TIPOS DE SILVA-HOLOMORFIA, TRANSFORMADAS DE BOREL E OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Mauro Bianchini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Mário Carvalho de Matos.

Maio de 1978

Para

Norma, Frederico, Rodolfo e Mariana.

Agradeço

ao Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos pela orientação

paciente e segura

aos meus colegas pelos incentivos.

INTRODUÇÃO

O conceito de tipo de holomorfia θ entre dois espaços de Banach complexos E e F e a topologia localmente convexa natural $\tau_{\omega\theta}$ no espaço $\mathcal{H}_{\theta}(U,F)$ de aplicações holomorfas de tipo θ de um aberto $U \subset E$ em F foram introduzidos e estudados inicialmente por Leopoldo Nachbin em "Topology on Spaces of Holomorphic Mapping" [7]. Trabalhos recentes de Gupta [2] e Nachbin & Gupta [3] têm mostrado interesse no estudo de funções de tipo de holomorfia em questões relativas a Convolução, Operadores Diferenciais Parciais, Transformadas de Fourier, Transformadas de Borel e Distribuições em dimensão infinita.

Motivado por tais trabalhos Dineen [4] descreveu e estudou vários espaços vetoriais topológicos de funções holomórficas. Introduziu os particulares α-tipo, α-β-tipo e α-β-γ-tipo de holomorfia θ com a finalidade de obter propriedades em um espaço $H_{S\theta}(E)$ de funções em E.

Matos & Nachbin [6] tratando de funções Silva-holomorfas entre espaços localmente convexos complexos definiram tipo de Silva-holomorfia θ e obtiveram resultados a respeito de Transformadas de Borel e Teoremas de Malgrange para Operadores de convolução.

O objetivo deste trabalho é obter resultados análogos aos obtidos por Dineen em [4] usando resultados em [6] para funções Silva-holomorfas em um espaço localmente convexo complexo E.

No capítulo I são estabelecidos os preliminares, introduzindo-se as notações e recordando os conceitos de tipo de Silva-holomorfia θ em E e funções definidas em E com tipo de Silva-holorfia θ em um ponto ξ de E.

No capítulo II é introduzido um novo tipo de Silva-holomorfia θ que é chamado de α-tipo. O espaço $H_{S\theta}(E)$ e a topologia $T_{S\theta}$ são definidos, a familia de seminormas que define tal topologia é caracterizada e mostrado que o espaço $(H_{S\theta}(E),T_{S\theta})$ é completo.

No capítulo III é estudada a topologia bornológica associada à topologia $T_{S\theta}$. É feito ainda o estudo de como se comparam os espaços $(H_{S\theta}(E),T_{S\theta})$ e $(\mathcal{H}_{S\theta}(E), \mathcal{T}_{\omega\theta})$, no caso geral e no caso particular do tipo corrente.

No capítulo IV é definido α-β-tipo de Silva-holomorfia θ e caracterizado o espaço dual do espaço $(H_{S\theta}(E),T_{S\theta})$ com o uso da Transformada de Borel.

No capítulo V trata-se de Operadores Diferenciais Parciais no espaço de Séries de Potências Formais. Mostra-se que o espaço de tais operadores na realidade é um espaço de polinômios homogêneos de tipo limitado em E^*. Mostra-se ainda que as soluções para tais operadores podem ser aproximadas por soluções especiais.

RESUMO

Seja E um espaço localmente convexo complexo. Em um subespaço $H_{S\theta}(E)$ do espaço das funções em E que são Silva-holomorfas e de tipo de Silva-holomorfia θ em E foram obtidos alguns resultados relativos a Transformadas de Borel e Operadores Diferenciais Parciais, quando se considera condições mais restritivas no conceito de tipo de Silva-holomorfia.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

No que se segue, $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos, $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e E um espaco localmente convexo complexo separado. Usando a terminologia e as notações introduzidas em [6] e [9], $\mathcal{B}_E$ denota a coleção de todos os subconjuntos de E que são limitados, fechados, convexos e equilibrados. Para cada $B \in \mathcal{B}_E$, E_B denota o subespaço de E gerado por B e normado pelo funcional de Minkowski determinado por B. Assim, se $x \in E_B$, $\|x\|_B = \inf\{\rho > 0;\ x \in \rho B\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_b({}^mE)$ indica o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos de E em $\mathbb{C}$ que são limitados sobre os subconjuntos limitados de E. Em $\mathcal{P}_b({}^mE)$ consideramos a topologia localmente convexa definida pelas seminormas:

$$\|P\|_B = \sup\{|P(x)|;\ x \in B\}, \text{ para cada } B \in \mathcal{B}_E .$$

$\mathcal{P}_b(E)$ indica a soma direta dos espaços $\mathcal{P}_b({}^mE)$ com $m \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}_S(E)$ indica o espaço vetorial de todas as aplicações de E em $\mathbb{C}$ que são Silva-holomorfas em todos os pontos de E. Para cada $f \in \mathcal{H}_S(E)$, e $\xi \in E$, a série de Taylor de f ao redor de ξ é

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\xi)(x-\xi) ,$$

para todo $x \in E$ e o correspondente diferencial de ordem $m \in \mathbb{N}$ é $\hat{\delta}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_b({}^m E)$. Usaremos também, como em [1] e [8], as notações: $\mathcal{P}({}^m E)$ com $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(E)$ e $\mathcal{H}(E)$ para os espaços vetoriais, respectivamente, dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em $\mathbb{C}$, dos polinômios continuous de E em $\mathbb{C}$ e das funções holomorfas de E em $\mathbb{C}$. E' denota o espaço dos funcionais lineares contínuos de E em $\mathbb{C}$ e $E^* = \mathcal{P}_b({}^1 E)$. Estaremos chamando de compacto estrito aos subconjuntos K de E tais que existe $B \in \mathcal{B}_E$ e K é compacto em E_B. Denotaremos por $\hat{\mathcal{K}}_e(E)$ o conjunto de todos os compactos estritos de E que são convexos e equilibrados e por C_o^+ o conjunto de todas as sequências de números reais que convergem para zero no infinito.

(1.01) <u>Definição</u> : Um tipo de S-holomorfia θ de E em $\mathbb{C}$ é, ver [6], uma sequência de espaços localmente convexos complexos $\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E)$ $m \in \mathbb{N}$, a topologia de cada $\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E)$ definida por uma família de seminormas $P \longrightarrow \|P\|_{\theta,B}$, com $B \in \mathcal{B}_E$, denotada por $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$. Esta sequência deve satisfazer as condições seguintes:

1) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E) \subset \mathcal{P}_b({}^m E)$ como espaço vetorial.

2) $\mathcal{P}_{b\theta}({}^o E) = \mathcal{P}_b({}^o E) = \mathbb{C}$ como espaço vetorial topológico.

3) Existe $\sigma_\theta \geqslant 1$, tal que para cada $B \in \mathcal{B}_E$, $P \in \mathcal{P}_{b\theta}({}^m E)$,

$x \in E_B$, $n \in \mathbb{N}$ com $n \leqslant m$ temos $\hat{\delta}^n P(x) \in \mathcal{P}_{b\theta}(^nE)$ e

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n P(x) \right\|_{\theta,B} \leqslant \sigma_\theta^m \|P\|_{\theta,B} \|x\|_B^{m-n}$$

4) Se $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$, B e $D \in \mathcal{B}_E$ com $B \subset D$, então $\|P\|_{\theta,B} \leqslant$ $\leqslant \|P\|_{\theta,D}$.

(1.02) Exemplos : Podemos verificar, a partir das definições dadas em [6] que as seguintes sequências de espaços constituem exemplos de tipos de S-holomorfia.

a) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE) = \mathcal{P}_b(^mE)$. Este tipo é chamado tipo corrente.

b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE) = \mathcal{P}_{bc}(^mE)$. Este tipo é chamado tipo compacto.

c) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE) = \mathcal{P}_{bN}(^mE)$. Este tipo é chamado tipo nuclear.

(1.03) Proposição : A aplicação inclusão $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}_b(^mE)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, é contínua e $\|P\|_B \leqslant \sigma_\theta^m \|P\|_{\theta,B}$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$ e $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$.

Demonstração : (ver [6]).

(1.04) Definição : Uma função $f \in \mathcal{H}_S(E)$ diz-se de tipo de S-holomorfia θ em $x \in E$ se :

1) $\hat{\delta}^m f(x) \in \mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

2) Para cada $B \in \mathcal{B}_E$ existem constantes $c_1 \geqslant 0$ e $c_2 \geqslant 0$ tais que

$$\left\| \frac{1}{m} \hat{\delta}^m f(x) \right\|_{\theta, B} \leqslant c_1 c_2^m \quad , \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Uma função f diz-se de tipo de S-holomorfia θ em E se f é de tipo de S-holomorfia θ em todo ponto $x \in E$. $\mathcal{H}_{S\theta}(E)$ denota o conjunto de todas tais funções.

(1.05) Definição : Sejam $K \subset E$ um compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B. Uma seminorma p em $\mathcal{H}_{S\theta}(E)$ diz-se portada por K e B se para todo $\mathcal{E} > 0$ existe $c(\mathcal{E}) > 0$ tal que

$$p(f) \leqslant c(\mathcal{E}) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}^m \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(x) \right\|_{\theta, B} \quad \text{para toda}$$

$f \in \mathcal{H}_{S\theta}(E)$. $\mathcal{T}_{\omega\theta}$ denota a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}_\theta(E)$ gerada por tais seminormas. Quando θ é o tipo corrente de S-holomorfia denotamos $\mathcal{T}_{\omega\theta}$ por $\mathcal{T}_{\omega_S}$. (ver [6]).

CAPÍTULO II

α-TIPO DE S-HOLOMORFIA E O ESPAÇO $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$

Nêste capítulo é introduzido um novo tipo de S-holomorfia θ que é chamado de α-tipo. O espaço $H_{S\theta}(E)$ e a topologia $T_{S\theta}$ são definidas e estudadas suas propriedades. Caracteriza-se a familia de seminormas que define a topologia $T_{S\theta}$ e mostra-se que $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ é completo.

(2.01) Definição : Um α-tipo de S-holomorfia é um tipo de S-holomorfia que satisfaz as condições:

1) $(\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})$ e $\mathcal{G}_\theta$ só dependem da estrutura de espaço vetorial topológico de E e portanto não dependem da particular familia de seminormas que define a topologia de E.

2) Se B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}_E$ e se $c > 0$ são tais que $cB_1 \subset B_2$, então $c^m \| P \|_{\theta,B_1} \leqslant \| P \|_{\theta,B_2}$ para todo $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

(2.02) Exemplos : É fácil verificar (ver [6]) que os exemplos citados em a),b)ec) de (1.02) são exemplos de α-tipo de

S-holomorfia.

(2.02) Definição : Seja θ um α-tipo de S-holomorfia. $H_{S\theta}(E)$ é o conjunto de tôdas as funções em E que satisfazem as seguintes condições:

1) $f \in \mathcal{H}_S(E)$

2) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\hat{\delta}^m f(o) \in \mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$

3) Para todo $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e todo $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, K+\varepsilon B} < \infty .$$

A seguir damos duas outras condições equivalente à condição 3) da definição anterior.

(2.04) Proposição : Seja θ um α-tipo de S-holomorfia. Se $f \in \mathcal{H}_S(E)$, com $\hat{\delta}^m f(o) \in \mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então são equivalentes:

1) $f \in H_{S\theta}(E)$

2) Para todo $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, todo $B \in \mathcal{B}_E$ tal que K é compacto em E_B e tôda $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$ temos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{\theta, K + \alpha_m B} < \infty .$$

3) Para todo $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, todo $B \in \mathcal{B}_E$ tal que K é compacto em E_B e $(\alpha_n)_0^{\infty} \in c_0^+$ temos:

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{\theta, K + \alpha_m B}^{1/m} < 0.$$

<u>Demonstração</u> : Sejam $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_0^{\infty} \in c_0^+$. Por 1) temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K + \varepsilon B} < \infty$$

para um certo $\varepsilon > 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n \leqslant \varepsilon$ se $n \geqslant n_0$. Temos que $K + \alpha_n B \subset K + \varepsilon B$ para $n \geqslant n_0$ e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K + \alpha_n B} =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0 - 1} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K + \alpha_n B} +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K + \alpha_n B} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0 - 1} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K + \alpha_n B} +$$

$$+\sum_{n=n_o}^{\infty}\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,K+\varepsilon B}<\infty,$$

o que prova que 1) implica 2). Para provar que 2) acarreta 3), tomemos $K\in\hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B\in\mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B, $(\alpha_n)_o^{\infty}\in C_o^+$ e para $n\in\mathbb{N}$ $\beta_n=c^n$ com $c>0$. Temos que $cK\in\hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $(\beta_n^{1/n}\alpha_n)_o^{\infty}\in C_o^+$ Seja $B\in\mathcal{B}_E$ tal que cK é compacto em E_B.

Por 2)

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,cK+\beta_n^{1/n}\alpha_n B}<\infty.$$

Como θ é um α-tipo e como $(\beta_n)^{1/n}[K+\alpha_n B]=cK+\beta_n^{1/n}\alpha_n B$ temos

$$\beta_n\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,K+\alpha_n B}=\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,cK+\beta_n^{1/n}\alpha_n B}.$$ Logo

$$\sum_{n=o}^{\infty}\beta_n\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,K+\alpha_n B}<\infty$$

Então

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\beta_n\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,K+\alpha_n B}\right)^{1/n}\leq 1,$$

isto é, $$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(o)\right\|_{\theta,K+\alpha_n B}^{1/n}\leq 1/c,$$ com c arbitrário. Como K é compacto em E_B fica demonstrada a condição 3).

A demonstração de que 3) implica 1) é feita por absurdo. Suponhamos que existam $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B etais que para todo $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\epsilon B} = \infty .$$

Então $\limsup_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta,K+B}^{1/n} \geqslant 1$ e podemos esconher $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \frac{1}{n_1!} \hat{\delta}^{n_1} f(o) \right\|_{\theta,K+B}^{1/n_1} \geqslant 1/2$. Como também $\limsup_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta,K+(1/2)B}^{1/n} \geqslant 1$, escolhemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ e $\left\| \frac{1}{n_2!} \hat{\delta}^{n_2} f(o) \right\|_{\theta,K+(1/2)B}^{1/n_2} \geqslant 1/2$. Por indução tomemos $n_k > n_{k-1}$ tal que $\left\| \frac{1}{n_k!} \hat{\delta}^{n_k} f(o) \right\|_{\theta,K+(1/k)B}^{1/n_k} \leqslant 1/2$.

Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \begin{cases} 1 \text{ para } n \leqslant n_1 \\ 1/k \text{ para } n_{k-1} < n \leqslant n_k \end{cases}$

Temos que $(\alpha_n)_o^{\infty} \in c_o^+$ e $\limsup_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta,K+\alpha_n B}^{1/n} \geqslant 1/2.$

Logo a condição 3) não está satisfeita. Assim fica provado que 3) implica 1).

(2.05) <u>Definição</u> : Uma seminorma p em $H_{S\theta}(E)$ é $S\theta$-portada por $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B, se para cada $\delta > 0$, existe $c(\delta) > 0$ tal que

$$p(f) \leqslant c(\delta) \sum_{n=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\delta B} , \quad f \in H_{S\theta}(E) .$$

(2.06) <u>Definição</u> : A topologia $T_{S\theta}$ em $H_{S\theta}(E)$ é aquela gerada por todas as seminormas $S\theta$-portadas por algum elemento de $\widehat{\mathcal{K}}_e(E)$ e outro de $\mathcal{B}_E$.

Se θ é o tipo de S-holomorfia corrente, denotamos por $H_S(E)$ e por $\mathcal{T}_{\omega se}$, respectivamente o espaço $H_{S\theta}(E)$ e a topologia $T_{S\theta}$. Esta topologia foi introduzida em [9].

(2.07) <u>Proposição</u> : Se $f \in H_{S\theta}(E)$, então a série de Taylor de f no ponto 0 converge para f em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$.

<u>Demonstração</u> : Seja p uma seminorma $S\theta$-portada por $K \in \widehat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B \in \mathcal{B}_E$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p\left(f - \sum_{n=0}^{j} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0) \right) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=j+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0) \right\|_{\theta, K+\varepsilon B}.$$

Como $f \in H_{S\theta}(E)$, o segundo membro da desigualdade tende a zero com j tendendo a zero, portanto também o primeiro membro, o que demonstra a proposição.

A proposição seguinte caracteriza a topologia $T_{S\theta}$.

(2.08) <u>Proposição</u> : A topologia $T_{S\theta}$ em $H_{S\theta}(E)$ é gerada por tôdas as seminormas da forma :

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_n B}$$

onde $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$.

Demonstração : Pela proposição (2.04) para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$ temos

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K + \alpha_n B} < \infty, \text{ qualquer } f \in H_{S\theta}(E).$$

Que p assim definida é uma seminorma é fácil verificar; provaremos que esta é contínua em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_o$. Para $n = 0,1,\ldots,n_o-1$, seja $\rho \geq 1$ tal que $\alpha_n \rho^{-1} \leq \varepsilon$ e tomemos $\delta = \rho^{-1}$. Temos $\delta(K + \alpha_n B) = \delta K + \alpha_n \rho^{-1} B \subset K + \varepsilon B$. Logo para $n = 0,1,\ldots,n_o-1$ temos $K + \alpha_n B \subset \delta^{-1}(K + \varepsilon B)$ e

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_n B} \leq \delta^{-n} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\varepsilon B}.$$

Tomando $c(\varepsilon) = \sup\{\delta^{-i};\ i = 0,1,\ldots,n_o-1\}$, temos

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_n B} \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\varepsilon B}$$

Logo p é $S\theta$-portada por K e B.

Para terminar a demonstração mostraremos que tôda seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E); T_{S\theta})$ é majorada por uma seminorma do tipo —

dado no enunciado. Seja p_1 uma seminorma em $H_{S\theta}(E)$, que é $S\theta$-portada por K e B e para um $\varepsilon > 0$ seja $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p_1(f) \leqslant c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K+\varepsilon B}$$

qualquer $f \in H_{S\theta}(E)$. Se $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$, então temos $p_1(P_m) \leqslant c(\varepsilon) \|P_m\|_{\theta, K+\varepsilon B}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $\varepsilon > 0$, seja $k_m(\varepsilon)$ o menos inteiro positivo tal que

$p_1(P_m) \leqslant k_m(\varepsilon) \|P_m\|_{\theta, K+\varepsilon B}$, para todo $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$.

Como a sequência $(k_m(\varepsilon))_0^{\infty}$ é limitada, temos que

$\limsup_{n \to \infty} k_m(\varepsilon)^{1/n} \leqslant 1$. Seja n_1 inteiro positivo tal que $k_n(1)^{1/n} \leqslant 2$ para todo $n \geqslant n_1$. Por indução escolhemos n_s tal que $n_s > n_{s-1}$ e $k_n(1/s)^{1/n} \leqslant 2$ para todo $n \geqslant n_s$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad n < n_2 \\ \text{e} & \\ 1/s & \text{para} \quad n_s \leqslant n < n_{s+1} \end{cases}$$

Então $(\alpha_n)_0^{\infty} \in C_0^+$ e $k_n(\alpha_n)^{1/n} \leqslant 2$ para $n \geqslant n_1$. Assim $k_n(\alpha_n) \leqslant 2^n$ para $n \geqslant n_1$. Logo existe $c > 0$ tal que

$k_n(\alpha_n) < c2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então

$$p_1(f) = p_1\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0)\Big) \leqslant c \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{\theta, K+\alpha_n B}.$$

Logo

$$p_1(f) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, 2K + 2\alpha_n B}$$

para tôda $f \in H_{S\theta}(E)$, com $2K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $2B \in \mathcal{B}_E$, $2K$ compacto em E_{2B} e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$, o que termina a demonstração.

Dada uma sequência $(P_m)_o^{\infty}$ com $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$, obtemos algumas condições equivalentes para que $\sum\limits_{n=o}^{\infty} P_m$ seja a série de Taylor, ao redor da origem, de uma função em $H_{S\theta}(E)$. Para isto estudaremos inicialmente o caso corrente.

(2.09) <u>Proposição</u> : Seja $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. As seguintes condições são equivalentes:

1) $\sum\limits_{n=o}^{\infty} P_m$ é a série de Taylor na origem de uma $f \in \mathcal{H}_S(E)$

2) Para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cada $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$ temos $\lim\limits_{m \to \infty} \| P_m \|_{K + \alpha_m B}^{1/m} = 0$.

3) Para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cada $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$ temos $\sum\limits_{n=o}^{\infty} \| P_m \|_{K + \alpha_m B} < \infty$.

4) Para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cada $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B

existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{K+\varepsilon B} < \infty .$$

Demonstração : Como o tipo corrente é um α-tipo de S-holomorfia, vê-se pela proposição (2.04), que 2),3)e4) são equivalentes; restando provar que 1) e 4) são equivalentes. Sejam $K \in \hat{K}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_0^{\infty} \in C_0^+$. Suponhamos que $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ é a série de Taylor no zero de uma $f \in \mathcal{H}_S(E)$.

Como $\|P_m\|_{K+\alpha_m B} = \sup\{ |P_m(x)| ; x \in K+\alpha_m B\} =$

$= \sup\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda ; x \in K+\alpha_m B\right\}$ para todo $\rho>0$, (ver[6]),

temos que $\|P_m\|_{K+\alpha_m B} \leq \frac{2\pi\rho}{2\pi} \frac{1}{\rho^{m+1}} \sup\{ |f(x)| ; x \in \rho K+\rho\alpha_m B\}$

com $\rho > 0$ arbitrario. Temos que $\rho K \in \hat{K}_e(E)$ e $\rho B \in \mathcal{B}_E$ com ρK compacto em $E_{\rho B}$. Seja V uma vizinhança de ρK em $E_{\rho B}$ onde f é limitada. Escolhendo $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho K+\rho\alpha_m B \subset V$ para $m \geq m_0$ temos $\|P_m\|_{K+\alpha_m B} \leq \frac{1}{\rho^m} \sup\{ |f(x)| ; x \in \rho K+\rho\alpha_m B\} \leq \frac{M}{\rho^m}$ para $m \geq m_0$. Logo $\limsup_{m\to\infty} \|P_m\|_{K+\alpha_m B}^{1/m} \leq \frac{1}{\rho}$. Como $\rho>0$ é arbitrário, temos $\limsup_{m\to\infty} \|P_m\|_{K+\alpha_m B}^{1/m} = 0$, o que prova que 1) implica 4).

Seja, agora, $B \in \mathcal{B}_E$ e para cada $x \in E_B$ tomemos $K_x = \widehat{\{x\}} \in \mathcal{K}_e(E)$, a envoltoria convexa equilibrada do conjunto $\{x\}$. Temos que K_x é compacto em E_B e por 4) existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{K_x + \varepsilon B} < \infty$. Logo $\limsup_{m \to \infty} \|P_m\|_{K_x + \varepsilon B}^{1/m} \leqslant 1$ e então, ver [6], $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ é a expansão em série de Taylor na origem de uma função $f_B : E_B \longrightarrow \mathbb{C}$ que é holomorfa, no sentido da topologia de E_B, no interior de $K_x + \varepsilon B$ e portanto em x. Como

Como $E = \bigcup \{E_B \,;\, B \in \mathcal{B}_B\}$, pela unicidade da série de Taylor podemos garantir que $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ é a série de Taylor, na origem, de uma função $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f/E_B \in \mathcal{H}(E_B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$ isto é, de uma $f \in \mathcal{H}_S(E)$.

(2.11) <u>Corolário</u> : $H_S(E) = \mathcal{H}_S(E)$.

<u>Demonstração</u> : $H_S(E) \subset \mathcal{H}_S(E)$ pois $H_{S\theta}(E) \subset \mathcal{H}_S(E)$ para todo tipo de S-holomorfia. Por outro lado, como o tipo corrente é um α-tipo, se $f \in \mathcal{H}_S(E)$ temos que $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\partial}^n f(o)$ é a série de Taylor de f ao redor do zero e portanto, pela proposição

anterior, dados $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \right\|_{K+\varepsilon B} < \infty .$$

Logo $f \in H_S(E)$.

(2.11) <u>Corolário</u> : Seja $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ para $m \in \mathbb{N}$. Então as seguintes condições são equivalentes:

1) $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ é a série de Taylor de um elemento $f \in H_{S\theta}(E)$.

2) Para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cada $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_0^{\infty} \in c_0^+$ temos $\lim_{m \to \infty} \|P_m\|_{\theta, K+\alpha_m B}^{1/m} = 0$.

3) Para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cada $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_0^{\infty} \in c_0^+$ temos $\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{\theta, K+\alpha_m B} < \infty$.

4) Para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cada $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{\theta, K+\varepsilon B} < \infty$.

<u>Demonstração</u> : Para cada α-tipo de S-holomorfia θ, existe $\sigma_\theta \geq 1$ tal que , para cada $m \in \mathbb{N}$, $\|P_m\|_B \leq \sigma_\theta^m \|P_m\|_{\theta, B}$.

Suponhamos que 2) seja verdadeira. Dados $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B, e $(\alpha_n)_0^\infty \in c_0^+$ temos que $\sigma_\theta K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $\sigma_\theta B \in \mathcal{B}_E$ com $\sigma_\theta K$ compacto em $E_{\sigma_\theta B}$. Temos por 2) que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{\theta,\, \sigma_\theta K + \alpha_m \sigma_\theta B} < \infty .$$

Então

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{K+\alpha_m B} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_\theta^m \|P_m\|_{\theta, K+\alpha_m B} < \infty .$$

Logo a condição 2) da proposição (2.09) está satisfeita e portanto a condição 1) da mesma proposição está satisfeita. Assim $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ é a série de Taylor no zero de um elemento f de $\mathcal{H}_S(E)$.

A definição (2.03) e a proposição (2.04) completam a demonstração.

(2.12) <u>Proposição</u> : $H_{S\theta}(E)$ com a topologia $T_{S\theta}$ é completo.

<u>Demonstração</u>: Seja $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma rede de Cauchy em $(H_{S\theta}(E);T_{S\theta})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$\begin{aligned} H_{S\theta}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}_{b\theta}(^mE) \\ f &\longmapsto \hat{\delta}^m f(0) \end{aligned}$$

é linear e contínua. Então $(\hat{\delta}^m f_\alpha(0))_{\alpha\in A}$ é uma rede de Cauchy no espaço completo ($\mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$; $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$). Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por P_m o limite de $(\hat{\delta}^m f_\alpha(o))_{\alpha \in A}$. Seja $K \in \mathcal{K}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^\infty \in C_o^+$. Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $\beta_o \in A$ tal que se β_1, $\beta_2 \geq \beta_o$ temos

$$\sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m (f_{\beta_1} - f_{\beta_2})(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \leq \varepsilon.$$

Logo, para todo $M \in \mathbb{N}$ e β_1, $\beta_2 \geq \beta_o$ temos

$$\sum_{m=o}^{M} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\beta_1}(o) - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\beta_2}(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \leq \varepsilon.$$

Logo

$$\sum_{m=o}^{M} \left\| \frac{1}{m!} P_m - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\beta_2}(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \leq \varepsilon.$$

Em particular

$$\sum_{m=o}^{M} \left\| \frac{1}{m!} P_m \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \leq \sum_{m=o}^{M} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\beta_o}(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\beta_o}(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} + \varepsilon < \infty$$

Logo

$$\sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} P_m \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} < \infty.$$

Pela proposição (2.04) temos que

$$f = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!} P_m \in H_{S\theta}(E).$$

Por outro lado, como

$$\sum_{m=o}^{M} \left\| \frac{1}{m!} P_m - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\beta_2}(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \leqslant \varepsilon$$

para todo $M \in \mathbb{N}$ e todo $\beta_2 \geqslant \beta_o$ temos que

$$p(f - f_{\beta_2}) = \sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} P_m - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B}$$

para $\beta_2 \geqslant \beta_o$. Logo a rede $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge para f na topologia $T_{S\theta}$.

CAPÍTULO III

A TOPOLOGIA BORNOLÓGICA ASSOCIADA À $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$

Dois problemas são tratados neste capítulo. O primeiro é o estudo da topologia bornológica $t_{S\theta}$ associada ao espaço $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Caracteriza-se a familia de seminormas que define esta topologia e da-se condição para que o espaço $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ seja completo. O segundo problema é a relação entre os espaços $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ e $(\mathcal{H}_{S\theta}(E), \mathcal{T}_{\omega\theta})$. No caso geral de um α-tipo de S-holomorfia, mostra-se que o primeiro espaço está contido continuamente no segundo. No caso particular do tipo corrente de S-holomorfia, demonstra-se que aquêles espaços são algébrica e topologicamente iguais.

(3.01) Definição : $t_{S\theta}$ é a mais fina topologia localmente convexa em $H_{S\theta}(E)$ que possue os mesmos conjuntos limitado que $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$.

(3.02) Proposição : Se $f \in H_{S\theta}(E)$, então a série de Taylor de f no ponto zero converge para f em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$.

Demonstração : Sejam $K \in \mathcal{K}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em

E_B e $(\alpha_n)_0^\infty \in C_0^+$. Consideremos a seminorma

$$p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \quad , \text{ qualquer } f \in H_{S\theta}(E)$$

Para $0 < \varepsilon < 1/2$ podemos escolher $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$ $\left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} \leq \varepsilon^m$. Para todo $k \geq m_0$ temos

$$p(2^k \sum_{m=k}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B}) \leq 2^k \sum_{m=k}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B}$$

$$\leq 2^k \sum_{m=k}^{\infty} \varepsilon^m = \frac{2^k \varepsilon^{k+1}}{1-\varepsilon} = \frac{(2\varepsilon)^k}{1-\varepsilon}$$

. Esta última quantidade tende a zero com k tendendo ao infinito. Logo a sequência $\left(2^k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)\right)_{k=0}^{\infty}$ é limitada em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Assim dada uma seminorma q em $H_{S\theta}(E)$ que é $t_{S\theta}$-contínua, existe $M > 0$ tal que

$$q(2^k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)) \leq M$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$q(2^k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0))$$

converge para zero com k convergindo para infinito. Como

$$f = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0) + \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)$$

temos que

$$q\left(f - \sum_{m=o}^{k-1} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o)\right)$$

converge para zero com k convergindo para infinito. Isto conclui a demonstração.

(3.03) <u>Proposição</u> :Seja p uma seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E),t_{S\theta})$. Então $\lim\limits_{m\to\infty} p(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o))^{1/m} = 0$ para toda função f em $H_{S\theta}(E)$.

<u>Demonstração</u> : Sejam $c > 0$ e $f \in H_{S\theta}(E)$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{c^m}{m!}\hat{\delta}^m f(o) \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$. Seja $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_m)_o^\infty \in C_o^+$. Pela proposição(2.04) temos que

$$\lim_{m\to\infty} \left\|\frac{c^m}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{0,K+\alpha_m B}^{1/m} \leq c \lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{\theta,K+\alpha_m B}^{1/m} = 0$$

Logo a sequência $(\frac{c^m}{m!}\hat{\delta}^m f(o))_{m=o}^\infty$ é limitada em $(H_{S\theta}(E),T_{S\theta})$.

Então $(p(\frac{c^m}{m!}\hat{\delta}^m f(o)))_{m=o}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$.

Seja $M > 0$ tal que $p(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)) \leq \frac{M}{c^m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Logo $\limsup\limits_{m\to\infty}(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o))^{1/m} \leq \frac{1}{c}$. Como $c > 0$ é arbitrário temos que $\lim\limits_{m\to\infty} p(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o))^{1/m} = 0$.

(3.04) Colorário : Sejam p uma seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ e $f = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \in H_{S\theta}(E)$. Então

$$\sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o)\right) < \infty .$$

(3.05) Proposição : A topologia em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ induzida por $T_{S\theta}$ coincide com a topologia gerada por $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$ em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$.

Demonstração : Para cada $B \in \mathcal{B}_E$, a aplicação de $H_{S\theta}(E)$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada função f o real $\left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta,B}$ é uma seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Logo $T_{S\theta}$ induz em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ uma topologia mais fina que a topologia definida por $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$. Por outro lado, dados $K = \{o\}$, $(\alpha_n)_o^\infty$ definida por $\alpha_m = 1$ e $\alpha_n = 0$ para todo $n \neq m$, temos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{\theta,K+\alpha_m B} = \|P_m\|_{\theta,B} .$$

Logo $T_{S\theta}$ induz em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ uma topologia menos fina que a topologia definida por $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$.

(3.06) Corolário : A topologia $t_{S\theta}$ induz em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ uma topologia mais fina ou igual a topologia definida por $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$.

(3.07) <u>Proposição</u> : Seja p uma seminorma em $H_{S\theta}(E)$ com as seguintes propriedades:

1) Para cada $m \in \mathbb{N}$, p restrita a $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ é contínua para a topologia induzida por $t_{S\theta}$ em $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$.

2) Se $f = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o) \in H_{S\theta}(E)$, então

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)) < \infty .$$

Então $p_1(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o))$ define uma seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$.

<u>Demonstração</u> : Como $t_{S\theta}$ é uma topologia bornológica, para provar que p_1 é seminorma contínua é suficiente mostrar que para cada conjunto limitado $\mathcal{X}$ em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ temos que $\sup\{p_1(f) ; f \in \mathcal{X}\} < \infty$. Pela condição 1) da hipótese, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\sup\{ p(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)) ; f \in \mathcal{X}\} < \infty$.
Suponhamos que $\sup\{p_1(f) ; f \in \mathcal{X}\} = \infty$. Então, para cada $m_o \in \mathbb{N}$

$$\sup\left\{\sum_{m=m_o}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right) ;\ f\in \mathcal{X}\right\}=\infty$$

Escolhemos $f_1 \in \mathcal{X}$ e $m_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{m=o}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_1(o)\right) \geqslant 2 \quad \text{e} \quad \sum_{m=o}^{m_1} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_1(o)\right) \geqslant 1.$$

Por indução tomemos $f_k \in \mathcal{X}$ e $m_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{m=m_{k-1}+1}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_k(o)\right) \geqslant 2 \quad \text{e} \quad \sum_{m=m_{k-1}+1}^{m_k} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_k(o)\right) \geqslant 1$$

Definimos

$$g_m = \begin{cases} f_1 & \text{para} \quad 0 \leqslant m \leqslant m_1 \\ f_k & \text{para} \quad m_{k-1} < m \leqslant m_k \qquad (k \geqslant 2) \end{cases}$$

A sequência $(g_m)_o^\infty$ é limitada em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Sejam $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B, $(\alpha_n)_o^\infty \in c_o^+$ e $c > 0$. Temos que $cK \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, cK compacto em E_B. Então

$$\sup\left\{\sum_{m=o}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m g_n(o)\right\|_{\theta,\, cK + c\alpha_m B} ;\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$$

Como θ é um $\mathcal{L}$-tipo temos

$$\sup\left\{\sum_{m=o}^{\infty} c^m \left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m g_n(o)\right\|_{\theta,\, K+\alpha_m B} ;\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$$

Em particular

$$\sup \{ c^m \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m g_m(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_m B} ; m \in \mathbb{N} \} < \infty$$

Logo

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m g_m(o) \right\|^{1/m}_{\theta, K+\alpha_m B} = 0 .$$

Como, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\hat{\delta}^m g_m(o) \in \mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$, pelo corolário (2.11) temos que

$$g = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m g_m(o) \in H_{S\theta}(E) .$$

Pela definição de g_m temos que

$$p_1(g) = \sum_{m=o}^{\infty} p(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m g_m(o)) = \infty$$

Este fato contradiz a condição 2). Logo $\sup \{ p_1(f) ; f \in \mathcal{X} \} < \infty$ e p_1 é seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$.

(3.08) <u>Proposição</u> : A topologia $t_{S\theta}$ em $H_{S\theta}(E)$ é gerada por tôdas as seminormas p em $H_{S\theta}(E)$ que satisfazem as seguintes condições:

1) $p(f) = \sum_{m=o}^{\infty} p(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o))$ para tôda $f \in H_{S\theta}(E)$.

2) Para cada $m \in \mathbb{N}$, p restrita a $\mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$ é contínua para a topologia induzida por $t_{S\theta}$ em $\mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$.

<u>Demonstração</u> : Pela proposição(3.07) tôdas tais seminormas são contínuas para a topologia $t_{S\theta}$. Seja q uma seminorma em $H_{S\theta}(E)$ que é $t_{S\theta}$-contínua. Pelo corolário (3.04) temos que,

$$\sum_{m=0}^{\infty} q(\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(o)) < \infty \text{ para tôda } f \in H_{S\theta}(E).$$

Como q é $t_{S\theta}$-contínua, q restrita em $\mathcal{P}_{b\theta}(^m E)$ é contínua em $(\mathcal{P}_{b\theta}(^m E), t_{S\theta})$. Logo as condições 1) e 2) da proposição (3.07) estão verificadas e

$$p_1(f) = \sum_{m=0}^{\infty} q(\frac{1}{m!}\,\delta^m f(o)) \ , \quad f \in H_{S\theta}(E)$$

define uma seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$. Pela proposição (2.07) a série de Taylor no ponto zero de uma função $f \in H_{S\theta}(E)$ converge para f na topologia $T_{S\theta}$. Logo $q(f) \leqslant p_1(f)$. Assim, tôda seminorma contínua em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ é dominada por uma seminorma que satisfaz as condições 1) e 2).

(3.09) <u>Proposição</u> : Os espaços $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ e $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ induzem a mesma topologia em todos os conjuntos limitados de $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$.

<u>Demonstração</u> : Como $t_{S\theta}$ é mais fina que $T_{S\theta}$, é suficiente mostrar que se $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma rede em $H_{S\theta}(E)$ que é $T_{S\theta}$-limitada e $T_{S\theta}$-convergente para zero, então é uma rede $t_{S\theta}$-convergente para zero. Suponhamos que isto não ocorra. Sejam p uma seminorma da forma descrita na proposição(3.08), $(f_{\alpha'})_{\alpha' \in A'}$, uma subrede cofinal e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_{\alpha'}(o)) \geqslant \varepsilon \quad \text{para} \quad \alpha' \in A' .$$

Como $\lim\limits_{\alpha' \in A'} f_{\alpha'} = 0$ em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\alpha' \in A'} p(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_{\alpha'}(o)) = 0.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $f_k \in \{ f_{\alpha'} ; \alpha' \in A' \}$ e $m_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\text{(i)} \quad m_k \geqslant k \quad \text{e} \quad \text{(ii)} \sum_{m_{k-1} < m \leqslant m_k} p(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_k(o)) \geqslant \varepsilon/2$$

Definimos

$$g_m = \begin{cases} f_1 & \text{para} \quad 0 \leqslant m \leqslant m_1 \\ \\ f_k & \text{para} \quad m_{k-1} < m \leqslant m_k \qquad (k \geqslant 2) \end{cases}$$

Então

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m g_m(o) \in H_{S\theta}(E) \qquad \text{e}$$

$$p(g) = \sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m g_m(o)\right) = \infty$$

o que é uma contradição.

(3.10) <u>Corolário</u> : $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ e $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ têm os mesmos conjunto compactos.

<u>Demonstração</u> : Como $t_{S\theta}$ é mais fina que $T_{S\theta}$, os conjuntos $t_{S\theta}$-compactos são também $T_{S\theta}$-compactos. Seja $K \subset H_{S\theta}(E)$ um conjunto compacto pela topologia $T_{S\theta}$. Como K é limitado, pela proposição anterior os espaços $(K, t_{S\theta})$ e $(K, T_{S\theta})$ são topologicamente isomorfos. Concluimos que K é $t_{S\theta}$-compacto.

(3.11) <u>Observação</u> : Os espaços $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ e $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ têm os mesmos compactos estritos pois possuem os mesmos conjuntos limitados.

(3.12) <u>Proposição</u> : Seja θ um α-tipo de S-holomorfia. Se $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e se para cada seminorma p em $H_{S\theta}(E)$ que é $t_{S\theta}$-contínua temos $\sum_{m=0}^{\infty} p(P_m) < \infty$, então $\sum_{m=0}^{\infty} P_m \in H_{S\theta}(E)$.

Demonstração : Pela proposição (2.08) a topologia $T_{S\theta}$ em $H_{S\theta}(E)$ é gerada pelas seminormas da forma

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_n B}$$

onde $K \in \widehat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in C_o^+$.

Como $t_{S\theta}$ é uma topologia mais fina que $T_{S\theta}$, uma tal seminorma é contínua para $t_{S\theta}$. Temos então que

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(P_m) < \infty .$$

Porém , para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$p(P_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n P_m(o) \right\|_{\theta, K+\alpha_n B} = \|P_m\|_{\theta, K+\alpha_m B} .$$

Logo
$$\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{\theta, K+\alpha_m B} < \infty$$

e pelo corolário (2.11) temos

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m \in H_{S\theta}(E) .$$

(3.13) Proposição : O espaço $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ é completo se, e somente se, para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), t_{S\theta})$ é completo.

Demonstração : Suponhamos que $(\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), t_{S\theta})$ é completo e seja $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma rede de Cauchy em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\hat{\delta}^m f_\alpha(o))_{\alpha \in A}$ é uma rede de Cauchy em $(\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), t_{S\theta})$. Seja $P_m = \lim_{\alpha \in A} \hat{\delta}^m f_\alpha(o)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\alpha_0 \in A$ tal que se $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_0$ então

$$\sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_1}(o) - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_2}(o)\right) \leq \varepsilon.$$

Em particular

$$\sum_{m=0}^{k} p\left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_1}(o) - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_2}(o)\right) \leq \varepsilon$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando o limite desta soma finita para $\alpha_1 \in A$, com $\alpha_1 \geq \alpha_0$ e mantendo α_2 fixado temos

$$\sum_{m=0}^{k} p\left(\frac{1}{m!} P_m - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_2}(o)\right) \leq \varepsilon$$

para $\alpha_2 \geq \alpha_0$.

Então

$$\sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!} P_m\right) \leq \sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_0}(o)\right) + \varepsilon < \infty .$$

Pela proposição (3.12) temos

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P_m \in H_{S\theta}(E).$$

Como

$$\sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!} P_m - \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f_{\alpha_2}(o)\right) \leq \varepsilon ,$$

temos que

$$p(f - f_{\alpha_2}) = \sum_{m=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o) - \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f_{\alpha_2}(o)\right)$$

para $\alpha_2 \geq \alpha_0$. Então $\lim_{\alpha \in A} f_\alpha = f$ em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$.

Reciprocamente, suponhamos que $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ seja completo. Sendo $(\mathcal{P}_{b\theta}(^m E), t_{S\theta})$, para cada $m \in \mathbb{N}$, um subespaço fechado de um espaço completo, é completo.

(3.14) <u>Proposição</u> : O espaço $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ é quasi-completo.

<u>Demonstração</u> : Seja $\mathcal{X} \subset H_{S\theta}(E)$ que é $t_{S\theta}$-fechado e $T_{S\theta}$-limitado. Sejam $f \in \overline{\mathcal{X}}^{T_{S\theta}}$ e $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma rede em $\mathcal{X}$ que é $T_{S\theta}$-convergente para f. Pela proposição (3.09), $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ é $t_{S\theta}$-convergente para f. Logo $\mathcal{X}$ é $T_{S\theta}$-fechado no espaço completo $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Assim $\mathcal{X}$ é $T_{S\theta}$-completo e novamente pela proposição (3.09) concluimos que $\mathcal{X}$ é $t_{S\theta}$-completo.

(3.15) <u>Corolário</u>: O espaço $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ tonelado.

<u>Demonstração</u>: $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ é bornológico e quasi-completo.

(3.16) <u>Proposição</u> : A topologia $t_{S\theta}$ induz em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, a topologia bornológica associada à topologia usual em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$.

<u>Demonstração</u> : Seja $\mathcal{T}$ a topologia bornológica associada a topologia usual em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$. Se p_m é uma seminorma $\mathcal{T}$-contínua em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$, $p(f) = p_m(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(o))$ define uma seminorma em $H_{S\theta}(E)$ que é limitada nos limitados de $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Assim, se $\mathcal{X}$ é um subconjunto limitado de $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$, temos que $\{\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(o); f \in \mathcal{X}\}$ é limitado em $(\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})$ e, portanto, p_m é limitada neste conjunto. Logo p é $t_{S\theta}$-contínua em $H_{S\theta}(E)$ e p_m é contínua pela topologia induzida por $t_{S\theta}$ em $H_{S\theta}(E)$. Por outro lado se q é seminorma $t_{S\theta}$-contínua em $H_{S\theta}(E)$, então q é limitada sobre os limitados de $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$. Logo q restrita ao espaço $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ é $\mathcal{T}$-contínua. Isto conclui a demonstração.

(3.17) <u>Observação</u> : Existem espaços metrizáveis que não são distinguidos (ver [5] p.435). Em um tal espaço E, $E^* = E'$ quando munido da topologia $\beta(E', E)$ não é bornológico mas é completo. Temos pois um exemplo em que $\mathcal{P}_b({}^1E)$ com a topologia usual não é bornológico. Concluimos, com a proposição anterior, que existem espaços onde $t_{S\theta}$ não induz em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ a topologia usual.

(3.18) Proposição : Seja θ um α-tipo de S-holomorfia. Então $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta}) \subset (\mathcal{H}_{S\theta}(E), \tau_{\omega\theta})$ continuamente.

Demonstração : Como $H_{S\theta}(E) \subset \mathcal{H}_S(E)$, para provar que $H_{S\theta}(E) \subset \mathcal{H}_{S\theta}(E)$ é suficiente provar que toda $f \in H_{S\theta}(E)$ é de tipo de S-holomorfia θ em todo ponto $x \in E$.

Sejam $x \in E$, $\varepsilon > 0$ e $B \in \mathcal{B}_E$. Denotemos por X_ε a envoltória convexa fechada do conjunto $(1+\varepsilon)\, \sigma_\theta x$. Seja $B_o \in \mathcal{B}_E$ tal que $B_o \supset B$ e $B_o \supset X$. Tomemos $\rho > 0$ tal que

$$\sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, X_\varepsilon + \rho B_o} < \infty .$$

Logo

$$\limsup_{m \to \infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|^{1/m}_{\theta, X_\varepsilon + \rho B_o} \leqslant 1$$

e então existe $c > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, X_\varepsilon + \rho B_o} \leqslant c(1 + \varepsilon/2)^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Notemos que para todo $k, m \in \mathbb{N}$, com $k \leqslant m$, temos

$$\sum_{m=k}^{\infty} \left\| \hat{\delta}^k \left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o)\right)(x) \right\|_{\theta, X_\varepsilon + \rho B_o} \leqslant$$

$$\leqslant \ k! \sum_{m=k}^{\infty} \sigma_\theta^m \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, X_\varepsilon + \rho B_o} \|x\|^{m-k}_{X_\varepsilon + \rho B_o} \leqslant$$

$$\leqslant \; k! \sum_{m=k}^{\infty} \sigma_\theta c(1+\varepsilon/2)^m \, \|x\|^{m-k}_{X_\varepsilon + \rho B_o} =$$

$$= k!\, c\left[\sum_{m=k}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon/2)^{m-k}}{(1+\varepsilon)^{m-k}}\right](1+\varepsilon/2)^k < \infty ,$$

pois como $(1+\varepsilon)\,\sigma_\theta x \in X_\varepsilon + \rho B_o$ temos $\|x\|_{X_\varepsilon+\rho B_o} \leqslant 1/(1+\varepsilon)\,\sigma_\theta$.

Agora, como $\rho B_o \subset X_\varepsilon + \rho B_o$, temos

$$\sum_{m=k}^{\infty} \left\|\hat{\delta}^k\left(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right)(x)\right\|_{\theta,\rho B_o} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \left\|\hat{\delta}^k\left(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right)(x)\right\|_{\theta, X_\varepsilon + \rho B_o} < \infty .$$

Portanto

$$\sum_{m=k}^{\infty} \left\|\hat{\delta}^k\left(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right)(x)\right\|_{\theta,\rho B_o} =$$

$$= \rho^k \sum_{m=k}^{\infty} \left\|\hat{\delta}^k\left(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right)(x)\right\|_{\theta, B_o} < \infty$$

Logo

$$\sum_{m=k}^{\infty} \left\|\hat{\delta}^k\left(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right)(x)\right\|_{\theta, B_o} < \infty$$

Como B é arbitrário temos que a série

$$\sum_{m=k}^{\infty} \hat{\delta}^k\left(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right)(x)$$

converge absolutamente em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^kE)$. Como este espaço é completo o seu limite existe. Por outro lado, (ver [6]), pontualmente

$$\hat{\delta}^k f(o)(t) = \sum_{m=k}^{\infty} \hat{\delta}^k(\tfrac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o))(x)(t) \quad \text{para } t \in E.$$

Logo

$$\hat{\delta}^k f(x) \in \mathcal{P}_{b\theta}({}^kE).$$

Além disso, pelos resultados acima, temos

$$\left\| \tfrac{1}{k!}\, \hat{\delta}^k f(x) \right\|_{\theta,B} \leqslant (1/\ \rho^k) \left\| \tfrac{1}{k!}\, \hat{\delta}^k f(x) \right\|_{\theta,\ \rho B_o} \leqslant$$

$$\leqslant (1/\ \rho^k) \sum_{m=k}^{\infty} \left\| \tfrac{1}{k!}\ \hat{\delta}^k(\tfrac{1}{m!}\ \hat{\delta}^m f(o))(x) \right\|_{\theta,\ \rho B_o} \leqslant$$

$$\leqslant (1/\ \rho^k) \sum_{m=k}^{\infty} \sigma_\theta^m\ c(1+\ \varepsilon/2)^m (1/(1+\varepsilon)\ \sigma_\theta)^{m-k} =$$

$$= (c/\ \rho^k)(1+\ \varepsilon/2)^k \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{1+\varepsilon/2}{1+\varepsilon}\right)^{m-k} =$$

$$= 2\ c\ (1+\varepsilon)\left(\frac{1+\ \varepsilon/2}{\varepsilon}\right)^k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Portanto f é de tipo θ em x.

Para provar que a inclusão é contínua é suficiente mostrar que toda seminorma em $(\mathcal{H}_{S\theta}, \mathcal{T}_{\omega\theta})$ portada por $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B \in \mathcal{B}_E$ também é $S\theta$-portada. Dados p seminorma em $\mathcal{H}_{S\theta}$, portada por $K\in \widehat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B\in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $\varepsilon>0$, seja $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$p(f) \leqslant c(\varepsilon)\sum_{m=o}^{\infty} \varepsilon^m \sup_{x\in K} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(x)\right\|_{\theta,B}$$

para toda $f\in H_{S\theta}(E)\subset \mathcal{H}_{S\theta}(E)$. Sejam $V=\ 2\,\sigma_\theta K+2\,\sigma_\theta\,\varepsilon B$ e $\rho=\sup\{\|x\,\|_{2K+2\,\varepsilon B}\ ;\ x\in K\}$. Com estas notações temos que se $x\in K$, $x\in 1/2(2K+2\,\varepsilon B)$ e assim $\rho\leqslant 1/2$. Vamos provar que

$$p(f) \leqslant c(\varepsilon)\sum_{m=o}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{\theta,2K+2\,\varepsilon B}$$

para toda $f\in H_{S\theta}(E)$. Se

$$\sum_{m=o}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{\theta,2K+2\,\varepsilon B} = \infty,$$

então está demonstrado. Suponhamos que este não é o caso. Temos (ver [6])

$$\left\|\frac{1}{k}\,\hat{\delta}^k f(x)\right\|_{\theta,2K+2\,\varepsilon B} \leqslant \sum_{m=o}^{\infty}\sigma_\theta^m\left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{\theta,2K+2\,\varepsilon B}\|x\|^{m-k}_{2K+2\,\varepsilon B} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=o}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{\theta,V}\rho^{m-k}.$$

Logo

$$\sum_{m=o}^{\infty} \varepsilon^m \sup_{x\in K} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\delta}^m f(x)\right\|_{\theta,B} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=o}^{\infty} (1/2)^m \sup_{x\in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(x) \right\|_{\theta, 2\varepsilon B} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=o}^{\infty} (1/2)^m \sup_{x\in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, 2K+2\varepsilon B} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=o}^{\infty} (1/2)^k \sum_{m=k}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, V} \rho^{m-k} =$$

$$= \sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, V} \rho^m \sum_{k=o}^{m} (1/2\rho)^k =$$

$$= \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(1/2)^m - 2\rho^{m+1}}{1 - 2\rho} \left\| \frac{1}{m!} {}^m f(o) \right\|_{\theta, V}$$

Como

$$c \cdot \sup \left\{ \frac{(1/2)^m - 2\rho^{m+1}}{1 - 2} ; m \in \mathbb{N} \right\} < \infty ,$$

temos

$$p(f) \leqslant c(\varepsilon)\, c \sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{\theta, V}$$

o que completa a demonstração.

No caso do tipo corrente podemos fornecer um resultado melhor.

(3.19) <u>Proposição</u> : $(H_S(E), \mathcal{T}_{\omega se}) = (\mathcal{H}_S(E), \mathcal{T}_{\omega s})$ algébrica e topològicamente.

Demonstração : Pelo corolário (2.11) temos que $H_S(E) \subset \mathcal{H}_S(E)$. Pela proposição anterior temos que $(H_S(E), \tau_{\omega se})$ $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega S})$ continuamente. Resta provar que toda seminorma que é $\tau_{\omega se}$-contínua é também $\tau_{\omega S}$-contínua.

Sejam $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_o^{\infty} \in c_o^+$.

Definimos

$$p(f) = \sum_{m=o}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{K+\alpha_m B}$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(E)$. Seja V uma vizinhança de K em E_B e escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}\right)K + \frac{1}{2}\varepsilon B \subset \left(\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}\right)K + \varepsilon B \subset V.$$

Se escolhermos ainda $m_o \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_m \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ para $m \geq m_o$, teremos $K + \alpha_m B \subset \left(\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}\right)K + \alpha_m B \subset V$. Então, para $\rho > 0$ e $m \geq m_o$ temos

$$\left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o) \right\|_{K+\alpha_m B} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o).x \right| ; x \in K + \alpha_m B \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda ; x \in K + \alpha_m B \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\rho^m} \sup \left\{ |f(x)| ; x \in \rho K + \rho\alpha_m B \right\}.$$

Escolhendo $\rho > 0$ tal que $1 < \rho < \dfrac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}$ temos:

1) Para $m \geq m_o$,

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{K+\alpha_m B} \leq \frac{1}{\rho^m} \sup\{|f(x)| ; x \in V\}$$

2) Para $m = 0,1,\ldots,m_o-1$,

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{K+\alpha_m B} \leq \frac{1}{\rho^m} \sup\{|f(x)| ; x \in \rho_1 K + \rho_1 \alpha_m B\}$$

onde ρ_1 é escolhido tal que $\rho_1(K+\alpha_m B) \subset V$ para

$m = 0,1,\ldots,m_o-1$.

Logo, tomando $c(V) = \sum_{i=o}^{m_o-1} \rho_1^{-i} + \sum_{i=m_o}^{\infty} \rho^{-i}$ temos

$$p(f) = \sum_{m=o}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(o)\right\|_{K+\alpha_m B} \leq c(V) \sup\{|f(x)| ;\ x \in V\}$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(E)$.

CAPÍTULO IV

α- β- TIPOS DE S-HOLOMORFIA E TRANSFORMADAS DE BOREL

Neste capítulo é estudada a transformada de Borel de elementos do dual de $(H_{S\theta}(E),\ t_{S\theta})$. Para êste fim é introduzido um novo tipo de S-holomorfia que é chamado de um α- β-tipo. O resultado principal do capítulo é a caracterização do espaço $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})'$ com o uso de transformada de Borel.

(4.01) <u>Definição</u> : Um α-tipo de S-holomorfia θ é dito ser um α- β-tipo de S-holomorfia se satisfaz as seguintes condições:

1) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE) \supset \mathcal{P}_{bN}(^mE)$ e para todo $B \in \mathcal{B}_E$ $\|P_m\|_{\theta,B} \leqslant \|P_m\|_{N,B}$ qualquer que seja P_m $\mathcal{P}_{bN}(^mE)$.

2) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{bf}(^mE)$ é denso em $(\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})$.

<u>Observação</u>: Pela condição 1) da definição anterior concluimos que $(H_{SN}(E),\ T_{SN}) \subset (H_{S\theta}(E),\ T_{S\theta})$ continuamente qualquer que seja o α- β-tipo de S-holomorfia θ.

(4.02) <u>Definição</u> :Uma função $f:E \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita ser uma função S-exponencial se existe $\varphi \in E^*$ tal que $f(x) = \exp(\varphi(x))$ para todo x em E.

Denotando por W o espaço vetorial complexo gerado por todas as funções S-exponenciais observamos que

$$W \subset H_{SN}(E) \subset H_{S\theta}(E)$$

para todo α - β-tipo de S-holomorfia θ.

(4.03) <u>Lema</u> : Se θ é um α - β-tipo de S-holomorfia, então a aderência de W em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ é $H_{S\theta}(E)$ (logo a aderencia de W em $(H_{S\theta}(E); T_{S\theta})$ também é $H_{S\theta}(E)$).

<u>Demonstração</u> : Pelas proposições (2.07) e (3.02) a série de Taylor de f no ponto 0 converge para f respectivamente nas topologias $T_{S\theta}$ e $t_{S\theta}$ de $H_{S\theta}(E)$. Pela condição 1) da definição (4.01), como $\hat{\delta}^m [\exp(\varphi)](o) = \varphi^m$, para tôda $\varphi \in E^*$ e todo $m \in \mathbb{N}$, o lema fica demonstrado se provarmos que $\varphi^m \in \overline{W}^{t_{S\theta}}$. Provaremos êste fato por indução em $m \in \mathbb{N}$.

Seja p uma seminorma em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$ da forma

$$p(f) = \sum_{m=o}^{\infty} p(\tfrac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o)).$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\lambda \neq 0$ temos

$$\exp(\lambda \varphi) = 1 + \lambda\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \lambda^m \varphi^m$$

e então

$$\frac{\exp(\lambda\varphi) - 1}{\lambda} - \varphi = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \lambda^{m-1} \varphi^m$$

e

$$p\left(\frac{\exp(\lambda\varphi)-1}{\lambda} - \varphi \right) = \sum_{m=2}^{\infty} |\lambda|^{m-1} p(\tfrac{1}{m!} \varphi^m) \leqslant |\lambda| \sum_{m=2}^{\infty} |\lambda|^{m-2} p(\tfrac{1}{m!} \varphi^m) .$$

Como $\exp(\varphi) \in H_{S\theta}(E)$ temos

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(\tfrac{1}{m!} \varphi^m) = p(\exp(\varphi)) < \infty .$$

Logo $p\left(\frac{\exp(\lambda\varphi)-1}{\lambda} - \varphi \right) \longrightarrow 0$ com $\lambda \longrightarrow 0$, e assim $\varphi \in \overline{W}^{tSO}$.

Suponhamos que $\varphi^n \in \overline{W}^{tSO}$ para $n \leqslant k$.

$$\exp(\lambda\varphi) - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \lambda^i \varphi^i = \frac{1}{(k+1)} \lambda^{k+1} \varphi^{k+1} +$$

$$+ \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{i!} \lambda^i \varphi^i$$

Logo

$$p\left[\frac{\exp(\lambda\varphi) - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \lambda^i \varphi^i}{\lambda^{k+1}} - \varphi^{k+1} \right] \leqslant \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{|\lambda|^{i-k-2}}{i!} p(\varphi^i)$$

Logo $\varphi^{k+1} \in \overline{W}^{tSO}$ o que completa a demonstração.

(4.04) <u>Lema</u> : A aplicação

$$\beta : T \in (\mathcal{P}_{bN}(^mE), \ \Gamma_{N,\mathcal{B}})' \longrightarrow \beta(T) \in \mathcal{P}(^mE^*)$$

definida por $(\beta(T))(\varphi) = T(\varphi^m)$ para tôda $\varphi \in E^*$, estabelece um isomorfismo vetorial entre os espaços e

$$\sup \left\{ \frac{(\beta(T))(\varphi)}{\|\varphi\|_B^m} ; \ \|\varphi\|_B \neq 0 \right\} = \sup \left\{ \frac{|T(P)|}{\|P\|_{N,B}} ; \|P\|_{N,B} \neq 0 \right\}$$

para todo $B \in \mathcal{B}_E$.

<u>Demonstração</u> : (ver [6]).

Denotaremos , respectivamente, por $\|\beta T\|_B$ e $\|T\|_{N,B}$ os dois supremos que aparecem no último lema.

Se θ é um α-β-tipo de S-holomorfia, então, pela condição 1) da definição (4.01) temos que

$$(\mathcal{P}_{bN}(^mE), \Gamma_{N,\mathcal{B}})' \supset (\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})'$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Pelo lema (4.04) podemos pensar $(\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})'$ como sub conjunto de $\mathcal{P}(^mE^*)$. Definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\wedge : (\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE^*)$$

pondo $\hat{T}(\varphi) = \frac{1}{m!} T(\varphi^m)$ para tôda $\varphi \in E^*$.

Denotamos por $\mathcal{P}_{b\theta^*}(^mE^*)$ a imagem em $\mathcal{P}(^mE^*)$ de $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ pela aplicação $\wedge$.

Em $(\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})'$ definimos, para cada $B \in \mathcal{B}_E$,

$$\|T_m\|_{\theta',B} = \sup \left\{ \frac{|T_m(P_m)|}{\|P_m\|_{\theta,B}} \; ; \; \|P_m\|_{\theta,B} = 0 \right\}.$$

Em $\mathcal{P}_{b\theta^*}({}^mE^*)$ definimos $\|T\|^{\theta^*,B} = \frac{1}{m!}\|T\|_{\theta',B}$.

(4.05) <u>Definição</u> : Uma transformada de Borel de um elemento T de $(H_{S\theta}(E),t_{S\theta})'$ é uma aplicação $\hat{T}:E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{T}(\varphi) = T(\exp(\varphi)) .$$

A topologia $t_{S\theta}$ em $H_{S\theta}(E)$ induz em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$ uma topologia mais fina ou igual à topologia natural de $\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE)$, como vimos no corolário (3.06). Assim se $T \in (\mathcal{P}_{bO}({}^mE), \Gamma_{\theta,\mathcal{B}})'$, temos que $T \in (\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE),t_{S\theta})'$ e portanto podemos estendê-lo a um funcional linear contínuo T^* em $(H_{S\theta}(E), t_{S\theta})$, pondo

$$T^*(f) = T(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o))$$

para tôda $f \in H_{S\theta}(E)$.

Como, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $\varphi \in E^*$ $\hat{\delta}^m \left[\exp(\varphi) \right](o) = \varphi^m$, temos que $T^*(\varphi) = T^*(\exp(\varphi)) = T(\frac{1}{m!} \varphi^m) = \hat{T}(\varphi)$.

Concluimos que a aplicação em $(H_{S\theta}(E),t_{S\theta})'$ que associa a cada funcional T a transformada de Borel de T, quando restrita ao espaço ($\mathcal{P}_{b\theta}(^{m}E)$, $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$)', coincide com a aplicação anteriormente definida em ($\mathcal{P}_{b\theta}(^{m}E)$, $\Gamma_{\theta,\mathcal{B}}$)'. Daí o uso do mesmo símbolo para as duas aplicações.

(4.06) <u>Definição</u> : Uma função $f \in \mathcal{H}_S(E)$ diz-se uma função S-holomorfa nuclear de tipo limitado se:

1) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\hat{\delta}^m f(o) \in \mathcal{P}_{bN}(^{m}E)$.

2) Para todo $B \in \mathcal{B}_E$ $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m!} \|\hat{\delta}^m f(o)\|_{N,B} \right)^{1/m} = 0$.

Oespaço vetorial de tais funções será denotado por $\mathcal{H}_{SNb}(E)$. (Para maiores detalhes ver [6]).

(4.07) <u>Definição</u> : Em $\mathcal{H}_{SNb}(E)$ consideramos a seguinte familia de seminormas:

$$\|f\|_{N,B,\rho} \quad \sum_{m=o}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} \|\hat{\delta}^m f(o)\|_{N,B}$$

para todo $\rho > 0$ e todo $B \in \mathcal{B}_E$.

A topologia em $\mathcal{H}_{SNb}(E)$ definida por estas seminormas será denotada por $\mathcal{T}_{SNb}$. (ver [6]).

(4.08) <u>Proposição</u> : ($\mathcal{H}_{NBb}(E)$, $\mathcal{T}_{SNb}$) $\subset$ ($H_{SN}(E)$, T_{SN}) continuamente.

Demonstração : Que $\mathcal{H}_{SNb}(E) \subset H_{SN}(E)$ é evidente pelas definições. Seja p uma seminorma em $H_{SN}(E)$ que é T_{SN}-contínua. Então, para tôda $f \in H_{SN}(E)$,

$$p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\| \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{N, K+\alpha_m B} ,$$

onde $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B e $(\alpha_n)_0^{\infty} \in c_0^+$. Como $K \subset E_B$, existe $\gamma > 0$ tal que $K \subset \gamma B$. Como $\lim_{m \to \infty} \alpha_m = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha_m \leqslant \delta$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo se $\rho = \gamma + \delta$ temos $K + \alpha_m B \subset \rho B$, e para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$p(f) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\| \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{N, \rho B} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} \left\| \hat{\delta}^m f(0) \right\|_{N, B}$$

o que completa a demonstração.

(4.09) Proposição : Seja θ um α-β-tipo de S-holomorfia. Então $(\mathcal{H}_{SNb}(E), \mathcal{T}_{SNb}) \subset (H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ continuamente.

Demonstração : Pela condição 1) da definição (4.01), para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{bN}(^mE) \subset \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ continuamente. Logo $(H_{SN}(E), T_{SN}) \subset (H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$ continuamente. A proposição (4.08) completa a demonstração.

(4.10) <u>Definição</u> : Uma função $f \in \mathcal{H}(E^*)$ diz-se de tipo exponencial se existem $c > 0$ e $B \in \mathcal{B}_E$ tais que

$$|f(\varphi)| \leqslant c \exp(\|\varphi\|_B) \quad \text{para tôda} \quad \varphi \in E^*.$$

Denotaremos por $Exp(E^*)$ a algebra das funções de tipo exponencial relativamente às operações usuais de espaço vetorial e multiplicação pontual.

(4.11) <u>Proposição</u> : A aplicação

$$\wedge : (\mathcal{H}_{SNb}(E), \mathcal{T}_{SNb})' \longrightarrow Exp(E^*)$$

tal que $\hat{T}(\varphi) = T(\exp(\varphi))$, para tôda $\varphi \in E^*$, é um isomorfismo de algebra entre êstes espaços.

<u>Demonstração</u> : (ver [6]).

(4.12) <u>Proposição</u> : Seja θ um α-β-tipo de S-holomorfia. Se $T \in (H_{S\theta}(E), T_{S\theta})'$, então $\hat{T} \in Exp(E^*)$ e, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\hat{\delta}^m T(o) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(^m E^*)$.

<u>Demonstração</u> : A primeira afirmação da tese é uma conse-

quência da proposição anterior. Como $\hat{T} \in \mathcal{H}(E^*)$, temos que $\hat{\delta}^m T(o) \in \mathcal{P}({}^m E^*)$. Se denotarmos por T_m a restrição de T ao espaço $\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E)$, temos, pela proposição (3.05) ,

$$T_m \in (\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E), T_{S\theta})' \subset (\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E), \Gamma_{\theta,\mathfrak{B}})'$$

Logo $\hat{T}_m \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^m E^*) \subset \mathcal{P}({}^m E^*)$. Assim $\hat{\delta}^m T_m(o) = m! \hat{T}_m \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^m E^*)$.

(4.13) <u>Definição</u> :Seja $F \in \mathcal{H}(E^*)$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, $F_m = \hat{\delta}^m F(o) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^m E^*)$. Se existe $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$, $B \in \mathfrak{B}_E$ com K compacto em E_B e tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{m \to \infty} (\| F_m \|^{\theta^*, K+\varepsilon B})^{1/m} \leq 1,$$

dizemos que F é de tipo θ^*-exponencial compacto em E.

(4.14) <u>Proposição</u> : Existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de tipo θ^*-exponencial compactos em E e os elementos de $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})'$.

<u>Demonstração</u> : Sejam $T \in (H_{S\theta}(E), T_{S\theta})'$ e p uma seminorma em $H_{S\theta}(E)$ que é $S\theta$-portada por $K \in \hat{\mathcal{K}}_e(E)$ e $B \in \mathfrak{B}_E$ e tal que $|T(f)| \leq p(f)$ para tôda $f \in H_{S\theta}(E)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left|T(f)\right| \leqslant p(f) \leqslant c(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o)\right\|_{\theta, K+\varepsilon B} \cdot$$

para tôda $f \in H_{S\theta}(E)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja T_m a restrição de T ao $\mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$. Então, se $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$

$$\left|T(P_m)\right| = \left|T_m(P_m)\right| \leqslant c(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m P_m(o)\right\|_{\theta, K+\varepsilon B} =$$

$$= c(\varepsilon) \left\| P_m \right\|_{\theta', K+\varepsilon B} . \text{ Logo}$$

$$\left\|T_m\right\|_{\theta', K+\varepsilon B} = \sup \left\{\frac{\left|T_m(P_m)\right|}{\left\|P_m\right\|_{\theta, K+\varepsilon B}} ; \left\|P_m\right\|_{\theta, K+\varepsilon B} \neq 0\right\} \leqslant c(\varepsilon).$$

Seja $F = \hat{T}$. Então $F_m = \hat{\delta}^m F(o) = \hat{\delta}^m \hat{T}(o) = (m!)\, \hat{T}_m$.

Logo

$$\limsup_{m\to\infty} \left(\left\|F_m\right\|^{\theta^*, K+\varepsilon B}\right)^{1/m} = \limsup_{m\to\infty} \left(m! \left\|T\right\|^{\theta^*, K+\varepsilon B}\right)^{1/m}$$

$$= \limsup_{m\to\infty} \left(\frac{m!}{m!} \left\|T_m\right\|_{\theta', K+\varepsilon B}\right)^{1/m} \leqslant \limsup_{m\to\infty} c(\varepsilon)^{1/m} = 1.$$

Logo F é de tipo θ^*-exponencial compacto em E.

Reciprocamente, suponhamos que $F \in \mathcal{H}(E^*)$, com $F_m = \hat{\delta}^m F(o) \in \mathcal{P}_{\theta^* b}(^mE^*)$ e que exista $K \in \mathcal{K}_e(E)$ e $B \in \mathcal{B}_E$ com com K compacto em E_B e tal que para todo $\varepsilon > 0$ temos $\limsup_{m\to\infty} \left(\left\|F_m\right\|^{\theta^*, K+\varepsilon B}\right)^{1/m} \leqslant 1$. Definimos $T: H_{S\theta}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo $T(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T_m\left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(o)\right)$, onde $T_m \in \mathcal{P}_{b\theta}(^mE)$ é tal que

$\hat{T}_m = F_m$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$\|F_m\|^{\theta^*, K+\varepsilon B} \leqslant 2^m c(\varepsilon)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Temos que

$$|T(f)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left|\frac{1}{m!} T_m\left(\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!} T_m\right\|_{\theta', K+\varepsilon B} \left\|\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)\right\|_{\theta, K+\varepsilon B} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \|F_m\|^{\theta^*, K+\varepsilon B} \left\|\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)\right\|_{\theta, K+\varepsilon B} \leqslant$$

$$\leqslant c(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!} \hat{\delta}^m f(0)\right\|_{\theta, 2K+2\varepsilon B} .$$

Logo $\hat{T} \in (H_{S\theta}(E), T_{S\theta})'$.

Agora $\hat{T}(\varphi) = T(\exp(\varphi)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T_m(\frac{1}{m!}\varphi^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{T}_m(\varphi) =$

$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} F_m(\varphi) = F(\varphi)$. Logo $\hat{T} = F$.

(4.15) <u>Exemplo</u> O tipo de S-holomorfia nuclear é um α-β-tipo de S-holomorfia. Logo $f \in \mathcal{H}(E^*)$ é de tipo N^*-exponencial compacto se e sòmente se existir $K \in \mathcal{K}_e(E)$, $B \in \mathcal{B}_E$ com K compacto em E_B tais que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{m \to \infty} \left(\|\hat{\delta}^m f(0)\|^{N^*, K+\varepsilon B} \right)^{1/m} \leqslant 1.$$

CAPÍTULO V

α-β-γ-TIPOS DE S-HOLOMORFIA E OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Um tipo de S-holomorfia ainda mais restritivo é introduzido com a finalidade de definir Operadores Diferenciais Parciais no espaço das Séries de Potências Formais. É demonstrado que o espaço de operadores se aplica por uma bijeção e isomorfismo algébrico sôbre um espaço de polinômios homogêneos de tipo limitado em E^*. Mostra-se ainda, neste capítulo, que as soluções para tais operadores podem ser aproximadas por soluções especiais chamadas de θS-exponencial polinomial.

(5.01) Definição : Para cada $T_m \in (\mathcal{P}_{b\theta}(^mE), \Gamma_{\theta,\mathfrak{S}})'$ e cada $P_n \in \mathcal{P}_{b\theta}(^nE)$, definimos a função

$$\gamma(T_m)(P_n) : E \longrightarrow \mathbb{C}$$

por $\gamma(T_m)(P_n)(x) = T_m\left[\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m(\tau_{-x}P_n)(o)\right]$ onde

$(\tau_{-x}P_n) = P_n(a+x)$ para todo $a \in E$.

(5.02) Observação : Na realidade podemos verificar que a função $\gamma(T_m)(P_n)$ é um polinômio (n-m)-homogêneo de tipo limitado em E se $n \geq m$ e $\{0\}$ se $n < m$.

(5.03) Definição : Um α-β-γ-tipo de S-holomorfia θ é um α-β-tipo que satisfaz as seguintes condições:

1) Se $P \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$, $\varphi \in E^*$ e $k \in \mathbb{N}$, então

$$\hat{\delta}^k P(\varphi) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^k E^*)$$

2) Se $T_m \in (\mathcal{P}_{b\theta}({}^m E), \Gamma_{\theta,\otimes})'$, então a aplicação $\gamma(T_m)$ aplica $\mathcal{P}_{b\theta}({}^n E)$ em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^{n-m} E)$ contínuamente.

(5.04) Exemplo : $(\mathcal{P}_{bN}({}^m E), \Gamma_{N,\otimes})_{m=0}^{\infty}$ é um α-β-γ-tipo de S-holomorfia.

(5.05) Definição : Seja θ um α-β-γ-tipo de S-holomorfia. $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) = \prod_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_{b\theta}({}^m E)$ é chamado de conjunto de todas as séries de potências $S\theta$-formais em E. Definimos multiplicação escalar e adição e consideramos a topologia produto Π em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$. Podemos identificar $H_{S\theta}(E)$ com elementos de $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ tomando, para cada $f \in H_{S\theta}(E)$, a série de Taylor ao redor do zero.

(5.06) <u>Definição</u> : Para cada $m \in \mathbb{N}$, Q_m é um <u>operador</u> <u>diferencial</u> <u>parcial</u> <u>m-homogêneo</u> em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ se satisfaz:

1) $Q_m: \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ é um operador linear contínuo.

2) Para cada $\xi \in E$ e cada $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$, $Q_m(\tau_{-\xi} P) = \tau_{-\xi} Q_m(P)$.

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Q_m(\mathcal{P}_{b\theta}(^nE)) \subset \mathcal{P}_{b\theta}(^{n-m}E)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotaremos por $PD_{S\theta}(E_m)$ o conjunto dos operadores diferenciais parciais m-homogêneos em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{S\theta}(E)$.

(5.07) <u>Definição</u> : Q é um <u>operador</u> <u>diferencial</u> <u>parcial</u> se é uma soma finita de operadores diferenciais parciais homogêneos. Denotamos por $PD_{S\theta}(E)$ o conjunto de todos os operadores diferenciais parciais em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{S\theta}(E)$.

(5.08) <u>Definição</u> : Para cada $Q \in PD_{b\theta}(E)$, definimos a função $\beta(Q): \mathcal{P}_{b\theta}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo $\beta(Q)(P) = Q(P)(o)$, para todo $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$.

(5.09) <u>Proposição</u> : Para cada $Q \in PD_{b\theta}(E_m)$ temos $\beta(Q) \in (\mathcal{P}_{b\theta}(E), T_{S\theta})'$.

Demonstração : Como Q é um operador então $\beta(Q)$ é linear.

Seja $Q \in PD_{b\theta}(E_m)$ e $P = \sum_{i=o}^{n} P_i$ com $P_i \in \mathcal{P}_{b\theta}({}^iE)$ $i = 0,1,\ldots,n$.

$\beta(Q)(P) = Q(P_o)(o) + \ldots + Q(P_{m-1})(o) + Q(P_m)(o) + Q(P_{m+1})(o) + \ldots +$

$+ Q(P_n)(o) = Q(P_m)(o) = Q(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m P)(o)$.

Seja $(P_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{P}_{b\theta}(E)$ com $\lim\limits_{\alpha \in A} P_\alpha = 0$ em $(H_{S\theta}(E), T_{S\theta})$. Como

Como Q é linear contínuo, existe $B \in \mathcal{B}_E$ e existe $c \geq 0$ tais que

$\left|\beta(Q)(P_\alpha)\right| = \left|Q(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m P_\alpha)(o)\right| \leq c \left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m P_\alpha(o)\right\|_{\theta,B}$. Logo

$\lim\limits_{\alpha \in A} \beta(Q)(P_\alpha) = 0$. Logo $\beta(Q) \in (\mathcal{P}_{b\theta}(E), T_{S\theta})'$.

(5.10) Proposição : A aplicação $Q \in PD_b(E_m) \longrightarrow \beta(Q) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^mE^*)$ é linear e bijetiva.

Demonstração : Pela proposição anterior, $\widehat{\beta(Q)}$ está bem definida. $\widehat{\beta(Q)}(\varphi) = \beta(Q)(\exp\varphi) = Q(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m(\exp\varphi))(o) =$

$= Q(\frac{1}{m!}\varphi^m) = \frac{1}{m!} Q(\varphi^m)$ para todo $\varphi \in E^*$.

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\widehat{\beta(Q)}(\lambda\varphi) = \frac{1}{m!} Q((\lambda\varphi)^m) = \lambda^m \frac{1}{m!} Q(\varphi^m) = \lambda^m \widehat{\beta(Q)}(\varphi)$.

Logo $\widehat{\beta(Q)}$ é uma função m-homogênea e como $\beta(Q) \in (\mathcal{P}_{b\theta}(E), T_{S\theta})'$, temos que $\widehat{\beta(Q)} \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$.

Se $Q_1, Q_2 \in PD_{S\theta}(E)$ com $\widehat{\beta(Q_1)} = \widehat{\beta(Q_2)}$, temos que $\beta(Q_1) = \beta(Q_2)$ pois a aplicação $\wedge$ é injetiva . Para todo $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$ e todo $x \in E$ temos $\beta(Q_1)(\tau_{-x}P) = \beta(Q_2)(\tau_{-x}P)$, logo $Q_1(P)(x) = Q_2(P)(x)$, logo $Q_1(P) = Q_2(P)$, e assim $Q_1 = Q_2$, provando que a aplicação é injetiva. Resta provar que a aplicação é sobrejetiva. Seja $P_m \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^mE^*)$. Então existe $R_m \in (\mathcal{P}_{b\theta}({}^mE), \Gamma_{\theta,\otimes})'$ tal que $\hat{R}_m = P_m$. Como θ é um α-β-γ-tipo de S-holomorfia, $\gamma(R_m)$ aplica $\mathcal{P}_{b\theta}({}^nE)$ continuamente em $\mathcal{P}_{b\theta}({}^{n-m}E)$. Logo $\gamma(R_m)$ tem uma extensão natural entre $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ e si mesmo. Mantendo a mesma notação para a extensão vamos mostrar que $\gamma(R_m): \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ é um operador diferencial m-homogêneo. Sejam $x, y \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$. Temos $(\tau_{-x}[\gamma(R_m)(P)](y) = \gamma(R_m)(P)(y+x) = R_m\left[\frac{1}{m!}\ \tau_{-x}(\hat{\delta}^m P(o)\right](y) = R_m\left[\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m(\tau_{-x}P)(o)\right](y) = \gamma(R_m)(\tau_{-x}P)(y)$. O que prova a condição 2) da definição (5.06). As condições 1) e 3) são evidentes. Temos então que $\gamma(R_m) \in PD_{b\theta}(E)$. Agora, $\widehat{\beta[\gamma(R_m)]}(\varphi) =$
$= \beta[\gamma(R_m)](\exp\varphi) = \gamma(R_m)(\exp\varphi)(o) = R_m(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m(\exp\varphi)(o)) =$

$R_m(\frac{1}{m!}\ \varphi^m) = \frac{1}{m!} R_m(\varphi^m) = \hat{R}_m(\varphi) = P_m(\varphi)$. O que termina a demonstração.

(5.11) <u>Corolário</u> : Existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de $PD_{b\theta}(E)$ e os elementos de $\mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$ dada por $Q \in PD_{b\theta}(E) \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}(Q)} \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$.

(5.12) <u>Definição</u> : Se Q_1 , $Q_2 \in PD_{b\theta}(E)$ definimos <u>convolução de Q_1 por Q_2</u> , $Q_1 * Q_2 : \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$, pondo $(Q_1 * Q_2)(f) = Q_1(Q_2(f))$, para toda $f \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$.

(5.13) <u>Proposição</u> : Se $Q_1, Q_2 \in PD_{b0}(E)$, então $Q_1 * Q_2$ está em $PD_{b\theta}(E)$.

<u>Demonstração</u> : É suficiente mostrar no caso de operadores diferenciais parciais homogêneos. Sejam $Q_1 \in PD_{b\theta}(E_{m_1})$ e $Q_2 \in PD_{b\theta}(E_{m_2})$. A condição 1) da definição (5.06) é evidente.

Se $x \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(^nE)$, temos $\tau_{-x}(Q_1 * Q_2)(P)) =$

$= \tau_{-x}(Q_1(Q_2(P)) = Q_1(\tau_{-x}(Q_2(P)) = Q_1(Q_2(\tau_{-x}P) = Q_1 * Q_2(\tau_{-x}P)$.

Agora, como $Q_2(\mathcal{P}_{b\theta}(^nE)) \subset \mathcal{P}_{b\theta}(^{n-m_2}E)$, temos que

$$Q_1 * Q_2(\mathcal{P}_{b\theta}(^nE) \subset Q_1(\mathcal{P}_{b\theta}(^{n-m_2}E) \subset \mathcal{P}_{b\theta}(^{n-m_2-m_1}E).$$

Então $Q_1 * Q_2$ é operador difernacial parcial $(m_1 + m_2)$-homogêneo.

(5.14) Proposição : Seja θ um α-β-γ-tipo de S-holomorfia.

Então:

1) $\mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$ é uma álgebra comutativa sob a operação de multiplieação ponto a ponto.

2) $PD_{b\theta}(E)$ é uma álgebra multiplicativa sob a operação de convolução.

3) A aplicação $Q \in PD_{b\theta}(E) \longrightarrow \widehat{\beta(Q)} \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$ é uma bijeção linear e um isomorfismo algébrico.

Demonstração : Completaremos a demonstração de 3). Para cada $x \in E$ e $\varphi \in E^*$ temos para todo $y \in E$, $(\tau_{-x}\exp\varphi)(y) = \exp\varphi(y+x) = \exp\varphi(x).\exp\varphi(y)$. Logo $\tau_{-x}\exp\varphi = \varphi(x)\exp\varphi$.

Se $Q_1, Q_2 \in PD_{b\theta}(E)$, temos $Q_2(\exp\varphi)(x) = Q_2(\tau_{-x}\exp\varphi)(o) =$
$= Q_2(\exp\varphi(x)\exp\varphi)(o) = \exp\varphi(x)Q_2(\exp\varphi)(o) = \exp\varphi(x)\widehat{\beta(Q_2)}(\varphi)$.

Agora, $[\widehat{\beta(Q_1 * Q_2)}](\varphi) = [\beta(Q_1 * Q_2)](\exp\varphi) = (Q_1 * Q_2)(\exp\varphi)(o)$

$$\left[Q_1(Q_2(\exp\varphi))\right](o) = \left[Q_1(\exp\varphi(\cdot)\widehat{\beta(Q_2)}(\varphi))\right](o) =$$

$$= \widehat{\beta(Q_2)}(\varphi)\left[Q_1(\exp\varphi)\right](o) = \widehat{\beta(Q_2)}(\varphi)\widehat{\beta(Q_1)}(\varphi).$$

Logo $\widehat{\beta(Q_1 * Q_2)} = \widehat{\beta(Q_1)}\widehat{\beta(Q_2)}$.

(5.15) <u>Lema</u> : Se P_1 e $P_2 \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$, $P_2 \neq 0$ e $P_3 = {}^{P_1}/P_2 \in \mathcal{H}(E^*)$, então $P_3 \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$.

<u>Demonstração</u> : Como $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*) \subset \mathcal{P}(E^*)$ e $P_3 \in \mathcal{H}(E^*)$ com $P_3 = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m P_3(o)$, temos que $P_2P_3 = \sum_{m=o}^{\infty} P_2 \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m P_3(o) = P_1$ e então $P_3 \in \mathcal{P}(E^*)$. Pela condição 1) de definição (5.06) é suficiente mostrar que para algum $\xi \in E^*$ e todo $m \in \mathbb{N}$ temos $\hat{\delta}^m P_3(\xi) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$

Seja $\xi \in E^*$ tal que $P_2(\xi) \neq 0$. Então

$$P_3(\xi) = {}^{P_1(\xi)}/\,P_2(\xi) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*).$$

Para $i = 1,2,3$. $\quad P_i(x) = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{1}{j!}\hat{\delta}^j P_i(\xi)(x-\xi)$.

Por hipótese $\quad \hat{\delta}^j P_i(\xi) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^jE^*)$, $j \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$.

$$\hat{\delta}^j P_3(\xi) \in \mathcal{P}({}^jE^*),\ j \in \mathbb{N}\ .$$

Como hipótese de indução, suponhamos que

$\hat{\delta}^j P_3(\xi) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$ para $j \leq k$. Como $\frac{1}{(j+1)!}\hat{\delta}^{(j+1)}P_3(\xi) =$

$$= \frac{\hat{\delta}^{(k+1)}P_1(\xi) - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!}\hat{\delta}^i P_2(\xi)\frac{1}{(k+1-i)}\hat{\delta}^{(k+1-i)}P_3(\xi)}{P_2(\xi)}$$

e como $\mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$ é uma álgebra obtemos $\hat{\delta}^{(k+1)}P_3(\xi)$ pertencendo a $\mathcal{P}_{b\theta^*}({}^{k+1}E^*)$. Logo para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $\hat{\delta}^m P_3(\xi) \in \mathcal{P}_{b\theta^*}({}^m E^*)$.

(5.16) Definição : Uma função $f: E \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se $S\theta$-exponencial polinomial se existe $\varphi \in E^*$, $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$ tal que

$f(x) = P(x)\exp\varphi(x)$ para todo $x \in E$.

(5.17) Proposição : Seja θ um α-β-γ-tipo de S-holomorfia e seja $Q \in PD_{b\theta}(E)$. Então toda solução de $Q(f)=0$ pode ser aproximada em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ por uma solução $S\theta$-exponencial polinomial.

Demonstração : Se $Q = 0$, como a série de Taylor de qualquer função em E converge em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$, temos que

$P\exp\varphi$; $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$, $\varphi \in E^*\}$ é denso em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) =$ núcleo de Q

Suponhamos que $Q \neq 0$. Seja $v \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)'$ tal que se $Q(P\exp(\varphi)) = 0$ então $v(P\exp(\varphi)) = 0$. Como $\widehat{\beta(Q)} \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*) \subset \mathcal{P}_{bN^*}(E^*)$, podemos associar à $\widehat{\beta(Q)}$ de maneira única, um operador $\mathcal{O}_Q = Q/_{H_{SN}(E)}$ em $(H_{SN}(E), T_{SN})$. Por outro lado, como $v \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)'$ temos que $\hat{v} \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*) \subset \mathcal{P}_{bN^*}(E^*)$ e podemos associar, de maneira única, um funcional linear contínuo $v_N = v/_{H_{SN}(E)}$ em $(H_{SN}(E), T_{SN})$. Assim, se $\mathcal{O}_Q(P\exp(\varphi)) = 0$, então $v_N(P\exp(\varphi)) = 0$. Temos por um resultado em [6], que $v_N/\widehat{\beta(\mathcal{O}_Q)} \in \mathcal{H}(E^*)$. Como $\hat{v} = \hat{v}_N$ e $\widehat{\beta(\mathcal{O}_Q)} = \widehat{\beta(Q)}$ vemos que $\hat{v}/\widehat{\beta(Q)} \in \mathcal{H}(E^*)$. Pelo lema(5.15) temos que $\hat{v}/\widehat{\beta(Q)} \in \mathcal{P}_{b\theta^*}(E^*)$. Pelo corolário (5.11), existem Q_1 e $Q_v \in PD_{b\theta}(E)$ tais que $\widehat{\beta(Q_v)} = \hat{v}$ e $\widehat{\beta(Q_1)} = \hat{v}/\widehat{\beta(Q)}$. Logo $\widehat{\beta(Q_v)} = \widehat{\beta(Q_1)}\widehat{\beta(Q)}$ de onde concluimos que $Q_v = Q_1 * Q$.

Agora, se $h \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$, com $Q(h) = 0$, temos que

$v(h) = [Q_v(h)](o) = (Q_1 * Q)(h)(o) = Q_1[Q(h)](o) = 0.$

Consideremos $\mathcal{L}$ o subespaço gerado por

$$\{P\exp\varphi \;;\; P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E),\ \varphi \in E^* \text{ e } Q(P\exp\varphi) = 0\}.$$

Ficou provado que todo funcional linear contínuo v em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$

que se anula em $\mathcal{L}$ anula-se também em todo elemento do núcleo de Q. Por uma aplicação do teorema de Hahn-Banach temos que $\mathcal{L}$ é denso neste núcleo.

(5.18) Proposição : Seja θ um α-β-γ-tipo de S-holomorfia e seja $Q \in PD_{b\theta}(E)$. Então, se $Q \neq 0$ temos que ${}^tQ$ é biunívoco e $Im({}^tQ)$ é fechado na topologia fraca em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b0}(E)'$ definida por $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$.

Demonstração : Inicialmente mostraremos que $Im({}^tQ) = \{f \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) \; ; \; Q(f) = 0\}^{\perp}$. Como $Q: \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E) \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ é linear temos que ${}^tQ: \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)' \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)'$ é definida por ${}^tQ(w) = v$ tal que $v(f) = w(Q)(f)$ para toda $f \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ e todo $w \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)'$. Se $h = \{f \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b0}(E); \; Q(f) = 0\} \subset \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$, temos $Q(h) = 0$. Se $v \in Im({}^tQ) \subset \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)'$ temos que $v(h) = {}^tQ(w(h)) = w(Q(h)) = w(o) = 0$. Logo v se anula nos elementos do núcleo de Q. Logo $v \in [\text{núcleo de } Q]^{\perp}$. Reciprocamente, seja $v \in [\text{núcleo de } Q]^{\perp} \subset \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)'$. Temos $v(P \exp \varphi) = 0$ sempre que $Q(P\exp\varphi) = 0$. Pela demonstração da proposição (5.17) existem $Q_1, Q_v \in PD_{b\theta}(E)$ tais que $Q_1 * Q = Q_v$ e $\beta(Q_v) = v$. Temos ainda

$^tQ\,\beta(Q_1)(f) = \beta(Q_1)(Q(f)) = Q_1[Q(f)](o) = [Q_1 * Q](f)(o) =$

$= Q_v(f)(o) = \beta(Q_v)(f) = v(f)$. Logo $v = {}^tQ\,\beta(Q_1)$ e então

$v \in Im({}^tQ)$. Temos

$$Im({}^tQ) = \{v \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)' ;\ v(f) = 0 \text{ se } Q(f) = 0\} =$$

$$\bigcap_{Q(f)=0} \{v \in \mathcal{F}\mathcal{P}_{b0}(E)' \ ;\ v(f) = 0\} .$$

Então $Im({}^tQ)$ é a intersecção de conjuntos que são fracamente fechados e, portanto, é fracamente fechado. Suponhamos que ${}^tQ(v) = 0$. Seja $Q_v \in PD_{b\theta}(E)$ tal que $\beta(Q_v) = v$. Para cada $x \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{b\theta}(E)$ temos que

$$[Q_v * Q](P)(x) = [(Q_v * Q)(\tau_{-x}P)](o) = [Q_v(Q(\tau_{-x}P))](o) =$$

$= \beta(Q_v)[Q(\tau_{-x}P)] = v[Q(\tau_{-x}P)] = 0$. Logo $Q_v * Q = 0$ e então $\widehat{\beta(Q_v)}\,\widehat{\beta(Q)} = 0$. Como $Q \neq 0$ e $\widehat{\beta(Q_v)}, \widehat{\beta(Q)} \in \mathcal{H}(E^*)$ temos que $\widehat{\beta(Q_v)} = \hat{v} = 0$. Assim ${}^tQ$ é biunívoca.

(5.19) <u>Corolário</u> : Se E possui uma base enumerável de elementos de $\mathcal{B}_E$ para seus limitados e $Q \in PD_{b\theta}(E)$ com $Q \neq 0$, então Q aplica $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ em si mesmo.

<u>Demonstração</u>: Nas condições do enunciado $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ é um espaço

de Fréchet. Pelo teorema de Dieudonne-Schwartz, para mostrar que uma $Q \neq 0$ é sobrejetora é suficiente provar que $I_m({}^tQ)$ é fechado pela topologia fraca em $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b0}(E)'$ dada por $\mathcal{F}\mathcal{P}_{b\theta}(E)$ e este fato ficou provado na proposição.

BIBLIOGRAFIA

[1] -J.A BARROSO; Topologia nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos - Anais da Academia Brasileira de Ciências, 43, 1971 .

[2] -C.P. GUPTA; Malgrange's theorem for nuclearly entire functions of bounded on a Banach space, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-Notas de Matemática Nº 37 (1966).

[3] -C.P. GUPTA & L. NACHBIN, On Malgrange's theorem for nuclearly functions (a ser publicado)

[4] -S. DINEEN, Holomorphy types on Banach space, Studia Mathematica, T. XXXIX.(1971).

[5] -G. KOTHE, Topological Vector Spaces I, Spring-Verlag Berlin. Heidelberg. New York 1969.

[6] -M.C. MATOS & L.NACHBIN, Aplicações Silva-holomorfas (a ser publicado).

[7] -L. NACHBIN, Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Springer-Verlag (1968).

[8] -L. NACHBIN, Holomorfia em Dimensão Infinita, Notas de aulas em curso no I.M.E.C.C. da UNICAMP.(1976).

[9] -O.T.W. PAQUES, Produto Tensorial de Funções Silva-Holomorfas e a Propriedade de Aproximação, Tese apresentada na Universidade Estadual de Campinas (1977).