

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Otimização Restrita de Controladores Robustos Utilizando Algoritmos Genéticos

Autor: Ely Carneiro de Paiva

Orientador: Prof. Dr. Rafael Santos Mendes

Co-orientador Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira

Tese de Doutorado submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

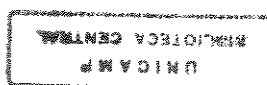
abril 1997

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por ELY CARNEIRO DE PAIVA e aprovada pela Comissão Julgadora em 04/04/97.

Rafael Santos Mendes
Orientador

P166o

30688/BC



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	P1660
V.	E.
TC 50 BS	30.6.88
PROG.	28.1.97
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29.10.1977
N.º CPD	

CM-00098438-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P1660 Paiva, Ely Carneiro de
Otimização restrita de controladores robustos utilizando algoritmos genéticos / Ely Carneiro de Paiva.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientadores: Rafael Santos Mendes, Paulo Augusto Valente Ferreira.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle automático. 2. Sistemas de controle por realimentação. 3. Controle de processo. 4. Análise de sistemas. I. Mendes, Rafael Santos. II. Ferreira, Paulo Augusto Valente. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

A meus pais, Sylvio e Maria, por todo incentivo e apoio.

Agradecimentos

Ao orientador e amigo Rafael, pela colaboração constante ao longo destes anos, e pela convivência agradável que muito me enriqueceu tanto no aspecto pessoal como no profissional.

Ao co-orientador e amigo Paulo Valente, por todo apoio, empenho e colaboração ao longo destes anos.

A CAPES - Coordenadoria de Apoio à Pesquisa e Ensino Superior, pelo apoio financeiro.

Ao Professor Laurent El Ghaoui, por ter-me gentilmente cedido um exemplar de sua tese, a qual propiciou o enriquecimento deste trabalho através das diversas discussões de casos abordadas.

Ao Maurício Figueiredo, pela sugestão inicial com relação aos Algoritmos Genéticos, que abriu o caminho desta tese.

Aos amigos Gonzaga e Jussara, este casal nota 10, cuja amizade me é especial.

Aos amigos Humberto, Myriam e Ritinha, que apesar da distância se fazem presentes na saudade dos bons tempos convividos.

A D. Ruth, esta pessoa admirável, que muito me orgulha conhecer.

E finalmente a Lia, pelo carinho, apoio e incentivo que fazem a minha motivação.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	v
RESUMO	ix
ABSTRACT	xi
1 Introdução	1
2 O Problema de Estabilidade Robusta	9
2.1 Introdução	9
2.2 Modelo do Processo	9
2.3 Descrição das Incertezas Paramétricas	14
2.4 A Função Medida de Robustez	17
2.5 Exemplo Ilustrativo	23
3 Síntese de Controladores Baseada em Métodos de Gradiente	29
3.1 Introdução	29
3.2 Abordagem de Araújo	29
3.3 Abordagem de El Ghaoui	36
4 Algoritmos Genéticos - Princípios e Aplicações	39
4.1 Introdução	39
4.2 Conceitos Básicos de Algoritmos Genéticos	39
4.3 Particularidades dos Algoritmos Genéticos	42

4.3.1	Teoria	42
4.3.2	Representação	44
4.3.3	Função Objetivo e Função de Avaliação	44
4.3.4	Mecanismos de Seleção	45
4.3.5	Taxas de Cruzamento e Mutação	45
4.3.6	Reinserção	46
4.3.7	Paralelismo em Algoritmos Genéticos	46
4.3.8	Limitações dos Algoritmos Genéticos	47
4.3.9	Ligações com Redes Neurais e Lógica Nebulosa	47
4.3.10	Aplicações	48
4.4	Abordagem de Algoritmos Genéticos de Michalewicz	48
4.4.1	Mutação Uniforme	50
4.4.2	Mutação de Contorno	50
4.4.3	Mutação Não-Uniforme	51
4.4.4	Cruzamento Aritmético	51
4.4.5	Cruzamento Simples	51
4.4.6	Cruzamento Heurístico	52
4.5	Parâmetros Utilizados no Algoritmo Implementado	53
5	Síntese de Controladores - Regiões de Alocação Conexas	55
5.1	Introdução	55
5.2	Estabilidade Robusta	56
5.2.1	Exemplo Numérico	63
5.3	Estabilidade Robusta e Desempenho \mathcal{H}_2 Robusto	70
5.3.1	Exemplo Numérico	73
6	Síntese de Controladores - Regiões de Alocação Circulares e Disjuntas	79
6.1	Introdução	79
6.2	Histórico do Problema	79
6.3	Derivação do Domínio de Busca	81

6.4	Exemplo Numérico	87
7	Exemplos e Aplicações	91
7.1	Introdução	91
7.2	Sistema de Primeira Ordem com Integrador	92
7.3	Sistema de Fase Não-Mínima	94
7.4	Sistema “Duas Massas/Uma Mola”	97
7.5	Modelo Dinâmico para a Aeronave L-1011	100
8	Polinômio Característico Não-Linear nos Parâmetros do Processo	103
8.1	Introdução	103
8.2	Histórico do Problema	104
8.2.1	Abordagem de Chapellat	104
8.2.2	Abordagem da Análise μ	107
8.2.3	Abordagem de El Ghaoui	110
8.2.4	Análise Convexa	112
8.2.5	Abordagem de Zettler e Garloff	114
8.3	Proposta do Algoritmo de Otimização	115
8.4	Exemplo 1 - Sistema 3 Massas/2 Molas	118
8.5	Exemplo 2 - Modelo de um Helicóptero no Plano Vertical	120
9	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	125
A	Prova do Teorema 5.3	129
B	Prova da Proposição 2.6	131
C	Cálculo da Medida de Robustez Local	135

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de regiões de alocação para sistemas discretos e contínuos.	6
2.1	Sistema de controle em malha fechada.	12
2.2	Transformações lineares sobre os parâmetros do processo.	16
2.3	Interpretação da Função Medida de Robustez.	18
2.4	Minimização Numérica de $m(x, \theta)$ sobre o contorno de D	23
2.5	Região para alocação de pólos.	24
2.6	Pólos de malha fechada considerando-se as incertezas pré-especificadas.	27
3.1	Região de alocação de pólos para o exemplo 3.1.	31
3.2	Curvas de Nível de $m(x)$ para o exemplo 3.1.	32
3.3	Condições iniciais ('o') e finais ('x') resultantes da otimização do exemplo 3.1 com o método dos gradientes.	33
3.4	Sistema Duas Massas e Uma Mola.	37
4.1	Exemplo da aplicação do operador cruzamento.	41
4.2	Exemplo da aplicação do operador mutação.	42
5.1	Ilustração do Teorema 5.1 para um sistema de 2a. ordem.	57
5.2	Exemplos de regiões de alocação para sistemas contínuos e discretos.	58
5.3	Conjunto factível \mathcal{W} e condições necessárias para $m(x) \geq 1, 2, \text{ e } 3$	61
5.4	Ilustração da definição da pseudo medida de robustez $d(x)$ para $x \notin \mathcal{W}$	63
5.5	Evolução das iterações do algoritmo para o Caso 1, mostrando as populações das gerações 1, 5, 10 e 50.	65

5.6	Nuvens de raízes para os casos 2, 3, 4 e 5.	69
5.7	Respostas ao degrau para os Casos 2 e 4, considerando os parâmetros extremos dos intervalos de incerteza.	70
5.8	Sistema de controle com perturbação estocástica.	71
5.9	Sistema Duas Massas e Mola.	73
5.10	Representação em funções de transferência do sistema Duas Massas-Mola.	75
5.11	Respostas temporais para os valores nominal e não-nominal do processo: a) critério \mathcal{H}_2 nominal; b) critério pior \mathcal{H}_2 dos vértices.	77
6.1	Exemplos de regiões de alocação para as raízes.	82
6.2	Raízes do polinômio $V_i(w)$ correspondendo a $\max w_j w_j^*$	85
6.3	Derivação do domínio de busca $Q_{\mathcal{X}} \supset \mathcal{W}$ no espaço de parâmetros do controlador.	86
6.4	Comparação de controladores.	89
7.1	Região para alocação de pólos.	92
7.2	Pólos de malha fechada considerando-se as incertezas admissíveis.	94
7.3	Pólos de malha fechada considerando-se as incertezas admissíveis.	96
7.4	Respostas temporais para uma entrada em degrau.	96
7.5	Sistema Duas Massas/Uma Mola.	97
7.6	Pólos de malha fechada para o controlador de 4a. ordem.	99
7.7	Pólos de malha fechada para os controladores de ordem 0,1 e 2.	102
8.1	Exemplo de um sistema com perturbações multilíneas no caso SISO.	105
8.2	Representação padrão para o sistema.	108
8.3	Representação para a Análise μ	108
8.4	Representação para Análise μ de desempenho robusto.	109
8.5	Exemplos de parâmetros críticos nas regiões de incerteza.	118
8.6	Sistema dinâmico 3 massas/2 molas.	118
8.7	Nuvem de raízes para o controlador de El Ghaoui (1990, 1992).	120
8.8	Nuvem de raízes para o controlador aqui proposto.	121

8.9	Detalhe da nuvem de raízes da Figura 8.8.	121
8.10	Nuvem de raízes e detalhe ampliado (Bhattacharyya, 1987).	123
8.11	Nuvem de raízes e detalhe ampliado (controlador obtido).	124

Resumo

Este trabalho apresenta uma metodologia para o projeto de controladores robustos com relação a incertezas paramétricas do processo. O método utiliza a alocação de pólos em malha fechada numa região pré-definida do plano complexo. Para o caso em que os coeficientes do polinômio característico de malha fechada são funções lineares dos parâmetros do processo, derivam-se domínios de busca limitados, no espaço de parâmetros do controlador, contendo o conjunto dos controladores factíveis para o problema. Estes domínios de busca são definidos por restrições lineares, no caso em que a região de alocação é conexa, ou então por restrições quadráticas, quando a região de alocação é dada por um conjunto de círculos disjuntos no plano complexo. Uma rotina de otimização, baseada em algoritmos genéticos, é proposta para a maximização da robustez do controlador, dentro da região de busca determinada. No caso em que os coeficientes do polinômio característico são funções não-lineares dos parâmetros do processo, e o número de incertezas é pequeno, propõe-se uma rotina de otimização para a maximização da robustez do controlador utilizando um método de busca multidimensional com o uso dos algoritmos genéticos.

Abstract

This thesis presents a methodology for designing controllers that are robust with respect to parametric plant uncertainties using a stochastic global search technique - Genetic Algorithms (GAs) - as the optimization tool. We adopt a pole placement approach, considering linear systems and linear interval uncertainties, provided that the characteristic polynomial coefficients are affine functions of plant parameters. With respect to the allocation region, we treat two different cases. The first case is concerned with a connected region in the complex plane, while the second one considers circular disjoint regions for the poles. In each case, a set of necessary conditions is derived, defining a bounded domain in the controller parameters space, which is used by a constraint handling GA in the optimization of the system robustness. In the first case, the search space is shown to be a linear, polytopic domain, while in the second one the limits are defined by quadratic constraints. Results are also provided allowing the controller order optimization. In the case where the characteristic polynomial coefficients are non-linear functions of plant parameters, and considering a low number of uncertain parameters, an alternate solution is proposed using the genetic algorithms in a multidimensional search procedure.

Capítulo 1

Introdução

Uma das principais áreas de desenvolvimento da engenharia de controle é o projeto de controladores robustos para processos que não podem ser modelados com exatidão. Entende-se por *robustez*, no presente contexto, a propriedade de um certo controlador garantir estabilidade e/ou desempenho não somente para um modelo nominal, como também para toda uma família de modelos que representam um processo real.

A importância das características de robustez para um projeto coerente de sistemas de controle, justifica a grande quantidade de pesquisa nesta área nas últimas décadas. O desenvolvimento de métodos matemáticos específicos e o advento de poderosas técnicas computacionais têm propiciado nos últimos anos o aparecimento das mais diversas metodologias para o tratamento da estabilidade robusta de sistemas incertos.

Numa perspectiva histórica, segundo relato de Dorato (1987), talvez a primeira grande proposta de solução para o problema de controle de processos com parâmetros incertos tenha sido a patente de H. S. Black datada de 1927. Nesta patente, Black propunha uma realimentação com ganhos elevados para o projeto de amplificadores de tubo a vácuo com incertezas do processo (grandes variações nas características do tubo). Infelizmente, a maioria destes sistemas se tornava instável devido aos altos ganhos utilizados.

Somente a partir dos resultados de Nyquist em 1932 é que o compromisso entre estabilidade dinâmica e ganhos elevados pôde ser analiticamente compreendido. O critério de estabilidade de Nyquist e o conceito de Black de ganhos elevados formam a base do projeto de controle robusto desenvolvido no clássico livro de Bode (Bode, 1945 *apud* Dorato, 1987). O período de 1927 a 1960 poderia ser chamado, segundo Dorato (1987), de *período clássico em sensibilidade*.

O próximo grande período da teoria de sistemas de controle foi o período compreendido entre 1960 e 1975, aproximadamente. Este período é conhecido como *período das*

variáveis de estado (Dorato, 1987). Um novo tratamento para o problema de controle ótimo foi introduzido por R. E. Kalman em 1960, através de um artigo publicado na primeira conferência da Federação Internacional de Controle Automático (IFAC), que mostrava claramente a dualidade existente entre controle e filtragem com realimentação (Bennett, 1996). No começo da década de 60, Kalman introduziu também importantes conceitos, utilizando variáveis de estado, como: controlabilidade, observabilidade, LQR (*Linear Quadratic Regulator*), estimação de estado ótima, etc. Infelizmente, com raras exceções, o problema da incerteza paramétrica foi ignorado durante este período. A abordagem temporal das variáveis de estado exerceu um domínio tão grande durante esta fase, que Isaac Horowitz, importante pesquisador na área de resposta em frequência, chegou a escrever em tom de isolamento: “Os modernos doutores parecem ter uma pobre compreensão de conceitos tão básicos como largura de banda e não têm a menor idéia de sua importância central na teoria da realimentação. É espantoso como muitos não se dão conta de que a razão primária da realimentação em controle é o problema da incerteza” (Bennett, 1996).

Ainda dentro deste período, houve uma rápida conscientização de que os poderosos métodos de controle ótimo não poderiam ser usados para problemas industriais comuns, por causa da inexistência de modelos precisos para o processo. De acordo com o registro de Karl Åström em 1971, a força da abordagem da resposta frequencial clássica reside nas técnicas poderosas para identificação de sistemas, ou seja, a análise frequencial através da qual as funções de transferência podem ser determinadas com precisão para uso nas técnicas de síntese (Bennett, 1996). Gradativamente, o interesse pela abordagem de resposta em frequência foi se reavivando, e um esforço sistemático foi realizado para se atacar o problema do desenvolvimento de métodos de resposta frequencial para sistemas multivariáveis.

No final dos anos 70 e começo dos anos 80, o problema de incertezas paramétricas recebeu um renovado interesse. Neste período, alguns resultados significativos foram obtidos na análise de sistemas multivariáveis no domínio da frequência. Em particular, o conceito de matrizes coprimas fracionadas para sistemas multivariáveis foi introduzido como ferramenta por Youla, Jabr e Bongiorno, dentre outros. Além disto, o critério de Nyquist foi generalizado para sistemas multivariáveis por Rosenbrock (Dorato, 1987). Esta confluência de interesses em sistemas incertos e multivariáveis levou, no corrente período, ao que foi denominado de *Controle Robusto Moderno*. Nesta fase, tanto os métodos frequenciais como os métodos de representação em espaço de estados são utilizados nas mais diversas metodologias para se tratar o problema das incertezas paramétricas do modelo.

Dentro do controle robusto moderno, um teorema extremamente importante, que iniciou toda uma geração de trabalhos de robustez na abordagem polinomial, foi o Teorema de Kharitonov (Kharitonov, 1979), com relação à estabilidade de uma família de polinômios,

para sistemas em tempo contínuo. Uma prova simplificada deste teorema pode ser vista em Yeung e Wang (1987).

O Teorema de Kharitonov fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade de uma família de polinômios com coeficientes incertos a partir do teste de estabilidade em apenas quatro polinômios especialmente construídos a partir das incertezas. Este teorema apresenta, contudo, duas limitações importantes: não trata a dependência entre coeficientes incertos e, na sua forma original, só é aplicável ao caso contínuo.

Entre os primeiros trabalhos que utilizaram este teorema tem-se Barmish (1984), Bialas e Garloff (1985), Anderson *et al.* (1987) e Soh (1989). Extensões do Teorema de Kharitonov para polinômios de sistemas em tempo discreto foram desenvolvidas em Soh *et al.* (1985, 1987a), e Hollot e Bartlett (1986).

Todos estes trabalhos contudo apresentam o inconveniente de não considerar a dependência entre os coeficientes do polinômio característico. Como na maioria dos problemas de controle esta dependência é relevante, estes trabalhos se mostram conservativos, limitando a aplicação dos resultados. Nestes casos, o Teorema de Kharitonov fornece apenas uma condição suficiente.

Um resultado importante, no sentido de se superar as limitações do Teorema de Kharitonov, é o Teorema de Bartlett-Hollot-Lin (*Edge Theorem*), que se encontra transcrito em Bartlett e Hollot (1988). Este teorema fornece condições necessárias e suficientes para verificar se as raízes de um politopo de polinômios estão contidas numa região conexa qualquer do plano complexo. O politopo de polinômios, definido como uma combinação convexa de polinômios, estabelece uma maneira de se abordar a dependência linear entre as incertezas paramétricas, descritas através de intervalos. As raízes do politopo pertencem a uma região conexa dada se, e somente se, todas as combinações convexas de dois vértices expostos (*exposed edges*) deste politopo também possuem raízes nesta região. Estes resultados, na prática, podem ter seu uso limitado devido à explosão combinatorial que surge no teste de estabilidade, mesmo para um número moderado de parâmetros incertos.

Outros trabalhos importantes, no sentido de se reduzir a conservatividade do Teorema de Kharitonov são: Biernacki *et al.* (1987) e Wei e Yedavalli (1987). Em Biernacki *et al.* (1987), os resultados para sistemas em tempo contínuo de Barmish (1984) e Soh *et al.* (1985) são generalizados para o caso em que os coeficientes do polinômio característico dependem linearmente dos parâmetros do processo. Nesta abordagem, o grau de estabilidade de um controlador é associado à maior região hiperesférica de variação paramétrica do processo, tal que o sistema em malha fechada ainda mantenha a estabilidade. O raio desta hiperesfera fornece uma medida de robustez do controlador considerado.

Os resultados apresentados por Fam e Meditch (1978) e Ackermann (1980) incluem-se

também entre as primeiras contribuições na busca da solução para o problema de alocação de pólos robusta em sistemas de controle lineares. Em Fam e Meditch (1978), encontra-se uma das primeiras tentativas de se caracterizar geometricamente o domínio de estabilidade no espaço de coeficientes do polinômio característico, para sistemas em tempo discreto. Estes resultados são utilizados no presente trabalho (Capítulo 5), na delimitação do domínio dos controladores factíveis para o problema de robustez. Os resultados de Fam e Meditch (1978) foram originalmente desenvolvidos como condição para a estabilidade de sistemas em tempo discreto. Contudo, como as condições derivadas se aplicam igualmente a qualquer círculo centrado no eixo real do plano complexo, estes resultados podem ser estendidos para o caso contínuo considerando-se círculos de alocação no semi-plano esquerdo.

Em Santos-Mendes (1988) e Santos-Mendes e Aguilar-Martin (1989), um método de síntese de controladores é proposto de maneira similar à abordagem de Biernacki *et al.* (1987), considerando-se regiões de incerteza paramétrica do tipo elipsoidal. Associa-se a um dado controlador uma função, denominada *função medida de robustez* correspondente à maior hiperelipse no espaço de parâmetros do processo, tal que o sistema em malha fechada mantenha seus pólos em uma região conexa qualquer do plano complexo. O problema de síntese é resolvido de maneira iterativa a partir de um controlador inicial. A cada iteração, o vetor de parâmetros do controlador é modificado segundo a direção do gradiente da função medida de robustez.

A abordagem de Araújo (1991), que é adotada no presente trabalho com relação à análise de robustez, segue a mesma linha de Santos-Mendes (1988). A diferença entre os dois trabalhos consiste no tipo de região de incerteza paramétrica considerada. Em Araújo (1991) os parâmetros estão sujeitos a *intervalos* de incerteza, o que resulta em uma região hiperretangular (ao invés de hiperelíptica) no espaço de parâmetros incertos do processo.

Para o caso em que os coeficientes do polinômio característico de malha fechada são funções não-lineares dos parâmetros do processo, o tratamento matemático apresenta-se bem mais complexo e a maioria das abordagens existentes considera apenas situações particulares na análise de robustez. Na abordagem de Chapellat *et al.* (1993) considera-se o caso em que as incertezas paramétricas aparecem de forma multilinear no polinômio característico. Chapellat *et al.* (1993) define um subconjunto dos polinômios incertos do processo, denominados segmentos CB, numa extensão direta dos resultados de Kharitonov (1979). Estes segmentos CB apresentam importantes propriedades com relação a todo o conjunto de incertezas, sendo que as margens de estabilidade e desempenho para todo o sistema incerto podem ser calculadas a partir deste subconjunto reduzido de polinômios.

Uma outra abordagem que considera o caso do polinômio característico não-linear nos parâmetros do processo é a abordagem de Zettler e Garloff (1996). Esta técnica utiliza

um método eficiente de varredura numérica para verificar a estabilidade de todo um conjunto de polinômios incertos, testando-se apenas um importante subconjunto dos mesmos. Este subconjunto de polinômios é obtido através de uma expansão polinomial denominada representação Bernstein (Garloff, 1993). O teste de estabilidade é então realizado através de otimização numérica, considerando esta subclasse representativa de toda a família de polinômios incertos. Maiores detalhes sobre estas duas abordagens para o caso não-linear encontram-se no Capítulo 8.

Além da abordagem do tratamento do polinômio característico para o problema de robustez, diversas outras metodologias encontram-se disponíveis para o projetista de sistemas de controle, tanto no domínio frequencial como na representação em espaço de estados. Dentre as principais linhas de pesquisa pode-se citar a otimização em H_∞ , os métodos de Lyapunov e a análise/síntese- μ . Uma interessante abordagem que contorna algumas das deficiências apresentadas pela análise- μ pode ser vista em El Ghaoui (1990, 1992) e também no Capítulo 8 deste trabalho.

A mesma abordagem de Araújo (1991) para a *análise* de robustez é utilizada no presente trabalho. Contudo, uma nova proposta para a etapa de *síntese* de controladores robustos é apresentada, dispensando o uso de gradientes.

Determina-se inicialmente, a partir de um conjunto de condições necessárias e conhecidas propriedades geométricas, um domínio limitado no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto de todos os controladores factíveis para o problema. Utiliza-se então um algoritmo baseado em busca estocástica - algoritmos genéticos - para otimizar a função de robustez dentro deste domínio pré-determinado, a fim de se obter um controlador que satisfaça as especificações de desempenho propostas.

Os processos considerados no presente trabalho são sistemas lineares, invariantes no tempo, na representação de funções de transferência, assumindo-se que os coeficientes do polinômio característico de malha fechada são funções lineares dos parâmetros da planta. Para o caso da não-linearidade do polinômio característico em relação ao processo, uma solução aproximada para alguns casos particulares é proposta no Capítulo 8.

A definição de robustez considerada neste trabalho, é baseada na atribuição de região de pólos (Araújo, 1991), (Santos-Mendes e Aguilar-Martin, 1989). O sistema é considerado robusto se todos os pólos de malha fechada, ou seja, as raízes do polinômio característico estão contidas dentro de uma determinada região no plano complexo (estabilidade relativa), apesar das incertezas paramétricas do processo.

Em sistemas de controle sujeitos a incertezas paramétricas da planta, a especificação de índices de desempenho é normalmente colocada em termos de intervalos aceitáveis para as características de resposta transitória. Como a resposta transitória está diretamente relaci-

onada à localização dos pólos de malha fechada do sistema, estas especificações podem ser traduzidas por uma região no plano complexo onde devem estar localizadas as raízes do polinômio característico.

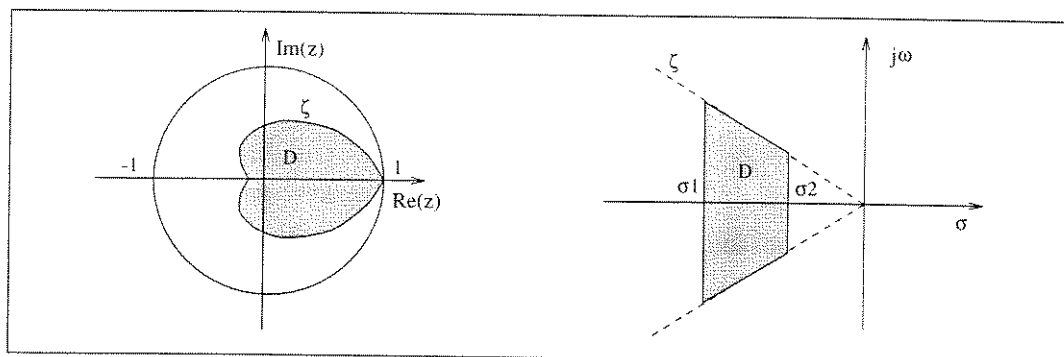


Figura 1.1: Exemplos de regiões de alocação para sistemas discretos e contínuos.

A Figura 1.1 apresenta dois tipos de regiões no plano complexo bastante utilizadas em projetos de controladores por alocação de pólos para sistemas em tempo contínuo e em tempo discreto (Ogata, 1987; Ackermann, 1985). Estas duas regiões de alocação são obtidas a partir de especificações de resposta transitória de um sistema de segunda ordem, com entrada em degrau unitário, como sobre-sinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc. O comportamento dinâmico de sistemas de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros, o coeficiente de amortecimento ζ e a frequência natural não-amortecida ω_n , tendo em vista que as outras especificações da resposta transitória podem ser obtidas a partir destes parâmetros. Estas especificações podem ser consideradas também, com boa precisão, para sistemas de ordem superior que apresentam um par de pólos dominantes.

Considera-se, no presente trabalho, dois tipos possíveis de regiões para a alocação dos pólos no plano complexo. O primeiro corresponde a regiões conexas como nos exemplos da Figura 1.1, tratado no Capítulo 5, enquanto o segundo considera regiões de alocação circulares e disjuntas, sendo este caso abordado no Capítulo 6. Em ambos os casos denota-se por D a região de alocação pré-definida.

Considera-se que os parâmetros do processo estão sujeitos a intervalos de incerteza cujos limites são supostamente conhecidos *a priori*. Esta hipótese leva a uma região de incerteza hiperretangular no espaço de parâmetros do processo. A interdependência linear entre os parâmetros também pode ser abordada por este método (Araújo, 1991).

Um controlador linear é conectado ao sistema através da malha de realimentação. O problema consiste na determinação dos parâmetros de um controlador, que combinado com quaisquer possíveis valores de parâmetros assumidos pelo processo dentro da região de

incerteza dada, resulte em pólos do sistema de malha fechada dentro da região D pré-definida (D -estabilidade robusta).

O problema do projeto de controladores robustos pode ser dividido em duas partes. A *análise* permite verificar se um dado controlador atende às especificações de D -estabilidade robusta para um conjunto de incertezas dado. A *síntese* consiste de um procedimento de otimização para a obtenção dos parâmetros de um controlador que atenda às especificações de robustez.

A análise considerada no presente trabalho corresponde à metodologia desenvolvida em Araújo (1991). Nesta abordagem, uma função associada aos parâmetros do controlador, denominada *função medida de robustez*, determina, para um dado controlador, a maior região hiperretangular de incerteza no espaço de parâmetros do processo, tal que a D -estabilidade do sistema seja mantida. Assim, além de permitir verificar se um dado controlador é D -estabilizante para a região de incerteza proposta, a função medida de robustez permite também a comparação entre controladores através da comparação das respectivas regiões de incerteza admissíveis.

O processo de síntese utilizado em Araújo (1991) consiste de um procedimento de maximização da função de robustez utilizando direções de gradiente, a fim de se obter o controlador mais robusto. Contudo, devido à grande complexidade desta função, como não-diferenciabilidade, mau-condicionamento, entre outros, um procedimento de otimização com gradientes para este problema pode levar a resultados limitados (conforme discutido no Capítulo 3).

A proposta de síntese do presente trabalho é a utilização de algoritmos de busca estocástica, como algoritmos genéticos, para a otimização da função medida de robustez dentro de domínios previamente definidos. Estes domínios, determinados a partir de um conjunto de condições necessárias juntamente com conhecidas propriedades geométricas, contém o conjunto dos controladores factíveis para o problema, o que aumenta a eficiência desta classe de algoritmos de busca.

Para o caso das regiões de alocação conexas (Capítulo 5), o domínio de busca derivado é representado por um conjunto de restrições *lineares* (politopo de busca). Neste caso, pode-se determinar não apenas um domínio contendo o conjunto dos controladores factíveis, como também um domínio de busca para o conjunto de todos os controladores com uma medida de robustez acima de um certo valor pré-definido. Um algoritmo de otimização é proposto para a maximização da função de robustez do controlador em relação aos seus parâmetros e à sua ordem (estrutura). Ainda neste caso, é proposta também a otimização conjunta da D -estabilidade e de um índice de desempenho \mathcal{H}_2 pré-definido para o sistema, utilizando como domínio de busca, a região politópica determinada. No caso de regiões de alocação cir-

culares e disjuntas (Capítulo 6), o domínio de busca derivado é definido por um conjunto de restrições *quadráticas* no espaço de parâmetros do controlador.

Para o caso em que os coeficientes do polinômio característico são funções não-lineares dos parâmetros do processo, uma solução aproximada, considerando um número pequeno de incertezas, é proposta utilizando os algoritmos genéticos em ambas as etapas de análise e de síntese. Como o algoritmo genético não garante a otimalidade global, a análise da robustez do controlador obtido por este procedimento deve ser confirmada por um outro método alternativo, que garanta pelo menos um limitante inferior da margem paramétrica admissível.

O conteúdo deste trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 descreve a formulação do problema de robustez do ponto de vista da análise, de acordo com a metodologia desenvolvida em Araújo (1991). O Capítulo 3 apresenta algumas discussões com relação às deficiências dos métodos de síntese de controladores baseados em gradiente, juntamente com três exemplos numéricos que ilustram os principais pontos. No Capítulo 4 apresentam-se os conceitos, características e aplicações dos algoritmos genéticos. O Capítulo 5 considera o caso em que a região de alocação para os pólos de malha fechada é uma região conexa no plano complexo. Neste capítulo apresentam-se os resultados da derivação do domínio de busca politópico no espaço de parâmetros do controlador, e sua utilização no algoritmo de maximização da função de robustez. Os artigos De Paiva *et al.* (1996a) e De Paiva *et al.* (1996b) estão relacionados à primeira parte deste capítulo (Estabilidade Robusta). Na segunda parte, apresenta-se a otimização conjunta robustez/desempenho \mathcal{H}_2 , ilustrando-se os resultados através de exemplos numéricos. A metodologia desenvolvida nesta segunda parte encontra-se também em De Paiva *et al.* (1997b). No Capítulo 6 considera-se o caso em que a região de alocação é formada por um conjunto de regiões circulares e disjuntas no plano complexo. Apresentam-se os resultados relativos à determinação do conjunto de restrições quadráticas que fornecem um domínio de busca limitado no espaço de parâmetros do controlador. Um exemplo numérico comparativo ilustra os resultados obtidos. A metodologia para este caso encontra-se registrada também em De Paiva *et al.* (1997a). O Capítulo 7 apresenta uma série de quatro exemplos numéricos e aplicações, solucionados através do método desenvolvido no Capítulo 5. O Capítulo 8 apresenta o algoritmo de otimização para a solução aproximada do problema do polinômio característico não-linear nos parâmetros do processo, juntamente com dois exemplos numéricos conhecidos da literatura. Este capítulo também traz uma rápida descrição de algumas das principais abordagens que consideram este problema. Finalmente, as conclusões do trabalho e um resumo das principais contribuições são apresentados no Capítulo 9.

Capítulo 2

O Problema de Estabilidade Robusta

2.1 Introdução

Neste capítulo, aborda-se o problema de análise da robustez de controladores, conforme os resultados propostos em Araújo (1991) e Araújo e Santos-Mendes (1991), a partir do qual é desenvolvida a metodologia de projeto de controladores proposta neste trabalho. Descrevem-se inicialmente as estruturas consideradas para planta e controlador. Trata-se em seguida da descrição das incertezas paramétricas da planta e as transformações de coordenadas no espaço de parâmetros do processo que simplificam o tratamento matemático. Aborda-se, em seguida, a função medida de robustez associada a um dado controlador, que é definida de modo a avaliar a maior região de incerteza paramétrica do processo para a qual o referido controlador garante a estabilidade relativa do sistema.

2.2 Modelo do Processo

Os métodos usuais de projeto de controladores assumem que o modelo do processo seja conhecido precisamente. Na prática, contudo, isto não ocorre. Em modelagem física, assim como em modelagem experimental, deve-se sempre levar em consideração as diferenças entre o modelo do processo obtido e o comportamento do processo real. Portanto, no projeto de sistemas de controle, deve-se considerar que o processo a ser controlado possui um modelo sujeito a incertezas e que seu comportamento pode variar com o tempo durante a operação.

Os resultados apresentados neste trabalho consideram um modelo discreto para a planta. Contudo, o caso contínuo pode ser igualmente tratado em virtude da semelhança das equações características em malha fechada de ambos os domínios. Para tal, basta apenas que

se considere os polinômios das funções de transferência como polinômios em s^{-1} ao invés de s .

Considera-se que o comportamento dinâmico do processo possa ser descrito pelo modelo paramétrico definido pela seguinte função de transferência:

$$P'(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B'(z)}{A'(z)} \quad (2.1)$$

onde $Y(z)$ e $U(z)$ representam as transformadas Z dos sinais de controle e saída e $A'(z)$ e $B'(z)$ são polinômios em z com graus na e nb , respectivamente, dados por:

$$A'(z) = z^{na} + a_1 z^{na-1} + a_2 z^{na-2} + \dots + a_{na} \quad (2.2)$$

$$B'(z) = b_0 z^{nb} + b_1 z^{nb-1} + b_2 z^{nb-2} + \dots + b_{nb}$$

A abordagem de Araújo (1991) utiliza a representação na variável z^{-1} na formulação da análise do problema de robustez. Assim, a função de transferência em (2.1) é reescrita como:

$$P(z^{-1}) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.3)$$

onde d representa o atraso de tempo do processo¹, dado por $d = na - nb$, e $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$ são polinômios em z^{-1} com graus na e nb , respectivamente, dados por:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \quad (2.4)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}$$

Utilizaremos a partir daqui, a representação implícita que denota a relação entre o operador z^{-1} e o operador atraso, ou seja,

$$y(k) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) \quad (2.5)$$

onde $u(k)$ e $y(k)$ representam os sinais de controle e saída, respectivamente, no instante kT , onde T é o período de amostragem.

Os coeficientes de $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$, $a_i, i = 1, 2, \dots, na$, e $b_j, j = 0, 1, 2, \dots, nb$, respectivamente, são os parâmetros do processo, suposto causal.

É suposto adicionalmente que a estrutura do modelo do processo, isto é, a forma e a ordem das equações, não varia, e que seus parâmetros possam variar lentamente, se comparado com a dinâmica em malha fechada, ou variar de maneira descontínua, porém com

¹Nos casos em que há atraso puro do processo, este pode ser incorporado à planta como zeros do polinômio $B(z^{-1})$, de forma que a relação $d = na - nb$ pode ser considerada uma relação geral.

frequência desprezível em relação à dinâmica do processo.

Com estas considerações, alguns processos não-lineares ou lentamente variantes no tempo podem ser descritos aproximadamente por um modelo linear a parâmetros incertos.

A meta, portanto, consiste na obtenção dos parâmetros de um controlador fixo, que garanta a estabilidade para todos os valores possíveis dos parâmetros do processo, e ainda assegure que certas especificações de desempenho sejam satisfeitas pelo sistema de controle. Estes controladores são referidos como controladores robustos.

Na abordagem de Araújo (1991), a estrutura do controlador é dada e somente os parâmetros do mesmo são determinados utilizando-se um dado critério de otimização. Uma contribuição do presente trabalho é possibilitar a otimização do controlador também com relação à sua ordem. Mostra-se que aumentando a ordem do mesmo, a solução ótima do problema fornece controladores de maior robustez, ou seja, a robustez é monotônica em relação à ordem do controlador.

Considera-se a estrutura geral do controlador linear (Figura 2.1), de forma que o sinal de controle seja dado, na representação implícita do operador atraso z^{-1} , por:

$$u(k) = -\frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} y(k) + \frac{E(z^{-1})}{H(z^{-1})} r(k) \quad (2.6)$$

onde

$$\begin{aligned} G(z^{-1}) &= g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{ng} z^{-ng} \\ H(z^{-1}) &= 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_{nh} z^{-nh} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots + e_{ne} z^{-ne}$$

são os polinômios referentes ao controlador com graus ng , nh e ne respectivamente.

Os graus ng , nh e ne são escolhidos *a priori*, podendo ser modificados durante o projeto do controlador, em função dos resultados obtidos. Portanto uma etapa importante do problema se resume em determinar os coeficientes dos polinômios $G(z^{-1})$, $H(z^{-1})$, e $E(z^{-1})$, $g_i, i = 0, 1, 2, \dots, ng$, $h_j, j = 1, 2, \dots, nh$ e $e_l, l = 0, 1, 2, \dots, ne$, respectivamente, isto é, os parâmetros do controlador, de tal maneira que certos critérios de desempenho de controle, definidos a seguir, sejam satisfeitos, apesar das incertezas dos parâmetros do processo.

Considera-se a configuração do sistema de controle linear em malha fechada da Figura 2.1 a seguir, onde o processo e o controlador são definidos pelas funções de transferência (2.1), (2.2), (2.6) e (2.7), respectivamente. A função de transferência de malha fechada, que relaciona a saída $y(k)$ com a entrada de referência $r(k)$, obtida para este sistema, é dada por:

$$\frac{y(k)}{r(k)} = \frac{z^{-d} B(z^{-1}) E(z^{-1})}{A(z^{-1}) H(z^{-1}) + z^{-d} B(z^{-1}) G(z^{-1})} \quad (2.8)$$

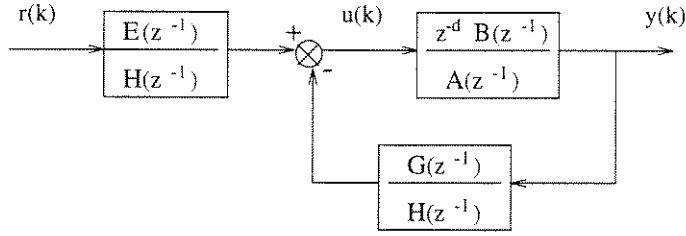


Figura 2.1: Sistema de controle em malha fechada.

Portanto, o polinômio característico do sistema em malha fechada, definido por $T(z^{-1})$, com grau nt , é dado por:

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1}) \quad (2.9)$$

onde

$$nt = \max(na + nh ; nb + ng + d). \quad (2.10)$$

Os pólos do sistema em malha fechada da Figura 2.1 são obtidos pela solução da seguinte equação característica:

$$z^{nt}T(z^{-1}) = z^{nt}[A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1})] = 0 \quad (2.11)$$

Com o objetivo de simplificar as análises feitas para o problema, adota-se um tratamento matricial para a equação polinomial (2.9).

Sejam

$$p = [1, a_1, a_2, \dots, a_{na}, b_0, b_1, \dots, b_{nb}]^T \in \mathfrak{R}^{na+nb+2} \quad (2.12)$$

$$x = [1, h_1, h_2, \dots, h_{nh}, g_0, g_1, \dots, g_{ng}]^T \in \mathfrak{R}^{nh+ng+2}$$

os vetores cujas componentes são os coeficientes dos polinômios do processo $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$, e do controlador, $G(z^{-1})$ e $H(z^{-1})$, respectivamente (o polinômio $E(z^{-1})$ não influencia os pólos de malha fechada, mas somente os zeros). Desta forma, a equação (2.9) pode ser escrita na forma matricial, como segue:

$$t = X(x)p \quad (2.13)$$

ou na sua forma dual

$$t = M(p)x \quad (2.14)$$

onde $t = [1, t_1, \dots, t_{nt}]^T \in \mathfrak{R}^{nt+1}$ é o vetor cujas componentes são os coeficientes do polinômio característico (2.9), que pode ser escrito como

$$T(z^{-1}) = 1 + t_1 z^{-1} + \dots + t_{nt} z^{-nt} \quad (2.15)$$

As matrizes $X(x) \in \mathfrak{R}^{(nt+1) \times (na+nb+2)}$ e $M(p) \in \mathfrak{R}^{(nt+1) \times (ng+nh+2)}$ são dadas por

$$X(x) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ h_1 & \ddots & & g_0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots \\ h_{nh} & \ddots & h_1 & g_{ng} & \ddots & g_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & h_{nh} & \mathbf{0} & & g_{ng} \end{array} \right] \}d$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(na+1)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(nb+1)}$$

(2.16)

$$M(p) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ a_1 & \ddots & & b_0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots \\ a_{na} & \ddots & a_1 & b_{nb} & \ddots & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & a_{na} & \mathbf{0} & & b_{nb} \end{array} \right] \}d$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(nh+1)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(ng+1)}$$

A matriz $M(p)$ em (2.16) pode ser vista como uma transformação linear que mapeia o espaço dos parâmetros do controlador x , no espaço dos coeficientes do polinômio característico t (uma interpretação análoga pode ser dada para $X(x)$ na mesma equação). Portanto, os coeficientes do polinômio característico são funções lineares dos parâmetros do controlador, para um dado valor p fixo do processo. Esta propriedade é fundamental, tanto na avaliação da medida de robustez de um controlador, como nos métodos de determinação dos domínios de busca no espaço de parâmetros do controlador, apresentados nos capítulos seguintes.

Os resultados a seguir, apresentados em Araújo (1991), são obtidos para sistemas em tempo discreto com uma entrada e uma saída (SISO). Todavia, estes podem ser estendidos para o caso contínuo, e para sistemas com múltiplas entradas e uma saída (MISO), ou com uma entrada e múltiplas saídas (SIMO). Em todos estes casos, os coeficientes do polinômio característico de malha fechada são funções lineares dos parâmetros do processo.

2.3 Descrição das Incertezas Paramétricas

Como já foi dito anteriormente, os parâmetros do processo, dados pelos coeficientes a_i e b_j de $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$, estão sujeitos a variações limitadas, definidas pelos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{aligned} \underline{a}_i < a_i < \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, na \\ \underline{b}_j < b_j < \bar{b}_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, nb \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde \underline{a}_i e \underline{b}_j são os limites inferiores e \bar{a}_i e \bar{b}_j são os limites superiores, supostamente conhecidos, dos parâmetros incertos. Seja \mathbf{p} o vetor que contém os mesmos componentes do vetor de parâmetros do processo p , exceto pelo primeiro elemento, ou seja, $p = [1 \ \mathbf{p}^T]^T$, e sejam $\mathbf{p}^- = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{na}, \underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{nb}]^T \in \mathfrak{R}^{na+nb+1}$ e $\mathbf{p}^+ = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{na}, \bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{nb}]^T \in \mathfrak{R}^{na+nb+1}$ os vetores cujas componentes são os limites inferiores e superiores, respectivamente, dos parâmetros incertos do processo. O vetor de parâmetros \mathbf{p} pertence, então, a uma região de incerteza aberta, indicada por Π , que pode ser definida como:

$$\Pi = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^{na+nb+1}, Q(\mathbf{p} - \mathbf{p}_c) < \underline{\mathbf{1}}\} \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{p}_c \in \mathfrak{R}^{na+nb+1}$ é o centro da região, correspondendo ao parâmetro central (ou nominal) do processo² e o vetor $\underline{\mathbf{1}}$ denota o vetor de componentes unitárias $[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathfrak{R}^{2(na+nb+1)}$. A matriz $Q \in \mathfrak{R}^{2(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde $C \in \mathfrak{R}^{(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 2/(\bar{a}_1 - \underline{a}_1) & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2/(\bar{b}_{nb} - \underline{b}_{nb}) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e o vetor \mathbf{p}_c é dado por:

$$\mathbf{p}_c = \frac{\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-}{2} \quad (2.21)$$

A região descreve um hiperretângulo aberto no espaço de parâmetros $\mathfrak{R}^{na+nb+1}$, e representa a incerteza paramétrica definida no projeto inicial.

Caso haja dependência linear entre os parâmetros, o vetor p pode ser escrito em função de um vetor q , que contém os parâmetros efetivamente incertos do processo, ou seja:

$$p = S \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

²Neste trabalho considera-se que o parâmetro nominal definido para o processo corresponde ao próprio parâmetro central p_c .

onde $q \in \mathfrak{R}^{nq}$, e $S \in \mathfrak{R}^{(na+nb+2) \times (nq+1)}$. Os limites dos intervalos de incerteza destes parâmetros são dados por:

$$\underline{q}_i < q_i < \bar{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, nq. \quad (2.23)$$

Analogamente à eq. (2.18), o vetor de parâmetros realmente incertos q pertence a uma região Π , definida por:

$$\Pi = \{q \mid q \in \mathfrak{R}^{nq}, Q(q - q_c) < \underline{1}\} \quad (2.24)$$

onde $q_c \in \mathfrak{R}^{nq}$, $Q \in \mathfrak{R}^{2nq \times nq}$ e $\underline{1} \in \mathfrak{R}^{2nq}$. A matriz Q e o vetor q_c são obtidos de forma análoga às equações (2.19) e (2.21), respectivamente. No caso mais geral, a dependência entre os parâmetros não é linear. Uma solução alternativa para este caso é proposta no Capítulo 8 desta tese.

Utilizando-se uma transformação de coordenadas no espaço de parâmetros \mathfrak{R}^{nq} , pode-se obter uma normalização das incertezas paramétricas que é extremamente útil no cálculo da função medida de robustez. Considera-se a seguinte transformação linear:

$$q^* = R'^{-1}(q - q_c) \quad (2.25)$$

onde $q^* \in \mathfrak{R}^{nq}$ e $R' \in \mathfrak{R}^{nq \times nq}$.

De acordo com (2.24), tem-se que:

$$Q(q - q_c) < \underline{1} \quad (2.26)$$

Substituindo-se (2.25) em (2.26), obtém-se:

$$QR'q^* < \underline{1} \quad (2.27)$$

Define-se então:

$$R' = C^{-1} = \begin{bmatrix} (\bar{q}_1 - \underline{q}_1)/2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\bar{q}_{nq} - \underline{q}_{nq})/2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde $C \in \mathfrak{R}^{nq \times nq}$ é a matriz que compõe Q , segundo a equação (2.19), considerando-se apenas os parâmetros efetivamente incertos.

A equação (2.27) fica reduzida então a:

$$Q^*q^* < \underline{1} \quad (2.29)$$

onde $Q^* \in \mathbb{R}^{2nq \times nq}$ é dada por:

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Como $\bar{q}_i > \underline{q}_i, \forall i$, a matriz C é sempre inversível, o que garante, sempre, a possibilidade da transformação de coordenadas.

A partir desta transformação, as incertezas definidas em (2.24) passam a ser representadas pela região aberta, denotada por Π^* , descrita por:

$$\Pi^* = \{q^* \mid q^* \in \mathbb{R}^{nq}, Q^* q^* < \underline{1}\} \quad (2.31)$$

Esta região representa uma região hipercúbica centrada na origem do novo sistema de coordenadas, no espaço de parâmetros efetivamente incertos \mathbb{R}^{nq} .

A representação normalizada das incertezas dos parâmetros permite, assim, o mapeamento da região Π na região Π^* , ou seja, $q \in \Pi \Leftrightarrow q^* \in \Pi^*$. Uma visualização das transformações lineares sobre os parâmetros do processo pode ser vista na Figura 2.2.

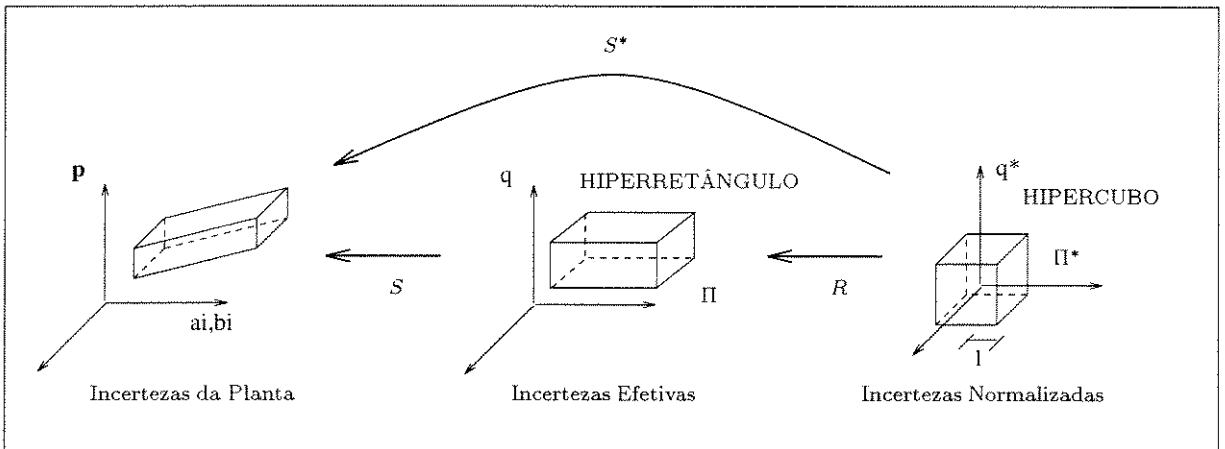


Figura 2.2: Transformações lineares sobre os parâmetros do processo.

Substituindo-se q na equação (2.22) por q^* , utilizando-se a equação (2.25), obtém-se a relação entre o vetor de parâmetros p e o vetor de parâmetros incertos normalizados q^* ,

como é dada a seguir:

$$p = S \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} = SR \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

onde

$$R = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q_c & R' \end{array} \right] \in \mathfrak{R}^{(nq+1) \times (nq+1)} \quad (2.33)$$

Finalmente, tem-se então:

$$p = S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

com $S^* \in \mathfrak{R}^{(na+nb+2) \times (nq+1)} = SR$.

2.4 A Função Medida de Robustez

A solução do problema de robustez consiste na obtenção de um controlador x que aloque os pólos do sistema na região D pré-definida no plano complexo, considerando a região de incerteza paramétrica inicial dada. Como o problema pode admitir múltiplas soluções, a definição de uma função medida de robustez surge naturalmente como um critério que permite a comparação entre controladores.

Considere-se a família de hiperretângulos no espaço dos parâmetros incertos \mathfrak{R}^{nq} , cujas proporções são similares³ à região Π de incerteza definida no projeto inicial. A função medida de robustez $m(x)$ de um dado controlador x está relacionada à maior região de incerteza paramétrica admissível (dentro da família considerada), associada ao mesmo. A Figura 2.3 traz uma interpretação geométrica da função medida de robustez $m(x)$. Um controlador x é dito *factível*, se a combinação deste controlador com o parâmetro central do processo ($p = p_c \Leftrightarrow q^* = 0$) levar a pólos em malha fechada dentro da região D especificada. A família de regiões hiperretangulares considerada acima, corresponde a uma família de hipercubos no espaço de parâmetros normalizados q^* . Para um controlador factível, pode-se então determinar a maior variação paramétrica (normalizada) admissível, ou seja, a maior região hipercúbica, tal que os pólos do sistema ainda permaneçam dentro da região D . Esta variação paramétrica é representada pelo hipercubo Π_x^* no espaço de parâmetros incertos normalizados. A medida de robustez $m(x)$ é definida então como sendo a distância ortogonal k_m do centro à face deste hipercubo (Figura 2.3).

³Por proporções similares entende-se que as arestas dos diferentes hiperretângulos obedecem à uma mesma proporção com relação às arestas de Π .

Como as incertezas dadas no projeto inicial são normalizadas em um hipercubo Π^* cuja distância centro-face é igual a 1, conforme a equação (2.31), um controlador x será solução para o problema inicial se sua medida de robustez satisfizer $m(x) \geq 1$.

Portanto, além de avaliar a máxima variação paramétrica admissível para um dado controlador, a medida de robustez permite também a comparação entre dois controladores, associando a noção de “mais robusto” àquele que admitir maior região de incerteza nos parâmetros da planta.

Apresenta-se a seguir, algumas definições necessárias ao cálculo da medida de robustez de um controlador, segundo Araújo (1991).

Considere-se a família de regiões hipercúbicas, parametrizadas pela variável k , defi-

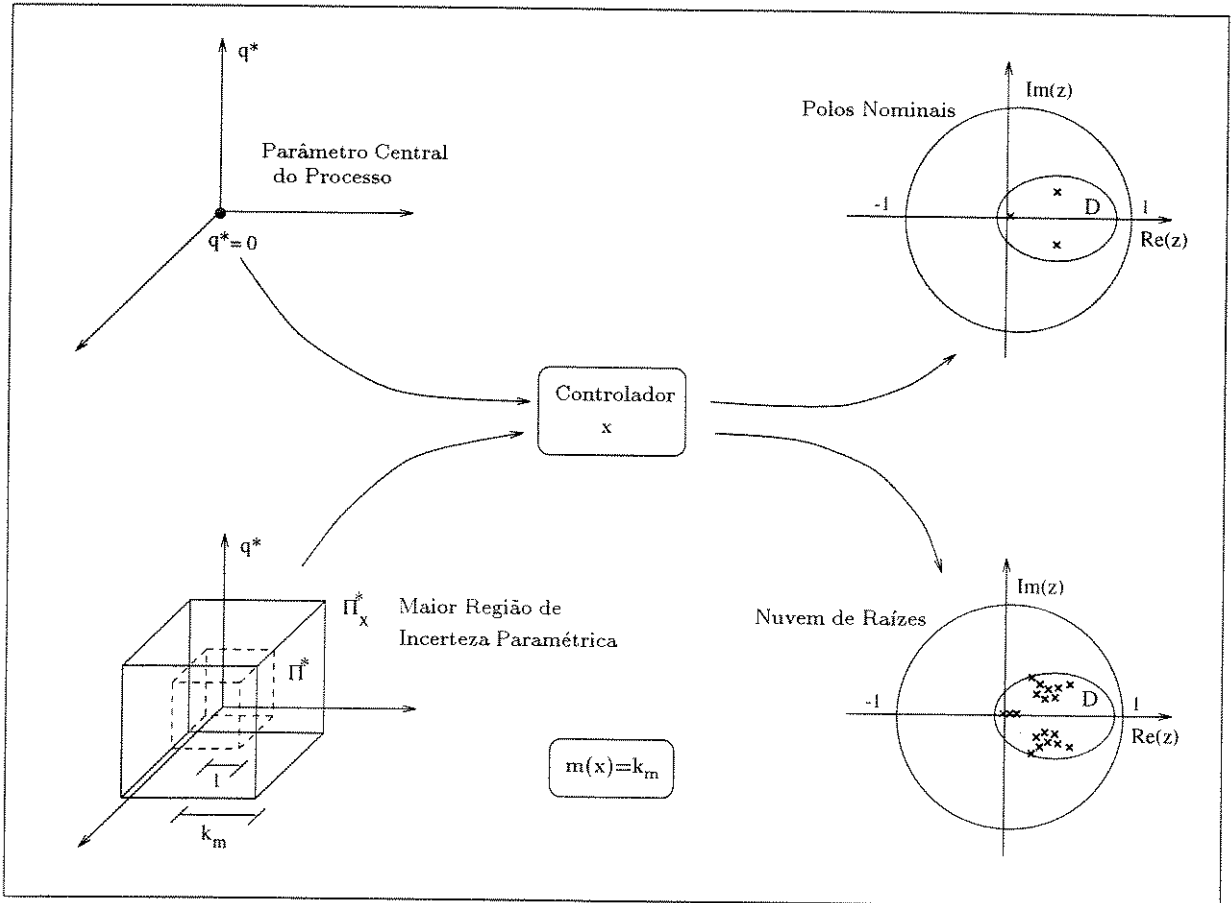


Figura 2.3: Interpretação da Função Medida de Robustez.

nida abaixo:

$$\Pi^*(k) = \{q^* \mid q^* \in \mathbb{R}^{n_q}, Q^* q^* < \underline{k}\} \tag{2.35}$$

onde \underline{k} denota o vetor $[k \ k \ \dots \ k]^T \in \mathfrak{R}^{2nq}$, com $k \in [0, \infty)$ e Q^* é a matriz definida na eq. (2.30). Para $k = 1$ tem-se a região de incerteza definida no projeto inicial ($\Pi^*(1) = \Pi^*$ definida na eq.(2.31)). O parâmetro k é utilizado na definição da função medida de robustez $m(x)$.

Retomando-se a equação matricial do polinômio característico (2.13), com p substituído pela expressão da eq. (2.34), tem-se:

$$t = X(x)p = X(x)S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Explicitando-se a dependência dos coeficientes do polinômio característico em malha fechada (dados em t) em relação aos parâmetros do controlador x e aos parâmetros incertos representados por q^* , escreve-se:

$$z^{nt}T(z^{-1}) = T(x, q^*, z) \quad (2.37)$$

Define-se um controlador x como sendo D -estabilizante para a região de incerteza paramétrica nominal dada, se as raízes de $T(x, q^*, z)$ estão contidas na região de alocação D , qualquer que seja o valor do vetor de parâmetros normalizados $q^* \in \Pi^*$.

Em virtude da complexidade da função medida de robustez, para a qual não é conhecida uma expressão analítica direta, diversos conceitos intermediários são definidos para o cálculo da mesma.

2.1 Definição (Araújo, 1991): *Define-se o conjunto \mathcal{W} de controladores factíveis, como sendo o conjunto dos controladores D -estabilizantes para o vetor de parâmetros central do processo ($p = p_c \Leftrightarrow q^* = 0$), ou seja:*

$$\mathcal{W} = \{x \mid x \in \mathfrak{R}^{nh+ng+2}, T(x, \underline{0}, z) = 0 \Rightarrow z \in D\} \quad (2.38)$$

onde $\underline{0}$ denota o vetor nulo em \mathfrak{R}^{nq} .

2.2 Definição: *Dado um controlador factível $x \in \mathcal{W}$, define-se o conjunto $\mathcal{K}(x)$ como sendo o conjunto de todos os valores de k em (2.35) que correspondem a regiões de incerteza paramétrica para as quais o dado controlador é D -estabilizante, ou seja,*

$$\mathcal{K}(x) = \{k \in \mathfrak{R}^+ \cup \{0\} \mid \forall q^* \in \Pi^*(k) : T(x, q^*, z) = 0 \Rightarrow z \in D\} \quad (2.39)$$

Dado que $\Pi^*(k) \supset \Pi^*(k') \Leftrightarrow k \geq k'$ é trivial concluir que $\mathcal{K}(x)$ é um conjunto conexo e portanto $\mathcal{K}(x) = [0, k_m)$. Este fato motiva a seguinte definição.

2.3 Definição: A medida de robustez de um controlador $x \in \mathcal{W}$ é definida como:

$$m(x) = \sup \mathcal{K}(x) = k_m, \quad x \in \mathcal{W} \quad (2.40)$$

Ou seja, k_m é o maior valor de k em (2.35) tal que todos os polinômios resultantes da combinação do controlador x com qualquer vetor de parâmetros em $\Pi^*(k_m)$ apresentem suas raízes dentro da região de alocação D .

Para o cálculo da função medida de robustez, utiliza-se o conceito intermediário de *medida de robustez local* $m(x, z)$, que é calculada para um ponto z do plano complexo. Esta nova função está associada à maior variação paramétrica do processo que combinada com o controlador x não produza z como raiz do polinômio característico de malha fechada.

De maneira análoga à definição do conjunto $\mathcal{K}(x)$ tem-se a seguinte definição.

2.4 Definição: $\mathcal{K}(x, z) = \{k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \forall q^* \in \Pi^*(k) : T(x, q^*, z) \neq 0\}$

Como anteriormente, tem-se que o conjunto $\mathcal{K}(x, z)$ é conexo e portanto $\mathcal{K}(x, z) = [0, k_z)$. De modo análogo à Definição 2.3, esta propriedade motiva a seguinte definição.

2.5 Definição: A medida de robustez local de um controlador $x \in \mathcal{W}$ com relação a um ponto z do plano complexo é definida como:

$$m(x, z) = \sup \mathcal{K}(x, z) = k_z \quad x \in \mathcal{W}, \quad z \in \mathcal{C} \quad (2.41)$$

Ou seja, k_z é o maior valor de k em (2.35) tal que qualquer vetor de parâmetros em $\Pi^*(k_z)$ combinado com o controlador x não apresente z como raiz da equação característica.

A partir destas definições pode-se enunciar a seguinte proposição.

2.6 Proposição (Santos-Mendes, 1988): *Sejam $x \in \mathcal{W}$ e k' um número real não-negativo.*

Se $(\forall q^ \in \Pi^*(k'), \forall z \in \partial D) : T(x, q^*, z) \neq 0$*

então $(\forall q^ \in \Pi^*(k'), \forall z \notin D) : T(x, q^*, z) \neq 0$*

A demonstração desta proposição é mostrada no Apêndice B de uma forma diferente daquela apresentada em Santos-Mendes (1988).

Esta proposição garante que na determinação de k_m , é suficiente restringir a análise aos pontos pertencentes à fronteira ∂D , o que permite enunciar o seguinte corolário.

2.7 Proposição (Santos-Mendes, 1988),(Araújo, 1991): *A função medida de robustez*

$m(x)$, definida anteriormente, pode ser determinada por:

$$m(x) = \begin{cases} \min & m(x, z) & (x \in \mathcal{W}) \\ & z \in \partial D \end{cases} \quad (2.42)$$

Ou seja, o cálculo de $m(x)$ para um dado controlador $x \in \mathcal{W}$ é determinado pela minimização da função medida de robustez local em z , com z restrito à fronteira ∂D .

A determinação da medida de robustez local consiste na avaliação da maior região hipercúbica de incerteza para q^* tal que $T(x, q^*, z) \neq 0$, com $x \in \mathcal{W}$ e $z \in \partial D$ dados. Para a apresentação da expressão analítica para k_z , algumas definições são necessárias.

Considere-se, inicialmente, a matriz $V(z) \in \mathfrak{R}^{(nt+1) \times 2}$ definida como:

$$V^T(z) = \begin{bmatrix} \Re(z^{nt}) & \Re(z^{nt-1}) & \dots & \Re(z) & 1 \\ \Im(z^{nt}) & \Im(z^{nt-1}) & \dots & \Im(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

onde $\Re(\cdot)$ e $\Im(\cdot)$ denotam, respectivamente, as partes real e imaginária de um número complexo, e nt é o grau do polinômio $T(z^{-1})$.

Observa-se que a construção de $V(z)$, como definida acima, permite a obtenção de uma importante relação, a saber:

$$V^T(z)t = \begin{bmatrix} \Re[z^{nt}T(z^{-1})] \\ \Im[z^{nt}T(z^{-1})] \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Substituindo-se t em (2.44) pela equação (2.36) e considerando-se a notação introduzida em (2.37), tem-se que:

$$V^T(z)X(x)S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re[z^{nt}T(z^{-1})] \\ \Im[z^{nt}T(z^{-1})] \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Define-se a matriz $U(x, z) \in \mathfrak{R}^{(nq+1) \times 2}$ como

$$U^T(x, z) = V^T(z)X(x)S^* \quad (2.46)$$

e ainda, o conjunto $\mathcal{V}(x, z)$ como:

$$\mathcal{V}(x, z) = \left\{ q^* \mid q^* \in \mathfrak{R}^{nq}, U^T(x, z) \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.47)$$

Tem-se então que z será raiz do polinômio $T(x, q^*, z)$ se e somente se o vetor $[1 \ q^*]^T \in \mathfrak{R}^{nq+1}$ pertencer ao espaço nulo de $U^T(x, z)$, ou seja:

$$T(x, q^*, z) \neq 0 \Leftrightarrow q^* \notin \mathcal{V}(x, z) \quad (2.48)$$

Como consequência deste fato, a função medida de robustez local pode ser redefinida como:

$$m(x, z) = k_z, \quad x \in \mathcal{W} \text{ e } z \in \partial D \quad (2.49)$$

onde k_z é o maior valor do parâmetro k em (2.35), tal que $\Pi^*(k_z) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset$. Reescrevendo-se a matriz $U(x, z)$ definida em (2.46), para x e z dados, como:

$$U^T(x, z) = \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{nq} \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{nq} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2 \times (nq+1)} \quad (2.50)$$

onde $\alpha = [\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{nq}]^T \in \mathfrak{R}^{nq+1}$ e $\beta = [\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{nq}]^T \in \mathfrak{R}^{nq+1}$, a função medida de robustez local $m(x, z)$ pode ser determinada pelo seguinte teorema, cuja demonstração encontra-se no Apêndice C, ao final deste trabalho.

2.8 Teorema (Araújo, 1991): *Sejam $x \in \mathcal{W}$ um controlador factível, e z um ponto qualquer da fronteira ∂D de D . A função medida de robustez local $m(x, z)$ é dada analiticamente, para duas situações, por:*

$$m(x, z) = \begin{cases} \frac{|\alpha_0|}{nq} & \text{se os vetores } \alpha \text{ e } \beta \text{ são linearmente dependentes,} \\ \sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i| & \\ \max_{i=1, \dots, nq} \frac{|\gamma_{0i}|}{nq} & \text{caso contrário.} \\ \sum_{j=1, (j \neq i)}^{nq} |\gamma_{ji}| & \\ \text{onde } \gamma_{ji} = \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j. & \end{cases} \quad (2.51)$$

Retomando-se a equação (2.42), a função medida de robustez pode ser obtida pela minimização numérica da função medida de robustez local.

Devido à simetria da fronteira ∂D em relação ao eixo real do plano complexo e à equivalência de $m(x, z)$ para pontos z conjugados, é suficiente realizar a busca do mínimo em uma metade ∂D . No caso em que se tem regiões de alocação circulares e disjuntas (Capítulo 6), considera-se a minimização de $m(x, z)$ sobre cada um dos círculos de alocação.

Parametrizando-se o contorno ∂D por uma variável $\theta \in [0, \pi]$ pode-se reescrever a equação (2.42) como:

$$m(x) = \begin{cases} \min m(x, \theta) & (x \in \mathcal{W}) \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (2.52)$$

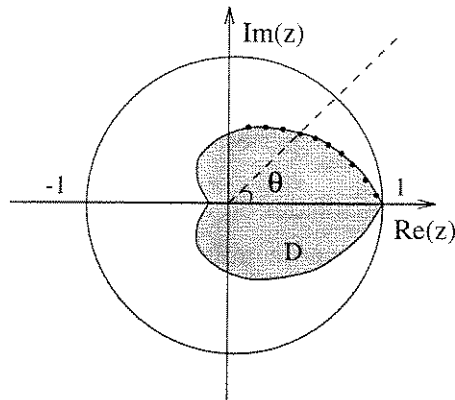


Figura 2.4: Minimização Numérica de $m(x, \theta)$ sobre o contorno de D .

A solução deste problema é dada numericamente avaliando-se θ em um número razoável de pontos no intervalo $[0, \pi]$ (Figura 2.4). O número de pontos normalmente utilizado varia de 1000 a 5000, dependendo da sensibilidade de cada problema. Mesmo no caso em que a nuvem de raízes “escapa” da região D por um único ponto z^* da fronteira, é possível detectar este ponto com uma precisão razoável. Isto é realizado minimizando-se o determinante $\det U^T U$, na variável $z \in \partial D$, o que permite avaliar o ponto z para o qual as duas linhas de $U^T(x, z)$ ficam bastante próximas da situação LD — Linearmente Dependentes.

A partir de $m(x)$, a maior região Π_x^* (e consequentemente Π_x) de incerteza paramétrica associada a x pode ser calculada. Os limites inferiores e superiores dos intervalos de incerteza correspondentes a esta região Π_x podem ser calculados utilizando-se a equação (2.34) com $q^* = [-k_m \ -k_m \ \dots \ -k_m]^T \in \mathfrak{R}^{nq}$ e $q^* = [k_m \ k_m \ \dots \ k_m]^T \in \mathfrak{R}^{nq}$, respectivamente, onde k_m é a medida de robustez do controlador dado.

2.5 Exemplo Ilustrativo

Apresenta-se aqui um exemplo numérico para ilustrar a metodologia de Araújo (1991) na análise da medida de robustez de um controlador. O exemplo corresponde a um sistema discreto de primeira ordem, com dois parâmetros incertos. O sistema, por sua simplicidade, permite ilustrar com clareza as definições apresentadas ao longo do capítulo com relação à representação das incertezas paramétricas e o cálculo da função medida de robustez. O sistema de primeira ordem é dado pela seguinte função de transferência:

$$y(k) = \frac{z^{-1}b}{1 + az^{-1}}u(k) \quad (2.53)$$

Os parâmetros a e b estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{cases} -0.6 < a < -0.4 \\ 0.3 < b < 0.7 \end{cases} \quad (2.54)$$

Deseja-se encontrar um controlador do tipo PI, de modo a alocar os pólos do sistema em malha fechada na região D do plano complexo representada na Figura 2.5. Esta região D é obtida considerando-se a relação $\xi\omega_n > 40$ e o sobre-sinal máximo $M_p < 0.1$ ($\xi > 0.6$) como especificações da resposta transitória.

A estrutura do controlador PI é dada pela equação seguinte:

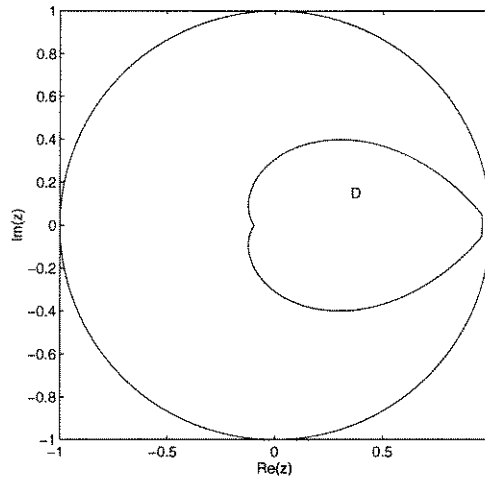


Figura 2.5: Região para alocação de pólos.

$$u(k) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} y(k) + \frac{e_0}{1 - z^{-1}} r(k) \quad (2.55)$$

onde e_0 é escolhido de forma a garantir erro nulo em regime para uma entrada em degrau, ou seja, $e_0 = g_0 + g_1$. O vetor de parâmetros do controlador é definido como $x = [1 \ g_0 \ g_1]^T$.

O problema consiste na obtenção dos parâmetros g_0 e g_1 tais que o polinômio característico em malha fechada tenha raízes na região D da Figura 2.5, quaisquer que sejam os valores de a e b definidos em (2.54). Descreve-se a seguir, a representação matemática para os parâmetros e incertezas do processo.

Do ponto de vista do cálculo dos parâmetros do controlador, a parte integral do mesmo pode ser “incorporada” como parte do processo, por ser um termo constante. Portanto a componente integral $(1 - z^{-1})$ é incorporada na estrutura de $A(z^{-1})$, que passa a ser tratado como um polinômio de segunda ordem, ou seja:

$$A(z^{-1}) \leftarrow A(z^{-1})(1 - z^{-1}) = 1 + (a - 1)z^{-1} - az^{-2} \quad (2.56)$$

Neste caso, a expressão do vetor de parâmetros do processo p , segundo a equação (2.22) pode ser escrita como:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \\ -a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

onde o vetor de parâmetros efetivamente incertos q é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

A equação (2.57) permite concluir que a matriz S definida pela equação (2.22) é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Seguindo-se a definição dada em (2.24), pode-se obter a representação para a região de incerteza hiperretangular para o vetor q , como sendo:

$$\Pi = \{q \mid q \in \mathbb{R}^2, Q(q - q_c) < \underline{1}\} \quad (2.60)$$

onde:

$$\underline{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$q_c = [-0.5 \ 0.5]^T \text{ é o vetor de parâmetros central.}$$

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Normalizando-se a região Π utilizando a equação (2.32), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Logo, a matriz S^* que incorpora todas as informações sobre o processo é dada por:

$$S^* = SR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & -0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

onde o vetor q^* pertence à região hipercúbica normalizada Π^* , dada por:

$$\Pi^* = \{q^* \mid q^* \in \mathbb{R}^2, Q^*q^* < \underline{1}\} \quad (2.65)$$

com

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

A fim de ilustrar o cálculo da função medida de robustez, considerou-se um certo controlador factível x , dado por:

$$x = [1 \ g_0 \ g_1]^T = [1 \ 1.4 \ -0.68]^T \quad (2.67)$$

O critério adotado para a determinação de x foi a alocação dos pólos nominais do sistema (com relação ao parâmetro central do processo) numa região central da região D (os 2 pólos de malha fechada foram localizados em $z = 0.4$).

A matriz de parâmetros do controlador (2.16) é dada, neste caso, por:

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 1 & -0.68 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

A medida de robustez foi determinada pela minimização numérica da medida de robustez local, segundo (2.42), sobre o contorno da região D , utilizando 1000 pontos. Os valores obtidos para a medida de robustez e o ponto z^* correspondente à minimização foram:

$$m(x) = \begin{cases} \min_{z \in \partial D} m(x, z) = 0.90, & z^* = -0.0948 \end{cases} \quad (2.69)$$

Obviamente, como este controlador não apresenta uma medida de robustez maior do que 1, o mesmo não representa uma solução para o problema inicial. No Capítulo 8, o problema é solucionado através do método proposto neste trabalho. A nuvem de raízes resultante da combinação do controlador (2.67) com as incertezas paramétricas definidas para o problema (2.54) pode ser vista na Figura 2.6.

A seguir, ilustra-se o cálculo da medida de robustez local $m(x, z)$ no ponto crítico

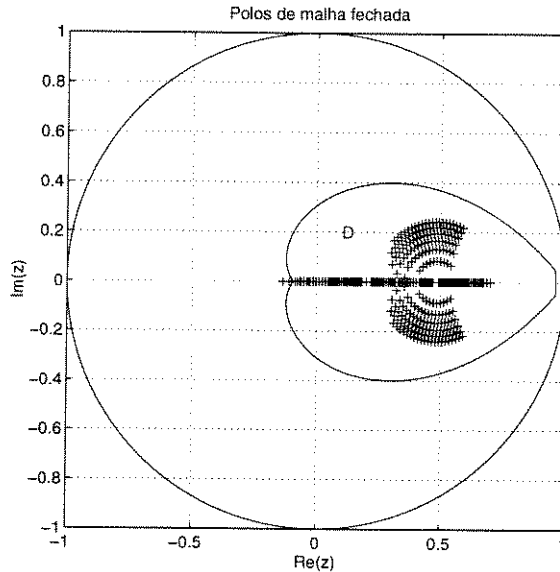


Figura 2.6: Pólos de malha fechada considerando-se as incertezas pré-especificadas.

em questão, ou seja, o ponto $z = -0.0948$ que minimiza $m(x, z)$ sobre o contorno da região de alocação.

A matriz $V(z)$, definida em (2.43), avaliada para $z = -0.0948$ é dada por:

$$V^T(z) = \begin{bmatrix} \Re(z^2) & \Re(z) & 1 \\ \Im(z^2) & \Im(z) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.009 & -0.0948 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

A matriz $U(x, z)$, definida em (2.46), avaliada para os parâmetros do controlador x dado e o ponto $z = -0.0948$ em questão, fornece:

$$U^T(x, z) = V^T(z)X(x)S^* = \begin{bmatrix} 0.2448 & -0.1095 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

As duas linhas da matriz $U^T(x, z)$ são linearmente dependentes, e portanto a medida de robustez local é calculada através da primeira expressão de (2.51), fornecendo:

$$m(x, z) = \frac{|0.2448|}{|-0.1095| + |-0.1625|} = 0.90 \quad (2.72)$$

O capítulo seguinte retoma este exemplo a fim de ilustrar os pontos problemáticos associados às abordagens de síntese de controladores que utilizam métodos de gradiente. Apresentam-se também outros casos particulares que evidenciam as dificuldades associadas a este método.

Capítulo 3

Síntese de Controladores Baseada em Métodos de Gradiente

3.1 Introdução

Apresenta-se, neste capítulo, uma revisão de trabalhos anteriores que utilizam métodos de gradiente para a síntese de controladores robustos. A técnica de gradiente é utilizada na maximização da função medida de robustez. Discutem-se alguns pontos problemáticos destes métodos através de alguns exemplos numéricos que ilustram as dificuldades associadas.

3.2 Abordagem de Araújo

O método de projeto de controladores robustos, conforme abordagem apresentada no Capítulo 2, consiste na obtenção de um controlador x com índice de robustez $m(x) \geq 1$. Em Araújo (1991) propõe-se uma rotina de otimização que, a partir de um controlador $x_0 \in \mathcal{W}$, realiza sucessivas modificações nos parâmetros de x , segundo a direção do gradiente da função $m(x)$, a fim de se obter o controlador de maior robustez. Apesar de alguns exemplos bem-sucedidos, esta metodologia apresenta algumas limitações, a saber:

- O conjunto \mathcal{W} não pode ser explicitamente obtido, portanto, encontrar um controlador inicial $x_0 \in \mathcal{W}$ pode representar uma tarefa bastante difícil.
- A função de robustez $m(x)$ não é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Nestas situações, Santos-Mendes (1988) e Araújo (1991) adotam uma direção de busca modificada que procura manter a propriedade de direção de subida dos gradientes.

Esta direção, contudo, pode não produzir progressos significativos na maximização da função.

- Finalmente, a função de robustez $m(x)$ apresenta-se em geral, como uma função bastante complexa e com características de mau condicionamento. Estas características fazem com que uma rotina baseada em gradientes apresente frequentemente paradas prematuras, devido à não melhoria da função objetivo. Pelas mesmas razões, a solução final obtida torna-se extremamente dependente da condição inicial x_0 .

No presente capítulo, estas dificuldades são ilustradas através de alguns exemplos numéricos. Aborda-se a seguir algumas características específicas do gradiente da função de robustez $m(x)$, segundo Araújo (1991).

Considera-se a função medida de robustez dada em (2.52), reescrita da seguinte forma:

$$m(x) = m(x, \theta^*(x)) \quad (x \in \mathcal{W}) \quad (3.1)$$

onde $\theta^*(x)$ é o valor de $\theta \in [0, \pi]$ que minimiza a função $m(x, \theta)$ para um controlador x dado. A partir desta equação, e supondo-se um único valor de θ minimizando $m(x, \theta)$, tem-se que o gradiente de $m(x)$ é dado por:

$$\nabla m(x) = \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial x} + \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial \theta} \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (x \in \mathcal{W}) \quad (3.2)$$

garantida a existência das derivadas acima. Como $\theta^* = \theta(x)$ minimiza a função $m(x, \theta)$ no ponto (x, θ) , e como foi suposta a existência da derivada, tem-se que $\partial m(x, \theta)/\partial \theta = 0$ e o gradiente da função medida de robustez fica reduzido a:

$$\nabla m(x)|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial m(x, \theta)}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_0 \\ \theta = \theta^*(x_0)}} \quad (3.3)$$

Em Santos-Mendes (1988) e Araújo (1991), esta é a expressão utilizada para a avaliação do gradiente de $m(x)$.

Contudo, nas situações em que para um dado controlador x existe mais de um valor de θ que minimiza a função $m(x, \theta)$ na equação (2.52), o gradiente da função medida de robustez não está definido. Da mesma forma, se o índice i que resolve a maximização na equação (2.51) não for único, o gradiente da função de robustez também não estará definido. Nestas situações, Santos-Mendes (1988) propõe uma direção de busca alternativa, baseada em uma definição de gradiente modificado de $m(x)$. Em virtude da descontinuidade de $\theta(x)$ ou $m(x, \theta)$, mais de uma direção de busca (subgradiente) pode ser considerada neste caso. A

direção de busca alternativa é escolhida de forma a satisfazer simultaneamente uma direção de subida para todas as direções individuais no ponto de descontinuidade. Contudo, através de alguns exemplos numéricos, pode-se constatar que a não-diferenciabilidade e os outros aspectos discutidos anteriormente, dificultam a maximização da função medida de robustez com este método. As limitações da abordagem ficam evidentes através da discussão dos dois exemplos seguintes.

Exemplo 3.1:

Este exemplo, utilizado na ilustração do cálculo da função medida de robustez no capítulo anterior, consiste de um sistema de primeira ordem dado pela seguinte função de transferência:

$$y(k) = \frac{z^{-1}b}{1 + az^{-1}}u(k) \quad (3.4)$$

onde os parâmetros a e b estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{cases} -0.6 < a < -0.4 \\ 0.3 < b < 0.7 \end{cases} \quad (3.5)$$

Deseja-se encontrar um controlador do tipo PI, de modo a alocar os pólos do sistema em malha fechada na região D do plano complexo representada na Figura 3.1. Esta região D é obtida considerando-se $\xi\omega_n > 40$ e o sobre-sinal máximo $M_p < 0.1$ ($\xi > 0.6$) como especificações da resposta transitória.

A estrutura do controlador PI é dada pela equação seguinte:

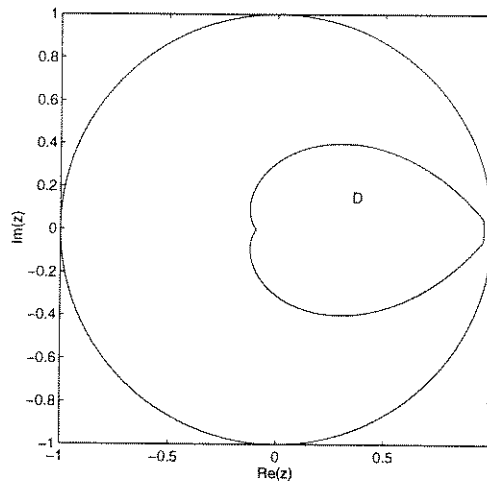


Figura 3.1: Região de alocação de pólos para o exemplo 3.1.

$$u(k) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}y(k) + \frac{e_0}{1 - z^{-1}}r(k) \quad (3.6)$$

onde e_0 é escolhido de forma a garantir erro nulo em regime para uma entrada em degrau, ou seja, $e_0 = g_0 + g_1$. O vetor de parâmetros do controlador é definido então como $x = [1 \ g_0 \ g_1]^T$.

O problema consiste na obtenção dos parâmetros g_0 e g_1 tais que o polinômio característico em malha fechada tenha raízes na região D da Figura 3.1, quaisquer que sejam os valores de a e b definidos em (3.5).

Como o problema apresenta somente duas variáveis de otimização, pode-se traçar facilmente as curvas de nível da função $m(x)$ calculando o valor da mesma ponto a ponto. As curvas de nível são apresentadas na Figura 3.2. Estas curvas dão uma idéia da complexidade da função medida de robustez. Percebe-se que a função não é diferenciável e que há uma tendência de mau condicionamento.

A maximização da função de robustez $m(x)$ foi implementada com o método de

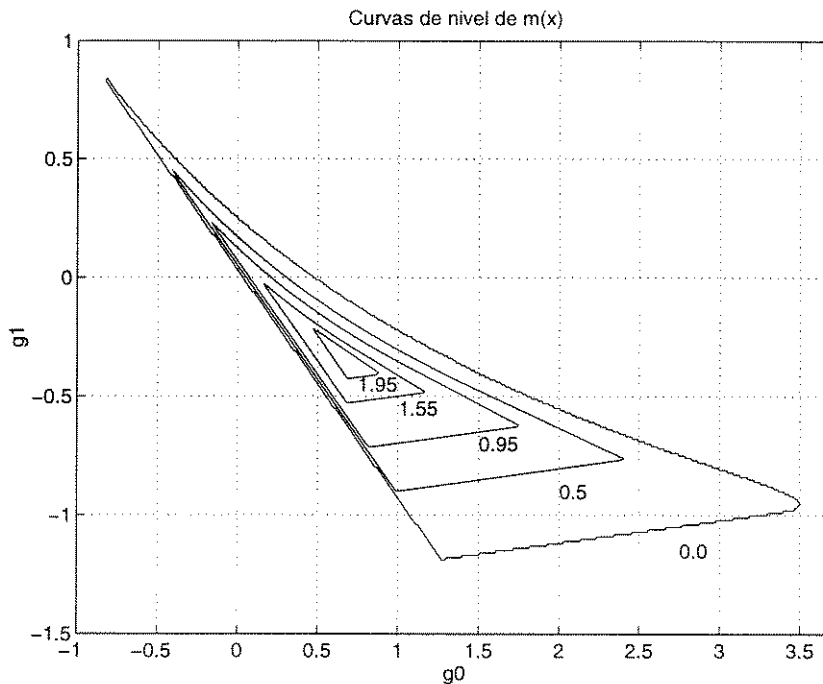


Figura 3.2: Curvas de Nível de $m(x)$ para o exemplo 3.1.

gradientes considerando-se 10 diferentes condições iniciais x_0 , aleatoriamente escolhidas no domínio \mathcal{W} . Os controladores x_f obtidos para cada caso, juntamente com as respectivas medidas de robustez $m(x_f)$ foram registrados na Tabela 3.1. A Figura 3.3 ilustra os resultados obtidos com este método mostrando, para cada uma das 10 situações simuladas, as condições iniciais e finais sobre as curvas de nível da função $m(x)$. Os resultados mostram que é frequente a parada prematura da rotina de otimização devido aos problemas mencionados anteriormente, e que como consequência deste fato, o processo de otimização torna-se

Caso	Parâmetros dos Controladores $[\quad x_0 \quad] \rightarrow [\quad x_f \quad]$	Medidas de Robustez $m(x_0) \rightarrow m(x_f)$
1	$[1 \ 1.5 \ -0.8] \rightarrow [1 \ 1.126 \ -0.471]$	0.60 \rightarrow 1.61
2	$[1 \ 1.4065 \ -0.3883] \rightarrow [1 \ 0.816 \ -0.384]$	0.07 \rightarrow 2.08
3	$[1 \ 0.9577 \ -0.8706] \rightarrow [1 \ 1.037 \ -0.447]$	0.48 \rightarrow 1.72
4	$[1 \ 0.5403 \ -0.0847] \rightarrow [1 \ 0.416 \ -0.184]$	0.29 \rightarrow 1.90
5	$[1 \ 1.3248 \ -0.6488] \rightarrow [1 \ 1.112 \ -0.467]$	0.99 \rightarrow 1.62
6	$[1 \ 0.8709 \ -0.3369] \rightarrow [1 \ 0.639 \ -0.301]$	1.29 \rightarrow 2.08
7	$[1 \ 1.5342 \ -0.5152] \rightarrow [1 \ 1.275 \ -0.509]$	0.72 \rightarrow 1.42
8	$[1 \ 0.9289 \ -0.7160] \rightarrow [1 \ 0.750 \ -0.358]$	0.92 \rightarrow 2.13
9	$[1 \ 0.0415 \ 0.0223] \rightarrow [1 \ 0.615 \ -0.288]$	0.79 \rightarrow 2.06
10	$[1 \ 1.9837 \ -0.6523] \rightarrow [1 \ 1.722 \ -0.617]$	0.63 \rightarrow 0.98

Tabela 3.1: Exemplo 3.1 com o método de gradientes de Araújo (1991).

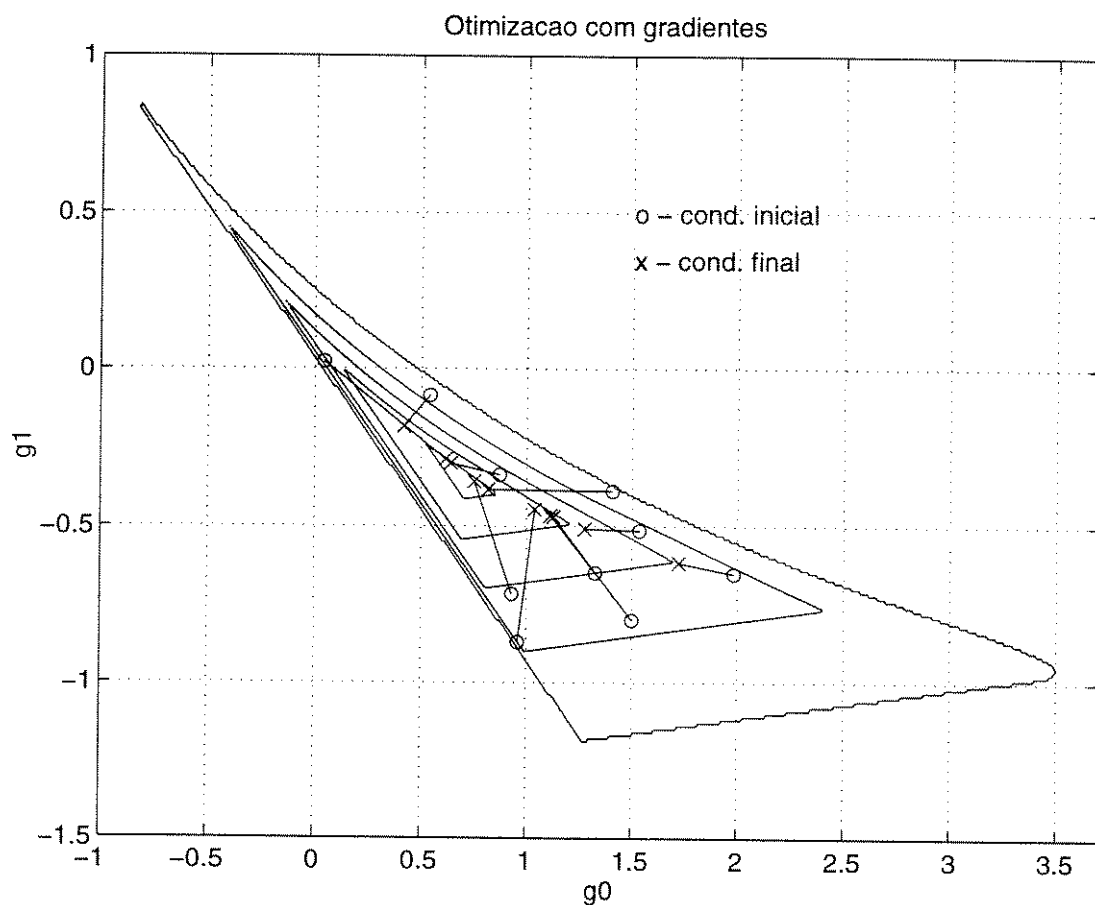


Figura 3.3: Condições iniciais ('o') e finais ('x') resultantes da otimização do exemplo 3.1 com o método dos gradientes.

dependente da condição inicial dada e sujeito ao fracasso. O problema mais complexo tratado a seguir enfatiza as dificuldades da síntese com gradientes.

Exemplo 3.2:

Este segundo exemplo apresenta uma complexidade maior que o anterior, por se tratar de uma planta de segunda ordem cujo controlador possui quatro parâmetros a otimizar.

A função de transferência do processo é dada a seguir:

$$\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}(b_0 + b_1z^{-1})}{(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})(1 - z^{-1})} \quad (3.7)$$

As incertezas paramétricas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.65 < a_1 < -0.55 \\ 0.55 < a_2 < 0.65 \\ 0.4 < b_0 < 0.56 \\ 0.36 < b_1 < 0.56 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

O objetivo é projetar um controlador robusto que mantenha os pólos do sistema em malha fechada na região D para os intervalos de incerteza descritos. A região D é semelhante à do exemplo anterior, obtida das especificações da resposta transitória com $\xi \geq 0.5$ e $\xi\omega_n \geq 40$. Considera-se aqui, para simulação com o método dos gradientes, a situação em que os graus dos polinômios $H(z^{-1})$ e $G(z^{-1})$ são 1 e 2, respectivamente, ou seja, $nh = 1$ e $ng = 2$. O vetor de parâmetros do controlador corresponde então a $x = [1 \ h_1 \ g_0 \ g_1 \ g_2]^T$, com quatro variáveis a otimizar.

Da mesma forma que no exemplo anterior, implementou-se a rotina de maximização de $m(x)$ utilizando o método de gradientes para 10 condições iniciais $x_0 \in \mathcal{W}$ registrando os resultados obtidos para x_f e $m(x_f)$, os quais se encontram na Tabela 3.2.

Dos resultados obtidos pode-se concluir que para problemas mais complexos, com um maior número de variáveis, o método de gradientes se torna ainda mais deficiente, apresentando em todos os casos simulados uma parada prematura do processo de maximização da função. É interessante notar neste exemplo, que em nenhum dos 10 casos simulados com este método foi obtido um controlador solução para o problema, ou seja, x_f tal que $m(x_f) \geq 1$. Um controlador robusto para este problema é obtido no Capítulo 5 com o método proposto neste trabalho.

Caso	Parâmetros dos Controladores $[\quad x_0 \quad] \rightarrow [\quad x_f \quad]$	Medidas de Robustez $m(x_0) \rightarrow m(x_f)$
1	$x_0 = [1 \ 0.2087 \ 0.0039 \ -0.1963 \ 0.3979] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.2300 \ -0.0058 \ -0.1902 \ 0.4016]$	0.53 \rightarrow 0.66
2	$x_0 = [1 \ 0.1019 \ -0.1258 \ 0.1657 \ 0.1981] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.064 \ -0.256 \ 0.0947 \ 0.2558]$	0.02 \rightarrow 0.75
3	$x_0 = [1 \ 0.1117 \ -0.2690 \ -0.0316 \ 0.3367] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.2057 \ -0.2943 \ 0.02 \ 0.3444]$	0.30 \rightarrow 0.98
4	$x_0 = [1 \ 0.0674 \ -0.1843 \ 0.1449 \ 0.1647] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.0547 \ -0.2047 \ 0.1518 \ 0.2055]$	0.10 \rightarrow 0.55
5	$x_0 = [1 \ 0.1682 \ -0.1960 \ 0.1945 \ 0.2214] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.1054 \ -0.3096 \ 0.1093 \ 0.2718]$	0.14 \rightarrow 0.89
6	$x_0 = [1 \ 0.2402 \ -0.2531 \ 0.1785 \ 0.2591] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.1900 \ -0.3315 \ 0.1172 \ 0.2932]$	0.41 \rightarrow 0.89
7	$x_0 = [1 \ 0.0337 \ -0.2881 \ 0.3447 \ 0.1267] \rightarrow$ $x_f = [1 \ -0.0016 \ -0.3569 \ 0.2927 \ 0.1468]$	0.05 \rightarrow 0.73
8	$x_0 = [1 \ 0.2581 \ 0.0209 \ -0.2499 \ 0.4743] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.2987 \ -0.0213 \ -0.2701 \ 0.4446]$	0.28 \rightarrow 0.70
9	$x_0 = [1 \ 0.2428 \ -0.0850 \ -0.1422 \ 0.4182] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.2548 \ -0.1246 \ -0.1675 \ 0.4038]$	0.45 \rightarrow 0.79
10	$x_0 = [1 \ 0.1031 \ -0.0685 \ -0.0979 \ 0.3429] \rightarrow$ $x_f = [1 \ 0.1471 \ -0.0806 \ -0.0808 \ 0.3360]$	0.19 \rightarrow 0.64

Tabela 3.2: Exemplo 3.2 com o método de gradientes de Araújo (1991).

3.3 Abordagem de El Ghaoui

Uma outra abordagem que também utiliza gradientes no processo de síntese de controladores robustos é apresentada no trabalho de El Ghaoui (1990, 1992). Apresenta-se aqui um exemplo numérico abordado pelo autor juntamente com as discussões relativas às deficiências do método.

Embora a abordagem de El Ghaoui (1990, 1992) para a *análise* do problema de robustez seja completamente diferente da desenvolvida nesta tese, pode-se dizer que com relação à *síntese* de controladores com gradientes, o método apresenta as mesmas dificuldades básicas encontradas em Araújo (1991).

A abordagem de El Ghaoui (1990, 1992) considera incertezas estruturadas para um modelo no espaço de estados. O autor define a chamada “margem de parâmetros” (em inglês ‘parameter margin’ - pm), que é equivalente à nossa medida de robustez, para avaliar a máxima variação nos parâmetros do processo mantendo ainda a D -estabilidade do sistema em malha fechada. Este método considera tanto a norma ℓ_2 como a norma ℓ_∞ para a medida dos desvios paramétricos. A metodologia utilizada para se determinar a margem admissível de parâmetros possui estreita ligação com a abordagem da Análise μ (Doyle, 1982), considerando, porém, apenas perturbações paramétricas reais (para maiores detalhes sobre estas abordagens, refira-se ao Capítulo 8 no final desta tese). No método da Análise μ para tratamento de problemas de robustez, as incertezas multi-paramétricas são representadas em um laço de realimentação interna envolvendo uma matriz de transferência $M(s)$. Desta forma, a análise de robustez para sistemas MIMO pode ser realizada através de métodos que utilizam auto-valores e valores singulares.

No caso da síntese, El Ghaoui (1990, 1992) utiliza rotinas de gradiente para a maximização da margem de parâmetros pm . A síntese com gradientes compartilha das mesmas deficiências já discutidas anteriormente para a abordagem de Araújo (1991). Para resumir, transcrevem-se aqui as palavras do próprio autor, que podem ser encontradas no Capítulo 7 de El Ghaoui (1990): “No caso em que o algoritmo (com gradientes) encontra múltiplos auto-valores, a não-diferenciabilidade do índice de robustez (pm) provocará a parada do mesmo, com a mensagem ‘O ponto corrente não pode ser melhorado’. Uma outra dificuldade aparece quando duas direções diferentes fornecem a mesma minimização para a margem de parâmetros, mas os gradientes correspondentes são diferentes. Neste caso, o índice de robustez está definido, mas não o seu gradiente.” Observe a semelhança desta discussão com o último parágrafo antes do Exemplo 3.1.

Exemplo 3.3:

Para exemplificar, apresenta-se a seguir o problema do controle do sistema Duas Massas e Uma Mola, apresentado em El Ghaoui (1990). O sistema é mostrado na Figura 3.4.

A massa m_1 é suposta conhecida e de valor $m_1 = 1$, e os dois parâmetros incertos são

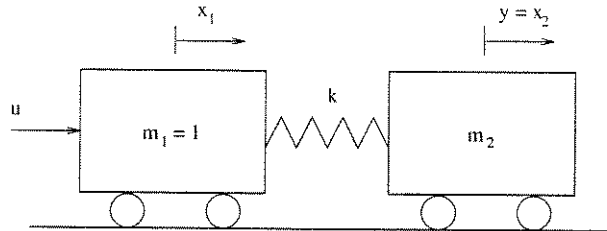


Figura 3.4: Sistema Duas Massas e Uma Mola.

a massa m_2 e a constante da mola k , ambos com valor nominal unitário. Os parâmetros l_1 e l_2 representam a constante da mola normalizada para ambas as massas, ou seja, $l_1 = k/m_1$ e $l_2 = k/m_2$. A saída y é o deslocamento x_2 da massa m_2 . A representação do sistema no espaço de estados é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l_1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_2 & 0 & -l_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.9)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] x$$

onde o vetor de estados é dado por:

$$x = [x_1 \ \dot{x}_1 \ x_2 \ \dot{x}_2]^T \quad (3.10)$$

e os parâmetros são:

$$l_1 = \frac{k}{m_1}, \quad l_2 = \frac{k}{m_2} \quad (3.11)$$

com valores nominais iguais a:

$$l_1^{nom} = l_2^{nom} = 1 \quad (3.12)$$

O objetivo é encontrar um controlador dinâmico que estabilize o sistema para todos os valores dos parâmetros incertos. Em El Ghaoui (1990), várias estruturas de controladores são propostas para solucionar o problema. No caso de realimentação de saída para um controlador de segunda ordem, e considerando a norma ℓ_2 para os desvios paramétricos, o método encontra um controlador solução para o problema ($pm = 1.0$), mas para o controlador de

realimentação de saída de ordem completa (4a. ordem), a máxima robustez conseguida com o método foi de um controlador com $pm = 0.4064$. Com relação a esta situação o autor comenta no Capítulo 8 de sua tese: “Não se pode melhorar além deste ponto, pois nele o índice de robustez não é diferenciável”, o que evidencia claramente as dificuldades já mencionadas anteriormente.

Aplicando-se a metodologia desenvolvida a este problema, como será visto mais adiante, obtém-se o modelo do sistema em função de transferência equivalente à representação de estados, e através do método proposto consegue-se determinar um controlador de 4a. ordem com margem de parâmetros igual a 1.

Concluindo, neste capítulo abordaram-se as deficiências do método clássico para síntese de controladores robustos utilizando gradientes. Estas dificuldades justificam o método alternativo proposto nesta dissertação, que utiliza algoritmos de busca estocástica em domínios limitados para a otimização da função de robustez. No capítulo seguinte apresentam-se os conceitos básicos relativos aos algoritmos genéticos e sua utilização no problema de síntese robusta.

Capítulo 4

Algoritmos Genéticos - Princípios e Aplicações

4.1 Introdução

Apresentam-se neste capítulo os fundamentos de algoritmos genéticos, bem como algumas características particulares de sua implementação e aplicação. A Seção 4.2 apresenta os conceitos básicos dos algoritmos genéticos clássicos utilizados como ferramenta de otimização. A Seção 4.3 aborda diversas características importantes com relação à teoria, implementação e aplicação dos algoritmos genéticos segundo o levantamento realizado por Man *et al.* (1996). Na Seção 4.4 discute-se a abordagem de Michalewicz (1994ab) para o desenvolvimento de algoritmos genéticos, utilizada neste trabalho, que permite um eficiente tratamento dos problemas de otimização restrita, no caso em que o conjunto de restrições é dado por um conjunto convexo. Finalmente, a Seção 4.5 descreve os parâmetros utilizados no algoritmo genético implementado.

4.2 Conceitos Básicos de Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (GAs) constituem uma classe de algoritmos de busca estocástica baseados em modelos da genética e da seleção natural. Um algoritmo genético é um procedimento iterativo que mantém um conjunto de soluções candidatas, denominado “população”, para um dado problema de otimização. Em cada iteração do procedimento, denominada “geração”, as estruturas na população corrente são avaliadas e a partir da aplicação de operadores denominados “operadores genéticos” sobre os elementos, um novo conjunto de

soluções candidatas é gerado, levando gradativamente a melhores soluções para o problema.

Os algoritmos genéticos (GAs) foram desenvolvidos por J. H. Holland e sua equipe na Universidade de Michigan durante a década de 70. Desde então, os trabalhos nesta área, tanto acadêmicos como industriais, têm apresentado um crescimento exponencial, principalmente a partir da década de 80 com os avanços na capacidade de processamento computacional. Com o aumento da disponibilidade de computadores de baixo custo e alta velocidade de processamento, problemas antes considerados difíceis ou insolúveis, puderam ser solucionados através de técnicas como a dos algoritmos genéticos. O crescimento vertiginoso no número de aplicações nesta área é facilmente explicado por duas razões. Primeiro, os algoritmos genéticos são computacionalmente simples, e ainda assim extremamente eficazes como ferramentas de otimização para problemas complexos. Além disto, GAs não são fundamentalmente limitados por hipóteses restritivas acerca do espaço de busca, como continuidade, existência de derivadas, unimodalidade, etc., o que geralmente ocorre nos métodos clássicos de otimização. Podem-se citar como diferenças básicas entre a técnica de otimização com algoritmos genéticos e as técnicas clássicas (geralmente baseadas em gradientes), os seguintes aspectos:

- GAs realizam o procedimento de busca a partir de um conjunto de pontos (população) e não a partir de um único ponto.
- GAs utilizam unicamente informação sobre a função objetivo, e não sobre as suas derivadas ou outra informação adicional.
- GAs utilizam regras de transição probabilísticas.

Os algoritmos genéticos utilizam uma analogia direta com os modelos existentes para a genética e a seleção natural. Na abordagem clássica de algoritmos genéticos, os elementos do domínio de busca são representados por codificação binária através de um vetor de componentes binárias (numa analogia ao modelo da genética, os bits correspondem aos genes e o vetor corresponde ao cromossomo). Uma função de avaliação positiva, relacionada à função objetivo é usada para comparar os elementos dentro da população.

No início do algoritmo, um conjunto de soluções candidatas - *população*, é determinado aleatoriamente dentro do domínio de busca. O tamanho desta população varia de problema para problema, embora haja um certo consenso a respeito do número razoável de indivíduos (entre 70 e 100 elementos). Em cada iteração do algoritmo, uma geração subsequente é criada a partir dos elementos da população corrente. Um subconjunto dos elementos da população é selecionado através de regras específicas, sendo os mesmos recombinados entre si para gerar os novos elementos. O processo de seleção mais comumente usado é conhecido

por “roleta russa”. Este mecanismo seleciona os elementos da população com uma probabilidade proporcional ao valor da respectiva função de avaliação. Em outras palavras, quanto “melhor” um certo elemento (ou seja, quanto maior a sua função de avaliação), maiores são as chances deste indivíduo ser selecionado para as etapas seguintes. Estas etapas são caracterizadas por dois operadores fundamentais, denominados *mutação* e *cruzamento*, definidos para o processo de recombinação das soluções selecionadas.

O operador cruzamento combina dois elementos da população gerando outras duas novas soluções candidatas. Definido o par a ser cruzado, escolhe-se aleatoriamente um ponto de cruzamento sobre os vetores binários dos dois elementos. Em seguida, as porções dos dois vetores, além do ponto de cruzamento, são permutadas gerando-se os dois novos elementos (Figura 4.1). Uma taxa de cruzamento (p_c), indicando qual a porcentagem dos indivíduos selecionados que irá sofrer cruzamento, é utilizada com um valor típico entre 0.6 e 1.

O operador mutação é aplicado individualmente a cada elemento após o processo de

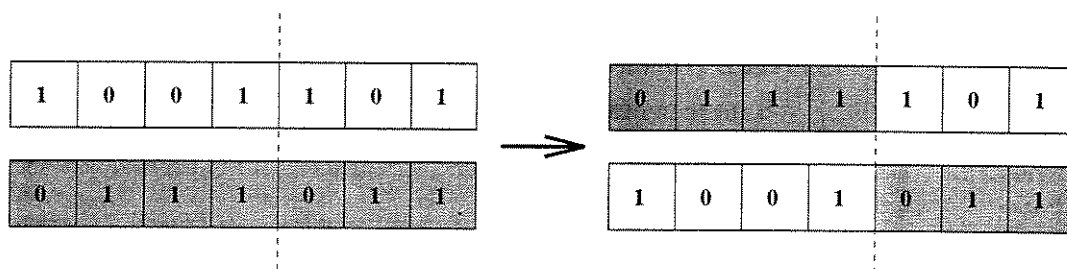


Figura 4.1: Exemplo da aplicação do operador cruzamento.

cruzamento. Este operador altera aleatoriamente uma componente (bit) do vetor solução com uma pequena probabilidade (p_m) de valor típico menor do que 0.1 (Figura 4.2). A escolha do número de elementos da população N , e das probabilidades p_m e p_c pode ser uma tarefa complexa. Além disto, os ajustes destes parâmetros dependem criticamente da natureza do problema considerado. Vários trabalhos têm sido publicados na tentativa de se obter regras objetivas para a definição destes coeficientes.

A nova geração formada percorre então as mesmas etapas (seleção, cruzamento e mutação), na tentativa de se gerar soluções cada vez melhores. O processo se repete até que um certo critério de parada é atingido. Este critério poder ser definido pelo número de iterações (gerações) executadas, a taxa de melhoria na função de avaliação entre diferentes gerações, ou mesmo um valor pré-definido da função objetivo a ser atingido. O esquema geral de um algoritmo genético padrão é dado a seguir.

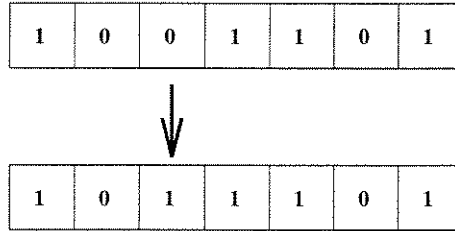


Figura 4.2: Exemplo da aplicação do operador mutação.

Algoritmo Genético Padrão

INICIALIZAÇÃO

- ◇ Iteração inicial $t = 0$;
- ◇ Definir população inicial de indivíduos (aleatória) $P(t)$;
- ◇ Calcular a função de avaliação para os elementos de $P(t)$;

WHILE (condição de término não satisfeita)

- ◇ Incrementar a iteração $t \leftarrow t + 1$;
- ◇ Selecionar uma subpopulação $P'(t)$ de $P(t)$ para a aplicação dos operadores genéticos;
- ◇ Recombinar os elementos de $P'(t)$ com o operador *cruzamento*;
- ◇ Perturbar os elementos de $P'(t)$ através do operador *mutação*;
- ◇ Calcular a função de avaliação para a nova população $P'(t)$;

END_WHILE

4.3 Particularidades dos Algoritmos Genéticos

Discutem-se nesta seção alguns aspectos particulares com relação à teoria, implementação e aplicação dos algoritmos genéticos, segundo o levantamento realizado por Man *et al.* (1996).

4.3.1 Teoria

Um algoritmo genético é um processo a eventos discretos, não-linear e estocástico, e portanto extremamente complexo. A compreensão do mecanismo de trabalho dos algo-

ritmos genéticos ainda é objeto de estudo. Uma das principais teorias elaboradas para a explicação do funcionamento dos GAs é a Teoria dos *Schemata* (Goldberg, 1989).

Holland define um *schema* como sendo um conjunto de vetores (em codificação binária) que possuem uma ou mais características em comum. Um *schema* é construído utilizando-se o símbolo “#” para indicar que o bit correspondente pode ser indiferentemente 0 ou 1 no vetor binário. Por exemplo, o *schema* representado por #1101#0 é dado por {1110110, 1110100, 0110110, 0110100}. Um *schema* que possui r caracteres “#” corresponde portanto a um conjunto de 2^r vetores. Os *schemata* permitem a análise de importantes características de similaridade entre os vetores binários, repassadas de geração para geração através dos processos de seleção, cruzamento e mutação.

Os *schemata* possuem características peculiares. É fácil constatar que alguns são mais específicos do que outros. Por exemplo, o *schema* 011#1## fornece maiores informações de similaridade do que o *schema* 0#####. Além disto, alguns *schemata* “varrem” uma maior parte do comprimento total do vetor binário do que outros. Por exemplo, o *schema* 1#####1# “varre” uma porção maior do vetor do que o *schema* 1#1#####. A fim de se quantificar estes conceitos, algumas definições são colocadas com relação a um dado *schema* “S”. Seja $\zeta(S, t)$ o número de vetores binários que se enquadram no *schema* S na t -ésima iteração de um algoritmo genético. Define-se a ordem do *schema*, denotada por $o(S)$, como o número de posições específicas presentes no mesmo (ou seja, o número de 0’s e 1’s), por exemplo, $o(011#1##) = 4$. O *comprimento definido* de um *schema*, denotado por $\delta(S)$, representa a distância entre a primeira e a última posições específicas do vetor. Por exemplo, o *schema* 011#1## possui $\delta(S) = 4$, pois a primeira posição específica é 1 e a última posição específica é 5. Define-se ainda $f(S, t)$ como sendo o valor médio de todas as funções de avaliação correspondentes a todos os vetores binários que satisfazem o respectivo *schema* na t -ésima iteração do algoritmo, L o comprimento do vetor binário, e $F(t)$ o valor médio das funções de avaliação de todos os elementos da população corrente.

Levando-se em conta os efeitos da seleção proporcional, cruzamento e mutação, uma equação que permite estimar o número de vetores que satisfazem o *schema* S na geração seguinte é dada por:

$$\zeta(S, t + 1) \geq \zeta(S, t) \frac{f(S, t)}{F(t)} \left[1 - p_c \frac{\delta(S)}{L - 1} - o(S)p_m \right] \quad (4.1)$$

onde p_c e p_m são as taxas de cruzamento e mutação, respectivamente.

Esta relação mostra que uma certa classe de *schemata* apresenta uma taxa de crescimento exponencial. Esta classe corresponde aos *schemata* com desempenho acima da média ($f(S, t) \geq F(t)$), de pequeno *comprimento definido* $\delta(S)$ e de pequena ordem $o(S)$. Este resultado é apresentado no conhecido enunciado do Teorema dos *Schemata*:

4.1 Teorema dos *Schemata* (Goldberg, 1989):

Os schemata acima da média $F(t)$, de pequeno comprimento definido, e de baixa ordem recebem cópias exponencialmente crescentes nas gerações subseqüentes de um algoritmo genético.

Ou seja, se o valor médio de um dado *schema* é tal que $f(S, t) > F(t)$ (*schema* acima da média), e este é de baixa ordem $o(S)$ e de pequeno *comprimento definido* $\delta(S)$, então o termo que multiplica $\zeta(S, t)$ na equação (4.1) pode assumir um valor maior do que 1, o que mostra que o número de vetores binários satisfazendo o dado *schema* aumenta exponencialmente de geração para geração .

Apesar de ser um avanço na tentativa de se explicar o funcionamento dos algoritmos genéticos, esta formulação apresenta limitações que restringem o seu uso. Uma delas é o fato de que o valor de $f(S, t)$ pode variar bastante de uma população para outra, já que um *schema* pode interferir com outro. Portanto, o uso de uma função de avaliação média só é relevante para a primeira população, após o que a amostra de vetores se torna polarizada tornando impossível a previsão da evolução do comportamento do processo.

4.3.2 Representação

A codificação binária para os vetores é a abordagem mais clássica utilizada na representação dos elementos da população. Uma abordagem mais recente (Michalewicz, 1994ab) propõe a representação direta em ponto flutuante, introduzida especialmente para o tratamento de problemas com parâmetros reais. A Seção 4.4 trata da abordagem de algoritmos genéticos de Michalewicz (1994ab), que foi a abordagem adotada neste trabalho. Alguns pesquisadores apontam que a representação em ponto flutuante apresenta melhores características do ponto de vista do processamento computacional e da consistência (resultados semelhantes para diferentes seqüências de otimização simuladas), embora ainda haja alguma controvérsia a respeito de qual seria a forma ideal de representação.

4.3.3 Função Objetivo e Função de Avaliação

A função objetivo é a função definida no problema de otimização e avaliada para cada vetor binário no domínio da população. Devido à faixa de variação assumida pela função objetivo de problema para problema, define-se um escalonamento da mesma a fim de se manter uma melhor uniformidade. A função escalonada é chamada função de avaliação. O escalonamento mais comum é o linear, onde a função de avaliação f_i é obtida a partir da

função objetivo O_i pela seguinte relação linear:

$$f_i = aO_i + b, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

onde N é o número de elementos da população, e a e b são os parâmetros de escalonamento, escolhidos de tal forma que o valor máximo da função escalonada seja um certo múltiplo de seu valor mínimo (geralmente entre 1.2 e 2) e além disto f_i assumam sempre valores positivos. Uma outra finalidade importante do escalonamento é evitar que os melhores indivíduos recebam um número excessivamente grande de cópias na etapa de seleção (devido a um grande valor absoluto da função objetivo), levando a uma convergência prematura do algoritmo¹.

4.3.4 Mecanismos de Seleção

O mecanismo de seleção representa uma etapa extremamente importante dentro do algoritmo genético. A seleção é usada para se determinar o número de cópias de um determinado indivíduo que serão usadas nas etapas de cruzamento e mutação. Existem alguns critérios para se avaliar o desempenho de um mecanismo de seleção, dentre os quais destacam-se a polarização e o espalhamento. A polarização é definida como sendo a diferença absoluta entre a probabilidade de seleção prevista e a probabilidade de seleção efetiva de um indivíduo. O espalhamento é a variação no número possível de cópias que podem ser obtidas para um dado indivíduo. O mecanismo de seleção conhecido por “roleta russa” é um procedimento não polarizado, mas que apresenta um espalhamento que pode ser bem elevado. Existem outros mecanismos de seleção que podem ser usados para se obter menor espalhamento, conforme Man *et al.* (1996). A definição de um mecanismo de seleção coerente é fundamental para se evitar problemas de convergência prematura do algoritmo.

4.3.5 Taxas de Cruzamento e Mutação

A escolha das taxas de probabilidade de cruzamento p_c e mutação p_m é uma outra área bastante controversa, tanto no âmbito analítico como empírico. O aumento da taxa de cruzamento provoca um aumento na recombinação dos blocos construtivos, mas ao mesmo tempo, eleva também a quebra (separação das componentes do vetor) de bons indivíduos. Além disto, um aumento muito grande na taxa de mutação provoca a transformação da busca genética em uma busca puramente estocástica. Alguns métodos sugerem (Man *et al.*, 1996) taxas de probabilidade variáveis ao longo das gerações, como por exemplo, uma

¹Por convergência prematura entende-se que o algoritmo não apresenta melhoria na função otimizada embora esta ainda possa ser melhorada.

variação linear decrescente da taxa de cruzamento e crescente para a taxa de mutação ao longo das iterações.

4.3.6 Reinservação

Após a formação dos novos indivíduos, através da aplicação dos operadores cruzamento e mutação, várias estratégias podem ser adotadas na substituição da geração antiga pela nova.

No caso da substituição de geração, todos os elementos da população corrente são substituídos pelos novos indivíduos gerados. Como o melhor indivíduo da população pode falhar na sua reprodução para a próxima geração, a substituição de geração é usualmente combinada com a estratégia conhecida por *estratégia elitista* (Goldberg, 1989), na qual o melhor indivíduo é automaticamente copiado para a geração seguinte. A estratégia elitista pode propiciar a polarização da população por um “super indivíduo”, mas de maneira geral os resultados apontam um melhor desempenho desta técnica.

4.3.7 Paralelismo em Algoritmos Genéticos

Uma das maiores críticas aos algoritmos genéticos se refere ao tempo computacional consumido, que pode ser bastante elevado. Este esforço computacional é compreensível considerando que o algoritmo genético é um processo estocástico, discreto, não-linear e de busca multidimensional.

Considerando que os GAs já possuem intrinsecamente uma estrutura de paralelismo, a construção de uma arquitetura de processamento paralelo torna-se uma consequência direta. Através do processamento paralelo, a potencialidade dos algoritmos genéticos para aplicações práticas, como controle e processamento de sinais, pode ser eficientemente explorada. Várias abordagens são propostas para se tratar o problema do paralelismo em algoritmos genéticos. Estes métodos são classificados em paralelismo global, de migração e de difusão. Estas categorias refletem as diferentes formas em que o paralelismo é explorado no algoritmo genético, bem como a natureza da estrutura da população e os mecanismos de recombinação utilizados. Para maiores detalhes sugere-se consultar Man *et al.* (1996).

4.3.8 Limitações dos Algoritmos Genéticos

Nenhuma garantia pode ser dada para a obtenção do ponto de ótimo global com o uso de algoritmos genéticos, embora esta seja a tendência observada. Esta possibilidade é reduzida se há perda na diversidade da população. Quando o algoritmo encontra um ótimo local, a população pode convergir para este ponto e uma convergência prematura pode ocorrer. Neste caso, a solução ótima global só pode ser obtida pela exploração da mutação nas operações genéticas. Tal fenômeno é conhecido como *polarização*, e pode facilmente ocorrer quando a população utilizada pelo algoritmo é muito pequena. Várias técnicas são propostas para se limitar o efeito da polarização e manter a diversidade da população, entre elas citam-se a pré-seleção, o aglomeramento e a avaliação compartilhada. Maiores detalhes podem ser obtidos em Man *et al.* (1996).

Um outro ponto problemático nos algoritmos genéticos refere-se às aplicações em tempo real. Assim como ocorre em outras técnicas de inteligência artificial, os algoritmos genéticos não são adequados para análises que requerem um tempo de resposta garantido. Além disto, a variância do tempo de resposta para um GA é muito maior do que para os métodos convencionais. Estes aspectos desfavoráveis limitam o uso dos algoritmos genéticos em tempo real.

4.3.9 Ligações com Redes Neurais e Lógica Nebulosa

O uso de redes neurais para aplicações industriais já é largamente aceito, principalmente nas áreas de telecomunicações, reconhecimento de padrões, reconhecimento de voz, controle de processos, etc. A combinação de algoritmos genéticos e redes neurais pode ser dividida em duas categorias principais: integração de suporte e integração de colaboração. Na integração de suporte, os algoritmos genéticos podem participar da rede neural nas seguintes etapas:

- Seleção das características ou transformação do espaço de características usados por um classificador da rede neural.
- Seleção das regras de aprendizado ou dos parâmetros que controlam o aprendizado na rede neural.
- análise da rede neural.

Na integração de colaboração, os algoritmos genéticos podem ser usados no ajuste dos pesos e também na topologia da rede.

No caso da lógica nebulosa, os algoritmos genéticos são usados para otimizar tanto a função de pertinência nebulosa como também as próprias regras nebulosas. Aplicações de controladores nebulosos otimizados por este método são encontradas em controle de pH e sistemas de bomba d'água (Man *et al.* 1996).

4.3.10 Aplicações

A aplicação dos algoritmos genéticos nas mais diversas áreas, tanto acadêmicas como industriais, mostra um crescimento exponencial nos últimos anos. Algumas das áreas que podem ser citadas são: reconhecimento de padrões, reconhecimento de voz, projetos de circuitos integrados VLSI (“layout”), processamento de sinais (otimização de parâmetros e ordem de filtros IIR), sistemas de classificação, robótica, otimização de estruturas flexíveis, e várias outras. No campo da engenharia de controle, os algoritmos genéticos podem ser utilizados em várias metodologias, especialmente naquelas que exigem a otimização de determinados parâmetros a fim de se obter um desempenho desejado.

A aplicação de algoritmos genéticos à identificação de sistemas, tanto discretos como contínuos (Fleming e Fonseca, 1993), se dá na minimização da função de erro para um conjunto de dados de entrada e saída. Algumas abordagens empregam a otimização com algoritmos genéticos na identificação direta de pólos e zeros, ao invés da identificação dos coeficientes da função de transferência (Man *et al.* 1996).

A otimização dos parâmetros de um controlador PID também já foi realizada com o uso dos algoritmos genéticos, com aplicações bem sucedidas em sistemas de controle de pH e trocadores de calor (Man *et al.* 1996).

No caso da otimização em H_∞ , os algoritmos genéticos tem sido utilizados para se determinar as estruturas ótimas para pré e pós compensadores a fim de que os valores singulares da planta escalonada satisfaçam determinados critérios. Algumas das aplicações desta técnica incluem o controle de veículos de levitação magnética e controle de colunas de destilação. A abordagem de controle por modos deslizantes é uma outra técnica de controle que tem sido otimizada com o uso dos algoritmos genéticos (Man *et al.* 1996).

4.4 Abordagem de Algoritmos Genéticos de Michalewicz

Esta seção discute a abordagem de algoritmos genéticos desenvolvida por Michalewicz (1994ab), que é utilizada neste trabalho. Duas características principais distinguem esta abordagem das demais:

- Representação dos elementos em ponto flutuante ao invés de codificação binária.
- Tratamento do problema de otimização restrita, para o caso de restrições convexas, sem o uso de funções de penalidade.

A representação binária tradicional utilizada em algoritmos genéticos apresenta algumas deficiências quando aplicada a problemas de otimização multidimensional de alta precisão. Por exemplo, considerando-se 100 variáveis com domínio no intervalo $[-500,500]$, e com uma precisão requerida de 6 dígitos após o ponto decimal, o comprimento do vetor binário necessário é de 3000 bits, o que torna o problema nesta representação praticamente inviável. Michalewicz (1994ab) utiliza a representação direta em ponto flutuante com definições especiais para as operações de cruzamento e mutação, que são realizadas sobre as componentes cartesianas do vetor solução. Estes operadores são discutidos em detalhes no final desta seção.

Várias abordagens de algoritmos genéticos ignoram o problema de otimização restrita, o que limita bastante as aplicações práticas. Os domínios de busca normalmente considerados pelos algoritmos genéticos são do tipo $\mathcal{D} = \prod_{k=1}^n [l_k, r_k]$, ou seja, cada componente do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é restrita ao intervalo $[l_k, r_k]$, $k = 1, \dots, n$.

A maioria das abordagens de algoritmos genéticos que consideram o problema restrito utiliza o conceito de *funções de penalidade*. As funções de penalidade são funções incorporadas à função objetivo, com o objetivo de “penalizar” as soluções inactíveis para o problema. Uma das principais dificuldades associadas ao uso das funções de penalidade é o esforço computacional que pode ser excessivamente grande.

No caso em que o conjunto de restrições é definido por um conjunto convexo, Michalewicz (1994ab) propõe uma classe de algoritmos genéticos que dispensam o uso das funções de penalidade. Considere-se o seguinte problema de otimização restrita:

$$\text{otimizar } f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.3)$$

onde \mathcal{F} é o espaço de busca factível definido por um conjunto de restrições convexas. A abordagem considera inicialmente uma população inicial factível (ou um elemento factível, a partir do qual pode-se gerar toda a população inicial). A estratégia principal é a definição de operadores especiais (mutação e cruzamento) que garantem que os novos elementos gerados também são elementos factíveis. Michalewicz (1994ab) define um conjunto de 6 operadores (3 de mutação e 3 de cruzamento) que são aplicados sobre as componentes cartesianas dos vetores representados em ponto flutuante. Desta forma o algoritmo procura, iterativamente, pela solução ótima, recombina as soluções candidatas através de operações que garantem a factibilidade de toda a população. Descreve-se a seguir, cada um dos operadores em detalhe.

Os três primeiros são operadores de mutação que operam sobre um único elemento (vetor), enquanto que os outros três são operadores de cruzamento que operam sobre dois elementos.

4.4.1 Mutação Uniforme

Considere-se um vetor solução candidata $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \in \mathcal{F}$. Define-se o intervalo $[left(k), right(k)]$ para a componente x_k do vetor \mathbf{x} , como sendo o conjunto de valores que a mesma pode assumir, mantendo-se as demais componentes fixas, de forma a ainda manter a factibilidade do vetor solução. Ou seja, em outras palavras:

$$y \in [left(k), right(k)] \iff (x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{F} \quad (4.4)$$

onde x_i , $i = 1, \dots, n$; $i \neq k$ permanecem constantes. No caso de restrições lineares e quadráticas, que são os tipos de restrições consideradas neste trabalho, estes intervalos podem ser eficientemente computados.

O operador mutação uniforme seleciona aleatoriamente uma componente $k = 1, \dots, n$ do vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ e produz o vetor $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n)$ onde x'_k é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[left(k), right(k)]$.

Este operador possui um papel muito importante na fase inicial do processo iterativo, onde as soluções candidatas são determinadas livremente sobre o espaço de busca. Na fase final do algoritmo, o operador permite um possível deslocamento de um ótimo local na procura de uma melhor solução. O operador também é utilizado quando é necessário gerar uma população inicial a partir de um único elemento factível, gerando-se soluções candidatas diversificadas.

4.4.2 Mutação de Contorno

Este operador gera elementos sobre o contorno do domínio de busca \mathcal{F} . Da mesma maneira que na mutação uniforme, seleciona-se aleatoriamente uma componente $k = 1, \dots, n$ do vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$. O novo vetor \mathbf{x}' é dado então por:

$$\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n) \quad (4.5)$$

onde $x'_k = left(k)$ ou $x'_k = right(k)$ com igual probabilidade para ambas.

Este operador é construído para problemas de otimização nos quais a solução ótima se encontra nas proximidades do contorno do espaço de busca.

4.4.3 Mutação Não-Uniforme

Este operador é um dos responsáveis pelas boas propriedades de ajuste fino desta técnica de algoritmos genéticos. Um problema comum no algoritmo genético clássico é o grau de refinamento da solução obtida. Muitas vezes o algoritmo chega na vizinhança da solução ótima mas dificilmente se aproxima dela. O operador mutação não-uniforme permite um melhor refinamento da solução através de uma estratégia de mutação localizada. À medida que as iterações do algoritmo evoluem, as mutações vão ocorrendo com maior probabilidade nas vizinhanças do elemento mutado. A componente x'_k do vetor \mathbf{x}' que sofre esta mutação é dada por:

$$x'_k = \begin{cases} x_k + \Delta(t, right(k) - x_k) & \text{se um dado n}^\circ \text{ aleatório é igual a 0} \\ x_k - \Delta(t, x_k - left(k)) & \text{se um dado n}^\circ \text{ aleatório é igual a 1} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde

$$\Delta(t, y) = yr(1 - \frac{t}{T})^b \quad (4.7)$$

e r é um número real aleatório entre 0 e 1, T é o número máximo de gerações definido, e b é um parâmetro de não-uniformidade. A função $\Delta(t, y)$ retorna um valor no intervalo $[0, y]$ tal que a probabilidade de $\Delta(t, y)$ se aproximar de 0 aumenta à medida que o número de gerações t evolui. Esta propriedade faz com que o operador procure numa distribuição uniforme do espaço de busca na etapa inicial, e numa distribuição mais localizada nos estágios posteriores.

4.4.4 Cruzamento Aritmético

O operador cruzamento combina dois vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 gerando dois novos elementos \mathbf{x}'_1 e \mathbf{x}'_2 , através da combinação convexa entre os mesmos:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = ax_1 + (1 - a)x_2 \\ \mathbf{x}'_2 = (1 - a)x_1 + ax_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

onde a é uma variável aleatória no intervalo $[0, 1]$, o que garante que as novas soluções geradas pertencem ao domínio convexo de busca \mathcal{F} . Há evidências de que o operador cruzamento aritmético proporciona melhores características de consistência ao algoritmo, ou seja, um menor desvio padrão da solução ótima para diferentes sequências de simulação implementadas.

4.4.5 Cruzamento Simples

O cruzamento simples é semelhante ao cruzamento clássico realizado na tradicional representação binária. Sejam os vetores $\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{x}_2 = (y_1, \dots, y_n)$, e seja uma

posição k escolhida aleatoriamente na sequência das componentes destes vetores. Os vetores \mathbf{x}'_1 e \mathbf{x}'_2 são definidos por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = (x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \\ \mathbf{x}'_2 = (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4.9)$$

Este operador pode produzir elementos \mathbf{x}'_1 e \mathbf{x}'_2 fora do domínio de busca \mathcal{F} . Quando ocorre tal situação, uma propriedade particular de conjuntos convexos é utilizada para se modificar os vetores obtidos. Esta propriedade garante que existe $a \in [0, 1]$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= (x_1, \dots, x_k, y_{k+1}a + x_{k+1}(1-a), \dots, y_na + x_n(1-a)) \\ \text{e} & \\ \mathbf{x}'_2 &= (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}a + y_{k+1}(1-a), \dots, x_na + y_n(1-a)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

são elementos factíveis. O problema se resume então em encontrar o maior valor de a que pode ser usado na relação acima de forma a gerar dois novos elementos pertencentes ao domínio convexo dado.

4.4.6 Cruzamento Heurístico

Este operador é um dos mais poderosos deste conjunto de operadores especiais, possuindo particularidades bem distintas dos demais. Entre as características que o diferenciam dos demais operadores de cruzamento cita-se:

- Utilização dos valores da função objetivo na determinação da direção de busca.
- Geração de apenas 1 elemento a partir da combinação de 2 outros.
- O operador pode eventualmente não produzir nenhum elemento.

O operador gera um novo elemento \mathbf{x}_3 a partir de dois elementos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 através da seguinte regra:

$$\mathbf{x}_3 = r(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_2 \quad (4.11)$$

onde r é um número aleatório entre 0 e 1, e \mathbf{x}_2 não é pior do que \mathbf{x}_1 , ou seja, $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1)$ para problemas de maximização e $f(\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1)$ para problemas de minimização. Eventualmente, o novo elemento gerado \mathbf{x}_3 pode não ser uma solução factível. Neste caso, o parâmetro r é dividido por 2 e um novo elemento é gerado, e assim sucessivamente. Se após um certo número de tentativas (na implementação realizada determinou-se um número de 3 tentativas), nenhuma solução factível for encontrada, opta-se por um dos outros dois

operadores de cruzamento (aritmético ou simples) para a determinação dos novos elementos.

O cruzamento heurístico contribui para a aceleração do processo de busca, já que utiliza uma informação direcional importante. Além disto permite uma melhor precisão da solução encontrada com excelentes características de ajuste fino.

4.5 Parâmetros Utilizados no Algoritmo Implementado

O algoritmo genético implementado neste trabalho utilizou a abordagem de Michalewicz (1994ab), por permitir o tratamento de problemas de otimização com restrições convexas, que é o caso aqui encontrado (restrições lineares para o caso da alocação dos pólos em regiões conexas, e restrições quadráticas para o caso da alocação dos pólos em regiões circulares e disjuntas). Além disto, um processamento mais acelerado no processo de busca e as boas características de ajuste fino da solução ótima são outras justificativas para a utilização desta abordagem.

Na implementação do algoritmo, utilizou-se a estratégia elitista que preserva automaticamente o melhor elemento para a próxima geração, com uma população definida de 70 indivíduos. Foram aplicados todos os operadores genéticos especiais de Michalewicz (1994ab), a menos do cruzamento simples. O processo de seleção utilizado foi a “roleta russa”, e todos os elementos selecionados recebiam a aplicação do operador cruzamento, ou seja, uma taxa de cruzamento igual a $p_c = 1$. As taxas de mutação utilizadas foram de $p_m = 0.0588$ para as mutações uniforme e não-uniforme e $p_m = 0.0286$ para a mutação de contorno, ou seja, as mutações uniforme e não-uniforme provocavam alteração de 1 em cada 17 componentes dos vetores de soluções candidatas, e de 1 em cada 35 componentes para o caso da mutação de contorno. O parâmetro b utilizado na mutação não-uniforme foi igual a $b = 2$, sendo que o número total de gerações T em (4.7) variou de problema para problema (nos casos mais simples, com controladores de ordem baixa, geralmente $300 < T < 500$ era razoável, enquanto que para os casos mais complexos o número médio de iterações foi de 5000).

A tabela a seguir apresenta um resumo dos parâmetros utilizados no algoritmo genético implementado.

Algoritmo Genético**INICIALIZAÇÃO**

- ◇ Iteração inicial $t = 0$;
- ◇ Definir população inicial de indivíduos (aleatória) $P(t)$;
- ◇ Calcular a função de avaliação para os elementos de $P(t)$;

WHILE ($t < T$)

- ◇ Incrementar a iteração $t \leftarrow t + 1$;
- ◇ Selecionar uma subpopulação $P'(t)$ de $P(t)$ para a aplicação dos operadores genéticos;
- ◇ Recombinar os elementos de $P'(t)$ com os operadores *cruzamento*;
- ◇ Perturbar os elementos de $P'(t)$ através dos operadores *mutação*;
- ◇ Calcular a função de avaliação para a nova população $P'(t)$;

END_WHILE

População	$N = 70$
Seleção	“Roleta Russa”
Reinserção	toda a população (+ elitista)
Operadores de Mutação	Uniforme, Não-Uniforme, Contorno
Operadores de Cruzamento	Aritmético, Heurístico
Probabilidades de mutação (Uniforme, Não-Uniforme)	$p_m = 0.0588$
Probabilidades de mutação (Contorno)	$p_m = 0.0286$
Probabilidade de cruzamento	$p_c = 1$
Parâmetro da Mutação Não-Uniforme	$b = 2$

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados no algoritmo genético.

Capítulo 5

Síntese de Controladores - Regiões de Alocação Conexas

5.1 Introdução

Considera-se neste capítulo o caso em que as regiões de alocação para os pólos do sistema em malha fechada são regiões conexas. Deriva-se para esta situação um domínio de busca politópico no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto dos controladores com medida de robustez acima de um dado valor pré-definido m_0 . Uma rotina de otimização é proposta, onde um Algoritmo Genético maximiza a função medida de robustez $m(x)$ dentro da região politópica determinada. Um outro importante resultado neste capítulo relaciona a medida de robustez ótima de um controlador à sua ordem. Demonstra-se, através de um teorema, que o ótimo $m^* = \max m(x)$ é uma função não decrescente da ordem de x , ou seja, aumentando-se a ordem do controlador, aumenta-se as possibilidades de se conseguir um controlador mais robusto.

O capítulo é dividido em duas partes, sendo que a primeira trata o caso da estabilidade robusta somente, e a segunda aborda o problema conjunto de robustez na estabilidade e no desempenho \mathcal{H}_2 . Neste segundo caso, propõe-se um índice de desempenho do controlador correspondendo à pior norma \mathcal{H}_2 do sistema para os vértices da região de incerteza paramétrica, o que geralmente corresponde à pior norma \mathcal{H}_2 considerando-se todas as incertezas do processo (De Paiva, 1993ab). Utilizando a mesma região politópica derivada na primeira seção, um Algoritmo Genético procura pelo controlador que minimiza o índice de desempenho \mathcal{H}_2 , considerando ainda a restrição de D -estabilidade robusta. Ao longo do capítulo, exemplos numéricos ilustram os resultados obtidos. Os resultados desenvolvidos neste capítulo encontram-se também presentes em De Paiva *et al.* (1996ab) e De Paiva *et al.*

(1997b).

5.2 Estabilidade Robusta

Os algoritmos genéticos constituem uma classe de algoritmos de busca estocástica. Seu desempenho pode ser consideravelmente melhorado, se for possível garantir que a solução procurada se encontra numa região delimitada e reduzida. Um dos resultados mais importantes deste capítulo refere-se à determinação de regiões politópicas, no espaço de parâmetros do controlador, contendo o conjunto de todos os controladores com medida de robustez maior que um dado valor m_0 . Em outras palavras, constrói-se um politopo $\mathcal{X}_{m_0} \supset \{x \mid m(x) \geq m_0\}$ a partir de um conjunto de condições necessárias propostas aqui e de propriedades geométricas dos domínios de estabilidade apresentadas em Fam e Meditch (1978). Dentro deste domínio linear limitado \mathcal{X}_{m_0} , a rotina de otimização baseada em GA procura, com maior eficiência, o controlador que maximiza a função medida de robustez $m(x)$. Como já foi dito anteriormente, um controlador será considerado satisfatório para as incertezas paramétricas definidas no processo, se a sua medida de robustez satisfizer $m(x) \geq 1$.

A seguir, apresenta-se um sumário dos resultados de Fam e Meditch (1978), que fornecem uma condição necessária para que um polinômio mônico apresente todas as suas raízes dentro de um dado círculo no plano complexo. Este trabalho foi originalmente desenvolvido como uma condição para a estabilidade de sistemas em tempo discreto, mas o resultado se aplica igualmente a qualquer círculo centrado no eixo real do plano complexo, e portanto pode ser prontamente estendido para o caso contínuo. Utiliza-se aqui a notação \mathbf{x} e \mathbf{t} para os vetores com os mesmos componentes de x e t , exceto pelo primeiro elemento, ou seja:

$$\begin{aligned} t^T &= [1 \mid \mathbf{t}^T] \\ x^T &= [1 \mid \mathbf{x}^T] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Seja C um círculo de raio r e centro c sobre o eixo real do plano complexo. Seja T o conjunto de todos os vetores $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_{ni}]^T \in \mathbb{R}^{ni}$ correspondendo aos coeficientes dos polinômios mônicos com raízes dentro do círculo C . Sabe-se (Ackermann, 1980, 1993) que o contorno ∂T de T é composto de 3 hipersuperfícies. As primeiras duas são hiperplanos em \mathbb{R}^{ni} correspondendo aos polinômios com raízes reais $\{c - r\}$ e $\{c + r\}$, respectivamente. A terceira superfície é gerada por polinômios que apresentam ao menos um par de raízes complexas conjugadas sobre o contorno ∂C de C . Com relação a T e C definidos acima, pode-se enunciar o seguinte teorema:

5.1 Teorema (Fam e Meditch, 1978): A casca convexa de \mathcal{T} é um poliedro P_t cujos vértices correspondem aos $(nt+1)$ polinômios com todas as suas raízes no conjunto $\{c-r, c+r\}$ (considerando-se os coeficientes dos polinômios como pontos em \mathbb{R}^{nt}).

Para exemplificar este teorema, considerando-se polinômios de segunda ordem e um círculo C definido por $c = 0.5$ e $r = 0.5$ (Figura 5.1), obtém-se 3 polinômios $\{z^2 - 2z + 1; z^2 - z; z^2\}$ que definem o triângulo P_t da mesma figura como a casca convexa de \mathcal{T} . O primeiro polinômio ($z^2 - 2z + 1$) possui 2 raízes em $z = 1$, o segundo ($z^2 - z$) possui uma raiz em $z = 0$ e outra em $z = 1$, e o terceiro polinômio possui 2 raízes em $z = 0$. Ou seja, todo polinômio de segunda ordem com raízes dentro deste círculo C deve apresentar, necessariamente, os seus coeficientes dentro do referido triângulo P_t . Portanto, a pertinência dos coeficientes de um dado polinômio de grau nt à região poliédrica P_t é uma condição necessária de sua C -estabilidade.

Considerando o problema de alocação robusta, a idéia é tomar um círculo C con-

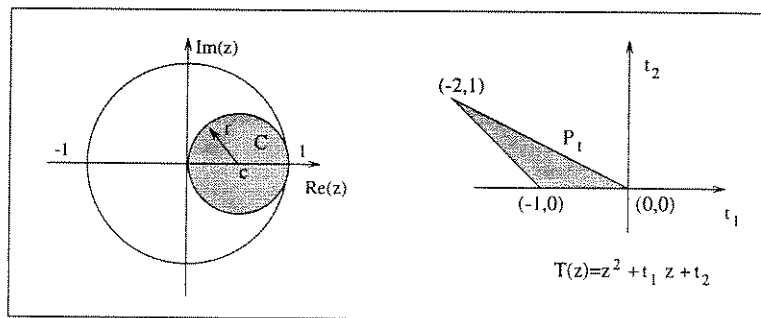


Figura 5.1: Ilustração do Teorema 5.1 para um sistema de 2a. ordem.

tendo a região de alocação conexa D ($C \supset D$) e aplicando o Teorema 5.1 derivar o poliedro P_t que contém o domínio da D -estabilidade em t . A partir daí, utilizando a linearidade entre polinômio característico e controlador (eq. 2.14), deriva-se um conjunto de restrições lineares no espaço de parâmetros do controlador como condição necessária da D -estabilidade robusta. A Figura 5.2 mostra exemplos de círculos que contêm regiões de alocação para os casos discreto e contínuo. Como discutido no Capítulo 1, as regiões de alocação são determinadas a partir de especificações da resposta transitória como amortecimento e tempo de acomodação (Ogata, 1987; Ackermann, 1985).

Antes de passar para os resultados principais desta seção, apresentam-se algumas definições preliminares. Retomando a definição de família de regiões hipercúbicas $\Pi^*(m_0)$, $m_0 \in \mathbb{R}^+$ parametrizadas por m_0 (eq. (2.35)), define-se $q_{(j)}^*$, $j = 1, 2, \dots, 2^{nq}$ como a representação para os 2^{nq} vetores q^* correspondendo aos vértices de um dado hipercubo $\Pi^*(m_0)$.

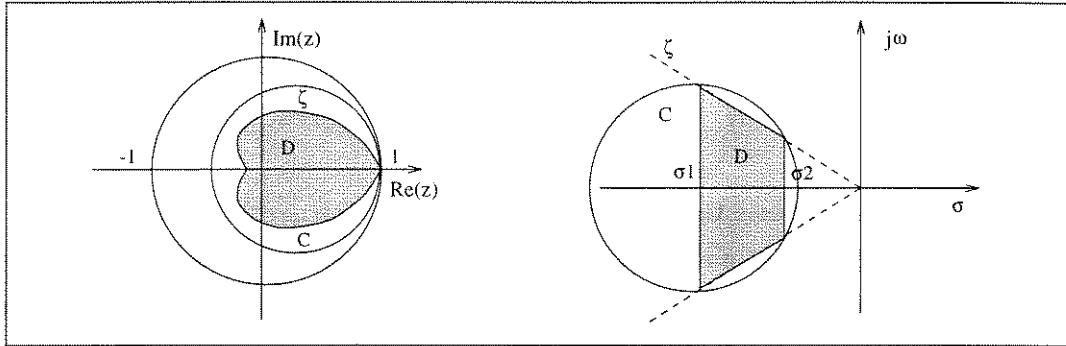


Figura 5.2: Exemplos de regiões de alocação para sistemas contínuos e discretos.

Seja $p_{(j)}$ a notação para os vetores de parâmetros do processo correspondentes aos vértices $q_{(j)}^*$ deste hipercubo, segundo a equação (2.34), ou seja, $p_{(j)} = S^*[1 q^{*T}]^T$. Seja $t(x, p)$ a notação para o polinômio característico que destaca a sua dependência nos parâmetros do controlador e da planta, representados respectivamente por x e p . Finalmente, seja o conjunto \mathcal{X}_{m_0} definido por $\mathcal{X}_{m_0} = \{x \in \mathbb{R}^{nh+ng+1} \mid t(x, p_{(j)}) \in P_t ; j = 1, \dots, 2^{nq}\}$.

5.2 Proposição: *Se a medida de robustez de um controlador $x \in \mathcal{W}$ satisfaz $m(x) \geq m_0 > 0$, então x pertence ao conjunto \mathcal{X}_{m_0} definido acima.*

Prova: Por definição, tem-se que, se um controlador x possui uma medida de robustez $m(x) \geq m_0 > 0$, então este controlador deve alocar os pólos de malha fechada para (pelo menos) todos os parâmetros incertos correspondentes a $q^* \in \Pi^*(m_0)$ na região de alocação dada D . Portanto, uma condição necessária para x apresentar uma medida de robustez $m(x) \geq m_0$ é que os pólos de malha fechada para os 2^{nq} polinômios $t(x, p_{(j)})$, $j = 1, \dots, 2^{nq}$ estejam na região D . Considerando-se o Teorema 5.1, pode-se reescrever esta condição da seguinte forma. Uma condição necessária para um controlador x apresentar $m(x) \geq m_0$ é que todos os vetores t originados da combinação de x com os vetores vértices do processo $p_{(j)}$ estejam no poliedro P_t , já que as suas raízes devem estar na região $D \subset C$. \square

A seguir, apresenta-se a descrição explícita do conjunto \mathcal{X}_{m_0} para uma dada ordem do controlador nh, ng e uma certa especificação m_0 .

A região poliédrica P_t definida no Teorema 5.1 para um dado grau nt do polinômio característico e um certo círculo C (de raio r e centro c) no plano complexo, pode ser descrita por:

$$P_t = \{t \in \mathbb{R}^{nt} \mid At \leq B\} \quad (5.2)$$

onde a matriz $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times nt}$ e o vetor $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(nt+1)}$ são obtidos da seguinte forma. Inicialmente, determina-se o conjunto dos $(nt+1)$ vértices do poliedro P_t no espaço \mathbb{R}^{nt} , que correspondem aos polinômios com raízes no conjunto $\{c-r, c+r\}$, segundo o Teorema 5.1. Em seguida, determina-se o conjunto dos $(nt+1)$ hiperplanos resultantes de todas as possíveis combinações de nt dos $(nt+1)$ vértices. A intersecção dos semi-espacos gerados por estes hiperplanos fornece o conjunto de desigualdades lineares da equação (5.2).

Considere os parâmetros vértices do processo obtidos pela relação (2.34):

$$p_{(j)} = S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q_{(j)}^* \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

onde $q_{(j)}^*, j = 1, \dots, 2^{nq}$ são os vértices do hiper-cubo de incerteza paramétrica normalizada $\Pi^*(m_0)$.

Seja a matriz $M(p)$, definida na equação (2.16), sendo que p assume os valores dos parâmetros vértices, particionada da seguinte forma:

$$M(p_{(j)}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ n_{(j)} & N_{(j)} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

onde $n_{(j)} \in \mathbb{R}^{nt}$, e $N_{(j)} \in \mathbb{R}^{nt \times (nh+ng+1)}$.

Denotando por $t_{(j)}$ o polinômio característico associado a $p_{(j)}$ para um dado controlador x , ou seja $t_{(j)} = M(p_{(j)})x$, obtém-se pela partição acima:

$$\mathbf{t}_{(j)} = n_{(j)} + N_{(j)}\mathbf{x} \quad (5.5)$$

que substituído no conjunto de restrições que define o poliedro P_t (equação 5.2), fornece:

$$\mathcal{A}(n_{(j)} + N_{(j)}\mathbf{x}) \leq \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A}N_{(j)})\mathbf{x} \leq (\mathcal{B} - \mathcal{A}n_{(j)}). \quad (5.6)$$

Assim, obtém-se um conjunto de $(nt+1)$ restrições lineares no espaço de parâmetros do controlador para o j -ésimo vértice de $\Pi^*(m_0)$. Procedendo da mesma forma para os demais vértices, chega-se à descrição final da região politópica \mathcal{X}_{m_0} como segue:

$$\mathcal{X}_{m_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nh+ng+1} \mid A(m_0)\mathbf{x} \leq b(m_0)\} \quad (5.7)$$

onde $A(m_0) \in \mathbb{R}^{2^{nq}(nt+1) \times (nh+ng+1)}$ e $b(m_0) \in \mathbb{R}^{2^{nq}(nt+1)}$ são dados por

$$A(m_0) = \begin{bmatrix} A_{(1)}(m_0) \\ \vdots \\ A_{(j)}(m_0) \\ \vdots \\ A_{(2^{nq})}(m_0) \end{bmatrix} ; b(m_0) = \begin{bmatrix} b_{(1)}(m_0) \\ \vdots \\ b_{(j)}(m_0) \\ \vdots \\ b_{(2^{nq})}(m_0) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

e

$$\begin{cases} A_{(j)}(m_0) = \mathcal{A}N_{(j)} \\ b_{(j)}(m_0) = \mathcal{B} - \mathcal{A}n_{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{ng}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Resumindo, pode-se dizer que para uma certa ordem do controlador nh , ng e uma certa especificação m_0 representando o “tamanho” da região de incerteza normalizada, um controlador x irá apresentar uma medida de robustez $m(x) \geq m_0$ somente se $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{m_0}$ (condição necessária). Portanto, esta região politópica limita o espaço de parâmetros do controlador tal que $m(x) \geq m_0$ e pode ser usada para definir o domínio de busca de qualquer algoritmo que otimize a função medida de robustez.

Considerando que o objetivo final é a determinação do controlador mais robusto $\{\max m(x)\}$, poder-se-ia pensar em usar uma forte restrição no domínio de busca, ou seja, um alto valor para m_0 . Quanto maior a especificação m_0 , mais restritivo é o domínio de busca politópico \mathcal{X}_{m_0} e, possivelmente, mais eficiente é a busca do Algoritmo Genético. Infelizmente, como se trata de condições *necessárias*, este não é sempre o caso. A Figura 5.3 ilustra uma situação deste tipo, onde o conjunto dos controladores factíveis \mathcal{W} é desenhado juntamente com 3 regiões politópicas \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , e \mathcal{X}_3 , representando as condições necessárias para $m(x) \geq 1$, 2 e 3, respectivamente. Observe que \mathcal{X}_3 aparece como um conjunto não-vazio, contudo pode-se constatar que não existe nenhum controlador com medida $m(x) = 3$, já que $\mathcal{X}_3 \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Este problema é contornado na rotina de otimização apresentada mais adiante, iniciando-se o algoritmo com uma restrição m_0 pequena que é gradualmente aumentada ao longo do processo de otimização. A seguir, apresenta-se o resultado que relaciona o ótimo $m^* = \max m(x)$ à ordem do controlador x .

5.3 Teorema: *Seja a função medida de robustez $m(x)$ maximizada em dois domínios factíveis diferentes $\bar{x} \in \bar{\mathcal{W}}$ e $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{W}}$, onde \tilde{x} representa um controlador de ordem maior que \bar{x} . Sejam \bar{m} e \tilde{m} os valores dos respectivos ótimos. Então pode-se afirmar que $\tilde{m} \geq \bar{m}$. (A prova deste teorema encontra-se no Apêndice A).*

Este teorema mostra que a medida de robustez ótima é uma função não-decrescente da ordem do controlador. Portanto, aumentar a ordem do controlador deve, em geral, permitir que o processo de maximização de $m(x)$ encontre controladores mais robustos. Este resultado sugere uma metodologia para o projeto de controladores robustos, que é a idéia explorada no algoritmo apresentado a seguir. A estratégia consiste na otimização da robustez do controlador não somente em relação aos parâmetros do mesmo para uma dada ordem, mas

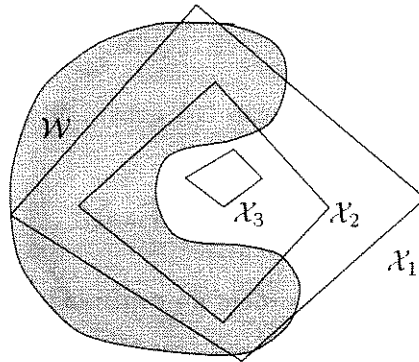


Figura 5.3: Conjunto factível \mathcal{W} e condições necessárias para $m(x) \geq 1, 2, \text{ e } 3$.

também em relação à própria ordem do controlador. O algoritmo define uma restrição inicial m_0 pequena (para evitar os problemas mencionados anteriormente) e uma ordem inicial nh_0, ng_0 para o controlador. O Algoritmo Genético maximiza então a função medida de robustez $m(x)$ dentro da região politópica dada por $\mathcal{X}_{m_0}^{(nh_0, ng_0)}$, encontrando os parâmetros ótimos para esta ordem dada do controlador. A seguir, a ordem do controlador é aumentada e uma nova restrição m_0 é definida com base nos resultados obtidos na etapa anterior (escolhe-se m_0 como o ótimo m^* da etapa anterior, garantindo-se assim que a nova região politópica não será infactível, ou seja, $\mathcal{X}_{m_0} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$). Novamente o Algoritmo Genético maximiza $m(x)$ dentro do novo politopo $\mathcal{X}_{m_0}^{(nh, ng)}$ para esta nova ordem definida do controlador. A rotina prossegue então desta forma: “aumentar a ordem do controlador, obter o novo politopo de busca, otimizar $m(x)$ em relação aos parâmetros do controlador utilizando o Algoritmo Genético, aumentar a ordem do controlador, ...” e assim sucessivamente até que um certo critério de parada seja satisfeito. Observa-se que, embora a otimização global com os Algoritmos Genéticos não seja garantida, os exemplos numéricos implementados confirmam uma tendência típica dos GAs neste sentido. Uma descrição resumida da rotina de otimização é dada a seguir.

Algoritmo de Otimização de $m(x)$

INICIALIZAÇÃO

- ◇ Definir ordem inicial do controlador $nh \leftarrow nh_0, ng \leftarrow ng_0$.
- ◇ Definir restrição inicial m_0 .
- ◇ Determinar domínio politópico inicial $\mathcal{X}_{m_0}^{(nh, ng)}$.

WHILE (condição de término não satisfeita)

Otimização GA dentro do politopo $\mathcal{X}_{m_0}^{(nh,ng)}$

↓

Resultado: $x_{(nh,ng)}^*$, $m^* = m(x_{(nh,ng)}^*)$

◇ Aumentar a ordem do controlador $nh \leftarrow nh + 1$,

$ng \leftarrow ng + 1$.

◇ Estabelecer o novo parâmetro de restrição $m_0 \leftarrow m^*$.

◇ Determinar o novo domínio politópico $\mathcal{X}_{m_0=m^*}^{(nh,ng)}$

END_WHILE

O Algoritmo Genético utilizado na rotina de otimização aplica os operadores genéticos apresentados no Capítulo 4 a fim de solucionar o problema de otimização com restrições lineares dado por:

$$\begin{cases} \max & m(x) \\ x \in & \mathcal{X}_{m_0} \end{cases} \quad (5.10)$$

Com relação aos pontos de busca aonde a função não está definida, ou seja, ($x \notin \mathcal{W}$, embora $x \in \mathcal{X}_{m_0}$) associa-se uma pseudo medida de robustez de valor negativo (lembrando que a medida de robustez é sempre um número positivo) permitindo assim, uma medida de comparação entre controladores, mesmo que estes não sejam factíveis. Esta pseudo medida de robustez é definida da seguinte forma. Seja $t(x, p_c)$ o polinômio resultante da combinação do controlador x com o parâmetro central p_c . Se $x \notin \mathcal{W}$ tem-se, pela definição de \mathcal{W} , que ao menos uma raiz de $t(x, p_c)$ está fora da região de alocação D . Seja \mathbf{d} a distância ortogonal entre a região D e a raiz de t mais afastada de D (Figura 5.4). A pseudo medida de robustez do controlador x é definida então como $d(x) = -\mathbf{d}$. Desta forma, o Algoritmo Genético possui uma medida de comparação para qualquer controlador x dentro do politopo de busca, seja este factível ou não.

Um outro problema que pode eventualmente ocorrer, embora com extrema raridade, é o caso em que o politopo \mathcal{X}_{m_0} é um conjunto ilimitado, não definindo um domínio de busca fechado. Isto pode ocorrer quando a ordem do controlador é muito grande levando o número de colunas da matriz $A(m_0)$ em (5.7) a se tornar demasiadamente grande em relação ao seu número de linhas. Ressalta-se mais uma vez que esta situação, na prática, será dificilmente encontrada, pois a ordem dos controladores para a qual se constata o problema é geralmente muito alta (acima de 15), já que o número de restrições, ou seja, o número de linhas da

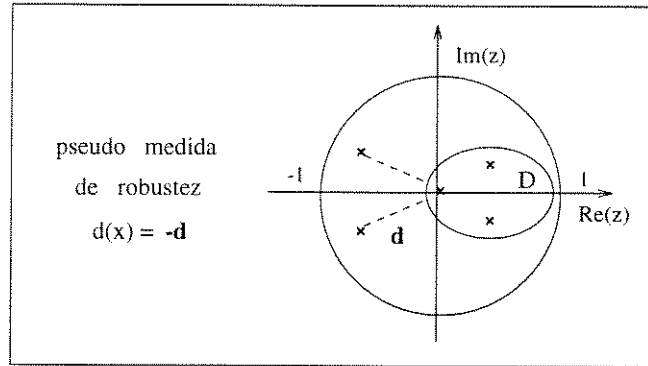


Figura 5.4: Ilustração da definição da pseudo medida de robustez $d(x)$ para $x \notin \mathcal{W}$.

matriz $A(m_0)$ também é muito elevado ($2^{na}(nt + 1)$). Ainda assim, se eventualmente for encontrada tal situação, restrições adicionais ao problema podem ser incorporadas para gerar um domínio de busca fechado, como por exemplo uma norma máxima imposta ao vetor de parâmetros do controlador (a eventual situação em que o politopo não é limitado pode ser facilmente detectada através da solução de um PL - Programa Linear - sobre um conjunto definido de restrições lineares).

5.2.1 Exemplo Numérico

Apresenta-se aqui uma aplicação do método proposto, a fim de ilustrar os resultados desenvolvidos nesta seção. O exemplo considerado já foi abordado anteriormente no Capítulo 3 com o propósito de exemplificar as dificuldades existentes com os métodos baseados em gradiente. Trata-se de um sistema discreto de segunda ordem com integrador cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}(b_0 + b_1z^{-1})}{(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})(1 - z^{-1})} \quad (5.11)$$

Os intervalos para as incertezas paramétricas são dados por:

$$\begin{cases} -0.65 < a_1 < -0.55 \\ 0.55 < a_2 < 0.65 \\ 0.4 < b_0 < 0.56 \\ 0.36 < b_1 < 0.56 \end{cases} \quad (5.12)$$

O objetivo é projetar um controlador robusto que mantenha os pólos do sistema em malha fechada na região D (Figura 5.6) para os intervalos de incerteza descritos. A região de alocação D é obtida a partir das especificações da resposta transitória com amortecimento

$\xi \geq 0.5$ e $\xi\omega_n \geq 40$. O círculo $C \supset D$ utilizado na derivação do polítopo de busca é um círculo centrado em $c = 0.34$ com raio $r = 0.64$ conforme a Figura 5.6.

Consideram-se aqui 5 situações possíveis para as ordens dos controladores, segundo se observa na Tabela 5.1. Esta tabela apresenta os parâmetros ótimos para os controladores obtidos através da rotina de otimização apresentada anteriormente, juntamente com as medidas de robustez destes controladores. Para cada caso executou-se a rotina de otimização 3 vezes, sendo que os resultados apresentados representam os melhores valores obtidos dentro de cada série de simulações. A Tabela 5.2 apresenta, para cada caso, o número médio de iterações (ou gerações) necessário para uma “convergência” do algoritmo. Por “convergência” considera-se a situação em que não há melhoria na função objetivo por mais de 100 iterações.

Caso	Ordem do Controlador	Parâmetros Ótimos	$m(x^*)$
1	$nh = 0, ng = 1$	$x^* = [1 \ -0.6715 \ 0.6977]^T$	0.84
2	$nh = 1, ng = 2$	$x^* = [1 \ 0.2199 \ -0.3630 \ 0.0521 \ 0.3523]^T$	1.10
3	$nh = 2, ng = 3$	$x^* = [1 \ -0.3406 \ -0.1134 \ -0.3981 \ 0.3606 \ 0.256 \ -0.1975]^T$	1.18
4	$nh = 3, ng = 4$	$x^* = [1 \ -0.7032 \ 0.0362 \ 0.0604 \ -0.3578 \ 0.4219 \ 0.1816 \ -0.3171 \ 0.0879]^T$	1.25
5	$nh = 4, ng = 5$	$x^* = [1 \ -0.695 \ 0.1754 \ 0.014 \ -0.0162 \ -0.3324 \ 0.3631 \ 0.1659 \ -0.2725 \ 0.1203 \ -0.0239]^T$	1.32

Tabela 5.1: Resultados da maximização de $m(x)$ para diferentes ordens de controladores.

Caso	No. de iterações até o critério de parada
1	150 gerações
2	500 gerações
3	1000 gerações
4	3000 gerações
5	5000 gerações

Tabela 5.2: Número médio de iterações do algoritmo.

Os resultados da Tabela 5.1 mostram que o ótimo m^* obtido pelo algoritmo na maximização de $m(x)$, aumenta à medida que se aumenta a ordem definida para o controlador. Pode-se dizer que estes resultados estão de acordo com o Teorema 5.3, que diz que o valor ótimo da medida de robustez m^* é uma função não-decrescente da ordem do controlador.

Deve-se ressaltar, contudo, que estes resultados apenas apontam na direção do Teorema 5.3, já que não se pode assegurar que o ótimo obtido pelo algoritmo seja o ótimo global de $\{\max m(x)\}$.

Observa-se também que para a ordem de controlador do Caso 1 não foi possível encontrar um controlador que satisfizesse as especificações de incerteza definidas no projeto, já que m^* não é maior do que 1 (condição da D -estabilidade robusta).

Outra observação interessante, é que na simulação com o método dos gradientes para o Caso 2 (conforme mostrado no Capítulo 3)) não foi possível encontrar um controlador D -estabilizante para o sistema, após a simulação do algoritmo com 10 condições iniciais diferentes. O algoritmo aqui proposto demonstra-se eficaz no tratamento de problemas bastante complexos como o Caso 5 acima que apresenta 10 variáveis de otimização.

A Figura 5.5 mostra, para o controlador do Caso 1, que possui apenas 2 variáveis

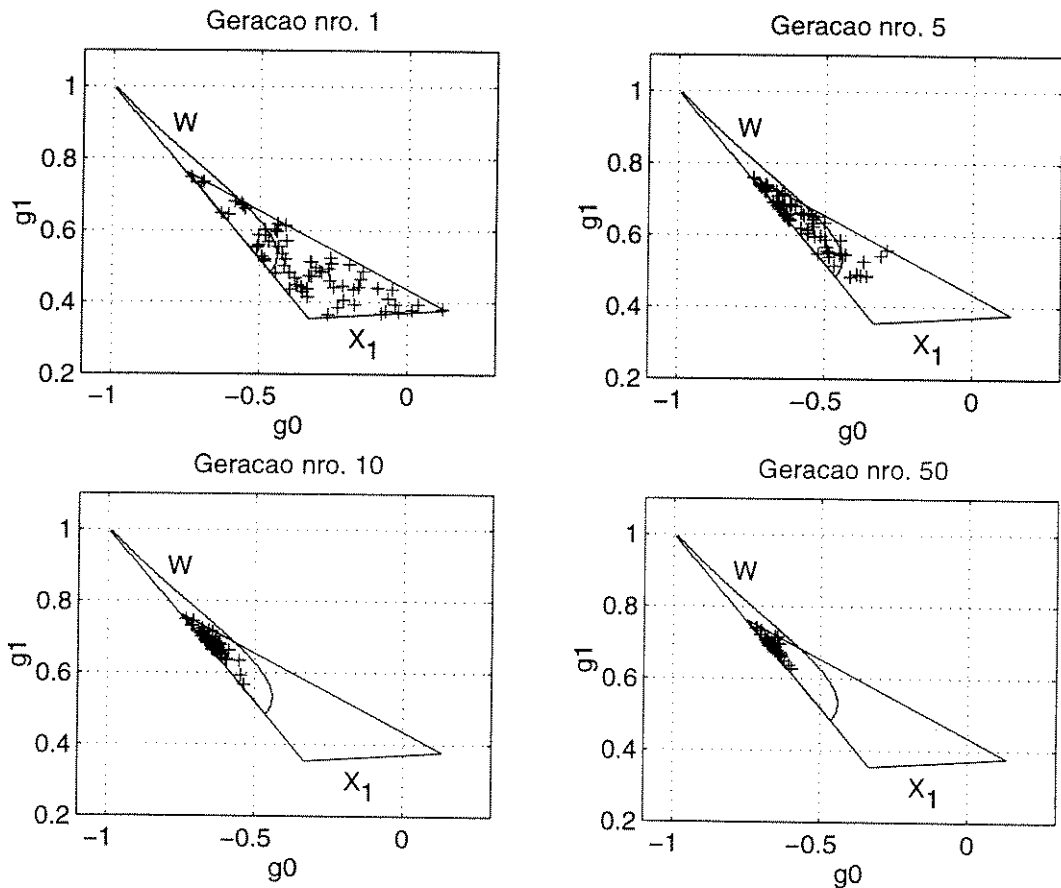


Figura 5.5: Evolução das iterações do algoritmo para o Caso 1, mostrando as populações das gerações 1, 5, 10 e 50.

de otimização, a evolução da população ao longo das iterações do algoritmo e a convergência

para o ótimo encontrado. A Figura ilustra também o Politopo \mathcal{X}_1 que contém o conjunto dos controladores robustos D -estáveis ($x \mid m(x) \geq 1$), juntamente com o conjunto \mathcal{W} dos controladores factíveis. O politopo \mathcal{X}_1 neste caso é definido pelo seguinte conjunto de restrições lineares (já eliminadas as restrições redundantes):

$$\mathcal{X}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A(1)\mathbf{x} \leq b(1)\} \quad (5.13)$$

onde $A(1) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ e $b(1) \in \mathbb{R}^3$, são dados por:

$A(1)=$	$b(1)=$
0.3794 0.8699	0.3789
-0.7370 -0.7520	-0.0214
0.0208 -0.4107	-0.1525

A título de exemplo, para o Caso 2, o politopo \mathcal{X}_1 é definido por:

$\mathcal{X}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A(1)\mathbf{x} \leq b(1)\}$, onde $A(1) \in \mathbb{R}^{49 \times 4}$ e $b(1) \in \mathbb{R}^{49}$, são dados por:

$A(1)=$	$b(1)=$
0.0175 -0.7222 -0.7370 -0.7520	-0.0171
1.0855 -0.0216 0.0720 -0.2400	0.3257
0.0175 -0.9143 -0.9330 -0.9520	-0.0171
-0.2886 0.1943 0.5029 0.8240	0.2772
0.0175 -0.8728 -0.8906 -0.9088	-0.0171
1.0855 -0.0173 0.0576 -0.1920	0.3257
0.0175 -1.0649 -1.0866 -1.1088	-0.0171
-0.2886 0.1973 0.5562 0.9296	0.2772
0.2074 0.0677 -0.1787 -0.7504	0.0393
1.0855 -0.0353 0.1176 -0.3920	0.3257
0.0195 -0.7222 -0.7370 -0.7520	-0.0191
1.2155 -0.0216 0.0720 -0.2400	0.3647
0.0195 -0.9143 -0.9330 -0.9520	-0.0191
0.2734 0.0517 -0.1820 -0.6960	0.0032
0.0195 -0.8728 -0.8906 -0.9088	-0.0191
0.2734 0.0635 -0.1107 -0.5504	0.0032
1.2155 -0.0173 0.0576 -0.1920	0.3647
0.0195 -1.0649 -1.0866 -1.1088	-0.0191

0.2734	0.0677	-0.1787	-0.7504	0.0032
1.2155	-0.0353	0.1176	-0.3920	0.3647
0.0194	-0.7222	-0.7370	-0.7520	-0.0190
-0.3213	0.1276	0.3709	0.6240	0.3086
1.0465	-0.0216	0.0720	-0.2400	0.3140
0.0194	-0.9143	-0.9330	-0.9520	-0.0190
-0.3213	0.1943	0.5029	0.8240	0.3086
-0.3105	-0.0334	-0.0296	0.5680	0.2417
1.0465	-0.0396	0.1320	-0.4400	0.3140
0.0194	-0.8728	-0.8906	-0.9088	-0.0190
1.0465	-0.0173	0.0576	-0.1920	0.3140
0.0194	-1.0649	-1.0866	-1.1088	-0.0190
-0.3105	-0.0239	-0.0459	0.5712	0.2417
1.0465	-0.0353	0.1176	-0.3920	0.3140
0.0214	-0.7222	-0.7370	-0.7520	-0.0210
-0.3553	0.1276	0.3709	0.6240	0.3413
0.3095	0.0475	-0.1140	-0.4960	-0.0047
-0.4085	-0.0130	-0.0336	0.3680	0.2539
1.1765	-0.0216	0.0720	-0.2400	0.3530
0.0214	-0.9143	-0.9330	-0.9520	-0.0210
-0.3553	0.1943	0.5029	0.8240	0.3413
0.3095	0.0517	-0.1820	-0.6960	-0.0047
-0.4085	-0.0334	-0.0296	0.5680	0.2539
1.1765	-0.0396	0.1320	-0.4400	0.3530
0.0214	-0.8728	-0.8906	-0.9088	-0.0210
0.3095	0.0635	-0.1107	-0.5504	-0.0047
-0.4085	-0.0035	-0.0499	0.3712	0.2539
1.1765	-0.0173	0.0576	-0.1920	0.3530
0.0214	-1.0649	-1.0866	-1.1088	-0.0210
0.3095	0.0677	-0.1787	-0.7504	-0.0047
-0.4085	-0.0239	-0.0459	0.5712	0.2539

Neste caso gera-se um grande número de restrições, pois tem-se 4 incertezas ($nq = 4$), a ordem do polinômio característico é $nt = 4$ e o número de restrições é dado por $2^{nq}(nt + 1)$ segundo a equação (5.8). Portanto o número de restrições nesta situação seria igual a 80,

reduzido para 49 após a eliminação das restrições redundantes.

A Figura 5.6 mostra os pólos do sistema em malha fechada para os controladores dos Casos 2, 3, 4, e 5. Os pólos são gerados pela combinação do controlador ótimo com todos os parâmetros incertos admissíveis para cada caso. Observa-se a boa distribuição das raízes dentro da região de alocação em todas as situações. É interessante notar que na distribuição dos pólos para a situação de cada ótimo, a nuvem de raízes geralmente toca o contorno de D em vários pontos, o que é uma situação quase impossível de ser obtida através do método de gradientes. Isto se deve ao fato de que quando a nuvem de raízes toca o contorno de D em mais de um ponto, a variável θ em (3.1) já não pode mais ser definida como uma função de x (ou seja $\theta = \theta(x)$), pois para um mesmo controlador x haverá mais de um valor de θ que minimiza a medida de robustez $m(x, \theta)$. Consequentemente, o gradiente de $m(x)$ não pode ser definido neste ponto, embora uma direção de subida alternativa possa ser definida, como exposto no Capítulo 3. Portanto, toda vez que um controlador fornecer uma nuvem de raízes que toca o contorno da região de alocação D em mais de um ponto, o gradiente da medida de robustez $m(x)$ para este controlador não estará definido. Este fato sugere uma maior dificuldade dos métodos de gradiente para obter distribuições de raízes como as da Figura 5.6.

A Figura 5.7 mostra, para os Casos 2 e 4, as respostas temporais da saída $y(kT)$ do sistema para uma entrada de referência em degrau, considerando todos os 16 parâmetros extremos para os intervalos de incerteza admissíveis. Para o Caso 2, os intervalos de incerteza (correspondentes a $m^* = 1.10$), são dados por:

$$\begin{cases} -0.655 < a_1 < -0.545 \\ 0.545 < a_2 < 0.655 \\ 0.392 < b_0 < 0.568 \\ 0.35 < b_1 < 0.57 \end{cases} \quad (5.14)$$

Para o Caso 4, os intervalos de incerteza (correspondentes a $m^* = 1.25$), são dados por:

$$\begin{cases} -0.6625 < a_1 < -0.5375 \\ 0.5375 < a_2 < 0.6625 \\ 0.38 < b_0 < 0.58 \\ 0.335 < b_1 < 0.585 \end{cases} \quad (5.15)$$

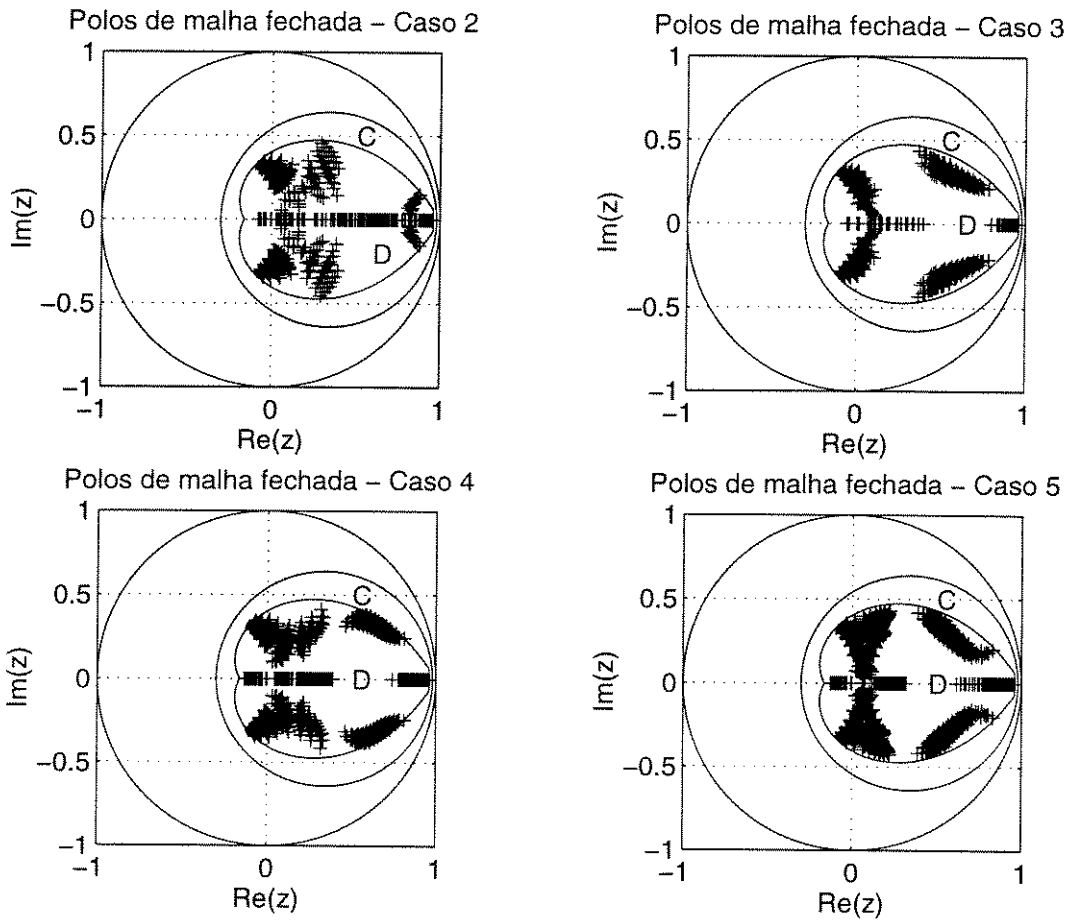


Figura 5.6: Nuvens de raízes para os casos 2, 3, 4 e 5.

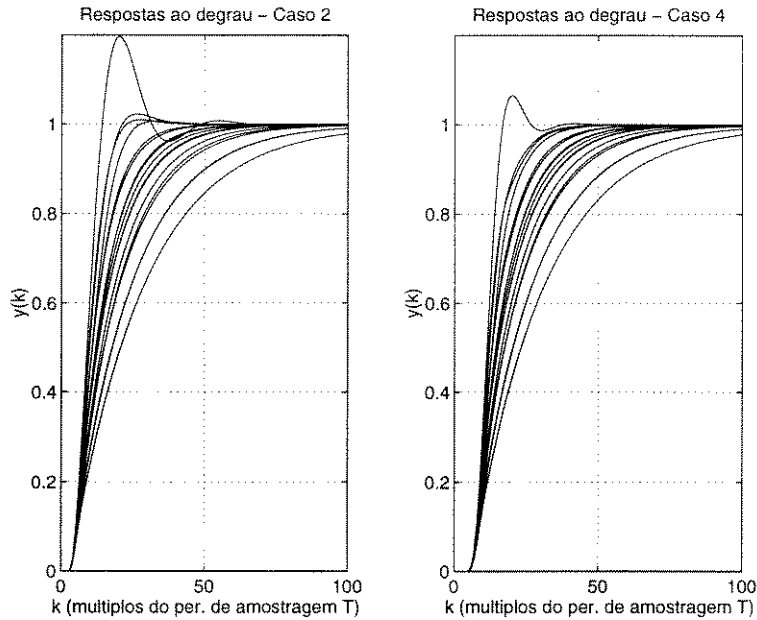


Figura 5.7: Respostas ao degrau para os Casos 2 e 4, considerando os parâmetros extremos dos intervalos de incerteza.

5.3 Estabilidade Robusta e Desempenho \mathcal{H}_2 Robusto

Nesta seção considera-se o problema da otimização conjunta da D -estabilidade robusta e do desempenho \mathcal{H}_2 robusto do sistema em malha fechada. A norma \mathcal{H}_2 de uma função de transferência mede o valor quadrático médio de sua saída quando a entrada é uma excitação do tipo ruído branco (Boyd e Barratt, 1991). A norma \mathcal{H}_2 é um índice de desempenho de grande importância prática em projetos de controladores em geral, já que grande parte das perturbações atuantes em sistemas de controle pode ser razoavelmente modelada por um processo estocástico do tipo ruído branco filtrado por um sistema linear (Åström e Wittenmark, 1973).

O modelo do sistema abordado aqui é o mesmo tratado anteriormente com a inclusão de uma perturbação gaussiana de ruído branco (Figura 5.8). Utilizando a mesma região politópica derivada anteriormente, um Algoritmo Genético minimiza um índice de desempenho \mathcal{H}_2 pré-definido, considerando ainda a restrição de D -estabilidade robusta. Uma vez mais, os resultados são desenvolvidos para o caso discreto, aplicando-se igualmente ao caso contínuo. A notação usada na seção é dada a seguir:

- $u(k), r(k), y(k)$ = entradas de controle, referência e saída, respectivamente.

- $w(k)$ = sinal de perturbação representado por um ruído branco de densidade espectral unitária.
- A, B, C = polinômios no operador atraso z^{-1} com graus na, nb e $nc = na$, respectivamente, correspondendo aos parâmetros do processo. Ressalta-se que $a_0 = c_0 = 1$ e $C(z^{-1})$ é um polinômio estável (Åström e Wittenmark, 1973).
- E, G, H = polinômios no operador atraso correspondendo aos parâmetros do controlador ($h_0 = 1$).
- $E\{\circ\}$ = operador Esperança Matemática.
- $\|P\|_2$ = Norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $P(z)$.

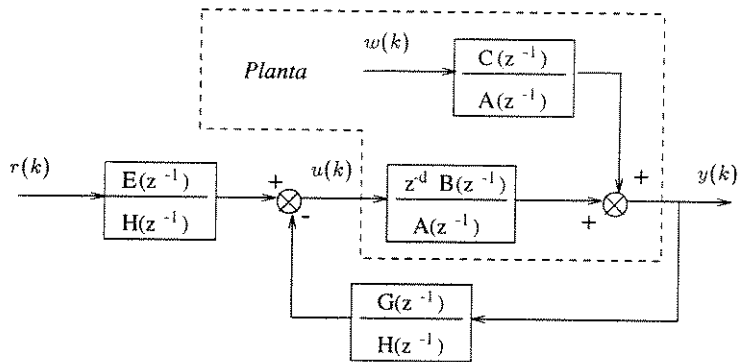


Figura 5.8: Sistema de controle com perturbação estocástica.

As funções de transferência em malha fechada para os sinais de controle e saída com relação às entradas de referência e perturbação¹ são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 u(k) &= \frac{A.E}{A.H + z^{-d}B.G} r(k) - \frac{G.C}{A.H + z^{-d}B.G} w(k) \\
 y(k) &= \frac{z^{-d}B.E}{A.H + z^{-d}B.G} r(k) + \frac{H.C}{A.H + z^{-d}B.G} w(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

O objetivo aqui é minimizar a maior norma \mathcal{H}_2 das funções de transferência de controle/saída para a perturbação considerando-se as incertezas do processo (desempenho \mathcal{H}_2 robusto, também conhecido como custo garantido \mathcal{H}_2), e ainda manter a D -estabilidade robusta. Em outras palavras, procura-se o controlador x que minimiza o pior caso da norma \mathcal{H}_2 sujeito à restrição $m(x) \geq 1$.

Seja $c = [1, c_1, \dots, c_{nc}]^T \in \mathbb{R}^{nc+1}$ o vetor que contém os coeficientes do polinômio $C(z^{-1})$ e seja Π_c a região hiperretangular que descreve o espaço dos parâmetros incertos do

¹Adota-se aqui a notação implícita, introduzida no Capítulo 2, indicando o operador z^{-1} como o operador atraso.

vetor c , de forma análoga a Π .

Considere as funções de transferência em (5.16) relacionando a saída $y(k)$ às entradas de controle e perturbação, $u(k)$ e $w(k)$, respectivamente. A norma \mathcal{H}_2 destas funções de transferência é uma função dos parâmetros da planta (p, c) e do controlador x . Portanto, utiliza-se aqui a notação $\mathcal{H}_2(p, c, x)$. O objetivo principal é a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \min & J(x) \\ x \in \{x | m(x) \geq 1\} \end{cases} \quad (5.17)$$

onde

$$J(x) = \max_{p, c} \mathcal{H}_2(p, c, x) \quad (5.18)$$

Na realidade trata-se aqui do seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \min & J_p(x) \\ x \in \{x | m(x) \geq 1\} \end{cases} \quad (5.19)$$

onde

$$J_p(x) = \max_{p_k, c_k} \mathcal{H}_2(p_k, c_k, x) \quad (5.20)$$

onde (p_k, c_k) são os parâmetros da planta correspondendo aos vértices das regiões de incerteza Π e Π_c .

Este critério foi adotado baseado em extensas observações que apontam que o pior caso da norma \mathcal{H}_2 com relação aos parâmetros incertos é geralmente encontrado para um dos vértices da região de incerteza (De Paiva, 1993ab). Portanto, ao invés de se tentar solucionar o problema (5.17), que é um problema de extrema complexidade, trabalha-se com (5.19) que é um problema bem mais tratável e que permite a obtenção de excelentes resultados práticos. Para se ter uma medida segura do pior caso da norma \mathcal{H}_2 para o controlador obtido, executa-se, ao final do procedimento, uma busca extensiva sobre todos os parâmetros incertos. Em todos os casos simulados tem-se confirmado que a pior norma \mathcal{H}_2 é obtida para um dos vértices da região de incerteza.

Este critério de desempenho \mathcal{H}_2 adotado, embora não defina a rigor um custo garantido, é significativamente melhor do que o desempenho \mathcal{H}_2 nominal que é considerado em algumas abordagens, como por exemplo em El Ghaoui (1990). O desempenho \mathcal{H}_2 nominal refere-se somente à norma \mathcal{H}_2 correspondente ao parâmetro central (ou nominal) do processo, ou seja, $\mathcal{H}_2(p_c, c_c, x)$, onde p_c e c_c denotam os vetores correspondentes aos parâmetros centrais dos parâmetros incertos do processo p e c .

Obviamente, o índice \mathcal{H}_2 nominal não é uma medida confiável na avaliação do desempenho de um controlador, pois, como será visto no exemplo numérico mais adiante, um

controlador pode apresentar um pequeno valor da norma \mathcal{H}_2 quando combinado ao parâmetro central do processo, e um grande valor quando combinado a um dos parâmetros extremos.

A fim de solucionar o problema proposto em (5.19), formulou-se a seguinte estratégia de otimização utilizando o Algoritmo Genético:

$$P1 : \begin{cases} \max f(x) \\ x \in \mathcal{X}_1 \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} d(x) & \text{se } x \notin \mathcal{W} \\ m(x) & \text{se } m(x) < 1 \\ K - J_p(x) & \text{se } m(x) \geq 1 \end{cases} \quad (5.21)$$

e \mathcal{X}_1 é a região politópica contendo o conjunto dos controladores D -estáveis, ou seja, $\mathcal{X}_1 \supset \{x \mid m(x) \geq 1\}$, derivada conforme os resultados apresentados anteriormente (Seção 5.2); a constante K representa um número positivo grande (tal que $K - J_p(x)$ seja sempre positivo) e $d(x)$ é a pseudo medida de robustez definida na seção anterior para os pontos infactíveis. A função objetivo definida desta forma, leva o Algoritmo Genético a buscar o controlador que apresenta uma medida de robustez maior ou igual a 1 (D -estável) e com um mínimo índice de desempenho $J_p(x)$.

5.3.1 Exemplo Numérico

Utiliza-se aqui a rotina de otimização baseada em GA para a solução de (5.21) no caso do problema Duas Massas e Mola. Este problema, frequentemente encontrado na literatura (El Ghaoui, 1990) é o exemplo mais simples de uma estrutura flexível. O sistema é mostrado na Figura 5.9.

A massa m_1 é suposta conhecida e de valor $m_1 = 1$, e os dois parâmetros incertos são

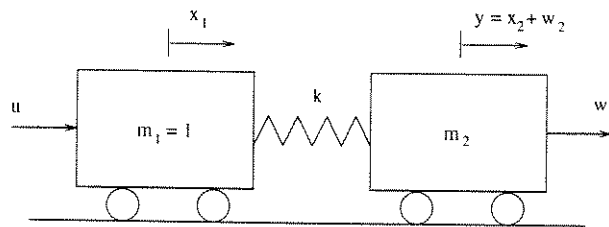


Figura 5.9: Sistema Duas Massas e Mola.

a massa m_2 e a constante da mola k , ambos com valor nominal unitário. Os parâmetros l_1 e l_2 representam a constante da mola normalizada para ambas as massas, ou seja, $l_1 = k/m_1$

e $l_2 = k/m_2$. A saída y é o deslocamento x_2 da massa m_2 . Uma força de perturbação w_1 atua na massa m_2 , e além disto um ruído w_2 atua na saída y ; ambas as perturbações são representadas por um ruído branco de densidade espectral unitária. A representação do sistema no espaço de estados é dada a seguir, conforme El Ghaoui (1990):

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l_1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_2 & 0 & -l_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_1 \quad (5.22)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] x + w_2$$

onde o vetor de estados é dado por:

$$x = [x_1 \ \dot{x}_1 \ x_2 \ \dot{x}_2]^T \quad (5.23)$$

e os parâmetros são:

$$l_1 = \frac{k}{m_1}, \quad l_2 = \frac{k}{m_2} \quad (5.24)$$

com valores nominais iguais a:

$$l_1^{nom} = l_2^{nom} = 1 \quad (5.25)$$

A fim de se tratar o problema de acordo com o modelo aqui considerado, obteve-se a representação equivalente do sistema em funções de transferência, de acordo com a Figura 5.10 (convém lembrar que para se aplicar os resultados de robustez apresentados no Capítulo 2 para o caso contínuo, as funções de transferência devem se apresentar como funções em s^{-1} ao invés de s .)

A função de transferência em malha aberta relacionando a saída $y(t)$ à entrada de controle $u(t)$ é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{l_2}{s^4 + (l_1 + l_2)s^2} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (5.26)$$

onde os valores nominais dos parâmetros são $l_1^{nom} = l_2^{nom} = 1$. Supõem-se os seguintes intervalos de incerteza para os parâmetros $l_1 \in (0.6, 1.4)$ e $l_2 \in (0.6, 1.4)$.

As funções de transferência da saída $y(t)$ com relação às entradas de perturbação $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são dadas por:

$$\frac{Y(s)}{W_1(s)} = \frac{C_1(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + l_1}{s^4 + (l_1 + l_2)s^2} \quad (5.27)$$

$$\frac{Y(s)}{W_2(s)} = \frac{C_2(s)}{A(s)} = 1$$

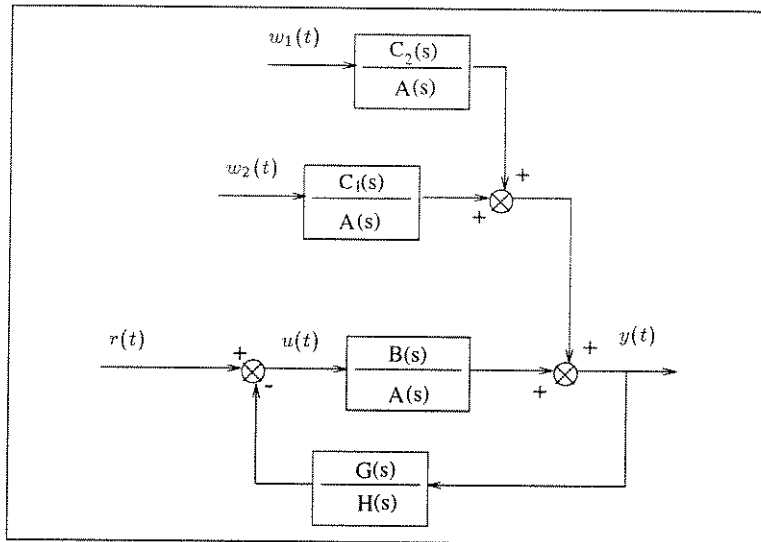


Figura 5.10: Representação em funções de transferência do sistema Duas Massas-Mola.

Ou seja, os polinômios $C_1(s)$ e $C_2(s)$ são definidos da seguinte forma:

$$C_1(s) = s^2 + l_1 \quad (5.28)$$

$$C_2(s) = A(s) = s^4 + (l_1 + l_2)s^2$$

As funções de transferência em malha fechada relacionando os sinais de saída $y(t)$ e controle $u(t)$ às entradas de perturbação $w_1(t)$ e $w_2(t)$, considerando uma referência nula ($r \equiv 0$), são dadas por:

$$Y(s) = \frac{N_{11}(s)}{T(s)}W_1(s) + \frac{N_{12}(s)}{T(s)}W_2(s) \quad (5.29)$$

$$U(s) = \frac{N_{21}(s)}{T(s)}W_1(s) + \frac{N_{22}(s)}{T(s)}W_2(s)$$

onde:

$$\begin{aligned} T(s) &= A(s)H(s) + B(s)G(s) \\ N_{11}(s) &= C_1(s)H(s) ; \quad N_{12}(s) = C_2(s)H(s) \\ N_{21}(s) &= -C_1(s)G(s) ; \quad N_{22}(s) = -C_2(s)G(s) \end{aligned} \quad (5.30)$$

O objetivo é encontrar um controlador $G(s)/H(s)$ que estabiliza o sistema para todos valores dos parâmetros incertos e ainda minimiza o seguinte critério:

$$J_p(x) = \max_{p_k, c_k} \int_0^{\infty} E\{y^2(\tau) + \alpha u^2(\tau)\} d\tau \quad (5.31)$$

Define-se então o índice de desempenho global do sistema como sendo:

$$\mathcal{H}_{2,cl} = \left\{ \left\| \frac{N_{11}}{T} \right\|_2^2 + \left\| \frac{N_{12}}{T} \right\|_2^2 + \left\| \frac{N_{21}}{T} \right\|_2^2 + \left\| \frac{N_{22}}{T} \right\|_2^2 \right\} \quad (5.32)$$

Portanto, a função de custo a ser minimizada corresponde a

$$J_p(x) = \max_{p_k, c_k} \mathcal{H}_{2,cl} \quad (5.33)$$

Como a região de alocação para os pólos é o próprio semi-plano esquerdo em s , define-se um círculo C no mesmo, a fim de se obter o domínio de busca linear para o algoritmo. Adotou-se neste caso um círculo centrado em $s = -5$ com raio $r = 5$. Considerou-se para este exemplo um controlador de segunda ordem cujo vetor de parâmetros correspondente é dado por $x = [1 \ h_1 \ h_2 \ g_0 \ g_1 \ g_2]^T$. Aplicando a rotina de otimização, obteve-se a solução $x^* = [1 \ 3.2555 \ 0.8948 \ -0.003 \ 1.7477 \ 0.1405]^T$ com um índice de desempenho igual $J_p(x^*) = 27.37$, que foi confirmado através de busca exaustiva como o pior valor da norma $\mathcal{H}_{2,cl}$ sobre todos os valores dos parâmetros incertos.

Para mostrar a importância de se otimizar o *pior caso* da norma \mathcal{H}_2 ao invés da otimização da norma \mathcal{H}_2 apenas para o parâmetro *nominal* do processo como em El Ghaoui, (1990), aplica-se a seguir a mesma rotina de otimização para o problema nominal, ou seja:

$$\text{Critério } \mathcal{H}_2 \text{ Nominal: } \begin{cases} \min & \mathcal{H}_{2,cl}(p_c, c_c, x) \\ x \in & \{x | m(x) \geq 1\} \end{cases}$$

A solução para este problema forneceu $x^* = [1 \ 3.2769 \ 1.3514 \ -0.1067 \ 1.7489 \ 0.2126]^T$ com $\mathcal{H}_{2,cl}^{nom} = 9.81$, ou seja, um índice de desempenho \mathcal{H}_2 para o parâmetro central melhor do que no caso anterior (da otimização pelo pior vértice). Contudo, o valor da norma \mathcal{H}_2 neste caso, para um dos extremos do intervalo de incerteza fornece o valor extremamente alto de $J_p = 399.74$, o que evidencia claramente a importância de se otimizar o pior caso do índice de desempenho considerando efetivamente todos os parâmetros incertos. Os resultados relativos a estes dois critérios para o índice de desempenho - a pior norma \mathcal{H}_2 dos vértices da região de incerteza e a norma \mathcal{H}_2 do sistema nominal - estão apresentados na Tabela 5.3.

A fim de ilustrar a diferença dos dois critérios para o índice de desempenho \mathcal{H}_2 , simularam-se² as respostas temporais do sistema para uma perturbação em degrau na entrada w_1 . A amplitude das perturbações foi ajustada a fim de fornecer saídas unitárias. As respostas para os valores nominal e não-nominal (a 95 % do parâmetro desestabilizante do sistema) são mostradas na Figura 5.11 para cada critério adotado. Pode-se observar que a resposta

²A aplicação de uma entrada do tipo degrau na entrada de perturbação estocástica permite obter uma medida indireta do desempenho \mathcal{H}_2 do sistema.

	$m(x^*)$	$J_p(x^*) = \max_{\text{vert}} \mathcal{H}_{2,cl}$	$\mathcal{H}_{2,cl}^{norm}$
Critério - Pior \mathcal{H}_2 dos Vértices	1.12	27.37	11.57
Critério - \mathcal{H}_2 Nominal	1.00	399.74	9.81

Tabela 5.3: Resultados para os dois diferentes critérios no índice de desempenho.

para o valor não-nominal no critério \mathcal{H}_2 nominal apresenta um amortecimento muito pobre, enquanto que no critério do pior \mathcal{H}_2 dos vértices as respostas são similares para os diferentes valores dos parâmetros do processo.

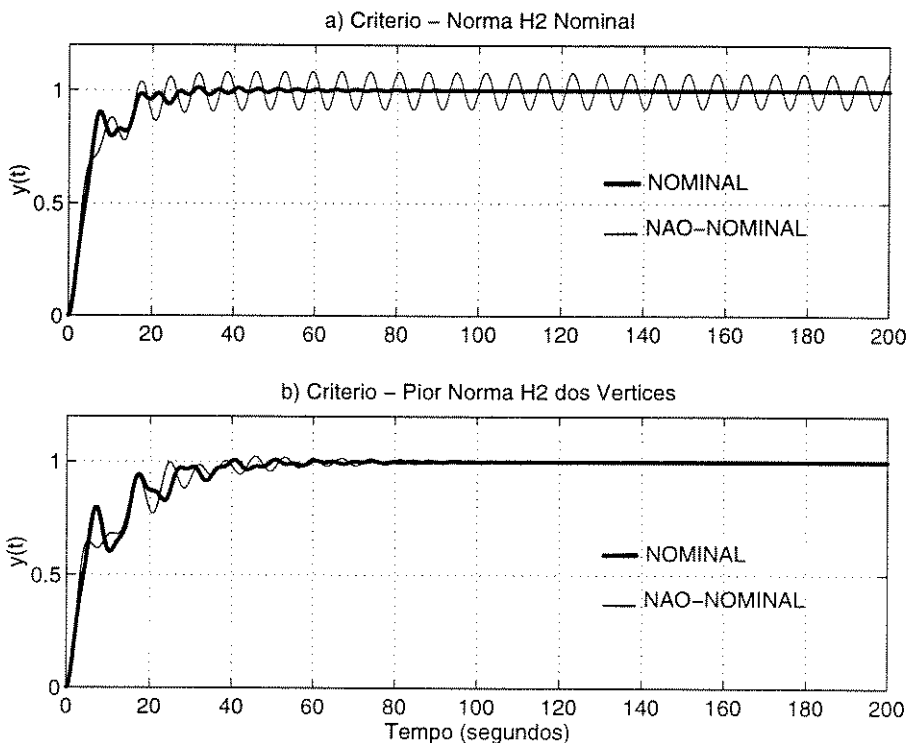


Figura 5.11: Respostas temporais para os valores nominal e não-nominal do processo: a) critério \mathcal{H}_2 nominal; b) critério pior \mathcal{H}_2 dos vértices.

Tratou-se neste capítulo do caso em que as regiões de alocação para os pólos do sistema em malha fechada são regiões conexas. Derivou-se para esta situação um domínio de busca politópico no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto dos controladores com medida de robustez acima de um dado valor pré-definido m_0 . Uma rotina de otimização proposta, utilizando Algoritmos Genéticos, maximiza a função medida de robustez $m(x)$ dentro da região politópica determinada.

Considerou-se também a otimização conjunta da D -estabilidade robusta e do desempenho \mathcal{H}_2 robusto. Para isto, utilizou-se um índice de desempenho \mathcal{H}_2 de um controlador correspondendo à pior norma \mathcal{H}_2 do sistema para os vértices da região de incerteza paramétrica. Utilizando a mesma região politópica, derivou-se uma rotina de otimização que minimiza o índice de desempenho \mathcal{H}_2 de um controlador satisfazendo a restrição de D -estabilidade robusta.

No capítulo seguinte, apresenta-se o caso em que a região de alocação é dada por um conjunto de regiões circulares e disjuntas. Deriva-se um domínio de busca, definido por restrições quadráticas, contendo o conjunto dos controladores factíveis para o problema. Este domínio limitado é utilizado pelo Algoritmo Genético na busca do controlador de maior robustez.

Capítulo 6

Síntese de Controladores - Regiões de Alocação Circulares e Disjuntas

6.1 Introdução

Considera-se neste capítulo o caso em que a região de alocação para os pólos do sistema em malha fechada é definida por um conjunto de regiões circulares e disjuntas no plano complexo. Utilizando propriedades polinomiais básicas, deriva-se para esta situação, um conjunto de condições necessárias para um polinômio apresentar cada uma de suas raízes dentro dos respectivos círculos de alocação. A partir destas condições necessárias, definidas por um conjunto de restrições quadráticas, deriva-se um domínio de busca no espaço de parâmetros do controlador, denotado por Q_x , contendo o conjunto dos controladores factíveis para o problema ($Q_x \supset \mathcal{W}$). Uma rotina de otimização é proposta, onde um Algoritmo Genético maximiza a função medida de robustez $m(x)$ dentro do domínio de busca determinado. Finalmente, um exemplo numérico comparativo ilustra a metodologia desenvolvida. Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se também em De Paiva *et al.* (1997a).

6.2 Histórico do Problema

Um problema de grande importância em alocação de pólos robusta é aquele relacionado à alocação dos pólos em regiões circulares circunvizinhas aos pólos nominais do sistema. A idéia é manter os pólos próximos aos pólos nominais, a fim de que as respostas temporais do sistema tenham aspectos semelhantes, considerando os diferentes valores dos parâmetros incertos do processo. Embora a metodologia se aplique tanto a sistemas contínuos como

discretos, a técnica é mais conveniente para o caso dos sistemas contínuos, pelo fato de que a imposição de várias regiões circulares de alocação dentro do círculo unitário pode se tornar demasiado restritiva.

Como uma solução alternativa para o problema, Soh *et al.* (1987b) propõem uma abordagem que tenta manter os pólos próximos aos pólos nominais do sistema indiretamente, através da imposição de restrições sobre os coeficientes do polinômio característico. O método baseia-se no cálculo prévio de um politopo no espaço dos coeficientes do polinômio característico, de modo a assegurar a estabilidade do sistema. Após a caracterização de limites nos coeficientes do polinômio característico, tanto a distância a um controlador nominal, como uma medida de robustez do controlador podem ser otimizadas, considerando a presença das incertezas paramétricas do processo. Contudo, como a região do espaço paramétrico correspondente a todos os polinômios estáveis é bastante complexa, o maior politopo contido nesta região apresenta-se muito conservativo. Por consequência, a margem paramétrica admissível para o controlador (medida de robustez) torna-se também muito conservativa.

A abordagem de Rotstein *et al.* (1991) representa um avanço em relação à abordagem anterior, embora ainda considere o problema de maneira indireta (lidando com restrições sobre o polinômio característico ao invés da alocação direta dos pólos nas regiões circulares). Assim como em Soh *et al.* (1987b), um politopo (conservativo) é calculado no espaço de parâmetros do polinômio característico a fim de assegurar a estabilidade do sistema. Rotstein *et al.* (1991) consideram porém a otimização de uma função objetivo que pondera não somente a distância a um controlador nominal, mas também um “desvio” em relação ao polinômio característico nominal. Esta ponderação força as raízes a se concentrarem na vizinhança dos pólos nominais do sistema, embora ainda mantendo os resultados conservativos devido à restrição politópica imposta.

A abordagem de Figueroa e Romagnoli (1994) representa um avanço significativo em relação às abordagens anteriores por tratar diretamente o problema da alocação em regiões circulares, embora ainda com certo grau de conservatividade, como se discute mais adiante. Figueroa e Romagnoli (1994) derivam uma formulação que relaciona diretamente os pólos de malha fechada do sistema aos coeficientes do polinômio característico. Uma condição suficiente sobre os coeficientes do polinômio característico é determinada, tal que as raízes deste polinômio estejam contidas nos círculos de alocação pré-definidos. Esta condição é utilizada em uma metodologia de projeto de controladores baseada em programação semi-infinita. Contudo, a suficiência das condições e a ausência de uma medida de robustez para o controlador, tendem a fornecer, por este método, resultados bastante conservativos.

Na abordagem aqui desenvolvida, derivam-se um conjunto de condições necessárias (ao invés de suficientes) sobre os coeficientes do polinômio característico, tal que as raízes

do mesmo estejam contidas nos círculos de alocação. Utilizando a linearidade existente entre polinômio característico e controlador, estas condições (definidas por restrições quadráticas), determinam um domínio de busca limitado, no espaço de parâmetros do controlador, contendo o conjunto de todos os controladores factíveis para o problema. Propõe-se uma rotina de otimização, utilizando os Algoritmos Genéticos, na qual a função medida de robustez é maximizada dentro do domínio de busca definido. Assim, é possível obter um controlador que atenda as especificações de incerteza paramétrica do processo evitando os resultados conservativos derivados anteriormente.

6.3 Derivação do Domínio de Busca

O problema de alocação de pólos em regiões circulares e disjuntas consiste na determinação dos parâmetros do controlador tal que os pólos de malha fechada resultantes fiquem restritos às regiões circulares contendo os pólos nominais do sistema. O problema é formulado da seguinte forma.

Seja $\lambda^0 = \{\lambda_1^0, \dots, \lambda_{nt}^0\}$ o conjunto dos pólos nominais do sistema em malha fechada, ou seja, os pólos relacionados ao parâmetro central do processo (correspondendo à situação desejada para os pólos do sistema). Seja $D = \{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{nt}\}$ um conjunto de regiões circulares no semi-plano esquerdo, onde cada círculo é definido por

$$C_i = \{\lambda_i \in \mathcal{C}^- : |\lambda_i - \lambda_i^0| < \epsilon_i, \epsilon_i \in \mathfrak{R}^+\}, \quad i = 1, \dots, nt. \quad (6.1)$$

A única restrição imposta aos parâmetros ϵ_i é que estes devem ser tais que as regiões circulares sejam disjuntas. Considera-se aqui o tratamento do caso contínuo, por ser este o caso mais adequado para a aplicação desta metodologia, conforme discutido anteriormente.

O problema é encontrar o controlador $G(s)/H(s)$ que mantenha cada raiz λ_i do polinômio característico na região circular C_i de raio ϵ_i , para todos os valores admissíveis do vetor de parâmetros incertos $q \in \Pi$ (ou, equivalentemente, $q^* \in \Pi^*$). Observa-se que cada raiz complexa deve permanecer complexa e cada raiz real deve permanecer real, portanto para o caso de raízes reais tem-se na verdade um intervalo ao invés de um círculo de alocação (Figura 6.1).

Considera-se o polinômio característico para o sistema em malha fechada dado por:

$$T(s) = s^{nt} + t_1 s^{nt-1} + t_2 s^{nt-2} + \dots + t_{nt} \quad (6.2)$$

juntamente com seu respectivo vetor de parâmetros $t = [1 \ t^T]^T = [1, t_1, t_2, \dots, t_{nt}]^T \in \mathfrak{R}^{nt+1}$.

Os resultados de robustez apresentados no Capítulo 2 aplicam-se aqui para o caso de

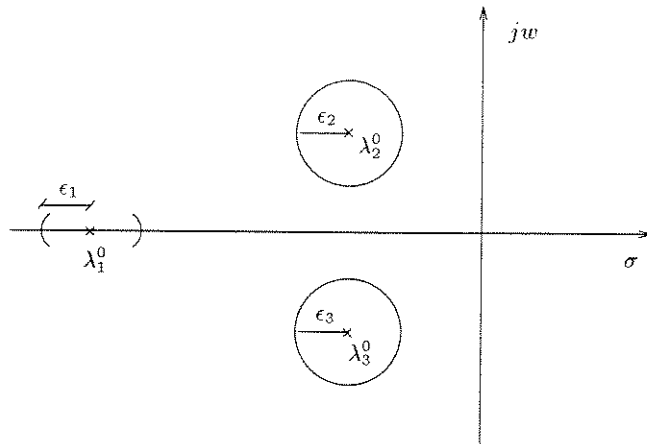


Figura 6.1: Exemplos de regiões de alocação para as raízes.

regiões disjuntas, a menos de pequenas modificações nas definições apresentadas. A seguir, reapresentam-se estas definições enfocando o caso particular aqui abordado.

6.1 Definição: *Define-se um controlador x como sendo D -estabilizante para a região de incerteza paramétrica nominal dada, se $\forall q^* \in \Pi^*$, então a raiz λ_j de $T(x, q^*, s)$, $j = 1, 2, \dots, nt$ pertence ao seu respectivo círculo de alocação C_j .*

6.2 Definição: *Define-se o conjunto \mathcal{W} de controladores factíveis, como sendo o conjunto dos controladores D -estabilizantes para o vetor de parâmetros central do processo ($p = p_c \Leftrightarrow q^* = 0$), ou seja:*

$$\mathcal{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^{nh+ng+2}, T(x, \underline{0}, s) = 0 \Rightarrow \lambda_j \in C_j, j = 1, 2, \dots, nt\} \quad (6.3)$$

onde $\underline{0}$ denota o vetor nulo em \mathbb{R}^{ng} .

6.3 Definição: *A medida de robustez de um controlador $x \in \mathcal{W}$ é definida como:*

$$m(x) = \sup \mathcal{K}(x) = k_m, \quad x \in \mathcal{W} \quad (6.4)$$

onde $\mathcal{K}(x)$ é o conjunto conexo definido por:

$$\mathcal{K}(x) = \{k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \forall q^* \in \Pi^*(k) : T(x, q^*, s) = 0 \Rightarrow \lambda_j \in C_j, j = 1, 2, \dots, nt\} \quad (6.5)$$

De maneira análoga à definição da medida de robustez local para o caso de regiões conexas, tem-se a definição da medida de robustez local para um dado controlador e um dado

ponto s no plano complexo.

6.4 Definição: A medida de robustez local de um controlador $x \in \mathcal{W}$ com relação a um ponto s do plano complexo é definida como:

$$m(x, s) = \sup \mathcal{K}(x, s) = k_s \quad x \in \mathcal{W}, s \in \mathcal{C} \quad (6.6)$$

onde $\mathcal{K}(x, s)$ é o conjunto conexo definido por:

$$\mathcal{K}(x, s) = \{k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \forall q^* \in \Pi^*(k) : T(x, q^*, s) \neq 0\} \quad (6.7)$$

6.5 Proposição: A função medida de robustez $m(x)$, definida anteriormente, é determinada, neste caso, por:

$$m(x) = \begin{cases} \min m(x, s) & , x \in \mathcal{W} \\ s \in \partial C_j, j = 1, 2, \dots, nt \end{cases} \quad (6.8)$$

Ou seja, o cálculo de $m(x)$ para um dado controlador $x \in \mathcal{W}$ é determinado pela minimização da função medida de robustez local em s , com s restrito às fronteiras ∂C_j de todos os círculos C_j .

A seguir, deriva-se o conjunto de condições necessárias sobre os coeficientes do polinômio característico tal que as suas raízes estejam nos círculos de alocação. Seja

$$T^0(s) = s^{nt} + t_1^0 s^{nt-1} + t_2^0 s^{nt-2} + \dots + t_{nt}^0 \quad (6.9)$$

o polinômio característico nominal (associado ao parâmetro central) com o correspondente vetor de parâmetros dado por $t^0 = [1, t_1^0, t_2^0, \dots, t_{nt}^0]^T$ (ou seja, $\mathbf{t}^0 = [t_1^0, t_2^0, \dots, t_{nt}^0]^T$). Tem-se portanto:

$$T^0(s) = \prod_{i=1}^{nt} (s - \lambda_i^0) \quad (6.10)$$

O objetivo é determinar um conjunto de condições válidas sobre os coeficientes de um certo polinômio característico $T(s)$, dado que as suas raízes satisfazem a relação :

$$|\lambda_i - \lambda_i^0| \leq \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, nt. \quad (6.11)$$

Seja λ_i^0 uma das raízes de $T^0(s)$ e seja a definição da seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} w &= s - \lambda_i^0 \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}^0 + \delta \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_{nt}]^T$ é um vetor de perturbação. A mudança de variáveis (6.12) aplicada ao polinômio $T(s)$ dado na equação (6.2) leva a:

$$\begin{aligned} T(s) &= (\lambda_i^0 + w)^{nt} + (t_1^0 + \delta_1)(\lambda_i^0 + w)^{nt-1} + (t_2^0 + \delta_2)(\lambda_i^0 + w)^{nt-2} + \dots + (t_{nt}^0 + \delta_{nt}) = \\ &= w^{nt} + v_{i,nt-1}w^{nt-1} + \dots + v_{i,0} = V_i(w) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Nota-se que, em geral, os coeficientes v_i são números complexos.

Sejam w_1, w_2, \dots, w_{nt} as raízes de $V_i(w)$. Denota-se por w_k a raiz pertencente ao círculo com centro em $(\lambda_k^0 - \lambda_i^0)$ e raio ϵ_k .

A fim de definir limites sobre os coeficientes do polinômio como condição necessária para a alocação de pólos robusta na região D (conjunto de regiões circulares), assume-se um polinômio $T(s)$ com raízes nos respectivos círculos de alocação. Utiliza-se então a conhecida propriedade polinomial que diz que o termo constante de um polinômio (com sinal apropriado) é igual ao produto de suas raízes, para a derivação dos limites sobre os coeficientes do mesmo. A condição necessária é derivada considerando-se o caso em que o produto das raízes dentro de cada círculo é máximo. Primeiramente, apresenta-se o seguinte lema.

6.6 Lema: *Se um polinômio mônico $T(s)$ possui uma raiz complexa λ_i tal que*

$$|\lambda_i - \lambda_i^0| < \epsilon_i, \quad (6.14)$$

então há uma raiz conjugada λ_i^ satisfazendo*

$$|\lambda_i^* - \lambda_i^{*0}| < \epsilon_i \quad (6.15)$$

Seja w_j uma das raízes de $V_i(w)$ com coeficientes reais (Figura 6.2). Uma análise similar pode ser feita para o caso em que $V_i(w)$ possui coeficientes complexos. Assim, pode-se escrever:

$$w_j = \lambda_j^0 - \lambda_i^0 + \alpha_j \epsilon_j, \quad (6.16)$$

para algum número complexo α_j , $|\alpha_j| \leq 1$.

É fácil mostrar que o máximo de $w_j w_j^*$ com relação a α_j , onde w_j^* é o conjugado de w_j , ocorre quando $|\alpha_j| = 1$ e $\arg(\alpha_j) = \arg(\lambda_j^0 - \lambda_i^0)$, onde $\arg(\cdot)$ representa a fase angular do número complexo. O máximo do produto das duas raízes é dado por:

$$\max w_j w_j^* = (|\lambda_j^0 - \lambda_i^0| + \epsilon_j)^2 \quad (6.17)$$

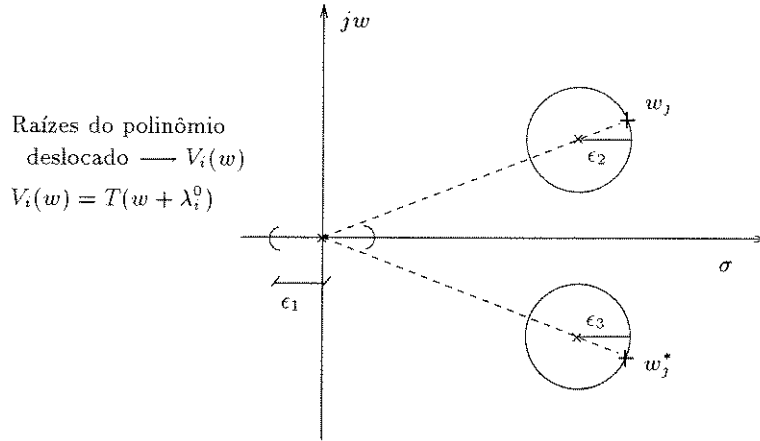


Figura 6.2: Raízes do polinômio $V_i(w)$ correspondendo a $\max w_j w_j^*$.

Generalizando este resultado para as nt raízes de $V_i(w)$, pode-se enunciar a seguinte proposição:

6.7 Proposição: *Seja $T(s)$ um dado polinômio, onde cada uma de suas raízes $\lambda_k, k = 1, \dots, nt$ pertence ao respectivo círculo C_k . Aplicando a transformação (6.12) e considerando a raiz λ_i^0 de $T^0(s)$, obtém-se o polinômio $V_i(w)$ (6.13) onde sua i -ésima raiz w_i satisfaz:*

$$|w_i| \leq \epsilon_i \quad (6.18)$$

Então, tem-se que a seguinte relação é válida:

$$|v_{i,0}| \leq \gamma_i(\epsilon) \quad (6.19)$$

onde

$$\gamma_i(\epsilon) = \epsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^{nt} (|\lambda_j^0 - \lambda_i^0| + \epsilon_j) \quad (6.20)$$

com $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{nt}]$.

A demonstração desta proposição é obtida a partir das equações apresentadas anteriormente, juntamente com a mencionada propriedade polinomial, ou seja:

$$|v_{i,0}| = \left| \prod_{j=1}^{nt} w_j \right| = \left| w_i \prod_{j=1, j \neq i}^{nt} w_j \right| \leq \epsilon_i \prod_{j=1, j \neq i}^{nt} (|\lambda_j^0 - \lambda_i^0| + \epsilon_j) \quad (6.21)$$

□

A partir da equação (6.19), e aplicando-se as transformações (6.12) e (6.13) sucessivamente para todas as raízes nominais λ_i^0 , deriva-se a seguinte expressão como função do vetor de perturbação δ :

$$g_i(t^0, \delta, \epsilon) = \delta^T A_i(t^0) \delta - \gamma_i^2(\epsilon) \leq 0 \quad (6.22)$$

$$i = 1, \dots, n_P = n_Q + n_R$$

onde

n_Q é o número de pares complexos conjugados de $T(s)$.

n_R é o número de raízes reais de $T(s)$.

δ é o vetor de perturbação dado por $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_{nt}]^T$.

A_i é a matriz positiva semi-definida resultante do desenvolvimento de $|v_{i,0}|$.

Em outras palavras, se cada raiz λ_i do polinômio característico $T(s)$ pertence ao respectivo círculo C_i , então os coeficientes deste polinômio devem verificar o conjunto de desigualdades dado em (6.22) (lembrando que $\delta = \mathbf{t} - \mathbf{t}^0$).

Deve-se destacar que os resultados propostos acima, ao contrário daqueles apresentados em Figueroa e Romagnoli (1994), não são conservativos. Na abordagem de Figueroa e Romagnoli (1994), o *mínimo* do produto das raízes é a condição suficiente (mas não necessária) imposta sobre os coeficientes do polinômio característico.

A seguir, as restrições quadráticas acima são utilizadas na obtenção de uma região, denotada por Q_x , no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto \mathcal{W} dos controladores factíveis. A Figura 6.3 ilustra o processo de obtenção do conjunto de restrições.

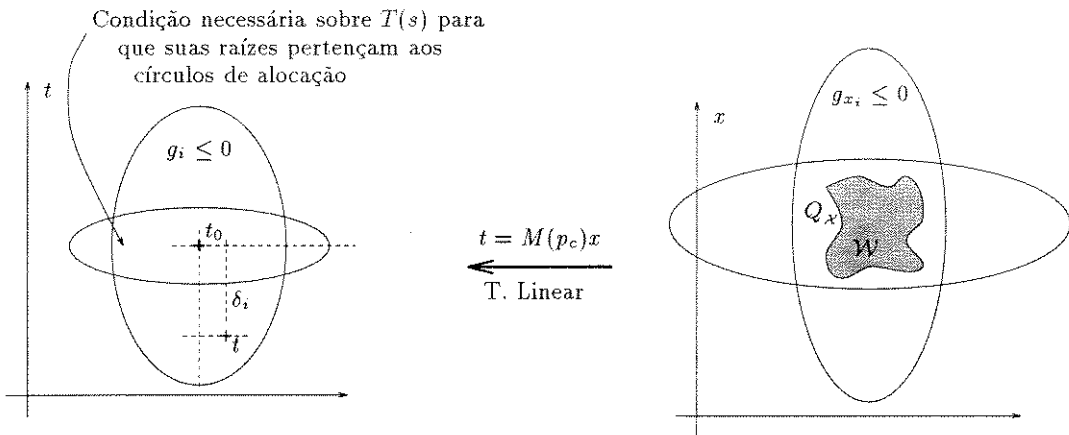


Figura 6.3: Derivação do domínio de busca $Q_x \supset \mathcal{W}$ no espaço de parâmetros do controlador.

Inicialmente, seja a partição da matriz $M(p)$ em (2.16), considerando o parâmetro

central do processo $p = p_c$:

$$M(p_c) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ n^0 & N^0 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

onde $n^0 \in \mathbb{R}^{nt}$, e $N^0 \in \mathbb{R}^{nt \times (nh+ng+1)}$.

Logo, levando-se em conta a linearidade do polinômio característico em relação aos parâmetros do controlador (2.14), pode-se escrever:

$$\mathbf{t} = n^0 + N^0 \mathbf{x} \quad (6.24)$$

Assim, tem-se, pela equação (6.22)

$$g_i = \delta^T A_i \delta - \gamma_i^2(\epsilon) \leq 0 \Rightarrow$$

$$g_i = (\mathbf{t} - \mathbf{t}^0)^T A_i (\mathbf{t} - \mathbf{t}^0) - \gamma_i^2(\epsilon) \leq 0 \Rightarrow \quad (6.25)$$

$$g_{x_i} = \mathbf{x}^T N^{0T} A_i N^0 \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T N^{0T} A_i (n^0 - \mathbf{t}^0) + (n^0 - \mathbf{t}^0)^T A_i (n^0 - \mathbf{t}^0) - \gamma_i^2(\epsilon) \leq 0$$

onde g_{x_i} é a notação para as restrições quadráticas em \mathbf{x} . Portanto, pode-se definir o domínio de busca Q_x como:

$$Q_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nh+ng+1} \mid g_{x_i} \leq 0, i = 1, \dots, n_P.\} \quad (6.26)$$

Lembrando que a condição obtida na Proposição 6.7 é uma condição necessária, fica claro que a região Q_x contém o conjunto dos controladores factíveis \mathcal{W} ($Q_x \supset \mathcal{W}$). Portanto, o objetivo da rotina de otimização é solucionar o problema de maximização restrita dada por:

$$\begin{cases} \max & f(x) \\ & x \in Q_x \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} m(x) & \text{se } x \in \mathcal{W} \\ d(x) & \text{se } x \notin \mathcal{W} \end{cases} \quad (6.27)$$

e $d(x)$ é a função pseudo medida de robustez definida de modo análogo ao apresentado no capítulo anterior, e calculada para os pontos infactíveis ($x \notin \mathcal{W}$). Como o conjunto de restrições é definido por um conjunto de inequações quadráticas, o Algoritmo Genético para restrições convexas, apresentado no Capítulo 4, pode ser prontamente aplicado.

6.4 Exemplo Numérico

Considera-se aqui o mesmo exemplo tratado por Figueroa e Romagnoli (1994), o qual foi inicialmente abordado por Soh *et al.* (1987b). Trata-se de um processo de segunda ordem,

cuja função de transferência e respectivos intervalos de incerteza são dados por:

$$g(s) = \frac{s+b}{s^2 - 2.2s - a} \quad \begin{cases} 2.38 < a < 2.42 \\ 0.97 < b < 1.05 \end{cases}$$

Os círculos de alocação mostrados na Figura 6.4, são definidos por $\lambda_1^0 = -10$, $\lambda_2^0 = -1.0 + j0.7$ e $\lambda_3^0 = -1.0 - j0.7$ com raios iguais a $\epsilon_1 = 0.5$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.7$.

Considera-se a seguinte estrutura para o controlador, juntamente com seu respectivo vetor de parâmetros:

$$G(s)/H(s) = \frac{g_0s + g_1}{s + h_1}, \quad x = [1 \ h_1 \ g_0 \ g_1]^T.$$

As restrições quadráticas g_{x_i} calculadas por (6.25) são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10^4 & -10^3 & 10^2 \\ -10^3 & 10^2 & -10 \\ 10^2 & -10 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2.22 & -1.49 & 0.51 \\ -1.49 & 1.49 & -1.00 \\ 0.51 & -1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = 47.0; \quad \gamma_2 = 14.0; \quad M(p_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.2 & 1 & 1 & 0 \\ -2.4 & -2.2 & 1.01 & 1 \\ 0 & -2.4 & 0 & 1.01 \end{bmatrix}$$

$$t^0 = [1 \ 12.0 \ 21.49 \ 14.9]^T$$

O domínio de busca do algoritmo é definido então por $Q_x = \{x \mid g_{x_i} \leq 0, i = 1, 2\}$. O algoritmo converge após 2 iterações para o seguinte conjunto de parâmetros do controlador:

$$x_f = [1 \ 12.227 \ 1.902 \ 45.595]^T$$

que apresenta uma medida de robustez $m(x_f) = 4.64$ ou, em outras palavras, um intervalo de incerteza admissível correspondendo a $a \in [2.31, 2.49]$ e $b \in [0.83, 1.19]$ que é 4.64 vezes maior do que o assegurado por Figueroa e Romagnoli (1994) para este exemplo. A título de comparação, a Figura 6.4 mostra as raízes obtidas com o controlador a) obtido por Figueroa e Romagnoli (1994) e b) gerado pelo presente método. Nota-se a concentração de raízes em torno dos centros dos círculos em a), indicando a conservatividade das restrições utilizadas. Ao mesmo tempo, confirma-se uma boa distribuição de raízes no caso b).

Concluindo, apresentou-se neste capítulo uma metodologia para o projeto de controladores robustos que aloca os pólos de malha fechada do sistema em um conjunto de regiões circulares circunvizinhas aos pólos nominais definidos. Utilizando propriedades polinomiais

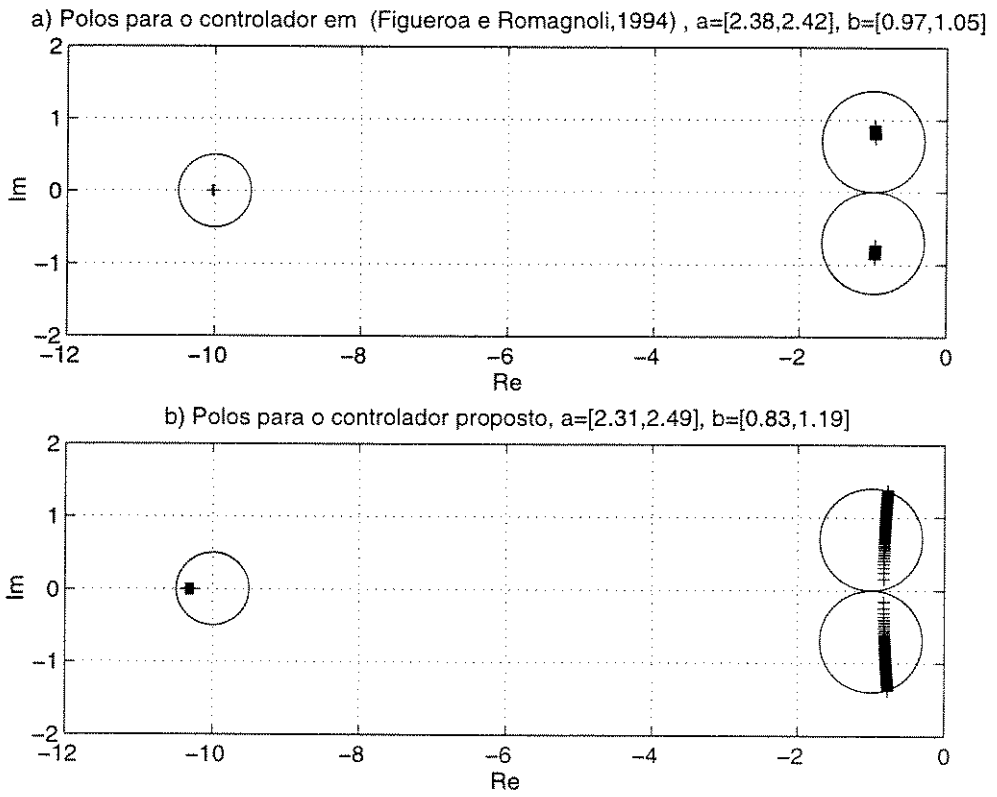


Figura 6.4: Comparação de controladores.

básicas, derivou-se um conjunto de condições necessárias sobre os coeficientes do polinômio característico tal que as suas raízes pertençam aos círculos dados. Estas condições necessárias foram usadas para a obtenção de um domínio de busca Q_x no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto W dos controladores factíveis. Dentro deste domínio fechado Q_x , o Algoritmo Genético procura pelo controlador mais robusto. O exemplo considerado em Figueroa e Romagnoli (1994) é usado para ilustrar a eficiência do método.

Na abordagem de Figueroa e Romagnoli (1994), uma condição suficiente para que as raízes do polinômio característico estejam dentro dos respectivos círculos é derivada. Dado que o projeto é totalmente baseado nesta restrição, é fundamental a utilização de uma condição que seja *suficiente*. Como esta condição é imposta a todos polinômios resultantes da combinação de um dado controlador com os parâmetros incertos do processo, a margem de incerteza paramétrica assegurada pelo controlador obtido resulta conservativa.

A abordagem aqui proposta para a síntese do controlador robusto se baseia em dois aspectos importantes. A otimização de uma *medida de robustez* de um dado controlador (que dá a suficiência com relação à robustez garantida) é realizada com relação aos parâmetros que satisfazem um conjunto de *condições necessárias*, cuja única função é delimitar o espaço de busca do algoritmo. Desta forma, o resultado conservativo resultante da imposição de uma condição suficiente pode ser evitado.

É interessante observar que a metodologia adotada se enquadra perfeitamente nas considerações acerca da análise e síntese de controladores colocadas em Ackermann (1993). Na página 269 do referido livro, lê-se: “Condições necessárias de estabilidade apresentam um valor limitado na análise de robustez, porque é preciso ser pessimista na análise. Para o projeto, contudo, as condições necessárias de estabilidade são úteis já que estas fornecem uma região finita no espaço de parâmetros do controlador aonde as possíveis soluções devem estar alocadas”.

O capítulo seguinte apresenta uma relação de exemplos numéricos e aplicações envolvendo os resultados apresentados nos capítulos precedentes.

Capítulo 7

Exemplos e Aplicações

7.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, foram desenvolvidas metodologias específicas para o cálculo dos parâmetros de um controlador linear que apresente um desempenho aceitável diante das incertezas paramétricas do processo controlado. Neste capítulo, acrescentam-se alguns exemplos numéricos e aplicações do método desenvolvido.

Primeiramente, na Seção 7.2, apresenta-se um exemplo simples com relação a um sistema discreto de primeira ordem. Este exemplo, apresentado em Santos-Mendes (1989), já foi considerado no Capítulo 3 nas discussões das limitações dos métodos de gradiente. Aqui, o algoritmo apresentado no Capítulo 5 é utilizado na determinação de um controlador robusto para o sistema.

A seção 7.3 apresenta um sistema discreto de fase não-mínima com inclusão de integrador. Este problema foi solucionado originalmente em Araújo (1991b) através do método de gradientes. Aqui, a solução do problema é obtida para duas ordens distintas do controlador, com excelentes índices de robustez.

Na seção 7.4 discute-se o sistema contínuo “Duas Massas/Uma Mola”, apresentado em El Ghaoui (1990) e também discutido anteriormente no Capítulo 3. Soluciona-se o problema da estabilidade para 3 casos distintos da ordem do controlador, sendo que para o terceiro caso (controlador de 4a. ordem), destaca-se que o método de síntese com gradientes de El Ghaoui (1990) não obteve um controlador robusto.

Finalmente, na seção 7.5, considera-se o modelo em tempo contínuo do eixo lateral de uma aeronave L-1011, apresentado em Galimidi e Barmish (1986), correspondendo a um sistema (SIMO) de duas saídas e uma entrada. Obtém-se os parâmetros dos controladores que

estabilizam o sistema, considerando também três situações distintas nas ordens dos mesmos.

7.2 Sistema de Primeira Ordem com Integrador

Apresenta-se aqui o exemplo de um sistema discreto de primeira ordem, com duas incertezas paramétricas. Este exemplo já foi abordado no Capítulo 2 para exemplificar o cálculo da medida de robustez para um dado controlador, e também no Capítulo 3 para ilustrar as limitações dos métodos de síntese de controladores baseados em gradiente. Trata-se de um sistema de primeira ordem, abordado originalmente em Santos-Mendes (1989), dado pela seguinte função de transferência:

$$y(k) = \frac{z^{-1}b}{1 + az^{-1}}u(k) \quad (7.1)$$

Os parâmetros a e b estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{cases} -0.6 < a < -0.4 \\ 0.3 < b < 0.7 \end{cases} \quad (7.2)$$

Deseja-se encontrar um controlador do tipo PI, de modo a alocar os pólos do sistema em malha fechada na região D do plano complexo representada na Figura 7.1. Esta região D é obtida considerando-se o índice de desempenho $\xi\omega_n > 40$ e o sobre-sinal máximo $M_p < 0.1$ ($\xi > 0.6$) como especificações da resposta transitória.

A estrutura do controlador PI é dada pela equação seguinte:

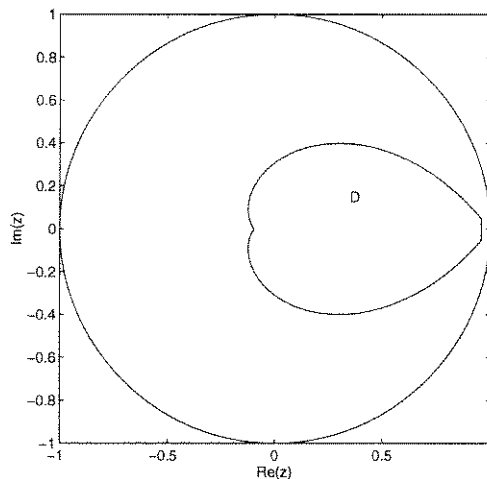


Figura 7.1: Região para alocação de pólos.

$$u(k) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}y(k) + \frac{e_0}{1 - z^{-1}}r(k) \quad (7.3)$$

onde e_0 é escolhido de forma a garantir erro nulo em regime para uma entrada em degrau, ou seja, $e_0 = g_0 + g_1$. O vetor de parâmetros do controlador é definido então como $x = [1 \ g_0 \ g_1]^T$.

O problema consiste na obtenção dos parâmetros g_0 e g_1 tais que o polinômio característico em malha fechada tenha raízes na região D da Figura 7.1, quaisquer que sejam os valores de a e b definidos em (7.2).

Considerando-se a otimização dos parâmetros do controlador através da metodologia apresentada no Capítulo 5, definiu-se o círculo C contendo a região de alocação D como sendo um círculo centrado em $z = 0.39$ com raio $r = 0.59$, conforme se observa da Figura 7.2. Este círculo é usado na determinação do domínio de busca politópico no espaço de parâmetros do controlador. Executando-se o algoritmo de otimização proposto para este problema (considerando apenas a ordem definida acima para o controlador), obteve-se o seguinte vetor de parâmetros para o mesmo:

$$x^* = [1 \ g_0 \ g_1]^T = [1 \ 0.7803 \ -0.3735]^T \quad (7.4)$$

cuja medida de robustez equivale a

$$m(x^*) = 2.14 \quad (7.5)$$

que corresponde ao seguinte intervalo admissível para os parâmetros incertos:

$$\begin{cases} -0.714 < a < -0.285 \\ 0.070 < b < 0.929 \end{cases} \quad (7.6)$$

A nuvem de raízes correspondendo às combinações destas incertezas com o controlador obtido é dada na Figura 7.2. Observa-se o excelente aproveitamento de espaço na distribuição das raízes dentro da região de alocação.

Como se trata de um exemplo simples, com apenas 2 variáveis de otimização, é fácil verificar através de uma varredura exhaustiva, que os valores encontrados para as variáveis otimizadas, correspondem com boa precisão ao ótimo global para $\{\max m(x)\}$. Na simulação com o método de gradientes, em 10 situações diferentes para as condições iniciais (conforme Capítulo 3), apenas em um caso obteve-se um resultado próximo ao ótimo global ($x^* = [1 \ 0.816 \ -0.384]$ com medida de robustez $m(x^*) = 2.08$).

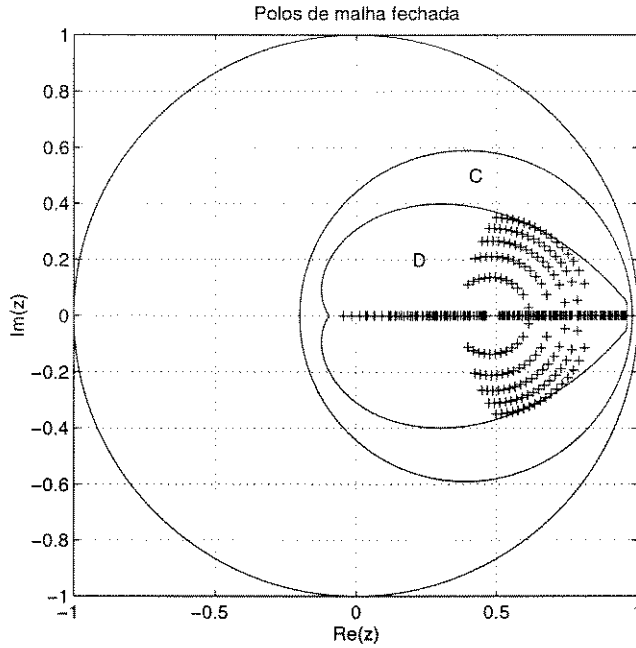


Figura 7.2: Pólos de malha fechada considerando-se as incertezas admissíveis.

7.3 Sistema de Fase Não-Mínima

Considera-se aqui o sistema discreto de fase não mínima¹ com integrador, discutido em Araújo (1991b), dado pela seguinte função de transferência:

$$\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}(b_0 + b_1z^{-1})}{(1 + a_1z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (7.7)$$

cujos parâmetros estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{cases} -0.99 < a_1 < -0.89 \\ 0.38 < b_0 < 0.58 \\ 0.36 < b_1 < 0.56 \end{cases} \quad (7.8)$$

O objetivo é projetar um controlador linear robusto que aloque os pólos do sistema em malha fechada na região elíptica D mostrada na Figura 7.3, considerando-se todas as possíveis combinações dos parâmetros a_1 , b_0 e b_1 . A elipse D é definida com centro em $z = 0.5$ e semi-eixos vertical e horizontal iguais a 0.4 e 0.48, respectivamente.

Considera-se dois tipos de estruturas para a ordem do controlador, uma de primeira ordem e a outra de segunda ordem, conforme a Tabela 7.1.

Os resultados obtidos com o algoritmo de otimização do Capítulo 5 são apresentados

¹De fato, o sistema será de fase não-mínima apenas para um subconjunto das incertezas do processo correspondendo a $|b_1| > |b_0|$.

Caso	Estrutura do Controlador	Vetor de Parâmetros
1	$\frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 + h_1 z^{-1}}$	$x = [1 \ h_1 \ g_0 \ g_1]^T$
2	$\frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}}$	$x = [1 \ h_1 \ h_2 \ g_0 \ g_1 \ g_2]^T$

Tabela 7.1: Estruturas abordadas para o controlador.

na Tabela 7.2. Verifica-se que a medida de robustez ótima para o controlador de 2a. ordem apresentou um aumento de 18% em relação ao de primeira ordem, como previsto pelo Teorema 5.3 apresentado no Capítulo 5.

As nuvens de raízes para os 2 casos, considerando-se as incertezas admissíveis em

Caso	Parâmetros do Controlador	Robustez $m(x^*)$	Incertezas Admissíveis
1	$x^* = [1 \ 0.027 \ 0.3266 \ -0.3103]^T$	2.65	$-1.0725 < a_1 < -0.8075$ $0.215 < b_0 < 0.745$ $0.195 < b_1 < 0.725$
2	$x^* = [1 \ -0.7828 \ -0.0003 \ 0.3418 \ -0.5455 \ 0.2089]^T$	3.14	$-1.097 < a_1 < -0.783$ $0.166 < b_0 < 0.794$ $0.146 < b_1 < 0.774$

Tabela 7.2: Resultados obtidos para os controladores de 1a. e 2a. ordem.

cada situação, são mostradas na Figura 7.3.

As respostas temporais para uma entrada do tipo degrau são mostradas na Figura 7.4. Para a simulação das respostas temporais utilizaram-se os valores extremos dos intervalos de incerteza correspondentes a 90%². Ou seja, para o controlador de 1a. ordem, utilizaram-se os 8 conjuntos de parâmetros correspondentes aos extremos dos intervalos:

$$\begin{cases} -1.0593 < a_1 < -0.8207 \\ 0.2415 < b_0 < 0.7185 \\ 0.2215 < b_1 < 0.6985 \end{cases} \quad (7.9)$$

²Devido à escolha da região D neste caso, algumas simulações para 100% das incertezas admissíveis apresentam um amortecimento muito baixo.

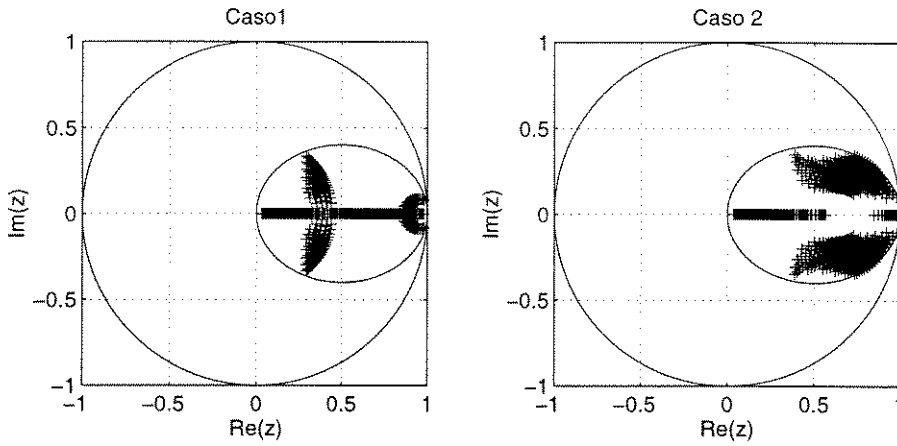


Figura 7.3: Pólos de malha fechada considerando-se as incertezas admissíveis.

e para o controlador de 2a. ordem. os extremos dos intervalos:

$$\begin{cases} -1.081 < a_1 < -0.799 \\ 0.198 < b_0 < 0.762 \\ 0.178 < b_1 < 0.742 \end{cases} \quad (7.10)$$

As respostas temporais subamortecidas (mais pronunciadas para o caso do con-

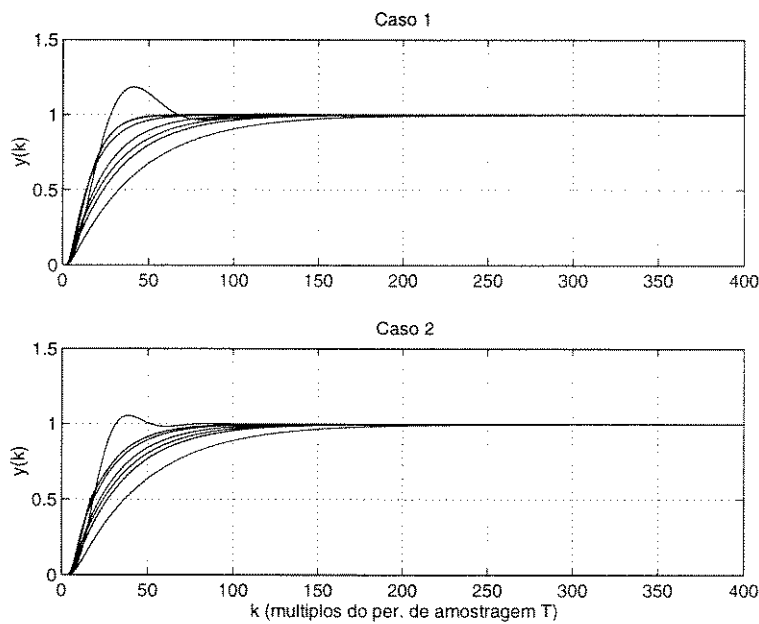


Figura 7.4: Respostas temporais para uma entrada em degrau.

trolador de 1a. ordem) correspondem a pólos complexos no extremo direito da elipse de

alocação (próximos ao círculo unitário) e poderiam ser evitadas com a escolha de uma região de alocação mais restritiva.

7.4 Sistema “Duas Massas/Uma Mola”

Apresenta-se aqui a solução do problema “Duas Massas/Uma Mola”, já abordado no Capítulo 3, utilizando o método proposto neste trabalho. O exemplo foi apresentado também no Capítulo 5 onde incluía a presença de um sinal de perturbação estocástico. Considera-se, na presente discussão, apenas o problema da estabilidade robusta. Este sistema é tradicionalmente abordado na literatura (El Ghaoui, 1990), sendo também o exemplo mais simples de uma estrutura flexível. O sistema em tempo contínuo é mostrado na Figura 7.5.

A massa m_1 é suposta conhecida e de valor $m_1 = 1$, e os dois parâmetros incertos são

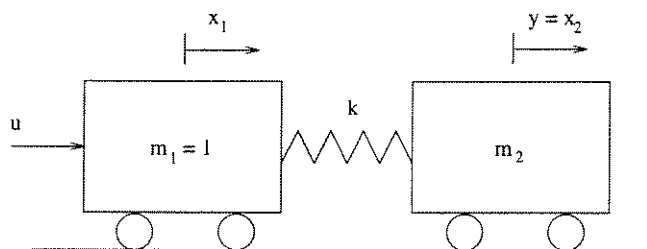


Figura 7.5: Sistema Duas Massas/Uma Mola.

a massa m_2 e a constante da mola k , ambos com valor nominal unitário. Os parâmetros l_1 e l_2 representam a constante da mola normalizada para ambas as massas, ou seja, $l_1 = k/m_1$ e $l_2 = k/m_2$. A saída y é o deslocamento x_2 da massa m_2 . A representação do sistema no espaço de estados é dada por (El Ghaoui, 1990):

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l_1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_2 & 0 & -l_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (7.11)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] x$$

onde o vetor de estados é dado por:

$$x = [x_1 \ \dot{x}_1 \ x_2 \ \dot{x}_2]^T \quad (7.12)$$

e os parâmetros são:

$$l_1 = \frac{k}{m_1}, \quad l_2 = \frac{k}{m_2} \quad (7.13)$$

com valores nominais iguais a:

$$l_1^{nom} = l_2^{nom} = 1 \quad (7.14)$$

Admite-se como intervalos de incerteza, $l_1 \in (0, 2)$ e $l_2 \in (0, 2)$. O objetivo é encontrar um controlador dinâmico que estabilize o sistema para todos os valores dos parâmetros incertos.

Em El Ghaoui (1990), várias estruturas de controlador são propostas para solucionar o problema. A norma utilizada pelo autor para medir os desvios paramétricos é a norma ℓ_2 (portanto, correspondendo a regiões de incerteza hiperesféricas ao invés de hipercúbicas), e a margem paramétrica admissível para o controlador é chamada de “margem de parâmetros” (pm) — o equivalente da medida de robustez aqui definida. No caso de realimentação de saída para um controlador de segunda ordem, o método citado encontra um controlador solução para o problema ($pm = 1.0$), mas para o controlador de realimentação de saída de ordem completa (4a. ordem), a máxima robustez conseguida equivale a $pm = 0.4064$. Através do método desenvolvido neste trabalho, pôde-se obter um controlador de 4a. ordem com robustez máxima, o que evidencia as deficiências dos métodos de gradiente e a potencialidade da metodologia aqui apresentada.

A fim de se tratar o problema de acordo com o modelo aqui considerado, obteve-se a representação equivalente do sistema em função de transferência (para se aplicar os resultados de robustez apresentados no Capítulo 2 para o caso contínuo, as funções de transferência devem se apresentar como funções em s^{-1} ao invés de s). Conforme apresentado no Capítulo 5, a função de transferência em malha aberta relacionando a saída $y(t)$ à entrada de controle $u(t)$ é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{l_2}{s^4 + (l_1 + l_2)s^2} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (7.15)$$

onde os valores nominais dos parâmetros são $l_1^{nom} = l_2^{nom} = 1$.

Como a região de alocação para os pólos é o próprio semi-plano esquerdo em s , define-se um círculo C no mesmo, a fim de se obter um domínio de busca linear para o algoritmo. Adotou-se neste caso um círculo centrado em $s = -5$ com raio $r = 5$. Consideraram-se 3 ordens diferentes para o controlador, segundo se observa da Tabela 7.3. Esta tabela também mostra os parâmetros ótimos obtidos com o algoritmo para cada situação, juntamente com a medida de robustez correspondente. O caso estático e o de 1a. ordem não admitem soluções factíveis para este problema ($\mathcal{W} \equiv \emptyset$).

Observa-se que para este exemplo todos os controladores obtidos têm robustez igual a 0.999. O Teorema 5.3 permite conjecturar que este é um limite teórico para a robustez de qualquer controlador para este sistema. Destaca-se aqui, a obtenção do controlador robusto

de 4a. ordem, que não foi obtido anteriormente em El Ghaoui (1990), por se tratar de um problema bastante complexo (10 variáveis de otimização) para ser solucionado com métodos de gradiente.

Caso	Ord. Cont.	Parâmetros Ótimos (x^*)	m^*
1	$nh, ng = 2$	$[1 \ 12.3948 \ 24.7810 \ -19.5713 \ 0.0067 \ 0.0005]^T$	0.999
2	$nh, ng = 3$	$[1 \ 13.7969 \ 105.63 \ 327.8819 \ 441.3526 \ 416.2397 \ 0.0927 \ 0.086]^T$	0.999
3	$nh, ng = 4$	$1e3*[0.001 \ 0.0214 \ 0.2246 \ 1.2603 \ 3.3626 \ 0.8803 \ 6.3918 \ 2.5521 \ 0.0002 \ 0.0001]^T$	0.999

Tabela 7.3: Resultados para os controladores dos casos 1,2 e 3.

A Figura 7.6 mostra os pólos de malha fechada do sistema com relação ao controlador de 4a. ordem.

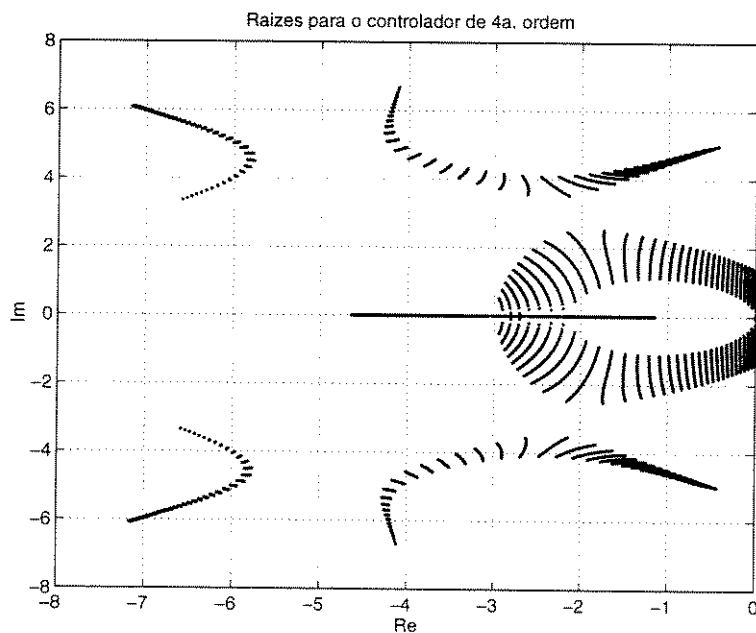


Figura 7.6: Pólos de malha fechada para o controlador de 4a. ordem.

7.5 Modelo Dinâmico para a Aeronave L-1011

Apresenta-se aqui a aplicação do algoritmo proposto no Capítulo 5 na determinação de um controlador estabilizante para o modelo dinâmico do eixo lateral de uma aeronave L-1011. O modelo do sistema na representação de espaço de estados, segundo Galimidi e Barmish, (1986) é dado por:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2.98 & \mathbf{a} & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix} u \quad (7.16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

onde $x \in \mathbb{R}^4$ é o vetor de estados do sistema e \mathbf{a} é o parâmetro incerto, cujo intervalo de incerteza é dado por $\mathbf{a} \in (-0.57, 2.43)$.

A função de transferência, com duas saídas e uma entrada, correspondente a esta representação do modelo é dada por:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{A(s)} \begin{bmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix} U(s) \quad (7.17)$$

onde

$$A(s) = s^4 + 5.08s^3 + (6.662 + 0.99\mathbf{a})s^2 + (1.5487 + 1.8711\mathbf{a})s + (0.5793 - 0.0132\mathbf{a})$$

$$B_1(s) = -1.6s^2 - 5.1165s - (1.1799 + 1.584\mathbf{a})$$

$$B_2(s) = -1.6s^3 - 5.1165s^2 - (1.1799 + 1.584\mathbf{a})s \quad (7.18)$$

A estrutura do controlador, considerando uma referência nula ($r \equiv 0$), é dada por:

$$U(s) = \frac{-1}{H(s)} [G_1(s) \ G_2(s)] Y(s) \quad (7.19)$$

onde

$$\begin{aligned} H(s) &= s^{nh} + h_1 s^{nh-1} + h_2 s^{nh-2} + \dots + h_{nh} \\ G_1(s) &= g_{10} s^{ng_1} + g_{11} s^{ng_1-1} + g_{12} s^{ng_1-2} + \dots + g_{1ng_1} \\ G_2(s) &= g_{20} s^{ng_2} + g_{21} s^{ng_2-1} + g_{22} s^{ng_2-2} + \dots + g_{2ng_2} \end{aligned} \quad (7.20)$$

O vetor de parâmetros do controlador é dado por:

$$x = [1 \ h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_{nh} \ g_{10} \ g_{11} \ g_{12} \ \cdots \ g_{1ng_1} \ g_{20} \ g_{21} \ g_{22} \ \cdots \ g_{2ng_2}]^T \in \mathbb{R}^{nh+ng_1+ng_2+3} \quad (7.21)$$

O objetivo é encontrar um controlador que estabiliza o sistema para todos os valores dos parâmetros incertos $\mathbf{a} \in (-0.57, 2.43)$. Para a determinação do domínio politópico de busca definiu-se o círculo C centrado em $s = -5$ com raio $r = 5$. Considera-se 3 ordens diferentes para o controlador, segundo a Tabela 7.4. Esta tabela também apresenta os resultados apresentados com a simulação do algoritmo, incluindo os parâmetros ótimos obtidos, a respectiva medida de robustez e o intervalo admissível para o parâmetro incerto.

Em todas as 3 situações, o controlador obtido x^* representa uma solução para o

Ordem Contr.	Parâmetros Ótimos (x^*)	m^*	\mathbf{a}
$nh, ng_1, ng_2 = 0$	$[1.0 \ -0.3761 \ -0.2213]^T$	1.72	(-1.65, 3.51)
$nh, ng_1, ng_2 = 1$	$[1.0 \ 3.6511 \ 3.3479 \ -0.6594 \ 2.6545 \ -0.3686]^T$	2.55	(-2.89, 4.75)
$nh, ng_1, ng_2 = 2$	$[1.0 \ -1.7179 \ 90.2201 \ 52.3454 \ 109.1376 \ -13.5355 \ -0.8077 \ -11.4009 \ -21.2344]^T$	2.84	(-3.33, 5.19)

Tabela 7.4: Resultados para os controladores de ordem 0,1 e 2.

problema inicial (já que $m(x^*) > 1$). Novamente ressalta-se que, em problemas como este, com grande número de variáveis a otimizar, os métodos de gradiente dificilmente obtêm o controlador mais robusto. Mais uma vez, pode-se observar o aumento da medida de robustez ótima m^* com o aumento da ordem do controlador, segundo o Teorema 5.3. A Figura 7.7 mostra os pólos do sistema em malha fechada para cada uma das situações, considerando os respectivos intervalos admissíveis da incerteza paramétrica.

Em conclusão, apresentaram-se neste capítulo uma série de aplicações do algoritmo proposto no Capítulo 5 envolvendo sistemas discretos e contínuos. Pôde-se verificar a otimização eficiente dos controladores robustos não somente em relação aos seus parâmetros, mas também em relação às suas estruturas (ordens).

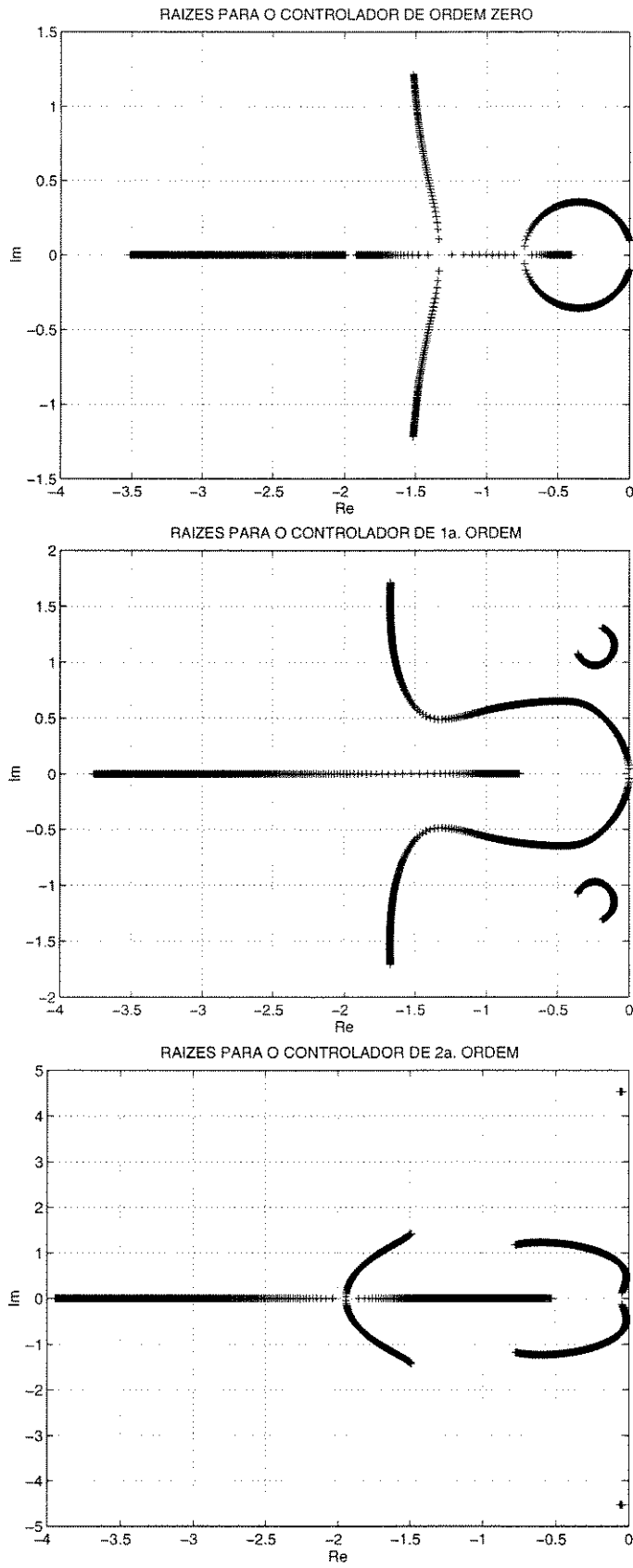


Figura 7.7: Pólos de malha fechada para os controladores de ordem 0,1 e 2.

Capítulo 8

Polinômio Característico Não-Linear nos Parâmetros do Processo

8.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo uma proposta de solução alternativa para o caso geral em que os coeficientes do polinômio característico são funções não-lineares dos coeficientes do processo. A Seção 8.2 traz uma discussão sobre alguns dos principais métodos que abordam este problema, destacando as vantagens e os pontos problemáticos de cada abordagem.

O método de análise de robustez adotado nesta tese pressupõe a linearidade do polinômio característico em relação aos parâmetros do processo. Na realidade, os poucos métodos encontrados na literatura enfocando a não-linearidade geralmente fornecem uma solução exata apenas para alguns casos particulares. Na maioria das vezes, o que se tem é um limitante inferior da margem de parâmetros (medida de robustez) para o caso mais geral. A proposta aqui é de uma solução aproximada para o problema utilizando uma rotina de busca multidimensional baseada em algoritmos genéticos. A metodologia limita-se aos casos em que o número de incertezas é reduzido. A otimização numérica é aplicada tanto na etapa de análise como na etapa de síntese dos controladores. O processo de síntese é implementado sem considerações prévias sobre o domínio de busca para os parâmetros, ao contrário do caso linear apresentado anteriormente. Ou seja, definem-se *a priori* limites inferiores e superiores para os parâmetros do controlador, sendo a robustez do mesmo otimizada sobre este conjunto. Ao final da etapa de otimização, um método de análise alternativo, como, por exemplo, o método de El Ghaoui (1990, 1992), é utilizado para garantir a medida de robustez do controlador obtido. Apresentam-se, ao final do capítulo, dois importantes exemplos de aplicação do algoritmo: o sistema de 3 massas e 2 molas apresentado em El Ghaoui (1990,

1992), e o problema do controle vertical de um helicóptero, proposto em Bhattacharyya, (1987).

8.2 Histórico do Problema

O tratamento da robustez para o caso em que os coeficientes do polinômio característico são funções não-lineares dos parâmetros do processo apresenta uma grande complexidade, sendo que a maioria dos métodos fornece apenas limitantes (superior/inferior) para a margem paramétrica, ou então soluciona o problema, para o caso geral, através de otimização numérica multidimensional.

Dentre os casos de não-linearidade do polinômio característico destaca-se o caso dos sistemas MIMO (múltiplas entradas, múltiplas saídas), cujos polinômios característicos apresentam termos do tipo produto dos coeficientes do processo. Obviamente, o próprio caso SISO (entrada simples, saída simples) pode, dependendo da estrutura do problema, apresentar não-linearidade nos coeficientes do polinômio característico.

Apresenta-se a seguir, uma rápida descrição de cinco das principais abordagens que consideram o problema da não-linearidade no polinômio característico. A abordagem de Geromel *et al.* (1991) é formulada para uma representação em espaço de estados. As abordagens de Chapellat *et al.* (1993) e Zettler e Garloff (1996) trabalham diretamente com a representação em funções de transferência, enquanto que as abordagens da Análise μ e El Ghaoui (1990, 1992) prevêm uma formulação para ambas as representações.

8.2.1 Abordagem de Chapellat

Esta abordagem considera o caso particular em que as incertezas paramétricas aparecem de forma multilinear no polinômio característico, denotado aqui por $\delta(s)$, ou seja:

$$\delta(s) = F_1(s)P_{11}(s) \cdots P_{1r_1}(s) + \cdots + F_m(s)P_{m1}(s) \cdots P_{mr_m}(s) \quad (8.1)$$

onde P_{ij} são os polinômios do processo com incertezas do tipo intervalo, e F_k correspondem aos polinômios do controlador (Figura 8.1).

Em Chapellat *et al.* (1993) define-se um subconjunto dos polinômios incertos do processo, denominados segmentos CB, numa extensão direta dos resultados de Kharitonov (1979). Estes segmentos CB apresentam importantes propriedades com relação a todo o conjunto de incertezas, sendo que as margens de estabilidade e desempenho para todo o sistema

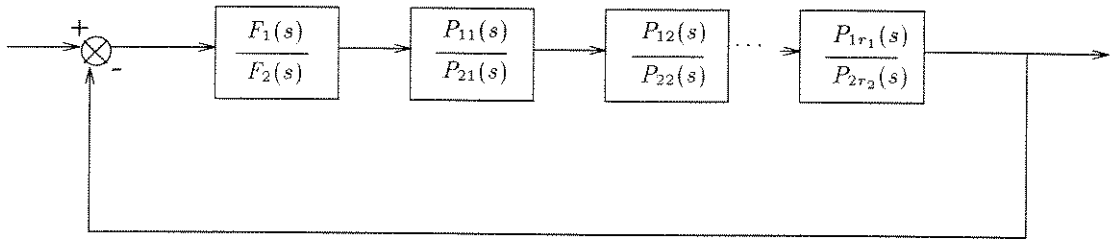


Figura 8.1: Exemplo de um sistema com perturbações multilineares no caso SISO.

incerto podem ser calculadas dentro deste subconjunto reduzido de incertezas.

O importante Teorema de Kharitonov fornece uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de uma família de polinômios incertos através de um teste simples sobre a estabilidade de apenas 4 polinômios especiais dentro deste conjunto. A apresentação formal do Teorema de Kharitonov é dada a seguir:

8.1 Teorema (Kharitonov, 1979):

Considere a família \mathcal{F} de polinômios:

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n \quad (8.2)$$

onde

$$\delta_i \in [x_i, y_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (8.3)$$

Então, a família \mathcal{F} é estritamente Hurwitz (assintoticamente estável) se e somente se os quatro polinômios abaixo:

$$\begin{aligned} K^1(s) &= x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4 + \dots \\ K^2(s) &= x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4 + \dots \\ K^3(s) &= y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4 + \dots \\ K^4(s) &= y_0 + y_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + y_4 s^4 + \dots \end{aligned} \quad (8.4)$$

são estritamente Hurwitz.

O Teorema de Kharitonov se aplica apenas ao caso contínuo e não abrange uma possível dependência entre os coeficientes do polinômio característico considerado. Apesar destas limitações, este é um dos resultados mais citados da literatura de controle robusto, tendo iniciado toda uma geração de trabalhos nesta área.

Em Chapellat *et al.* (1993) estende-se a definição dos polinômios-vértice de Kharitonov, sobre os quais se testa a estabilidade de toda a família de polinômios, para a definição de polinômios-segmento, denominados *segmentos CB*.

Considere a região de incerteza $\mathbf{\Pi}$ no espaço de coeficientes dos polinômios $P_{ij}(s)$ definidos acima:

$$\mathbf{\Pi} = \{\mathbf{p} \mid p_{ij}^l \in [\alpha_{ij}^l, \beta_{ij}^l], i \in \bar{m}, j \in \bar{r}_i, l = 0, 1, \dots, \text{grau}(P_{ij})\}. \quad (8.5)$$

Logo, pode-se escrever:

$$\delta(s) = F_1(s)P_{11}(s, \mathbf{p}) \cdots P_{1r_1}(s, \mathbf{p}) + \cdots F_m(s)P_{m1}(s, \mathbf{p}) \cdots P_{mr_m}(s, \mathbf{p}). \quad (8.6)$$

Seja Δ a família de polinômios gerados do mapeamento $\mathbf{p} \longrightarrow \delta(s)$, obtida fazendo-se com que o vetor \mathbf{p} assuma valores sobre o hiperretângulo $\mathbf{\Pi}$:

$$\Delta = \{\delta(s, \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}\}. \quad (8.7)$$

Considere-se as seguintes definições :

- $K_{ij}^k(s)$, $k = 1, 2, 3, 4$ - são os quatro polinômios de Kharitonov associados à família correspondente de polinômios-intervalo $P_{ij}(s)$.
- Sejam os seguintes polinômios segmento, denominados *segmentos de Kharitonov*, associados a cada polinômio incerto $P_{ij}(s)$:

$$\begin{aligned} S_{ij}^1 &= [K_{ij}^1(s), K_{ij}^2(s)] = \lambda K_{ij}^1(s) + (1 - \lambda)K_{ij}^2(s), \quad \lambda \in [0, 1] \\ S_{ij}^2 &= [K_{ij}^1(s), K_{ij}^3(s)] = \lambda K_{ij}^1(s) + (1 - \lambda)K_{ij}^3(s), \quad \lambda \in [0, 1] \\ S_{ij}^3 &= [K_{ij}^2(s), K_{ij}^4(s)] = \lambda K_{ij}^2(s) + (1 - \lambda)K_{ij}^4(s), \quad \lambda \in [0, 1] \\ S_{ij}^4 &= [K_{ij}^3(s), K_{ij}^4(s)] = \lambda K_{ij}^3(s) + (1 - \lambda)K_{ij}^4(s), \quad \lambda \in [0, 1] \end{aligned} \quad (8.8)$$

- Seja $\mathbf{\Pi}_l$ um subconjunto de $\mathbf{\Pi}$ obtido da seguinte forma. Os polinômios $P_{ij}(s)$, $i \neq l$ assumem valores sobre os polinômios vértice de Kharitonov K_{ij}^k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r_i$, e os polinômios $P_{lj}(s)$ assumem valores sobre os segmentos de Kharitonov S_{lj}^k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j = 1, \dots, r_l$.

- Seja Δ_l , $l = 1, \dots, m$ o conjunto dos polinômios resultantes da combinação dos polinômios fixos $\bar{F} = [F_1(s) F_2(s) \cdots F_m(s)]$ com o subconjunto $\mathbf{\Pi}_l$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \{\delta(s) \mid \delta(s) = F_1(s)K_{11}^{i(1,1)}(s)K_{12}^{i(1,2)}(s) \cdots K_{1r_1}^{i(1,r_1)}(s) + \cdots \\ &\quad + F_l(s)S_{l1}^{i(l,1)}(\lambda_{l1}, s) \cdots S_{lr_l}^{i(l,r_l)}(\lambda_{lr_l}, s) + \cdots \\ &\quad + F_m(s)K_{m1}^{i(m,1)}(s)K_{m2}^{i(m,2)}(s) \cdots K_{mr_m}^{i(m,r_m)}(s)\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

De forma análoga à definição de Δ , tem-se:

$$\Delta_l = \{\delta(s, \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}_l\}. \quad (8.10)$$

- Seja $\Pi_{\text{CB}} \equiv \cup_{l=1}^m \Pi_l$.
- E finalmente $\Delta_{\text{CB}} \equiv \cup_{l=1}^m \Delta_l = \{\delta(s, \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \Pi_{\text{CB}}\}$.

Finalmente pode-se enunciar o seguinte teorema:

8.2 Teorema (Chapellat *et al.*, 1993): *Dado um conjunto fixo de parâmetros do controlador representados pelo conjunto de polinômios $\bar{F} = [F_1(s) \ F_2(s) \ \cdots \ F_m(s)]$, tem-se que \bar{F} estabiliza Π se e somente se \bar{F} estabiliza Π_{CB} .*

Este teorema garante que a estabilidade para toda a família de polinômios com incertezas multilíneas pode ser determinada a partir da estabilidade para o subconjunto definido Π_{CB} . O teorema também pode ser modificado para considerar a situação em que os coeficientes dos polinômios $P_{ij}(s)$ são interdependentes. Uma margem paramétrica de estabilidade (medida de robustez) pode ser igualmente obtida através desta metodologia.

8.2.2 Abordagem da Análise μ

Uma abordagem tradicional para o tratamento de robustez em sistemas com perturbações estruturadas é o método da Análise μ (Doyle, 1982). Nesta abordagem, as perturbações multiparamétricas são representadas por um laço de realimentação interna envolvendo uma matriz de transferência $M(j\omega)$. Desta forma, os métodos para tratamento de sistemas MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas), envolvendo auto-valores e valores singulares, são usados na análise das perturbações multiparamétricas limitadas em norma (Whidborne *et al.*, 1995)

A representação adotada para o sistema na Análise μ é a representação padrão largamente utilizada em várias abordagens de controle robusto (Figura 8.2). O sistema é descrito por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ u &= K(s)y \end{aligned} \tag{8.11}$$

onde os sinais são: u - a variável de controle, y - as variáveis medidas, w - o sinal exógeno, e z a saída regulada. A matriz de transferência de malha fechada de w para z é dada pela seguinte relação :

$$z = \mathcal{F}_1(P, K)w \tag{8.12}$$

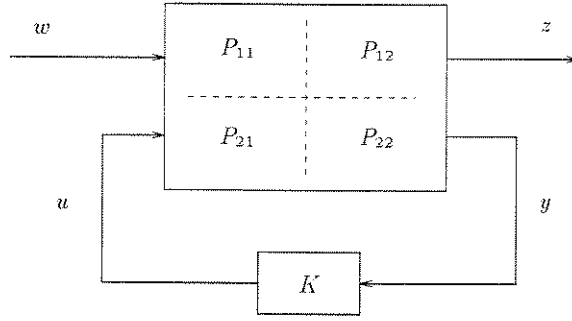


Figura 8.2: Representação padrão para o sistema.

onde

$$\mathcal{F}_1(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (8.13)$$

A partir desta representação, as perturbações (incertezas) presentes no modelo do sistema podem ser representadas na forma da estrutura da Figura 8.3. A matriz P descreve a planta, cujas entradas e saídas são ponderadas de forma que se tenha as normas das matrizes de incerteza iguais a 1. O controlador K mapeia as medidas y às entradas de controle u . A matriz $\Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1$ representa a perturbação de incerteza estruturada, limitada em norma, onde:

$$\Delta_1 = \{\Delta_1 \mid \Delta_1 = \text{bloco diag}(\Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_{F_1}}), \Delta_{k_i} \in \mathcal{C}^{k_i \times k_i}, i = 1, \dots, F_1\} \quad (8.14)$$

$$\mathbf{B}\Delta_1 = \{\Delta \in \Delta_1 \mid \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$$

onde F_1 é o número de blocos complexos na perturbação estruturada Δ_1 e $\bar{\sigma}$ denota o valor

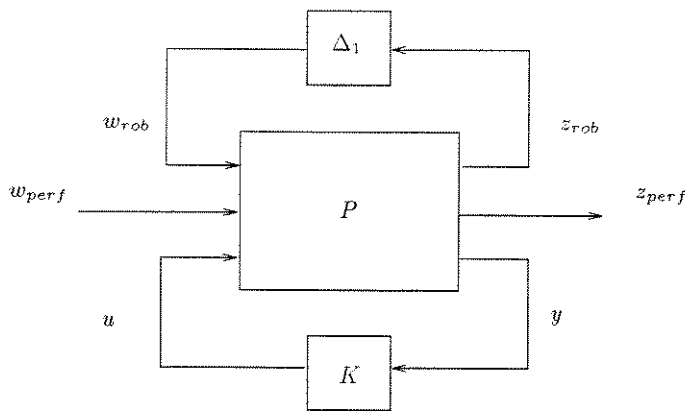


Figura 8.3: Representação para a Análise μ .

singular máximo de uma matriz.

O mapeamento $w_{rob} \rightarrow z_{rob}$ caracteriza o modelo de incerteza utilizado e o mapeamento $w_{perf} \rightarrow z_{perf}$ caracteriza o desempenho desejado. O objetivo é verificar se um dado controlador K leva a um desempenho robusto, onde desempenho robusto é caracterizado pela situação em que a estabilidade e o desempenho são satisfeitos para todo o conjunto de incertezas limitadas em norma. Portanto, o desempenho robusto é atingido se K estabiliza $\mathcal{F}_u(P, \Delta_1)$, $\forall \Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1$ e $\|\mathcal{F}_u(\mathcal{F}_1(P, K), \Delta_1)\|_\infty < 1$, $\forall \Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1$.

Uma função matricial μ é definida para se analisar as propriedades de estabilidade e desempenho do sistema da Figura 8.3. Define-se $M = \mathcal{F}_1(P, K)$ como sendo a matriz que incorpora a planta (sem as perturbações) e o controlador. Observa-se que as matrizes P, K e Δ são, na realidade, funções do parâmetro frequência ω . Sejam n_1 as dimensões de w_{rob} e z_{rob} e n_2 as dimensões de w_{perf} e z_{perf} . Fechando-se o laço $z_{perf} \rightarrow w_{perf}$ e definindo-se a função matricial μ para uma frequência dada ω_0 , obtém-se a representação da Figura 8.4, onde Δ é a perturbação de incerteza aumentada:

$$\Delta = \{\Delta \mid \Delta = \text{bloco diag}(\Delta_1, \Delta_2), \Delta \in \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{C}^{n_2 \times n_2}\} \quad (8.15)$$

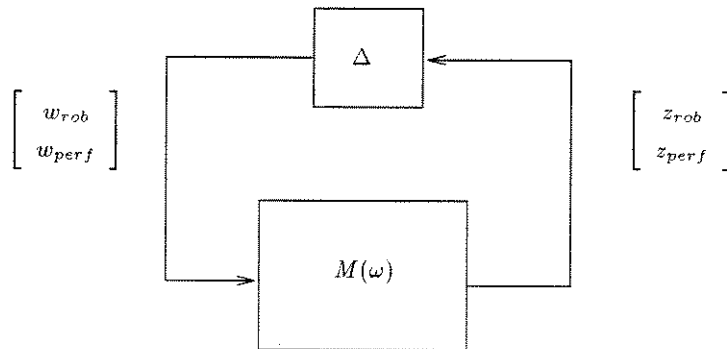


Figura 8.4: Representação para Análise μ de desempenho robusto.

Pode-se agora definir μ , para uma dada frequência ω_0 , a partir da estrutura em bloco para a análise de desempenho robusto:

$$\frac{1}{\mu_{\Delta}(M(\omega_0))} = \min_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta(\omega_0)) \mid \det(I + M(\omega_0)\Delta(\omega_0)) = 0\} \quad (8.16)$$

A partir das definições anteriores, a seguinte definição de desempenho robusto pode ser feita:

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta}(M(\omega_0)) < 1 &\Leftrightarrow \mu_{\Delta_1}(M_{11}(\omega_0)) < 1 \\ &\Leftrightarrow \max_{\Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1} \mu_{\Delta_2}(\mathcal{F}_u(M(\omega_0), \Delta_1)) < 1 \end{aligned} \quad (8.17)$$

Se $\mu_{\Delta_1}(M_{11}(\omega_0)) < 1$ e $M(\omega_0)$ é estável, então não há $\Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1$ que possa desestabilizar $\mathcal{F}_u(M(\omega_0), \Delta(\omega_0))$ e se $\mu_{\Delta_2}(\mathcal{F}_u(M(\omega_0), \Delta_1)) < 1$, o que equivale a $\bar{\sigma}(\mathcal{F}_u(M(\omega_0), \Delta_1)) < 1$.

1 devido à estrutura de Δ_2 , então o desempenho é satisfeito em ω_0 já que $\|\mathcal{F}_u(M(\omega_0), \Delta_1)\|_\infty < 1 \forall \Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1$. Portanto isto demonstra a equivalência entre $\mu_\Delta(M(\omega_0)) < 1$ e o desempenho robusto.

É possível mostrar que, se os parâmetros incertos admitem valores complexos, a margem paramétrica pm na norma ℓ_∞ , ou seja, a medida de robustez, é dada pela minimização de $1/\mu$ no espectro de frequências, ou seja:

$$pm_\infty = \min_{\omega} \frac{1}{\mu(M(\omega))} \quad (8.18)$$

Como não se conhece uma expressão matemática para o cálculo do valor exato de μ , um limitante superior para o mesmo (ou seja, um limitante inferior para a margem paramétrica) é geralmente usado:

$$\mu_\Delta(M(\omega)) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DM(\omega)D^{-1}) \quad (8.19)$$

onde \mathcal{D} é um conjunto de matrizes inversíveis que comutam com Δ .

A seguir apresenta-se um resumo das principais dificuldades associadas ao método da Análise μ :

- Como a Análise μ considera parâmetros complexos, o limitante superior para μ pode ser arbitrariamente conservativo nos casos mais realísticos, onde os parâmetros do processo são reais.

- Os algoritmos existentes para o cálculo do limitante superior de μ em (8.19) restringem a matriz de perturbação complexa Δ para o caso em que não há blocos repetidos na matriz bloco diagonal.

- A função $\omega \rightarrow \mu(M(\omega))$ é uma função descontínua.

- A única norma que pode ser considerada na medição dos desvios paramétricos é a norma ℓ_∞ .

- A síntese μ é limitada pelo fato de que o problema não está resolvido para o caso das perturbações paramétricas reais.

A Abordagem de El Ghaoui (1990, 1992), apresentada a seguir, contorna alguns dos problemas associados à Análise μ .

8.2.3 Abordagem de El Ghaoui

A abordagem de El Ghaoui (1990, 1992) apresenta uma formulação semelhante aos princípios da Análise μ . A mínima distância à instabilidade no espaço de parâmetros do

processo, ou seja a margem de parâmetros, é formulada como um problema de valores singulares estruturados, de forma análoga à Análise μ . Aqui, porém, a norma euclidiana também pode ser usada na medida dos desvios paramétricos. Uma outra vantagem importante sobre a Análise μ é que a formulação envolve uma matriz real M independente da frequência ω , evitando assim, a varredura em frequência da Análise μ (que pode ser problemática devido à descontinuidade de $M(\omega)$). A desvantagem desta metodologia é que a matriz real M representativa do sistema é de ordem elevada, o que leva à necessidade de uma rotina de redução de ordem.

Considera-se o sistema linear de ordem n em malha fechada, invariante no tempo:

$$\dot{x} = \mathcal{F}(p)x \quad (8.20)$$

onde x é o estado e $\mathcal{F}(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica da planta. A matriz $\mathcal{F}(p)$ é uma função racional do vetor de parâmetros $p \in \mathbb{R}^{np}$, cujos valores nominais podem sempre ser normalizados para zero. A margem paramétrica na norma ℓ_q de $\mathcal{F}(p)$ é dada por:

$$R_q(\mathcal{F}) \triangleq \min_{p \in \mathbb{R}^{np}} \{ \|p\|_q \mid \mathcal{F}(p) \text{ é instável} \} \quad (8.21)$$

Na Análise μ , a restrição no problema (8.21) é expressa da seguinte forma:

$$\exists \omega \in \mathbb{R} \mid \det(j\omega I - \mathcal{F}(p)) = 0. \quad (8.22)$$

O problema é solucionado para cada frequência ω , e uma varredura em frequência é feita para se localizar o mínimo global de $R(\omega)$. Contudo, quando os parâmetros são reais, $R(\omega)$ pode ser descontínua, mesmo no seu ponto de ótimo global.

O método de El Ghaoui (1990, 1992) evita este problema expressando a restrição crítica (qual seja, $\mathcal{F}(p)$ possuir pólos no eixo imaginário) na forma da equação :

$$\det(\mathcal{B}(p)) = 0 \quad (8.23)$$

onde $\mathcal{B}(p)$ é uma matriz polinomial real de ordem $n \times (n+1)/2$. Para vários casos particulares do problema de estabilidade robusta (tempo discreto, representação polinomial, estabilidade relativa), a restrição crítica também pode ser escrita como uma restrição de singularidade para uma matriz real independente da frequência.

A representação final do problema também utiliza o método do laço de realimentação interna como na Análise μ . Em última instância, O problema é formulado da seguinte forma:

$$R_q(M, r) = \min_{p \in \mathbb{R}^{np}} \{ \|p\|_q \mid \det(I + M\Delta(p)) = 0 \}, \quad (8.24)$$

$$\Delta(p) = \text{bloco diag } [p_1 I_{r_1} \cdots p_{np} I_{r_{np}}]$$

A quantidade $R_q(M, r)$ é referida como a margem paramétrica de M na norma ℓ_q , com relação ao vetor de estruturas $r = [r_1 \cdots r_{np}]$. O valor μ_∞ é o “ μ real” da análise μ , já que $\|p\|_\infty = \bar{\sigma}(\Delta(p))$. Observa-se a similaridade com a Análise μ . A diferença reside no fato de que a matriz M é de dimensão maior, porém real e independente da frequência.

Resumindo, pode-se enumerar como principais vantagens desta abordagem, os seguintes pontos:

- Definição de uma margem de parâmetros pm generalizando o “ μ real” para diferentes tipos de normas usadas na medição dos desvios paramétricos.
- Uma ferramenta de análise da estabilidade robusta para sistemas sujeitos a perturbações reais e polinomiais, nos domínios contínuos ou discretos.
- Representação do problema numa formulação onde a matriz M é real, evitando a necessidade da varredura na frequência ω .
- Um algoritmo para se computar o valor exato da margem paramétrica para o caso de 1 ou 2 parâmetros incertos.
- Um algoritmo globalmente convergente para se computar um limitante inferior da margem paramétrica pm para o caso geral multiparamétrico.

A desvantagem desta metodologia, como já foi dito anteriormente, é que a matriz real M representativa do sistema é de ordem elevada, o que leva à necessidade de uma rotina de redução de ordem.

8.2.4 Análise Convexa

Uma outra importante abordagem que permite o tratamento de problemas de robustez para o caso do polinômio característico não-linear nos parâmetros é a abordagem de Geromel *et al.*, (1991) que utiliza programação convexa na determinação dos parâmetros ótimos do controlador robusto.

Geromel *et al.*, (1991) considera o modelo de um sistema linear, descrito na representação de estados dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_1 u \\ u = -Kx \end{cases} \quad (8.25)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $w \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de perturbação, $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída, e $z \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlada.

Geromel *et al.*, (1991) define um sistema aumentado, para o qual é realizado o tratamento matemático do problema, dado pelas matrizes:

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

onde $F \in \mathfrak{R}^{(m+n) \times (m+n)}$, $G \in \mathfrak{R}^{(m+n) \times m}$. A matriz G apresenta uma importante propriedade utilizada no desenvolvimento do método. Qualquer $v^T \in \mathcal{N}(G^T)$ é escrito como $v^T = [x^T \ \mathbf{0}]$, onde \mathcal{N} denota o espaço nulo de uma matriz, e $x \in \mathfrak{R}^n$ é um vetor arbitrário.

Considere-se a definição da matriz semidefinida positiva $Q \in \mathfrak{R}^{(m+n) \times (m+n)}$:

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Seja a definição do seguinte conjunto convexo:

$$\mathcal{C}(\mathcal{W}) = \{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \geq \mathbf{0}, v^T(F\mathcal{W} + \mathcal{W}F + Q)v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}(G^T)\} \quad (8.28)$$

onde \mathcal{W} é particionada da seguinte forma:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^T = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

com $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, e $W_3 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$.

Este conjunto convexo apresenta importantes propriedades com relação ao conjunto dos controladores estabilizantes para o sistema em malha fechada, como mostrado a seguir.

Considere-se que as incertezas nas matrizes A e B_2 são descritas pelo seguinte domínio poliedral:

$$\mathcal{D} = \left\{ F \mid F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (8.30)$$

Ou seja, qualquer matriz factível F pode ser escrita como uma combinação convexa das matrizes extremas $F_i \sim (A, B_2)_i$, $i = 1, \dots, N$.

Seja \mathcal{K} o conjunto de todas as matrizes de realimentação de estado que estabilizam o sistema em malha fechada, ou seja:

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathfrak{R}^{m \times n} \mid A - B_2 K \text{ é ass. estável}\} \quad (8.31)$$

Um dos resultados mais importantes da abordagem convexa de Geromel *et al.*, (1991) relaciona o conjunto dos controladores estabilizantes \mathcal{K} com o conjunto convexo $\mathcal{C}(\mathcal{W})$ definido

anteriormente. Demonstra-se que os elementos do conjunto \mathcal{K} possuem uma relação biunívoca com os elementos de $\mathcal{C}(\mathcal{W})$, ou seja:

$$K \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{W} \in \mathcal{C}(\mathcal{W}) \quad (8.32)$$

sendo que esta relação é dada por:

$$\mathcal{K} \equiv \{W_2^T W_1^{-1} \mid \mathcal{W} \in \mathcal{C}\} \quad (8.33)$$

Portanto, esta relação biunívoca permite a representação do conjunto não convexo \mathcal{K} através do conjunto convexo \mathcal{C} . Desta forma, o problema da determinação de um controlador robusto pode ser resolvido sobre o domínio \mathcal{C} através dos métodos tradicionais de programação convexa. Após a determinação dos parâmetros ótimos (correspondentes ao ótimo global, por se tratar de um problema convexo), aplica-se a transformação inversa, obtendo-se o ganho para a realimentação de estado.

Vários outros problemas como desempenho \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , estabilidade relativa e realimentação de saída podem ser tratados com esta abordagem convexa. Nestes casos, porém, nem sempre é possível obter uma condição necessária e suficiente de estabilização, como para o caso de realimentação de estado.

8.2.5 Abordagem de Zettler e Garloff

A abordagem de Zettler e Garloff (1996) trabalha diretamente sobre o espaço dos coeficientes do polinômio característico. O método é usado na verificação da estabilidade robusta de polinômios com incertezas polinomiais, ou seja, polinômios cujos coeficientes dependem polinomialmente de parâmetros que variam em um intervalo.

Esta técnica utiliza um método eficiente de varredura numérica para verificar a estabilidade de todo um conjunto de polinômios incertos, testando-se apenas um subconjunto particular dos mesmos. Utiliza-se uma transformação sobre o conjunto de polinômios, denominada expansão Bernstein, gerando os chamados polinômios Bernstein (Garloff, 1993). Esta representação possui uma importante propriedade que garante que todo o conjunto de polinômios pode ser gerado pela combinação convexa de um subconjunto dos polinômios Bernstein. O teste, na realidade, é feito sobre os polinômios incertos resultantes do desenvolvimento do determinante de Hurwitz associado ao sistema (a condição de estabilidade assintótica é que este determinante não se anule). O método utiliza então rotinas eficientes de otimização numérica para verificar a positividade do determinante de Hurwitz com relação aos parâmetros incertos, considerando-se o subconjunto de polinômios Bernstein.

Esta metodologia permite a análise de problemas de grande complexidade, onde o polinômio característico é de ordem elevada e com grande número de incertezas paramétricas. Em Zettler e Garloff (1996) apresentam-se vários exemplos de aplicação, dentre os quais a verificação da estabilidade de um polinômio característico associado a uma máquina da Fiat, apresentando 7 incertezas num polinômio de 7a. ordem cujos coeficientes envolvem um total de 144 termos.

8.3 Proposta do Algoritmo de Otimização

Nesta seção, propõe-se um algoritmo para a otimização da robustez do controlador no caso em que o polinômio característico é função não-linear dos parâmetros do processo. Esta abordagem limita-se a problemas com pequeno número de incertezas paramétricas devido às propriedades de síntese do algoritmo discutidas mais adiante. Nos exemplos aqui simulados, o número de incertezas foi limitado a $nq = 3$. O algoritmo segue uma rotina que alterna síntese e análise, ambas otimizadas com o uso de algoritmos genéticos. Deve-se ressaltar que, como os algoritmos genéticos não garantem a otimalidade global, a medida de robustez do controlador obtido deve, sempre que possível, ser confirmada através de algum método alternativo, como o método proposto em El Ghaoui (1990, 1992) para o caso de 2 incertezas paramétricas. Outra característica do algoritmo é que o domínio de busca para os parâmetros do controlador é definido *a priori* pelo projetista ao contrário do caso linear, aonde é possível determinar domínios de busca relacionados ao conjunto dos controladores factíveis, conforme abordado nos capítulos anteriores. Apresenta-se a seguir uma descrição detalhada do algoritmo, cujo resumo encontra-se na sequência.

Define-se inicialmente uma região de incerteza paramétrica \mathcal{R} (conforme Figura 8.5) para a qual o referido controlador deve garantir a D-estabilidade robusta. Define-se também um conjunto de parâmetros $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ no contorno desta região de incerteza a serem utilizados pela rotina. O algoritmo evolui alternando síntese e análise otimizadas com o uso do Algoritmo Genético para restrições convexas apresentado no Capítulo 4. Na etapa de síntese, otimizam-se os parâmetros do controlador x para um conjunto finito de parâmetros do processo (os parâmetros críticos definidos no conjunto P). O algoritmo procura minimizar a parte real dos pólos de malha fechada associados a este conjunto reduzido de parâmetros. Na etapa de análise verifica-se se este controlador garante as propriedades de estabilidade para todos os demais parâmetros $p \in \mathcal{R}$. Se este não for o caso, um novo parâmetro crítico é incorporado ao conjunto finito de parâmetros P e mais uma vez o processo de síntese é

acionado considerando este novo conjunto. Caso na etapa de análise se verifique que o dado controlador satisfaz as condições de estabilidade robusta para todos os parâmetros incertos da região \mathcal{R} , a rotina é encerrada sendo este o controlador robusto obtido. Deve-se salientar mais uma vez, que como a análise com o Algoritmo Genético não garante a obtenção do ótimo global, um método de análise alternativo deve ser usado para a garantia da robustez deste controlador (por exemplo, para o caso de 2 parâmetros incertos, a abordagem de El Ghaoui (1990, 1992) fornece um valor exato para a medida de robustez). É interessante observar que, porém, como o número de parâmetros otimizados na análise é pequeno, ou seja, o número de incertezas paramétricas (limitado por considerações práticas a $nq = 3$) é pequeno, o algoritmo genético torna-se extremamente eficiente com uma grande probabilidade de otimalidade global.

Seja $P = \{p_j, j = 1, \dots, r\}$ o conjunto finito de parâmetros críticos do processo, numa certa iteração do algoritmo, e $t(x, p_j)$ os polinômios resultantes da combinação de um dado controlador com estes parâmetros. A função $f(x, P)$ na etapa de síntese é definida como o máximo da componente real de todas as raízes dos polinômios $t(x, p_j)$, $j = 1, \dots, r$. A etapa de síntese procura pelo controlador x que minimiza esta função dentro do domínio \mathcal{X} definido. Com isto, o algoritmo procura pelos parâmetros do controlador que forneça pólos de malha fechada com parte real negativa, que é a condição de estabilidade para sistemas contínuos. A estabilidade para sistemas discretos pode ser tratada com pequenas modificações no algoritmo. Para isto basta que se considere o módulo das raízes ao invés da componente real em todas as funções definidas e altere-se a condição de parada do algoritmo para $g^* < 1$ ao invés de $g^* < 0$. A estabilidade relativa também pode ser considerada através de modificações convenientes nas funções de otimização $f(x, P)$ e $g(p, x^*)$.

A função $g(p, x^*)$ é utilizada na etapa de análise na tentativa de se verificar se algum parâmetro $p \in \mathcal{R}$ não satisfaz as condições de estabilidade para o controlador obtido x^* (já que o mesmo é determinado considerando-se apenas um subconjunto finito dos parâmetros incertos em \mathcal{R}). Seja $t(x^*, p)$, o polinômio resultante da combinação do controlador x^* com um certo vetor de parâmetros $p \in \mathcal{R}$, e sejam $u_k(p)$, $k = 1, \dots, nt$ as raízes deste polinômio. A função $g(p, x^*)$ é definida como a maior componente real das raízes $u_k(p)$. A maximização de $g(p, x^*)$ sobre todo o conjunto de incertezas definido em \mathcal{R} procura verificar se há algum parâmetro da planta para o qual o dado controlador não garanta as condições de estabilidade.

O caso da representação em espaço de estados também pode ser tratado por este algoritmo. Para tanto basta que se considerem os auto-valores da matriz de representação de estados de malha fechada, ao invés das raízes do polinômio característico.

Algoritmo de Otimização da Robustez
(Polinômio Característico Não-Linear nos Parâmetros)

INICIALIZAÇÃO

- ◇ Definir região \mathcal{R} de incerteza paramétrica com medida m_0 (Figura 8.5).
- ◇ Definir conjunto de parâmetros $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ no contorno de \mathcal{R} .
- ◇ Definir limites para os parâmetros do controlador $\longrightarrow \mathcal{X} = \{x_i \mid x_i^{min} < x_i < x_i^{max}\}$.
- ◇ Seja inicialmente $g^* = \epsilon > 0$.

WHILE ($g^* > 0$)

SÍNTESE:

Resolver com Algoritmo Genético o problema:

$$\min f(x, P), \quad x \in \mathcal{X}$$

Solução : $x^*, \quad f^* = f(x^*)$.

ANÁLISE:

Resolver com Algoritmo Genético o problema:

$$\max g(p, x^*), \quad p \in \mathcal{R}$$

Solução : $p^*, \quad g^* = g(p^*)$.

Incorporar p^* ao conjunto P , ou seja $P \leftarrow \{P \cup p^*\}$.

END_WHILE

onde

$$f(x, P) = \left\{ \begin{array}{ll} \max & \max \operatorname{Re} v_{jk}(x) \\ j = 1, \dots, r & k = 1, \dots, nt \end{array} \right.$$

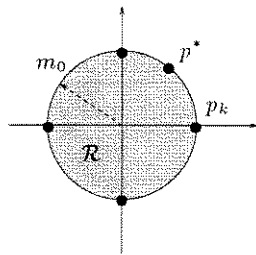
$$g(p, x^*) = \left\{ \begin{array}{l} \max \operatorname{Re} u_k(p) \\ k = 1, \dots, nt \end{array} \right.$$

e $v_{jk}(x)$ = k-ésima raiz do polinômio $t(x, p_j)$,

$u_k(p)$ = k-ésima raiz do polinômio $t(x^*, p)$ e

r = número de elementos do conjunto $P = \{p_j, j = 1, \dots, r\}$.

Regiões de Incerteza Hipersféricas



Regiões de Incerteza Hipercúbicas

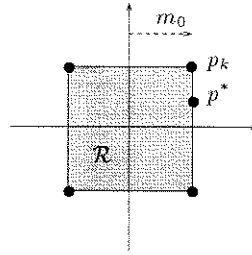


Figura 8.5: Exemplos de parâmetros críticos nas regiões de incerteza.

8.4 Exemplo 1 - Sistema 3 Massas/2 Molas

Considera-se aqui o exemplo apresentado em El Ghaoui (1990, 1992) com relação ao sistema 3 Massas/2 Molas mostrado na Figura 8.6. O sistema consiste de 3 massas: $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$, conectadas por duas molas, cujas constantes elásticas k_1 e k_2 são os parâmetros incertos do sistema, com valores nominais unitários ($k_1^{nom} = 1$, $k_2^{nom} = 1$). Define-se os parâmetros incertos normalizados como sendo:

$$a_i = k_i - 1, \quad i = 1, 2. \quad (8.34)$$

O controle u é a força atuante na massa m_1 , e a saída y é o deslocamento x_3 da

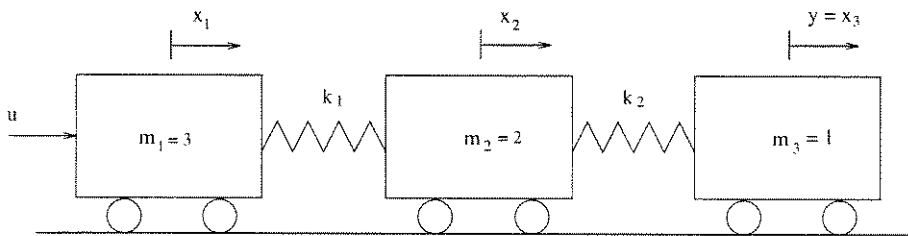


Figura 8.6: Sistema dinâmico 3 massas/2 molas.

massa m_3 . A função de transferência em malha aberta é dada por (El Ghaoui, 1990, 1992):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1 k_2 / m_1 m_2 m_3}{s^2 \left\{ s^4 + \left[k_2 \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_2} \right) + k_1 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \right] + k_1 k_2 \left(\frac{1}{m_3 m_2} + \frac{1}{m_3 m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right\}} \quad (8.35)$$

que avaliada para os parâmetros dados fornece:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1 k_2 / 6}{s^2 \left[s^4 + \left(\frac{5}{6} k_1 + \frac{3}{2} k_2 \right) s^2 + k_1 k_2 \right]} \quad (8.36)$$

Trata-se, portanto, de um sistema com 2 parâmetros incertos, apresentando a não-linearidade do produto $k_1 k_2$. Em El Ghaoui (1990, 1992), um controlador dinâmico de

3a. ordem é proposto para a maximização da medida de robustez (margem de parâmetros) do sistema. O objetivo é estabilizar o sistema em malha fechada para o maior conjunto possível de incertezas paramétricas centradas nos valores nominais. A margem de parâmetros, neste caso é calculada com relação à norma euclidiana ℓ_2 , ou seja considerando-se regiões de incerteza circulares em torno do parâmetro normalizado $(a_1, a_2) = (0, 0)$. O controlador obtido pelo autor, utilizando métodos de gradiente, corresponde a:

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{0.7466s^3 - 0.1132s^2 + 0.5385s + 0.0416}{s^3 + 0.8233s^2 + 1.2384s + 0.333} \quad (8.37)$$

cuja medida de robustez equivale a $m(x) = 0.5036$, ou seja, um controlador estabilizante para todos os valores de (k_1, k_2) com valores no círculo centrado em $(1, 1)$ e raio $r = 0.5036$.

Através do algoritmo proposto na seção anterior foi possível obter um controlador com uma medida de robustez 24% maior do que a obtida acima. Com relação ao controlador obtido em El Ghaoui (1992), o autor comenta, na referida obra, que o mesmo apresenta indícios de ser o ótimo global para o problema. De acordo com suas palavras: "...A figura que apresenta os domínios de estabilidade em malha fechada mostra que os ramos (contornos) do domínio de estabilidade (dos parâmetros incertos) praticamente toca a esfera de raio $R_2 = 0.5036$ em dois pontos. Neste sentido, o controlador é otimamente robusto". O controlador obtido pelo método aqui proposto mostra que este não era o caso.

O algoritmo proposto utilizou como domínio de busca para os parâmetros do controlador, o conjunto definido pelos seguintes intervalos:

$$\begin{cases} -2.0 < h_i < 2.0, & i = 1, \dots, 3. \\ -2.0 < g_j < 2.0, & j = 0, \dots, 3. \end{cases} \quad (8.38)$$

A rotina de otimização determinou, para este caso, os seguintes parâmetros para o controlador de 3a. ordem:

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{0.0948s^3 + 0.0654s^2 + 0.0857s + 0.0475}{s^3 + 1.5907s^2 + 1.1123s + 0.6732} \quad (8.39)$$

apresentando uma medida de robustez (na norma ℓ_2) igual a $m(x) = 0.62$, ou seja, um aumento de 24% em relação ao obtido no trabalho citado.

Para a confirmação desta medida de robustez (já que no processo de otimização utilizam-se valores estimados da mesma), utilizou-se o método de análise da referida obra (El Ghaoui, 1990, 1992) que permite a avaliação exata da margem de robustez para o caso de 2 parâmetros incertos. Para maiores detalhes sobre este método de análise, sugere-se consultar uma das duas referências acima citadas.

As nuvens de raízes para a comparação dos dois controladores podem ser vistas,

respectivamente, nas Figuras 8.7 e 8.8. A Figura 8.9 apresenta um detalhe da Figura 8.8 mostrando a distribuição das raízes próximas ao eixo imaginário. As nuvens de raízes foram obtidas através da combinação do controlador com parâmetros descrevendo circunferências concêntricas de raios $r = 0.1, 0.3$ e 0.5 para o primeiro caso (Figura 8.7) e $r = 0.1, 0.3$ e 0.62 para o segundo caso (Figuras 8.8, 8.9). Pode-se observar da comparação das duas nuvens de raízes que, no caso do presente trabalho, apesar de um maior esforço do sinal de controle (representado por pólos reais de maior valor absoluto), consegue-se uma melhor distribuição das raízes, em particular ao longo do eixo imaginário.

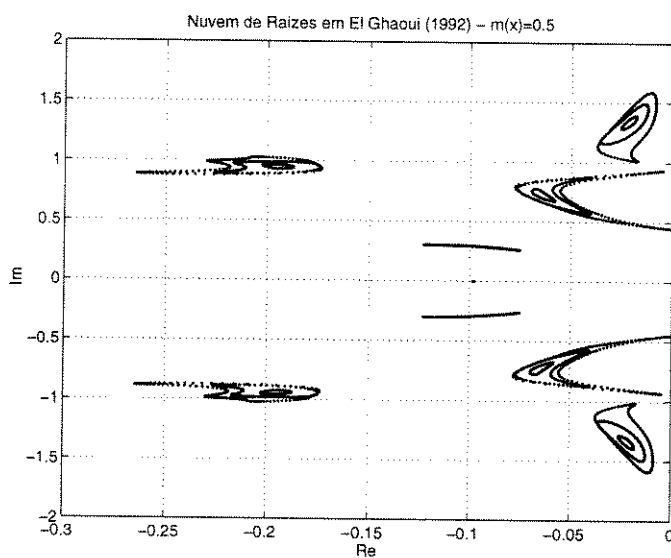


Figura 8.7: Nuvem de raízes para o controlador de El Ghaoui (1990, 1992).

8.5 Exemplo 2 - Modelo de um Helicóptero no Plano Vertical

Considera-se aqui o exemplo apresentado originalmente em Bhattacharyya (1987) e discutido também em El Ghaoui (1990). Trata-se do problema de estabilidade para o modelo de um helicóptero no plano vertical. O modelo linearizado em malha aberta do helicóptero no plano vertical é dado por:

$$\dot{x} = F_{ol}x + G_{ol}u, \quad y = H_{ol}x \quad (8.40)$$

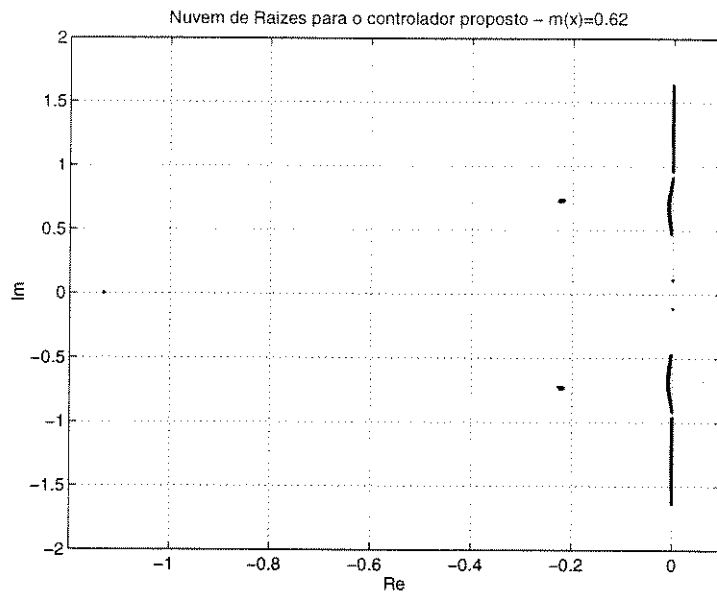


Figura 8.8: Nuvem de raízes para o controlador aqui proposto.

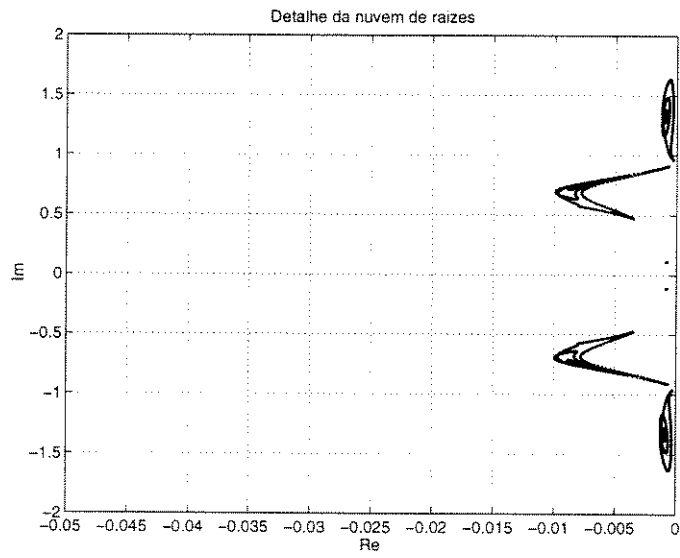


Figura 8.9: Detalhe da nuvem de raízes da Figura 8.8.

O vetor de estados é definido por:

$$x = \begin{bmatrix} \text{Velocidade horizontal (nós)} \\ \text{Velocidade vertical (nós)} \\ \text{Taxa de inclinação (graus/s)} \\ \text{Ângulo de inclinação (graus)} \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

O vetor de controle é dado por:

$$u = \begin{bmatrix} \text{Controle de inclinação coletivo} \\ \text{Controle de inclinação cíclico longitudinal} \end{bmatrix} \quad (8.42)$$

Para uma velocidade de 135 nós e condições típicas de voo e carga, as matrizes de estado são dadas por:

$$F_{ol} = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & l_1 & -0.707 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.43)$$

$$G_{ol} = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ l_3 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{ol} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Os parâmetros nominais apresentam os seguintes valores:

$$l_1^{nom} = 0.3681; \quad l_2^{nom} = 1.42; \quad l_3^{nom} = 3.5446. \quad (8.44)$$

sendo que as incertezas consideradas correspondem a uma esfera (norma ℓ_2) centrada nos parâmetros nominais. Em Bhattacharyya (1987), um controle por realimentação de saída ($u = -Ky$) é utilizado para estabilizar a planta. O objetivo é alocar os pólos de malha fechada no semi-plano esquerdo. O controlador obtido em Bhattacharyya (1987) é definido pelo seguinte ganho de realimentação da saída:

$$K = \begin{bmatrix} 1.63522 \\ -1.582236 \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

No referido trabalho, um limitante inferior é calculado para a medida de robustez do controlador sendo igual a 0.02712, ou seja, o autor garante apenas que $m(K) \geq 0.02712$. Este limitante na verdade é extremamente conservativo de acordo com El Ghaoui (1990), que determinou através de uma busca numérica multidimensional que a medida de robustez deste

controlador é igual a $m(K) = 1.9081$.

A implementação do algoritmo da seção 8.3 para este problema forneceu o seguinte ganho estático de realimentação de saída:

$$K' = \begin{bmatrix} 9.6007 \\ -1.6527 \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

cuja medida de robustez calculada através de uma varredura exaustiva (busca numérica sobre os 3 parâmetros incertos), indica uma medida de robustez igual a $m(K') = 2.9$, ou seja, um aumento de 52% em relação ao caso anterior. O algoritmo proposto utilizou como limitantes para os parâmetros do controlador, os intervalos dados por $-10.0 \leq K'_i \leq 10.0$, definidos arbitrariamente.

As nuvens de raízes para os dois controladores, juntamente com os respectivos deta-

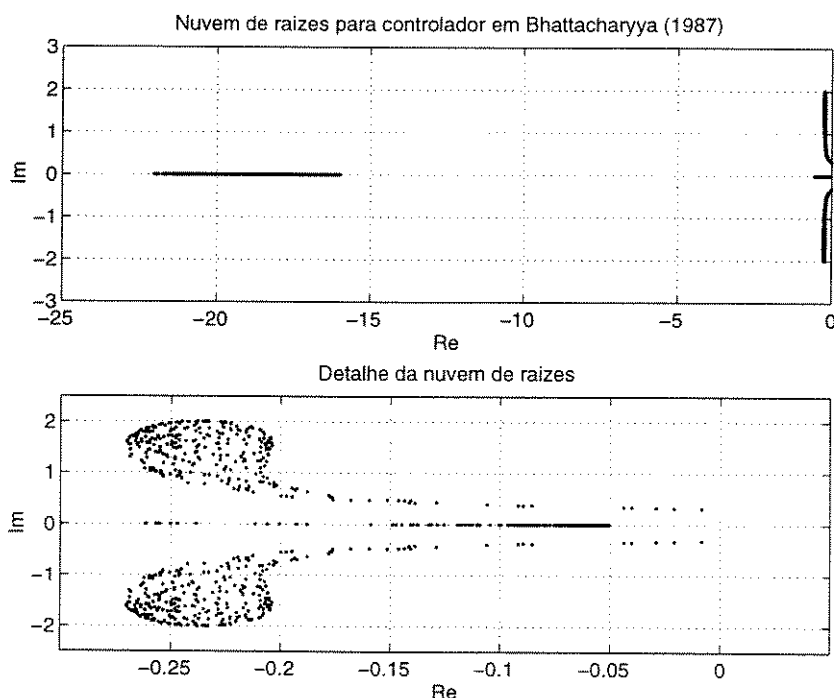


Figura 8.10: Nuvem de raízes e detalhe ampliado (Bhattacharyya, 1987).

lhes próximo ao eixo imaginário, podem ser vistas nas Figuras 8.10 e 8.11. As nuvens foram plotadas para 300 combinações diferentes de parâmetros dentro das respectivas regiões de incerteza esféricas. Em ambos os casos, observa-se que alguns pólos se encontram bem próximos ao eixo imaginário. Duas alternativas que poderiam ser usadas para se evitar tal situação são a otimização combinada da estabilidade e do desempenho \mathcal{H}_2 como mostrado no Capítulo 5, e a definição de uma região de alocação com uma restrição do tipo $\text{Re}(s) < -\sigma_0$ para os pólos de

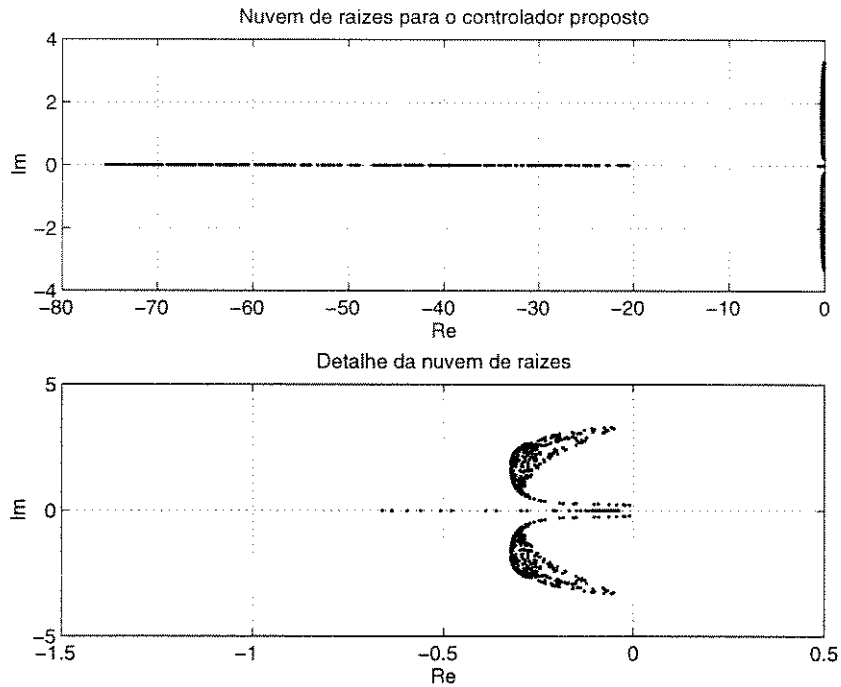


Figura 8.11: Nuvem de raízes e detalhe ampliado (controlador obtido).

malha fechada. O detalhe das raízes para o controlador otimizado pelo Algoritmo Genético, mostra que a nuvem “quase” toca o limite de estabilidade em vários pontos, o que indica que o controlador obtido “tenta” explorar ao máximo a região de alocação permitida para os pólos.

Concluindo, apresentou-se neste capítulo uma revisão dos principais métodos para o tratamento do polinômio característico não-linear nos parâmetros do processo, enfocando vantagens e desvantagens de cada abordagem. Um algoritmo para a solução do problema, restrito a um pequeno número de incertezas paramétricas, foi proposto utilizando a otimização restrita com Algoritmos Genéticos. Os resultados foram ilustrados através de dois exemplos de importante aplicação prática.

Capítulo 9

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou metodologias para o projeto de controladores robustos com relação a incertezas paramétricas do processo. O método utiliza o conceito de medida de robustez de um controlador, que permite avaliar a margem de incerteza paramétrica aceitável pelo mesmo de tal forma a manter os pólos de malha fechada do sistema em uma região pré-definida do plano complexo.

Uma nova proposta para a síntese de controladores robustos foi apresentada, dispensando o uso de gradientes. A partir de um conjunto de condições necessárias, juntamente com conhecidas propriedades geométricas, derivou-se um domínio limitado no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto de todos os controladores factíveis para o problema. Um procedimento de otimização, baseado em algoritmos genéticos foi proposto para se otimizar a função medida de robustez dentro deste domínio de busca pré-determinado.

Para o caso em que os coeficientes do polinômio característico de malha fechada são funções lineares dos parâmetros do processo, derivaram-se domínios de busca limitados para duas situações distintas com relação à região de alocação dos pólos. No caso de regiões de alocação conexas, o domínio de busca é definido por uma região politópica no espaço de parâmetros do controlador, enquanto que para o caso de regiões de alocação circulares e disjuntas, a região de busca é determinada por um conjunto de restrições quadráticas.

No caso de regiões de alocação conexas, foi derivado um domínio de busca politópico no espaço de parâmetros do controlador contendo o conjunto dos controladores com medida de robustez acima de um dado valor pré-definido m_0 . Apresentou-se também um resultado que relaciona a medida de robustez ótima de um controlador à sua ordem. Demonstrou-se, através de um teorema, que o ótimo $m^* = \max m(x)$ é uma função não-decrescente da or-

dem de x . Um procedimento de otimização foi proposto, onde a função medida de robustez é maximizada com relação aos parâmetros e à ordem do controlador. O problema conjunto de robustez na estabilidade e no desempenho \mathcal{H}_2 foi também abordado. Utilizando a mesma região politópica derivada, um procedimento de otimização baseado em algoritmos genéticos procura pelo controlador que minimiza um certo índice de desempenho \mathcal{H}_2 , considerando ainda a restrição de D-estabilidade robusta.

Para o caso em que os coeficientes do polinômio característico são funções não-lineares dos parâmetros do processo, e o número de incertezas é pequeno, uma rotina de otimização foi proposta para a maximização da robustez do controlador utilizando um método de busca multidimensional com o uso dos algoritmos genéticos. Exemplos numéricos e aplicações específicas ilustraram os métodos desenvolvidos.

Pode-se citar como principais contribuições para a área, os seguintes pontos:

- Determinação de condições necessárias para um controlador apresentar uma medida de robustez maior que um certo valor pré-definido m_0 .
- Derivação de domínios limitados de busca no espaço de parâmetros do controlador permitindo:
 - a “localização” do conjunto factível \mathcal{W} .
 - o aumento do desempenho de algoritmos baseados em busca estocástica como os algoritmos genéticos.
 - a maximização eficiente da função de robustez $m(x)$, evitando os problemas apresentados pelas rotinas com gradientes.
- Derivação do resultado que mostra que controladores de maior ordem em geral apresentam melhores propriedades de robustez.
- Otimização conjunta da D-estabilidade robusta e do desempenho \mathcal{H}_2 robusto.
- Otimização da robustez para o caso em que os coeficientes do polinômio característico são funções não-lineares dos parâmetros do processo, considerando-se um pequeno número de incertezas.

Finalmente, citam-se como possíveis extensões a serem consideradas em trabalhos futuros, os seguintes tópicos:

- Utilização de outras técnicas de algoritmos genéticos (por exemplo, GA paralelo), permitindo um tratamento computacional mais eficiente para problemas de maior dimensão.

- Utilização de algoritmos genéticos juntamente com outras técnicas de otimização. Neste caso, o algoritmo genético seria usado inicialmente para se determinar a região do ótimo global, sendo aplicada então uma outra técnica (como “Simulated Annealing”, ou o próprio método de gradientes) no refinamento da solução final.
- Considerando que a medida de robustez ótima é não decrescente com a ordem do controlador, seria interessante investigar a ordem de controlador a partir da qual a melhoria na medida de robustez ótima possa ser considerada desprezível (situação de saturação).
- Determinação de uma medida de robustez (ou limitante inferior) para o caso do polinômio característico não-linear nos parâmetros do processo.
- Determinação de domínios de busca no espaço de parâmetros do controlador para o caso acima.
- Estudo analítico do problema do pior caso da norma \mathcal{H}_2 com relação aos vértices da região de incerteza.

Apêndice A

Prova do Teorema 5.3

Este Apêndice demonstra o Teorema 5.3, que mostra que a medida de robustez ótima para o problema de maximização de $m(x)$, é não decrescente com relação ao aumento da ordem do controlador.

A prova é realizada, mostrando-se que dado um controlador factível de ordem n_x com medida de robustez m_x , é possível obter um controlador de ordem superior $(n_x + 2)$ apresentando a mesma medida de robustez m_x .

Primeiramente, considera-se a apresentação do seguinte lema.

Lema A1

Sejam dois sistemas $(\tilde{t}, \tilde{M}(p), \tilde{x}, \tilde{W})$ e $(\bar{t}, \bar{M}(p), \bar{x}, \bar{W})$ cuja diferença reside na ordem dos controladores (ou seja, os graus nh e ng dos polinômios do controlador). Sejam $\dim(\tilde{x})$, $\dim(\bar{x})$ as dimensões de \tilde{x} e \bar{x} , respectivamente. Seja $\dim(\tilde{x}) > \dim(\bar{x})$ e considere-se, sem perda de generalidade, que $\dim(\tilde{x}) = \dim(\bar{x}) + 2n$. Seja $\bar{x}_0 \in \bar{W}$ o vetor de parâmetros do controlador correspondendo aos polinômios $G_0(z^{-1})$, $H_0(z^{-1})$, e seja o polinômio $U(z^{-1})$ definido por $U(z^{-1}) = 1 - z_c z^{-1}$, onde z_c é uma raiz real qualquer pertencente à região D . Seja ainda $U^n(z^{-1}) = (1 - z_c z^{-1})^n$. Logo, o vetor de parâmetros do controlador \tilde{x}_0 definido pelos polinômios $\tilde{G}_0(z^{-1}) = G_0(z^{-1})U^n(z^{-1})$ e $\tilde{H}_0(z^{-1}) = H_0(z^{-1})U^n(z^{-1})$ corresponde a um controlador factível ($\tilde{x}_0 \in \tilde{W}$) cuja medida de robustez é igual a $m(\tilde{x}_0) = m(x_0)$.

Prova- Da equação (2.9) tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0(z^{-1}) &= A(z^{-1})\tilde{H}_0(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})\tilde{G}_0(z^{-1}) = \\ & (A(z^{-1})H_0(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G_0(z^{-1}))U^n(z^{-1}) = T_0(z^{-1})U^n(z^{-1}). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Portanto, para quaisquer polinômios incertos da planta $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$, as raízes de $z^{nt}\tilde{T}_0(z^{-1})$ são as mesmas de $z^{nt}T_0(z^{-1})$ mais n raízes reais em $z = z_c \in D$. Para $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$ correspondentes ao parâmetro central do processo ($p = p_c$), tem-se que as raízes do polinômio (representado pelo seu vetor) $\bar{t}_0 = M(p_c)\bar{x}_0$ estão dentro da região D (já que $\bar{x}_0 \in \bar{W}$) o que implica que as raízes de $\tilde{t}_0 = \tilde{M}(p_c)\tilde{x}_0$ também estão em D , o que prova que $\tilde{x}_0 \in \tilde{W}$. Portanto, considerando-se que as raízes de $\tilde{t}_0 = \tilde{M}(p)\tilde{x}_0$ são as mesmas de $\bar{t}_0 = M(p)\bar{x}_0$, mais n raízes *fixas* em $z = z_c$ para qualquer valor do parâmetro incerto do processo $q \in \Pi$, conclui-se que ambos os controladores \bar{x}_0 e \tilde{x}_0 possuem a mesma medida de robustez ($m(\tilde{x}_0) = m(\bar{x}_0)$).

A partir do Lema A1, o Teorema 5.3 pode ser facilmente provado.

Seja a notação $\tilde{x}_0 = [\bar{x}_0, z_c]$ que denota a construção de \tilde{x}_0 a partir de \bar{x}_0 e z_c .

Teorema 5.3

Seja a função medida de robustez $m(x)$ maximizada em dois domínios factíveis diferentes $\bar{x} \in \bar{W}$ e $\tilde{x} \in \tilde{W}$, onde \tilde{x} representa um controlador de ordem maior que \bar{x} . Sejam \bar{m} e \tilde{m} os valores dos respectivos ótimos. Então pode-se afirmar que $\tilde{m} \geq \bar{m}$.

Prova- Sejam os sistemas $(\tilde{t}, \tilde{M}(p), \tilde{x}, \tilde{W})$ e $(\bar{t}, \bar{M}(p), \bar{x}, \bar{W})$ segundo as considerações acima, onde $\dim(\tilde{x}) > \dim(\bar{x})$. Seja a função medida de robustez $m(x)$ maximizada nos dois domínios $\bar{x} \in \bar{W}$ e $\tilde{x} \in \tilde{W}$, cujos ótimos são \bar{m} and \tilde{m} , respectivamente. Sejam $\bar{x}^* = \arg \max m(\bar{x})$ e $\tilde{x}^* = \arg \max m(\tilde{x})$ os argumentos dos ótimos. Seja \tilde{x}_0 o controlador obtido a partir de $\bar{x} = \bar{x}^*$ e um certo número real $z_c \in D$, através da construção $\tilde{x}_0 = [\bar{x}^*, z_c]$. Pelo Lema A1, tem-se que $m(\tilde{x}_0) = m(\bar{x}^*)$, portanto

$$m(\tilde{x}^*) \geq m(\tilde{x}_0) = m(\bar{x}^*) \Rightarrow \tilde{m} \geq \bar{m}$$

□

Apêndice B

Prova da Proposição 2.6

Neste apêndice considera-se dado um controlador factível, $x \in \mathcal{W}$.

Para provar a Proposição 2.6 sejam as seguintes definições:

B.1 Definição: Para $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, define-se $\mathcal{Z}(k) \subset \mathcal{C}$ como o conjunto de todos os pólos de malha fechada do sistema correspondentes aos valores de q^* pertencentes ao hiper-cubo $\Pi^*(k)$, ou seja:

$$\mathcal{Z}(k) = \{z \in \mathcal{C} \mid T(x, q^*, z) = 0 \text{ para algum } q^* \in \Pi^*(k)\} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Definição: (Royden, 1988, pg. 182)

Um conjunto $E \subset \mathcal{C}$ é dito conexo se não existirem conjuntos abertos $O_1 \subset \mathcal{C}$ e $O_2 \subset \mathcal{C}$ tais que: $E \subset O_1 \cup O_2$ e $E \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

B.3 Lema: O conjunto $\mathcal{Z}(k)$ é a união de nt conjuntos conexos:

$$\mathcal{Z}(k) = \bigcup_{i=1}^{nt} \mathcal{Z}_i(k) \quad (\text{B.2})$$

sendo que

$$\mathcal{Z}_i(k) \cap D \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, nt$$

onde nt é o grau do polinômio $T(x, q^*, z)$.

Prova: Seja a função $f : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^n$ definida por:

$$\mathbf{t} = f(\mathbf{w}) \quad (\text{B.3})$$

tal que os componentes de \mathbf{t} sejam os coeficientes do polinômio mônico cujas raízes são os componentes de w . A função f é contínua e bijetiva. Por exemplo, para $n = 3$ tem-se:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -(w_1 + w_2 + w_3) \\ -(w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3) \\ -(w_1 w_2 w_3) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

A função $f^{-1} : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^n$, ou seja, $w = f^{-1}(\mathbf{t})$ existe e é contínua (Barmish, 1994, pg. 52).

Considerando

$$t = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = X(x)S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

tem-se que \mathbf{t} é uma função contínua de q^* . Consequentemente, a função $w = f^{-1}(\mathbf{t}) = g(q^*)$ é uma função contínua em q^* .

Seja $w[k] = g[\Pi^*(k)]$ a imagem da região $\Pi^*(k)$ através da função g . Considerando que a região $\Pi^*(k)$ é conexa e g é contínua conclui-se que $w[k]$ é um conjunto conexo em \mathcal{C}^n (Royden, 1988, pg.182). Portanto, os conjuntos $\mathcal{Z}_i(k)$ tais que

$$w[k] = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1(k) \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_n(k) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

são conexos. É fácil concluir que $\mathcal{Z}(k) = \cup_{i=1}^{nt} \mathcal{Z}_i(k)$, o que completa a primeira parte da prova. Para provar que $\mathcal{Z}_i(k) \cap D \neq \emptyset$, basta lembrar que $x \in \mathcal{W}$ e portanto

$$\cup_{i=1}^{nt} \mathcal{Z}_i(0) \subset D \quad (\text{da definição de } \mathcal{W}) \quad (\text{B.7})$$

Em consequência:

$$\mathcal{Z}_i(0) \subset D \quad i = 1, \dots, nt \quad (\text{B.8})$$

Além disso,

$$\mathcal{Z}_i(0) \subset \mathcal{Z}_i(k) \quad i = 1, \dots, nt \quad (\text{B.9})$$

Das expressões anteriores, conclui-se

$$\mathcal{Z}_i(0) \subset D \cap \mathcal{Z}_i(k) \quad (\text{B.10})$$

o que prova o teorema, pois $\mathcal{Z}_i(0) \neq \emptyset$. □

Assume-se ainda, que o conjunto D é aberto e define-se D' como sendo o complemento de $D \cup \partial D$:

$$D' = \text{comp}\{D \cup \partial D\} = \text{comp}\{\bar{D}\} \quad (\text{B.11})$$

Obviamente, D e D' são abertos, $D \cap D' = \emptyset$ e $D \cup D' \cup \partial D = \mathcal{C}$.

A Proposição 2.6 pode ser reescrita como segue:

Proposição 2.6:

$$\begin{array}{ll} \text{Se} & \mathcal{Z}_i(k) \cap \partial D = \emptyset & i = 1, \dots, nt \\ \text{então} & \mathcal{Z}_i(k) \cap D' = \emptyset & i = 1, \dots, nt. \end{array} \quad (\text{B.12})$$

Prova: Por absurdo, suponha-se que:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{Z}_i(k) \cap \partial D = \emptyset & i = 1, \dots, nt \\ \mathcal{Z}_j(k) \cap D' \neq \emptyset & \text{para algum } 1 \leq j \leq nt. \end{array} \quad (\text{B.13})$$

Como $x \in \mathcal{W}$, tem-se que $\mathcal{Z}_j(k) \cap D \neq \emptyset$, e portanto $\mathcal{Z}_j(k) \subset D \cup D'$. Mas $\mathcal{Z}_j(k) \cap D \cap D' = \emptyset$, sendo D e D' conjuntos abertos. Consequentemente $\mathcal{Z}_j(k)$ não é conexo (Definição B.2), o que contradiz o Lema B.3 e prova o teorema. \square

Apêndice C

Cálculo da Medida de Robustez Local

Neste apêndice, demonstra-se o cálculo da função medida de robustez local, apresentado em Araújo (1991).

A medida de robustez local é calculada analiticamente para duas situações possíveis com relação à matriz $U^T(x, z)$ na equação (2.50):

2.8 Teorema (Araújo, 1991): *Sejam $x \in \mathcal{W}$ um controlador factível, e z um ponto qualquer da fronteira ∂D de D . A função medida de robustez local $m(x, z)$ é dada analiticamente por:*

$$m(x, z) = \begin{cases} \frac{|\alpha_0|}{nq} & \text{se os vetores } \alpha \text{ e } \beta \text{ são linearmente dependentes,} \\ \sum_{i=1} |\alpha_i| & \\ \max_{i=1, \dots, nq} \frac{|\gamma_{0i}|}{nq} & \text{caso contrário.} \\ \sum_{j=1, (j \neq i)} |\gamma_{ji}| & \\ \text{onde } \gamma_{ji} = \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j. & \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Considere-se a primeira situação, na qual os vetores α e β em $U^T(x, z)$ são linearmente dependentes:

$$m(x, z) = k_z = \frac{|\alpha_0|}{\sum_{i=1} |\alpha_i|} \quad (\text{C.2})$$

Pela definição de $m(x, z)$, k_z é o maior valor de k na equação (2.35) tal que $\Pi^*(k) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv$

\emptyset . Observa-se que $\Pi^*(k)$ é uma região hipercúbica, centrada na origem, com arestas de comprimento igual a $2k$, e $\mathcal{V}(x, z)$ é definido pela expressão (2.47).

Inicialmente, prova-se, por contradição, que $\Pi^*(k_z) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset$. Seja $q^* = [1 \ q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{nq}]^T \in \mathfrak{R}^{nq}$ um vetor pertencente à interseção entre $\Pi^*(k_z)$ e $\mathcal{V}(x, z)$. Como $q^* \in \Pi^*(k_z)$, então:

$$|q_i| < k_z, \quad i = 1, 2, \dots, nq. \quad (\text{C.3})$$

A relação a seguir é válida, pois $q^* \in \mathcal{V}(x, z)$:

$$\sum_{i=1}^{nq} \alpha_i q_i = -\alpha_0 \quad (\text{C.4})$$

Considerando-se o módulo da equação (C.4), decorre da desigualdade triangular que:

$$|-\alpha_0| = \left| \sum_{i=1}^{nq} \alpha_i q_i \right| \leq \sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i q_i| \quad (\text{C.5})$$

Logo:

$$|-\alpha_0| \leq \sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i| |q_i| \quad (\text{C.6})$$

A partir da desigualdade (C.3), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i| |q_i| < \sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i| k_z \quad (\text{C.7})$$

Comparando-se as equações (C.6) e (C.7), pode-se concluir que:

$$k_z > \frac{|-\alpha_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i|} \quad (\text{C.8})$$

Este resultado é uma contradição, pois, pela equação (C.2) k_z é dado por:

$$k_z = \frac{|\alpha_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i|} \quad (\text{C.9})$$

A interseção $\Pi^*(k_z) \cap \mathcal{V}(x, z)$, portanto é vazia, devido à arbitrariedade na escolha do valor de q^* .

Em seguida, prova-se que k_z é o maior valor de k tal que $\Pi^*(k) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset$. Seja $k' > k_z$ tal que

$$\Pi^*(k') \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset \quad (\text{C.10})$$

Considera-se o vetor $q^* \in \mathfrak{R}^{nq}$ cujas componentes são definidas como:

$$q_i = \text{sgn}(\alpha_i) k_I, \quad i = 1, 2, \dots, nq \quad (\text{C.11})$$

onde a função $\text{sgn}(\cdot)$ é dada por:

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} +1, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ -1, & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

e k_I é dado por:

$$k_I = \frac{-\alpha_0}{\sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i|} \quad (\text{C.13})$$

Demonstra-se a seguir, que o vetor q^* , definido em (C.11), pertence a $\Pi^*(k')$ e a $\mathcal{V}(x, z)$ e que, portanto, a interseção em (C.10) não é vazia com $k' > k_z$.

Como $|q_i| = |k_I| = k_z$, $i = 1, 2, \dots, nq$, então:

$$|q_i| < k', \quad i = 1, 2, \dots, nq \quad (\text{C.14})$$

A partir da desigualdade (C.14), portanto, pode-se concluir que $q^* \in \Pi^*(k')$.

Considerando-se a definição dada em (C.11), a seguinte relação é válida:

$$\sum_{i=1}^{nq} \alpha_i q_i = \sum_{i=1}^{nq} \alpha_i \text{sgn}(\alpha_i) k_I \quad (\text{C.15})$$

A expressão (C.15) pode ser simplificada como:

$$\sum_{i=1}^{nq} \alpha_i q_i = \sum_{i=1}^{nq} |\alpha_i| k_I \quad (\text{C.16})$$

Substituindo-se o valor de k_I , dado pela equação (C.13), na expressão anterior, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{nq} \alpha_i q_i = -\alpha_0 \quad (\text{C.17})$$

Logo, o vetor q^* também pertence a $\mathcal{V}(x, z)$. Como consequência, k_z é o maior valor de k tal que $\Pi^*(k) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset$, ou seja, $\Pi^*(k_z)$ é o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pelo hiperplano $\sum_{i=1}^{nq} \alpha_i q_i = -\alpha_0$ (Figura C.1).

Considera-se, agora, a segunda situação em (C.1), onde os vetores α e β em $U^T(x, z)$ são linearmente independentes:

$$m(x, z) = k_z = \max_{i=1, \dots, nq} \frac{|\gamma_{0i}|}{\sum_{j=1, (j \neq i)}^{nq} |\gamma_{ji}|} \quad (\text{C.18})$$

onde $\gamma_{ji} = \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j$.

O conjunto $\mathcal{V}(x, z)$, definido em (2.50), pode ser expresso pela interseção dos seguintes hiperplanos:

$$\sum_{j=1}^{nq} \alpha_j q_j = -\alpha_0 \quad (\text{C.19})$$

$$\sum_{j=1}^{nq} \beta_j q_j = -\beta_0 \quad (\text{C.20})$$

Neste caso, o problema de se determinar k_z , o maior valor do parâmetro k tal que $\Pi^*(k) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset$ pode ser dividido em vários problemas equivalentes ao do primeiro caso (LD). Desta forma, todas as projeções de $\mathcal{V}(x, z)$ sobre os hiperplanos ortogonais às coordenadas q_i , $i = 1, 2, \dots, nq$ são analisadas.

Obtendo-se, inicialmente, o valor de q_i em função dos q_j , $j \neq i$ na equação (C.19) e, em seguida, substituindo-o na equação (C.20) (ou vice-versa), tem-se que a projeção de $\mathcal{V}(x, z)$ sobre o hiperplano ortogonal à coordenada q_i é dada por:

$$\sum_{j=1, (j \neq i)}^{nq} (\alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j) q_j = -(\alpha_0 \beta_i - \alpha_i \beta_0) \quad (\text{C.21})$$

ou mais sucintamente:

$$\sum_{j=1, (j \neq i)}^{nq} \gamma_{ji} q_j = -\gamma_{0i} \quad (\text{C.22})$$

Como demonstrado anteriormente para o caso LD, o maior hipercubo centrado na origem, limitado pelo hiperplano (C.22) é obtido para k igual a:

$$k = k_i = \frac{|-\gamma_{0i}|}{\sum_{j=1, (j \neq i)}^{nq} |\gamma_{ji}|} \quad (\text{C.23})$$

Obviamente $\gamma_{ji} = 0$ para $j = i$.

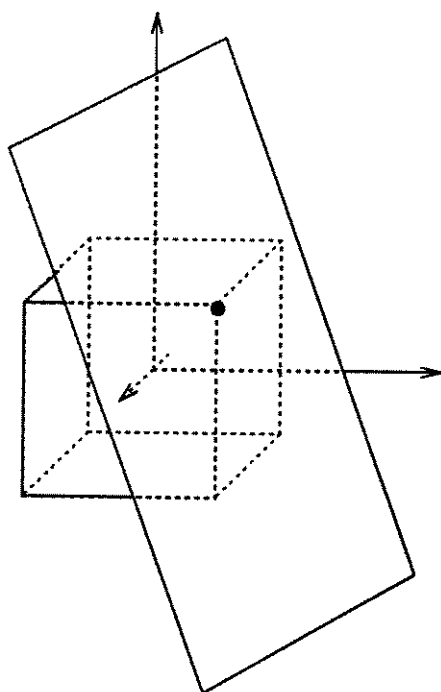
O maior valor do parâmetro k tal que $\Pi^*(k) \cap \mathcal{V}(x, z) \equiv \emptyset$ é dado pela maximização de k_i , $i = 1, 2, \dots, nq$, pois todas as projeções de $\mathcal{V}(x, z)$ consideradas são ortogonais a cada q_i , ou seja:

$$k_z = \max_i k_i = \max_{i=1, \dots, nq} \frac{|-\gamma_{0i}|}{\sum_{j=1, (j \neq i)}^{nq} |\gamma_{ji}|} \quad (\text{C.24})$$

O parâmetro k_z determina então, o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pela interseção entre os hiperplanos (C.19) e (C.20) (Figura C.1). Este resultado é igual ao apresentado em (C.18). Desta forma, conclui-se a demonstração do cálculo da função medida de robustez local.

Interpretação Geométrica do Cálculo da Medida de Robustez Local

a) Linhas de
 $U^T(x, z) \rightarrow$ LD



b) Linhas de
 $U^T(x, z) \rightarrow$ LI

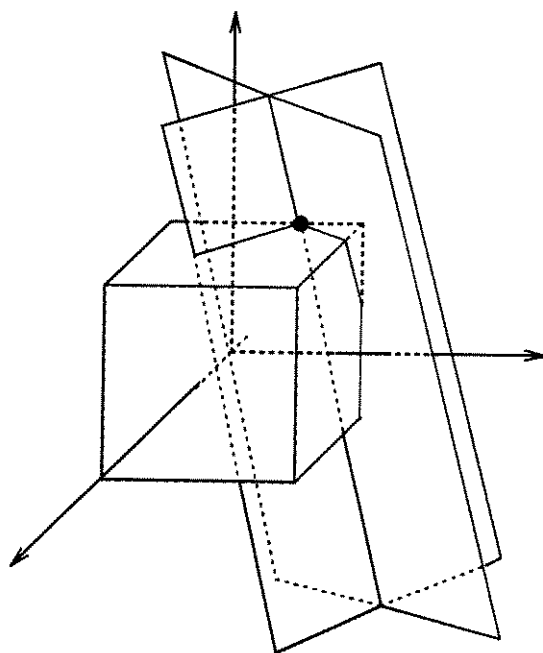


Figura C.1

Referências Bibliográficas

- Ackermann, J. (1980). Parameter space design of robust control systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-25, no.6, 1058-1072.
- Ackermann, J. (1985). *Sampled-Data Control Systems: Analysis and Synthesis, Robust System Design*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ackermann, J. (1993). *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, Berlin.
- Anderson, B.D.O., E.I. Jury e M. Mansour (1987). On robust Hurwitz polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-32, no.10, 909-913.
- Araújo, H.X. (1991). Controladores robustos para sistemas lineares com parâmetros incertos. *Tese de Mestrado*, FEE, Unicamp, Campinas.
- Araújo, H.X. e R. Santos-Mendes (1991). Robust control design for linear systems with uncertain parameters. *Proceedings of the IFAC Symposium on Design Methods for Control Systems*, Zurich, Suíça.
- Åström, K.J. e B. Wittenmark (1973). On self-tuning regulators. *Automatica*, no.9, p.185.
- Barmish, B.R. (1984). Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-29, no.10, 935-936.
- Barmish, B.R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company.
- Bartlett, A.C. e C.V. Hollot (1988). A necessary and sufficient condition for Schur invariance and generalized stability of polytopes of polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.33, no.6, 575-578.

- Bhattacharyya, S.P. (1987). Robust stabilization against structured perturbations. *Lect. Notes in Control and Information Sciences*, vol.99.
- Bennett, S. (1996). A Brief history of automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, vol.16, no.3, 17-25.
- Bialas, S. e J. Garloff (1985). Stability of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-32, no.3, 310-312.
- Biernacki, R.M., H. Hwang e S.P. Bhattacharyya (1987). Robust stability with structured real parameter perturbations. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-32, no.6, 495-506.
- Bode, H.W. (1945). Network analysis and feedback amplifier design. Princeton, NJ, *apud* Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, NY.
- Boyd, S.P. e C. H. Barratt (1991). Linear Controller Design: Limits of Performance. Prentice Hall.
- Chapellat, H., M. Dahleh e S.P. Bhattacharyya (1993). Robust stability manifolds for multilinear interval systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-38, no.2, 314-318.
- De Paiva, E.C. (1993). Alocação de pólos robusta com rejeição a perturbações estocásticas. *Tese de Mestrado*, FEE, Unicamp, Campinas.
- De Paiva, E.C., R. Santos-Mendes e P.A.V. Ferreira (1993). Optimization of robust stability and robust \mathcal{H}_2 performance for ARMAX models with uncertain parameters. *Proceedings of XII IFAC World Congress*, vol.2, 89-92.
- De Paiva, E.C., R. Santos-Mendes e P.A.V. Ferreira (1996a). Robust controller optimization over linear domains. *Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, St. Louis, MO, EUA.
- De Paiva, E.C., R. Santos-Mendes e P.A.V. Ferreira (1996b) Robust control design with genetic algorithms. *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo, SP, 555-560.
- De Paiva, E.C., R. Santos-Mendes e P.A.V. Ferreira (1997a) A constrained optimization approach for robust pole placement. *European Control Conference - ECC 97*, Bruxelas, Bélgica (a ser apresentado).
- De Paiva, E.C., R. Santos-Mendes e P.A.V. Ferreira (1997b) A constrained optimization approach for robust D-stability and robust \mathcal{H}_2 performance design. *Int. Symp. on Robust Control Design*, Budapeste, Hungria (a ser apresentado).

- Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected Reprint Series*. New York, NY.
- Doyle, J.C. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings*, vol.129, parte D, no.6, 242-250.
- El Ghaoui, L. (1990). Robustness of linear systems to parameter variations. *PhD. Thesis*, Stanford University, EUA.
- El Ghaoui, L. (1992). Fast computation of the largest stability radius for a two-parameter linear system. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-37, no.7, 1033-1037.
- Fam, A.T. e J.S. Meditch (1978). A canonical parameter space for linear systems design. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-23, no.3, 454-458.
- Figueroa, J.L. e Romagnoli, J.A. (1994). An algorithm for robust pole assignment via polynomial approach. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-39, no.4, 831-835.
- Fleming, P.J. e C.M. Fonseca (1993). Genetic algorithms in control systems engineering. *Proc. of XII Ifac World Congress*, Sydney, Australia.
- Galimidi, A.R. e B.R. Barmish (1986). The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-31, no.5, 410-419.
- Garloff, J. (1993). The Bernstein algorithm. *Interval Computations*, vol.2, 154-168.
- Geromel, J.C., P.L.D. Peres e J. Bernussou (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM J. Control Opt.*, vol.29, no.2, 381-402.
- Goldberg, D.E. (1989). Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley, 1989.
- Hollot, C.V. e A.C. Bartlett (1986). Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-31, no.4, 355-356.
- Kharitonov, V.L. (1979). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, vol.14, 1483-1485.
- Man, K.F., K.S. Thang e S. Kwong (1996). Genetic Algorithms: Concepts and Applications. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol.43, no.5, 519-534.
- Michalewicz, Z., T.D. Logan e S. Swaminathan (1994a). Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces. *Proc. of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming*.

- Michalewicz, Z. (1994b). Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. Springer Verlag, Berlin.
- Ogata, K. (1987). Discrete-Time Control Systems. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Rotstein, H., R. Sanchez Peña, J. Bandoni, A. Desages e J. Romagnoli (1991). Robust Characteristic Polynomial Assignment. *Automatica*, vol.27, no.4, 711-715.
- Royden, H.L. (1988). Real Analysis. 3a. Edição. Collier-Macmillan.
- Santos-Mendes, R. (1988). Synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles. *Thèse de Doctorat*, Université Paul Sabatier de Toulouse, França.
- Santos-Mendes, R. e Aguilar-Martin (1989). Robust pole placement design. *Int. Journal of Control*, vol.50, no.1, 113-128.
- Soh, C.B., C.S. Berger e K.P. Dabke (1985). On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-30, no.10, 1033-1036.
- Soh, C.B., C.S. Berger e K.P. Dabke (1987a). Addendum to "On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients". *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-32, no.3,239-240.
- Soh, Y.C., R.J. Evans, I.R. Petersen e R.E. Betz (1987b). Robust pole assignment. *Automatica*, vol.23, no.5, 601-610.
- Soh, Y.C. (1989). Strict Hurwitz property of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.34, no.6, 629-632.
- Zettler, M. e J. Garloff (1996). Robustness analysis of Polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion. Relatório Técnico no. 9601, Fachhochschule Konstanz, Konstanz, Alemanha. (a ser publicado em *IEEE Trans. Aut. Control*).
- Wei, K.H. e R.K. Yedavalli (1987). Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-32, no.10, 907-909.
- Whidborne, J.F., G. Murad, D.W. Gu e I. Postlethwaite (1995). Robust control of an unknown plant - the IFAC 93 benchmark. *Int. Journal of Control*, vol.61, no.3, 589-640.
- Yeung, K.S. e S.S. Wang (1987). A simple proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol.AC-32, no.9, 822-823.