

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

SANTOS
ESTUDO DE INJEÇÃO DE TRAÇADORES
EM MEIOS POROSOS ATRAVÉS DO
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS
COM DISCRETIZAÇÃO EXPONENCIAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese
aprovada pela comissão julgadora, defendida pelo Eng.
Renato Luiz Almeida dos Santos em 26/11/90.

Autor : Renato Luiz Almeida dos Santos
Orientador : Antonio Cláudio de França Corrêa
Co-orientador : Oswaldo Antunes Pedrosa Júnior

51190

novembro de 1990

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

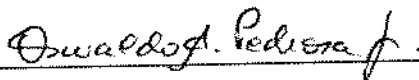
A dissertação "Estudo de Injeção de Traçadores em Meios Porosos Através do Método de Diferenças Finitas com Discretização Exponencial", elaborada por Renato Luiz Almeida dos Santos e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 26 de Novembro de 1990.

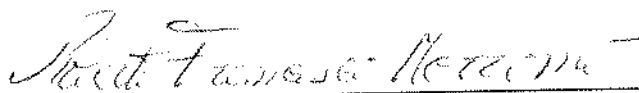
Banca Examinadora



Antonio Cláudio de França Corrêa, Ph. D.



Oswaldo Antunes Pedrosa Júnior, Ph. D.



Roberto Francisco Mezzomo, Ph. D.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Dr. Antonio Cláudio de França Corrêa e Dr. Oswaldo Antunes Pedrosa Júnior, pela sugestão do tema desta dissertação, pela confiança depositada em meu trabalho e por toda ajuda dispensada.

A Fernando Baratelli Júnior pela oportunidade de cursar o mestrado em engenharia de petróleo e a todo pessoal do CENPES/DICAT pelo estímulo à realização deste trabalho, em especial Isa de Barros Furriel e Simone Maria Barros de Oliveira.

A todos do CENPES/DIGER pelo apoio e colaboração, essencial na execução da parte experimental.

Aos meus pais e familiares pelo carinho, força e compreensão.

Aos meus colegas de trabalho, corpo docente e funcionários do CEPETRO pelo companheirismo.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

No estudo do deslocamento miscível em reservatórios desenvolvidos por padrão de cinco poços, dispersão numérica, instabilidades, oscilações e efeitos de orientação de malha são dificuldades encontradas no tratamento numérico do problema por diferenças finitas.

Este trabalho apresenta a aplicação do esquema exponencial proposto por Patankar [6] na discretização por diferenças finitas da equação de Difusão-Convecção. O método reduz a dispersão numérica e não apresenta instabilidades e oscilações encontradas quando se utiliza diferenciamento central ou esquema a montante. O procedimento descrito garante que o grau de convergência entre a solução numérica e a resposta analítica é independente do mecanismo que rege o escoamento (convecção ou difusão). Objetivando-se minimizar efeitos de orientação de malha, implementou-se um esquema de discretização por nove pontos baseado na proposta apresentada por Bertiger & Padmanabhan [1]. Com este esquema, a solução numérica independe do ângulo entre a malha e a direção de escoamento.

Para a validação do método, realizaram-se experimentos de deslocamento miscível em escala de laboratório, obtendo-se elevado grau de concordância entre resultados experimentais e aqueles obtidos por simulação numérica.

ABSTRACT

In the study of miscible displacement in reservoirs developed by a five spot pattern, application of standard finite difference methods may lead to numerical dispersion, grid orientation effects and overshoot at the miscible front.

The main purpose of this work is to present the application of the scheme proposed by Patankar [6] to obtain the discretized form of the Convection-Difusion equation. The procedure described ensures that convergence of the finite difference solution to the exact solution of the differential system will not depend on the ratio of convection to diffusion rates. In order to minimize grid orientation effects in the modeling of miscible displacement problems, a nine point discretization scheme, based on Bertiger & Padmanabhan [1], is used.

To test the proposed method, laboratory experiments were conducted in a quarter of a five spot model. Agreement between predicted and experimental profiles was excellent.

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELO MATEMÁTICO	4
3	SOLUÇÃO NUMÉRICA	8
3.1	Equação de Pressão	10
3.2	Equação de Concentração	13
3.2.1	Esquemas de Diferenciamento Central e a Montante	13
3.2.2	Esquema Exponencial de Cinco Pontos	20
3.2.3	Esquema Exponencial de Nove Pontos	23
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	28
5	VALIDAÇÃO	44
5.1	Descrição do Experimento	44
5.1.1	Esquema Experimental	44
5.1.2	Meio Poroso	49
5.1.3	Medida da Concentração Efluente	51
5.2	Resultados Experimentais e Numéricos	55
6	CONCLUSÕES	62
7	NOMENCLATURA	64
8	REFERÊNCIAS	68

Apêndice A : Equação de Concentração	70
Apêndice B : Equação de Pressão	72
Apêndice C : Aplicação da Solução Analítica da Equação de Concentração	74
Apêndice D : Verificação da Igualdade entre Esquemas de Yanosik & Mc Cracken e Bertiger & Padmanabhan	76
Apêndice E : Listagem do Programa de Aquisição de Dados	79

Lista de Figuras

1	Malhas diagonal e paralela para um reservatório desenvolvido por um padrão de injeção cinco poços	3
2	Malha de blocos centrados	9
3	Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe= 0.01$	29
4	Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe= 1$	29
5	Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe= 10$	30
6	Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe= 100$	30
7	Verificação do efeito de orientação de malha. Distribuição de concentração ao longo da linha injetor/produtor. Esquema exponencial 5 pontos em regime difusivo.	33
8	Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 5 pontos em regime difusivo.	33
9	Verificação do efeito de orientação de malha. Distribuição de concentração ao longo da linha injetor/produtor. Esquema exponencial 5 pontos em regime convectivo.	34
10	Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 5 pontos em regime convectivo.	34

11	Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 9 pontos em regime difusivo.	35
12	Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 9 pontos em regime convectivo.	35
13	Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha diagonal em regime difusivo.	36
14	Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha diagonal em regime convectivo.	36
15	Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha paralela em regime difusivo.	37
16	Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha paralela em regime convectivo.	37
17	Comparação entre mapas de contorno de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e paralela 17x17. Esquema exponencial de 5 pontos.	38
18	Comparação entre mapas de contorno de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e paralela 17x17. Esquema exponencial de 9 pontos.	38

19	Comparação entre esquemas de 5 e 9 pontos. Distribuição de concentração ao longo da linha injetor/produtor. Malha diagonal 12x12. Regime convectivo.	39
20	Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e $Pe=100$. Esquema exponencial de 5 pontos.	40
21	Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e $Pe=100$. Esquema exponencial de 9 pontos.	40
22	Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha paralela 17x17 e $Pe=100$. Esquema exponencial de 5 pontos.	41
23	Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha paralela 17x17 e $Pe=100$. Esquema exponencial de 9 pontos.	41
24	Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.	42
25	Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.	42
26	Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.	43
27	Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.	43
28	Esquema Experimental	46
29	Sistema de Injeção	47
30	Aparato Experimental	48
31	Meio Poroso Encapsulado	48
32	Meio Poroso	50
33	Calibração "Concentração versus Voltagem"	52

34	Calibração "Voltagem versus Temperatura"	52
35	Fluxograma do programa de aquisição de dados	54
36	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 1	58
37	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 2	58
38	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 3	59
39	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 4	59
40	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 5	60
41	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 6	60
42	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 7	61
43	Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração effluente versus Volume poroso injetado. Teste 8	61
44	Malha para esquema de Yanosik & Padmanabhan	77

Lista de Tabelas

1	Validação para a Distribuição de Pressões	12
2	Resultados de Permeabilidade do Meio Poroso	49
3	Testes Experimentais Realizados	55
4	Parâmetros dos Testes Experimentais Realizados	56
5	Comparação entre Resultados Experimentais e Numéricos	57

1 INTRODUÇÃO

Considerando-se o problema de deslocamento miscível em reservatórios de geometria bidimensional, desenvolvidos por padrão de cinco poços, o tratamento numérico da equação de Difusão-Convecção com a aplicação da técnica de discretização por diferenças finitas apresenta dificuldades, quando o processo convectivo é dominante (altos números de Peclet).

Dispersão numérica, instabilidades, oscilações e efeitos de orientação de malha são os problemas enfrentados. A aplicação do método de diferenciamento central pode resultar em soluções numéricas instáveis com oscilações, sendo geralmente empregado o método de discretização com cálculo de propriedades a montante para contornar tal problema. Desta forma, a aproximação de segunda ordem para o termo convectivo é substituída por uma aproximação de primeira ordem, causando a suavização artificial das frentes de concentração (Figueiredo [2], Patankar [6], Patel & Markatos [7] e Settari et alii [12]), o que pode ser minimizado com o refinamento da malha.

Este trabalho apresenta uma proposta de diferenças finitas que se baseia na obtenção da equação de diferenças a partir da solução analítica da equação de Difusão-Convecção para o problema unidimensional, resultando no esquema exponencial (Patankar [6]).

Para a geometria em questão, verificou-se que a simulação numérica baseada em esquemas de diferenças finitas por cinco pontos fornece respostas diferentes se a orientação dos eixos coordenados com relação à direção real de escoamento é alterada, malhas diagonal e paralela (fig 1). O erro de difusão numérica em sistemas multidimensionais, chamado de "falsa difusão", é rotacionalmente dependente da orientação do sistema de malha (Patankar [6] e Patel & Markatos [7]). Para contornar este efeito de orientação de malha foi desenvolvido um esquema de nove pontos, o qual baseia-se na proposta de Bertiger & Padmanabhan [1] para processos puramente convectivos.

Resultados apresentados demonstram a resposta do esquema proposto com relação à variação do regime do escoamento (convectivo ou difusivo), verificando-se redução da dispersão numérica e ausência de problemas de instabilidades e oscilações, e redução do efeito de orientação de malha com a utilização do esquema de nove pontos.

Com o objetivo de se validar o método proposto, montou-se um aparato experimental para a realização de ensaios de deslocamento miscível em escala de laboratório. Estes consistem no deslocamento de um fluido, o qual inicialmente satura o meio poroso, por outro fluido miscível com o primeiro, com concentração de injeção diferente da original, acompanhando-se as concentrações dos efluentes. Como meio poroso, utilizou-se uma placa do afloramento da formação Rio Bonito, com geometria correspondente à quarta parte do padrão de cinco poços. Obteve-se elevado grau de concordância entre os resultados experimentais e aqueles obtidos por simulação numérica.

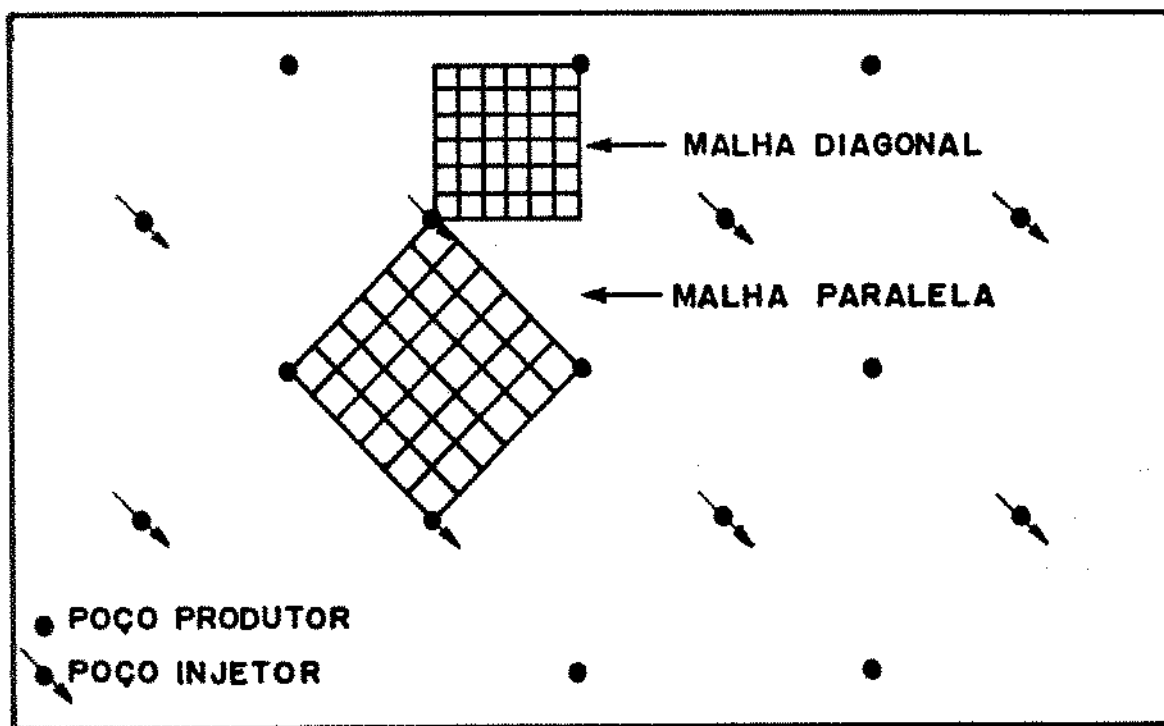


Figura 1: Malhas diagonal e paralela para um reservatório desenvolvido por um padrão de injeção cinco poços

2 MODELO MATEMÁTICO

A modelagem da injeção de traçador em um meio poroso foi realizada a partir do desenvolvimento de modelo matemático com as seguintes características:

- escoamento monofásico, incompressível e isotérmico,
- deslocamento miscível de dois componentes,
- efeitos viscoso e gravitacional negligenciáveis,
- escoamento bidimensional,
- razão de mobilidades unitária,
- ausência de interação rocha-fluído,
- escoamento em regime permanente antes e durante a injeção do traçador,
- reservatório de espessura, permeabilidade e porosidade constantes,
- modelo físico de geometria quadrada, correspondendo a 1/4 do padrão de cinco poços, não havendo escoamento através dos limites laterais do meio poroso.

No escoamento de um traçador em solução, através de um meio poroso, consideram-se dois fenômenos envolvidos: a convecção e a dispersão. A convecção relaciona-se ao deslocamento do fluido por um gradiente de pressão. A dispersão hidrodinâmica está relacionada ao espalhamento do traçador em solução, incluindo dois processos: dispersão mecânica, resultante do movimento das partículas do fluido no meio poroso, e a difusão molecular devido aos gradientes de concentração através de superfícies perpendiculares à direção do escoamento. O efeito da difusão molecular é significativo somente em condições de baixas velocidades, podendo ser desprezada.

Assim, o transporte de um traçador através de um meio poroso (escoamento miscível a duas espécies) é regido pela equação de Difusão-Convecção [3] (Apêndice A):

$$\frac{\partial(\phi C)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C) - qC_i = 0 \quad , \quad (2.1)$$

sendo o termo de fluxo difusivo descrito por:

$$\mathbf{J} = -\phi D \nabla C \quad . \quad (2.2)$$

O segundo e o terceiro termos da equação (2.1) representam a dispersão e a convecção respectivamente.

O coeficiente de dispersão é relacionado à velocidade intersticial por (Lake et alii [3] e Settari et alii [12]):

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \begin{Bmatrix} D_x & D_{xy} \\ D_{yx} & D_y \end{Bmatrix} \quad , \\ D_x &= \frac{\alpha |u_x|}{\phi} \quad , \\ D_y &= \frac{\alpha |u_y|}{\phi} \quad . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Adotam-se os termos cruzados do tensor coeficiente de dispersão negligenciáveis por não considerar a variação da dispersividade do meio poroso nas direções transversal e longitudinal ao escoamento. Esta simplificação é proposta por Settari et alii [12].

O sistema físico em questão apresenta como condição inicial ausência de traçador no meio poroso:

$$C(x, y, 0) = 0 \quad , \quad (2.4)$$

e condições de contorno de ausência de fluxo de traçador através dos limites do reservatório

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=L_x} = \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=L_y} = 0 \quad . \quad (2.5)$$

O campo de pressões em regime permanente é obtido pelo tratamento numérico da equação diferencial parabólica representativa do escoamento horizontal de um fluido incompressível, de viscosidade invariante com a pressão, através de meio poroso homogêneo e isotrópico. Combinando-se o Princípio de Conservação da Massa com a equação de Darcy (Apêndice B), obtém-se:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\mu}{k} q \quad , \quad (2.6)$$

apresentando como condição inicial:

$$p(x, y, 0) = p_0 \quad , \quad (2.7)$$

e condições de contorno:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=L_x} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=L_y} = 0 \quad (2.8)$$

Considerando-se as variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} p_D &= \frac{2\pi k h p(x, y, t)}{q_i \mu} , \\ t_{DA} &= \frac{kt}{\phi \mu c_t A} , \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} x_D &= \frac{x}{\sqrt{A}} , & y_D &= \frac{y}{\sqrt{A}} , \\ q_D &= \frac{q}{q_i} \Delta x \Delta y h , \end{aligned}$$

e substituindo-as nas equações (2.6), (2.7) e (2.8), obtêm-se a forma adimensionalizada da equação (2.6):

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 p_D}{\partial y_D^2} = \frac{\partial p_D}{\partial t_{DA}} - \frac{2\pi q_D}{\Delta x_D \Delta y_D} \quad (2.10)$$

A condição inicial reduz-se a:

$$p_D(x_D, y_D, 0) = p_{D_0} , \quad (2.11)$$

e as condições de contorno se tornam:

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial x_D}\right)_{x_D=0} = \left(\frac{\partial p_D}{\partial y_D}\right)_{y_D=0} = \left(\frac{\partial p_D}{\partial x_D}\right)_{x_D=\frac{L_x}{\sqrt{A}}} = \left(\frac{\partial p_D}{\partial y_D}\right)_{y_D=\frac{L_y}{\sqrt{A}}} = 0 \quad (2.12)$$

3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A modelagem da injeção de traçador em meio poroso é dividida em duas etapas numéricas. A primeira consiste em se tratar a equação de pressão a fim de se obter o campo de pressões em regime permanente. Na fase transiente, injeta-se à vazão constante e produz-se à pressão constante. Ao atingir o estado permanente, passa-se à segunda etapa, com o tratamento numérico da equação de Difusão-Convecção para a simulação da variação de concentrações no reservatório.

A solução numérica do modelo matemático por diferenças finitas é obtida utilizando-se malha regular com distribuição de bloco centrado (fig 2), a partir do uso da técnica de diferenciamento central para as derivadas espaciais e método implícito em relação ao tempo. Não havendo escoamento através dos limites do meio poroso, aplica-se o princípio da reflexão ao se tratar as fronteiras laterais.

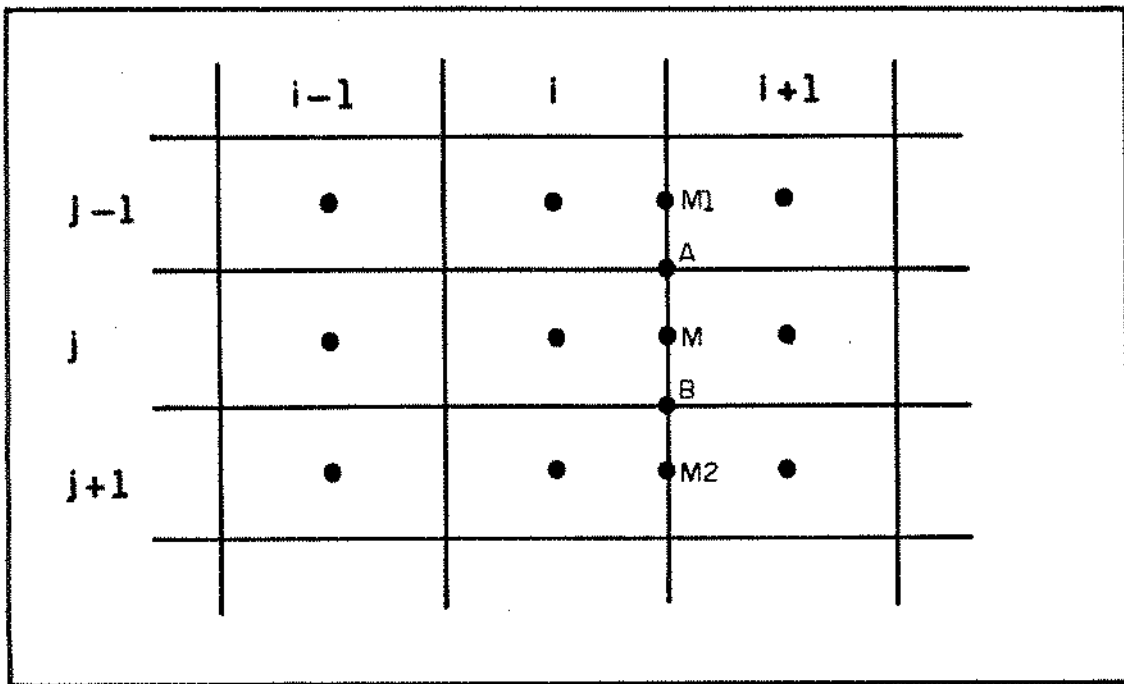


Figura 2: Malha de blocos centrados

3.1 Equação de Pressão

Objetivando-se definir o campo de pressões para regime permanente, tratou-se numericamente a equação de fluxo (2.10) por diferenças finitas. A utilização da técnica de diferenciamento central para as derivadas espaciais e método implícito em relação ao tempo não implica em problemas numéricos por se tratar de uma equação parabólica. A equação discretizada é escrita na forma:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_{D_{i+1,j}} - 2p_{D_{i,j}} + p_{D_{i-1,j}}}{\Delta x_D^2} \right)^{n+1} + \left(\frac{p_{D_{i,j+1}} - 2p_{D_{i,j}} + p_{D_{i,j-1}}}{\Delta y_D^2} \right)^{n+1} \\ & = \frac{p_{D_{i,j}}^{n+1} - p_{D_{i,j}}^n}{\Delta t_{DA}} - \frac{2\pi q_D}{\Delta x_D \Delta y_D} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nos blocos de injeção e produção, foi utilizado conceito de raio equivalente desenvolvido por Peaceman [8]. Tal procedimento baseia-se na aplicação da equação de fluxo radial para o tratamento dos poços de produção e injeção, determinando-se um raio equivalente em que a pressão de fluxo do poço se iguala à pressão média do bloco. A equação obtida é dada por:

$$q = \frac{2\pi kh(p_{i,j} - p_w)}{\mu \ln \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{\Delta x \Delta y}}{2 r_w} \right)} \quad (3.2)$$

Na forma adimensionalizada, a equação (3.2) reduz-se a:

$$q_D = \frac{p_{D_{i,j}} - p_{wD}}{\ln \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{\Delta x \Delta y}}{2 r_w} \right)} \quad (3.3)$$

Uma vez que os poços de injeção e produção estão situados nos vértices do modelo físico, há uma situação simétrica em cada poço com relação ao fluxo radial puro. Portanto, a equação (3.3) para o modelo em questão é dada por:

$$q_D = \frac{PD_{i,j} - P_{wD}}{4 \ln \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{\Delta x \Delta y}}{2 r_w} \right)} \quad (3.4)$$

O sistema de equações resultante pode ser expresso na forma matricial:

$$[\mathbf{A}]^n [\mathbf{P}]^{n+1} = [\mathbf{B}]^n \quad (3.5)$$

sendo $[\mathbf{A}]$ a matriz pentadiagonal dos coeficientes, $[\mathbf{B}]$ o vetor termo independente e $[\mathbf{P}]$ o vetor incógnita, ou seja, vetor de pressões do nível de tempo $n + 1$. Resolve-se o sistema de equações por método direto de eliminação de Gauss.

Com uma vazão de injeção constante ($q_D = 1$) e pressão de produção constante, acompanham-se as variações da pressão de injeção e da vazão de produção a cada intervalo de tempo calculado. Atinge-se o regime permanente quando tais variações forem desprezíveis. Neste momento, com o campo de pressões estabelecido, inicia-se a injeção do traçador.

Sabe-se que a queda de pressão em regime permanente, em reservatório no qual está implantado um esquema de produção do tipo padrão de cinco poços, é calculada por Muskat [5] através da expressão:

$$\Delta p = \frac{q\mu}{\pi kh} \left[\ln \left(\frac{d}{r_w} \right) - 0.619 \right] \quad (3.6)$$

sendo Δp a diferença entre as pressões de injeção e produção, e d a distância entre os poços produtor e injetor, medida ao longo da diagonal.

Aplica-se a adimensionalização (2.9) em (3.6), obtendo-se:

$$\Delta p_D = 8 \left[\ln \left(\frac{d}{r_w} \right) - 0.619 \right] \quad (3.7)$$

Comparam-se os resultados da expressão acima com os calculados pela simulação, utilizando-se uma malha com refinamento 10×10 (tabela 1). Obtém-se um erro relativo médio de 0.2% , o que valida a resposta numérica para a distribuição de pressões.

$\frac{d}{r_w}$	Δp_D Muskat	Δp_D Numérico	Erro Relativo (%)
100	31.89	31.82	0.22
1000	50.31	50.21	0.20
10000	68.73	68.64	0.16

Tabela 1: Validação para a Distribuição de Pressões

3.2 Equação de Concentração

3.2.1 Esquemas de Diferenciamento Central e a Montante

A forma integral da equação de Difusão-Convecção (2.1) é dada por:

$$\int_V \frac{\partial(\phi C)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} C dV - \int_V q C_i dV = 0 \quad , \quad (3.8)$$

onde V é o volume de controle . Aplicando-se o teorema da divergência, transforma-se a integral de volume em integral de superfície para os termos de fluxo convectivo e difusivo:

$$\int_V \frac{\partial(\phi C)}{\partial t} dV + \int_A (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) C dA - \int_V (q C_i) dV = 0 \quad , \quad (3.9)$$

onde A é a área do contorno do volume de controle e \mathbf{n} o vetor unitário normal à superfície.

Considerando-se o volume de controle como o volume do bloco ij ($\Delta V_{i,j}$), fig 2, aplica-se o método integral de discretização, obtendo-se os seguintes termos discretizados:

-termo de acumulação:

$$\frac{\Delta V_{i,j} \phi}{\Delta t} \Delta_i(C_{i,j}) \quad (3.10)$$

-termo fonte:

$$q C_i \Delta V_{i,j} = Q C_i \quad (3.11)$$

-termo de Difusão+Convecção:

O termo "convectivo+difusivo" da equação (3.9) pode ser expresso por:

$$F = \int_A (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) C dA \quad , \quad (3.12)$$

$$F = F_D + F_C = F_{i+1/2,j} + F_{i,j+1/2} - (F_{i-1/2,j} + F_{i,j-1/2}) \quad ,$$

sendo F_D e F_C as contribuições dos fluxos difusivo e convectivo, respectivamente. A vazão total através da área de fronteira $A_{i+1/2,j}$ é:

$$F_{i+1/2,j} = F_{D_{i+1/2,j}} + F_{C_{i,j+1/2}} = \int_{A_{i+1/2,j}} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_{A_{i+1/2,j}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) C dA \quad . \quad (3.13)$$

Substituindo-se (2.2) em (3.13), obtém-se:

$$F_{i+1/2,j} = \int_{A_{i+1/2,j}} [-\phi(\mathcal{D}\nabla C \cdot \mathbf{n}) + C(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] dA \quad . \quad (3.14)$$

Usando-se um sistema bidimensional de coordenadas cartesianas, o gradiente de concentração é dado por:

$$\nabla C = \frac{\partial C}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial C}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y \quad . \quad (3.15)$$

As componentes do vetor \mathbf{u} são:

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{e}}_x + u_y \hat{\mathbf{e}}_y \quad . \quad (3.16)$$

Substituindo-se as equações (2.3), (3.15) e (3.16) em (3.14), a vazão total é dada por:

$$F_{i+1/2,j} = -\phi h \int_{A_{i+1/2,j}} D_x \frac{\partial C}{\partial x} dy + h \int_{A_{i+1/2,j}} u_x C dy \quad , \quad (3.17)$$

para $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}_x$ e $dA = hdy$.

Considera-se que $(D_x \partial C / \partial x)$ e $(u_x C)$ sejam somente funções de x , ou então não variam ao longo da face $A_{i+1/2,j}$, e integra-se numericamente (3.17) pelo método de quadratura simples, obtendo-se:

$$F_{i+1/2,j} = -\phi h \Delta y \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} + \Delta y h (u_x C)_{i+1/2,j} \quad . \quad (3.18)$$

O termo difusivo é estimado por diferenciamento central. Deste modo, admitindo-se que a vazão de difusão dada por:

$$F_{D_{i+1/2,j}} = -\phi h \Delta y \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} \quad , \quad (3.19)$$

se mantém constante durante o intervalo de tempo Δt , pode-se integrar a equação acima do ponto (i, j) ao ponto $(i+1, j)$, chegando a:

$$F_{D_{i+1/2,j}} = -\frac{\phi h \Delta y \int_{i,j}^{i+1,j} dC}{\int_{i,j}^{i+1,j} \frac{1}{D_x} dx} \quad , \quad (3.20)$$

e obtendo-se:

$$F_{D_{i+1/2,j}} = -\frac{\phi h \Delta y (C_{i+1,j} - C_{i,j})}{\frac{1}{2} \Delta x \left(\frac{1}{D_{x_{i,j}}} + \frac{1}{D_{x_{i+1,j}}} \right)} \quad . \quad (3.21)$$

O mesmo procedimento é efetuado para as outras faces do bloco ij . Define-se a transmissibilidade difusiva como sendo:

$$T_{D_{x_{i-1/2,j}}} = \frac{\phi h \Delta y}{\frac{1}{2} \Delta x \left(\frac{1}{D_{x_{i,j}}} + \frac{1}{D_{x_{i-1/2,j}}} \right)} ,$$

$$T_{D_{y_{i,j+1/2}}} = \frac{\phi h \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta y \left(\frac{1}{D_{y_{i,j}}} + \frac{1}{D_{x_{i,j+1/2}}} \right)} .$$
(3.22)

O termo de difusão discretizado para o volume de controle considerado é representado por:

$$F_D = F_{D_{i+1/2,j}} + F_{D_{i,j+1/2}} - F_{D_{i,j-1/2}} - F_{D_{i-1/2,j}} .$$
(3.23)

Substituindo-se (3.21) e (3.22) em (3.23), resulta:

$$F_D = -T_{D_{x_{i+1/2,j}}} (C_{i+1,j} - C_{i,j}) + T_{D_{x_{i-1/2,j}}} (C_{i,j} - C_{i-1,j})$$

$$- T_{D_{y_{i,j+1/2}}} (C_{i,j+1} - C_{i,j}) + T_{D_{y_{i,j-1/2}}} (C_{i,j} - C_{i,j-1}) .$$
(3.24)

A questão crucial do tratamento numérico para o termo convectivo da equação (3.18), o qual é dado por:

$$F_{C_{i+1/2,j}} = \Delta y h (u_x C)_{i+1/2,j} ,$$
(3.25)

está na aproximação para $C_{i+1/2,j}$, podendo-se utilizar os esquemas de diferenciamento central e o esquema a montante.

Considerando-se inicialmente o diferenciamento central, a concentração na face $A_{i+1/2,j}$ é estimada por:

$$C_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (C_{i,j} + C_{i+1,j}) \quad (3.26)$$

Resultados irrealis podem ser obtidos em decorrência de oscilações e instabilidades do método de solução, quando o mecanismo convectivo rege o escoamento. Por este motivo, utiliza-se uma aproximação de primeira ordem a montante para $C_{i+1/2,j}$, dada por:

$$C_{i+1/2,j} = \theta_{i+1/2,j} C_{i,j} + (1 - \theta_{i+1/2,j}) C_{i+1,j} \quad (3.27)$$

onde $\theta_{i+1/2,j} = 1$ se o escoamento for no sentido i para $i + 1$, e $\theta_{i+1/2,j} = 0$ se ocorrer no sentido contrário.

Com o uso deste esquema, há o surgimento de dispersão numérica devido à magnitude do erro de truncamento, o que pode ser minimizado com o refinamento da malha. Este mesmo procedimento é realizado para as demais faces, obtendo-se para o termo convectivo da equação (3.9) a seguinte discretização :

$$F_C = F_{C_{i+1/2,j}} + F_{C_{i,j+1/2}} - (F_{C_{i-1/2,j}} + F_{C_{i,j-1/2}}) \quad (3.28)$$

$$F_C = h\Delta y [(u_x C)_{i+1/2,j} - (u_x C)_{i-1/2,j}] + h\Delta x [(u_y C)_{i,j+1/2} - (u_y C)_{i,j-1/2}] \quad (3.29)$$

Substituindo-se as equações (3.10), (3.11), (3.23) e (3.28) em (3.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} & (F_C + F_D)_{i+1/2,j}^{n+1} + (F_C + F_D)_{i,j+1/2}^{n+1} - (F_C + F_D)_{i-1/2,j}^{n+1} \\ & - (F_C + F_D)_{i,j-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta V_{i,j} \phi \Delta t (C)_{I,j}}{\Delta t} - Q C_i = 0 \quad (3.30) \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 (F_C + F_D)_{i\pm 1/2,j}^{n+1} &= h\Delta y u_{x_{i\pm 1/2,j}} \left[\theta_{i\pm 1/2,j} C_{i,j} + (1 - \theta_{i\pm 1/2,j}) C_{i\pm 1,j} \right]^{n+1} \\
 &\quad - T_{Dx_{i\pm 1/2,j}} (C_{i\pm 1,j} - C_{i,j})^{n+1} , \\
 (F_C + F_D)_{i,j\pm 1/2}^{n+1} &= h\Delta x u_{y_{i,j\pm 1/2}} \left[\theta_{i,j\pm 1/2} C_{i,j} + (1 - \theta_{i,j\pm 1/2}) C_{i,j\pm 1} \right]^{n+1} \\
 &\quad - T_{Dy_{i,j\pm 1/2}} (C_{i,j\pm 1} - C_{i,j})^{n+1} .
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Tratando-se o termo convectivo por diferenciamento central, $\theta_{i\pm 1/2,j}$ e $\theta_{i,j\pm 1/2}$ assumem o valor $1/2$. Aplicando-se as equações (3.31) em (3.30) e modificando, para o bloco ij obtém-se:

$$\begin{aligned}
 A_{i,j} C_{i,j}^{n+1} + A_{i+1,j} C_{i+1,j}^{n+1} + A_{i-1,j} C_{i-1,j}^{n+1} \\
 + A_{i,j+1} C_{i,j+1}^{n+1} + A_{i,j-1} C_{i,j-1}^{n+1} = B_{i,j} ,
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_{i,j} &= T_{Dx_{i-1/2,j}} + T_{Dx_{i+1/2,j}} + T_{Dy_{i,j+1/2}} + T_{Dy_{i,j-1/2}} + \\
 &\quad + h\Delta y \left(-\theta_{i-1/2,j} u_{x_{i-1/2,j}} + \theta_{i+1/2,j} u_{x_{i+1/2,j}} \right) \\
 &\quad + h\Delta x \left(\theta_{i,j+1/2} u_{y_{i,j+1/2}} - \theta_{i,j-1/2} u_{y_{i,j-1/2}} \right) + \frac{\phi \Delta V_{i,j}}{\Delta t} , \\
 A_{i\pm 1,j} &= -T_{Dx_{i\pm 1/2,j}} \pm (1 - \theta_{i\pm 1/2,j}) h\Delta y u_{x_{i\pm 1/2,j}} , \\
 A_{i,j\pm 1} &= -T_{Dy_{i,j\pm 1/2}} \pm (1 - \theta_{i,j\pm 1/2}) h\Delta x u_{y_{i,j\pm 1/2}} , \\
 B_{i,j} &= \frac{\phi \Delta V_{i,j} C_{i,j}^n}{\Delta t} + Q C_i .
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

O sistema matricial resultante pode ser também representado pela equação (3.5), sendo que a distribuição de concentrações na malha é calculada a cada nível de tempo com a resolução do sistema por um método direto de eliminação de Gauss.

3.2.2 Esquema Exponencial de Cinco Pontos

O esquema proposto para o adequado tratamento dos termos convectivo e difusivo da equação de Difusão-Convecção é obtido através da solução analítica desta equação em uma dimensão (Patankar [6], Patel & Markatos [7], Figueiredo [2]).

Considerando-se escoamento unidimensional em regime permanente, a equação de Difusão-Convecção é dada por:

$$u_x \frac{dC}{dx} - \phi D_x \frac{d^2C}{dx^2} = 0 \quad . \quad (3.34)$$

Para condições de contorno, tais como:

$$C = C_0 \quad \text{em } x = 0 \quad , \quad (3.35)$$

$$C = C_L \quad \text{em } x = L \quad ,$$

obtém-se a seguinte distribuição de concentração:

$$\frac{C - C_0}{C_L - C_0} = \frac{\exp(\text{Pe}x/L) - 1}{\exp(\text{Pe}) - 1} \quad , \quad (3.36)$$

onde o número de Peclet, Pe, é definido por:

$$\text{Pe} = \frac{u_x L}{\phi D_x} \quad , \quad (3.37)$$

representando a razão entre as contribuições convectiva e difusiva ao escoamento.

Substituindo-se (2.3) em (3.37), o número de Peclet assume a forma:

$$Pe = \frac{u_x L}{\alpha |u_x|} \quad (3.38)$$

Baseando-se na solução analítica, equação (3.36), verifica-se que no limite $Pe = 0$, tem-se o problema de pura difusão, e a variação de C em x é linear, quando então o esquema de diferença centrada é aceitável. Para altos valores de Pe , o valor da concentração na face se aproxima do valor de concentração na fronteira a montante, sendo o resultado obtido próximo ao do esquema a montante.

Obtendo-se a equação de diferenças diretamente da solução exata, o esquema resultante não estará sujeito às variações do número de Peclet, como apresentado pelos esquemas de diferenciamento central e a montante. Utiliza-se, então, o perfil de concentrações dado por (3.36) para obter expressões para $\frac{\partial C}{\partial x}$ e C nas faces do bloco. Estas são aplicadas na equação (3.18), obtendo-se para vazão total na face $A_{i+1/2,j}$ (Apêndice C):

$$F_{i+1/2,j} = h \Delta y u_{x_{i+1/2,j}} \left[C_{i,j} + \frac{C_{i,j} - C_{i+1,j}}{\exp(Pe)_{i+1/2,j} - 1} \right]^{n+1}, \quad (3.39)$$

definindo-se o número de Peclet celular $Pe_{i+1/2,j}$ por:

$$Pe_{i+1/2,j} = \frac{u_{i+1/2,j} \Delta x}{\phi D_{x_{i+1/2,j}}} = \frac{u_{i+1/2,j} \Delta x}{\alpha |u_{i+1/2,j}|} \quad (3.40)$$

Procedimento análogo é realizado para as demais faces, obtendo-se:

$$\begin{aligned} F_{i-1/2,j} &= h \Delta y u_{x_{i-1/2,j}} \left[C_{i-1,j} + \frac{C_{i-1,j} - C_{i,j}}{\exp(Pe)_{i-1/2,j} - 1} \right]^{n+1}, \\ F_{i,j+1/2} &= h \Delta x u_{y_{i,j+1/2}} \left[C_{i,j} + \frac{C_{i,j} - C_{i,j+1}}{\exp(Pe)_{i,j+1/2} - 1} \right]^{n+1}, \\ F_{i,j-1/2} &= h \Delta x u_{y_{i,j-1/2}} \left[C_{i,j-1} + \frac{C_{i,j-1} - C_{i,j}}{\exp(Pe)_{i,j-1/2} - 1} \right]^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Utilizando-se o mesmo grau de refinamento para as duas dimensões,

$$|\text{Pe}_{i+1/2,j}| = |\text{Pe}_{i,j+1/2}| = \text{Pe} \quad (3.42)$$

As expressões (3.39) e (3.41) são substituídas em (3.30), e escrevendo na forma da equação (3.32) obtêm-se os coeficientes:

$$\begin{aligned} A_{i+1,j} &= -\frac{h\Delta y u_{x_{i+1/2,j}}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \quad , \\ A_{i-1,j} &= -\frac{h\Delta y u_{x_{i-1/2,j}} \exp(\text{Pe})_{i-1/2,j}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j} - 1} \quad , \\ A_{i,j+1} &= -\frac{h\Delta x u_{y_{i,j+1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i,j+1/2} - 1} \quad , \\ A_{i,j-1} &= -\frac{h\Delta x u_{y_{i,j-1/2}} \exp(\text{Pe})_{i,j-1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i,j-1/2} - 1} \quad , \\ A_{i,j} &= \frac{\phi\Delta V_{i,j}}{\Delta t} + h\Delta y \left[\frac{u_{x_{i+1/2,j}} \exp(\text{Pe})_{i+1/2,j}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} + \frac{u_{x_{i-1/2,j}}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j} - 1} \right] + \\ &+ h\Delta x \left[\frac{u_{y_{i,j+1/2}} \exp(\text{Pe})_{i,j+1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i,j+1/2} - 1} + \frac{u_{y_{i,j-1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i,j-1/2} - 1} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

De acordo com Figueiredo [2], as discretizações baseadas em equações geratrizes homogêneas (3.34) coincidem com as obtidas por equações geratrizes não homogêneas com a utilização de grade regular, quando o mesmo termo não homogêneo é utilizado para ambas as faces $A_{i+1/2,j}$ e $A_{i-1/2,j}$. Neste caso, a equação de Difusão-Convecção seria expressa por:

$$u_x \frac{dC}{dx} - \phi D_x \frac{d^2C}{dx^2} = K \quad , \quad (3.44)$$

sendo K uma constante representativa da soma dos termos fonte, fluxos convectivo e difusivo na direção cruzada ou quaisquer termos extras.

3.2.3 Esquema Exponencial de Nove Pontos

Segundo Patankar [6], a chamada "falsa difusão" normalmente atribuída à ordem de acuidade do esquema de discretização, obtida por série de Taylor, é considerada existente somente em fenômenos multidimensionais, para o caso de regime permanente. Surge a partir da simplificação ao se tratar o fluxo através de cada face do bloco ij como localmente unidimensional. É um fenômeno essencialmente associado ao ângulo entre a direção do escoamento e os eixos da malha para o caso em questão, no qual não se considera a difusão cruzada ao escoamento. Tal fenômeno tende a ser minimizado quando se utiliza esquema que leva em consideração a natureza multidimensional do escoamento.

A simetria da geometria em estudo permite o uso de duas malhas de diferentes orientações, diagonal e paralela (fig. 1). A rede diagonal representa 1/4 de um padrão de cinco poços, com linhas da malha orientadas a 45° em relação à linha que une os poços injetor e produtor, enquanto que a paralela representa 1/2 do padrão de injeção, com linhas da grade paralelas e perpendiculares às linhas injetor/produtor.

Esta possibilidade de variação na orientação da malha freqüentemente influencia os resultados da simulação numérica baseada no esquema de discretização de cinco pontos. Tal efeito pode ser verificado na localização dos contornos de concentração do traçador, assim como pelo acompanhamento da concentração efluente para os dois tipos de malha.

Com o objetivo de se considerar a natureza multidimensional do problema, como proposta de minimizar o efeito de orientação de malha, utiliza-se esquema de discretização de nove pontos baseado no esquema desenvolvido por Bertiger & Padmanabhan [1] de interpolação de velocidades nas interfaces dos blocos.

Define-se o fluxo total de fluido deslocante em x , de forma a incluir as contribuições difusiva e convectiva, pela expressão:

$$G_x = -\phi D_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_x C \quad . \quad (3.45)$$

Substituindo-se (3.45) em (3.17), obtém-se para vazão total na face $A_{i+1/2,j}$:

$$F_{i+1/2,j} = h \int_{A_{i+1/2,j}} G_x dy \quad . \quad (3.46)$$

Pelo esquema de cinco pontos, o fluxo total G_x é admitido constante nas faces. Pelo esquema de nove pontos proposto, a integração ao longo de $A_{i+1/2,j}$ é realizada por regra de Simpson:

$$F_{i+1/2,j} = h \int_{y_A}^{y_B} G_x dy \quad , \quad (3.47)$$

$$F_{i+1/2,j} = \frac{h\Delta y}{6} [G_{x_A} + 4G_{x_M} + G_{x_B}] \quad .$$

Os fluxos G_{x_A} e G_{x_B} podem ser obtidos por interpolação linear entre pontos vizinhos M_1 e M_2 (fig 2), obtendo-se:

$$G_{x_A} = \omega_{i,j-1/2} G_{x_{M_1}} + (1 - \omega_{i,j-1/2}) G_{x_M} \quad , \quad (3.48)$$

$$G_{x_B} = \omega_{i,j+1/2} G_{x_{M_2}} + (1 - \omega_{i,j+1/2}) G_{x_M} \quad ,$$

sendo $\omega_{i,j\pm 1/2}$ definido como:

$$\omega_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta y_{i,j\pm 1/2}} \quad , \quad (3.49)$$

assumindo o valor $\omega_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}$ para grade regular.

Substituindo-se (3.48) em (3.47), obtém-se:

$$\int_{y_A}^{y_B} G_x dy = \frac{\Delta y}{6} \left[\omega_{i,j-1/2} G_{x_{M_1}} + \left(6 - \omega_{i,j-1/2} - \omega_{i,j+1/2} \right) G_{x_M} + \omega_{i,j+1/2} G_{x_{M_2}} \right]. \quad (3.50)$$

Avaliando-se G_x nos pontos M , M_1 e M_2 com o emprego do esquema exponencial descrito anteriormente, obtém-se:

$$\begin{aligned} G_{x_M} &= u_{x_{i+1/2,j}} \left[C_{i,j} + \frac{C_{i,j} - C_{i+1,j}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \right], \\ G_{x_{M_1}} &= u_{x_{i+1/2,j-1}} \left[C_{i,j-1} + \frac{C_{i,j-1} - C_{i+1,j-1}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j-1} - 1} \right], \\ G_{x_{M_2}} &= u_{x_{i+1/2,j+1}} \left[C_{i,j+1} + \frac{C_{i,j+1} - C_{i+1,j+1}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j+1} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

A expressão final para a vazão na face $A_{i+1/2,j}$ é obtida por aplicação das equações (3.50) e (3.51) em (3.47), dada por:

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j} &= f_M u_{x_{i+1/2,j}} \left[C_{i,j} + \frac{C_{i,j} - C_{i+1,j}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \right] + \\ &+ f_{M_1} u_{x_{i+1/2,j-1}} \left[C_{i,j-1} + \frac{C_{i,j-1} - C_{i+1,j-1}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j-1} - 1} \right] + \\ &+ f_{M_2} u_{x_{i+1/2,j+1}} \left[C_{i,j+1} + \frac{C_{i,j+1} - C_{i+1,j+1}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j+1} - 1} \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

sendo:

$$\begin{aligned} f_M &= h\Delta y \left(1 - \frac{\omega_{i,j-1/2}}{6} - \frac{\omega_{i,j+1/2}}{6} \right), \\ f_{M_1} &= \frac{h\Delta y}{6} \omega_{i,j-1/2}, \\ f_{M_2} &= \frac{h\Delta y}{6} \omega_{i,j+1/2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Procedimento análogo é realizado para as outras faces. A forma discretizada da equação implícita da concentração para o bloco ij é escrita na forma:

$$\begin{aligned}
 & A_{i,j} C_{i,j}^{n+1} + A_{i+1,j} C_{i+1,j}^{n+1} + A_{i-1,j} C_{i-1,j}^{n+1} + A_{i,j+1} C_{i,j+1}^{n+1} \\
 & + A_{i,j-1} C_{i,j-1}^{n+1} + A_{i+1,j+1} C_{i+1,j+1}^{n+1} + A_{i-1,j+1} C_{i-1,j+1}^{n+1} + \\
 & + A_{i+1,j-1} C_{i+1,j-1}^{n+1} + A_{i-1,j-1} C_{i-1,j-1}^{n+1} = B_{i,j} \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
 A_{i,j} &= f_M \left[\frac{u_{x_{i+1/2,j}} \exp(\text{Pe})_{i+1/2,j}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} + \frac{u_{x_{i-1/2,j}}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j} - 1} \right] + \\
 &+ f_M \left[\frac{u_{y_{i,j+1/2}} \exp(\text{Pe})_{i,j+1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i,j+1/2} - 1} + \frac{u_{y_{i,j-1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i,j-1/2} - 1} \right] + \frac{\phi \Delta V_{i,j}}{\Delta t} \quad , \\
 A_{i+1,j} &= - \frac{f_M u_{x_{i+1/2,j}}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} + \frac{f_{M_2} u_{y_{i+1,j+1/2}} \exp(\text{Pe})_{i+1,j+1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i+1,j+1/2} - 1} + \\
 &+ \frac{f_{M_2} u_{y_{i+1,j-1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i+1,j-1/2} - 1} \quad , \\
 A_{i-1,j} &= - \frac{f_M u_{x_{i-1/2,j}} \exp(\text{Pe})_{i-1/2,j}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j} - 1} + \frac{f_{M_1} u_{y_{i-1,j+1/2}} \exp(\text{Pe})_{i-1,j+1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i-1,j+1/2} - 1} + \\
 &+ \frac{f_{M_1} u_{y_{i-1,j-1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i-1,j-1/2} - 1} \quad , \\
 A_{i,j+1} &= - \frac{f_M u_{y_{i,j+1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i,j+1/2} - 1} + \frac{f_{M_2} u_{x_{i+1/2,j+1}} \exp(\text{Pe})_{i+1/2,j+1}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j+1} - 1} + \\
 &+ \frac{f_{M_2} u_{x_{i-1/2,j+1}}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j+1} - 1} \quad , \\
 A_{i,j-1} &= - \frac{f_M u_{y_{i,j-1/2}} \exp(\text{Pe})_{i,j-1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i,j-1/2} - 1} + \frac{f_{M_1} u_{x_{i+1/2,j-1}} \exp(\text{Pe})_{i+1/2,j-1}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j-1} - 1} + \\
 &+ \frac{f_{M_1} u_{x_{i-1/2,j-1}}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j-1} - 1} \quad , \\
 A_{i+1,j+1} &= - \frac{f_{M_2} u_{x_{i+1/2,j+1}}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j+1} - 1} - \frac{f_{M_2} u_{y_{i+1,j+1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i+1,j+1/2} - 1} \quad , \\
 A_{i-1,j+1} &= - \frac{f_{M_2} u_{x_{i-1/2,j+1}} \exp(\text{Pe})_{i-1/2,j+1}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j+1} - 1} - \frac{f_{M_1} u_{y_{i-1,j+1/2}}}{\exp(\text{Pe})_{i-1,j+1/2} - 1} \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$A_{i-1,j-1} = -\frac{f_{M_1} u_{x_{i-1/2,j-1}} \exp(\text{Pe})_{i-1/2,j-1}}{\exp(\text{Pe})_{i-1/2,j-1} - 1} - \frac{f_{M_1} u_{y_{i-1,j-1/2}} \exp(\text{Pe})_{i-1,j-1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i-1,j-1/2} - 1},$$

$$A_{i+1,j-1} = -\frac{f_{M_2} u_{y_{i+1,j-1/2}} \exp(\text{Pe})_{i+1,j-1/2}}{\exp(\text{Pe})_{i+1,j-1/2} - 1} - \frac{f_{M_1} u_{x_{i+1/2,j-1}}}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j-1} - 1}.$$

A equação resultante para o bloco ij apresenta termos das variáveis no bloco ij e seus oito vizinhos, enquanto que o esquema tradicional de cinco pontos envolve apenas os vizinhos alinhados com os eixos coordenados. O esquema em questão não permite o fluxo direto entre uma célula ij e suas vizinhas diagonais, apesar de considerar a contribuição destas sobre a célula ij quando se faz a interpolação de fluxos nas faces. De acordo com a referência [1], a formulação cinco pontos conduz a resultados que exageram o fluxo ao longo das linhas da malha por não considerar a contribuição diagonal.

A utilização da regra de Simpson na integração tem como objetivo igualar o esquema em estudo ao esquema proposto por Yanosik & Mc Cracken [13] (Apêndice D) para fluxo puramente convectivo, o qual produz resultados bastante aceitáveis, quando aplicado à malha quadrada, meio isotrópico, fluxo monofásico e pequenos gradientes de pressão (Rocha [10]).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de se comparar a resposta do esquema proposto em relação aos esquemas tradicionais de diferenças finitas sob diferentes níveis relativos de convecção e difusão, simulou-se o transporte de traçador no modelo em questão, esquema cinco pontos, malha quadrada de orientação diagonal, refinamento de 15 blocos na direção x e 15 blocos na direção y , com a variação do número de Peclet. Após a injeção da metade do volume poroso, plotou-se o perfil de concentração ao longo da linha que une o bloco injetor ao produtor, cuja distância foi adimensionalizada em relação à diagonal da malha.

Para pequenos valores de Pe , obteve-se resposta com o esquema exponencial próxima da obtida com o diferenciamento central, considerado de maior precisão pela literatura para a condição de difusão predominante. Idêntico comportamento é reportado por Patankar [6] e Figueiredo [2]. Para tal situação, o esquema a montante apresenta resposta com maior dispersão numérica devido à ordem do erro de truncamento (figuras 3 e 4). Com o aumento da razão convecção-difusão ($Pe > 1$), verifica-se o problema numérico de oscilações com a utilização de diferenças centradas devido à instabilidade do método nesta condição de escoamento. As respostas apresentadas pelos esquemas a montante e exponencial não mostram tal deficiência, havendo elevado grau de coincidência nos resultados. Nesta situação, o esquema a montante é considerado eficiente na representação da distribuição de concentração no meio poroso (figuras 5 e 6), utilizando-se refinamento adequado.

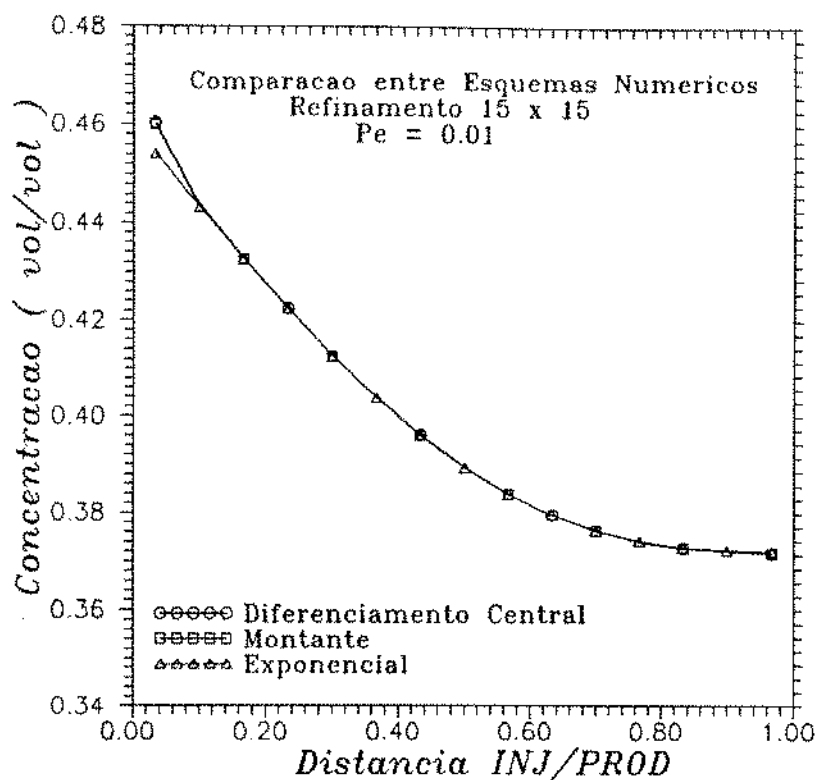


Figura 3: Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe = 0.01$.

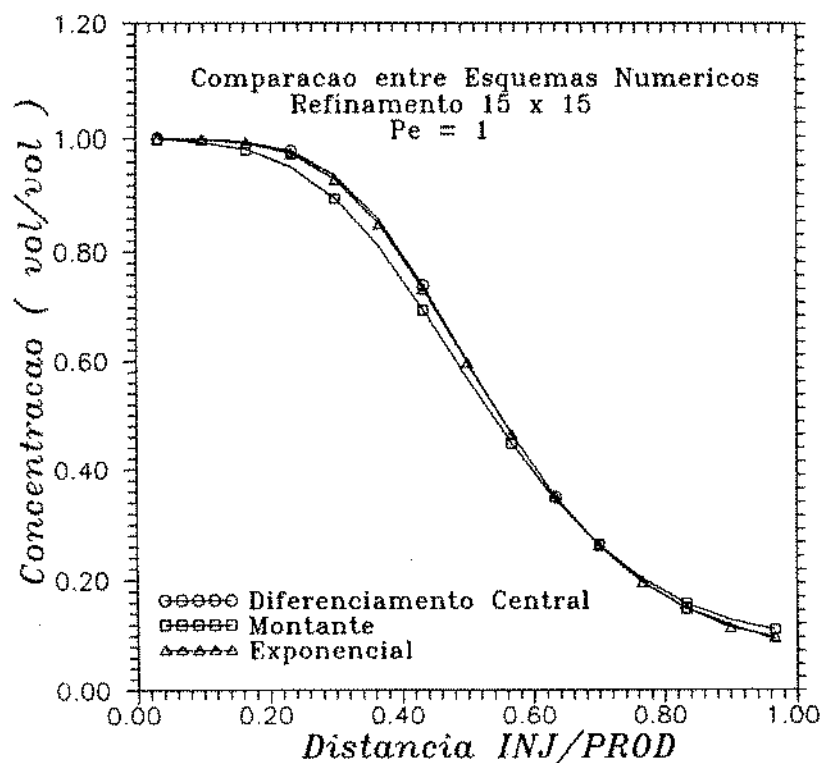


Figura 4: Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe = 1$.

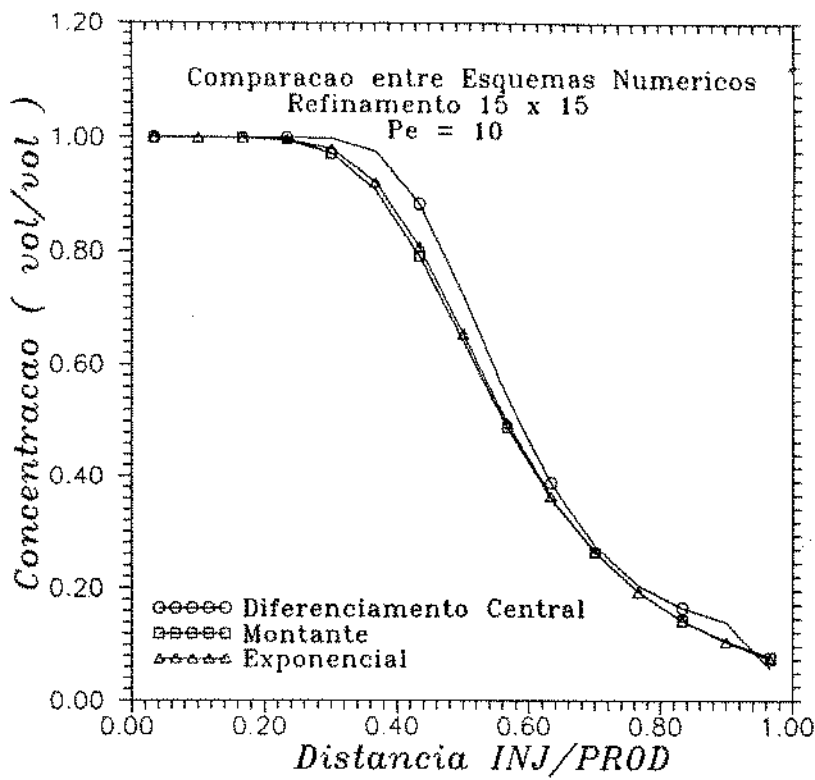


Figura 5: Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe=10$.

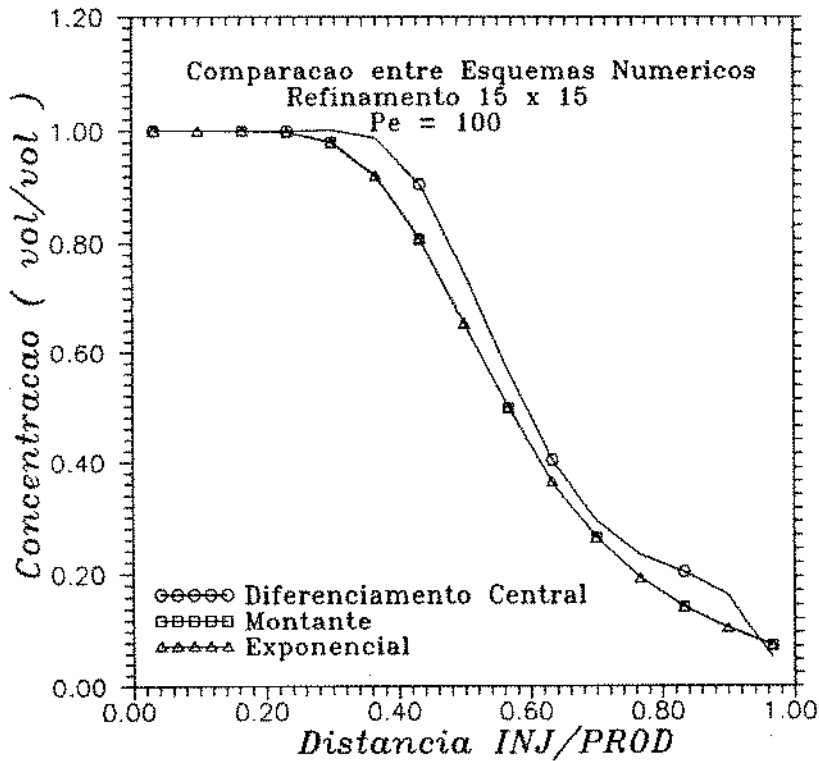


Figura 6: Comparação entre esquemas numéricos de 5 pontos. Malha diagonal e $Pe=100$.

Pelas figuras 7, 8, 9 e 10, comparam-se as respostas obtidas com a utilização do esquema exponencial de cinco pontos, variando-se o sistema de malha e o regime de escoamento. Verifica-se que na condição difusiva (figuras 7 e 8), obtêm-se resultados bastante próximos para as duas orientações da rede, podendo-se afirmar que o efeito de orientação de malha nesta condição de escoamento é negligenciável (Patankar [6]). Entretanto, em regime convectivo, observam-se resultados distintos com a mudança do sistema de malha (figuras 9 e 10).

A aplicação da discretização por nove pontos minimiza este efeito de orientação de malha, o que pode ser evidenciado nas figuras 11 e 12, obtendo-se resultados com elevado grau de concordância para os dois sistemas de rede, mesmo para altos valores do número de Peclet.

Por comparação do esquema de cinco pontos com relação ao de nove pontos (figuras 13, 14, 15 e 16), conclui-se que a variação da orientação dos eixos da malha influencia de maneira considerável a resposta do esquema de cinco pontos, na condição de convecção predominante e com o uso de malha paralela.

O efeito de orientação de malha para o esquema de cinco pontos em condição convectiva pode também ser verificado a partir da localização dos contornos de concentração obtidos nas malhas diagonal e paralela, após a injeção da metade de volume poroso (fig 17). Empregando-se o esquema proposto de nove pontos, há melhora nos resultados (fig 18), ou seja, obtêm-se uma maior proximidade entre as curvas de concentração constante das disposições paralela e diagonal.

Observaram-se dois problemas numéricos resultantes da utilização do esquema de nove pontos proposto. O primeiro é verificado quando a concentração de traçador no bloco ij atinge o valor da concentração de injeção . Pelo esquema, os fluxos totais entre a célula ij e suas vizinhas na orientação dos eixos seriam nulos, mas não necessariamente os fluxos obtidos por interpolação. Esta situação pode forçar a injeção de traçador, assumindo um valor de concentração em ij superior ao de injeção. Semelhante observação

foi reportada por Rocha [10], o qual adotou um procedimento de controle de concentração permitida por bloco, tendo como resposta erro no balanço material, considerado desprezível pelo autor. Adotando-se tal procedimento, obteve-se erro no balanço material em torno de 4%. Devido a este resultado, decidiu-se não utilizar tal controle de concentração por bloco, assumindo o problema apresentado como uma limitação do método, o que pode ser visualizado na figura 19, apresentando valores de concentração superiores à composição de injeção nas proximidades do bloco injetor.

O segundo problema ocorre simultaneamente ao primeiro, quando o processo convectivo é predominante. Há uma ligeira oscilação na resposta de concentração para os blocos que atingem a composição do traçador injetado, sendo verificada até se atingir um determinado valor, tornando-se, a partir de então, estável. Verificou-se que na matriz A dos coeficientes, os termos $A_{i+1,j}$ e $A_{i,j+1}$ são positivos, enquanto que, utilizando-se os esquemas de cinco pontos ou o de nove pontos com difusão predominante, estes termos são negativos. Isto explica o problema de convergência observado, uma vez que a matriz deixa de ser diagonalmente dominante. Segundo Patel & Markatos [7], tal instabilidade numérica deve-se ao fato de o esquema de nove pontos ser de ordem superior.

Outra observação com relação ao emprego do esquema de nove pontos é o favorecimento da injeção de traçador ao longo da diagonal da malha, em comparação ao comportamento obtido com o esquema de cinco pontos, sendo demonstrado pelas figuras 20, 21, 22 e 23.

Realizou-se uma análise de sensibilidade da resposta fornecida pelo esquema exponencial de cinco pontos com relação ao refinamento da malha (figuras 24, 25, 26 e 27). Não se verificou variação considerável nos resultados de forma a justificar a utilização de elevados níveis de refinamento, o que resultaria em acréscimo de esforço computacional.

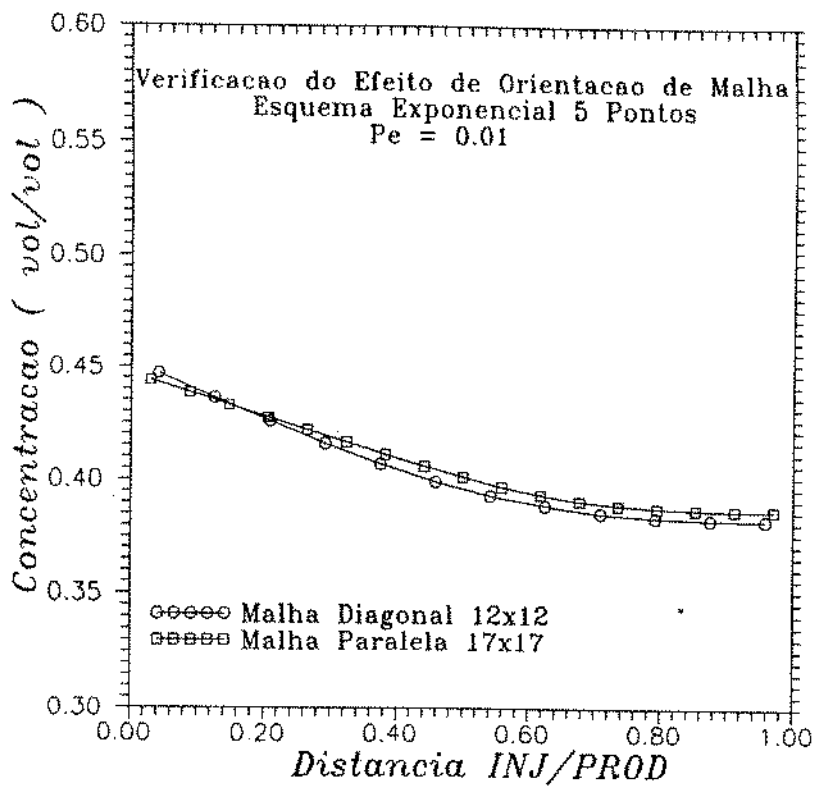


Figura 7: Verificação do efeito de orientação de malha. Distribuição de concentração ao longo da linha injetor/produtor. Esquema exponencial 5 pontos em regime difusivo.

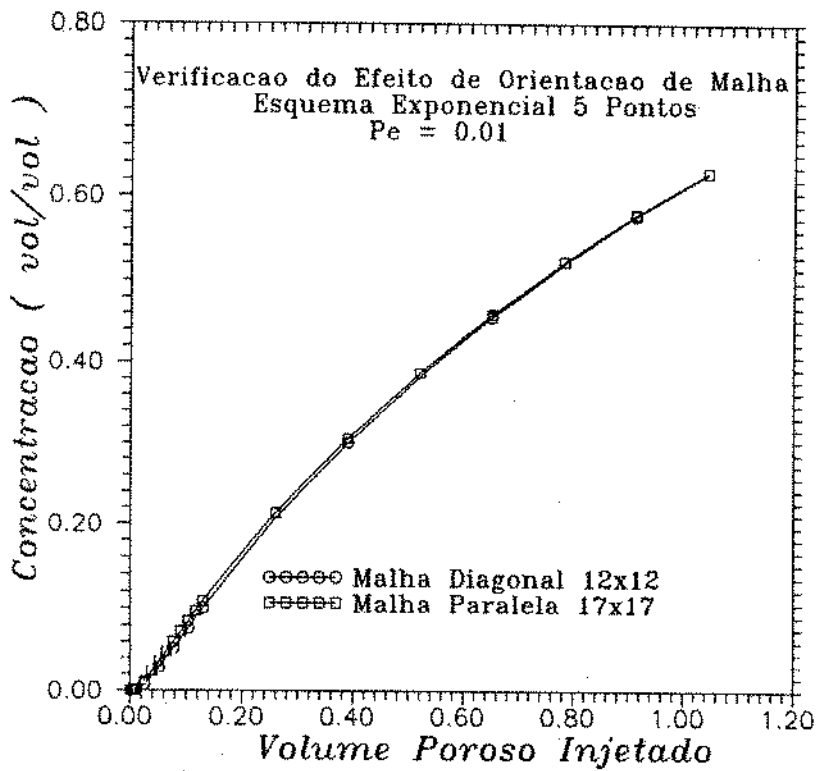


Figura 8: Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 5 pontos em regime difusivo.

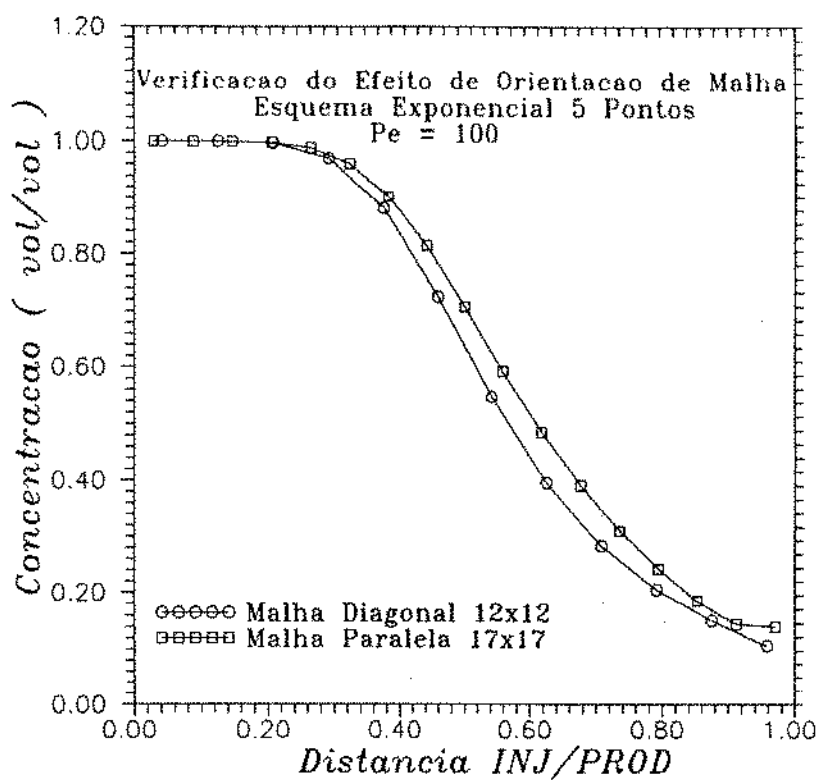


Figura 9: Verificação do efeito de orientação de malha. Distribuição de concentração ao longo da linha injetor/produzidor. Esquema exponencial 5 pontos em regime convectivo.

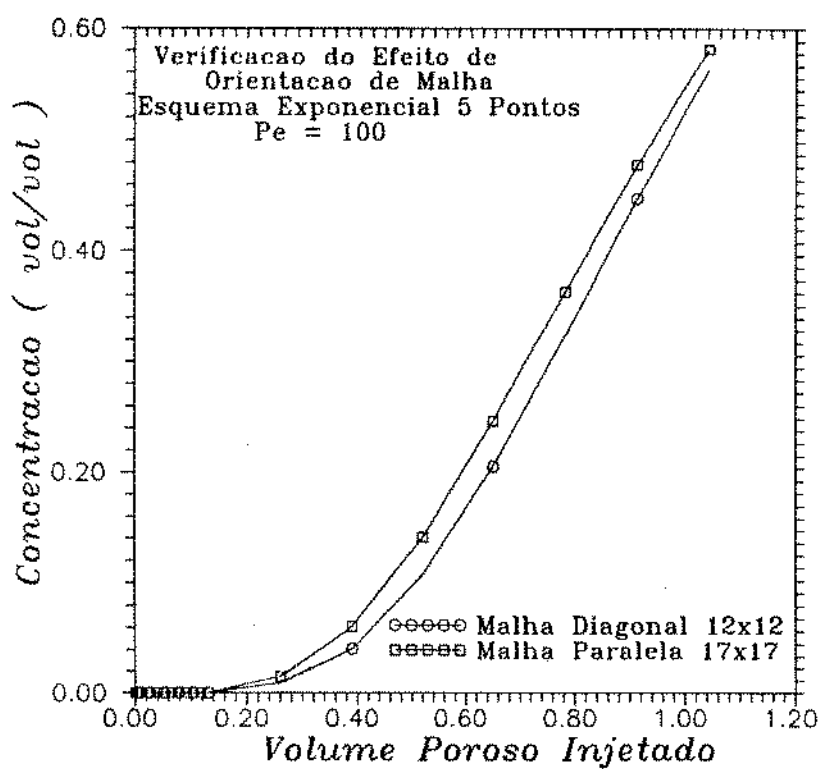


Figura 10: Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 5 pontos em regime convectivo.

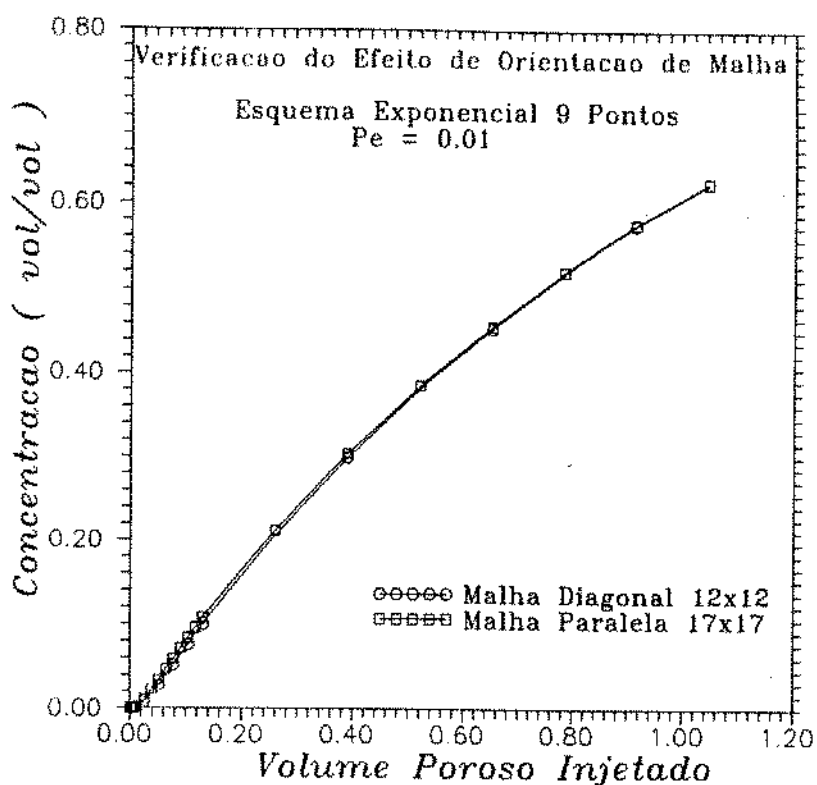


Figura 11: Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 9 pontos em regime difusivo.

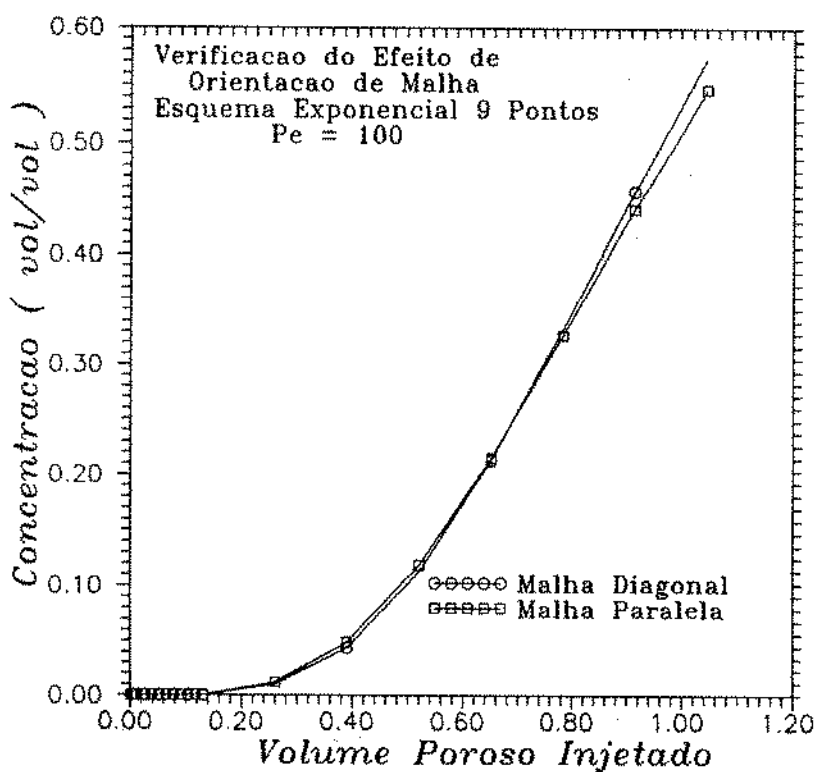


Figura 12: Verificação do efeito de orientação de malha. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Esquema exponencial 9 pontos em regime convectivo.

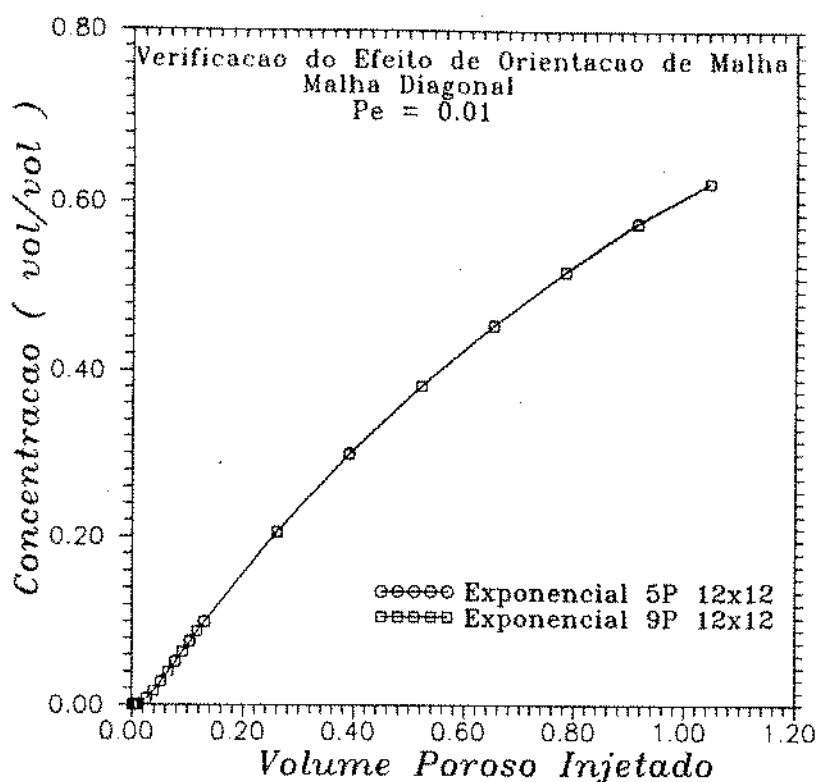


Figura 13: Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha diagonal em regime difusivo.

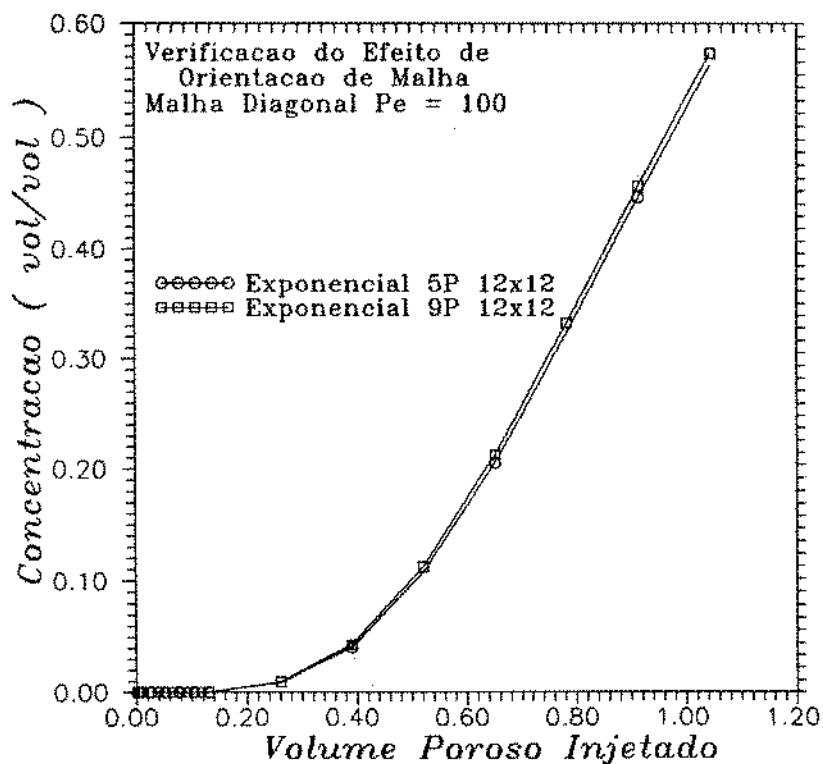


Figura 14: Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha diagonal em regime convectivo.

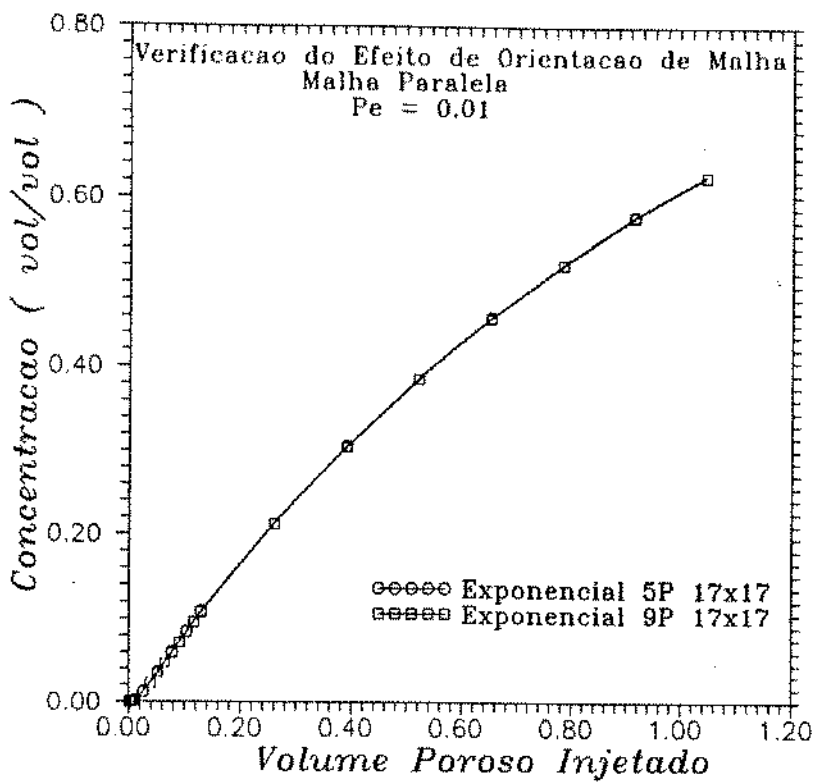


Figura 15: Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha paralela em regime difusivo.

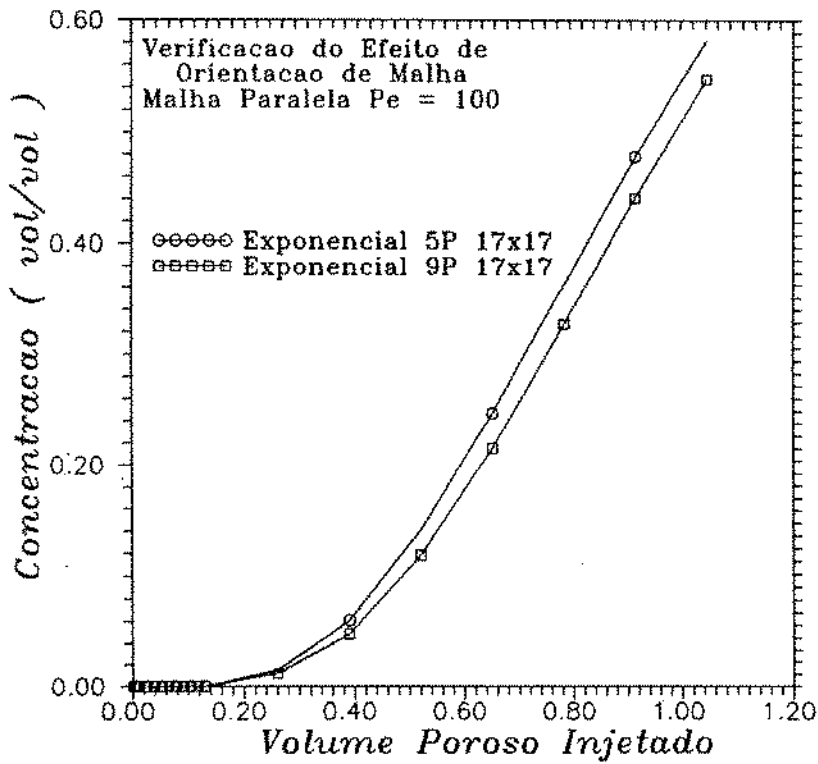


Figura 16: Comparação entre esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos. Variação da concentração de traçador no bloco de produção versus volume poroso injetado. Malha paralela em regime convectivo.

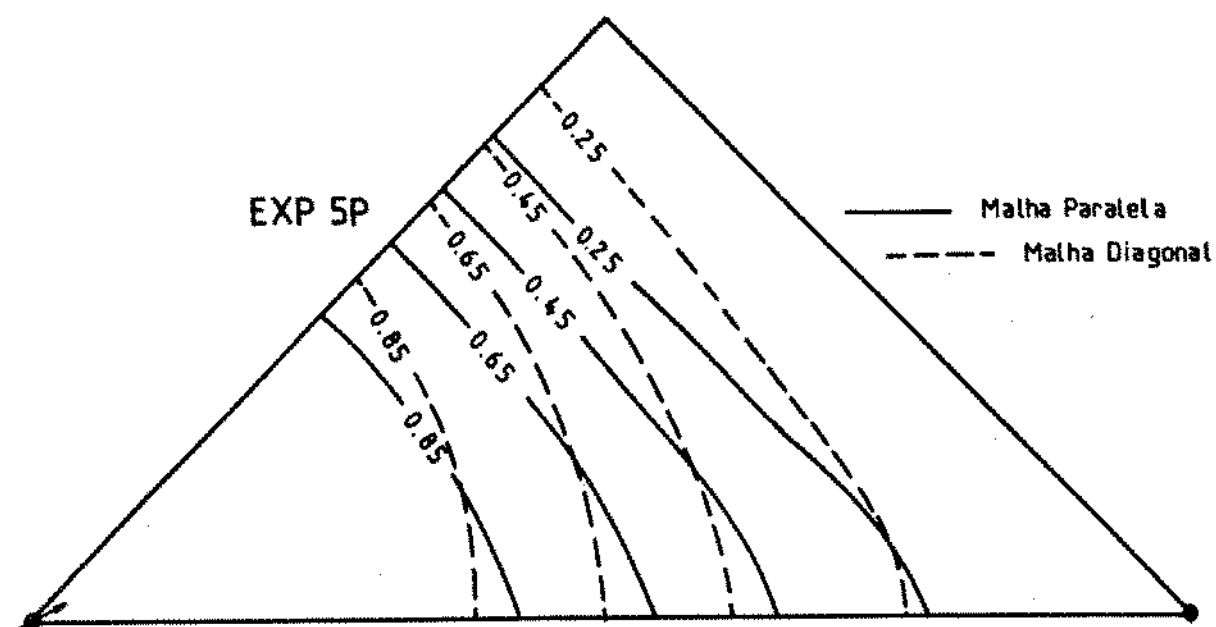


Figura 17: Comparação entre mapas de contorno de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e paralela 17x17. Esquema exponencial de 5 pontos.

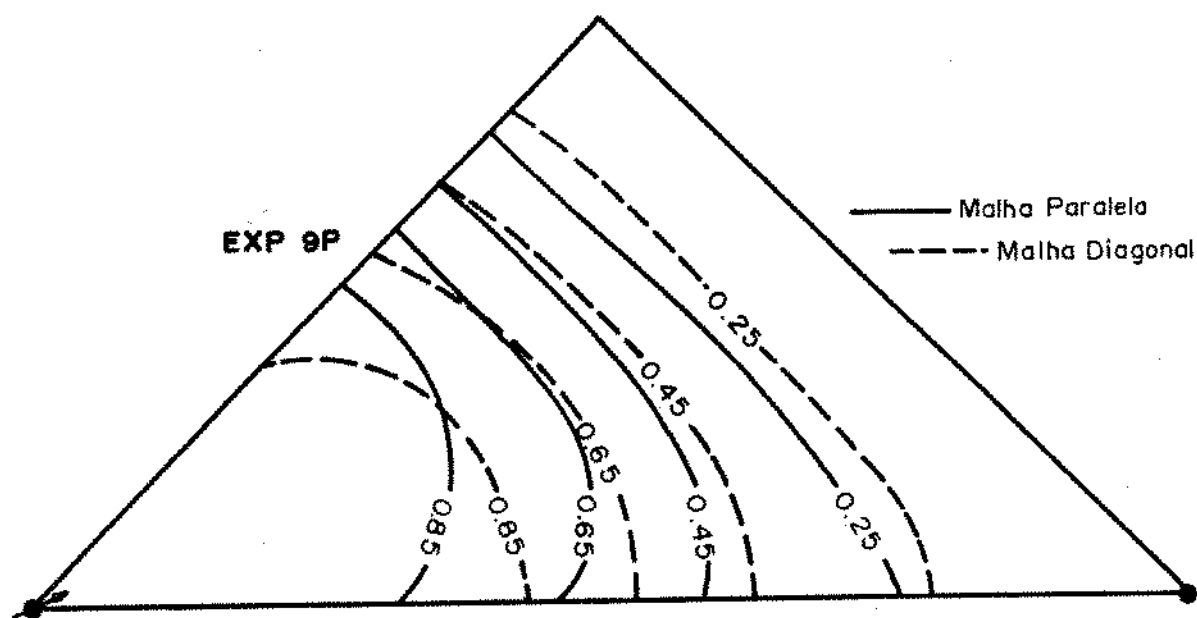


Figura 18: Comparação entre mapas de contorno de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e paralela 17x17. Esquema exponencial de 9 pontos.

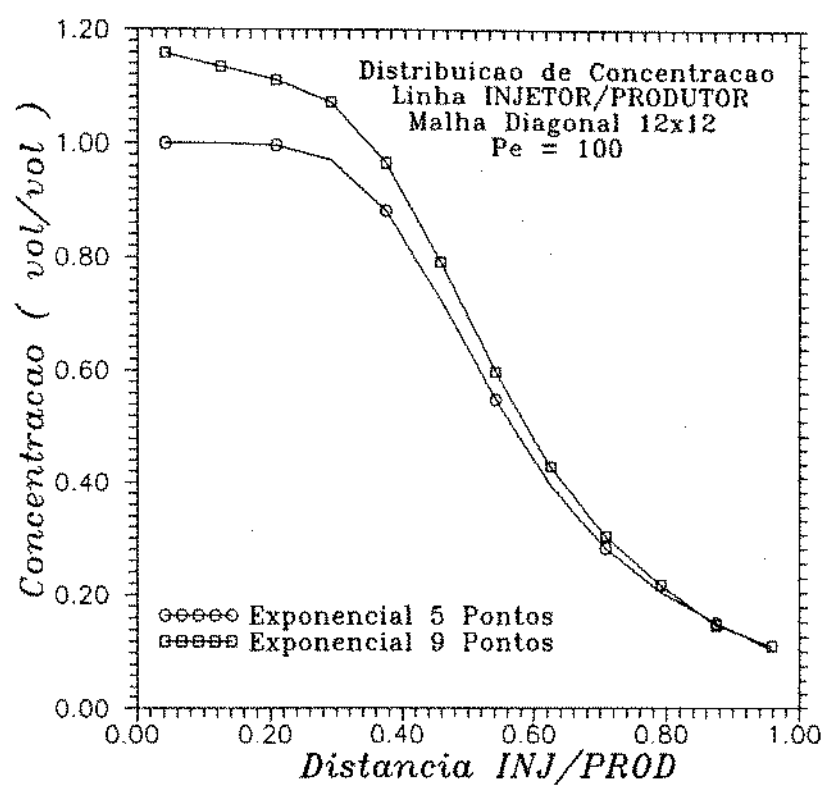


Figura 19: Comparação entre esquemas de 5 e 9 pontos. Distribuição de concentração ao longo da linha injetor/produtor. Malha diagonal 12x12. Regime convectivo.

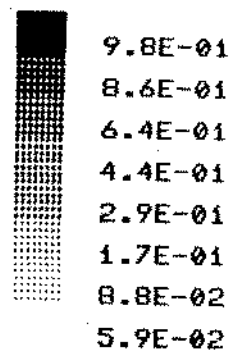
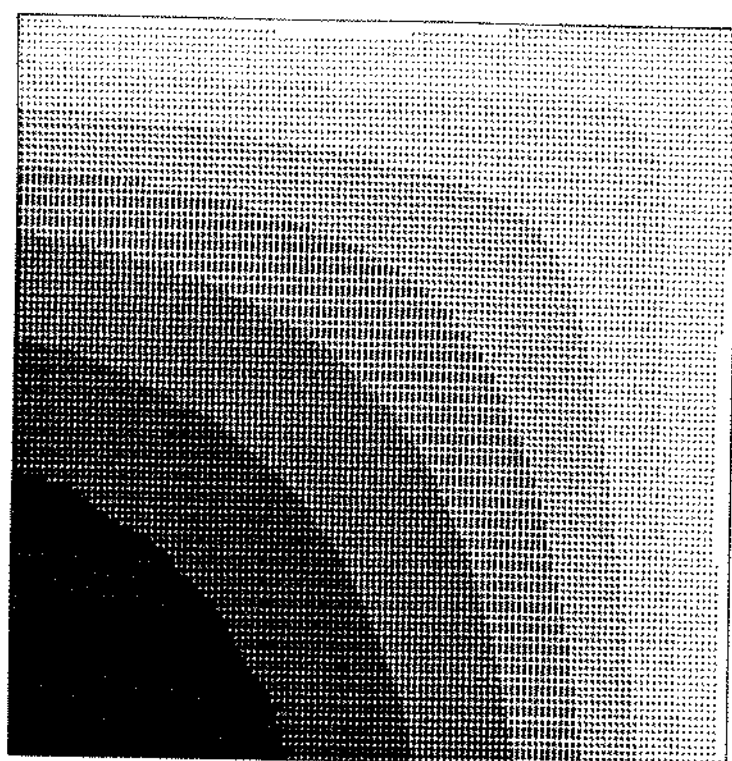


Figura 20: Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e $Pe = 100$. Esquema exponencial de 5 pontos.

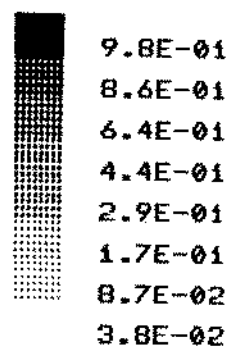
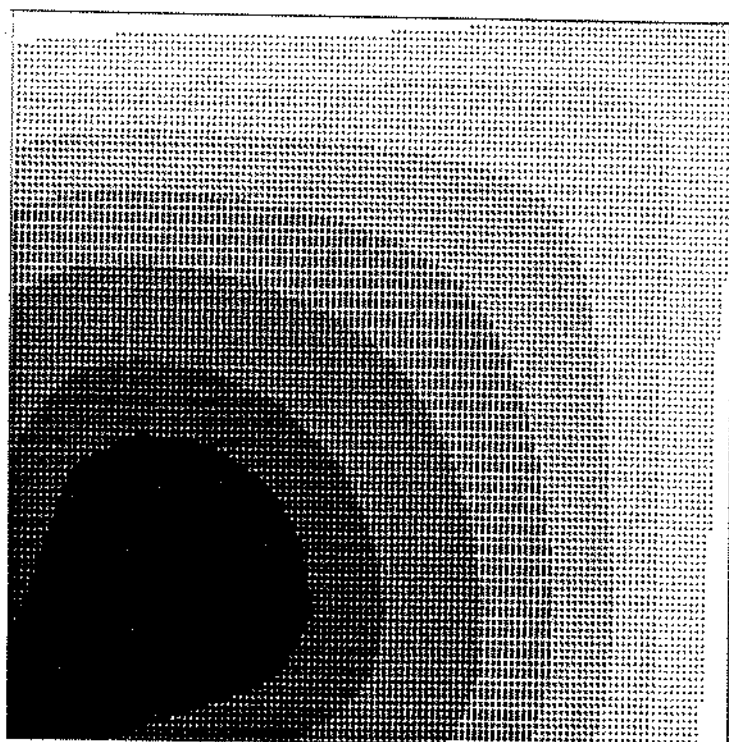


Figura 21: Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha diagonal 12x12 e $Pe = 100$. Esquema exponencial de 9 pontos.

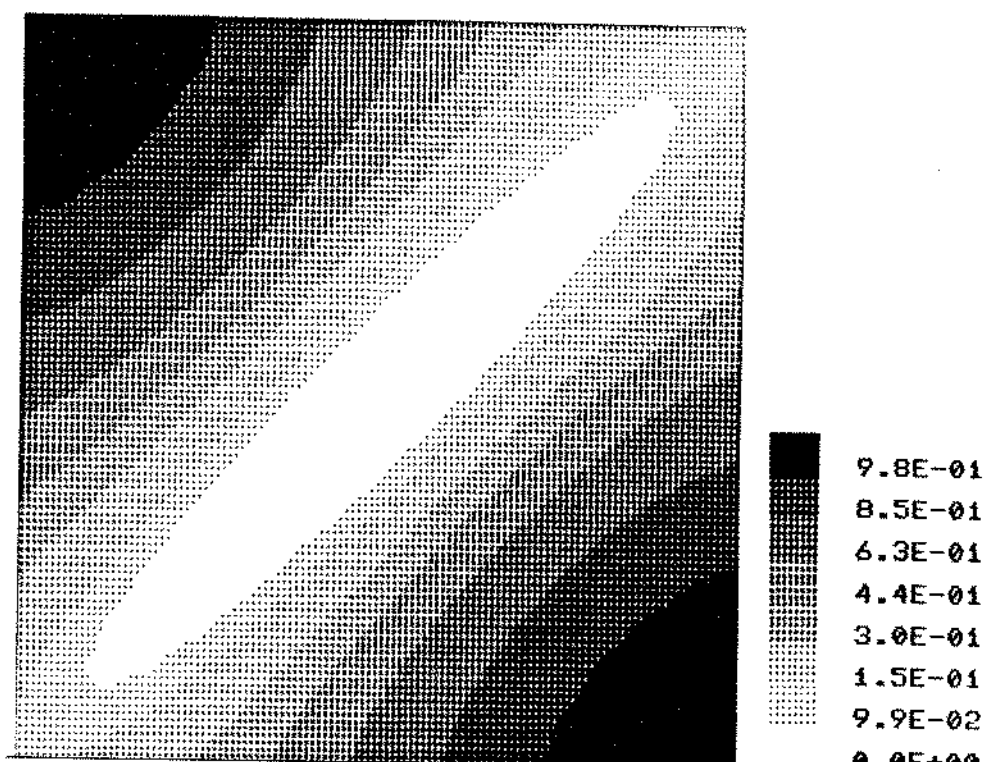


Figura 22: Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha paralela 17x17 e $Pe=100$. Esquema exponencial de 5 pontos.

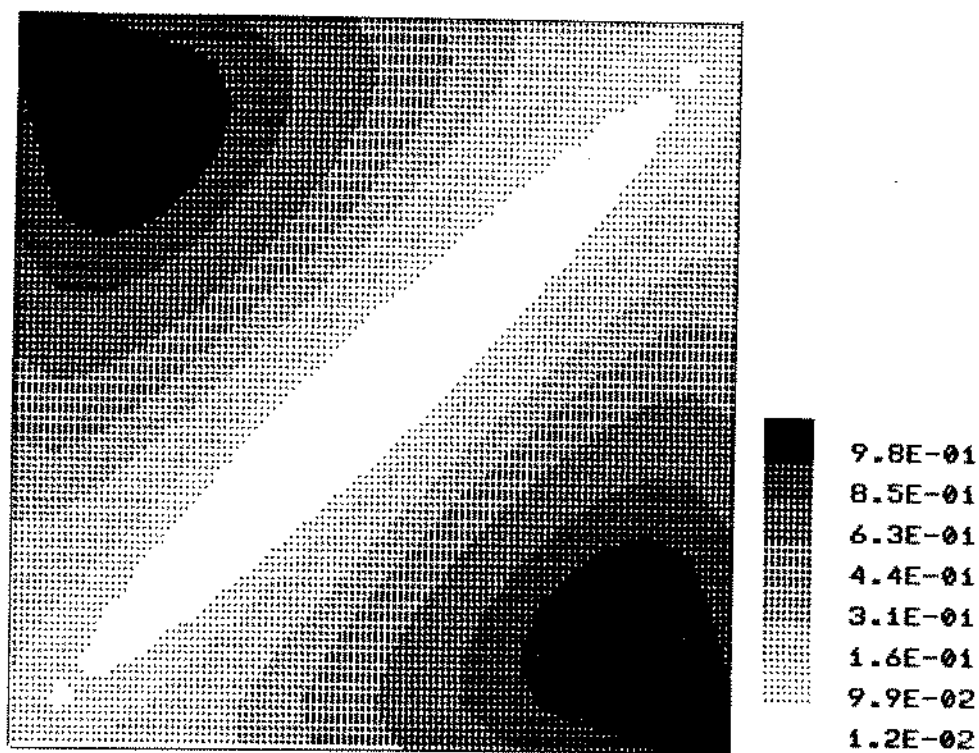


Figura 23: Mapas de concentração após injeção de metade do volume poroso. Malha paralela 17x17 e $Pe=100$. Esquema exponencial de 9 pontos.

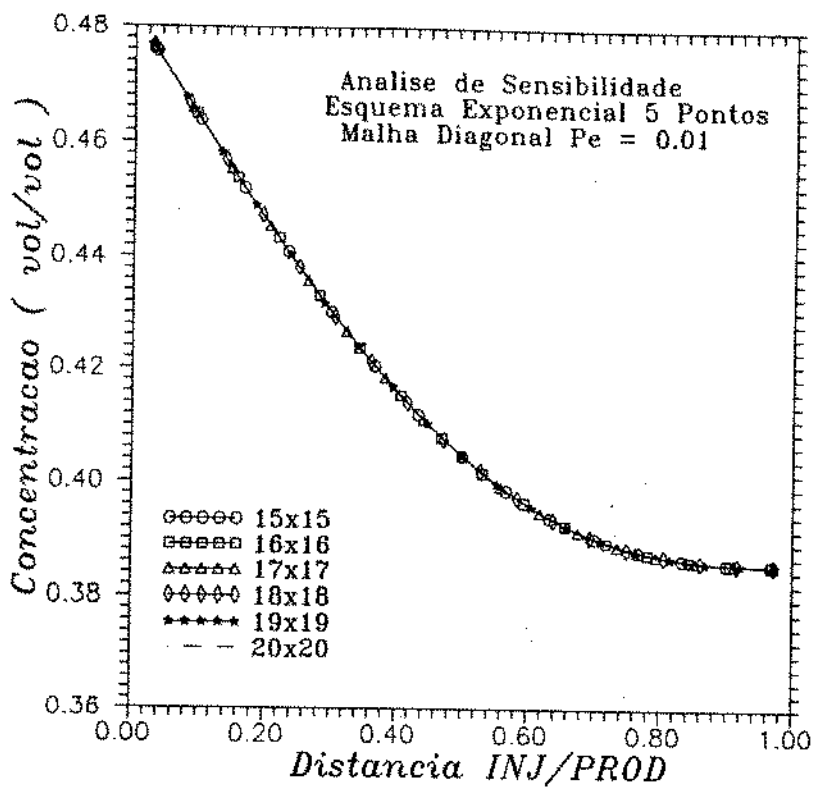


Figura 24: Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.

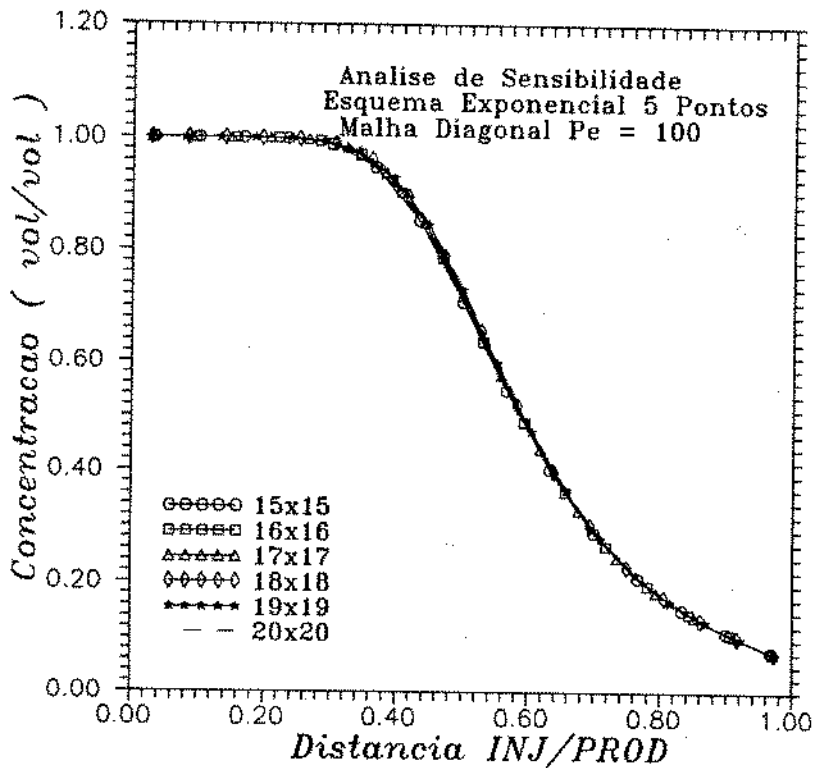


Figura 25: Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.

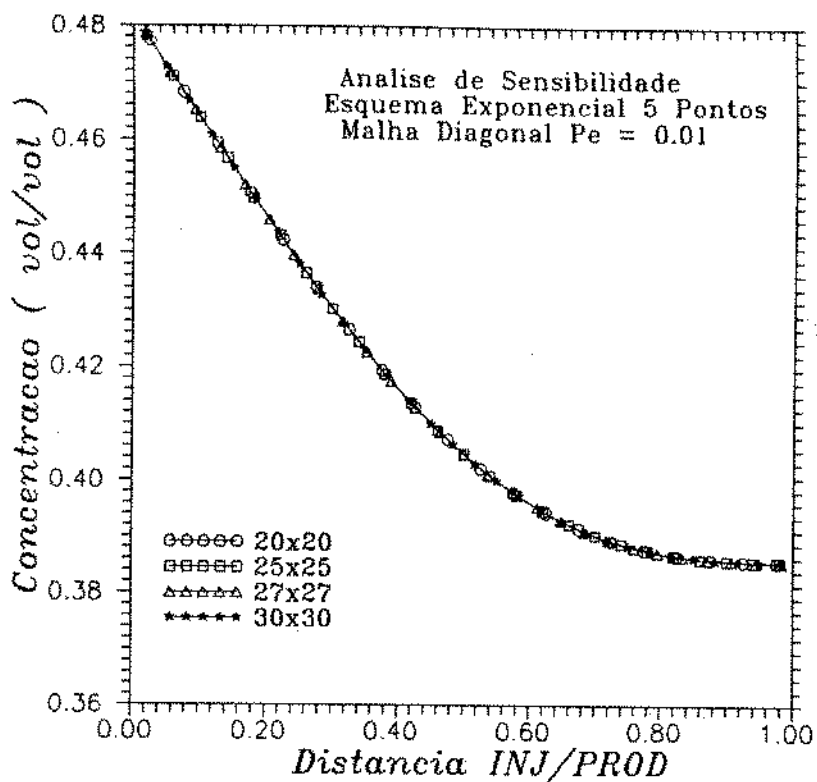


Figura 26: Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.

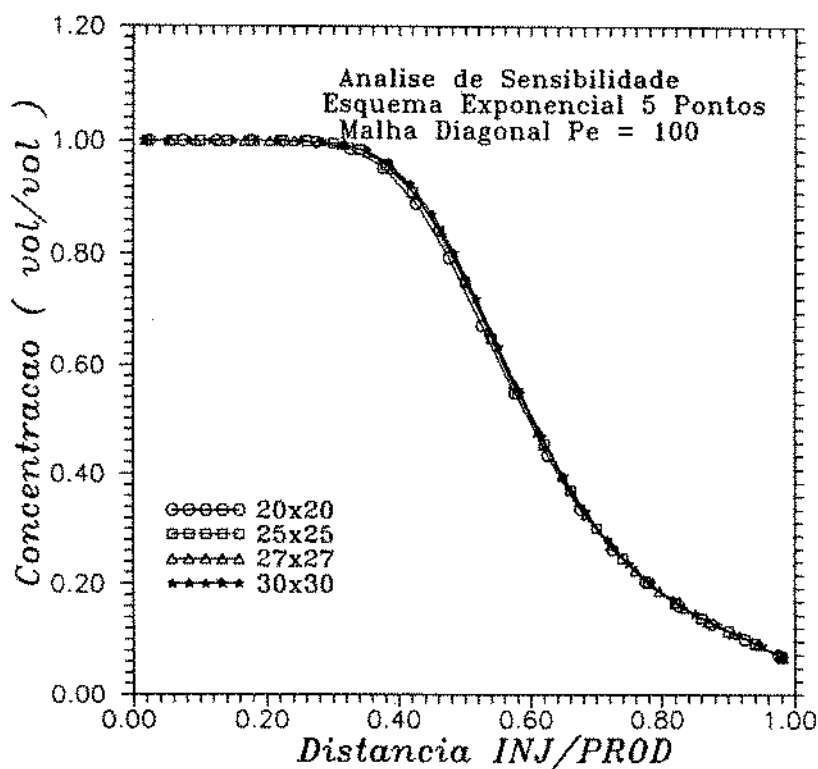


Figura 27: Análise de sensibilidade por variação do grau de refinamento. Malha diagonal.

5 VALIDAÇÃO

Com o objetivo de validar o modelo matemático e a eficiência do tratamento numérico proposto, montou-se um aparato experimental para a realização de ensaios de deslocamento miscível em meio poroso, em escala de laboratório.

O experimento realizado consistia na injeção de traçador em um meio poroso em regime permanente, medição e coleta dos dados de concentração efluente de fluido. Com a aquisição dos dados experimentais, realizou-se a comparação destes com os resultados de simulação numérica.

5.1 Descrição do Experimento

5.1.1 Esquema Experimental

O esquema montado está representado na figura 28. O sistema de fluxo foi constituído por uma bomba de vazão constante; garrafas verticais contendo o fluido de deslocamento e os injetados, água de formação e solução de traçador; uma válvula de três vias; o meio poroso, constituído por uma placa de arenito da formação Rio Bonito de geometria 1/4 do padrão de cinco poços; e a célula de medição que contém o eletrodo.

Utilizou-se uma bomba seringa de vazão constante, modelo ISCO LC-5000 .

O conjunto garrafas/válvula de três vias foi idealizado para se efetuar a injeção de dois fluidos de diferentes composições com o uso de uma única bomba, constituindo-se por três garrafas de acrílico (capacidade de um litro) e uma válvula de três vias. Água destilada era o fluido em contato com a bomba que deslocava óleo mineral (NUJOL) armazenado na garrafa *I*. Este funcionava como um pistão que tinha a função de deslocar a água de formação (garrafa *II*) ou solução de traçador (garrafa *III*), a depender da posição da válvula. Adotou-se como água de formação (satura o meio poroso) solução aquosa de cloreto de potássio (KCl) a 30000 ppm, e como traçador solução de KCl a

45000 ppm. Decidiu-se trabalhar com soluções de KCl devido às características de não reatividade e não absorção do sistema arenito/sal, e pelo fato de esta espécie química ser particularmente adequada para determinação via condutividade elétrica.

Conectou-se ao sistema de injeção um transdutor de pressão VALIDYNE modelo CD 23 para o acompanhamento da fase transiente (injeção de água de formação), e verificação do momento em que se atingia o regime permanente para o início da injeção de traçador. A calibração do referido transdutor foi realizada com um manômetro de mercúrio conectado em paralelo. Instalou-se um manômetro na linha da garrafa de traçador com a finalidade de verificar a ocorrência de possíveis variações de pressão durante a injeção de traçador.

Determinava-se a composição do fluido na saída do meio poroso por medida de condutividade elétrica da solução na célula de medição, com a utilização de um conjunto eletrodo/condutivímetro comerciais PROCYON modelo 88. O sinal analógico enviado pelo aparelho era transformado em sinal digital por uma placa analógica/digital, A/D, com entradas para 16 canais A/D e saídas de 2 canais D/A, instalada em microcomputador PC/XT 8 Mhz. Adaptou-se o programa desenvolvido por Portella [9] para a monitoração de aquisição de dados. Pode-se ter uma melhor visualização do esquema montado através das figuras 29, 30 e 31.

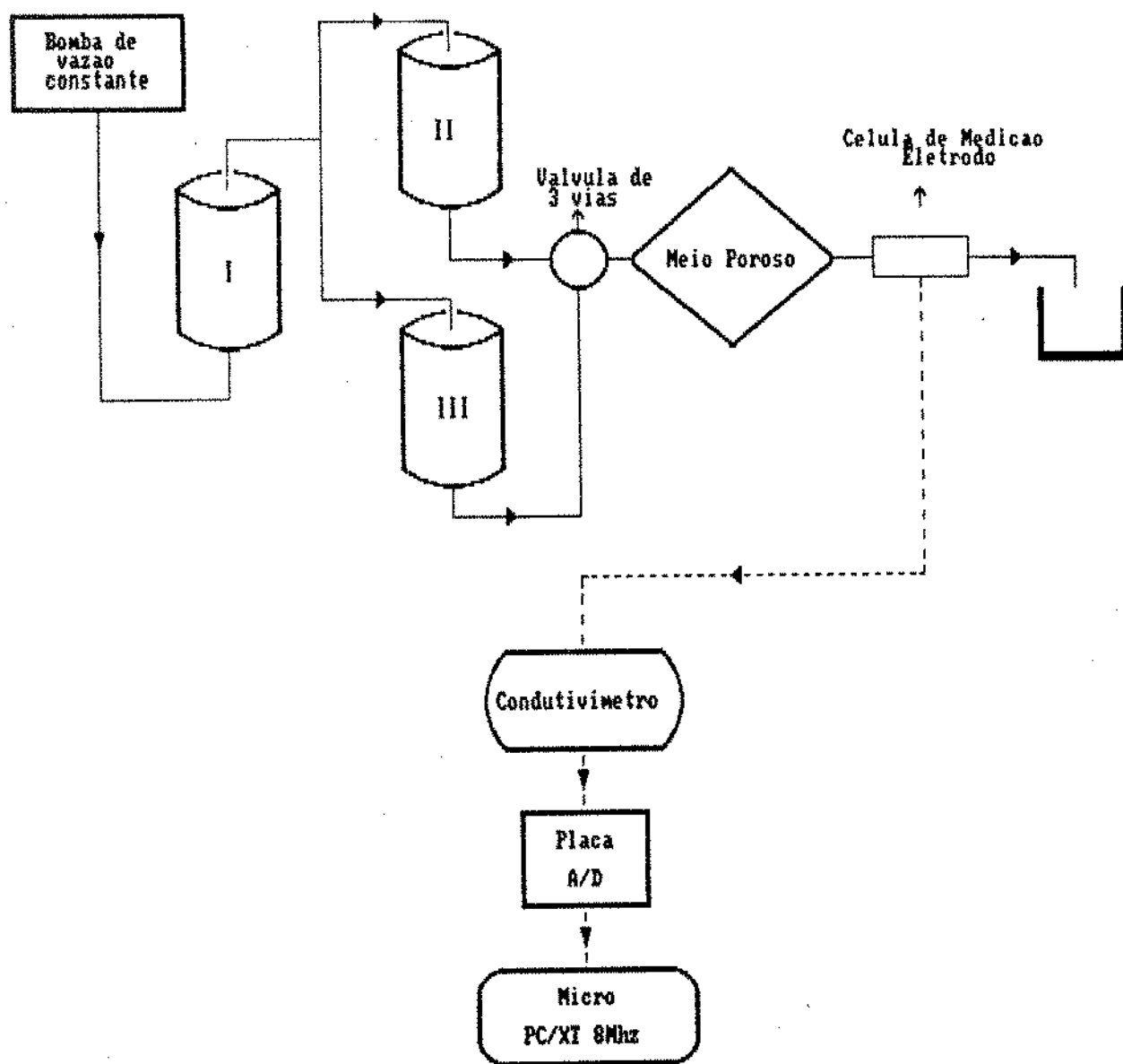


Figura 28: Esquema Experimental

Iniciava-se o ensaio de deslocamento miscível com a injeção de água de formação no meio poroso previamente saturado, com o acompanhamento da queda de pressão pela leitura do transdutor. Ao atingir o regime permanente, injetava-se a solução de traçador por alinhamento da garrafa *III* com o meio poroso com o posicionamento da válvula de três vias. Nesta mudança de fluido injetado, tomava-se o cuidado de equilibrar a pressão hidrostática nas duas linhas de injeção, evitando-se com tal procedimento a alteração do campo de pressões estabelecido. Dava-se início à coleta de dados de concentração efluente.

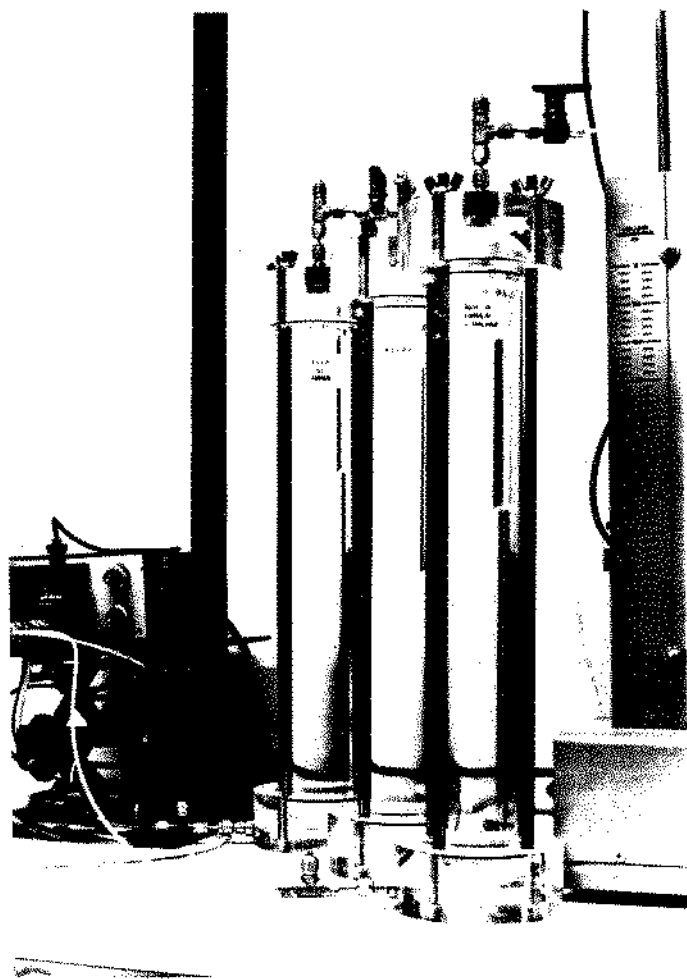


Figura 29: Sistema de Injeção

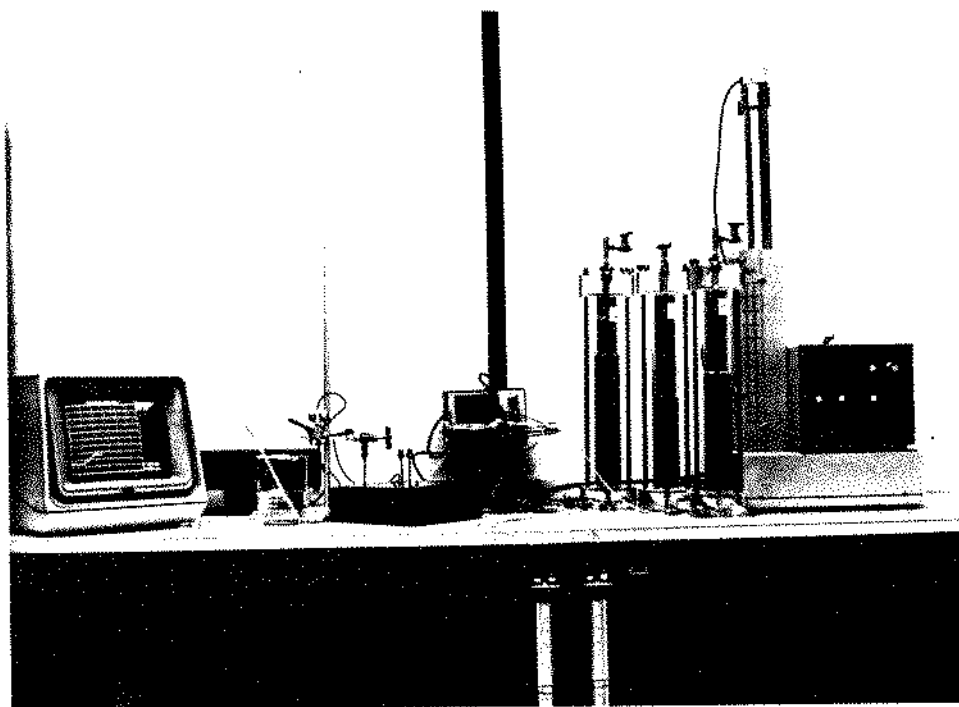


Figura 30: Aparato Experimental

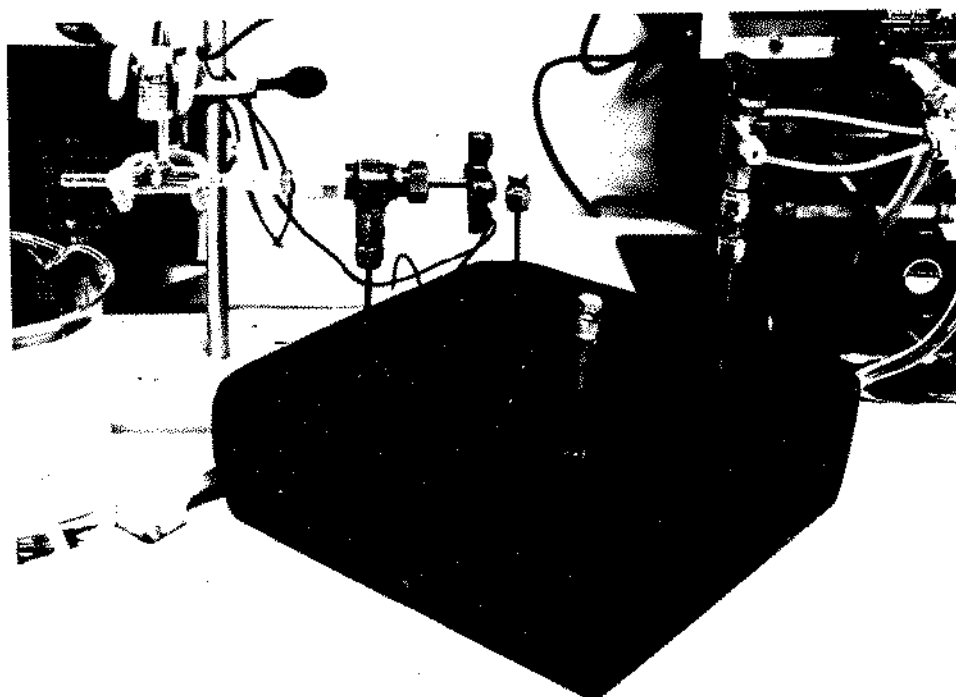


Figura 31: Meio Poroso Encapsulado

5.1.2 Meio Poroso

O meio poroso utilizado era constituído por uma placa do afloramento Rio Bonito, arenito consolidado, de dimensões 0.15x0.15x0.0203 m (figura 32). A referência [11] contém descrições petrográficas de testemunhos da formação.

Com o intuito de se eliminar material orgânico e evitar possíveis problemas de inchamento de argilas na fase de saturação, realizou-se tratamento térmico a 600° C. Acredita-se que este procedimento não seja eficiente na questão do inchamento de argilas, além de haver a possibilidade de surgimento de finos.

Perfuraram-se quatro poços localizados nos vértices da placa ($r_w = 0.50 * 10^{-2}$ m), conseguindo-se uma distância mínima de 0.01 m das paredes devido ao risco de fraturas. Não se revestiram os poços perfurados, sendo adaptados a estes quatro tubos de aço de $0.3175 * 10^{-2}$ m (1/8") de diâmetro e 0.08 m de comprimento. Efetuou-se a impermeabilização e encapsulamento do meio com resina epoxi.

Determinou-se a porosidade do meio por expansão de gás e por saturação com solução aquosa de KCl a 30000 ppm (água de formação), obtendo-se uma porosidade média de 17.75% e volume poroso de $81.05 * 10^{-6}$ m³.

A permeabilidade à solução salina foi obtida por verificação da queda de pressão apresentada em injeção à vazão constante. Aplicando-se o valor da diferença entre as pressões de injeção e produção na equação de Muskat [5], equação (3.6), chegou-se aos resultados apresentados na tabela 2.

sentido injeção → produção	Permeabilidade $*9.869 * 10^{-14}$ m ² (1 md)
poços 1 → 2	327.30
poços 2 → 1	519.09
poços 3 → 4	153.70

Tabela 2: Resultados de Permeabilidade do Meio Poroso

Como não havia conhecimento da resistência à pressão da resina epoxi utilizada no encapsulamento, não se determinou a permeabilidade no sentido 4 → 3, uma vez que não houve estabilização da queda de pressão em níveis considerados de segurança ($1.013 * 10^5$ Pa). Segundo Rodrigues [11], a ocorrência de tal fato pode estar associada a um problema de migração de finos em conjunto com uma variação granulométrica, com obstrução dos poros neste sentido de injeção/produção. Adotou-se o sentido 2 → 1 para a realização dos testes de injeção de traçador, sendo o valor de permeabilidade verificado a cada ensaio.

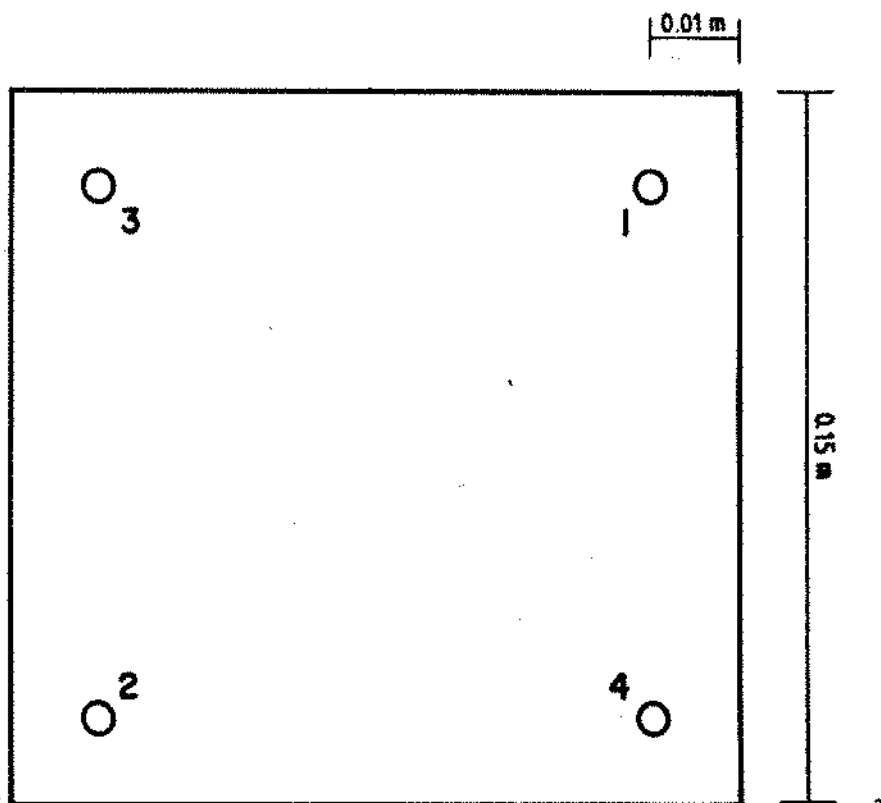


Figura 32: Meio Poroso

5.1.3 Medida da Concentração Efluente

A composição do fluido na saída do meio poroso era determinada por medida de condutividade com um sistema eletrodo/condutivímetro comercial.

Utilizava-se o método direto de medição, ou seja, por comparação das leituras de voltagem fornecidas pelo condutivímetro com uma curva de calibração, sendo esta obtida fazendo-se a leitura de várias soluções de concentração conhecida, a uma determinada temperatura. O intervalo de concentrações das soluções de KCl usadas foi de 10000 ppm a 50000 ppm. O sinal enviado pelo aparelho era amplificado a fim de se trabalhar entre os limites de leitura 0 a 5 V, uma vez que a placa instalada para a conversão analógico/digital tinha uma faixa de medição de -5 V a 5 V. Obtinha-se, portanto, uma melhor resolução na resposta, sendo que uma variação de $9.7 * 10^{-3}$ V (precisão da placa) correspondia a uma variação de 100 ppm. Trabalhando-se com tal sensibilidade, não houve problemas em relação à continuidade da curva de concentração efluente.

Verificou-se o comportamento logarítmico da resposta do sistema (voltagem) com a variação da concentração, figura 33. Observando-se a dependência do sinal enviado com a temperatura, realizou-se a calibração das leituras a diferentes temperaturas para cada valor de concentração, variando-se linearmente (figura 34). Desta forma, alterava-se a curva de calibração "concentração X voltagem" com a variação de temperatura do ensaio.

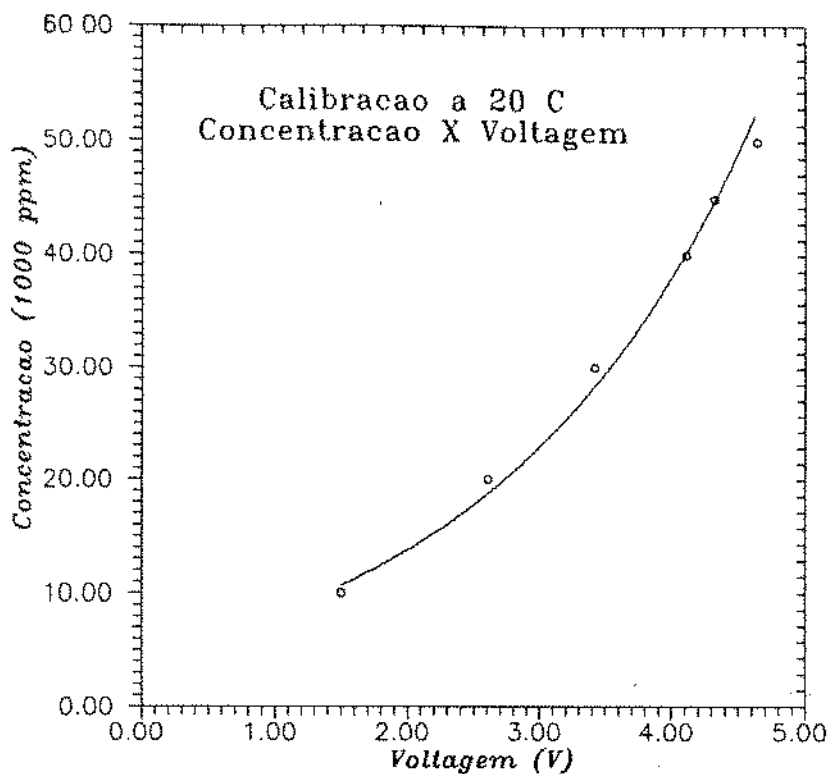


Figura 33: Calibraçao "Concentraçao versus Voltagem"

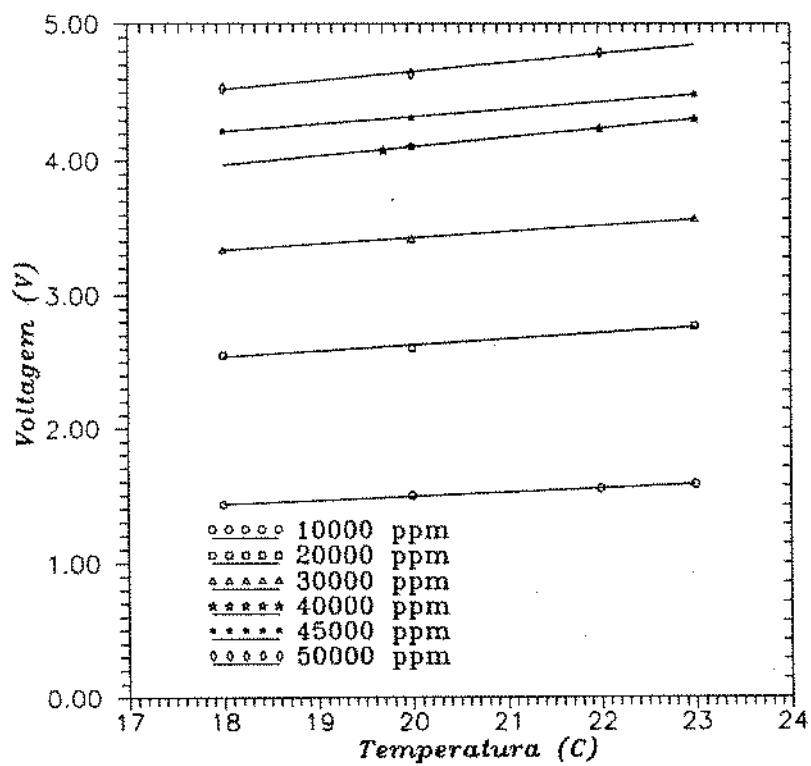


Figura 34: Calibraçao "Voltagem versus Temperatura"

O controle de coleta, conversão, visualização e armazenamento das leituras era efetuado por um programa em Pascal obtido por adaptação do programa desenvolvido por Portella [9], utilizando-se a frequência de uma coleta de dados a cada cinco segundos. O fluxograma do programa resultante está representado na figura 35, e sua listagem encontra-se no Apêndice E.

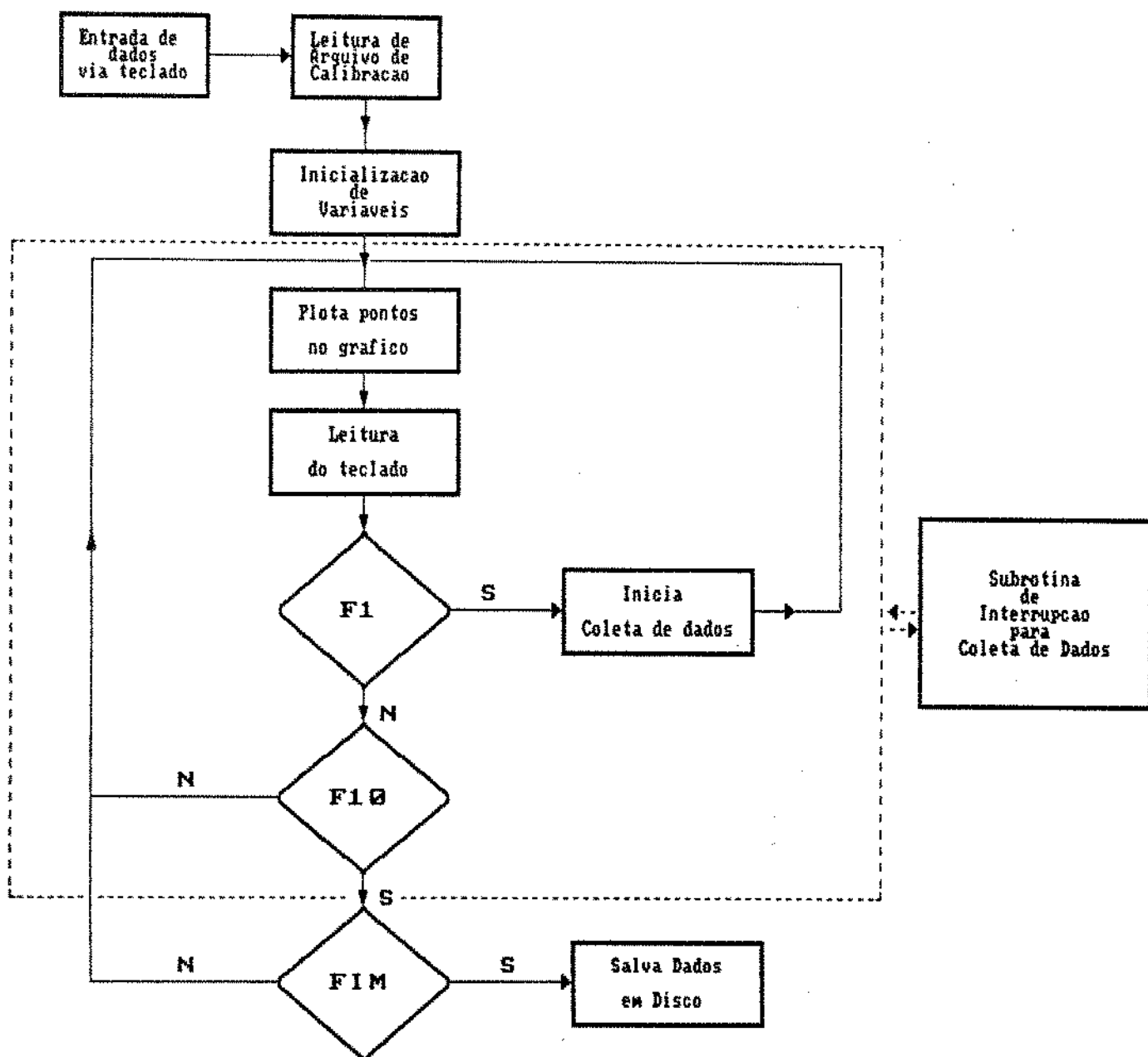


Figura 35: Fluxograma do programa de aquisição de dados

5.2 Resultados Experimentais e Numéricos

Realizaram-se testes de injeção contínua e injeção em banco de traçador no meio poroso, com aquisição de dados de concentração efluente em intervalo de tempo correspondente a dois volumes porosos injetados, efetuando-se uma leitura a cada cinco segundos. Os testes de injeção em banco consistiam na introdução de um volume estabelecido de traçador, com posterior deslocamento do fluido injetado por água de formação. Partindo-se da condição inicial de saturação do meio poroso com traçador, acompanhou-se a evolução da concentração efluente com a injeção de água de formação, sendo este teste classificado como injeção contínua reversa. Os experimentos estão especificados nas tabelas (3) e (4).

Identificação	Especificação
Teste 1	injeção contínua
Teste 2	injeção em banco (pulso = 40% volume poroso)
Teste 3	injeção contínua
Teste 4	injeção contínua
Teste 5	injeção em banco (pulso = 37% volume poroso)
Teste 6	injeção contínua
Teste 7	injeção em banco (pulso = 27% volume poroso)
Teste 8	injeção contínua reversa

Tabela 3: Testes Experimentais Realizados

Identificação	Queda de pressão $*1.013 * 10^5$ Pa (1 atm)	Permeabilidade $*9.869 * 10^{-14}$ m ² (1 md)	Vazão $*2.78 * 10^{-10}$ m ³ /s (cm ³ /h)
Teste 1 (fig 36)	0.015	519.09	15
Teste 2 (fig 37)	0.015	519.09	15
Teste 3 (fig 38)	0.015	519.09	15
Teste 4 (fig 39)	0.028	549.76	30
Teste 5 (fig 40)	0.028	549.76	30
Teste 6 (fig 41)	0.021	501.75	20
Teste 7 (fig 42)	0.021	501.75	20
Teste 8 (fig 43)	0.015	519.09	15

Tabela 4: Parâmetros dos Testes Experimentais Realizados

O sistema idealizado garrafas/válvula de 3 vias mostrou-se eficiente com relação à possibilidade de deslocamento de fluidos de diferentes composições por utilização de uma única bomba, sem prejuízos ao grau de continuidade do escoamento. Entretanto, as curvas experimentais apresentam alguns pontos que caracterizam as etapas críticas envolvidas na realização dos ensaios, sendo estas conseqüências da mudança de fluido injetado por posicionamento da válvula de três vias. Na fase inicial da injeção de traçador verifica-se um desequilíbrio na resposta, apesar do cuidado em se igualar as pressões hidrostáticas nas duas linhas ao se efetuar a mudança de fluido injetado. O mesmo é observado nos ensaios de injeção em banco, na fase de interrupção da introdução de traçador no meio poroso. Variações de temperatura e possíveis oscilações na rede elétrica podem ter contribuído de forma negativa durante a realização dos experimentos.

A validação do método numérico desenvolvido é efetuada por comparação dos dados experimentais com os resultados obtidos com a utilização dos esquemas exponenciais de 5 e 9 pontos, malha diagonal com refinamento 20 x 20. Considerou-se que o sistema apresentava um fator de compressibilidade total igual a $7.25 * 10^{-10}$ Pa⁻¹, fluidos com viscosidade de $1 * 10^{-3}$ Pa.s e, como dispersividade do meio poroso, adotou-se o valor $0.115 * 10^{-2}$ m. Este último parâmetro foi obtido experimentalmente, por realização de

ensaios de injeção do traçador cloreto de potássio em meio poroso constituído por arenito Rio Bonito, em geometria linear.

Graficamente verifica-se elevado grau de concordância entre as curvas experimentais e numéricas, o que também pode ser evidenciado por cálculo do desvio padrão do erro relativo e fator de correlação (tabela 5).

Identificação	Desvio Padrão do Erro Relativo (%)		Fator de Correlação	
	exp 5 P	exp 9 P	exp 5 P	exp 9 P
TESTES				
Teste 1	2.456	2.004	0.9979	0.9982
Teste 2	2.683	2.557	0.9822	0.9855
Teste 3	1.795	1.254	0.9989	0.9993
Teste 4	1.989	2.420	0.9968	0.9957
Teste 5	1.927	2.220	0.9885	0.9872
Teste 6	2.151	2.817	0.9977	0.9966
Teste 7	1.467	1.801	0.9912	0.9877
Teste 8	2.187	2.260	0.9973	0.9973

Tabela 5: Comparação entre Resultados Experimentais e Numéricos

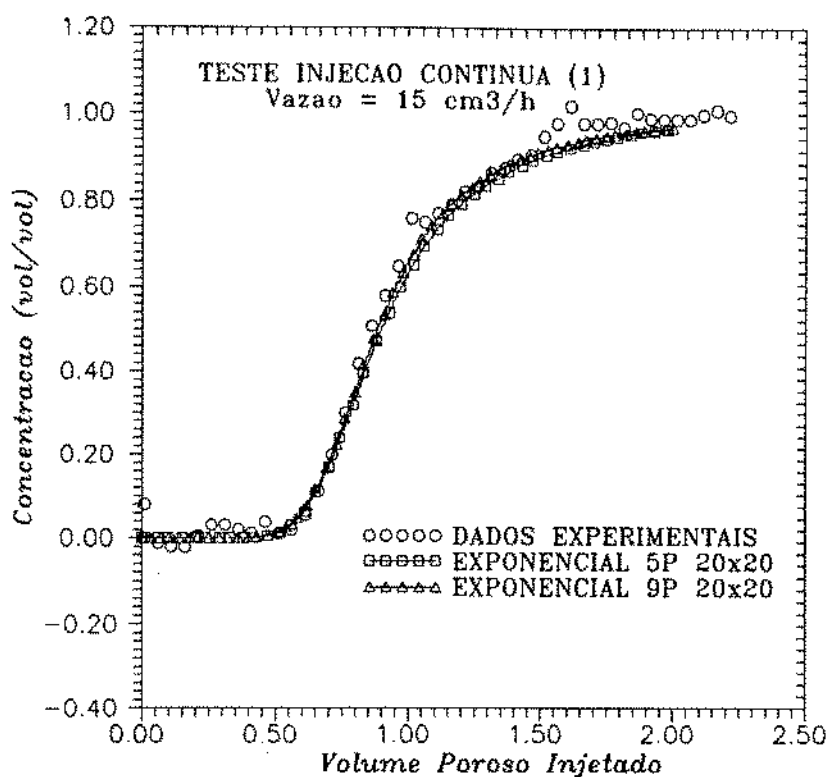


Figura 36: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 1

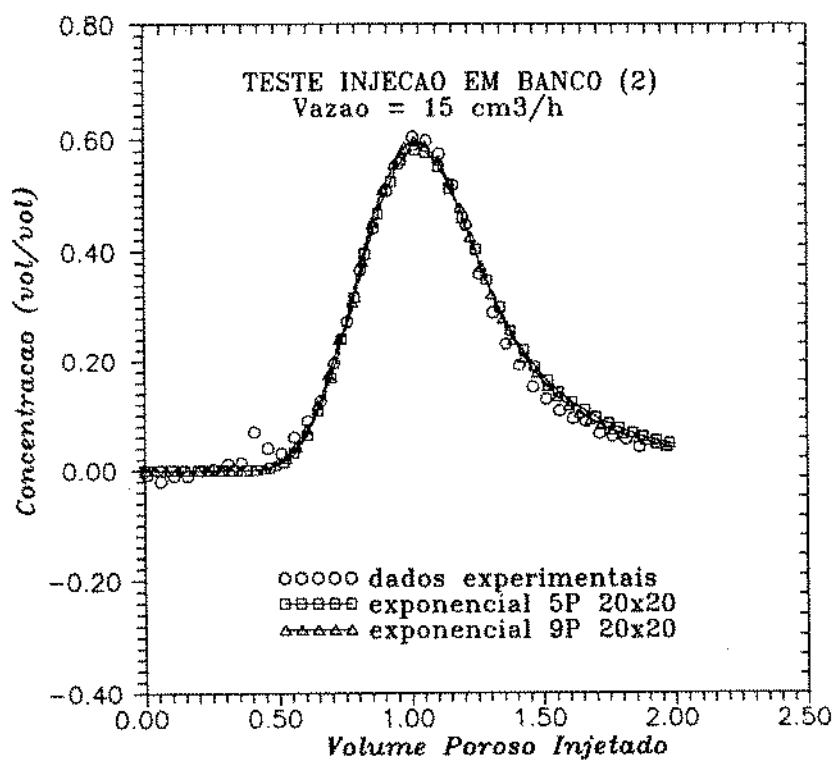


Figura 37: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 2

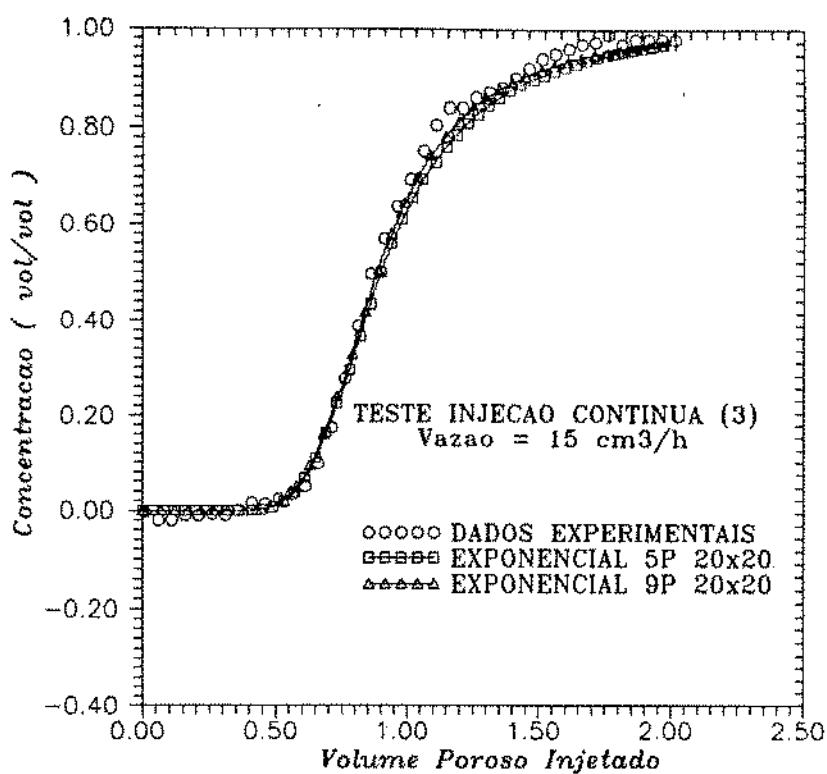


Figura 38: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 3

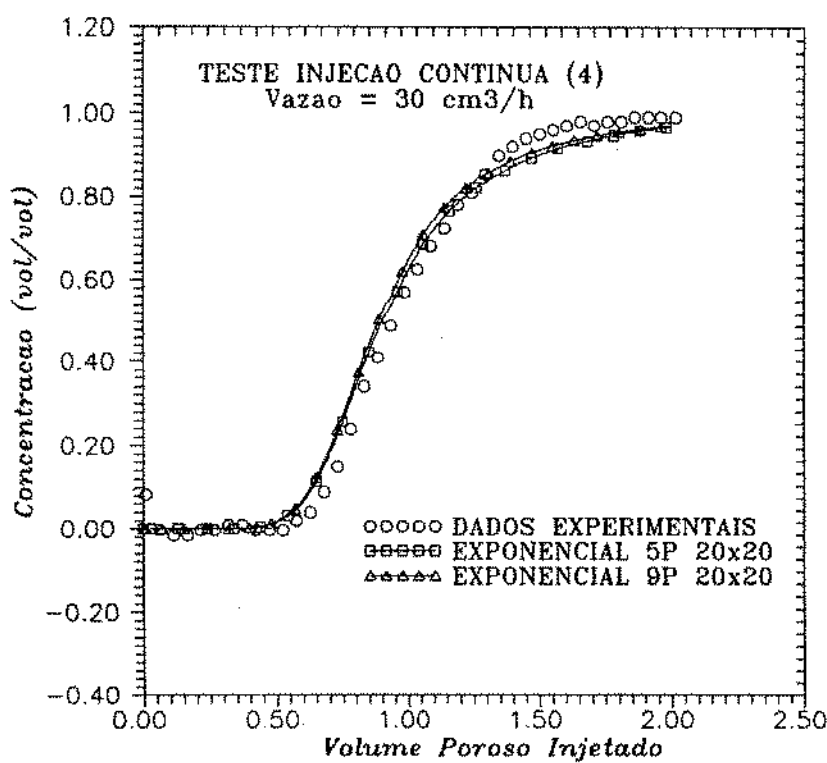


Figura 39: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 4

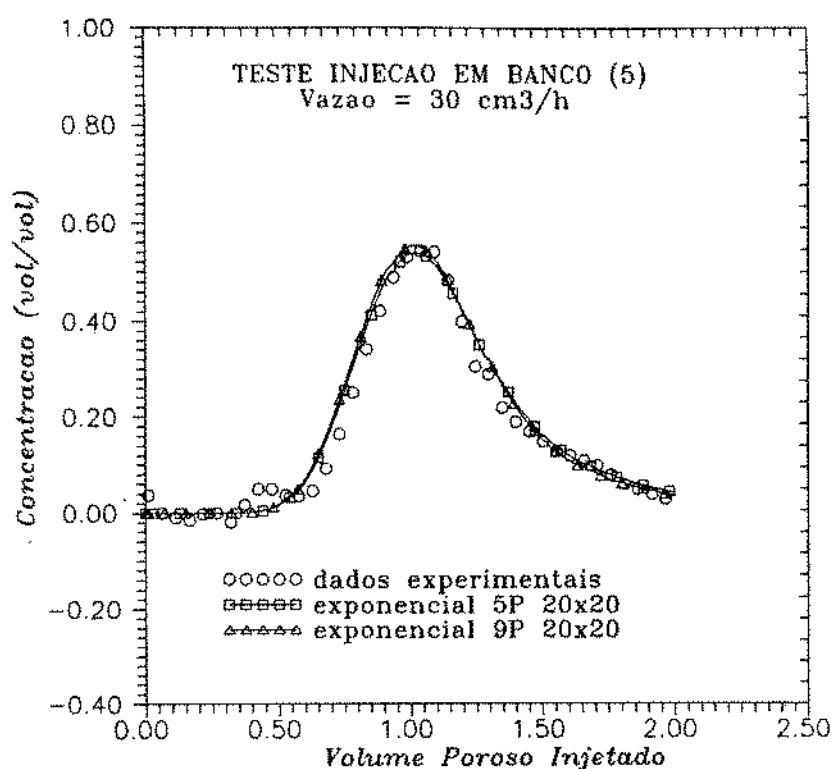


Figura 40: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 5

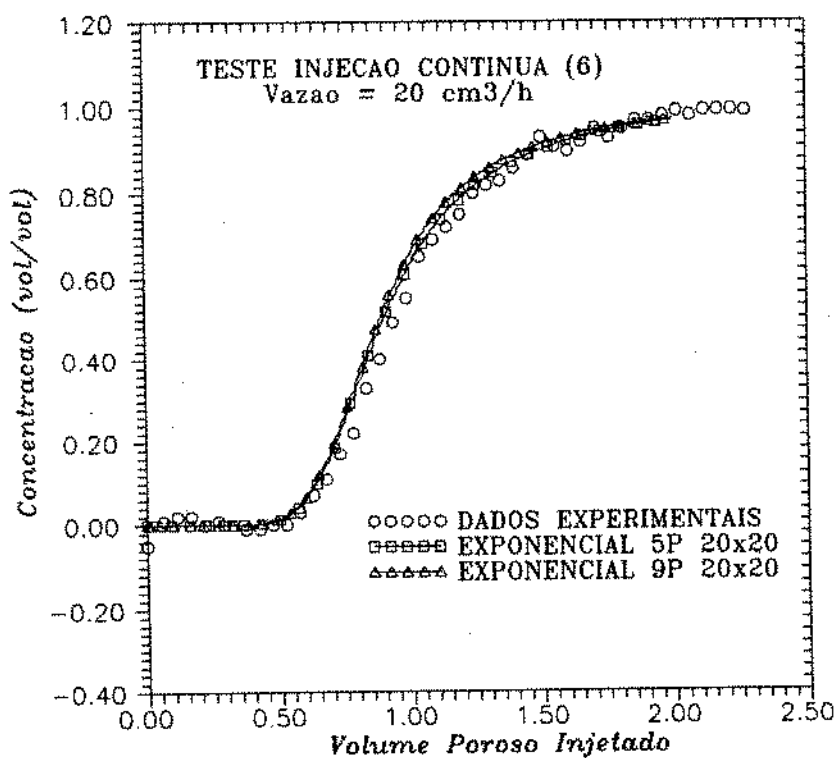


Figura 41: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 6

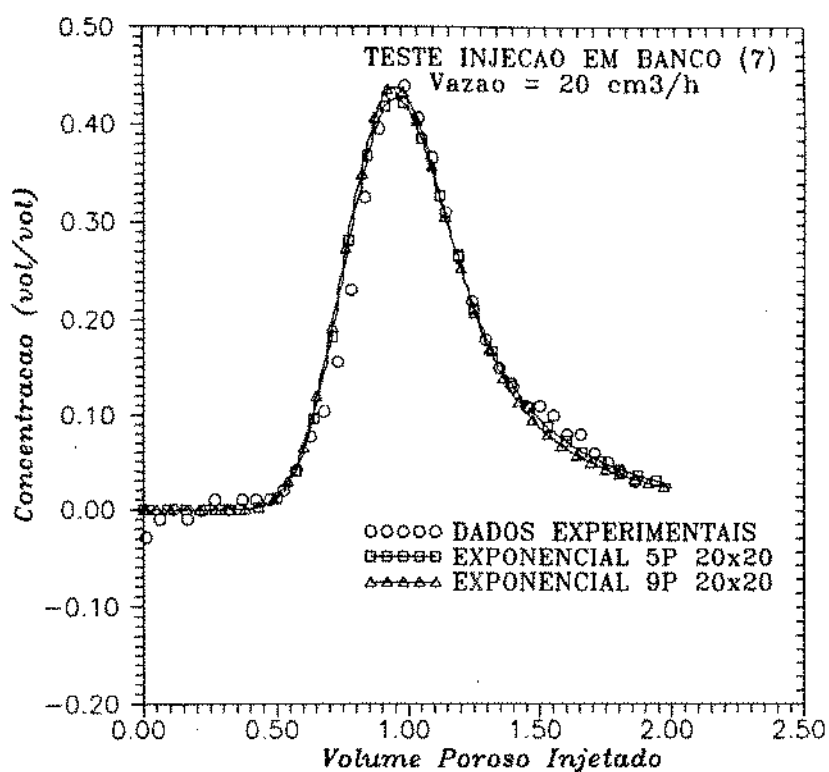


Figura 42: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 7

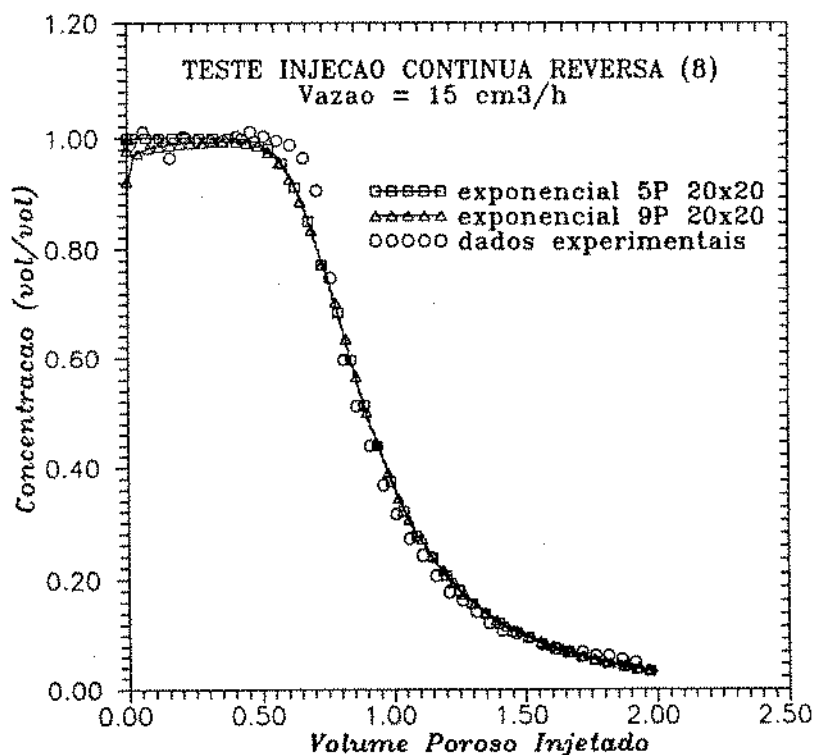


Figura 43: Comparação entre resultados numéricos e experimentais . Concentração efluente versus Volume poroso injetado. Teste 8

6 CONCLUSÕES

Uma nova proposta de tratamento numérico por diferenças finitas para a equação de Difusão-Convecção em problema bidimensional foi apresentada para a simulação de deslocamento miscível em meios porosos.

O esquema numérico foi comparado com outros usualmente utilizados, sendo comprovada a eficiência da proposta sob diferentes níveis de convecção e difusão. Foi demonstrado que a modelagem do escoamento com convecção predominante, através do esquema referido, não introduz as dificuldades numéricas normalmente encontradas por técnicas tradicionais, tais como oscilações e instabilidades, minimizando o grau de dispersão numérica e efeito de orientação de malha por utilização do esquema de nove pontos.

Compararam-se as respostas obtidas pelos esquemas exponenciais de cinco e nove pontos, com variação do sistema de malhas e regime de escoamento. Demonstrou-se que o efeito de orientação dos eixos da rede com relação à direção do escoamento incide significativamente sobre o resultado fornecido pelo esquema de discretização por cinco pontos, com o emprego da malha paralela na representação do padrão de cinco poços.

Trabalhou-se com a condição de razão de mobilidades unitária. Como sugestão, seria interessante a análise do efeito de orientação de malha considerando-se a variação desta razão de mobilidades, e ampliação do estudo para outros padrões de injeção.

Validou-se o esquema numérico desenvolvido pelo elevado grau de concordância entre os resultados experimentais e numéricos. Estes últimos foram obtidos por emprego de um valor para a dispersividade do meio poroso obtido experimentalmente, realizando-se ensaios de injeção de traçador em modelos lineares constituídos por arenito da formação Rio Bonito. Segundo Menzie [4], este parâmetro é uma característica do meio poroso, havendo variação com relação ao grau de heterogeneidade do testemunho. Por este motivo,

no desvio padrão do erro relativo, calculado para a validação, deve-se considerar uma contribuição resultante desta consideração.

Nos testes experimentais, trabalhou-se com uma velocidade de deslocamento no meio poroso em torno de 1 pé/dia ($3.527 \cdot 10^{-6}$ m/s), injetando-se a solução de traçador a uma vazão de 15 cm³/h ($4.17 \cdot 10^{-9}$ m³/s), testes 1, 2, 3 e 8. Nesta condição, obteve-se melhor resposta de simulação numérica com o esquema de nove pontos em relação ao de cinco pontos. Por outro lado, com a utilização de vazões mais elevadas, verificou-se melhor ajuste dos resultados fornecidos pelo esquema de cinco pontos com as curvas experimentais. Acredita-se que nesta condição de ensaio houve um processo de dispersão na célula do eletrodo com efeito significativo sobre a resposta de concentração effluente.

Com relação à técnica experimental, conclui-se que o sistema de injeção utilizado (garrafas/válvula) mostrou-se viável, fornecendo a condição de vazão constante a todo o sistema. Obteve-se sucesso com o método de medição de concentração effluente por condutividade, com o controle de temperatura, e o emprego do conjunto placa A/D e microcomputador para monitorar a aquisição de dados.

7 NOMENCLATURA

SÍMBOLOS

A - área da interface dos blocos (m^2)

\mathcal{A} - matriz de coeficientes.

\mathbf{B} - vetor termo independente.

C - concentração no meio poroso, adimensional.

C_i - concentração do fluido injetado, adimensional.

C_L - concentração na posição $x = L$, adimensional.

c_t - fator de compressibilidade (Pa^{-1}).

d - distância do poço produtor ao injetor (m).

\mathbf{D} - vetor coeficiente de dispersão.

D - coeficiente de dispersão (m^2/s).

\mathcal{D} - tensor coeficiente de dispersão.

\hat{e} - vetor unitário.

F - vazão volumétrica total na face do bloco, por contribuição de fluxo difusivo e convectivo (m^3/s).

F_D - vazão volumétrica na face do bloco por efeito difusivo (m^3/s).

F_C - vazão volumétrica na face do bloco por efeito convectivo (m^3/s).

G - fluxo total (convectivo e difusivo) que atravessa a face do bloco (m^3/s).

h - espessura do meio poroso (m).

\mathbf{J} - vetor fluxo difusivo.

k - permeabilidade da formação (m^2).

K - constante.

L - dimensão (m).

M , M_1 e M_2 - pontos da malha.

\dot{m} - fluxo mássico nas faces do bloco ($\text{kg}/\text{m}^2/\text{s}$).

\mathbf{n} - vetor unitário normal à superfície.

p - pressão (Pa).

\mathbf{P} - vetor incógnita.

Pe - número de Peclet celular, adimensional.

p_w - pressão de produção ou injeção (Pa).

\tilde{q} - vazão mássica por volume ($\text{kg}/\text{m}^3/\text{s}$).

q - vazão volumétrica por volume (s^{-1}).

Q - vazão volumétrica, termo fonte (m^3/s).

q_i - vazão volumétrica de fluido deslocante (m^3/s).

r_w - distância radial dos poços (m).

t - tempo (s).

T - transmissibilidade nas interfaces dos blocos (m^3/s).

\mathbf{u} - vetor velocidade.

\mathbf{u}_C - vetor velocidade convectiva.

\mathbf{u}_D - vetor velocidade difusiva.

V - volume (m^3).

Δp - queda de pressão (Pa).

Δt - intervalo de tempo (s).

Δ_t - operador de diferenças no tempo.

ΔV - volume do bloco (m^3).

Δx - dimensão do bloco na direção x (m).

Δy - dimensão do bloco na direção y (m).

α - dispersividade do meio poroso (m).

γ - peso específico (N/m^3).

θ - indicador do sentido do escoamento no esquema a montante.

μ - viscosidade do fluido ($Pa.s$).

ρ - massa específica (kg/m^3).

ϕ - porosidade do meio poroso, adimensional.

ω - ponderador no esquema de nove pontos, adimensional.

SUBSCRITOS

A - ponto na malha.

B - ponto na malha.

D e DA - variável adimensionalizada.

i - ponto na malha.

j - ponto na malha.

$j_{\pm}^{+1/2}$ - interfaces do bloco j .

$i_{\pm}^{+1/2}$ - interfaces do bloco i .

M , M_1 e M_2 - pontos na malha.

σ - condição inicial.

x - direção x .

y - direção y .

xy, yx - direção cruzada.

SOBRESCRITO

n - nível de tempo.

Referências

- [1] Bertiger, W. I. and Padmanabhan, L. :“Finite Difference Solutions to Grid Orientation Problems Using IMPES ”, artigo SPE 12250 apresentado no SPE-AIME Simpósio de Simulação de Reservatório, São Francisco, 15-18 Novembro, 1983.
- [2] Figueiredo, J. R. :“Generalização e Aproximação do Esquema Discretizante de Allen para Equações de Transporte em Fluidos ”, Tese de Doutorado , Universidade Estadual de Campinas, 1988.
- [3] Lake, L. W. , Pope, G. A. , Carey, G. F. and Sepehrnoori, K. :“Isothermal , Multiphase , Multicomponent Fluid Flow in Permeable Media. Part I : Description and Mathematical Formulation ” , *IN SITU* (1984), Vol. 8, No. 1, 1-40.
- [4] Menzie, D. E. , Dutta, S. :“Dispersivity as an Oil Reservoir Rock Characteristic ”, *Petroleum Abstracts* (1987), Vol. 27, No. 427.974.
- [5] Muskat, M. :“The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media”, Boston, International Human Resources Development Corporation, 585-587, 1982.
- [6] Patankar, S. V. :“Numerical Heat Transfer and Fluid Flow ”, Nova Iorque, McGraw-Hill , 1980.
- [7] Patel, M. , Cross, M. and Markatos, N. C. :“An Evaluation of Eleven Discretization Schemes for Predicting Elliptic Flow and Heat Transfer in Supersonic Jetst”, *Int. J. Heat Mass Transfer* (1987), Vol. 30, No. 9 , 1907-1925.
- [8] Peaceman, D. W. :“Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation ”, *SPEJ* (Junho 1978), *Trans-AIME* , Vol. 265, 183-188.
- [9] Portella, R. C. M. :“Interpretação e Automação de Testes de Deslocamento Miscível Usando Soluções no Espaço de Laplace e Deconvolução ”, Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1989.

- [10] Rocha, P. S. M. V. :“Efeitos de Orientação de Malha na Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo - Esquemas de Solução por Nove Pontos”, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, 1987.
- [11] Rodrigues, E. B. :“Descrição Petrográfica de Lâminas Delgadas (Lâminas 8467 a 8471)”, Rio de Janeiro, PETROBRÁS/CENPES/DIGER/SEGEX, 1989.
- [12] Settari, A. , Dupont, T. , Price, H. S. :“ Development and Application of Variational Methods for Simulation of Miscible Displacement in Porous Media ”, *SPEJ* (Junho 1977), *Trans-AIME* , Vol. 263, 228-246.
- [13] Yanosik, J. L. and Mc Cracken, T. A. :“ A Nine-Point , Finite-Difference Reservoir Simulation for Realistic Prediction of Adverse Mobility Ratio Displacements ”, *SPEJ* (Agosto 1979), *Trans-AIME* , Vol. 267, 253-262.

Apêndice A : Equação de Concentração

Considerando-se o volume de controle como o volume ΔV do bloco de dimensões Δx , Δy e h , e aplicando-se a Lei de Conservação da Massa, tem-se:

$$\begin{aligned} h\Delta y\Delta t(-\dot{m}_x + \dot{m}_{x+\Delta x}) + h\Delta x\Delta t(-\dot{m}_y + \dot{m}_{y+\Delta y}) = \\ = -\frac{\partial}{\partial t}\rho\phi h\Delta x\Delta yC\Delta t + \tilde{q}\Delta x\Delta yh\Delta tC_i \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Dividindo-se por $\Delta V\Delta t$ e escrevendo na forma infinitesimal,

$$\frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho\phi C)}{\partial t} + \tilde{q}C_i \quad (\text{A.2})$$

Substituindo-se

$$\dot{m}_x = \rho u_x \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{m}_y = \rho u_y \quad ,$$

e assumindo massa específica constante, obtém-se:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}) = -\frac{\partial(\phi C)}{\partial t} + qC_i \quad (\text{A.4})$$

Considerando-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D + \mathbf{u}_C \ , \\ \mathbf{u}_D &= -\phi \mathcal{D} \nabla C \ , \\ \mathbf{u}_C &= C \mathbf{u} \ , \end{aligned} \tag{A.5}$$

chega-se a:

$$\nabla \cdot (-\phi \mathcal{D} \nabla C) + \nabla \cdot (C \mathbf{u}) + \frac{\partial \phi C}{\partial t} - q C_i = 0 \ . \tag{A.6}$$

Apêndice B : Equação de Pressão

Pela Lei da Conservação da Massa,

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \tilde{q} = \frac{\partial \phi \rho}{\partial t} \quad . \quad (\text{B.1})$$

Pela Lei de Darcy,

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} [\nabla p - \gamma h] \quad . \quad (\text{B.2})$$

Considera-se a equação de estado:

$$c_t = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t \quad , \quad (\text{B.3})$$

e adotam-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- escoamento horizontal
- fluido pouco compressível
- ρ , k e ϕ constantes

Combinando-se a Lei de Conservação com Darcy, obtém-se:

$$\frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \tilde{q} \quad , \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = \phi \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} - \tilde{q} \quad . \quad (\text{B.5})$$

Aplicando-se a equação de estado, chega-se a:

$$\nabla \cdot (\rho \nabla p) = \frac{\phi \mu c_t \rho}{k} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\mu \tilde{q}}{k} \quad (\text{B.6})$$

Sendo o fluido pouco compressível, a equação final é escrita na forma:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\mu q}{k} \quad (\text{B.7})$$

Apêndice C : Aplicação da Solução Analítica da Equação de Concentração

Escrevendo-se a solução analítica dada pela equação (3.36) no domínio dos blocos ij e $i+1j$, obtém-se:

$$C_{i+1/2,j} = \frac{\exp\left(\text{Pe}_{i+1/2,j} \frac{x_{i+1/2,j}}{\Delta x}\right) - 1}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} [C_{i+1,j} - C_{i,j}] + C_{i,j} \quad (\text{C.1})$$

Deriva-se a equação acima para a determinação de $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i+1/2,j}$:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} = \frac{(C_{i+1,j} - C_{i,j})}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \exp\left[\text{Pe}_{i+1/2,j} \frac{x_{i+1/2,j}}{\Delta x}\right] \frac{\text{Pe}_{i+1/2,j}}{\Delta x} \quad (\text{C.2})$$

Substituem-se as expressões obtidas para $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i+1/2,j}$ e $C_{i+1/2,j}$ na equação de vazão total na face $A_{i+1/2,j}$ (3.18):

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j} &= -h\Delta y \left[\phi D_{x_{i+1/2,j}} \frac{(C_{i+1,j} - C_{i,j})}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \exp\left(\text{Pe}_{i+1/2,j} \frac{x_{i+1/2,j}}{\Delta x}\right) \frac{\text{Pe}_{i+1/2,j}}{\Delta x} \right] + \\ &+ h\Delta y u_{x_{i+1/2,j}} \left[C_{i,j} + \frac{\exp\left(\text{Pe}_{i+1/2,j} \frac{x_{i+1/2,j}}{\Delta x}\right) - 1}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} (C_{i+1,j} - C_{i,j}) \right] \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Aplicando-se a definição de número de Peclet, equação (3.40), chega-se a:

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j} &= h\Delta y u_{x_{i+1/2,j}} \left[C_{i,j} - \frac{\exp\left(\text{Pe}_{i+1/2,j} \frac{x_{i+1/2,j}}{\Delta x}\right)}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} (C_{i+1,j} - C_{i,j}) \right] + \\ &+ h\Delta y u_{x_{i+1/2,j}} \left[\frac{\exp\left(\text{Pe}_{i+1/2,j} \frac{x_{i+1/2,j}}{\Delta x}\right)}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} (C_{i+1,j} - C_{i,j}) - \frac{(C_{i+1,j} - C_{i,j})}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \right]. \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Portanto, a vazão total na face $A_{i+1/2,j}$ é dada por:

$$F_{i+1/2,j} = h\Delta y u_{x_{i+1/2,j}} \left[C_{i,j} + \frac{(C_{i,j} - C_{i+1,j})}{\exp(\text{Pe})_{i+1/2,j} - 1} \right] \quad (\text{C.5})$$

Apêndice D : Verificação da Igualdade entre Esquemas de Yanosik & Mc Cracken e Bertiger & Padmanabhan

A proposta de Yanosik & Mc Cracken [13] para formulação do esquema de nove pontos consiste na combinação de duas expressões de diferenças finitas de cinco pontos para as duas malhas quadradas, diagonal e paralela, definidas pela figura abaixo. Cada bloco da malha paralela está inscrito em um bloco da malha diagonal, sendo que a área do bloco e a vazão volumétrica na malha paralela correspondem, necessariamente, às metades dos respectivos valores na outra malha.

Desta forma, escrevem-se as equações de concentração discretizadas nos dois sistemas de malhas:

-malha paralela:

$$F_{i+1/2,j} + F_{i,j+1/2} - (F_{i-1/2,j} + F_{i,j-1/2}) = -\frac{\phi \Delta V_{i,j} \Delta t (C_{i,j})}{\Delta t} + QC_i \quad (D.1)$$

-malha diagonal:

$$F_{i+1/2,j+1/2} + F_{i+1/2,j-1/2} - (F_{i-1/2,j+1/2} + F_{i-1/2,j-1/2}) = -\frac{2\phi \Delta V_{i,j} \Delta t (C_{i,j})}{\Delta t} + 2QC_i \quad (D.2)$$

Faz-se a combinação linear entre as duas equações, usando-se um peso de quatro para a primeira expressão e peso um para a segunda, obtendo-se:

$$\frac{1}{6} [F_{i+1/2,j+1/2} + F_{i+1/2,j-1/2} - F_{i-1/2,j+1/2} - F_{i-1/2,j-1/2}] + \frac{4}{6} [F_{i+1/2,j} + F_{i,j+1/2} - F_{i-1/2,j} - F_{i,j-1/2}] = -\frac{\phi \Delta V_{i,j} \Delta t C_{i,j}}{\Delta t} + QC_i \quad (D.3)$$

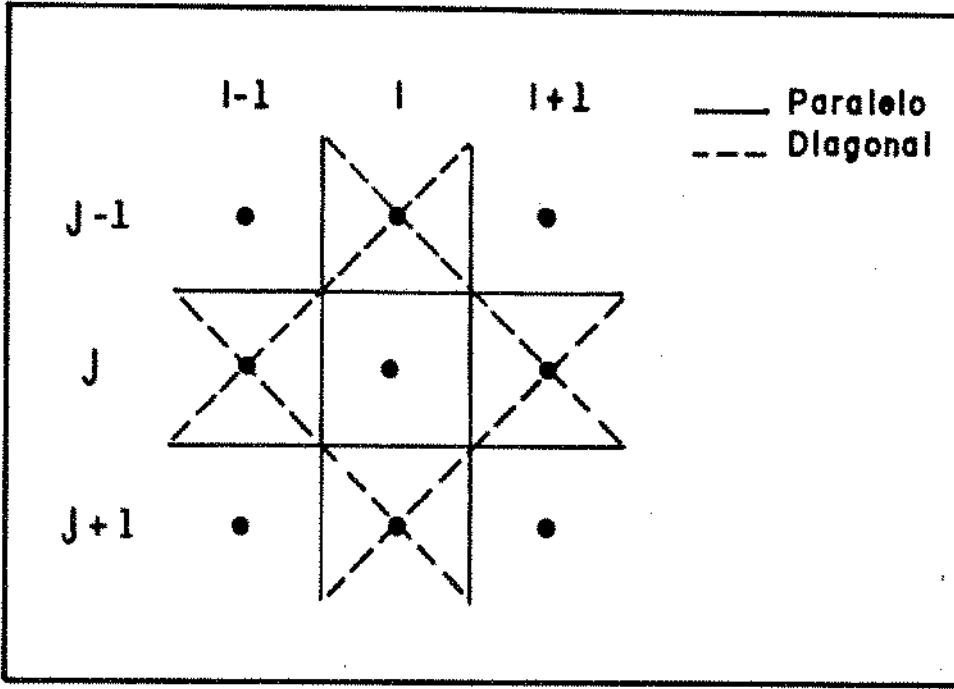


Figura 44: Malha para esquema de Yanosik & Padmanabhan

Considerando-se que as vazões nas faces do bloco da malha diagonal sejam compostas por contribuições em x e y , obtidas por interpolação linear entre blocos vizinhos, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (F_{i,j+1/2} + F_{i+1,j+1/2}) + \frac{1}{2} (F_{i+1/2,j+1} + F_{i+1/2,j}) \quad , \\
 F_{i+1/2,j-1/2} &= -\frac{1}{2} (F_{i,j-1/2} + F_{i+1,j-1/2}) + \frac{1}{2} (F_{i+1/2,j} + F_{i+1/2,j-1}) \quad , \\
 & \hspace{20em} \text{(D.4)} \\
 F_{i-1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (F_{i-1/2,j+1} + F_{i-1/2,j}) - \frac{1}{2} (F_{i,j+1/2} + F_{i-1,j+1/2}) \quad , \\
 F_{i-1/2,j-1/2} &= \frac{1}{2} (F_{i-1/2,j} + F_{i-1/2,j-1}) + \frac{1}{2} (F_{i,j-1/2} + F_{i-1,j-1/2}) \quad .
 \end{aligned}$$

Aplicando-se tais considerações na combinação linear, otém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{12} \left[F_{i+1,j+1/2} + F_{i+1/2,j+1} + F_{i+1/2,j-1} + F_{i-1,j+1/2} \right] + \\
 & -\frac{1}{12} \left[F_{i+1,j-1/2} + F_{i-1/2,j+1} + F_{i-1/2,j-1} + F_{i-1,j-1/2} \right] + \quad (D.5) \\
 & +\frac{5}{6} \left[F_{i+1/2,j} + F_{i,j+1/2} - F_{i-1/2,j} - F_{i,j-1/2} \right] = -\frac{\phi \Delta V_{i,j} \Delta t C_{i,j}}{\Delta t} + QC_i
 \end{aligned}$$

Pela formulação baseada no esquema de Bertiger & Padmanabhan [1], obtém-se para vazão total na face $A_{i+1/2,j}$, por substituição das equações (3.48) em (3.47), a expressão:

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2,j} &= h\Delta y \left[\frac{5}{6}G_{x_M} + \frac{1}{12}G_{x_{M_1}} + \frac{1}{12}G_{x_{M_2}} \right] \\
 &= \frac{5}{6}F_{i+1/2,j} + \frac{1}{12}F_{i+1/2,j+1} + \frac{1}{12}F_{i+1/2,j-1} \quad (D.6)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se o mesmo procedimento para as demais faces, verifica-se que a expressão final obtida coincide com a resultante do método anterior, o que comprova a igualdade entre os dois esquemas de nove pontos.

Apêndice E : Listagem do Programa de Aquisição de Dados

```
{R-} {Range checking off}
{B+} {Boolean complete evaluation on}
{S+} {Stack checking on}
{I+} {I/O checking on}
{N+} {No numeric coprocessor}
{M 65500,16384,655360} {Turbo 3 default stack and heap}
```

```
program Tese;
```

```
Uses
```

```
  Crt,
  Dos,
  Printer,
  Turbo3,
  Graph;
```

```
type
```

```
  TpParmCAD = record      (* Parametros da placa *)
    JustEsq : boolean;    (* Justificacao *)
    NumBits,              (* Bits de Resolucao A/D *)
    OfsByteA,            (* Off-set do byte A *)
    OfsByteB,            (* Off-set do byte B *)
    OfsSelCn,            (* Off-set do seletor de canal = RCConv = SC *)
    ConvStat: byte;      (* Verificacao de termino de conversao *)
```

```
end;
```

const

```
NmIntr      = 2;
MascInt     = $21;
LimpaRegint= $20;
DatSeg      : integer = 0;
Versao     = 10163;
Pi         = 3.14159;
```

```
ParmCad : TpParmCAD =
```

```
(JustEsq :false;
 NumBits : 10;
 OfsByteA: 4;
 OfsByteB: 5;
 OfsSelCn: 7;
 ConvStat: $10
 );
```

var

```
I,J,K      : integer;
Ch         : char;
Confor: real;
Temp:real;
Consaida: real;
Conpadrao: real;
Distancia: real;
Saiu: real;
VpInjetado,Vazao,Vporoso,Vapo: real;
```

```
GraphDriver,GraphMode: integer;
Inf,Sup: integer;
DriveC: array[1..10000] of integer;
Leitura: integer;
Votlido: real;
LogC: array[1..20] of real;
Namostras,Ncalibra,Npontos: integer;
Nome: string[8];

Titulo: string[80];
VoltDigi:array[1..20] of real;
x1,y1,x2,y2: real;
xtmin,ytmin,xtmax,ytmax: integer;
xmin,ymin,xmax,ymax: real;

PreEscal,          (* Pre-escaler: "aumenta" intervalo entre IRQs *)
PreEscAux: integer;
MascPC   : byte;    (* Mascara de interrupcoes em uso pelo PC.   *)
Semaforo1,Fim     : boolean;
EndPlaca,          (* Endereco base          *)
SelCn,            (* Seletor de canal      *)
ByteA,            (* Byte A. Vide manual*)
ByteB   : integer; (* Byte B. Vide manual*)
Regs,regtime: registers;
hr,min,seg,cents: word;
hora,minuto,segundo,centesimo: string[2];
tempo: string[11];
```

(*-----*)

```
Procedure selet_tela(x1,y1,x2,y2: integer);
```

```
begin
```

```
    xmin:=x1;    ymin:=y1;
```

```
    xmax:=x2;    ymax:=y2;
```

```
end;
```

(*-----*)

```
Procedure selet_coor(x1,y1,x2,y2: real);
```

```
begin
```

```
    xmin:=x1;    ymin:=y1;
```

```
    xmax:=x2;    ymax:=y2;
```

```
end;
```

(*-----*)

```
Procedure Drawpoint(X,Y:real);
```

```
var
```

```
    xx,yy:integer;
```

```
begin
```

```
    xx:=round(xtmax-(xmax-x)*(xtmax-xtmin)/(xmax-xmin));
```

```
    yy:=round(ytmin-(ytmin-ytmax)*(ymax-y)/(ymax-ymin));
```

```
    Putpixel(xx,yy,1);
```

```
end;
```

(*-----*)

```
Procedure desenha_linha(x1,y1,x2,y2: real);
var
  xx1,yy1,xx2,yy2:integer;

begin
  xx1:=round(xtmax-(xmax-x1)*(xtmax-xtmin)/(xmax-xmin));
  yy1:=round(ytmin-(ytmin-ytmax)*(ymax-y1)/(ymax-ymin));
  xx2:=round(xtmax-(xmax-x2)*(xtmax-xtmin)/(xmax-xmin));
  yy2:=round(ytmin-(ytmin-ytmax)*(ymax-y2)/(ymax-ymin));
  line(xx1,yy1,xx2,yy2);
end;
```

(*-----*)

```
function linear(x:real):real;
var
  I: integer;
  achar: boolean;

begin
  I:=Ncalibra;
  achar:= false;
  while not achar do
    begin
      if (VoltDigi[I]<x) then
        achar:=true
    end
  end;
```

```
        else
            I:=pred(I)
        end;
linear:=exp(LogC[I]+(LogC[I+1]-LogC[I])*(x-VoltDigi[I])/(VoltDigi[I+1]
        -VoltDigi[I]))
end;
```

```
(*-----*)
```

```
Procedure ApagaTudo(x1,y1,x2,y2:integer);
```

```
begin
    setviewport(x1,y1,x2,y2,true);
    clearviewport;
    setviewport(0,0,639,199,true);
end;
```

```
(*-----*)
```

```
procedure ProgTimer(canal,modo:integer;contagem:word);
```

```
var
    PalavraControle:integer;
begin
    PalavraControle := canal*64 + 48 + modo* 2;
    Port[EndPlaca+3]:= PalavraControle;
    Port[EndPlaca+canal] := Lo(Contagem);
    Port[EndPlaca+canal] := Contagem div 256;
end;
```


(*-----*)

```
procedure TrataInt(Flags,CS,IP,AX,BX,CX,DX,SI,DI,DS,ES,BP:word);
interrupt;
begin

  with ParmCAD do      (* abaixa o pedido de interrupcao na placa *)
  begin
    Port[SelCn]:= $F0;      (* CAD10/16 *)
    I:= Port[ByteA];      (* CAD10/26 *)
  end;
  if semaforo1 then
  if PreEscal>1 then
    PreEscal:= pred(PreEscal)
  else
  begin
    PreEscal:= PreEscAux;
    Namostras:= succ(Namostras);
    sound(4400);
    delay(5);
    nosound;

    with ParmCad do
    begin
      Port[SelCn]:= $F0;
      repeat until ((Port[ByteB] and ConvStat)=0);
      Leitura:=(Port[ByteB] and $03)*256+Port[ByteA];
    end;
  end;
end;
```

```
        DriveC[Namostras]:=Leitura;
        Voltlido:=-5.0 + Leitura * 10./1024.;
    end;

inline(
$B0/NmIntr+$60 (* MOV      AL,NmIntr+$60 *)
/$E6/LimpaRegInt (* OUT      LimpaRegInt,AL*)
/$FB          (* STI      *)
);
end;

(*-----*)

procedure Inicia_grafico;
begin
    settextstyle(0,0,1);
    OutTextxy(140,0,'Concentracao na saida x Vpi ');
    OutTextxy(482,1,'Teste em andamento');
    OutTextxy(482,9,'Inicio do teste:');
    OutTextxy(482,170,'F1 INICIA TESTE ');
    OutTextxy(482,182,'F10 TERMINA TESTE');
    rectangle(0,9,479,190);
    selet_tela(0,9,479,190);
    selet_coor(0,10.00,3,60.00);
    setlinestyle(1,0,1);
    y1:=10.00;
    y2:=60.00;
    x1:=0.0;
```

```
for i:=1 to 5 do
  begin
    x1:=x1+0.5; x2:=x1;
    desenha_linha(x1,y1,x2,y2);
  end;
x1:=0.0;
x2:=3.0;
y1:=10.00;
for i:=1 to 9 do
  begin
    y1:=y1+5.00; y2:=y1;
    desenha_linha(x1,y1,x2,y2);
  end;
end;
```

(*-----*)

```
procedure Inicia_Tudo;
var
  L,C: integer;
  Calibracao: text;
begin
  ClrScr;
  writeln;
  writeln(' AUTOMACAO DE TESTES DE DESLOCAMENTO MISCIVEL');
  writeln;
  writeln(' Programa adaptado por Renato Luiz Almeida dos Santos');
  writeln;
```

```
writeln('          UNICAMP/PETROBRAS');
writeln;
writeln;
writeln;
writeln('Coloque disquete com arquivo de calibracao da placa
        no drive A');
writeln;

writeln('tecle algo para continuar');
Ch:=Readkey;
assign(Calibracao,'a:cal.dat');

reset(Calibracao);

writeln;
writeln('Qual o titulo do teste?');
readln(Titulo);
writeln('Qual o volume poroso do testemunho (cm3)?');
readln(Vporoso);
writeln('Qual a vazao de injecao (cm3/min) ?');
readln(vazao);
Vapo:=vazao/Vporoso;

writeln('Qual a temperatura do teste em graus Celsius ?');
readln(Temp);

I:=0;
while not eof(Calibracao) do
```

```
begin
  I:=succ(I);
  readln(Calibracao,VoltDigi[I],LogC[I]);
end;
Ncalibra:=I;

if (Temp<>20.0) then
begin
VoltDigi[1]:=0.028463*Temp + 0.925806;
VoltDigi[2]:=0.048421*Temp + 1.652105;
VoltDigi[3]:=0.046316*Temp + 2.501579;
VoltDigi[4]:=0.068252*Temp + 2.739756;
VoltDigi[5]:=0.054211*Temp + 3.241053;
VoltDigi[6]:=0.065*Temp + 3.353335;
end;

I:=1;
repeat
LogC[I]:=ln(LogC[I]);
I:=succ(I);
until I>Ncalibra;

EndPlaca:= $2D0;
with ParmCAD do
begin
  ByteA:= EndPlaca + OfsByteA;
  ByteB:= EndPlaca + OfsByteB;
  SelCn:= EndPlaca + OfsSelCn;
```

```
Port[ByteB]:= 100; (* inicia D/A, so' para CAD10/26 *)
Port[ByteA]:= 135;
Port[SelCn-1]:= 0; (* inibe DMA, so' para CAD10/26 *)
ProgTimer(0,4,$FFFF);
ProgTimer(1,4,$FFFF);
ProgTimer(2,4,$FFFF);
JustEsq:= false;

end;

ProgTimer(0,2,$0100);
{PreEscAux:=4630;} { valor para 1 coleta por segundo }
PreEscAux:=23150; {valor para 1 coleta por 5 segundos}
PreEscal := PreEscAux;

(*----- inicia vetor de Interrupcao -----*)

with Regs do
begin
  AL:= NmIntr+8;
  AH:= $25;
  DS:= CSeg;
  DX:= Ofs(TrataInt);
  MSDOS(Dos.Registers(Regs));
end;

Namostras:=0;
Npontos:=0;
Confor:=0.00;

VpInjetado:=0.0;
```

```
GraphDriver:=CGA;
GraphMode:=CGAHi;

Semaforo1:=false;
end;

(*-----*)

procedure Balescreve;
var
  Entrou:real;
  i,tempoteste: integer;
  Arquivo: string[14];
  Estimativas: text;
begin
  Arquivo:='c:'+nome+'.par';
  assign(Estimativas,Arquivo);
  rewrite(Estimativas);

  writeln(Estimativas,'Titulo do teste =',Titulo);
  writeln(Estimativas);
  writeln(Estimativas,'Volume poroso da amostra(cm3): ',Vporoso:6:2);
  writeln(Estimativas);
  writeln(Estimativas,'Vazao(cm3/min): ',Vazao:4:2);
  writeln(Estimativas);
  writeln(Estimativas,'Numero de amostras: ',Namostras:10);
  writeln(Estimativas);
  writeln(Estimativas,'Concentracao tracador(1000 ppm):',conpadrao:4:2);
  writeln(Estimativas);
```

```

writeln(Estimativas,'Concentracao agua (1000 ppm):',Confor:4:2);
writeln(Estimativas);
writeln(Estimativas,'Temperatura do ensaio (graus C):',Temp:4:2);
writeln(Estimativas);
writeln(Estimativas,'Matriz de calibracao do Condutivimetro:');
writeln(Estimativas);
writeln(Estimativas,'Concentracao(1000 ppm)',' ','Voltagem(V)');
I:=1;
repeat
  begin
    LogC[I]:=exp(LogC[I]);
    writeln(Estimativas,' ',LogC[I]:10:2,' ',VoltDigi[I]:10:4);
    I:=succ(I)
  end
until I>Ncalibra;
writeln(Estimativas);
close(Estimativas);
end;

```

```
{*****}
```

```
Procedure Salva_Heap;
```

```

var
  ArqBom,DiscoCheio: boolean;
  I,J: integer;
  Saida: text;
  Arquivo: string[14];
  Mensagem: string[80];

```



```
begin
  clrscr;
  for i:=1 to 2000 do j:=0;
  writeln('Qual o nome do arquivo de dados?');
  readln(nome);
  Arquivo:='c:'+nome+'.dat';
  writeln(' tecla algo');
  repeat until keypressed;
  assign(Saida,Arquivo);
  repeat
  repeat

  {I-} rewrite(Saida); {I+}
    ArqBom:=(IOresult=0);
    if not ArqBom then
      begin
        Mensagem:='Nao conseguiu abrir o arquivo!!Verifique e tecla algo';
        for J:=1 to 10 do
          writeln(Mensagem);
        readln;
      end;
    until ArqBom;
    writeln(Saida,'      Concentracao');
    writeln(Saida);
    I:=0;
    repeat
      I:=succ(I);
    {I-} writeln(Saida,DriveC[I]); {I+}
```

```

DiscoCheio:=(IOresult=101);
if DiscoCheio then
  begin
    for J:=1 to 10 do
      writeln('Disco cheio!!! Troque e tecla algo');
      readln;
    end;
  until (I>=Namostras) or (DiscoCheio);
  until not DiscoCheio;
  close(Saida);
end;

{*****}

begin
  Inicia_Tudo;
  Initgraph(GraphDriver,GraphMode,'c:\tp');
  Inicia_grafico;
  MascPC:= Port[MascInt];          (* salve Mascara de Interrupcoes *)
  Port[MascInt]:= MascPC and $FB;  (* habilite interrupcao 2      *)
  Port[SelCn]:= 0;                (* abaixa FF de interrupcao se CAD10/16 *)
  I:= Port[ByteA];                (* abaixa FF de interrupcao se CAD10/26 *)
                                  (* limpa registrador de interrupcao do PC/XT *)
  Port[LimpaRegInt]:= $62;
  Fim:= False;
  while not Fim do
    begin
      Consaida:= linear(Voltlido);
    end;
  end;

```

```
VpInjetado:=Vapo*Namostras*5./60;
drawpoint(VpInjetado,Consaida);

if KeyPressed then
  begin
    read(Kbd,Ch);
    if (Ch=#27) and Keypressed then

      begin
        read(Kbd,Ch);
        case Ch of
          #59,#84: begin
                    GetTime(hr,min,seg,cents);
                    str(hr:2,hora);
                    str(min:2,minuto);
                    str(seg:2,segundo);
                    str(cents:2,centesimo);
                    tempo:=hora+':'+'minuto+':'+'segundo+'.'+'
                    centesimo;
                    outtextxy(483,18,tempo);
                    Semaforo1:=true;
                  end;
          #68,#93: begin
                    ApagaTudo(482,1,626,9);
                    OutTextxy(482,1,'Tem certeza?(S/N)');
                    Ch:=Readkey;
                    if (Ch='S') or (Ch='s') then
```

```
                Fim:=true
            else
                begin
                    ApagaTudo(482,1,626,9);
                    OutTextxy(482,1,'Teste em andamento');
                    end;
            end;
        end;
    end;
end;
end;
end;
Port[MascInt]:= MascPC or $04; (* restaura mascara de Interrupcoes *)
ProgTimer(0,4,$FFFF);          (* "desativa" Timer: modo 4      *)
CloseGraph;
clrscr;
writeln('Numero de pontos amostrados=',Namostras);
Vollido:=-5.00+DriveC[Namostras]*10./1024.;
Conpadrao:=linear(Vollido);
I:=1;
repeat
Vollido:=-5.00+DriveC[I]*10./1024.;
Confor:=Confor+linear(Vollido);
I:= succ(I);
until (I>10);
Confor:=Confor/10.;
Salva_Heap;
Balescreve;
writeln('Numero de pontos amostrados=' ,Namostras);
```

```
writeln;  
writeln;  
writeln('Fim do teste')  
end.
```