DISTRIBUIÇÕES EXATAS DE COMBINAÇÕES LINEARES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

REINALDO CHARNET

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. PUSHPA NARAYAN RATHIE

CAMPINAS
Estado de São Paulo - Brasil
1979

AGRADECIMENTOS

— Ao Prof. Dr. PUSHPA NARAYAN RATHIE, nosso orientador, pela proposição desse trabalho e orientação constante, segura e amiga, durante todo o seu decorrer.

— A todos os amigos que de alguma forma contribuiram para a realização desse trabalho, nos incentivando ou criticando.

— Ao amigo Raul, pelo excelente e dedicado trabalho de datilografia.

Dedico esse trabalho:

— aos meus incansáveis incentivadores;

meus pais e Eugênia

— às recompensas por tudo que passamos;

Michelle, João Augusto

— ao amigo;

Sidnei Ragazzi

— especialmente ao;

Prof. João Fiorello Reginato (in-memorian)

ÍNDICE

O propósito desse nosso trabalho é encontrar as distribuições exatas de combinações lineares de variáveis aleatórias contínuas e independentes, com distribuições Exponencial, Qui-Quadrado e Uniforme.

Cada combinação linear, que estaremos trabalhando, será constituida, como já dissemos, de variáveis aleatórias independentes e com apenas a mesma forma funcional, ou seja, para cada uma das combinações, apresentaremos uma distribuição geral, onde as variáveis aleatórias que a constituem tem a mesma forma funcional, mas parâmetros diferentes; em seguida, estaremos estudando casos particulares, ou seja, quando os parâmetros são iguais mas não especificados, e alguns casos em que os paramêtros estarão especificados por alguns valores bem usuais em Estatística.

O procedimento descrito acima será feito para as três combinações lineares, ou seja, para a combinação linear de variáveis Exponenciais, para as de Uniforme e por último as de Qui-Quadrado.

Os resultados gerais aqui apresentados, não foram encontrados na bibliografia consultada, onde estas, só apresentaram resultados para alguns casos particulares, os quais foram encontradas, geralmente, pela utilização de métodos diferentes daqueles por nós utilizados.

Dividimos nosso trabalho em 5 capítulos; o capítulo 0 constituido das notações e resultados que utilizamos no decorrer do nosso trabalho, o capítulo 1 apresentando um breve resumo sobre algumas difinições e teoremas a respeito de variáveis complexas, e os capítulos 2,3 e 4 onde aparecem, respectivamente, as combinações lineares das variáveis Exponenciais, Uniforme e Qui-Quadrado.

As distribuições gerais para cada uma das combinações lineares, serão apresentados em forma de teoremas, que nos darão a função densidade de probabilidade e a função distribuição acumulada da combinação.

Para encontrarmos as distribuições exatas dessas combinações, utilizamos o método da função geratriz de momentos. Isto se justifica, uma vez que as funções geratrizes de momentos dessas combinações, são fàcilmente obtidas a partir das funções geratrizes de momentos das variaveis que a constituem, pelo fato das mesmas serem independentes.

Encontrada a função geratriz da combinação, usamos a transformada de Laplace, bem como a sua inversa, para a obtenção da função densidade de probabilidade. As integrais que aparecem nas transformadas Inversa de Laplace, serão resolvidas aplicando-se teoria de Variável Complexa, mais precisamente, a teoria dos resíduos.

Esses critérios, em conjunto, constituem uma ferramenta muito forte para obtenção de distribuições exatas de combinação lineares, visto que, essas distribuições podem ser obtidas, sem nenhuma restrição, quanto aos parâmetros das distribuições originais das variáveis aleatórias que compõe a combinação e mesmo quanto as suas constantes, as quais podem ser todas diferentes uma das outras, bem como iguais totálmente ou parcialmente.

Uma outra consideração importante, sobre a distribuição exata de Combinações de variáveis aleatórias independentes, Exponencial, Uniforme e Qui-Quadrado, é devido a grande gama de aplicações em problemas práticos reais de Estatística, por exemplo em Processos estocásticos, Tempo de Vida de Componentes Eletrônicos, Fluxo de Tráfego em Estradas de Rodagens, etc...

Uma das finalidades desse nosso trabalho, alem do propósito inicial, é a de apresentar a técnica da função geratriz de momentos em conjunto com a teoria de Variáveis Complexas, como motivação para sua utilização, na obtenção de distribuições de variáveis aleatórias.

Esperamos que, a forma de apresentação dos nossos resultados seja clara o suficiente para um bom entendimento de possíveis interessados em suas aplicações.

CAPÍTULO 0

NOTAÇÕES E RESULTADOS UTILIZADOS

(0.1) v.a. - variável aleatória

(0.2) K_i - resíduo correspondente ao polo z_i

(0.3) $$\frac{d^n}{dx^n} A.B = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} A^{(r)} B^{(n-r)}$$

onde:

A e B são funções de X

e

$$A^{(r)} = \frac{d^r}{dx^r} A$$

(0.4) $\Gamma(\alpha,\beta,\gamma)$ - Distribuição Gama com parâmetros α,β e γ. Sua densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} \exp\left[-(x-\gamma)/\beta\right]}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0 \quad x > \gamma$$

(0.5) $\chi^2(n)$ - Distribuição Qui-Quadrado com <u>n</u> graus de liberdade (n-inteiro) - Sua densidade é dada por

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \; e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \; \Gamma(\frac{n}{2})} \;, \; x \geq 0$$

(0.6) Função geratriz de Momento de uma v.a. X, Qui-Quadrado

$$M_X(z) = (1-2z)^{-\frac{n}{2}} \;, \; n = \text{graus de liberdade}$$

(0.7) Função densidade de um v.a. X exponencial

$$f(x) = \alpha \, e^{-\alpha x} \;, \quad x \geq 0 \quad \alpha > 0$$

(0.8) Função geratriz de Momentos de um v.a. X exponencial

$$M_X(z) = (1 - \frac{z}{\alpha})^{-1}$$

(0.9) $U(\alpha,\beta)$ - Função densidade de probabilidade de uma v.a. X Uniforme com parâmetros α e β

$$U(\alpha,\beta) = \frac{1}{(\beta-\alpha)} \qquad \begin{array}{l} \beta > 0 \;, \; \alpha > 0 \\ \beta > \alpha \end{array}$$

(0.10) Função geratriz de momentos de uma v.a. X, Uniforme com parametros α e β

$$M_X(z) = \frac{e^{\beta z} - e^{\alpha z}}{(\beta-\alpha)z}$$

(0.11) Função gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt \qquad R(\alpha) > 0$$

onde

$$R(\alpha) = \text{a parte real de } \alpha$$

(0.12) $$(\alpha)_r = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(r)}$$

(0.13) $$\sum_{\substack{m_i=0 \\ \forall_i=1,2,\ldots,n}}^{\infty} = \text{soma n-úpla}$$

(0.14) $$\phi_2(\beta_1,\ldots,\beta_n\,;\,\gamma\,;\,z_1,\ldots,z_n) =$$

$$= \sum_{\substack{m_i=0 \\ \forall_i=1,2,\ldots,n}}^{\infty} \frac{(\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{\sum_{i=1}^{n} m_i} \prod_{i=1}^{n} m_i!} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$$

(0.15) $$\frac{1}{2\pi i} \int e^{pt} \Gamma(\gamma) p^{-\gamma} \prod_{i=1}^{n} \left(1-\frac{\lambda_i}{p}\right)^{-\beta_i} dp =$$

$$= t^{\gamma-1} \phi_2(\beta_1 \ldots \beta_n ; \gamma, \lambda_1 t \ldots, \lambda_n t), \; R(\gamma) > 0$$

onde i, quando não aparece como índice é, $i = \sqrt{-1}$

(0.16) $$\int x^m e^{ax} dx = e^{ax} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{m!\, x^{m-r}}{(m-r)!\, a^{r+1}}$$

(0.17) f.g.m. função geratriz de momentos

(0.18) f.d.p. função densidade de probabilidade.

(0.19) $A(n-r,r)$ = conjunto de todas as somas $t_1+t_2+\ldots t_n$, onde temos n-r t_i's iguais a $C_i\alpha_i$ e r t_i's iguais a C_jB_j, $i \neq j$ ou seja

$$A(n,0) = \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i$$

$$A(n-1,1) = \begin{cases} C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\ldots+C_{n-1}\alpha_{n-1}+C_n\beta_n \\ C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\ldots+C_{n-2}\alpha_{n-1}+C_n\alpha_n+C_{n-1}\beta_{n-1} \\ \vdots \\ C_1\beta_1+C_2\alpha_2+\ldots+C_n\alpha_n \end{cases}$$

$$A(n-2,2) = \begin{cases} C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\ldots+C_{n-2}\alpha_{n-2}+C_{n-1}\beta_{n-1}+C_n\beta_n \\ C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\ldots+C_{n-2}\beta_{n-2}+C_{n-1}\alpha_{n-1}+C_n\beta_n \\ \vdots \\ C_1\beta_1+C_2\beta_2+C_3\alpha_3+\ldots+C_n\alpha_n \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A(0,n) = \sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i$$

Temos que os conjuntos $A(n-r,r)$ possuem $\binom{n}{r}$ elementos.

$$(0.20) \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i-b_i) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \{a_{n-r},b_r\}$$

onde

$\{a_{n-r},b_r\}$ é a soma de todos os produtos constituidos de $n-r$ a_i's e r b_j's $i\neq j = 1,2,\ldots n$

Por exemplo, suponhamos que o produto tenha apenas 3 têrmos ou seja:

$$\prod_{i=1}^{3} (a_i - b_i) = (a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$$

$$= a_1a_2a_3 - a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 + a_1b_2b_3 + a_2b_1b_3$$

$$+ a_3b_1b_2 - b_1b_2b_3$$

então temos

$$\{a_3, b_o\} = a_1a_2a_3$$

$$\{a_2 , b_1\} = a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1$$

$$\{a_1 , b_2\} = a_1b_2b_3 + a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2$$

$$\{a_o, b_3\} = b_1b_2b_3$$

OBS: Em alguns casos, no decorrer do nosso trabalho, usamos o termo densidade, para nos referir à função densidade de probabilidade e o termo função distribuição para função distribuição acumulada.

(0,21) Produto vazio é igual a 1

(0,22) Soma vazia é igual a 0

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES

Daremos nesse capítulo, algumas definições sobre variáveis complexas, que julgamos necessárias para o melhor entendimento do nosso trabalho. Apresentamos também alguns teoremas fundamentais cujas demonstração foram omitidas, visto que, só nos interessaremos pelas aplicações dos mesmos.

DEFINIÇÃO 1.1 - A função $g(z)$, da variável complexa z, é dita ser analítica no ponto z_o, se a sua derivada $g'(z)$, existe em z_o. Análogamente $g(z)$ é analítica em uma região A, se for analítica em todos os pontos de A.

DEFINIÇÃO 1.2 - Ponto singular é o ponto do plano complexo, onde a função $g(z)$ deixa de ser analítica.

DEFINIÇÃO 1.3 - Um ponto z_o pertencente ao plano complexo, é chamado ponto singular isolado da função $g(z)$, se existe uma vizinhança de z_o tal que $g(z)$ é analítica em todos os pontos dessa vizinhança menos em z_o .

Usando a definição 1.3 temos que quando z_o é um ponto singular isolado da função g(z), existe um número positivo r, tal que a função é analítica em cada ponto z para o qual $|z-z_o| < r$. Nesse dominio, g(z) pode ser desenvolvida por uma série de Laurent, ou seja:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n + \frac{b_1}{(z-z_o)} + \frac{b_2}{(z-z_o)^2} + \ldots \tag{1.1}$$

DEFINIÇÃO 1.4 - O coeficiente b_1, do desenvolvimento de g(z) em série de Laurent, é chamado de resíduo da função g(z) no ponto z_o. Em particular temos que

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z)d(z) \quad , \; i = \sqrt{-1} \tag{1.2}$$

onde C é um contorno fechado envolvendo z_o, tal que a função g(z) é analítica sobre C e no interior do mesmo.

OBS.: Se uma função g(z) tem apenas um número finito de pontos singulares, então necessariamente, eles serão pontos singulares isolados.

TEOREMA DO RESÍDUO 1.1 - Seja C um contorno fechado, tal que a função g(z) é analítica sobre e dentro de C, exceto em um número finito de pontos singulares; $z_1, z_2, \ldots, z_n$; interiores à C. Se $K_1, K_2, \ldots, K_n$ são os resíduos da função g(z) nesses pontos, então:

$$(1.3) \qquad \int_C f(z)d(z) = 2\pi i\,(K_1+K_2+\ldots+K_n) \,,$$

onde a integral é calculada no sentido anti horário ao longo de C.

DEMONSTRAÇÃO: Ver R.V. CHURCHILL [4] pg. 147-148

DEFINIÇÃO 1.5 - Se no desenvolvimento de uma função g(z) em série de Laurent, tivemos os coeficientes b_i's diferentes de zero apenas para um nº finito deles, ou seja, existe um inteiro $\underline{m}$ tal que $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ são todos nulos e

$$(1.4) \qquad g(z) = \frac{b_1}{(z-z_o)} + \frac{b_2}{(z-z_o)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_o)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n ,$$

quando $|z-z_o| < r$, então o ponto singular isolado z_o é chamado pólo de ordem m da função g(z). Se m=1 o pólo é chamado simples.

Vamos agora enunciar um teorema que, nos dará uma fórmula mais prática para encontrarmos os pólos e seus resíduos, para g(z).

TEOREMA 1.2 - Suponhamos que a função g(z) satisfaza as seguintes condições; para algum inteiro positivo m, existe um valor $\phi(z_o) \neq 0$, tal que a função:

$$(1.5) \qquad \phi(z) = (z-z_o)^m g(z) ,$$

seja analítica em z_o. Então a função g(z) tem um pólo de ordem m em z_o e seu resíduo é dado por:

$$(1.6) \qquad K_o = \frac{\phi^{(m-1)}(z_o)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_o} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_o)^m g(z)\right]$$

DEMONSTRAÇÃO: Ver R.V. CHURCHILL [4], pg. 149-150-151

OBS.: As condições do teorema 1.2 são satisfeitas quando a função g(z) tem a forma:

$$(1.7) \qquad g(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_o)^m} , m = 1,2,...,$$

onde a função ϕ é analítica em z_0 e $\phi(z_0) \neq 0$.

DEFINIÇÃO 1.6 - TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sejam f(x), uma função definida para todo x, tal que $0<x<\infty$ e, g(z) uma função dada por:

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)dx \quad , \tag{1.8}$$

então se a integral converge, a função definida em (1.8) é chamada a transformada de Laplace da função f(x).

DEFINIÇÃO 1.7 - TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Se a função g(z) é a transformada de Laplace da função f(x), então f(x) é chamada transformada Inversa de Laplace de g(z) e é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zx} g(z)dz \quad , \tag{1.9}$$

onde C é um contorno fechado que contém os pólos propriamente escolhidos de $e^{zx}\, g(z)$.

OBS.: Se a transformada de Laplace de uma função existe, então a sua inversa também existe e é única.

Como a variável z de (1.9) é complexa, a integral que nos dá f(x) é complexa, então para a resolução dessa integral podemos utilizar o teorema 1.1, ou seja

$$\text{(1.10)} \qquad \int_C e^{zx}\, g(z)dz = 2\pi i(K_1+K_2+\ldots+K_n) \ ,$$

onde K_j é o resíduo de $e^{zx}\, g(z)$ correspondente ao pólo z_j, $\forall j = 1,2,\ldots,n$, resíduo esse que pode ser obtido pelo teorema 1.2.

Para os propósitos do nosso trabalho a função f(x), para qual iremos encontrar a sua transformada de Laplace, será sempre uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X; de imediato temos pois que a inversa de g(z), será uma função densidade de probabilidade.

DEFINIÇÃO 1.8 - FUNÇÃO GERATRIZ DE MOMENTOS

Seja X uma v.a. positiva, contínua e f(x) a sua função den sidade de probabilidade. Então definimos a função geratriz de momentos de X como:

(1.11) $$M_X(z) = E\left[e^{zx}\right] = \int_0^\infty e^{zx}\, f(x)dx \quad .$$

Associando as definições de transformada de Laplace de uma densidade e função geratriz de momentos de uma v.a. X positiva, com a mesma densidade considerada na transformada, temos que: se

g(z) é a transformada de Laplace de uma densidade f(x), então:

(1.12) $$g(z) = M_X(-z) \quad ,$$

onde X é uma v.a. com densidade f(x).

Com a relação (1.12), entre transformada de Laplace e função geratriz de momentos, podemos então, se conhecida a f.g.m. de uma v.a. X, encontrarmos, usando a transformada inversa de Laplace, a sua função densidade de probabilidade, ou seja:

(1.13) $$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zx}\, g(z)dz \quad ,$$

onde C é um contorno que contém todos os pólos de g(z).

Esse critério descrito acima é o que utilizaremos para encontrar as densidades de interesse do nosso trabalho.

xxXxx

CAPÍTULO 2

COMBINAÇÃO LINEAR DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS EXPONENCIAIS

Nesse capítulo apresentaremos a distribuição exata de combinção linear de variaveis aleatórias independentes com distribuições exponenciais, bem como alguns casos particulares.

TEOREMA - 2.1: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com funções densidades dadas por:

$$(2.1.1) \qquad f_i(x_i) = \alpha_i e^{-\alpha_i x_i} \; ; \; x_i \geq 0$$
$$\alpha_i \geq 0 \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n$$

e

$$(2.1.2) \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

onde C_i, $\forall_i = 1,2,\ldots,n$ são constantes positivas. Então a função densidade, $h(y)$ e a função distribuição acumulada, $H(y)$ da variável Y, são dadas por:

CASO 1:

Se

$$\frac{\alpha_1}{C_1} \neq \frac{\alpha_2}{C_2} \neq \ldots \neq \frac{\alpha_n}{C_n}$$

então

$$h(y) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j}\right) \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{-\frac{\alpha_i}{C_i} y} \times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[\frac{\alpha_j}{C_j} - \frac{\alpha_i}{C_i} \right]^{-1} \right\}, y > 0 \tag{2.1.3}$$

e

$$H(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\frac{\alpha_j}{C_j}}{\left[\frac{\alpha_j}{C_j} - \frac{\alpha_i}{C_i}\right]} \times (1 - e^{-\frac{\alpha_i}{C_i} y}) \right\}, y > 0 \tag{2.1.4}$$

CASO 2:

Se

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \text{ das } (\frac{\alpha_i}{C_i})\text{'s são iguais a } \beta_1 \quad , \\ r_2 \text{ das } (\frac{\alpha_i}{C_i})\text{'s são iguais a } \beta_2 \quad , \\ \vdots \\ r_m \text{ das } (\frac{\alpha_i}{C_i})\text{'s são iguais a } \beta_m \end{array} \right. \tag{2.1.5}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n$$

então:

(2.1.6) $$h(y) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j}}{(r_i - 1)!} e^{-\beta_i y} \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{r_i-1} \binom{r_i-1}{k} y^{r_i-1-k} A_i^{(k)} \right\}, \ y > 0$$

onde definimos:

$$A = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (\beta_j + z)^{-r_j}$$

$$A^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} A \ , \ A^{(0)} = A$$

$$A_i^{(k)} = \lim_{z\to-\beta_i} A^{(k)} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,r_i-1$$

ou ainda

(2.1.7) $$A_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+1} \frac{(k-1)!}{(k-1-r)!} A_i^{(k-1-r)}$$

$$\times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} r_j (\beta_j - \beta_i)^{-(r+1)}$$

e a função distribuição é:

$$(2.1.8) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j}}{(r_i-1)!} \sum_{k=0}^{r_i-1} \left[\binom{r_i-1}{k} A_i^{(k)} \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (r_i-1-k)!\,(\beta_i^{k-r_i} - e^{-\beta_i y} \sum_{t=0}^{r_i-1-k} \frac{y^{r_i-1-k-t}}{(r_i-1-k-t)!\,\beta_i^{t+1}}) \right] \right\}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Utilizaremos para essa demonstração, a teoria da transformada de Laplace, bem como a sua Inversa.

A função geratriz de momentos para $X_i, \forall i = 1,2,\ldots,n$; é dada por:

$$M_{X_i}(z) = \int_0^{\infty} e^{zx_i} \alpha_i e^{-\alpha_i x_i} dx_i$$

$$(2.1.9) \qquad = \frac{\alpha_i}{(\alpha_i - z)}, \ R(z) < \alpha_i \ \forall_i = 1,2,\ldots,n$$

A função geratriz de momentos da variável Y é dada por

$$(2.1.10) \qquad M_Y(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(\alpha_i - C_i z)}$$

então a transformada de Laplace da densidade h(y) é dada por:

$$(2.1.11) \qquad g(z) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\frac{\alpha_i}{C_i}}{(\frac{\alpha_i}{C_i} + z)} \right] \quad , \ R(z) > -\frac{\alpha_i}{C_i} \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

Aplicando a transformada Inversa de Laplace para (2.1.11), temos que a função densidade de Y será dada por:

$$(2.1.12) \qquad h(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zy} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\frac{\alpha_i}{C_i}}{(\frac{\alpha_i}{C_i} + z)} \right] dz$$

onde C é um contorno fechado que inclui todos os pólos de (2.1.11).

Na resolução da integral de (2.1.12), utilizaremos o teorema do resíduo, apresentado no capítulo 1. Nesse sentido precisamos encontrar os pólos de (2.1.11).

Para encontrarmos os pólos estudaremos os 2 casos apresentados, determinando para cada um deles a função densidade e a função distribuição acumulada.

CASO 1:

Quando:

$$\frac{\alpha_1}{C_1} \neq \frac{\alpha_2}{C_2} \neq \dots \neq \frac{\alpha_n}{C_n}$$

os polos de (2.1.11) são

$$z_i = -\frac{\alpha_i}{C_i} \quad , \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

todos de ordem um.

Então:

$$K_i = \lim_{z \to -\frac{\alpha_i}{C_i}} e^{zy}\left(z + \frac{\alpha_i}{C_i}\right) \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\frac{\alpha_j}{C_j}}{\left(\frac{\alpha_j}{C_j} + z\right)}\right]$$

$$(2.1.13) \qquad = e^{-\frac{\alpha_i}{C_i}y} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} - \frac{\alpha_i}{C_i}\right)^{-1}$$

Usando o teorema do resíduo e por (2.1.12) temos

$$h(y) = \frac{1}{2\pi i} \, 2\pi i \sum_{i=1}^{n} K_i$$

$$(2.1.14) \qquad = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j}\right) \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{-\frac{\alpha_i}{C_i}y} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} - \frac{\alpha_i}{C_i}\right)^{-1} \right\}, \ y > 0$$

A função distribuição acumulada de Y é obtida pela integração de (2.1.14) de 0 a y, ou seja:

$$H(y) = \int_0^y \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j}\right) \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{-\frac{\alpha_i}{C_i}y} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} - \frac{\alpha_i}{C_i}\right)^{-1} \right\} dy$$

$$(2.1.15) \qquad = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(1 - e^{-\frac{\alpha_i}{C_i}y}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[\frac{\frac{\alpha_j}{C_j}}{\left(\frac{\alpha_j}{C_j} - \frac{\alpha_i}{C_i}\right)} \right] \right\}$$

CASO 2:

Se temos as condições (2.1.5), então:

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} \beta_i (\beta_i + z)^{-1}$$

$$(2.1.16) \qquad = \prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j} (\beta_j + z)^{-r_j}, \ m \leq n$$

Usando a transformada Inversa de Laplace de (2.1.16), pode mos escrever:

$$h(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zy} \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{\beta_j^{r_j}}{(\beta_j + z)^{r_j}} \right] dz \tag{2.1.17}$$

Os polos de (2.1.16) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = -\beta_1 \text{ , polo de ordem } r_1 \\ z_2 = -\beta_2 \text{ , polo de ordem } r_2 \\ \vdots \\ z_m = -\beta_m \text{ , polo de ordem } r_m \end{array} \right. \tag{2.1.18}$$

então:

$$K_i = \frac{\prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j}}{(r_i - 1)!} \lim_{z \to -\beta_i} \frac{d^{r_i - 1}}{dz^{r_i - 1}} \left\{ e^{zy} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (\beta_j + z)^{-r_j} \right\} \tag{2.1.19}$$

Desenvolvendo a derivada de (2.1.19) temos:

$$\frac{d^{r_i - 1}}{dz^{r_i - 1}} \left\{ e^{zy} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (\beta_j + z)^{-r_j} \right\} = e^{zy} \sum_{k=0}^{r_i - 1} \left\{ \binom{r_i - 1}{k} y^{r_i - 1 - k} \right.$$

$$\left. \times \frac{d^k}{dz^k} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (\beta_j + z)^{-r_j} \right] \right\}$$

$$= e^{zy} \sum_{k=0}^{r_i-1} \left\{ \binom{r_i-1}{k} y^{r_i-1-k} A^{(k)} \right\} \tag{2.1.20}$$

aplicando o resultado (0.3) do capítulo 0.

Pelo teorema do Resíduo e por (2.1.17) ficamos com:

$$h(y) = \sum_{i=1}^{m} K_i$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j} \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{e^{zy}}{(r_i-1)!} \right. \tag{2.1.21}$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{r_i-1} \left[\binom{r_i-1}{k} y^{r_i-1-k} A_i^{(k)} \right] \right\}$$

onde desenvolvendo um pouco mais $A^{(k)}$ obtemos:

$$A^{(k)} = \frac{d^k A}{dz^k}$$

$$= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[A \frac{d}{dz} \log A \right]$$

$$= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[A \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left(\frac{-r_j}{\beta_j + z} \right) \right] \tag{2.1.22}$$

utilizando em (2.1.22) o desenvolvimento Binomial apresentado no capítulo 0 (0.3), temos

(2.1.23) $$A^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \binom{k-1}{r} A^{(k-1-r)} (-1)^{r+1} r! \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[r_j (\beta_j + z)^{-(r+1)} \right] \right\}$$

ou ainda

(2.1.24) $$A_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \binom{k-1}{r} A_i^{(k-1-r)} (-1)^{r+1} r! \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[r_j (\beta_j - \beta_i)^{-(r+1)} \right] \right\}$$

A função distribuição acumulada da variavel y, dada por (2.1.2), será:

(2.1.25) $$H(y) = \prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j} \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{1}{(r_i-1)!} \times \sum_{k=0}^{r_i-1} \left[\binom{r_i-1}{k} A_i^{(k)} \int_0^y e^{-\beta_i y} y^{r_i-1-k} dy \right] \right\}$$

Usando o resultado (0.16) do capítulo 0, para a resolução da integral de (2.1.25) temos:

$$(2.1.26) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{m} \beta_j^{r_j}}{(r_i-1)!} \sum_{k=0}^{r_i-1} \left[\binom{r_i-1}{k} A_i^{(k)} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\ (r_i-1-k)!\,(\beta_i^{k-r_i} - e^{-\beta_i y} \sum_{t=0}^{r_i-1-k} \frac{y^{r_i-1-k-t}}{(r_i-1-k-t)!\,\beta_i^{t+1}}) \right] \right\}$$

2.2 - CASOS PARTICULARES

2.2.1 - Quando

$$\alpha_i = 1, \forall_i = 1, 2, \ldots, n \text{ , e}$$

$$c_1 \neq c_2 \neq \ldots \neq c_n \text{ ,}$$

a função densidade h(y) e a função distribuição H(y), da variável Y definida em (2.1.2), onde

$$f_i(x_i) = \alpha\, e^{-\alpha x_i} \text{ ,}$$

são dadas por:

$$(2.2.1.1) \qquad h(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{-\frac{y}{C_i}} \; C_i^{n-2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (C_i - C_j)^{-1} \right\}, \quad y > 0$$

usando (2.1.3), com $\alpha_i = 1$;

a função distribuição, usando (2.1.4) é:

$$(2.2.1.2) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ C_i^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{y}{C_i}}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} (C_i - C_j)^{-1} \right\}$$

Temos que (2.2.1.1) é a mesma função apresentada em [13] na pg. 222 Vol. I .

2.2.2 - Quando:

$$\alpha_i = \alpha, \text{ e}$$

$$C_i = C \ , \ \forall_i = 1,2,\ldots,n$$

a densidade de y e a distribuição acumulada, onde:

$$f_i(x_i) = \alpha \, e^{-\alpha x}$$

são dadas por:

$$h(y) = \frac{(\frac{\alpha}{c})^n}{(n-1)!} e^{-\frac{\alpha y}{c}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y^{n-1-k} A_1^{(k)}$$

usando (2.1.6).

Como

$$A_1^{(0)} = 1 \quad \text{e} \quad A_1^{(k)} = 0 \qquad \forall k = 1,2,\ldots,n-1$$

então

(2.2.2.1) $$h(y) = \frac{y^{n-1}\, e^{-\frac{\alpha y}{c}}}{(\frac{c}{\alpha})^n\, \Gamma(n)}$$

Temos então que (2.2.2.1) é a densidade da $\Gamma(n, \frac{c}{\alpha}, 0)$, como definida no resultado (0.4) do capítulo 0.

Se em (2.2.2.1) tivemos $\alpha = \frac{1}{2}$ e $c = 1$, então

$$h(y) = \frac{y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^n\, \Gamma(n)} ,$$

a qual identificamos como a densidade de uma v.a. $\chi^2(2n)$.

A função distribuição usando (2.1.8) será:

(2.2.2.2) $$H(y) = \frac{(\frac{\alpha}{C})^n}{(n-1)!}(n-1)!\left[(\frac{\alpha}{C})^{-n} - e^{-\frac{\alpha y}{C}} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{y^{n-1-t}}{(n-1-t)!\,(\frac{\alpha}{C})^{t+1}}\right]$$

$$= \left\{1 - e^{-\frac{\alpha y}{c}} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{y^{n-1-t}}{(n-1-t)!\,(\alpha/c)^{t+1}}\right\}.$$

2.2.3 - Quando

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad , \forall i \neq j = 1,2,\ldots,n \quad \text{e}$$

$$c_i = 1 \ \forall_i = 1,\ldots,n \ ,$$

a densidade de

$$Y = \sum X_i \quad ,$$

onde

$$f_i(x_i) = \alpha_i\, e^{-\alpha_i x_i} \quad ,$$

é dada por

(2.2.3.1) $$h(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{e^{-\alpha_i y} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\alpha_j-\alpha_i)^{-1}\right\} \prod_{j=1}^{n} \alpha_j$$

usando-se (2.1.3), e a distribuição usando-se (2.1.4) é dada por

$$(2.2.3.2) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ (1 - e^{-\alpha_i y}) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\alpha_j}{(\alpha_j-\alpha_i)} \right\}$$

O resultado (2.2.3.1) tambem foi apresentado por Demaret e Garcet, utilizando a construções de alguns funcionais e posteriormente o critério da Indução. (Ver [5]).

2.3 - APLICAÇÃO

Um dos problemas principais de aplicação de distribuição exponencial, é quando trabalhamos com testes de vida, testes de fadiga, etc., as quais são muito utilizados em eletrônica para se testar tempo de vida de tubos de rádio, de bulbos eletrônicos, de vários equipamentos físicos e, também, para se testar a quantidade de voltagem necessária até que um condensador estoure.

Vamos então, apresentar um exemplo que fàcilmente ocorre na prática, o qual está contido no trabalho de Epstein e Sobel [6].

Seja X uma variável aleatória que representa o tempo de vida, em horas, de um determinado tipo de tubo eletrônico. A pressuposição que X tenha uma distribuição exponencial é comprovada por investigações na prática. Então:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} , \quad \theta > 0, \; x > 0$$

onde θ, média de X, é desconhecido.

Queremos então estimar θ, e encontrar sua distribuição. Para tanto, seleciona-se uma amostra aleatória de tamanho n. Vamos supor a seguinte situação:

A medida que os elementos da amostra são inspecionados ocorre um imprevisto, ou seja, após a verificação do r-ésimo elemento da amostra, a inspeção, por algum motivo, é interrompida, sendo impossível a continuação. O problema que se apresenta é, encontrarmos o estimador para θ com apenas r itêns da amostra. Façamos isso:

Seja $x_{1,n}$; $x_{2,n}$;...; $x_{r,n}$ as r observações ordenadas da amostra ou seja:

$$x_{1,n} \leq x_{2,n} \leq x_{3,n} \leq \cdots \leq x_{r,n}$$

Seja também, $\hat{\theta}_{r,n}$, o estimador de θ baseado nas r-observações, t.q.

$$\hat{\theta}_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n-r)x_{r,n}}{r} \tag{2.3.1}$$

A f.d.p. conjunta de $X_{1,n}$; $X_{2,n}$;...;$X_{r,n}$, será dada por:

$$(2.3.2) \qquad f(x_{1,n};x_{2,n};\ldots;x_{r,n}) = \frac{n!}{(n-r)!\theta^r} \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{r} x_{i,n}+(n-r)x_{r,n}\right]/\theta\right\}$$

$$0 < x_{1,n} \leq x_{2,n} \leq \ldots \leq x_{r,n} < \infty$$

Pode-se mostrar que o estimador $\hat{\theta}_{r,n}$ maximiza $f(x_{1,n}$; $x_{2,n}$;...; $x_{r,n})$, ou seja, $\hat{\theta}_{r,n}$ é o estimador de máxima verossimilhança para θ.

A suficiência desse estimador, pode ser verificada pelo teorema da fatoração da Inferência Estatística.

Para encontrarmos a distribuição de $\hat{\theta}_{r,n}$, vamos definir r-v.a.'s auxiliares $Y_{1,n}$; $Y_{2,n}$;...; $Y_{r,n}$ tais que:

$$(2.3.3) \qquad Y_{1,n} = X_{1,n} \quad e \quad Y_{i,n} = X_{i,n} - X_{i-1,n};\ 2 \leq i \leq r,$$

e mais ainda, tôdas as $Y_{i,n}$ $1 \leq i \leq r$ são independentes e com distribuição exponencial, cujos parametros são $\frac{\theta}{n-i+1}$ $1 \leq i \leq r$. Verifiquemos pois, essa afirmação:

a distribuição conjunta dos $Y_{i,n}$ $\forall_i = 1,\ldots,r$ é:

$$(2.3.4) \qquad g(y_{1,n};y_{2,n};\dots;y_{r,n}) = \frac{n!}{(n-r)!\theta^r} \exp\left\{-\left[\sum (n-i+1)y_{i,n}\right]/\theta\right\},$$

obtida a partir de (2.3.2),

ou ainda,

$$g(y_{1,n};y_{2,n};\dots;y_{r,n}) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{n-i+1}{\theta}\right) e^{-(n-i+1)y_{i,n}/\theta}$$

que é um produto de distribuições exponenciais com parametros $\frac{\theta}{(n-i+1)}$, verificando-se pois, a afirmação que os $Y_{i,n}$ são independentes e cada um com distribuição exponencial, ou seja:

$$(2.3.5) \qquad g_i(y_{i,n}) = \frac{n-i+1}{\theta} e^{-\frac{(n-i+1)}{\theta} y_{i,n}}$$

Reescrevendo $\hat{\theta}_{r,n}$ em termos das variâveis auxiliares $y_{i,n}$, temos:

$$(2.3.6) \qquad Z = \hat{\theta}_{r,n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n-i+1)}{r} y_{i,n},$$

Então, para encontrarmos a distribuição de $Z = \hat{\theta}_{r,n}$, basta encontrarmos a distribuição da combinação linear

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(n-i+1)}{r} y_{1,n} , \tag{2.3.7}$$

onde, cada $y_{i,n}$ tem distribuição dada por (2.3.5), ou seja, exponencial com parametro $\alpha_1 = (\frac{n-i+1}{\theta})$, $\forall_i = 1,2,\ldots,r$. Portanto podemos aplicar o teorema 2.1, de forma que, temos, segundo a notação do mesmo, o seguinte:

$$\frac{\alpha_i}{C_i} = \frac{(n-j+1)/_\theta}{(n-i+1)/_r} = \frac{\theta}{r} , \forall_i = 1,2,\ldots,r , \tag{2.3.8}$$

ou seja,

$$\frac{\alpha_1}{C_1} = \frac{\alpha_2}{C_2} = \ldots = \frac{\alpha_r}{C_r} = \frac{\theta}{r} = \beta_1 \tag{2.3.9}$$

o que se enquadra no Caso 2 do mencionado teorema, onde teremos:

$$m = 1, \quad r_1 = r \quad , \quad \beta_1 = \frac{\theta}{r}$$

então, por (2.1.6), temos que:

$$(2.3.10) \qquad h(z) = \frac{(\frac{\theta}{r})^r}{(r-1)!}\, e^{-\frac{\theta z}{r}} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} z^{r-1-k}\, A_1^{(k)}$$

onde;

$$A_1^{(0)} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{r} (\frac{\theta}{r} + z)^{-r} = 1 \quad \text{e} \quad A_1^{(k)} = 0 \;, \; \forall\, k \geq 1$$

então

$$(2.3.11) \qquad h(z) = \frac{1}{(\frac{r}{\theta})^r \Gamma(r)}\, e^{-\frac{\theta z}{r}}\, z^{r-1}$$

e qual é uma distribuição $\Gamma(r,\frac{r}{\theta}, 0)$.

Este mesmo problema é também comentado por Basu [2].

Outra aplicação para a distribuição de combinação linear de Exponenciais, é dada por Mathai e Aleyamma [17], para encontrar a distribuição de intervalos entre nascidos vivos.

CAPÍTULO 3

COMBINAÇÃO LINEAR DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UNIFORMES

Nosso trabalho nesse capítulo, será encontrar a distribuição exata de qualquer combinação linear de variáveis aleatórias independentes, com distribuição Uniforme. Êsse resultado, será mostrado no teorema 3.1. Apresentaremos também, conclusões para alguns casos particulares de combinação linear, bem como, uma aplicação do resultado aqui encontrado.

TEOREMA 3.1 - Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variáveis aleatórias independentes, distribuidas uniformemente, com parâmetros α_i e β_i, $\forall_i = 1,2,\ldots,n$, ou seja:

$$(3.1.1) \qquad f_i(x_i) = \frac{1}{(\beta_i - \alpha_i)}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq x \leq \beta_i \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n$$

Então, a função densidade de probabilidade, h(y) e a função distribuição acumulada, H(y), da variável aleatória

$$(3.1.2) \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \,,$$

onde

$$C_i;\ \forall_i = 1,2,\ldots n$$

são constantes não negativas, são dadas por:

(3.1.3) $$h(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i-\alpha_i)\right]^{-1}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n} \left\{(-1)^r \right.$$

$$\left. \times \sum_{A(n-r,r)} \left[\left(y - \sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{n-1} I_B(y)\right]\right\},\quad \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i \leq y \leq \sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i$$

onde:

$$t_i = C_i\alpha_i \quad \text{ou} \quad t_i = C_i\beta_i$$

$$I_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in B \\ 0 & \text{se } y \notin B \end{cases}$$

(3.1.4)

$$B = \{y:\ y > \sum_{i=1}^{n} t_i\}$$

$A(n-r,r)$, é o conjunto de todas as somas, $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, as quais são constituidas de n-r $(C_i\alpha_i)$'s e r $(C_j\beta_j)$'s para $\forall_i \neq j = 1,2,\ldots,n$.

Temos também, que o conjunto $A(n-r,r)$ é sempre constituido de $\binom{n}{r}$ elementos.

Para maior esclarecimento sobre o conjunto $A(n-r,r)$, ver o resultado (0.19) do capítulo 0.

E,

$$(3.1.5) \qquad H(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i-\alpha_i)\right]^{-1}}{n!} \sum_{r=0}^{n} \left\{(-1)^r \times \sum_{A(n-r,r)} \left[\left(y - \sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n I_B(y)\right]\right\}, \quad \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i \leq Y \leq \sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i .$$

DEMONSTRAÇÃO:

Como X_i é $U(\alpha_i,\beta_i)$; $i = 1,2,\ldots,n$; temos que a função de geratriz de momentos de X_i é dada por:

$$(3.1.6) \qquad M_{X_i}(z) = \frac{e^{z\beta_i} - e^{z\alpha_i}}{(\beta_i - \alpha_i)z}, \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n$$

Encontrando a função geratriz de momentos de Y, por (3.1.6), temos:

$$(3.1.7) \qquad M_Y(z) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{C_i\beta_i z} - e^{C_i\alpha_i z}}{(\beta_i - \alpha_i)C_i z} \right]$$

A partir de (3.1.7) encontramos a transformada do Laplace da densidade, h(y), então:

$$(3.1.8) \qquad g(z) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{-\alpha_i C_i z} - e^{-C_i\beta_i z}}{C_i(\beta_i - \alpha_i) z} \right]$$

A inversa da transformada de Laplace, g(z), nos dará h(y), ou seja:

$$(3.1.9) \qquad h(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i - \alpha_i)\right]^{-1}}{2\pi i} \int_L z^{-n} e^{zy} \prod_{i=1}^{n} (e^{-C_i\alpha_i z} - e^{-C_i\beta_i z}) dz$$

onde L é um contorno que inclui os polos de (3.1.8).

Para resolvermos mais fàcilmente a integral de (3.1.9), daremos uma outra interpretação ao produtório que lá aparece.

Quando temos um produto do tipo

$$(3.1.10) \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \quad ,$$

podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$(3.1.11) \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \left\{ a_{(n-r)} \; ; \; b_{(r)} \right\} ,$$

onde:

$$(3.1.12) \qquad \left\{ a_{(n-r)} \; ; \; b_{(r)} \right\}$$

é a soma de todos os produtos, constituidos por (n-r) a_i's e r b_j's para $\forall_i \neq j$ 1,2,..,n . Êsse resultado, foi apresentado no trabalho de Gray e Odell [11]. Para maiores esclarecimentos, sôbre essa notação, ver resultado (0,20) do capítulo 0.

Agora, associando o produtório apresentado em (3.1.9) com a expressão (3.1.11), temos:

$$a_i = e^{-C_i \alpha_i z}$$

$$b_i = e^{-C_i \beta_i z}$$

$$a_{(n-r)} = (e^{-C\alpha z})_{(n-r)}$$

$$b_{(r)} = (e^{-C\beta z})_{(r)}$$

então,

$$(3.1.13) \qquad \prod_{i=1}^{n} (e^{-\alpha_i C_i z} - e^{-C_i \beta_i z}) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \left\{ (e^{-C\alpha z})_{(n-r)} ; (e^{-C\beta z})_{(r)} \right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sum_{A(n-r,r)} e^{-z \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

onde t_i e $A(n-r,r)$ são definidos na relação (3.1.4).

Substituindo (3.1.13) em (3.1.9), temos:

$$(3.1.14) \qquad h(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i - \alpha_i) \right]^{-1}}{2\pi i} \sum_{r=0}^{n} \left\{ (-1)^r \right.$$

$$\left. \times \sum_{A(n-r,r)} \left[\int_L z^{-n} e^{z(y - \sum_{i=1}^{n} t_i)} dz \right] \right\}$$

onde L é um contorno que inclui os pólos de

$$z^{-n} e^{z(y - \sum_{i=1}^{n} t_i)}$$

Temos porém, pela definição de Inversa de Laplace, que a integral de (3.1.14), é identicamente zero, sempre que

$$y - \sum t_i < 0$$

ou seja, para

$$y < \sum_{i=1}^{n} t_i \; ;$$

a demonstração desse fato é encontrada em Smith [22] pg 32.

Utilizando o teorema do resíduo, para resolução da integral, temos:

um pólo de ordem n, em z = 0, e seu resíduo é dado por:

$$K = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} z^n . z^{-n} e^{z(y - \sum_{i=1}^{n} t_i)} \tag{3.1.15}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} (y-\sum t_i)^{n-1} e^{(y-\sum_{i=1}^{n} t_i)z}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} (y - \sum_{i=1}^{n} t_i)^{n-1} \; , \quad y > \sum_{i=1}^{n} t_i$$

sendo que, para $y \leq \sum_{i=1}^{n} t_i$, teremos K = 0.

Usando o teorema do Resíduo, a expressão 3.1.14, se torna:

$$h(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i - \alpha_i)\right]^{-1}}{2\pi i} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sum_{A(n-r,r)} 2\pi i \; K$$

ou seja:

$$(3.1.16)\qquad h(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i-\alpha_i)\right]^{-1}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n} \left\{(-1)^r \times \sum_{A(n-r,r)} \left[(y-\sum_{i=1}^{n} t_i)^{n-1}\, I_B(y)\right]\right\} ; \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i \leq y \leq \sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i$$

A função distribuição acumulada de Y é dada por:

$$H(y) = \int_{\sum_{i=1}^{n} t_i}^{y} h(y)dy$$

ou seja:

$$(3.1.17)\qquad H(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i(\beta_i-\alpha_i)\right]^{-1}}{n!} \sum_{r=0}^{n} \left\{(-1)^r \times \sum_{A(n-r,r)} \left[(y-\sum_{i=1}^{n} t_i)^{n}\, I_B(y)\right]\right\}, \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i \leq y \leq \sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i$$

3.2 - CASOS PARTICULARES

Consideremos agora, alguns casos particulares dos resulta dos obtidos anteriormente

3.2.1 - Quando $X_1, X_2, \ldots, X_n$, são $U(\alpha,\beta)$ e:

a) $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e portanto

$n\alpha \leq y \leq n\beta$,

a função densidade de Y sera dada por (3.1.3), ou seja:

$$h(y) = \frac{(\beta-\alpha)^{-n}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n} \left\{ (-1)^r \sum_{A(n-r,r)} \left[\left(y - \sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{n-1} I_B(y) \right] \right\}, \qquad (3.2.1.1)$$

onde

$$t_i = \alpha \quad \text{ou} \quad t_i = \beta$$

Para tomarmos mais simples a expressão obtida, vamos analizar os conjuntos A(n-r,r). Assim, temos:

$$\begin{aligned}
A(n,0) &= \{n\alpha\} \\
A(n-1,1) &= \{(n-1)\alpha+\beta,\ (n-1)\alpha+\beta, \ldots, (n-1)\alpha+\beta\} \\
&\vdots \\
A(n-r,r) &= \{(n-r)\alpha+r\beta, (n-r)\alpha+r\beta, \ldots, (n-r)\alpha+r\beta\} \\
&\vdots \\
A(0,n) &= \{n\beta\}
\end{aligned}$$

Sabendo que, cada conjunto A(n-r,r) possui $\binom{n}{r}$ elemento, e que estes são constituidos da forma acima descrita, podemos escrever:

$$\sum_{A(n-r,r)} (y-\sum_{i=1}^{n} t_i)^{n-1} I_B(y) = \binom{n}{r}\left[y - n\alpha - r(\beta-\alpha)\right]^{n-1} I_B(y)$$

onde $B = \{y: y > n\alpha + r(\beta-\alpha)\}$.

Dessa forma, o resultado (3.2.1.1), se torna:

$$h(y) = \frac{(\beta-\alpha)^{-n}}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{y-n\alpha}{(\beta-\alpha)}\right]} \left\{(-1)^m \binom{n}{m}\left[y - n\alpha - m(\beta-\alpha)\right]^{n-1}\right\} \quad n\alpha \leq y \leq n\beta$$

onde,

$$\left[\frac{y-n\alpha}{(\beta-\alpha)}\right] \text{ é a parte inteira de } \frac{y-n\alpha}{(\beta-\alpha)}$$

podemos ainda escrever

$$(3.2.1.2) \quad h(y) = \frac{(\beta-\alpha)^{-n}}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{k} \left\{(-1)^m \binom{n}{m}\left[y-n\alpha-m(\beta-\alpha)\right]^{n-1}\right\} \;;$$

$$; \; n\alpha + k(\beta-\alpha) \leq y < n\alpha + (k+1)(\beta-\alpha)$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n$$

que é a expressão final.

A função distribuição acumulada, será dada por:

$$(3.2.1.3)\quad H(y) = \frac{(\beta-\alpha)^{-n}}{n!} \sum_{r=0}^{n} \left\{ (-1)^r \sum_{A(n-r,r)} \left[(y - \sum_{i=1}^{n} t_i)^n \, I_B(y) \right] \right\}; n\alpha \leq y \leq n\beta$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^{-n}}{n!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{y-n\alpha}{(\beta-\alpha)}\right]} \left\{ (-1)^m \binom{n}{m} \ (y - n\alpha - m(\beta-\alpha))^n \right\}$$

ou ainda, podemos escrever H(y) como:

(3.2.1.4)

$$H(y) = \frac{(\beta-\alpha)^{-n}}{n!} \sum_{m=0}^{k} \left\{ (-1)^m \binom{n}{m} \ (y-n\alpha-m(\beta-\alpha))^n \right\} ; \ n\alpha + k(\beta-\alpha) \leq y \leq n\alpha + (k+1)(\beta-\alpha)$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n$$

b) Considerando agora o caso em que:

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad ,$$

então,

$$(3.2.1.5)\qquad h(y) = \frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^{-n}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{\left[\frac{ny-n\alpha}{(\beta-\alpha)}\right]} \left\{ (-1)^r \binom{n}{r} \left(y - \frac{(n-r)\alpha+r\beta}{n}\right)^{n-1} \right\} ; \alpha \leq y \leq \beta$$

ou ainda,

$$(3.2.1.6)\qquad h(y) = \frac{n^n}{(\beta-\alpha)^n (n-1)!} \sum_{r=0}^{k} \left\{ (-1)^r \binom{n}{r} \right.$$

$$\left. \times \left(y - \frac{(n-r)\alpha+r\beta}{n}\right)^{n-1} \right\} ; \frac{n\alpha+k(\beta-\alpha)}{n} \leq y \leq \frac{n\alpha+(k+1)(\beta-\alpha)}{n}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n$$

e a função distribuição acumulada será:

$$(3.2.1.7)\qquad H(y) = \frac{n^n}{(\beta-\alpha)^n n!} \sum_{r=0}^{k} \left\{ (-1)^r \binom{n}{r} \right.$$

$$\left. \times \left(y - \frac{(n-r)\alpha+r\beta}{n}\right)^{n} \right\} ; \frac{n\alpha+k(\beta-\alpha)}{n} \leq y \leq \frac{n\alpha+(k+1)(\beta-\alpha)}{n}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n$$

b.1) Quando consideramos X_1 e X_2 com distribuição $U(\alpha,\beta)$, e $Y = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$, teremos

$$\alpha \leq y \leq \beta$$

e

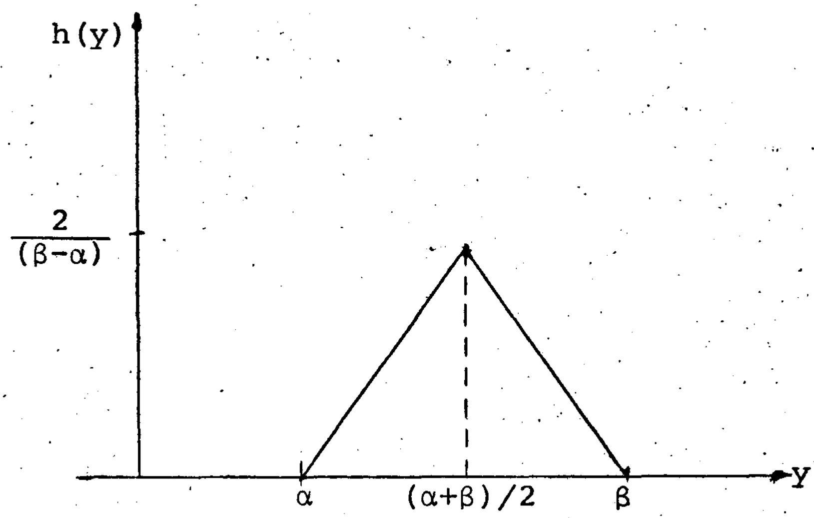
$$h(y) = \frac{4}{(\beta-\alpha)^2} \sum_{r=0}^{k} \left\{ (-1)^r \binom{2}{r} \left[y - \alpha - \frac{(\beta-\alpha)r}{2} \right] \right\}; \alpha + \frac{k(\beta-\alpha)}{2} \leq y \leq \alpha + \frac{(k+1)(\beta-\alpha)}{2}$$

$$k = 0,1,2$$

Esta densidade, pode ainda ser escrita como se segue:

$$h(y) = \begin{cases} 0 & y < \alpha \\[2ex] \dfrac{4}{(\beta-\alpha)^2}(y-\alpha) & \alpha \leq y \leq \dfrac{\beta+\alpha}{2} \\[2ex] \dfrac{4}{(\beta-\alpha)^2}(\beta-y) & \dfrac{\beta+\alpha}{2} \leq y \leq \beta \\[2ex] 0 & y \geq \beta \end{cases}$$

Temos portanto que h(y) é uma distribuição triangular simétrica (Johnson & Kotz, Vol. II pag. 64 [13]), e seu gráfico é dado por:



A função distribuição acumulada de Y será

$$H(y) = \frac{2}{(\beta-\alpha)^2} \sum_{r=0}^{k} \left\{ (-1)^r \binom{2}{r} \right.$$

$$\left. \times \left(y-\alpha - \frac{(\beta-\alpha)r}{2}\right)^2 \right\}; \quad \alpha + \frac{k(\beta-\alpha)}{2} \leq y \leq \alpha + \frac{(k+1)(\beta-\alpha)}{2}$$

$$k = 0,1,2$$

a qual pode também ser escrita como:

$$H(y) = \begin{cases} 0 & y < \alpha \\ \dfrac{2}{(\beta-\alpha)^2}(y-\alpha)^2 & \alpha \leq y \leq \dfrac{\beta+\alpha}{2} \\ \dfrac{2}{(\beta-\alpha)^2}\left[(y-\alpha)^2 + (y-\dfrac{\beta+\alpha}{2})^2\right]; & \dfrac{\beta+\alpha}{2} \leq y \leq \beta \\ 1 & y \geq \beta \end{cases}$$

b.2) Vejamos agora, quando $X_1,X_2,...,X_n$ são todas $U(0,1)$ e $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Para essa situação, $h(y)$, é um caso particular de (3.2.1.5), ou seja,

$$h(y) = \frac{n^n}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{[ny]} \left\{ (-1)^t \binom{n}{m} (y - \frac{m}{n})^{n-1} \right\} , \quad 0 \leq y \leq 1$$

esse mesmo resultado foi apresentado no trabalho de Rufener (1952) (Ver também Rathie e Kauffman [19]).

A função distribuição acumulada será encontrada como um caso particular de (3.2.1.7)

$$H(y) = \frac{n^n}{n!} \sum_{r=0}^{k} \left\{ (-1)^r \binom{n}{r} (y - \frac{r}{n})^n \right\} , \quad 0 \leq y \leq n$$

$$K = 0,1,2,...,n$$

3.2.2 - Finalmente quando $X_1,X_2,...,X_n$, são $U(0,\beta_i)$ e

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

então

$$0 \leq y \leq \sum_{i=1}^{n} C_i \beta_i$$

e

$$h(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i\beta_i\right]}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n} \left\{ (-1)^r \sum_{A(n-r,r)} (y-\sum_{i=1}^{n} t_i)^{n-1} I_B(y) \right\} ;$$

onde

$$t_i = 0 \quad \text{ou} \quad t_i = C_i\beta_i$$

esse mesmo resultado foi apresentado por Gray e Odell [11]

A função distribuição acumulada será dada por:

$$H(y) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} C_i\beta_i\right]^{-1}}{n!} \sum_{r=0}^{n} \left\{ (-1)^r \sum_{A(n-r,r)} (y-\sum_{i=1}^{n} t_i)^{n} I_B(y) \right\}$$

3.3 - APLICAÇÃO:

ESCOAMENTO DE TRÁFEGO

Allan [1] aplicou a distribuição Retangular ou Uniforme, para construir um modelo de distribuição de tráfego ao longo de uma estrada reta. Para tanto, a estrada foi dividida em intervalos de amplitude a, e era uma suposição que, em cada intervalo , havia uma probabilidade p de conter um veículo e q de não o con ter. Para os objetivos do modelo, foi suposto que em cada intervalo poder-se-ia ter um só carro e, desprezado o tamanho do veículo, este foi considerado como um ponto no intervalo.

Dado que, um veículo está no intervalo, a sua posição será considerada uma variável aleatória uniformemente distribuida, sobre o intervalo de amplitude a. Estamos, pois, interessados na distribuição da distância entre dois veículos consecutivos A e B. Para tanto, definamos:

Y: variável aleatória, número de intervalos vazios entre A e B.

Assim, Y tem distribuição geométrica, ou seja:

$$P[Y = y] = q^y p \quad ; \quad y = 0,1,2,\ldots$$

X_1: variável aleatória, posição do veículo A no intervalo.

X_2: Variável aleatória, posição do veículo B no intervalo.

Então X_1 e X_2 são independentes com distribuição dada pela densidade:

$$f(x) = \frac{1}{a} \quad , \quad 0 < x < a$$

Temos então, que a variável distância entre os veículos será dada por:

$$D = aY + X_1 + X_2$$

Precisamos então encontrar a distribuição de $S = X_1 + X_2$, Usando a densidade apresentada em (3.2.1.2), onde $\alpha = 0$ e $\beta = a$, temos:

$$h(s) = \frac{1}{a^2} \sum_{m=0}^{k} \left\{ (-1)^m \binom{r}{m} (s - m\,a) \right\} \; ; \; k\,a < s < (k+1)a$$

$$k = 0,1,2$$

ou seja,

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{s}{a^2} & 0 \leq s < a \\ \dfrac{(2a-s)}{a^2} & a \leq s < 2a \\ 0 & s \geq 2a \end{cases}$$

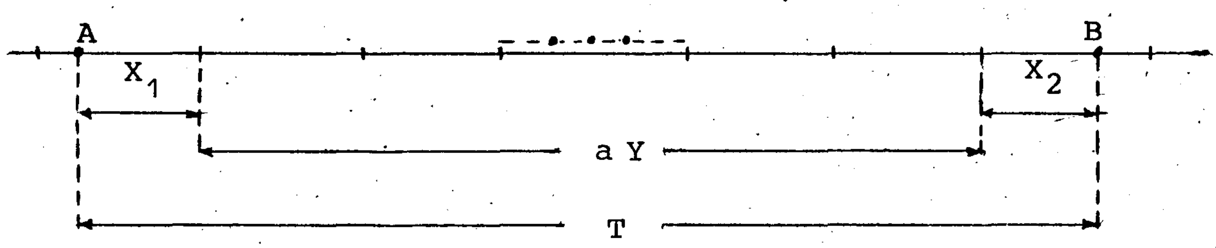
ou ainda,

$$h(s) = a^{-2}\Big[a - |s-a|\Big] \; ; \; 0 \leq s \leq 2a$$

Para encontrarmos a distribuição de D basta agora encontrar a distribuição de

$$T = aY + S$$

A representação do problema aqui exposto é dada no gráfico abaixo



Outras aplicações sobre combinações lineares de variáveis aleatórias independentes com distribuições uniformes, são apresentados nos trabalhos de Hall [12], Roach [20] e Olds [18].

xxxxxxx

CAPÍTULO 4

COMBINAÇÃO LINEAR DE VARIAVEIS ALEATÓRIAS QUI-QUADRADO

Apresentamos aqui, a distribuição exata de combinação linear de variaveis aleatórias independentes com distribuição Qui-Quadrado. Essa distribuição, será apresentada em duas versões, ou seja, quando os graus de liberdade das variáveis que compoẽm a combinação, são simplesmente números inteiros positivos e quando são números pares positivos. As duas versões, aparecem em forma de teoremas. Daremos também, no fim do capítulo o resultado para um caso particular dessa combinação linear.

TEOREMA 4.1 - Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variáveis aleatórias independentes, com funções densidades dadas por:

$$(4.1.1) \qquad f_i(x_i) = \frac{x_i^{\frac{m_i}{2}-1} e^{\frac{-x_i}{2}}}{2^{\frac{m_i}{2}} \Gamma\left(\frac{m_i}{2}\right)}, \quad m_i = \text{inteiro positivo} \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n$$

ou seja, cada X_i, tem distribuição Qui-Quadrado, com m_i graus de liberdade. Então a função densidade, $h(y)$; e a função distribuição, $H(y)$, da v.a.

$$(4.1.2) \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

onde

$$C_i \ , \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

são constantes não negativas, são dadas por:

$$(4.1.3) \qquad h(y) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)} \, y^{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right) - 1}$$

$$\times \ \phi_2\left(\frac{m_1}{2},\ldots,\frac{m_n}{2} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \ ; \ -\frac{y}{2C_1},\ldots,-\frac{y}{2C_n}\right); \ y \geq 0$$

onde:

$$\phi_2\left(\frac{m_1}{2},\ldots,\frac{m_n}{2} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \ ; \ -\frac{y}{2C_1},\ldots,-\frac{y}{2C_n}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{r_i=0 \\ \forall_i=1,\ldots,n}}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{m_1}{2}\right)_{r_1} \cdots \left(\frac{m_n}{2}\right)_{r_n}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)_{\sum_{i=1}^{n} r_i} \prod_{i=1}^{n} r_i!} \, y^{\sum_{i=1}^{n} r_i} \prod_{i=1}^{n} (-2C_i)^{-r_i} \right\}$$

a definição geral da função ϕ_2 e dada em (0.14) do capítulo 0 .

E,

$$H(y) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)} \sum_{\substack{r_i=0 \\ \forall_i=1,2,\ldots,n}}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i}{2}\right)_{r_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)_{\sum_{i=1}^{n} r_i} \prod_{i=1}^{n} r_i!} \tag{4.1.4}$$

$$\times \frac{\prod_{i=1}^{n} (-2C_i)^{-r_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)} \, y^{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)}$$

onde $\sum_{\substack{r_i=0 \\ \forall_i=1,2,\ldots,n}}^{\infty}$ é uma soma n-úpla.

DEMONSTRAÇÃO:

Usaremos também para essa demonstração, a técnica da transformada de Laplace e sua Inversa.

A função geratriz de momentos de X_i, onde X_i é $\chi^2(m_i)$ é dada por:

$$M_{X_i}(z) = (1-2z)^{-\frac{m_i}{2}}, \quad z < \frac{1}{2} \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n \tag{4.1.5}$$

A função geratriz de momentos de

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \quad \text{é}$$

$$(4.1.6) \qquad M_Y(z) = \prod_{i=1}^{n} (1-2C_i z)^{-\frac{m_i}{2}}$$

Então, temos que, a transformada de Laplace da densidade de Y será:

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} (1+2C_i z)^{-\frac{m_i}{2}}$$

$$(4.1.7) \qquad = \prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}} z^{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{m_i}{2})}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (1+ \frac{1}{2C_i z})^{-\frac{m_i}{2}}$$

Podemos escrever g(z) como

$$g(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}}}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2})} \times \Gamma(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}) z^{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{m_i}{2})} \prod_{i=1}^{n} (1+ \frac{1}{2C_i z})^{-\frac{m_i}{2}}$$

então, a função densidade de Y, é dada pela transformada Inversa de Laplace, a qual se encontra tabelada para esse tipo de função g(z). (Erdelyi [7] pg. 238 nº 9) [ver também (0.15) capítulo 0].

Portanto:

$$(4.1.8) \qquad h(y) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)} \; y^{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right) - 1}$$

$$\times \; \phi_2\left(\frac{m_1}{2}, \ldots, \frac{m_n}{2} \; ; \; \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \; ; \; \frac{-y}{2C_1}, \ldots, \frac{-y}{2C_n}\right)$$

onde a função ϕ_2 é dada por 0.14) no capítulo 0.

A função distribuição de Y é:

$$H(y) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)} \sum_{\substack{r_i=0 \\ \forall_i=1,2,\ldots,n}}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i}{2}\right)_{r_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right)_{\sum_{i=1}^{n} r_i} \prod_{i=1}^{n} r_i!}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (-2C_i)^{-r_i} \int_0^y y^{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\right) - 1} \, dy$$

$$(4.1.9) \qquad H(y) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-\frac{m_i}{2}}}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2})} \sum_{\substack{r_i=0 \\ \forall_i=1,\ldots,n}}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (\frac{m_i}{2})}{(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2})_{\sum_{i=1}^{n} r_i} \prod_{i=1}^{n} r_i!}$$

$$\times \frac{\prod_{i=1}^{n} (-2C_i)^{-r_i} \, y^{\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}}}{(\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2})}$$

Tendo em vista que, o resultado apresentado em (4.1.8) para a densidade de Y, está em função de ϕ_2, para a qual não temos muitos resultados, dificultando assim o seu manuseio, apresentaremos um outro resultado para h(y), com a restrição de que, os graus de liberdade das variáveis aleatórias da combinação linear, sejam números pares positivos. Esse resultado apresentar-se-á, de forma que, o trabalho em termos computacionais será facilitado.

TEOREMA 4.2 - Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variáveis aleatórias independentes, com densidades Qui-Quadrado com $2m_i$ graus de liberdade (m_i inteiro positivo $\forall i = 1,2,\ldots,n$). Então a densidade, h(y), e a função distribuição acumulada, H(y), da v.a

$$(4.2.1) \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

onde C_i, $\forall_i = 1,2,\ldots,n$ são constantes não negativas, são dadas por:

CASO 1: Quando

$$C_1 \neq C_2 \neq \ldots \neq C_n \quad ,$$

então:

$$(4.2.2) \qquad h(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i}}{(m_i-1)!} \quad e^{-\frac{y}{2C_i}} \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{m_i-1} \binom{m_i-1}{k} y^{m_i-1-k} \quad A_i^{(k)} \right]; \ y \geq 0$$

onde

$$A = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{1}{2C_j} + z\right)^{-m_j}$$

$$A^{(k)} = \frac{d^kA}{dz^k} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,m_i-1$$

$$A^{(0)} = A$$

$$A_i^{(k)} = \lim_{z \to -\frac{1}{C_i}} A^{(k)}$$

ou ainda:

$$(4.2.3) \qquad A_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \Big[\binom{k-1}{r} A_i^{(k-1-r)} (-1)^{r+1}\, r! \times \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{1}{2C_j} - \frac{1}{2C_i}\right)^{-(r+1)} \Big]$$

e,

$$(4.2.4) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i}}{(m_i-1)!} \sum_{k=0}^{m_i-1} \Big[\binom{m_i-1}{k} A_i^{(k)} \times (m_i-1-k)! \Big[(2C_i)^{m_i-k} - e^{-\frac{y}{2C_i}} \sum_{s=0}^{m_i-1} \frac{(2C_i)^{s+1}\, y^{m_i-1-k-s}}{(m_i-1-k-s)!} \Big]\Big] \right\}$$

CASO 2: Quando temos:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = \ldots = C_{r_1} = \beta_1 \\ C_{r_1+1} &= \ldots\, C_{r_2} = \beta_2 \\ &\vdots \\ C_{r_{m-1}+1} &= \ldots = C_{r_m} = \beta_m\,, \quad \text{onde } r_m = n \end{aligned}$$

então a densidade, h(y), e a distribuição, H(y), de Y dado por (4.2.1), obtidas por:

$$h(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\prod_{i=1}^{m} (2\beta_i)^{-p_i}}{(p_i-1)!} e^{-\frac{y}{2\beta_i}} \tag{4.2.5}$$

$$\times \sum_{k=0}^{p_i-1} \binom{p_i-1}{k} y^{p_i-1-k} A_i^{(k)} \; ; \; y > 0$$

onde:

$$A = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left[\frac{1}{2\beta_j} + z\right]^{-p_j}$$

$$A^{(k)} = \frac{d^k A}{dz^k} \quad , \quad A^{(0)} = A$$

$$A_i^{(k)} = \lim_{z \to -\frac{1}{2\beta_i}} A^{(k)} \quad , \quad A_i^{(0)} = A_i$$

$$p_i = m_{r_{i-1}+1} + m_{r_{i-1}+2} + \ldots + m_{r_i}$$

ou ainda

$$(4.2.6) \qquad A_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1}\left[\binom{k-1}{r} A_i^{(k-1-r)} (-1)^r\, r!\right.$$

$$\times \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} C_j \left(\frac{1}{2\beta_i} - \frac{1}{2\beta_j}\right)^{-(r+1)}, \quad k=1,2,\ldots,p_i-1$$

e

$$(4.2.7) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{m} (2\beta_i)^{-p_i}}{(p_i-1)!} \sum_{k=0}^{p_i-1}\left[\binom{p_i-1}{k} A_i^k\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, (p_i-1-k)!\left[(2\beta_i)^{p_i-k} - e^{-\frac{y}{2\beta_i}} \sum_{s=0}^{p_i-1-k} \frac{(2\beta_i)^{s+1}\, y^{p_i-1-k-s}}{(p_i- \,-k-s)!}\right]\right]\right\}$$

DEMONSTRAÇÃO:

CASO 1:

Temos que X_i, $\forall_i = 1,2,\ldots,n$, tem distribuição Qui-Quadrado com $2m_i$ graus de liberdade.

A função geratriz de momentos de X_i será dada por:

$$(4.2.8) \qquad M_{X_i}(z) = (1-2z)^{-m_i}, \quad z < \frac{1}{2}$$

A função geratriz de momentos de $Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ é:

(4.2.9) $$M_Y(z) = \prod_{i=1}^{n} (1-2C_i z)^{-m_i}, \quad z < \frac{1}{2C_i}$$

A transformada de Laplace da função densidade de Y será:

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} (1+2C_i z)^{-m_i}$$

(4.2.10) $$= \prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i} \left(\frac{1}{2C_i} + z\right)^{-m_i}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em (4.10) temos:

(4.2.11) $$h(y) = \frac{1}{2\pi_i} \int_L e^{zY} \prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i} \left(\frac{1}{2C_i} + z\right)^{-m_i} dz$$

onde L é um contorno que incluí os polos de (4.2.10).

Para usar o teorema do Resíduo na resolução da integral de (4.2.10), consideramos o seguinte:

os pólos de (4.2.10) são:

$$z_i = -\frac{1}{2C_i}\ , \text{ polos de ordem } m_i \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n\ ;$$

temos n polos. O resíduo correspondente ao pôlo $z_i = -\frac{1}{2C_i}$ será:

$$K_i = \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{z\to-\frac{1}{2C_i}} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}$$

$$\times\left[(z+\frac{1}{2C_i})^{m_i} e^{zy} \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i}}{\prod_{j=1}^{n} (\frac{1}{2C_j}+z)^{m_j}}\right]$$

(4.2.12)
$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i}}{(m_i-1)!} \lim_{z\to-\frac{1}{2C_i}} \frac{\delta^{m_i-1}}{\delta z^{m_i-1}}$$

$$\times\left[e^{zy} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\frac{1}{2C_j}+z)^{-m_j}\right] .$$

Desenvolvendo a derivada apresentada em (4.2.11), temos, utilizando-se o resultado (0.3) do capítulo 0

$$\frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}\left[e^{zy} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\frac{1}{2C_j}+z)^{-m_j}\right] =$$

$$= e^{zy} \sum_{k=0}^{m_i-1} \left[\binom{m_i-1}{k} y^{m_i-1-k} \frac{d^k}{dz^k} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{1}{2C_j} + z\right)^{-m_j} \right] .$$

Fazendo:

$$A = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{1}{2C_j} + z\right)^{-m_j}$$

$$A^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} A$$

$$= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[A \frac{d}{dz} \log A \right]$$

$$= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[A \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(-m_j)}{(\frac{1}{2C_j} + z)} \right]$$

obtemos:

$$A^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \left[\binom{k-1}{r} A^{(k-1-r)} (-1)^{r+1} r! \right.$$

$$\left. \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{(\frac{1}{2C_j} + z)^{r+1}} \right]$$

ou seja,

$$(4.2.13)\qquad \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}\left[A\, e^{zy}\right] = e^{zy}\sum_{k=0}^{m_i-1}\left\{\binom{m_i-1}{k} y^{(m_i-1-k)}\right.$$

$$\times \sum_{r=0}^{k-1}\left[(-1)^{r+1} r!\binom{k-1}{r} A^{(k-1-r)}\right]$$

$$\left.\times \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{\left(\frac{1}{2C_j}+z\right)^{(r+1)}}\right\}$$

Substituindo (4.2.13) em (4.2.12), temos:

$$(4.2.14)\qquad K_i = \frac{\prod_{i=1}^{n}(2C_i)^{-m_i}}{(m_i-1)!}\, e^{-\frac{y}{2C_i}}$$

$$\times \sum_{k=0}^{m_i-1}\left[\binom{m_i-1}{k} y^{(m_i-1-k)} A_i^{(k)}\right]$$

onde:

$$A_i^{(k)} = \lim_{z\to -\frac{1}{2C_i}} A^{(k)}$$

Como a resolução da integral apresentada em (4.2.11) será dada pelo teorema do resíduo, ou seja, a solução é obtida por:

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} K_j \quad ,$$

temos que (4.2.11) ficará:

$$(4.2.15) \qquad h(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i}}{(m_i-1)!} \, e^{-\frac{y}{2C_i}} \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{m_i-1} \binom{m_i-1}{k} y^{m_i-1-k} A_i^{(k)} \right]$$

onde $A_i^{(0)} = A_i$.

Para provarmos (4.2.4), basta integrarmos (4.2.14) de 0 a y e obtemos:

$$(4.2.16) \qquad H(y) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{n} (2C_i)^{-m_i}}{(m_i-1)!} \times \sum_{k=0}^{m_i-1} \left[\binom{m_i-1}{k} A_i^{(k)} \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (m_i-1-k)! \left[(2C_i)^{m_i-k} - e^{-\frac{y}{2C_i}} \sum_{s=0}^{m_i-1-k} \frac{(2C_i)^{s+1} y^{m_i-1-k-s}}{(m_i-1-k-s)!} \right] \right] \right\}$$

para resolvermos a integral mencionada, utilizamos um resultado apresentado em (0.16) capítulo 0.

CASO 2:

Neste caso, a transformada de Laplace da densidade de Y, fica:

$$(4.2.17) \qquad g(z) = \prod_{i=1}^{m} \left\{ (2\beta_i)^{-C_i} \left(\frac{1}{2\beta_i} + z\right)^{-p_i} \right\}$$

A demonstração deste caso é análoga a do caso 1 por esse motivo será omitida.

4.3 - CASO PARTICULAR

Analisamos o caso quando temos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.as. Qui-Quadrado, com m_i ($m_i = 2n_i$, n_i inteiro positivo), graus de liberdade, a densidade e a função distribuição acumulada de $Y = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$, onde $C_i = \beta \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n$, é um caso particular da 2ª parte do teorema 4.2 onde:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \dots = \beta_m = \beta$$

$$m = 1$$

$$p_i = p = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

substituindo esses valores em (4.2.5) encontraremos a densidade de Y, ou seja:

$$h(y) = \frac{(2\beta)^{-p}}{(p-1)!} e^{-\frac{y}{2\beta}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} y^{p-1-k} A_1^{(k)}$$

onde temos:

$$A = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{1} \left[\frac{1}{2\beta} + z \right]^{-p} = 1$$, por ser um produto vazio, de acordo com (0.21) capítulo zéro,

então:

$$A_1^{(0)} = 1 \quad e \quad A_1^{(k)} = 0 \qquad \forall k = 1,2,\dots,p-1$$

portanto,

$$h(y) = \frac{(2\beta)^{-p}}{(p-1)!} e^{-\frac{y}{2\beta}} y^{p-1} \quad , \quad y > 0$$

ou ainda,

$$(4.3.1) \qquad h(y) = \frac{e^{-\frac{y}{2\beta}}\, y^{p-1}}{(2\beta)^{p}\, \Gamma(p)}$$

então a v.a. Y tem distribuição Gama. Êsse resultado é dado por Johnson e Kotz [13] pg. 166, Vol. I .

A distribuição acumulada de Y é dada por:

$$(4.3.2) \qquad H(y) = \frac{(2\beta)^{-p}}{(p-1)!}\, (p-1)! \left[(2\beta)^{p} - e^{-\frac{y}{2\beta}} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{(2\ )^{s+1}\, y^{p-1-s}}{(p-1-s)!} \right]$$

$$= 1 - e^{-\frac{y}{2\beta}} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{(2\beta)^{s+1}}{(p-1-s)!}\, y^{p-1-s}$$

Algumas aplicações para a distribuição de combinação linear de variáveis aleatória Qui-Quadrado são apresentadas nos trabalhos de Good (1955) [9] e (1953) [10].

xx x xx

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLAN, R.R. (1966) - Extension of the binomial, model of traffic flow to the continuous case. *Proceedings of the Third Conference of the Australian Road Research Board 3, pg 276-316*.

[2] BASU, A.P. (1964) - Estimate of reliability for some distributions useful in life Testing - *Technometrics, vol. 6*.

[3] CHAIM, S.H. (1967) - Introdução as funções de uma variável complexa - *IMPA*.

[4] CHURCHILL, R.V. (1975) - Variáveis Complexas e suas aplicações - *McGraw-Hill*.

[5] DEMARET, J.C. - GARCET, A. (1977) - Sum of Exponential random variables - *Eletronics and Commnication, 31 pg. 445-448*.

[6] EPSTEIN, B. - SOBEL, M. (1953) - Life Testing - *Journal of American Statistical Association, vol.48 pg. 487-501*.

[7] ERDÉLYI, A. - MAGNUS, W. - OBERHETTINGER, F. - TRICOMI, G.F. (1954) - Tables of Integral Transforms *MacGraw-Hill - Vol. I*.

[8] ERDÉLYI, A. - MAGNUS, W. - OBERHETTINGER, F. - TRICOMI, G.F. (1953) - Higher Transcendental Functions, *McGraw-Hill* - *Vol. I.*

[9] GOOD. I.J. (1955) - On the weighted combination of significance Tests - *Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 17 Série B, pg. 264-265.*

[10] GOOD, I.J. (1953) - The serial test for random sampling number and others tests for randomness - *Proc. Camb. Phil. Soc., 49, pg. 276-284.*

[11] GRAY, H.L. - ODELL P.L. (1966) - On sums and products of Rectangular variates - *Biometrika Vol. 56 pg. 615-617.*

[12] HALL P. (1927) - The distributions of means for samples of size N drawn from a population in wich the variate takes values between 0 and 1, all such values being equally probable - *Biometrika 19 pg. 240-244.*

[13] JOHNSON, N.L. - KOTZ, S. (1970) - Distributions in Statistics - Continuons Univariate Distributions - *Houghton Mifflin - Vol. I, II.*

[14] KONRAD, K. (1945) - Theory of Functions - *Dover Publications.*

[15] LEVINSON, N-REDHEFFER, R.M. (1970) - Complex Variables *Holden-Day, Inc.*

[16] LUKE Y. L. (1969) - The Special Functions and their Aproximations, *Academic Press, Vol. II.*

[17] MATHAI, A.M. - ALEYAMMA, G. (1975) - A Generalized Distribution for Inter-Live Birth-Interval - *The Indian Journal of Statistics, Vol. 37, serie B pg. 332-342.*

[18] OLDS, E.G. (1952) - A note on the convolution of Uniform distributions - *Annals of Mathematical Statistics, 23 pg. 282-285.*

[19] RATHIE, P.N. - KAUFMAN, H. (1978) - Distributions of Linear combinations of continuous random variables - *A ser Publicado.*

[20] ROACH, S.A. (1963) - The frequency distribution of the sample mean where each member of the sample is drawn from a different Rectangular distribution - *Biometrika, Vol. 50, pg. 508-513.*

[21] SELBY, M.S. (1970) - Standard Mathematical Tables - *The Chemical Rubber Co.*

[22] SMITH, M.G. (1966) - Laplace Transform Theory - *Students Paperback Edition* - *D.Van Nostrand Company Ltd.*