

Este exemplar corresponde à redação final da
tese defendida pelo aluno ANTONIO JAMIL MAANIA
e aprovada pela Comissão Julgadora J. J. L.
19.4.89

CONFIGURAÇÃO QUASI-ESTACIONÁRIA DE CAMPO REVERSO EM MODELO

MHD RESISTIVO

(Tese apresentada no Instituto de Física Gleb- Wataghin, departa-
mento de Eletrônica Quântica - Grupo de Plasmas, como requisi-
-to final para obtenção do título de Mestre em Física)

Banca examinadora :

Professor Doutor Paulo Hiroshi Sakanaka (orientador) - Unicamp
Professor Doutor King Hay Tsui - Universidade Federal Fluminense
Professor Doutor Roberto Antonio Clemente - Unicamp

Suplentes :

Professor Doutor José Busnardo Neto - Unicamp
Professor Doutor Altair Souza de Assis - Univers. Fed. Fluminense

O homem é apenas a sombra de seu passado, nada mais.

(Píndaro 500AC)

Dedicado à minha esposa Rosalia e ao pequenino Edrian.....

	pag.
--Agradecimentos - - - - -	-(5)
--Abstract - - - - -	-(6)
I --Introdução	
I-1 --Relevância de Pesquisas em Fusão Termonuclear Controlada - - - - -	(8)
I-2 --Física de Plasma para Uso em Fusão Termonuclear Controlada - - - - -	(10)
I-3 --Configurações de Campo Reverso (FRCs) - - - - -	-(13)
II --Derivação das Equações Macroscópicas	
II-1 --Equação de Boltzmann - - - - -	(18)
II-2 --Momentos da Equação de Boltzmann - - - - -	(18)
II-3 --Equação de Um-Fluido - - - - -	(22)
III --Resumo dos Outros Modelos Existentes - - - - -	(29)
IV --Modelo para Difusão Lenta	
IV-1 --Obtenção da Equação da Difusão- - - - -	-(36)
IV-2 --Restrição e Caracterização de Equilíbrios Contínuos - -	-(41)
V --O Vórtice de Hill- - - - -	(44)
VI --O Vórtice de Hill Esférico ($b=a$) - - - - -	(52)
VII --O Vórtice de Hill Prolato ($b>a$) e Oblato ($b<a$) - - - -	(57)
VIII --Comparação dos Resultados - - - - -	-(70)
IX --Conclusão - - - - -	-(72)
X --Apêndices	
X-1 --Funções de Legendre em Termos de v_o e de w_o - - - - -	-(76)
X-2 --Obtenção da Equação Diferencial Final - - - - -	-(78)
X-3 --Cálculo das Grandezas F (fluxo), N (número de partículas) e E (energia) - - - - -	-(79)
XI --Referências - - - - -	-(81)

- AGRADECIMENTOS -

Quero agradecer ao Doutor P.H.Sakanaka, pela orientação, idéias e soluções nos momentos críticos e ainda no trabalho numérico quando da elaboração desta. Um agradecimento especial ao Doutor R.A.Clemente pelos ensinamentos em teoria de Campo Reverso, pela gentileza na elaboração matemática elegante desta.

Quero agradecer ainda ao Doutor J.Buenardo pelos ensinamentos pacientes em física de plasma desde que aqui cheguei.

Agradecimentos aos amigos Braga, Hector, Alfredo, Vicene e Emilia. Ao Hisataki pela ajuda junto ao computador, ao André e ao Werner pelas discussões sócio-acadêmicas.

Estou grato ainda pela sempre disponível e preciosa assistência do Augusto, da Valquíria, da Córa e da Cristina.

Aos demais integrantes do Grupo de Plasma da Unicamp.

Finalizando, um agradecimento aos órgãos financiadores:

Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Fundação de Amparo à Pesquisa de S.Paulo (FAPESP), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) .

A todos muito obrigado !

We propose the study of the evolution of Field-Reversed Configurations (FRC's) employing Grad-Hogan theory. From the symmetry properties of these configurations it is possible to get a general equation for slowly diffusing plasmas. Supposing that the temperature is uniform but time dependent, it can be shown that the evolution is described as a continuous sequence of equilibrium states, satisfying proper boundary conditions for which the dependence of the pressure with the poloidal flux function remains fixed. It is possible to calculate plasma density, pressure, temperature and size, together with magnetic flux as functions of time.

The theory is applied to the spherical, prolate and oblate Hill's vortex model, with the condition that the diffusion velocity does not become singular at the magnetic axis. The results show proper characteristics of contraction and expansion of the configuration due to the existence of bifurcation points in the parameters space.

Propomos o estudo da evolução de Configurações de Campo Reverso (FRCs) empregando a teoria Grad-Hogan. Das propriedades de simetria destas configurações é possível obter uma equação geral para plasmas difundindo-se lentamente. Supondo que a temperatura seja uniforme mas dependente do tempo, pode ser mostrado que a evolução é descrita como uma sequência contínua de estados de equilíbrio, satisfazendo condições de contornos apropriadas para as quais a dependência da pressão com a função fluxo poloidal

permanença fixada.É possível calcular a densidade,pressão,temperatura e dimensões do plasma,juntamente com o fluxo magnético como funções do tempo.

A teoria é aplicada para o modelo do vórtice de Hill esférico,prolato e oblato,com a condição que a velocidade de difusão não se torne singular no eixo magnético.Os resultados mostram características próprias de contração e expansão da configuração devido a existência de pontos de bifurcação no espaço dos parâmetros.

I-1 RELEVÂNCIA DE PESQUISAS EM FUSÃO TERMONUCLEAR CONTROLADA ⁽¹⁾

Como consequência do desenvolvimento tecnológico, a demanda mundial de energia vem crescendo assustadoramente nas últimas décadas. O consumo global de energia, que era da ordem de $(3-5) \times 10^{20}$ J/século até 1850, saltou para 40 nos 100 anos seguintes, e está estimado em 150×10^{20} J para o período 1951 \approx 2000. Em contrapartida, as reservas mundiais de combustíveis fósseis, como o petróleo e o carvão mineral, estão estimados em 800×10^{20} J quantidade esta que, se mantida a atual taxa de demanda energética, supriria as nossas necessidades apenas por mais um século.

Neste contexto sombrio, a energia nuclear, explorada comercialmente há mais de três décadas, figura como o principal substituto dos combustíveis não-renováveis. Reatores à fissão, que utilizam principalmente o U-235, estão largamente difundidos nos EUA, Europa Ocidental, URSS e Japão. No entanto, baseado na reserva mundial de urânio, estes reatores seriam capazes de gerar energia da ordem de 30×10^{20} J, que está longe de satisfazer a demanda prevista. Com a entrada em operação dos chamados "reatores regeneradores rápidos" (fast breeder reactors), mais eficientes, esta produção de energia poderia ser ampliada até da ordem de 3500×10^{20} J. Mesmo assim, se considerarmos um período de tempo de alguns séculos, tal quantidade não será ainda uma reserva tranquilizadora. Além do mais, quer nos reatores convencionais, quer nos regeneradores rápidos, a produção de resíduos altamente radiativos se constitui num grande obstáculo, que até agora não foi

solucionado de uma maneira satisfatória.

Surge então como alternativa aos reatores à fissão um sistema no qual a energia útil é obtida através da fusão de núcleos leves, como o deutério, trítio, hélio e lítio. A abundância desses "combustíveis" na natureza é praticamente inesgotável: por exemplo, todo o deutério presente nos oceanos seria capaz de gerar 4×10^{30} J. Além do mais, os reatores à fusão liberam detritos muito menos radioativos que os à fissão. Contudo, esta imensa reserva de energia nuclear ainda não está sendo explorada pelo homem (embora já a natureza o faça desde os tempos primordiais do Universo nos núcleos de estrelas e galáxias), apesar de as pesquisas nesta área terem sido iniciadas já na década de 50 (explosão da primeira Bomba-H :EUA, 1951), a fusão termonuclear controlada ainda se encontra no estágio de demonstração da sua viabilidade científica.

Um gás clássico consiste de partículas neutras e é um pobre condutor de eletricidade por causa da ausência de partículas carregadas livres. Os movimentos das partículas não são afetadas nem dão origem a campos eletromagnéticos. Em contraste um plasma o qual pode ser estreitamente definido como coleção de partículas carregadas, é um bom condutor de eletricidade. Em um volume, o qual é grande o bastante para conter um grande número de partículas, mas pequeno comparado à escala de comprimento de variação espacial de quantidades macroscópicas de interesse tais como pressão e temperatura, a auto carga elétrica resultante é zero; isto é, um plasma é macroscopicamente neutro. Entretanto, as forças de Coulomb que são formadas devido a qualquer separação de carga significativa permite ao plasma manter sua neutralidade elétrica na presença de ambos os distúrbios: estático e dinâmico. Um plasma exhibe vários novos aspectos que não estão presentes em um gás ordinário. Isto é porque um plasma é uma vez mais um fluido dinâmico e um bom condutor elétrico; ele é capaz de ambos interagir com campos eletromagnéticos e de criar eles. A inovação do fenômeno plasma é acentuado pela presença de um campo magnético o qual é usado para o confinamento e aquecimento de plasmas em pesquisas termonuclear controlada.

O termo "plasma" foi primeiro usado por Tonks e Langmuir, em 1929, em seus estudos de oscilações em descargas gasosas. O termo "quarto estado da matéria", frequentemente usado para descrever o estado do plasma, foi inventado por W. Crookes⁽⁴⁾ em 1879 para descrever o meio criado em uma descarga gasosa. O termo quarto estado da matéria segue da idéia que quando calor é somado

a um sólido,ele sofre uma fase de transição para um novo estado,usualmente líquido.Se calor é somado a um líquido ,ele sofre uma transição de fase para o estado gasoso.A adição de mais e mais energia a um gás resulta na ionização de algum dos átomos.Em temperatura acima de $10^5 K$ este estado ionizado da matéria é chamado quarto estado.Embora 99,9 por cento do universo aparente existe em um estado de plasma,existe pouco na Terra devido as baixas temperaturas e altas densidades.Isto mostra que um plasma deva ser criado por meios experimentais para estudos de suas propriedades.

É neste "estado de plasma"que ocorrem as reações de fusão termonuclear.Para que dois núcleos colidam com energia térmica suficiente para vencer a repulsão coulombiana e se fundirem, a temperatura deve ser da ordem $10^9 K$,por exemplo numa reação D-D.Nestas condições,a preocupação básica da Física de Plasmas relacionada com a fusão termonuclear controlada não é obter um plasma absolutamente estável,mas sim mantê-lo em situações próximas às de equilíbrio durante um tempo suficientemente 'longo '(da ordem de 1seg),para que a energia produzida pelas reações de fusão seja maior que a energia gasta para criar e confinar o plasma.

Em outras palavras, os requisitos físicos básicos para a viabilidade de um reator à fusão,podem ser sumarizados como segue: (i)um plasma suficientemente denso e (ii)a uma temperatura suficientemente alta,(iii)deve ser confinado por um tempo suficientemente longo.A forma mais elementar destas condições de suficiência é expressa pelo critério de Lawson⁽⁵⁾:

$$n\tau_E \geq f(T)$$

onde n é a densidade do plasma,T a sua temperatura,e τ_E o tempo de

confinamento da energia; para uma temperatura de $T \approx 15 \text{ KeV}$ ($\text{eV} = 11400^\circ \text{C}$), devemos ter tipicamente $n(T) \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ seg}$.

Devido a sua elevada temperatura, o confinamento destes plasmas termonucleares só é possível através de fortes campos magnéticos, (em geral criados por correntes externas), os quais evitam seu contato com paredes materiais.

Hoje, Configurações de Campo Reverso ou FRC (Field-Reversed Configurations), esquema da figura (1), são geradas usualmente por técnicas theta-pinch por colocar um campo 'bias' axial dentro de um vaso cilíndrico e superpôr um campo axial antiparalelo consecutivamente. Para evitar a aniquilação imediata do campo, uma forte pré-ionização é requerida após o campo 'bias' ter sido embebido. Geralmente, isto é acompanhado por um terceiro circuito capacitor de alta-voltagem oscilante rápido o qual é engatilhado na mesma espira. Outra técnica é passar adicionalmente uma corrente axial anelar através do plasma⁽⁷⁾.

Com a passagem desse campo axial antiparalelo a formação de uma FRC procede em fases distintas à qual leva à reversão do campo nos contornos do plasma. Então segue-se uma implosão radial até o máximo do campo externo ser alcançado, seguindo daí uma contração axial até o equilíbrio entre a pressão cinética e a tensão magnética ser atingido.

Experimentalmente, o equilíbrio da FRC tem sido estudado e verificado através de medições de densidade, temperaturas de elétrons e íons e campo magnético⁽⁸⁾. A instabilidade rotacional $n=2$ que as configurações sofriam após algumas dezenas de microsegundos foram suprimidas por aplicações de campos de quadrupólos de condutores paraxial externo^(8,9). Este modo distorcia a secção circular do plasma em uma deformação elíptica a qual crescia rapidamente até a coluna do plasma tocar a parede do vaso e ser destruído.

Quanto ao confinamento, presentemente, a difusão das partículas para regiões fora daquela limitada pela separatriz

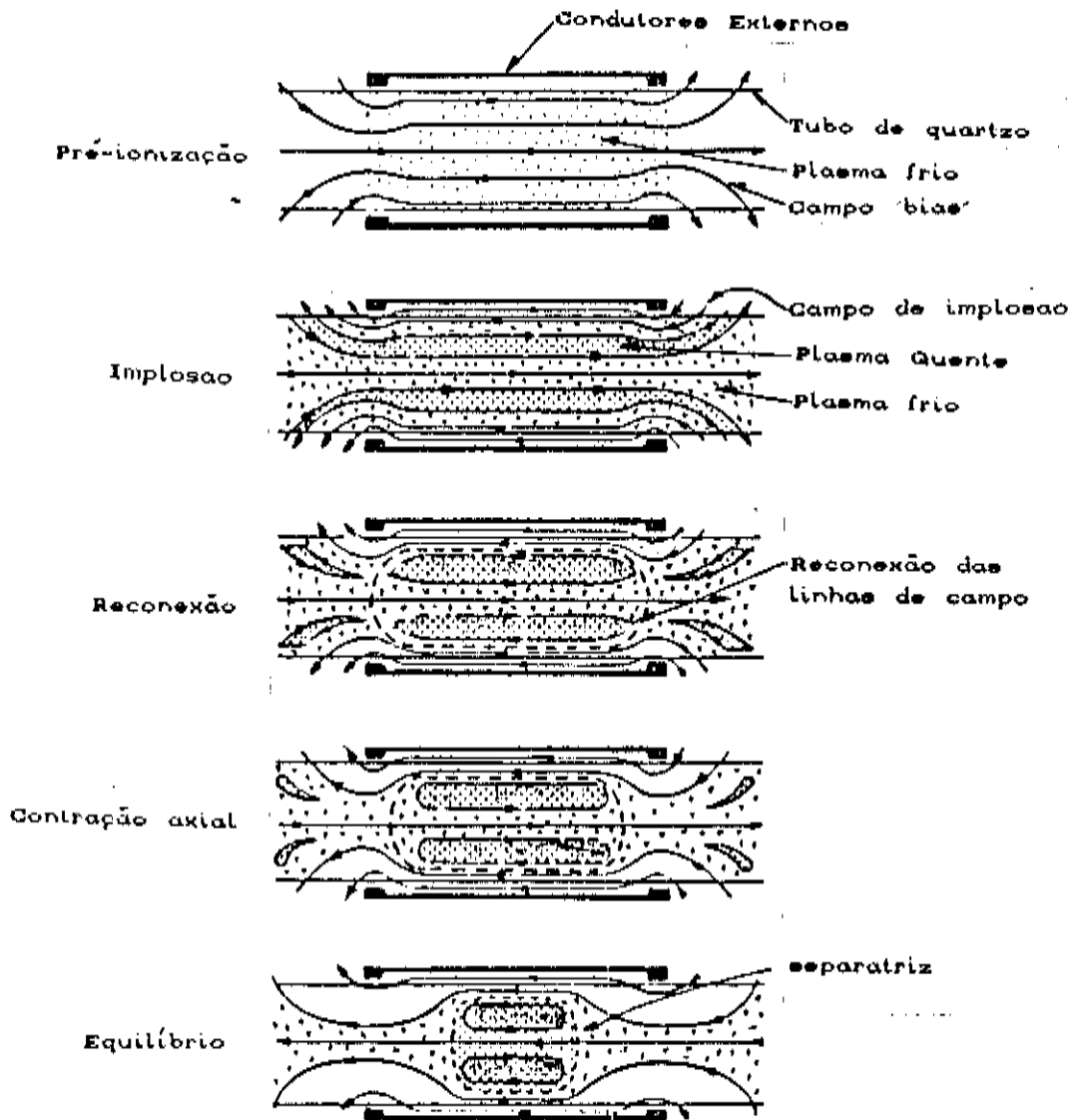


FIG. 1 :Esquema das fases de formação da Configuração de Campo Reverso.

parece ser a limitação dominante para as FRCs^(10,11,12).

Com este respeito, uma meta crucial é o entendimento das propriedades de transporte nestas configurações.

A geometria de uma FRC é essencialmente bidimensional e isto é relevante em computar tempos de vida, ao menos dentro da teoria magnetohidrodinâmica. A topologia de FRCs tem sido tomada em conta usando o modelo estacionário para plasmas se difundindo lentamente por Kruskal e Kulrud⁽¹⁰⁾ e os tempos de vida estão dentro de um fator de dois ou três maior que aqueles observados experimentalmente.

Entretanto, o modelo estacionário tem diversas falhas.

Ele implica que campos não decaem no tempo, tal que é impossível calcular tempos de evolução das dimensões do plasma. Ele assume que uma fonte de partículas existe para manter o número de partículas confinadas constante, e consistência com estacionariedade implica perfis de temperatura muito especiais (geralmente se anulando nas bordas do plasma). Além disso, a velocidade de difusão do plasma sempre apresenta alguma singularidade, enquanto que ao mesmo tempo efeitos inerciais são desprezados na equação de balanço de momento.

Devido a todos estes problemas seria de interesse encontrar algum outro jeito de calcular o decaimento resistivo de FRCs, com considerações menos forte e mais próximos dos valores obtidos experimentalmente.

Existem medidas experimentais do tempo de confinamento de partículas (definido como o tempo durante o qual a densidade de partículas decai $e=2,718$ o seu valor original) para FRCs advindas dos experimentos FRX-B e FRX-C do Laboratório Nacional de Los Alamos. Os resultados foram estes :

FRX-B : $a=5,4\text{cm}$; $b=25\text{cm}$; $n_0=3,5 \times 10^{15}\text{cm}^{-3}$; $T_e=110\text{eV}$; $T_i=200\text{eV}$

(deutério como gás)

$$\tau_{\text{FRX-B}} = 39 \pm 15 \mu\text{s}$$

FRX-C : $a=10\text{cm}$; $b=50\text{cm}$; $n_0=5 \times 10^{15}\text{cm}^{-3}$; $T_e=100\text{eV}$; $T_i=250\text{eV}$

(deutério como gás)

$$\tau_{\text{FRX-C}} = 187 \pm 25 \mu\text{s}$$

Neste trabalho, essencialmente aplicamos a teoria de Grad-Hogan⁽¹⁵⁾ para FRCs, (usando o sistema de unidades MKS), mostrando que é possível calcular a densidade, pressão, temperatura e dimensões do plasma, juntamente com o fluxo magnético como funções do tempo. Desprezando a condução térmica e perdas por radiação é uma aproximação drástica que fazemos, mas ela pode ser parcialmente justificada pelo fato que experimentalmente os dois efeitos são responsáveis por apenas 20 a 40% das perdas de energia total do plasma. O mecanismo⁽⁹⁰⁾ principal de perda, o qual é retido no tratamento, é a perda de partículas. Além disso mostraremos que o problema pode ser resolvido sem recorrer às técnicas computacionais, obrigando a consideração de uma temperatura do plasma uniforme mas dependente do tempo, a qual em retôrno faz mais plausível o desprezo da condução térmica.

Uma vez que as condições de contorno e a dependência funcional da pressão com a função fluxo são fixadas, as soluções correspondentes da equação de Grad-Shafranov representam uma família de equilíbrio. Cada equilíbrio de uma dada família será caracterizado por um parâmetro próprio. Para encontrar a evolução temporal do sistema será suficiente encontrar a evolução temporal

de tal parâmetro. Isto pode ser acompanhado por requerer que nenhuma singularidade tenha que ser introduzida no campo de velocidade de difusão no ponto-0 (círculo no qual a pressão é máxima).

Como aplicação tratamos alguns casos de interesse na qual o perfil de pressão no plasma seja linear com o fluxo magnético poloidal. Casos mais complexos tem que ser tratados com a ajuda de códigos numéricos para calcular as famílias de equilíbrio.

O caso de um vórtice de Hill esférico pode ser tratado analiticamente e os resultados mostram que a esfera de plasma contrai-se e desaparece em uma escala resistiva de tempo típica. Os casos de um vórtice de Hill prolato e oblatto podem também ser resolvidos e os resultados mostram aspectos típicos da existência de pontos de bifurcação no espaço dos parâmetros.

II- DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES MACROSCÓPICAS

II-1 EQUAÇÃO DE BOLTZMANN

Considere uma coleção de partículas carregadas em um campo eletromagnético. Espécies diferentes de partículas, especificamente íons e elétrons, serão distinguidos pelo subscrito j .

Definimos agora a função de distribuição dependente do tempo para partículas de espécie j no espaço de fase 6-dimensional: $f_j(r, v, t)$. O número de partículas no elemento de volume 6-dimensional $d^3r d^3v$ centrado em r, v será então $f_j(r, v, t) d^3r d^3v$. A variação no tempo da função de distribuição é encontrada da equação de Boltzmann :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_j}{\partial r} + (q_j/m_j)(E + v \times B) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \right)_{\text{colisões}} \quad (2.1)$$

Aqui E e B são compostos das contribuições dos campos externos e os campos interno médio originando das interações interpartículas de longo alcance. O lado direito dá a taxa de mudança da função de distribuição devido às interações interpartículas de curto alcance.

II-2 MOMENTOS DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN

Os diferentes momentos da equação de Boltzmann são obtidos multiplicando a equação (2.1) com potências de v e então integrando sobre o espaço das velocidades. Para obter as derivações abaixo, integrações por partes produzirão integrais de superfícies sobre a superfície $v = \infty$. É assumido que a função de distribuição

integrals de superficies não contribuem .Os três momentos da equação de Boltzmann são^[14] :

$$\partial n_j / \partial t + \nabla \cdot (n_j u_j) = 0 \quad (2.2)$$

a qual é a equação da continuidade para partículas de espécies j (u_j é a velocidade média) .

$$\partial (n_j m_j u_j) / \partial t + \nabla \cdot (n_j m_j v v) - n_j q_j (E + u_j \times B) = \int C_{jl} m_j v d^3 v \quad (2.3)$$

a qual expressa a conservação do momentum para partículas de espécies j. Aqui abreviamos o termo C_j em

$$C_j \equiv (\partial f_j / \partial t)_{\text{colisão}} = \sum_l C_{jl} \quad (2.4)$$

onde os termos de colisão tem sido decomposto em contribuições C_{jl} devido a colisões de partículas de espécie j com partículas de espécies l .

$$\partial (n_j m_j \overline{v^2} / 2) / \partial t + \nabla \cdot (n_j m_j \overline{v^2} v / 2) - n_j q_j E \cdot u_j = \int C_{jl} (m_j v^2 / 2) d^3 v \quad (2.5)$$

a qual é a forma da lei da conservação da energia .

Vamos definir uma velocidade aleatória v'_j das partículas com respeito à velocidade média u_j :

$$v'_j \equiv v - u_j \quad (2.6)$$

A parte da velocidade aleatória do termo vv ocorrendo na equação do momentum dá origem ao tensor das tensões P_j definido como

$$P_j(r, t) \equiv n_j m_j \overline{v'_j v'_j} \equiv P_j I + \Pi_j \quad (2.7)$$

onde

$$P_j(r, t) = n_j m_j v_j'^2 \quad (2.8)$$

e $\Pi_j(r,t)$ é a parte devido a anisotropia da função de distribuição. Igualmente, a parte da velocidade aleatória do escalar v^2 ocorrendo na equação da energia dá origem a uma quantidade relacionada à energia cinética média das partículas no referencial se movendo com velocidade u_j o qual definimos ser a temperatura T_j :

$$T_j(r,t) \equiv (m_j/3n_j(r,t)) \int v_j'^2 f_j(r,v,t) d^3v \quad (2.9)$$

notemos que $P_j = n_j k T_j$.

Finalmente, a parte da velocidade aleatória do vetor $\overline{v^2 v}$ ocorrendo na equação da energia dá origem a uma quantidade

$$h_j(r,t) \equiv n_j m_j \overline{v^2 v}_j \quad (2.10)$$

a qual é o fluxo de calor pelo movimento aleatório das partículas de espécie j .

Os termos de colisões podem também ser simplificados transformando-se no referencial com velocidade u_j . O lado direito da equação do momentum fica sendo

$$\int C_{jl} m_j v d^3v \equiv \int C_{jl} m_j v'_j d^3v \equiv R_j \quad (2.11)$$

o qual é a transferência de momentum médio das partículas de espécie l para partículas de espécie j . Pelo uso da mesma relação encontramos que o lado direito da equação da energia fica sendo:

$$\begin{aligned} \int C_{jl} m_j v^2/2 d^3v &= \int C_{jl} m_j u_j \cdot v'_j d^3v + \int C_{jl} m_j v_j'^2 d^3v \\ &= u_j \cdot R_j + Q_j \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$Q_j = \int C_{jl} (m_j v_j^2 / 2) d^3v \quad (2.13)$$

o qual é o calor gerado no sistema de partículas j devido a colisões com partículas l .

Substituindo as definições(2.7-2.13) as equações para a conservação do momento e energia tomam a forma

$$\partial(n_j m_j u_j) / \partial t + \nabla \cdot (n_j m_j u_j u_j) + \nabla \cdot P_j - n_j q_j (E + u_j \times B) = R_j \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \partial(n_j m_j u_j^2 / 2) / \partial t + \partial(3n_j kT / 2) / \partial t + \nabla \cdot (n_j m_j u_j^2 u_j / 2 + 3n_j kT u_j / 2 \\ & + u_j \cdot P_j + h_j) - n_j q_j E \cdot u_j = u_j \cdot R_j + Q_j \end{aligned} \quad (2.15)$$

A equação do momentum pode ser simplificada por usar a equação da continuidade (2.2) para remover contribuições $\partial n_j / \partial t$, enquanto a equação da energia pode ser simplificada por remover a parte da energia cinética de volume por meio de ambas a equação da continuidade (2.2) e a equação de momentum (2.14). Definindo a derivada Lagrangeana ao longo das linhas de fluxo u_j :

$$d/dt \equiv \partial/\partial t + u_j \cdot \nabla \quad (2.16)$$

os três momentos da equação de Boltzmann então toma a forma :

$$(dn_j/dt) + n_j \nabla \cdot u_j = 0 \quad (2.17)$$

$$n_j m_j du_j/dt + \nabla \cdot P_j - n_j q_j (E + u_j \times B) = R_j \quad (2.18)$$

$$3n_j k dT_j/dt + P_j \nabla \cdot u_j + \nabla \cdot h_j = Q_j \quad (2.19)$$

Vamos agora especializar a um plasma consistindo de elétrons $q_e = -e$ e um tipo de íons com número de carga z , $q_i = ze$. Das equações (2.17)-(2.19) obtém-se então um duplo conjunto de equações para íons e elétrons conhecidas como equações de dois-fluidos. As equações da magnetohidrodinâmica de um fluido são produzidas combinando os pares de equações dessas equações de dois-fluidos por meio de expressões para a densidade de massa total ρ , a velocidade do centro de massa v e a densidade de corrente J :

$$\begin{aligned} \rho &\equiv n_e m_e + n_i m_i \\ v &\equiv (n_e m_e u_e + n_i m_i u_i) / \rho \\ J &\equiv -en_e u_e + zen_i u_i \end{aligned} \tag{2.20}$$

A informação completa contida nas equações de dois-fluidos pode ser conservada se soma-se e subtrai-se cada par das variáveis de dois-fluidos em termos das variáveis um-fluido definida acima por meio da inversão das equações (2.20) :

$$\begin{aligned} n_e &= [z\rho - (m_i/e)\rho] / (m_i + zm_e) \approx z\rho / (m_i + zm_e) \\ n_i &= [\rho + (m_e/e)\rho] / (m_i + zm_e) \approx \rho / (m_i + zm_e) \\ u_e &= [ze\rho v - m_i J] / (ze\rho - m_i \rho_e) \approx v - m_i J / ze\rho \\ u_i &= [e\rho v + m_e J] / (e\rho + m_e \rho_e) \approx v + m_e J / e\rho \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde as aproximações do lado direito são devido à consideração de quasi-neutralidade :

$$n_e - zn_i \ll n_e \quad \text{ou} \quad m_i \rho_e \ll e\rho \quad (2.22)$$

Quasi-neutralidade é uma boa aproximação para o estudo de fenômenos de plasma com uma escala de comprimento L tal que

$$L \gg \lambda_D \quad (2.23)$$

onde o comprimento de Debye é definido como $\lambda_D \equiv (\epsilon_0 kT/e^2 n_e)^{1/2} = v_{te} / \omega_{pe}$, onde $\omega_{pe} \equiv (n_e e^2 / \epsilon_0 m_e)^{1/2}$. Para um plasma termonuclear com $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $T = 10^9 \text{ K}$, $B = 10 \text{ Wb/m}^2 = 10^5 \text{ G}$ temos $\lambda_D = 7 \times 10^{-4} \text{ cm}$ e $\omega_{pe} = 6 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$, tal que esta condição é facilmente satisfeita para o fenômeno global que desejamos estudar .

Multiplicando o par de equações em (2.17) pelas massas e somando-as temos a equação da conservação da massa :

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.24)$$

Igualmente ,somando o par de equações em (2.18) e usando a aproximação em (2.21) resulta na equação de movimento :

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + (m_e m_i / z e^2 \rho) \mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{P} - \rho_e \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.25)$$

onde $\mathbf{P} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i$.

Multiplicando o par de equações em (2.18) pelo quociente carga/massa e subtraindo resulta em uma equação para a taxa de mudança da densidade de corrente ,a qual é conhecida sob o nome de Lei de Ohm Generalizada :

$$\begin{aligned}
& \partial J / \partial t + \nabla \cdot [\rho_e \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{J} \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{J} - (1 - z m_e / m_i) (m_i / z e \rho) \mathbf{J} \mathbf{J}] - (e / m_e) (\nabla \cdot \mathbf{P}_e \\
& - (z m_e / m_i) \nabla \cdot \mathbf{P}_i) + (e / m_e) (1 - z m_e / m_i) \mathbf{J} \times \mathbf{B} - (z e^2 \rho / m_e m_i) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \\
& = -(e / m_e) (1 - z m_e / m_i) \mathbf{R} \tag{2.26}
\end{aligned}$$

O termo com $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ é conhecido como o termo Hall .

Finalmente, somando as equações (2.19) resulta na equação de balanço do calor :

$$\begin{aligned}
& (3/2) \partial P / \partial t + (3/2) \mathbf{v} \cdot \nabla P + (5/2) P \nabla \cdot \mathbf{v} + (3/2) \nabla \cdot [(z m_e \rho_e - m_i \rho_e) (\mathbf{J} / z e \rho)] \\
& + P_e \nabla \cdot (m_e \mathbf{J} / e \rho) - P_i \nabla \cdot (m_i \mathbf{J} / z e \rho) + \Pi_e : \nabla \mathbf{u}_e + \Pi_i : \nabla \mathbf{u}_i + \nabla h = \\
& = (m_i / z e \rho) (1 - z m_e / m_i) \mathbf{J} \cdot \mathbf{R} \tag{2.27}
\end{aligned}$$

onde $P \equiv P_e + P_i$ e $h \equiv h_e + h_i$.

As equações (2.24)-(2.27) constituem as equações de evolução para as variáveis um-fluido macroscópicas $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{J}$ e P . Note-se que nenhuma outra aproximação tem sido feita que a condição de quasi-neutralidade, a qual é extremamente bem satisfeita. Entretanto, um número de variáveis dois-fluidos que aparecem terão que ser removidas para tornar o sistema de equações em um conjunto fechado. Portanto, considerações adicionais terão que ser feitas que são bem menos satisfeitas

----- A razão massa dos elétrons e íons é pequena :

$$m_e \ll m_i \tag{2.28}$$

----- A velocidade relativa de íons e elétrons é pequena comparada à velocidade de volume :

$$| \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e | \ll v \quad \text{ou} \quad m_i \mathbf{J} \ll e \rho v \tag{2.29}$$

----- A viscosidade dos elétrons e ions são desprezíveis :

$$\Pi_e, \Pi_i \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

----- Condução de calor pode ser desprezada :

$$h \rightarrow 0 \quad (2.31)$$

----- A transferência de momentum ion-elétron é proporcional à velocidade relativa de ions e elétrons :

$$R = \eta e n_e J \quad (2.32)$$

onde o fator de proporcionalidade, a resistividade η é assumida ser escalar.

Essas considerações transformam as equações (2.24-2.27)

em :

$$\rho \partial v / \partial t + \rho v \cdot \nabla v + \nabla P - \rho_e E - J \times B = 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \partial J / \partial t + \nabla \cdot (\rho_e v v + j v + v J) - (ze^2 \rho / m_e m_i) (E + v \times B) = \\ * -(ze^2 \rho / m_e m_i) \eta J \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$(3/2) \partial P / \partial t + (3/2) v \cdot \nabla P + (5P/2) \nabla \cdot v = \eta J^2 \quad (2.35)$$

Embora o sistema (2.33-2.35) é matematicamente consistente, o problema fisico correspondente é muito desequilibrado. Comparando as ordens de magnitude dos termos na lei de Ohm generalizada (2.34), resulta que os termos $\partial J / \partial t$ e $\nabla \cdot (\rho_e v v + j v + v J)$ são muito menores que os termos resultantes. Os termos podem ser desprezados se uma condição é encontrada que é levemente mais restritiva que a condição de quasi-neutralidade, isto é ;

$$L \gg c / \omega_{pe} = \lambda_D \frac{c}{v_{ter,e}} \quad (2.36)$$

Esta condição é facilmente satisfeita (para o exemplo dado

anteriormente encontra-se $c/\omega_{pe} = 5 \times 10^{-3}$ cm. Entretanto, o desprezo desses termos muda a natureza matemática do sistema, desde que agora não temos uma equação de evolução para J. Isto não apresenta um problema real porque obtemos uma relação algébrica entre J e E pela qual podemos eliminar J do problema. Esta relação é apropriadamente chamada Lei de Ohm.

Resumindo, sob as condições (2.23), (2.28)-(2.32), (2.36) as equações de momentos da equação de Boltzmann juntos com as equações de Maxwell formam um conjunto fechado de equações MHD resistiva para as variáveis macroscópicas ρ, v, P, E e B :

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \rho v &= 0 && \text{(continuidade)} \\ \rho \partial v / \partial t + \rho v \cdot \nabla v + \nabla P - \rho_e E - J \times B &= 0 && \text{(momento)} \\ (3/2) \partial P / \partial t + (3/2) v \cdot \nabla P + (5/2) P \nabla \cdot v &= \eta J^2 && \text{(energia interna)} \\ \partial B / \partial t + \nabla \times E &= 0 && \text{(Faraday)} \\ (1/c^2) \partial E / \partial t + \mu_0 J - \nabla \times B &= 0 && \text{(Ampère)} \end{aligned}$$

onde

$$\eta J = E + v \times B \quad \text{(Ohm)}$$

e inicialmente as seguintes condições precisam ser satisfeitas

$$\nabla \cdot E = \rho_e / \epsilon_0 \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Como estamos tratando com fluxo que satisfaz

$$v^2 / c^2 \ll 1 \quad (2.38)$$

a melhor maneira de encontrarmos um conjunto consistente de equações é aplicar um ordenamento no pequeno parâmetro v^2/c^2 . Assim

retornemos às equações chamadas pré-Maxwell, e escrevemos a equação de Ampère como ele a conheceu :

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.39)$$

o que implica $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ tal que agora $\partial \rho / \partial t = 0$. Entretanto, isto está em conflito com a eq.(2.37) à qual implica que

$$\partial \rho / \partial t = \epsilon_0 \nabla \cdot \partial \mathbf{E} / \partial t = -\epsilon_0 \partial \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) / \partial t \neq 0$$

em geral. Agora por aplicar a condição (2.38) encontramos que o termo $\rho \cdot \mathbf{E}$ na equação de momento é uma ordem de grandeza menor que os outros termos, tal que ele pode ser desprezado. Após isto, todas as equações são de mesma ordem. O conjunto de equações é um conjunto consistente matematicamente, o qual goza da propriedade de ser um invariante galileano.

Em conclusão; em teoria MHD resistiva, as equações resultantes são :

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (\text{continuidade}) \quad (2.40)$$

$$(\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{conservação de momento}) \quad (2.41)$$

$$(3/2)(\partial P / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla P) + (5/2)P \nabla \cdot \mathbf{v} = \eta \mathbf{J}^2 \quad (\text{energia interna}) \quad (2.42)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t - \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Faraday}) \quad (2.43)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{Ampère}) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (\text{Ohm}) \quad (2.45)$$

$$P = nkT \quad (\text{equação de estado}) \quad (2.46)$$

$$\eta = \eta_0 (T/T_0)^{-3/2} \quad (\text{resistividade de Spitzer}) \quad (2.47)$$

onde P é a pressão cinética do plasma (suposta escalar), J é a densidade de corrente, E e B são os campos elétrico e magnético, v é a velocidade (macroscópica) do plasma, ρ é a densidade de massa e T é a temperatura (T_0 é a temperatura no tempo inicial). Assim temos as equações para a evolução das variáveis macroscópicas do sistema.

A meta de um modelo sobre transporte em plasma é obter tempos característicos dos processos de difusão em função dos parâmetros experimentais. Esse modelo deve ao menos em princípio reproduzir os possíveis valores experimentais.

1 - O modelo mais simples para se obter estimativas do tempo característico da difusão das linhas de campo através do plasma é dada pela lei de Ohm resistiva

$$E + v \times B = \eta J \quad (3.1)$$

que juntamente com as equações de Maxwell,

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t \quad (3.2)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

resulta em⁽²⁵⁾

$$\nabla \times [v \times B - (\eta / \mu_0) \nabla \times B] = \partial B / \partial t \quad (3.3)$$

Neste modelo é suposto que a velocidade do plasma é nula, i.e., B se difunde - sem dar movimento ao plasma -, com uma lei do tipo exponencial

$$B = B(r) e^{-L/\tau_r} \quad (3.4)$$

se pode estimar τ_r

$$\tau_{rs} = \mu_0 L^2 / \eta \quad (3.5)$$

com L uma distância típica sobre a qual variam todas as quantidades em (3.1) (L tipicamente igual a 2,7cm para o experimento FRX-B e 5cm para o experimento FRX-C), e η a resistividade clássica que pode ser expressa na forma dada por Braginskii :

$$\eta = (Z \ln \Lambda) T_e^{-3/2} (\text{eV}) \quad \text{seg} \quad (3.6)$$

onde Z é o número atômico e $\ln \Lambda = 25.3 + \ln [T_e (\text{eV}) / (n_e)^{1/2}]$ é o logaritmo coulombiano válido para $T_e > 50 \text{eV}$.

2 - Um segundo modelo é o apresentado por Auerbach e Condit⁽¹²⁾, baseado na teoria de estado estacionário (com uma fonte de partículas no ponto-0) de um plasma com difusão lenta de Kruskal-Kulsrud⁽¹³⁾ e o tempo de confinamento das partículas definido como $\tau_p = M / \Gamma_p$ onde M é a massa total da FRC, suposta manter-se constante como também a vazão Γ_p através das superfícies magnéticas. O cálculo é o seguido por R.A.Clemente⁽⁴⁾, onde se supõe que a velocidade de difusão do plasma é pequena o bastante para que seja evitado o termo de inércia na equação de balanço de momento, e o estado de equilíbrio seja descrito pela equação

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.7)$$

Ora, a condição do modelo estacionário leva à equação (3.2) que pode ser escrita como

$$\mathbf{E} = \nabla U \quad (3.8)$$

com U um potencial escalar e agora a equação (3.1) fica escrita

$$\mathbf{J} \cdot (\nabla \mathbf{U} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{U} - (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \eta |\mathbf{J}|^2 \quad (3.9)$$

da qual pode ser obtida a componente de \mathbf{v} ortogonal às superfícies magnéticas ($P = \text{constante}$):

$$\mathbf{v}_\perp = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} / |\nabla P| = (\mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{U} + \eta |\mathbf{J}|^2) / |\nabla P| \quad (3.10)$$

A vazão de massa através de uma superfície $P = P_0$ está dada por:

$$\Gamma_P = \int_{P_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{P_0} ds \rho (\eta |\mathbf{J}|^2 + \mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{U}) / |\nabla P| \quad (3.11)$$

Se é suposto que ρ seja uma função da pressão P , demonstra-se então que

$$\int_{P_0} ds (\mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{U}) / |\nabla P| = 0 \quad (3.12)$$

basta escrever $|\nabla P| = |dP/dl|$ e transformar a integral de superfície em uma de volume entre as superfícies P_0 e $P_0 + dP_0$, lembrando que $\mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{U} = \nabla \cdot (\mathbf{J} \mathbf{U})$, se pode transformar a integral em uma sobre a superfície que encerra o volume, que se anula por ser de mesmo valor e \mathbf{J} tangente às superfícies magnéticas.

Então de (3.11) resulta

$$\Gamma_P = \eta \rho \int_{P_0} ds |\mathbf{J}|^2 / |\nabla P| \quad (3.13)$$

onde é suposto também que η seja uma função essencialmente de T_e , e uma quantidade de superfície.

Para determinarmos $|\mathbf{J}|^2$ e $|\nabla P|$, vê-se que em FRC's $|\mathbf{J}| = J_\phi$, da equação de Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \partial P / \partial \psi$$

e da relação $\mathbf{B} = -(\mathbf{e}_\phi \times \nabla \psi) / r$ pode-se obter

$$|\mathbf{J}|^2 = |\Delta^* \psi|^2 / \mu_0^2 r^2 \quad (3.14)$$

$$|\nabla P| = |\Delta^* \psi| |\nabla \psi| / \mu_0 r^2 \quad (3.15)$$

resultando em

$$\Gamma_p = (\eta \rho / \mu_0) \int_{p_0} ds |\Delta^* \psi| / |\nabla \psi| \quad (3.16)$$

Já que as curvas $\psi = \text{const.}, \phi = \text{const.}$ coincidem com as linhas de \mathbf{B} pode-se expressar ds como sendo $ds = r d\phi$ com $d\ell$ o elemento da trajetória ao longo da linha magnética. Ora, a equação das linhas magnéticas é da forma

$$dr/dz = B_r / B_z \quad (3.17)$$

o que resulta

$$ds / |\nabla \psi| = |dr / B_r| = r dr / |\partial \psi / \partial z| \quad (3.18)$$

e assim a vazão fica escrita

$$\Gamma_p = (\eta \rho / \mu_0) \int_{r_1(\psi)}^{r_2(\psi)} r dr |\Delta^* \psi| / |\partial \psi / \partial z| \quad (3.20)$$

onde tem-se levado em conta a simetria em respeito ao plano equatorial ($z=0$) das FRC's e $\psi(r_1, 0) = \psi(r_2, 0)$ na integração em ϕ .

Para o caso do vórtice de Hill, ψ é a dada pela expressão (5.1) a qual resulta

$$\Gamma_p = (\eta\rho/\mu_0)(1 + 4b^2/a^2)4\pi \int_{r_1(\psi)}^{r_2(\psi)} dr r/z \quad (3.21)$$

Por resolver essa equação, à qual recai na avaliação de uma integral elíptica de segunda espécie, pode-se expressar a vazão Γ_p como

$$\Gamma_p = 1.06(\eta\rho/\mu_0)4\pi b (4 + a^2/b^2) \quad (3.22)$$

Já que se considera Γ_p constante no plasma, então $\eta\rho$ tem que ser constante. Desde que η dependa de $T_e^{3/2}$ e $\rho\propto\psi$, assumindo T_e como função de ψ pode-se satisfazer esta condição considerando

$\eta = \eta_{\max} (\psi/\psi_{\max})^{-3/5}$ e $\rho = \rho_{\max} (\psi/\psi_{\max})^{3/5}$ com η_{\max} e ρ_{\max} valores máximos de η e ρ no plasma. Com isto o cálculo da massa total para este modelo fica sendo

$$M = \rho_0 \int (\psi/\psi_{\max})^{3/5} d^3r \quad (3.23)$$

onde a integral se estende ao volume englobado pela separatriz e $\rho_{\max} = \rho_0$. Por resolver esta integral em coordenadas polares x, φ tal que $r/a = x \cos\varphi$ e $z/b = x \sin\varphi$, obtém-se M dada por

$$M = 2,44 \rho_0 b a^2 \quad (3.24)$$

O tempo de confinamento das partículas para esse modelo fica sendo:

$$\tau_{AC} = (2.3/4\pi)(\mu_0 a^2/\eta)(1 + 4a^2/b^2)^{-1} \quad (3.25)$$

3 - Um terceiro modelo que se baseia essencialmente em FRC muito alongada ($b/a \gg 1$), o qual permite aproximar a função de onda de Coulomb com $\text{sen}(\pi r^2/a^2)$. Tal limite, com a equação de Grad-Shafranov da forma $\Delta^* \psi \propto \psi$ é conhecido como solução de Maschke-Herwegger⁽²⁷⁾. Nesta aproximação a função fluxo poloidal se expressa como

$$\psi = \psi_{\max} \text{sen}(\pi r^2/a^2) \cos(\pi z/2b) \quad (3.26)$$

Resulta então, para esse modelo, a expressão integral (3.19) :

$$\Gamma_p = 32\pi^2 (\rho \eta b / a^4 \mu_0) \int_{r_1(\psi)}^a r^3 [\text{sen}^2(\pi r^2/a^2) (\psi_{\max}^2 / \psi^2) - 1]^{-1/2} dr \quad (3.27)$$

e por resolvê-la

$$\Gamma_p = (16\pi \eta \rho b / \mu_0) \psi / \psi_{\max} K(1 - \psi^2 / \psi_{\max}^2) \quad (3.28)$$

com $K(k)$ integral elíptica completa de primeira espécie e parâmetro $k = 1 - \psi^2 / \psi_{\max}^2$. Para $\psi = \psi_{\max}$, $K(0) = \pi/2$ e para $\psi = 0$, $K(1) = \infty$. A divergência de K na separatriz é uma consequência da existência de dois círculos, em $r = a$ e $z = \pm b$, nos quais $B = 0$ e formalmente se concentra toda a vazão de partículas. Estes círculos atuam praticamente como divertores.

Como antes, se se deseja Γ_p uma constante, então $\eta \rho \psi K(1 - \psi^2 / \psi_{\max}^2) / \psi_{\max}$ deverá ser constante. Como nesse caso $\rho \propto \psi^2$, esta condição poderá ser satisfeita se se assume

$$\rho = \rho_0 (\psi / \psi_{\max})^{4/3} [2K(1 - \psi^2 / \psi_{\max}^2) / \pi]^{-2/3} \quad e$$

$$\eta = \eta_0 \left[2K \left(1 - \psi^2 / \psi_{\max}^2 \right) \left(\psi^2 / \pi \psi_{\max}^2 \right) \right]^{-2/5}$$

com ρ_0 e η_0 os valores máximos de ρ e η , respectivamente.

A massa total do plasma é calculada reparando que devido ao comportamento das integrais elípticas, resulta da relação anterior

$$\rho_0 \left(\psi / \psi_{\max} \right)^{4/5} < \rho < \rho_0 \left(\psi / \psi_{\max} \right)^{4/5}$$

a qual após integração, os valores numéricos correspondentes são

$$0,72\pi\rho_0 b a^2 < M < 0,92\pi\rho_0 b a^2 \quad (3.28)$$

Assim o tempo típico de difusão de partículas para este modelo de Maschke-Herzegger será :

$$0,36\mu_0 a^2 / 4\pi\eta_0 < \tau_{MH} < 0,46\mu_0 a^2 / 4\pi\eta_0 \quad (3.29)$$

ou ainda com aproximação de $a^2/b^2 \ll 1$, podemos tomar

$$\tau_{MH} \approx 0,41\mu_0 a^2 / 4\pi\eta_0 \quad (3.30)$$

IV-1 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

O sistema de coordenadas ortogonais utilizado é o cilíndrico (r, ϕ, z) . Mais tarde, quando da aplicação de tal teoria, o sistema de coordenadas esferoidais prolato e oblato serão utilizados⁽²²⁾.

A introdução de uma função fluxo magnético poloidal

$$\psi(r, z, t) = \int_0^r dr' r' B_z(r', z', t) \tag{4.1}$$

permite-nos expressar o campo magnético na forma

$$\mathbf{B} = - (\hat{e}_\phi \times \nabla \psi) / r \tag{4.2}$$

a qual satisfaz $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Esta notação é usada para derivarmos praticamente todas as equações no que diz respeito à evolução da configuração.

O fato de estarmos tratando uma teoria para entendimento de FRCs e que neste tipo de configuração não se tem campo magnético toroidal, faz-se notar que :

$$(\hat{e}_\phi \times \nabla \psi) / r = (\partial \psi / \partial z \hat{e}_r - \partial \psi / \partial r \hat{e}_z) / r \tag{4.3a}$$

e

$$\nabla \times (\psi / r) \hat{e}_\phi = - (\partial \psi / \partial z \hat{e}_r - \partial \psi / \partial r \hat{e}_z) / r \tag{4.3b}$$

possam ser mudados na equação (2.43), Aqui \hat{e}_ϕ , \hat{e}_r e \hat{e}_z é o

triedro de versores do sistema de coordenadas cilíndrico.

Usando a lei de Faraday,eq.(2.43)temos imediatamente que

$$E = (\partial\psi/\partial t)/r \hat{\theta}_\phi \quad (4.4)$$

Do segundo termo da lei de Ohm,obtem-se a identidade:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi)/r \hat{\theta}_\phi - (\mathbf{v} \cdot \hat{\theta}_\phi) \nabla \psi / r \quad (4.5)$$

Onde nesta última passagem usamos a identidade vetorial :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{D} \quad (4.6)$$

Na equação (4.5) o segundo termo é nulo pois se supõem difusão segundo r e z apenas.Com isso,temos

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi)/r \hat{\theta}_\phi \quad (4.7)$$

A lei de Ohm permite-nos escreve-la agora como sendo

$$(\partial\psi/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi) \hat{\theta}_\phi = \eta r \mathbf{j} \quad (4.8)$$

A partir da teoria magnetohidrodinâmica para sistemas com simetria azimutal,temos a equação de Grad-Shafranov^[47] para o equilíbrio de FRCs :

$$\Delta^* \psi + \mu_0 r^2 dP/d\psi = 0 \quad (4.9)$$

onde $\Delta^* = r \partial/\partial r (1/r \partial/\partial r) + \partial^2/\partial z^2$ é o operador Grad-Shafranov.

Na equação de conservação de momento,eq.(2.41),podemos

desprezar os efeitos de inércia, e escrever :

$$(\partial P / \partial \psi) \nabla \psi = \mathbf{J} \times (\hat{\theta}_\phi \times \nabla \psi) / r = -(\mathbf{J} \cdot \hat{\theta}_\phi) \nabla \psi / r \quad (4.10)$$

onde usamos novamente a identidade vetorial (4.6) e o fato que

$\mathbf{J} = J_\phi \hat{\theta}_\phi$. Notemos que agora a forma para o perfil de pressão deve ser escrito como derivada parcial na função fluxo ψ , pois

$P = P(\psi, t)$. Assim, com o uso de (4.9) e (4.10) temos :

$$(\partial \psi / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi) = -\eta r^2 (\partial P / \partial \psi) = (\eta / \mu_0) \Delta^* \psi / r \quad (4.11)$$

A equação (4.11) é a equação que descreve a FRC no que tange ao decaimento resistivo (à esquerda) e o equilíbrio ($t=0$, parte direita). Para qualquer solução analítica se torna necessário a re-solução da parte em equilíbrio.

O decaimento da configuração através da difusão lenta do campo através do plasma faz com que o coeficiente de difusão (η / μ_0) , aparecendo na anterior, corresponda ao efeito "skin" ordinário em um sólido condutor de resistividade η .

Escrevendo a equação da continuidade como

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \partial \rho / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -(1/\rho) (\partial \rho / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho) \quad (4.12)$$

e a equação de estado como

$$P = k \rho T / m$$

ou

$$\rho = mP / kT \quad (4.13)$$

Substituindo a equação (4.12) na equação da energia interna, eq.(2.42),temos

$$(3/2)(\partial P/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla P) - (5P/2\rho)(\partial \rho/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho) = \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2 \quad (4.14)$$

Por usar (4.13) na anterior

$$-\partial P/\partial t + (5P/2T)\partial T/\partial t - \mathbf{v} \cdot \nabla P + (5P/2T)\mathbf{v} \cdot \nabla T = \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2 \quad (4.15)$$

Rearranjando os termos :

$$-(\partial P/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla P) + (5P/2T)(\partial T/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla T) = \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2 \quad (4.16)$$

Fazendo

$$\mathbf{v} \cdot \nabla P = \mathbf{v} \cdot \nabla \psi (\partial P/\partial \psi) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \cdot \nabla T = \mathbf{v} \cdot \nabla \psi (\partial T/\partial \psi)$$

então

$$-\partial P/\partial t - (\partial P/\partial \psi)\mathbf{v} \cdot \nabla \psi + (5P/2T)[\partial T/\partial t + (\partial T/\partial \psi)\mathbf{v} \cdot \nabla \psi] = \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2$$

Usando a equação (4.8) na forma $\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = \eta r J_\phi - \partial \psi/\partial t$, temos

$$-\partial P/\partial t - (\partial P/\partial \psi)(\eta r J_\phi - \partial \psi/\partial t) + (5P/2T)[\partial T/\partial t + (\partial T/\partial \psi)(\eta r J_\phi - \partial \psi/\partial t)] = \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2 \quad (4.19)$$

Mas $\partial P/\partial \psi = -J_\phi/r$ (equação 4.10)

Portanto

$$-\partial P/\partial t + \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2 + (\partial P/\partial \psi)(\partial \psi/\partial t) + (5P/2T)(\partial T/\partial t) - (5P/2T)[\eta r^2 (\partial T/\partial \psi)(\partial P/\partial \psi) - (\partial T/\partial \psi)(\partial \psi/\partial t)] = \eta r^2 (\partial P/\partial \psi)^2$$

O segundo termo à esquerda cancela-se com o termo à direita e assim

$$\partial P / \partial t - (\partial P / \partial \psi) (\partial \psi / \partial t) - (5P / 2T) [\partial T / \partial t + (\partial T / \partial \psi) \mathbf{v} \cdot \nabla \psi] = 0 \quad (4.20)$$

A equação (4.20) é a equação geral para a difusão de uma FRC. O grau de dificuldade na resolução aparece no último termo onde aparece a velocidade do plasma e também na dependência da pressão com a função fluxo à qual deve satisfazer a expressão (4.9) no equilíbrio.

Restringiremos aqui apenas para casos em que a temperatura seja função do tempo $T=T(t)$. Com isso (4.20) simplifica-se para :

$$\partial P / \partial t - (\partial P / \partial \psi)(\partial \psi / \partial t) - (5P/2T)(\partial T / \partial t) = 0 \quad (4.21)$$

ou ainda

$$T^{5/2} \partial (PT^{-5/2}) / \partial t = (\partial P / \partial \psi)(\partial \psi / \partial t) \quad (4.22)$$

Usando a identidade entre E e $v \times B$, podemos escrever :

$$v \cdot \nabla \psi = r(E + v \times B) - \partial \psi / \partial t \quad (4.23)$$

Agora usando a equação (4.10), temos :

$$v \cdot \nabla \psi = -(r/J_{\phi}) v \cdot \nabla P \quad (4.24)$$

Igualando (4.23) e (4.24), chega-se à

$$\partial \psi / \partial t = r [(E + v \times B) + (T^{5/2} / J_{\phi}) (v \cdot \nabla) PT^{-5/2}] \quad (4.25)$$

Assim de volta à equação (4.22) temos o resultado na forma vetorial, como sendo :

$$(\partial / \partial t + v \cdot \nabla) PT^{-5/2} = -J_{\phi} (E + v \times B) / T^{5/2} \quad (4.26)$$

No caso de um plasma ideal em que a resistividade η é zero, o termo $(E + v \times B)$ é nulo e obtém-se o resultado clássico $PT^{-5/2} = g(\psi)$, onde

s não tem dependência explícita no tempo. Quando η é diferente de zero, em geral $PT^{-5/2} = s(r, z, t)$, mas ainda é possível para o caso especial de FRC's, obter soluções do tipo $s(\psi)$. De fato, para FRC's temos $J = J_\phi \hat{\phi}$ e a última equação se reduz à :

$$ds/dt = -(J_\phi / T^{5/2})(E + v \times B)$$

ou

$$(ds/d\psi)(\partial\psi/\partial t + v \cdot \nabla\psi) = T^{-5/2} (\partial P/\partial\psi)(\partial\psi/\partial t + v \cdot \nabla\psi) \quad (4.27)$$

à qual identificada com a equação de Grad-Shafranov, fornece :

$$ds/d\psi = T^{-5/2} (\partial P/\partial\psi) \quad (4.28)$$

à qual implica uma temperatura uniforme $T = T(t)$ e um perfil para a pressão

$$P = (T/T_0)^{5/2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n \psi^n(r, z, t) \quad (4.29)$$

onde os k_n 's são constantes definidos de maneira tal que

$$P(r, z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \psi^n(r, z, 0) \quad (4.30)$$

A equação (4.30) implica que, para temperatura uniforme, a difusão do plasma não altera a dependência funcional da pressão com ψ . Isto nos permite usar uma família de equilíbrios satisfazendo condições de contorno apropriadas, para descrever a sequência con-

-tínua de estados que o sistema alcançará durante o decaimento .

Geralmente cada equilíbrio de uma dada família será caracterizado por parâmetros próprios.Portanto,para resolver o problema precisamos conhecer o comportamento temporal de tais parâmetros.O comportamento temporal será encontrado por requerer que a componente normal às superfícies de fluxo da velocidade de difusão surgindo da lei de Ohm, não se torne singular no eixo magnético (ponto-0);isto é

$$\partial\psi/\partial t + \eta r^2 \partial P/\partial\psi \Big|_{\text{ponto-0}} = 0 \quad (3.31)$$

Outras singularidades para a velocidade podem surgir na lei de Ohm (eq.4.8) se η tende para infinito em algum outro lugar como é o caso com modelos estacionários^(13,29), a qual pode ser evitada aqui por lembrar que $\eta=\eta(T)$, ou ainda se o gradiente de ψ se anular fora do ponto-0,como é o caso se um divertor existir sobre a separatriz.

Nas seções que se seguem aplicaremos o método proposto num sistema em que P seja linear com ψ dentro da separatriz e P=0 fora dela.

Faremos daqui para a frente uma avaliação da teoria proposta para uma classe de equilíbrios de campo reverso semelhante ao vórtice de Hill, o qual é o modelo bidimensional mais simples para uma FRC, e em cujo caso temos que assumir que partículas alcançando a separatriz são imediatamente perdidas, tal que, temos que considerar um sumidouro ali, para fazer nosso modelo consistente. A equação da continuidade cessa de ser válida sobre essa superfície. Tal sumidouro pode ser evitado se for utilizado modelos mais complexos, envolvendo famílias de equilíbrios na qual o perfil d pressão estende-se fora da separatriz. Códigos numéricos complexos terão que ser usados então, e nosso objetivo é aplicar o modelo de uma maneira essencialmente analítica. A figura (2) ilustra o aspecto interno desse vórtice no caso prolato ($\lambda \equiv b/a > 1$) e a figura (3) o aspecto interno no caso oblato ($\lambda \equiv b/a < 1$).

Originariamente temos a equação de Grad-Shafranov eq(4.9)

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 dP/d\psi$$

para sistema em equilíbrio e simetria azimutal.

Admitindo a priori que $dP/d\psi = \text{constante}$, uma solução particular para essa equação é da forma

$$\psi(r,z,t) = B_0 r^2/2 (1 - r^2/a^2 - z^2/b^2) \tag{5.1}$$

onde $B_0 = B_0(t)$ está relacionada com a intensidade de B.

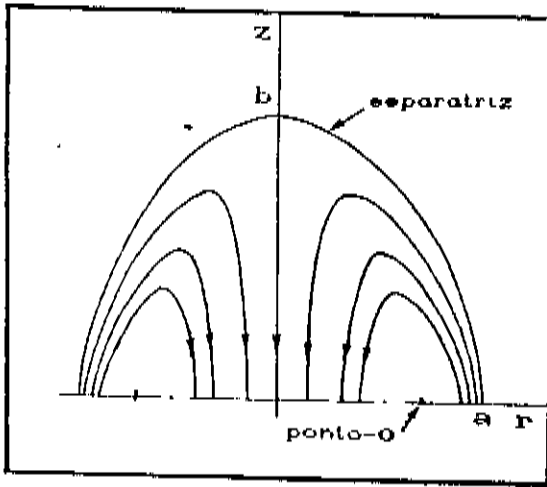


FIG. 2 : Aspecto das linhas de fluxo poloidal $\psi=\text{const.}$ do vórtice de Hill prolato, mostrando a posição da separatriz e ponto-O. A razão entre os raios $z=b$ e $r=a$ é conhecida como a alongação da configuração.

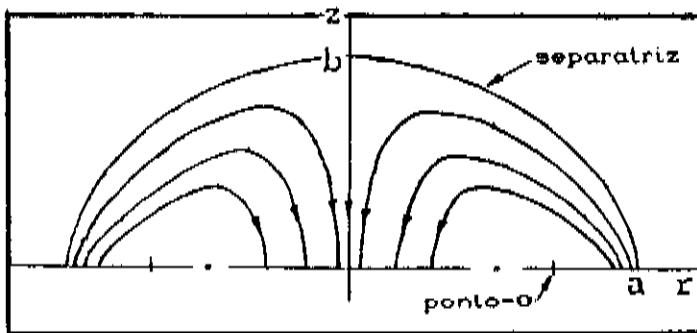


FIG. 3 : Aspecto das linhas de fluxo poloidal internas $\psi=\text{const.}$ do vórtice de Hill oblato, mostrando a posição da separatriz e ponto-O.

Na literatura a equação (5.1) é a conhecida fórmula do vórtice de Hill. A característica desse vórtice faz-se notar se substituimos sua expressão na equação de Grad-Shafranov, o que resulta em

$$B_0 (4/a^2 + 1/b^2) = \mu_0 \partial P / \partial \psi$$

Assim após integração, resulta o perfil de pressão linear na função fluxo :

$$P(\psi) = B_0 / \mu_0 (4/a^2 + 1/b^2) \psi \quad (5.2)$$

Um ponto de suma importância do vórtice de Hill é o ponto $r=a/(2)^{1/2}$, $z=0$, $\psi=0$, conhecido como ponto neutro ou ponto-0 e onde ali a função fluxo e a pressão cinética atingem seus valores máximos :

$$\psi = \psi_{\max} = B_0 a^2 / 8 \mu_0 \quad (5.3)$$

$$P = P_{\max} = [(1 + 4\lambda^2) / 4\lambda^2] B_0^2 / 2 \mu_0, \quad \lambda = b/a \quad (5.4)$$

Um modelo mais realístico pode ser obtido do vórtice de Hill por deixar o campo dentro da separatriz ser dado pela equação (5.1) e por calcular um campo no vácuo adequado fora da separatriz. O cálculo do campo no vácuo é relativamente simples pela forma elipsoidal da separatriz, a qual faz-se ser natural calculá-lo por meio de coordenadas esferoidais⁽²²⁾. Existem três casos a considerar : (1) uma separatriz esférica ($\lambda=1$); (2) uma separatriz prolata ($\lambda>1$) e (3) uma separatriz oblata ($\lambda<1$).

1) Separatriz Esférica

O campo no vácuo, neste caso, assume uma forma simples usando coordenadas esféricas. Ele é expresso como

$$\psi_e^f = -(B_0 r^2 / 2) \{1 - [a^2 / (r^2 + z^2)]^{3/2}\} \quad (5.5)$$

Os símbolos "e" e "f" indicam caso esférico e fora da separatriz respectivamente. A figura (4) ilustra as linhas de campo tanto internas quanto externas para este caso.

2) Separatriz Prolata

No vácuo ψ satisfaz a expressão $\Delta^* \psi = 0$, que pela forma da configuração sugere ser expressa em coordenadas esferoidais prolatas (ν, θ, ϕ') . Essas coordenadas se relacionam com as cilíndricas (r, ϕ, z) através de

$$\begin{aligned} r &= \alpha_p \operatorname{senh} \nu \operatorname{sen} \theta \\ z &= \alpha_p \operatorname{cosh} \nu \operatorname{cos} \theta \\ \phi &= \phi' \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $0 \leq \nu < \infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\alpha_p = (b^2 - a^2)^{1/2}$. α_p é a meia-distância entre os focos das elipses $\phi = \text{constante}$, $\nu = \text{constante}$, de maneira tal que a separatriz é descrita por

$$\nu \equiv \nu_0 = \operatorname{arctgh}(a/b) \quad (5.7)$$

Nestas coordenadas, requerendo-se que ψ e sua derivada normal seja nula na separatriz, isto é, $\nabla \psi^f = \nabla \psi^d$, ali encontra-se que $\Delta^* \psi = 0$ tenha a forma^(10,21,22):

$$\sinh\nu\partial[(1/\sinh\nu)(\partial\psi/\partial\nu)]/\partial\nu + \sin\theta\partial[(1/\sin\theta)(\partial\psi/\partial\theta)]/\partial\theta = 0 \quad (5.8)$$

com a solução para ψ da forma :

$$\psi_p^f = B_0/5 \alpha_p^2 \sinh^2\nu \sin^2\theta \{ (4b/a + a/b)[(1 - Q_1'/Q_{11})(Q_{11}/Q_{12}) + (2/3)(b/a - a/b)P_3'(cos\theta)[(P_3'/P_{31}) - (Q_3'/Q_{31})][(P_{32}/P_{31}) - (Q_{32}/Q_{31})]^{-1} \}$$

Aqui $P_i(x)$ e $Q_i(x)$ são as funções de Legendre de primeira e segunda espécie e ordem i , respectivamente, e a pinta indica diferenciação em relação ao argumento x .

Para simplificarmos as notações, introduzimos

$$\begin{aligned} P_{31} &= P_3'(\cosh\nu_0) & Q_{11} &= Q_1'(\cosh\nu_0) \\ P_{32} &= dP_3'(\cosh\nu)/d\nu \Big|_{\nu=\nu_0} & Q_{12} &= dQ_1'(\cosh\nu)/d\nu \Big|_{\nu=\nu_0} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Assim

$$\begin{aligned} \psi_p^f &= (B_0/5)\alpha_p^2 \sinh^2\nu \sin^2\theta \{ (4b/a + a/b)[1 - (Q_1'/Q_{11})](Q_{11}/Q_{12}) \\ &+ (2/3)(b/a - a/b)P_3'(cos\theta)[(P_3'/P_{31}) - (Q_3'/Q_{31})][(P_{32}/P_{31}) - (Q_{32}/Q_{31})]^{-1} \} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A figura (5) mostra os contornos de ψ constante tanto fora quanto dentro da separatriz para o caso prolato.

2) Separatriz Oblata

As coordenadas esferoidais oblatas (ω, θ, ϕ') se relacionam com as cilíndricas (r, ϕ, z) através de

$$r = \alpha_0 \cosh \omega \operatorname{sen} \theta$$

$$z = \alpha_0 \operatorname{sen} \omega \operatorname{cos} \theta \quad (5.11)$$

$$\phi = \phi'$$

onde $0 \leq \omega < \omega$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\alpha_0 = (a^2 - b^2)^{1/2}$, α_0 é a meia distância entre os focos das elipses $\phi' = \text{constante}$, $\omega = \text{constante}$, de maneira tal que a separatriz é descrita por

$$\omega \equiv \omega_0 = \operatorname{arctgh}(b/a) \quad (5.12)$$

A função fluxo satisfaz a equação

$$\cosh \omega \frac{\partial(1/\cosh \omega \partial \psi / \partial \omega) / \partial \omega + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial(1/\operatorname{sen} \theta \partial \psi / \partial \theta) / \partial \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (5.13)$$

e a solução no vácuo é

$$\begin{aligned} \psi_0^I = & (B_0 / 5) \alpha_0^2 \cosh^2 \omega \operatorname{sen}^2 \theta \left\{ (4b/a + a/b) [1 - (Q_1' / T_{11})] (T_{11} / T_{12}) + \right. \\ & (2/3)(b/a - a/b) [(P_3' / S_{31}) - (Q_3' / T_{31})] P_3'(\operatorname{cos} \theta) [(S_{32} / S_{31}) - \\ & \left. (T_{32} / T_{31})]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Aqui $S_i(ix)$ e $Q_i(ix)$ são as funções de Legendre de primeira e segunda espécie e ordem i com argumento imaginário, respectivamente

A pinta indica diferenciação em relação ao argumento ix .

Para simplificarmos as notações, introduzimos

$$S_{31} = P_3'(i \operatorname{sen} \omega_0) \quad T_{11} = Q_1'(i \operatorname{sen} \omega_0) \quad (5.14)$$

$$S_{32} = dP_3'(i \operatorname{sen} \omega) / d\omega \Big|_{\omega=\omega_0} \quad T_{12} = dQ_1'(i \operatorname{sen} \omega) / d\omega \Big|_{\omega=\omega_0}$$

Assim

$$\begin{aligned} \psi_0^I = & (B_0 / 5) \alpha_0^2 \cosh^2 \omega \operatorname{sen}^2 \theta \left\{ (4b/a + a/b) [1 - (T_1' / T_{11})] (T_{11} / T_{12}) \right. \\ & \left. + (2/3)(b/a - a/b) [(P_3' / S_{31}) - (Q_3' / T_{31})] P_3'(\operatorname{cos} \theta) [(S_{32} / S_{31}) - \right. \end{aligned}$$

$$(T_{22}/T_{21})^{-1}$$

(5.15)

A figura (6) mostra os contornos de ψ constante tanto fora quanto dentro da separatriz para o caso oblato.

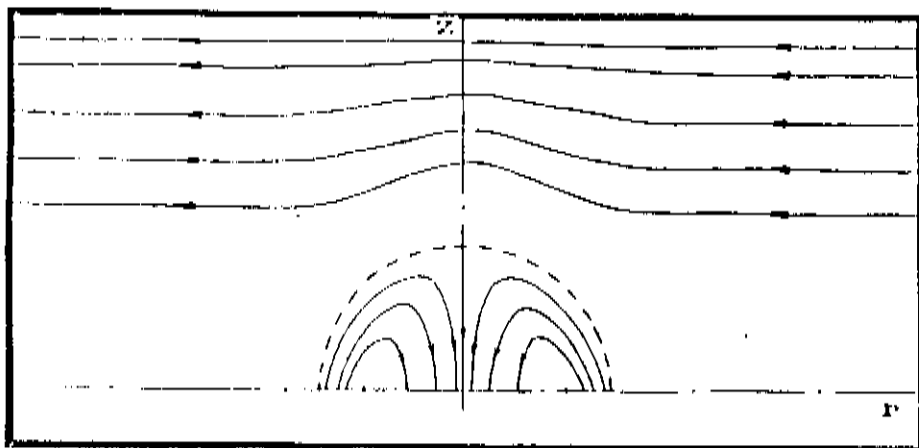


FIG. 4 : Contornos das linhas de fluxo poloidal constante para configurações reversas esféricas com os condutores situados no infinito e com simetria sobre o eixo r . Neste caso existe apenas uma superfície $\psi=0$, a separatriz.

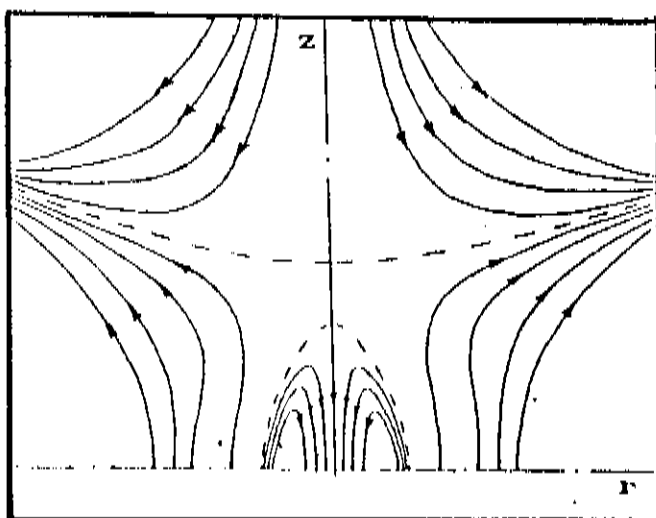


FIG. 5 : Contornos das linhas de fluxo poloidal constante para configurações reversas prolatas com os condutores situados no infinito e com simetria sobre o eixo r . Note-se a presença de mais duas superfícies $\psi=0$ além da separatriz. Isto se deve ao fato da existência de um ponto de bifurcação no espaço dos parâmetros.

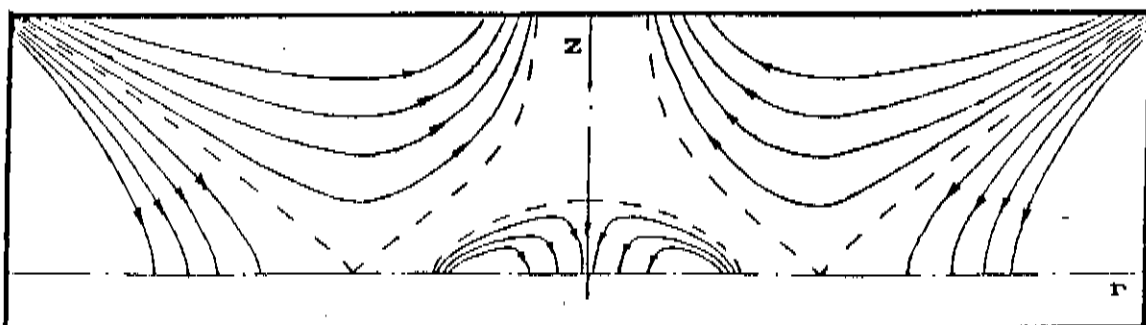


FIG. 6 : Contornos das linhas de fluxo poloidal constante para configurações reversas oblatas com os condutores situados no infinito e com simetria sobre o eixo r . Análogo ao caso prolato também nota-se a presença de mais duas superfícies $\psi=0$ além da separatriz.

Assumindo que a magnitude do campo no infinito seja constante durante o decaimento, neste caso então, da expressão para a função fluxo esférica externa, a dependência temporal está apenas no raio da separatriz $a=a(t)$, e a função fluxo interna toma a forma:

$$\psi = (B_0 r^2 / 2) [1 - (z^2 + r^2) / a^2] \quad (6.1)$$

com o perfil de pressão dado por

$$P = (5B_0 / \mu_0 a^2) \psi \quad (6.2)$$

Agora da equação (4.21), temos

$$\partial P / \partial t = (5B_0 / \mu_0 a^2) [(-2\dot{a}/a) + (\dot{\psi}/\psi)] \psi \quad (6.3)$$

onde o ponto indica derivada em relação ao tempo. Substituindo na equação (2.29), temos

$$(2\dot{a}/a + 5\dot{T}/2T)\psi = 0 \quad (6.4)$$

ou

$$T = T_0 (a/a_0)^{-4/5} \quad (6.5)$$

Para encontrarmos $a(t)$ usamos a equação (4.11) em $z=0$

$$\partial \psi / \partial t + v_r (\partial \psi / \partial r) + \eta r^2 (\partial P / \partial \psi) = 0 \quad (6.6)$$

Usando a resistividade de Spitzer (eq.2.47), o último termo em (6.6)

pode ser escrito como:

$$\eta r^2 \partial P / \partial \psi = (5B_0 \eta_0 r^2 / \mu_0 a_0^2) (a/a_0)^{-4/5} \quad (6.7)$$

Também

$$\partial \psi / \partial t = B_0 r^4 (\dot{a}/a^3) \quad (6.8)$$

e

$$\partial \psi / \partial r = B_0 r (1 - 2r^2/a^2) \quad (6.9)$$

Substituindo estas três últimas expressões em (6.6), temos :

$$v_r = - [r / (1 - 2r^2/a^2)] [(\dot{a}/a^3) r^2 + (5\eta_0 / \mu_0 a_0^2) (a/a_0)^{-4/5}] \quad (6.10)$$

Para evitarmos a singularidade sobre ao eixo magnético

($r=a/2^{1/2}, z=0$), fazemos

$$\dot{a} = -(10\eta_0 / \mu_0) a_0^{-6/5} a^{1/5} \quad (6.11)$$

O que após integração, fornece

$$(5/4) a^{4/5}(t) = -(10\eta_0 / \mu_0) a_0^{-6/5} t + \text{constante} \quad (6.12)$$

Mas em $t=0s$, $a(0)=a_0$, então

$$\text{constante} = (5/4) a_0^{4/5} \quad (6.13)$$

Portanto, obtemos a seguinte solução para a evolução do raio da separatriz

$$a(t) = a_0 [1 - (8\eta_0 / \mu_0 a_0^2) t]^{5/4} \quad (6.14)$$

Esta equação formalmente resolve o problema do decaimento resistivo de um vórtice de Hill esférico em um campo magnético externo uniforme.

Correspondentemente, para a temperatura com o uso da equação (6.5) :

$$T = T_0 [1 - (8\eta_0 / \mu_0 a_0^2) t]^{-1} \quad (6.15)$$

O fluxo máximo aprisionado na FRC é deduzido com o uso da equação (6.1)

$$\psi_{\max} = (B_0 a_0^2 / 8) (a/a_0)^2$$

ou

$$\psi_{\max} = \psi_{\max,0} [1 - (8\eta_0 / \mu_0 a_0^2) t]^{5/2} \quad (6.16)$$

Para a pressão, com o uso da equação (6.2)

$$P_{\max} = (5B_0 / \mu_0 a_0^2) \psi_{\max}$$

ou

$$P_{\max} = (5B_0^2 / 8\mu_0) \quad (6.17)$$

Seu valor máximo permanece inalterado durante o decaimento.

Para o número máximo de partículas aprisionadas, usando a equação de estado (eq.2.46) :

$$n = n_0 (T/T_0)^{-1}$$

ou

$$n = n_0 [1 - (8\eta_0 / \mu_0 a_0^2) t] \quad (6.18)$$

onde n_0 é o valor do número de partículas no tempo inicial.

Agrupando os resultados e definindo

$$\tau_R = (\mu_0 a_0^2 / 20 \eta_0) \quad (6.19)$$

como o tempo resistivo típico da configuração inicial, teremos :

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 [1 - (2t/5\tau_R)]^{5/4} \\ T(t) &= T_0 [1 - (2t/5\tau_R)]^{-1} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\psi_{\max} = \psi_{\max,0} [1 - (2t/5\tau_R)]^{5/2}$$

$$n = n_0 [1 - (2t/5\tau_R)]$$

É visto da primeira equação que a separatriz da configuração se recolhe e desaparece após um intervalo de tempo $t=2,5\tau_R$.

De grande utilidade é encontrarmos os tempos de decaimento do fluxo máximo, da energia : $E = kT \int d^3x n(x)$ e da densidade : $N = \int d^3x n(x)$, os dois últimos obtidos à partir do tempo durante o qual a densidade decai $e = 2,718$ vezes seu valor inicial. Os resultados gráficos encontram-se na figura(7b), deles tiramos que

$$\tau_E = 0,585 \tau_R$$

$$\tau_F = 0,825 \tau_R$$

$$\tau_N = 0,475 \tau_R$$

O tempo de vida dos confinamentos das partículas são dois terços

dos correspondentes tempos calculados com base no modelo estacionário de Auerbach and Condit⁽¹³⁾.

O vórtice de Hill tem a vantagem de ter solução exata para a equação $\Delta^* \psi = 0$ e obter resultados analíticos, tanto quanto possível, do equilíbrio de configurações para diferentes valores da alongação, isto é, prolata ($\lambda > 1$) e oblata ($\lambda < 1$), as quais dependendo das condições de contorno, existem em geral duas configurações possíveis para que o equilíbrio esteja univocamente determinado.

Começamos com a equação (5.1) a qual leva à

$$\psi(r, z, t) = (B_0 r^2 / 2) [1 - r^2/a^2(t) - z^2/b^2(t)] \quad (7.1)$$

Fazendo uso da equação (4.9), temos

$$v \cdot \nabla \psi = - (\partial \psi / \partial t + \eta r^2 \partial P / \partial \psi)$$

à qual aplicada no ponto-0 onde a função fluxo é descontínua, faz-se notar a aparição de uma singularidade neste ponto :

$$|v|_{pt=0} = -B_0 [r / (1 - 2r^2/a^2 - z^2/b^2)] (\partial \psi / \partial t + \eta r^2 \partial P / \partial \psi) |_{pt=0} \quad (7.2)$$

Para evitarmos a singularidade da velocidade radial do plasma neste ponto, fazemos

$$(\dot{B}_0 / B_0) + (2\dot{a}/a) + (4\eta/\mu_0)(4/a^2 + 1/b^2) = 0 \quad (7.3)$$

Isto pode ser arrumado para fornecer

$$\partial(B_0 a^2/8)/\partial t + (4\eta/\mu_0)(B_0 a^2/8)(4/a^2 + 1/b^2) = 0 \quad (7.4)$$

Recordando que no ponto-0, $\psi = \psi_{\max} = B_0 a^2/8$, temos :

$$(4\eta/\mu_0)(4/a^2 + 1/b^2)\psi_{\max} + \partial\psi_{\max}/\partial t = 0 \quad (7.5)$$

Duas tarefas nos resta a fazer, ou seja, a primeira é encontrar $\eta = \eta(t)$ e a segunda expressar ψ_{\max} em termos do tempo ou pelos menos em termos da elongação da configuração que é função do tempo.

Para encontrarmos $\eta = \eta(t)$ através da equação de Spitzer, usamos a equação (4.21), substituindo as expressões para a pressão, eq.(5.2) e para a função fluxo, eq.(5.1), temos

$$(\dot{B}_0/B_0)(4/a^2 + 1/b^2) - 2(4\dot{a}/a^3 + \dot{b}/b^3) - (5/2)(4a^2 + 1/b^2)(\dot{T}/T) = 0 \quad (7.6)$$

Isto pode ser arrumado para fornecer :

$$\partial[(B_0/\mu_0)(4/a^2 + 1/b^2)]/\partial t - (5B_0/2\mu_0)(4/a^2 + 1/b^2)(1/T)\partial T/\partial t = 0 \quad (7.7)$$

Mas vê-se que $(B_0/\mu_0)(4/a^2 + 1/b^2) = \partial P/\partial \psi$, assim

$$d(\partial P/\partial \psi)/(\partial P/\partial \psi) = (5/2)dT/T \quad (7.8)$$

Logo

$$\partial P/\partial \psi = (B_0(0)/\mu_0)(4/a_0^2 + 1/b_0^2)(T/T_0)^{5/2}$$

ou

$$T_0/T = (\partial P/\partial \psi)^{-2/5} [(B_0(0)/\mu_0)(4/a_0^2 + 1/b_0^2)]^{2/5} \quad (7.9)$$

e conseqüentemente

$$\eta(t) = \eta_0 \{ [B_0(4/a^2 + 1/b^2)] / [B_0(0)(4/a_0^2 + 1/b_0^2)] \}^{-2/5} \quad (7.10)$$

Portanto, substituindo esta última na equação (7.5) está cumprida a primeira etapa :

$$(4\eta_0/\mu_0) \{ (1/B_0) [B_0(4/a^2 + 1/b^2)]^{2/5} [B_0(0)(4/a_0^2 + 1/b_0^2)]^{2/5} \} \psi_{\max} + \partial \psi_{\max} / \partial t = 0 \quad (7.11)$$

Para encontrarmos uma expressão para ψ_{\max} em termos da elongação temos que voltar às soluções da equação de Grad-Shafranov obtidas em coordenadas esferoidais nos casos prolato e oblato. Essas soluções podem ser um tanto simplificadas se considerarmos que exista um espaço ocupado pelo vácuo suficientemente grande entre a configuração reversa englobada pela separatriz e o vaso cilíndrico contedouro do plasma onde se localizam os condutores externos. Para grandes distâncias da separatriz, onde as coordenadas esferoidais tendem às esféricas comuns, comprova-se⁽²⁰⁾ que para $|x|$ tendendo à infinito as $Q_i'(x)$ tendem à zero. Neste caso então a função fluxo poloidal fora da configuração tendem à uma função do tipo⁽²¹⁾:

$$\psi_{P,0}^f = H_{P,0} r^2 [1 + K_{P,0} (4z^2 - r^2)] \quad (7.12)$$

o qual é o fluxo magnético poloidal essencialmente devido aos condutores externos (com a geometria e as correntes mantidas

constantes durante a difusão).

Como a contribuição das correntes no plasma a $\psi_{p,0}^f$ pode assimilar-se a uma soma de dipolos magnéticos, essa cai rapidamente a zero com a distância restando apenas aquela devido aos condutores externos. Na expressão (7.12) os termos $H_{p,0}$ e $K_{p,0}$ correspondem à

$$H_p = (B_0/5)(Q_{11}/Q_{12})(4b/a + a/b) \quad (7.13)$$

$$H_o = (B_0/5)(T_{11}/T_{12})(4b/a + a/b) \quad (7.14)$$

$$K_p = (15/2)\alpha_p^2 (b/a - a/b) Q_{12} / (P_{21} Q_{11}) [(4b/a + a/b)(P_{22}/P_{21} - Q_{22}/Q_{21})]^{-1} \quad (7.15)$$

$$K_o = (15/2)\alpha_o^2 (b/a - a/b) T_{12} / (S_{21} T_{11}) [(4b/a + a/b)(S_{22}/S_{21} - T_{22}/T_{21})]^{-1} \quad (7.16)$$

$K_p \approx 0$ corresponde ao fluxo criado por um campo magnético longitudinal constante. $K_p < 0$ implica que nas cercanias da origem o campo magnético longitudinal é do tipo anti-espelho, $K_p > 0$ implica que o campo é do tipo espelho magnético nas mesmas cercanias⁽²²⁾.

Assumindo que o fluxo devido aos condutores possa ser criado e que esses condutores estão suficientemente distantes do plasma, para que possa ser desprezada sua contribuição e ainda que exista uma região intermediária entre o plasma e as espiras na qual seja válida a equação (7.12); os seguintes resultados são obtidos:

$$(K_p/H_p)\psi_{\max} = (75a/16b)(Q_{12}/Q_{11})^2 [(4b/a + a/b)^2 (P_{22}/P_{21} - Q_{22}/Q_{21})]^{-1} \equiv f_p(\nu_o) \quad (7.17)$$

$$(K_o/H_o)\psi_{\max} = -(75a/16b)(T_{12}/T_{11})^2 [(4b/a + a/b)^2 (S_{22}/S_{21} - T_{22}/T_{21})]^{-1} \equiv f_o(\omega_o) \quad (7.18)$$

Assim temos alcançado uma expressão para ψ_{\max} em termos de ν_o

$(\equiv \arctg(a/b))$ para o caso prolato e de $\omega_0 (\equiv \arctg(b/a))$ para o caso oblato.

Reparando na equação (7.11) vemos que nos resta dois termos ainda a serem postos em termos da elongação. O primeiro

$B_0 (4/a^2 + 1/b^2)$ pode ser escrito como

$$B_0 (4/a^2 + 1/b^2) = (B_0/ab)(4b/a + a/b) = (5/ab)(Q_{12}/Q_{11})H_p \quad (\text{prolato})$$

onde foi feito uso da equação (7.13) na última passagem. Mas da expressão (7.15), temos

$$Q_{12}/Q_{11} = (2/15) ab(4b/a + a/b)(P_{32} - P_{31} Q_{32}/Q_{31})K_p$$

o que leva à:

$$B_0 (4/a^2 + 1/b^2) = H_p K_p \xi_p(\nu_0) \quad (7.19)$$

com

$$\xi_p(\nu_0) \equiv 2/3 (4b/a + a/b)(P_{32} - P_{31} Q_{32}/Q_{31}) \quad (7.20)$$

Analogamente para o caso oblato:

$$B_0 (4/a^2 + 1/b^2) = H_o K_o \xi_o(\omega_0) \quad (7.21)$$

com

$$\xi_o(\omega_0) \equiv -2/3 (4b/a + a/b) (S_{32} - S_{31} T_{32}/T_{31}) \quad (7.22)$$

O segundo termo obtém-se ainda da expressão (7.14):

$$B_o = H_p h_p(\nu_o) \quad (7.23)$$

com

$$h_p(\nu_o) \equiv 5Q_{12}/Q_{11} (4b/a + a/b)^{-1} \quad (7.24)$$

Para o caso oblato temos:

$$B_o = H_o h_o(\omega_o) \quad (7.25)$$

com

$$h_o(\omega_o) \equiv 5T_{12}/T_{11} (4b/a + a/b)^{-1} \quad (7.26)$$

Em termos de $\nu_o(t)$ para o caso prolato e de $\omega_o(t)$ para o caso oblato, as funções f_p, ξ_p, h_p -(prolatas)-, f_o, ξ_o, h_o -(oblatas)- encontram-se no apêndice I, as quais são utilizadas no cálculo numérico da equação final.

Levando os resultados (7.17 e 7.18), (7.19 e 7.21) e (7.23 e 7.25) para a equação (7.11), temos finalmente (veja apêndice II):

$$\{4\eta_o/\mu_o\} [4/a^2(t) + 1/b^2(t)] (\xi_p/\xi_{po})^{2/5} (h_p/h_{po})^{-1} \{f_p + \partial f_p/\partial t\} = 0 \quad (7.29)$$

$$\{4\eta_o/\mu_o\} [4/a^2(t) + 1/b^2(t)] (\xi_o/\xi_{oo})^{2/5} (h_o/h_{oo})^{-1} \{f_o + \partial f_o/\partial t\} = 0 \quad (7.30)$$

onde o "o" indica $\nu_o(t)$ e $\omega_o(t)$ no tempo inicial.

Definindo o tempo de decaimento resistivo característico τ_R (recordando a aparição da expressão para τ_R no caso

esférico), como sendo:

$$\tau_R \equiv (\mu_0 a_0^2 / 4\mu_0) [4 + (a_0/b_0)^2]^{-1} \quad (7.29)$$

(com a_0 e b_0 os valores de a e b no tempo inicial), temos as expressões desejadas :

$$(\xi_p / \xi_{p0})^{2/3} (h_p / h_{p0})^{-1} [f_p / (\partial f_p / \partial \nu_0)] + \partial \nu_0 / \partial \tau = 0 \quad (7.30)$$

$$(\xi_o / \xi_{o0})^{2/3} (h_o / h_{o0})^{-1} [f_o / (\partial f_o / \partial \omega_0)] + \partial \omega_0 / \partial \tau = 0 \quad (7.31)$$

com $\tau \equiv t / \tau_R$.

Lembrando mais uma vez que $\nu_0 \equiv \text{arctgh}(a/b)$ e $\omega_0 \equiv \text{arctgh}(b/a)$, invertendo-as encontra-se como a separatriz da configuração varia no tempo. As expressões (7.31) e (7.32) são resolvidas numericamente, e as figuras (7a e 7b) e (8a e 8b) mostram os resultados para o fluxo magnético poloidal máximo ($F = \psi_{\text{max}}$) aprisionado no plasma; a energia térmica do plasma ($E = KT \int n(x) d^3x$) e o número total de partículas confinadas ($N = \int n(x) d^3x$), todas as grandezas normalizadas à seus valores de tempo inicial, juntamente com a curva de decaimento da configuração. As grandezas $F, E,$ e N para efeito de cálculo numérico são calculadas no apêndice III.

Destas curvas vê-se que para uma alongação típica 1,61 para o caso prolato e 0,23 para o caso oblato o comportamento da separatriz muda sensivelmente, passando por uma fase de contração para uma fase de expansão ou vice-versa dependendo da alongação inicial do caso considerado. No caso prolato, para alongações iniciais ligeiramente inferiores a 1,61 a configuração decai tendendo para equilíbrios mais esféricos, enquanto que para

elongações iniciais ligeiramente superiores a 1,61 a configuração tende a se alargar ainda mais tendendo a equilíbrios mais prolatos. Num intervalo aproximado entre 1,6 a 1,9 existem situações consideradas "proibidas" para o decaimento, pois nota-se que a energia da configuração tende a um valor máximo.

Já no caso oblato, para elongações superiores a 0,23 a configuração decai tendendo a equilíbrios mais esféricos, enquanto que para elongações iniciais ligeiramente inferiores a 0,23 elas decaem tendendo a se achatarem ainda mais, indo para situações mais oblatas. Num intervalo aproximado entre 0,20 a 0,23 existem situações consideradas "proibidas" para o decaimento pois a energia da configuração também atinge seu valor máximo.

Os pontos 1,61 para o caso prolato e 0,23 para o caso oblato, representam pontos de bifurcação^[21] no espaço dos parâmetros dos equilíbrios considerados conforme indicam já a literatura existente.

Como nota citaremos que um comportamento aparentemente análogo ao exposto tem sido verificado no experimento FRX-C em Los-Alamos^[11,20]. Descargas em pressão de deutério de 20mTorr, mostrou, durante a fase quiescente do experimento, uma separatriz que estendeu-se em quase todo o comprimento da espira theta-pinch, seu comprimento não mudou apreciavelmente enquanto seu raio diminuía durante o decaimento. Os tempos de decaimento do fluxo, energia e partículas eram comparáveis quando medidos. Em descargas de pressão de deutério de 5mTorr, um comportamento completamente diferente foi observado, a separatriz da FRC era muito mais curta que o comprimento da espira e se contraía axialmente mantendo seu raio quase constante. Os tempos de decaimento da energia e partículas eram cerca de um quarto do

tempo de vida do fluxo correspondente quando medidos. Como visto, é como se um ponto de bifurcação, no espaço dos parâmetros da configuração correspondente fôsse cruzado indo de 20 à 5 mTorr. A disparidade observada nas propriedades de transportes da energia e partículas em 5mTorr com respeito à de 20mTorr seria devido à um comportamento intrínseco de equilíbrios mais curto dentro da espira e não anomalias na condutividade como tem sido sugerido^[11,29].

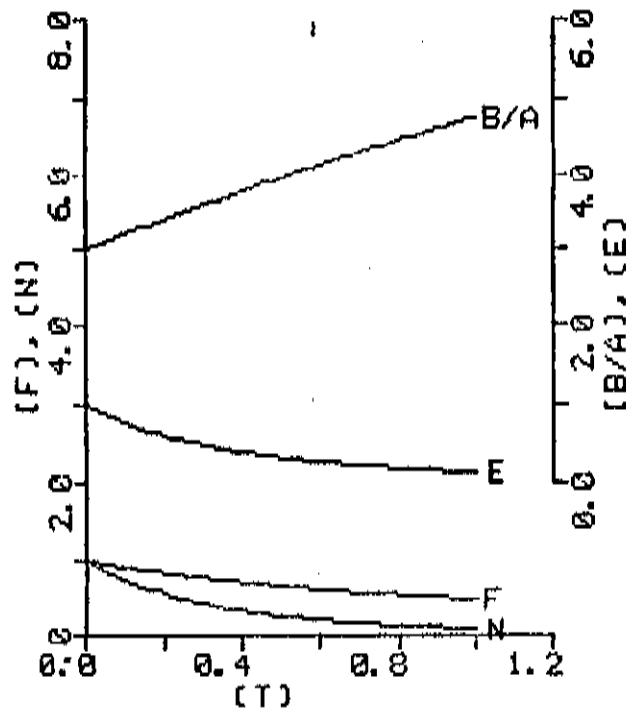
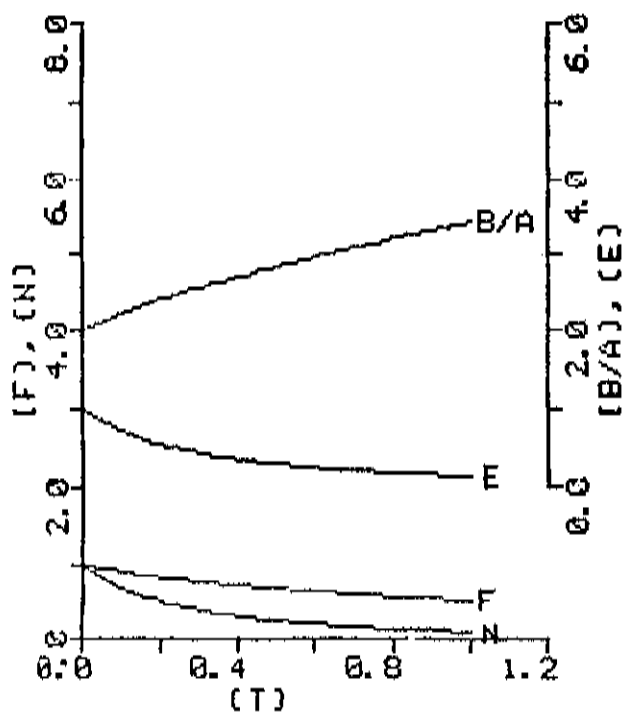
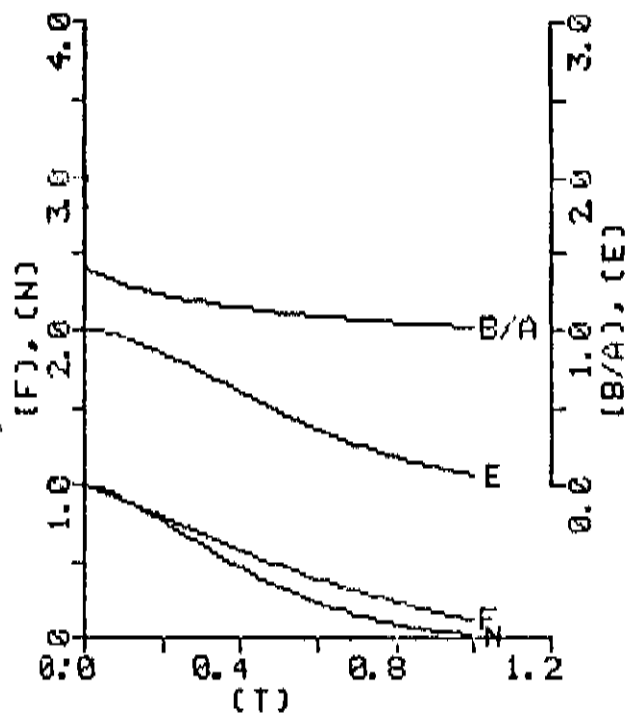
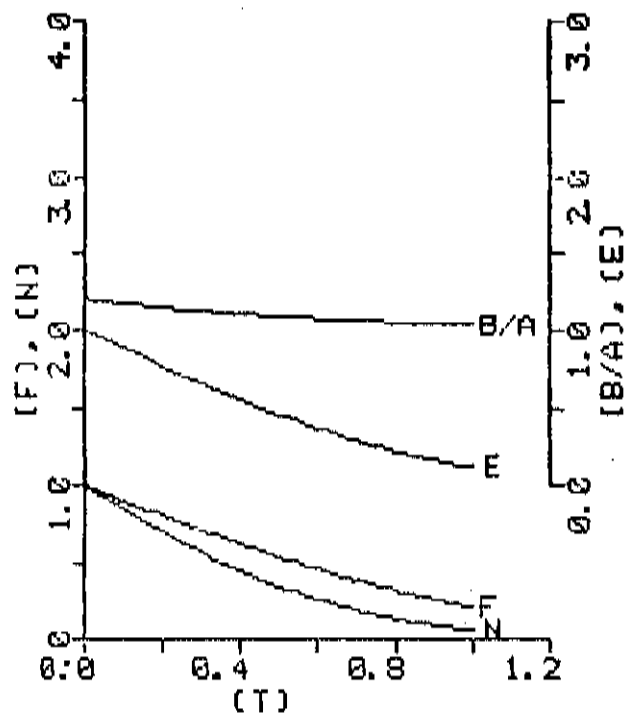
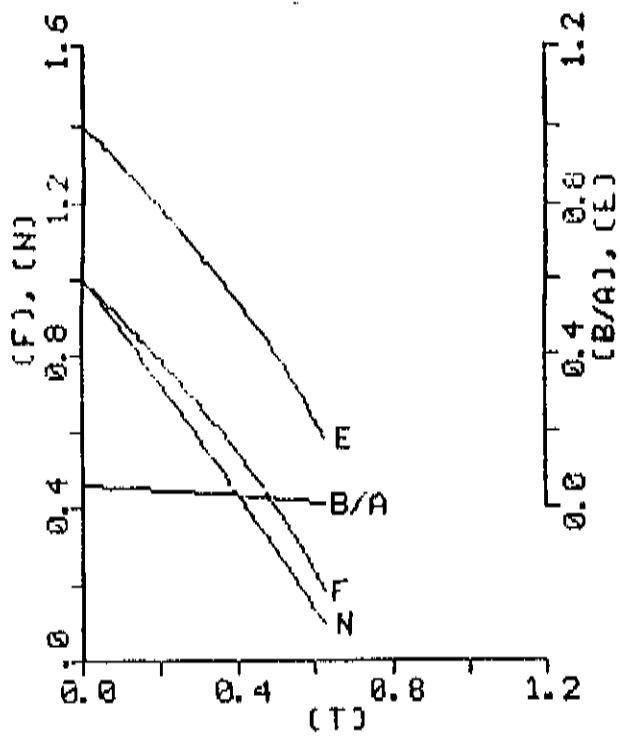
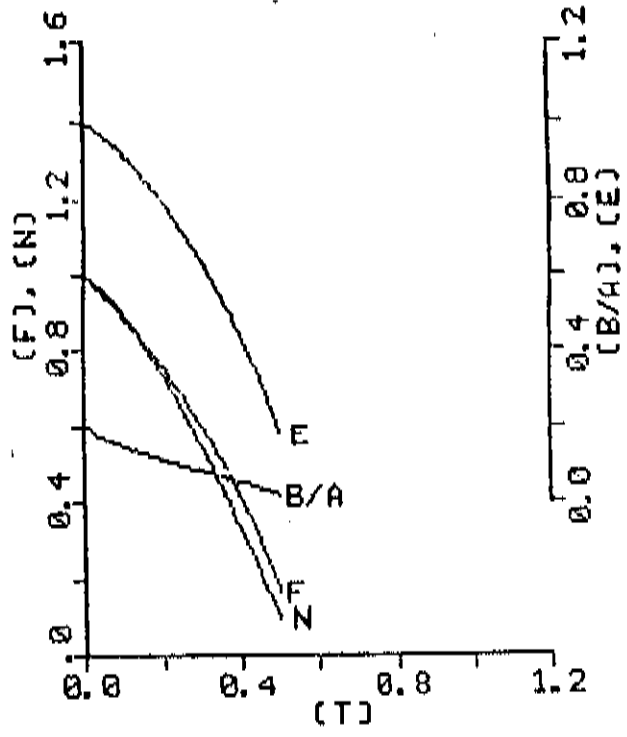


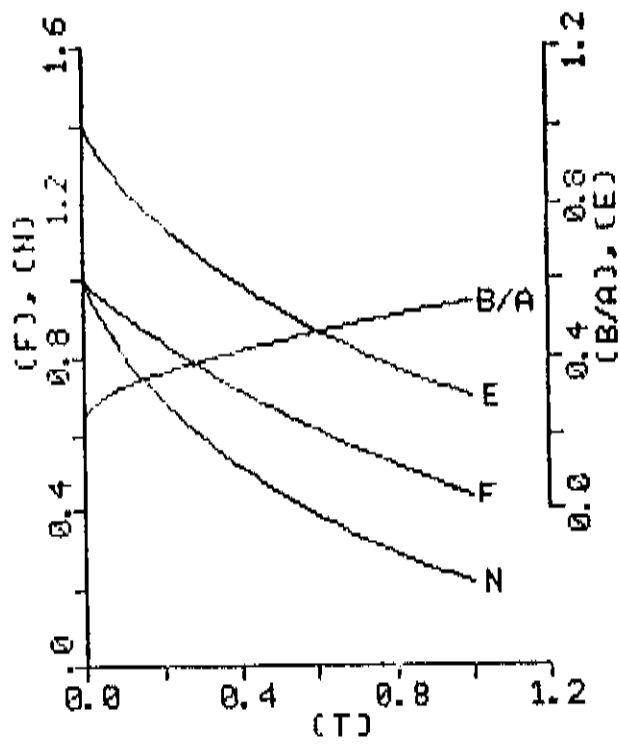
FIG. 7a : Evolução temporal do fluxo magnético poloidal máximo (F), da energia térmica (E), do número de partículas confinadas (N) e da elongação da separatrix (B/A) para o vórtice de Hill prolato. O esquema mostra várias configurações iniciais.



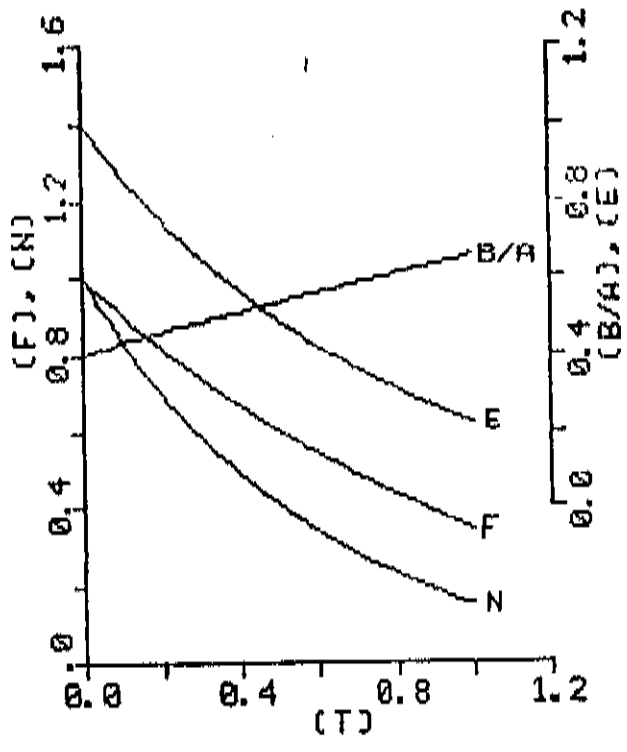
$E = 0.0318800$ $N = 0.0058206$
 $F = 0.082486$ $B/A = 0.06$



$E = 0.0661602$ $N = 0.0154333$
 $F = 0.181972$ $B/A = 0.20$



$E = 0.0643781$ $N = 0.0149388$
 $F = 0.184581$ $B/A = 0.25$



$E = 0.0408999$ $N = 0.0084393$
 $F = 0.139253$ $B/A = 0.42$

FIG. 7b :Evolução temporal do fluxo magnético poloidal máximo (F), da energia térmica (E), do número de partículas confinadas (N) e da elongação da separatriz (B/A) para o vórtice de Hill oblato. O esquema mostra várias configurações iniciais.

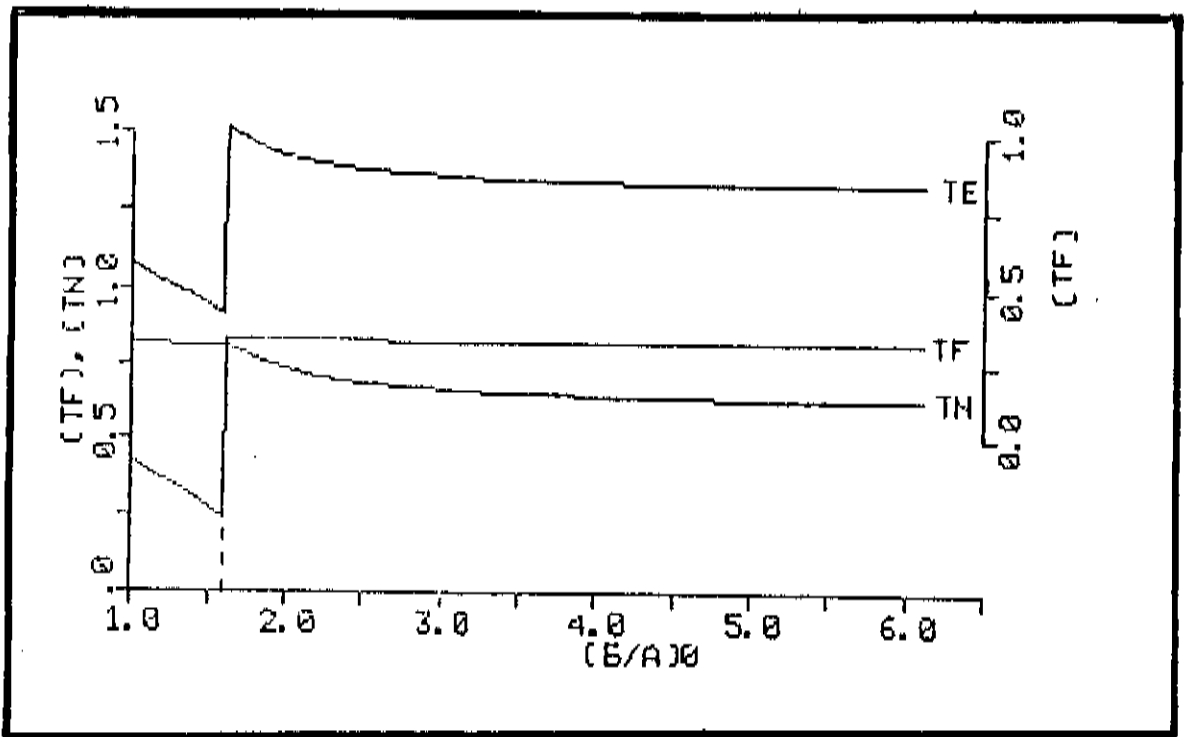


FIG. 8a : Tempos de decaimento $1/e$ do fluxo magnético poloidal (T_F), da energia térmica (T_E) e do número de partículas (T_N) como funções da elongação da separatriz $(B/A)_0$ para o vórtice de Hill prolato.

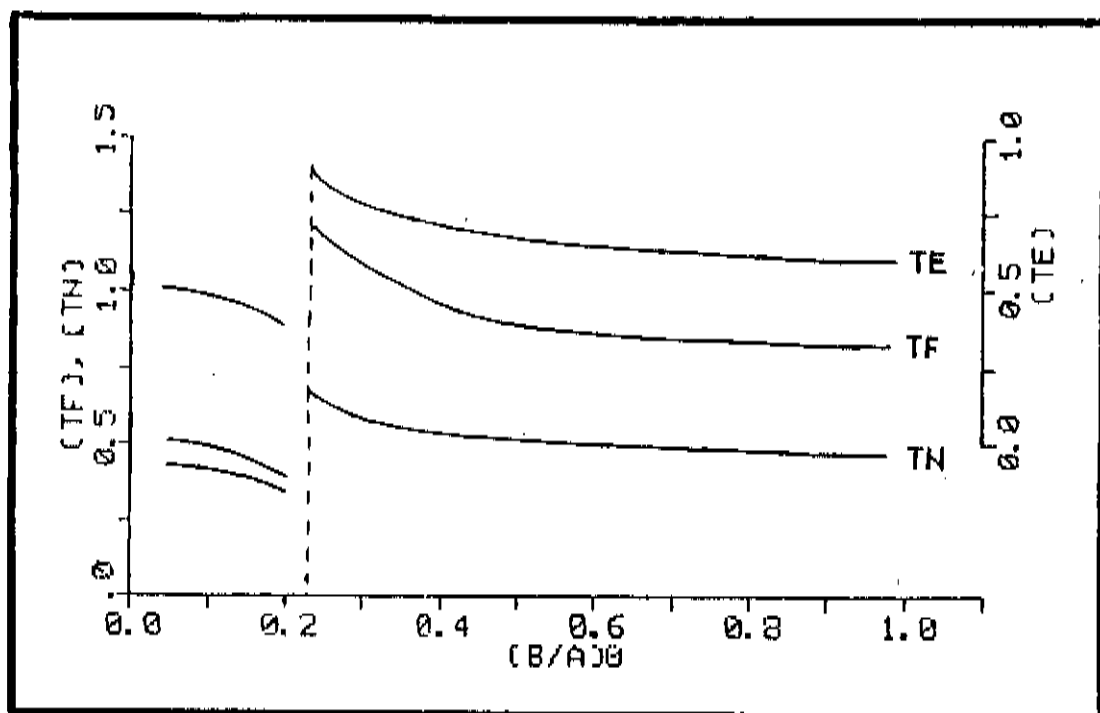


FIG. 8b : Tempos de decaimento $1/e$ do fluxo magnético poloidal (T_F), da energia térmica (T_E) e do número de partículas (T_N) como funções da elongação inicial $(B/A)_0$ para o vórtice de Hill oblato.

VIII-COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Fazemos agora uma comparação dos modelos até agora existentes e cujos resultados estão reunidos na tabela a seguir.

Modelo	Tempo típico	dados do experimento	
		FRX-B	FRX-C
Resistivo simples	$\tau_{RS} = \mu_0 L^2 / \eta_0$ (F)	840 μ s	2500 μ s
Auerbach-Condít	$\tau_{AC} = 0,73 \tau_R$ (I)	160 μ s	475 μ s
Clemente-Sakanaka-Mania	$\tau_{cm} = 0,82 \tau_R$ (F)	180 μ s	535 μ s
	$\tau_{cm} = 0,72 \tau_R$ (E)	158 μ s	435 μ s
	$\tau_{cm} = 0,62 \tau_R$ (N)	135 μ s	405 μ s
Maschke-Hernegger	$\tau_{MH} = 0,52 \tau_R$ (N)	114 μ s	326 μ s
Valor experimental (N)		39 \pm 15 μ s	187 \pm 25 μ s
(*) $\tau_R \cong (\mu_0 a_0^2 / 16 \eta_0)$ válido para $(b^2 / a^2) \gg 1$			

Tabela-I -Mostra dos tempos típicos de decaimento das partículas dos modelos Resistivo-Simples, Auerbach-Condít , Clemente-Sakanaka-Mania e Maschke-Hernegger. Também estão indicados os valores para comparação com os obtidos experimentalmente.

Os resultados como podem ser observados situam-se aproximadamente entre duas à duas vezes e meio os valores

experimentais. Ora, se considerarmos que neste modelo aplicado ao vórtice de Hill é um sistema simplificado para expressarmos a teoria de uma forma analítica, vê-se que está bem próximo do modelo mais exigente até agora existente.

Além disso, podemos argumentar que a resistividade clássica aqui considerada é a mais elementar possível, conquanto que uma resistividade anômala poderia influenciar os resultados levando a valores mais satisfatórios.

Deve-se esclarecer que a meta principal foi esclarecer o decaimento resistivo de FRC's, à qual através de uma equação diferencial no tempo obtivemos a norma do tempo típico de uma forma direta. De resto é apenas cálculo numérico. Fica difícil estimarmos uma tolerância para as simplificações do modelo, haja visto que perde-se a visão analítica se considerarmos um perfil de pressão não-linear na função fluxo, bem como para uma resistividade anômala ou mesmo uma rotação do plasma. Além disso a equação geral para a difusão foi simplificada com a consideração de temperatura uniforme no plasma. A discrepância pode ainda ser entendida que em situações reais não existe uma região plasma-vácuo grande o suficiente para o uso adequado da solução de Grad-Shafranov nesta região.

O caso oblato é acreditado que se encaixe na mesma discussão válida para esta .

De qualquer forma através da equação geral para a difusão em FRC's, novos trabalhos mais aperfeiçoados e sofisticados, certamente trará os tempos de decaimento para mais perto dos observáveis experimentalmente.

Foi interesse desta tese tratar a difusão das partículas em Configurações Reversas de Campo Magnético (FRC) utilizando as equações magnetohidrodinâmicas (MHD) resistiva e por considerar a teoria de decaimento lento de Grad-Hogan.

Dentro deste contexto, no segundo capítulo é mostrado como as equações envolvendo as grandezas macroscópicas são obtidas a partir das equações dos momentos de Boltzmann. As considerações e eventuais simplificações necessárias para se obter um conjunto de equações manuseáveis são todas indicadas.

No quarto capítulo, a teoria em si é desenvolvida e usa-se a extraordinária propriedade das FRC's de campo magnético toroidal desprezível para edificá-la. Assim tem-se agora uma equação geral no que tange à dependência ou não no tempo para esse tipo de configuração. A parte do equilíbrio é a tradicional equação de Grad-Shafranov, enquanto que se se pensa em trabalhar com equações que tenha o tempo como parâmetro há de incluir o termo respectivo. Uma simplificação é feita: -que a temperatura seja uniforme na configuração, mas dependente do tempo- à qual torna a equação geral de aplicação analítica imediata para um sistema semelhante ao vórtice de Hill. Outras soluções mais completa é cabível, numericamente por exemplo, aplicando teorias mais sofisticadas o que deixa ainda o campo aberto para novos trabalhos.

No capítulo cinco, uma noção do que seja o vórtice de Hill já que até o momento é o único sistema em FRC's que admite também solução analítica externa. Um esquema com os pontos prin-

-cipais desse vórtice e sua configuração de campo interna é então mostrado, o qual é fundamental para o bom entendimento da teoria. É então considerado que exista uma interface plasma-vácuo suficientemente grande entre a configuração interna e os condutores externos necessários para mantê-la e o cálculo da configuração externa das linhas de campo é conseguida em coordenadas esferoidais. Três casos distintos podem ser considerados : uma configuração esférica, prolata ou oblata, e as figuras referentes ilustram bem os aspectos desses vórtices completos. É bem verdade que em experimentos tal situação não se reproduz, pois os condutores nunca estão bem afastados e não existe essa interface plasma-vácuo suficiente para se aplicar as aproximações usadas aqui. Todavia, ainda não há soluções que nos permitam obter as expressões necessárias levando-se em conta a contribuição do plasma para a configuração externa e também nesta parte fica em aberto a questão.

No capítulo seis um caminho, mais simples obviamente, para se chegar às configurações mais complexas que às esféricas e o que nota-se é que embora bastante simples de ser conseguido o tempo de confinamento é bastante próximo do modelo de Aurbach-Conditt. Vê-se também que configurações esféricas tendem a desaparecer em um tempo resistivo típico.

No capítulo sete, as configurações prolatas e oblatas são usadas com as simplificações discutidas acima e o modelo pôde ser testado empregando-se os mesmos valores experimentais e comparados com outros modelos, ora estacionário, ora mais sofisticado com resistividade anômala e um perfil de pressão menos agudo que o modelo de Hill. Os resultados situam-se aproximadamente entre duas a duas vezes e meio os experimentais.

Ademais, o decaimento das configurações mostram um comportamento bastante distinto exibindo intervalos nas elongações considerados "proibidos". Os gráficos obtidos numericamente revelam bem este estado de coisas.

Finalizando, desejo enfatizar que procurei dar o máximo de acesso aos cálculos realizados, como também ilustrar tudo que necessário para um bom entendimento. O sistema de coordenadas esferoidais prolatas e oblatas pode ser verificado na referência [22], por exemplo. Talvez, para alguns seja incomôdo o uso do sistema de medidas racional MKS; quero desculpar-me como sendo neste sistema que estou familiarizado e também devido a outros cursos sobre teoria MHD que fiz. Quanto aos cálculos numéricos, uma parte da teoria usada é dada no apêndice e creio que está um tanto fora do propósito desta, citá-la inteira aqui.

X- APÊNDICES

Funções de Legendre em termos de ν_0 e ω_0

----- CASO PROLATO

A partir de $P_3(\cosh\nu) = 0,5(5\cosh^2\nu - 3\cosh\nu)$, obtém-se :

$$P_{31} = 1,5(5\cosh^2\nu_0 - 1)$$

$$P_{32} = 15 \cosh\nu_0 \sinh\nu_0$$

$$P_{33} = 15(2\cosh^2\nu_0 - 1)$$

A partir de $Q_1(\cosh\nu) = 0,5\cosh\nu \ln[(\cosh\nu + 1)/(\cosh\nu - 1)] - 1$,

obtém-se :

$$Q_{11} = 0,5 \ln[(\cosh\nu_0 + 1)/(\cosh\nu_0 - 1)] - \cosh\nu_0 / \sinh^2\nu_0$$

$$Q_{12} = 2 / \sinh^3\nu_0$$

$$Q_{13} = -6\cosh\nu_0 / \sinh^4\nu_0$$

A partir de $Q_3(\cosh\nu) = (5\cosh^2\nu - 3\cosh\nu)/4 \ln[(\cosh\nu + 1)/(\cosh\nu - 1)]$

$- 5\cosh^2\nu/2 + 2/3$, obtém-se :

$$Q_{31} = \left[\frac{3(5\cosh^2\nu_0 - 1)}{4} \right] \ln[(\cosh\nu_0 + 1)/(\cosh\nu_0 - 1)] - \cosh\nu_0 (5\cosh^2\nu_0 - 3) / 2\sinh^2\nu_0 - 5\cosh\nu_0$$

$$Q_{32} = (15/2) \cosh\nu_0 \sinh\nu_0 \ln[(\cosh\nu_0 + 1)/(\cosh\nu_0 - 1)] - 3(5\cosh^2\nu_0 - 1) / \sinh\nu_0 + \cosh^2\nu_0 (5\cosh^2\nu_0 - 3) / \sinh^3\nu_0 - 5 \sinh\nu_0$$

$$Q_{33} = (15/2) (2\cosh^2\nu_0 - 1) \ln[(\cosh\nu_0 + 1)/(\cosh\nu_0 - 1)] + 9\cosh\nu_0 / \sinh^4\nu_0 + 35\cosh^3\nu_0 / \sinh^2\nu_0 - 15\cosh^5\nu_0 / \sinh^4\nu_0 - 50 \cosh\nu_0$$

----- CASO OBLATO

A partir de $S_0(\text{senh}\omega) = 0,5[5(\text{senh}\omega)^3 - 3(\text{senh}\omega)]$, obtém-se :

$$S_{21} = -1,5(5\text{senh}^2\omega_0 + 1)$$

$$S_{22} = -15\text{senh}\omega_0 \cosh\omega_0$$

$$S_{23} = -15(2\cosh^2\omega_0 - 1)$$

A partir de $T_0(\text{senh}\omega) = -i \arctg(1/\text{senh}\omega)$ ^[20], obtém-se:

$$T_1 = -i \text{senh}\omega_0 [i \arctg(1/\text{senh}\omega_0)]$$

$$T_{11} = i[\text{senh}\omega_0 / \cosh^2\omega_0 - \arctg(1/\text{senh}\omega_0)]$$

$$T_{12} = i 2 / \cosh^2\omega_0$$

$$T_{13} = -i 6\text{senh}\omega_0 / \cosh^4\omega_0$$

A partir de $T_0(\text{senh}\omega) = (\text{senh}\omega/2) (5\text{senh}^2\omega + 3) [-i \arctg(1/\text{senh}\omega)] + 5\text{senh}^2\omega/2 + 2/3$, obtém-se :

$$T_{21} = i[1,5(5\text{senh}^2\omega_0 + 1)\arctg(1/\text{senh}\omega_0) - (5\text{senh}^2\omega_0 + 3)\text{senh}\omega_0 / 2\cosh^2\omega_0 - 5 \text{senh}\omega_0]$$

$$T_{22} = i[15\text{senh}\omega_0 \cosh\omega_0 \arctg(1/\text{senh}\omega_0) - 3/\cosh\omega_0 - 15\text{senh}^2\omega_0 / \cosh\omega_0 + (5\text{senh}^2\omega_0 + 3)\text{senh}^2\omega_0 / \cosh^3\omega_0 - 5 \cosh\omega_0]$$

$$T_{23} = i[15(2\cosh^2\omega_0 - 1)\arctg(1/\text{senh}\omega_0) + 9\text{senh}\omega_0 / \cosh^4\omega_0 + 35\text{senh}^3\omega_0 / \cosh^2\omega_0 - 15\text{senh}^3\omega_0 / \cosh^4\omega_0 - 50 \text{senh}\omega_0]$$

Obtenção da equação diferencial final

----- CASO PROLATO

Substituindo as expressões (7.18), (7.20) e (7.24) na expressão (7.12), teremos:

$$4\eta_0/\mu_0 K_p [\xi_p^{2/3} \xi_p(0)^{3/3} f_p/h_p] = \partial f_p / \partial t$$

Notemos que podemos escrevê-la como

$$4\eta_0/\mu_0 K_p [(\xi_p/\xi_p(0))^{2/3} (h_p(0)/h_p) (\xi_p(0)/h_p(0)) f_p] = -\partial f_p / \partial t \quad (*)$$

Agora, fazendo :

$$\xi_p(0) = 2/3 (4b(0)/a(0) + a(0)/b(0)) (P_{32} - Q_{32} P_{31}/Q_{31})$$

e

$$h_p(0) = 2/3 (P_{32} - Q_{32} P_{31}/Q_{31}) / K_p a(0)b(0)$$

Dividindo a primeira pela segunda destas últimas expressões, temos

$$\xi_p(0)/h_p(0) = (4/a^2(0) + 1/b^2(0)) / K_p$$

que de volta na expressão (*) fornece o resultado (7.28) :

$$\partial f_p / \partial t = -4\eta_0/\mu_0 [4/a^2(0) + 1/b^2(0)] (\xi_p/\xi_p(0))^{2/3} (h_p(0)/h_p) f_p$$

----- CASO OBLATO - O método é o análogo do exposto acima.

Cálculo das grandezas F(fluxo), N(número de part.) e E(energia)

-Cálculo do fluxo normalizado: Simplesmente usando a equação (7.18)

$$F_N = f_p / f_{p0}$$

onde o índice p₀ indica caso prolato no tempo inicial.

-Calculo da energia: Usando a equação de estado, temos

$$E = \int nT d^3x = \int Pd^3x$$

com a pressão dada pela equação (5.2). Integgrando, temos

$$E = (\pi b a^4 B_0 / \mu_0) (4/a^2 + 1/b^2) \int_0^1 x dx \int_0^1 x^2 (1-x^2-y^2) dy$$

com $x=r/a$ e $y=z/b$. Assim, a energia normalizada fica sendo:

$$E_N = (V/V_0) (a/a_0)^2 [B_0^2 (4/a^2 + 1/b^2) / B_0^2 (0) (4/a_0^2 + 1/b_0^2)]$$

Mas $(a/a_0)^2 = (f_p / f_{p0})^{3/2} \cdot (V/V_0) = (\lambda/\lambda_0) (f_p / f_{p0})$ o que leva

finalmente à

$$E_N = (\lambda/\lambda_0) (f_p / f_{p0})^{5/2} (\epsilon_p / \epsilon_{p0}) (h_p / h_{p0})^{-3/2}$$

-Cálculo do número de partículas normalizado: Aqui temos

$$N/N_0 = \int (n/n_0) d^3x = \int (PT_0 / TP_0) d^3x$$

com o uso da equação (5.2) para a pressão e da equação (2.47)

para a temperatura, chega-se à :

$$n/n_0 = [B_0(4/a^2 + 1/b^2) / B_0(0)(4/a_0^2 + 1/b_0^2)] [\psi_{\max} / \psi_{\max,0}] (\eta/\eta_0)^{-2/3}$$

Agora com o uso das equações (7.17), (7.19) e (7.10), temos:

$$n/n_0 = PT_0 / P_0 T$$

onde n é o número de partículas por cm^3 e o índice "o" indica no tempo inicial.

Com o uso da equação (5.2) para a pressão e da equação (2.47) para a temperatura, chega-se a

$$n/n_0 = B_0(4/a^2 + 1/b^2) / B_0(0)(4/a^2(0) + 1/b^2(0)) \psi_{\max} / \psi_{\max,0} (\eta/\eta_0)^{-2/3}$$

Agora com o uso das equações (7.18), (7.20) e (7.11), temos

$$N/N_0 = (\lambda/\lambda_0) (f_p/f_{p0})^{3/2} (g_p/g_{p0})^{2/3} (h_p/h_{p0})^{-1}$$

Para o caso oblato o modo de calcular F, E e N é análogo.

- [1]-Miyamoto,K.;"Plasma Physics for Nuclear Fusion",MIT PRESS, MASS(1980),chap.1 ;
- [2]-Seshadri,S.R.;"Fundamentals of Plasma Physics",American Elsevier Publ. Co. Inc.,chap.1 ;
- [3]-Krall,N.A.,Trivelpiece,A.W.;"Principles of Plasma Physics", McGraw-Hill Kogakusha Ltda, chap.1 ;
- [4]-Crookes,W.;Phil.Trans.,1:135 (1879) ;
- [5]-Lawson,J.D.; Proc.Phys.Soc. (London),B70: 6 (1957) ;
- [6]-Sevillano,E.,Ribe,F.L.; Physics Fluids 28,(10),3143 (1985);
- [7]-Bruhns,H.;"Plasma Physics and Controlled Fusion",Vol.2,n^o9A, pags. 1389-1400, (1986) ;
- [8]-Minato,T.,Tanjyo,M.,Okada,S.,Ito,Y.,Kako,M. et al (1982);in Proc. 9th Int. Conf.Plasma Physics and Contr.Nuclear Fusion Research, Baltimore, Vol.II, pag.303 ;
- [9]-Hoffman,A.L.,Slough,J.T.,Harding,D.G.; Physics Fluids 26 (6), (1983),1626 ;
- [10]-Tuszewski,M.,Linford,R.K.; Phys.Fluids 25,(5),(1982),768 ;
- [11]-Mckenna et al ; Phys.Rev.Letters 50,(1983) 1787 ;
- [12]-Aso,Y.,Himeno,S.,Hirano,K.; Nuclear Fusion 23,751 (1983) ;
- [13]-Auerbach,S.P.,Condit,W.C.; Nuclear Fusion 21,(1981) 927 ;
- [14]-Goedbloed,J.P.;"Lectures Notes on Ideal Magnetohydrodynamics ",March 1979, Unicamp, Brazil ;
- [15]-Grad,H.,Hogan,J.; Phys.Rev. Letters,24 (1970) 1337 ;
- [16]-Kruskal,M.D.,Kulsrud,R.M. ;Phys.Fluids 1 (1959) 268 ;
- [17]-Shafranov,V.D.;"Reviews of Plasma Physics",Consultant Bureau, N.Y.,(1966),Vol.2 ;
- [18]-Kanako,S.,Chijoda,K.,Hirota,I.; Journal Soc.Japan 50 (1981) 359;
- [19]-Spencer,R.L.,Hewett,D.W.; Phys.Fluids 25 (1982) 1365 ;
- [20]-Abramovitz,M.,Stegun,I.A.;"Handbook of Mathematical Functions",Dover Publ.,Inc.;New York, 1970 ;

- [21]-Clemente,R.A.;Physics Fluids 26,(1983) 1877 ;
- [22]-Morse,P.M.,Feshback,H.;"Methods of Theoretical Physics;
Mcgraw-Hill,Inc.,N.Y., 1953 ;
- [23]-Morozov,A.I.,Solov'ev,L.S.; Rev. of Plasma Physics;
Consultants Bureau;New York, 1966 ;
- [24]Clemente,R.A.;"Equilibrio,Estabilidad y Transporte Clasico en
Configuraciones con Inversion de Campo Magnetico", Tese de
Doutorado,Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,Universidad
de Buenos Aires,1986;
- [25]-Jackson,J.D.; "Eletrodinâmica Clássica";Guanabara Dois; 2^a
Ed., cap.10, pag.364 ;
- [26]-Braginskii,S.I.;"Reviews of Plasma Physics",Consultants
Bureau ,New York,1965 ;
- [27]-Clemente,R.A.,Milovich,J.L.;Phys Letters 85A, 148 (1981) ;
- [28]-Clemente,R.A.,Grillo,C.E.;Phys.Fluids 27 (1984) 658;
- [29]-Tuszewski,M. ;Plasma Phys.Contr.Fusoin 26 (1984) 991;
- [30]-Tuszewski,M. ;in " Field-Reversed Configurations ",
Nuclear Fusion 28 (1989) 2033.