^{-1} + \dots + e_{\ell+n} z^{\ell-n}) \quad (3.8)$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n-1} z^{1-n}$$

onde, os coeficientes dos polinômios E e F, são obtidos utilizando as seguintes equações à diferença:

$$e_j = c_j - a_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j-1} \cdot e_i \quad j=1,2,\dots,\ell-1 \quad (3.9)$$

onde, $e_0 = 1$ e

$$f_j = c_{\ell+j} - a_{\ell+j} - \sum_{i=1}^{\ell-1} a_{\ell-i+j} \cdot e_{i+1} \quad j=0,1,2,\dots,n-1 \quad (3.10)$$

Lembrando que os polinômios $A(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$, são obviamente conhecidos. Substituindo (3.7) em (3.5), temos:

$$\begin{aligned} \omega(k+\ell) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \eta(k) + \left\{ z^\ell E(z^{-1}) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right\} \theta(k) + z^\ell \cdot \frac{1}{A(z^{-1})} d(k) \\ &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \eta(k) + E(z^{-1}) \theta(k+\ell) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \theta(k) + z^\ell \cdot \frac{1}{A(z^{-1})} d(k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nosso próximo passo é eliminar o ruído $\theta(k)$ da equação (3.11) para isso, levamos em conta (3.4) e obtemos:

$$\begin{aligned} \omega(k+\ell) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \eta(k) + E(z^{-1}) \theta(k+\ell) + z^\ell \cdot \frac{1}{A(z^{-1})} d(k) + \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})} \omega(k) - \\ &- z^{-\ell} \cdot \frac{F(z^{-1}) B(z^{-1})}{C(z^{-1}) A(z^{-1})} \eta(k) - \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot \frac{1}{C(z^{-1})} d(k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

agrupando os coeficientes de mesma variável:

$$\begin{aligned} \omega(k+\ell) = & \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})} \omega(k) + \left\{ \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} - z^{-\ell} \cdot \frac{F(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})}{C(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})} \right\} \eta(k) + \\ & + \left\{ z^{\ell} \cdot \frac{1}{A(z^{-1})} - \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1}) \cdot C(z^{-1})} \right\} d(k) + E(z^{-1}) \theta(k+\ell) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vamos agora, simplificar as expressões polinomiais que estão entre chaves em (3.13). Para isto, considerando a identidade polinomial (3.7), temos:

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} - z^{-\ell} \frac{F(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})}{C(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1}) E(z^{-1})}{C(z^{-1})} \quad (3.14)$$

$$\frac{z^{\ell}}{A(z^{-1})} - \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})} = z^{\ell} \frac{E(z^{-1})}{C(z^{-1})}$$

feito isso, podemos escrever (3.13), como segue:

$$\begin{aligned} \omega(k+\ell) = & \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})} \omega(k) + \frac{B(z^{-1}) E(z^{-1})}{C(z^{-1})} \eta(k) + z^{\ell} \cdot \frac{E(z^{-1})}{C(z^{-1})} d(k) + \\ & + E(z^{-1}) \theta(k+\ell) \end{aligned} \quad (3.15)$$

obedecendo as considerações feitas anteriormente para os valores futuros do ruído $\theta(k)$, é possível escrever o predictor ótimo de ℓ passos à frente para a saída $\omega(k)$, como sendo:

$$C(z^{-1})\omega^*(k+l) = F(z^{-1})\omega(k) + B(z^{-1})E(z^{-1})\eta(k) + z^l E(z^{-1})d(k) \quad (3.16)$$

a diferença entre (3.15) e (3.16), nos leva a obter uma expressão para o erro de predição, que é por definição:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+l) &\triangleq \omega(k+l) - \omega^*(k+l) \\ &= E(z^{-1})\theta(k+l) \\ &= \theta(k+l) + e_1\theta(k+l-1) + \dots + e_{l-1}\theta(k+1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

que se caracteriza por ser não-correlato com as medidas correntes de $\omega(k)$ e $\eta(k)$, e conseqüentemente, com $\omega^*(k)$.

Como foi dito, a obtenção do previsor torna possível o tratamento direto do problema de minimização (3.3), que leva à lei de controle ótima. Portanto, seja nosso critério escrito como segue:

$$J = E\left\{(\omega^*(k+l) + \varepsilon(k+l))^2 + \lambda \eta^2(k)\right\} \quad (3.18)$$

uma vez que $\omega^*(k+l)$ e $\varepsilon(k+l)$ são não-correlatos, (3.18) é colocado na forma:

$$J = \omega^{*2}(k+l) + \lambda \eta^2(k) + E\left\{\varepsilon^2(k+l)\right\} \quad (3.19)$$

onde, $E\left\{\varepsilon^2(k+l)\right\}$ é uma constante. E assim, podemos escrever o problema de otimização (1.52) na seguinte forma:

$$\text{Min } \omega^{*2}(k+l) + \lambda \eta^2(k) \quad \text{s.a. (3.16)} \quad (3.20)$$

Uma vez que (3.20) é um problema convexo, o procedimento adotado a seguir, determinará necessariamente sua solução, ou seja, a lei de controle ótimo. Tomemos, portanto, a primeira derivada de (3.19) com relação a $\eta(k)$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta(k)} \left[\omega^2(k+l) + \lambda \eta^2(k) \right] &= 2 \cdot \omega^*(k+l) \frac{d}{d\eta(k)} \omega^*(k+l) + 2 \cdot \lambda \cdot \eta(k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

no entanto, de (3.16) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^*(k+l)}{d\eta(k)} &= \frac{d}{d\eta(k)} C(z^{-1}) \omega^*(k+l) \\ &= \frac{d}{d\eta(k)} (B(z^{-1}) E(z^{-1}) \eta(k)) = b_0 \end{aligned}$$

pois, $e_0 = 1$. Assim, obtemos:

$$\eta(k) = - \frac{b_0}{\lambda} \omega^*(k+l) \tag{3.22}$$

Como pode ser observado, a lei de controle é o preditor de l passos à frente da variável $\omega(k)$, multiplicada pelo fator $-b_0/\lambda$. Substituindo então, a equação (3.16) em (3.22), temos:

$$\eta(k) = - \frac{b_0}{\lambda} \left[\frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})} \omega(k) + \frac{B(z^{-1}) E(z^{-1})}{C(z^{-1})} \eta(k) + z^l \frac{E(z^{-1})}{C(z^{-1})} d(k) \right] \tag{3.23}$$

e definindo o seguinte polinômio:

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1}) B(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0} C(z^{-1}) \quad (3.24)$$

cuja ordem, depende do parâmetro λ , isto é, se temos $\lambda = 0$ sua ordem será $n+l-1$; caso contrário ($\lambda \neq 0$), será n . Utilizando a equação (3.23) e a expressão polinomial (3.24), escrevemos a lei de controle:

$$\eta(k) = - \frac{F(z^{-1})}{G(z^{-1})} \omega(k) - \frac{E(z^{-1})}{G(z^{-1})} d(k+l) \quad (3.25)$$

Finalizando este estudo teórico - já bem estabelecido na literatura [CLARKE, COPE and GAWTHROP, 1975] - vamos determinar a função de transferência em malha fechada para o sistema e assim, analisar sua estabilidade a partir do posicionamento das raízes da equação característica.

A condição de otimalidade (3.22) é tal que,

$$\omega(k+l) + \frac{\lambda}{b_0} \eta(k) = E(z^{-1}) \theta(k+l) \quad (3.26)$$

Considerando (3.23) e multiplicando (3.26) por z^{-l} , obtemos

$$\left(B(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0} A(z^{-1}) \right) \omega(k) = B(z^{-1}) E(z^{-1}) \theta(k) + \frac{\lambda}{b_0} d(k) + \lambda/b_0 C(z^{-1}) \theta(k)$$

Consequentemente, temos a equação do sistema em malha fechada:

$$\omega(k) = \frac{1}{B(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0} A(z^{-1})} \left\{ G(z^{-1}) \theta(k) + \frac{\lambda}{b_0} d(k) \right\} \quad (3.27)$$

de onde extraímos a equação característica, cujas raízes permitem estabelecer a estabilidade do sistema em malha fechada.

$$\Delta(z^{-1}) = B(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0} A(z^{-1}) = 0 \quad (3.28)$$

Existem diferentes tipos de técnicas para analisar as raízes de (3.28), dentre elas destacamos o método clássico de localização das raízes (ROOT-LOCUS). Note que o parâmetro de ponderação λ , influencia bastante o comportamento do sistema. Imagine por exemplo, se $\lambda \ll b_0$ isto significa, que o comportamento em malha fechada deste é determinado por $B(z^{-1})$, cujas raízes devem estar localizadas dentro do círculo unitário, no entanto, se isto não acontecer, ficamos diante de um sistema de fase não-mínima, o que implica na instabilidade do sistema em malha fechada e conseqüentemente, a lei de controle ótimo obtida é inviável.

Na situação contrária, o comportamento do sistema se baseia totalmente no polinômio $A(z^{-1})$. Assim sendo, $\lambda \geq 0$ deve ser determinado de tal forma, a garantir a estabilidade do sistema em malha fechada.

Com a lei de controle ótimo determinada, torna-se necessário conhecer o valor ótimo da variância quer em relação a saída, quer em relação ao controle, ou seja, determinar a variância da saída e do controle em regime estatístico estacionário. As equações que definem a saída e o controle - obtidas no processo de otimização descrito anteriormente - são respectivamente, (3.27) e (3.25). Para a determinação da variância, a variável $d(k)$

que aparece nas duas equações, pode ser eliminada já que é determinística. Então temos as equações (3.27) e (3.25) reduzidas a:

$$\omega(k) = \frac{G(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})} \theta(k) \quad (3.29)$$

e

$$\eta(k) = - \frac{F(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})} \theta(k) \quad (3.30)$$

onde, $\theta(k)$ é o ruído branco caracterizado por ter média nula e variância σ_θ^2 .

Objetivando generalizar este estudo, escrevemos as equações (3.29) e (3.30) de uma única maneira:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j \theta(k-j) \quad (3.31)$$

Os termos a_0 e b_0 podem ser diferentes de 1, pois os polinômios $\Delta(z^{-1})$, $F(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, apresentam esta generalidade.

Multiplicando (3.31) por $y(k-p)$ e utilizando o operador esperança matemática, obtemos:

$$a_0 \gamma(p) = - \sum_{i=1}^n a_i \gamma(p-i) + b_0 \xi(p) + \sum_{j=1}^m b_j \xi(p-j) \quad (3.32)$$

onde,

$$\gamma(p) \triangleq E\{y(k-p) \cdot y(k)\} \quad e$$

$$\xi(p) \triangleq E\{y(k-p) \cdot \theta(k)\} \neq 0 \quad \text{s\~{o} se } p \leq 0$$

Nosso prop\~{o}sito \~{e} calcular a vari\~{a}ncia de $y(k)$ em (3.31), isto significa encontrar $\gamma(0) = E\{y(k)^2\}$ que n\~{a}o pode ser determinado diretamente de (3.32), uma vez que se desconhece o valor de $\gamma(-i)$, $i=0, 1, 2, 3, \dots, n$ e de $\xi(-j)$, $j=0, 1, 2, 3, \dots, m$. Para contornar tal problema, vamos determinar inicialmente os valores de $\xi(-j)$ e posteriormente, resolver uma equa\~{c}\~{a}o linear, cujas inc\~{o}gnitas s\~{a}o os $\gamma(-i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$ extraindo da\~{i}, o valor de $\gamma(0)$.

Seja a equa\~{c}\~{a}o (3.31) multiplicada pelos valores passados do ru\~{i}do $\theta(k-j)$, $j=0, 1, 2, \dots, m$, que pode ser escrita na forma:

$$a_0 \xi(-j) = b_j \cdot \sigma_\theta^2 - \sum_{i=1}^j a_i \xi(i-j) \quad (3.33)$$

Desenvolvendo iterativamente (3.33), encontramos em cada itera\~{c}\~{a}o, um valor de $\xi(-j)$, $j=0, 1, 2, \dots, m$. Conhecido estes valores, o passo seguinte \~{e} montar uma equa\~{c}\~{a}o linear, para obter os desconhecidos $\gamma(p)$. Para tanto, tomemos (3.32) com o \~{i}ndice p variando de 0 a n , o que determina o seguinte sistema:

$$A \gamma = B \xi \quad (3.34)$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0+a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix} = A^T ,$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 \\ b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\gamma' = [\gamma(0) \ \gamma(-1) \ \dots \ \gamma(-n)] ,$$

$$\xi' = [\xi(0) \ \xi(-1) \ \dots \ \xi(-m)]$$

A solução de (3.34) é dada por:

$$\gamma = A^{-1} \cdot B \cdot \xi \tag{3.35}$$

e conseqüentemente, temos determinado $\gamma(0)$, ou seja, a variância de $y(k)$.

Na seção seguinte adotaremos a teoria apresentada aqui, em aplicação ao sistema hidráulico mostrado no capítulo I; bem como, serão abordados aspectos relativos a implementação de um algoritmo, contendo subrotinas Fortran (VAMIN, RAPOL e VARIA) para maiores detalhes, veja apêndice.

III.3. APLICAÇÃO AO SISTEMA EM ESTUDO

O Método da Decomposição estudado no capítulo I, divide o problema de controle ótimo estocástico (1.11) em dois sub-problemas, relativos à determinação ótima da Média (1.46) e da Variância (1.52) de $x(k)$ e $u(k)$. Nosso interesse recai exatamente neste último sub-problema, que é o problema de Variância Mínima, definido como segue:

$$\text{Min } E\left\{(\omega(k))^2 + \lambda \cdot (\eta(k-1))^2 / \delta(k-1)\right\} \quad (3.36)$$

sendo que $\omega(k)$ e $\eta(k-1)$, devem satisfazer:

$$(1 - z^{-1}) \omega(k) = -\eta(k-1) + \delta(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \cdot \theta(k) \quad (3.37)$$

com, $D(z^{-1})$ sendo o polinômio de ordem 10 anteriormente estimado, $C(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$ e $\theta(k)$ um ruído branco com média nula e desvio padrão $\sigma_\theta/2$ (ver cap. I). E $\delta(k-1)$ representa o controle das usinas a montante que tenham sido determinados, "a priori", e enviados imediatamente as usinas a jusante, isto é possível, em decorrência da estrutura de interconecção em árvore do sistema hidráulico em estudo. Temos ainda a considerar, o parâmetro de ponderação do controle λ cuja determinação "ótima", foi estudada no capítulo I, sendo dado por

$$\lambda^* = \frac{(\bar{x} - \underline{x})^2}{(\bar{u} - \underline{u})^2} > 0 \quad (3.38)$$

onde, a capacidade máxima e mínima para o estado x e o controle u , são dados

conhecidos de cada usina. Na seção anterior, interpretações importantes do parâmetro λ foram evidenciadas e serão consideradas nesta aplicação.

No capítulo II, utilizando técnicas computacionais de estimação de parâmetros, obtivemos como modelo dos aportes de água e afluências em cada usina, um processo autoregressivo de ordem 10 (AR(10)) cujos parâmetros estimados, são encontrados no polinômio $D(z^{-1})$ da equação (3.37). Escreveremos abaixo, os polinômios $D(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$ na sua forma padrão para as quatro usinas em questão:

$$C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \tag{3.39}$$

$$D(z^{-1}) = 1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} - \alpha_{10} z^{-10}$$

Escrevendo a equação (3.37) na forma de (3.2), temos:

$$A(z^{-1})\omega(k) = z^{-1}B(z^{-1})\eta(k) + z^{-1}D(z^{-1})\delta(k) + C(z^{-1})\theta(k) \tag{3.40}$$

ou ainda, avançando 1 passo à frente:

$$A(z^{-1})\omega(k+1) = B(z^{-1})\eta(k) + D(z^{-1})\delta(k) + C(z^{-1}) \cdot \theta(k+1) \tag{3.41}$$

onde,

$$A(z^{-1}) = 1 - (1 + \alpha_1)z^{-1} + (\alpha_2 - \alpha_1)z^{-2} + \alpha_2 z^{-3} - \alpha_{10} z^{-10} + \alpha_{10} z^{-11}$$

$$B(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_{10} z^{-10} \tag{3.42}$$

Com o conhecimento dos polinômios $A(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$, o próximo passo é determinar os polinômios $E(z^{-1})$ e $F(z^{-1})$ utilizando para isto, as equações recursivas (3.9) e (3.10), respectivamente. No entanto, considerando que o operador deslocamento λ é igual a unidade ($\lambda=1$), temos que o polinômio $E(z^{-1})$ é dado por seu termo independente $e_0 = 1$, logo

$$E(z^{-1}) = 1 \quad (3.43)$$

utilizando a equação polinomial (3.24) e considerando os resultados (3.39), (3.42) e (3.43), obtemos o polinômio $G(z^{-1})$:

$$G(z^{-1}) = -(1 + \lambda) + (\lambda + \alpha_1)z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_{10} z^{-10} \quad (3.44)$$

Tendo obtido os polinômios $E(z^{-1})$, $F(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, escrevemos a lei de controle ótima na forma:

$$\eta(k) = - \frac{F(z^{-1})}{G(z^{-1})} \omega(k) - \frac{\delta(k)}{G(z^{-1})} \quad (3.45)$$

Vamos obter agora, a equação característica para o modelo em estudo:

Considerando a equação (3.28), temos que:

$$B(z^{-1}) - \lambda \cdot A(z^{-1}) = 0$$

o que nos dá, uma equação de grau 11:

$$\begin{aligned}
 & -(1+\lambda) + [1 + (1-\lambda)\alpha_1]z^{-1} + [(1+\lambda)\alpha_2 - \alpha_1]z^{-2} + \\
 & + (1+\lambda)\alpha_{10}z^{-10} - \lambda \alpha_{10}z^{-11} = 0 \qquad (3.46)
 \end{aligned}$$

onde, as onze raízes devem estar localizadas dentro do círculo unitário, de modo a garantir a estabilidade em malha fechada do sistema. Neste estudo, no entanto, a estabilidade estará garantida para qualquer que seja o parâmetro ponderador $\lambda \geq 0$ dado, este resultado é estabelecido no seguinte teorema:

Teorema 3.1

Seja $\lambda \geq 0$, um parâmetro ponderador arbitrário e $D(z^{-1})$ um polinômio cujas raízes, encontram-se dentro do círculo unitário. Então, as raízes da equação $B(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0} A(z^{-1}) = 0$ estão igualmente dentro do círculo unitário.

Prova:

Dado $\forall \lambda \geq 0$ e o polinômio $D(z^{-1})$, obtido no capítulo anterior a partir de nossas medidas (em cada usina), temos que os polinômios da equação característica $B(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0} A(z^{-1}) = 0$, podem ser escritos como sendo:

$$\begin{aligned}
 A(z^{-1}) &= (1 - z^{-1}) \cdot D(z^{-1}) \\
 B(z^{-1}) &= -D(z^{-1})
 \end{aligned} \qquad (3.47)$$

que fornece uma equação característica, com a seguinte forma, lembrando que $b_0 = -1$.

$$-D(z^{-1}) - \lambda \cdot (1 - z^{-1}) D(z^{-1}) = 0$$

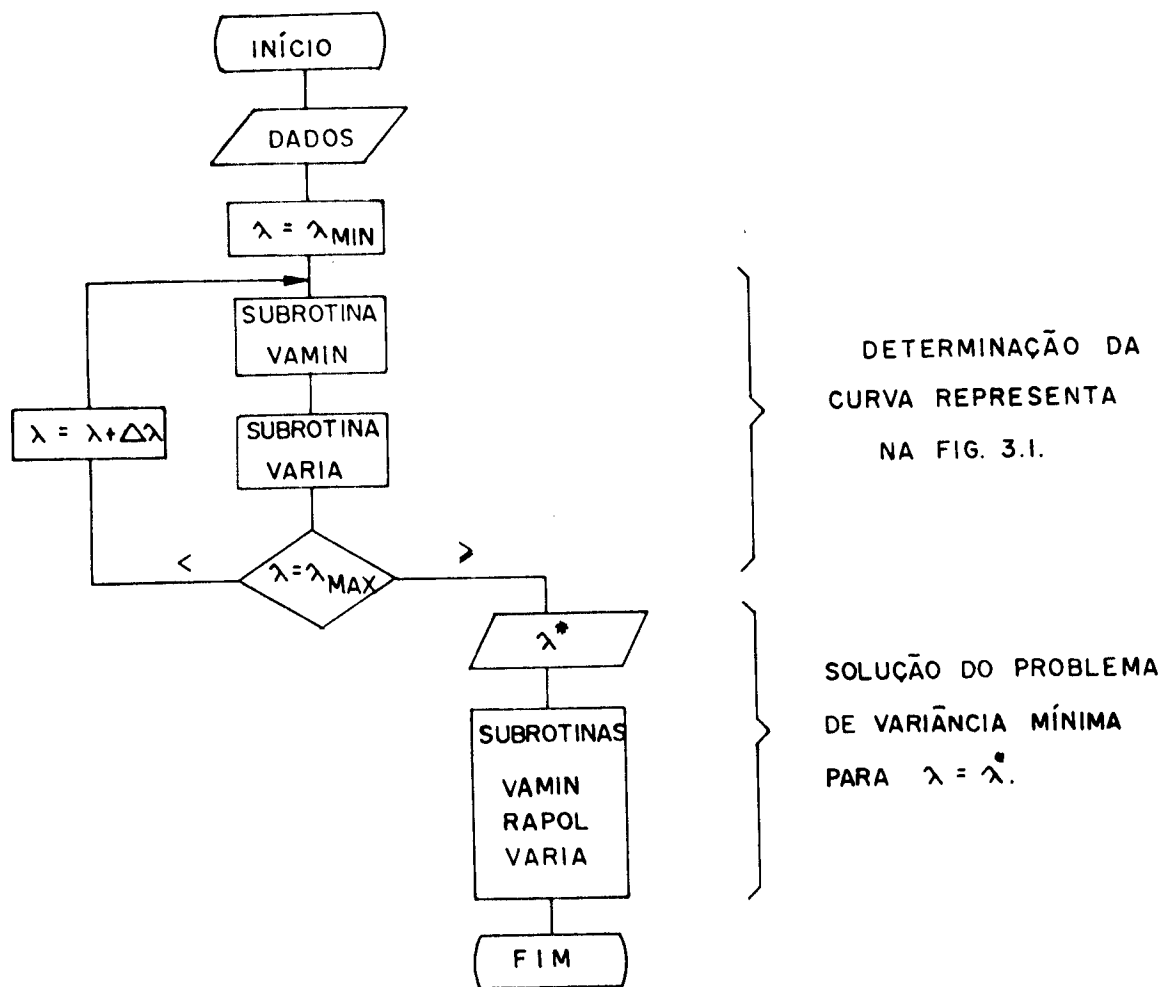
$$-D(z^{-1}) \cdot [(\lambda + 1) - \lambda z^{-1}] = 0 \quad (3.48)$$

cuja as raízes são os do polinômio $D(z^{-1})$ que é conhecido, e mais a raiz $z = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ sempre menor que 1, para qualquer que seja $\lambda \geq 0$. Uma vez que todas raízes de $D(z^{-1})$ são em módulo menores que 1, podemos concluir que as raízes do polinômio característico, estão todas dentro do círculo unitário o que garante, a estabilidade do sistema em malha fechada.

c.q.d.

O propósito final deste estudo é alcançado, pela determinação da variância do estado $w(k)$ e do controle $\eta(k)$. Neste sentido foi desenvolvido uma subrotina denominada VARIA, que é baseada inteiramente nos resultados apresentados na seção III.2.

A teoria vista na seção anterior foi de grande importância, pois possibilitou implementarmos um programa conversacional muito versátil. O programa em questão, tem como dados de entrada: as ordens e os coeficientes dos polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$, bem como o operador avanço ℓ , o valor mínimo e máximo do parâmetro λ e o desvio padrão do ruído. Além disso, sendo o programa do tipo Conversacional, em dado instante de processamento, deve-se fornecer o valor ótimo do parâmetro λ da usina em estudo (3.38). Com estes dados, o programa está apto a fornecer como saída: uma Tabela que relaciona a variância do estado com a do controle, quando temos λ variando entre seu valor máximo e mínimo. E para o λ^* ótimo dado, obtemos os polinômios $E(z^{-1})$, $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$ e o polinômio característico juntamente com suas raízes. Ainda é fornecido os desvios na saída, no controle e no critério. É o seguinte, o fluxograma do programa desenvolvido:



Como mostra o fluxograma, o programa é constituído de um pacote de três sub-rotinas: a primeira delas, ou seja, a subrotina VAMIN, calcula os polinômios $E(z^{-1})$, $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$ e $\Delta(z^{-1})$. A subrotina RAPOL, determina as raízes do polinômio característico. E a subrotina VARIA, que calcula os desvios para saída, controle e critério relacionados a cada $\lambda \geq 0$ dado.

No apêndice, apresentamos o programa completo desenvolvido, o qual foi utilizado para a obtenção dos resultados fornecidos a seguir.

III.4. RESULTADOS OBTIDOS PARA O SISTEMA EM ESTUDO

Nesta seção, nosso propósito é mostrar os principais resultados

obtidos, a partir da aplicação ao sistema em estudo do programa conversacional, descrito anteriormente. Para facilitar o entendimento dos resultados, estes serão apresentados em forma de curvas e tabelas.

Inicialmente, mostramos a seguir, um conjunto de quatro curvas correspondentes respectivamente, as usinas de São Simão, Marimbondo, Água Vermelha e Ilha Solteira. Devemos interpretá-las, como sendo o comportamento do desvio padrão da saída (estado ω) com relação ao da entrada (controle η), quando variamos o parâmetro de ponderação $\lambda \geq 0$.

É fácil observar a partir destas curvas, o comportamento do desvio na saída (ω) e no controle (η), quando o parâmetro λ varia. Note que a curva decai assintoticamente, quando λ tende a valores próximos de zero; neste caso, temos um pequeno desvio na saída, em relação a grandes variações no controle. No outro extremo, temos grandes desvios na saída, em oposição a pequenos desvios na entrada (controle) ponderado por altos valores, do parâmetro λ . Este comportamento, nos leva a pensar numa solução do compromisso, que neste caso é dada pela escolha ótima do parâmetro λ em (3.38). Nos gráficos acima, a solução ótima encontrada para λ^* , σ_η , σ_ω , está assinalada por linhas tracejadas. Estes valores, são dados para cada usina na ta bela 3.1.

TABELA 3.1. - VALORES ÓTIMOS OBTIDOS PARA CADA USINA

USINAS	λ^*	$\sigma_\eta (10^6 m^3)$	$\sigma_\omega (10^6 m^3)$
SÃO SIMÃO	1.294	669	926
MARIMBONDO	0.861	499	483
A. VERMELHA	1.088	189	223
I. SOLTEIRA	0.243	874	453

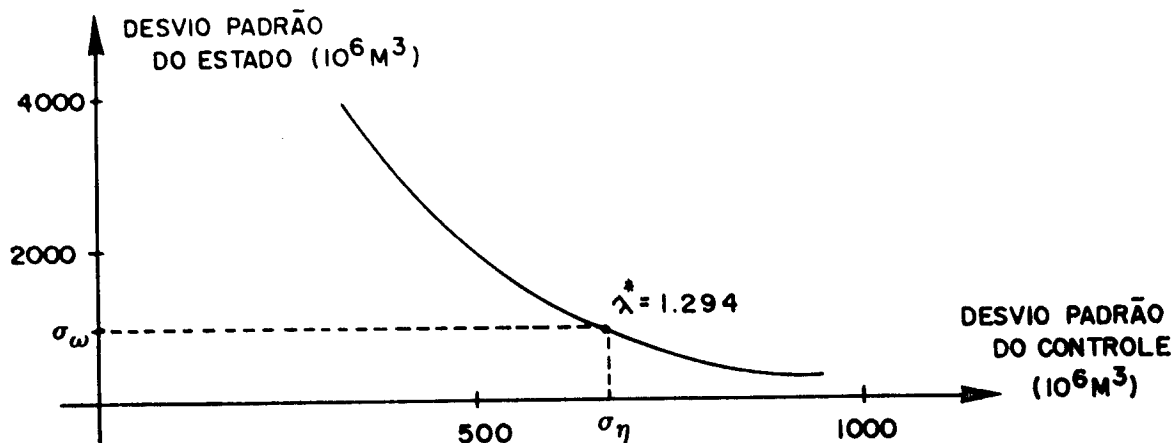


Fig. III.2. - Solução ótima de (3.36) para usina São Simão.

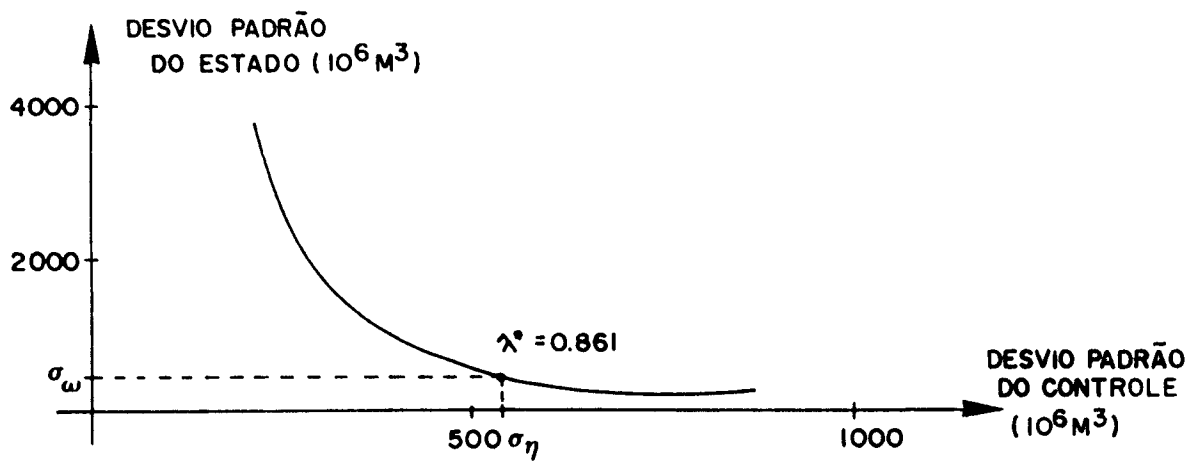


Fig. III.3. - Solução ótima de (3.36) para a usina Marimbondo.

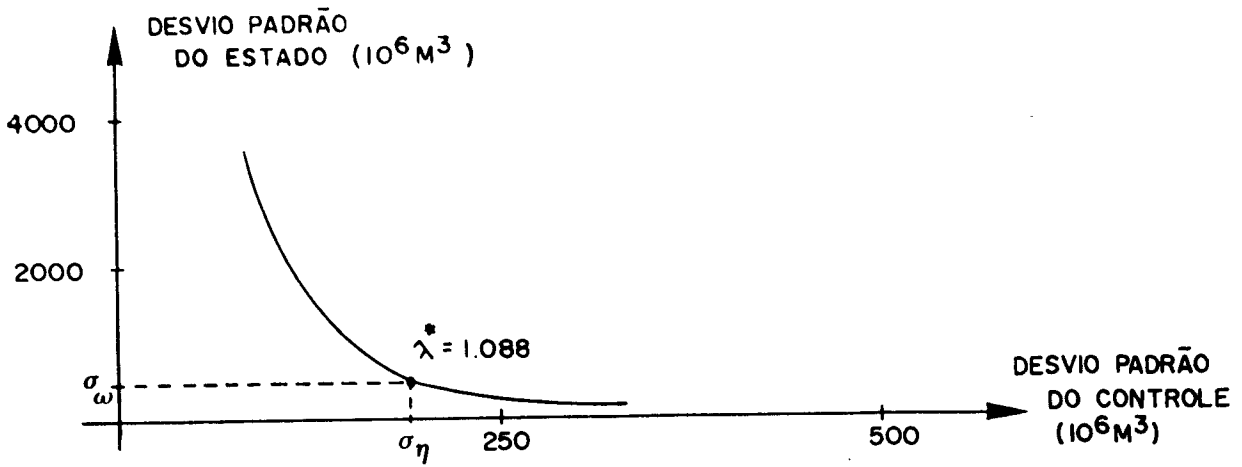


Fig. III.4. - Solução ótima de (3.36) para usina Água Vermelha.

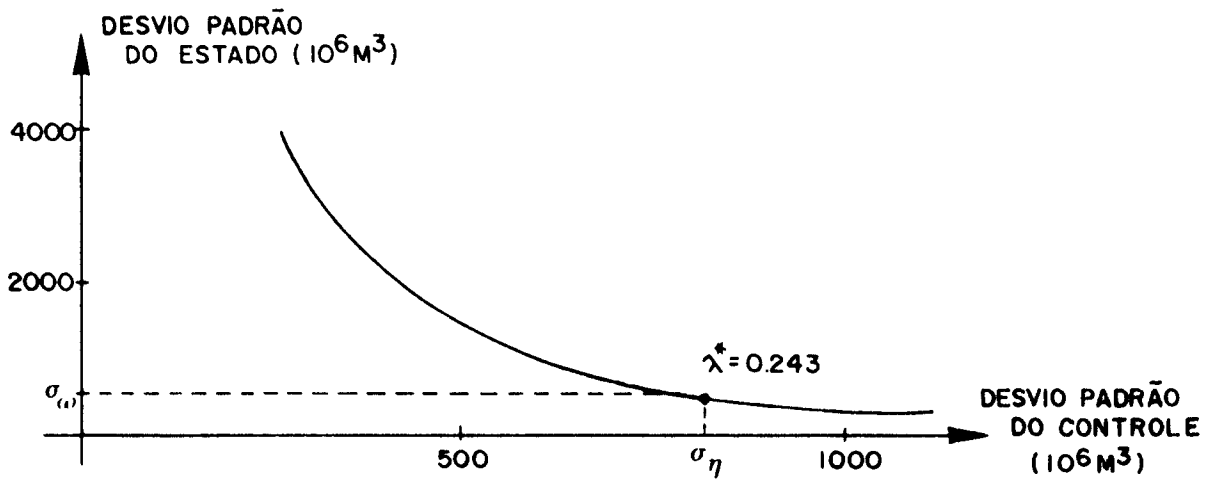


Fig. III.5. - Solução ótima de (3.36) para usina I. Solteira.

Como visto anteriormente, a obtenção da lei de controle ótimo (3.45) envolve a determinação dos seguintes polinômios : $F(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$, cujo modelo padrão para as quatro usinas em questão é dado por:

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + f_9z^{-9} + f_{10}z^{-10} ,$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1z^{-1} + g_2z^{-2} + g_{10}z^{-10}$$

os coeficientes destes polinômios obtidos para cada uma das usinas, são fornecidos nas tabelas abaixo:

TABELA 3.2. - COEFICIENTES DO POLINÔMIO $F(z^{-1})$

COEF. USINAS	f_0	f_1	f_2	f_9	f_{10}
SÃO SIMÃO	2.58	-0.55	-0.03	-0.09	0.09
MARIMBONDO	2.72	-0.86	0.14	0.08	-0.08
A. VERMELHA	2.64	-0.64	0.01	0.10	-0.10
I. SOLTEIRA	2.41	-0.40	-0.01	0.11	-0.11

TABELA 3.3. - COEFICIENTES DO POLINÔMIO $G(z^{-1})$

COEF. USINAS	g_0	g_1	g_2	g_{10}
SÃO SIMÃO	-2.29	-0.70	0.03	0.09
MARIMBONDO	-1.86	-0.14	-0.14	0.08
A. VERMELHA	-2.09	-0.45	-0.01	0.10
I. SOLTEIRA	-1.24	0.17	0.01	0.11

A estabilidade do sistema em malha fechada é uma característica importante de nosso estudo que depende unicamente, do posicionamento das raízes da equação característica (3.28) dentro do círculo unitário.

Nesta aplicação, este posicionamento se dará sempre dentro deste círculo, garantindo a estabilidade, como nos mostra o teorema 3.1. É fornecida abaixo, uma tabela contendo os coeficientes do polinômio característico, cuja forma padrão para as quatro usinas, é dada em (3.46).

TABELA 3.4. - COEFICIENTES DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

COEF. USINAS	q_0	q_1	q_2	q_3	q_{10}	q_{11}
SÃO SIMÃO	-2.29	2.63	-0.68	-0.04	-0.03	0.12
MARIMBONDO	1.86	2.21	-0.88	0.12	0.16	-0.07
A. VERMELHA	-2.09	2.42	-0.71	0.01	0.21	-0.11
I. SOLTEIRA	-1.24	0.76	-0.09	0.00	0.14	-0.03

Os resultados acima, representam a solução do problema de variância mínima (3.36) e (3.37), que corresponde ao conhecimento das características estocásticas no caso, a variância das variáveis aleatórias gaussianas $\eta(k)$ e $\omega(k)$.

III.5. CONCLUSÃO

Neste capítulo, podemos destacar três fases importantes na solução do problema de variância mínima. Na primeira fase fizemos um estudo teó

rico que basicamente, correspondeu à obtenção dos coeficientes dos polinômios utilizados, para definir a lei de controle ótimo capaz de satisfazer a minimização do critério dado. Além disso, estudamos o problema de estabilidade do sistema em malha fechada, bem como a influência do parâmetro λ , no posicionamento das raízes características deste sistema.

A segunda fase é uma aplicação direta, dos resultados estudados na primeira fase, ao nosso sistema particular - conjunto de quatro usinas hidráulicas em forma de árvore. Finalmente na última fase fornecemos os principais resultados obtidos computacionalmente, na fase dois.

Com isso determinamos a variância mínima (otimizada) da saída w (estado) e da entrada η (controle), para o sistema hidráulico em estudo. Este conhecimento, será de grande importância na solução ótima do problema da média (1.46), e conseqüentemente, na solução do problema de controle ótimo estocástico (1.11) de usinas hidráulicas com representação individualizada.

CONCLUSÃO GERAL

CONCLUSÃO GERAL

Neste trabalho foi apresentado um novo método, para resolver problemas de controle ótimo estocástico de grande dimensão. Esta metodologia, vem preencher uma lacuna em problemas cujas restrições estocásticas, são de igualdade e sua natureza, não permite interpretações econômicas - como são os problemas hidráulicos, por exemplo.

Basicamente, o método decompõe o problema em duas partes: sendo o primeiro um problema de Variância Mínima cuja solução, fornece uma lei de controle ótimo em malha fechada. Este problema emerge da necessidade de maximizar a probabilidade das variáveis de estado e controle, supostas gaussianas, satisfazerem certas restrições físicas.

A segunda parte procura resolver o problema da Média cuja solução, fornece as trajetórias médias preferenciais (ótimas). Esta solução depende dos resultados obtidos na parte 1, e corresponde a obtenção do controle em Malha Aberta.

Em termos aplicativos ao sistema hidráulico, temos que uma característica deste método é determinar uma lei de controle em malha fechada, para cada uma das usinas. Comparativamente, isto não é possível de ser realizado utilizando técnicas de Programação Dinâmica Estocástica, a menos que se tome uma representação equivalente, para todo parque hidráulico em consideração.

Com vistas a solução do problema acima mencionado, foram desenvolvidos programas cuja característica adotada em sua construção, foi torná-los bastante geral, de modo a serem utilizados em diferentes problemas. Estes programas são: de análise e modelamento de séries temporais, onde seu aspecto conversacional permite ao usuário, decidir pela análise estatística

dos resultados, que tipo de modelo adotar. Temos ainda, um programa para solução do problema de variância mínima cuja característica principal, é o fornecimento do desvio ótimo para o estado e para o controle. Todos programas são encontrados no apêndice.

Este trabalho deixa alguns pontos em aberto que certamente, devem merecer estudos futuros:

- a) Desenvolvimento de um programa computacional para resolver o problema de obtenção das trajetórias médias ótimas.
- b) Construção de um simulador do processo estocástico para comprovar o desempenho estatístico da lei de controle proposta.
- c) Aplicação da metodologia desenvolvida num sistema de grande porte e comparar com a política de controle em uso atualmente no país.
- d) Estudo teórico da introdução de novas medidas obtidas mensalmente, no modelamento dos aportes de água nas usinas hidráulicas para a obtenção de uma lei de controle mais precisa (Self Tunning).

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- AMARAL W.C. - Identificação Recursiva de Sistemas Multivariáveis - Tese de Doutorado, FEC/UNICAMP, 1981.
- ASTROM K.J. - Introduction to Stochastic Control Theory - Academic Press, New York, 1970.
- AVRIEL M. - Nonlinear Programming; Analysis and Methods - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976.
- BERNUSSOU J. and GEROMEL J.C. - An Easy Way to Find Gradient Matrix of Composite Matricial Functions - IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, April 1981.
- BOX G.E.P. and JENKINS G.M. - Time Series Analysis-Forecasting and Control - Holden-Day, S. Francisco, 1970.
- CLARKE D.W., COPE S.N. and GAWTHROP P.J. - Feasibility Study of the Application of Microprocessor to Self-Tuning Controlers - Report 1137, Oxford, 1975.
- CASTRUCCI P.B.L. e GARCIA J.D.G. - Linear Modelling and Optimal Control Applied to An Indexing Process - Automática, Vol. 17, Nº 1, 1981.
- GEOFFRION A.M. - Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Application - Oriented Development, SIAM Review 13, pp. 1-37, 1971.

- GEROMEL J.C. e BAPTISTELLA L.F.B. - Feasible Direction Method for Large-Scale Nonconvex Programs : Decomposition Approach - Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 35, Nº 2, October 1981.
- GEROMEL J.C., LUNA H.P.L. e SIZENANDO SILVA L.C. - Saving Fuel for Electrical Energy Through Optimal Control of Hydraulic Resources - IFAC Congress VIII, Vol. XX, Kyoto, August 1981.
- GEROMEL J.C. e LUNA H.P.L. - Operação Ótima de Sistemas Hidrotérmicos : Um Método Primal de Solução - XIII SBPO, Vol. 1, R. de Janeiro, Outubro de 1980.
- GEROMEL J.C. e SALVIANO SILVA F.O. - Controle Ótimo de Recursos Hidráulicos - III Encontro Nacional de Automática, SBPC, Campinas, Julho 1982-A.
- GEROMEL J.C. e SALVIANO SILVA F.O. - Optimal Control Policy of Hydraulic Resources - PART II : Stochastic Control - to appear - B.
- GIMENO L. - Identificação e Controle Adaptativo - Anais do 1º SICOP, Rio de Janeiro, Maio 1981.
- LASDON L.S. - Duality and Decomposition in Mathematical Programming - IEEE Trans. on Systems Science and Cybernetics, SSC-4(2), 1968.
- LYRA F.O.C. - Otimização da Escala de Geração em Sistemas de Potência Hidrotérmicos - Tese de Mestrado, FEC/UNICAMP, Julho de 1979.

LYRA F.O.C., FRIEDLANDER A. e GEROMEL J.C. - Coordenação da Operação Energética no Médio São Francisco por um Método Gradiente Reduzido - Anais do 4º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Rio de Janeiro, Setembro 1981.

MENDEL M.J. - Discrete Techniques of Parameter Estimation - Marcel Dekker, INC., New York, 1973.

PRONOVOST R. and BOULVA - Long-Range Operation Planning of a Hydrothermal Systems Modelling and Optimization - Canadian Electrical Association, Spring Meeting, 1978.

SALVIANO SILVA F.O. e GEROMEL J.C. - Optimal Control Policy of Hydraulic Resources - PART I : Linear Modelling of River Inflows - to appear - A.

APENDICES

APÊNDICE - A1

PROGRAMA GERAL PARA MODELAMENTO LINEAR DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

```

C      *****
C      PROGRAMA PARA CALCULAR O MODELO ARMA
C      DETERMINA:
C      * FUNCAO DE AUTOCORRELACAO
C      * FUNCAO DE AUTOCORRELACAO PARCIAL
C      * ESTADO INICIAL DOS PARAMETROS
C      (METODO NEWTON-RAPHSON)
C      * ESTIMACAO OTIMA - MAX. VEROSSIMILHANCA
C      (METODO DE DECOMPOSICAO-MIXTA)
C      * ANALISE SERIE-TEMPORAL DO RESIDUO
C      NOTA:
C      * ESTE PROGRAMA E CONVERSACIONAL ENTAO
C      O TERMINAL EM USO DEVERA SER ASSINA-
C      LADO COM "IN" DADO ABAIXO.
C      *****
C      PROGRAMA PRINCIPAL
C
DIMENSION ALFA(0/12),BETA(0/12),CORR(0/25),FI(25)
DIMENSION G(-12/500),H(12,50),YM(12),V(-12/500)
DIMENSION CORR1(0/25),DALFA(12),DBETA(12),SIGMA(12),RMD(12)
REAL ICO
IN =38
NA=24
NAP=12
N=12
M=40
NM=N*M
WRITE(IN,5)
5  FORMAT(////,10X,'NO. DO ARQUIVO P/ USINA A SER MODELADA:'5)
   READ(IN,6) IRI
6  FORMAT(G)
   DO 10 J = 1,M
10  READ(IRI,11)(W(K,J),K=1,N)
11  FORMAT(12G)
   WRITE(IN,12)
12  FORMAT(///,10X,'VOCE QUER O MODELO ESTACIONARIO? (SIM 1,
   ' NAO 0)'3)
   READ(IN,13) I
13  FORMAT(G)
   DO 15 J = 1,M
   DO 15 K = 1,N
   W(K,J)=2.5924*H(K,J)
15  CONTINUE
   DO 20 K = 1,N
   YM(K)=0.
   DO 19 J = 1,M
19  YM(K)=YM(K)+W(K,J)
20  YM(K)=YM(K)/M
   SGMA = 0.
   DO 22 K = 1,N
   SIGMA(K)=0.
   DO 21 J = 1,M
21  SIGMA(K)=SIGMA(K)+(W(K,J)-YM(K))**2
   SGMA = SGMA + SIGMA(K)
22  SIGMA(K)=SQRT(SIGMA(K)/M)
   SGMA = SQRT(SGMA/M)
   IF(1.E0,0) GO TO 510
   DO 500 K = 1,N
500  SIGMA(K) = SGMA

```

```
510 DO 23 K = 1, N
23 RMD(K)=Y(K)/SIGMA(K)
WRITE(10,24)
24 FORMAT(//,5X,'VALOR MEDIO DE Y(K)',5X,'DESVIO PADRAO DE Y(K)
*, 'TRAZAO MEDIA/DESVIO')
DO 100 K = 1, N
100 WRITE(10,101) Y(K),SIGMA(K),RMD(K)
101 FORMAT(11X,F7.2,10X,F7.2,18X,F6.3)
DO 25 J = 1, N
DO 25 K = 1, N
I=(J-1)*N+K
G(I)=(W(K,J)-Y(K))/SIGMA(K)
25 CONTINUE
26 CALL ANSWER(G,MM,NA,NAP,CORR,F1,SY,QA,ICU)
CALL PLOT1(CORR,F1,SY,QA,ICU,NA,NAP,I*,1)
200 WRITE(10,30)
30 FORMAT(//,10X,'NO. DE PAR. AUTO-REGRESSIVOS:'S)
READ(10,31)NAR
31 FORMAT(G)
WRITE(10,35)
35 FORMAT(15X,'NO. DE PAR. MEDIA-NOVEL:'S)
READ(10,36)NMA
36 FORMAT(G)
CALL ESTPAR(NAR,NMA,CORR,SY,ALFA,BETA,SV)
WRITE(10,40) SV
40 FORMAT(//,10X,'DESVIO ESTIMADO INICIAL:',/,18X,'SV=',F6.2)
IF(SV.LT.SY) GO TO 60
WRITE(10,50)
50 FORMAT(///,10X,'MODELO PROPOSTO REJEITADO, *SV > SY*')
GO TO 90
60 WRITE(10,61)
61 FORMAT(//,10X,'PARAMETROS INICIAIS')
IF(NAR.EQ.0.AND.NMA.EQ.0) GO TO 67
IF(NAR.EQ.0) GO TO 64
DO 62 I = 1,NAR
62 WRITE(10,63)I,ALFA(I)
63 FORMAT(10X,'ALFA(',12,')=',F6.3)
64 IF(NMA.EQ.0) GO TO 67
DO 65 I = 1,NMA
65 WRITE(10,66)I,BETA(I)
66 FORMAT(10X,'BETA(',12,')=',F6.3)
67 CONTINUE
WRITE(10,70)
70 FORMAT(///,10X,'RESULTADOS DA OTIMIZ. DOS PAR. DO MODELO:')
CALL MAXVER(G,MM,NAP,NMA,ALFA,BETA,DALFA,DBETA,SV)
WRITE(10,80) SV
80 FORMAT(//,10X,'DESVIO ESTIMADO UTIMO:',/,16X,'SV=',F6.2)
CALL PLOT2(ALFA,BETA,DALFA,DBETA,NAR,NMA,I*)
DO 83 I = 1,(NAR+NMA)
IF(I.GT.NAR) GO TO 82
IF(ABS(ALFA(I)).LT.DALFA(I)) ALFA(I)=0
GO TO 83
82 IF(ABS(BETA(I-NAR)).LT.DBETA(I-NAR)) BETA(I-NAR)=0.
83 CONTINUE
WRITE(10,89)
89 FORMAT(//,10X,'QUER MAIS INFORMACAO SOBRE O RUIDO?(SIM 1'
*, ' = NAO 0)'S)
READ(10,91) I
91 FORMAT(G)
CALL RESIDUO(G,V,ALFA,BETA,NAR,NMA,MM)
```

```
CALL ANSER(Y, NM, NA, NAP, CURRI, FI, SY1, QA, ICO)
CALL PLOT1(CURRI, FI, SY1, QA, ICO, NA, NAP, Iw, I)
90 PAUSE
GO TO 200
STOP
END
```

C
C ANSER - SUBROTINA DE ANALISE DE SERIES TEMPORAIS
C

```
SUBROUTINE ANSER(Y, NM, NA, NAP, R, FI, SY, QA, ICO)
DIMENSION Y(-12/500), R(0/25), FI(25), FIA(25, 25)
REAL ICO
CO=0.
DO 1 I = 1, NM
1 CO=CO+Y(I)**2
CO=CO/NM
DO 3 I = 0, NA
R(I)=0.
DO 2 J = 1, NM-I
2 R(I)=R(I)+Y(J)*Y(J+I)
R(I)=R(I)/NM
R(I)=R(I)/CO
3 CONTINUE
FIA(1, 1)=R(1)
FIA(2, 1)=R(1)*(1.-R(2))/(1.-R(1)**2)
FIA(2, 2)=(R(2)-R(1)**2)/(1.-R(1)**2)
IF(NAP.LE.2) GO TO 7
DO 4 I = 2, NAP-1
F1=0.
F2=0.
DO 5 J = 1, I
5 F1=F1+FIA(I, J)*R(I+1-J)
F2=F2+FIA(I, J)*R(J)
FIA(I+1, I+1)=(R(I+1)-F1)/(1.-F2)
DO 6 J = 1, I
6 FIA(I+1, J)=FIA(I, J)-FIA(I+1, I+1)*FIA(1, I+1-J)
4 CONTINUE
7 DO 8 I = 1, NAP
8 FI(I)=FIA(I, 1)
SY=SQRT(CO)
QA=0.
DO 9 I = 1, NAP
9 QA=QA+R(I)**2
QA=NA*QA
ICO=2./SQRT(FLOAT(NM))
RETURN
END
```

C
C ESTPAR - SUBROTINA ESTIMACAO DE PARAMETROS.
C

```
SUBROUTINE ESTPAR(NAR, NMA, R, SY, ALFA, BETA, SV)
DIMENSION R(0/25), ALFA(0/12), BETA(0/12), LL(13), MM(13)
DIMENSION AA(150), RR(25), CL(0/12), PAL(13)
DIMENSION TACA(13), F(201), F(13), ALFAUX(12)
ALFA(0)=-1.
DO 1 J = 0, NMA
1 CL(J)=R(J)*SY**2
IF(NAR.EQ.0)GO TO 100
DO 2 J = 1, NAR
RR(J)=R(NMA+J)
```

```

2  DO 2 I = 1, NAR
    L=(J-1)*NAR+I
    K=IABS(NMA+I-J)
    AA(L)=R(K)
    CONTINUE
    CALL MINV(AA, NAR, D, LL, MM)
    CALL GMPRD(AA, KK, ALFAUX, NAR, NAR, 1)
    DO 20 I = 1, NAR
20  ALFA(I)=ALFAUX(I)
    SV=1.
    DO 5 I = 1, NAR
5    SV=SV-ALFA(I)*R(I)
    SV=SV*SQRT(SV)
    IF(NMA.EQ.0) GO TO 200
    DO 3 J = 0, NMA
    CL(J)=0.
    DO 4 I = 0, NAR
    DO 4 K = 0, NAR
    L=IABS(J+I-K)
4    CL(J)=CL(J)+ALFA(I)*ALFA(K)*R(L)
    CL(J)=CL(J)*SV**2
    CONTINUE
3    DO 6 I = 1, NMA+1
100  TAL(I)=0.
    IF(I.EQ.1) TAL(I)=SQRT(CL(I-1))
6    CONTINUE
99  KK=0
    DO 8 J = 0, NMA
    F(J+1)=-CL(J)
    DO 7 I = 0, NMA-J
7    F(J+1)=F(J+1)+TAL(I+1)*TAL(I+J+1)
    IF(ABS(F(J+1)).LT.0.001) KK=KK+1
8    CONTINUE
    IF(KK.EQ.(NMA+1)) GO TO 300
    DO 9 J = 1, NMA+1
    DO 9 I = 1, NMA+1
    K=(J-1)*(NMA+1)+I
    T(K)=0.
    IF(I.LE.(NMA-J+2)) T(K)=TAL(J+I-1)
    IF(I.LE.J) T(K)=T(K)+TAL(J-I+1)
9    CONTINUE
    CALL MINV(T, NMA+1, D, LL, MM)
    CALL GMPRD(T, F, TALA, NMA+1, NMA+1, 1)
    CALL GMSUB(TAL, TALA, TAL, NMA+1, 1)
    GO TO 99
300  DO 10 J = 2, NMA+1
    BETA(J-1)=-TAL(J)/TAL(1)
10  CONTINUE
    SV=TAL(1)
200  RETURN
    END

```

C
C RESIDUO - SUBROTINA PARA CALCULO DO RUIDO
C

```

SUBROUTINE RESIDUO(Y, V, ALFA, BETA, NAR, NMA, NM)
DIMENSION Y(-12/500), V(-12/500), ALFA(0/12), BETA(0/12)
DO 10 I = 1-NAR, 0
10  Y(I)=0.
DO 20 I = 1-NMA, 0
20  V(I)=0.

```

```
DU 50 K = 1, NM
V(K)=Y(K)
DU 50 J = 1, NAR
V(K)=V(K)-ALFA(J)*Y(K-J)
30 CONTINUE
IF(NMA.EQ.0) GO TO 50
DU 40 J = 1, NMA
V(K)=V(K)+BETA(J)*V(K-J)
40 CONTINUE
50 CONTINUE
RETURN
END
```

C
C PLOT1 - SUBROTINA PARA ESCRITURA DOS PARAMETROS DA SERIE
C

```
SUBROUTINE PLOT1(CORR,FI,RCOR0,QA,ICO,NA,NAP,IW,I)
DIMENSION CORR(0/25),FI(25)
REAL ICO
IF(I.EQ.0)GO TO 100
WRITE(IW,1)
1 FORMAT(/,10X,'CORRELACAO ENTRE AS MEDIDAS.')
WRITE(IW,2) RCOR0
2 FORMAT(17X,'RCOR0 =',F10.3)
DU 3 I = 0, NA
3 WRITE(IW,4) I,CORR(I)
4 FORMAT(17X,'CORR(',I2,')=',F10.3)
WRITE(IW,5)
5 FORMAT(/,10X,'FUNCAO AUTOCORR. PARCIAL:')
DU 6 I = 1, NAP
6 WRITE(IW,7) I,FI(I)
7 FORMAT(17X,'FI(',I2,')=',F10.3)
100 WRITE(IW,8)
8 FORMAT(/,10X,'INDICES P/ TESTE DO MODELO:')
WRITE(IW,9) QA,ICO
9 FORMAT(19X,'QA =',F7.3,/,19X,'ICO=',F7.3)
RETURN
END
```

C
C PLOT2 - SUBROTINA PARA IMPRESSAO DOS PARAMETROS OTIMOS
C

```
SUBROUTINE PLOT2(A,B,C,D,L,K,IW)
DIMENSION A(0/12),B(0/12),C(12),D(12)
IF(L.EQ.0.AND.K.EQ.0) GO TO 7
WRITE(IW,1)
1 FORMAT(/,10X,'PARAMETROS OTIMOS',6X,'PRECISAO')
IF(L.EQ.0) GO TO 4
DU 2 I = 1, L
2 WRITE(IW,3) I,A(I),C(I)
3 FORMAT(10X,'ALFA(',I2,')=',F6.3,7X,F6.3)
IF(K.EQ.0) GO TO 7
DU 5 I = 1, K
5 WRITE(IW,6) I,B(I),D(I)
6 FORMAT(10X,'BETA(',I2,')=',F6.3,7X,F6.3)
7 RETURN
END
```

C
C SUBROTINA MAXVER - OTIMIZACAO DOS PARAMETROS
C

```
SUBROUTINE MAXVER(G,NH,NAR,NMA,ALFA,BETA,DALFA,DBETA,SV)
DIMENSION G(-12/500),PI(-12/500),ALFA(0/12),BETA(0/12)
```

```
DIMENSION AMI(500), ZN(6000), ZNT(6000), Y(500), GAMA(24)
DIMENSION AUX1(100), AUX2(24), DL(12), KK(12)
DIMENSION DALFA(12), DBETA(12)
DO 1 I = 1, NM
1 AMI(I)=0.
CALL RESIDU(G, PI, ALFA, BETA, NAR, NMA, NM)
NP=NAR+NMA
100 DO 3 J = 1, NP
DO 3 I = 1, NM
K=(J-1)*NM+1
IF(J.GT.NAR) GO TO 2
ZN(K)=G(I-J)
GO TO 3
2 ZN(K)=-PI(I-J+NAR)
3 CONTINUE
DO 4 I = 1, NM
4 Y(I)=G(I)+AMI(I)
CALL GMTRA(ZN, ZNT, NM, NP)
CALL GMPRD(ZNT, ZN, AUX1, NP, NM, NP)
CALL MINV(AUX1, NP, D, DL, KK)
CALL GMPRD(ZNT, Y, AUX2, NP, NM, 1)
CALL GMPRD(AUX1, AUX2, GAMA, NP, NP, 1)
CALL GMPRD(ZN, GAMA, ZNT, NM, NP, 1)
DO 5 I = 1, NM
5 Y(I)=AMI(I)+(G(I)-ZNT(I))
DO 7 I = 1, NM
PI(I)=G(I)-ZNT(I)
AMI(I)=0.
IF(NMA.EQ.0) GO TO 7
DO 6 J = 1, NMA
IF((I+J).GT.NM) GO TO 6
AMI(I)=AMI(I)+Y(I+J)*GAMA(NAR+J)
6 CONTINUE
7 CONTINUE
TEST=0.
DO 8 I = 1, NM
8 TEST=TEST+AMI(I)*(G(I)-ZNT(I)-PI(I))
TEST=2.*TEST/FLDRT(NM)
IF(TEST.GE.0.001) GO TO 100
DO 9 I = 1, NP
IF(I.LE.NAR) ALFA(I)=GAMA(I)
BETA(I-NAR)=GAMA(I)
9 CONTINUE
SV=0
DO 10 I = 1, NM
10 SV=SV+(G(I)-ZNT(I))*2
SV=SQRT(SV/FLDRT(NM))
DO 11 I = 1, NP
K=(I-1)*NP+1
IF(I.LE.NAR) DALFA(I)=SV*SQRT(AUX1(K))
DBETA(I-NAR) = SV*SQRT(AUX1(K))
11 CONTINUE
RETURN
END
```


APÊNDICE - A2

PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VARIÂNCIA MÍNIMA

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

 NOTA:
 * ESTE PROGRAMA FORNECE UMA TABELA QUE MOSTRA A VARIANCIA DE Y EM RELACAO A VARIANCIA DO CONTROLE U QUANDO VARIAMOS LAMBDA EM TORNO DE SEU VALOR OBTIDO OFF-LINE.

- * ESTE PROGRAMA DETERMINA.
 1. COEFICIENTES DOS POLINOMIOS E, F, G
 2. POLINOMIO CARACTERISTICO
 3. RAIZES DO POLINOMIO CARACTERISTICO
 4. DESVIOS ESTACIONARIOS
 (NA SAIDA, NO CONTROLE, NO CRITERIO)

OBS:
 * ESTE PROGRAMA E CONVERSACIONAL ENTAO O TERMINAL EM USO DEVERA SER ASSINALADO COM "IW" DADO ABAIXO.

PROGRAMA PRINCIPAL

```

DIMENSION A(25),B(25),C(25),E(12),F(12),G(25),POL(21),AMOD(21)
DIMENSION RRE(21),RIM(21)
REAL LAMBDA,LMAX,LMIN
IK=46
IW=38
READ(IR,1)IA,NB,NC,NK,LMIN,LMAX,NM,SV
1  FORMAT(8G)
READ(IR,2)(A(I),I=1,NA+1)
READ(IR,2)(B(I),I=1,NB+1)
READ(IR,2)(C(I),I=1,NC+1)
2  FORMAT(12G)
IF(NC.EQ.NA) GO TO 4
DO 3 I = NC+2,NA+1
3  C(I)=0.
4  NI=NA+NK-1
  NZ=NA-1
  LAMBDA=LMIN
  DELTA=(LMAX-LMIN)/NM
  WRITE(IW,94)
94  FORMAT(//,10X,'NOTA: ',/,10X,' * TODOS POLINOMIOS IMPRESSOS TEM
  * SEUS CO- ',/,10X,' EFICIENTES DISPOSTOS EM ORDEN CRESCENTE')
  WRITE(IW,95)
95  FORMAT(//,10X,' * ORDEN DOS POLINOMIOS EM ESTUDO: ',/,21X,'# '
  * 'A(NA), B(NB), C(NC)',/,21X,' F E(NK-1), F(NA-1)',/,21X,'# '
  * 'G(NC OU NB+NK-1)',/,21X,'# POL(NA OU NB)')
  WRITE(IW,96)
96  FORMAT(//,10X,' * TERMOS INDEPENDENTES: ',/,21X,'# A(1)=C(1)= '
  * 'E(1)=1',/,21X,'# B(1)=0, F(1)=0, G(1)=0')
  WRITE(IW,97) NA,NB,NC,NK,LMIN,LMAX,SV
97  FORMAT(//,10X,' DADOS: ',/,10X,' NA= ',12,/,10X,' NB= ',12,/,10X,'
  * ' NC= ',12,/,10X,' NK= ',12,/,10X,' LMIN= ',F0.3,/,10X,' LMAX= ',F0.3
  * /,10X,' SV= ',F0.3,' (DESVIO)')
  WRITE(IW,98)
98  FORMAT(//,10X,' LAMBDA',5X,' VARIANCIA Y',5X,' VARIANCIA U')
  IF(LAMBDA.GT.LMAX) GO TO 99
  KK=NA
  IF(LAMBDA.EQ.0.)KK=NB
  CALL VAMIN(NA,NB,NK,LAMBDA,A,B,C,E,F,G,POL)
  
```

```

CALL VARIA(G,N1,POL,KK,SV,SY)
CALL VARIA(F,N2,POL,KK,SV,SU)
VARI=SY**2
VARU=SU**2
WRITE(IN,7) LAMBDA,VARY,VARU
7  FORMAT(15X,F6.3,6X,F10.4,6X,F10.4)
LAMBDA=LAMBDA+DELTA
GO TO 6
99  WRITE(IN,100)
100  FORMAT(/,10X,'PARA QUAL VALOR DE LAMBDA VOCE QUER A'
*   ' SULOCAU',/,10X,'DO PROBLEMA DE VARIANCIA MINIMA? LAMBDA='$,)
READ(IN,101) LAMBDA
101  FORMAT(G)
CALL VAMIN(NA,NB,NC,LAMBDA,A,B,C,E,F,G,POL)
KK=NA
KG=NC+1
IF(LAMBDA.EQ.0)KK=NB
IF(NC+1.LT.NB+NC) KG=NB+NC
CALL PAPOL(POL,KK,RRE,RIM,AMOD)
CALL VARIA(G,N1,POL,KK,SV,SY)
CALL VARIA(F,N2,POL,KK,SV,SU)
SCRIT=SY**2+LAMBDA*(SU**2)
WRITE(IN,15)(A(I),I=1,NA+1)
15  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO A:',1X,8F6.2,/,23X,8F6.2)
WRITE(IN,20)(B(I),I=1,NB+1)
20  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO B:',1X,8F6.2,/,23X,8F6.2)
WRITE(IN,25)(C(I),I=1,NC+1)
25  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO C:',1X,8F6.2,/,23X,8F6.2)
WRITE(IN,30)(E(I),I=1,NC)
30  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO E:',1X,8F6.2,/,23X,8F6.2)
WRITE(IN,35)(F(I),I=1,NA)
35  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO F:',1X,8F6.2,/,23X,8F6.2)
WRITE(IN,40)(G(I),I=1,KG)
40  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO G:',1X,8F6.2,/,23X,8F6.2)
WRITE(IN,45)(POL(I),I=1,KK+1)
45  FORMAT(/,10X,'POLINOMIO CARACTERISTICO:',1X,6F6.2,/,36X,6F6.2)
WRITE(IN,50)
50  FORMAT(/,10X,'RAIZES DO POLINOMIO CARACTERISTICO :',/,10X,'PAR
*   'TE REAL',4X,'PARTE IMAG.',4X,'MODULO')
DO 54 I = 1,KK
54  WRITE(IN,55) RRE(I),RIM(I),AMOD(I)
55  FORMAT(12X,F6.4,4X,F6.4,7X,F6.4)
WRITE(IN,60)
60  FORMAT(/,10X,'DESVIO PADRAO EM REGIME:')
WRITE(IN,65) SY,SU,SCRIT
65  FORMAT(22X,'* NA SAIDA:',F7.3,/,22X,'* NO CONTROLE:',F7.3,/,
*   22X,'* NO CRITERIO:',F7.3)
STOP
END

```

C
C
C

SUBROTINA VAMIN - CALCULA OS POLINOMIOS DO CONTROLE DE VAR. MIN

```

SUBROUTINE VAMIN(N,N,K,LAMBDA,A,B,C,E,F,G,POL)
DIMENSION A(25),AUX1(25),AUX2(12),B(25),C(25),E(12)
DIMENSION F(12),G(25),POL(12)
REAL LAMBDA
DO 1 I = N+2,25
A(I)=0.
B(I)=0.
C(I)=0.

```

```

1      CONTINUE
      E(I)=1.
      IF(N.LE.1) GO TO 100
      DO 3 J = 2,N
      E(J)=C(J)-A(J)
      IF(N.EQ.2) GO TO 100
      DO 2 I = 2,J-1
2      E(J)=E(J)+A(J-I+1)*E(I)
3      CONTINUE
100   DO 5 J = 1,N
      F(J)=C(K+J)-A(K+J)
      IF(N.EQ.1) GO TO 5
      DO 4 I = 1,K-1
4      F(J)=F(J)-(A(K-I+J)*E(I+1))
5      CONTINUE
      NN=M+K
      CALL POPY(AUX1,NN,E,K,B,M+1)
      DO 6 I = 1,N+1
6      AUX2(I)=(LAMBDA/B(1))*C(I)
      CALL PADD(G,NN,AUX1,NN,AUX2,N+1)
      DO 7 I = 1,N+1
7      AUX2(I)=(LAMBDA/B(1))*A(I)
      CALL PADD(POL,N+1,B,M+1,AUX2,N+1)
      RETURN
      END

```

C
C
C SUBROTINA RAPOL - CALCULA AS RAIZES DO POLINOMIO CARACTERISTI

```

SUBROUTINE RAPOL(POL,N,RRE,RIM,AMOD)
DIMENSION POL(21),RRE(21),RIM(21),A(500),B(21)
DIMENSION IANA(21),AMOD(21)
DO 1 I = 1,N+1
1  B(I)=-POL(I)/POL(N+1)
DO 2 J = 1,N
DO 2 I = 1,N
K=(J-1)*N+1
A(K)=0.
IF(1.EQ.N) A(K)=B(J)
IF(J.EQ.(I+1)) A(K)=1.
2  CONTINUE
CALL HSBG(N,A,N)
CALL ATEIG(N,A,RRE,RIM,IANA,N)
DO 3 I = 1,N
AMOD(I)=SQRT(RRE(I)**2+RIM(I)**2)
RRE(I)=RRE(I)/AMOD(I)**2
RIM(I)=-RIM(I)/AMOD(I)**2
3  AMOD(I)=1./AMOD(I)
RETURN
END

```

C
C
C SUBROTINA VARIA - CALCULA O DESVIO NA SAIDA E NO CONTROLE

```

SUBROUTINE VARIA(B,M,A,N,SV,SO)
DIMENSION A(25),AA(-25/25),B(25),BI(0/25),BB(25)
DIMENSION T(100),PI(25),GAMA(25),LL(25),KK(25)
DO 10 I = 1,M+1
AA(1)=0.
AA(1-I)=0.
IF(1.LE.N+1) AA(1)=-A(I+1)
10  CONTINUE

```

```

PI(1)=(B(1)/A(1))*(SV**2)
DO 15 J = 2,N+1
PI(J)=B(J)*(SV**2)
DO 14 I = 1,J-1
14 PI(J)=PI(J)+AA(I)*PI(J-I)
PI(J)=PI(J)/A(1)
15 CONTINUE
DO 25 J = 1,N+1
DO 20 I = 1,N+1
K=(J-1)*(N+1)+I
T(K)=0.
IF(1.EQ.J) T(K)=A(1)
IF(1.LE.(N-J+2)) T(K)=T(K)-AA(J+I-2)
IF(0.NE.1.AND.J.NE.N+1) T(K)=T(K)-AA(1-J)
20 CONTINUE
BB(J)=0.
DO 25 L = J,N+1
BB(J)=BB(J)+B(L)*PI(L-J+1)
25 CONTINUE
CALL MINV(T,N+1,DET,LL,KK)
CALL GMPRD(T,BB,GAMA,N+1,N+1,1)
SQ=SQRT(GAMA(1))
RETURN
END

```

APÊNDICE - A3

PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO E PREDIÇÃO DE 1 PASSO A FRENTE

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

NOTAS SOBRE O PROGRAMA:

* ESTE PROGRAMA FOI DESENVOLVIDO NO INTUITO DE ANALISAR BOMBEU MODELO COMO PREDITOR DE 1 PASSO A FRENTE.

* COMPOE A EQUACAO DO PREDITOR AS SEGUINTE VARIAVEIS:

YPRD - PREDITOR

YMED - VALOR MEDIO MENSAL

Y - MEDIDAS FORNECIDAS

ALFA(1),(2),(10)) - PARABETROS ESTIMADOS

* O PROGRAMA FORNECE TABELAS CONTEENDO AS MEDIDAS OBSERVADAS (Y) E AS MEDIDAS PREDITAS PARA 1 MES A FRENTE (YPRD) JUNTAMENTE COM SUAS RESPECTIVAS MEDIAS. UTILIZANDO A SUBROTINA ' PLOT TRACAMOS CURVAS CONTEENDO AS MEDIDAS OBSERVADAS E PREVISTAS SIMULTANEAMENTE PARA FEITO COMPARATIVO.

OBSERVACAO:

A SUBROTINA "PLOT" E RESPONSVEL PELA IMPRESSAO DOS GRAFICOS DAS MEDIDAS PRED. E OBSERV. SE O USUARIO NAO DESEJAR PLOTAR OS GRAFICOS DEVERA ANEXAR A LETRA "C" NA PRIMEIRA POSICAO DA LINHA DO COMANDO " CALL PLOT".

PROGRAMA PRINCIPAL

DIMENSION ALFA(20),NU(-20/20),W(12,40),YMED(12)

DIMENSION I(500),YPRD(500),YSINT(500),A(1500)

READ(48,2) (R,10,N,N)

READ(58,2) (ALFA(I),I=1,N)

DO 1 J = 1,N

READ(18,2) (W(K,J),K=1,N)

CONTINUE

FORMAT(206)

DO 3 J = 1,N

DO 3 I = 1,N

K=(J-1)*12+1

Y(K)=2.592*W(I,J)

CONTINUE

CALL ESTAT(Y,YMED,N,N)

DO 100 I = 1,12

A(I)=1

A(N+1)=YMED(I)

CONTINUE

WRITE(10,4) R

FORMAT(/,10X,'BOBRO DA USINA EM USO:',12)

WRITE(10,5)

FORMAT(/,10X,'TABELA DE MEDIDAS (DISCRET. MENSAL - 10**6'

'M**3)',/ ,10X,'ABO/MLS:',/)

CALL INPE(Y,YMED,NU,N,N,10)

CALL PREVE(Y,YMED,ALFA,N,N,YPRD)

CALL ESTAT(YPRD,YMED,N,N)

DO 101 I = 1,12

A(2*N+1)=YMED(I)

1
2

3

100

4

5

```

101 CONTINUE
    WRITE(10,5)
6   FORMAT(//,10X,'TABELA DE PREVISOES PARA 1 MES A FRENTE'
    * '(19**6-1**3)',/,1PA,'ANO/MES:',/,/)
    CALL IMPR(YMED,YMED,NO,N,M,1W)
    CALL PLOC(1R,A,12,3,29,0.,1W)
    DO 102 I = 1,480
    A(1)=1
    A(N*N+1)=Y(1)
    A(2*N*N+1)=YPRD(1)
102 CONTINUE
    CALL PLOC(1R,A,480,3,480,0.,1W)
    STOP
    END

C
C   SUBROTINA PREVE - RESOLVE A EQ. DO PREDITOR DE 1 PASSO
C
SUBROUTINE PREVE(Y, YMED, ALFA, N, M, YPRD)
DIMENSION Y(500), YPRD(500), YMED(12), ALFA(20)
DO 10 J = 1, N
YPRD(J)=Y(J)
10 CONTINUE
DO 15 I = N, (N*N-1)
K1=1/12
K2=1-12*K1+1
YPRD(I+1)=YMED(K2)
DO 15 K = 1, N
K1=(1-K)/12
K2=(1-K)-12*K1+1
YPRD(I+1)=YPRD(I+1)+ALFA(K)*(Y(1-K+1)-YMED(K2))
15 CONTINUE
RETURN
END

C
C   SUBROTINA ESTAT - DETERMINA A MEDIA MENSAL DAS MEDIDAS
C
SUBROUTINE ESTAT(G, YM, N, M)
DIMENSION G(500), YM(12)
DO 3 K = 1, M
YM(K)=0.
DO 1 I = 1, N
YM(K)=YM(K)+G(K+12*(I-1))
1 CONTINUE
YM(K)=YM(K)/N
3 CONTINUE
RETURN
END

C
C   SUBROTINA IMPR - IMPRIME AS TABELAS E AS MEDIAS-MENSAIS
C
SUBROUTINE IMPR(Z, YMED, NO, N, M, 1W)
DIMENSION Z(500), YMED(12), NO(-20/20)
DO 15 I = 1, N
WRITE(1W,10)(Z(12*(I-1)+J), J=1, 12)
10 FORMAT(10X,12F8.0)
15 CONTINUE
WRITE(1W,20)
20 FORMAT(//,10X,'MEDIA-MENSAL:')
WRITE(1W,25)(YMED(I), I=1, 12)
25 FORMAT(10X,12F8.0)
WRITE(1W,35)
35 FORMAT(//,10X)
RETURN
END

```


APENDICE - A4

TABELA DE MEDIDAS OBSERVADAS PARA OS APORTES

NUMERO DA USINA EM USD:50

TABELA DE MEDIDAS (DISCRET. *FMSAL - 10**6**3)
ANO/REG:

3003.	8942.	8994.	4092.	2514.	303.	1477.	1296.	1270.	1218.	1244.	1659.
3246.	3707.	2877.	1970.	1344.	1296.	1973.	791.	575.	969.	1238.	2359.
4795.	4310.	2677.	2670.	1711.	1340.	350.	850.	778.	954.	1130.	2255.
2070.	2125.	2150.	1059.	143.	650.	534.	428.	505.	695.	604.	670.
3732.	4502.	3062.	4069.	2162.	1529.	1109.	969.	520.	860.	980.	1559.
1711.	1117.	3510.	2309.	1320.	933.	679.	619.	524.	409.	409.	1410.
2670.	1003.	1477.	1746.	1414.	1037.	731.	544.	485.	524.	1322.	2580.
2900.	2048.	2074.	1711.	980.	860.	785.	442.	241.	303.	684.	2177.
3206.	3370.	1477.	1214.	1673.	912.	616.	573.	422.	401.	499.	1214.
2203.	4044.	3525.	1763.	1374.	1029.	770.	560.	451.	574.	1659.	1400.
2825.	1002.	1531.	1914.	980.	782.	648.	445.	459.	509.	433.	1753.
2041.	2330.	4000.	2430.	1420.	2151.	1348.	710.	648.	607.	1344.	2048.
5305.	4225.	4355.	2430.	1529.	1300.	1120.	765.	697.	1120.	1470.	1600.
1705.	2025.	2690.	1914.	1477.	950.	809.	630.	505.	542.	1120.	1529.
2229.	4530.	4147.	5340.	2670.	1655.	1400.	1037.	701.	1037.	1782.	1685.
5286.	3707.	4709.	2981.	1970.	1503.	1345.	1020.	886.	810.	1143.	1949.
2010.	3240.	5722.	4044.	2074.	1477.	1218.	1013.	827.	840.	790.	2255.
3447.	3240.	3750.	2425.	1320.	1125.	933.	751.	684.	634.	630.	2550.
3110.	5780.	4044.	2425.	1500.	1146.	1013.	925.	604.	837.	1124.	1947.
2167.	3084.	2794.	2071.	1325.	959.	772.	575.	459.	767.	2094.	2623.
3002.	3080.	3323.	2690.	1630.	1229.	972.	783.	590.	653.	664.	1174.
2193.	3274.	6239.	2794.	1635.	1501.	940.	780.	097.	765.	1278.	1975.
1407.	1397.	2542.	2649.	1510.	1037.	824.	622.	609.	1130.	1203.	2400.
1001.	2007.	1510.	1301.	1052.	718.	498.	391.	329.	295.	988.	1734.
2131.	1952.	1012.	1475.	990.	741.	534.	604.	303.	009.	988.	2023.
2090.	1734.	2708.	1542.	1510.	1440.	1613.	848.	033.	332.	988.	3515.
4366.	5010.	4919.	4093.	2727.	1979.	1470.	1130.	975.	889.	1252.	2441.
2722.	3250.	2690.	2144.	1559.	1224.	1041.	793.	770.	950.	767.	1150.
3700.	2579.	3005.	1475.	1374.	1011.	729.	650.	744.	009.	1170.	1493.
2722.	3274.	3191.	2469.	1651.	1179.	531.	089.	601.	708.	1472.	2514.
4242.	4800.	4170.	3030.	2097.	1371.	532.	796.	700.	645.	1083.	1537.
3013.	3552.	4650.	2602.	1017.	1110.	666.	084.	092.	830.	1020.	3200.
3013.	3155.	1973.	1510.	1140.	977.	765.	054.	565.	587.	402.	384.
1615.	3914.	2641.	2797.	1223.	733.	552.	373.	161.	207.	1190.	2151.
2017.	3090.	4100.	2750.	2130.	1028.	1309.	905.	810.	1143.	1498.	4010.
4001.	5002.	5036.	2753.	2509.	1695.	1274.	1001.	955.	809.	739.	4244.
1230.	1534.	210.	2571.	1724.	800.	477.	433.	343.	619.	1440.	3044.
3180.	3000.	4142.	2239.	1493.	1374.	988.	874.	752.	1011.	1060.	2553.
1650.	2046.	1711.	1270.	934.	674.	638.	516.	386.	594.	1791.	1940.
3484.	3450.	2994.	1807.	1179.	863.	706.	612.	619.	752.	923.	032.

MEDIA-MENSAL: 2982. 3366. 3414. 2459. 1563. 1100. 908. 732. 614. 727. 1180. 1953.

NÚMERO DA USINA EM USO: 51

TABELA DE MEDIDAS (DISCRET. MENSAL - 10**6A**3)
ANOS: 1963

2237.	3199.	3189.	3033.	1840.	1405.	1130.	861.	897.	894.	954.	1650.
2549.	2525.	2107.	1367.	1053.	876.	739.	594.	645.	763.	961.	2055.
1740.	933.	901.	931.	677.	550.	529.	539.	487.	653.	490.	945.
1209.	995.	1091.	788.	617.	454.	420.	378.	428.	550.	550.	1630.
1415.	1975.	2139.	1625.	1187.	876.	643.	625.	469.	1134.	752.	633.
1136.	770.	1951.	1426.	974.	695.	526.	467.	607.	907.	506.	1667.
2017.	1478.	1366.	1151.	831.	604.	547.	467.	410.	749.	943.	675.
2042.	1454.	1356.	1029.	754.	570.	371.	524.	529.	819.	854.	737.
1505.	1976.	1637.	958.	837.	744.	503.	430.	490.	865.	666.	674.
2198.	3932.	2599.	1470.	1223.	801.	539.	482.	321.	306.	531.	532.
2100.	1142.	775.	941.	492.	407.	350.	347.	251.	342.	637.	433.
915.	1149.	2539.	2151.	1496.	926.	695.	542.	410.	474.	314.	544.
1379.	2911.	2043.	1756.	1161.	898.	674.	569.	394.	438.	912.	955.
936.	925.	1791.	1089.	704.	513.	435.	353.	314.	277.	635.	579.
709.	3620.	1947.	614.	474.	645.	480.	368.	277.	332.	612.	1635.
1708.	2512.	2452.	1896.	1029.	640.	684.	568.	389.	684.	410.	651.
999.	1538.	2231.	2154.	1284.	946.	768.	586.	674.	796.	752.	1393.
1921.	2309.	2145.	1330.	985.	816.	639.	541.	477.	482.	402.	645.
1045.	2162.	2646.	1677.	1317.	793.	591.	451.	391.	311.	342.	954.
1420.	3831.	3175.	2094.	1367.	1026.	604.	619.	565.	565.	526.	1517.
2753.	3675.	3325.	2355.	1467.	944.	692.	708.	575.	457.	534.	714.
434.	1599.	2954.	1941.	1096.	933.	664.	503.	327.	560.	529.	210.
591.	445.	249.	861.	454.	433.	394.	340.	314.	342.	365.	635.
739.	1319.	1159.	765.	474.	752.	518.	467.	316.	355.	231.	354.
624.	611.	1963.	964.	514.	456.	365.	378.	376.	236.	350.	166.
1669.	749.	1656.	731.	881.	1003.	601.	759.	482.	378.	684.	375.
1716.	2935.	1763.	1949.	1659.	650.	746.	606.	612.	446.	521.	745.
929.	2224.	1716.	1444.	1485.	1376.	1061.	702.	547.	441.	695.	741.
1939.	2049.	2112.	1843.	1196.	682.	464.	425.	340.	241.	259.	653.
1241.	1949.	1601.	1223.	746.	677.	645.	213.	18.	39.	1125.	914.
2264.	1697.	2724.	1931.	1568.	1083.	925.	516.	165.	270.	565.	503.
1571.	2656.	2169.	1243.	936.	772.	600.	480.	524.	832.	1267.	3890.
5759.	4316.	1672.	861.	324.	674.	542.	508.	334.	420.	664.	347.
-150.	117.	798.	417.	-412.	264.	114.	83.	-5.	80.	88.	254.
1029.	1791.	2203.	1765.	767.	693.	542.	360.	283.	762.	285.	-262.
-267.	661.	396.	1910.	1673.	1102.	594.	354.	-308.	861.	1708.	-355.
956.	1163.	1729.	1441.	1663.	824.	612.	243.	264.	424.	2545.	1150.
1369.	1165.	1496.	1529.	632.	420.	275.	166.	-156.	163.	324.	-124.
29.	495.	509.	332.	114.	171.	75.	31.	-39.	83.	451.	471.
1195.	2115.	2963.	1286.	1016.	897.	563.	378.	420.	480.	283.	632.

MEDIA-MENSAL: 1427. 1964. 1866. 1416. 942. 756. 584. 460. 370. 483. 667. 845.

NUMERO DA USINA EM USO:53

TABELA DE MEDIDAS (DISCRET. Mensal - 1940/41/43)
Adu/m.3:

2607.	2456.	4313.	3784.	2789.	2037.	2035.	1923.	1757.	1801.	2167.	1392.
2513.	3253.	2543.	2258.	1747.	1709.	1752.	1647.	1547.	1624.	1903.	2214.
4512.	4056.	3272.	3092.	2234.	1939.	2963.	1779.	1706.	1737.	1973.	2600.
2021.	2167.	2157.	2281.	3034.	1664.	1674.	1524.	1571.	1770.	1737.	594.
3032.	3032.	3655.	4141.	2939.	2058.	1825.	1755.	1380.	762.	1524.	2120.
1409.	1571.	2891.	2659.	1909.	1897.	1750.	1612.	1317.	1522.	1452.	632.
1179.	321.	1330.	1711.	1322.	1444.	1555.	1519.	1573.	1414.	1504.	2696.
3297.	2236.	2245.	2655.	1493.	1493.	1664.	1445.	1741.	1001.	1200.	2237.
2771.	3114.	1742.	1649.	1363.	1559.	1527.	1527.	1439.	1457.	1597.	1446.
1695.	2342.	2776.	2060.	1524.	1550.	1510.	1509.	1357.	1477.	2041.	1504.
2945.	2231.	2075.	2356.	1781.	1689.	1627.	1486.	1344.	1314.	1428.	1561.
2269.	2559.	3533.	2614.	1434.	2571.	1848.	1615.	1615.	1547.	1560.	2372.
4413.	4150.	4959.	2735.	1941.	1957.	1788.	1656.	1615.	1721.	2781.	2302.
2110.	3297.	2626.	2478.	2937.	1796.	1696.	1633.	1475.	1480.	1480.	2102.
2763.	4732.	4572.	5454.	3121.	2115.	1850.	1827.	1752.	1892.	2271.	12294.
4461.	3149.	3246.	3131.	2193.	1958.	1810.	1769.	1794.	1602.	1411.	2475.
2341.	2501.	3512.	3432.	2317.	1671.	1623.	1589.	1361.	1304.	1315.	2112.
3261.	2541.	3977.	2786.	1646.	1612.	1599.	1563.	1610.	1695.	1304.	2413.
3222.	5092.	4103.	2600.	1699.	1699.	1724.	1724.	1502.	1838.	1524.	741.
301.	3315.	4553.	2654.	1382.	1472.	1304.	1628.	1661.	1337.	86.	570.
3147.	5669.	4052.	2854.	1664.	2094.	1335.	1369.	1584.	1737.	1405.	601.
543.	2095.	537.	2415.	653.	923.	1641.	1510.	1322.	1804.	1726.	985.
1302.	1151.	1045.	1924.	1534.	1029.	1360.	1431.	1454.	1480.	1420.	1128.
1134.	1537.	1270.	1597.	666.	1811.	1772.	1589.	1412.	1480.	467.	319.
1220.	160.	1117.	1427.	1418.	1394.	1364.	1377.	1363.	1249.	1255.	542.
402.	1782.	435.	1773.	2303.	3211.	2042.	1763.	1770.	692.	1255.	542.
2164.	6362.	3153.	4572.	1644.	1075.	1268.	1586.	1332.	1426.	363.	709.
1187.	3102.	3953.	3446.	2745.	1993.	1936.	1586.	1332.	1029.	450.	1573.
1920.	3717.	3176.	3149.	2480.	2491.	1975.	2032.	1402.	1034.	1994.	1741.
2242.	3581.	6451.	3473.	2100.	785.	1475.	1649.	1952.	1752.	1291.	1739.
2297.	3982.	1154.	1154.	2298.	1309.	912.	1649.	1641.	1737.	1460.	1208.
5200.	4022.	3751.	1341.	1382.	1522.	2167.	1236.	1702.	1536.	1460.	1208.
2216.	2623.	3135.	2133.	1573.	1573.	1514.	2125.	1773.	1936.	2105.	1522.
3109.	2543.	2955.	2224.	1729.	1373.	1514.	1377.	1267.	1094.	1778.	2416.
531.	3046.	5921.	2224.	1634.	1729.	1634.	7544.	2455.	1726.	1470.	2400.
3042.	1946.	2792.	3587.	1986.	1612.	1768.	1547.	1317.	1568.	425.	459.
2693.	1860.	3739.	2994.	2206.	1895.	1405.	1405.	1226.	1433.	425.	459.
2625.	3442.	1060.	2411.	1610.	1651.	1488.	1306.	1553.	1742.	1407.	1547.
2354.	2571.	1860.	1604.	1641.	526.	1120.	1190.	1519.	840.	1628.	2392.
		2628.	1654.	1714.	1644.	1296.	1216.	1206.	1723.	2206.	1794.
		3244.	2019.	1616.	1291.	1371.	1099.	1221.	1335.	1449.	2151.

MEDIA-MENSAL: 2345. 2912. 3051. 2605. 1843. 1677. 1641. 1000. 1543. 1469. 1574. 1922.