



**Universidade Estadual de Campinas**

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

---

**Controle de Sistemas Lineares com Saltos  
Markovianos com Custo e Informação Associada  
aos Instantes de Salto**

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos  
requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia  
Elétrica.

**Yusef Rafael Cáceres Zúñiga**

**Bach. em Engenharia Eletrônica — FCE/PUCP**

em 15 de março de 2001 com a orientação do:

**Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val**

perante a banca examinadora:

**João Bosco Ribeiro do Val**

**Marcelo Dutra Fragoso**

**José Cláudio Geromel**

**Basílio Ernesto de Almeida Milani**

**FEEC/UNICAMP**

**LNCC/CNPq**

**FEEC/UNICAMP**

**FEEC/UNICAMP**

# Agradecimentos <sup>1</sup>

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val, pelas valiosas contribuições realizadas ao longo do desenvolvimento desta dissertação, que permitiram-me adquirir novos conhecimentos.

Também agradeço a meus pais, Nila e Antonio, e meus irmãos, Neil e Piero, por seu carinho e apoio constantes.

Em especial, expresso meus agradecimentos a Raquel Dutra, Cristiane Nespoli e Adriano Neto, os quais, através de suas críticas, correções, comentários e sugestões, auxiliaram-me na escrita desta dissertação.

De modo geral, agradeço a todos meus amigos e colegas de estudo que, de uma maneira ou de outra, tornaram agradável a minha estadia em Campinas.

---

<sup>1</sup>Ao CNPq pelo apoio financeiro

# Resumo

Esta dissertação trata de um problema de controle estocástico ótimo envolvendo sistemas lineares discretos no tempo que possuem um parâmetro de saltos aleatórios. Os saltos ou alteração entre os modos de operação do sistema ocorrem de acordo com uma cadeia de Markov, cujo estado pode não ser completamente observado pelo controlador. O problema de controle admite um número finito de saltos como horizonte e a estrutura de informação permite reconfigurar a ação de controle na forma de realimentação linear, observando-se os instantes de salto. Para esta situação de controle, introduz-se um conceito de estabilidade estocástica apropriado. A solução ótima para o problema com observação completa de estados da cadeia, e uma solução subótima para o problema com observação incompleta de estados da cadeia são apresentadas. A análise é feita baseada em equações de Riccati no primeiro caso e em desigualdades matriciais lineares no caso com observação incompleta.

# Abstract

This work deals with an stochastic optimal control problem involving discrete time linear systems that possesses a random jump parameter. These jumps or changes between the system operation modes happen according to a Markov chain and its states is not completely available to the controller. The control problem horizon is related to a finite number of jumps and the information structure allows to reconfigure the control action as a linear feedback, when the jump occurs. For this control situation, an appropriate concept of random stability is introduced. An optimal solution for the problem with complete chain states observation and a sub-optimal solution for the problem with incomplete state observation are presented. The analysis is made based on Riccati set of equations and **Linear Matrix Inequalities (LMI)** respectively.

# Notação

Símbolo	Descrição
$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	Conjuntos dos números naturais e reais, respectivamente.
$x \wedge y$	Mínimo entre $x$ e $y$ .
$\mathbb{R}^r$	Espaço real $r$ -dimensional.
$\mathcal{M}^{r \times s}$ ( $\mathcal{M}^r$ )	Espaço linear formado por todas as matrizes reais $r \times s$ ( $r \times r$ ).
$U'$	Transposta da matriz $U \in \mathcal{M}^{r \times s}$ .
$tr(U)$	Traço da matriz $U \in \mathcal{M}^r$ .
$\det(U)$	Determinante da matriz $U \in \mathcal{M}^r$ .
$U^{-1}$	Inversa da matriz $U \in \mathcal{M}^r$ .
$r_\sigma(U)$	Raio espectral da matriz $U \in \mathcal{M}^r$ .
$U \geq 0$ ( $U > 0$ )	Matriz $U \in \mathcal{M}^r$ semidefinida positiva (definida positiva).
$\mathfrak{X} = \{1, \dots, E\}$	Espaço de estados da cadeia de Markov, $E$ elemento máximo (finito).
$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_E)$	Coleção de matrizes $U_i \in \mathcal{M}^{r \times s}$ para todo $i \in \mathfrak{X}$ .
$\mathbb{M}^{r \times s}$ ( $\mathbb{M}^r$ )	Espaço linear formado por todas as coleções de matrizes $\mathbf{U}$ (quando as matrizes $U_i \in \mathcal{M}^r$ para todo $i \in \mathfrak{X}$ ).
$\mathbf{U} \geq \mathbf{V}$ ( $\mathbf{U} > \mathbf{V}$ )	Matriz $(U_i - V_i) \in \mathcal{M}^r$ semidefinida positiva (definida positiva), para todo $i \in \mathfrak{X}$ .
$\ \mathbf{U}\ _2^2 = \sum_{i \in \mathfrak{X}} tr(U_i' U_i)$	Norma da coleção $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^{r \times s}$ .
$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{i \in \mathfrak{X}} tr(U_i' V_i)$	Produto interno da coleção $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^{r \times s}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{M}^{r \times s}$ .
$\mathcal{M}^{r0}$ ( $\mathcal{M}^{r+}$ )	$\mathcal{M}^{r0} \subset \mathcal{M}^r$ ( $\mathcal{M}^{r+} \subset \mathcal{M}^r$ ) onde a matriz $U_i \in \mathcal{M}^r$ é tal que $U_i = U_i' \geq 0$ para todo $i \in \mathfrak{X}$ ( $U_i = U_i' > 0$ para todo $i \in \mathfrak{X}$ ).

$\mathbb{M}^0$ ( $\mathbb{M}^{r+}$ )	$\mathbb{M}^0 \subset \mathbb{M}^r$ ( $\mathbb{M}^{r+} \subset \mathbb{M}^r$ ) onde a matriz $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^r$ é tal que $U_i \in \mathcal{M}^0$ para todo $i \in \mathfrak{X}$ ( $U_i \in \mathcal{M}^{r+}$ para todo $i \in \mathfrak{X}$ ).
$\mathcal{E}_i(\mathbf{U}) = \sum_{j \neq i} p_{ij} U_j$	Operador sobre a coleção $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^0$ .
$\mathcal{L}_i(\mathbf{U}) = p_{ii}^{-1} \mathcal{E}_i(\mathbf{U})$	Operador sobre a coleção $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^0$ .
$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$	Função delta de Dirac.
$\star$	Correspondente simétrico de um bloco numa matriz simétrica.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Notação</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Resenha Histórica . . . . .	6
1.2 Apresentação . . . . .	7
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>9</b>
2.1 Caracterização do Processo . . . . .	9
2.2 Estabilidade Estocástica . . . . .	14
2.3 Custo Quadrático . . . . .	20
<b>3 Controle por Realimentação Linear de Estado</b>	<b>31</b>
3.1 Observação Completa dos Estados da Cadeia . . . . .	32
3.1.1 Problema com uma Transição da Cadeia . . . . .	33
3.1.2 Problema com Múltiplas Transições da Cadeia . . . . .	36
3.1.3 Formulação Convexa . . . . .	37
3.2 Sem Observação dos Estados da Cadeia . . . . .	40
3.2.1 Problema com uma Transição da Cadeia . . . . .	41
3.2.2 Problema com Múltiplas Transições da Cadeia . . . . .	45
3.3 Observação por Agrupamento dos Estados da Cadeia . . . . .	48
3.3.1 Problema com uma Transição da Cadeia . . . . .	49
3.3.2 Problema com Múltiplas Transições da Cadeia . . . . .	50
3.4 Resultados Numéricos . . . . .	52

<b>4 Conclusão</b>	<b>58</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>60</b>
<b>A Processos Estocásticos</b>	<b>63</b>
<b>B Resultados Auxiliares</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A análise e o projeto de controladores para sistemas dinâmicos são realizados com base em modelos matemáticos que descrevem o comportamento do sistema através de relações entre saída e entrada. Os modelos podem ser desenvolvidos aplicando as leis físicas que governam o sistema (*Modelos Físicos*) ou baseados em observações da saída (*Modelos Empíricos ou Identificação*). Via de regra, algumas hipóteses simplificadoras da descrição (linearidade, estacionariedade, etc.) são introduzidas com o propósito de viabilizar a análise e o tratamento matemático. Como consequência deste fato e também devido a interações complexas existentes no sistema (perturbações externas, efeitos dinâmicos não conhecidos, etc.), sempre haverá discrepâncias entre o modelo e o sistema dinâmico por ele descrito, tornando-o impreciso e/ou incompleto.

Com o propósito de obter um modelo de melhor qualidade, capaz de reproduzir adequadamente a saída do sistema, é preciso caracterizar o erro (ou incerteza) produzido no processo de modelagem e incorporar esta informação ao modelo. Desta maneira, quando o controlador desenvolvido com base no “modelo incerto” for aplicado ao sistema, as especificações do seu projeto, principalmente a estabilidade, serão mantidas.

A caracterização das incertezas, que irão refletir a realidade física do sistema, pode ser efetuada através de diversos métodos, cada um deles contendo uma certa “medida” de incerteza. Tradicionalmente, utiliza-se a teoria de processos estocásticos. Em particular, uma classe de modelos estocásticos, que permite descrever as incertezas originadas por mudanças abruptas e imprevisíveis nos parâmetros da estrutura do sistema, é a dos **Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM)**.

Um SLSM é formado por um conjunto finito ou infinito enumerável de sistemas lineares, descrevendo cada um deles um possível modo de operação do sistema dinâmico. Um



parâmetro, índice do modo, é associado ao estado de uma cadeia de Markov que define a probabilidade de transição de um modo de operação do sistema linear para outro.

Seja  $\mathfrak{X} = \{1, \dots, E\}$  um conjunto índice e considere as coleções de  $E$  matrizes reais

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_1, \dots, A_E), \quad A_i \in \mathcal{M}^n, & \mathbf{B} &= (B_1, \dots, B_E), \quad B_i \in \mathcal{M}^{n \times p}, \\ \mathbf{C} &= (C_1, \dots, C_E), \quad C_i \in \mathcal{M}^{q \times n}, & \mathbf{D} &= (D_1, \dots, D_E), \quad D_i \in \mathcal{M}^{q \times p}. \end{aligned}$$

Considere uma cadeia de Markov homogênea a tempo discreto  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ , com espaço de estados  $\mathfrak{X} = \{1, \dots, E\}$  e matriz de probabilidade de transição  $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ ,  $\forall i, j \in \mathfrak{X}$ , onde o elemento  $p_{ij}$  é definido por

$$P(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i) = p_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathfrak{X}$$

satisfazendo as seguintes condições

$$\sum_{j \in \mathfrak{X}} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathfrak{X}; \quad p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathfrak{X}.$$

A distribuição inicial  $\mu_0$  da cadeia é definida por

$$\mu_0 = (\mu_1, \dots, \mu_E)$$

onde  $\mu_i = P(\theta_0 = i)$ ,  $\forall i \in \mathfrak{X}$ .

O SLSM é um sistema estocástico a tempo discreto, definido no espaço de probabilidade fundamental  $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_k\}, P)$ , caracterizado na forma

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\theta_k} x_k + B_{\theta_k} u_k, & x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta_0 \sim \mu_0 \\ y_k = C_{\theta_k} x_k + D_{\theta_k} u_k, & k \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  são os estados do processo assumindo valores em  $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é uma condição inicial fixa, mas arbitrária;  $\{u_k; k \geq 0\}$  e  $\{y_k; k \geq 0\}$  são os processos de controle e de saída, respectivamente.

Sempre que  $\theta_k = i$ , o SLSM  $\mathcal{S}$  evolui de acordo com o “modo  $i$ ”, identificando-se

$$A_{\theta_k} = A_i, \quad B_{\theta_k} = B_i, \quad C_{\theta_k} = C_i \quad \text{e} \quad D_{\theta_k} = D_i.$$

Como o estado do SLSM possui tanto uma componente discreta associada ao parâmetro de saltos  $\theta_k$  como também uma componente contínua associada ao estado linear  $x_k$ , os SLSM encontram-se na categoria dos sistemas híbridos.

Como exemplo e motivação para este trabalho, propõe-se o seguinte problema de controle reconfigurável.

**Exemplo 1.0.1.** Suponha que certo sistema controlado esteja sujeito a falhas ou degradação no desempenho, devido a falhas em componentes, conexões, vazamentos, etc. Essas falhas ocorrem de forma aleatória ao longo do tempo e são percebidas apenas nos instantes de sua ocorrência. Assuma que, mesmo após acontecerem algumas falhas, o sistema ainda possa ser operado de maneira satisfatória sem necessidade de paralisá-lo para manutenção. Nesta situação, observa-se a alteração de desempenho nos instantes de ocorrência das falhas e procura-se reconfigurar a ação de controle. A natureza da falha é tipicamente desconhecida ou conhecida imperfeitamente de forma que se deve levar em consideração o modelo estocástico de ocorrência de falhas ao se adotar a ação correspondente. Admitindo um número total de falhas  $N$  que se deseja tolerar antes de paralisar completamente o sistema para a manutenção geral ou a eventual troca do equipamento, deseja-se determinar um número  $N$  de controladores, de forma que o impacto no desempenho do sistema, expresso através do valor esperado de um certo custo, seja minimizado pelo uso seqüenciado destes controladores ao longo de cada período entre falhas.

Neste cenário, o instante no qual acontece a falha é determinado por uma transição de estado (ou salto) da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ . Assim, a seqüência  $\mathcal{T}^N = \{T_n; n = 0, \dots, N\}$  de  $\{\mathfrak{T}_k\}$ -tempos de parada definida por

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_n &= \min\{k > T_{n-1} : \theta_k \neq \theta_{T_{n-1}}\}, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{1.2}$$

contém, o instante inicial e, segundo a ordem em que acontecem, os instantes de ocorrência de cada falha ao longo do período de operação do sistema.

Uma vez que o componente prejudicado pode não ser identificado perfeitamente no instante de ocorrência da falha, o espaço de estados  $\mathfrak{X}$  da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  é parcialmente conhecido. Sendo assim, assume-se, neste trabalho, que os estados podem ser agrupados em dois conjuntos: um contendo os estados observados  $\mathfrak{X}_o$  (acessíveis ao controlador) e o outro, os estados não-observados  $\mathfrak{X}_h$ . Dessa forma, o espaço de estados  $\mathfrak{X}$  admite uma representação produto expressa por

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_h \times \mathfrak{X}_o$$

sendo cada estado  $i \in \mathfrak{X}$  representado através do par  $(i_h, j_o)$ , onde  $i_h \in \mathfrak{X}_h$  denota a componente não-observada do estado da cadeia de Markov e  $j_o \in \mathfrak{X}_o$  denota a componente observada do estado. Além disso, defina

$$\mathfrak{X}_{j_o} = \mathfrak{X}_h \times \{j_o\}$$

como sendo o conjunto de todos os possíveis estados em que se encontraria a cadeia dado que  $j_o$  é observado. Portanto, os  $\mathfrak{X}_{j_o}, \forall j_o \in \mathfrak{X}$ , formam uma cobertura disjunta sobre  $\mathfrak{X}$ . Finalmente, os estados observados em  $\mathfrak{X}_o$  são identificados por  $j_1, j_2, \dots, j_{E_o}$ .

Assumindo que, em cada instante  $k$ , o estado linear  $x_k$  é totalmente conhecido e o estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov apresenta a estrutura de observação anteriormente descrita, define-se as seguintes classes de controle:

**Com Observação dos estados da cadeia:** Considerando o espaço de estados  $\mathfrak{X}$  com  $\mathfrak{X}_h = \emptyset$ , implica que  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_o$ . Desta forma o estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov é completamente conhecido. Nesta situação, a lei de controle depende diretamente dos estados  $\theta_k$  da cadeia

$$u_k = \left( \sum_{n=0}^{N-1} K_{\theta_k}^n \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}\}} \right) x_k, \quad k \geq 0. \quad (1.3)$$

Denota-se esta classe de ganhos de controle por  $\mathcal{K}_\theta$ , sendo um elemento dessa classe representado por

$$(\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}) \in \mathcal{K}_\theta$$

onde  $\mathbf{K}^n = (K_1^n, \dots, K_E^n)$  e  $K_i^n \in \mathcal{M}^{p \times n}$ ,  $i = 1, \dots, E$ .

**Sem Observação dos estados da cadeia:** Considerando o espaço de estados  $\mathfrak{X}$  com  $\mathfrak{X}_o = \emptyset$ , implica que  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_h$ . Desta forma o estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov não é conhecido. Nesta situação, opta-se pela seguinte lei de controle

$$u_k = \left( \sum_{n=0}^{N-1} K^n \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}\}} \right) x_k, \quad k \geq 0. \quad (1.4)$$

Denota-se esta classe de ganhos de controle por  $\mathcal{K}$ , sendo um elemento dessa classe representado por

$$(K^0, \dots, K^{N-1}) \in \mathcal{K}$$

onde  $K^n \in \mathcal{M}^{p \times n}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

**Observação por agrupamento dos estados da cadeia:** Considerando o espaço de estados  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_h \times \mathfrak{X}_o$ , é possível que apenas parte dos estados  $\theta_k$  da cadeia de Markov é conhecida. Nesta situação, opta-se pela seguinte lei de controle

$$u_k = \left( \sum_{j \in \mathfrak{X}_o} \sum_{n=0}^{N-1} K_j^n \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}, \theta_k \in \mathfrak{X}_j\}} \right) x_k, \quad k \geq 0. \quad (1.5)$$

Denota-se esta classe de ganhos de controle por  $\mathcal{K}_a$ , sendo um elemento dessa classe representado por

$$(\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}) \in \mathcal{K}_a$$

onde  $\mathbf{K}^n = (K_1^n, \dots, K_{E_0}^n)$  e  $K_j^n \in \mathcal{M}^{p \times n}$ ,  $j = 1, \dots, E_0$ .

Note que a lei de controle em (1.4) ((1.5)) é adequada à estrutura de informação limitada com respeito ao estado da cadeia de Markov, na qual é permitida a observação dos instantes  $T_n$  em que ocorrem as transições de estado sem que se observe o estado  $\theta_k$  (ou apenas  $\theta_k \in \mathfrak{X}_j$ ) da mesma. Além dessa informação, conhece-se também a distribuição de probabilidade inicial  $\mu_0$ . Assim, o ganho de realimentação  $K^n$  ( $K_j^n$ ) que opera no sistema durante o intervalo de tempo  $T_n \leq k < T_{n+1}$  não depende do estado  $\theta_k$  ( $\theta_k \in \mathfrak{X}_j$ ) da cadeia de Markov.

Para definir o custo de operação associado ao sistema  $\mathcal{S}$ , emprega-se o seguinte funcional de custo quadrático

$$J^N(x(0), u(\cdot)) = E \left[ \sum_{k=0}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\theta_{T_N}}^{1/2} x_{T_N}\|^2 \right] \quad (1.6)$$

onde  $E[\cdot]$  é o valor esperado definido no espaço básico de probabilidade e  $\mathbf{S} \in \mathbb{M}^{n_0}$  é o custo final.

Nesta dissertação, considerando que a matriz de probabilidade de transição apresenta a seguinte hipótese adicional<sup>1</sup>

$$0 < p_{ii} < 1, \quad \forall i \in \mathfrak{X},$$

serão tratados os seguintes tópicos:

- (i) A análise da estabilidade estocástica, isto é:

*Determinar as condições que garantem a estabilidade estocástica do SLSM  $\mathcal{S}$ .*

- (ii) O projeto do controlador por realimentação linear de estados, isto é:

*Determinar, para o SLSM  $\mathcal{S}$ , as sequências dos ganhos de realimentação linear pertencentes às classes  $\mathcal{K}_\theta$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}_a$ , de forma que o custo em (1.6) seja minimizado.*

---

<sup>1</sup>Uma vez que permite apresentar de forma clara e concisa os resultados obtidos.

A solução do problema proposto requer a análise prévia da estabilidade estocástica do SLSM. Para tanto, os conceitos de estabilidade são definidos adequadamente e estabelecem-se as condições que asseguram esta característica intrínseca do sistema.

O projeto do controlador na classe  $\mathcal{K}_\theta$ , isto é, considerando que o mesmo tem acesso ao estado  $\theta_k$ , é obtida com base na teoria dos sistemas lineares, determinando-se a seqüência ótima dos ganhos do controle através de técnicas de programação dinâmica e equações de Riccati.

A solução do problema para as classes de controladores  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}_a$ , isto é, quando o controlador não tem acesso completo ao estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov, é obtida adotando-se uma lei de controle com complexidade restrita que seja coerente com o padrão de informação disponível, o que permite simplificar a análise do problema proporcionando soluções cuja implementação é factível. Nesta linha, foram tratados problemas de controle  $H_2$  em (Costa et al., 1997; do Val et al., 2000) e problemas de controle retrocedente em (do Val e Basar, 1999). Neste contexto, a seqüência de ganhos subótima pode ser determinada através de um procedimento iterativo baseado no método LMI<sup>2</sup>. Outra alternativa de solução consiste em aplicar métodos estocásticos gerais (Ceci e Gerardi, 1998), que provêm soluções de difícil realização e cálculo. Sendo assim, adota-se a linha de trabalho inicialmente mencionada para as classes admissíveis de ganhos de controle  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}_a$ .

## 1.1 Resenha Histórica

Os primeiros trabalhos envolvendo os SLSM foram realizados no início da década de sessenta, por Krasovskii e Lidskii. Sua versão discreta, que por certo é uma extensão dos estudos realizados em tempo contínuo, foi apresentada em (Blair e Swarder, 1975). Desde então, têm-se obtido significativos avanços nesta área da teoria de controle, com grande apelo a aplicações (vide (Mariton, 1993)).

Em particular, o problema **Linear Quadrático (LQ)** para os SLSM, usualmente estudado

---

<sup>2</sup>O método LMI (Boyd et al., 1994; Geromel e de Oliveira, 1999; VanAntwerp e Braatz, 2000) consiste em reformular um dado problema como um problema de otimização com função objetivo linear e restrições matriciais lineares, proporcionando uma solução numérica a problemas de controle cuja solução analítica baseada em equações de Riccati é difícil de ser obtida ou não existe. Esta ferramenta numérica utiliza algoritmos de pontos interiores extremamente eficientes. Na prática, o problema é considerado como satisfatoriamente resolvido quando é expresso na forma de um problema de otimização convexa.

na literatura, é associado ao índice de desempenho quadrático

$$\tilde{J}^n(x(0), u(\cdot)) = E \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\theta_n}^{1/2} x_n\|^2 \right], \quad (1.7)$$

o qual difere do índice proposto em (1.6).

Assumindo que o estado do SLSM é conhecido, valiosas contribuições, que aprimoram o entendimento das relações entre o estado discreto ( $\theta_k$ ) e o contínuo ( $x_k$ ), têm sido efetuadas. A estabilidade estocástica do problema LQ quando  $n \rightarrow \infty$  tem sido amplamente analisada em diversos trabalhos (Ji e Chizeck, 1990; Ji et al., 1991; Costa e Fragoso, 1993). Em (Ji e Chizeck, 1990), a condição que garante a estabilidade estocástica do sistema é equivalente a encontrar um conjunto de matrizes definidas positivas que satisfazem um sistema de desigualdades de Lyapunov acopladas. Um estudo mais detalhado, realizado com base na teoria de operadores, pode ser encontrado em (Costa e Fragoso, 1993), onde se considera uma entrada de ruído independente e estacionário no sentido amplo.

O projeto do controlador para o problema LQ com horizonte infinito ( $n = \infty$ ) é equivalente a encontrar um conjunto de matrizes semi-definidas positivas que satisfaçam um sistema de **E**quações **A**lgébricas de **R**iccati **A**copladas (EARA), o qual permite caracterizar a lei de controle ótima estabilizante no sentido quadrático médio. Condições necessárias e suficientes para determinar a existência e unicidade destas soluções são estabelecidas em (Ji e Chizeck, 1988; Costa, 1996; Costa e Fragoso, 1995). Em (Chizeck et al., 1986), mostrou-se que o sistema de EARA não pode ser expresso através de uma única equação de Riccati com maior dimensão de forma que o problema não pode ser reduzido diretamente à solução de um problema determinístico adequado. Assim, diversos algoritmos numéricos têm sido propostos para a solução do problema LQ com horizonte infinito. Como exemplo, pode-se citar (Abou-Kandil et al., 1995; do Val et al., 1998). Particularmente, em (El Ghaoui e Ait Rami, 1996; Costa et al., 1997; Costa et al., 1999; do Val et al., 2000), o projeto do controlador é formulado como um problema de otimização convexa sob restrições do tipo LMI, cujas vantagens tornam-se evidentes quando restrições adicionais são impostas ao projeto do controlador.

## 1.2 Apresentação

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. Este capítulo apresenta a formulação geral do problema bem como a motivação para seu estudo, além de servir como guia de leitura.

**Capítulo 2:** Considerando o SLSM  $\mathcal{S}$  sem a entrada de controle (SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ ), as características relevantes do processo conjunto são apresentadas. A análise da estabilidade estocástica do sistema é realizada e o valor esperado do custo quadrático é avaliado.

**Capítulo 3:** Aborda o problema de controle proposto determinando a seqüência de ganhos na lei de controle com realimentação linear de estados. Inicia estudando os dois casos extremos, isto é, quando o controlador tem acesso ao estado da cadeia e quando o mesmo só observa os instantes de salto, sem contudo observar o estado da cadeia. Neste último caso, é obtida uma lei de controle subótima.

**Capítulo 4:** Apresenta as conclusões, contribuições e propostas para trabalhos futuros.

**Apêndice A:** Contém as definições básicas da teoria de Processos Estocásticos.

**Apêndice B:** Provê os resultados auxiliares utilizados ao longo desta dissertação.

## Capítulo 2

# Conceitos Básicos

O principal objetivo deste capítulo é apresentar as características básicas do problema de controle proposto, que permitirão estabelecer a estrutura conceitual do mesmo. A fim de simplificar a análise e adotar o foco apropriado, assume-se o SLSM  $\mathcal{S}$  sem a entrada de controle  $\{u_k; k \geq 0\}$  (SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ ).

A análise inicia-se na Seção 2.1, mostrando que o processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  é markoviano e satisfaz a propriedade forte de Markov. Na Seção 2.2, definem-se os conceitos de estabilidade estocástica relacionados ao problema, determinando-se as condições que garantem a estabilidade do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ . Segue-se o cálculo do valor esperado do custo quadrático e sua relação com um gramiano de observabilidade, a serem apresentados na Seção 2.3.

### 2.1 Caracterização do Processo

Considere o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  a tempo discreto descrito pela equação estocástica

$$\mathcal{S}_0 : x_{k+1} = A_{\theta_k} x_k, \quad k \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta_0 \sim \mu_0 \quad (2.1)$$

onde  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  é o processo conjunto com espaço de estados  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{X}$ . A matriz  $A_{\theta_k} \in \mathcal{M}^n$  é um elemento da coleção  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_E)$ , a qual é indexada pelo estado da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ , conforme apresentado no Capítulo 1.

Com o intuito de determinar algumas características básicas do processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$ , serão apresentados alguns resultados preliminares.



### Processo de Saltos

Considerando a seqüência  $\mathcal{T} = \{T_n; n \geq 0\}$  de  $\{\mathfrak{X}_k\}$ -tempos de parada dada por

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_n &= \min\{k > T_{n-1} : \theta_k \neq \theta_{T_{n-1}}\}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

a cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  é um processo constante por partes tomando valores em  $\mathfrak{X}$ , onde as discontinuidades acontecem numa seqüência crescente de tempos  $T_n \in \mathcal{T}$  (Processo de Saltos). Isso é ilustrado na Figura 2.1.

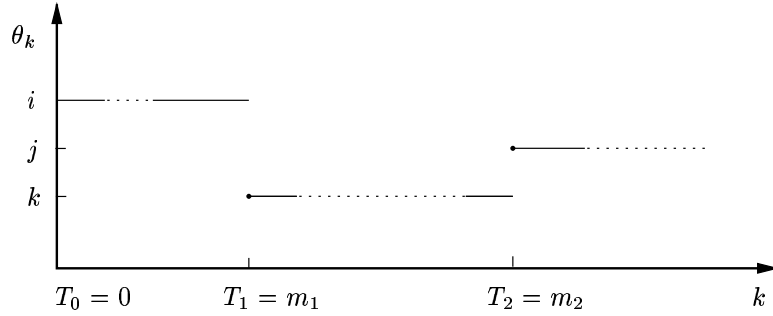


Figura 2.1: Processo de Saltos da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ .

Com o propósito de caracterizar a cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  neste contexto, apresenta-se o seguinte resultado auxiliar. Denota-se  $T_1$  em  $\mathcal{T}$  por  $T$ , por questão de simplicidade.

#### Lema 2.1.1.

(i) Para todo  $m \geq 1$  e  $i \in \mathfrak{X}$

$$P(T = m \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{m-1}(1 - p_{ii}). \quad (2.2)$$

(ii) Para todo  $m \geq 1$  e  $i, j \in \mathfrak{X}$

$$P(\theta_m = j \mid \theta_0 = i, T = m) = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} \mathbb{1}_{\{j \neq i\}}. \quad (2.3)$$

*Demonstração.*

(i) Para  $m \geq 1$  fixo, o evento  $\{T = m\}$  implica que  $\{\theta_m \neq \theta_{m-1} = \theta_{m-2} = \dots = \theta_1 = \theta_0\}$ . Substituindo este resultado no lado esquerdo da equação (2.2) e aplicando-se a fórmula

seqüencial de Bayes, seguida da propriedade de Markov, obtém-se

$$\begin{aligned} P(T = m \mid \theta_0 = i) &= P(\theta_m \neq i, \theta_{m-1} = i, \dots, \theta_1 = i, \theta_0 = i \mid \theta_0 = i) \\ &= P(\theta_m \neq i \mid \theta_{m-1} = i) p_{ii}^{m-1} \\ &= p_{ii}^{m-1} (1 - p_{ii}). \end{aligned}$$

(ii) Considere  $m \geq 1$  e  $i, j \in \mathfrak{X}$  fixos. Para  $j = i$ , da definição de  $T$  decorre que

$$P(\theta_m = j \mid \theta_0 = i, T = m) = 0. \quad (2.4)$$

Caso contrário, se  $j \neq i$ , aplicando a propriedade da probabilidade condicional, tem-se

$$P(\theta_m = j \mid \theta_0 = i, T = m) = \frac{P(\theta_m = j, T = m \mid \theta_0 = i)}{P(T = m \mid \theta_0 = i)}. \quad (2.5)$$

O cálculo da probabilidade no numerador da equação (2.5) é efetuado de maneira similar ao item anterior, obtendo-se

$$P(\theta_m = j, T = m \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{m-1} p_{ij}. \quad (2.6)$$

Por sua vez, a probabilidade correspondente ao denominador foi avaliada no item (i). Logo, substituindo (2.2) e (2.6) em (2.5), obtém-se (2.3).

□

Assim, conclui-se que a cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  pode ser expressa de forma equivalente através de duas seqüências de variáveis aleatórias:

- A seqüência de estados  $\Phi = \{\phi_n; n \geq 0\}$ , definida por

$$\phi_n = \theta_k, \quad T_n \leq k < T_{n+1} \quad (2.7)$$

com probabilidade de transição entre estágios subsequentes expressa por

$$P(\phi_{n+1} = j \mid \phi_n = i) = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} \mathbb{1}_{\{i \neq j\}}, \quad n \geq 0, \quad (2.8)$$

a qual é denominada de cadeia de Markov imersa, e

- A seqüência dos tempos de salto  $\mathcal{T} = \{T_n; n \geq 0\}$ , que determina o tempo de permanência no estado  $\phi_n = i$ , dado por  $T_{n+1} - T_n$ . Estes intervalos de tempo possuem distribuição de probabilidade do tipo geométrica de parâmetro  $1 - p_{ii}$  (probabilidade de sair do estado  $\phi_n = i$ ), expressa por

$$P(T_{n+1} - T_n > m \mid \phi_n = i) = p_{ii}^m; \quad n \geq 0, \quad m \geq 1. \quad (2.9)$$

### Processo Conjunto

O resultado principal desta subseção é apresentado no Corolário 2.1.1, onde se demonstra que o processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  é Markov forte, isto é, satisfaz a propriedade de Markov para qualquer tempo de parada  $\tau$  do processo. Este resultado é obtido como consequência dos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2, reproduzidos a seguir.

**Teorema 2.1.1.** (Brémaud, 1999, pág. 58) Considere as seqüências de variáveis aleatórias  $\{v_k; k \geq 0\}$  e  $\{\omega_k; k \geq 1\}$ , ambas com valores em  $\mathbb{R}^n$ , tais que

$$P(\omega_{k+1} | v_k, \dots, v_0, \omega_k, \dots, \omega_1) = P(\omega_{k+1} | v_k), \quad \forall v_k, \omega_k \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

independente do valor de  $k$ .

Além disso, seja  $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função mensurável qualquer. Então, a equação de recorrência

$$v_{k+1} = f(v_k, \omega_{k+1}) \quad (2.11)$$

define um Processo de Markov homogêneo.

*Demonstração.* A demonstração deste teorema consiste em verificar se a história do processo estocástico, gerado através da equação (2.11), está completamente representada pelo estado presente, isto é

$$\begin{aligned} P(v_{k+1} | v_k, \dots, v_0, \omega_k, \dots, \omega_1) &= P(f(v_k, \omega_{k+1}) | v_k, \dots, v_0, \omega_k, \dots, \omega_1) \\ &= P(f(v_k, \omega_{k+1}) | v_k). \end{aligned}$$

A última igualdade baseia-se no fato de que a função da variável aleatória  $\omega_{k+1}$  é condicionalmente independente de  $v_k, \dots, v_0, \omega_k, \dots, \omega_1$  dado  $v_k$ . Como consequência,  $\{v_k; k \geq 0\}$  é um Processo de Markov homogêneo uma vez que a última igualdade não depende de  $k$ .  $\square$

**Teorema 2.1.2.** (Meyn e Tweedie, 1993, pág. 72) Um Processo de Markov homogêneo a tempo discreto satisfaz a propriedade forte de Markov.

*Demonstração.* Este resultado é simples consequência da decomposição da esperança no lado esquerdo da equação (A.2) sobre os conjuntos de cobertura  $\{\tau = k\}$ ,  $k \geq 0$ , onde  $\tau$  é o tempo de parada. O lado direito da mesma equação é obtido aplicando-se a propriedade de Markov em cada um dos tempos fixos  $k$ , ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} E[h(v_k, v_{k+1}, \dots) \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} | \mathfrak{F}_k] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[h(v_k, v_{k+1}, \dots) \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} | v_k] \\ &= E[h(v_0, v_1, \dots) | v_0 = v_\tau]. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.1.1.** O processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  é um Processo de Markov forte.

*Demonstração.* Defina o processo  $\{\delta_k; k \geq 1\}$ , onde

$$\delta_{k+1} = \theta_{k+1} - \theta_k, \quad k \geq 0, \quad (2.12)$$

o qual toma valores finitos em  $\Gamma = \{-E, \dots, -1, 0, 1, \dots, E\}$  e possui distribuição de probabilidade  $P(\delta_{k+1} = d \mid \theta_k = i) = p_{i(i+d)}$ .

Note que a evolução da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  no tempo é determinada pelo estado inicial  $\theta_0$  e pelo processo  $\{\delta_k; k \geq 1\}$ , permitindo escrever a equação de estados do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\theta_k} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{k+1} \end{bmatrix}; \quad k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \theta_0 \sim \mu_0. \quad (2.13)$$

Além disso, a probabilidade

$$P(\delta_{k+1} = d \mid \theta_k = i, \dots, \theta_0, \delta_k, \dots, \delta_1) = P(\theta_{k+1} = i + d \mid \theta_k = i) = p_{i(i+d)}, \quad \forall i + d \in \mathfrak{X}$$

só depende do estado  $\theta_k = i$ .

Desta forma, considerando

$$v_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \omega_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_k \end{bmatrix}$$

na equação (2.13) e aplicando sucessivamente os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2, conclui-se que o processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$ , além de ser markoviano, satisfaz a propriedade forte de Markov. □

A seguir, incluindo-se artificialmente o estado  $\Delta$ , denominado de estado terminal, descreve-se uma possível realização do processo conjunto  $k \rightarrow (x(k), \theta(k))$ .

A partir do ponto  $(x_0, \theta_0) = (x(0), i) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$ , o estado  $\theta(k)$  da cadeia de Markov permanece no estado  $i$  por um intervalo de tempo geometricamente distribuído com parâmetro  $1 - p_{ii}$ . Neste intervalo, o estado linear  $x(k)$  segue uma trajetória determinística, regida pela equação de estado do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$

$$x(k+1) = A_i x(k). \quad (2.14)$$

No instante do salto  $T_1 = k$ , o estado  $\theta(k)$  da cadeia de Markov passa a ocupar o estado  $j$  com probabilidade expressa em (2.8).

Considerando que o processo finaliza imediatamente após a ocorrência da primeira transição da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ , isto é,  $N = 1$ , o estado do sistema passa a ocupar o estado terminal  $\Delta$ , ou seja,  $(x(k), \theta(k)) \in \Delta$ ,  $k \geq T_1 + 1$ . Neste caso, denomina-se Processo Conjunto de um Salto.

Quando  $N > 1$ , o processo regenera-se em cada instante de salto  $T_n$  devido à propriedade forte de Markov com “condição inicial”  $(z_n, \phi_n)$ , onde

$$z_n = x_{T_n}, \quad \text{e} \quad \phi_n = \theta_{T_n}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.15)$$

Imediatamente após a  $N$ -ésima transição da cadeia de Markov, o processo conjunto finaliza, passando a ocupar o estado terminal  $\Delta$ . Neste caso geral, tem-se um Processo Conjunto de Múltiplos Saltos.

É importante enfatizar que, no processo acima descrito, a aleatoriedade encontra-se concentrada nos tempos de parada  $T_n \in \mathcal{T}^N$ . Entre tempos subsequentes, o processo é determinístico, descrito pela equação de estado linear (2.1) com “condições iniciais”  $(z_n, \phi_n)$  para  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Como comentário final, a propriedade forte de Markov será amplamente utilizada na análise do processo com múltiplos saltos ( $N > 1$ ). Para tanto, o mesmo será considerado como uma composição de processos de um salto ( $N = 1$ ), iniciados nos sucessivos tempos de parada  $T_n$  para  $n = 0, \dots, N - 1$  do processo original. Assim sendo, não só por motivos de exposição como também devido à fundamentação anterior, analisa-se detalhadamente o processo de um salto e, em seguida, estende-se a análise para o processo de múltiplos saltos.

## 2.2 Estabilidade Estocástica

Entre as diferentes especificações do projeto de um sistema de controle, a estabilidade é de primordial importância. Nesta seção, conceitos de estabilidade similares aos conhecidos na literatura (Ji e Chizeck, 1990; Costa e Fragoso, 1993) e adaptados ao problema de controle proposto, serão definidos. O objetivo é estabelecer as condições que garantam a estabilidade estocástica do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  no sentido desejado.

Antes de se apresentar as definições de estabilidade estocástica, envolvendo o segundo momento do estado linear  $x_k$ , os tempos de parada  $\tau$  do processo são caracterizados de forma geral no teorema a seguir. Considere  $\mathfrak{F}_\tau$  conforme definido no Apêndice A.

**Teorema 2.2.1.** (Davis, 1993, pag. 261) Seja  $\tau$  um tempo de parada do processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  com filtragem  $\{\mathfrak{F}_{T_n}\}$ . Então, existe uma constante  $s_1$ , tal que

$$\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_1\}} = (s_1 \wedge T_1) \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_1\}}$$

e também funções  $s_n$ ,  $\mathfrak{F}_{T_{n-1}}$ -mensuráveis para  $n = 2, 3, \dots$ , tais que

$$\tau \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < \tau \leq T_n\}} = ((T_{n-1} + s_n) \wedge T_n) \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < \tau \leq T_n\}}.$$

**Definição 2.2.1.** Considere um tempo de parada  $\tau$ , com respeito a  $\{\mathfrak{F}_k\}$ , tal que  $E[\tau] < \infty$ . Então, no ponto de equilíbrio  $x_k = 0$ , o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é

- (i)  $\tau$ -**Estável** no sentido **Quadrático Médio** ( $\tau$ -EQM) se para qualquer condição inicial  $x_0$  e distribuição inicial  $\mu_0$

$$E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}}] \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty; \quad (2.16)$$

- (ii)  $\tau$ -**Estocasticamente Estável** ( $\tau$ -EE) se para qualquer condição inicial  $x_0$  e distribuição inicial  $\mu_0$

$$E \left[ \sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] < \infty; \quad (2.17)$$

- (iii)  $\tau$ -**Estável** no sentido **Exponencial Quadrático Médio** ( $\tau$ -EEQM) se existirem constantes  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 0$ , tais que para qualquer condição inicial  $x_0$  e distribuição inicial  $\mu_0$

$$E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}}] \leq \beta \alpha^k \|x_0\|^2, \quad k \geq 0. \quad (2.18)$$

A seguir, estabelecem-se as condições necessárias e suficientes que asseguram a estabilidade estocástica do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ , considerando apenas um conjunto particular dos tempos de parada  $\tau$  definidos no Teorema 2.2.1. Este subconjunto é dado por  $\mathcal{T}^N = \{T_n; n = 0, \dots, N\}$ .

**Teorema 2.2.2.** Considerando que  $\tau \in \mathcal{T}^N$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é  $\tau$ -EE.  
(ii) Para qualquer conjunto de matrizes  $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{m+}$ , a solução das equações de Lyapunov

$$p_{ii} A_i' L_i A_i - L_i + Q_i = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (2.19)$$

fornece um único conjunto de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{m+}$ .

(iii)  $r_\sigma(p_{ii}^{1/2} A_i) < 1, \quad \forall i \in \mathfrak{X}.$

*Demonstração.* Inicialmente, defina

$$\overline{Q}_i = Q_i + A_i' \mathcal{E}_i(S) A_i, \quad \forall i \in \mathfrak{X}$$

onde  $\mathbf{S} \in \mathbb{M}^{n^0}.$

Observe que se, e somente se, o item (ii) é satisfeito, então existe uma coleção de matrizes  $\mathbf{P} \in \mathbb{M}^{n^+}$  que satisfaz a equação de Lyapunov

$$p_{ii} A_i' P_i A_i - P_i + \overline{Q}_i = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (2.20)$$

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) A prova será realizada pelo método da indução. Inicia-se considerando o caso no qual  $\tau = T$  e definindo o seguinte funcional

$$V_k(x_k, \theta_k) = x_k' (P_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T > k\}} + S_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T = k\}}) x_k$$

onde  $P_{\theta_k} \in \mathcal{M}^{n^+}$  satisfaz (2.20) e  $S_{\theta_k} \in \mathcal{M}^{n^+}.$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned} E[V_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - V_k(x_k, \theta_k) \mid x_k, \theta_k] &= E[-x_k' S_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T = k\}} x_k \mid x_k, \theta_k] + \\ &E[x_{k+1}' S_{\theta_{k+1}} \mathbb{1}_{\{T = k+1\}} x_{k+1} - x_k P_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T = k+1\}} x_k \mid x_k, \theta_k] + \\ &E[x_{k+1}' P_{\theta_{k+1}} \mathbb{1}_{\{T > k+1\}} x_{k+1} - x_k P_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T > k+1\}} x_k \mid x_k, \theta_k]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Utilizando o Lema 2.1.1 em (2.21), obtém-se

$$\begin{aligned} E[V_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - V_k(x_k, \theta_k) \mid x_k, \theta_k] &= -x_k' S_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T = k\}} + \\ &x_k' \left[ A_{\theta_k}' \left( \sum_{j \in \mathfrak{X}} \frac{p_{\theta_k j}}{1 - p_{\theta_k \theta_k}} S_j \mathbb{1}_{\{\theta_k \neq j\}} \right) A_{\theta_k} - P_{\theta_k} \right] x_k P(T = k + 1 \mid x_k, \theta_k) + \\ &x_k' [A_{\theta_k}' P_{\theta_k} A_{\theta_k} - P_{\theta_k}] x_k P(T > k + 1 \mid x_k, \theta_k). \end{aligned}$$

Logo, uma vez que  $P(T = k + 1 \mid x_k, \theta_k) = 1 - p_{\theta_k \theta_k}$  e  $P(T > k + 1 \mid x_k, \theta_k) = p_{\theta_k \theta_k},$  tem-se

$$\begin{aligned} E[V_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - V_k(x_k, \theta_k) \mid x_k, \theta_k] &= -x_k' S_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T = k\}} + \\ &x_k' \left[ p_{\theta_k \theta_k} A_{\theta_k}' P_{\theta_k} A_{\theta_k} + A_{\theta_k}' \left( \sum_{j \neq \theta_k} p_{\theta_k j} S_j \right) A_{\theta_k} - P_{\theta_k} \right] x_k \mathbb{1}_{\{T > k\}}. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que (2.19) implica em (2.20), o resultado obtido acima pode ser escrito equivalentemente da seguinte forma

$$E[V_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - V_k(x_k, \theta_k) \mid x_k, \theta_k] = -x'_k(S_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T=k\}} + Q_{\theta_k} \mathbb{1}_{\{T>k\}})x_k.$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{\kappa} E_{\theta_0}[V_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - V_k(x_k, \theta_k)] = \sum_{k=0}^{\kappa} E_{\theta_0}[E[V_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - V_k(x_k, \theta_k) \mid x_k, \theta_k]]$$

que, através de (2.21), implica em

$$E_{\theta_0}[V_{\kappa+1}(x_{\kappa+1}, \theta_{\kappa+1})] - V_0(x_0, \theta_0) = - \sum_{k=0}^{\kappa} E_{\theta_0}[x'_k \hat{Q}_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T \geq k\}}] \quad (2.22)$$

onde  $\hat{Q}_i = Q_i \mathbb{1}_{\{T>k\}} + S_i \mathbb{1}_{\{T=k\}}$ ,  $\forall i \in \mathfrak{X}$ . Tomando o limite superior em (2.22) e reordenando seus termos, obtém-se

$$\limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E[x'_k \hat{Q}_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T \geq k\}}] \leq x'_0 P_{\theta_0} x_0$$

pois  $E[V_{\kappa}(x_{\kappa}, \theta_{\kappa})] > 0$ ,  $\forall \kappa \geq 0$ . Conseqüentemente, o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é  $\tau$ -EE, uma vez que a coleção  $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{M}^{m+}$  e, portanto, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] \leq \lambda E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \hat{Q}_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] < \infty.$$

Agora, assuma que para  $\tau = T_n$

$$\limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E[x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_n \geq k\}}] < x'_0 \hat{P}_{\theta_0} x_0 \quad (2.23)$$

é válida. Logo, para  $\tau = T_{n+1}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E[x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}}] &= \\ \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E[x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_n > k\}}] &+ E[x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_n \leq k \leq T_{n+1}\}} \mid z_n, \phi_n]. \end{aligned}$$

Observando que

$$E[x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_n \leq k \leq T_{n+1}\}}] = \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=T_n}^{\kappa} E[x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}} \mid z_n, \phi_n]$$



e aplicando a propriedade da homogeneidade na expressão acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E [x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}}] &\leq \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E [x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_n > k\}} + z'_n P_{\phi_n} z_n] \\ &= \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\kappa} E [x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_n \geq k\}} + z'_n (P_{\phi_n} - Q_{\phi_n}) z_n] \\ &\leq x'_0 \tilde{P}_{\theta_0} x_0 \end{aligned}$$

pois pela hipótese da indução  $E[\|z_n\|^2] < \infty$ , finalizando esta parte da prova.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Primeiramente assumamos que  $\tau = T$  e definamos o seguinte funcional

$$x'_0 P_{\theta_0} x_0 := E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T > k\}} + x'_T S_{\theta_T} x_T \mid x_0, \theta_0 \right], \quad \forall (x_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) pode ser escrita da seguinte forma

$$x'_0 P_{\theta_0} x_0 = E \left[ x'_0 Q_{\theta_0} x_0 + E \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T > k\}} + x'_T S_{\theta_T} x_T \right) \mathbb{1}_{\{T \geq 1\}} \mid x_1, \theta_1 \right] \mid x_0, \theta_0 \right]. \quad (2.25)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T > k\}} + x'_T S_{\theta_T} x_T \right) \mathbb{1}_{\{T \geq 1\}} \mid x_1, \theta_1 \right] &= \\ E \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T > k\}} + x'_T S_{\theta_T} x_T \right) \mathbb{1}_{\{T > 1\}} + x'_T S_{\theta_T} x_T \mathbb{1}_{\{T = 1\}} \mid x_1, \theta_1 \right]. \end{aligned}$$

Logo, aplicando a propriedade da homogeneidade na equação acima e substituindo em (2.25), tem-se

$$x'_0 P_{\theta_0} x_0 = x'_0 Q_{\theta_0} x_0 + E [x'_1 P_{\theta_1} x_1 \mathbb{1}_{\{T > 1\}} + x'_T S_{\theta_T} x_T \mathbb{1}_{\{T = 1\}} \mid x_0, \theta_0]$$

o que implica

$$0 = x'_0 (-P_i + Q_i + p_{ii} A'_i P_i A_i + A'_i \left( \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} S_j \right) A_i (1 - p_{ii})) x_0$$

ou ainda

$$p_{ii} A'_i P_i A_i + A'_i \mathcal{E}_i(S) A_i - P_i = -Q_i.$$

Logo, existe um conjunto de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  que satisfazendo (2.19).

A extensão é direta para o caso onde  $\tau = T_N$  com  $N > 1$ , uma vez que

$$E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_N > k\}} + z'_N S_{\phi_N} z_N \right] < \infty \quad (2.26)$$

implica que

$$E \left[ E \left[ \sum_{k=T_n}^{\infty} x'_k Q_{\theta_k} x_k \mathbb{1}_{\{T_{n+1} > k\}} + z'_{n+1} S_{\phi_{n+1}} z_{n+1} \mid z_n, \phi_n \right] \right] < \infty, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Aplicando, na equação acima, a propriedade da homogeneidade juntamente com os resultados obtidos no caso onde  $\tau = T$ , conclui-se que existe um conjunto de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  satisfazendo (2.19), o que encerra parte desta demonstração.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) A demonstração deste item pode ser encontrada em (Zhou et al., 1996).  $\square$

**Comentário 2.2.1.** Se o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  possui apenas um único modo de operação ( $E = 1, p_{ii} = 1$ ), sua característica estocástica é perdida, significando que o mesmo é determinístico. Nesta situação, a equação (2.19) reduz-se à condição de estabilidade padrão de um sistema linear.

Note que, no item (iii) do Teorema 2.2.2, a matriz do sistema  $A_i$  está multiplicada por  $p_{ii}^{1/2}$ , o que implica numa redução no módulo dos autovalores originais. Assim, conclui-se que a  $\tau$ -EE do sistema está estreitamente relacionada com sua probabilidade de permanência no estado ocupado. Com o propósito de elucidar esta característica, apresenta-se o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.1.** Considere o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  escalar

$$\mathcal{S}_0 : x_{k+1} = (1 + \gamma_{\theta_k}) x_k, \quad k \geq 0$$

onde  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_E)$ ,  $\gamma_i > 0$ .

Se  $p_{ii} = 1$ , o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é determinístico e instável. Não obstante, se  $0 < p_{ii} < 1$ , o mesmo é  $\tau$ -EE, caso satisfaça a seguinte condição

$$p_{ii}^{1/2} (1 + \gamma_i) < 1, \quad \forall i \in \mathfrak{X},$$

o que implica em

$$p_{ii} < \frac{1}{(1 + \gamma_i)^2}, \quad \forall i \in \mathfrak{X}.$$

Na Figura 2.2, está representada a equação acima. Observa-se que, se o parâmetro  $\gamma_i$  aumenta, a probabilidade do sistema permanecer no estado  $i$  deve ser pequena com o objetivo de garantir a  $\tau$ -EE do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ . Do mesmo modo, o tempo médio de permanência neste estado, dado por

$$E[T_{n+1} - T_n | \phi_n = i] = \frac{1}{1 - p_{ii}}, \quad \forall i \in \mathcal{X}$$

também deve ser pequeno.

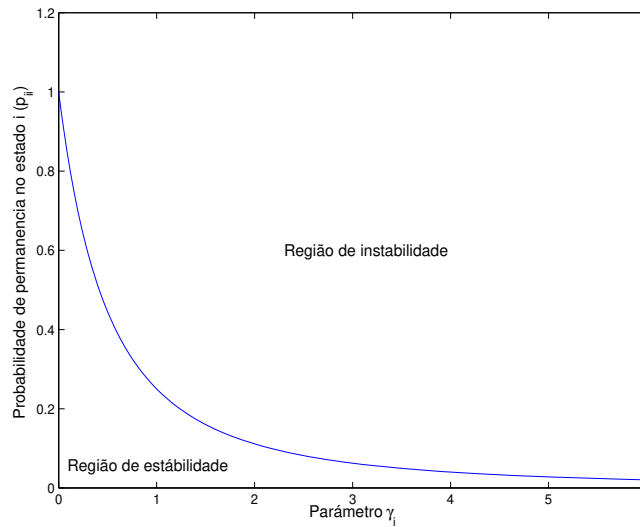


Figura 2.2: Regiões de  $\tau$ -EE do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ .

Cabe enfatizar que a condição de  $\tau$ -EE (vide Teorema 2.2.2) é menos restrita que a condição de EE (Ji e Chizeck, 1990; Costa e Fragoso, 1993), porém só é adequada ao problema de estabilidade e controle proposto.

### 2.3 Custo Quadrático

Nesta seção, avalia-se o valor esperado do custo quadrático  $J^N(x)$  em (1.6) com relação à distribuição conjunta das variáveis aleatórias envolvidas. Novamente, inicia-se pelo caso onde o horizonte coincide com a primeira transição da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ , isto é,  $N = 1$ . Em seguida, aborda-se o caso geral, quando existem múltiplas transições da cadeia.

### Para uma Transição da Cadeia de Markov

Inicialmente, considere que  $\mu_i = 1$  para algum estado  $i \in \mathfrak{X}$ . Portanto,  $\theta_0 = i$  com probabilidade 1. Assim, dado que  $T$  representa a primeira transição da cadeia de Markov, para  $0 \leq k < T$ , o estado  $\theta_k = i$  e as trajetórias  $k \rightarrow x(k)$  e  $k \rightarrow y(k)$  são definidas pelas seguintes equações de estados e de saída

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k), & (x(0), \theta_0) = (x, i) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \\ y(k) = C_i x(k), & 0 \leq k < T, \end{cases} \quad (2.27)$$

onde  $x(k)$  e  $y(k)$  são as variáveis de estado e de saída, respectivamente.

O índice de desempenho do SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ , definido em (1.6) quando  $N = 1$ , denotado por  $J(x, i)$ , é reproduzido a seguir

$$J(x, i) = E \left[ \sum_{k=0}^{T-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\theta_T}^{1/2} x_T\|^2 \mid x, i \right] \quad (2.28)$$

sendo  $\mathbf{S} \in \mathbb{M}^{n_0}$  o custo final.

**Proposição 2.3.1.** Considere o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$   $\tau$ -EE. Então, duas formas equivalentes de expressar o custo (2.28), quando  $0 < p_{ii} < 1$ , são

$$J(x, i) = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \left( \|y(k)\|^2 + \|(A_i' \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) A_i)^{1/2} x(k)\|^2 \right) \quad (2.29a)$$

e

$$J(x, i) = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \left( \|y(k)\|^2 + \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S}) x(k)\|^2 \right) - \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S}) x\|^2. \quad (2.29b)$$

*Demonstração.* Dado que o valor esperado é um operador linear,  $J(x, i)$  pode ser decomposto na forma

$$J(x, i) = E \left[ \sum_{k=0}^{T-1} \|y_k\|^2 \mid (x, i) \right] + E[x_T' S_{\theta_T} x_T \mid (x, i)]. \quad (2.30)$$

Avaliando o valor esperado do primeiro termo do lado direito da equação (2.30) em relação à

distribuição condicional da variável aleatória  $T$  dado  $\theta_0$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 E \left[ \sum_{k=0}^{T-1} \|y_k\|^2 \mid (x, i) \right] &= \sum_{n \geq 1} E \left[ \sum_{k=0}^{T-1} \|y_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T=n\}} \mid (x, i) \right] \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \|y(k)\|^2 \right) p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) && \text{pelo Lema 2.1.1-(i)} \\
 &= \|y(0)\|^2 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \|y(k)\|^2 \right) p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}). \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Nas séries acima, a ordem das somatórias não pode ser trocada dado que o índice  $k$  da somatória interior depende do índice  $n$ . Porém, com a inclusão da função delta de Dirac, as somatórias podem ser reordenadas, como é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{k \leq n-1\}} \|y(k)\|^2 \right) p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) &= \sum_{k \geq 1} \|y(k)\|^2 \left( \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{n \geq k+1\}} p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) \right) \\
 &= \sum_{k \geq 1} p_{ii}^k \|y(k)\|^2 \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

pois

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{n \geq k+1\}} p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) = \sum_{n \geq k+1} p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) = p_{ii}^k.$$

Substituindo (2.32) em (2.31), obtém-se

$$E \left[ \sum_{k=0}^{T-1} \|y_k\|^2 \mid (x, i) \right] = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \|y(k)\|^2. \tag{2.33}$$

Para avaliar o valor esperado do segundo termo do lado direito de (2.30), são utilizados os resultados obtidos no Lema 2.1.1

$$\begin{aligned}
 E [x'_T S_{\theta_T} x_T \mid (x, i)] &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{X} \\ k \geq 1}} E [x'(k) S_j x(k) \mathbb{1}_{\{\theta_k=j, T=k\}} \mid \theta_0 = i] \\
 &= \sum_{k \geq 1} E \left[ x'(k) \left( \frac{1}{1 - p_{ii}} \sum_{j \neq i} p_{ij} S_j \right) x(k) \mathbb{1}_{\{T=k\}} \mid \theta_0 = i \right] \\
 &= \sum_{k \geq 1} x'(k) \left( \frac{1}{1 - p_{ii}} \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) \right) x(k) p_{ii}^{k-1} (1 - p_{ii}),
 \end{aligned}$$

que pode ser expressa como

$$\begin{aligned} E [x'_T S_{\theta_T} x_T | (x, i)] &= \sum_{k \geq 0} x'(k) A'_i \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) A_i x(k) p_{ii}^k \\ &= \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \|(A'_i \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) A_i)^{1/2} x(k)\|^2, \end{aligned} \quad (2.34a)$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} E [x'_T S_{\theta_T} x_T | (x, i)] &= \sum_{k \geq 0} x'(k) \mathcal{L}_i(\mathbf{S}) x(k) p_{ii}^k - x \mathcal{L}_i(\mathbf{S}) x \\ &= \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S}) x(k)\|^2 - \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S}) x\|^2. \end{aligned} \quad (2.34b)$$

Substituindo os resultados das equações (2.34a) ((2.34b)) e (2.33) na equação (2.30), obtém-se  $J(x, i)$  em (2.29a)((2.29b)).  $\square$

**Comentário 2.3.1.** No caso determinístico ( $E = 1, p_{ii} = 1$ ), o sistema permanece no estado  $i$  indefinidamente, isto é,  $T = \infty$  com probabilidade 1. Assumindo que o sistema é estável, o custo corresponde a um funcional com horizonte infinito

$$J(x, i) = \sum_{k \geq 0} \|y(k)\|^2.$$

A partir deste ponto, nesta dissertação, opta-se pela segunda forma de expressar o custo (equação (2.29b)), pois a mesma possui uma estrutura apropriada para o projeto do controlador a ser tratado no próximo capítulo. Assim, uma vez que, para o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$ , a equação de saída é dada por  $y(k) = C_i x(k)$ , o custo  $J(x, i)$  é equivalente a

$$J(x, i) = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \|(C'_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} x(k)\|^2 - \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S}) x\|^2. \quad (2.35)$$

Na proposição abaixo, a relação existente entre o custo  $J(x, i)$  e o gramiano de observabilidade é apresentada.

**Proposição 2.3.2.** Suponha que o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é  $\tau$ -EE. Então, o custo em (2.35) pode ser expresso como

$$J(x, i) = x'(L_i - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))x \quad (2.36)$$

onde  $L_i \in \mathcal{M}^{n_0}$  é a única solução da equação de Lyapunov

$$p_{ii} A'_i L_i A_i - L_i + C'_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}) = 0. \quad (2.37)$$

*Demonstração.* Se o termo  $\|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S})x\|^2$  do custo  $J(x, i)$  em (2.35) for omitido, o termo dinâmico restante é definido por

$$\hat{J}(x, i) = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \|(C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} x(k)\|^2 \quad (2.38)$$

$$\text{s.a.: } x(k+1) = A_i x(k), \quad k \geq 0, \quad x(0) = x. \quad (2.39)$$

O funcional  $\hat{J}(x, i)$  corresponde a um custo descontado com horizonte infinito e fator de desconto  $\rho = p_{ii}$ . Reescrevendo-o em função da nova variável  $\hat{x}(k) = p_{ii}^{k/2} x(k)$ , pode-se expressar o custo na forma quadrática determinística padrão (Davis e Vinter, 1985)

$$\hat{J}(x, i) = \sum_{k \geq 0} \|(C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} \hat{x}(k)\|^2 \quad (2.40)$$

$$\text{s.a.: } \hat{x}(k+1) = \hat{A}_i \hat{x}(k), \quad k \geq 0, \quad \hat{x}(0) = x \quad (2.41)$$

onde  $\hat{A}_i = p_{ii}^{1/2} A_i$ .

Por outro lado, defina

$$Q_i = C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}) \geq 0 \quad \forall i \in \mathfrak{X}.$$

Por hipótese, o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é  $\tau$ -EE e, portanto, existe um conjunto de matrizes  $L \in \mathbb{M}^{n_0}$ , soluções do sistema de equações matriciais

$$p_{ii} A_i' L_i A_i - L_i + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}) = 0.$$

Em seguida, pré-multiplicando e pós-multiplicando a equação acima por  $x_k'$  e por  $x_k$ , respectivamente, e utilizando (2.41), pode-se escrever a identidade

$$\hat{x}(k+1)' L_i \hat{x}(k+1) - \hat{x}(k)' L_i \hat{x}(k) = -\hat{x}(k)' (C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S})) \hat{x}(k).$$

Somando essa expressão para  $k$  variando desde 0 até  $n$ , tem-se

$$\hat{x}(n+1)' L_i \hat{x}(n+1) - x' L_i x = - \sum_{0 \leq k \leq n} \hat{x}(k)' (C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S})) \hat{x}(k). \quad (2.42)$$

Além disso, dado que o SLSM  $\mathcal{S}_0$  é  $\tau$ -EE, o sistema em (2.41) é estável no sentido determinístico (vide Teorema 2.2.2) e, portanto,  $\|\hat{x}(n)\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , o que permite concluir que

$$\hat{J}(x, i) = x' L_i x.$$

O resultado para  $J(x, i)$  segue imediatamente.  $\square$

**Comentário 2.3.2.** Observe que a matriz  $L_i \in \mathcal{M}^{n_0}$ , solução da equação de Lyapunov (2.37), é única se o par  $(p_{ii}^{1/2}A_i, (C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2})$  for observável. Isto significa que a matriz  $C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S})$  foi selecionada de forma que o estado linear  $x_k$  fosse “observado pelo custo”. Se esta condição não for satisfeita, o custo pode ser finito mesmo quando os componentes “não-observados” do estado linear  $x_k$  forem ilimitados, uma vez que ele não é alterado pelo valor desse estado.

Uma condição mais fraca do que observabilidade estabelece que os subespaços não-observados sejam estáveis, isto é, que o par  $(p_{ii}^{1/2}A_i, (C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2})$  seja detectável. Esta condição conduz ao mesmo resultado de unicidade da matriz  $L_i \in \mathcal{M}^{n_0}$  (Davis e Vinter, 1985; Lewis e Syrmos, 1995).

Finalmente, considerando uma distribuição inicial  $\mu_0$  geral, o custo quadrático  $J(x)$  em (2.28) é expresso por

$$J(x) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} J(x, i) \mu_i. \quad (2.43)$$

Observa-se que, com a hipótese de  $\tau$ -EE, o custo acima é finito, uma vez que ele provém de uma soma finita de custos quadráticos finitos.

Com base na equação (2.43) e nos resultados obtidos na Proposição 2.3.2, a demonstração da próxima proposição pode ser realizada através de manipulações algébricas simples, permitindo a sua omissão.

**Proposição 2.3.3.** Considerando o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$   $\tau$ -EE, o custo quadrático (2.43) pode ser expresso como

$$J(x) = \langle \mathbf{L} - \mathcal{L}(\mathbf{S}), \mathbf{X} \rangle \quad (2.44)$$

onde a matriz  $L_i \in \mathcal{M}^{n_0}$  é solução da equação de Lyapunov

$$p_{ii} A_i' L_i A_i - L_i + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}) = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (2.45)$$

e a matriz  $X_i \in \mathcal{M}^{n_0}$  é dada por  $X_i = x x' \mu_i, \forall i \in \mathfrak{X}$ .

### Para Múltiplas Transições da Cadeia de Markov

A discussão a seguir mostrará o procedimento através do qual o custo quadrático com múltiplos saltos  $J^N(x, i)$  pode ser avaliado a partir do custo de um salto  $J(x, i)$ , baseando-se na propriedade forte de Markov (Corolário 2.1.1).



Defina o seguinte custo de continuação

$$V^n(z_n, \phi_n) = E \left[ \sum_{k=T_n}^{T_N} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_n}^{1/2} z_N\|^2 \mid \mathfrak{F}_{T_n} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.46)$$

**Proposição 2.3.4.** O custo de continuação  $V^n(z_n, \phi_n)$  em (2.46) é determinado através do seguinte procedimento:

Passo 1: Faça  $\ell = N - 1$  e considere  $\mathbf{S}^{\ell+1} = \mathbf{S}$ .

Passo 2: Resolva a equação de Lyapunov

$$p_{ii} A_i' L_i^\ell A_i - L_i^\ell + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{\ell+1}) = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (2.47)$$

Defina  $S_i^\ell = L_i^\ell - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{\ell+1})$  e adote  $\ell = \ell - 1$ . Se  $n < \ell$ , retorne ao início do passo 2; caso contrário faça,

$$V^n(z_n, \phi_n) = z_n' S_{\phi_n}^n z_n. \quad (2.48)$$

*Demonstração.* A prova desta proposição será realizada pelo método da indução. Considerando inicialmente que  $n = N - 1$ , em (2.46), tem-se

$$\begin{aligned} V^{N-1}(z_{N-1}, \phi_{N-1}) &= E \left[ \sum_{k=T_{N-1}}^{T_N} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_{N-1}}^{1/2} z_N\|^2 \mid \mathfrak{F}_{T_{N-1}} \right] \\ &= J^1(z_n, \phi_n). \end{aligned}$$

A última igualdade é estabelecida aplicando-se conjuntamente as propriedades forte de Markov e da homogeneidade. Logo, considerando-se  $(x_0, \theta_0) = (z_{N-1}, \phi_{N-1})$  e aplicando-se a Proposição 2.3.2, obtém-se

$$V^{N-1}(z_{N-1}, \phi_{N-1}) = z_{N-1}' S_{\phi_{N-1}}^{N-1} z_{N-1} \quad (2.49)$$

onde

$$S_i^{N-1} = L_i^{N-1} - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^N) \quad (2.50)$$

e a matriz  $L_i^{N-1} \in \mathcal{M}^{n_0}$  é solução da equação de Lyapunov

$$p_{ii} A_i L_i^{N-1} A_i - L_i^{N-1} + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^N) = 0. \quad (2.51)$$

Assumindo agora que as equações (2.49), (2.50) e (2.51) sejam válidas para  $n$ , demonstre-se que também são válidas para  $n - 1$ . Logo,

$$V^{n-1}(z_{n-1}, \phi_{n-1}) = E \left[ \sum_{k=T_{n-1}}^{T_n-1} \|y_k\|^2 + E \left[ \sum_{k=T_n}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \mid \mathfrak{F}_{T_n} \right] \mid \mathfrak{F}_{T_{n-1}} \right].$$

Fazendo uso da hipótese da indução, obtém-se

$$\begin{aligned} V^{n-1}(z_{n-1}, \phi_{n-1}) &= E \left[ \sum_{k=T_{n-1}}^{T_n-1} \|y_k\|^2 + z'_n S_{\phi_n}^n z_n \mid \mathfrak{F}_{T_{n-1}} \right] \\ &= J^1(z_{n-1}, \phi_{n-1}). \end{aligned}$$

A última igualdade é estabelecida aplicando-se os mesmos argumentos do passo anterior, isto é, o processo conjunto  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  é Markov forte além de ser homogêneo. Através da Proposição 2.3.2, tem-se

$$V^{n-1}(z_{n-1}, \phi_{n-1}) = z'_{n-1} S_{\phi_{n-1}}^{n-1} z_{n-1}$$

onde

$$S_i^{n-1} = L_i^{n-1} - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^n)$$

e a matriz  $L_i^{n-1} \in \mathcal{M}^{n0}$  é solução da equação de Lyapunov

$$p_{ii} A'_i L_i^{n-1} A_i - L_i^{n-1} + C'_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^n) = 0,$$

encerrando a demonstração.  $\square$

Finalmente, o custo  $J^N(x)$  para o caso onde existem múltiplas transições da cadeia de Markov pode ser obtido observando-se que

$$J^N(x) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} V^0(z(0) = x, \phi(0) = i) \mu_i. \quad (2.52)$$

Uma vez que o valor do custo de continuação  $V^0(z_0, \phi_0)$  pode ser determinado através da Proposição 2.3.4, tem-se que

$$J^N(x) = \langle \mathbf{S}^0, \mathbf{X} \rangle \quad (2.53)$$

onde a matriz  $X_i \in \mathcal{M}^{n0}$  é dada por  $X_i = x x' \mu_i, \forall i \in \mathfrak{X}$ .

Antes de encerrar este capítulo, apresenta-se, na Proposição 2.3.5, o cálculo do seguinte custo

$$J^{n,N}(x_0, \theta_0) = E_{x_0, \theta_0} \left[ \sum_{k=T_n}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \right], \quad (2.54)$$

o qual apresenta aspectos importantes do processo que serão utilizados no próximo capítulo.

Observe que, reescrevendo  $J^{n,N}(x_0, \theta_0)$  em termos do custo de continuação  $V^n(z_n, \phi_n)$ , tem-se

$$J^{n,N}(x_0, \theta_0) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} E_{x_0, \theta_0} [V^n(z_n, \phi_n) \mathbb{1}_{\{\phi_n=i\}}].$$

Substituindo  $V^n(z_n, \phi_n)$  expresso em (2.48) na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} J^{n,N}(x_0, \theta_0) &= \sum_{i \in \mathfrak{X}} E_{x_0, \theta_0} [\text{tr}(S_i^n z_n z_n') \mathbb{1}_{\{\phi_n=i\}}] \\ &= \sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr}(S_i^n E_{x_0, \theta_0}[z_n z_n' \mathbb{1}_{\{\phi_n=i\}}]) \\ &= \langle \mathbf{S}^n, \mathbf{X}^n \rangle \end{aligned}$$

onde  $X_i^n$  é definido por

$$X_i^n = E_{x_0, \theta_0}[z_n z_n' \mathbb{1}_{\{\phi_n=i\}}], \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (2.55)$$

Denotando

$$X_j^1 = X_j^T, \quad \forall j \in \mathfrak{X}$$

e observando que

$$X_i^0 = X_i = x x' \mu_i, \quad \forall i \in \mathfrak{X},$$

o próximo lema fornece o valor de  $X_j^T$  a partir da observação de  $X_i$  com base no cálculo do valor esperado em (2.55) para  $n = 1$ .

**Lema 2.3.1.** Assuma que o SLSM autônomo  $\mathcal{S}_0$  é  $\tau$ -EE. Uma forma equivalente de expressar  $X_j^T \in \mathcal{M}^{n_0}$  é

$$X_j^T = \sum_{i \neq j} p_{ij} W_i \quad (2.56)$$

onde a matriz  $W_i \in \mathcal{M}^n$  é solução da equação matricial algébrica

$$W_i = p_{ii} A_i W_i A_i' + A_i X_i A_i'. \quad (2.57)$$

*Demonstração.* Utilizando os resultados obtidos no Lema 2.1.1, tem-se

$$\begin{aligned}
 X_j^T &= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ i \in \mathfrak{X}}} E_{x_0, \theta_0} [x_k x'_k \mathbb{1}_{\{\theta_k = j, T = k, \theta_0 = i\}}] \\
 &= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ i \in \mathfrak{X}}} E_{x_0, \theta_0} \left[ x_k x'_k \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} \mathbb{1}_{\{j \neq i\}} \mathbb{1}_{\{T = k, \theta_0 = i\}} \right] && \text{pelo Lema 2.1.1-(ii)} \\
 &= \sum_{i \in \mathfrak{X}} E_{x_0, \theta_0} \left[ \left( \sum_{k \geq 1} A_i^k x_0 x'_0 A_i'^k \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} \mathbb{1}_{\{j \neq i\}} p_{ii}^{k-1} (1 - p_{ii}) \right) \mathbb{1}_{\{\theta_0 = i\}} \right] && \text{pelo Lema 2.1.1-(i).}
 \end{aligned}$$

Identificando-se  $X_i$ , obtém-se

$$X_j^T = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \left( \sum_{k \geq 1} A_i^k X_i A_i'^k p_{ij} p_{ii}^{k-1} \mathbb{1}_{\{j \neq i\}} \right) = \sum_{i \neq j} p_{ij} W_i$$

onde

$$W_i = \sum_{k \geq 1} A_i^k X_i A_i'^k p_{ii}^{k-1}.$$

Dado que o sistema é  $\tau$ -EE por hipótese, tem-se

$$\begin{aligned}
 W_i &= A_i X_i A_i' + \sum_{k \geq 2} A_i^k X_i A_i'^k p_{ii}^{k-1} \\
 &= A_i X_i A_i' + p_{ii} A_i \left( \sum_{k \geq 1} A_i^k X_i A_i'^k p_{ij} p_{ii}^{k-1} \right) A_i'.
 \end{aligned}$$

Reconhecendo-se  $W_i$  na expressão entre parêntesis acima, obtém-se (2.57).  $\square$

**Proposição 2.3.5.** O funcional  $J^{n,N}(x_0, \theta_0)$  em (2.54) é calculado através do seguinte procedimento:

Passo 1: Faça  $\ell = N - 1$  e considere  $\mathbf{S}^{\ell+1} = \mathbf{S}$ .

Passo 2: Resolva a equação de Lyapunov

$$p_{ii} A_i' L_i^\ell A_i - L_i^\ell + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{\ell+1}) = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (2.58)$$

Defina  $S_i^\ell = L_i^\ell - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{\ell+1})$ , adote  $\ell = \ell - 1$ . Se  $\ell \geq n$ , retorne ao início do Passo 2; caso contrário, adote  $\ell = 0$  e com condição inicial  $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{M}^{n_0}$

Passo 3: Calcule  $\mathbf{X}^{\ell+1} \in \mathbb{M}^{n_0}$  através da relação

$$X_j^{\ell+1} = \sum_{i \neq j} p_{ij} W_i^\ell, \quad \forall j \in \mathfrak{X} \quad (2.59)$$

onde  $W_i^\ell \in \mathcal{M}^n$  satisfaz a equação matricial algébrica

$$W_i^\ell = p_{ii} A_i W_i^\ell A_i' + A_i X_i^\ell A_i'. \quad (2.60)$$

Adote  $\ell = \ell + 1$ . Se  $\ell < n$ , retorne ao início do Passo 3; caso contrário,

$$\mathcal{J}^{n,N}(x_0, \theta_0) = \langle \mathbf{S}^n, \mathbf{X}^n \rangle. \quad (2.61)$$

## Capítulo 3

# Controle por Realimentação Linear de Estado

Neste capítulo, retoma-se o problema proposto, considerando  $\{u_k; k \geq 0\}$  como a seqüência de controle. O objetivo é determinar, na estrutura de informação disponível ao controlador descrita no Capítulo 1, a seqüência dos ganhos de controle que permite minimizar o valor esperado do índice de desempenho do sistema.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Nas duas primeiras seções, são abordadas as duas situações extremas do problema acima mencionado. Na Seção 3.1, considera-se o caso onde a lei de controle, na forma de realimentação linear do estado  $x_k$ , possui um ganho que depende do estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov, o que ocorre quando o mesmo é acessível ao controlador. Neste caso, a seqüência dos ganhos de controle ótimo é determinada com base em técnicas de programação dinâmica e equações de Riccati. Na Seção 3.2, adota-se uma lei de controle na forma de realimentação linear do estado  $x_k$  com ganho independente do estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov, o que ocorre quando o mesmo não é acessível ao controlador. Neste contexto, a complexidade do projeto do controlador é restrita. A seqüência dos ganhos de controle subótima é determinada com base num procedimento variacional e num problema de otimização convexa envolvendo restrições do tipo LMI, o qual faz uso de resultados obtidos recentemente nesta área. Na Seção 3.3, é apresentada a solução do problema de controle proposto na sua forma geral.

Com o propósito de ilustrar os resultados obtidos nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3, é apresentado um exemplo numérico na seção final deste capítulo (Seção 3.4).

### 3.1 Observação Completa dos Estados da Cadeia

Conforme definido no Capítulo 1, o SLSM  $\mathcal{S}$  é dado por

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\theta_k} x_k + B_{\theta_k} u_k, & x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta_0 \sim \mu_0 \\ y_k = C_{\theta_k} x_k + D_{\theta_k} u_k, & k \geq 0 \end{cases}$$

onde  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  são os estados do processo assumindo valores em  $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é uma condição inicial fixa, mas arbitrária;  $\{u_k; k \geq 0\}$  e  $\{y_k; k \geq 0\}$  são os processos de controle e de saída, respectivamente.

Assumindo que  $\mathfrak{X}_h = \emptyset$ , o espaço de estados  $\mathfrak{X}$  da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  é tal que  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_o$ . Nesta estrutura de informação, em cada instante  $k$ , o estado  $(x_k, \theta_k)$  do SLSM é acessível ao controlador e, portanto, a lei de controle depende diretamente do estado  $\theta_k$  da cadeia

$$u_k = \left( \sum_{n=0}^{N-1} K_{\theta_k}^n \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}\}} \right) x_k, \quad k \geq 0. \quad (3.1)$$

Denota-se esta classe de ganhos de controle por  $\mathcal{K}_\theta$ , sendo um elemento dessa classe representado por

$$(\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}) \in \mathcal{K}_\theta,$$

onde  $\mathbf{K}^n = (K_1^n, \dots, K_E^n)$  e  $K_i^n \in \mathcal{M}^{p \times n}$ ,  $\forall i \in \mathfrak{X}$ . O objetivo é determinar a seqüência dos ganhos de realimentação linear pertencentes à classe  $\mathcal{K}_\theta$  de forma que o custo

$$J^N(x(0), u(\cdot)) = E \left[ \sum_{k=0}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \right]$$

seja minimizado.

O diagrama esquemático do SLSM  $\mathcal{S}$  em malha fechada é ilustrado na Figura 3.1. Note que o controlador muda seus parâmetros de acordo com a informação proveniente do módulo de detecção e identificação da falha. Entende-se que tanto o instante no qual ocorre a mudança do estado  $\theta_k$  da cadeia de Markov como também o novo valor que o mesmo assume são conhecidos. Assim, quando a  $n$ -ésima falha ocorre, a cadeia de Markov transita do estado  $i$  para o estado  $j$  e o controlador comuta do ganho  $K_i^{n-1}$  para o ganho  $K_j^n$ .

A seguir, inicia-se o projeto do controlador para o caso onde o horizonte do problema coincide com o instante em que ocorre a primeira transição da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$ . Aborda-se posteriormente o caso geral, quando existem múltiplas transições da cadeia.

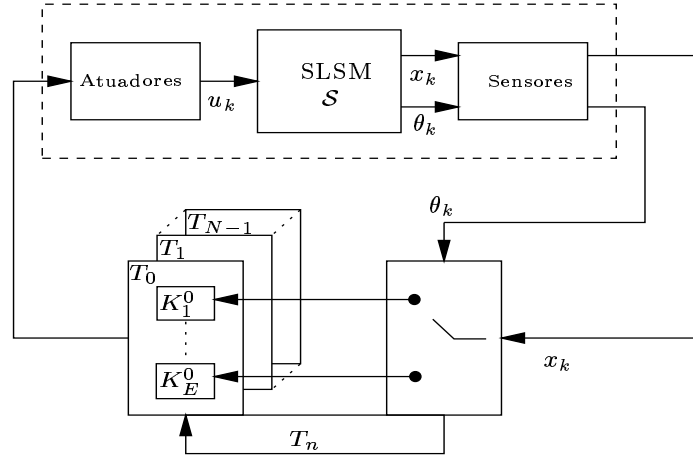


Figura 3.1: SLSM  $\mathcal{S}$  em malha fechada com observação do parâmetro de salto  $\theta_k$ .

### 3.1.1 Problema com uma Transição da Cadeia

Assumindo que o estado  $\theta_0 = i \in \mathfrak{X}$ , isto é,  $\mu_i = 1$ , tem-se que, no intervalo  $0 \leq k < T$ , o estado  $\theta_k = i$  e as trajetórias  $k \rightarrow x(k)$  e  $k \rightarrow y(k)$  estão definidas da seguinte maneira

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u_i(k), & (x(0), \theta_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X} \\ y(k) = C_i x(k) + D_i u_i(k) & 0 \leq k < T \end{cases} \quad (3.2)$$

onde se denota por  $u_i(k)$  a variável de controle dependente do estado  $\theta_k = i$ . Neste caso, a lei de realimentação linear é expressa por

$$u_i(k) = K_i x(k), \quad 0 \leq k < T, \quad K_i \in \mathbf{K}.$$

### Estabilizabilidade

Uma vez que a estabilidade do sistema em laço fechado é um dos principais objetivos a ser alcançado, as condições que permitem determinar sua existência são de crucial importância no projeto do controlador. Assim, com base nos resultados estabelecidos no item (ii) do Teorema 2.2.2, referente à análise da  $\tau$ -EE, define-se a seguir o conceito de  $\tau$ -estabilizabilidade.

**Definição 3.1.1.** O par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é  $\tau$ -estabilizável se existirem coleções de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{M}^{p \times n}$  que satisfaçam o sistema de desigualdades

$$p_{ii}(A_i + B_i K_i)' L_i (A_i + B_i K_i) - L_i < 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (3.3)$$



### Solução do Problema

Na próxima proposição, introduz-se uma representação equivalente na forma determinística padrão para o custo com horizonte de um salto (Proposição 2.3.1)

$$J(x, i) = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \left( \|y(k)\|^2 + \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S})x(k)\|^2 \right) - \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S})x\|^2, \quad (3.4)$$

válido sempre que  $x(0) = x$  e  $\theta_0 = i$ .

Assuma que cada matriz da coleção  $\mathbf{D} \in \mathbb{M}^{q \times p}$  tem posto completo de colunas, de forma que cada matriz  $D_i' D_i$  é não singular.

**Proposição 3.1.1.** Uma forma equivalente de expressar o custo em (3.4) para o SLSM  $\mathcal{S}$  é

$$J(x, i, u_i(\cdot)) = \sum_{k \geq 0} p_{ii}^k \|\hat{C}_i x(k) + \hat{D}_i u_i(k)\|^2 - \|\mathcal{L}_i^{1/2}(\mathbf{S})x\|^2 \quad (3.5)$$

onde

$$\hat{C}_i = \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{\frac{1}{2}} \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_i = \mathbf{I} - D_i (D_i' D_i)^{-1} D_i'. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* O vetor  $C_i x(k)$  pode ser decomposto em dois vetores ortogonais: um pertencente ao espaço imagem de  $D_i$  e outro pertencente ao espaço nulo de  $D_i'$  (Strang, 1988). Logo,

$$C_i x(k) = \Lambda_i C_i x(k) + (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i x(k)$$

onde  $\Lambda_i$  é a matriz de projeção sobre o subespaço nulo de  $D_i'$ , definida em (3.6). Assim,

$$\|y(k)\|^2 = \|\Lambda_i C_i x(k)\|^2 + \|(\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i x(k) + D_i u_i(k)\|^2.$$

Substituindo esta última expressão no termo da série em (3.4), tem-se

$$\begin{aligned} \|y(k)\|^2 + \|(\mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} x(k)\|^2 &= \|(C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} x(k)\|^2 + \|(\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i x(k) + D_i u_i(k)\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_i \end{bmatrix} u_i(k) \right\|^2. \end{aligned}$$

Para as variáveis  $\hat{C}_i$  e  $\hat{D}_i$  definidas em (3.6), as equações (3.4) e (3.5) são idênticas, o que encerra a prova.  $\square$

Através do gramiano de observabilidade, apresentado na Proposição 2.3.2, o problema de controle para o sistema  $\mathcal{S}$  em malha fechada pode ser reescrito em função das matrizes  $\hat{C}_i$  e  $\hat{D}_i$  como

$$\begin{aligned} J_{K_i} &= \inf_{L_i \in \mathcal{M}^{n+}} x'(L_i - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))x \\ \text{s.a: } p_{ii}(A_i + B_i K_i)' L_i (A_i + B_i K_i) - L_i + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A solução deste problema tem sido estudada amplamente (Davis e Vinter, 1985; Anderson e Moore, 1989; Lewis e Syrmos, 1995). Definindo

$$\tilde{A}_i = p_{ii}^{1/2} (A_i - B_i (D_i' D_i)^{-1} D_i' C_i), \quad \tilde{C}_i = (C_i A_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2}$$

e assumindo que

( $H_1$ ) o par  $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$  é estabilizável, ou seja, existe um controlador que  $\tau$ -estabiliza o sistema  $\mathcal{S}$ ; e

( $H_2$ ) o par  $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$  é detectável,

mostra-se que o ganho ótimo é dado por

$$K_i = (p_{ii} B_i' L_i B_i + D_i' D_i)^{-1} (p_{ii} B_i' L_i A_i + D_i' C_i) \quad (3.8)$$

onde a matriz  $L_i$  é a solução simétrica semidefinida positiva da **E**quação **A**lgébrica de **R**iccati (**E**AR), expressa por

$$L_i = p_{ii} A_i' L_i A_i - (p_{ii} A_i' L_i B_i + C_i' D_i) (p_{ii} B_i' L_i B_i + D_i' D_i)^{-1} (p_{ii} B_i' L_i A_i + D_i' C_i) + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}). \quad (3.9)$$

Esta última equação é obtida substituindo o ganho ótimo (3.8) na equação de Lyapunov em (3.7). Note que as hipóteses ( $H_1$ ) e ( $H_2$ ) garantem a existência e unicidade da solução da EAR, a qual caracteriza o ganho de realimentação em (3.8), que assegura a  $\tau$ -EE do sistema  $\mathcal{S}$  em malha fechada.

Além disso, o valor ótimo do custo é expresso por

$$J_{K_i}^* = x'(L_i - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))x. \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Problema com Múltiplas Transições da Cadeia

Nesta subseção, apresenta-se o procedimento que permite calcular a seqüência ótima dos ganhos de controle para o problema com múltiplos saltos. Para isto, defina a função valor

$$\begin{aligned} V^*(z_n, \phi_n) &= \min_{\{K^n, \dots, K^{N-1}\}} E \left[ \sum_{k=T_n}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \mid \mathfrak{F}_{T_n} \right], \quad n = 0, \dots, N-1 \\ &= z_n' S_{\phi_n} z_n \end{aligned}$$

onde  $z_n = x_{T_n}$  e  $\phi_n = \theta_{T_n}$ .

Utilizando a propriedade forte de Markov (Corolário 2.1.1) e o princípio de otimalidade, a função valor  $V^*(z_n, \phi_n)$  pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} V^*(z_n, \phi_n) &= \min_{K^n} E \left[ \sum_{k=T_n}^{T_{n+1}-1} \|y_k\|^2 + \right. \\ &\quad \left. \min_{\{K^{n+1}, \dots, K^{N-1}\}} E \left[ \sum_{k=T_{n+1}}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \mid \mathfrak{F}_{T_{n+1}} \mid \mathfrak{F}_{T_n} \right] \right] \\ &= \min_{K^n} E \left[ \sum_{k=T_n}^{T_{n+1}-1} \|y_k\|^2 + V^*(z_{n+1}, \phi_{n+1}) \mid \mathfrak{F}_{T_n} \right]. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Assumindo que  $(H_1)$  e  $(H_2)$  são satisfeitas para todo  $i \in \mathfrak{X}$ , com base na equação (3.11) e nos resultados obtidos para a solução do problema de um salto, o seguinte procedimento permite obter a seqüência de ganhos ótima  $\mathbb{K} = (\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1})$  na classe  $\mathcal{K}_\theta$ .

Passo 1: Faça  $n = N - 1$  e considere  $\mathbf{S}^{n+1} = \mathbf{S}$ .

Passo 2: Resolva a equação de Riccati

$$\begin{aligned} L_i^n &= p_{ii} A_i' L_i^n A_i - (p_{ii} A_i' L_i^n B_i + C_i' D_i) (p_{ii} B_i' L_i^n B_i + D_i' D_i)^{-1} (p_{ii} B_i' L_i^n A_i + D_i' C_i) \\ &\quad + C_i' C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{n+1}), \quad \forall i \in \mathfrak{X}, \end{aligned}$$

que fornece o ganho de realimentação ótimo

$$K_i^n = (p_{ii} B_i' L_i^n B_i + D_i' D_i)^{-1} (p_{ii} B_i' L_i^n A_i + D_i' C_i), \quad \forall i \in \mathfrak{X}.$$

Acrescente  $\mathbf{K}^n$  à seqüência  $\mathbb{K}$ , defina  $S_i^n = L_i^n - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{n+1})$  e adote  $n = n - 1$ . Se  $n \geq 0$ , retorne ao início do Passo 2; caso contrário, o valor do custo ótimo é

$$J_{K_i}^* = x' S_i^0 x.$$

Note que, no passo 2 do procedimento anterior, as hipóteses de estabilizabilidade ( $H_1$ ) e detectabilidade ( $H_2$ ) devem ser satisfeitas em cada iteração. Em particular, a condição de detectabilidade depende da coleção de matrizes  $\mathbf{S}^n$ , dificultando sua verificação. O seguinte lema estabelece condições suficientes para a mesma.

**Lema 3.1.1.** Se o par  $(\tilde{A}_i, \Lambda_i C_i)$  é detectável, então o par  $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$  também é detectável.

### 3.1.3 Formulação Convexa

Antes de finalizar esta seção, o problema com um salto é resolvido através de um problema de otimização convexa equivalente envolvendo LMIs, como preparação prévia para a próxima seção.

Denote

$$\mathcal{K}_\theta^e = \{\mathbf{K} \in \mathbb{M}^{p \times n}; \mathbf{K} \text{ estabiliza } (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \text{ no sentido } \tau\text{-EE}\}$$

como o conjunto de ganhos  $\tau$ -estabilizantes descrito por (3.3). No próximo teorema,  $\mathcal{K}_\theta^e$  é parametrizado num conjunto convexo, descrito mediante LMIs, conforme ilustrado na Figura 3.2.

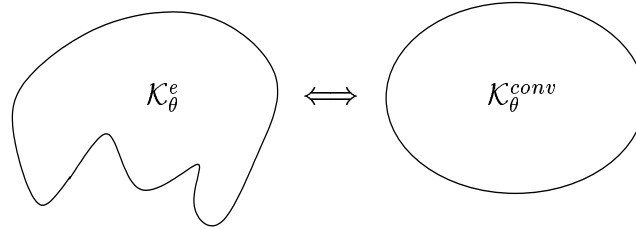


Figura 3.2: Conjunto convexo dos ganhos  $\tau$ -estabilizantes.

**Teorema 3.1.1.** As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Existem coleções de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{M}^{p \times n}$  para as quais o sistema de desigualdades em (3.3) é satisfeito.
- (ii) Existem coleções de matrizes  $\mathbf{E} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $\mathbf{F} \in \mathbb{M}^{p \times n}$  satisfazendo o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{bmatrix} E_i & \star \\ p_{ii}^{1/2}(A_i E_i + B_i F_i) & E_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathcal{X}. \quad (3.12)$$

*Demonstração.* Assuma o estado  $i \in \mathfrak{X}$  fixo.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Primeiramente, aplica-se o complemento Schur na desigualdade (3.3). A seguir, pré-multiplicando e pós-multiplicando por  $T_i = \text{diag}(L_i^{-1}, L_i^{-1})$  e por  $T_i'$ , respectivamente, obtém-se a desigualdade (3.12), substituindo as seguintes matrizes

$$E_i = L_i^{-1} \quad \text{e} \quad F_i = K_i L_i^{-1}.$$

(i)  $\Leftarrow$  (ii) Deriva do fato de que, se existem matrizes que satisfaçam a desigualdade (3.12), então pode-se afirmar que  $E_i > 0$ . Assim, é possível obter matrizes

$$L_i = E_i^{-1} \quad \text{e} \quad K_i = F_i E_i^{-1}$$

que satisfaçam a desigualdade (3.3). □

Antes de apresentar a solução do problema de um salto via LMIs, é importante observar que quando a restrição do problema de otimização em (3.7) é substituída por

$$p_{ii}(A_i + B_i K_i)' P_i (A_i + B_i K_i) - P_i + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i) < 0, \quad (3.13)$$

o valor de  $P_i$  aumenta, assim como o valor da função objetivo. Isto se deve ao fato de que, considerando-se a matriz  $P_i \in \mathcal{M}^{n+}$  como uma solução factível de (3.13) ao subtrair a restrição do problema de otimização (3.7) da desigualdade em (3.13), obtém-se

$$p_{ii}(A_i + B_i K_i)' (P_i - L_i) (A_i + B_i K_i) - (P_i - L_i) + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i) < 0.$$

Considerando, na expressão acima, que o sistema  $\mathcal{S}$  é  $\tau$ -EE, tem-se que

$$P_i - L_i > 0 \quad \Rightarrow \quad P_i > L_i. \quad (3.14)$$

Isto é, as soluções factíveis de (3.13) provêm limitantes superiores para o custo  $J_{K_i}$ . Além disso, esta solução pode ser escolhida tão próxima à solução ótima  $L_i$  quanto se deseje se o problema de otimização em (3.7) é reescrito como

$$\begin{aligned} J_{K_i} &= \inf_{P_i \in \mathcal{M}^{n+}} x' (P_i - \mathcal{L}_i(\mathbf{S})) x \\ \text{s.a: } & p_{ii}(A_i + B_i K_i)' P_i (A_i + B_i K_i) - P_i + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_i) < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

O próximo teorema permite reformular o problema acima como um problema de otimização com função objetivo linear e restrições do tipo LMI.

**Teorema 3.1.2.** O seguinte problema LMI nas variáveis  $M_i, E_i$  e  $F_i$

$$\begin{aligned} & \inf \operatorname{tr}(M_i) \\ \text{s.a. : } & \begin{bmatrix} E_i & \star & \star \\ P_i^{1/2}(A_i E_i + B_i F_i) & E_i & \star \\ \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} E_i \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i E_i + D_i F_i \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} M_i & \star \\ X_i^{1/2} & E_i \end{bmatrix} > 0, \quad (3.17)$$

fornece o ganho ótimo de realimentação

$$K_i = F_i E_i^{-1} \quad (3.18)$$

e o valor do custo mínimo

$$J_{K_i}^* = x'(P_i - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))x, \quad P_i = E_i^{-1}. \quad (3.19)$$

*Demonstração.* A prova da necessidade inicia-se aplicando o complemento Schur na restrição do problema de otimização dado em (3.15) e, em seguida, pré-multiplicando e pós-multiplicando por  $T_i = \operatorname{diag}(P_i^{-1}, P_i^{-1}, \mathbf{I})$  e por  $T_i'$ , respectivamente. A desigualdade (3.16) é obtida substituindo as seguintes matrizes

$$E_i = P_i^{-1} \quad \text{e} \quad F_i = K_i P_i^{-1}.$$

Por outro lado, o termo  $x' \mathcal{L}_i(\mathbf{S})x$  na função objetivo pode ser desconsiderado no processo de minimização, uma vez que o mesmo é uma constante. O termo restante pode ser expresso como

$$x' P_i x = \operatorname{tr}(P_i X_i) = \operatorname{tr}(X_i^{1/2} P_i X_i^{1/2}).$$

Definindo

$$M_i > X_i^{1/2} P_i X_i^{1/2} \quad (3.20)$$

e aplicando o complemento Schur em (3.20), pré-multiplicando e pós-multiplicando por  $T_i = \operatorname{diag}(\mathbf{I}, P_i^{-1})$  e por  $T_i'$ , respectivamente, obtém-se a desigualdade (3.17), uma vez que

$$E_i = P_i^{-1}.$$

A prova da suficiência deriva do fato de que, se existem matrizes que satisfaçam as desigualdades (3.16) e (3.17), então pode-se afirmar que  $E_i > 0$ . Assim, é possível obter matrizes

$$P_i = E_i^{-1} \quad \text{e} \quad K_i = F_i E_i^{-1}$$

que satisfaçam a desigualdade em (3.15).  $\square$

Neste ponto, torna-se oportuno fazer alguns comentários. Observe que o ganho obtido em (3.18), através da formulação convexa, não depende diretamente das matrizes do sistema, o que difere do resultado obtido via EAR (vide equação (3.8)). Note também que o sistema controlado sempre será  $\tau$ -EE, pois a factibilidade de (3.16) está associada à condição de  $\tau$ -estabilizabilidade.

## 3.2 Sem Observação dos Estados da Cadeia

Conforme definido no Capítulo 1, o SLSM  $\mathcal{S}$  é dado por

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\theta_k} x_k + B_{\theta_k} u_k, & x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta_0 \sim \mu_0 \\ y_k = C_{\theta_k} x_k + D_{\theta_k} u_k, & k \geq 0 \end{cases}$$

onde  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  são os estados do processo assumindo valores em  $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é uma condição inicial fixa, mas arbitrária;  $\{u_k; k \geq 0\}$  e  $\{y_k; k \geq 0\}$  são os processos de controle e de saída, respectivamente.

Assumindo que  $\mathfrak{X}_o = \emptyset$ , o espaço de estados  $\mathfrak{X}$  da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  satisfaz a seguinte identidade:  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_h$ . Nesta estrutura de informação, em cada instante  $k$ , o estado linear  $x_k$  e os instantes de salto  $T_n \in \mathcal{T}^N$  são acessíveis ao controlador. Portanto, impõe-se a seguinte lei de controle

$$u_k = \left( \sum_{n=0}^{N-1} K^n \mathbf{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}\}} \right) x_k, \quad k \geq 0.$$

Denota-se esta classe de ganhos de controle por  $\mathcal{K}$  e cada elemento dessa classe é expresso por

$$(K^0, \dots, K^{N-1}) \in \mathcal{K}$$

onde  $K^n \in \mathcal{M}^{p \times n}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

O objetivo é determinar a seqüência dos ganhos de realimentação linear pertencentes a classe  $\mathcal{K}$  de forma que o custo

$$J^N(x(0), u(\cdot)) = E \left[ \sum_{k=0}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \right]$$

seja minimizado.

Na Figura 3.3, apresenta-se o diagrama esquemático do SLSM  $\mathcal{S}$  em malha fechada. Observe que o controlador muda seqüencialmente seus parâmetros,  $K^n$ , de acordo com a informação proveniente do módulo de detecção de falhas. Ou seja, o ganho  $K^n$  é implementado quando ocorre a  $n$ -ésima falha.

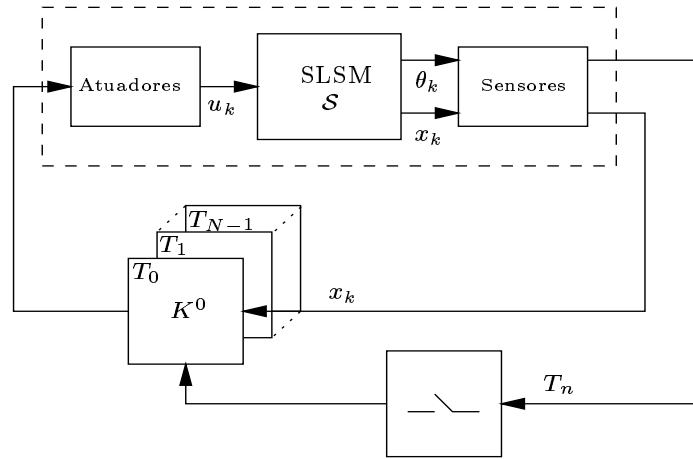


Figura 3.3: SLSM em malha fechada sem observação do parâmetro de salto  $\theta_k$ .

Novamente, inicia-se o projeto do controlador para o caso onde o horizonte do problema finaliza no instante em que ocorre a primeira transição da cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  ( $N = 1$ ). Em seguida, será abordado o caso quando existem múltiplas transições da cadeia ( $N > 1$ ).

### 3.2.1 Problema com uma Transição da Cadeia

Para o sistema  $\mathcal{S}$  em malha fechada, as trajetórias  $k \rightarrow x(k)$  e  $k \rightarrow y(k)$  no intervalo  $0 \leq k < T$  estão definidas da seguinte maneira

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k), & (x(0), \theta_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X} \\ y(k) = C_i x(k) + D_i u(k) & 0 \leq k < T \end{cases} \quad (3.21)$$



onde se denota por  $u(k)$  a variável de controle independente do estado  $\theta_k = i$ . Neste caso, a lei de realimentação é dada por

$$u(k) = Kx(k), \quad 0 \leq k < T, \quad K \in \mathcal{M}^{p \times n}.$$

### Estabilizabilidade

**Definição 3.2.1.** O par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é  $\tau$ -estabilizável se existirem coleções de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $K \in \mathcal{M}^{p \times n}$  que satisfaçam o sistema de desigualdades

$$p_{ii}(A_i + B_i K)' L_i (A_i + B_i K) - L_i < 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (3.22)$$

O problema de estabilização é semelhante a uma importante questão na área de controle robusto, uma vez que trata da estabilização simultânea por realimentação de estado. Desta maneira, o mesmo pode ser formulado da seguinte forma:

*Sob quais condições é possível encontrar um único ganho  $K$ , caso exista, tal que estabilize a coleção de sistemas lineares  $\{p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i; \forall i \in \mathfrak{X}\}$  ?*

Denote

$$\mathcal{K}^e = \{K \in \mathcal{M}^{p \times n}; K \text{ estabiliza } (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \text{ no sentido } \tau\text{-EE}\}$$

como o conjunto de ganhos  $\tau$ -estabilizantes caracterizado por (3.22).

Uma parametrização que permite representar  $\mathcal{K}^e$  como um conjunto convexo pode ser obtida considerando uma única “matriz de Lyapunov”,  $E = E_i$  para todo  $i \in \mathfrak{X}$  e consequentemente  $F = F_i$  para todo  $i \in \mathfrak{X}$ , em (3.12). Porém, esta condição suficiente produz resultados conservadores. Em (de Oliveira et al., 1999), um grau extra de liberdade é inserido na condição de estabilidade através de um desacoplamento entre o produto da matriz de Lyapunov e a matriz do sistema, mantendo a linearidade na desigualdade expandida. Desta maneira, é possível considerar diferentes “matrizes de Lyapunov” na condição de  $\tau$ -estabilizabilidade (vide Proposição (3.2.1)). Este resultado é reproduzido a seguir e sua prova encontra-se no Apêndice B.

**Teorema 3.2.1.** (de Oliveira et al., 1999) As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Existe uma matriz  $L \in \mathcal{M}^{n+}$  tal que

$$A' L A - L < 0. \quad (3.23)$$

(ii) Existe uma matriz  $L \in \mathcal{M}^{n+}$  e uma matriz  $G \in \mathcal{M}^n$  tal que

$$\begin{bmatrix} L & \star \\ GA & G + G' - L \end{bmatrix} > 0. \quad (3.24)$$

**Proposição 3.2.1.** Se existem a coleção de matrizes  $\mathbf{E} \in \mathbb{M}^{n+}$  e matrizes  $Z \in \mathcal{M}^n$  e  $F \in \mathcal{M}^{p \times n}$  satisfazendo o sistema de desigualdades

$$\begin{bmatrix} E_i & \star \\ p_{ii}^{1/2}(A_i Z + B_i F) & Z + Z' - E_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (3.25)$$

então existem matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $K \in \mathcal{M}^{p \times n}$  satisfazendo (3.22).

*Demonstração.* Adote o estado  $i \in \mathfrak{X}$  como fixo. A prova é iniciada aplicando-se o Teorema 3.2.1 à desigualdade (3.22) e, em seguida, pré-multiplique e pós-multiplique a desigualdade obtida por  $T_i = \text{diag}(G_i^{-1}, G_i^{-1})$  e por  $T_i'$ . Considerando  $G = G_i, \forall i \in \mathfrak{X}$  e substituindo as seguintes matrizes

$$Z = (G')^{-1}, \quad F = K(G')^{-1} \quad \text{e} \quad E_i = G^{-1}L_i(G')^{-1}, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (3.26)$$

obtem-se a desigualdade (3.25). □

**Comentário 3.2.1.** Na Figura 3.4, ilustra-se o fato de que apenas um subconjunto das matrizes  $\tau$ -estabilizantes do sistema é considerado em (3.25). Assim, se a desigualdade (3.25) é infactível, não se pode garantir a não existência de um ganho  $K$  que estabilize o sistema no sentido  $\tau$ -EE.

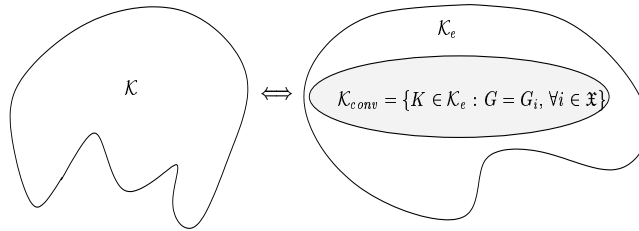


Figura 3.4: Conjunto convexo dos ganhos  $\tau$ -estabilizantes.

### Solução do Problema

De forma análoga, através do gramiano de observabilidade apresentado na Proposição 2.3.3, o problema de controle para o sistema em malha fechada pode ser reescrito em função das matrizes  $\hat{C}_i$  e  $\hat{D}_i$ , como

$$J_K = \inf_{P_i \in \mathcal{M}^{n+}} \langle \mathbf{P} - \mathcal{L}(\mathbf{S}), \mathbf{X} \rangle \quad (3.27)$$

$$\text{s.a: } p_{ii}(A_i + B_i K)' P_i (A_i + B_i K) - P_i + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K) < 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}$$

com  $X_i = x x' \mu_i$ .

O próximo teorema provê uma solução para o problema de controle via LMIs.

**Teorema 3.2.2.** O seguinte problema LMI nas variáveis  $M_i, E_i, Z$  e  $F$

$$\inf \sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr}(M_i)$$

$$\text{s.a: } \begin{bmatrix} E_i & \star & \star \\ p_{ii}^{1/2}(A_i Z + B_i F) & Z + Z' - E_i & \star \\ \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} Z \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i Z + D_i F \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} M_i & \star \\ X_i^{1/2} & Z + Z' - E_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (3.29)$$

fornece o ganho de realimentação

$$K = F Z^{-1} \quad (3.30)$$

e o valor do custo

$$J(x) \leq \langle \mathbf{P} - \mathcal{L}(\mathbf{S}), \mathbf{X} \rangle \quad (3.31)$$

onde  $P_i \in \mathcal{M}^{n+}$  satisfaz a equação de Lyapunov

$$p_{ii}(A_i + B_i K)' P_i (A_i + B_i K) - P_i + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K) = 0. \quad (3.32)$$

*Demonstração.* Assuma o estado  $i \in \mathfrak{X}$  fixo. A prova da necessidade é iniciada aplicando-se o Teorema 3.2.1 à desigualdade em (3.27). Em seguida, pré-multiplique e pós-multiplique a desigualdade obtida por  $T_i = \text{diag}(G_i^{-1}, G_i^{-1}, \mathbf{I})$  e por  $T_i'$ , respectivamente. Considerando  $G = G_i, \forall i \in \mathfrak{X}$  e substituindo as seguintes matrizes

$$Z = (G')^{-1}, \quad F = K(G')^{-1} \quad \text{e} \quad E_i = G^{-1} P_i (G')^{-1}, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \quad (3.33)$$

obtém-se a desigualdade (3.28).

Por outro lado, na função objetivo, o termo  $\langle \mathcal{L}(\mathbf{S}), \mathbf{X} \rangle$  é uma constante, podendo ser desconsiderado no processo de minimização. O termo restante pode ser expresso da seguinte forma

$$\sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr}(P_i X_i) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr}(X_i^{1/2} P_i X_i^{1/2}). \quad (3.34)$$

Definindo

$$M_i > X_i^{1/2} P_i X_i^{1/2}, \quad (3.35)$$

aplicando o Teorema 3.2.1 em (3.35) e, em seguida, pré-multiplicando e pós-multiplicando por  $T_i = \text{diag}(\mathbf{I}, G_i^{-1})$  e por  $T_i'$ , respectivamente, obtém-se a desigualdade (3.29), tomando-se  $G = G_i, \forall i \in \mathfrak{X}$  e substituindo as seguintes matrizes

$$Z = (G')^{-1} \quad \text{e} \quad E_i = G^{-1} P_i (G')^{-1}, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (3.36)$$

A prova da suficiência deriva do fato de que, se existem matrizes que satisfaçam as desigualdades (3.28) e (3.29), então pode-se afirmar que  $E_i > 0$  e  $Z + Z' - E_i > 0$ . Conseqüentemente, a matriz  $Z$  não é singular. Assim, é possível obter matrizes

$$K = FZ^{-1} \quad \text{e} \quad P_i = (Z')^{-1} E_i Z^{-1}, \quad \forall i \in \mathfrak{X}. \quad (3.37)$$

que satisfaçam a desigualdade em (3.27).  $\square$

**Comentário 3.2.2.** Note que a matriz  $X_i$  é semidefinida positiva e, portanto, sua raiz quadrada não é única. Uma vez que o ganho de controle em (3.30) depende de  $X_i$ , este também não é único. Não obstante, tem-se que

$$\text{tr}(X_i^{1/2}(Z + Z' - E_i)X_i^{1/2}) = \text{tr}(X_i^{1/2}X_i^{1/2}(Z + Z' - E_i)) = \text{tr}(X_i(Z + Z' - E_i))$$

Assim, pode-se concluir que todos eles produzem o mesmo limitante superior do custo.

### 3.2.2 Problema com Múltiplas Transições da Cadeia

Retornando ao problema proposto, no qual seu horizonte coincide com o instante de salto  $T_N$  com  $N > 1$ , apresenta-se a seguir o procedimento, baseado no Teorema 3.2.3, através do qual a seqüência subótima dos ganhos de controle para o problema com múltiplos saltos é calculada a partir dos resultados anteriormente obtidos para o problema de um salto.

Para isto, defina

$$\mathbb{K}_\kappa^n = \{K_{\kappa-1}^0, \dots, K_{\kappa-1}^{n-1}, K_\kappa^n, K_\kappa^{n+1}, \dots, K_\kappa^N\}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

como a seqüência dos ganhos de controle no seguinte algoritmo recursivo e considere que  $\mathbb{K}_\kappa^n = \mathbb{K}_\kappa$  por simplicidade.

Passo 1: Faça  $\kappa = 0$  e  $n = N - 1$ . Considere  $\mathbf{S}^{n+1} = \mathbf{S}$  e escolha uma seqüência  $\mathbb{X}_0 = \{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^{N-1}\}$ ,  $\mathbf{X}^n \in \mathbb{M}^{n0}$ .

Passo 2: Resolva o seguinte problema LMI

$$\begin{aligned} & \inf \sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr}(M_i) \\ \text{s.a. : } & \begin{bmatrix} E_i & \star & \star \\ p_i^{1/2}(A_i Z + B_i F) & Z + Z' - E_i & \star \\ \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(S^{n+1}))^{1/2} Z \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i Z + D_i F \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \\ & \begin{bmatrix} M_i & \star \\ (X_i^n)^{1/2} & Z + Z' - E_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

o qual fornece o ganho de realimentação

$$K^n = F Z^{-1}.$$

Substitua o ganho  $K^n$  obtido na seqüência  $\mathbb{K}_\kappa$ , defina  $S_i^n = P_i^n - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{n+1})$  onde  $P_i^n \in \mathbb{M}^{n+}$  satisfaz a equação de Lyapunov

$$p_{ii}(A_i + B_i K^n)' P_i^n (A_i + B_i K^n) - P_i^n + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K^n)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K^n) = 0,$$

e adote  $n = n - 1$ . Se  $n \geq 0$ , retorne ao início do Passo 2; caso contrário, adote  $n = 0$  e condição inicial  $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{M}^{n0}$

Passo 3: Calcule  $\mathbf{X}^{n+1} \in \mathbb{M}^{n0}$  através da relação

$$X_j^{n+1} = \sum_{i \neq j} p_{ij} W_i^n \quad \forall j \in \mathfrak{X}$$

onde  $W_i^n \in \mathbb{M}^n$  satisfaz a equação matricial algébrica

$$W_i^n = p_{ii}(A_i + B_i K^n) W_i^n (A_i + B_i K^n)' + (A_i + B_i K^n) X_i^n (A_i + B_i K^n)'$$

Substitua a matriz  $\mathbf{X}^{n+1}$  na seqüência  $\mathbb{X}_0$  e adote  $n = n + 1$ . Se  $n < N$ , retorne ao início do Passo 3.

Passo 4: Verifique o critério de parada do algoritmo com respeito à variação do custo. Se o mesmo não for satisfeito, adote  $\kappa = \kappa + 1$  e retorne ao Passo 2.

Com base na Proposição 2.3.5, o funcional quadrático  $J_{\mathbb{K}_\kappa}^{n,N}$ , associado à seqüência de ganhos  $\mathbb{K}_\kappa^n$ , é dado por

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{K}_\kappa}^{n,N} &= E_{x_0, \theta_0} \left[ \sum_{k=T_n}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \right] \\ &= \left\langle \mathbf{P}_{K_\kappa^n}^n - \mathcal{L}^n(\mathbf{S}^{n+1}), \mathbf{X}_{K_\kappa^n}^n \right\rangle. \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.3.** As seqüências  $\mathbb{K}_\kappa$ ,  $\kappa = 0, 1, \dots$ , geradas acima são tais que  $J_{\mathbb{K}_\kappa} \leq J_{\mathbb{K}_{\kappa-1}}$ .

*Demonstração.* Considerando o valor de  $\kappa$  fixo, inicia-se a prova observando que, no Passo 3, a diferença entre os custos produzidos em duas seqüências sucessivas, em função das seqüências

$$\mathbb{K}_\kappa^0 = \{K_\kappa^0, \dots, K_\kappa^{N-1}, K_\kappa^N\} \quad \text{e} \quad \mathbb{K}_\kappa^N = \{K_{\kappa-1}^0, \dots, K_{\kappa-1}^{N-1}, K_\kappa^N\},$$

pode ser expressa como

$$J_{\mathbb{K}_\kappa} - J_{\mathbb{K}_{\kappa-1}} = J_{\mathbb{K}_\kappa^0} - J_{\mathbb{K}_\kappa^N}.$$

Esta última igualdade também pode ser expressa como a soma das diferenças de duas iterações sucessivas. Assim,

$$J_{\mathbb{K}_\kappa} - J_{\mathbb{K}_{\kappa-1}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( J_{\mathbb{K}_\kappa^n} - J_{\mathbb{K}_\kappa^{n+1}} \right).$$

Antes de substituir os custos pelo equivalente em função de  $J_{\mathbb{K}_\kappa^n}^{n,N}$ , observe que as seqüências

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\kappa^n &= \{K_{\kappa-1}^0, \dots, K_{\kappa-1}^{n-1}, K_\kappa^n, K_\kappa^{n+1}, \dots, K_\kappa^N\} \\ \mathbb{K}_\kappa^{n+1} &= \{K_{\kappa-1}^0, \dots, K_{\kappa-1}^n, K_{\kappa-1}^{n+1}, K_\kappa^{n+1}, \dots, K_\kappa^N\} \end{aligned}$$

só diferem no ganho correspondente ao índice  $n$ . Portanto, definindo

$$X_{\mathbb{K}_\kappa^{n+1}}^\ell = X_{\mathbb{K}_\kappa^n}^\ell = X^n, \quad \ell \leq n,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{K}_\kappa} - J_{\mathbb{K}_{\kappa-1}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( J_{\mathbb{K}_\kappa^n}^{n,N} - J_{\mathbb{K}_\kappa^{n+1}}^{n,N} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \mathbf{X}^n, \mathbf{P}_{K_\kappa^n}^n - \mathbf{P}_{K_{\kappa-1}^n}^n \right\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade deve-se ao fato de se otimizar o custo a cada iteração.  $\square$

**Comentário 3.2.3.** Observe que, no Passo 4 do procedimento anterior, o cálculo de  $\mathbf{X}^n$  para  $n > 1$ , é realizado considerando  $\mathbf{X}^0$  como condição inicial. Porém, o estado  $x_k$  é acessível ao controlador em todo instante de tempo  $k$  e, em particular, nos tempos de parada  $T_n \in \mathcal{T}^N$ . Com o objetivo de incluir esta informação no projeto do controlador, em cada instante de salto  $T_n \in \mathcal{T}^N$  para  $n = 0, \dots, N-1$ , resolve-se o problema considerando  $T_N - T_n$  como horizonte do mesmo e  $\mathbf{X}^n$  como condição inicial, sendo  $X_i^n = z_n z_n' \mu_i^n, \forall i \in \mathfrak{X}$ , onde  $\mu_i^n = P(\phi_n = i)$ . Na seqüência de controle obtida, implementa-se apenas o ganho  $K^n$  desconsiderando-se os demais.

### 3.3 Observação por Agrupamento dos Estados da Cadeia

Conforme definido no Capítulo 1, considere o SLSM  $\mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\theta_k} x_k + B_{\theta_k} u_k, & x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta_0 \sim \mu_0 \\ y_k = C_{\theta_k} x_k + D_{\theta_k} u_k, & k \geq 0 \end{cases}$$

onde  $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$  são os estados do processo assumindo valores em  $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é uma condição inicial fixa, mas arbitrária;  $\{u_k; k \geq 0\}$  e  $\{y_k; k \geq 0\}$  são os processos de controle e de saída, respectivamente.

Assuma que o conjunto de estados da cadeia de Markov, na representação produto  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_h \times \mathfrak{X}_o$ , é tal que apenas uma parte dos estados  $\theta_k$  da cadeia é conhecida. Nesta situação, opta-se pela seguinte lei de controle com realimentação linear do estados  $x_k$

$$u_k = \left( \sum_{j \in \mathfrak{X}_o} \sum_{n=0}^{N-1} K_j^n \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}, \theta_k \in \mathfrak{X}_j\}} \right) x_k, \quad k \geq 0.$$

Denota-se a classe de ganhos de controle por

$$(\mathbf{K}^1, \dots, \mathbf{K}^{N-1}) \in \mathcal{K}_a$$

onde  $\mathbf{K}^n = (K_1^n, \dots, K_{E_o}^n)$  e  $K_j^n \in \mathcal{M}^{p \times n}$ .

O objetivo é determinar a seqüência dos ganhos de realimentação linear pertencentes à classe  $\mathcal{K}_a$  de forma que o custo

$$J^N(x(0), u(\cdot)) = E \left[ \sum_{k=0}^{T_N-1} \|y_k\|^2 + \|S_{\phi_N}^{1/2} z_N\|^2 \right]$$

seja minimizado.

### 3.3.1 Problema com uma Transição da Cadeia

As trajetórias  $k \rightarrow x(k)$  e  $k \rightarrow y(k)$ , até o instante  $T$  no qual acontece a primeira transição da cadeia de Markov, para o sistema em malha fechada estão definidas da seguinte maneira

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u_j(k), & (x(0), \theta_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X} \\ y(k) = C_i x(k) + D_i u_j(k) & 0 \leq k < T \end{cases} \quad (3.38)$$

onde se denota por  $u_j(k)$  a variável de controle dependente do estado  $\theta_k = j \in \mathfrak{X}_o$ . Neste caso, a lei de realimentação linear é

$$u_j(k) = \left( \sum_{j \in \mathfrak{X}_o} K_j^n \mathbb{1}_{\{\theta_k \in \mathfrak{X}_j\}} \right) x(k), \quad 0 \leq k < T.$$

Com o objetivo de não tornar o texto repetitivo, as provas desta seção serão omitidas, pois seguem um raciocínio análogo ao apresentado na Seção 3.2.

#### Estabilizabilidade

**Definição 3.3.1.** O par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é  $\tau$ -estabilizável se existem coleções de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{M}^{p \times n}$  tais que satisfazem o seguinte conjunto de desigualdades

$$p_{ii}(A_i + B_i K_j)' L_i (A_i + B_i K_j) - L_i < 0, \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j. \quad (3.39)$$

**Teorema 3.3.1.** Se existem coleções de matrizes  $\mathbf{E} \in \mathbb{M}^{n+}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $\mathbf{F} \in \mathbb{M}^{m \times n}$  satisfazendo o conjunto de desigualdades

$$\left[ \begin{array}{cc} E_i & \star \\ p_{ii}^{1/2} (A_i E_i + B_i F_j) & Z_j + Z_j' - E_i \end{array} \right] > 0, \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j \quad (3.40)$$

então existem coleções de matrizes  $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{M}^{p \times n}$  satisfazendo (3.39).

#### Solução do Problema

O próximo teorema provê uma solução para o problema de controle via LMIs.



**Teorema 3.3.2.** O seguinte problema LMI

$$\inf \sum_{i=1, \dots, E} tr(M_i)$$

$$\text{s.a. : } \begin{bmatrix} E_i & \star & \star \\ p_{ii}^{1/2}(A_i Z_j + B_i F_j) & Z_j + Z_j' - E_i & \star \\ \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}))^{1/2} Z_j \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i Z_j + D_i F_j \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j$$

$$\begin{bmatrix} M_i & \star \\ X_i^{1/2} & Z_j + Z_j' - E_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j$$

fornece o ganho de realimentação

$$K_j = F_j Z_j^{-1}$$

e o valor do custo

$$J_{K_j} \leq \langle \mathbf{P} - \mathcal{L}(\mathbf{S}), \mathbf{X} \rangle$$

onde  $P_i \in \mathcal{M}^{n+}$  satisfaz a equação de Lyapunov

$$p_{ii}(A_i + B_i K_j)' P_i (A_i + B_i K_j) - P_i + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_j)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_j) = 0 \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j.$$

### 3.3.2 Problema com Múltiplas Transições da Cadeia

O próximo procedimento permite calcular a seqüência de ganhos subótima  $\mathbb{K}$  pertencente à classe  $\mathcal{K}_a$ .

Passo 1: Faça  $\kappa = 0$  e  $n = N - 1$ . Considere  $\mathbf{S}^{n+1} = \mathbf{S}$  e escolha uma seqüência  $\mathbb{X}_0 = \{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^{N-1}\}$ ,  $\mathbf{X}^n \in \mathbb{M}^{n0}$ .

Passo 2: Resolva o seguinte problema LMI

$$\inf \sum_{i=1, \dots, E} tr(M_i)$$

$$\text{s.a. : } \begin{bmatrix} E_i & \star & \star \\ p_{ii}^{1/2}(A_i Z_j + B_i F_j) & Z_j + Z_j' - E_i & \star \\ \begin{bmatrix} (C_i' \Lambda_i C_i + \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{n+1}))^{1/2} Z_j \\ (\mathbf{I} - \Lambda_i) C_i Z_j + D_i F_j \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{matrix} \forall j \in \mathfrak{X}_o, \\ \forall i \in \mathfrak{X}_j. \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_i & \star \\ (X_i^n)^{1/2} & Z_j + Z_j' - E_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j$$

que fornece o ganho subótimo de controle

$$K_j^n = F_j Z_j^{-1}.$$

Substitua  $\mathbf{K}^n$  na seqüência  $\mathbb{K}_\kappa$ , defina  $S_i^n = P_i^n - \mathcal{L}_i(\mathbf{S}^{n+1})$  onde  $P_i^n \in \mathcal{M}^{n+}$  satisfaz a equação de Lyapunov

$$p_{ii}(A_i + B_i K_j^n)' P_i^n (A_i + B_i K_j^n) - P_i^n + (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_j^n)' (\hat{C}_i + \hat{D}_i K_j^n) = 0,$$

e adote  $n = n - 1$ . Se  $n \geq 0$ , retorne ao início do Passo 2; caso contrário, adote  $n = 0$  e condição inicial  $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{M}^{m_0}$

Passo 3: Calcule  $\mathbf{X}^{n+1} \in \mathbb{M}^{n_0}$  através da relação

$$X_j^{n+1} = \sum_{i \neq j} p_{ij} W_i^n, \quad \forall j \in \mathfrak{X}_o, \forall i \in \mathfrak{X}_j$$

onde  $W_i \in \mathbf{M}^n$  satisfaz a equação matricial algébrica

$$W_i^n = p_{ii}(A_i + B_i K_j^n) W_i^n (A_i + B_i K_j^n)' + (A_i + B_i K_j^n) X_i^n (A_i + B_i K_j^n)'.$$

Substitua a matriz  $\mathbf{X}^{n+1}$  na seqüência  $\mathbb{X}_0$  e adote  $n = n + 1$ . Se  $n < N$ , retorne ao início do Passo 3.

Passo 4: Verifique o critério de parada do algoritmo com respeito à variação do custo. Se o mesmo não for satisfeito, adote  $\kappa = \kappa + 1$  e retorne ao Passo 2.

### 3.4 Resultados Numéricos

Considere um certo sistema dinâmico que seja capaz de tolerar um número total de falhas  $N = 4$  durante o seu período de operação. Além disso, em caso de falhas, apenas 3 modos de operação são considerados:

- Modo de operação  $i = 1$ : Sistema funcionando normalmente;
- Modo de operação  $i = 2$ : Sistema funcionando com falhas irrelevantes;
- Modo de operação  $i = 3$ : Sistema funcionando com falhas severas;

sendo as matrizes do sistema dadas por

Tabela 3.1: Matrizes das Equações de Estado do SLSM.

Parâmetros	Modos de Operação		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$A_i$	$\begin{bmatrix} -0,759 & -0,051 \\ -0,051 & 0,635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,719 & -0,458 \\ -0,458 & 0,719 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,467 & -0,434 \\ -0,434 & -0,583 \end{bmatrix}$
$B_i$	$\begin{bmatrix} -1,234 \\ -0,289 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,257 \\ -0,347 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,738 \end{bmatrix}$
$C_i$	$\begin{bmatrix} -1,717 & -0,056 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3,766 & -4,698 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,000 & 1,623 \end{bmatrix}$
$D_i$	$\begin{bmatrix} 0,368 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,0211 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,936 \end{bmatrix}$

As falhas surgem como eventos aleatórios discretos, causando a transição (ou salto) entre os modos de operação. Tais saltos são caracterizados por uma cadeia de Markov  $\{\theta_k; k \geq 0\}$  com distribuição inicial  $\mu_0 = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]$  e matriz de transição de estados dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,34 & 0,16 \\ 0,30 & 0,47 & 0,23 \\ 0,26 & 0,10 & 0,64 \end{bmatrix}.$$

A seguir, nas classes de controle  $\mathcal{K}_\theta$  (Seção 3.1),  $\mathcal{K}$  (Seção 3.2) e  $\mathcal{K}_a$  (Seção 3.3), deseja-se determinar as seqüências dos ganhos que minimizem o custo de operação  $J^4(x(0), u(\cdot))$  em (1.6) com condições iniciais  $\mu_0$ ,  $x_1(0) = [2 \ 1]'$ ,  $x_2(0) = [1 \ 1]'$ ,  $x_3(0) = [1 \ 2]'$  e custo final  $S_i^4 = 100\mathbf{I}_2$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### Observação Completa dos Estados da Cadeia

A seqüência de ganhos ótima na classe  $\mathcal{K}_\theta$  é apresentada na Tabela 3.2. Em seguida, a esperança da função valor e do segundo momento do estado linear  $x_k$  nos instantes  $T_n$  para  $n$  variando desde 0 até 4 são ilustrados nas Figuras 3.5 e 3.6, respectivamente.

Tabela 3.2: Seqüência de ganhos para a classe  $\mathcal{K}_\theta$

Ganhos de Controle	Intervalos entre Saltos			
	$[0, T_1)$	$[T_1, T_2)$	$[T_2, T_3)$	$[T_3, T_4)$
$K_1$	$[-0,715 \quad -0,558]$	$[0,583 \quad 0,016]$	$[0,760 \quad 0,577]$	$[-0,718 \quad -0,565]$
$K_2$	$[0,598 \quad 0,047]$	$[0,770 \quad 0,654]$	$[-0,762 \quad -0,655]$	$[0,641 \quad 0,117]$
$K_3$	$[0,775 \quad 0,798]$	$[-0,571 \quad 0,057]$	$[0,640 \quad -0,065]$	$[0,654 \quad 0,578]$

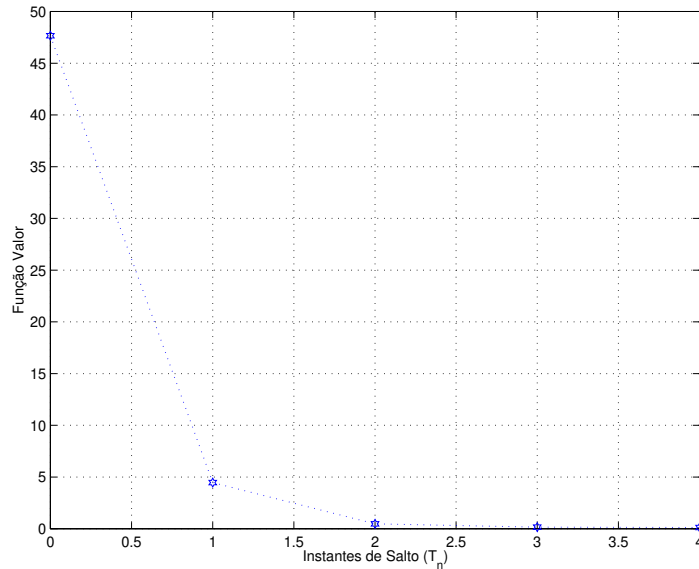


Figura 3.5: Esperança da função valor para a classe  $\mathcal{K}_\theta$ .

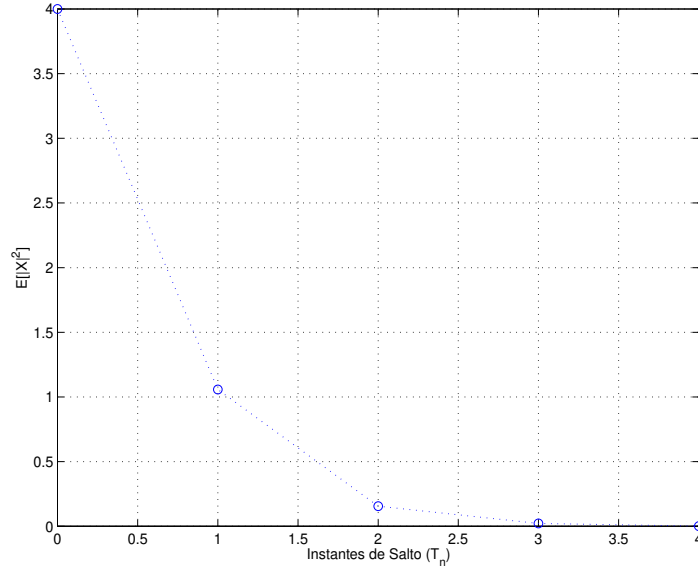


Figura 3.6:  $E[||X||^2]$  para a classe  $\mathcal{K}_\theta$ .

### Sem Observação dos Estados da Cadeia

A seqüência de ganhos subótima para o problema anteriormente apresentado é mostrada na seguinte tabela.

Tabela 3.3: Seqüência de ganhos subótima para a classe  $\mathcal{K}$

Ganhos de Controle	Intervalos entre Saltos			
	$[0, T_1)$	$[T_1, T_2)$	$[T_2, T_3)$	$[T_3, T_4)$
$K$	$[-0,098 \ 0,356]$	$[0,175 \ -0,064]$	$[0,308 \ -0,122]$	$[0,192 \ -0,095]$

O valor esperado da função valor e do segundo momento do estado linear  $x_k$  nos instantes  $k = T_n$  para  $n = 0, \dots, 4$  são ilustrados nas Figuras 3.7 e 3.8, respectivamente.

Como foi anteriormente comentado, observe na Figura 3.7 que, quando se considera uma única matriz de Lyapunov (linha sólida), os valores da função valor são maiores que os obtidos quando se considera matrizes distintas. Além disso, comparando as Figuras 3.7 e 3.8 com as Figuras 3.5 e 3.6, respectivamente, é possível observar que a seqüência dos ganhos obtidos,

considerando que o estado de SLSM é conhecido, leva o estado linear  $x_k$  ao ponto de equilíbrio mais rapidamente e com menor custo.

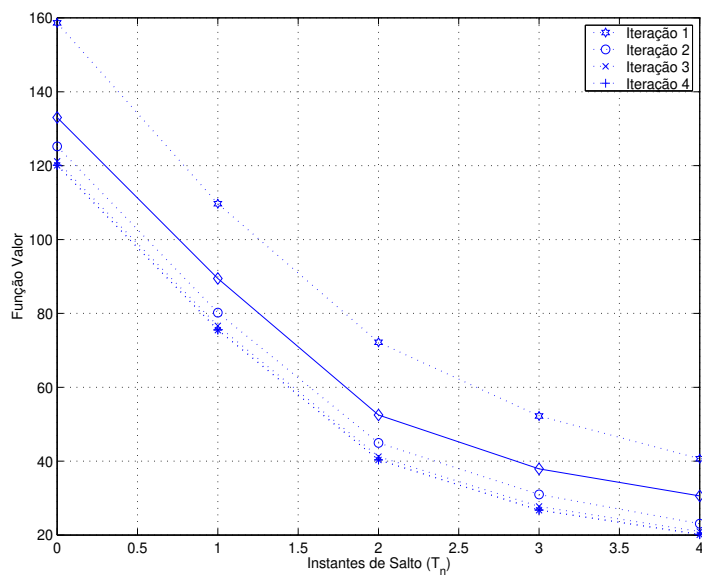


Figura 3.7: Esperança da função valor para a classe  $\mathcal{K}$ .

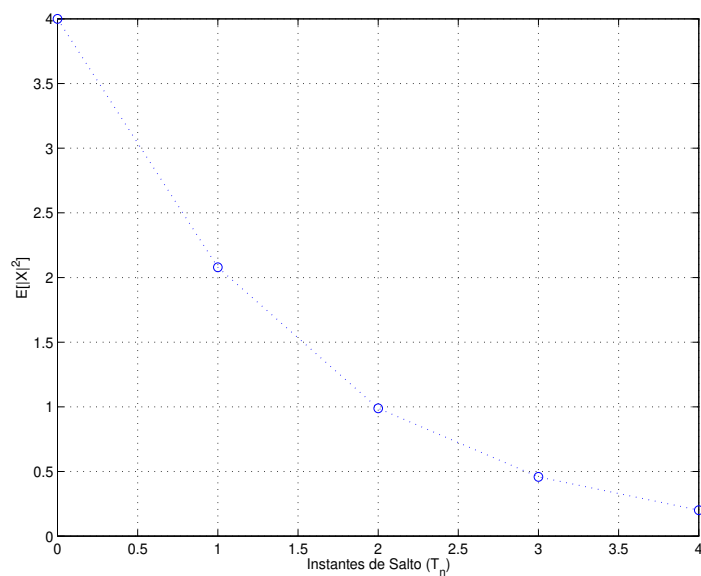


Figura 3.8:  $E[\|X\|^2]$  para a classe  $\mathcal{K}$ .

### Com Observação por Agrupamento dos Estados da Cadeia

Finalmente, considere que o sistema possui dois agrupamentos. O primeiro de eles contém apenas o “modo 1”, enquanto que o segundo engloba os “modos 2” e “3”. Na seguinte tabela, a seqüência de ganhos de realimentação linear de estado na classe  $\mathcal{K}_a$  é apresentada.

Tabela 3.4: Seqüência de ganhos subótima para a classe  $\mathcal{K}_a$

Ganhos de Controle	Intervalos entre Saltos			
	$[0, T_1)$	$[T_1, T_2)$	$[T_2, T_3)$	$[T_3, T_4)$
$K_1$	$[-0,631 \quad -0,432]$	$[-0,633 \quad -0,435]$	$[-0,712 \quad -0,586]$	$[-0,564 \quad 0,055]$
$K_2$	$[0,792 \quad 0,406]$	$[0,604 \quad 0,079]$	$[0,597 \quad 0,176]$	$[0,879 \quad 0,415]$

Uma vez mais, a esperança da função valor e o valor esperado do segundo momento do estado linear  $x_k$  nos instantes  $k = T_n$  para  $n = 0, \dots, 4$  são ilustrados nas Figuras 3.9 e 3.10. Neste caso, dado que a estrutura de informação é maior, tem-se que os valores da esperança da função valor são menores que os obtidos no caso onde o controlador não tem acesso aos estados da cadeia.

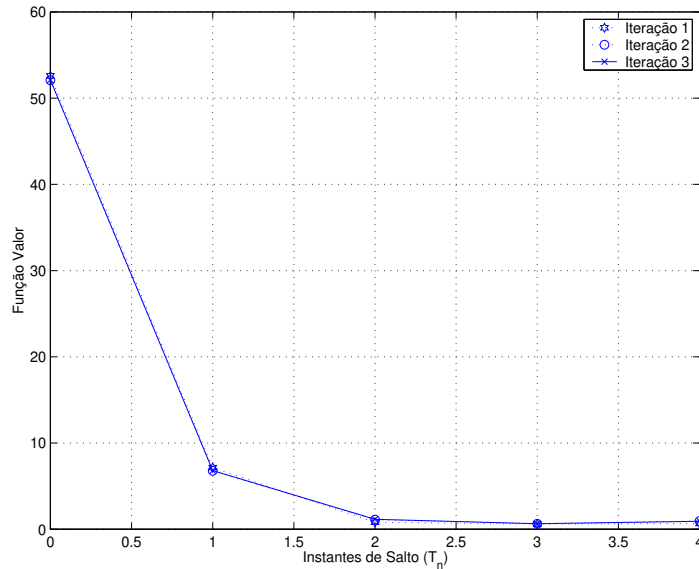


Figura 3.9: Esperança da função valor para a classe  $\mathcal{K}_a$ .

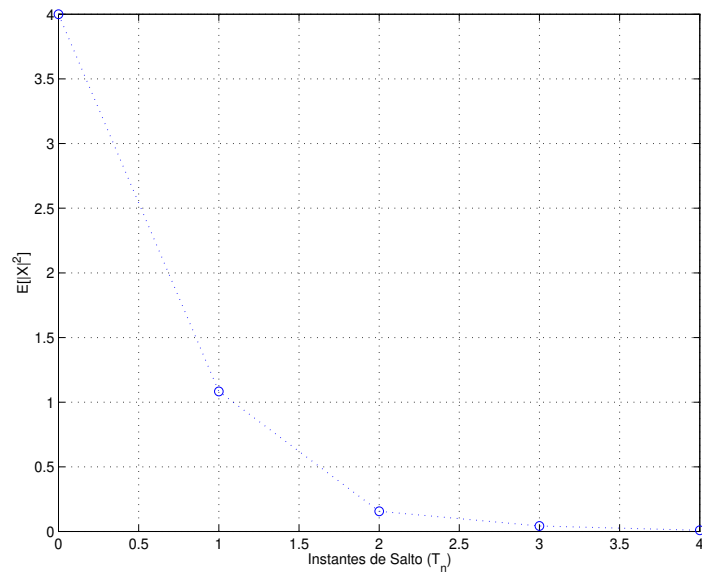


Figura 3.10:  $E[||X||^2]$  para a classe  $\mathcal{K}_a$ .



## Capítulo 4

# Conclusão

Nesta dissertação, propôs-se um problema de controle envolvendo os SLSM, que apresenta um índice de desempenho diferente daqueles usualmente apresentados na literatura. Este inclui na sua estrutura características que o tornam adequado para o estudo de sistemas tolerantes a falhas.

No Capítulo 2, encontram-se as principais contribuições deste trabalho. Definiu-se os conceitos de estabilidade estocástica apropriados ao problema, os quais também diferem dos encontrados na literatura. Tal diferença se dá apenas pela presença da função indicadora que permite limitar o horizonte da análise. Estabeleceu-se condições necessárias e suficientes que asseguram a  $\tau$ -estabilidade do SLSM. Os resultados obtidos podem ser estendidos aos casos no qual o tempo de parada  $\tau$  é caracterizado de forma geral pelo Teorema 2.2.1. Além disso, pode-se tentar estabelecer a equivalência entre todos os conceitos de estabilidade apresentados na Definição 2.2.1

No Capítulo 3, o projeto do controlador com realimentação linear de estado é determinado, considerando-se inicialmente que todos os estados do SLSM são observados completamente. Não obstante, em algumas situações práticas, é possível que os estados da cadeia de Markov não sejam acessíveis ao controlador em parte, ou na sua totalidade. Neste caso, a solução encontrada é obtida via LMIs, e assim pode contar com métodos computacionais eficientes para a implementação. A vantagem dessa abordagem é que a solução é passível de ser implementada, ao contrário de soluções que envolvem métodos estocásticos gerais.

Encerrando este capítulo, como futuros trabalhos nesta linha de pesquisa, propõe-se um problema de controle estocástico onde o horizonte do mesmo coincide com o instante no qual a cadeia de Markov atinge pela primeira vez um determinado estado. O estudo deste problema é motivado pelo seguinte fato:

Mais uma vez, suponha que certo sistema controlado esteja sujeito a falhas ou degradação no desempenho. Essas falhas ocorrem de forma aleatória ao longo do tempo e são percebidas apenas nos instantes de sua ocorrência. Assuma que o sistema ainda possa ser operado de maneira satisfatória sem necessidade de paralisá-lo para manutenção até o instante em que aconteça um determinado tipo de falha pré-estabelecida. Neste momento, o problema finaliza após um número qualquer de falhas e deseja-se determinar a seqüência de controladores, de forma que o impacto no desempenho do sistema seja minimizado pelo uso seqüenciado desses controladores ao longo de cada período entre falhas.

# Referências Bibliográficas

- Abou-Kandil, H., Freiling, G. e Jank, G. (1995). On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems, *Automatica* **31**(5): 765–768.
- Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1989). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall.
- Blair, W. P. e Sworder, D. D. (1975). Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria, *International Journal of Control* **21**(5): 833–841.
- Boyd, S., El-Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics.
- Brémaud, P. (1999). *Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer-Verlag.
- Cáceres, Y. e do Val, J. B. R. (2000). Controle de sistemas lineares com saltos Markovianos com informação restrita aos instantes de ocorrência de falhas, *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 245–260.
- Ceci, C. e Gerardi, A. (1998). Partially observed control of a Markov jump process with counting observations: equivalence with the separated problem, *Stochastic Processes and their Applications* **78**: 245–260.
- Chizeck, H. J., Willsky, A. e Castanon, D. (1986). Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control, *International Journal of Control* **43**(1): 213–231.
- Costa, O. L. V. (1996). Mean-Square stabilizing solutions for discrete-time coupled algebraic Riccati equations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(4): 593–598.

- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. e Geromel, J. C. (1997). A convex programming approach to  $H_2$ -control of discrete-time Markovian jump linear systems, *International Journal of Control* **66**(4): 557–579.
- Costa, O. L. V., Filho, E. A., Boukas, E. K. e Marques, R. P. (1999). Constrained quadratic state feedback control of discrete-time Markovian jump linear systems, *Automatica* **35**: 617–626.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**: 154–178.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(12): 2076–2088.
- Davis, M. H. A. (1993). *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London.
- Davis, M. H. A. e Vinter, R. B. (1985). *Stochastic Modelling and Control*, Chapman and Hall, London.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *System & Control Letters* **37**: 261–265.
- do Val, J. B. R. e Basar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economic Dynamics & Control* **6**(3): 1099–1131.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Costa, O. L. V. (1998). Uncoupled Riccati iterations for the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(12): 1727–1733.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Gonçalves, A. P. (2000). The  $H_2$  control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state and a probabilistic robust problem, *Submetido ao Automatica*.
- El Ghaoui, L. e Ait Rami, M. (1996). Robust state-feedback stabilization of jump linear systems via LMIs, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **6**: 1015–1022.

- Geromel, J. C. e de Oliveira, M. C. (1999). Programação convexa e aplicações em sistemas de controle, *Technical report*, LAC-DT-FEEC-Unicamp.  
**URL:** <http://www.dt.fee.unicamp.br/~carvalho/research.html/>
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1988). Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control, *International Journal of Control* **48**(2): 481–498.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990). Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions, *Control Theory and Advanced Technology* **6**(3): 289–319.
- Ji, Y., Chizeck, H. J. e Loparo, K. A. (1991). Stability and control of discrete-time jump linear systems, *Control Theory Advanced Technology* **7**: 247–270.
- Lewis, F. L. e Syrmos, V. L. (1995). *Optimal Control*, Prentice-Hall.
- Mariton, S. P. (1993). *Jump Linear Systems in Control*, Springer-Verlag.
- Meyn, S. P. e Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag.
- Strang, G. (1988). *Linear algebra and its applications*, Harcourt Jovanovich.
- VanAntwerp, J. G. e Braatz, R. D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities, *Journal of Process Control* **10**: 363–385.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall.

## Apêndice A

# Processos Estocásticos

Neste apêndice, apresenta-se de maneira sucinta definições da teoria dos processos estocásticos que foram utilizadas nesta dissertação. Para isto, considere que  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  representa um espaço de probabilidade completo.

**Definição A.0.1.** (*Processo Estocástico*)

Um processo estocástico é uma seqüência de variáveis aleatórias definidas em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  indexadas pelo parâmetro  $k$ . É denotado por

$$\{v_k, k \geq 0\}.$$

**Definição A.0.2.** (*Filtragem Interna*)

Para o processo estocástico  $\{v_k; k \geq 0\}$ , a filtragem interna  $\{\mathfrak{F}_k; k \geq 0\}$  associada é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelo conjunto de variáveis aleatórias  $\{v_k, k \leq n\}$ , isto é, a menor  $\sigma$ -álgebra que registra os eventos relacionados ao processo estocástico  $\{v_n; n \geq 0\}$  anteriores ao instante  $k$ , expressa por

$$\mathfrak{F}_k = \sigma\{v_n : n \leq k\}, \quad k \geq 0.$$

**Definição A.0.3.** (*Tempo de Parada*)

Para o processo estocástico  $\{v_k; k \geq 0\}$ , o tempo de parada  $\tau$  é uma variável aleatória tomando valores no conjunto  $\mathbb{N}$  tal que, para  $k \in \mathbb{N}$ , o evento  $\{\tau = k\}$  pode ser expresso em termos de  $\{v_0, \dots, v_k\}$ . Esta propriedade é representada pela expressão

$$\{\tau = k\} \in \mathfrak{F}_k, \quad \forall k \geq 0.$$

**Definição A.0.4.** (*Cadeia de Markov*)

O processo  $\{v_k, k \geq 0\}$  é uma cadeia de Markov com espaço de estados enumerável  $\mathfrak{X}$  se satisfaz a propriedade de Markov

$$P(v_{k+1} = j \mid v_k = i, \dots, v_0 = i_0) = P(v_{k+1} = j \mid v_k = i), \quad (\text{A.1})$$

para todo  $k \geq 0$  e todos os estados  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$  pertencentes a  $\mathfrak{X}$ . Se, adicionalmente, o lado direito de (A.1) é independente de  $k$ , esta cadeia é denominada de Cadeia de Markov Homogênea.

**Definição A.0.5.** (*Propriedade forte de Markov*)

O processo estocástico  $\{v_k; k \geq 0\}$  satisfaz a propriedade forte de Markov se, para quaisquer distribuição inicial  $\mu$ , função  $h$  real mensurável em  $(\Omega, \mathfrak{F})$  e tempo de parada  $\tau$

$$E[h(v_\tau, v_{\tau+1}, \dots) \mid \mathfrak{F}_\tau] = E[h(v_0, v_1, \dots) \mid v_0 = v_\tau] \quad (\text{A.2})$$

é válido no conjunto  $\{\tau < \infty\}$ , onde  $\mathfrak{F}_\tau$  é o  $\sigma$ -álgebra de eventos anteriores a  $\tau$ , expresso por

$$\mathfrak{F}_\tau = \{A \in \mathfrak{F}; A \cap \{\tau = k\} \in \mathfrak{F}_k, k \geq 0\}.$$

## Apêndice B

# Resultados Auxiliares

Este apêndice tem por objetivo apresentar as demonstrações de dois dos resultados auxiliares utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

**Lema B.0.1.** (*Complemento de Schur*) Considerando-se que as matrizes  $A$  e  $B$  são simétricas, as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0 \iff A > 0, \quad C > B'A^{-1}B. \quad (\text{B.1})$$

*Demonstração.* A prova da suficiência é simples. Uma vez que a matriz  $A$  é definida positiva, é possível definir a seguinte matriz não singular

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (-A^{-1}B)' & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Logo,

$$M \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} M' = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B'A^{-1}B \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Uma vez que as matrizes  $A$  e  $C - B'A^{-1}B$  são definidas positivas, a matriz do lado direito da expressão acima é definida positiva, o que por sua vez implica que a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.4})$$

□



**Teorema B.0.1.** (de Oliveira et al., 1999) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existe uma matriz  $L \in \mathcal{M}^{n+}$  tal que

$$L - A'LA > 0. \quad (\text{B.5})$$

(ii) Existe uma matriz  $L \in \mathcal{M}^{n+}$  e uma matriz  $G \in \mathcal{M}^n$  tal que

$$\begin{bmatrix} L & \star \\ GA & G + G' - L \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.6})$$

*Demonstração.*

(i)  $\Leftarrow$  (ii) A prova é trivial, desde que a escolha particular das matrizes  $G = G' = L$  na desigualdade (B.6) recupera a desigualdade (B.5) após se aplicar o complemento Schur.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) A seguinte desigualdade

$$(L - G)L^{-1}(L - G)' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad GL^{-1}G' \geq G + G' - L,$$

válida para quaisquer matrizes  $G$  e  $L \in \mathcal{M}^{n+}$ , permite estabelecer a relação

$$\begin{bmatrix} L & \star \\ GA & GL^{-1}G' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} L & \star \\ GA & G + G' - L \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.7})$$

Aplicando o complemento Schur na desigualdade à esquerda em (B.7), recupera-se a desigualdade (B.5). Para finalizar a prova, é preciso demonstrar que  $G$  não é singular. Este fato é verificado desde que  $G + G' - L > 0$  e  $L > 0$  em (B.6). Logo,  $G > 0$ .

□