UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Multiplicidade de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Quasilineares

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Orientador: Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Co-orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

01 de Dezembro de 2004

Multiplicidade de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Quasilineares

Este exemplar corresponde a redação final de tese devidamente corrigida e defendida por Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 01 de Dezembro de 2004

Prof. Dr. Claudianor O. Alves
Orientador

Prof. Dr. Djairo G. de Figueiredo
Co-orientador

Banca Examinadora

1 - Claudianor Oliveira Alves (orientador)

2 - Francisco Odair Vieira de Paiva

3 - Jaime Angulo Pava

4 - José Valdo A. Gonçalves

5 - Olimpio Hiroshi Miyagaki

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP como requisito parcial do título de Doutor em Matemática.

Tese de Doutorado defendida em 01 de Dezembro de 2004 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves (Orientador)

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

Dedicatória

A Rubinha, minha esposa e grande amor, pelo carinho, pela cumplicidade e por ser a minha outra metade.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, por tudo que me proporciona.

- Ao meu pai Edilton, por tudo que me ensina, a minha mãe Lecy (in memorian), pelo grande amor que me deu, aos meus filhos por existirem e me deixarem amá-los.

-Aos meus irmãos Suely, Aderson, Aylton, Fabinho e Ana por me amarem.

- Ao Professor Claudianor, pela orientação, incentivo, disponibilidade, compreensão, amizade e sobretudo pelo exemplo de profissional sério e competente.

- Ao Professor Djairo, por ter me proporcionado a oportunidade de estudar no Departamento de Matemática da UFCG, em Campina Grande-Pb.

- Aos Professores José Valdo, Olímpio, Orlando Lopes, Odair e Jaime por aceitarem compor a banca julgadora deste trabalho e pelas sugestões dadas.

- Ao Departamento de Matemática da UFCG, pela estrutura física que me foi disponibilizada, sem a qual este trabalho se tornaria mais árduo.

- Aos Professores do Departamento de Matemática da UFPa, pela formação dada, em especial ao Professor Júlio, pelo incentivo, pela confiança e por sua amizade.

- Aos Professores da UFPa-Campus de Abaetetuba, pela aprovação de meu pedido de afastamento para estudos, em especial ao Valcir pela amizade e incentivo.

- Aos funcionários da secretaria do IMECC, Tânia, Cidinha e Ednaldo pelo exemplo de competência.

- A Rubinha pelas muitas lições de LATEX.

- Ao Lindomberg por sua ajuda no preparo da apresentação desta tese.

- Aos meus amigos paraibanos: Brandão, Mariza, Teresinha, Josa, Marileide, Dona Fátima, Dr. Wanderlei, Emanuel, Dona Lourdes, Dona Dora, Amauri do mercadinho e o "Sangue bom", por gostarem de mim.

- Ao Flávio José, pela sua poesia, sua música e seu talento.

- Aos meus colegas de predinho pela boa convivência, em especial ao Jorge Lopez, Danilo, Dirceu Baggio, Rogério, Lucas (Primo), Amauri, Everaldo, Roger, Evandro e Marcelo.

-Ao Paulo Marques por todos os momentos, quando da nossa chegada a Campinas-SP.

- A Capes pelo apoio financeiro e por disponibilizar o portal com as revistas que são de fundamental importância para quem pesquisa longe das grandes bibliotecas.

Resumo

Neste trabalho, usaremos a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman para estudar a multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas:

$$(P_\epsilon)\quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = b(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N,\ N > p \geq 2, \end{cases}$$

onde Δ_p é o operador p-Laplaceano, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo do trabalho.

Palavras chaves: Equação elíptica Quasilinear ; p-Laplaceano; Método Variacional ; Categoria de Lusternik-Schnirelman.

Abstract

In this work we will use the Lusternik-Schnirelman of category and establish multiciplity of positive solutions for the following class of problems:

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = b(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N,\ N > p \geq 2, \end{cases}$$

where Δ_p is the p-Laplacian operator, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ and $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions satisfying some growth conditions to appear in the work.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a multiciplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas:

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = b(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \;\; N > p \geq 2, \end{cases}$$

onde $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ e V, b são funções contínuas cujas as hipóteses detalharemos nos capítulos subseqüentes. No caso escalar com $p = 2$, tais problemas aparecem quando se deseja encontrar uma standing wave ou onda viajante para a equação do tipo Schrödinger

$$ih\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -h^2 \Delta \Psi + V(x)\Psi - |\Psi|^{q-2}\, \Psi \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde i é a unidade imaginária, h é a constante de Planck, $q > 2$ se $N = 1, 2$ ou $2 < q \leq 2^*$ se $N \geq 3$. Standing wave ou onda viajante para esta equação é uma solução da forma

$$\Psi(t, x) = \exp\frac{(-i\lambda t)}{h} u(x) \quad , \quad u : \mathbb{R}^N \to R^+.$$

Encontrar uma standing wave ou onda viajante para (1) é equivalente a encontrar uma solução para a equação

$$(CL) \quad \begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = |u|^{q-2}u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Nosso interesse nesta equação tem orígem no trabalho de Rabinowitz [53], o qual foi motivado pelos trabalhos de Floer e Weinstein [33]e Oh [48], [49] e [50].

Usando o Teorema do Passo da Montanha, Rabinowitz demonstrou que se $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $V(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ e

$$(V) \qquad V_\infty = \liminf_{|x|\to\infty} V(x) > V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) > 0,$$

então o problema (CL) tem uma solução positiva, para ϵ positivo e suficientemente pequeno.

A condição (V) é uma condição que impõe um comportamento para o potencial V no infinito e a presença, bem como a ausência desta condição, exercem um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho. Por isso, doravante, algumas vezes, diremos apenas que o potencial V verifica ou não a condição de Rabinowitz, quando o potencial V verificar ou não a condição (V).

É bem conhecido que a multiplicidade de soluções para o problema de Dirichlet sobre um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ depende da topologia de Ω, como pode ser visto em [16], [17] e [18]. No caso da classe de problemas que é objeto de nossos estudos, uma similar relação ocorre, isto é, a multiplicidade de soluções depende da geometria do gráfico do potencial V. Este fenômeno foi estudado por diversos autores. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, destacamos Bartsch e Wang [14] e Cingolani e Lazzo [24] e [26]. Em todos esses trabalhos, os problemas possuem crescimento subcrítico.

No caso crítico, com $p = 2$ e Ω um domínio limitado, podemos citar Rey [54] e Lazzo [43]. Chabrowski e Jianfu [23], estudaram o caso com $p = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$. Este fenômeno também foi estudado por Alves e Ding [7] e [8], com $p \geq 2$ e Ω limitado e $\Omega = \mathbb{R}^N$, respectivamente.

Para outras referências bibliográficas referentes a relação entre o potencial V e a multiciplicidade de soluções, ver [15] e [52].

O objetivo central deste trabalho é encontrar múltiplas soluções positivas para alguns problemas variantes de (*), que mencionaremos a seguir. Para isso usaremos a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman e no que segue, enunciaremos os resultados principais obtidos, deixando os detalhes das hipóteses para os respectivos capítulos.

No Capítulo 1, que denominaremos de Caso Subcrítico, estudaremos o problema

$$(P_\epsilon 1) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \ N > p \geq 2, \end{cases}$$

com V verificando a condição de Rabinowitz. O principal resultado é :

Teorema A *Suponha que o potencial* V *verifique a condição* (V) *e a não linearidade* f *verifique as hipóteses* (f_1)-(f_6). *Então, dado* $\delta > 0$, *existe* $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}(\delta) > 0$ *tal que o problema* (P_ϵ) *tem pelo menos* $cat_{M_\delta}(M)$ *soluções positivas para todo* $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.

Lembramos que vamos definir os conjuntos M e M_δ no capítulo 1 e que $cat_{M_\delta}(M)$ é a categoria de M em M_δ e significa o menor número de fechados e contráteis em M_δ que cobrem M.

Em um artigo de 1997, Cingolani e Lazzo [26], demonstraram um resultado de multiplicidade para o problema (CL) com a condição de Rabinowitz, usando a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman. Este capítulo completa o estudo feito pelas autoras, nos seguintes aspectos.

1) O p-Laplaceano é um operador não linear definido em um espaço de Banach e os problemas que envolvem este tipo de operador apresentam várias dificuldades tais como unicidade, regularidade, etc..., o que o difere, entre outras coisas, do Laplaceano.

2) A classe de não linearidade inclui, mas não se restringe ao modelo

$f(s) = s^q$ e isso dificulta o uso de resultados do tipo Brézis-Lieb. Além disso, modificações não triviais são necessárias, como por exemplo, a demonstração de resultados de compacidade sobre a variedade de Nehari.

3) Daremos uma nova versão para a demonstração do Lema 4.1, da afirmação 4.2 e do Lema 5.3 no artigo das autoras.

4) O problema autônomo com $p = 2$, tem unicidade de solução, conforme [19], fato que foi usado fortemente pelas autoras no Lema 4.1. Como é conhecido, para $p > 2$, este resultado é um problema em aberto e no nosso trabalho isto não é necessário.

No Capítulo 2, que denominaremos de Caso Crítico, faremos uma pertubação no problema $(P_\epsilon 1)$ com uma potência crítica, isto é, estudaremos o problema

$$(P_\epsilon 2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) + |u|^{p^*-2}u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \ N > p \geq 2, \end{cases}$$

com V verificando a condição de Rabinowitz e cujo principal resultado é :

Teorema B *Suponha que o potencial V verifique a condição (V) e a não linearidade f verifique as hipóteses $(f_1) - (f_6)$. Então, dado $\delta > 0$, existe $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema $(P_\epsilon 2)$ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.*

Em 2002, Alves e Souto [12] demonstraram um resultado de existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = \lambda u^q + u^{2^*-1} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \ N \geq 3, \end{cases}$$

com V verificando a condição de Rabinowitz.

Este capítulo completa o estudo feito pelos autores, nos seguintes aspectos:

1) Mostraremos um resultado de multiplicidade e o operador que trabalhamos é o operador p-Laplaceano.

2) A classe de não linearidade que estamos considerando, inclui e não se restringe ao modelo $f(s) = \lambda s^q + s^{2^*-1}$.

Observe também que, o capítulo 2 ainda completa o estudo feito por Cingolani e Lazzo [26], pois as autoras não consideraram o crescimento crítico.

Em 1996, Del Pino e Felmer [30] criaram um método chamado Penalização e mostraram a existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \;\; em \;\; \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \;\; N \geq 3, \end{cases}$$

com crescimento subcrítico e sem impor a condição de Rabinowitz, isto é, permitindo que V tivesse qualquer comportamento no infinito.

No Capítulo 3, que denominaremos por Caso subcrítico sem a Condição de Rabinowitz, usaremos o método de Penalização associada a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman para, novamente, estudar o problema $(P_\epsilon 1)$, agora sem a condição de Rabinowitz. Para adaptarmos o método de Del Pino e Felmer, precisaremos das seguintes hipóteses sobre a função V:

(V_1) $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $V(x) \geq V_0 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_2) Dado $\delta > 0$, existe um aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^N$ tal que $V_0 < \min_{\partial\Omega} V$,

$$M = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\} \neq \emptyset \; e \; M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, M) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

O principal resultado obtido neste capítulo é:

Teorema C *Suponha que o potencial* V *verifique as condições* (V_1) *e* (V_2). *Então, dado* $\delta > 0$, *existe* $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\delta) > 0$ *e tal que o problema* $(P_\epsilon 1)$ *tem pelo menos* $cat_{M_\delta}(M)$ *soluções positivas para todo* $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$.

Este capítulo completa o estudo feito por Del Pino e Felmer [30], nos seguintes aspectos:

1) Mostraremos um resultado de multiplicidade e o operador que trabalhamos é o operador p-Laplaceano.

2) O método de Penalização consiste numa conveniente modificação no funcional energia associado a uma equação diferencial, o que implica no surgimento de um problema auxiliar. Aplica-se o Teorema do Passo da Montanha para a resolução do problema auxiliar e, em seguida, mostra-se que a solução do problema auxiliar é solução do problema original, para ϵ positivo e suficientemente pequeno . Nesta segunda etapa, é fundamental a convergência uniforme sobre compactos do $\mathbb{R}^N$ da solução transladada do problema auxiliar. No artigo dos autores, isto é feito as custas de um argumento do tipo bootstrap, o qual, em geral, não é válido quando se trabalha com o operador p-Laplaceano. Estas dificuldades serão superadas com a aplicação do método de Iteração de Moser [46], resultados de Di Benedetto [32] e argumentos adaptados de [22].

3) Desconhecemos trabalhos que façam o uso do método de Penalização para problemas com o operador p-Laplaceano. Uma explicação para isso, talvez seja a dificuldade mencionada no ítem anterior.

O Capítulo 3, ainda completa o estudo feito por Cingolani e Lazzo [26], pois estamos considerando o caso sem a condição de Rabinowitz e será empregada uma outra metodologia para a obtenção do resultado.

Observe que a condição (V_2) implica que $V_\infty \geq V_0$ e assim, a condição (V_2) é uma condição mais fraca que a condição de Rabinowitz. Com essas considerações , afirmamos que o capítulo 3 é uma generalização do capítulo 1.

Em 1997, Chabrowski e Jianfu [22], mostraram um resultado de existência para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = Q(x)|u|^{q-1}u + \lambda P(x)|u|^{s-1}u \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com $1 < q < 2^* - 1 \leq s$, $N \geq 3$ e $\lambda > 0$.

Motivados por este resultado, no Capítulo 4, que denominaremos por Caso Supercrítico sem a Condição de Rabinowitz, estudaremos o problema

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-1}u + \lambda|u|^{s-1}u \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com $N > p \geq 2$, $p - 1 < q < p^* - 1 \leq s$ e V não verificando a condição de Rabinowitz. Novamente, usaremos o método de Penalização e a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema D *Suponha que o potencial V verifique as condições (V_1) e (V_2). Então, dado $\delta > 0$, existem $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}(\delta) > 0$ e $\lambda_0 \geq 0$ tais que o problema (P_λ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$.*

O caso com $p = 2$ e $\lambda = 0$, é exatamente o problema (CL) estudado por Cingolani e Lazzo [26]. A principal diferença é que não temos a condição de Rabinowitz e sobretudo, temos um problema com crescimento supercrítico, caso não considerado pelas autoras. Em verdade, não conhecemos nenhum resultado de multiplicidade envolvendo a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman para este tipo de problema.

Nos quatro capítulos que compõem esta tese, usaremos o fato que o problema autônomo possui uma solução de energia mínima ou Ground-State, onde solução de energia mínima ou Ground-State são as soluções relacionadas com os níveis minimax. Para a completeza deste trabalho, daremos a prova deste resultado e usaremos as idéias de Alves, do Ó e Miyagaki [8], para potenciais periódicos.

Para finalizar, no apêndice, enunciaremos duas versões do Teorema do Passo da Montanha. A primeira é devido a Willem [58] e não requer a condição Palais-Smale do funcional associado ao problema. Esta versão será usada nos capítulos 1 e 2 para problemas autônomos. A segunda versão, que em verdade é a versão original, devida a Ambrosetti e Rabinowitz [13], requer a condição Palais-Smale para o funcional associado e será usada no método de Penalização de Del Pino e Felmer e, portanto, será usada nos capítulos 3 e 4. Também enunciaremos um resultado devido a Lions, que será usado em todos os capítulos deste trabalho e listaremos as imersões contínuas e compactas usadas no decorrer desta tese. Mostraremos também uma caracterização do nível do Passo da Montanha de um funcional, que é de grande importância nos capítulos 3 e 4.

Para a facilidade da leitura deste trabalho, repetiremos os enunciados dos Teoremas desta introdução nos seus respectivos capítulos.

Notações

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$ convergência fraca,

$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\int_\Omega f$: denota $\int_\Omega f(x)dx$,

$|f|_s = \left(\int_\Omega |f(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$|f|_{s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |f(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$\|u\|^p_{\epsilon(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} V(\epsilon x)|u|^p dx$

$A(h) = o(|h|)$ desde que $|\frac{A(h)}{|h|}| \rightarrow 0$ quando $|h| \rightarrow 0$,

$I^d = \{u : I(u) \leq d\}$.

Capítulo 1

Caso Subcrítico

1.1 Introdução

Neste capítulo, mostraremos a existência e a multiplicidade de soluções positivas do problema

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com $2 \leq p < N$, $\epsilon > 0$ um parâmetro pequeno e hipóteses sobre a não linearidade f e sobre o potencial V a serem listadas abaixo. Usaremos uma versão devido a Willem do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz sem a condição (P.S), (ver [58]), para mostrar a existência de solução. Para mostrar a multiplicidade, usaremos a teoria de Categoria de Lusternik-Schnirelman, (ver [58]).

Vamos agora estabelecer algumas notações e enunciar o resultado principal deste capítulo.
Seja V: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $V(x) > 0$, $\forall \ x \in \mathbb{R}^N$ e

$$(V) \qquad\qquad V_\infty = \liminf_{|x| \to \infty} V(x) > V_0 > 0,$$

onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)$.

Neste trabalho, vamos supor $V_\infty < \infty$ ou $V_\infty = \infty$. No que segue, faremos as comparações nos dois casos. Considere

$$M = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_0\}$$

um conjunto limitado e para qualquer $\delta > 0$, definimos:

$$M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, M) \leq \delta\}.$$

Observe que a condição (V) implica na existência de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $V(x_0) = V_0$, e portanto, podemos concluir que $M \neq \emptyset$. No que segue, vamos supor sem perda de generalidade que $x_0 = 0$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 verificando as seguintes hipóteses :

(f_1) $f(s) = 0, \forall\ s < 0$.

(f_2) $\displaystyle\lim_{|s|\to 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0$.

(f_3) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{|s|^q} = 0$, para algum $q \in \mathbb{R}$ com $p - 1 < q < p^* - 1$, onde $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.

(f_4) Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p < \theta$ e $0 < \theta F(s) \leq sf(s)$, $\forall\ s > 0$, sendo $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\ dt$.

(f_5) A função $s \longrightarrow \dfrac{f(s)}{s^{p-1}}$ é crescente $\forall\ s > 0$.

(f_6) $f'(s)s^2 - (p-1)f(s)s \geq Cs^\sigma$, com $C > 0$, $\sigma \in (p, p^*)$ e $\forall$ $s \geq 0$.

Observe que as hipóteses (f_1), (f_2) e (f_3) implicam em uma condição de crescimento para a função f tal que podemos definir um funcional associado ao problema (P_ϵ).

Desde que vamos usar o Teorema do Passo da Montanha, a hipótese (f_5) permite uma caracterização adequada do nível do Passo da Montanha para a resolução do problema (P_ϵ).

Com a condição de crescimento mencionada acima e a hipótese (f_4), mostraremos que o funcional verifica a chamada geometria do Passo da Montanha.

A hipótese (f_6) será usada para mostrarmos que o funcional associado ao problema (P_ϵ) verifica a condição Palais-Smale sobre a variedade de Nehari e também, para mostrar que todo ponto crítico deste funcional na variedade de Nehari é ponto crítico em todo o espaço.

Vamos enunciar o resultado principal deste capítulo:

Teorema A *Suponha que o potencial V verifique a condição (V) e a não linearidade f verifique as hipóteses (f_1)-(f_6). Então dado $\delta > 0$, existe $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema (P_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.*

Este capítulo será organizado da seguinte forma. Na seção 1.2, vamos mostrar a validade da condição Palais-Smale para o funcional associado ao problema (P_ϵ), abaixo de um nível fixado. Para isso, adaptaremos algumas idéias de Alves e Souto [12] e usaremos resultados relacionados à existência de solução para o problema autônomo e para o problema (P_ϵ) com $\epsilon = 1$. Na seção 1.3, adaptando algumas idéias de Cingolani e Lazzo [26], demonstraremos resultados que relacionam o conjunto M dos mínimos de V e a topologia de um subconjunto de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Esta relação constitui o argumento central da demonstração do Teorema A. Na seção 1.4, vamos apresentar, sem demonstrar, um Teorema abstrato envolvendo categoria de Lusternik-Schnirelman, o qual aplicaremos na demonstração do Teorema A.

1.2 A Condição Palais-Smale

Essa é uma condição necessária para demonstrarmos o Teorema A. Como é bem conhecido, as imersões $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ para $p \leq s \leq p^*$, são contínuas e não compactas e por isso, em geral, a condição Palais-Smale não se verifica. Entretanto, demonstraremos que a mesma ocorre para o funcional associado ao problema (P_ϵ), abaixo de um nível fixado.

Vamos começar estudando o caso autônomo e como foi mencionado na introdução, adaptaremos algumas idéias de Alves, do Ó e Miyagaki [8], para potenciais periódicos.

1.2.1 O Problema Autônomo

Nesta subseção, estudaremos a existência de solução positiva Ground-State para o seguinte problema

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + \mu |u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \; N > p \geq 2 \; e \; \mu > 0. \end{cases}$$

Considerando o espaço de Banach $W_\mu = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com a norma definida por

$$\|u\|_\mu^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |u|^p,$$

temos que W_μ é o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação a esta norma (ver [1] para maiores detalhes).

Considere o funcional energia

$$\begin{aligned} E_\mu : \; W_\mu & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & \longmapsto E_\mu(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mu |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u). \end{aligned}$$

Prova-se que $E_\mu \in \; C^1(W_\mu, \mathbb{R})$ com

$$E'_\mu(u)w = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |u|^{p-2}uw - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)w$$

e portanto, pontos críticos de E_μ são soluções fracas de (P_μ). Uma condição necessária para que $u \in W_\mu$ seja ponto crítico de E_μ é que $E'_\mu(u)u = 0$. Esta condição define a variedade de Nehari:

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in W \backslash \{0\} : E'_\mu(u)u = 0\}.$$

Lema 1.1 *O funcional E_μ verifica as condições (H_1) e (H_2) do Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração: Decorre diretamente da definição de F que $E_\mu(0) = 0$. Agora de (f_1) e (f_2), dado $\xi > 0$, existe $C_\xi > 0$ verificando as seguintes condições de crescimento:

$$|f(s)| \leq \xi|s|^{p-1} + C_\xi|s|^q \quad \forall \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$|F(s)| \leq \frac{\xi}{p}|s|^p + \frac{C_\xi}{q+1}|s|^{q+1} \ \ \forall \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

com $p - 1 < q < p^* - 1$, de onde obtemos:

$$E_\mu(u) \geq \frac{\|u\|_\mu^p}{p} - \frac{\xi}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \frac{C_\xi}{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1}.$$

Decorre das imersões contínuas de Sobolev que

$$E_\mu(u) \geq \frac{\|u\|_\mu^p}{p} - \frac{\xi C\|u\|_\mu^p}{p} - \frac{C_\xi C\|u\|_\mu^{q+1}}{q+1},$$

portanto, existem números reais positivos ξ, α e r tais que

$$E_\mu(u) \geq \alpha > 0, \quad \forall \ \ u \in W_\mu, \quad com \quad \|u\|_\mu = r.$$

Agora de (f_4), temos

$$F(s) \geq C_1|s|^\theta - C_2, \quad \forall \ \ s \geq 0, \tag{1.3}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com supp $\psi \subset B_2(0)$ e $t > 0$, encontramos

$$E_\mu(t\psi) \leq \frac{t^p\|\psi\|_\mu^p}{p} - t^\theta C_1 \int_{B_2(0)} |\psi|^\theta + C_2|B_2(0)|.$$

Desde que $p < \theta$, passando ao limite de $t \to +\infty$, obtemos $E_\mu(t\psi) \to -\infty$, de onde concluímos que existe $t_0 > 0$ tal que $\tilde{u} = t_0\psi \in W_\mu$ e $E_\mu(\tilde{u}) < 0$. ■

Em vista do Lema 1.1, podemos aplicar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale (Lema A.1 no apêndice) e concluir que existe uma seqüência (u_n) em W_μ tal que

$$E_\mu(u_n) \to c_\mu \quad e \quad E'_\mu(u_n) \to 0$$

com

$$0 < c_\mu = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq\ t\leq 1} \ E_\mu(\gamma(t)).$$

Usando um raciocínio semelhante ao encontrado em [53](Proposição 3.11), temos a seguinte caracterização de c_μ, a qual é mais adequada para os nossos propósitos, dado por

$$c_\mu = \inf_{u\in W_\mu\backslash\{0\}} \sup_{t\geq 0} E_\mu(tu) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\mu} E_\mu(u).$$

Observe que com esta caracterização, E_μ é limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\mu$. Além disso, para cada $u \in W_\mu\backslash\{0\}$, existe um único $t_0 = t(u)$ tal que

$$E_\mu(t_0 u) = \max_{t\geq 0} E_\mu(tu).$$

O próximo Lema descreverá propriedades importantes de uma sêqüência Palais-Smale para o funcional E_μ.

Lema 1.2 *Seja (u_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para E_μ . Então*
a) (u_n) é limitada em W_μ
b) $u_n \rightharpoonup u$ em W_μ, a menos de subseqüência
c) $E'_\mu(u) = 0$
d) $u_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seguindo as idéias de Rabinowitz [53], existe $C > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$E_\mu(u_n) - \frac{1}{\theta} E'_\mu(u_n)u_n \leq C + \|u_n\|,\ \forall\ n \geq n_0.$$

Usando esta desigualdade, concluimos que (u_n) é limitada em W_μ. Da reflexividade de W_μ, segue-se que, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u$ em W_μ. Portanto, $u_n \to u$ em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ com $p-1 \leq r < p^*$. Usando um argumento similar ao encontrado em [38], [47] e [57], temos

$$u_n(x) \to u(x) \quad q.t.p \quad em \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Com as mesmas idéias contidas em [2], prova-se que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n.\nabla w \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla w \quad \forall \ \ w \in W_\mu,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu|u_n|^{p-2}u_n w \to \int_{\mathbb{R}^N} \mu|u|^{p-2}uw \quad \forall \ \ w \in W_\mu,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)w \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)w \quad \forall \ \ w \in W_\mu$$

e portanto,

$$E'_\mu(u) = 0.$$

Desde que (u_n) é limitada, segue-se que $u_n^- = u_n^+ - u_n$ é também limitada. Então,

$$E'_\mu(u_n)(-u_n) = o_n(1). \tag{1.4}$$

De (1.4) e da hipótese (f_1), obtemos

$$\|u_n^-\|_\mu = o_n(1). \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5), encontramos

$$E_\mu(u_n) = E_\mu(u_n^+) + o_n(1)$$

e

$$E'_\mu(u_n) = E'_\mu(u_n^+) + o_n(1).$$

Portanto, qualquer seqüência $(P.S)$ para E_μ pode ser considerada uma seqüência de funções não negativas. ∎

Observe que o Lema 1.2 não nos permite concluir que o ponto crítico u de E_μ é não trivial. O próximo Lema descreve um comportamento da sequência Palais-Smale para o funcional E_μ e será usado para obtermos uma solução não trivial para o problema autônomo.

Lema 1.3 *Seja E_μ o funcional associado a (P_μ) e (u_n) uma seqüência $(PS)_d$ para E_μ com $u_n \rightharpoonup 0$. Então somente uma das alternativas ocorre:*
a) $u_n \to 0$ em W_μ
ou
b) Existe uma seqüência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes R , $\beta > 0$ tais que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Suponha que b) não ocorre. Assim, para todo $R > 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^p = 0$$

e desde que (u_n) é limitada em W_μ , segue-se de um resultado devido a Lions (Lema A.3 no apêndice) que

$$u_n \to 0 \ \ em \ \ L^s(\mathbb{R}^N) \ \ com \ \ p < s < p^*.$$

Da condição de crescimento (1.1) sobre f, temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n \leq \xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + C_\xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q+1}$$

e então

$$0 \leq \|u_n\|_\mu^p = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n + o_n(1) \leq \xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + o_n(1)$$

o que implica

$$u_n \to 0 \ em \ W_\mu$$

e portanto, a) ocorre. ■

Observação 1.1 *O resultado continua válido se trocarmos a hipótese de (u_n) ser uma seqüência $(P.S)_d$ para E_μ por $E_\mu(u_n) \to d$ e $E'_\mu(u_n)u_n = 0, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.1 *Sob as hipóteses $(f_1) - (f_5)$, o problema (P_μ), com $\mu > 0$, possui uma solução positiva Ground-State $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Se o limite fraco u da seqüência $(PS)_c$ para o funcional E_μ for não trivial, então do Lema 1.2, u é solução fraca do problema (P_μ). Portanto,

$$E'_\mu(u)(u^-) = \|u^-\|_\mu^p = 0$$

e assim, $u(x) \geq 0$, $\forall \ x \in \mathbb{R}^N$. Por Li Gongbao [39](Teorema 1.11),

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \ e \ u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \ com \ 0 < \alpha < 1.$$

Da desigualdade de Harnack [37], $u(x) > 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N$. Considerando $u \equiv 0$, não podemos ter $u_n \to 0$, pois da continuidade do funcional E_μ, segue-se que $c = 0$, o que é um absurdo. Assim, do Lema 1.3, existe uma seqüência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes positivas β e R tais que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0.$$

Definindo $v_n = u_n(x + y_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que (v_n) é limitada em W_μ e portanto , da reflexividade deste espaço, a menos de subseqüência, $v_n \rightharpoonup v$ em W_μ. Além disso, usando as imersões compactas de Sobolev, temos

$$\int_{B_R(0)} |v|^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^p = \liminf_{n\to 0} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0,$$

conseqüentemente, $v \neq 0$. Observe também que

$$E_\mu(v_n) = E_\mu(u_n) = c + o_n(1)$$

e além disso, para todo $\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| \leq 1$, segue-se que

$$|E'_\mu(v_n(x))\psi(x)| = |E'_\mu(u_n(x + y_n)\psi(x)| = |E'_\mu(u_n(z))\psi(z - y_n)|,$$

de onde encontramos

$$\|E'_\mu(v_n)\| = \|E'_\mu(u_n)\| = o_n(1).$$

Portanto, (v_n) é uma seqüência $(PS)_c$ para E_μ e v é solução positiva do problema (P_μ) com $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos que esta solução é Ground-State. De fato, desde que v é solução não trivial, segue-se que $v \in \mathcal{N}_\mu$ e assim $c \leq E_\mu(v)$. Além disso,

$$c \leq E_\mu(v) = E_\mu(v) - \frac{1}{p}E'_\mu(v)v = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p}f(v) - F(v)\right]$$

e do Lema de Fatou,

$$c \leq E_\mu(v) \leq \liminf_{n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v_n) - F(v_n) \right] = \liminf_{n \to 0} E_\mu(v_n) = c,$$

mostrando que

$$E_\mu(v) = c.$$

■

1.2.2 O Problema (P_ϵ) com $\epsilon = 1$

Nos argumentos usados para obtermos a condição $(P.S)$ do funcional associado ao problema (P_ϵ), as propriedades dos níveis de energia mínima são muito importantes. Por isso , vamos começar com um caso independente de ϵ. Considere o problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \ N > p \geq 2 \end{cases}$$

e seja $W = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p < \infty\}$.
Temos que W é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p.$$

Seja $I : W \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a (P) e definido por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Com os mesmos argumentos dos Lemas 1.1 e 1.2, I verifica as condições (H_1) e (H_2) do Teorema do Passo da Montanha e portanto, existem $(u_n) \subset W$ uma seqüência $(P.S)_c$ para I e $u \in W$ tal que, $u_n \rightharpoonup u$ e $I'(u) = 0$, isto é , u é solução fraca do problema (P).

As duas proposições seguintes são de fundamental importância para mostrarmos a validade da condição $(P.S)$ para o funcional I, abaixo de um nível fixado.

Proposição 1.1 *Se* (u_n) *é uma seqüência* $(P.S)_c$ *para* I *em* W *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* W*, então*

$$I(v_n) = I(u_n) - I(u) + o_n(1)$$

e

$$I'(v_n) = o_n(1)$$

onde $v_n = u_n - u$.

Demonstração: Decorre do Lema de Brézis-Lieb ([42], Lema 4.6) que

$$\|v_n\|^p = \|u_n\|^p - \|u\|^p + o_n(1)$$

e de um resultado de Alves, Carrião e Medeiros [5](Lemas 2.2, 2.3 e 3.1), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) + o_n(1),$$

portanto,

$$I(v_n) = I(u_n) - I(u) + o_n(1).$$

Agora, observe que

$$\| I'(v_n) \| = o_n(1)$$

é equivalente a

$$\| I'(v_n) - I'(u_n) + I'(u) \| = o_n(1).$$

Assim, para toda $\phi \in W$ com $\| \phi \| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \Big|[I'(v_n) - I'(u_n) + I'(u)]\phi\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \Big[|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big].\nabla\phi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\Big[|v_n|^{p-2}v_n - |u_n|^{p-2}u_n + |u|^{p-2}u\Big]\phi \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \Big[f(v_n) - f(u_n) + f(u)\Big]\phi\Big|. \end{aligned}$$

Segue da desigualdade triangular

$$\begin{aligned}\Big|[I'(v_n) - I'(u_n) + I'(u)]\phi\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big||\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + |\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla\phi|\Big| \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (V(x))^{\frac{p-1}{p}}\Big||v_n|^{p-2}v_n - |u_n|^{p-2}u_n + |u|^{p-2}u\Big||(V(x))^{\frac{1}{p}}\phi| \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)||\phi|.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}&\Big|[I'(v_n) - I'(u_n) + I'(u)]\phi\Big| \\ \leq\ & \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Big||\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ +\ & \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\Big||v_n|^{p-2}v_n - |u_n|^{p-2}u_n + |u|^{p-2}u\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ +\ & \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n) - f(u_n) + f(u)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^s\right)^{\frac{1}{s}},\end{aligned}$$

portanto, completando a norma de ϕ em W, das imersões contínuas de Sobolev e do fato que $\|\phi\| \leq 1$, encontramos

$$\begin{aligned}\Big|[I'(v_n) - I'(u_n) + I'(u)]\phi\Big| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Big|\mid\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - \mid\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + \mid\nabla u\mid^{p-2}\nabla u\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\Big|\mid v_n|^{p-2}v_n - \mid u_n|^{p-2}u_n + \mid u\mid^{p-2} u\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mid f(v_n) - f(u_n) + f(u)\mid^r\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Novamente, por um resultado de Alves [3](Lema 3), obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \Big|\mid\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - \mid\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + \mid\nabla u\mid^{p-2}\nabla u\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \mid\mid v_n|^{p-2}v_n - \mid u_n|^{p-2}u_n + \mid u\mid^{p-2} u\mid^{\frac{p}{p-1}} = o_n(1).$$

Temos ainda de [5](Lemas 2.2, 2.3 e 3.1),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mid f(v_n) - f(u_n) + f(u)\mid^r\right)^{\frac{1}{r}} = o_n(1),$$

com $\frac{p}{p-1} \leq r \leq \frac{p^*}{q}$. Portanto,

$$\| I'(v_n) \| = o_n(1).$$

■

Proposição 1.2 *Considere $V_\infty < \infty$ e (v_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para I em W. Se (v_n) converge fraco para 0 em W e não converge forte para 0 em W, então $d \geq c_\infty$.*

Demonstração: Seja $t_n \in (0, +\infty)$ tal que $(t_n v_n) \subset \mathcal{N}_{V_\infty}$. Vamos agora demonstrar a seguinte afirmação :

Afirmação 1

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq 1.$$

Demonstração da Afirmação 1: Suponhamos por contradição que, para alguma subseqüência ainda denotada por (t_n), tem-se

$$t_n \geq 1 + \delta, \quad \forall \ \ n \in \mathbb{N} \ \ e \ \ para \ \ algum \ \ \delta > 0.$$

Observe agora que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big[| \nabla v_n |^p + V(x) \mid v_n |^p \Big] = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n + o_n(1)$$

e

$$t_n^p \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \Big[| \nabla v_n |^p + V_\infty \mid v_n |^p \Big] \Big) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t_n v_n) t_n v_n.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla v_n |^p = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \mid v_n |^p + o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla v_n |^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_n v_n) v_n}{t_n^{p-1}} - \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \mid v_n |^p .$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{f(t_n v_n)(v_n)^p}{(t_n v_n)^{p-1}} - \frac{f(v_n)(v_n)^p}{(v_n)^{p-1}} \Big] = \int_{\mathbb{R}^N} [V_\infty - V(x)] \mid v_n |^p + o_n(1).$$

Segue-se da hipótese (V), que dado $\epsilon > 0$, existe $R = R(\epsilon) > 0$ tal que $V(x) \geq V_\infty - \epsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x| \geq R$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{f(t_nv_n)(v_n)^p}{(t_nv_n)^{p-1}} - \frac{f(v_n)(v_n)^p}{(v_n)^{p-1}}\Big] &\leq \int_{|x|\leq R}[V_\infty - V(x)] \mid v_n \mid^p \\ &+ \epsilon\int_{|x|\geq R} \mid v_n \mid^p + o_n(1).\end{aligned}$$

Das imersões contínuas de Sobolev, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{f(t_nv_n)}{(t_nv_n)^{p-1}} - \frac{f(v_n)}{(v_n)^{p-1}}\Big](v_n)^p \leq \int_{|x|\leq R}[V_\infty - V(x)] \mid v_n \mid^p + \epsilon C + o_n(1).$$

Desde que V é contínua, das imersões compactas de Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{f(t_nv_n)}{(t_nv_n)^{p-1}} - \frac{f(v_n)}{(v_n)^{p-1}}\Big](v_n)^p \leq \epsilon C + o_n(1).$$

Por um argumento semelhante empregado no Lema 1.3, podemos demonstrar que existe uma seqüência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e números reais $\check{R}, \beta > 0$ tais que

$$\int_{|y_n|\leq \check{R}} \mid v_n \mid^p \geq \beta. \tag{1.6}$$

Considerando $\check{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$, desde que $v_n(x) \geq 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N$, temos que $\check{v}_n(x) \geq 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N$. Da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, concluimos que $(\check{v}_n)$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, passando a uma subseqüência, $\check{v}_n \rightharpoonup \check{v}$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, da desigualdade (1.6), segue-se que $\check{v} > 0$ em Ω com $\mid \Omega \mid > 0$. Conseqüentemente, usando a hipótese (f_5) e o Lema de Fatou

$$0 < \int_{\Omega}\Big[\frac{f((1+\delta)\check{v})}{((1+\delta)\check{v})^{p-1}} - \frac{f(\check{v})}{\check{v}^{p-1}}\Big]\check{v}^p \leq \epsilon\ C, \quad \forall\ \ \epsilon > 0,$$

o que é um absurdo. Logo $\limsup_{n\to\infty}\ t_n \leq 1$.

Voltando a demonstração da Proposição, vamos considerar dois casos:

i) Existe uma subseqüência de (t_n), que ainda chamaremos de (t_n), tal que $t_n \to 1$. Neste caso,

$$d + o_n(1) = I(v_n) = E_{V_\infty}(t_nv_n) + I(v_n) - E_{V_\infty}(t_nv_n),$$

ou seja,

$$d + o_n(1) = I(v_n) \geq c_{V_\infty} + I(v_n) - E_{V_\infty}(t_nv_n). \tag{1.7}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1-t_n^p)}{p} |\nabla v_n|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^p - \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |v_n|^p \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)].
\end{aligned}
$$

Para qualquer $R > 0$, usando a continuidade da V e as imersões compactas de Sobolev, temos

$$
\frac{1}{p}\int_{|x|\le R} V(x)|v_n|^p = o_n(1)
$$

e

$$
\frac{t_n^p}{p}\int_{|x|\le R} V_\infty |v_n|^p = o_n(1).
$$

Desde que (v_n) é limitada em W, segue-se

$$
\frac{(1-t_n^p)}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p = o_n(1).
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) &= o_n(1) + \frac{1}{p}\int_{|x|\ge R} V(x) \mid v_n \mid^p - \frac{t_n^p}{p}\int_{|x|\ge R} V_\infty \mid v_n \mid^p \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)].
\end{aligned}
$$

Para R suficientemente grande e usando a hipótese (V), encontramos

$$
\begin{aligned}
I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) &\ge o_n(1) + \frac{1}{p}\int_{|x|\ge R} (V_\infty - \epsilon) \mid v_n \mid^p - \frac{t_n^p}{p}\int_{|x|\ge R} V_\infty \mid v_n \mid^p \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)],
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) &\ge o_n(1) + \frac{(1-t_n^p)}{p}\int_{|x|\ge R} V_\infty \mid v_n \mid^p - \frac{\epsilon}{p}\int_{|x|\ge R} \mid v_n \mid^p \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) \ge o_n(1) - C\epsilon + \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)].
$$

Substituindo esta desigualdade em (1.7), obtemos:

$$d + o_n(1) \geq c_{V_\infty} - C\epsilon + o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)].$$

Afirmação 2

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)] = o_n(1).$$

Considerando por um momento a afirmação 2, temos

$$d + o_n(1) \geq c_{V_\infty} - C\epsilon + o_n(1).$$

Passando ao limite de $n \to \infty$ e, em seguida, ao limite de $\epsilon \to 0$, obtemos:

$$d \geq c_{V_\infty}.$$

O outro caso a considerar é :

$ii)$ Existe uma subseqüência de (t_n), que ainda chamaremos de (t_n), tal que $t_n \to t_0 < 1$.

Neste caso, podemos considerar sem perda de generalidade $t_n < 1, \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}$. Além disso, observe que

$$c_{V_\infty} \leq E_{V_\infty}(t_n v_n) = E_{V_\infty}(t_n v_n) - \frac{1}{p} E'_{V_\infty}(t_n v_n)(t_n v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(t_n v_n)(t_n v_n) - F(t_n v_n)\right].$$

Desde que a função $h(s) = \dfrac{1}{p} f(s)s - F(s)$ é não decrescente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(t_n v_n)(t_n v_n) - F(t_n v_n)\right] \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v_n)(v_n) - F(v_n)\right],$$

o que implica,

$$c_{V_\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v_n)(v_n) - F(v_n)\right] = I(v_n) - \frac{1}{p} I'(v_n)(v_n) = d + o_n(1),$$

e assim o resutado segue. ∎

Demonstração da Afirmação 2: Do Teorema do Valor Médio,

$$\mid F(t_n v_n) - F(v_n) \mid = \mid F'(\theta_n) \mid \mid t_n - 1 \mid \mid v_n \mid$$

onde $\theta_n \in (v_n, t_n v_n)$ ou $\theta_n \in (t_n v_n, v_n)$. Da condição de crescimento (1.1) sobre f, temos

$$\mid F'(\theta_n) \mid = \mid f(\theta_n) \mid \leq \xi \mid \theta_n \mid^{p-1} + C_\xi \mid \theta_n \mid^q .$$

Além disso,

$$\mid \theta_n \mid^{p-1} \leq \Big[\mid v_n \mid + \mid t_n \mid\mid v_n \mid \Big]^{p-1} \leq C \mid v_n \mid^{p-1} .$$

Da mesma forma

$$\mid \theta_n \mid^q \leq C \mid v_n \mid^q .$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid F(t_n v_n) - F(v_n) \mid \leq C \mid t_n - 1 \mid \int_{\mathbb{R}^N} \mid v_n \mid^p + C \mid t_n - 1 \mid \int_{\mathbb{R}^N} \mid v_n \mid^q .$$

Do fato que (v_n) é limitada em W e $t_n \to 1$, encontramos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)] = o_n(1).$$

■

Corolário 1.1 *Se (v_n) é uma seqüência $(P.S)_d$ para I tal que $v_n \rightharpoonup 0$ e $d < c_{V_\infty}$, então $v_n \to 0$ em W.*

Demonstração : É uma conseqüência imediata da Proposição 1.2. ■

Proposição 1.3 *O funcional I verifica a condição $(P.S)_c$, com $c < c_{V_\infty}$ quando $V_\infty < \infty$ e para todo $c \in \mathbb{R}$ quando $V_\infty = \infty$.*

Demonstração : Considere (u_n) uma seqüência $(P.S)_c$ para I. Assim,

$$I(u_n) \to c \ \ e \ \ I'(u_n) = o_n(1).$$

Portanto, (u_n) é limitada em W, a menos de subseqüência, temos $u_n \rightharpoonup u$ em W e $I'(u) = 0$. Considerando $v_n = u_n - u$, da Proposição 1.1, segue-se que (v_n) é uma seqüência $(P.S)_d$ para I e $I(v_n) = I(u_n) - I(u) + o_n(1)$.

Vamos estudar primeiro o caso $V_\infty < \infty$. Desde que

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{p}I'(u)(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{p}f(u)u - F(u)] \geq 0,$$

concluímos que $d \leq c < c_{V_\infty}$. Logo, do Corolário 1.1, $v_n \to 0$ em W, isto é, $u_n \to u$ em W.

No caso em que $V_\infty = \infty$, segue-se que V é coercivo e por um resultado de Omana e Willem [51], que também foi demonstrado por Costa [25], $W \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ com imersão compacta para $p \leq s < p^*$. Portanto, passando a uma subseqüência, $v_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ e da condição de crescimento (1.1) sobre a f, segue-se que

$$\| v_n \|^p = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n = o_n(1)$$

e o resultado segue. ■

Vamos agora demonstrar a condição $(P.S)$ para o funcional associado ao problema (P_ϵ). Salientamos que a demonstração deste resultado é uma versão bastante diferente da versão de Cingolani e Lazzo [26].

Considere o problema

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \ N > p \geq 2 \end{cases}$$

e seja $W_\epsilon = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p < \infty\}$.
Temos que W_ϵ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p.$$

Seja $I_\epsilon : W_\epsilon \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a (P_ϵ) e definido por

$$I_\epsilon(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Corolário 1.2 *O funcional I_ϵ verifica a condição $(P.S)_c$, com $c < c_{V_\infty}$ quando $V_\infty < \infty$ e para todo $c \in \mathbb{R}$ quando $V_\infty = \infty$.*

Demonstração : A demonstração segue o mesmo raciocínio da Proposição 1.3, considerando no lugar de V a função $V_\epsilon(x) = V(\epsilon x)$. ■

Corolário 1.3 *O funcional I_ϵ verifica a condição $(P.S)_c$ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$, com $c < c_{V_\infty}$ quando $V_\infty < \infty$ e para todo $c \in \mathbb{R}$ quando $V_\infty = \infty$.*

Demonstração : Seja (u_n) uma seqüência em $\mathcal{N}_\epsilon$ tal que

$$I_\epsilon(u_n) \to c \quad e \quad \|I'_\epsilon(u_n)\|_* = o_n(1).$$

Do Lema 5.12 em [58], existe uma seqüência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ verificando

$$I'_\epsilon(u_n) = \lambda_n J'(u_n) + o_n(1),$$

onde

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u.$$

Conseqüentemente,

$$0 = I'_\epsilon(u_n)u_n = \lambda_n J'(u_n)u_n + o_n(1).$$

Observe que

$$J'(u_n)u_n = p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + p\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_n)(u_n)^2,$$

ou seja,

$$J'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} (p-1)f(u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_n)(u_n)^2.$$

Usando a hipótese (f_6), obtemos:

$$J'(u_n)u_n \leq -C\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\sigma < 0,$$

com $\sigma \in (p, p^*)$. Portanto,

$$|J'(u_n)u_n| = -J'(u_n)u_n \geq C\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\sigma > 0.$$

Supondo, por contradição, que

$$|J'(u_n)u_n| = o_n(1),$$

segue-se que $u_n \to 0$ em $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ e da desigualdade da interpolação

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^{q+1}(\mathbb{R}^N).$$

Da condição de crescimento (1.1) sobre f, obtemos:

$$u_n \to 0 \quad em \quad W_\epsilon,$$

o que contradiz o fato de existir $\alpha > 0$ tal que $\| u \|_\epsilon \geq \alpha > 0, \forall\, u \in \mathcal{N}_\epsilon$.

Logo, $\lambda_n = o_n(1)$ e conseqüentemente, $I'_\epsilon(u_n) = o_n(1)$. Assim, (u_n) é uma seqüência $(P.S)_c$ para I_ϵ em W_ϵ e do Corolário 1.2, (u_n) possui uma subseqüência convergente. ∎

No próximo Teorema, mostraremos a existência de solução para o problema (P_ϵ). Este resultado de existência é uma adaptação do Teorema 1 de Alves e Souto [12], cuja versão original é para um problema com $p = 2$ e crescimento crítico.

Teorema 1.2 *Sob as hipóteses $(f_1)-(f_5)$, existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, o problema (P_ϵ) possui uma solução positiva Ground-State $u_\epsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração : Usando os mesmos argumentos explorados para o problema autônomo, existe (u_n) uma seqüência $(P.S)$ para I_ϵ. Se $V_\infty = \infty$, então do Corolário 1.2 e um raciocínio similar empregado no Teorema 1.1, o problema (P_ϵ) possui uma solução positiva Ground-State $u_\epsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.
Para o caso $V_\infty < \infty$, considere c_ϵ o nível minimax de I_ϵ. Portanto, pelo Corolário 1.2, é suficiente demonstrarmos que $c_\epsilon < c_{V_\infty}$. De fato, considere $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $V_0 < \mu < V_\infty$. Portanto, para todo $t \geq 0$ e para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, encontramos

$$E_{V_0}(tu) < E_\mu(tu) < E_{V_\infty}(tu),$$

conseqüentemente

$$c_{V_0} < c_\mu < c_{V_\infty}. \tag{1.8}$$

Seja $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma solução Ground-State do problema (P_μ). Definimos a seguinte função corte:

Para cada $r > 0$, seja $\eta_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \eta_r(x) \leq 1, \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\eta_r(x) = \begin{cases} 1 \quad se \quad x \in B_r(0) \\ \\ supp \ \eta_r \subset B_{2r}(0). \end{cases}$$

Considere $w_r(x) = \eta_r(x)w(x)$ e $t_r > 0$ tal que

$$E_\mu(t_r w_r) = \max_{t \geq 0} E_\mu(t w_r)$$

e seja $\widehat{w} = t_r w_r$. Afirmamos que existe r suficiente grande tal que

$$E_\mu(\widehat{w}) < c_{V_\infty}, \tag{1.9}$$

pois caso contrário, isto é, se $E_\mu(\widehat{w}) \geq c_{V_\infty}$ para todo $r > 0$, desde que $w_r \to w$ em W_μ, segue-se que $t_r \to 1$ e então

$$c_\infty \leq \liminf_{r \to \infty} E_\mu(\widehat{w}) = \liminf_{r \to \infty} E_\mu(t_r w_r) = E_\mu(w) = c_\mu,$$

o que é uma contradição com a desigualdade (1.8).

Da hipótese (V), dado $\epsilon > 0$, existe $\overline{\epsilon} > 0$ tal que

$$V(\epsilon x) - V_0 < \epsilon, \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}) \ \ e \ \ \forall \ \ x \in supp \ \widehat{w}.$$

Portanto,

$$V(\epsilon x) < V_0 + \epsilon, \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}) \ \ e \ \ \forall \ \ x \in supp \ \widehat{w}.$$

Considere $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$V_0 + \epsilon \leq \mu \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}).$$

Assim,

$$V(\epsilon x) \leq \mu, \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}) \ \ e \ \ \forall \ \ x \in supp \ \widehat{w}$$

mostrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) \mid \widehat{w} \mid^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mu \mid \widehat{w} \mid^p \quad \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}).$$

Conseqüentemente,

$$I_\epsilon(t\widehat{w}) \leq E_\mu(t\widehat{w}), \quad \forall \ \ t \geq 0 \ \ e \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}),$$

ou ainda,

$$I_\epsilon(t\widehat{w}) \leq \max_{t \geq 0} E_\mu(t\widehat{w}) = E_\mu(\widehat{w}), \quad \forall \ \ t \geq 0 \ \ e \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}).$$

Logo, da desigualdade (1.9),

$$c_\epsilon \leq E_\mu(\widehat{w}) < c_{V_\infty}.$$

■

1.3 Multiplicidade de Soluções Envolvendo $cat_{M_\delta}(M)$

Nesta seção, vamos demonstrar alguns resultados que vão relacionar o conjunto M dos mínimos do potencial V e a topologia de um subconjunto de W_ϵ.

Seja $\delta > 0$ fixado e $\eta \in C_0^\infty([0, \infty))$ tal que $0 \leq \eta(s) \leq 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$\eta(s) = \begin{cases} 1 \ \ se \ \ 0 \leq s \leq \frac{\delta}{2} \\ \\ 0 \ \ se \ \ s \ \ \geq \ \ \delta. \end{cases}$$

Considere $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma solução Ground-State do problema autônomo

$$(P_{V_0}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V_0 u^{p-1} = f(u) \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N, \ \ N > p \geq 2. \end{cases}$$

Para cada $y \in M$, seja

$$\Psi_{\epsilon,y}(x) = \eta(|\ \epsilon x - y\ |)w\Big(\frac{\epsilon x - y}{\epsilon}\Big).$$

Observe que, para cada $y \in M$, a função $\Psi_{\epsilon,y}$ tem suporte compacto e conseqüentemente $\Psi_{\epsilon,y} \in W_\epsilon$. Agora, para cada $\epsilon > 0$, seja $t_\epsilon > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I_\epsilon(t\Psi_{\epsilon,y}) = I_\epsilon(t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}).$$

Definamos a aplicação Φ_ϵ por

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\epsilon : M & \rightarrow & \mathcal{N}_\epsilon \\ y & \longmapsto & \Phi_{\epsilon,y} = t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}. \end{array}$$

Lema 1.4 *Seja $M = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_0\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) = c_{V_0},\ uniformemente\ em\ y \in M.$$

Demonstração: Suponha por contradição que o Lema não vale, então existem $\delta_0 > 0$ e uma seqüência $(y_n) \subset M$ tais que

$$|\ I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) - c_{V_0}\ |\ \geq \delta_0\ \ onde\ \ \epsilon_n \to 0\ \ quando\ \ n \to \infty. \tag{1.10}$$

Observe que

$$I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p + \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n}) \tag{1.11}$$

e

$$I'_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n})\Phi_{\epsilon_n,y_n} = 0.$$

Portanto, usando a definição de $\Psi_{\epsilon,y}$ e a mudança de variável $z = \dfrac{(\epsilon_n x - y_n)}{\epsilon_n}$, obtemos:

$$\begin{aligned} I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) &= \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta(|\epsilon_n z|)w(z))|^p + \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|\eta(|\ \epsilon_n z|)w(z)|^p \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} F(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z)) \end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z))}{(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z))^{p-1}}|\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p \tag{1.12}$$

Além disso, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \| \Psi_{\epsilon_n,y_n} \|_{\epsilon_n}^p = \| w \|_{V_0}^p, \tag{1.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(\Psi_{\epsilon_n,y_n})\Psi_{\epsilon_n,y_n} = \int_{\mathbb{R}^N} f(w)w$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(\Psi_{\epsilon_n,y_n}) = \int_{\mathbb{R}^N} F(w).$$

Mostraremos agora que, a menos de subseqüência, $t_{\epsilon_n} \to 1$. De fato, desde que $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{\delta}{2}}(0)$ e $B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset B_{\frac{\delta}{2\epsilon_n}}(0)$, para n suficientemente grande, de (1.12) obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n} |^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n) | \Psi_{\epsilon_n,y_n} |^p \geq \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} \frac{f(t_{\epsilon_n}w(z))}{(t_{\epsilon_n}w(z))^{p-1}}|w(z)|^p.$$

Da continuidade de w, existe $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$w(\bar{z}) = \min_{\bar{B}_{\frac{\delta}{2}}(0)} w(z).$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n} |^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n) | \Psi_{\epsilon_n,y_n} |^p \geq \frac{f(t_{\epsilon_n}w(\bar{z}))}{(t_{\epsilon_n}w(\bar{z}))^{p-1}} \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)} |w(z)|^p.$$

Supondo por contradição que exista uma subseqüência de (t_{ϵ_n}), que ainda chamaremos de (t_{ϵ_n}), com $|t_{\epsilon_n}| \to \infty$, usando a hipótese (f_4) e passando ao limite de $n \to \infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \| \Psi_{\epsilon_n,y_n} \|_{\epsilon_n}^p = \infty,$$

o que é um absurdo por (1.13). Assim, (t_{ϵ_n}) é limitada e passando a uma subseqüência, $t_{\epsilon_n} \to t_0$, com $t_0 \geq 0$. Observe que $t_0 > 0$, pois se $t_0 = 0$, da condição de crescimento (1.1) sobre a f , da limitação de (Ψ_{ϵ_n,y_n}) e de (1.13) segue-se que $w \equiv 0$, o que é um absurdo. Logo, passando ao limite de $n \to \infty$ em (1.12), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla w |^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0 \, | w |^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0 w)w}{t_0^{p-1}}.$$

Desde que $w \in \mathcal{N}_{V_0}$, segue-se que $t_0 = 1$. Agora, passando ao limite de $n \to \infty$ em (1.11), temos

$$\lim_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n, y_n}) = E_{V_0}(w) = c_{V_0},$$

contradizendo (1.10). ∎

Considere $\rho > 0$ tal que $M_\delta \subset B_\rho(0)$ e $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} x \quad se \quad |\, x \,| \leq \rho \\ \dfrac{\rho x}{|\, x \,|} \quad se \quad |\, x \,| \geq \rho. \end{cases}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \beta \ : \ \mathcal{N}_\epsilon \ &\to \mathbb{R}^N \\ u \quad &\longmapsto \quad \beta(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x) \mid u(x) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid u(x) \mid^p}, \end{aligned}$$

$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $h(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ e

$$\widetilde{\mathcal{N}_\epsilon} = \{u \in \mathcal{N}_\epsilon : I_\epsilon(u) \leq c_{V_0} + h(\epsilon)\}.$$

Temos que $\widetilde{\mathcal{N}_\epsilon} \neq \emptyset$, pois do Lema 1.4, segue-se que $I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) = c_{V0} + o_\epsilon(1)$ e assim, definindo

$$h(\epsilon) = \mid o_\epsilon(1) \mid = \mid I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) - c_{V_0} \mid$$

para y fixado, temos

$$h(\epsilon) \to 0 \ \ quando \ \ \epsilon \to 0$$

e

$$I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) - c_{V_0} \leq \mid I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) - c_{V_0} \mid = \mid o_\epsilon(1) \mid = h(\epsilon).$$

Portanto,

$$I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) \leq c_{V_0} + h(\epsilon) \ \ e \ \ \Phi_{\epsilon,y} \in \widetilde{\mathcal{N}_\epsilon}.$$

Lema 1.5 *Seja $M = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_0\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \beta(\Phi_{\epsilon,y}) = y, \ \ uniformemente \ \ em \ \ y \ \in M.$$

Demonstração: Suponha por contradição que o Lema não vale, então existem $\delta_0 > 0$ e uma seqüência $(y_n) \subset M$ tais que

$$| \beta(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) - y_n | \geq \delta_0, \ \ onde \ \ \epsilon_n \to 0 \ \ quando \ \ n \to \infty. \tag{1.14}$$

Observe que

$$\beta(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n x) \mid \Phi_{\epsilon_n,y_n} \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid \Phi_{\epsilon_n,y_n} \mid^p}$$

e conseqüentemente,

$$\beta(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n x) t_n^p \mid \eta(\mid \epsilon_n x - y_n \mid) w(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} t_n^p \mid \eta(\mid \epsilon_n x - y_n \mid) w(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}) \mid^p}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, encontramos

$$\beta(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n z + y_n) \mid \eta(\mid \epsilon_n z \mid) w(z) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid \eta(\mid \epsilon_n z \mid) w(z) \mid^p}$$

o que implica

$$\beta(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = y_n + \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} [\chi(\epsilon_n z + y_n) - y_n] \mid \eta(\mid \epsilon_n z \mid) w(z) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid \eta(\mid \epsilon_n z \mid) w(z) \mid^p}.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$| \beta(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) - y_n | = o_n(1),$$

o que contradiz (1.14). ■

O próximo Lema mostra que uma seqüência minimizante sobre a variedade de Nehari é fortemente convergente, a menos de translação.

Lema 1.6 *(Um Lema de Compacidade) Considere* (u_n) *uma seqüência em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $E_\mu(u_n) \to c_\mu$ *e* $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$*. Então.*
a) (u_n) *possui uma subseqüência convergente em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
ou
b) existe uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ *tal que a seqüência* $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ *possui uma subseqüência convergente em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*.*
Em particular, existe um mínimo para c_μ*.*

Demonstração: Do Princípio Variacional de Ekeland(ver Teorema 8.5 em [58]), existe uma seqüência $(\hat{u}_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $(\hat{u}_n)$ é $(P.S)_\mu$ para E_μ em $\mathcal{N}_\mu$ e além disso, $\|\hat{u}_n - u_n\|_\mu = o_n(1)$. Com o mesmo tipo de argumentos usados no Corolário 1.3, temos que $(\hat{u}_n)$ é uma seqüência $(P.S)_\mu$ para E_μ em W_μ. Do Lema (1.2) segue-se que $(\hat{u}_n)$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, conseqüentemente, a menos de subseqüência,

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ e \ E'_\mu(\hat{u}) = 0.$$

Vamos supor primeiramente que $\hat{u} \neq 0$. Neste caso, do Teorema 1.1, $\hat{u}$ é uma solução Ground-State do problema (P_μ). Portanto, é suficiente demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu|\hat{u}_n|^p\right] = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu|\hat{u}|^p \tag{1.15}$$

pois, assim, com argumentos semelhantes explorados em [38], [47] e [57], encontramos

$$\hat{u}_n(x) \to \hat{u}(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Do Lema de Brézis-Lieb [42](Lema 4.6), temos

$$\hat{u}_n \to \hat{u} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto,

$$u_n \to \hat{u} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Vamos agora demonstrar (1.15). Observe que do Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big].$$

Afirmamos que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big] \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p,$$

pois caso contrário, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p < \limsup_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big] \tag{1.16}$$

e assim, passando a uma subseqüência,

$$c_\mu = (\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}) \limsup_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big] + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{\theta} f(\hat{u}_n)\hat{u}_n - F(\hat{u}_n) \Big].$$

Usando (1.16) e o Lema de Fatou, obtemos

$$c_\mu > (\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}) \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p \Big] + \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{\theta} f(\hat{u})\hat{u} - F(\hat{u}) \Big] = c_\mu,$$

o que é um absurdo. Portanto, a afirmação é verdadeira e o resultado segue.

Vamos considerar agora que $\hat{u} \equiv 0$. Desde que $(\hat{u}_n)$ não converge para 0 em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, do Lema 1.3, existem constantes positivas R, β e uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\int_{B_R(\tilde{y}_n)} |\hat{u}_n|^p \geq \beta > 0. \tag{1.17}$$

Considerando $\hat{v}_n(x) = \hat{u}_n(x + \tilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que $(\hat{v}_n)$ é uma seqüência $(P.S)_\mu$ para E_μ, $(\hat{v}_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ e além disso, a menos de subseqüência,

$$\hat{v}_n \rightharpoonup \hat{v} \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

com $\hat{v} \neq 0$ por (1.17). Portanto, da primeira parte desta demonstração,

$$\hat{v}_n \to \hat{v} \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Definindo $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação,

$$\|\hat{v}_n - v_n\|_\mu = \|\hat{u}_n - u_n\|_\mu = o_n(1).$$

Logo,

$$v_n \to \hat{v} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

■

A próxima Proposição substitui a Afirmação 4.2 de Cingolani e Lazzo [26] e será usada no resultado seguinte, o qual é fundamental para obtermos o resultado de multiplicidade, enunciado na introdução deste capítulo.

Proposição 1.4 *Seja (u_n) uma seqüência em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$I_{\epsilon_n}(u_n) \to c_{V_0} \ \ e \ \ I'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0, \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}$$

e com $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, existe uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que a seqüência $v_n(x) = u_n(x+\tilde{y}_n)$ possui uma subseqüência convergente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, passando a uma subseqüência, $y_n \to y \in M$, onde $y_n = \epsilon_n \tilde{y}_n$.

Demonstração: Afirmamos que existe uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ e reais positivos R e β tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} | u_n |^p \geq \beta > 0.$$

De fato, pois do contrário, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{R(y)}} | u_n |^p = 0, \ \ \forall \ \ R > 0.$$

Além disso, por argumentos bem conhecidos, prova-se que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e por um resultado devido a Lions (Lema A.3 no apêndice),

$$u_n \to 0 \ \ em \ \ L^s(\mathbb{R}^N) \ \ com \ \ p < s < p^*.$$

Desde que

$$\| u_n \|_{\epsilon_n}^p = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n,$$

da condição de crescimento (1.1) sobre f e das imersões contínuas de Sobolev

$$\| u_n \|_{\epsilon_n}^p = o_n(1)$$

e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(u_n) = 0 = c_{V_0},$$

o que é um absurdo. Considerando $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e da reflexividade deste espaço, a menos de subseqüência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Observe que

$$\int_{B_R(0)} | v |^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} | v_n |^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} | u_n |^p \geq \beta > 0,$$

de onde obtemos

$$v \neq 0.$$

Seja $t_n > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{v}_n = t_n v_n \in \mathcal{N}_{V_0}.$$

Assim,

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla \tilde{v}_n |^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) | \tilde{v}_n |^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}_n),$$

onde $y_n = \epsilon_n \tilde{y}_n$.
Fazendo uma mudança de variáveis, verifica-se que

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u_n |^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z) | u_n |^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n).$$

Logo,

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq I_{\epsilon_n}(t_n u_n) \leq I_{\epsilon_n}(u_n) = c_{V_0} + o_n(1),$$

e portanto,

$$E_{V_0}(\tilde{v}_n) \to c_{V_0} \quad e \quad (\tilde{v}_n) \subset \mathcal{N}_{V_0}.$$

Usando argumentos bem conhecidos , existe $K > 0$ satisfazendo

$$\| \tilde{v}_n \|_{V_0} \leq K, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

e assim, a menos de subseqüência,

$$\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}, \ \ para \ \ algum \ \ \tilde{v} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $\| v_n \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ não converge para 0, segue-se que existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta \leq \| v_n \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$, de onde obtemos,

$$0 \leq \ |t_n|\delta \ \leq \ \|t_n v_n\|_{V_0} \ = \ \|\tilde{v}_n\|_{V_0} \ \leq \ K,$$

o que implica

$$|t_n| \leq \frac{K}{\delta}.$$

Passando a uma subseqüência, temos

$$t_n \to t_0 \geq 0.$$

No entanto, $t_0 > 0$, pois se $t_0 = 0$, da limitação de (v_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$0 \ \leq \| \tilde{v}_n \|_{V_0} = \| t_n v_n \|_{V_0} \leq | \ t_n \ | \ K \to 0,$$

de onde concluímos

$$\tilde{v}_n \to 0 \ em \ W_{V_0}.$$

Da continuidade de E_{V_0} tem-se $c_{V_0} = 0$, o que é um absurdo.

Da unicidade do limite fraco, segue-se que $\tilde{v} = t_0 v$. Desde que $v \neq 0$, do Lema 1.6, temos

$$\tilde{v}_n \to t_0 v = \tilde{v} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \ e \ \ portanto \ \ v_n \to v \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \qquad (1.18)$$

Vamos demonstrar que, a menos de subseqüência, $y_n \to y$, com $y \in M$, onde $y_n = \epsilon_n \tilde{y}_n$. Suponha por contradição que exista uma subseqüência, que ainda chamaremos por (y_n), tal que $| \ y_n \ | \to \infty$ quando $n \to \infty$. Considerando primeiramente o caso $V_\infty = \infty$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid v_n \mid^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla v_n \mid^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid v_n \mid^p = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n.$$

Do Lema de Fatou e por (1.18) segue-se que

$$\infty = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n = \int_{\mathbb{R}^N} f(v) v,$$

o que é um absurdo.

Considerando o caso $V_\infty < \infty$, de (1.18), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v}_n \mid^p = \int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v} \mid^p \quad e \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}). \tag{1.19}$$

Do Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \mid \tilde{v} \mid \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid \tilde{v}_n \mid^p, \tag{1.20}$$

portanto, de (1.19) , (1.20) e do fato que $V_0 < V_\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} c_{V_0} &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v} \mid^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_0 \mid \tilde{v} \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}) \\ &< \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v} \mid^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \mid \tilde{v} \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v}_n \mid^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid \tilde{v}_n \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}_n)\Big]. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variáveis, encontramos

$$c_{V_0} < \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u_n \mid^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z) \mid u_n \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n)\Big]$$

e conseqüentemente,

$$c_{V_0} < \liminf_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(t_n u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(u_n) = c_{V_0},$$

o que é um absurdo.

Logo, (y_n) é limitada em $\mathbb{R}^N$ e passando a uma subseqüência

$$y_n \to \bar{y} \in \mathbb{R}^N.$$

Afirmamos que $\bar{y} \in M$, isto é, que $V(\bar{y}) = V_0$, pois caso contrário, devemos ter $V(\bar{y}) > V_0$ e considerando o mesmo raciocínio usado na primeira parte desta demonstração, chegaremos novamente a um absurdo. ■

Uma versão do Lema seguinte também foi provado por Cingolani e Lazzo [26]. Na demonstração das autoras, foi usado a unicidade de solução do problema autônomo com $p = 2$, (ver [19]). Como é conhecido, para $p > 2$, este resultado é um problema em aberto e na nossa demonstração não será necessário.

Lema 1.7 *Seja* $\delta > 0$ *e* $M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, M) \leq \delta\}$. *Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y \in M_\delta} \left| \beta(u) - y \right| = 0.$$

Demonstração: Seja (ϵ_n) uma seqüência de números reais positivos tais que $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Da definição de supremo, existe uma seqüência (u_n) em $\tilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n}$ tal que

$$\inf_{y \in M_\delta} \left| \beta(u_n) - y \right| = \sup_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n}} \inf_{y \in M_\delta} \left| \beta(u) - y \right| + o_n(1).$$

Portanto, é suficiente encontrar uma seqüência $(y_n) \subset M_\delta$ tal que, a menos de subseqüência,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \beta(u_n) - y_n \right| = 0. \tag{1.21}$$

Observe que $(u_n) \subset \tilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n} \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$ e assim,

$$c_{\epsilon_n} \leq I_{\epsilon_n}(u_n) \leq c_{V_0} + h(\epsilon_n) \tag{1.22}$$

e

$$I'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0. \tag{1.23}$$

Afirmamos que

$$c_{\epsilon_n} \to c_{V_0} \ \ quando \ \ n \to \infty. \tag{1.24}$$

De fato, decorre de (1.22),

$$\limsup_{n \to \infty} c_{\epsilon_n} \leq c_{V_0}. \tag{1.25}$$

Por outro lado, temos

$$V_0 \leq V(\epsilon_n x), \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}^N$$

e portanto, para todo $u \in W_{\epsilon_n}$

$$E_{V_0}(tu) \leq I_{\epsilon_n}(tu), \ \ \forall \ \ t \geq 0,$$

no que resulta em

$$c_{V_0} \leq \max_{t \geq 0} E_{V_0}(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_{\epsilon_n}(tu).$$

Logo, $c_{V_0} \leq c_{\epsilon_n}$ e portanto,

$$c_{V_0} \leq \liminf_{n \to \infty} c_{\epsilon_n}. \tag{1.26}$$

De (1.25) e (1.26), obtemos a afirmação (1.24).

Da Proposição 1.4, existe uma seqüência $(\tilde{y_n}) \subset \mathbb{R}^N$ tal $(y_n) = (\epsilon_n \tilde{y_n}) \subset M_\delta$, para n suficientemente grande. Mostraremos que (y_n) verifica o limite em (1.21). De fato, observando que

$$\beta(u_n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n x) \mid u_n \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid u_n \mid^p}$$

e fazendo $x = z + \tilde{y}_n$, segue-se que

$$\beta(u_n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n z + y_n) \mid u_n(z + \tilde{y}_n) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid u_n(z + \tilde{y}_n) \mid^p}.$$

Portanto,

$$\beta(u_n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n z + y_n) \mid v_n(z) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid v_n(z) \mid^p}$$

e desde que

$$\beta(u_n) - y_n = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} [\chi(\epsilon_n z + y_n) - y_n] \mid v_n(z) \mid^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mid v_n(z) \mid^p},$$

do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\Big| \beta(u_n) - y_n \Big| = o_n(1),$$

demonstrando (1.21). ■

1.4 Demonstração do Resultado Principal

Inicialmente vamos enunciar um resultado abstrato de multiciplicidade de pontos críticos envolvendo categoria de Lusternik-Schnirelman, o qual aplicaremos na demonstração do Teorema A.

Teorema 1.3 *Sejam X um espaço de Banach, $\Psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $V = \{v \in X : \Psi(v) = 0\}$ tais que $\Psi'(v) \neq 0$, para todo $v \in V$. Seja ϕ um funcional tal que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se $\phi_{|V}$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(P.S)_c$ para todo $c \in [c_{V_0}, d]$, então $\phi_{|V}$ tem um mínimo e ϕ^d tem pelo menos $cat_{\phi^d}(\phi^d)$ pontos críticos de $\phi_{|V}$, onde $\phi^d = \{u \in V : \phi(u) \leq d\}$.*

Demonstração: Ver [36](Corolário 4.17) para os detalhes da demonstação. ■

Demonstração do Teorema A: Considere $X = W_\epsilon$, $\Psi = J$, $\phi = I_\epsilon$, $d = c_{V_0} + h(\epsilon)$ e $\phi^d = \tilde{\mathcal{N}}_\epsilon$, onde J define a variedade de Nehari $\mathcal{N}_\epsilon$. Pelo Teorema 1.3, temos que o funcional I_ϵ tem pelo menos $cat_{\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon)$ pontos críticos em $\mathcal{N}_\epsilon$, para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. Resta-nos provar que

$$cat_{\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon) \geq cat_{M_\delta}(M) \tag{1.27}$$

e que cada ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de I_ϵ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Devemos supor que $cat_{\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon}(\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon) < \infty$, pois caso contrário, desde que M é compacto, segue-se que $cat_{M_\delta}(M) < \infty$ e neste caso, a desigualdade (1.27) seria imediata.

Observe que da definição da aplicação Φ_ϵ e do Lema 1.4, tem-se que $\Phi_\epsilon(M) \subset \tilde{\mathcal{N}}_\epsilon$. Além disso, para todo $u \in \tilde{\mathcal{N}}_\epsilon$,

$$dist(\beta(u), M_{\delta_1}) = \inf_{y \in M_{\delta_1}} |\beta(u) - y| \ \leq \sup_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y \in M_{\delta_1}} |\beta(u) - y|$$

e do Lema 1.7

$$dist(\beta(u), M_{\delta_1}) < \frac{\delta_1}{2},$$

para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$.

Considerando $\delta = \delta_1 + \frac{\delta_1}{2}$, temos que $\beta(\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon) \subset M_\delta$ e portanto a aplicação

$$\beta \circ \Phi_\epsilon : M \to M_\delta$$

está bem definida e além disso é contínua.

Considere agora a aplicação $G : [0,1] \times M \to M_\delta$ definida por

$$G(t, y) = t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) + (1-t)y.$$

Observe que G está bem definida pois

$$dist(t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) + (1-t)y, M) = \inf_{z \in M} |t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) + (1-t)y - z|,$$

ou ainda,

$$dist(t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) + (1-t)y, M) \leq \inf_{z \in M} [|t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) - y| + |y - z|],$$

de onde obtemos

$$dist(t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) + (1-t)y, M) \leq \inf_{z \in M} [|t\delta| + |y - z|],$$

ou seja,

$$dist(t\beta(\Phi_{\epsilon,y}) + (1-t)y, M) \leq t\delta + \inf_{z \in M} |y - z| \leq \delta \ \ \forall \ \ \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}).$$

Além disso $G \in C([0,1] \times M, M_\delta)$ e portanto, $\beta \circ \Phi_\epsilon$ é homotópica a inclusão $i : M \to M_\delta$. Agora mostraremos que

$$cat_{\check{\mathcal{N}}_\epsilon}(\check{\mathcal{N}}_\epsilon) \geq cat_{M_\delta}(M).$$

Suponha que $cat_{\check{\mathcal{N}}_\epsilon}(\check{\mathcal{N}}_\epsilon) = n$. Assim, existem $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos fechados e contráteis em $\check{\mathcal{N}}_\epsilon$ tais que $\check{\mathcal{N}}_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Portanto, por definição, existem $H_i \in C([0,1] \times A_i, \check{\mathcal{N}}_\epsilon), i = 1, 2, ..., n$ tais que $H_i(0, u) = u$ e $H_i(1, u) = H_i(1, v)$, para todo $u \in A_i$ e $v \in A_i$ com v fixado. Seja $B_i = \Phi_\epsilon^{-1}(A_i), i = 1, 2, ..., n$. Da continuidade de Φ_ϵ, temos que B_i são fechados em M e desde que M é fechado, segue-se que B_i são fechados e ainda

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_\epsilon^{-1}(A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Agora, considere a aplicação $g_i : [0,1] \times B_i \to M_\delta$ definida por

$$g_i(t, y) = \beta(H_i(t, \Phi_{\epsilon,y})).$$

Temos, para cada $i = 1, 2, ..., n$, que g_i é contínua e, além disso,

$$g_i(0, y) = \beta(H_i(0, \Phi_{\epsilon,y})) = \beta(\Phi_{\epsilon,y})$$

e

$$g_i(1, y) = \beta(H_i(1, \Phi_{\epsilon,y})) = \beta(H_i(1, v)) \ \ com \ \ v \ \ fixado.$$

Considere agora $F_i : [0, 1] \times B_i \to M_\delta$ definida por

$$F_i(t, y) = \begin{cases} G_i(2t, y) \ \ se \ \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ g_i(2t - 1, y) \ \ se \ \ \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

onde $G_i = G_{|B_i}$.

Temos que

$$F_i\left(\frac{1}{2}, y\right) = G_i(1, y) = \beta(\Phi_{\epsilon,y}) = g_i(0, y).$$

Assim, F_i está bem definida, $F_i \in C([0, 1] \times B_i, M_\delta)$ e além disso

$$F_i(0, y) = G_i(0, y) = y \ \ e \ \ F_i(1, y) = g_i(1, y) = \beta(H_i(1, v)) \ \ v \ \ fixado.$$

Logo, B_i são contráteis e assim

$$cat_{\check{\mathcal{N}}_\epsilon}(\check{\mathcal{N}}_\epsilon) = n \ge cat_{M_\delta}(M).$$

Finalmente, mostraremos que todo ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de I_ϵ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato, seja u_ϵ um ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$. Do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda_\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\epsilon(u_\epsilon) = \lambda_\epsilon J'(u_\epsilon)$$

onde $J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + p \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u$. Assim,

$$0 = I'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon = \lambda_\epsilon J'(u_\epsilon)u_\epsilon.$$

Desde que

$$J'(u_\epsilon)u_\epsilon = p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\epsilon|^p + p \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u_\epsilon|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_\epsilon)u_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2,$$

temos

$$J'(u_\epsilon)u_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} (p-1)f(u_\epsilon)u_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2$$

e por (f_6)

$$J'(u_\epsilon)u_\epsilon \leq -C\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^\sigma < 0.$$

Logo, $\lambda_\epsilon = 0$ e portanto, $I'_\epsilon(u_\epsilon) = 0$. Assim, o problema (P_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. ■

Capítulo 2

Caso Crítico

2.1 Introdução

Neste capítulo, mostraremos a existência e a multiplicidade de soluções positivas do problema

$$
(P_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) + |u|^{p^*-2}u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}
$$

com $2 \leq p < N$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, $\epsilon > 0$ um parâmetro pequeno e hipóteses sobre a não linearidade f e sobre o potencial V a serem listadas abaixo. Usaremos o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz sem a condição (P.S), (ver [58]), para mostrar a existência de solução. Para mostrar multiplicidade, usaremos a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman (ver [58]).

Vamos agora estabelecer algumas notações e enunciar o resultado principal deste capítulo.
Seja V: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $V(x) > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$ e

$$
(V) \qquad V_\infty = \liminf_{|x|\to\infty} V(x) > V_0 > 0,
$$

onde $V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V(x)$.

Novamente vamos supor $V_\infty < \infty$ ou $V_\infty = \infty$. Considere

$$M = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_0\}$$

um conjunto limitado e para qualquer $\delta > 0$, definimos

$$M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, M) \leq \delta\}.$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 verificando as seguintes hipóteses :

(f_1) $f(s) = 0, \forall\ s < 0.$

(f_2) $\displaystyle\lim_{|s| \to 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0.$

(f_3) $\displaystyle\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{|s|^q} = 0,$ para algum $q \in \mathbb{R}$ com $p - 1 < q < p^* - 1.$

(f_4) Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p < \theta$ e $0 < \theta F(s) \leq sf(s)$, $\forall\ s > 0,$ sendo $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt.$

(f_5) A função $s \to \dfrac{f(s)}{s^{p-1}}$ é crescente , $\forall\ \ s > 0.$

(f_6) $f(s) \geq \lambda s^{q_1}$ $\forall\ \ s > 0$ com $\lambda > 0$ e $q_1 > 0$ verificando uma das condições:
$a)\lambda > 0$ e $p - 1 < q_1 < p^* - 1$ se $N > p^2$.
$b)\lambda > 0$ e $p - 1 < q_1 < p^* - 1$ se $N = p^2$.
$c)p^* - \dfrac{p}{p-1} - 1 < q_1 < p^* - 1$ e $\lambda > 0$ se $p < N < p^2$.
$d)p - 1 < q_1 \leq p^* - \dfrac{p}{p-1} - 1$ e λ suficientemente grande se $p < N < p^2$.

A hipótese (f_6) é uma hipótese técnica que permite localizar o nível do Passo da Montanha do funcional associado a um problema autônomo qualquer, abaixo do número $\frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}$, o que é muito importante quando trabalhamos com o expoente crítico de Sobolev, como pode ser visto em [2], [4], [8], [9], [21], [45] e suas referências.

Observe que a condição

$$f'(s)s^2 - (p-1)f(s)s \geq Cs^\sigma,\ \forall\ s > 0,$$

imposta a f no capítulo 1, não se faz necessário aqui, isto decorre, como veremos adiante, do fato de estarmos trabalhando com o expoente crítico de Sobolev.

Vamos enunciar o resultado principal deste capítulo:

Teorema B *Suponha que o potencial V verifique a condição (V) e a não linearidade f verifique as hipóteses (f_1)-(f_6). Então, dado $\delta > 0$, existe $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema (P_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$.*

Este capítulo será organizado como segue. Na seção 2.2 vamos mostrar a validade da condição Palais-Smale para o funcional associado ao problema (P_ϵ), abaixo de um nível fixado. Para isso, vamos usar argumentos semelhantes usados por Alves e Souto [12], que consiste essencialmente em estabelecer uma relação entre os níveis minimax do problema (P_ϵ) e do problema autônomo. Na seção 2.3 seguiremos as idéias de Cingolani e Lazzo [26], para demonstrar resultados que relacionam o conjunto M dos mínimos de V e a topologia de um subconjunto de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Quando comparamos com os resultados obtidos no capítulo 1, observamos dois aspectos interessantes. Para alguns desses resultados, modificações não triviais são necessárias, devido a presença do expoente crítico de Sobolev. Em outros resultados, a demonstração é a mesma feita no capítulo 1, embora os problemas sejam distintos e, portanto, os funcionais envolvidos sejam distintos. Para esses casos, remeteremos a demonstração para o Capítulo 1. Na seção 2.4 demonstraremos o Teorema B.

2.2 A Condição Palais-Smale

Nesta seção, faremos um estudo do problema autônomo e do problema (P_ϵ) com $\epsilon = 1$, que serão usados na demonstração da condição Palais-Smale para o funcional asssociado ao problema (P_ϵ).

2.2.1 O Problema Autônomo

Os resultados relacionados ao problema autônomo, que são necessários para obtermos a condição Palais-Smale para o funcional I_ϵ, encontram-se no trabalho de Alves, do Ó e Miyagaki [8] e, por isso, faremos apenas o enunciado de cada um deles.

Considere o problema

$$(P_\mu)\quad \begin{cases} -\Delta_p u + \mu|u|^{p-2}u = f(u) + |u|^{p^*-2}u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ N > p \geq 2 \ e \ \mu > 0. \end{cases}$$

Seja o funcional energia

$$\begin{aligned} E_\mu :\ W_\mu &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto E_\mu(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mu|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}. \end{aligned}$$

Prova-se que $E_\mu \in\ C^1(W_\mu, \mathbb{R})$ com

$$E'_\mu(u)w = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} \mu|u|^{p-2}uw - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)w - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}uw$$

e, portanto, pontos críticos de E_μ são soluções fracas de (P_μ). Uma condição necessária para que $u \in W_\mu$ seja ponto crítico de E_μ é que $E'_\mu(u)u = 0$. Esta condição define a variedade de Nehari:

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in W\backslash\{0\} : E'_\mu(u)u = 0\}.$$

Lema 2.1 *O funcional E_μ verifica as condições (H_1) e (H_2) do Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração: Ver [8](Lema 2). ■

Usando um raciocínio semelhante ao encontrado em [53](Proposição 3.11), temos a seguinte caracterização de c_μ, a qual é mais adequada para os nossos propósitos, dado por

$$c_\mu = \inf_{u \in W_\mu \backslash \{0\}} \sup_{t \geq 0} E_\mu(tu) = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} E_\mu(u).$$

Observe que com esta caracterização, E_μ é limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\mu$. Além disso, para cada $u \in W_\mu \backslash \{0\}$, existe um único $t_0 = t(u)$ tal que

$$E_\mu(t_0 u) = \max_{t \geq 0} E_\mu(tu).$$

Neste trabalho, vamos denotar por S a melhor constante de Sobolev da imersão $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.2 *Considere E_μ o funcional associado ao problema (P_μ). Então existe $v \in W_\mu \backslash \{0\}$ tal que*

$$\max_{t \geq 0} E_\mu(tv) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}.$$

Demonstração: Ver [8](Lema 3). ■

Observe que do Lema 2.2, podemos concluir que o nível do Passo da Montanha c_μ de E_μ verifica $c_\mu < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}$.

Lema 2.3 *Seja (u_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para E_μ. Então*
a) (u_n) é limitada em W_μ
b) $u_n \rightharpoonup u$ em W_μ, a menos de subseqüência
c) $E'_\mu(u) = 0$.

Demonstração: Ver [8](Teorema 5). ■

Lema 2.4 *Seja E_μ o funcional associado a (P_μ) e (u_n) uma seqüência $(PS)_d$ para E_μ com $u_n \rightharpoonup 0$. Então, somente uma das alternativas ocorre:*
a) $u_n \to 0$ em W_μ

ou

b) Existe uma seqüência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e constantes* R , $\beta > 0$ *tais que*

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Ver [8](Lema 4). ■

Observação 2.1 *O resultado continua válido se trocarmos a hipótese de* (u_n) *ser uma seqüência* $(P.S)_d$ *para* E_μ *por* $E_\mu(u_n) \to d$ *e* $E'_\mu(u_n)u_n = 0, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1 *Sob as hipóteses* $(f_1) - (f_6)$*, o problema* (P_μ)*, com* $\mu > 0$*, possui uma solução positiva Ground-State* $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Ver [8](Teorema 5). ■

Estudaremos agora o problema que independe de ϵ, e em seguida, faremos comparações com os níveis de energia mínima, para obtermos a condição Palais-Smale para o funcional associado ao problema (P_ϵ).

2.2.2 O Problema (P_ϵ) com $\epsilon = 1$

Considere o problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(u) + |u|^{p^*-2}u \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \ N > p \geq 2. \end{cases}$$

Seja $I : W \to \mathbb{R}$, o funcional energia associado ao problema (P), definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}.$$

Com os mesmos argumentos do Lema 2.1, I verifica as condições (H_1) e (H_2) do Teorema do Passo da Montanha (Lema A.1 no apêndice) e portanto, existe

$(u_n) \subset W$ uma seqüência $(PS)_c$ para I. Com os mesmos argumentos do Lema 2.3 , $u_n \rightharpoonup u$ e $I'(u) = 0$, isto é , u é solução fraca do problema (P).

Proposição 2.1 *Se (u_n) é uma seqüência $(P.S)_c$ para I em W tal que $u_n \rightharpoonup u$ em W, então*

$$I(v_n) = I(u_n) - I(u) + o_n(1)$$

e

$$I'(v_n) = o_n(1),$$

onde $v_n = u_n - u$.

Demonstração: Decorre do Lema de Brézis-Lieb ([42], Lema 4.6) e de um resultado de Alves, Carrião e Medeiros [5](Lemas 2.2, 2.3, 3.1 e 3.2). ■

Proposição 2.2 *Considere $V_\infty < \infty$ e (v_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para I em W. Se (v_n) converge fraco para 0 em W e não converge forte para 0 em W, então $d \geq c_\infty$.*

Demonstração: Seja $t_n \in (0, +\infty)$ tal que $(t_n v_n) \subset \mathcal{N}_{V_\infty}$. Vamos agora demonstrar a seguinte afirmação :

Afirmação 1

$$\limsup_{n \to \infty} t_n \leq 1$$

Demonstração da Afirmação 1: Suponhamos por contradição que, para alguma subseqüência, ainda denotada por (t_n), tem-se

$$t_n \geq 1 + \delta \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N} \ \ e \ \ para \ \ algum \ \ \delta > 0.$$

Observe agora que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big[| \nabla v_n |^p + V(x) | v_n |^p \Big] = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} + o_n(1)$$

e

$$t_n^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\mid \nabla v_n \mid^p + V_\infty \mid v_n \mid^p\Big]\Big) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t_n v_n) t_n v_n + t_n^{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla v_n \mid^p = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \mid v_n \mid^p + o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla v_n \mid^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_n v_n) v_n}{t_n^{p-1}} + t_n^{p^*-p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} - \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \mid v_n \mid^p .$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{f(t_n v_n)(v_n)^p}{(t_n v_n)^{p-1}} - \frac{f(v_n)(v_n)^p}{(v_n)^{p-1}}\Big] + (t_n^{p^*-p} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} = \int_{\mathbb{R}^N} [V_\infty - V(x)] \mid v_n \mid^p + o_n(1).$$

Desde que $(t_n^{p^*-p} - 1) > 0$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{f(t_n v_n)(v_n)^p}{(t_n v_n)^{p-1}} - \frac{f(v_n)(v_n)^p}{(v_n)^{p-1}}\Big] \leq \int_{\mathbb{R}^N} [V_\infty - V(x)] \mid v_n \mid^p + o_n(1).$$

O restante da demonstração da afirmação 1, segue na íntegra a demonstração da Proposição 1.2.
Voltando a demonstração da Proposição, vamos considerar dois casos:
$i)$ Existe uma subseqüência de (t_n), que ainda chamaremos de (t_n), tal que $t_n \to 1$. Neste caso,

$$d + o_n(1) = I(v_n) = E_{V_\infty}(t_n v_n) + I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n),$$

ou seja,

$$d + o_n(1) = I(v_n) \geq c_{V_\infty} + I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1 - t_n^p)}{p} |\nabla v_n|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^p - \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |v_n|^p \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)] + \frac{(t_n^{p^*} - 1)}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}. \end{aligned}$$

Para qualque $R > 0$, usando a continuidade da V e as imersões compactas de Sobolev, temos

$$\frac{1}{p}\int_{|x|\leq R} V(x)|v_n|^p = o_n(1) \;\; e \;\; \frac{t_n^p}{p}\int_{|x|\leq R} V_\infty |v_n|^p = o_n(1).$$

Desde que (v_n) é limitada em W, encontramos

$$\frac{(1-t_n^p)}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p = o_n(1) \;\; e \;\; \frac{(t_n^{p^*}-1)}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} = o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(v_n) - E_{V_\infty}(t_n v_n) &= o_n(1) + \frac{1}{p}\int_{|x|\geq R} V(x) \mid v_n \mid^p - \frac{t_n^p}{p}\int_{|x|\geq R} V_\infty \mid v_n \mid^p \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} [F(t_n v_n) - F(v_n)]. \end{aligned}$$

O restante da demonstração segue na integra a demonstração da Proposição 1.2.

O outro caso a considerar é :

$ii)$ Existe uma subseqüência de (t_n), que ainda chamaremos de (t_n), tal que $t_n \to t_0 < 1$.

Neste caso, podemos considerar sem perda de generalidade $t_n < 1, \forall \;\; n \in \mathbb{N}$. Além disso, observe que

$$c_{V_\infty} \leq E_{V_\infty}(t_n v_n) = E_{V_\infty}(t_n v_n) - \frac{1}{p}E'_{V_\infty}(t_n v_n)(t_n v_n),$$

isto é,

$$c_{V_\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p}f(t_n v_n)(t_n v_n) - F(t_n v_n)\right] + t_n^{p^*}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}.$$

Desde que a função $h(s) = \frac{1}{p}f(s)s - F(s)$ é não decrescente, temos

$$c_{V_\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p}f(v_n)(v_n) - F(v_n)\right] + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} = I(v_n) - \frac{1}{p}I'(v_n)(v_n) = d + o_n(1)$$

e passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos

$$c_{V_\infty} \leq d$$

■

Corolário 2.1 *Se (v_n) é uma seqüência $(P.S)_d$ para I tal que $v_n \rightharpoonup 0$ e $d < c_{V_\infty}$, então $v_n \to 0$ em W.*

Demonstração : É uma conseqüência imediata da Proposição 2.2. ■

Proposição 2.3 *O funcional I verifica a condição $(P.S)_c$, com $c < c_{V_\infty}$ quando $V_\infty < \infty$ e para todo c quando $V_\infty = \infty$.*

Demonstração : Considere (u_n) uma seqüência $(P.S)_c$ para I. Assim,

$$I(u_n) \to c \ \ e \ \ I'(u_n) = o_n(1).$$

Portanto, (u_n) é limitada em W , a menos de subseqüência, temos $u_n \rightharpoonup u$ em W e $I'(u) = 0$. Considerando $v_n = u_n - u$, da Proposição 2.1, segue-se que (v_n) é uma seqüência $(P.S)_d$ para I e $I(v_n) = I(u_n) - I(u) + o_n(1)$.

Vamos estudar primeiramente o caso $V_\infty < \infty$. Desde que

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{p}I'(u)(u) = \int_{\mathbb{R}^N}[\frac{1}{p}f(u)u - F(u)] + (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*})\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*} \geq 0,$$

concluímos que $d \leq c < c_{V_\infty}$. Logo, do Corolário 2.1, $v_n \to 0$ em W, isto é, $u_n \to u$ em W.

No caso em que $V_\infty = \infty$, segue-se que V é coercivo e por um resultado de Omana e Willem [51], $W \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ com imersão compacta para $p \leq s < p^*$. Assim, passando a uma subseqüência, $v_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ e da condição de crescimento sobre a f e F, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n = o_n(1) \ \ e \ \ \int_{\mathbb{R}^N} F(v_n) = o_n(1).$$

Conseqüentemente,

$$\|v_n\|^p = |v_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1).$$

Usando o fato que as duas seqüências são limitadas, passando a uma subseqüência se necessário, encontramos

$$\|v_n\|^p \to l \geq 0 \ \ e \ \ |v_n|_{p^*}^{p^*} \to l \geq 0.$$

Suponha por contradição que $l > 0$. Então de $I(v_n) = c + o_n(1)$ temos

$$\frac{1}{p}\|v_n\|^p - \frac{1}{p^*}|v_n|_{p^*}^{p^*} = c + o_n(1),$$

mostrando que

$$\frac{1}{N}\|v_n\|^p = c + o_n(1).$$

Passando ao limite de $n \to \infty$, segue-se que

$$\frac{1}{N} l = c \ \ e \ \ l = Nc.$$

Portanto,

$$\|v_n\|^p \geq S|v_n|_{p^*}^p = S(|v_n|_{p^*}^{p^*})^{\frac{p}{p^*}}.$$

Novamente, passando ao limite de $n \to \infty$, temos

$$l \geq S^{\frac{N}{p}}$$

e assim,

$$c \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}},$$

o que é um absurdo pelo Lema 2.2. Portanto, $l = 0$, o que implica $v_n \to 0$ em W e conseqüentemente

$$u_n \to u \ em \ W.$$

■

Considere o problema

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) + |u|^{p^*-2}u \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N, \ N > p \geq 2 \end{cases}$$

e seja $I_\epsilon : W_\epsilon \to \mathbb{R}$, o funcional energia associado a (P_ϵ), definido por

$$I_\epsilon(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}.$$

Corolário 2.2 *O funcional I_ϵ verifica a condição $(P.S)_c$, com $c < c_{V_\infty}$ quando $V_\infty < \infty$ e para todo $c \in \mathbb{R}$ quando $V_\infty = \infty$.*

Demonstração : Segue o mesmo tipo de argumento usado na demonstração da Proposição 2.3, considerando no lugar de V a função $V_\epsilon(x) = V(\epsilon x)$. ■

No próximo resultado, como foi dito no início deste capítulo, a potência com o expoente crítico dispensa a condição (f_6) do Capítulo 1.

Corolário 2.3 *O funcional I_ϵ verifica a condição $(P.S)_c$ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$, com $c < c_{V_\infty}$ quando $V_\infty < \infty$ e para todo $c \in \mathbb{R}$ quando $V_\infty = \infty$.*

Demonstração : Seja (u_n) uma seqüência em $\mathcal{N}_\epsilon$ tal que

$$I_\epsilon(u_n) \to c \ \ e \ \ \|I'_\epsilon(u_n)\|_* = o_n(1).$$

Do Lema 5.12 em [58], existe uma seqüência $(\lambda_n) \in \mathbb{R}$ verificando

$$I'_\epsilon(u_n) = \lambda_n J'(u_n) + o_n(1),$$

onde

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}.$$

Conseqüentemente,

$$0 = I'_\epsilon(u_n)u_n = \lambda_n J'(u_n)u_n + o_n(1).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} J'(u_n)u_n &= p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + p\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_n)(u_n)^2 \\ &- p^*\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$J'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} (p-1)f(u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_n)(u_n)^2 - (p^* - p)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}.$$

Usando a hipótese (f_5), obtemos:

$$J'(u_n)u_n \leq -(p^* - p)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \leq 0.$$

Portanto,

$$|J'(u_n)u_n| = -J'(u_n)u_n \geq (p^* - p)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \geq 0.$$

Supondo, por contradição, que

$$|J'(u_n)u_n| = o_n(1),$$

segue-se que $u_n \to 0$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Da desigualdade da interpolação

$$u_n \to 0 \ \ em \ \ L^{q+1}(\mathbb{R}^N).$$

Da condição de crescimento sobre f, obtemos:

$$u_n \to 0 \ \ em \ \ W_\epsilon,$$

o que contradiz o fato de existir $\alpha > 0$ tal que $\|u\|_\epsilon \geq \alpha > 0$, $\forall\ u \in \mathcal{N}_\epsilon$.

Logo, $\lambda_n = o_n(1)$ e conseqüentemente, $I'_\epsilon(u_n) = o_n(1)$. Assim, (u_n) é uma seqüência $(P.S)_c$ para I_ϵ em W_ϵ e do Corolário 2.2, (u_n) possui uma subseqüência convergente. ■

O próximo Teorema é uma adaptação de um resultado de existência de Alves e Souto ([12]) para o caso $p = 2$.

Teorema 2.2 *Sob as hipóteses* (f_1)–(f_5), *existe* $\bar{\epsilon} > 0$ *tal que para todo* $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, *o problema* (P_ϵ) *possui uma solução positiva Ground-State* $u_\epsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração : Segue o mesmo tipo de raciocínio usado na demonstração do Teorema 1.2. ■

2.3 Multiplicidade de Soluções Envolvendo $cat_{M_\delta}(M)$

Nesta seção, seguindo o mesmo tipo de argumentos explorados no Capítulo 1, vamos demonstrar alguns resultados que vão relacionar o conjunto M dos mínimos de V e a topologia de um subconjunto de W_ϵ.

Seja $\delta > 0$ fixado e $\eta \in C_0^\infty([0,\infty))$ tal que $0 \leq \eta(s) \leq 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$\eta(s) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \leq s \leq \frac{\delta}{2} \\ \\ 0 & se \quad s \geq \delta. \end{cases}$$

Considere $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma solução Ground-State do problema autônomo

$$(P_{V_0}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V_0 u^{p-1} = f(u) + u^{p^*-1} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \; N > p \geq 2. \end{cases}$$

Para cada $y \in M$, seja

$$\Psi_{\epsilon,y}(x) = \eta(\mid \epsilon x - y \mid) w\Big(\frac{\epsilon x - y}{\epsilon}\Big).$$

Observe que, para cada $y \in M$, a função $\Psi_{\epsilon,y}$ tem suporte compacto e conseqüentemente $\Psi_{\epsilon,y} \in W_\epsilon$. Agora, para cada $\epsilon > 0$, seja $t_\epsilon > 0$ tal que

$$\max_{t \geq 0} I_\epsilon(t\Psi_{\epsilon,y}) = I_\epsilon(t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}).$$

Definamos a aplicação Φ_ϵ por

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon \;:\; M \; &\to \mathcal{N}_\epsilon \\ y \; &\longmapsto \; \Phi_{\epsilon,y} = t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}. \end{aligned}$$

Lema 2.5 *Seja $M = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_0\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) = c_{V_0}, \; uniformemente \; em \; y \in M.$$

Demonstração: Suponha por contradição que o Lema não ocorre, então existem $\delta_0 > 0$ e uma seqüência $(y_n) \subset M$ tais que

$$\mid I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) - c_{V_0} \mid \; \geq \delta_0 \;\; onde \;\; \epsilon_n \to 0 \;\; quando \;\; n \to \infty. \tag{2.1}$$

Observe que,

$$I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p + \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x)|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p - \int_{\mathbb{R}^N}F(t_{\epsilon_n}\Psi_{\epsilon_n,y_n}) - \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N}|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^{p^*} \tag{2.2}$$

e

$$I'_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n})\Phi_{\epsilon_n,y_n} = 0.$$

Portanto, usando a definição de $\Psi_{\epsilon,y}$ e a mudança de variável $z = \dfrac{(\epsilon_n x - y_n)}{\epsilon_n}$, obtemos:

$$I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\eta(|\epsilon_n z|)w(z))|^p + \frac{t^p_{\epsilon_n}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z + y_n)|\eta(|\,\epsilon_n z|)w(z)|^p - \int_{\mathbb{R}^N}F(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z)) - \frac{t^{p^*}_{\epsilon_n}}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N}|\eta(|\,\epsilon_n z|)w(z)|^{p^*}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p + \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z + y_n)|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^p = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z))}{(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z))^{p-1}}|\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p + t^{p^*-p}_{\epsilon_n}\int_{\mathbb{R}^N}|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^{p^*}. \tag{2.3}$$

Além disso, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty}\| \Psi_{\epsilon_n,y_n}\|^p_{\epsilon_n} = \| w \|^p_{V_0}, \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}f(\Psi_{\epsilon_n,y_n})\Psi_{\epsilon_n,y_n} = \int_{\mathbb{R}^N}f(w)w,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F(\Psi_{\epsilon_n,y_n}) = \int_{\mathbb{R}^N}F(w)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\Psi_{\epsilon_n,y_n}|^{p^*} = \int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p^*}.$$

Mostraremos agora que, a menos de subseqüência, $t_{\epsilon_n} \to 1$. De fato, desde que $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{\delta}{2}}(0)$ e $B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset B_{\frac{\delta}{2\epsilon_n}}(0)$, para n suficiente grande, obtemos de (2.3):

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\,\nabla\Psi_{\epsilon_n,y_n}\,|^p + \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n z + y_n)\,|\,\Psi_{\epsilon_n,y_n}\,|^p \geq t^{p^*-p}_{\epsilon_n}\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(0)}|w(z)|^{p^*}. \tag{2.5}$$

Supondo por contradição que exista uma subseqüência de (t_{ϵ_n}), que ainda chamaremos de (t_{ϵ_n}), com $|t_{\epsilon_n}| \to \infty$ e passando ao limite de $n \to \infty$ em (2.5), encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_{\epsilon_n,y_n}\|_{V_0}^p = \infty,$$

o que é um absurdo por (2.4). Assim, (t_{ϵ_n}) é limitada e passando a uma subseqüência, $t_{\epsilon_n} \to t_0$, com $t_0 \geq 0$. Observe que $t_0 > 0$, pois se $t_0 = 0$, do crescimento da f, da limitação de (Ψ_{ϵ_n,y_n}) e de (2.4), segue-se que $w \equiv 0$, o que é um absurdo. Logo, passando ao limite de $n \to \infty$ em (2.3), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0 |w|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0 w)w}{t_0^{p-1}} + t_0^{p^*-p} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p^*}.$$

Desde que $w \in \mathcal{N}_{V_0}$, concluímos que $t_0 = 1$. Agora, passando ao limite de $n \to \infty$ em (2.2), temos

$$\lim_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) = E_{V_0}(w) = c_{V_0},$$

contradizendo (2.1). ∎

Considere $\rho > 0$ tal que $M_\delta \subset B_\rho(0)$ e $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} x & se \quad |x| \leq \rho \\[1ex] \dfrac{\rho x}{|x|} & se \quad |x| \geq \rho. \end{cases}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{N}_\epsilon &\to \mathbb{R}^N \\ u &\longmapsto \beta(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x) |u(x)|^p}{\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p}, \end{aligned}$$

$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $h(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ e

$$\widetilde{\mathcal{N}_\epsilon} = \{u \in \mathcal{N}_\epsilon : I_\epsilon(u) \leq c_{V_0} + h(\epsilon)\}.$$

Do Lema 2.5, segue-se que $I_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) = c_{V0} + o_\epsilon(1)$ e assim, $\Phi_{\epsilon,y} \in \widetilde{\mathcal{N}_\epsilon}$, e conseqüentemente $\widetilde{\mathcal{N}_\epsilon} \neq \emptyset$.

Lema 2.6 *Seja* $M = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_0\}$. *Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \beta(\Phi_{\epsilon,y}) = y, \ uniformemente \ \ em \ \ y \ \in M.$$

Demonstração: Segue o mesmo tipo de argumentos usados na demonstração do Lema 1.5. ∎

O próximo Lema mostra que uma seqüência minimizante sobre a variedade Nehari é fortemente convergente, a menos de translação.

Lema 2.7 *(Um Lema de Compacidade) Considere* (u_n) *uma seqüência em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $E_\mu(u_n) \to c_\mu$ *e* $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$. *Então.*
a) (u_n) *possui uma subseqüência convergente em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
ou
b) existe uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ *tal que a seqüência* $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ *possui uma subseqüência convergente em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Em particular, existe um mínimo para c_μ.

Demonstração: Do Princípio Variacional de Ekeland(ver Teorema 8.5 em [58]), existe uma seqüência $(\hat{u}_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $(\hat{u}_n)$ é $(P.S)_\mu$ para E_μ em $\mathcal{N}_\mu$ e além disso, $\|\hat{u}_n - u_n\|_\mu = o_n(1)$. Com o mesmo tipo de argumentos usados no Corolário 2.3, temos que $(\hat{u}_n)$ é uma seqüência $(P.S)_\mu$ para I_μ em W_μ. Do Lema 2.3, segue-se que $(\hat{u}_n)$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, conseqüentemente, a menos de subseqüência,

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u} \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \ e \ \ I'_\mu(\hat{u}) = 0.$$

Vamos supor primeiramente que $\hat{u} \neq 0$. Neste caso, do Teorema 2.1, $\hat{u}$ é uma solução Ground-State do problema (P_μ). Portanto, é suficiente demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \right] = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p \tag{2.6}$$

pois, assim, com argumentos semelhantes explorados em [38], [47] e [57], encontramos

$$\hat{u}_n(x) \to \hat{u}(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Do Lema de Brézis-Lieb [42](Lema 4.6),

$$\hat{u}_n \to \hat{u} \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

de onde obtemos

$$u_n \to \hat{u} \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Vamos agora demonstrar (2.6). Observe que do Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big].$$

Afirmamos que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big] \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p,$$

pois caso contrário, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p < \limsup_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big] \tag{2.7}$$

e passando a uma subseqüência,

$$\begin{aligned} c_\mu &= (\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}) \limsup_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}_n|^p \Big] + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{\theta} f(\hat{u}_n)\hat{u}_n - F(\hat{u}_n) \Big] \\ &+ (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}) \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^{p^*}. \end{aligned}$$

Usando (2.7) e o Lema de Fatou, obtemos

$$c_\mu > (\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}) \Big[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^p \Big] + \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{\theta} f(\hat{u})\hat{u} - F(\hat{u}) \Big] + (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}) \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^{p^*} = c_\mu,$$

o que é um absurdo. Portanto, a afirmação é verdadeira e o resultado segue.

Vamos considerar agora que $\hat{u} \equiv 0$. Desde que $(\hat{u}_n)$ não converge para 0 em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, do Lema 2.4, existem constantes positivas R, β e uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\int_{B_R(\tilde{y}_n)} |\hat{u}_n|^p \geq \beta > 0. \tag{2.8}$$

Considerando $\hat{v}_n(x) = \hat{u}_n(x + \tilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que $(\hat{v}_n)$ é uma seqüência $(P.S)_\mu$ para E_μ, $(\hat{v}_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ e além disso, a menos de subseqüência,

$$\hat{v}_n \rightharpoonup \hat{v} \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

com $\hat{v} \neq 0$ por (2.8). Portanto, da primeira parte desta demonstração,

$$\hat{v}_n \to \hat{v} \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Definindo $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação,

$$\|\hat{v}_n - v_n\|_\mu = \|\hat{u}_n - u_n\|_\mu = o_n(1).$$

Logo,

$$v_n \to \hat{v} \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

■

A próxima Proposição é uma adptação da Proposição 1.4 para o problema com crescimento crítico.

Proposição 2.4 *Seja (u_n) uma seqüência em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$I_{\epsilon_n}(u_n) \to c_{V_0} \;\; e \;\; I'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0, \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}$$

e com $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, existe uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que a seqüência $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ possui uma subseqüência convergente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, passando a uma subseqüência, $y_n \to y \in M$, onde $y_n = \epsilon_n \tilde{y}_n$.

Demonstração: Afirmamos que existe uma seqüência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ e reais positivos R e β tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} | u_n |^p \geq \beta > 0.$$

De fato, pois do contrário, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R(y)}} | u_n |^p = 0, \;\; \forall \;\; R > 0.$$

Além disso, por argumentos bem conhecidos, prova-se que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e por um resultado devido a Lions (Lema A.3 no apêndice),

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^s(\mathbb{R}^N) \quad com \quad p < s < p^*. \tag{2.9}$$

De (f_2) e (f_3), dado $\xi > 0$ existe $C_\xi > 0$ verificando as seguintes condições de crescimento sobre f e F:

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n \le \xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + C_\xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q+1}$$

e

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) \le C\xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + C_\xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q+1}.$$

De (2.9) encontramos

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n \le \xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + o_n(1)$$

e

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) \le C\xi \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + o_n(1).$$

Das imersões contínuas de Sobolev e passando ao limite de $\xi \to 0$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n = o_n(1) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) = o_n(1). \tag{2.10}$$

Do fato que $I'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0$ e de (2.10), obtemos

$$\|u_n\|^p_{\epsilon_n} - |u_n|^{p^*}_{p^*} = o_n(1).$$

Desde que ambas as seqüências são limitadas, passando a uma subseqüência, se necessário, temos

$$\|u_n\|^p_{\epsilon_n} \to l \ge 0 \quad e \quad |u_n|^{p^*}_{L^{p^*}} \to l \ge 0. \tag{2.11}$$

Suponha por contradição que $l > 0$. Observe que

$$c_{V_0} = I_{\epsilon_n}(u_n) + o_n(1) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{\epsilon_n} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) - \frac{1}{p^*}|u_n|^{p^*}_{L^{p^*}} + o_n(1).$$

De (2.10) e de (2.11), encontramos

$$c_{V_0} = I_{\epsilon_n}(u_n) + o_n(1) = \frac{l}{p} - \frac{l}{p^*} = \frac{1}{N}l + o_n(1).$$

Passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos $l = Nc_{V_0}$. Segue-se da definição de S que

$$S|u_n|_{L^{p^*}}^{p^*} \leq S|u_n|_{L^{p^*}}^{p^*} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)|u_n|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon_n x)|u_n|^p\Big] = \|u_n\|_{\epsilon_n}^p.$$

Novamente, passando ao limite de $n \to \infty$, temos

$$Sl^{\frac{p}{p^*}} \leq l$$

e portanto

$$c_{V_0} \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}},$$

o que é um absurdo pelo Lema 2.2.

Considerando $v_n(x) = u_n(x+\tilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e da reflexividade deste espaço, a menos de subseqüência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Observe que,

$$\int_{B_R(0)} | \, v \, |^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} | \, v_n \, |^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} | \, u_n \, |^p \geq \beta > 0,$$

de onde obtemos

$$v \neq 0.$$

Seja $t_n > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{v}_n = t_n v_n \in \mathcal{N}_{V_0}.$$

Assim,

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} | \, \nabla \tilde{v}_n \, |^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \, | \, \tilde{v}_n \, |^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}_n) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}_n|^{p^*},$$

onde $y_n = \epsilon_n \tilde{y}_n$.

Fazendo uma mudança de variáveis, segue-se

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} | \, \nabla u_n \, |^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z) \, | \, u_n \, |^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n) - \frac{t_n^{p^*}}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}.$$

Logo,

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq I_{\epsilon_n}(t_n u_n) \leq I_{\epsilon_n}(u_n) = c_{V_0} + o_n(1),$$

e portanto,

$$E_{V_0}(\tilde{v}_n) \to c_{V_0} \;\; e \;\; (\tilde{v}_n) \subset \mathcal{N}_{V_0}.$$

Com os mesmos argumentos usados na Proposição 1.4, passando a uma subseqüência, encontramos

$$\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v} \; e \; t_n \to t_0 \; com \; t_0 > 0.$$

Da unicidade do limite fraco, segue-se que $\tilde{v} = t_0 v$ e desde que $v \neq 0$, da Proposição 2.4, temos

$$\tilde{v}_n \to t_0 v = \tilde{v} \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \;\; e \;\; portanto \;\; v_n \to v \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{2.12}$$

Vamos demonstrar que, a menos de subseqüência, $y_n \to y$, com $y \in M$, onde $y_n = \epsilon_n \tilde{y}_n$. Suponha por contradição que exista uma subseqüência, que ainda chamaremos de (y_n), tal que $| \, y_n \, | \to \infty$ quando $n \to \infty$. Considerando primeiramente $V_\infty = \infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid v_n \mid^p \;\; &\leq \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla v_n \mid^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid v_n \mid^p \\ &= \;\; \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}. \end{aligned}$$

Do Lema de Fatou e por (2.12), segue-se que

$$\infty = \liminf_{n\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} f(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} \Big] = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[f(v) v + |v|^{p^*} \Big],$$

o que é um absurdo.

Considere o caso $V_\infty < \infty$ e observe que de (2.12), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla \tilde{v}_n \mid^p = \int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla \tilde{v} \mid^p \;\; , \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}) \tag{2.13}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}_n|^{p^*} = |\tilde{v}_n|^{p^*}. \tag{2.14}$$

Do Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \mid \tilde{v} \mid \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid \tilde{v}_n \mid^p, \tag{2.15}$$

portanto, de (2.13), (2.14) , (2.15) e do fato que $V_0 < V_\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} c_{V_0} &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v} \mid^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_0 \mid \tilde{v} \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}|^{p^*} \\ &< \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v} \mid^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \mid \tilde{v} \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}|^{p^*} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla\tilde{v}_n \mid^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + y_n) \mid \tilde{v}_n \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{v}_n) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}_n|^{p^*}\Big]. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, encontramos

$$c_{V_0} < \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u_n \mid^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z) \mid u_n \mid^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n) - \frac{t_n^{p^*}}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^{p^*}\Big]$$

e assim

$$c_{V_0} < \liminf_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(t_n u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I_{\epsilon_n}(u_n) = c_{V_0},$$

o que é um absurdo.

Logo, (y_n) é limitada em $\mathbb{R}^N$ e passando a uma subseqüência,

$$y_n \to \bar{y} \in \mathbb{R}^N.$$

Afirmamos que $\bar{y} \in M$, isto é, que $V(\bar{y}) = V_0$, pois caso contrário, devemos ter $V(\bar{y}) > V_0$ e considerando o mesmo raciocínio usado na primeira parte desta demonstração, chegaremos novamente a um absurdo. ■

Lema 2.8 *Seja $\delta > 0$ e $M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, M) \leq \delta\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{u\in\tilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y\in M_\delta}\Big| \beta(u) - y\Big| = 0.$$

Demonstração: Segue de argumentos semelhantes empregados no Lema 1.7. ■

2.4 Demonstração do Resultado Principal

Demonstração do Teorema B: Seguindo o mesmo tipo de raciocínio empregado na demonstração do Teorema A, obtemos $\bar{\epsilon} > 0$ tal que o funcional I_ϵ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ pontos críticos em $\mathcal{N}_\epsilon$, para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. Vamos demonstrar agora que cada ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de I_ϵ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Seja u_ϵ um ponto crítico de I_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$. Do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda_\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\epsilon(u_\epsilon) = \lambda_\epsilon J'(u_\epsilon)$$

onde

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}.$$

Assim,

$$I'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon = \lambda_\epsilon J'(u_\epsilon)u_\epsilon = 0.$$

Desde que

$$J'(u_\epsilon)u_\epsilon = p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\epsilon|^p + p\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u_\epsilon|^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_\epsilon)u_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2 - p^*\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^{p^*},$$

temos

$$J'(u_\epsilon)u_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} (p-1)f(u_\epsilon)u_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_\epsilon)(u_\epsilon)^2 - p^*\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^{p^*}$$

e por (f_5)

$$J'(u_\epsilon)u_\epsilon \leq -p^*\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^{p^*} < 0.$$

Logo, $\lambda_\epsilon = 0$ e portanto, $I'_\epsilon(u_\epsilon) = 0$. Assim, o problema (P_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. ■

Capítulo 3

Caso Subcrítico sem a Condição de Rabinowitz

3.1 Introdução

Neste capítulo, voltamos a estudar o problema

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall \; x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com $1 < p < N$ e $\epsilon > 0$ um parâmetro pequeno. Usando a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman, vamos mostrar um resultado de multiplicidade para o problema (P_ϵ). Desta vez, o potencial V poderá ter qualquer comportamento no infinito.

As hipóteses sobre o problema (P_ϵ) são:

(V_1) $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $V(x) \geq V_0 > 0$, $\forall \; x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_2) Dado $\delta > 0$, existe um aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^N$ tal que $V_0 < \min\limits_{\partial\Omega} V$,

$$M = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\} \neq \emptyset \; e \; M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, M) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Observe que a condição (V_2) garante que o mínimo V_0 é atingido no interior de Ω e M é um subconjunto próprio de Ω.

As hipóteses sobre a não linearidade $f \in C^1(\mathbb{R})$ são as seguintes:

(f_1) $f(s) = 0, \forall\ s < 0.$

(f_2) $\displaystyle\lim_{|s| \to 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0.$

(f_3) $\displaystyle\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{|s|^q} = 0$, para algum $q \in \mathbb{R}$ com $p-1 < q < p^*-1$, onde $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.

(f_4) Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p < \theta$ e $0 < \theta F(s) \leq sf(s)$, $\forall\ s > 0$, sendo $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$.

(f_5) A função $s \longrightarrow \dfrac{f(s)}{s^{p-1}}$ é crescente , $\forall \quad s > 0$.

(f_6) $f'(s)s^2 - (p-1)f(s)s \geq Cs^\sigma$, com $C > 0$ e $\sigma \in (p, p^*)$ $\forall\ s \geq 0$.

Observe que não foi dada nenhuma condição sobre V no infinito, isto é, no infinito V pode ter qualquer comportamento. Portanto, neste capítulo, vamos estudar uma classe de problemas distinta da classe de problemas do capítulo 1.

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema C *Suponha que o potencial V verifique as condições $(V_1)-(V_2)$ e a não linearidade f verifique as hipóteses (f_1)-(f_6). Então, dado $\delta > 0$, existe $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema (P_ϵ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.*

Vamos organizar este capítulo da seguinte maneira. Na seção 3.2, vamos fazer um truncamento na não linearidade f e com isso definir um problema auxiliar que será estudado nas seções seguintes. Na seção 3.3, mostraremos que o funcional associado ao problema auxiliar verifica a condição Palais-Smale. Nesta etapa, vamos adaptar alguns resultados de Del Pino e Felmer [30]. Na seção 3.4, seguindo as idéias desenvolvidas no capítulo 1, mostraremos resultados que relacionam o conjunto M dos mínimos de V e a topologia de um subconjunto de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, e em seguida, mostraremos que o problema auxiliar tem, pelo menos, $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas. Na seção 3.5, mostraremos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, as soluções do problema auxiliar são soluções do problema original. Para isso, usaremos o método de Iteração de Moser [46] e um resultado devido a Di Benedetto [32].

3.2 O Problema Auxiliar

Seja $k > \dfrac{\theta}{\theta - p}$ com θ da hipótese (f_4) e $a \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{f(a)}{a^{p-1}} = \dfrac{V_0}{k}$. Definimos para todo $s \geq 0$,

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} f(s) & se \quad s \leq a \\ \\ \dfrac{V_0}{k} s^{p-1} & se \quad s > a. \end{cases}$$

Considere $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tais que $t_0 < a < t_1$ e seja $\eta \in C^1([t_0, t_1])$ satisfazendo:

(1) $\eta(s) \leq \widehat{f}(s), \;\; \forall \; s \in [t_0, t_1]$.

(2) $\eta(t_0) = \widehat{f}(t_0)$ e $\eta(t_1) = \widehat{f}(t_1)$.

(3) $\eta'(t_0) = \widehat{f}'(t_0)$ e $\eta'(t_1) = \widehat{f}'(t_1)$.

(4) $s \rightarrow \dfrac{\eta(s)}{s^{p-1}}$ é não decrescente $\forall \; s \in [t_0, t_1]$.

Usando as funções η e $\widehat{f}$, definimos a função

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} \widehat{f}(s) & se \quad s \notin [t_0, t_1] \\ \\ \eta(s) & se \quad s \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Considere agora a função

$$g(x, s) = \chi_\Omega(x) f(s) + (1 - \chi_\Omega(x)) \widetilde{f}(s)$$

e o problema

$$(P_\epsilon)_a \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = g(\epsilon x, u) \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u > 0 \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde χ_Ω é a função característica do conjunto Ω.

Observando a definição da função g, podemos concluir que mostrando a existência de uma solução u_ϵ para o problema $(P_\epsilon)_a$ que seja limitada superiormente por t_0 em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, estaremos, de fato, assegurando a existência de solução para o problema original, o que motiva estudarmos o problema $(P_\epsilon)_a$.

Representaremos por W_ϵ o seguinte espaço de Banach:

$$W_\epsilon = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p < \infty\}$$

com a norma dada por

$$\|u\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p.$$

Desde que $V_0 > 0$, temos que W_ϵ está imerso continuamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Observe também que usando as hipóteses sobre f, temos que g é Carathéodory e verifica as seguintes condições:

(g_1) $g(x,s) = 0, \ \forall\ s < 0.$

(g_2) $\displaystyle\lim_{|s|\to 0} \frac{g(x,s)}{|s|^{p-1}} = 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

(g_3) $\displaystyle\lim_{|s|\to \infty} \frac{g(x,s)}{|s|^{q}} = 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$ e com $p-1 < q < p^*-1$.

(g_4) Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p < \theta$ e

(i) $0 \le \theta G(x,s) = \theta \displaystyle\int_0^s g(x,t)dt < g(x,s)s \quad , \forall\ x \in \Omega \quad \text{e} \quad \forall\ s > 0.$

(ii) $0 < pG(x,s) \le g(x,s)s \le \dfrac{1}{k} V(x) s^p \quad , \forall\ s > 0 \quad \text{e} \quad \forall\ x \notin \Omega.$

(g_5) A função $s \to \dfrac{g(x,s)}{s^{p-1}}$ é não decrescente para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $s > 0$.

3.3 A condição Palais-Smale

Segue das condições (f_2), (f_3) e (f_4) que o funcional associado ao problema (P_ϵ) satisfaz à geometria do Teorema do Passo da Montanha. Contudo, pela falta de compacidade das imersões de Sobolev em $\mathbb{R}^N$, não podemos garantir que o mesmo satisfaz a condição Palais-Smale. Nosso objetivo nesta seção é mostrar, entretanto, que a mesma ocorre para o funcional associado ao problema auxiliar.

Considere o funcional

$$\begin{aligned} J_\epsilon : \quad W_\epsilon \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \quad &\longmapsto J_\epsilon(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon x, u). \end{aligned}$$

Prova-se que para cada $\epsilon > 0$, $J_\epsilon \in C^1(W_\epsilon, \mathbb{R})$ e

$$J'_\epsilon(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^{p-2}uv - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u)v.$$

Portanto, pontos críticos do funcional J_ϵ são soluções fracas do problema $(P_\epsilon)_a$.

Mostraremos, nos Lemas a seguir, que o funcional J_ϵ satisfaz às hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (ver Lema A.2 no apêndice).

Lema 3.1 *O funcional J_ϵ verifica as condições (H_1) e (H_2) do Teorema do Passo da Montanha .*

Demonstração: Decorre diretamente da definição de G que $J_\epsilon(0) = 0$. Por (g_2) e (g_3), dado $\xi > 0$, existe $C_\xi > 0$ verificando as seguintes condições de crescimento:

$$|g(x, s)| \leq \xi s^{p-1} + C_\xi s^q \ , \ \forall \ s > 0, \tag{3.1}$$

$$|G(x, s)| \leq \frac{\xi}{p} s^p + \frac{C_\xi}{q+1} s^{q+1} \ , \ \forall \ s > 0 \tag{3.2}$$

e com $p - 1 < q < p^* - 1$, de onde obtemos:

$$J_\epsilon(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_\epsilon^p - \frac{\xi}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, encontramos

$$J_\epsilon(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_\epsilon^p - \frac{\xi}{p}\|u\|_\epsilon^p - C\|u\|_\epsilon^{q+1}.$$

Portanto, existem ξ, α e r constantes positivas tais que

$$J_\epsilon(u) \geq C_1\|u\|_\epsilon^p \geq \alpha > 0, \ \textit{para todo}\ u \in W_\epsilon \ \textit{tal que}\ \|u\|_\epsilon = r.$$

Agora observe que a condição $(g_4)(i)$ implica

$$G(x,s) \geq C_1 s^\theta - C_2 \ , \ \forall \ x \in \Omega \ , \ \forall \ s > 0, \tag{3.3}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas.
Considerando $u \in W_\epsilon \backslash \{0\}$ com suporte compacto contido em Ω_ϵ, onde

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N ; \epsilon x \in \Omega\},$$

temos para todo $t > 0$,

$$J_\epsilon(tu) \leq \frac{t^p}{p} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^p + \frac{t^p}{p} \int_{\Omega_\epsilon} V(\epsilon x)|u|^p - C_1 t^\theta \int_{\Omega_\epsilon} |u|^\theta + C_2 \int_{\Omega_\epsilon} dx$$

Recordando que $\theta > p$, passando ao limite de $t \to \infty$, obtemos $J_\epsilon(tu) \to -\infty$. ■

Para mostrar que o funcional J_ϵ satisfaz a condição Palais-Smale, precisaremos dos dois Lemas seguintes.

Lema 3.2 *Seja (u_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para J_ϵ. Então (u_n) é limitada em W_ϵ.*

Demonstração: Desde que

$$J'_\epsilon(u_n) = o_n(1),$$

para n suficientemente grande, obtemos

$$|J'_\epsilon(u_n)u_n| \leq \|u_n\|_\epsilon.$$

Do fato que

$$J_\epsilon(u_n) \to d,$$

existe $C > 0$ tal que

$$|J_\epsilon(u_n)| \leq C.$$

Portanto,

$$C + \|u_n\|_\epsilon \geq J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_\epsilon(u_n)u_n = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\epsilon^p + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} [g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)].$$

Por $(g_4(i))$,

$$C + \|u_n\|_\epsilon \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\epsilon^p + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon}[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)].$$

Por $(g_4(ii))$,

$$\begin{aligned} C + \|u_n\|_\epsilon &\geq \left(\frac{\theta - p}{p\theta}\right)\|u_n\|_\epsilon^p + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon}[pG(\epsilon x, u_n) - \theta G(\epsilon x, u_n)] \\ &= \left(\frac{\theta - p}{p\theta}\right)\|u_n\|_\epsilon^p + \frac{p-\theta}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} G(\epsilon x, u_n) \end{aligned}$$

e novamente por $(g_4(ii))$,

$$C + \|u_n\|_\epsilon \geq \left(\frac{\theta - p}{\theta p}\right)\|u_n\|_\epsilon^p - \frac{\theta - p}{p\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon}\frac{1}{k}V(\epsilon x)|u_n|^p.$$

Assim,

$$C + \|u_n\|_\epsilon \geq \left(\frac{\theta - p}{p\theta}\right)(1 - \frac{1}{k})\|u_n\|_\epsilon^p.$$

Logo, (u_n) é limitada em W_ϵ. ∎

Lema 3.3 *Seja (u_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para J_ϵ. Então para cada $\zeta > 0$, existe $R = R(\zeta) > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u|^p] < \zeta.$$

Demonstração: Seja $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in B_{R/2}(0) \\ \\ 1 & se \quad x \notin B_R(0). \end{cases}$$

com $0 \leq \eta_R(x) \leq 1$ e $|\nabla \eta_R| \leq \dfrac{C}{R}$, onde C é uma constante independente de R.

Observe que a seqüência $(\eta_R u_n)$ é limitada em W_ϵ e por definição do funcional J_ϵ, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}\eta_R\Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] &= J'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n\eta_R - \int_{\mathbb{R}^N} u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta_R. \end{aligned}$$

Escolhendo $R > 0$ de modo que $\Omega_\epsilon \subset B_{R/2}(0)$ e usando $(g_4(ii))$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] &\leq J'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{k}V(\epsilon x)|u_n|\eta_R - \int_{\mathbb{R}^N} u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \eta_R.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] \leq J'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R - \int_{\mathbb{R}^N} u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \eta_R,$$

ou ainda,

$$\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] \leq J'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R + \int_{\mathbb{R}^N} u_n|\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n \nabla \eta_R|.$$

Da desigualdade de Hölder com os expoentes p e $\dfrac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] &\leq CJ'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R \\ &+ C\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n \nabla \eta_R|]^{p/p-1}\Big)^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] \leq CJ'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R + C\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p|\nabla \eta_R|^{p/p-1}\Big)^{(p-1)/p}$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u_n|^p\Big] \leq CJ'_\epsilon(u_n)u_n\eta_R + \frac{C}{R}\|u_n\|_\epsilon^{p-1}.$$

Desde que (u_n) e $(u_n\eta_R)$ são limitadas em W_ϵ, passando ao limite de $n \to \infty$, encontramos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \Big[|\nabla u_n|^p + V(\epsilon x)|u|^p\Big] \leq \frac{\widetilde{C}}{R} < \zeta$$

para algum R suficientemente grande e para cada $\zeta > 0$ fixado. ∎

Proposição 3.1 *O funcional J_ϵ verifica a condição $(P.S)$ sobre $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma seqüência $(P.S)_d$ para J_ϵ. Do Lema 3.2, segue-se que (u_n) é limitada e assim, a menos de subseqüência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad W_\epsilon.$$

Usando um agumento similar ao encontrado em [38], [47] e [57], temos

$$u_n(x) \to u(x) \quad q.t.p \quad em \quad \mathbb{R}^N \tag{3.4}$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad q.t.p \quad em \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.5}$$

Além disso,

$$\|u_n\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n) + o_n(1)$$

e por argumentos usados no Lema 1.2,

$$\|u\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u)u.$$

Afirmação 1

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u) + o_n(1).$$

Considerando por um momento esta afirmação, temos

$$\|u_n\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n + o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u)u + o_n(1) = \|u\|_\epsilon^p + o_n(1). \tag{3.6}$$

Por (3.4), (3.5), (3.6) e do Lema de Brézis-Lieb (ver [42], Lema 4.6), a menos de subseqüência, segue-se que

$$u_n \to u \quad em \quad W_\epsilon$$

e portanto, J_ϵ verifica a condição Palais-Smale.

Demonstração da Afirmação 1: Fixado $R > 0$, temos a imersão compacta

$$W^{1,p}(B_R(0)) \hookrightarrow L^s(B_R(0)), \quad p - 1 \leq s < p^*$$

e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{B_R(0)} g(\epsilon x, u_n)u_n - \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, u)u\right| = 0. \tag{3.7}$$

Da condição de crescimento sobre a g e das imersões contínuas de Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n)u_n \leq C_1\|u_n\|^p_{\epsilon(\mathbb{R}^N\setminus B_R)} + C_2\|u_n\|^{q+1}_{\epsilon(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}.$$

Portanto, do Lema 3.3, para $R > 0$ suficientemente grande,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} g(\epsilon x, u_n)u_n < C_1\zeta + C_2\zeta^{(q+1)/p}. \tag{3.8}$$

Usando o fato que $g(\epsilon x, u)u$ é integrável,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} g(\epsilon x, u)u < \zeta, \tag{3.9}$$

para $R > 0$ suficientemente grande.

Logo, por (3.7), (3.8) e (3.9)

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u)u\right| < \zeta,\ \forall\ \zeta$$

e o resultado segue. ■

Corolário 3.1 *O funcional J_ϵ verifica a condição $(P.S)$ sobre $\mathcal{N}_\epsilon$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma seqüência em $\mathcal{N}_\epsilon$ tal que

$$J_{\epsilon_n}(u_n) \to c \quad e \quad \|J'_\epsilon(u_n)\|_* = o_n(1).$$

Do Lema 5.12 em [58], existe uma seqüência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ verificando

$$J'_\epsilon(u_n) = \lambda_n\phi'(u_n) + o_n(1)$$

onde

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u)u.$$

Portanto,

$$0 = J'_\epsilon(u_n)u_n = \lambda_n\phi'(u_n)u_n + o_n(1).$$

Observe que,

$$\phi'(u_n)u_n = p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + p\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} g'(\epsilon x, u_n)u_n^2,$$

onde $g'(x,s)$ é a derivada de g com relação a variável s. Assim,

$$\phi'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N}[(p-1)g(\epsilon x, u_n)u_n - g'(\epsilon x, u_n)u_n^2].$$

Desde que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N &= [\Omega_\epsilon \cup \{u_n < t_0\}] \cup [(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon) \cap \{t_0 \leq u_n \leq t_1\}] \\ &\cup \ [(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon) \cap \{u_n > t_1\}], \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \phi'(u_n)u_n &= \int_{\Omega_\epsilon \cup \{u_n < t_0\}}[(p-1)g(\epsilon x, u_n)u_n - g'(\epsilon x, u_n)u_n^2] \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon) \cap \{t_0 \leq u_n \leq t_1\}}[(p-1)g(\epsilon x, u_n)u_n - g'(\epsilon x, u_n)u_n^2] \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon) \cap \{u_n > t_1\}}[(p-1)g(\epsilon x, u_n)u_n - g'(\epsilon x, u_n)u_n^2]. \end{aligned}$$

Segue da definição da função g,

$$\begin{aligned} \phi'(u_n)u_n &= \int_{\Omega_\epsilon \cup \{u_n < t_0\}}[(p-1)f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2] \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon) \cap \{t_0 \leq u_n \leq t_1\}}[(p-1)\eta(u_n)u_n - \eta'(u_n)u_n^2]. \end{aligned}$$

Recordando que $s \to \dfrac{\eta(s)}{s^{p-1}}$ é não decrescente, temos

$$(p-1)\eta(u_n)u_n - \eta'(u_n)u_n^2 \leq 0.$$

Por (f_6),

$$\phi'(u_n)u_n \leq -C\int_{\Omega_\epsilon \cup \{u_n > t_1\}} |u_n|^\sigma \leq -C\int_{\Omega_\epsilon} |u_n|^\sigma, \quad com \quad \sigma \in (p, p^*).$$

Portanto,

$$|\phi'(u_n)u_n| \geq C\int_{\Omega_\epsilon} |u_n|^\sigma.$$

Supondo por contradição que,

$$|\phi'(u_n)u_n| = o_n(1),$$

segue-se que

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^{\sigma}(\Omega_\epsilon).$$

Da desigualdade da interpolação,

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^{q+1}(\Omega_\epsilon).$$

Assim, da condição de crescimento sobre g, das imersões contínuas de Sobolev e de

$$\|u_n\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n)u_n = \int_{\Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_n)u_n$$

obtemos

$$\|u_n\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} g(\epsilon x, u_n)u_n + o_n(1).$$

Além disso, por $(g_4(ii))$

$$\|u_n\|_\epsilon^p \leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} V(\epsilon x)|u_n|^p + o_n(1),$$

de onde encontramos,

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\|u_n\|_\epsilon^p = o_n(1),$$

o que contradiz o fato de existir $\alpha > 0$ tal que $\| u \|_\epsilon \geq \alpha > 0, \ \forall \ u \in \mathcal{N}_\epsilon$.

Logo, $\lambda_n = o_n(1)$ e conseqüentemente, $J'_\epsilon(u_n) = o_n(1)$ e (u_n) é uma seqüência $(P.S)_c$ para J_ϵ em W_ϵ. Da Proposição 3.1, (u_n) possui uma subseqüência convergente em W_ϵ. ∎

Teorema 3.1 *O problema $(P_\epsilon)_a$ possui uma solução positiva.*

Demonstração: Do Teorema do Passo da Montanha (ver Lema A.2 no apêndice), existe $u_\epsilon \in W_\epsilon$ tal que

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = \rho_\epsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\gamma(t)) > 0,$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1] \times W_\epsilon) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad J_\epsilon(\gamma(1)) < 0\}$.

Assim, $J'_\epsilon(u_\epsilon) = 0$ e $u_\epsilon \neq 0$.

Desde que $J'_\epsilon(u_\epsilon)(-u_\epsilon^-) = 0$, segue-se que

$$\|u_\epsilon^-\|_\epsilon = 0$$

e portanto,

$$u_\epsilon = u_\epsilon^+ \geq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N.$$

Por Li Gongbao [39](Teorema 1.11) , $u_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e da desigualdade de Harnack em [37], $u_\epsilon > 0$ em $\mathbb{R}^N$. ■

Dos Lemas A.4 e A.5 no apêndice, temos a seguinte caracterização de ρ_ϵ, a qual é mais adequada para os nossos propósitos, dada por:

$$\rho_\epsilon = \inf_{u\in W_\epsilon\backslash\{0\}} \sup_{t\geq 0} J_\epsilon(tu) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\epsilon} J_\epsilon(u)$$

onde $\mathcal{N}_\epsilon = \{u \in W_\epsilon\backslash\{0\} : J'_\epsilon(u)u = 0\}$.

Além disso, J_ϵ é limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\epsilon$ e, para cada $u \in W_\epsilon\backslash\{0\}$, existe no máximo um único $t_0 = t(u)$ tal que

$$J_\epsilon(t_0u) = \max_{t\geq 0} J_\epsilon(tu).$$

3.4 Multiplicidade de Soluções Envolvendo $cat_{M_\delta}(M)$ para o Problema Auxiliar

Como foi dito na introdução, os resultados seguintes vão relacionar o conjunto M dos mínimos de V e a topologia de um subconjunto de W_ϵ. Observe que, diferente do capítulo 1, esses resultados são relativos ao problema auxiliar.

Seja $\delta > 0$ fixado tal que $M_\delta \subset \Omega$ e $\eta \in C_0^\infty([0,\infty))$ verificando $0 \leq \eta(s) \leq 1$ e

$$\eta(s) = \begin{cases} 1 \quad se \quad 0 \leq s \leq \delta/2 \\ \\ 0 \quad se \quad s \geq \delta. \end{cases}$$

Seja w uma solução positiva Ground-state do problema

$$(P_{V_0}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V_0 u^{p-1} = f(u) \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Para cada $y \in M$, considere

$$\Psi_{\epsilon,y}(x) = \eta(|\epsilon x - y|) w\Big(\frac{\epsilon x - y}{\epsilon}\Big).$$

Desde que, para cada $y \in M$, $\Psi_{\epsilon,y}$ tem suporte compacto em $B_{\delta/\epsilon}(y/\epsilon)$, temos que, $\Psi_{\epsilon,y} \in W_\epsilon$. Além disso, como $B_{\delta/\epsilon}(y/\epsilon) \cap \Omega_\epsilon \neq \emptyset$, segue-se do Lema A.5 que, para cada $\epsilon > 0$, existe um único $t_\epsilon > 0$ tal que

$$\max_{t \geq 0} J_\epsilon(t\Psi_{\epsilon,y}) = J_\epsilon(t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}).$$

Definimos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon : \ & M \longrightarrow \mathcal{N}_\epsilon \\ & y \longmapsto \Phi_{\epsilon,y} = t_\epsilon \Psi_{\epsilon,y}. \end{aligned}$$

Seja $\rho > 0$ tal que $M_\delta \subset B_\rho(0)$ e $\chi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} x \quad se \quad |x| \leq \rho \\ \\ \dfrac{\rho x}{|x|} \quad se \quad |x| \geq \rho. \end{cases}$$

Definimos $\beta : \mathcal{N}_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon x)|u(x)|^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p}.$$

Lema 3.4 *Seja $M \subset \Omega$ tal que $M = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(\Phi_{\epsilon,y}) = c_{V_0} \quad uniformemente \quad em \quad y \in M.$$

Demonstração: Suponha por contradição que o Lema não vale. Então, existem $\delta_0 > 0$ e uma seqüência $(y_n) \subset M$ verificando

$$| \ J_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) - c_{V_0} \ | \ \geq \delta_0 \ \ onde \ \ \epsilon_n \to 0 \ \ quando \ \ n \to \infty. \tag{3.10}$$

Da definição de $\Phi_{\epsilon,y}$, segue-se que,

$$\begin{aligned} J_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) &= \frac{t_{\epsilon_n}^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \nabla \Big(\eta(|\epsilon_n x - y_n|) w\Big(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}\Big)\Big)\Big|^p \\ &+ \frac{t_{\epsilon_n}^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x) \Big| \eta(|\epsilon_n x - y_n|) w\Big(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}\Big)\Big|^p \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} G\Big(\epsilon_n x, t_{\epsilon_n} \eta(|\epsilon_n x - y_n|) w\Big(\frac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}\Big)\Big) \end{aligned}$$

e desde que $\Phi_{\epsilon_n,y_n} \in \mathcal{N}_\epsilon$

$$J'_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n})\Phi_{\epsilon_n,y_n} = 0$$

Considerando a mudança de variável $z = \dfrac{\epsilon_n x - y_n}{\epsilon_n}$, obtemos,

$$\begin{aligned} J_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) &= \frac{t_{\epsilon_n}^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Big(\eta(|\epsilon_n z|) w(z) \Big)|^p \\ &+ \frac{t_{\epsilon_n}^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n) |\eta(|\epsilon_n z|) w(z)|^p \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n z + y_n, t_{\epsilon_n} \eta(|\epsilon_n z|) w(z)). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta(|\epsilon_n z|) w(z)|^p &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n) |\eta(|\epsilon_n z|) w(z)|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(\epsilon_n z + y_n, t_{\epsilon_n} \eta(|\epsilon_n z|) w(z)) |\eta(|\epsilon_n z|) w(z)|^p}{(t_{\epsilon_n} \eta(|\epsilon_n z|) w(z))^{p-1}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in B_{\frac{\delta}{\epsilon_n}}(0)$, temos

$$\epsilon_n z \in B_\delta(0)$$

e assim,

$$\epsilon_n z + y_n \in B_\delta(y_n) \subset M_\delta \subset \Omega.$$

Desde que $G \equiv F$ em Ω, encontramos

$$\begin{aligned} J_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n,y_n}) &= \frac{t_{\epsilon_n}^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p \\ &+ \frac{t_{\epsilon_n}^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} F(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z))|\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p}{(t_{\epsilon_n}\eta(|\epsilon_n z|)w(z))^{p-1}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Além disso, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_{\epsilon_n,y_n}\|_{\epsilon_n}^p = \|w\|_{V_0}^p, \tag{3.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(\eta(|\epsilon_n z|)w(z))\eta(|\epsilon_n z|)w(z) = \int_{\mathbb{R}^N} f(w)w$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F(\eta(|\epsilon_n z|)w(z)) = \int_{\mathbb{R}^N} F(w).$$

Mostraremos agora que, a menos de subseqüência, $t_{\epsilon_n} \to 1$. De fato, desde que $\eta \equiv 1$ em $B_{\delta/2}(0)$ e $B_{\delta/2}(0) \subset B_{\delta/2\epsilon_n}(0)$ para n suficientemente grande, temos de (3.13)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|\eta(|\epsilon_n z|)w(z)|^p \\ &\geq \int_{B_{\delta/2}(0)} \frac{f(t_{\epsilon_n}w(z))}{(t_{\epsilon_n}w(z))^{p-1}}|w(z)|^p. \end{aligned}$$

Da continuidade de w, existe $\overline{z} \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(\overline{z}) = \min_{\bar{B}_{\delta/2}(0)} w(z)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta(|\epsilon_n z|) w(z)|^p &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n) |\eta(|\epsilon_n z|) w(z)|^p \\ &\geq \frac{f(t_{\epsilon_n} w(\overline{z}))}{(t_{\epsilon_n} w(\overline{z}))^{p-1}} \int_{B_{\delta/2}(0)} |w(z)|^p. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Supondo por contradição que exista uma subseqüência, que ainda chamaremos por (t_{ϵ_n}), tal que $|t_{\epsilon_n}| \to \infty$, usando a hipótese (f_4) e passando ao limite de $n \to \infty$ em (3.15), obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \|\Psi_{\epsilon_n, y_n}\|_{\epsilon_n}^p = \infty,$$

o que é um absurdo por (3.14).

Portanto, (t_{ϵ_n}) é uma seqüência limitada e passando a uma subseqüência, $t_{\epsilon_n} \to t_0$ com $t_0 \geq 0$. Observe que $t_0 > 0$, pois se $t_0 = 0$, do crescimento da g, da limitação de $\|\Psi_{\epsilon_n, y_n}\|_{\epsilon_n}^p$ e de (3.14), verificamos que $w \equiv 0$, o que é um absurdo.

Logo, passando ao limite de $n \to \infty$ em (3.13), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0 |w|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0 w) w}{t_0^{p-1}}.$$

Desde que w pertence à variedade de Nehari definida pelo funcional E_{V_0}, segue-se que $t_0 = 1$ e assim, passando ao limite de $n \to \infty$ em (3.12), temos

$$\lim_{n \to \infty} J_{\epsilon_n}(\Phi_{\epsilon_n, y_n}) = E_{V_0}(w) = c_{V_0},$$

contradizendo (3.10). ∎

Considere o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{N}_\epsilon} = \{u \in \mathcal{N}_\epsilon : J_\epsilon(u) \leq c_{V_0} + h(\epsilon)\},$$

onde $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função tal que $h(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Do Lema 3.4, temos que $\Phi_{\epsilon_n, y_n} \in \widetilde{\mathcal{N}_\epsilon}$ e portanto, $\widetilde{\mathcal{N}_\epsilon} \neq \emptyset$.

Lema 3.5 *Seja $M = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \beta(\Phi_{\epsilon, y}) = y, \ \textit{uniformemente em} \ y \in M.$$

Demonstração: Segue o mesmo tipo de argumentos usados no Lema 1.5. ■

O próximo Lema é uma versão da afirmação 4.2 de Cingolani e Lazzo [26]. Observe que, neste caso, não temos a condição de Rabinowitz.

Proposição 3.2 *Seja (u_n) uma seqüência em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$J_{\epsilon_n}(u_n) \to c_{V_0}$$

e

$$J'_{\epsilon_n}(u_n)(u_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

com $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então existe uma seqüência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que a seqüência $v_n(x) = u_n(x+\widetilde{y}_n)$ possui uma subseqüência convergente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, passando a subseqüência,

$$y_n \to \widetilde{y} \quad com \quad y \in M,$$

onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$.

Demonstração: Afirmamos que existe uma seqüência $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ e reais positivos R e β tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(\widetilde{y}_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0, \tag{3.16}$$

pois do contrário, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^p = 0 \quad \forall\, R > 0.$$

Além disso, por argumentos bem conhecidos, demonstra-se que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, por um resultado devido a Lions (ver Lema A.3 no apêndice)

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^s(\mathbb{R}^N), \quad p < s < p^*.$$

Desde que

$$\|u_n\|^p_{\epsilon_n} = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, u_n)u_n \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n,$$

da condição de crescimento (3.1) sobre a f e das imersões contínuas de Sobolev,

$$\|u_n\|_{\epsilon_n}^p = o_n(1),$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(u_n) = 0 = c_{V_0},$$

o que é um absurdo.

Considerando $v_n(x) = u_n(x+\widetilde{y}_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e assim, a menos de subseqüência,

$$v_n \rightharpoonup v$$

com $v \not\equiv 0$, por (3.16). Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n > 0$ tal que

$$t_n v_n = \widetilde{v}_n \in \mathcal{N}_{V_0}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_{V_0} \le E_{V_0}(\widetilde{v}_n) &= \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_0|v_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n v_n) \\ &= \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V_0|u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n u_n) \\ &\le \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x)|u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n x, t_n u_n), \end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$c_{V_0} \le E_{V_0}(\widetilde{v}_n) \le J_\epsilon(t_n u_n) \le J_\epsilon(u_n) = c_{V_0} + o_n(1).$$

Assim,

$$E_{V_0}(\widetilde{v}_n) \to c_{V_0} \quad e \quad (\widetilde{v}_n) \subset \mathcal{N}_{V_0}. \tag{3.17}$$

Com os mesmos argumentos usados na Proposição 1.4, segue-se que, passando a uma subseqüência,

$$\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v} \ e \ t_n \to t_0 \ com \ t_0 > 0.$$

Da unicidade do limite fraco, temos que $\tilde{v} = t_0 v$ e recordando que $v \neq 0$, por (3.17) e da Proposição 1.6,

$$\widetilde{v}_n \to \widetilde{v} \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{3.18}$$

e, portanto,

$$v_n \to \frac{\widetilde{v}}{t_0} = v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{3.19}$$

Além disso,

$$E_{V_0}(\widetilde{v}) = c_{V_0} \quad e \quad E'_{V_0}(\widetilde{v}) = 0. \tag{3.20}$$

Provaremos primeiramente que (y_n) é limitada, onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$. Suponha por contradição que exista uma subseqüência, que ainda chamaremos por (y_n), tal que $|y_n| \to \infty$. Agora, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|v_n|^p = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n z + y_n, v_n)v_n,$$

implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0|v_n|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n z + y_n, v_n)v_n$$

e considerando $R > 0$ tal que $B_R(0) \supset \Omega$, temos para cada $z \in B_{R/\epsilon_n}(0)$,

$$|\epsilon_n z| \leq R \quad e \quad -|\epsilon_n z| \geq -R.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $|y_n| \geq 2R$. Assim, obtemos

$$|\epsilon_n z + y_n| \geq |y_n| - |\epsilon_n z| \geq 2R - R = R.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0|v_n|^p \leq \int_{B_{R/\epsilon_n}(0)} \widetilde{f}(v_n)v_n + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R/\epsilon_n}(0)} g(\epsilon_n z + y_n, v_n)v_n,$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0|v_n|^p \leq \int_{B_{R/\epsilon_n}(0)} \widetilde{f}(v_n)v_n + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R/\epsilon_n}(0)} f(v_n)v_n.$$

De (3.19) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R/\epsilon_n}(0)} f(v_n)v_n = o_n(1).$$

Temos ainda que,

$$\widetilde{f}(v_n) \leq \frac{V_0}{k} v_n^{p-1}$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0|v_n|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V_0}{k}|v_n|^p + o_n(1).$$

Conseqüentemente,

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\right] \leq o_n(1)$$

e, passando ao limite de $n \to \infty$,

$$v \equiv 0,$$

o que é um absurdo.

Logo, (y_n) é limitada e, passando a uma subseqüência,

$$y_n \to \overline{y} \in \mathbb{R}^N.$$

Afirmamos que $\overline{y} \in \overline{\Omega}$. De fato, suponha por contradição que $\overline{y} \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Desde que $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ é um aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{y}) \subset \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ e passando a uma subseqüência,

$$y_n \in B_{r/2}(\overline{y}) \subset \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe que para todo $z \in B_{r/2\epsilon_n}(0)$, temos

$$|\epsilon_n z + y_n - \overline{y}| \leq |\epsilon_n z| + |y_n - \overline{y}| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Portanto, novamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V_0|v_n|^p \leq \int_{B_{r/2\epsilon_n}(0)} \widetilde{f}(v_n)v_n + \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{r/2\epsilon_n}(0)} f(v_n)v_n$$

e passando ao limite de $n \to \infty$, encontramos

$$v \equiv 0,$$

o que é um absurdo. Logo, $\overline{y} \in \overline{\Omega}$.

Finalmente, vamos demonstrar que $V(\overline{y}) = V_0$, pois neste caso, $\overline{y} \notin \partial\Omega$. Assim $\overline{y} \in \Omega$ e $\overline{y} \in M$.

Suponha, por contradição, que $V(\overline{y}) > V_0$. Conseqüentemente,

$$c_{V_0} = E_{V_0}(\widetilde{v}) < \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{v}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\overline{y})|\widetilde{v}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}).$$

De (3.18) e do Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} c_{V_0} &< \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{v}_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + y_n)|\widetilde{v}_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}_n)\Big] \\ &\le \liminf_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(t_n u_n) \le \liminf_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(u_n) = c_{V_0}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. ■

Lema 3.6 *Seja $\delta > 0$ e $M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, M) \le \delta\}$. Então*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{u\in\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon} \inf_{y\in M_\delta} |\beta(u) - y| = 0.$$

Demonstração: Seja (ϵ_n) uma seqüência de números reais positivos tais que $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Da definição de supremo, existe uma seqüência $(u_n) \subset \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n}$ tal que

$$\inf_{y\in M_\delta} |\beta(u_n) - y| = \sup_{u\in\mathcal{N}_{\epsilon_n}} \inf_{y\in M_\delta} |\beta(u) - y| + o_n(1).$$

Assim, é suficiente encontrar uma seqüência $(y_n) \subset M_\delta$ que, a menos de subseqüência, verifique

$$\lim_{n\to\infty} |\beta(u_n) - y_n| = 0. \tag{3.21}$$

Observe que $(u_n) \subset \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n} \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$ e assim,

$$\rho_{\epsilon_n} \le J_{\epsilon_n}(u_n) \le c_{V_0} + h(\epsilon_n) \tag{3.22}$$

e

$$J'_{\epsilon_n}(u_n)u_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Afirmamos que

$$\rho_{\epsilon_n} \to c_{V_0}. \tag{3.24}$$

De fato, decorre de (3.22),

$$\limsup_{n\to\infty} \rho_{\epsilon_n} \leq c_{V_0}. \tag{3.25}$$

Por outro lado,

$$V_0 \leq V(\epsilon_n x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

e, portanto, para todo $u \in W_{\epsilon_n}$,

$$E_{V_0}(tu) \leq J_{\epsilon_n}(tu),\ \forall\, t \geq 0,$$

no que resulta

$$c_{V_0} \leq \max_{t\geq 0} E_{V_0}(tu) \leq J_{\epsilon_n}(tu).$$

Logo,

$$c_{V_0} \leq \rho_{\epsilon_n}$$

e portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \rho_{\epsilon_n} \geq c_{V_0}. \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26), segue-se a afirmação (3.24).

Da Proposição 3.2, existe $(\widetilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $v_n(x) = u_n(x + \widetilde{y}_n)$ possui uma subseqüência convergente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $y_n \to \overline{y}$, onde $y_n = \epsilon_n \widetilde{y}_n$ e $\overline{y} \in M$. Portanto, para n suficientemente grande, $(y_n) \subset M_\delta$. Demonstraremos que (y_n) verifica o limite em (3.21). De fato,

$$\beta(u_n) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n x)|u_n|^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\epsilon_n z + y_n)|v_n|^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p}$$

e assim,

$$\beta(u_n) - y_n = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} [\chi(\epsilon_n z + y_n) - y_n]|v_n|^p}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p}.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$|\beta(u_n) - y_n| = o_n(1).$$

$\blacksquare$

O próximo Teorema é um resultado de multiplicidade para o problema auxiliar. Demonstraremos que o problema $(P_\epsilon)_a$ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas.

Teorema 3.2 *Suponha que o potencial V verifique as condições $(V_1) - (V_2)$ e a não linearidade f verifique as hipóteses (f_1)-(f_6). Então, dado $\delta > 0$, existe $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema $(P_\epsilon)_a$ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.*

Demonstração: Seguindo o mesmo raciocínio empregado no Teorema A, obtemos $\overline{\epsilon} > 0$ tal que o funcional J_ϵ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ pontos críticos $\mathcal{N}_\epsilon$, para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. Vamos demonstrar agora que cada ponto crítico de J_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$ é ponto crítico de J_ϵ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Seja u_ϵ um ponto crítico de J_ϵ em $\mathcal{N}_\epsilon$. Do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe λ_ϵ verificando

$$J'_\epsilon(u_\epsilon) = \lambda_\epsilon \phi'(u_\epsilon),$$

onde

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) \, | u |^p - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u)$$

Conseqüentemente,

$$0 = J'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon = \lambda_\epsilon \phi'(u_\epsilon)u_\epsilon.$$

Com o mesmo raciocínio empregado no Corolário 3.1, $\phi(u_\epsilon)u_\epsilon < 0$. Assim, $\lambda_\epsilon = 0$ e $J'_\epsilon(u_\epsilon) = 0$. Portanto, o problema $(P_\epsilon)_a$ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. $\blacksquare$

3.5 Multiplicidade de Soluções para o Problema Original

No próximo Lema, usaremos o método de Iteração de Moser [46] e adaptaremos as idéias contidas em [22]. Este resultado é fundamental para mostrarmos que, para ϵ suficientemente pequeno, cada solução de $(P_\epsilon)_a$ é solução de (P_ϵ).

Lema 3.7 *Seja $(x_n) \subset \overline{\Omega}_{\epsilon_n}$, onde (ϵ_n) é uma seqüência de números reais positivos tal que $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Considere a seqüência (v_n), com $v_n(x) = u_{\epsilon_n}(x+x_n)$ e u_{ϵ_n} uma solução de $(P_\epsilon)_a$. Então, (v_n)converge uniformemente sobre compactos do $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração: Observe que v_n verifica o seguinte problema:

$$(P_n) \quad \begin{cases} -\Delta_p v_n + V_n(x) v_n^{p-1} = g(\epsilon_n x + \overline{x}_n, v_n) \\ \\ v_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad e \quad v_n > 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde

$$\overline{x}_n = \epsilon_n x_n \;\; e \;\; V_n(x) = V(\epsilon_n x + \overline{x}_n).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para $L > 0$, definimos

$$v_{L,n} = \begin{cases} v_n \quad se \quad v_n \leq L \\ \\ L \quad se \quad v_n \geq L, \end{cases}$$

$$z_{L,n} = v_{L,n}^{p(\beta-1)} v_n \quad e \quad w_{L,n} = v_n v_{L,n}^{\beta-1}$$

com $\beta > 1$ a ser fixado.

Usando $z_{L,n}$ como função teste,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla z_{L,n} + \int_{\mathbb{R}^N} V_n(x) |v_n|^{p-2} v_n z_{L,n} = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x + \overline{x}_n, v_n) z_{L,n}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p(\beta-1)}|\nabla v_n|^p &= -p(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p\beta-p-1}v_n|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla v_{L,n}\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x+\overline{x}_n, v_n)v_n v_{L,n}^{p(\beta-1)} - \int_{\mathbb{R}^N} V_n|v_n|^p v_{L,n}^{p(\beta-1)}.\end{aligned}$$

Desde que

$$p(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p\beta-p-1}v_n|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla v_{L,n} = p(\beta-1)\int_{\{v_n\leq L\}} v_n^{p(\beta-1)}|\nabla v_n|^p \geq 0,$$

segue da condição de crescimento sobre a função g, a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p(\beta-1)}|\nabla v_n|^p \leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q+1}v_{L,n}^{p(\beta-1)}. \tag{3.27}$$

Por outro lado, das imersões contínuas de Sobolev,

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_{L,n}|^p = C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(v_n v_{L,n}^{\beta-1})|^p.$$

Conseqüentemente,

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p(\beta-1)}|\nabla v_n|^p + C(\beta-1)^p\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p(\beta-2)}v_n^p|\nabla v_{L,n}|^p.$$

Logo,

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p(\beta-1)}|\nabla v_n|^p. \tag{3.28}$$

Substituindo (3.27) em (3.28), obtemos:

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q+1}v_{L,n}^{p(\beta-1)}$$

e portanto,

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q+1-p}(v_n v_{L,n}^{\beta-1})^p = C\beta^p\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q+1-p}w_{L,n}^p.$$

Da desigualdade de Hölder com os expoentes $p^*/[q+1-p]$ e $p^*/[p^*-(q+1-p)]$, temos

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{p^*}\Big)^{(q+1-p)/p^*}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} w_{L,n}^{pp^*/[p^*-(q+1-p)]}\Big)^{[p^*-(q+1-p)]/p^*}, \tag{3.29}$$

onde $p < \dfrac{pp^*}{p^*-(q+1-p)} < p^*$.

Reescrevendo (3.29) e usando o fato que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, encontramos

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N} w_{L,n}^{p\alpha^*}\Big)^{1/\alpha^*}$$

ou ainda,

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p|w_{L,n}|_{\alpha^*}^p$$

com $\alpha^* = \dfrac{pp^*}{p^* - (q+1-p)}$.

Observe que se $v_n^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$|w_{L,n}|_{p^*}^p \leq C\beta^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N} [v_n v_{L,n}^{\beta-1}]^{\alpha^*}\Big)^p \leq C\beta^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\beta\alpha^*}\Big)^{p/\alpha^*} < +\infty.$$

Do Lema de Fatou na variável L, obtemos

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\beta p^*}\Big)^{p/p^*} \leq C\beta^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\beta\alpha^*}\Big)^{p/\alpha^*},$$

ou ainda

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{p^*\beta}\Big)^{1/p^*} \leq C\beta\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\beta\alpha^*}\Big)^{1/\alpha^*}.$$

Portanto,

$$|v_n|_{\beta p^*}^\beta \leq C\beta|v_n|_{\beta\alpha^*}^\beta,$$

ou seja,

$$|v_n|_{\beta p^*} \leq C^{1/\beta}\beta^{1/\beta}|v_n|_{\beta\alpha^*} \tag{3.30}$$

e além disso, considerando $\chi = \dfrac{p^*}{\alpha^*}$, temos que $p^* = \chi\alpha^*$ e $\beta\chi\alpha^* = \beta p^*, \forall\, \beta > 1$ verificando $v_n^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

1º Passo

Considere $\beta = \dfrac{p^*}{\alpha^*}$ e observe que pela desigualdade (3.30)

$$v_n^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$|v_n|_{(p^*)^2/\alpha^*} \leq C^{1/\beta}\beta^{1/\beta}|v_n|_{p^*},$$

o que implica

$$|v_n|_{(\chi\alpha^*)^2/\alpha^*} \leq C^{1/\beta}\beta^{1/\beta}|v_n|_{p^*},$$

ou seja,

$$|v_n|_{\chi^2\alpha^*} \leq C^{1/\chi}\chi^{1/\chi}|v_n|_{p^*} \leq C^{1/\chi}\chi^{1/\chi}K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.31}$$

mostrando que

$$v_n^{(p^*/\alpha^*)^2} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N). \tag{3.32}$$

2º Passo

Considerando $\beta = \left(\dfrac{p^*}{\alpha^*}\right)^2$, por (3.32)

$$v_n^{\beta} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$|v_n|_{(p^*)^3/(\alpha^*)^2} \leq C^{1/\beta}\beta^{1/\beta}|v_n|_{(p^*)^2/\alpha^*},$$

o que implica

$$|v_n|_{(\chi\alpha^*)^3/(\alpha^*)^2} \leq C^{1/\beta}\beta^{1/\beta}|v_n|_{\chi^2\alpha^*}, \tag{3.33}$$

ou seja

$$|v_n|_{\chi^3\alpha^*} \leq C^{1/\beta}\beta^{1/\beta}C^{1/\chi}\chi^{1/\chi}K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$|v_n|_{\chi^3\alpha^*} \leq C^{1/\chi^2}(\chi^2)^{1/\chi^2}C^{1/\chi}\chi^{1/\chi}K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ou,

$$|v_n|_{\chi^3\alpha^*} \leq C^{1/\chi^2+1/\chi}(\chi^2)^{2/\chi^2+1/\chi}K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

com

$$v_n^{(p^n/\alpha^*)^3} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$$

por (3.32) e (3.33).

Por recorrência, obtemos

$$|v_n|_{\chi^{(m+1)}\alpha^*} \leq C^{\sum_{i=1}^{m}\chi^{-i}} \chi^{\sum_{i=1}^{m} i\chi^{-i}} K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Passsando ao limite de $m \to \infty$, encontramos

$$|v_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \overline{C}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Observe que para qualquer domínio limitado $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$ e do crescimento da g,

$$|V(\epsilon_n x + \overline{x}_n)v_n^{p-1} - g(\epsilon_n x + \overline{x}_n, v_n)| \leq C_{\Omega'}\overline{C}^{p-1} + \delta\overline{C}^{p-1} + C_\delta \overline{C}^q.$$

Portanto,

$$|V(\epsilon_n x + \overline{x}_n)v_n^{p-1} - g(\epsilon_n z + \overline{x}_n, v_n)| \leq C + C|\nabla v_n|^p.$$

Considerando $\Psi(x) = C$, temos que $\Psi \in L^t(\Omega')$ com $t > p'N$. Logo, por um resultado devido a Di Benedetto [32],

$$|\nabla v_n| \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

e para todo compacto $K \subset \Omega'$, existe uma constante C_0, dependendo somente de $\overline{C}, N, p$ e $dist(K, \partial\Omega')$ tal que

$$|\nabla v_n|_{\infty,K} \leq C_0.$$

Assim,

$$|v_n|_{C^{0,\nu}_{loc}(\mathbb{R}^N)} \leq C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad e \quad 0 < \nu < 1$$

e das imersões compactas de Schauder, v_n possui uma subseqüência convergente em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^N)$. ■

Os dois Lemas seguintes são versões para $p \geq 2$ da Proposição 2.1 de Del Pino e Felmer [30]. Ressaltamos que as demonstrações seguem de argumentos diferentes dos usados pelos autores.

Lema 3.8 *Sejam* (ϵ_n) *uma seqüência de números reais positivos tal que* $\epsilon_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *e* $(x_n) \subset \overline{\Omega}_{\epsilon_n}$ *uma seqüência tal que* $u_{\epsilon_n}(x_n) \geq b > 0$, *onde para cada* $n \in \mathbb{N}$, u_{ϵ_n} *é uma solução de* $(P_\epsilon)_a$. *Então,*

$$\lim_{n\to\infty} V(\overline{x}_n) = V_0$$

onde $\overline{x}_n = \epsilon_n x_n$.

Demonstração: Temos que $\overline{x}_n \subset \overline{\Omega}$ e desde que $\overline{\Omega}$ é limitado, passando a uma subseqüência,

$$\overline{x}_n \to \overline{x} \in \overline{\Omega}.$$

Decorre do Teorema 1.3 que $u_{\epsilon_n} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n} \subset \mathcal{N}_{\epsilon_n}$ e assim,

$$\rho_{\epsilon_n} \leq J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \leq c_{V_0} + h(\epsilon_n). \tag{3.34}$$

Afirmamos que

$$\rho_{\epsilon_n} \to c_{V_0}. \tag{3.35}$$

De fato, decorre de (3.34)

$$\limsup_{n\to\infty} \rho_{\epsilon n} \leq c_{V_0}. \tag{3.36}$$

Por outro lado,

$$V_0 \leq V(\epsilon_n x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

e, portanto, para todo $u \in W_{\epsilon_n}$

$$E_{V_0}(tu) \leq J_{\epsilon_n}(tu), \ \forall\, t \geq 0,$$

no que resulta

$$c_{V_0} \leq E_{V_0}(tu) \leq J_{\epsilon_n}(tu).$$

Logo,

$$c_{V_0} \leq \rho_{\epsilon_n}$$

e, portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \rho_{\epsilon_n} \geq c_{V_0}. \tag{3.37}$$

De (3.36), (3.37) segue a afirmação (3.34). Assim,

$$J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \to c_{V_0} \quad e \quad J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n})u_{\epsilon_n} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\|u_{\epsilon_n}\|_{\epsilon_n} \leq C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad e\ para \quad algum\ C > 0.$$

Considere agora a mudança de variáveis $x = z + x_n$ e defina $v_n(z) = u_{\epsilon_n}(z + x_n)$. Da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação

$$\|v_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e conseqüentemente,

$$v_n \rightharpoonup v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Do Lema 3.7 e do fato que

$$v_n(0) = u_{\epsilon_n}(x_n) \geq b > 0,$$

segue-se que

$$v \not\equiv 0.$$

Seja agora $t_n > 0$ tal que $\widetilde{v}_n = t_n v_n \in \mathcal{N}_{V_0}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} c_{V_0} \leq E_{V_0}(\widetilde{v}_n) &\leq \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + x_n)|v_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n z + x_n, t_n v_n) \\ &= J_{\epsilon_n}(t_n v_n) \leq J_{\epsilon}(u_n) = c_{V_0} + o_n(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_{V_0}(\widetilde{v}_n) \to c_{V_0} \quad e \quad (\widetilde{v}_n) \subset \mathcal{N}_{V_0}.$$

Com os mesmos argumentos da Proposição 1.4 no capítulo 1,

$$\widetilde{v}_n \rightharpoonup t_0 v = \widetilde{v} \not\equiv 0$$

e do Lema 1.6,

$$\widetilde{v}_n \to \widetilde{v} \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{3.38}$$

Assim,

$$E_{V_0}(\widetilde{v}) = c_{V_0}.$$

Agora da continuidade de V, segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} V(x_n) = V(\overline{x}).$$

Supondo por contradição que $V(\overline{x}) > V_0$, temos

$$c_{V_0} = E_{V_0}(\widetilde{v}) < \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{v}|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\overline{x})|\widetilde{v}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}).$$

De (3.38) e do Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
c_{V_0} &< \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{v}_n|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + \overline{x}_n)|\widetilde{v}_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{v}_n)\Big]\\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n z + \overline{x}_n)|v_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n z + \overline{x}, t_n v_n)\Big]\\
&= \liminf_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(t_n u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(u_n) = c_{V_0},
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} V(x_n) = V_0$. ∎

Lema 3.9 *Se* $m_\epsilon^* = \sup\{\max\limits_{\partial\Omega_\epsilon} u_\epsilon : u_\epsilon$ *é solução de* $(P_\epsilon)_a$ *em* $\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon\}$*, então existe* $\overline{\epsilon} > 0$ *tal que* $m_\epsilon^* < \infty$ *para todo* $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ *e além disso,* $\lim\limits_{\epsilon\to 0} m_\epsilon^* = 0$.

Demonstração: Supondo que $m_\epsilon^* = \infty$, segue-se que existe u_ϵ uma solução do problema $(P_\epsilon)_a$ em $\widetilde{\mathcal{N}}_\epsilon$ tal que

$$\max_{\partial\Omega_\epsilon} u_\epsilon \geq b > 0.$$

Suponha por contradição que existe uma seqüência de números reais (ϵ_n) verificando $m_{\epsilon_n}^* = \infty$ e $\epsilon_n \to 0$.

Assim, existe uma seqüência $(x_n) \subset \partial\Omega_{\epsilon_n}$ tal que

$$u_{\epsilon_n}(x_n) \geq b > 0.$$

Conseqüentemente, do Lema 3.8,

$$\lim_{n\to\infty} V(\overline{x}_n) = V_0,$$

onde $\overline{x}_n = \epsilon_n x_n$ e $(\overline{x}_n) \subset \partial\Omega$. Portanto, passando a uma subseqüência, temos $\overline{x}_n \to \overline{x}$ em $\partial\Omega$ e $V(\overline{x}) = V_0$, contradizendo o fato que V_0 é atingido no interior de Ω. Logo, existe $\overline{\epsilon} > 0$ tal que $m^*_\epsilon < \infty,\ \forall\ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$.

Vamos provar que

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\, m^*_\epsilon = 0.$$

De fato, caso contrário, existiria $\delta > 0$ e uma subseqüência de (ϵ_n), que ainda chamaremos (ϵ_n), verificando

$$m^*_{\epsilon_n} \geq \delta > 0.$$

Agora, da definição de supremo, dado $\delta/2$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe (u_{ϵ_n}), uma solução do problema $(P_\epsilon)_a$ em $\widetilde{\mathcal{N}}_{\epsilon_n}$ tal que

$$m^*_{\epsilon_n} - \frac{\delta}{2} < \max_{\partial\Omega_{\epsilon_n}} u_{\epsilon_n} \leq m^*_{\epsilon_n}.$$

Portanto,

$$\frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta}{2} \leq m^*_{\epsilon_n} - \frac{\delta}{2} < \max_{\partial\Omega_\epsilon} u_{\epsilon_n}$$

e assim, existiria uma seqüência $(x_n) \subset \partial\Omega_{\epsilon_n}$, tal que

$$u_{\epsilon_n}(x_n) \geq \frac{\delta}{2},$$

o que é um absurdo pela primeira parte da demonstração. ■

3.6 Demonstração do Resultado Principal

Demonstração doTeorema C : Do Teorema 3.2, temos que o problema $(P_\epsilon)_a$ tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. Vamos mostrar que cada solução do problema $(P_\epsilon)_a$ é solução do problema original.

Seja u_ϵ uma solução do problema $(P_\epsilon)_a$. É suficiente provarmos que para cada $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, $u_\epsilon \leq t_0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon$, pois neste caso, $g(x, u_\epsilon) = f(u_\epsilon)$ e assim u_ϵ é solução do problema original.

Do Lema 3.9, $m_\epsilon^* < t_0$, para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. Conseqüentemente,

$$(u_\epsilon - t_0)_+(x) = 0, \ para\ todo\ x \in \partial\Omega_\epsilon.$$

Dessa forma, $(u_\epsilon - t_0)_+$ se anula numa vizinhança de $\partial\Omega_\epsilon$. Portanto,

$$(u_\epsilon - t_0)_+ \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon)$$

e a função

$$(u_\epsilon - t_0)_+^*(x) = \begin{cases} 0 \quad se \quad x \in \Omega_\epsilon \\ \\ (u_\epsilon - t_0)_+(x) \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon \end{cases}$$

pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Recordando que u_ϵ é solução da equação

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = g(\epsilon x, u) \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \\ u(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \ N \geq 3 \end{cases}$$

e usando $(u_\epsilon - t_0)_+^*$ como função teste, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} |\nabla (u_\epsilon - t_0)_+^*|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} \left[V(\epsilon x)|u_\epsilon|^{p-2} - \frac{g(\epsilon x, u_\epsilon)}{u_\epsilon} \right] ((u_\epsilon - t_0)_+^*)^2 \\ + \ &\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon} \left[V(\epsilon x)|u_\epsilon|^{p-2} - \frac{g(\epsilon x, u_\epsilon)}{u_\epsilon} \right] t_0 (u_\epsilon - t_0)_+^* = 0. \end{aligned}$$

Desde que

$$V(\epsilon x)|u_\epsilon|^{p-2} - \frac{g(\epsilon x, u_\epsilon)}{u_\epsilon} > \frac{V(\epsilon x)}{k}|u_\epsilon|^{p-2} - \frac{g(\epsilon x, u_\epsilon)}{u_\epsilon} \geq 0$$

em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon$ e da continuidade da função $(u_\epsilon - t_0)_+^*$, segue-se que

$$u_\epsilon \leq t_0, \ para\ todo\ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\epsilon.$$

Capítulo 4

Caso Supercrítico sem a Condição de Rabinowitz

4.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo, mostrar um resultado de multiplicidade de soluções, envolvendo um problema com crescimento supercrítico, a saber:

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-1}u + \lambda|u|^{s-1}u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com $1 < p < N$, $\epsilon > 0$ um parâmetro pequeno, $p-1 < q < p^* - 1 \leq s$,onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e $\lambda \geq 0$. Mais uma vez, usaremos a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman para mostrar o resultado. Novamente, o potencial V poderá ter qualquer comportamento no infinito.

As hipóteses sobre o problema (P_λ) são:

(V_1) $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $V(x) \geq V_0 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_2) Dado $\delta > 0$, existe um aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^N$ tal que $V_0 < \min\limits_{\partial\Omega} V$,

$$M = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\} \neq \emptyset \text{ e } M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, M) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Observe que a condição (V_2) garante que o mínimo V_0 é atingido no interior de Ω e M é um subconjunto próprio de Ω.

Note também que, não foi dada nenhuma condição sobre V no infinito, isto é, no infinito V pode ter qualquer comportamento. Portanto, neste capítulo, vamos estudar uma classe de problemas distinta da classe de problemas do capítulo 2.

Quando $\lambda = 0$, temos o problema (P_ϵ) do capítulo 3 com $f(t) = \mid t \mid^{q-2} t$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema D: *Suponha que o potencial V verifique as condições $(V_1) - (V_2)$. Então, dado $\delta > 0$, existem $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\delta) > 0$ e $\lambda_0 > 0$ tais que o problema (P_λ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas, para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$.*

Este capítulo será organizado da seguinte forma. Na seção 4.2, seguindo as idéias desenvolvidas por Chabrowski e Jianfu [23], vamos fazer um truncamento na não linearidade do problema (P_λ), e em seguida, definir um problema truncado com crescimento subcrítico. Na seção 4.3, usando o mesmo tipo de raciocínio empregado no capítulo 3, estudaremos um resultado de multiplicidade para o problema truncado. Mais precisamente, demonstraremos que o problema truncado tem, pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas, para ϵ positivo e suficientemente pequeno. Na seção 4.4, usando o método de Iteração de Moser [46], demonstraremos o resultado principal, mostrando que cada solução do problema truncado, é solução do problema original.

4.2 O Problema Truncado

O objetivo de fazermos a mudança na não linearidade do problema (P_λ), é obter um outro problema tal que possamos usar técnicas variacionais.

Seja $K > 0$ a ser fixado posteriormente e considere a função $\hat{f}_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

definida por

$$\hat{f}_K(t) = \begin{cases} 0 \quad se \quad t < 0 \\ \\ \lambda t^s \quad se \quad 0 \leq t < K \\ \\ \lambda K^{s-q} t^q \quad se \quad t \geq K. \end{cases}$$

Considere $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < 1 < \gamma$ e seja $\eta \in C^1([\alpha K, \gamma K])$ com α e γ independentes de K e η satisfazendo:

(1) $\eta(t) \leq \hat{f}_K(t), \ \forall \ t \in [\alpha K, \gamma K]$.

(2) $\eta(\alpha K) = \hat{f}_K(\alpha K) \quad \text{e} \quad \eta(\gamma K) = \hat{f}_K(\gamma K)$.

(3) $\eta'(\alpha K) = \hat{f}'_K(\alpha K) \quad \text{e} \quad \eta'(\gamma K) = \hat{f}'_K(\gamma K)$.

(4) $t \longrightarrow \dfrac{\eta(t)}{t^{p-1}}$ é crescente $\forall \ t \in [\alpha K, \gamma K]$.

Usando as funções η e $\hat{f}_K$, definimos a função

$$\widetilde{f}_K(t) = \begin{cases} \hat{f}_K(t) \quad se \quad t \notin [\alpha K, \gamma K] \\ \\ \eta(t) \quad se \quad t \in [\alpha K, \gamma K] \end{cases}$$

e o seguinte problema truncado:

$$(T_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + V(\epsilon x)|u|^{p-2}u = f_K(u) \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u > 0 \ em \ \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $f_K(t) = (t^+)^q + \widetilde{f}_K(t)$ e $t^+ = max\{t, 0\}$.

Observe que a função $f_K \in C^1(\mathbb{R})$ e verifica as seguintes condições:

$(f_{1,K})$ $f_K(t) = 0, \ \forall \ t < 0$.

$(f_{2,K})$ $f_K(t) \leq (1 + \lambda K^{s-q})t^q$, para todo $t \geq 0$.

$(f_{3,K})$ $F_K(t) \leq \dfrac{1}{q+1}(1+\lambda K^{s-q})t^{q+1}$, para todo $t \geq 0$, onde $F_K(t) = \displaystyle\int_0^t f_K(\xi)d\xi$.

$(f_{4,K})$ Existe $\theta > p$ tal que $0 \leq \theta F_K(t) \leq f_K(t)t$, para todo $t \geq 0$.

$(f_{5,K})$ A função $t \to \dfrac{f_K(t)}{t^{p-1}}$ é crescente para todo $t > 0$.

$(f_{6,K})$ $f_K'(t)t^2 - (p-1)f_K(t)t \geq (q+1-p)t^{q+1}$

4.3 Multiplicidade de Soluções Envolvendo $cat_{M_\delta}(M)$ para o Problema Truncado

Desde que, temos um problema com crescimento subcrítico e cuja a não linearidade verifica as hipóteses do problema do capítulo 3, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Suponha que o potencial V verifique as condições $(V_1) - (V_2)$. Então, dado $\delta > 0$, existem $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\delta, \lambda, K) > 0$ tais que o problema (T_λ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e para cada $\lambda > 0$.*

Demonstração: É uma aplicação imediata do Teorema C.

4.4 Demonstração do Resultado Principal

Na demonstração do resultado principal, vamos precisar da seguinte estimativa para $\|u_{\epsilon,\lambda}\|_\epsilon$.

Lema 4.1 *Para qualquer solução $u_{\epsilon,\lambda}$ do problema (T_λ),*

$$\|u_{\epsilon,\lambda}\|_\epsilon \leq \left[(c_{V_0}+1)\left(\frac{\theta - p)}{\theta p}\right)\right]^{\dfrac{1}{p}},$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e uniformemente em λ.

Demonstração: Decorre do Teorema 1.3 que toda solução $u_{\epsilon,\lambda}$ do problema (T_λ) verifica a desigualdade

$$I_{\epsilon,\lambda}(u_{\epsilon,\lambda}) \leq c_{V_0} + h_K(\epsilon),$$

onde $I_{\epsilon,\lambda}$ é o funcional energia associado ao problema (T_λ) e $h_K(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Portanto, podemos supor que

$$I_{\epsilon,\lambda}(u_{\epsilon,\lambda}) \leq c_{V_0} + 1.$$

para $\forall \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}(K,\lambda))$ e $\forall \ \lambda \geq 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} I_{\epsilon,\lambda}(u_{\epsilon,\lambda}) &= I_{\epsilon,\lambda}(u_{\epsilon,\lambda}) - \frac{1}{\theta} I'_{\epsilon,\lambda}(u_{\epsilon,\lambda}) u_{\epsilon,\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_{\epsilon,\lambda}\|_\epsilon^p + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{\theta} f_K(u_{\epsilon,\lambda}) u_{\epsilon,\lambda} - F_K(u_{\epsilon,\lambda})\right]. \end{aligned}$$

Por $(f_{4,K})$,

$$I_{\epsilon,\lambda}(u_\epsilon, \lambda) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_{\epsilon,\lambda}\|_\epsilon^p$$

Portanto,

$$\|u_{\epsilon,\lambda}\|_\epsilon \leq \left[(c_{V_0} + 1)\left(\frac{\theta p}{\theta - p}\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

para $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon}(K,\lambda))$ e para todo $\lambda \geq 0$. ∎

Demonstração do Teorema D : Do Teorema 4.1, o problema (T_λ) tem pelo menos $cat_{M_\delta}(M)$ soluções positivas, para todo $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$. Vamos mostrar que as soluções do problema truncado, são soluções do problema original. Considerando $u_{\epsilon,\lambda}$ uma solução do problema (T_λ), é suficiente demonstrarmos que existe $K_0 > 0$, onde para cada $K \geq K_0$, existe um correspondente λ_0 tal que

$$|u_{\epsilon,\lambda}|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha K, \ \forall \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}) \ e \ \forall \ \lambda \in [0, \lambda_0],$$

pois neste caso, temos

$$f_K(u_{\epsilon,\lambda}) = u_{\epsilon,\lambda}^q + \lambda u_{\epsilon,\lambda}^s$$

e, portanto, toda solução do problema (T_λ) é solução do problema (P_λ). De fato, por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

$$u_{\epsilon,\lambda} := u$$

Para $L > 0$, definimos as seguintes funções

$$u_L = \begin{cases} u & se \quad u \leq L \\ \\ L & se \quad u > L, \end{cases}$$

$$z_L = u_L^{p(\beta-1)} u \quad e \quad w_L = u u_L^{\beta-1}$$

com $\beta > 1$ a ser fixado.

Usando z_L como função teste,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla z_L + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^{p-2} u z_L = \int_{\mathbb{R}^N} f_K(u) z_L$$

o que implica

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p &= -p(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p\beta-p-1} u |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_L \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} f_K(u) u u_L^{p(\beta-1)} - \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) |u|^p u_L^{p(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Desde que

$$p(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p\beta-p-1} u |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_L = p(\beta-1) \int_{\{u \leq L\}} u^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p \geq 0$$

e por $(f_{2,K})$, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p \leq (1 + \lambda K^{s-q}) \int_{\mathbb{R}^N} u^{q+1} u_L^{p(\beta-1)},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p \leq C_{\lambda,K} \int_{\mathbb{R}^N} u^{q+1} u_L^{p(\beta-1)}, \tag{4.1}$$

onde $C_{\lambda,K} = (1 + \lambda K^{s-q})$.

Por outro lado, das imersões contínuas de Sobolev,

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_L|^p = C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (u u_L^{\beta-1})|^p.$$

Conseqüentemente,

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p + C_2 (\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p(\beta-2)} u^p |\nabla u_L|^p.$$

Logo,

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p. \tag{4.2}$$

Substituindo (4.1) em (4.2), obtemos:

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p C_{\lambda,K} \int_{\mathbb{R}^N} u^{q+1}u_L^{p(\beta-1)}$$

e portanto,

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p C_{\lambda,K} \int_{\mathbb{R}^N} u^{q+1-p}(uu_L^{\beta-1})^p = C_2\beta^p C_{\lambda,K} \int_{\mathbb{R}^N} u^{q+1-p}w_L^p.$$

Da desigualdade de Hölder com os expoentes $p^*/[q+1-p]$ e $p^*/[p^*-(q+1-p)]$, temos

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p C_{\lambda,K}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*}\right)^{(q+1-p)/p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_L^{pp^*/[p^*-(q+1-p)]}\right)^{[p^*-(q+1-p)]/p^*}, \tag{4.3}$$

onde $p < \dfrac{pp^*}{p^*-(q+1-p)} < p^*$.

Seja $\alpha^* = \dfrac{pp^*}{p^*-(q+1-p)}$ e considerando as imersões contínuas de Sobolev,

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_3\beta^p C_{\lambda,K}\hat{c}_0^{\frac{q+1-p}{p^*}}|w_L|_{\alpha^*}^p$$

onde $\hat{c}_0 = \left[(c_0+1)\left(\frac{\theta p}{\theta-p}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$.

Desde que $w_L = uu_L^{\beta-1} \leq u^\beta$ e supondo que $u^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\ uu_L^{\beta-1}\ |^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_4\beta^p C_{\lambda,K}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\beta\alpha^*}\right)^{p/\alpha^*} < +\infty.$$

Do Lema de Fatou na variável L, obtemos

$$|u|_{\beta p^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\beta p}\beta^{1/\beta}|u|_{\beta\alpha^*}. \tag{4.4}$$

Além disso, considerando $\chi = \dfrac{p^*}{\alpha^*}$, temos que $p^* = \chi\alpha^*$ e $\beta\chi\alpha^* = \beta p^*, \forall\ \beta > 1$ verificando $u^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

1º Passo

Considere $\beta = \dfrac{p^*}{\alpha^*}$ e observe que pela desigualdade (4.4)

$$u^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$|u|_{(p^*)^2/\alpha^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\beta p} \beta^{1/\beta} |u|_{p^*},$$

ou seja,

$$|u|_{\chi^2\alpha^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\chi p} \chi^{1/\chi} S^{-1} \hat{c}_0 \tag{4.5}$$

2º Passo

Considerando $\beta = \left(\dfrac{p^*}{\alpha^*}\right)^2$, por (4.5)

$$u^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$|u|_{(p^*)^3/(\alpha^*)^2} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\beta p} \beta^{1/\beta} |u|_{(p^*)^2/\alpha^*},$$

o que implica

$$|u|_{\chi^3\alpha^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\chi^2 p} (\chi^2)^{1/\chi^2} |u|_{\chi^2\alpha^*}$$

ou,

$$|u|_{\chi^3\alpha^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\chi^2 p + 1/\chi p} (\chi^2)^{2/\chi^2 + 1/\chi} S^{-1} \hat{c}_0.$$

Por recorrência, obtemos

$$|u|_{\chi^{(m+1)}\alpha^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{\sum_{i=1}^{m} \frac{\chi^{-i}}{p}} \chi^{\sum_{i=1}^{m} i\chi^{-i}} S^{-1} \hat{c}_0.$$

Passsando ao limite de $m \to \infty$, encontramos

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{\sigma_1} \chi^{\sigma_2} S^{-1} \hat{c}_0.$$

onde, $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi^{-i}}{p}$ e $\sigma_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i\chi^{-i}$.

Para escolher λ_0, considere a desigualdade

$$\Big[C_4(1 + \lambda K^{s-q})\Big]^{\sigma_1} \chi^{\sigma_2} S^{-1} \hat{c}_0 \leq \alpha K,$$

de onde obtemos

$$(1 + \lambda K^{s-q})^{\sigma_1} \leq \frac{\alpha K S}{C_4^{\sigma_1} \chi^{\sigma_2} \hat{c}_0}.$$

Escolhendo λ_0 verificando a desigualdade

$$\lambda_0 \leq \Big[\frac{(\alpha K S)^{\frac{1}{\sigma_1}}}{C_4 \chi^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \hat{c}_0^{\frac{1}{\sigma_1}}} - 1\Big] \frac{1}{K^{s-q}}$$

e fixando K tal que

$$\Big[\frac{(\alpha K S)^{\frac{1}{\sigma_1}}}{C_4 \chi^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \hat{c}_0^{\frac{1}{\sigma_1}}} - 1\Big] > 0,$$

obtemos

$$|u_{\lambda,\epsilon}|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha K \ \forall\ \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}(K,\lambda)) \ \ e \ \ \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0].$$

■

Apêndice A

Resultados Básicos

A.1 Teorema do Passo da Montanha

Lema A.1 *(ver [58], pg 12) Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) *Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = r$*

(H_2) *Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $J(e) < 0$.*

Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \longrightarrow 0 \quad em \quad X'$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \ : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Lema A.2 *(ver [58], pg 13) Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ verificando a condição (P.S) com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) *Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = r$*

(H_2) *Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $I(e) < 0$.*

Para

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \ : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

defina

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq \ t \leq 1} \ I(\gamma(t)).$$

Então $c \geq \alpha$ *e* c *é um valor crítico de* I*.*

A.2 Lema de Lions

Lema A.3 *(P. L. Lions, 1984)(ver [42], pg 260) Seja* $r > 0$ *e* $p \leq s < p^*$*. Se* (u_n) *é limitada em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{(y,r)}} |u_n|^s \to 0,$$

então $u_n \to 0$ *em* $L^t(\mathbb{R}^N)$ *para* $p < t < p^*$*.*

A.3 Caracterização do nível do Passo da Montanha do Funcional associado ao Problema Auxiliar

Lema A.4 *Seja* $u \in W_\epsilon \backslash \{0\}$ *e* $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$\phi(t) = J_\epsilon(tu).$$

Então, ϕ *tem no máximo um ponto de máximo não nulo* t_u *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(\epsilon x, t_u u)u}{t_u^{p-1}}.$$

Demonstração: Analisaremos a seguir, as possíveis situações para uma função $u \in W_\epsilon \backslash \{0\}$ com suporte Θ a saber:

(i) $u^+(x) = 0, \forall \ x \in \mathbb{R}^N$;

(ii) $u^+ \neq 0$ com $\Theta \cap \Omega_\epsilon = \emptyset$;

$(iii)\quad u^+ \neq 0$ com $\Theta \cap \Omega_\epsilon \neq \emptyset$ e $m(\Theta \cap \Omega_\epsilon) = 0$;

$(iv)\quad u^+ \neq 0$ com $\Theta \cap \Omega_\epsilon \neq \emptyset$ e $m(\Theta \cap \Omega_\epsilon) > 0$

onde $m(A)$ é a medida de um conjunto A.

No caso (i), temos

$$\phi(t) = J_\epsilon(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|_\epsilon^p$$

e assim,

$$\phi(0) = 0 \ \ e \ \ \lim_{t\to\infty}\phi(t) = \infty.$$

Logo, neste caso, ϕ não tem máximo global.

No caso (ii), temos

$$\phi(t) = J_\epsilon(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|_\epsilon^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon x, tu) \geq t^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{pk}\right)\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\epsilon} V(\epsilon x)|u|^p.$$

Novamente,

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t) = \infty$$

e ϕ não tem máximo global.

O caso (iii) segue o mesmo raciocínio do caso (i).

Finalmente vamos analisar o caso (iv). Da condição de crescimento sobre a g e das imersões contínuas de Sobolev, existe α tal que

$$\phi(t) = J_\epsilon(tu) \geq \alpha > 0, \ para\ t\ suficientemente\ pequeno.$$

Além disso, de (3.3), temos

$$\phi(t) = J_\epsilon(tu) \leq \frac{t^p}{p}\|u\|_\epsilon^p - t^\theta C_1\int_{\Omega_\epsilon}|u|^\theta + \int_{\Omega_\epsilon} C_2.$$

Desde que $\theta > p$ e passando ao limite $t \to \infty$, segue-se que

$$\phi(t) \to -\infty.$$

Então, existe $t_u > 0$ tal que

$$\phi(t_u) = \max_{t\geq 0}\phi(t)$$

e portanto $\phi'(t_u) = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(\epsilon x, t_u u)u}{t_u^{p-1}}.$$

A unicidade de t_u decorre do fato que a função $\frac{g(x,s)}{s^{p-1}}$ é não decrescente.

Lema A.5 *Se β_ϵ é o nível do Passo da Montanha do funcional J_ϵ, então*

$$\beta_\epsilon = \inf_{u \in W_\epsilon \setminus \{0\}} \sup_{t \geq 0} J_\epsilon(tu).$$

Demonstração: Considere

$$\beta_\epsilon^* = \inf_{u \in W_\epsilon \setminus \{0\}} \sup_{t \geq 0} J_\epsilon(tu)$$

e defina $\phi(u) = t_u$ quando o mesmo existe e $\phi(u) = \infty$ caso contrário. Observe que

$$\beta_\epsilon^* = \inf_{v \in M} J_\epsilon(v),$$

onde $M = \{v = t_u u : u \in W_\epsilon \setminus \{0\}\}$. De fato, $v \in M$ implica $v \neq 0$ e

$$\|v\|_\epsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v)v.$$

Assim,

$$J_\epsilon(v) = \max_{t \geq 0} J_\epsilon(tu) \geq \beta_\epsilon^*.$$

Logo,

$$\inf_{v \in M} J_\epsilon(v) \geq \beta_\epsilon^*.$$

Por outro lado, seja $u \in W_\epsilon$ tal que $t_u < \infty$. Conseqüentemente,

$$\inf_{v \in M} J_\epsilon(v) \leq J_\epsilon(t_u u) = \max_{t \geq 0} J_\epsilon(tu)$$

de onde concluímos

$$\inf_{v \in M} J_\epsilon(v) \leq \beta_\epsilon^*.$$

Provaremos primeiramente que

$$\beta_\epsilon \leq \beta_\epsilon^*.$$

Seja $\bar{u} \neq 0$ tal que $t_u < \infty$. Desde que $J_\epsilon(t\bar{u}) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, seja $\tilde{t} > 0$ verificando $J_\epsilon(\tilde{t}\bar{u}) < 0$. Considere

$$\bar{\gamma}(t) = (\tilde{t}\bar{u})t.$$

Temos $\bar{\gamma}(0) = 0$ e $J_\epsilon(\bar{\gamma}(1)) < 0$ e assim $\bar{\gamma} \in \Gamma$. Além disso,

$$\sup_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\bar{\gamma}(t)) \leq \sup_{t\geq 0} J_\epsilon(tu)$$

e portanto,

$$\beta_\epsilon \leq \beta_\epsilon^*.$$

Finalmente, provaremos que

$$\beta_\epsilon \geq \beta_\epsilon^*.$$

Dado $\gamma \in \Gamma$, temos que $\gamma(0) = 0$ e $J_\epsilon(\gamma(1)) < 0$. Assím, existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que

$$J_\epsilon(\gamma(t_\gamma) = \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\gamma(t)).$$

Desde que $\gamma(t_\gamma) \in W_\epsilon$, segue-se que $\gamma(t_\gamma) \in M$ e

$$\beta_\epsilon^* = \inf_{v\in M} J_\epsilon(v) \leq J_\epsilon(\gamma(t_\gamma) = \sup_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\gamma(t)).$$

Portanto,

$$\beta_\epsilon \geq \beta_\epsilon^*.$$

A.4 Imersões de Sobolev e Schauder

Lema A.6 *((ver [20], pg 168) Seja $m \geq 1$ um número inteiro e $1 \leq p < \infty$.*

Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.

Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$*, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$*, para todo* $q \in [p, \infty)$*.*

Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$*, então* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$*, com imersões contínuas.*

Lema A.7 *((ver [20], pg 169) Suponha* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *com fronteira regular. Se* $p < N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, para todo* $q \in [1, p^*[$*, onde* $p^* = \frac{Np}{N-p}$*. Se* $p = N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, para todo* $q \in [1, +\infty[$*. Se* $p > N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$*, com imersões compactas.*

Lema A.8 *(ver [1], pg 11) Seja* m *um inteiro não negativo,* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^N$*. Considere* $0 < \nu < \lambda \leq 1$*. Então as seguintes imersões contínuas existem:*

$$C^{m+1}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega}), \tag{A.1}$$

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega}), \tag{A.2}$$

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\bar{\Omega}). \tag{A.3}$$

Se Ω *é limitado, as imersões (A.2) e (A.3) são compactas. Se* Ω *é convexo, temos as seguintes imersões contínuas*

$$C^{m+1}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\bar{\Omega}) \tag{A.4}$$

$$C^{m+1}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\bar{\Omega}). \tag{A.5}$$

Se Ω *é convexo e limitado as imersões (A.1) e (A.5) são compactas.*

Bibliografia

[1] Adams R. *Sobolev Spaces. Acad. Press(1975).*

[2] Alves, C. O. *Existência de solução positiva de equações elípticas não-lineares variacionais em* $\mathbb{R}^N$. *Doct. dissertation, UnB, 1996.*

[3] Alves, C. O. *Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian. Nonlinear Analysis 51(2002)1187-1206.*

[4] Alves, C. O. *Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent in* $\mathbb{R}^N$. *EJDE (1997)13, 1-11.*

[5] Alves, C. O. , Carrião P.C. and Medeiros E.S. *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Newmann conditions. preprint.*

[6] Alves, C. O. and Ding Y. H. *Existence, multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear equation involving critical growth in* $\mathbb{R}^N$. *preprint.*

[7] Alves, C. O. and Ding Y. H. *Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity. J. Math. Ann. Appl. 279(2003)508-521.*

[8] Alves, C. O. , do Ó, J. M. and Miyagaki H. O. *On pertubations of a class of a periodic m-Laplacian equation with critical growth. Nonlinear Analysis 45(2001)849-863.*

[9] Alves, C. O. , Gonçalves, J. V. and Miyagaki. O. H. *On elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with critical exponent. EJDE 9(1996)1-11.*

[10] ALVES, C. O. and SOARES S. H. M. *On the location and profile of spike-layer nodal solutions to nonlinear Schrödinger equations. J. Math. Anal. Appl. 296(2004)563-577.*

[11] ALVES, C. O. and SOARES S. H. M. *Sobre uma classe de equações de Schrödinger não lineares. SBM, Nov 2001.*

[12] ALVES, C. O. and SOUTO M. A. S. *On existence and concentration behavior of ground state solutions for a class of problems with critical growth. Comm. Pure and Applied Analysis, vol 1, num 3(2002)417-431.*

[13] AMBROSETTI A. and RABINOWITZ P. H. *Dual variational methods in critical point theory and apllications. J. Functional Analysis, vol 14(1973)349-381.*

[14] BARTSCH T. and WANG Z. Q. *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$. *Comm. Partial Differential Equations, 20(1995)1725-1741.*

[15] BENCI V. and CERAMI G. *Existence of positive solutions of the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{\frac{n+2}{N-2}}$ *in* $\mathbb{R}^N$. *J. Func. Anal, 88(1990),90-117.*

[16] BENCI V. and CERAMI G. *Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and domain topology. Calc. Var. 2(1994)29-48.*

[17] BENCI V. and CERAMI G. *The effect of the domain topology on th number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. Arch. Rational Mech. Anal. 114(1991).*

[18] BENCI V. , CERAMI G. and PASSASEO D. *On the number of the positive solutions of some nonlinear elliptic problems. in "Nonlinear Analysis, A tribute in Honour of G. Prodi ", pp. 93-107, Quaderno Scuola Norm. Sup., Pisa, 1991.*

[19] BERESTYCKI H. and LIONS P. L. *Nonlinear scalar field equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 82(1983)313-376.*

[20] BRÉZIS H. *Analyse Fonctionelle. Théorie et aplications. Paris, Masson(1987).*

[21] BREZIS H. and NIRENBERG L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math. 36(1983)437-477.*

[22] CHABROWSKI J. and YANG JIANFU. *existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponents. Adv. Diff. Eq. 2 num. 2(1997)231-256.*

[23] CHABROWSKI J. and YANG JIANFU. *Multiple semiclassical solutions of the Schrödinger equation involving a critical Sobolel exponent. Portugal Math. 57(2000)3, 273-284.*

[24] CINGOLANI S. and LAZZO M. *Multiple positive solutions to nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions. JDE, 160(2000)118-138.*

[25] COSTA D. G. *On a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$. *Eletr. J. Diff. Eq. 7(1994), 1-14.*

[26] CINGOLANI S. and Lazzo M. *Multiple semiclassical standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations. Topol. Methods. Nonlinear Anal. 10(1997)1-13.*

[27] DE FIGUEIREDO, D. G. *The Ekeland Variational Principle with applications and detours. Springer-Verlag(1989), Tata Institute of Fundamental Research Lectures in Mathematical and Physics, 81.*

[28] DE FIGUEIREDO, D. G. *Positive solutions of semilinear elliptic problems. Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais. Universidade de São Paulo (1981).*

[29] DE FIGUEIREDO, D. G, GONÇALVES, J. V and MIYAGAKI, O. H. *On a class of quasilinear elliptic problems involving critical exponent. Comm. Contemp. Math, 2 (2000)47-59.*

[30] Del Pino M. and Felmer P. L. *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains. Calc. Var. 4(1996)121-137.*

[31] Del Pino M. and Felmer P. L. *Multi-peaks bound states of nonlinear Schrödinger equations. Ann. Inst. Poincaré, Anal. Nonlineaire, vol 15(1998)127-149.*

[32] Di Benedetto E. $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Analysis 7(1985)827-850.*

[33] FLoer A. and Weinstein A. *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. Journal of Functional Analysis, v 69(1986)397-408.*

[34] Garcia J. Azorero. and Peral I. Alonso. *Existence and non-uniqueness for a p-Laplacian: Nonlinear eigenvalues. Comm. Partial Differential Equations 12 (1987)1389-1430.*

[35] Garcia J. Azorero. and Peral I. Alonso. *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. Trans. Amer. Math. Soc. 323(1991)877-895.*

[36] Ghoussoub N. *Duality and pertubation methods in critical point theory. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.*

[37] Gilbard D. and Truginger N. S. *Elliptic partial differential equation of second order. Springer-Verlag, 1998.*

[38] Gonçalves J. V. and Alves C. O. *Existence of Positive Solutions for m-Laplacian Equations in* $\mathbb{R}^N$ *involving Critical Exponents. Nonlinear Analysis 32(1998)53-70.*

[39] Gongbao Li. *Some properties of weak solutions of nonlinear scalar field equations. Annales Acad. Sci. Fenincae, series A. vol 14(1989)27-36.*

[40] Gueda M.. and Veron L.. *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Nonlinear Anal. 13(1989)879-902.*

[41] GUI C. *Existence of multi-bumps solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational methods. Comm. Partial Differential Equations (1996)787-820.*

[42] KAVIAN O. *Introduction à la théorie des points critiques et applicatons aux problemes elliptiques. Springer, Heidelberg (1983).*

[43] LAZZO M. *Solutions positives multiples pour une equation elliptique non lineaire avec l'exposant critique de Sobolev. C. R. Acad. Sci. Paris 314(1992)161-164.*

[44] LIONS P. L. *The concentration-compacness principle in the calculus of variations: the limit case. Rev. Mat. Iberoamericana 1(1985)145-201.*

[45] MIYAGAKI O. H. *On a class of semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth. Nonlinear Analysis 29(1997)773-781.*

[46] MOSER, J. *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 13, 457-468(1960).*

[47] NOUSSAIR E. S , SWANSON C. A. and JIANFU Y. *Quasilinear Elliptic Problems with Critical Exponents . Nonlinear Analysis 3(1993)285-301.*

[48] OH. Y. J. *Existence of semi-classical bound state of nonlinear Schrödinger equations with potencial on the class* $(V)_a$. *Comm. Partial Diff. Eq. v 13 (1988)1499-1519.*

[49] OH. Y. J. *Corrections to existence of semi-classical bound state of nonlinear Schrödinger equations with potencial on the class* $(V)_a$. *Comm. Partial Diff. Eq. v 14 (1989)833-834.*

[50] OH. Y. J. *On positive multi-lump bound states of nonlinear Schrödinger equations under multiple well potential. Comm. Partial Diff. Eq. v 131 (1990)223-253.*

[51] OMANA W. and WILLEM M. *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems. Diff. Int. Equatons 5(1992)1115-1120.*

[52] PASSASEO D.. *Some sufficient conditions for the existence of positive solutions to the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{2^*}$ *in bounded domains. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlin. 13(2)(1996),185-227.*

[53] RABINOWITZ P. H. *On a class of nonlinear Schrödinger equations. Z. Angew Math. Phys. 43(1992)27-42.*

[54] REY O. *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness. Nonlinear Analysis, TMA 13(1989)1241-1249.*

[55] STRUVE M. *Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, 1980.*

[56] TALENTI G. *Best constant in Sobolev inequality. Ann. Mat., 110(1976)353-372.*

[57] J. YANG. and XIPING, Z. *On the Existence of Nontrivial Solutions of a Quasilinear Elliptic Boundary Value Problem with Unbounded Domain. Acta Math. Sci. 7(1987)341-359.*

[58] WILLEM M. *Minimax Theorems. Birkhäuser, 1996.*