

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Rodrigo da Ponte Caun

CONTROLE PREDITIVO PARA SISTEMAS LINEARES DISCRETOS VARIANTES NO TEMPO
USANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV DEPENDENTES DE CAMINHO



Campinas
2008

Rodrigo da Ponte Caun

CONTROLE PREDITIVO PARA SISTEMAS LINEARES DISCRETOS VARIANTES NO TEMPO
USANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV DEPENDENTES DE CAMINHO

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Automação.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres
Co-orientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira



Campinas
2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C311c Caun, Rodrigo da Ponte
Controle preditivo para sistemas lineares discretos variantes no tempo usando funções de Lyapunov dependentes de caminho / Rodrigo da Ponte Caun. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientadores: Pedro Luis Dias Peres, Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle preditivo. 2. Lyapunov, Funções de. 3. Sistemas lineares variantes no tempo. 4. Desigualdades (Matemática). I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Model predictive control for time-varying discrete-time linear systems using path-dependent Lyapunov functions

Palavras-chave em Inglês: Model predictive control, Path-dependent Lyapunov function, Time-varying linear systems, Linear matrix inequalities

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Alfredo Del Sole Lordelo, Rafael Santos Mendes

Data da defesa: 05/12/2008

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

Rodrigo da Ponte Caun

Engenheiro Eletricista – UNESP-SP

CONTROLE PREDITIVO PARA SISTEMAS LINEARES DISCRETOS VARIANTES NO TEMPO
USANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV DEPENDENTES DE CAMINHO

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação. Aprovada pela banca examinadora no dia 05 de Dezembro de 2008.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Alfredo Del Sole Lordelo
UFABC

Campinas
2008

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Rodrigo da Ponte Caun

Data da Defesa: 5 de dezembro de 2008

Título da Tese: "Controle Preditivo para Sistemas Lineares Discretos Variantes no Tempo Usando Funções de Lyapunov Dependentes de Caminho"

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente): Pedro Luis Dias Peres

Prof. Dr. Alfredo Del Sole Lordelo: Alfredo Del Sole Lordelo

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes: Rafael Santos Mendes

DEDICO ESTE TRABALHO AOS MEUS PAIS, HÉLIO CAUN (IN MEMORIAM) E MARIA DE LOURDES DA PONTE CAUN, POR SE CONSTITUÍREM DIFERENTEMENTE ENQUANTO PESSOAS, IGUALMENTE BELAS E ADMIRÁVEIS EM ESSÊNCIA, ESTÍMULOS QUE ME IMPULSIONARAM A BUSCAR VIDA NOVA A CADA DIA, MEUS AGRADECIMENTOS POR TEREM ACEITO SE PRIVAR MAIS UMA VEZ DE MINHA COMPANHIA PELOS ESTUDOS, CONCEDENDO A MIM A OPORTUNIDADE DE ME REALIZAR AINDA MAIS.

AO MEU IRMÃO, ALESSANDRO DA PONTE CAUN, PELA MAESTRIA DO CONFORTO DE SUAS PALAVRAS DE ENCORAJAMENTO.

E, FINALMENTE, A DEUS PELO SEU AMOR INCONDICIONAL, PELAS RESPOSTAS AS MINHAS ORAÇÕES E POR TER ME CARREGADO VERDADEIRAMENTE EM SEUS BRAÇOS NO MOMENTO MAIS DIFÍCIL DE MINHA VIDA.

Agradecimentos

Agradeço,

ao meu orientador e co-orientador, Profs. Drs. Pedro Luis Dias Peres e Ricardo C. L. F. Oliveira, sou grato pela orientação e compreensão.

aos colegas de pós-graduação do Departamento de Telemática, em especial a André du Pin Calmon e André Schonardie Pasqual pela espontaneidade na troca de informações e materiais numa rara demonstração de amizade e solidariedade.

à minha família pelo apoio e paciência em tolerar a minha ausência.

ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

“Gênio é um por cento inspiração, noventa e nove por cento transpiração.”

(Thomas Edison)

“Menor que meu sonho não posso ser.”

(Lindolf Bell)

Resumo

A principal contribuição dessa dissertação é propor um método de síntese de controle preditivo por realimentação de estados para sistemas lineares discretos com parâmetros variantes no tempo e pertencentes a um politopo. As condições de síntese são formuladas usando-se funções de Lyapunov dependentes de caminho, isto é, a matriz de Lyapunov depende de maneira multi-afim dos parâmetros em seus instantes sucessivos de tempo até um instante máximo (tamanho do caminho). Essa classe de função generaliza as funções quadráticas e dependentes de maneira afim nos parâmetros. Os testes numéricos são formulados em termos de problemas de otimização baseados em desigualdades matriciais lineares, parametrizados em função do tamanho do caminho da matriz de Lyapunov, arbitrado a priori. À medida que o tamanho do caminho cresce, índices de desempenho menos conservadores são obtidos ao preço de um maior esforço computacional. Exemplos numéricos são apresentados ilustrando a eficiência do método proposto em termos do índice de desempenho e do esforço computacional demandado quando comparados com outros métodos existentes na literatura.

Palavras-chave: Controle preditivo; Sistemas lineares com parâmetros variantes; Desigualdades matriciais lineares; Ganho escalonado; Função de Lyapunov dependente de caminho.

Abstract

The main contribution of this thesis is to propose a state-feedback model predictive control design method for discrete-time systems with time-varying parameters belonging to a polytope. The synthesis conditions are formulated using path-dependent Lyapunov functions, i.e. the Lyapunov matrix depends multi-affinely on the parameters at successive instants of time until a maximum instant (path size). This class of function generalizes quadratic and affinely parameter dependent functions. The numerical tests are provided in terms of optimization problems based on linear matrix inequalities, parametrized as a function of the path size of the Lyapunov matrix, given *a priori*. As the path size increases, less conservative performance indices are obtained at the price of a higher computational effort. Numerical examples are presented, illustrating the efficiency of the approach in terms of the performance index and the computational burden demanded when compared to other existing methods in the literature.

Key-words: Model predictive control; Linear parameter varying systems; Linear matrix inequalities; Gain scheduling; Path-dependent Lyapunov function.

Lista de Figuras

1	Heurística do controle preditivo.	1
1.1	Representação gráfica da incerteza politópica.	6
1.2	Representação gráfica do elipsóide invariante em duas dimensões.	9
2.1	Sistema massa-mola acoplado.	23
2.2	Evolução de γ e estado x_2 (sólido: Teorema 2.1 ($L = 2$); tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996))	24
2.3	Sistema de posicionamento angular.	25
2.4	Evolução de γ (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)) no Exemplo 2.	26
2.5	Elipsóides invariantes (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).	27
2.6	Região de atração dos estados iniciais (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).	28
2.7	Sistema CSTR não isotérmico.	29
2.8	Evolução de γ (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)) no Exemplo 3.	30
2.9	Elipsóides invariantes correspondente ao CSTR (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).	31
2.10	Diagrama ilustrativo do míssil.	31
2.11	Evolução de γ (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)) para o modelo do míssil.	33
2.12	Elipsóides invariantes e região de atração correspondentes ao míssil ar-ar (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).	34
3.1	Evolução de γ (sólido : Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006)).	43

3.2	Elipsóides invariantes e região de atração dos estados para o rastreador de posicionamento (sólido: Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006)).	43
3.3	Sistema do gerador síncrono.	44
3.4	Evolução de γ (sólido: Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002)).	46
3.5	Elipsóides invariantes para os estados iniciais (preto: Teorema 3.1; verde: (Casavola et al., 2006); azul: (Cuzzola et al., 2002); vermelho: (Kothare et al., 1996))	46
3.6	Região de atração dos estados em perspectiva (preto: Teorema 3.1; verde: (Casavola et al., 2006); azul: (Cuzzola et al., 2002); vermelho: (Kothare et al., 1996))	47
3.7	Diagrama completo típico de uma planta hidrelétrica.	48
3.8	Turbina hidráulica tipo Francis.	49
3.9	Evolução de γ para a turbina hidráulica (sólido: Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006)).	50
3.10	Evolução dos estados para a turbina hidráulica (sólido/preto: Teorema 3.1; tracejado/vermelho: (Casavola et al., 2006)).	51
B.1	Representação LFT de um sistema LPV.	61

Lista de Tabelas

2.1	Complexidade numérica dos métodos e valores de γ para $t = 0$ para o exemplo massa-mola acoplado.	25
2.2	Complexidade numérica dos métodos e valores de γ para $t = 0$ no exemplo CSTR.	30
3.1	Valores de base adotados para o gerador síncrono.	45
3.2	Valores nominais dos parâmetros para o gerador síncrono.	45
3.3	Valores de ensaio para a planta hidrelétrica.	48
3.4	Complexidade numérica dos métodos no exemplo de controle de turbinas hidráulicas, e valores de γ associados	50

Lista de Acrônimos e Notação

\star	indica bloco simétrico nas LMIs
$(\cdot)^T$	indica o operador transposição em matrizes
$diag\{A, B\}$	indica uma matriz bloco diagonal composta pelas matrizes A e B
$W > 0$	indica que a matriz W é simétrica definida positiva
$W \geq 0$	indica que a matriz W é simétrica semi-definida positiva
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
$A(n)$	notação para representar a n -ésima linha da matriz A
$Tr(A)$	notação para representar o traço da matriz A
\mathbf{I}	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão apropriada
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais
N	denota o número de vértices de um politopo ($N \in \mathbb{N}_+^*$)
Ξ_N	simplex unitário de N variáveis
ξ	especialmente utilizada para representar as incertezas de um sistema

Sumário

Introdução	1
1 Controle preditivo usando desigualdades matriciais lineares	5
1.1 Modelos de incerteza	5
1.1.1 Incerteza politópica	5
1.2 Formulação do controle preditivo por função de Lyapunov quadrática	6
1.3 Estabilidade robusta	10
1.4 MPC por função de Lyapunov dependente de parâmetros	11
1.5 Formulação por LMI da estimativa dos elipsóides invariantes	13
2 Controle preditivo via função de Lyapunov dependente de caminho	15
2.1 Matriz de Lyapunov dependente de caminho	15
2.2 Exemplos Numéricos	23
3 Extensão para $B(\xi(t))$	35
3.1 Exemplos Numéricos	41
Conclusões e Perspectiva	52
Bibliografia	53
A Desigualdades matriciais lineares em controle	59
B Caracterização de sistemas LPV	61

Introdução

Processos químicos e petroquímicos são sistemas dinâmicos cuja principal característica é a imprevisibilidade. Esses processos demandam constantes melhoramentos nos índices de desempenho (econômico, segurança, ambiental, equipamento, etc . . .), afetando diretamente as áreas de instrumentação, controle, otimização e logística. Nesse contexto, a técnica de controle *on-line* denominada controle preditivo (do inglês, *Model Predictive Control* — MPC) surgiu da necessidade da utilização de computadores digitais na implementação de algoritmos de otimização dinâmicos, proporcionando: (a) adequação às constantes alterações das características das plantas; (b) adequação de restrições (sejam, *hard* ou *soft*); (c) antecipação das violações das restrições.

A heurística dessa metodologia é unicamente baseada nas ações de controle passadas e nas medidas atuais do processo, das quais as ações de controle presente e futura são calculadas. O objetivo é assegurar que a saída do MPC acompanhe uma trajetória de referência contida em um horizonte de predição com intervalos de amostragens pré-definidos. Devido às perturbações e descasamentos entre o modelo e a planta, apenas a primeira ação de controle é implementada, repetindo-se o cálculo para os intervalos de controle subsequentes como apresentado na Figura 1.

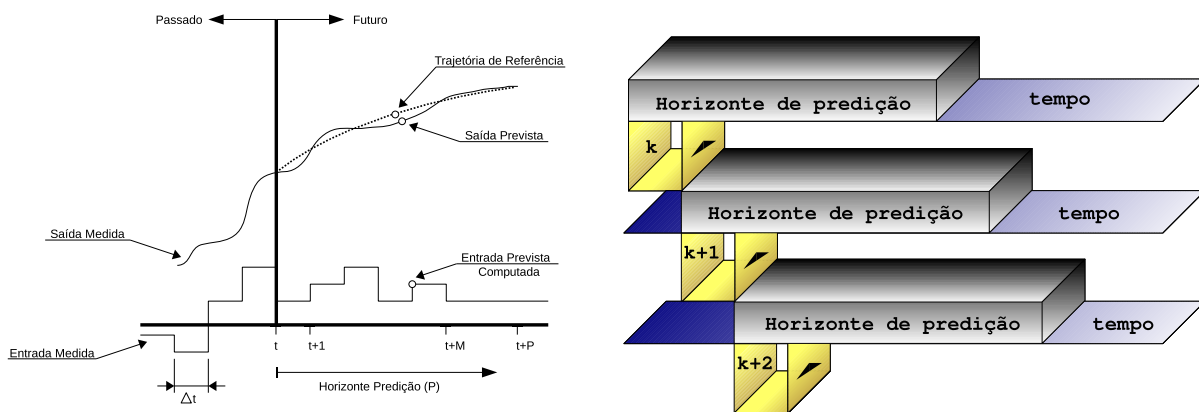


Figura 1: Heurística do controle preditivo.

Controle preditivo é um método de projeto de controle que contempla mais de trinta anos

de história. Nesse período, considerável atenção foi dispendida ao fato deste controlador não garantir a estabilidade do sistema, dependendo de ajustes iniciais nos parâmetros. De fato, o interesse na estabilidade tem sido o motor na geração das diferentes formulações de MPC.

Esta é a motivação para a apresentação de um breve histórico que inicia-se com o desenvolvimento do *software* denominado comando-identificação (do inglês, *Identification-Command* — IDCOM), ou algoritmo de modelo de controle (do inglês, *Model Algorithmic Control* — MAC) (Richalet, Rault, Testud e Papon 1978, Rouhani e Mehra 1982, Marchetti, Mellichamp e Seborg 1983, Ydstie 1984), que relaciona basicamente: (a) um modelo (linear) de convolução discreta explícito para representação e predição do sistema, (b) uma trajetória de referência, (c) um critério ótimo e, (d) a consideração de restrições de estado e controle. Em 1980, Cutler e Ramaker, engenheiros da Shell, desenvolveram independentemente o algoritmo de controle da matriz dinâmica (do inglês, *Dinamic Matrix Control* — DMC) aplicado a um craqueador catalítico de fluido, que conceitualmente é baseado na seleção de um horizonte de controle (L), de forma a otimizar uma função objetivo por meio da minimização de mínimos quadrados da diferença entre as saídas previstas e as saídas desejadas em um horizonte de predição (R). As características principais são: (a) um modelo linear de resposta ao degrau para a planta, (b) um objetivo de desempenho quadrático sobre um horizonte de predição finito, (c) especificação do comportamento da saída da planta por meio do rastreamento do *setpoint* e, (d) entradas ótimas geradas da solução do problema de mínimos quadrados. Esses algoritmos pertencem à chamada primeira geração de MPC.

García e Morari (1982) identificaram e discutiram as similaridades entre os algoritmos MAC e DMC, desenvolvendo o modelo de controle interno (do inglês, *Internal Model Control* — IMC) (Garcia, Prett e Morari 1989), que caracterizava-se pela facilidade no ajuste *on-line* dos parâmetros e redução nas ondulações de interamostragens. Posteriormente, com a adesão do algoritmo de programação quadrática às técnicas de controle preditivo, melhorias no desempenho de controle, como uma maior robustez, puderam ser obtidas, elevando a técnica ao nível de estado da arte em controle industrial (Ricker 1985, Garcia e Prett 1986), podendo ser considerada a segunda geração de MPC. Este fato inspirou a adesão curricular dos princípios gerais do MPC às Universidades, como na Georgia Institute of Technology (Arkun, Charos e Reeves 1988), e a publicação de diretrizes para normalizar os parâmetros de ajuste do controlador preditivo (Maurath, Mellichamp e Seborg 1988). Entretanto, estas formulações não eram suficientes para modelar plantas instáveis em malha aberta, como ocorria em grande parte dos processos químicos (Muske e Rawlings 1993).

Contemporâneo aos anos 1980, o algoritmo de controle preditivo generalizado (do inglês, *Generalized Predictive Control* — GPC) (Clarke, Mohtadi e Tuffs 1987a, Clarke, Mohtadi e Tuffs 1987b, Li e Biegler 1988, Clarke e Mohtadi 1989) surgiu como um método promissor ao estabelecer soluções para problemas do tipo: (a) planta de fase não mínima, (b) planta instável em malha aberta, (c) planta com *dead-time* variável ou desconhecido e (d) planta de ordem

desconhecida.

Contudo, os progressos realizados restringiam-se a sistemas lineares ou a modelos linearizados em torno de um ponto de operação (Lee e Ricker 1994, Sistu e Bequette 1995), que propiciavam uma solução analítica e menor demanda computacional ao custo de provas mais rigorosas de estabilidade e de desempenho, enfraquecendo, assim, o avanço na área de controle de sistemas não-lineares. Visto que muitos processos químicos são melhor modelados por equações algébricas diferenciais não-lineares, o uso da descrição linear ocasionava perdas de informações sobre os processos. Além disso, problemas de saturações nas entradas ocorrem em quase todos os sistemas químicos, impondo restrições do tipo *hard* aos problemas de otimização *on-line*, gerando controladores não-lineares na presença de modelo/planta dinâmicos lineares (Zafiriou 1990, Ricker 1990). Da necessidade do uso da teoria de controle não-linear aliada aos progressivos avanços do *hardware* computacional, despontaram as estratégias de programação quadrática sucessiva (do inglês, *Successive Quadratic Programming* — SQP) (Li e Biegler 1988, Brengel e Seider 1989), controle preditivo não-linear (do inglês, *Nonlinear Model Predictive Control* — NMPC) (Patwardhan, Rawlings e Edgar 1990, Bequette 1991a, Mutha, Cluett e Penlidis 1998, Henson 1998) e o incentivo a reavaliar as estratégias de controle estendendo os princípios do MPC ao uso das técnicas de controle não-linear (Eaton e Rawlings 1990, Bequette 1991b, Ramamurthi, Sistu e Bequette 1993, Sistu, Gopinath e Bequette 1993). Esses fatos caracterizam a terceira geração de MPC. Dentre as principais vantagens do controlador preditivo não-linear, incluem-se o tratamento explícito de atrasos no tempo, restrições, sistemas de fase não-mínima e a incorporação do conhecimento das mudanças de *setpoints* futuros.

Em meados da década de 1990, alguns algoritmos são retomados e revistos em uma nova abordagem, como a proposta por em Richalet (1993) que estende os conceitos do IDCOM às aplicações industriais denominadas “processos rápidos”. Em seguida, Lundström, Lee, Morari e Skogestad (1995) remodelam o DMC por meio do observador desenvolvido por Lee, Morari e Garcia (1994), de modo a evitar as limitações que interferem diretamente no desempenho da malha de realimentação do algoritmo. Outras contribuições, perspectivas, revisões e tutoriais detalhados sobre MPC são dados em (Shridhar e Cooper 1997, Scokaert e Mayne 1998, Morari e Lee 1999, Rawlings 2000, Qin e Badgwell 2003).

O MPC clássico resolve problemas de controle ótimo utilizando um horizonte finito de tempo, diferentemente de estratégias como o controle ótimo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , de horizonte infinito. A justificativa da abordagem MPC (horizonte finito) é que em geral o problema de malha aberta é solúvel em um tempo bem menor do que os tempos associados à dinâmica da planta. As técnicas de síntese de controladores preditivos \mathcal{H}_∞ descritas por Tadmor (1992) e Lall (1994) surgiram dessa extensão do horizonte de tempo.

Ainda na década 1990, surge uma nova abordagem para o MPC baseada em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMI) (Boyd, El Ghaoui, Feron e Balakrishnan 1994). Na verdade, inúmeros problemas de controle puderam ser reformulados

como problemas convexos por meio de LMIs, em diversos contextos, e assim também surgiram técnicas de MPC na forma de LMIs (Kothare, Balakrishnan e Morari 1996, Casavola, Famularo e Franzè 2002, Casavola, Famularo e Franzè 2003, Wang e Rawlings 2004a, Wang e Rawlings 2004b), o que seria a quarta geração de MPC. A abordagem proposta por Kothare et al. (1996) utilizava a estabilidade quadrática na formulação do problema de otimização. Buscando reduzir o conservadorismo, técnicas baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (do inglês, *Parameter Dependent Lyapunov Functions* — PDLF) para tratar sistemas politópicos discretos propostas por de Oliveira, Bernussou e Geromel (1999) (caso invariante no tempo) e Daafouz e Bernussou (2001) (caso variante no tempo), permitindo que novas estratégias de MPC, como em (Cuzzola, Geromel e Morari 2002, Wada, Saito e Saeki 2006) fossem desenvolvidas. Outros progressos expressivos nesse segmento usando o paradigma de incertezas estruturadas são dados em (Feng, Wang e Poh 2007, Lee e Park 2007, Lee, Park, Ji e Won 2007).

Portanto, o objetivo da dissertação é obter resultados menos conservadores aplicando a teoria de estabilidade desenvolvida por Lee (2006), sob novas condições de LMIs, por meio das funções de Lyapunov dependentes de caminhos (do inglês, *Path-Dependent Lyapunov Functions*), melhorando assim o desempenho do algoritmo de controle preditivo para sistemas lineares com parâmetros variantes e discretos no tempo com domínio de incerteza politópico.

A dissertação está organizada na seguinte ordem. No Capítulo 1, as formulações de síntese MPC baseada em LMIs propostas por Kothare et al. (1996) e Wada et al. (2006) são revistas. Nas seções posteriores do Capítulo 1, teorias de estabilidade robusta para sistemas incertos discretos no tempo com domínios de incerteza politópicos são descritos e inseridos no conceito de MPC para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter Varying* — LPV). O Capítulo 2 traz a teoria de estabilidade exponencial uniforme e a abordagem de funções de Lyapunov dependentes de caminhos aplicada a MPC. Uma formulação estendida para sistemas com a matriz de controle dependente de parâmetros é dada no Capítulo 3. E finalmente, uma conclusão finaliza o trabalho.

Controle preditivo usando desigualdades matriciais lineares

1.1 Modelos de incerteza

Uma das deficiências existentes nas técnicas MPC mencionadas é a planta do modelo não incorporar explicitamente as incertezas do processo. Essas incertezas são caracterizadas pelas imprecisões nas medidas, erros cometidos nas aproximações por modelos lineares ou linearizados e outras. Contudo, este problema vem sendo resolvido com o desenvolvimento de métodos de análise e síntese para sistemas lineares capazes de tratar parâmetros incertos invariantes ou variantes no tempo pertencentes a politopos. Em sua maioria, os métodos são baseados na teoria de estabilidade de Lyapunov associada a métodos numéricos convexos descritos na forma de LMIs. Considere o seguinte sistema linear com parâmetros variantes no tempo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(\xi(t))x(t) + B(\xi(t))u(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ [A(\xi(t)) \ B(\xi(t))] &\in \Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ são, respectivamente, a entrada de controle, o estado e a saída da planta. As matrizes $A(\xi(t))$ e $B(\xi(t))$ pertencem ao politopo Ω e são parametrizadas em função do vetor parâmetros variantes no tempo $\xi(t)$, $\forall t \geq 0$. Em particular, esta dissertação considera o simplex unitário como o conjunto no qual o vetor de parâmetros $\xi(t)$ pode assumir valores. Essa descrição é também conhecida na literatura como modelo “politópico”, sendo bastante popular dentro da classe de métodos desenvolvidos para sistemas lineares incertos.

1.1.1 Incerteza politópica

Seja Ω o conjunto politópico

$$\Omega = Co \{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_N \ B_N]\} \tag{1.2}$$

com Co denotando a envoltória convexa (vide Figura 1.1); ou equivalentemente, considere $A(\xi(t))$ e $B(\xi(t))$ associados ao vetor de parâmetros $\xi(t) = [\xi_1(t) \ \cdots \ \xi_N(t)]^T$, na seguinte forma

$$[A(\xi(t)) \ B(\xi(t))] = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) [A_j \ B_j], \quad \xi(t) \in \Xi$$

$$\Xi = \{ \xi(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \xi_j(t) = 1, \xi_j(t) \geq 0, j = 1 \cdots N \}. \quad (1.3)$$

em que Ξ é o simplex unitário. No modelamento de sistemas (não-lineares) politópicos, o procedimento envolve um conjunto de dados de entrada/saída visando o desenvolvimento de modelos lineares, permitindo que os sistemas (1.1) e (1.2) aproximem plantas reais. Além disso, ferramentas matemáticas como o Jacobiano e métodos de resposta ao impulso podem contribuir para as aproximações de sistemas lineares variantes no tempo (do inglês, *Linear Time-Varying* — LTV).

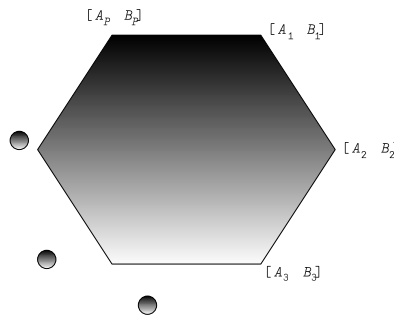


Figura 1.1: Representação gráfica da incerteza politópica.

1.2 Formulação do controle preditivo por função de Lyapunov quadrática

A formulação do projeto de MPC que estabiliza o sistema (1.1) baseia-se na minimização do valor máximo da função objetivo com desempenho robusto,

$$\min_{m=0,1,\dots,M} \max_{[A(\xi(t+m)) \ B(\xi(t+m))] \in \Omega, m \geq 0} J_\infty(t) \quad (1.4)$$

com

$$J_\infty(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} (x(t+m|t)^T \mathcal{Q} x(t+m|t) + u(t+m|t)^T \mathcal{R} u(t+m|t)) \quad (1.5)$$

no qual $\mathcal{R} \geq 0$ e $\mathcal{Q} > 0$ são matrizes ponderantes disponíveis. A notação $x(t+m|t)$, usual no contexto de MPC, significa a predição do estado no instante $t+m$ ($m \geq 1$) a partir da leitura do estado no instante t . A entrada de controle para o instante $t+m$, denotada por $u(t+m|t)$, é obtida como a solução do problema de otimização no instante t . Esse problema de min-max corresponde ao MPC de pior caso com um objetivo quadrático.

Para obter um método de síntese baseado em LMIs para o controlador preditivo de horizonte infinito definido em (1.4), considere a lei de controle de realimentação de estado $u(t+m|t) = Fx(t+m|t)$, $m \geq 0$, que minimiza robustamente (1.5). Considerando a função quadrática $V(x(t|t)) = x(t|t)^T P x(t|t)$, com $P > 0$, $V(0) = 0$, para que o critério $J_\infty(t)$ seja finito, é necessário que $x(\infty|t) = 0$. Assim, pode-se derivar um limite superior para $J_\infty(t)$ por

$$\begin{aligned} V(x(t+m+1|t)) - V(x(t+m|t)) \\ \geq -(x(t+m|t)^T \mathcal{Q} x(t+m|t) + u(t+m|t)^T \mathcal{R} u(t+m|t)) \\ \forall [A(\xi(t+m)) \ B(\xi(t+m))] \in \Omega, \ m \geq 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Somando (1.6) de $m=0$ a $m \rightarrow +\infty$, tem-se

$$\max_{[A(\xi(t+m)) \ B(\xi(t+m))] \in \Omega, m \geq 0} J_\infty(t) < V(0, t) \quad (1.7)$$

Portanto, o objetivo da síntese do MPC é determinar uma lei de controle de realimentação de estado independente de parâmetros $u(t+m|t) = Fx(t+m|t)$ a fim de minimizar o limite superior $V(x(t|t))$, em cada instante t . No instante de amostragem posterior, o estado no instante $t+1$ é medido, e o cálculo repetido para computar F .

Teorema 1.1 *Seja $x(t) = x(t|t)$ o estado do sistema (1.1) medido no instante de amostragem t . Assuma que o sistema (1.1) não está sujeito a restrições.*

(a) Otimização. *A matriz de realimentação de estado F associada à lei de controle $u(t+m|t) = Fx(t+m|t)$, $m \geq 0$, que minimiza o limite superior $V(x(t|t))$ na função objetivo de desempenho robusto no instante de amostragem t é dada por*

$$F = YQ^{-1} \quad (1.8)$$

com $Q > 0$ e Y obtidas da solução (se esta existir) do seguinte problema de minimização do objetivo linear,

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma \quad (1.9)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & x(t|t)^T \\ x(t|t) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.10)$$

e

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & Q\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} & Y^T \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

(b) Elipsóides invariantes. No instante de amostragem t , suponha que exista $Q > 0$, γ e $Y = FQ$ tais que (1.11) verifica-se. Suponha ainda que $u(t + m|t) = Fx(t + m|t)$, $m \geq 0$. Portanto, se

$$\begin{aligned} (x(t + m|t)^T Q^{-1} x(t + m|t) \leq 1 \\ \text{(ou, equivalentemente, } x(t + m|t)^T P x(t + m|t) \\ \leq \gamma \text{ com } P = \gamma Q^{-1}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

então

$$\max_{[A(\xi(t+m)) \ B(\xi(t+m))] \in \Omega, m \geq 0} x(t + m|t)^T Q^{-1} x(t + m|t) < 1 \quad (1.13)$$

ou, equivalentemente,

$$\max_{[A(\xi(t+m)) \ B(\xi(t+m))] \in \Omega, m \geq 0} x(t + m|t)^T P x(t + m|t) < \gamma \quad (1.14)$$

Assim, $\mathcal{E} = \{z \mid z^T Q^{-1} z \leq 1\} = \{z \mid z^T P z \leq \gamma\}$ é um elipsóide invariante para os estados preditos no sistema incerto. A Figura 1.2 fornece uma ilustração gráfica para \mathcal{E} no caso de um sistema de duas dimensões (dois estados), ou seja, a maximização define o valor de pior caso de $x(t + m|t)^T Q^{-1} x(t + m|t)$ para todo instante $t + m$, $t \geq 1$.

(c) Restrições na entrada de controle e no sinal de saída. Assuma que o sistema (1.1) está sujeito a restrições.

Restrições na entrada. Existem dois tipos de restrições a considerar: restrições soft, em que violações de limites são toleradas para satisfação de outro critério; e restrições hard, em que nenhuma violação dinâmica nos limites é permitida para qualquer instante de tempo, e que estão geralmente presentes devido às limitações físicas intrínsecas nos equipamentos. Assim, será mostrado como incorporar estas restrições ao MPC na forma de LMIs. Para tanto, existem duas considerações, a norma Euclidiana e a limitação máxima de cada componente, dadas respectivamente por

$$\|u(t + m|t)\|_2 \leq u_{max}, \quad t, m \geq 0, \quad (1.15)$$

e,

$$|u_j(t + m|t)| \leq u_{j,max}, \quad t, m \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_u. \quad (1.16)$$

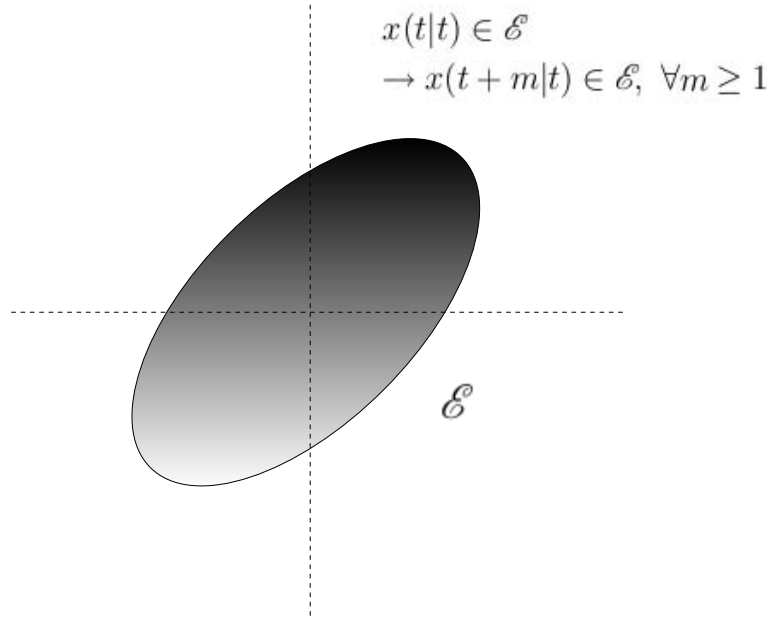


Figura 1.2: Representação gráfica do elipsóide invariante em duas dimensões.

Com as devidas manipulações algébricas, e utilizando o complemento de Schur e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, definem-se as respectivas restrições LMIs como

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.17)$$

e

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad X_{jj} \leq u_{j,max}^2, \quad j = 1, 2, \dots, n_u \quad (1.18)$$

Restrições na saída. São caracterizadas por especificações de desempenho na saída do processo. Assim, considere a norma Euclidiana aplicada às restrições de saída

$$\|y(t+m|t)\|_2 \leq y_{max}, \quad t \geq 0, \quad m \geq 1 \quad (1.19)$$

Visto que a incerteza de interesse é a (1.2), por meio de manipulações algébricas pode-se demonstrar que (1.19) pode ser testada usando a LMI

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C^T \\ C(A_j Q + B_j Y) & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (1.20)$$

(d) Factibilidade. A solução no instante t é uma solução factível (mas não necessariamente ótima) para restrições (1.10) e (1.11) no instante $t+1$. Conseqüentemente, se o problema de otimização de LMI (1.9) admite uma solução no instante t , então admite uma solução para todos instantes $t+m$ ($m \geq 0$).

(e) **Estabilidade robusta.** *A lei de controle de realimentação de estado $u(t + m|t) = Fx(t + m|t)$, $m \geq 0$ sujeita a (1.17) e (1.20) estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada.*

Prova: Veja Kothare et al. (1996). ■

Observação 1 *As variáveis de otimização deveriam ser denotadas por $Q(t)$, $F(t)$, $Y(t)$ etc. para enfatizar que estas são computadas para o instante t . Entretanto, por conveniência de notação, é omitido o índice t aqui e nas próximas seções.*

1.3 Estabilidade robusta

A análise de robustez para sistemas é, em muitos casos, realizada em domínios convexos de incerteza, cujo teste de estabilidade de maior interesse é pertinente à classe de métodos definidos por funções de Lyapunov. A abordagem mais conservadora dessa categoria é a estabilidade quadrática, que baseia-se em uma matriz de Lyapunov constante para testar a estabilidade de todo o domínio de incerteza. Esta condição foi adotada na seção anterior, e destaca-se pela facilidade na síntese robusta, ou seja, parametrização convexa imediata do controlador dada em (1.8) (Geromel, Peres e Bernussou 1988). Com a finalidade de reduzir o conservadorismo da estrutura quadrática, são construídas funções de Lyapunov *dependentes de parâmetros* aplicadas a sistemas incertos discretos no tempo com domínio de incerteza politópico. Nesse contexto, a inovação consiste no uso de variáveis auxiliares (ou, variáveis de folga) na parametrização convexa dos controladores, sejam estes robustos (de Oliveira et al. 1999) ou dependentes de parâmetros (Daafouz e Bernussou 2001).

Assim, a estabilização do sistema (1.1) pela lei de controle dependente de parâmetros $u(t) = F(\xi(t))x(t)$ pode ser realizada pela seguinte condição:

Teorema 1.2 *O sistema (1.1) é estabilizável pela lei de controle dependente de parâmetros $u(t) = F(\xi(t))x(t)$ se existirem matrizes simétricas definidas positivas S_j e matrizes G_j, R_j , $j = 1, \dots, N$, soluções das LMIs*

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j^T - S_j & * \\ A_j G_j + B R_j & S_k \end{bmatrix} > 0, \quad (1.21)$$

para todo $j = 1, \dots, N$ e $k = 1, \dots, N$. A lei de controle de realimentação de estados dependente de parâmetros é então dada por $u(t) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) F_j x(t)$ com $F_j = R_j G_j^{-1}$.

Prova: Veja Daafouz e Bernussou (2001). ■

Este resultado baseia-se no uso da função de Lyapunov dependente de parâmetro $V(x(t), \xi(t)) = x^T(t)S(\xi(t))x(t)$ na qual $\xi(t)$ caracteriza a incerteza paramétrica variante no tempo, com a matriz de Lyapunov dada por

$$S(\xi(t)) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) S_j, \xi(t) \in \Xi \quad (1.22)$$

No caso de $S(\xi(t)) = S$, estabelece-se a estabilidade quadrática como um caso particular. De fato, esse resultado é uma extensão da proposta de (de Oliveira et al. 1999) para tratar de parâmetros variantes no tempo e controladores dependentes de parâmetros. A síntese robusta pode ser feita da maneira imediata, bastando impor $G_j = G$, $R_j = R$, $j = 1, \dots, N$, em (1.21)

Os resultados da próxima seção são a reformulação dos resultados apresentados na seção 1.2 em função da matriz de Lyapunov dependente de parâmetros dada em (1.22).

1.4 MPC por função de Lyapunov dependente de parâmetros

Nesta seção uma nova abordagem fornece métodos de síntese MPC baseadas em LMIs que levam a resultados menos conservadores utilizando funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. Esta classe de funções de Lyapunov generaliza os resultados de estabilidade quadrática tendo-a como um caso particular. Para tanto, será discutida a técnica desenvolvida por Wada et al. (2006), considerando o caso particular em que $B(\xi(t)) = B$.

Seja a lei de controle de realimentação de estado no instante t

$$u(t + m|t) = F(\xi(t))x(t + m|t), \quad m \geq 0 \quad (1.23)$$

minimizando robustamente (1.5). Assim, considere a função quadrática

$$V(m, t) = x(t + m|t)^T P(m, t)x(t + m|t), \quad m \geq 0 \quad (1.24)$$

que para todo $m, t \geq 0$, $P(m, t) > 0$. Como $x(\infty|t) = 0$, $V(x(\infty|0)) = 0$, determina-se um limite superior para a função custo $J_\infty(t)$ dado por

$$\begin{aligned} V(m + 1|t) - V(m|t) \\ \geq -(x(t + m|t)^T \mathcal{Q}x(t + m|t) + u(t + m|t)^T \mathcal{R}u(t + m|t)) \\ \forall [A(\xi(t + m)) \ B] \in \Omega, \quad m \geq 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

que, somando de $m = 0$ a $m \rightarrow +\infty$, fornece

$$\max_{[A(\xi(t+m)) \ B] \in \Omega, m \geq 0} J_\infty(t) < V(0, t) = x(t|t)^T P(0, t)x(t|t) < \gamma \quad (1.26)$$

no qual γ é um coeficiente de desempenho não-negativo a ser minimizado.

Teorema 1.3 *Considere o sistema (1.1), redefinido com a matriz de controle B constante.*

(a) Otimização. *Dado $x(t|t)$, y_{max} , u_{max} , matrizes definidas positivas \mathcal{Q} e \mathcal{R} , assuma que existam matrizes Y_j , G_j , matrizes simétricas Q_j , $j = 1, \dots, N$ e um escalar positivo γ tais que*

$$\begin{bmatrix} 1 & x(t|t)^T \\ x(t|t) & Q_j \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.27)$$

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j^T - Q_j & * & * & * \\ A_j G_j + B Y_j & Q_k & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} G_j & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y_j & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, N \quad (1.28)$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & Y_j \\ Y_j^T & G_j + G_j^T - Q_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.29)$$

$$\begin{bmatrix} y_{max}^2 I & * \\ (A_j G_j + B Y_j)^T C^T & G_j + G_j^T - Q_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.30)$$

Então, pela lei de controle

$$u(t + m|t) = F(\xi(t + m))x(t + m|t), \quad m \geq 0 \quad (1.31)$$

na qual $F(\xi(t)) := \sum_{j=1}^L \xi_j(t) F_j$, $F_j := Y_j G_j^{-1}$, as seguintes desigualdades se verificam.

$$J_{\infty}(t) < \gamma \quad (1.32)$$

$$\|u(t + m|t)\|_2 \leq u_{max} \quad \forall m \geq 0 \quad (1.33)$$

$$\|y(t + m|t)\|_2 \leq y_{max} \quad \forall m \geq 1 \quad (1.34)$$

com $V(t + m|t) := x(t + m|t)^T P(\xi(t + m))x(t + m|t)$, e a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros dada por:

$$P(\xi(t)) := \sum_{j=1}^N \xi_j(t) P_j.$$

sendo que $P_j := \gamma Q_j^{-1}$.

(b) Factibilidade. Considere o sistema (1.1). A solução no instante t é uma solução factível (mas não necessariamente ótima) para restrições (1.27)-(1.30) no instante $t + 1$. Conseqüentemente, se o problema de otimização LMI admite uma solução no instante t , então também admite uma solução para todos instantes $t + m$ ($m \geq 0$).

(c) Estabilidade. Considere o sistema (1.1). Assuma que as condições declaradas anteriormente são factíveis no instante zero. Então a lei de controle $u(t) = F(\xi(t))x(t)$ estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada.

Prova: Veja apêndices de (Wada et al. 2006). ■

Verifica-se, finalmente, que os resultados obtidos por Kothare, Balakrishnan, e Morari (1996) e Cuzzola, Geromel e Morari (2002) são casos particulares do teorema anterior. Este fato pode ser comprovado pelas seguintes proposições.

Proposição 1 Considere o sistema (1.1) com B constante. Dados $x(t|t)$, u_{max} , y_{max} , matrizes definidas positivas \mathcal{Q} e \mathcal{R} , assumo que existam matrizes Y , $Q = Q^T$, e um escalar positivo γ que satisfaçam (1.27)-(1.30), $Y = Y_j$, $Q = Q_j = G_j$, $\forall j = 1, \dots, N$. Então, usando a lei de controle $u(t + m|t) = Fx(t + m|t)$, $F = YG^{-1}$, as condições (1.32)-(1.34) são verificadas (Kothare et al. 1996).

Proposição 2 *Considere o sistema (1.1) com B constante. Dados $x(t|t)$, u_{max} , y_{max} , matrizes definidas positivas \mathcal{Q} e \mathcal{R} , assuma que existam matrizes $Y = Y_j$, $G = G_j$, $\forall j = 1, \dots, N$, matrizes simétricas Q_j , $\forall j = 1, \dots, N$ e um escalar positivo γ que satisfaçam (1.27)-(1.30). Então, usando a lei de controle $u(t+m|t) = Fx(t+m|t)$, $F = YG^{-1}$, as condições (1.32)-(1.34) são verificadas (Cuzzola et al. 2002) para sistemas invariantes no tempo ($\xi(t) = \xi$) e (Mao 2003) para o caso variante no tempo.*

Assim, pode ser definida a seguinte relação:

Teorema 1.4 *Proposição 1 \implies Proposição 2 \implies Teorema 1.3*

Conseqüentemente, o Teorema 1.3 fornece resultados menos conservadores dentre estas condições. Por fim, a implementação computacional baseada no Teorema 1.3 segue do seguinte algoritmo MPC.

Algoritmo 1 —

1. Faça $t = 0$.
2. Meça ou estime $x(t|t)$.
3. Resolva $\min_{Y_j, G_j, Q_j} \gamma$, sujeito às restrições (1.27)-(1.30).
4. Meça ou estime $\xi(t)$, compute $F(\xi(t))$ e aplique $u(t) = F(\xi(t))x(t)$ à planta.
5. Faça $t \leftarrow t + 1$ e retorne ao passo 2.

Observação 2 *O parâmetro $\xi(t)$ deve ser medido em cada instante de tempo t , para a aplicação do Algoritmo 1.*

1.5 Formulação por LMI da estimativa dos elipsóides invariantes

Nesta seção, a formulação de um problema de otimização baseado em desigualdades matriciais lineares é fornecida como meio de estimação para as regiões de estabilidade e de predição dos estados do sistema. Note que a ilustração dada na Figura 1.2 é obtida de forma direta, pois foi utilizada uma função de Lyapunov quadrática. Entretanto, a função de Lyapunov dependente de parâmetros requer uma estimativa para o elipsóide \mathcal{E} definida como a solução ótima do seguinte problema de minimização,

$$\min_{Q_m} \beta \tag{1.35}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \beta &\geq \text{Tr}(Q_m) \\ \begin{bmatrix} Q_m & * \\ I & Q_j \end{bmatrix} &> 0, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

que define o maior elipsóide contido na interseção das regiões delimitadas por cada uma das matrizes Q_j que compõem a função de Lyapunov dependente de parâmetros. Portanto, no caso da estimativa dos elipsóides invariantes (\mathcal{E}), o problema de otimização é resolvido posteriormente ao problema do MPC. Entretanto, se o objetivo é obter o maior elipsóide invariante possível, as LMIs referentes ao problema MPC são adicionadas ao problema de otimização (1.35), considerando que o índice de desempenho quadrático (γ) é definido a priori.

Comentários Finais

Visto que os conceitos definidos neste capítulo correspondem aos progressos realizados em sistemas politópicos lineares com parâmetros variantes no tempo, apresenta-se no próximo capítulo a formulação de novas condições de LMIs para o projeto do controle preditivo dadas em termos de funções de Lyapunov dependentes de caminho.

No contexto de análise de estabilidade robusta para a classe de sistemas investigada neste trabalho, as funções de Lyapunov dependentes de caminho permitem construir testes de estabilidade suficientes que são assintoticamente necessários à medida que o tamanho do caminho cresce (Lee 2006). Essa é a principal motivação do desenvolvimento de condições de síntese de controle MPC baseadas na funções de Lyapunov dependentes de caminho, apresentadas nos próximos capítulos. Apesar das condições serem apenas suficientes para a síntese de um controle MPC, os resultados numéricos mostram que o conservadorismo é reduzido à medida que o tamanho do caminho cresce. Além disso, essa classe de funções contém as funções de Lyapunov quadráticas e as dependentes de parâmetros na forma afim como casos particulares. É importante explicitar ainda que, a teoria desenvolvida na Seção 1.5 será estendida e adaptada aos exemplos abordados nos capítulos subseqüentes de forma implícita.

Controle preditivo via função de Lyapunov dependente de caminho

Seja o sistema linear variante no tempo

$$x(t+1) = A(\xi(t))x(t) + Bu(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.1b)$$

com t sendo o tempo discreto, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o estado do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída, e somente a matriz dinâmica do sistema é afetada por parâmetros variantes no tempo na forma

$$A(\xi(t)) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) A_j, \quad \xi(t) \in \Xi \quad (2.2)$$

sendo $\xi(t)$ o vetor de parâmetros. Na seqüência, serão expostas novas condições de síntese MPC formuladas em termos de LMIs menos conservadoras do que as condições existentes baseadas na estabilidade quadrática e em funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. As condições propostas são baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática nos estados e que depende de maneira multi-afim dos parâmetros em seus instantes de tempo sucessivos até um instante máximo L , dado *a priori*. A próxima seção define essa função e apresenta a notação necessária para representá-la sistematicamente em função de L .

2.1 Matriz de Lyapunov dependente de caminho

Uma matriz de Lyapunov dependente de caminho de tamanho L é definida como

$$P(\xi, t, L) = \sum_{\mathbf{z}_- \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{\mathbf{z}_-} \quad (2.3)$$

sendo \mathcal{N} o conjunto

$$\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$$

e \mathcal{N}^L o conjunto gerado pelo L -ésimo produto cartesiano de \mathcal{N} . Para uma ênupla $\mathbf{z} = (i_0, i_1, \dots, i_L)$ pertencente ao $(L + 1)$ -ésimo produto cartesiano de \mathcal{N} , i.e. $\mathbf{z} \in \mathcal{N}^{L+1}$, \mathbf{z}_- é definida como

$$\mathbf{z}_- = (i_0, i_1, \dots, i_{L-1}) \quad (2.4)$$

Considere também as seguintes ênuplas auxiliares que serão usadas na seqüência

$$\mathbf{z}_+ = (i_1, i_2, \dots, i_L), \quad \mathbf{z}_-^* = (i_1, \dots, i_{L-1}) \quad (2.5)$$

Como exemplo, considere $N = 2$, $L = 2$. Nesse caso a matriz de Lyapunov dependente de caminho é dada por

$$\begin{aligned} P(\xi(t), \xi(t+1)) &= \sum_{i_0=1}^2 \sum_{i_1=1}^2 \xi_{i_0}(t) \xi_{i_1}(t+1) P_{i_0 i_1} \\ &= \xi_1(t) \xi_1(t+1) P_{11} + \xi_1(t) \xi_2(t+1) P_{12} \\ &\quad + \xi_2(t) \xi_1(t+1) P_{21} + \xi_2(t) \xi_2(t+1) P_{22} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Justifica-se a utilização do termo “caminho” pela observação dos índices associados às matrizes que compõem a matriz de Lyapunov. No exemplo anterior têm-se os seguintes índices: 11, 12, 21 e 22, que representam todas as possíveis seqüências de chaveamentos (“caminhos”) entre os dois vértices do sistema em dois instantes de tempo. Note que essas seqüências de chaveamentos são definidas de maneira sistemática por meio do conjunto \mathcal{N}^L . Essa denominação foi criada no contexto de sistemas chaveados discretos no tempo, nos quais, de fato, o sistema só pode evoluir (“caminhar”) nos vértices do politopo (Lee e Dullerud 2006). A extensão para o caso de sistemas em que o parâmetro $\xi(t)$ pode assumir qualquer valor dentro do politopo também utiliza o termo “caminho”, pois as matrizes de Lyapunov são indexadas apenas em função dos vértices do sistema (veja Lee (2006) para mais detalhes).

Com essas notações e definições é possível construir condições de síntese MPC baseadas na matriz de Lyapunov (2.3) parametrizadas de maneira sistemática em termos do tamanho do caminho L arbitrado *a priori*. O problema de otimização é dado por

$$\min_{\substack{u(t+m|t) \\ m=0,1,\dots,M}} \max_{[A(\xi(t+m)) \ B(\xi(t+m))] \in \Omega, m \geq 0} J_\infty(t) \quad (2.7)$$

com

$$J_\infty(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} (x(t+m|t)^T \mathcal{Q} x(t+m|t) + u(t+m|t)^T \mathcal{R} u(t+m|t))$$

Teorema 2.1 *Considere o sistema (2.1) e o critério (2.7).*

(a) Otimização. *Assuma que para um dado estado fixo de $x(t|t)$ exista um escalar γ e matrizes $Y_{i_0} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $G_{i_0} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $0 < Q_{\mathbf{z}_-} = Q_{\mathbf{z}_-}^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que, para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{N}^{L+1}$,*

as seguintes LMIs são verificadas

$$\begin{bmatrix} G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{z_-} & * & * & * \\ A_{i_0} G_{i_0} + B Y_{i_0} & Q_{z_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} G_{i_0} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(t + i|t)^T \\ x(t + i|t) & Q_{z_-} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & * \\ Y_{i_0}^T & G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{z_-} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} y_{max}^2 I & * \\ (A_{i_0} G_{i_0} + B_{i_0} Y_{i_0})^T C^T & G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{z_-} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.11)$$

Então, a lei de controle $u(t + m|t) = (\sum_{i_0=1}^N \xi_{i_0}(t + m) F_{i_0}) x(t + m|t)$, $m \geq 0$, com $F_{i_0} = Y_{i_0} G_{i_0}^{-1}$, assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada, e garante as seguintes desigualdades

$$J_\infty(t) < \gamma \quad (2.12)$$

$$\|u(t + m|t)\|_2 \leq u_{max}, \quad \forall m \geq 0 \quad (2.13)$$

$$\|y(t + m|t)\|_2 \leq y_{max}, \quad \forall m \geq 1 \quad (2.14)$$

(b) Factibilidade. Considere o sistema (1.1). Assuma que as condição (2.8)-(2.11) são factíveis para o instante t . Então, o problema de otimização é factível para todos os instantes $t + m$ ($m \geq 0$).

(c) Estabilidade. As condições declaradas no item **(a)** asseguram a estabilidade assintótica robusta do sistema em malha fechada.

Prova: Inicialmente será provada a desigualdade (2.12), considerando a seguinte função de Lyapunov

$$V(t + m|t) = x(t + m|t)^T P(\xi, t + m, L) x(t + m|t) \quad (2.15)$$

com $P(\xi, t, L)$ dada por (2.3). Essa classe de funções de Lyapunov tem sido usada com um número arbitrário de instantes a frente no contexto de sistemas chaveados e sistemas variantes e discretos no tempo, sendo denominada função de Lyapunov dependente de caminho (Lee 2006). A primeira diferença de (2.15) fornece

$$\begin{aligned} V(t + m + 1|t) - V(t + m|t) = & \\ & x(t + m + 1|t)^T P(\xi, t + m + 1, L) x(t + m + 1|t) \\ & - x(t + m|t)^T P(\xi, t + m, L) x(t + m|t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para $\xi(t) \in \Xi$, pode-se definir

$$\begin{aligned}
 P(\xi, t+1, L) &= \sum_{\mathbf{z}_- \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t+k+1) \right) P_{\mathbf{z}_-} \\
 &= \sum_{i_0 \in \mathcal{N}} \cdots \sum_{i_{L-1} \in \mathcal{N}} \left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t+k+1) \right) P_{(i_0, \dots, i_{L-1})} \\
 &= \sum_{i_0 \in \mathcal{N}} \cdots \sum_{i_{L-1} \in \mathcal{N}} \left(\prod_{k'=1}^L \xi_{i_{(k'-1)}}(t+k') \right) P_{(i_0, \dots, i_{L-1})} \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathcal{N}} \cdots \sum_{i_L \in \mathcal{N}} \left(\prod_{k'=1}^L \xi_{i_{(k')}}(t+k') \right) P_{(i_0, \dots, i_L)} \\
 &= \sum_{\mathbf{z}_+ \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=1}^L \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{\mathbf{z}_+}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Notando que

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}} \xi_{\mathbf{z}}(t) = 1 \tag{2.18}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
 P(\xi, t+1, L) &= \left(\sum_{i_0 \in \mathcal{N}} \xi_{i_0}(t) \right) \sum_{\mathbf{z}_+ \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=1}^L \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{\mathbf{z}_+} \\
 &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}^{L+1}} \left(\prod_{k=0}^L \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{\mathbf{z}_+}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{aligned}
 P(\xi, t, L) &= \left(\sum_{i_L \in \mathcal{N}} \xi_{i_L}(t+L) \right) \sum_{\mathbf{z}_- \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=1}^{L-1} \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{\mathbf{z}_-} \\
 &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}^{L+1}} \left(\prod_{k=0}^L \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{\mathbf{z}_-}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Agora, assumamos que a desigualdade (2.8) é factível. Portanto as desigualdades $G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{z}_-} > 0$ e $Q_{\mathbf{z}_-} > 0$ são verificadas, implicando que a matriz G_{i_0} é não-singular. Além disso, nota-se que $(Q_{\mathbf{z}_-} - G_{i_0})^T Q_{\mathbf{z}_-}^{-1} (Q_{\mathbf{z}_-} - G_{i_0}) \geq 0$ é equivalente a

$$G_{i_0}^T Q_{\mathbf{z}_-}^{-1} G_{i_0} \geq G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{z}_-} \tag{2.21}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} G_{i_0}^T Q_{\mathbf{z}_-}^{-1} G_{i_0} & * & * & * \\ A_{i_0} G_{i_0} + B Y_{i_0} & Q_{\mathbf{z}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} G_{i_0} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.22)$$

Então, pela substituição de $Y_{i_0} = F_{i_0} G_{i_0}$ em (2.22) e multiplicando à esquerda por \mathcal{D}^T e à direita por \mathcal{D} , com

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} G_{i_0}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\mathbf{z}_+}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

tem-se a desigualdade

$$\begin{bmatrix} Q_{\mathbf{z}_-}^{-1} & * & * & * \\ Q_{\mathbf{z}_+}^{-1} (A_{i_0} + B F_{i_0}) & Q_{\mathbf{z}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} F_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.24)$$

Assim, definindo $P_{\mathbf{z}_-} = \gamma Q_{\mathbf{z}_-}^{-1}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} P_{\mathbf{z}_-} & * & * & * \\ \frac{1}{\gamma} P_{\mathbf{z}_+} (A_{i_0} + B F_{i_0}) & \frac{1}{\gamma} P_{\mathbf{z}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} F_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.25)$$

Então, pela multiplicação de (2.25) por $\xi_{i_k}(t+m+k)$, $k \in [0, L]$, e somando para $\mathbf{z} \in \mathcal{N}^{L+1}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m, L) & * & * & * \\ \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m+1, L) A_{cl}(\xi(t+m)) & \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m+1, L) & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} F(\xi(t+m)) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.26)$$

que, por complemento de Schur produz

$$\begin{bmatrix} P(\xi, t+m, L) - (\mathcal{Q} + F(\xi(t+m))^T \mathcal{R} F(\xi(t+m))) & * \\ P(\xi, t+m+1, L) A_{cl}(\xi(t+m)) & P(\xi, t+m+1, L) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.27)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & A_{cl}(\xi(t+m))^T P(\xi, t+m+1, L) A_{cl}(\xi(t+m)) \\ & - P(\xi, t+m, L) < -(\mathcal{Q} + F(\xi(t+m))^T \mathcal{R} F(\xi(t+m))) < 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Multiplicando a última desigualdade à esquerda por $x(t+m|t)^T$ e à direita por $x(t+m|t)$, e usando $u(t+m|t) = \left(\sum_{i_0=1}^N \xi_{i_0}(t+m)F_{i_0}\right)x(t+m|t)$, $m \geq 0$, o sistema LPV discreto no tempo (2.1) e a função de Lyapunov dependente de parâmetros (2.3), determina-se

$$\begin{aligned} V(t+m+1|t) - V(t+m|t) \\ < - \left(x(t+m|t)^T \mathcal{Q}x(t+m|t) + u(t+m|t)^T \mathcal{R}u(t+m|t) \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

que é verificada para todo $\xi(t+m) \in \Xi$, $\forall m \geq 0$. Somando de $m=0$ a $m \rightarrow +\infty$, conclui-se que

$$J_\infty(t) < V(t|t) = x(t|t)^T P(\xi, t, L)x(t|t) \quad (2.30)$$

Da factibilidade de (2.8) e (2.9), com $P_{\mathbf{z}_-} = \gamma Q_{\mathbf{z}_-}^{-1}$, e usando complemento de Schur, tem-se

$$x(t+m|t)^T P_{\mathbf{z}_-} x(t+m|t) < \gamma \quad (2.31)$$

implicando que

$$J_\infty(t) < V(t|t) = \sum_{\mathbf{z}_- \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t+k) \right) x(t|t)^T P_{\mathbf{z}_-} x(t|t) < \gamma \quad (2.32)$$

Considerando (2.21), pode-se afirmar que (2.10) implica em

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & * \\ Y_{i_0}^T & G_{i_0}^T Q_{\mathbf{z}_-}^{-1} G_{i_0} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.33)$$

Usando as mudanças de variáveis $F_{i_0} = Y_{i_0} G_{i_0}^{-1}$ e $P_{\mathbf{z}_-} = \gamma Q_{\mathbf{z}_-}^{-1}$ e multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por $\text{diag}\{I, G_{i_0}^{T-1}\}$ e à direita por $\text{diag}\{I, G_{i_0}^{-1}\}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & * \\ F_{i_0}^T & \frac{1}{\gamma} P_{\mathbf{z}_-} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.34)$$

que, multiplicando por $\left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t+m+k)\right)$ e somando, produz

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & * \\ F(\xi(t+m))^T & \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m, L) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.35)$$

e, por complemento de Schur,

$$\frac{1}{u_{max}^2} F(\xi(t+m))^T F(\xi(t+m)) \leq \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m, L) \quad (2.36)$$

Por fim, multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por $x(t+m|t)^T$ e à direita por $x(t+m|t)$ e levando em conta (2.9) e (2.31), determina-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{max}^2} \|u(t+m|t)\|_2^2 &= \frac{1}{u_{max}^2} u(t+m|t)^T u(t+m|t) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} x(t+m|t)^T P(\xi, t+m, L)x(t+m|t) \leq 1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

assegurando que a desigualdade (2.13) é verificada.

Similarmente, pode ser mostrado que (2.11) implica em (2.14), produzindo,

$$\left[\begin{array}{c} y_{max}^2 I \\ (A(\xi(t+m)) + B(\xi(t+m))F(\xi(t+m)))^T C^T \quad \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m, L) \end{array} \right] > 0, \quad (2.38)$$

na qual, aplicando complemento de Schur e multiplicando à esquerda por $x(t+m|t)^T$ e à direita por $x(t+m|t)$, resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_{max}^2} \|y(t+m|t)\|_2^2 &= \frac{1}{y_{max}^2} y(t+m|t)^T y(t+m|t) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} x(t+m|t)^T P(\xi, t+m, L) x(t+m|t) \leq 1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por fim, as propriedades de factibilidade e estabilidade assintótica são demonstradas usando as estratégias desenvolvidas por Kothare et al. (1996) e Wada et al. (2006). Inicialmente, será mostrado que $V(t|t)$ é uma função de Lyapunov estritamente decrescente. Seja, então, $P_{z_-}^{(t)}$ a solução obtida no instante t , e por extensão,

$$P^{(t)} = \sum_{z_- \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t+k) \right) P_{z_-}^{(t)} \quad (2.40)$$

Como γ é minimizado para cada instante t , tem-se

$$x(t+1|t+1)^T P^{(t+1)} x(t+1|t+1) \leq x(t+1|t+1)^T P^{(t)} x(t+1|t+1), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.41)$$

Além disso, $x(t+1|t+1) = \left(A(\xi(t)) + BF(\xi(t)) \right) x(t|t)$, implicando das condições (2.8)-(2.11) que

$$x(t+1|t+1)^T P^{(t)} x(t+1|t+1) \leq x(t|t)^T P^{(t)} x(t|t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.42)$$

assim,

$$\begin{aligned} V(t+1|t+1) &= x(t+1|t+1)^T P^{(t+1)} x(t+1|t+1) \\ &< x(t|t)^T P^{(t)} x(t|t) = V(t|t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

implicando que $V(t|t) = x(t|t)^T P^{(t)} x(t|t)$ é uma função de Lyapunov estritamente decrescente, assegurando que o sistema em malha fechada é estável assintoticamente, ou seja, $x(t) = x(t|t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Enfim, em termos da factibilidade, assumamos que (2.9) verifica-se (i.e. a factibilidade é assegurada no instante t). Por complemento de Schur tem-se

$$1 > x(t|t)^T Q_{z_-}^{-1} x(t|t)$$

Por outro lado, o estado no instante $t + 1$ pode ser obtido aplicando a lei do MPC $u(t|t) = F(\xi(t))x(t|t)$ ao sistema, produzindo

$$x(t + 1|t + 1) = A_{cl}(\xi)x(t|t)$$

e, multiplicando (2.28) à esquerda por $x(t|t)^T$ e à direita por $x(t|t)$, tem-se

$$x(t|t)^T P(\xi, t, L)x(t|t) > x(t|t)^T A_{cl}(\xi)^T P(\xi, t + 1, L)A_{cl}(\xi)x(t|t)$$

implicando em

$$1 > x(t|t)^T Q_{\mathbf{z}_-}^{-1}x(t|t) > x(t + 1|t + 1)^T Q_{\mathbf{z}_+}^{-1}x(t + 1|t + 1)$$

que assegura a factibilidade de $x(t + 1|t + 1)$. O mesmo argumento pode ser usado novamente para o instante $t + 2$, etc. para concluir que a factibilidade é garantida para todo $t + m$, $m \geq 0$. ■

Assim, os resultados obtidos por Wada, Saito e Saeki (2006) correspondem a um caso particular do Teorema 2.1, como verificado na seguinte proposição.

Proposição 3 *Considere o sistema (2.1). Dado $x(t|t)$, u_{max} , y_{max} , matrizes definidas positivas \mathcal{Q} e \mathcal{R} , assuma que existam matrizes $Y_j = Y_{i_0}$, $G_j = G_{i_0}$, $j = 1, \dots, N$, $i_0 = 1, \dots, N$, matrizes simétricas $Q_{\mathbf{z}_-}$, $\forall \mathbf{z} \in \mathcal{N}^2$ e um escalar positivo γ que satisfaçam (2.8)-(2.11). Então, usando a lei de controle $u(t + m|t) = (\sum_{j=1}^N \xi_j(t + m)F_j)x(t + m|t)$, $m \geq 0$, $F_j = Y_j G_j^{-1}$, as condições (2.12)-(2.14) são verificadas (Wada et al. 2006).*

Teorema 2.2 *Proposição 1 \implies Proposição 2 \implies Proposição 3 \implies Teorema 2.1*

Portanto, o Teorema 2.1 generaliza o problema de MPC explorando L-caminhos na função de Lyapunov dependente de parâmetros, e cujo o algoritmo computacional é dado por:

Algoritmo 2 —

1. Faça $t = 0$.
2. Meça ou estime $x(t|t)$.
3. Resolva $\min_{Y_{i_0}, G_{i_0}, Q_{\mathbf{z}_-}} \gamma$, sujeito às restrições (2.8)-(2.11).
4. Meça ou estime $\xi(t)$ e compute $F(\xi(t))$.
5. Aplique $u(t) = F(\xi(t))x(t)$ ao sistema.
6. Faça $t \leftarrow t + 1$ e retorne ao passo 2.

Observação 3 *Note que $\xi(t)$ só é necessário no computo de $F(\xi(t))$.*

2.2 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados três exemplos que ilustram a eficiência do Algoritmo 2 proposto e alguns resultados teóricos deste capítulo. Nos exemplos, o software SeDuMi (Sturm 1999) e YALMIP (Löfberg 2004) em ambiente Matlab foram usados para computar a solução do problema min-max, em um computador com processador Intel Core2Quad 2.4GHz e 4 GByte de RAM.

Exemplo 1

O primeiro exemplo é adaptado do problema descrito em (Wie e Bernstein 1992), também considerado em (Kothare et al. 1996, Cuzzola et al. 2002, Wada et al. 2006). O sistema consiste de massa-molas acoplados, como mostrado na Figura 2.1. Usando a aproximação de primeira

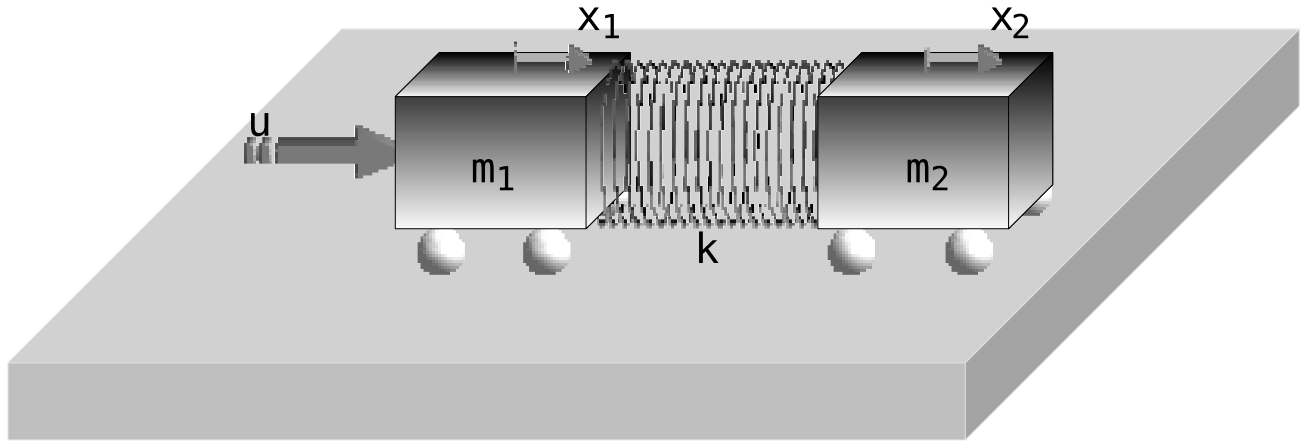


Figura 2.1: Sistema massa-mola acoplado.

ordem de Euler na derivada e um tempo de amostragem de 0.1 s, as seguintes matrizes são obtidas para o modelo discretizado

$$A(\xi(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ -\frac{1}{m_1}k & \frac{1}{m_1}k & 1 & 0 \\ \frac{1}{m_2}k & -\frac{1}{m_2}k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (2.44)$$

O parâmetro k representa as características da mola, assumido similarmente a (Wada et al. 2006) como dependente do estado na forma

$$k = \frac{1}{2} + 50(Cx(t))^2. \quad (2.45)$$

para efeito de simulação.

Os outros parâmetros têm os seguintes valores: $m_1 = m_2 = 1$, $\mathcal{R} = 1$, $\mathcal{Q} = I_4$, $u_{max} = 1$ e $y_{max} = 0.5$, implicando em

$$k \in [0.5, 13] \quad (2.46)$$

Tomando os valores máximo e mínimo de k , os dois vértices do modelo politópico (2.1) podem ser obtidos. Por fim, a Figura 2.2 mostra a resposta do sistema usando as condições de projeto dadas em (Kothare et al. 1996, Cuzzola et al. 2002, Wada et al. 2006) e no Teorema 2.1 com caminho-2 para a condição inicial

$$x(0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (2.47)$$

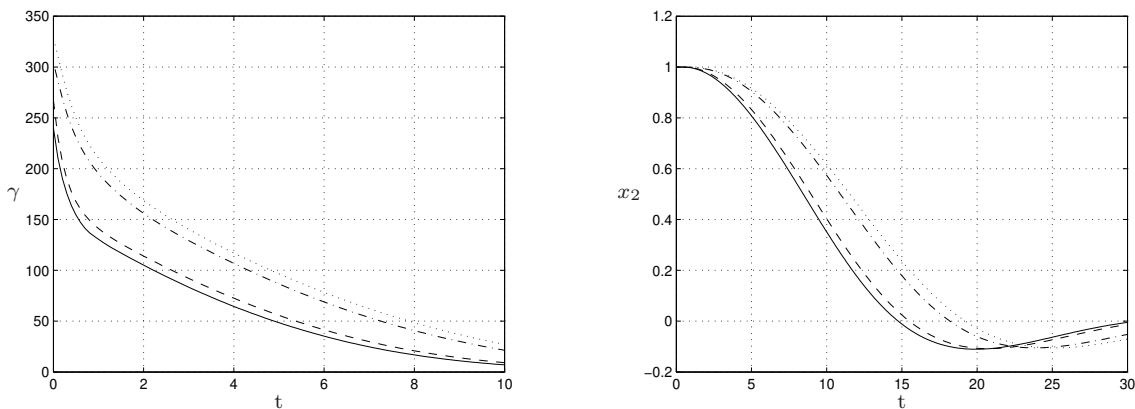


Figura 2.2: Evolução de γ e estado x_2 (sólido: Teorema 2.1 ($L = 2$); tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996))

Nas figuras, as linhas sólidas representam as respostas do sistema com a solução fornecida pelo Teorema 2.1 com $L = 2$, as linhas tracejadas são as respostas obtidas com o método de (Wada et al. 2006) e linhas traço-ponto as respostas fornecidas pelo método de (Kothare et al. 1996). Pode ser notado na Figura 2.2 que os valores do índice de desempenho γ obtido pelas condições do Teorema 2.1 são menores que os fornecidos pela abordagens de (Wada et al. 2006) e (Kothare et al. 1996). Embora a simulação no tempo do estado x_2 exiba um comportamento similar para os métodos de (Wada et al. 2006) e o do Teorema 2.1, uma ligeira melhora na estabilização nos resultados obtidos com o Teorema 2.1 pode ser observada.

Finalmente, a Tabela 2.1 ilustra a complexidade computacional requerida em termos do número de variáveis escalares (V), número de linhas de LMIs (L) e o tempo de processamento para a resolver o problema de otimização, além de mostrar os valores de γ obtidos para $t = 0$.

Exemplo 2

O segundo exemplo é um sistema de posicionamento angular apresentado em (Kwakernaak e Sivan 1972). O sistema (mostrado na Figura 2.3) consiste de uma antena rotacionada por um

Tabela 2.1: Complexidade numérica dos métodos e valores de γ para $t = 0$ para o exemplo massa-mola acoplado.

Método	γ	V	L	tempo (s)
Kothare et al.	328.19	15	20	0.49
Cuzzola et al.	303.84	41	80	0.60
Wada et al.	266.81	61	80	0.64
Teorema 2.1 ($L = 2$)	239.85	81	160	0.81

motor elétrico. O problema de controle é impor uma tensão de entrada no motor (u — *Volts*) para rotacionar a antena para que a antena sempre aponte na direção do objeto em movimento no plano. Assume-se que as posições angulares da antena e do objeto em movimento (θ e θ_r *rad*, respectivamente) e a velocidade angular da antena ($\dot{\theta}$ *rad s⁻¹*) estão disponíveis para leitura.

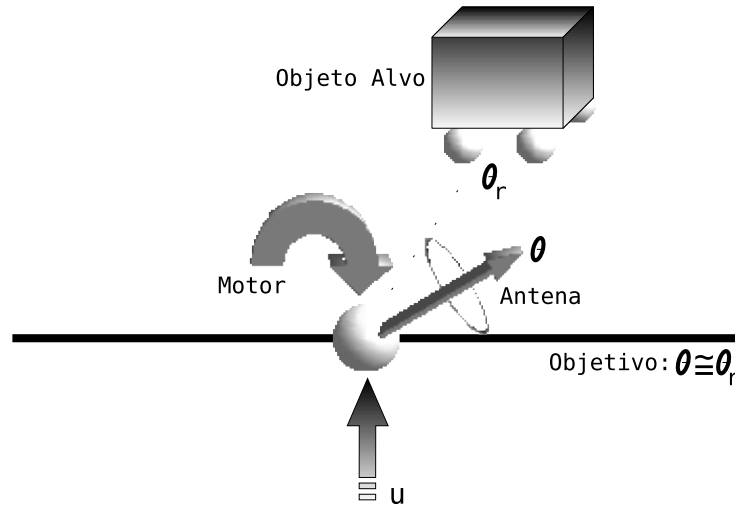


Figura 2.3: Sistema de posicionamento angular.

O movimento da antena pode ser descrito pela seguinte equação em espaço de estados, usando-se um instante de amostragem de 0.1 *s* e a aproximação de primeira ordem de Euler na derivada

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \begin{bmatrix} \theta(t+1) \\ \dot{\theta}(t+1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 - 0.1\alpha(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\kappa \end{bmatrix} u(t) \\
 &\triangleq A(\xi(t))x(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= [1 \ 0] x(t) \triangleq Cx(t).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

com $\kappa = 0.787 \text{ rad}^{-1} \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-2}$. O parâmetro $\alpha(t) \in [0.1, 10] \text{ s}^{-1}$ é proporcional ao coeficiente de

fricção viscosa na parte rotacional da antena e é assumido arbitrariamente variante no tempo no intervalo de variação indicado. Uma vez que $0.1 \leq \alpha(t) \leq 10$, conclui-se que $A(\xi(t)) \in \Omega = Co\{A_1, A_2\}$, com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

caracterizando o conjunto politópico Ω . Assim, dado o estado inicial $x(t)$, o problema de otimização a ser resolvido em cada instante de tempo t é

$$\begin{aligned} \min_{u(t+m|t)=F(\xi(t))x(t+m|t), m \geq 0} \max_{A(t+m) \in \Omega, m \geq 0} & \sum_{m=0}^{+\infty} (x(t+m|t)^T \mathcal{Q}x(t+m|t) \\ & + u(t+m|t)^T \mathcal{R}u(t+m|t)) < \gamma \\ \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R} = 0.00002. \end{aligned} \quad (2.50)$$

sujeito a $|u(t+m|t)| \leq 2V$, $m \geq 0$.

Adicionalmente, assume-se para a simulação que $\alpha(t)$ varia no tempo conforme o estado na forma

$$\alpha(t) = 0.1 + 0.5(Cx(t))^2. \quad (2.51)$$

A Figura 2.4 mostra a resposta do sistema em termos do custo γ para a condição inicial

$$x(0) = [1 \quad 3.6]^T \quad (2.52)$$

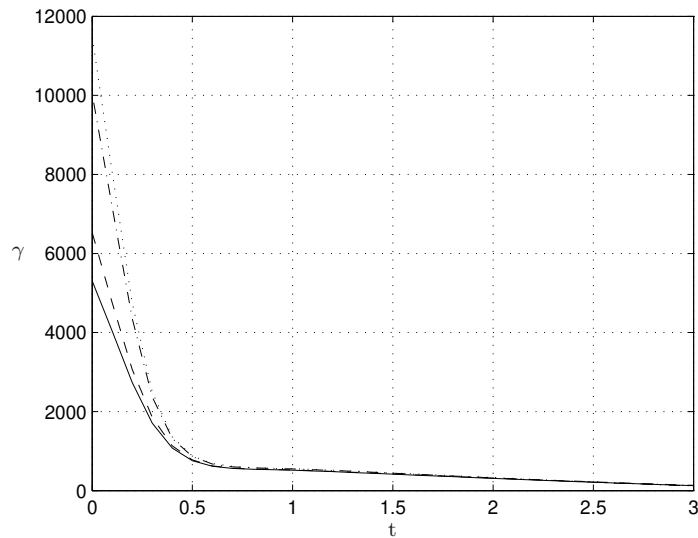


Figura 2.4: Evolução de γ (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)) no Exemplo 2.

A linha sólida representa a resposta do sistema com a solução fornecida pelo Teorema 2.1, utilizando uma função de Lyapunov dependente de caminho-7, e a linha tracejada é a resposta obtida com o método de Wada et al. (2006) que fornece uma resposta melhor quando comparada às abordagens de Kothare et al. (1996) e Cuzzola et al. (2002) representadas, respectivamente, pelas linhas pontilhada e traço-ponto. Com o Teorema 2.1 verificou-se uma redução significativa no índice de desempenho de aproximadamente 19 %.

A Figura 2.5 apresentada os elipsóides invariantes para os quatro algoritmos em análise. Neste caso, objetiva-se determinar as regiões que estão associadas aos melhores índices de desempenho robusto. Definem-se, portanto, regiões factíveis de estados iniciais cada vez menores à medida que condições mais relaxadas de LMIs são impostas ao projeto de MPC e que proporcionam maior acuidade na predição dos estados futuros. Verifica-se assim que o resultado fornecido pelo Teorema 2.1 com um índice de desempenho $\gamma = 5301$ proporciona a menor região comparada aos elipsóides invariantes determinados pelas LMIs de (Kothare et al. 1996, Cuzzola et al. 2002, Wada et al. 2006).

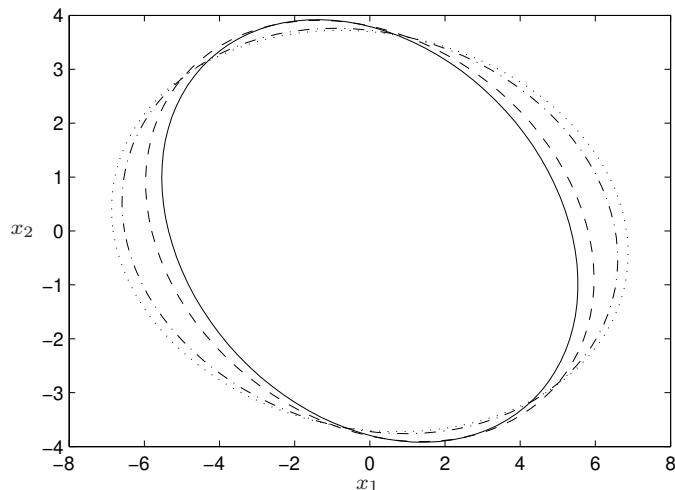


Figura 2.5: Elipsóides invariantes (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).

Finalmente, a Figura 2.6 ilustra a região de atração dos estados iniciais para o problema do rastreador, cujo objetivo é obter o menor valor de β e a maior região factível de estados no instante t em análise. Para tanto, é fixado o valor do índice de desempenho quadrático em $\gamma = 11500$. Desta forma, considerando o Algoritmo 2 e uma função de Lyapunov dependente de caminho-7, obtém-se uma região factível de estados iniciais que envolve os domínios de atração dos demais métodos da literatura.

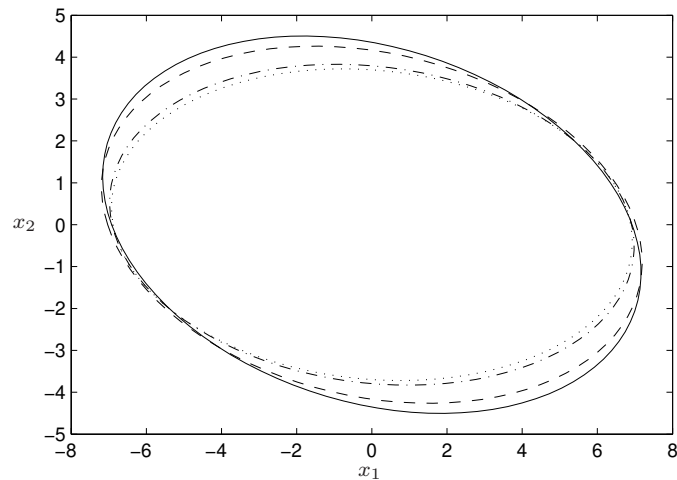


Figura 2.6: Região de atração dos estados iniciais (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).

Exemplo 3

Uma reação exotérmica e irreversível é realizada em um reator químico continuamente agitado (do inglês, *Continuous Stirred-Tank Reactor* — CSTR). A reação é de primeira ordem e possui um calor de reação dado por λ .



De forma geral, o processo envolve a remoção do calor de reação por meio de uma camisa de resfriamento, com a injeção de água fria a uma vazão volumétrica e temperatura pré-determinadas. Nessa abordagem, é suposto que a massa das paredes metálicas é desprezível, e portanto a inércia térmica do metal não é considerada. Finalmente, o controle é realizado por meio do volume do líquido dentro do reator (conforme a vazão da válvula de saída), e da temperatura do processo (conforme a vazão de entrada do fluido refrigerante). A Figura 2.7 ilustra o processo.

Considere, então, o seguinte modelo linearizado do CSTR não isotérmico de (Marlin 1995), e descrito em (Wan e Kothare 2002)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (2.54)$$

no qual x é o vetor da concentração do reator e a temperatura, u é a restrição do fluxo refrigerante, e y a temperatura do reator. Assim, pode-se determinar as matrizes A , B e C

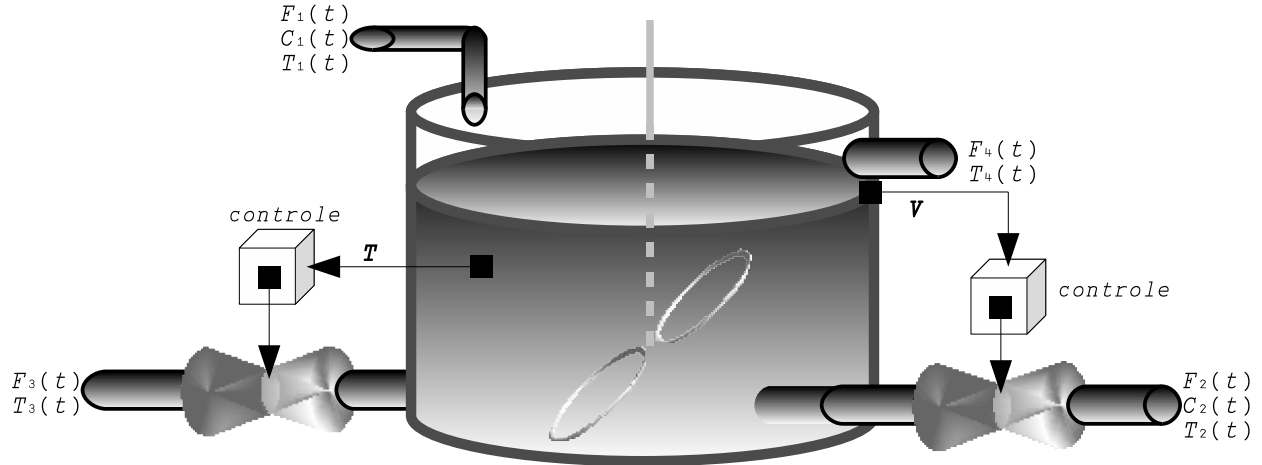


Figura 2.7: Sistema CSTR não isotérmico.

dependendo das condições de operação como

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V} - k_0 e^{-E/RT_s} & -\frac{E}{RT_s^2} k_0 e^{-E/RT_s} C_{As} \\ -\frac{\Delta H_{r \times n} k_0 e^{-E/RT_s}}{\rho C_p} & -\frac{F}{V} - \frac{UA}{V \rho C_p} - \Delta H_{r \times n} \frac{E}{\rho C_p RT_s^2} k_0 e^{-E/RT_s} C_{As} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.098 \times 10^5 \frac{T_s - 365}{V \rho C_p} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1] \quad (2.55)$$

com $F = 1 \text{ m}^3/\text{min}$, $V = 1 \text{ m}^3$, $k_0 = 10^8 - 8 \times 10^9 \text{ min}^{-1}$, $E/R = 8330.1 \text{ K}$, $-\Delta H_{e \times n} = 10^6 - 8 \times 10^7 \text{ cal/kmol}$, $\rho = 10^6 \text{ g/m}^3$, $UA = 5.34 \times 10^6 \text{ cal/K}$, e $C_p = 1 \text{ cal/(gK)}$. Para a determinação do modelo linearizado é assumido o estado estacionário com $T_s = 394 \text{ K}$ e $C_{As} = 0.265 \text{ kmol/m}^3$, e os parâmetros de incerteza k_0 e $-\Delta H_{r \times n}$. O modelo é discretizado usando um tempo de amostragem de 0.15 min e está sujeito à perturbação de variáveis como segue

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.85 - 0.0986\alpha(t) & -0.0014\alpha(t) \\ 0.9864\alpha(t)\beta(t) & 0.0487 + 0.01403\alpha(t)\beta(t) \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -0.912 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] x(t). \quad (2.56)$$

com $0.1 \leq \alpha(t) = k_0/10^9 \leq 8$ e $0.1 \leq \beta(t) = -\Delta H_{r \times n}/10^7 \leq 8$. O conjunto de incertezas politópicas tem quatro vértices, ou seja, $\Omega = \text{Co}\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

São especificados os parâmetros de projeto $\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{R} = 0.00002$ e $\rho = 1$, e a restrição na entrada $|u(t+m|t)| \leq 0.5 \text{ m}^3/\text{min}$. Adicionalmente, para a simulação, assume-se que $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ variam no tempo conforme o estado na forma

$$\alpha(t) = \beta(t) = 0.1 + (Cx(t))^2. \quad (2.57)$$

Tabela 2.2: Complexidade numérica dos métodos e valores de γ para $t = 0$ no exemplo CSTR.

Método	γ	V	L	tempo (s)
Kothare et al.	828.30	6	36	0.47
Cuzzola et al.	744.71	19	144	0.75
Wada et al.	700.18	37	144	0.79
Teorema 2.1 ($L = 3$)	651.65	217	2304	1.86

Dada uma condição inicial no estado $x(0) = [0.2 \ 2]^T$, a Figura 2.8 representa o índice de desempenho robusto para o CSTR não isotérmico. É possível notar uma redução (de 6.9 %) no índice de desempenho referente aos resultados do Teorema 2.1 considerando uma função de Lyapunov dependente de caminho-3, e Wada et al. (2006). Como as abordagens de Kothare et al. (1996) e Cuzzola et al. (2002) geram resultados mais conservadores, os índices não são confrontados.

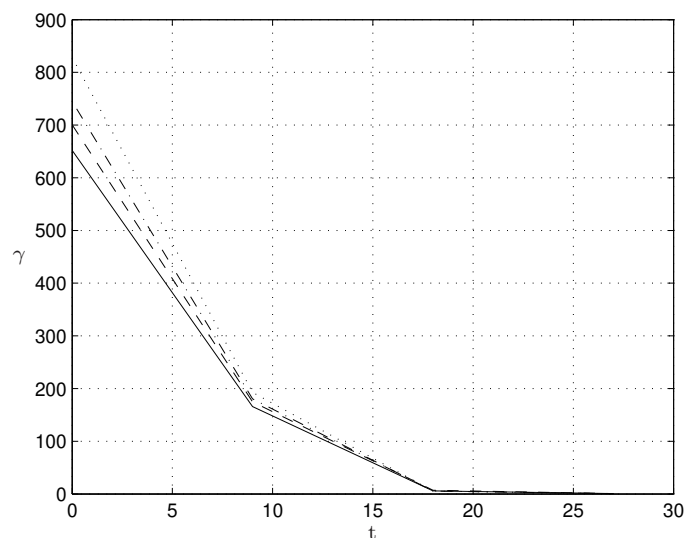


Figura 2.8: Evolução de γ (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)) no Exemplo 3.

A Figura 2.9 apresenta os elipsóides invariantes dos estados para os quatro algoritmos. Na figura, o Teorema 2.1 envolve a menor região de estados iniciais considerando a restrição de saturação na entrada, reduzindo o tempo de busca dos estados preditos no horizonte de predição. Por fim, a Tabela 2.2 ilustra a complexidade computacional requerida em função do número de variáveis escalares (V), número de linhas de LMIs (L) e do tempo de processamento para a resolver o problema de otimização. Os valores de γ obtidos para $t = 0$ também são fornecidos.

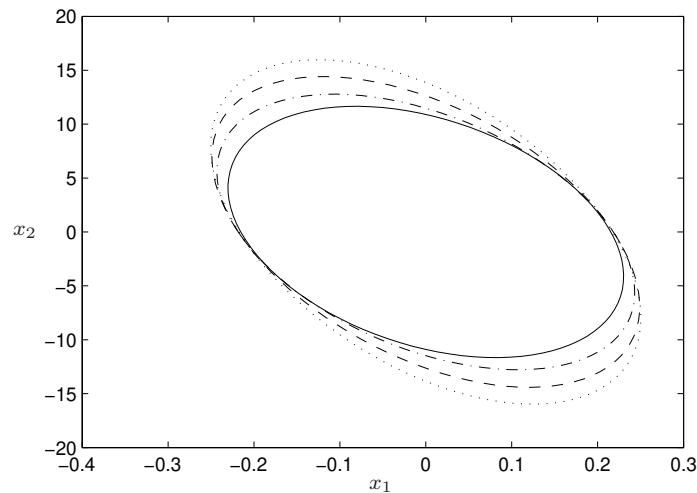


Figura 2.9: Elipsóides invariantes correspondente ao CSTR (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).

Exemplo 4

O modelo não-linear a seguir representa o canal vertical de um míssil ar-ar como em Reichert (1990) e em Wu, Packard e Balas (1995). A Figura 2.10 ilustra o eixo de elevação do mesmo. A entrada do sistema é o ângulo de deflexão da cauda (δ , em graus), a saída é a aceleração vertical (η , em graus), e os estados são o ângulo de ataque (α , em graus) e a velocidade angular em arfagem (q , em graus/s).

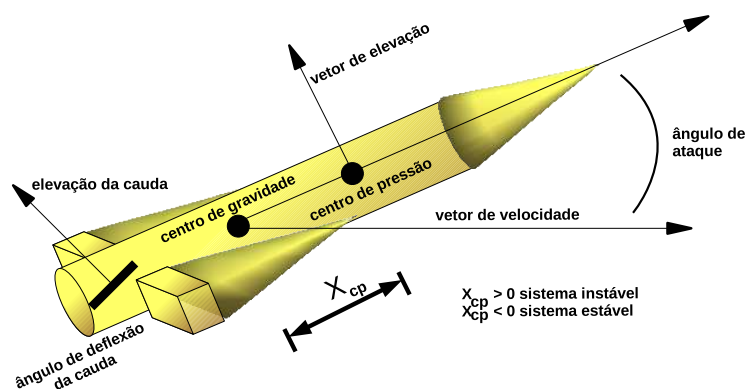


Figura 2.10: Diagrama ilustrativo do míssil.

Uma descrição quasi-LPV (ou seja, sistema LPV cujos parâmetros são variáveis endógenas) da dinâmica não-linear do míssil (Biannic e Apkarian 1999) é apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \end{bmatrix} \delta \quad (2.58)$$

A aceleração vertical é definida por,

$$\eta = N_\alpha \alpha + N_\delta \delta \quad (2.59)$$

com,

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= K_\alpha M \cos(\alpha) (a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n) \\ M_\alpha &= K_q M^2 (a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m) \\ Z_\delta &= K_\alpha M \cos(\alpha) d_n \\ M_\delta &= K_q M^2 d_m \\ N_\alpha &= K_z M^2 (a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n) \\ N_\delta &= K_z M^2 d_n \end{aligned} \quad (2.60)$$

A descrição acima representa um míssil em vôo para uma altitude de 20.000 pés. Considera-se, para tanto, uma constante de Mach 3 ($M = 3$) e um ângulo de ataque variando no intervalo de -10 a 10 graus. Nichols e Reichert (1993) apresentam os valores e as unidades das constantes desse modelo. Nota-se que, como Z_α e N_α são quase funções afins de M_α , pode-se determinar uma interpolação linear (por otimização de mínimos quadrados), obtendo

$$\begin{aligned} Z_\alpha &\approx a_z M_\alpha + b_z \\ N_\alpha &\approx a_n M_\alpha + b_n \end{aligned} \quad (2.61)$$

com

$$a_z = 2.38 \cdot 10^{-3}, \quad b_z = -0.695, \quad a_n = 4.59 \cdot 10^{-3}, \quad b_n = -1.166$$

Portanto, é possível construir um modelo de transformação linear fracional (do inglês, *Linear Fractional Transformation* — LFT) do míssil. Assim, M_α será reescrito como uma função do parâmetro normalizado θ , na seguinte maneira,

$$M_\alpha = M_{\alpha_0} + \theta M_{\alpha_1} = \frac{\overline{M_\alpha} + M_\alpha}{2} + \theta \frac{\overline{M_\alpha} - M_\alpha}{2}$$

Observando que M_δ e N_δ não dependem de α e que Z_δ é praticamente constante (pois $\cos(\alpha)$ permanece próximo a 1 quando $|\alpha| \leq 10$ graus), o sistema inicialmente descrito por (2.58) e (2.59) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= (A_0 + \theta A_1) \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \end{bmatrix} \delta \\ \eta &= (C_0 + \theta C_1) \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + N_\delta \delta \end{aligned} \quad (2.62)$$

no qual

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a_z M_{\alpha_0} + b_z & 1 \\ M_{\alpha_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_z M_{\alpha_1} & 0 \\ M_{\alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \\ C_0 &= \begin{bmatrix} a_n M_{\alpha_0} + b_n & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} a_n M_{\alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Finalmente, o sistema LPV do míssil levando em consideração um instante de amostragem de 0.05s ($f \approx 20\text{Hz}$) e os valores numéricos definidos em Nichols e Reichert (1993). Considerando que todo elemento com valor absoluto menor que $\epsilon = 9 \cdot 10^{-3}$ é irrelevante ao desempenho do sistema e que $d_n = 0.01 \text{ graus}^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.97 & 0.05 \\ -0.01 - 0.03 \theta & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.06 \end{bmatrix} \delta \\ \eta &= \begin{bmatrix} -1.17 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

São especificados os parâmetros de projeto $\mathcal{Q} = I$, $\mathcal{R} = 1$, e a restrição na entrada $|u(t + m|t)| \leq 1.5$. Supõe-se, para efeito de simulação, que o parâmetro $\theta \in [1, 10]$ varia no tempo conforme o estado na forma,

$$\theta(t) = 0.1 + 2(Cx(t))^2. \quad (2.65)$$

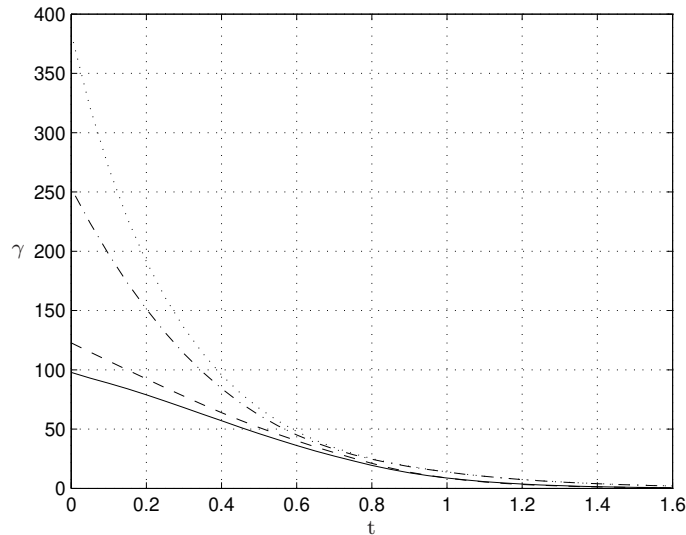


Figura 2.11: Evolução de γ (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)) para o modelo do míssil.

Portanto, para uma dada condição inicial $x(0) = [0.8 \ 1.5]^T$, a Figura 2.11 representa o índice de desempenho quadrático para o modelo do míssil, em que é possível notar uma

redução (de 20.3 %) no que se refere aos resultados do Teorema 2.1 — considerando uma função de Lyapunov dependente de caminho-6, em relação a (Wada et al. 2006). As abordagens de (Kothare et al. 1996) e (Cuzzola et al. 2002) geram resultados mais conservadores.

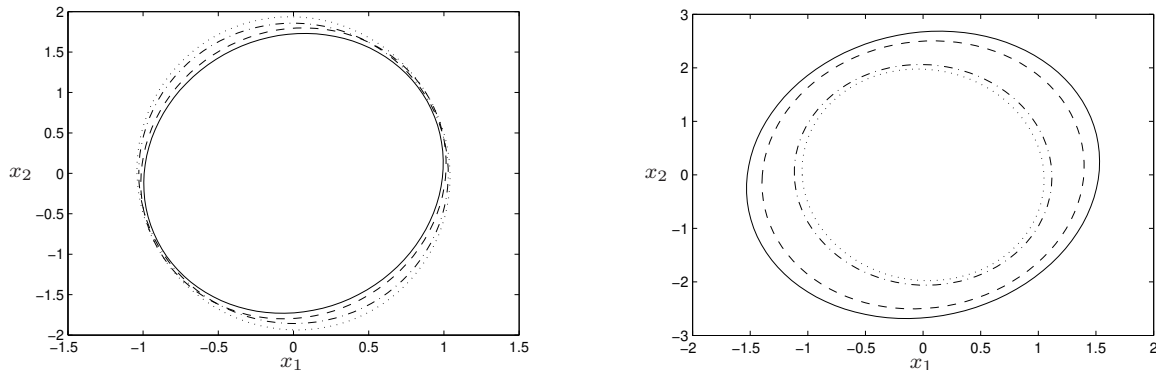


Figura 2.12: Elipsóides invariantes e região de atração correspondentes ao míssil ar-ar (sólido: Teorema 2.1; tracejado: (Wada et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002); pontilhado: (Kothare et al., 1996)).

A Figura 2.12 representa, respectivamente, os elipsóides invariantes e as regiões de atração para o modelo LFT do míssil. Observa-se que na figura à direita, o domínio de atração definido pelo Teorema 2.1 enlaça (com folga) as regiões factíveis de estados iniciais determinadas por (Kothare et al. 1996, Cuzzola et al. 2002, Wada et al. 2006), admitindo mais soluções possíveis para o problema de otimização min-max no instante $t = 0$, considerando $\gamma = 400$. São apresentados também na Figura 2.12 os elipsóides invariantes, ilustrando um melhor desempenho relativo às LMIs do Teorema 2.1 para o instante $t = 0$, e, conseqüentemente, para $\forall t+m, m \geq 0$.

Comentários Finais

Neste capítulo, uma nova estratégia MPC para sistemas LPV foi proposta. A estratégia de controle, baseada em um problema de otimização *on-line* sujeito a restrições LMI e uma função de Lyapunov dependente de caminho, fornece resultados menos conservadores quando comparada às técnicas da literatura, ao preço do aumento do número de variáveis e LMIs. O Capítulo 3 a seguir apresenta a extensão dos resultados do Algoritmo 2 para o caso da matriz de controle admitir dependência afim nos parâmetros.

Extensão para $B(\xi(t))$

As condições de projeto MPC propostas no Capítulo 2 consideram apenas a matriz dinâmica do sistema com dependência paramétrica. A contribuição deste capítulo é apresentar a extensão para o caso da matriz de controle também dependente de parâmetros. A principal motivação vem da possibilidade de tratar parâmetros variantes no tempo que interferem na matriz B , modelando por exemplo falhas de atuadores e desgaste de conectores, como discutido por Montagner, Oliveira, Leite e Peres (2005). Para tanto, considere novamente o sistema (1.1) e a seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} G(\xi, t) + G(\xi, t)^T - Q(\xi, t + m, L) & * & * & * \\ A(\xi, t)G(\xi, t) + B(\xi, t)Y(\xi, t) & Q(\xi, t + m + 1, L) & * & * \\ \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}G(\xi, t) & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}Y(\xi, t) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.1)$$

na qual as matrizes Q são dadas por

$$Q(\xi, t + m, L) = \sum_{\mathbf{j}_- \in \mathcal{N}^L} \prod_{p=0}^{L-1} \xi_{j_p}(t + m + p) Q_{\mathbf{j}_-}, \quad (3.2a)$$

$$Q(\xi, t + m + 1, L) = \sum_{\mathbf{j}_+ \in \mathcal{N}^L} \prod_{p=1}^L \xi_{j_p}(t + m + p) Q_{\mathbf{j}_+}. \quad (3.2b)$$

Verifica-se neste caso a necessidade de um tratamento especial para os produtos $A(\xi, t)G(\xi, t)$ e $B(\xi, t)Y(\xi, t)$ da desigualdade (3.1), que implicará na incorporação de LMIs definidas pelos produtos cruzados dos termos citados no instante de tempo t . Note que os instantes de tempos subseqüentes não geram essa dificuldade técnica, pois aparecem somente na matriz de Lyapunov, que por sua vez não multiplica nenhuma outra matriz. Dessa forma, expandindo as matrizes da desigualdade (3.1), e, isolando o parâmetro $\xi(t + m)$, obtém-se

$$[\xi_{i_0}(t + m)]^2 \mathcal{M}_{(i_0)} + \xi_k(t + m) \xi_l(t + m) \mathcal{M}_{(k,l)} > 0 \quad (3.3)$$

com

$$\mathcal{M}_{(i_0)} = \begin{bmatrix} G_{i_0} + G_{i_0}^T - \mathcal{W}_1 & * & * & * \\ A_{i_0}G_{i_0} + B_{i_0}Y_{i_0} & \sum_{\mathbf{j}_+ \in \mathcal{N}^L} \prod_{p=1}^L \xi_{j_p}(t+m+p)Q_{\mathbf{j}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}G_{i_0} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}Y_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{M}_{(k,l)} = \begin{bmatrix} G_k + G_l + G_k^T + G_l^T - (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) & * & * & * \\ A_kG_l + A_lG_k + B_kY_l + B_lY_k & 2 \left(\sum_{\mathbf{j}_+ \in \mathcal{N}^L} \prod_{p=1}^L \xi_{j_p}(t+m+p)Q_{\mathbf{j}_+} \right) & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}[G_k + G_l] & 0 & 2\gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}[Y_k + Y_l] & 0 & 0 & 2\gamma I \end{bmatrix}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_{L-1}=1}^N \prod_{p=1}^{L-1} \xi_{j_p}(t+m+p)Q_{\{i_0, j_1, j_2, \dots, j_{L-1}\}} \\ \mathcal{W}_2 &= \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_{L-1}=1}^N \prod_{p=1}^{L-1} \xi_{j_p}(t+m+p)Q_{\{k, j_1, j_2, \dots, j_{L-1}\}} \\ \mathcal{W}_3 &= \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_{L-1}=1}^N \prod_{p=1}^{L-1} \xi_{j_p}(t+m+p)Q_{\{l, j_1, j_2, \dots, j_{L-1}\}} \end{aligned}$$

Similarmente, repetindo o procedimento para $\xi_{j_p}(t+m+p), \forall p = (1, \dots, L)$, tem-se

$$\xi_{i_0}(t+m)^2 \left(\prod_{p=1}^L \xi_{i_p}(t+m+p) \right) \mathcal{M}_{(i_0, \mathbf{v})} + \xi_k(t+m)\xi_l(t+m) \left(\prod_{p=1}^L \xi_{i_p}(t+m+p) \right) \mathcal{M}_{(k,l, \mathbf{v}_+)} > 0$$

na qual

$$\mathcal{M}_{(i_0, \mathbf{v})} = \begin{bmatrix} G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{v}_-} & * & * & * \\ A_{i_0}G_{i_0} + B_{i_0}Y_{i_0} & Q_{\mathbf{v}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}G_{i_0} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}Y_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$\mathcal{M}_{(k,l, \mathbf{v}_+)} = \begin{bmatrix} G_k + G_l + G_k^T + G_l^T - [Q_{(k, \mathbf{v}_+^*)} + Q_{(l, \mathbf{v}_+^*)}] & * & * & * \\ A_kG_l + A_lG_k + B_kY_l + B_lY_k & 2Q_{\mathbf{v}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}[G_k + G_l] & 0 & 2\gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}[Y_k + Y_l] & 0 & 0 & 2\gamma I \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Por outro lado, as LMIs definidas pelas restrições na evolução dos estados são determinadas por meio da seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} G(\xi, t) + G(\xi, t)^T - Q(\xi, t + m, L) & * \\ C[A(\xi, t)G(\xi, t) + B(\xi, t)Y(\xi, t)] & y_{max}^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

que, expandindo-se semelhantemente a (3.1), fornece

$$\xi_{i_0}(t + m)^2 \left(\prod_{p=1}^{L-1} \xi_{i_p}(t + m + p) \right) \mathcal{Y}_{(i_0, \mathbf{z}_-)} + \xi_k(t + m)\xi_l(t + m) \left(\prod_{p=1}^{L-1} \xi_{i_p}(t + m + p) \right) \mathcal{Y}_{(k, l, \mathbf{z}_*)} > 0$$

na qual

$$\mathcal{Y}_{(i_0, \mathbf{z}_-)} = \begin{bmatrix} G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{z}_-} & * \\ C[A_{i_0}G_{i_0} + B_{i_0}Y_{i_0}] & y_{max}^2 I \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{Y}_{(k, l, \mathbf{z}_*)} = \begin{bmatrix} G_k + G_l + G_k^T + G_l^T - [Q_{(k, \mathbf{z}_*)} + Q_{(l, \mathbf{z}_*)}] & * \\ C[A_kG_l + A_lG_k + B_kY_l + B_lY_k] & 2y_{max}^2 I \end{bmatrix}$$

Teorema 3.1 *Considere o sistema (1.1) e o critério (2.7).*

(a) Otimização. *Considere o sistema (1.1). Assuma que para um dado estado fixo $x(t|t)$ exista um escalar positivo γ e matrizes $Y_{i_0} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $G_{i_0} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Q_{\mathbf{z}_-} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ simétrica definida positiva, para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{N}^{L+1}$, satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{z}_-} & * & * & * \\ A_{i_0}G_{i_0} + B_{i_0}Y_{i_0} & Q_{\mathbf{z}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}G_{i_0} & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}Y_{i_0} & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} G_k + G_l + G_k^T + G_l^T - [Q_{(k, \mathbf{z}_*)} + Q_{(l, \mathbf{z}_*)}] & * & * & * \\ A_kG_l + A_lG_k + B_kY_l + B_lY_k & 2Q_{\mathbf{z}_+} & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}[G_k + G_l] & 0 & 2\gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}[Y_k + Y_l] & 0 & 0 & 2\gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.8)$$

$k = 1, \dots, N-1, l = k+1, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(t+i|t)^T \\ x(t+i|t) & Q_{\mathbf{z}_-} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & * \\ Y_{i_0}^T & G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{z}_-} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{\mathbf{z}_-} & * \\ C[A_{i_0}G_{i_0} + B_{i_0}Y_{i_0}] & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} G_k + G_l + G_k^T + G_l^T - [Q_{(k, \nu^*)} + Q_{(l, \nu^*)}] & * \\ C[A_k G_l + A_l G_k + B_k Y_l + B_l Y_k] & 2y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.12)$$

$k = 1, \dots, N-1, l = k+1, \dots, N$

Então, a lei de controle $u(t+m|t) = (\sum_{i_0=1}^N \xi_{i_0}(t+m)F_{i_0})x(t+m|t)$, $m \geq 0$, com $F_{i_0} = Y_{i_0}G_{i_0}^{-1}$, assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada, e satisfaz as seguintes desigualdades

$$J_\infty(t) < \gamma \quad (3.13)$$

$$\|u(t+m|t)\|_2 \leq u_{max}, \quad \forall m \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\|y(t+m|t)\|_2 \leq y_{max}, \quad \forall m \geq 1 \quad (3.15)$$

(b) Factibilidade. As condições (3.7) e (3.8) asseguram diretamente a factibilidade do problema de otimização para todos os instantes $t+m$ ($m \geq 0$).

(c) Estabilidade. As condições declaradas no item **(a)** asseguram a estabilidade assintótica robusta do sistema em malha fechada.

Prova: O objetivo é provar a desigualdade (3.13), visto que o procedimento adotado para provar (3.14) e (3.15) permanece válido. Seja, então, $V(t+m|t)$ a função de Lyapunov dependente de parâmetros dada por

$$V(t+m|t) = x(t+m|t)^T P(\xi, t+m, L)x(t+m|t) \quad (3.16)$$

cuja primeira diferença produz

$$\begin{aligned} V(t+m+1|t) - V(t+m|t) = & \\ & x(t+m+1|t)^T P(\xi, t+m+1, L)x(t+m+1|t) \\ & - x(t+m|t)^T P(\xi, t+m, L)x(t+m|t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

A desigualdade (3.1) pode ser reescrita como

$$\mathcal{G}^T \begin{bmatrix} G(\xi, t) + G(\xi, t)^T - Q(\xi, t+m, L) & * & * & * \\ A(\xi, t)G(\xi, t) + B(\xi, t)Y(\xi, t) & Q(\xi, t+m+1, L) & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}G(\xi, t) & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}Y(\xi, t) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \mathcal{G} > 0 \quad (3.18)$$

e, com a mudança de variável $F(\xi, t) = Y(\xi, t)G(\xi, t)^{-1}$ e \mathcal{G} dado por

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} G(\xi, t) + G(\xi, t)^T - Q(\xi, t + m, L) & \\ A_{cl}(\xi, t)G(\xi, t) & Q(\xi, t + m + 1, L) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.20)$$

que, multiplicando à esquerda por $[A_{cl}(\xi, t + m) \quad -I]$ e à direita por $[A_{cl}(\xi, t + m) \quad -I]^T$ produz

$$-A_{cl}(\xi, t + m)Q(\xi, t + m, L)A_{cl}^T(\xi, t + m) + Q(\xi, t + m + 1, L) > 0 \quad (3.21)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} Q(\xi, t + m, L) & * \\ A_{cl}(\xi, t + m)Q(\xi, t + m, L) & Q(\xi, t + m + 1, L) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

Finalmente, pela multiplicação de $\text{diag}\{Q^{-1}(\xi, t + m, L), Q^{-1}(\xi, t + m + 1, L)\}$ em ambos os lados da desigualdade (3.22) e aplicando complemento de Schur, tem-se

$$Q^{-1}(\xi, t + m, L) - A_{cl}(\xi, t + m)Q^{-1}(\xi, t + m + 1, L)A_{cl}^T(\xi, t + m) > 0 \quad (3.23)$$

ou, equivalentemente

$$A_{cl}(\xi, t + m)Q^{-1}(\xi, t + m + 1, L)A_{cl}^T(\xi, t + m) - Q^{-1}(\xi, t + m, L) < 0 \quad (3.24)$$

Define-se $P(\xi, t + m, L) = \gamma Q^{-1}(\xi, t + m, L)$ e adotando uma notação equivalente para a equação (2.3), tem-se

$$A_{cl}(\xi(t + m))P(\xi, t + m + 1, L)A_{cl}^T(\xi(t + m)) - P(\xi, t + m, L) < 0 \quad (3.25)$$

Finalmente, multiplicando a última desigualdade à esquerda por $x(t + m|t)^T$ e à direita por $x(t + m|t)$, e, levando em conta o sistema em malha fechada, a equação (3.16) e a lei de controle $u(t + m|t)$, obtém-se

$$V(t + m + 1|t) - V(t + m|t) < 0 \quad (3.26)$$

que verifica-se para todo $\xi(t + m) \in \Xi$, $\forall m \geq 0$. Assim, somando de $m = 0$ a $m \rightarrow +\infty$, conclui-se que

$$J_\infty(t) < V(t|t) = x(t|t)^T P(\xi, t, L)x(t|t) \quad (3.27)$$

Levando em conta (3.27) pode-se recuperar o índice de desempenho quadrático

$$V(t|t) = \sum_{z_- \in \mathcal{N}^L} \left(\prod_{k=0}^{L-1} \xi_{i_k}(t + k) \right) x(t|t)^T P_{z_-} x(t|t) < \gamma \quad (3.28)$$

O Capítulo 2 já tratou da condição (3.14). Portanto, basta provar que a restrição correspondente à equação (3.15) é verificada. Para tanto, reconsidere a equivalência $G_{i_0}^T Q_{z_-}^{-1} G_{i_0} \geq G_{i_0} + G_{i_0}^T - Q_{z_-}$, aplicada às seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} G_{i_0}^T Q_{z_-}^{-1} G_{i_0} & * \\ C[A_{i_0} G_{i_0} + B_{i_0} Y_{i_0}] & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} G_k^T Q_{(k, \mathbf{z}_-)}^{-1} G_k + G_l^T Q_{(l, \mathbf{z}_-)}^{-1} G_l & * \\ C[A_k G_l + A_l G_k + B_k Y_l + B_l Y_k] & 2y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\forall k \in [1, N-1], \forall l \in [k+1, N] \quad (3.30)$$

Usando as mudanças de variáveis $F_{i_0} = Y_{i_0} G_{i_0}^{-1}$ e $P_{\mathbf{z}_-} = \gamma Q_{\mathbf{z}_-}^{-1}$ e multiplicando a desigualdade resultante (3.29) à esquerda por $\text{diag}\{G_{i_0}^{-T}, I\}$ e à direita por $\text{diag}\{G_{i_0}^{-1}, I\}$, e repetindo o procedimento fixando $i_0 = k$ e $i_0 = l$ na equação (3.30), tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} P_{\mathbf{z}_-} & * \\ C[A_{i_0} + B_{i_0} F_{i_0}] & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} P_{(k, \mathbf{z}_-)} + \frac{1}{\gamma} P_{(l, \mathbf{z}_-)} & * \\ C[A_k + B_k F_l] + C[A_l + B_l F_k] & 2y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\forall k \in [1, N-1], \forall l \in [k+1, N] \quad (3.32)$$

que, multiplicando por

$$\xi_{i_0}(t+m) \left(\prod_{p=0}^{L-1} \xi_{i_p}(t+m+p) \right)$$

e

$$\xi_k(t+m) \xi_l(t+m) \left(\prod_{p=1}^{L-1} \xi_{i_p}(t+m+p) \right)$$

respectivamente, as desigualdades anteriores e somando, produz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} P(\xi, t+m, L) & * \\ C[A(\xi, t) + B(\xi, t)F(\xi, t)] & y_{max}^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.33)$$

Aplicando complemento de Schur e multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por $x(t+m|t)^T$ e à direita por $x(t+m|t)$ e levando em conta a relação,

$$y(t+m+1|t) = C[A(\xi, t) + B(\xi, t)F(\xi, t)]x(t+m|t)$$

determina-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y_{max}^2} y(t+m+1|t)^T y(t+m+1|t) \\ & \leq \frac{1}{\gamma} x(t+m|t)^T P(\xi, t+m, L) x(t+m|t) \leq 1, \forall m \geq 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

assegurando que a desigualdade (2.13) é verificada.

Nota-se que a verificação das propriedades referentes aos itens **(b)** e **(c)** definidas no Teorema 3.1 remetem à prova desenvolvida no Teorema 2.1, sendo portanto omitidas por simplicidade. \blacksquare

Assim, os resultados obtidos no Capítulo 2 correspondem a um caso particular do Teorema 3.1, como verificado na seguinte proposição.

Proposição 4 *Considere o sistema (1.1). Dados $x(t|t)$, u_{max} , y_{max} , matrizes definidas positivas \mathcal{Q} e \mathcal{R} , assuma que existam matrizes Y_{i_0} , G_{i_0} , $\forall i_0 \in [1, N]$, matrizes simétricas Q_{z_-} , $\forall z \in \mathcal{N}^2$ e um escalar positivo γ que satisfaçam (3.7)-(3.12). Então, usando a lei de controle $u(t+m|t) = (\sum_{i_0=1}^N \xi_{i_0}(t+m)F_{i_0})x(t+m|t)$, $m \geq 0$, com $F_{i_0} = Y_{i_0}G_{i_0}^{-1}$, as condições (3.13)-(3.15) são verificadas com $B_{i_0} = B$, $i_0 \in [1, N]$.*

Teorema 3.2 *Proposição 1 \implies Proposição 2 \implies Proposição 3 \implies Proposição 4 \implies Teorema 3.1*

Portanto, o Teorema 3.1 generaliza o problema de MPC explorando L-caminhos na função de Lyapunov dependente de parâmetros $\forall [A(\xi(t)) \ B(\xi(t))] \in \Omega$. O algoritmo computacional é dado por:

Algoritmo 3

1. Faça $t = 0$.
2. Meça ou estime $x(t|t)$.
3. Resolva $\min_{Y_{i_0}, G_{i_0}, Q_{z_-}} \gamma$, sujeito às restrições (3.5)-(3.10).
4. Meça ou estime $\xi(t)$ e compute $F(\xi(t))$.
5. Aplique $u(t) = F(\xi(t))x(t)$ ao sistema.
6. Faça $t \leftarrow t + 1$ e retorne ao passo 2.

3.1 Exemplos Numéricos

Nesta seção, apresentam-se três exemplos que ilustram a eficiência do Algoritmo 3 proposto e alguns resultados teóricos deste capítulo. Nos exemplos, os *softwares* SeDuMi (Sturm 1999) e YALMIP (Löfberg 2004) em ambiente Matlab foram usados para computar a solução do problema min-max, em um computador com processador Intel Core2Quad 2.4GHz e 4 GByte de RAM.

Exemplo 1

O exemplo em estudo é o sistema de posicionamento angular mencionado no Capítulo 2 e apresentado na Figura 2.3. Como visto anteriormente, o movimento da antena pode ser

descrito pela seguinte equação em espaço de estados, usando intervalo de amostragem de 0.1 s e a aproximação de primeira ordem de Euler na derivada

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \begin{bmatrix} \theta(t+1) \\ \dot{\theta}(t+1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 - 0.1\alpha(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\kappa(t) \end{bmatrix} u(t) \\
 &\triangleq A(\xi(t))x(t) + B(\xi(t))u(t) \\
 y(t) &= [1 \ 0] x(t) \triangleq Cx(t).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Os parâmetros $\alpha(t) \in [0.1, 10] \text{ s}^{-1}$ e $\kappa(t) \in [0.787, 5.787] \text{ rad}^{-1} \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-2}$ são assumidos arbitrariamente variantes no tempo no intervalo de variação indicado, implicando que $\Omega = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], [A_3 \ B_3], [A_4 \ B_4]\}$, com

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5787 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5787 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

caracterizando o conjunto politópico $[A(\xi(t)) \ B(\xi(t))]$. Assim, dado o estado inicial $x(t)$, o problema de otimização a ser resolvido em cada instante de tempo t é

$$\begin{aligned}
 \min_{u(t+m|t)=F(\xi(t))x(t+m|t), m \geq 0} \max_{A(t+m) \in \Omega, m \geq 0} \sum_{m=0}^{+\infty} (x(t+m|t)^T \mathcal{Q}x(t+m|t) \\
 + u(t+m|t)^T \mathcal{R}u(t+m|t)) < \gamma \\
 \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R} = 0.00002.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

sujeito a $|u(t+m|t)| \leq 0.1 \text{ V}$, $m \geq 0$.

Para efeito de simulação supõe-se que $\alpha(t)$ e $\kappa(t)$ variam no tempo conforme a saída na forma

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= 0.1 + 4.4y^2 \\
 \kappa(t) &= 0.787 + 12y^2
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

A Figura 3.1 mostra a resposta do sistema para a condição inicial

$$x(0) = [0.5 \ 0.5]^T \tag{3.39}$$

Na Figura 3.1, a linha sólida representa a resposta do sistema com a solução fornecida pelo Teorema 3.1, utilizando uma função de Lyapunov dependente de caminho-5, e a linha tracejada é a resposta obtida com o método de Casavola, Famularo, Franzè e Garone (2006). Com o

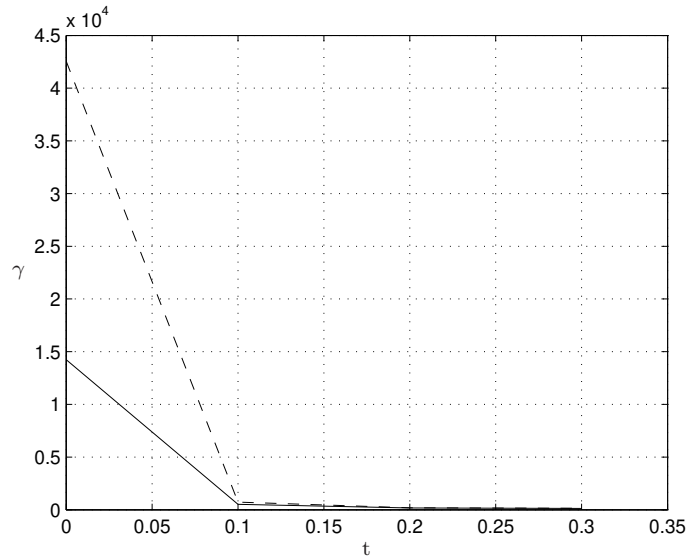


Figura 3.1: Evolução de γ (sólido : Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006)).

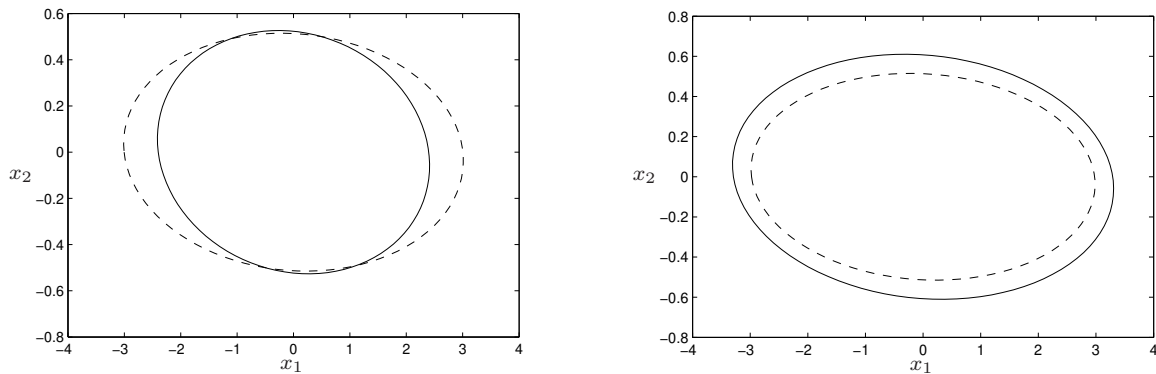


Figura 3.2: Elipsóides invariantes e região de atração dos estados para o rastreador de posicionamento (sólido: Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006)).

Teorema 3.1, obtém-se uma redução significativa no índice de desempenho (aproximadamente 66,5 %). Neste exemplo, as condições de (Kothare et al. 1996) e (Cuzzola et al. 2002) são infactíveis.

A Figura 3.2 ilustra a região de atração para os dois algoritmos factíveis. Na figura, a estimativa do domínio de atração fornecida pelo Teorema 3.1 enlaça a região factível de estados iniciais determinada por Casavola et al. (2006), admitindo mais soluções possíveis para o problema de otimização min-max, considerando $\gamma = 42600$. São apresentados também na Figura 3.2 os elipsóides invariantes obtidos pelos algoritmos factíveis. O melhor desempenho das LMIs propostas no Teorema 3.1 pode ser verificado.

Exemplo 2

Existe, atualmente, uma variedade grande de aplicações utilizando o controle preditivo com sucesso, em áreas não relacionadas com a indústria química. Nesse contexto, (da Silva, Henrique, Lopes e Gomes 2007) desenvolveram um modelo politópico para controle de geradores síncronos da Central Hidrelétrica dos Martins, em Uberlândia (MG). O sistema é ilustrado na Figura 3.3, adotando os valores de base da Tabela 3.1, e os parâmetros do modelo apresentados na Tabela 3.2, cujas variáveis K_1 a K_6 representam as constantes linearizadas.

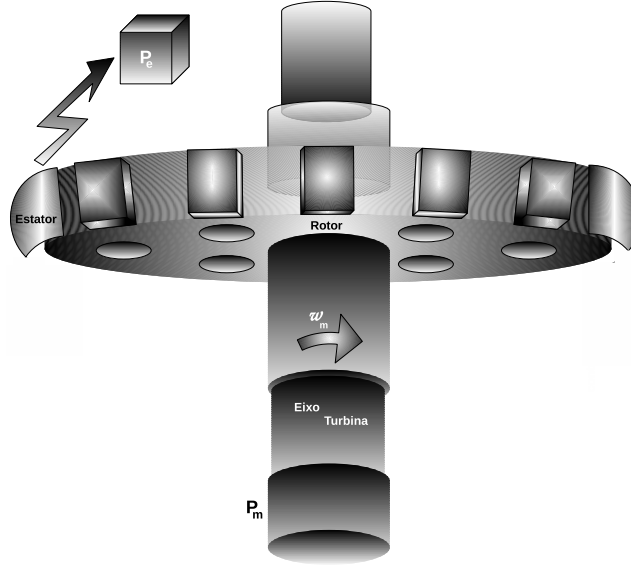


Figura 3.3: Sistema do gerador síncrono.

Considere, então, o seguinte modelo linearizado do gerador síncrono, discretizado com um período de amostragem de 1 s

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(\xi(t))x(t) + B(\xi(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

no qual x é o vetor de estados com o fluxo do entreferro (E'_q), a frequência elétrica (w) e a potência acelerante (P_{ac}), u é o vetor de controle com a tensão do campo (V_f) e a potência mecânica (P_m), e y o vetor de saída com o ângulo de potência (φ) e a tensão terminal (V_t). Assim, pode-se determinar as matrizes A , B e C em função das condições de operação

$$\begin{aligned} A(\xi(t)) &= \begin{bmatrix} -1/K_3 T'_{do} & 0 & K_4/T'_{do} \\ -K_2/2H & 0 & -K_1/2H \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B(\xi(t)) &= \begin{bmatrix} 1/T'_{do} & 0 \\ 0 & 1/2H \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ K_6 & 0 & K_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Os parâmetros de incerteza são $T'_{do} \in [3.5, 10]$ s e $2H \in [3.5, 10]$ s, associadas, respectivamente, à constante de tempo transitório de eixo direto da máquina e à inércia do conjunto girante. Assim, o conjunto de incerteza politópico tem quatro vértices, ou seja, $\Omega = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], [A_3 \ B_3], [A_4 \ B_4]\}$, sujeito às seguintes restrições $|u(t + m|t)| \leq 0.1$ e $|y(t + m|t)| \leq 1.5$. São também especificados os parâmetros de projeto $\mathcal{Q} = 10I$, $\mathcal{R} = 10$.

Tabela 3.1: Valores de base adotados para o gerador síncrono.

Grandeza	Valor
Potência	2750 kW
Tensão	4160 V_{ca}
Aceleração gravitacional	9.8 m/s^2

Tabela 3.2: Valores nominais dos parâmetros para o gerador síncrono.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
K_1	0.82 pu/rad	K_4	1.15 pu/rad
K_2	1.18 pu/pu	K_5	-0.1 pu/rad
K_3	0.30 pu/pu	K_6	0.4 pu/pu

Adicionalmente, para a simulação, assume-se que os parâmetros T'_{do} e $2H$ variam no tempo conforme o estado na forma,

$$T'_{do} = 2H = 3.5 + (C(1)x(t))^2. \quad (3.42)$$

Portanto, dada uma condição inicial $x(0) = [0.8 \ 1.0 \ 3.0]^T$, é possível notar uma redução de 11,4 % no índice de desempenho (Figura 3.4) com os resultados do Teorema 3.1, considerando uma função de Lyapunov dependente de caminho-4, em relação às condições de (Casavola et al. 2006). Como as LMIs de Cuzzola et al. (2002) e Kothare et al. (1996) geram resultados mais conservadores, seus índices não foram computados.

A Figura 3.5 mostra os elipsóides invariantes para o problema do gerador síncrono sujeito às restrições nos sinais de entrada e saída. Nota-se que os resultados do Teorema 3.1 refletem uma maior precisão na predição dos estados futuros no horizonte de predição adotado. Por fim, na Figura 3.6, os resultados do Teorema 3.1 proposto enlaçam quase que completamente os domínios de atração determinados pelas LMIs de Kothare et al. (1996), Cuzzola et al. (2002) e Casavola et al. (2006) dado $\gamma = 1300$.

Exemplo 3

Técnicas de controle têm sido utilizadas em turbinas a gás e a vapor e, em particular, em turbinas hidráulicas (veja Figura 3.7). Neste exemplo será discutida a aplicação do controle MPC

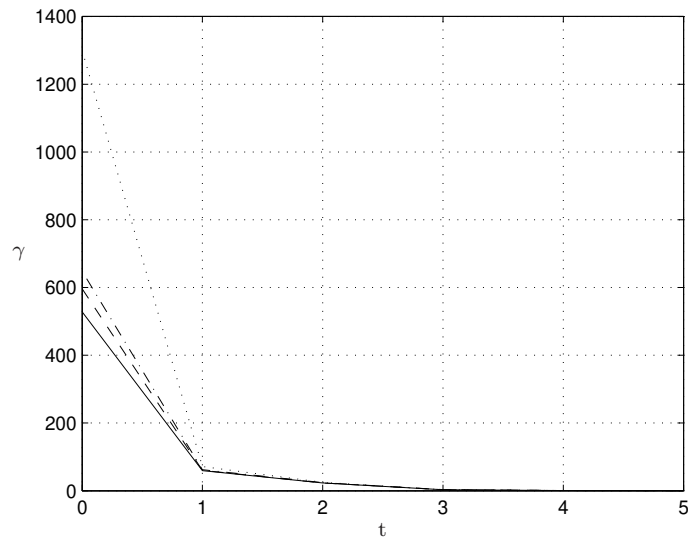


Figura 3.4: Evolução de γ (sólido: Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006); traço-ponto: (Cuzzola et al., 2002)).

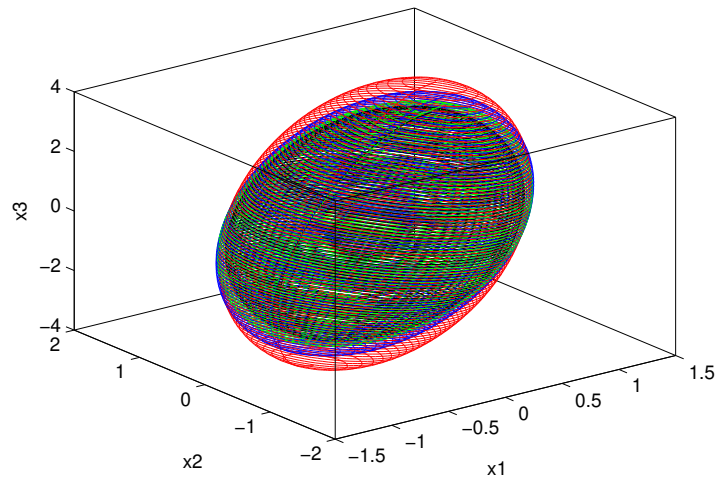


Figura 3.5: Elipsóides invariantes para os estados iniciais (preto: Teorema 3.1; verde: (Casavola et al., 2006); azul: (Cuzzola et al., 2002); vermelho: (Kothare et al., 1996))

em turbinas hidráulicas tipo Francis, discutidas e modeladas por Sansevero (2006). Essencialmente, a proposta de controle de velocidade em turbinas foi implementada por Hovey (1962), no conjunto situado no rio Manitoba, Canadá. O exemplo considerado aqui trata apenas a unidade geradora de Pointe du Bois. As Figuras 3.3 e 3.8, acopladas, representam o sistema completo a

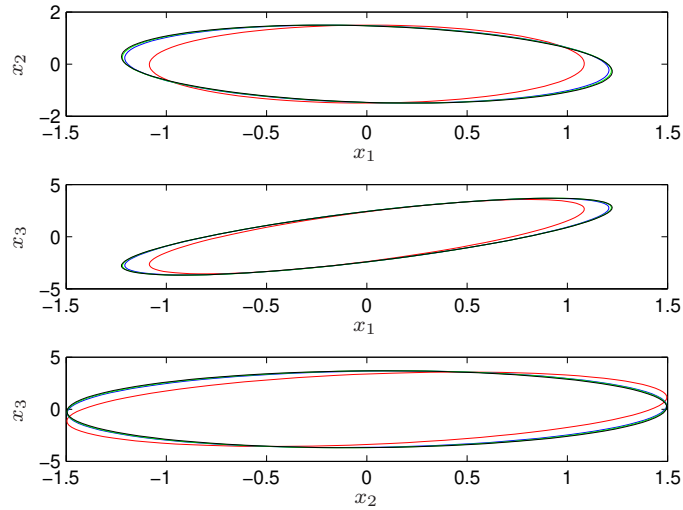


Figura 3.6: Região de atração dos estados em perspectiva (preto: Teorema 3.1; verde: (Casavola et al., 2006); azul: (Cuzzola et al., 2002); vermelho: (Kothare et al., 1996))

ser controlado. Considere, portanto o seguinte sistema contínuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.43)$$

com as matrizes

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{PV}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{DV}} & -\frac{1}{T_{DV}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{G_0 T_W} & -\frac{2}{G_0 T_W} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_t(q_0 - q_{nl})}{G_0 H} & \frac{A_t[G_0 + 2(q_0 - q_{nl})]}{2G_0 H} & -\frac{D_{tur}G_0 + D}{2H} & -\frac{T_s}{2H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{e,R} & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{PV}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2H} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2A_t(q_0 - q_{nl})}{G_0} & \frac{A_t[G_0 + 2(q_0 - q_{nl})]}{G_0} & D_{tur}G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

sendo T_{PV} a constante de tempo da válvula piloto, T_{DV} a constante de tempo da válvula distribuidora, G_0 a abertura do distribuidor no ponto inicial de operação, A_t o fator de pro-

porcionalidade, q_0 a vazão de regime no ponto inicial, q_{nl} a vazão sem carga, H a constante de inércia da unidade, T_W a constante de tempo da água, D_{tur} o coeficiente de amortecimento da turbina, T_s o coeficiente de potência de sincronização e $\omega_{e,R}$ a velocidade angular elétrica de referência. A Tabela 3.3 mostra os valores dos parâmetros de ensaio, considerando que a constante de inércia da unidade é o parâmetro de incerteza (q_{nl} , D e T_s são considerados nulos devido à carga ser isolada).

Tabela 3.3: Valores de ensaio para a planta hidrelétrica.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
T_{PV}	0.05 s	q_0	0.50 pu
T_{DV}	0.20 s	T_W	0.50 s
G_0	0.50 pu	D_{tur}	2.00
A_t	1.00	$\omega_{e,R}$	1.025 pu

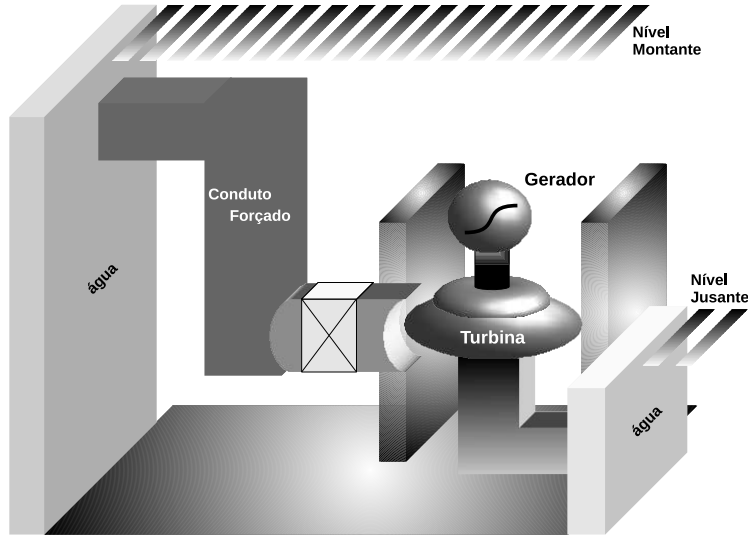


Figura 3.7: Diagrama completo típico de uma planta hidrelétrica.

Realizando a aproximação de primeira ordem de Euler com um intervalo de amostragem de 0.5 s, tem-se

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2H} & -\frac{1.5}{2H} & 1 - \frac{0.5}{2H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5125 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{2H} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t). \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

com $H \in [1, 10]$ s. O vetor de estados $x(t)$ contém a variação de vazão pela válvula piloto (Δq_{PV}), a variação de vazão pela válvula distribuidora (Δq_{DV}), a variação de posição do distribuidor (ΔG), a variação de vazão pela turbina (Δq), a variação na velocidade angular elétrica do gerador ($\Delta \omega_e$) e a variação no ângulo de torque do gerador ($\Delta \delta$). O vetor de controle $u(t)$ contém a variação no sinal de controle da válvula piloto (Δu_{PV}) e a variação na carga elétrica nominal ($\Delta P_{l,0}$), e finalmente, a saída $y(t)$ contém a variação na potência mecânica da turbina (ΔP_m), a variação na posição do distribuidor (ΔG), a variação na velocidade angular elétrica do gerador ($\Delta \omega_e$) e a variação no ângulo de torque do gerador ($\Delta \delta$).

Assume-se, para simulação, que H varia no tempo com o estado $x(t)$ na forma

$$H = 1 + 8(C(4)x(t))^2. \quad (3.46)$$

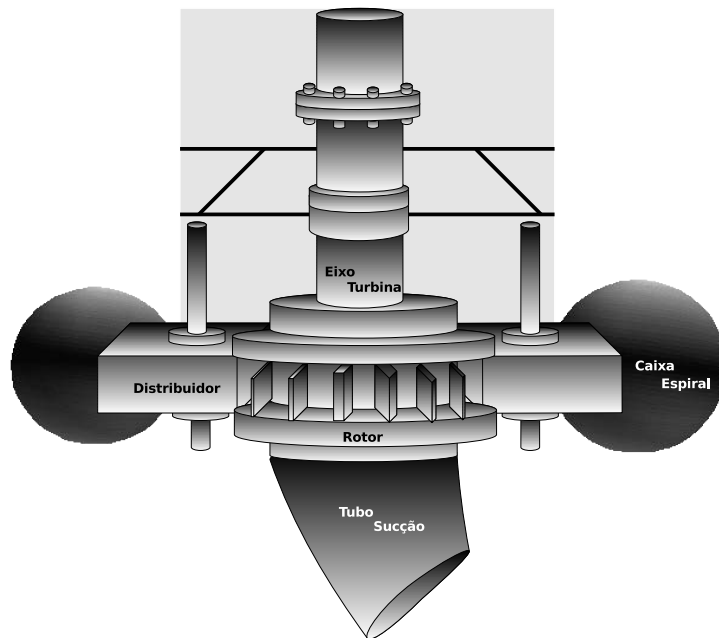


Figura 3.8: Turbina hidráulica tipo Francis.

Os parâmetros de projeto para o controlador MPC são $\mathcal{Q} = I$, $\mathcal{R} = 0.5$, com as restrições $|u(t + m|t)| = 0.5$ e $|y(t + m|t)| = 1.5$. Para a condição inicial $x(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 1.0]^T$, obtém-se o índice de desempenho robusto mostrado na Figura 3.9. A linha sólida representa a resposta do sistema com a solução obtida pelo Teorema 3.1, utilizando uma função de Lyapunov dependente de caminho-5, e a linha tracejada é a resposta obtida com o método de Casavola et al. (2006). Verifica-se uma redução significativa no índice de desempenho de aproximadamente 50.6%. É importante observar que os métodos de Kothare et al. (1996) e Cuzzola et al. (2002) não fornecem solução factível. A Tabela 3.4 mostra o número de variáveis escalares (V), número de linhas de LMIs (L), o tempo de processamento para a resolver o problema de otimização e os valores de γ obtidos para o instante $t = 0$.

Tabela 3.4: Complexidade numérica dos métodos no exemplo de controle de turbinas hidráulicas, e valores de γ associados

Método	γ	V	L	tempo (s)
Casavola et al.	98.84	88	192	0.51
Teorema 3.1 et al.	48.82	769	3072	1.21

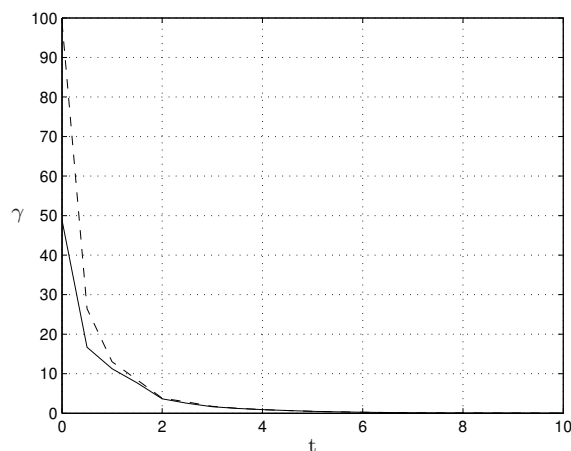


Figura 3.9: Evolução de γ para a turbina hidráulica (sólido: Teorema 3.1; tracejado: (Casavola et al., 2006)).

A Figura 3.10 mostra a evolução ao longo do tempo dos estados x_1 a x_6 do processo de controle das turbinas em estudo. Graficamente, pode-se observar a redução nos valores de picos durante o processo oscilatório de estabilização.

Comentários Finais

Neste capítulo, a estratégia de controle MPC foi estendida para o caso de sistemas com matrizes de entrada dependentes de parâmetros. Por meio de exemplos, foi mostrado que a estratégia proposta apresenta melhores resultados que os existentes na literatura.

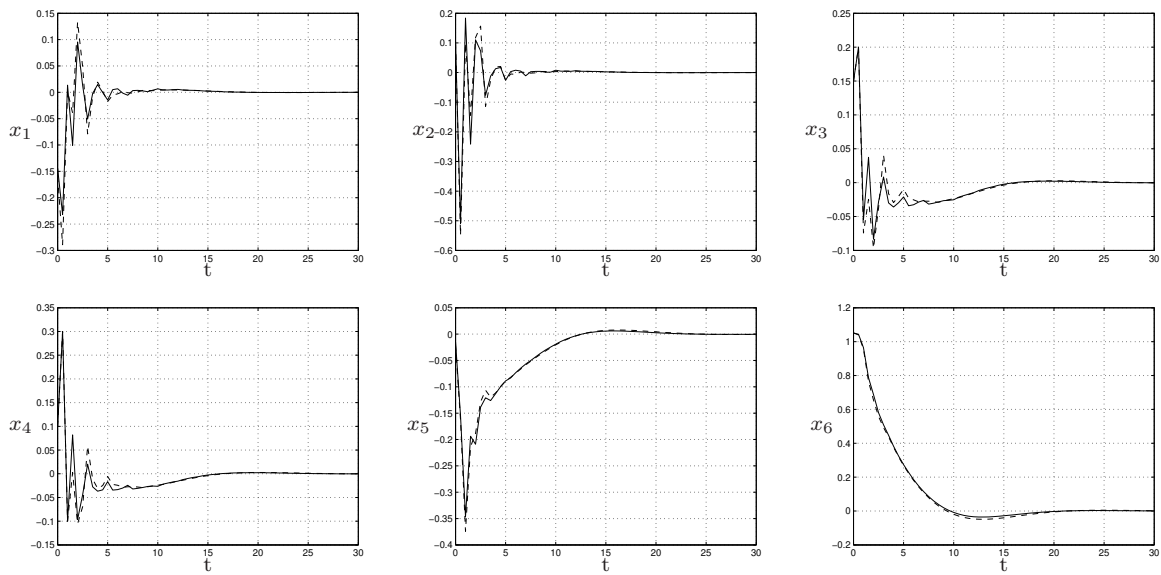


Figura 3.10: Evolução dos estados para a turbina hidráulica (sólido/preto: Teorema 3.1; tracejado/vermelho: (Casavola et al., 2006)).

Conclusões e Perspectivas

Este trabalho abordou o uso de funções de Lyapunov dependentes de caminho no estudo de sistemas lineares discretos variantes no tempo. O foco principal foi o problema de controle preditivo para essa classe de sistemas, considerando (como em Kothare et al. (1996)) um custo quadrático, restrições sobre o controle e o estado e uma formulação baseada em LMIs. Foi mostrado, por meio de exemplos, que a estratégia proposta permite a obtenção de ganhos de realimentação de estados com custos associados menores e, em alguns casos, que uma solução factível pode ser obtida quando os demais métodos existentes falham. De fato, a função de Lyapunov dependente de caminho contém como casos particulares a função quadrática (matriz de Lyapunov constante) e a função afim nos parâmetros. Em contrapartida, o método proposto exige um maior esforço computacional, que é crescente com o aumento do caminho. Os modelos foram escolhidos com base em sistemas reais descritos por equações de estado contínuas, discretizados pelo método de Euler (e portanto estão sujeitos aos efeitos da imprecisão da discretização).

Duas maneiras de tratar as restrições sobre os sinais de controle foram apresentadas: com restrições quadráticas e com saturação. Nesse último caso, estimativas da região de atração baseadas em elipsóides podem ser estabelecidas, e pode-se comprovar um compromisso entre o valor do critério quadrático de otimização e o tamanho dos elipsóides, mantendo-se o melhor desempenho para a abordagem proposta quando comparada com as demais existentes na literatura.

Outra melhora em relação a boa parte dos métodos existentes foi o tratamento de parâmetros variantes no tempo nas matrizes de entrada dos sistemas, modelando por exemplo falhas de atuadores. Também nesse cenário a abordagem proposta mostrou-se menos conservadora.

A abordagem apresentada pode ser aplicada em sistemas discretos variantes no tempo de maneira geral, tratando outros critérios de desempenho e outras restrições convexas sem maiores modificações. Adaptações e extensões para tratar realimentação de saída e imposições de estrutura (por exemplo, descentralização) no controlador também podem ser incorporadas, assim como a presença de outras incertezas no modelo.

Perspectivas

No contexto de MPC, uma idéia seria estender a metodologia para tratar modelos mais complexos, como por exemplo sistemas híbridos, nos quais coexistem componentes discretos como válvulas, chaves, seletores de velocidade e equações diferenciais ou a diferenças. Em termos de sistemas discretos variantes no tempo, de uma maneira geral, poderiam também ser incorporadas taxas de variação limitadas nos parâmetros.

Publicações

- Caun, R.P., Oliveira, R.C.L.F., Jungers, M. e Peres, P.L.D. “Controle Preditivo para Sistemas Lineares Discretos Variantes no Tempo Usando Funções de Lyapunov Dependentes de Caminho”. *XVII Congresso Brasileiro de Automática (CBA2008)*, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil, art. 41556, Setembro 2008.

Submissões

- Jungers, M. Caun, R.P., Oliveira, R.C.L.F. e Peres, P.L.D. “Model predictive control for linear parameter varying systems using path-dependent Lyapunov functions”, IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO'09), Agora, Finland, May 2009.

Bibliografia

- Arkun, Y., Charos, G. e Reeves, D. (1988). A course in ... model predictive control, *Chemical Engineering Education* pp. 178–183.
- Bequette, B. (1991a). Nonlinear control of chemical processes: A review, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **30**: 1391–1413.
- Bequette, B. (1991b). Nonlinear predictive control using multi-rate sampling, *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **69**(1): 136–143.
- Biannic, J. M. e Apkarian, P. (1999). Missile autopilot design via a modified LPV synthesis technique, *Aerospace Science and Technology* **3**(3): 153–160.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Bregel, D. e Seider, W. (1989). Multistep nonlinear predictive controller, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **28**: 1812–1822.
- Casavola, A., Famularo, D. e Franzè, G. (2002). A feedback min-max MPC algorithm for LPV systems subject to bounded rates of change of parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(7): 1147–1153.
- Casavola, A., Famularo, D. e Franzè, G. (2003). Predictive control of constrained nonlinear systems via LPV linear embeddings, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **13**(3-4): 281–294.
- Casavola, A., Famularo, D., Franzè, G. e Garone, E. (2006). An improved predictive control strategy for polytopic LPV linear systems, *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pp. 5820–5825.
- Clarke, D. e Mohtadi, C. (1989). Properties of generalized predictive control, *Automatica* **25**(6): 859–875.
- Clarke, D., Mohtadi, C. e Tuffs, P. (1987a). Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm, *Automatica* **23**(2): 137–148.
- Clarke, D., Mohtadi, C. e Tuffs, P. (1987b). Generalized predictive control - Part II. Extensions and interpretations, *Automatica* **23**(2): 149–160.

- Cuzzola, F., Geromel, J. e Morari, M. (2002). An improved approach for constrained robust model predictive control, *Automatica* **38**: 1183–1189.
- da Silva, C. H. F., Henrique, H. M., Lopes, L. C. O. e Gomes, L. R. (2007). Controle preditivo robusto baseado em inequações matriciais lineares aplicado a máquinas síncronas, *Revista Ciência Exatas* **13**: 121–129.
- Daafouz, J. e Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties, *Systems & Control Letters* **43**(5): 355–359.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.
- Eaton, J. e Rawlings, J. (1990). Feedback control of chemical processes using on-line optimization techniques, *Computers & Chemical Engineering* **14**(4/5): 469–479.
- Feng, L., Wang, J. L. e Poh, E. K. (2007). Improved robust model predictive control with structured uncertainty, *Journal of Process Control* **8**: 683–688.
- Garcia, C. E. e Prett, D. M. (1986). Advances in industrial model-predictive control, *Chemical Process Control - CPC III* pp. 245–293.
- Garcia, C. E., Prett, D. M. e Morari, M. (1989). Model predictive control: Theory and practice — A survey, *Automatica* **25**(3): 335–348.
- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Bernussou, J. (1988). Stabilizability of uncertain linear systems via linear programming, *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, Austin, USA, pp. 1771–1775.
- Henson, M. (1998). Nonlinear model predictive control: Current status and future directions, *Computers & Chemical Engineering* **23**: 187–202.
- Hovey, L. M. (1962). Optimum adjustment of hydro governors on Manitoba hydro system, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers Part III: Power Apparatus and Systems* **81**(3): 581–586.
- Kothare, M. V., Balakrishnan, V. e Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica* **32**(10): 1361–1379.
- Kwakernaak, H. e Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc.
- Lee, J. H. e Ricker, N. L. (1994). Extended Kalman filter based nonlinear model predictive control, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **33**(6): 1530–1541.
- Lee, J., Morari, M. e Garcia, C. (1994). State-space interpretation of model predictive control, *Automatica* **30**(4): 707–717.
- Lee, J.-W. (2006). On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(10): 1714–1721.

- Lee, J.-W. e Dullerud, G. E. (2006). Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems, *Automatica* **42**(2): 205–218.
- Lee, S. M. e Park, J. H. (2007). Output feedback model predictive control for LPV systems using parameter-dependent Lyapunov function, *Applied Mathematics and Computation* **190**: 671–676.
- Lee, S. M., Park, J. H., Ji, D. H. e Won, S. C. (2007). Robust model predictive control for LPV systems using relaxation matrices, *IET Control Theory & Applications* **1**(6): 1567–1573.
- Li, W. e Biegler, L. (1988). Process control strategies for constrained nonlinear systems, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **27**: 1421–1433.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- Lundström, P., Lee, J. H., Morari, M. e Skogestad, S. (1995). Limitations of dynamic matrix control, *Computers & Chemical Engineering* **19**(4): 409–421.
- Mao, W. J. (2003). Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control”, *Automatica* **39**(6): 1109–1112.
- Marchetti, J. L., Mellichamp, D. A. e Seborg, D. E. (1983). Predictive control based on discrete convolution models, *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development* **22**(3): 488–495.
- Marlin, T. E. (1995). *Process Control: Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*, McGraw Hill, New York.
- Maurath, P. R., Mellichamp, D. A. e Seborg, D. E. (1988). Predictive controller design for single-input/single-output (SISO) systems, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **27**: 956–963.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C. e Scokaert, P. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality, *Automatica* **36**: 789–814.
- Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. (2005). Gain scheduled state feedback control of discrete systems with time-varying uncertainties: an LMI approach, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005*, Seville, Spain, pp. 4305–4310.
- Morari, M. e Lee, J. (1999). Model predictive control: Past, present and future, *Computers & Chemical Engineering* **23**: 667–682.
- Muske, K. e Rawlings, J. (1993). Linear model predictive control of unstable processes, *Journal of Process Control* **3**(2): 85–96.
- Mutha, R., Cluett, W. e Penlidis, A. (1998). Modifying the prediction equation for nonlinear model-based predictive control, *Automatica* **34**(10): 1283–1287.

- Nichols, R. A. e Reichert, R. T. (1993). Gain scheduling for \mathcal{H}_∞ controllers: A flight control example, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **1**(2): 69–79.
- Patwardhan, A., Rawlings, J. e Edgar, T. (1990). Nonlinear model predictive control, *Chemical Engineering Communications* **87**: 123–141.
- Qin, S. e Badgwell, T. (2003). A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice* **11**: 733–764.
- Ramamurthi, Y., Sistu, P. e Bequette, B. (1993). Control-relevant dynamic data reconciliation and parameter estimation, *Computers & Chemical Engineering* **17**(1): 41–59.
- Rawlings, J. B. (2000). Tutorial overview of model predictive control, *IEEE Control Systems Magazine* **20**(3): 38–52.
- Reichert, R. T. (1990). Robust autopilot design using μ -synthesis, *Proceedings of the 1990 American Control Conference* pp. 2368–2373.
- Richalet, J. (1993). Industrial applications of model based predictive control, *Automatica* **29**(5): 1251–1274.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. e Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control: applications to industrial processes, *Automatica* **14**: 413–428.
- Ricker, N. (1985). Use of quadratic programming for constrained internal model control, *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development* **24**: 925–936.
- Ricker, N. (1990). Model predictive control with state estimation, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **29**: 374–382.
- Rouhani, R. e Mehra, R. K. (1982). Model Algorithmic Control (MAC): basic theoretical properties, *Automatica* **18**(4): 401–414.
- Sansevero, G. (2006). *Controle Preditivo Baseado em Modelo para Turbo-geradores Hidráulicos Tipo Francis*, PhD thesis, FEEC - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP - Brasil.
- Scokaert, P. e Mayne, D. (1998). Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(8): 1136–1142.
- Shridhar, R. e Cooper, D. (1997). A tuning strategy for unconstrained SISO model predictive control, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **36**(3): 729–746.
- Sistu, P. e Bequette, B. (1995). Model predictive control of processes with input multiplicities, *Chemical Engineering Science* **50**(6): 921–936.
- Sistu, P., Gopinath, R. e Bequette, B. (1993). Computational issues in nonlinear predictive control, *Computers & Chemical Engineering* **17**(4): 361–366.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.

- Wada, N., Saito, K. e Saeki, M. (2006). Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependant Lyapunov function, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* **53**(12): 1446–1450.
- Wan, Z. e Kothare, M. V. (2002). Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities, *Journal of Process Control* **12**: 763–774.
- Wang, Y. J. e Rawlings, J. B. (2004a). A new robust model predictive control method I: theory and computation, *Journal of Process Control* **14**(3): 231–247.
- Wang, Y. J. e Rawlings, J. B. (2004b). A new robust model predictive control method II: examples, *Journal of Process Control* **14**(3): 249–262.
- Wie, B. e Bernstein, D. S. (1992). Benchmark problems for robust control design, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **15**(5): 1057–1059.
- Wu, F., Packard, A. e Balas, G. (1995). LPV control design for pitch-axis missile autopilots, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, pp. 188–193.
- XCPG:07 Xia, Y., Chen, J., Shi, P. e Liu, G. P. (2007). Robust Parameter-Dependent Constrained Model Predictive Control, *ICICIC '07. Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control*, pp. 521.
- Ydstie, B. E. (1984). Extended horizon adaptive control, in J. Gertler e L. Keviczky (eds), *A Bridge Between Control Science and Technology*, Pergamon Press, Oxford, pp. 133–137.
- Zafiriou, E. (1990). Robust model predictive control of processes with hard constraints, *Computer and Chemical Engineering* **14**(4/5): 359–371.

Desigualdades matriciais lineares em controle

A síntese de controladores por meio de desigualdades matriciais lineares é um problema de programação semidefinida (do inglês, *Semidefinite Programming* — SDP), ou seja, é tipicamente um problema de minimização de uma função linear real sujeita a restrições convexas. A técnica surgiu com as formulações desenvolvidas por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1890), que estudava a estabilidade da equação diferencial $\dot{x}(t) = Ax(t)$ por meio da existência de uma matriz simétrica definida positiva P , tal que

$$A^T P + P A < 0 \tag{A.1}$$

que é denominada desigualdade de Lyapunov. A proposta de resolução é baseada na escolha de uma matriz $Q = Q^T > 0$, e na equação linear $A^T P + P A = -Q$, com relação à variável $P = P^T$, para uma dada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Conquanto, os primeiros passos para a solução computacional surgissem da programação convexa com a função de barreira logarítmica (do inglês, *Logarithmic Barrier Function*) e o método dos centros (do inglês, *Method of Centers*); desenvolvidos por Frisch (1955) e Huard (1967), respectivamente, que propiciaram o desenvolvimento do método elipsóide (um algoritmo para resolução de problemas de otimização convexa), introduzidos por Naum Z. Shor, Arkady Nemirovsky, e David B. Yudin (1972), e usado por Leonid Khachiyan para provar a resolução em tempo polinomial de programas lineares. Em seguida, o método de ponto interiores advém como uma classe de algoritmos para resolver problemas de otimização convexa não-linear e linear. Esses algoritmos têm sido inspirados nos algoritmos de Karmarkar, desenvolvido por Narendra Karmarkar (1984), para programação linear. Os elementos básicos do método consistem na função de barreira auto-concordante (do inglês, *Self-Concordant Barrier Function*) usada para codificar o conjunto convexo. Yurii Nesterov e Arkadii Nemirovskii (1988) generalizaram uma classe especial de tais barreiras para codificar qualquer conjunto convexo. Assim, as LMIs têm a seguinte estrutura

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \tag{A.2}$$

sendo que x_i são as variáveis (componentes da matriz P) e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes dadas, $i = 1, \dots, m$.

A desigualdade (A.2) implica que $F(x)$ é definida positiva, representando uma restrição convexa em x , ou de forma geral, uma coleção de restrições aplicáveis em teoria de controle. Assim,

uma das principais vantagens no uso de LMIs é expressar o conjunto $F_1(x) > 0, \dots, F_p(x) > 0$, por meio de uma LMI dada por $\text{diag}(F_1(x), \dots, F_p(x)) > 0$, sem perda de generalidade.

Além disso, as desigualdades (convexas) não-lineares, ou desigualdades matriciais quadráticas, presentes na maioria das formulações de problemas complexos, podem ser tratadas pela teoria de desigualdades lineares aplicando complemento de Schur. Esta idéia é ilustrada com o seguinte exemplo

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0, \quad (\text{A.3})$$

com $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$ matrizes de dimensões apropriadas, e $P = P^T$ a variável. Assim, por Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{A.4})$$

Assim, o problema geral pode ser definido como a minimização de uma função linear sujeito a restrições LMIs,

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{s.a} && F(x) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

com F sendo uma função afim em x . Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \lambda \\ & \text{s.a} && A(x, \lambda) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

com A dependendo de maneira afim em x e em λ . Por fim, é importante destacar que problemas descritos na forma de LMIs são resolvidos em tempo polinomial, e possuem uma representação convexa com relação às variáveis de otimização. Nestes casos, a solução ótima local é também a global.

Caracterização de sistemas LPV

A classe de sistemas lineares com parâmetros variantes pode ser descrita por

$$\dot{x} = A(\xi(t))x + B(\xi(t))u \quad (\text{B.1})$$

$$y = C(\xi(t))x + D(\xi(t))u, \quad \xi(t) \in \Xi, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{B.2})$$

Duas classes de sistemas LPV podem ser distinguidas. A primeira classe pode ser definida pelas seguintes propriedades:

- a dependência paramétrica é afim, isto é, as matrizes de espaço de estados $A(\xi(t))$, $B(\xi(t))$, $C(\xi(t))$, $D(\xi(t))$ dependem de modo afim de $\xi(t)$;
- o parâmetro variante no tempo $\xi(t)$ varia em um polítopo Ξ de vértices $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$.

A segunda classe consiste no uso de transformações fracionais lineares para representar a dependência do parâmetro como uma perturbação diagonal (veja Figura B.1).

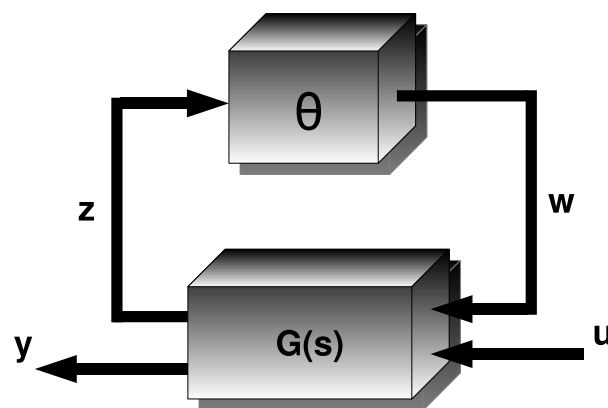


Figura B.1: Representação LFT de um sistema LPV.