



**Sistemas Lineares Sujeitos a Restrições:  
Regulação Robusta e  
Alocação Regional Parcial de Pólos**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

**Sirlene Aparecida Marques**  
Engenheira Industrial Eletricista - CEFET/MG

em 15 de julho de 1994 perante à banca examinadora

*Comissão de Exame*  
**Basílio E. A. Milani** - Orientador

**Geraldo Nonato Telles** - FEM/UNICAMP

**Paulo Augusto Valente Ferreira** - FEE/UNICAMP

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por SIRLENE APARECIDA MARQUES e aprovada pela Comissão Julgadora em 15/07/1994.

*Basílio E. A. Milani*  
Orientador

2.830.14

*Àqueles que estiveram tão presentes ...*

*Dividindo comigo os fins de semana, as saudades e as provas ...*

*Dedicando o seu tempo, quando seu próprio trabalho exigia tanta atenção ...*

*Ensinando latex, cultura, matlab, culinária, unix ou música ...*

*Compartilhando as lágrimas das inesquecíveis gargalhadas ...*

*“Puxando minhas orelhas” ou simplesmente me ouvindo ...*

*Cantando pra mim ou levando ao supermercado ...*

*Tirando dúvidas de controle, de português ou da vida ...*

*Dedico este trabalho a todos vocês,  
amigos da Sir, da Xarlene, da Xazá ... da Sirlene.*

# Agradecimentos

Ao Prof. Basílio E.A.Milani cuja excelente orientação me proporcionou tranqüilidade, segurança, incentivo e respostas as minhas perguntas.

Ao meu pai João e a minha “mammi” Joselina que sempre me deram tanto apoio e tanto amor.

À Sirlei, minha irmã gêmea querida, minha grande amiga de sempre.

Ao meu irmão “grandão”.

Ao CNPq e ao povo brasileiro pelo financiamento deste trabalho.

A DEUS.

## RESUMO

Utilizando a teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes, é estudado o problema de regulação robusta de sistemas lineares incertos, contínuos no tempo, considerando restrições simétricas nos vetores de estado e controle e domínio de incerteza definido por intervalos das matrizes  $A$  e  $B$  do sistema. Para solução computacional desse problema é proposta uma abordagem eficiente de programação linear.

A invariância positiva de um poliedro limitado, implica em um bem definido posicionamento regional dos pólos do sistema. Baseado neste resultado, é proposto um algoritmo de programação linear, cujo objetivo é determinar uma lei de controle de realimentação de estados, que ao tornar um poliedro positivamente invariante, promova o posicionamento total ou seletivo dos pólos do sistema em uma região do plano complexo.

## ABSTRACT

Using the theory of positively invariant polyhedral sets, the problem of robust regulation of uncertain linear continuous-time systems, considering symmetrical constraints on the state and control vectors and uncertain domain defined by intervals of  $A$  and  $B$  matrices, is studied. For computational solution of this problem, an efficient linear programming approach is proposed.

The positive invariance of a bounded polyhedron leads to a well defined regional eigenvalue assignment. Based on this result, a linear programming algorithm is proposed, which aims to obtain a feed-back control law, which by making a polyhedron positively invariant, leads to a total or partial assignment of the eigenvalues of the system in a regional of complex plane.

# Conteúdo

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução Geral</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Conceitos Preliminares</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .   | 3         |
| 2.2      | Poliedros Positivamente Invariantes . . . . .  | 3         |
| 2.3      | Regulação Ótima de Sistemas Sujeitos a Restrições . . . . .                              | 7         |
| 2.4      | Conclusão . . . . .  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Regulação Robusta de Sistemas Lineares Sujeitos a Restrições no Estado e Controle</b> | <b>11</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .   | 11        |
| 3.2      | Formulação do Problema . . . . .   | 11        |
| 3.3      | Solução do PLRR . . . . .  | 12        |
| 3.4      | Exemplo numérico . . . . .   | 16        |
| 3.5      | Conclusão . . . . .  | 17        |
| <b>4</b> | <b>Alocação Regional de Pólos Utilizando Poliedros Positivamente Invariantes</b>         | <b>18</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .   | 18        |
| 4.2      | Formulação do Problema . . . . .   | 18        |
| 4.3      | Solução do PARP . . . . .  | 20        |
| 4.3.1    | Determinação de $S(G, \omega)$ . . . . .   | 21        |
| 4.3.2    | Determinação da Matriz $F$ . . . . .   | 28        |
| 4.4      | Alocação Regional Parcial de Pólos . . . . .   | 29        |
| 4.5      | Exemplo Numérico . . . . .   | 31        |
| 4.6      | Conclusão . . . . .  | 41        |
|          | <b>Conclusão Geral</b>   | <b>44</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>  | <b>47</b> |

*Conteúdo*

*iii*

**Apêndice**

**50**

# Capítulo 1

## Introdução Geral

Na prática da engenharia de controle, sistemas lineares sujeitos a restrições nas variáveis de estado e/ou controle e incerteza nos parâmetros, são muito comuns [7].

O projeto de sistemas de controle sujeitos a restrições poliédricas nas variáveis de estado e/ou controle, teve, recentemente, um grande impulso através da utilização da teoria de poliedros positivamente invariantes [10][20][21]. Um conjunto de estados positivamente invariante tem a propriedade de que, para qualquer condição inicial pertencente ao conjunto, no tempo  $t = t_0$ , a trajetória do sistema permanece dentro do conjunto para  $t > t_0$ .

Na aplicação ao problema de controle sob restrições será de interesse principal o estudo de conjuntos do tipo poliédricos positivamente invariantes, pois as restrições impostas delimitam, em geral, regiões poliédricas nos espaços de estado e de controle. O objetivo é encontrar uma lei de controle do tipo realimentação de estados, que estabilize assintoticamente o sistema e mantenha a trajetória do sistema em malha fechada confinada dentro de um poliedro de comportamento linear. Isto pode ser obtido fazendo-se com que este poliedro seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada, através da satisfação de duas relações matriciais lineares [2] [3] [10] [20], facilmente solucionadas através de programação linear. A satisfação destas relações por sua vez, implicará em uma alocação regional característica dos autovalores do sistema em malha fechada. Considerando parâmetros incertos para as matrizes  $A$  e  $B$  do sistema, o conceito de invariância positiva também se aplica à regulação robusta de sistemas sujeitos a restrições no estado e no controle [8][9][11][19].

Neste trabalho, utilizando a teoria de poliedros positivamente invariantes, serão abordados dois aspectos da regulação de sistemas lineares contínuos no tempo, sujeitos a restrições no estado e/ou controle e incerteza nos parâmetros.

Primeiro, considerando incerteza nos parâmetros do sistema linear, os resultados para sistemas discretos obtidos por [11], são estendidos para o problema de regulação robusta de um sistema linear contínuo no tempo, sujeito a restrições simétricas no

estado e controle e domínio de parâmetros incertos envolvendo as matrizes  $A$  e  $B$ .

Em segundo lugar, sem considerar incerteza dos parâmetros e utilizando a propriedade de que a invariância de um poliedro simétrico implica em uma alocação regional dos autovalores, é estudada então, a alocação regional de pólos. O objetivo é encontrar um poliedro simétrico e uma matriz de realimentação de estados que promova a invariância deste poliedro, garantindo assim, uma margem de estabilidade para o sistema e uma consequente alocação dos seus autovalores. A partir disso, através de métodos numéricos, é feita uma alocação regional parcial dos autovalores, que consiste na resolução do problema de controle para um sistema de ordem reduzida, onde serão alocados apenas os autovalores escolhidos a priori.

Esta dissertação está assim organizada:

O capítulo 2 trata da obtenção da invariância positiva de um poliedro simétrico limitado através da satisfação das relações de invariância positiva. É demonstrado que a invariância positiva deste poliedro implica num posicionamento regional dos autovalores do sistema em malha fechada. A invariância de um poliedro simétrico não limitado também é estudada, levando a uma condição de invariância do espaço nulo da matriz dos coeficientes do poliedro ( $G$ ), que se satisfeita, reduzirá o problema à obtenção da invariância de um poliedro limitado para um sistema de menor ordem. É apresentado então, o problema de regulação linear com restrições (PLR), que se baseia na obtenção de uma lei de controle por realimentação de estados para sistemas com restrições nos seus vetores de estado e/ou controle. Para resolução deste problema, é utilizada uma abordagem simples de programação linear, facilmente resolvida pelo método Simplex.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo do problema de regulação linear robusta com restrições (PLRR) onde são considerados sistemas lineares incertos ( $A, B$ ), contínuos no tempo, sujeitos a restrições simétricas nos seus vetores de estado e controle e domínio de incerteza definido por intervalos de matrizes, envolvendo parâmetros de  $A$  e  $B$ .

O capítulo 4 trata do problema de alocação regional de pólos (PARP) através do conceito de invariância positiva. É demonstrado que isto será possível através da obtenção de um poliedro limitado e uma lei de controle que torne este poliedro positivamente invariante. Seguindo esta abordagem, é estudada então, a alocação regional parcial de pólos, que faz uma alocação seletiva dos autovalores do sistema, contornando problemas de não controlabilidade e/ou ganhos altos.



# Capítulo 2

## Conceitos Preliminares

### 2.1 Introdução

Este capítulo trata do problema de regulação de sistemas sujeitos a restrições no estado e/ou no controle, através da teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes. Será feito então, um estudo sobre esta propriedade e sua aplicação na solução do problema de regulação.

### 2.2 Poliedros Positivamente Invariantes

Seja o sistema linear, contínuo, invariante no tempo, representado pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \quad t \in [0, \infty) \\ u(t) &= Fx(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$   $A, B$  e  $F$  são matrizes reais, dimensionadas consistentemente e  $\text{posto}(B) = m \leq n$ .

**Definição 1** [1]: Um conjunto não vazio  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  é um conjunto positivamente invariante do sistema (2.1) se e somente se para qualquer estado inicial  $x_0 \in \Omega$ , a trajetória completa do vetor de estado,  $x(t)$ , permanece em  $\Omega$ .

Seja o poliedro simétrico  $S(G, \omega)$ , definido por:

$$S(G, \omega) = \{x(t) \in \mathfrak{R}^n : -\omega \leq Gx(t) \leq \omega\}\tag{2.2}$$

onde  $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\text{posto}(G) = n$ ;  $\omega \in \mathfrak{R}^n$  e  $\omega > 0$ , ou seja,  $\omega_i > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$ .

**Proposição 1** : O poliedro simétrico (2.2), é um conjunto positivamente invariante do sistema (2.1), se e somente se existirem matrizes  $H(h_{ij})$  e  $K(k_{ij}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , com  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$  e  $k_{ij} \geq 0$  para quaisquer  $i, j$ , tais que:

$$(H - K)G = G(A + BF) \quad (2.3)$$

$$(H + K)\omega \leq 0 \quad (2.4)$$

Esta proposição corresponde a um resultado apresentado em [2] que é uma variante direta de resultados apresentados em [3].

**Proposição 2** [1]: Uma condição necessária e suficiente para construir o poliedro positivamente invariante (2.2) para o sistema (2.1), com  $\omega > 0 \in \mathfrak{R}^n$  e  $G = P^{-1}$  uma matriz dos autovetores generalizados à esquerda de  $(A + BF)$ , é que todos autovalores de  $(A + BF)$  (reais e complexos), sejam tais que:

$$\text{Re} [\lambda(A + BF)] \leq 0 \quad (2.5)$$

$$|\text{Re} [\lambda(A + BF)]| \geq |\text{Im} [\lambda(A + BF)]| \quad (2.6)$$

**Proposição 3** (Lema de Farkas Extendido): As restrições

$$-\rho \leq Ux(t) \leq \rho$$

onde  $\rho > 0 \in \mathfrak{R}^m$ ,  $U \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , são satisfeitas para qualquer ponto do poliedro

$$-\omega \leq Tx(t) \leq \omega$$

com  $\omega > 0$ , se e somente se existir uma matriz  $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que:

$$MT = U \quad (2.7)$$

$$|M|\omega \leq \rho \quad (2.8)$$

Esta proposição é uma especialização trivial para poliedros simétricos de resultados apresentados em [5].

**Proposição 4** : Sejam o sistema (2.1) e o poliedro (2.2). Temos que a invariância do poliedro  $S(G, \omega)$ , implica que:

$$\mathbf{Re} [\lambda(A + BF)] \leq 0 \quad (2.9)$$

$$|\mathbf{Re} [\lambda(A + BF)]| \geq |\mathbf{Im} [\lambda(A + BF)]| \quad (2.10)$$

**Prova:** Se  $S(G, \omega)$  é invariante com relação ao sistema (2.1), pela Proposição 3, o poliedro correspondente às restrições :

$$-\rho \leq MGx(t) \leq \rho \quad (2.11)$$

$$|M|\omega \leq \rho \quad (2.12)$$

com  $\rho > 0$ , também é invariante com relação ao mesmo sistema.

Assumindo  $M = P^{-1}G^{-1}$ , de (2.11) e (2.12), temos que o poliedro correspondente às restrições

$$-\rho \leq P^{-1}x(t) \leq \rho \quad (2.13)$$

$$|P^{-1}G^{-1}|\omega \leq \rho \quad (2.14)$$

também é invariante com relação ao sistema (2.1). Assim sendo, escolhendo  $P^{-1}$  como a matriz dos autovetores generalizados à esquerda de  $(A + BF)$ , a Proposição 2, garante que

$$\mathbf{Re} [\lambda(A + BF)] \leq 0 \quad (2.15)$$

$$|\mathbf{Re} [\lambda(A + BF)]| \geq |\mathbf{Im} [\lambda(A + BF)]| \quad (2.16)$$

□

Consideremos agora o poliedro ilimitado

$$S(G, \omega) = \{x(t) \in \mathfrak{R}^n : -\omega \leq Gx(t) \leq \omega\} \quad (2.17)$$

onde  $G \in \mathfrak{R}^{r \times n}$ ,  $\omega > 0 \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\text{posto}(G) = r$  e  $r < n$ .

**Proposição 5[2]:** Sejam o sistema (2.1) e o poliedro (2.17). Considere a seguinte mudança na base de representação do sistema:

$$x = Q\tilde{x} \quad (2.18)$$

onde  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é uma matriz ortogonal tal que

$$\tilde{G} = GQ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{G}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{G}_2 \in \mathfrak{R}^{r \times r} \quad (2.19)$$

As novas representações do sistema (2.1) e do poliedro  $S(G, \omega)$  de (2.17), ficam

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (2.20)$$

$$\tilde{A} = QAQ' = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A}_{22} \in \mathfrak{R}^{r \times r} \quad (2.21)$$

$$\tilde{B} = QB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_2 \in \mathfrak{R}^{r \times m} \quad (2.22)$$

$$\tilde{S}(\tilde{G}, \omega) = \{\tilde{x}(t) \in \mathfrak{R}^n : -\omega \leq \tilde{G}\tilde{x}(t) \leq \omega\} \quad (2.23)$$

O poliedro (2.17) é positivamente invariante para o sistema (2.1) se e somente se:

1: Existe uma matriz  $\tilde{F}_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n-r)}$  tal que

$$\tilde{A}_{21} + \tilde{B}_2\tilde{F}_1 = 0 \quad (2.24)$$

2: Existem matrizes  $\tilde{F}_2 \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ ,  $H$  e  $K \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ , com  $H_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$  e  $K_{ij} \geq 0$  para quaisquer  $i, j$ , tais que:

$$(H - K)\tilde{G}_2 = \tilde{G}_2(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2\tilde{F}_2) \quad (2.25)$$

$$(H + K)\omega \leq 0 \quad (2.26)$$

É importante notar que a equação (2.24) corresponde à condição de invariância do espaço nulo de  $G$ .

Satisfeita a equação (2.24), verificamos que através de (2.25) e (2.26) que o problema original de obtenção da invariância positiva de  $S(G, \omega)$  para o sistema (2.1) foi reduzido à obtenção da invariância do poliedro fechado  $\tilde{S}(\tilde{G}_2, \omega)$  para um sistema de menor ordem representado pelo par  $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2)$ . Esta redução torna-se extremamente significativa em sistemas de grandes dimensões, com poucas restrições, onde o número de variáveis é sensivelmente diminuído.

## 2.3 Regulação Ótima de Sistemas Sujeitos a Restrições

Seja o sistema (2.1) sujeito às seguintes restrições sobre seus vetores de estado e controle:

$$-\omega \leq Gx(t) \leq \omega \quad (2.27)$$

$$-\rho \leq u(t) \leq \rho \quad (2.28)$$

onde  $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tem posto completo.

**Definição 2:** O problema de regulação linear com restrições (PLR) corresponde a determinar  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , que faz o sistema (2.1) assintoticamente estável e as restrições (2.27) e (2.28) são satisfeitas para todo  $t \geq 0$ .

**Proposição 6 [12]:** Sejam  $S(G, \omega)$  e  $S(F, \rho)$  conjuntos poliédricos simétricos do  $\mathfrak{R}^n$  definidos pelas restrições (2.27) e (2.28). Uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é solução do PLR se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- 1-  $S(G, \omega)$  é um conjunto poliédrico positivamente invariante do sistema (2.1)
- 2-  $S(G, \omega) \subseteq S(F, \rho)$
- 3-  $\text{Re} [\lambda(A + BF)] < 0$

**Proposição 7:** Uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que

$$F = MG$$

é uma solução do PLR se  $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma solução factível do seguinte conjunto de restrições lineares:

$$(H - K)G = G(A + BMG) \quad (2.29)$$

$$(H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega \quad (2.30)$$

$$|M|\omega \leq \rho\gamma \quad (2.31)$$

$$\varepsilon > 0 \quad (2.32)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2.33)$$

onde  $H(h_{ij}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ ,  $K \geq 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\gamma$  e  $\varepsilon$  são escalares.

Esta proposição resulta diretamente das Proposições 1, 3 e 6. Posto  $(G) = n$  e as restrições (2.29), (2.30) e (2.32), garantem a estabilidade assintótica de  $(A + BF)$ . As restrições (2.31), (2.33), garantem que  $S(G, \omega) \subseteq S(F, \rho)$ .

Baseado na Proposição 7 e utilizando a seguinte manipulação de variáveis em programação linear[4]:

$$\begin{aligned} M &= M^+ - M^- \\ |M| &= M^+ + M^- \\ M^+ &\geq 0, \quad M^- \geq 0 \end{aligned}$$

uma forma fácil e eficiente de obter a solução do PLR é fazer

$$F = (M^+ - M^-)G$$

onde  $M^+$  e  $M^-$  são obtidos da solução do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min_{H, K, M^+, M^-, \varepsilon, \gamma} \quad & -\varepsilon + p\gamma \\ \text{s.a} \quad & (H - K)G = G[A + B(M^+ - M^-)G] \\ & (H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega \\ & (M^+ + M^-)\omega \leq \rho\gamma \\ & \varepsilon > 0 \\ & 0 \leq \gamma \leq 1 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde  $\varepsilon$  é um escalar positivo a ser especificado, o qual corresponde à margem de estabilidade desejada para o sistema em malha fechada, ou seja,

$$\text{Re} [\lambda(A + BF)] \leq -\varepsilon \tag{2.35}$$

$H(h_{ij}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ ,  $K \geq 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $p \geq 0$  é um escalar que pode ser usado para especificar pesos relativos para a margem de estabilidade  $\varepsilon$  e para o nível de esforço de controle  $\gamma$  no índice de desempenho.

Utilizando o produto de Kronecker ( $\otimes$ ) (Ver Apêndice), o PL matricial (2.34) pode ser colocado na seguinte forma padrão vetorial:

$$\min_{h,k,m^+,m^-, \varepsilon, \gamma} -\varepsilon + p\gamma$$

$$\text{s.a.} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes G') & -(\mathbf{I}_n \otimes G') & -(GB \otimes G') & (GB \otimes G') & \mathbf{0}_{(nn \times 1)} & \mathbf{0}_{(nn \times 1)} \\ (\mathbf{I}_n \otimes \omega') & (\mathbf{I}_n \otimes \omega') & \mathbf{0}_{(n \times mn)} & \mathbf{0}_{(n \times mn)} & \omega & \mathbf{0}_{(n \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(m \times nn)} & \mathbf{0}_{(m \times nn)} & (\mathbf{I}_m \otimes \omega') & (\mathbf{I}_m \otimes \omega') & \mathbf{0}_{(m \times 1)} & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ m^+ \\ m^- \\ \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{matrix} = d \\ \leq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

Onde  $D(d_{ij}) = GA$ ;  $\varepsilon > 0$ ;  $0 \leq \gamma \leq 1$ ;

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{nn} \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{bmatrix} \quad m^+ = \begin{bmatrix} m_{11}^+ \\ m_{12}^+ \\ \vdots \\ m_{mn}^+ \end{bmatrix} \quad m^- = \begin{bmatrix} m_{11}^- \\ m_{12}^- \\ \vdots \\ m_{mn}^- \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{nn} \end{bmatrix};$$

$$h_{ij} \geq 0 \text{ para } i \neq j, \quad k_{ij} \geq 0, \quad m_{ij}^+ \geq 0, \quad m_{ij}^- \geq 0 \quad (2.36)$$

$\mathbf{0}_{(. \times .)}$  é uma matriz com componentes nulos de dimensão  $(. \times .)$ ;

Na ausência das restrições sobre o controle (2.28), baseado na Proposição 1, uma forma eficiente de obter a matriz de realimentação de estados  $F(f_{ij}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , solução do PLR, é através da solução do seguinte problema de programação linear:

$$\min_{f,h,k} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f_{ij}|$$

$$\text{s.a.} \quad (H - K)G - G(A + BF) = 0 \quad (2.37)$$

$$(H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega$$

$$h_{ij} \geq 0 \text{ para } i \neq j, \quad k_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$$

Utilizando um artifício comum em programação linear [4]:

$$f_{ij} = f_{ij}^+ - f_{ij}^-$$

$$|f_{ij}| = f_{ij}^+ + f_{ij}^-$$

$$f_{ij}^+ \geq 0; \quad f_{ij}^- \geq 0$$

o problema de programação linear matricial (2.37), pode ser colocado na seguinte forma padrão vetorial utilizando o Produto de Kronecker.

$$\min_{h,k,f^+,f^-} \left[ \mathbf{0}_{(1 \times nn)} \quad \mathbf{0}_{(1 \times nn)} \quad \mathbf{1}_{(1 \times mn)} \quad \mathbf{1}_{(1 \times mn)} \right] \left[ h \quad k \quad f^+ \quad f^- \right]'$$

$$\text{s.a} \quad \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes G') & -(\mathbf{I}_n \otimes G') & -(GB \otimes \mathbf{I}_n) & (GB \otimes \mathbf{I}_n) \\ (\mathbf{I}_n \otimes \omega') & (\mathbf{I}_n \otimes \omega') & \mathbf{0}_{(n \times mn)} & \mathbf{0}_{(n \times mn)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ f^+ \\ f^- \end{bmatrix} = d \leq -\varepsilon \omega$$

$$\text{Onde} \quad D(d_{ij}) = GA;$$

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{nn} \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{bmatrix} \quad f^+ = \begin{bmatrix} f_{11}^+ \\ f_{12}^+ \\ \vdots \\ f_{mn}^+ \end{bmatrix} \quad f^- = \begin{bmatrix} f_{11}^- \\ f_{12}^- \\ \vdots \\ f_{mn}^- \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{nn} \end{bmatrix};$$

$$h_{ij} \geq 0 \text{ para } i \neq j, \quad k_{ij} \geq 0, \quad f_{ij}^+ \geq 0, \quad f_{ij}^- \geq 0 \quad (2.38)$$

$\mathbf{0}_{(. \times .)}$  é uma matriz com componentes nulos de dimensão  $(. \times .)$ ;

$\mathbf{1}_{(. \times .)}$  é uma matriz com componentes unitários de dimensão  $(. \times .)$ ;

## 2.4 Conclusão

Com base nos conceitos e propriedades da invariância positiva e do Lemma de Farkas Extendido, foi demonstrado neste capítulo, que a invariância positiva de um poliedro simétrico limitado, implica em uma alocação regional dos autovalores do sistema em malha fechada. Condições equivalentes de invariância positiva foram obtidas para poliedros não limitados, cuja redução significativa do sistema, torna este método de grande importância para sistemas de grandes dimensões, com poucas restrições, onde o número de variáveis é sensivelmente diminuído.

O conceito de invariância positiva foi então aplicado na solução do problema de regulação linear (PLR) para sistemas sujeitos a restrições nos seus vetores de estado e/ou controle. Para solução do PLR foi proposta uma abordagem de programação linear matricial, a qual, com base no produto de Kronecker, pôde ser facilmente colocada na sua forma padrão vetorial.



## Capítulo 3

# Regulação Robusta de Sistemas Lineares Sujeitos a Restrições no Estado e Controle

### 3.1 Introdução

O problema de regulação robusta de sistemas lineares discretos no tempo, sujeitos a restrições no estado e controle foi tratado recentemente em Bitsoris e Gravalou [9] e Carvalho e Milani [11], utilizando a teoria de poliedros positivamente invariantes [10]. Bitsoris e Gravalou [9] tratou o problema considerando restrições assimétricas no estado e controle e sistemas incertos  $(A, B)$  com domínio de incerteza envolvendo apenas os parâmetros da matriz  $A$ . Carvalho e Milani [11] propuseram uma abordagem de programação linear capaz de tratar problemas com restrições simétricas no estado e controle e domínio de incerteza envolvendo parâmetros das matrizes  $A$  e  $B$ .

Este capítulo trata o problema de regulação linear robusta com restrições, considerando sistemas lineares incertos  $(A, B)$ , contínuos no tempo, sujeitos a restrições simétricas lineares nos vetores de estado e controle e domínio de incerteza definido por intervalos de matrizes, envolvendo parâmetros de  $A$  e  $B$ . Como em [11], para a solução deste problema de regulação é proposta uma abordagem simples de programação linear, indicada para sistemas de grande porte com grande números de parâmetros incertos.

### 3.2 Formulação do Problema

Seja o sistema linear, contínuo, invariante no tempo, representado pela equação de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \quad t \in [0, \infty) \\ u(t) &= Fx(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ;  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ ;  $A$ ,  $B$  e  $F$  são matrizes dimensionadas consistentemente e  $\text{posto}(B) = m \leq n$ .

Considere que as variáveis do sistema estão sujeitas às seguintes restrições :

$$-\omega \leq Gx(t) \leq \omega \tag{3.2}$$

$$-\rho \leq u(t) \leq \rho \tag{3.3}$$

onde  $\omega > 0 \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\rho > 0 \in \mathfrak{R}^m$  e  $\text{posto}(G) = n$ .

Considere também que os parâmetros das matrizes  $A$  e  $B$  em (3.1) não são perfeitamente conhecidos, podendo assumir qualquer valor no intervalo

$$A_l \leq A \leq A_u \tag{3.4}$$

$$B_l \leq B \leq B_u \tag{3.5}$$

onde  $A_l$ ,  $A_u$  e  $B_l$ ,  $B_u$  são os limites inferiores e superiores das matrizes  $A$  e  $B$  respectivamente.

**Definição 3:** O problema de regulação linear robusta com restrições (PLRR) a ser tratado neste trabalho, corresponde a determinar  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  que estabiliza assintoticamente o sistema (3.1) e as restrições (3.2) e (3.3) são respeitadas para qualquer  $t \geq 0$  e qualquer par  $(A, B)$  satisfazendo (3.4) (3.5).

### 3.3 Solução do PLRR

Sejam  $A_o$  e  $B_o$  dadas por:

$$A_o = \frac{(A_l + A_u)}{2} \tag{3.6}$$

$$B_o = \frac{(B_l + B_u)}{2} \tag{3.7}$$

Então qualquer matriz  $A$  e  $B$  nos intervalos (3.4) e (3.5) podem ser definidas como

$$A = A_o + \Delta A \quad (3.8)$$

$$B = B_o + \Delta B \quad (3.9)$$

$$-A_\delta \leq \Delta A \leq A_\delta \quad (3.10)$$

$$-B_\delta \leq \Delta B \leq B_\delta \quad (3.11)$$

onde  $A_\delta$  e  $B_\delta$  são dados por

$$A_\delta = \frac{(A_u - A_l)}{2} \quad (3.12)$$

$$B_\delta = \frac{(B_u - B_l)}{2} \quad (3.13)$$

**Proposição 8:** Uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que

$$F = MG \quad (3.14)$$

é solução do PLRR, se  $M$  é solução factível do seguinte conjunto de restrições :

$$(H - K)G = G(A_o + B_o MG) \quad (3.15)$$

$$(H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega - |G|A_\delta|G^{-1}|\omega - \gamma|G|B_\delta\rho \quad (3.16)$$

$$|M|\omega \leq \rho\gamma \quad (3.17)$$

$$\varepsilon > 0 \quad (3.18)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.19)$$

onde  $\varepsilon$  e  $\gamma$  são escalares,  $H(h_{ij}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$  e  $K \geq 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ .

**Prova:** Para que a matriz  $F = MG$  seja solução do PLRR, a Proposição 7 deve ser satisfeita para qualquer par  $(A_o + \Delta A, B_o + \Delta B)$  (3.8) e (3.9), com  $\Delta A$  e  $\Delta B$  que satisfaçam (3.10) e (3.11). Dada uma solução factível  $H, K, M, \varepsilon$  e  $\rho$  para as restrições (3.15) a (3.19), pode ser verificado facilmente, que as restrições (2.31), (2.32) e (2.33) da Proposição 7 são imediatamente satisfeitas. Para completar a prova, é necessário mostrar que as restrições (2.29) e (2.30) da Proposição 7 são também satisfeitas.

Para qualquer  $(A_o + \Delta A, B_o + \Delta B)$ , temos de (2.29)

$$(H + \Delta H - K - \Delta K)G = G(A_o + \Delta A + (B_o + \Delta B)MG) \quad (3.20)$$

onde  $\Delta K \geq 0$  e  $\Delta H(\delta h_{ij})$  tem  $\delta h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ .

Substituindo (3.15) em (3.20) e lembrando que  $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tem posto completo, temos que:

$$(\Delta H - \Delta K)G = G(\Delta A + \Delta BMG) \quad (3.21)$$

$$(\Delta H - \Delta K) = G\Delta AG^{-1} + G\Delta BM \quad (3.22)$$

Assumindo uma solução de norma mínima para (3.22), é fácil verificar por inspeção que [4]:

$$(\Delta H + \Delta K) \leq |G\Delta AG^{-1} + G\Delta BM| \quad (3.23)$$

Utilizando as propriedades do operador  $|\cdot|$ , temos

$$(\Delta H + \Delta K) \leq |G\Delta AG^{-1}| + |G\Delta BM| \quad (3.24)$$

$$(\Delta H + \Delta K) \leq |G||\Delta A||G^{-1}| + |G||\Delta B||M| \quad (3.25)$$

$$(\Delta H + \Delta K)\omega \leq |G||\Delta A||G^{-1}|\omega + |G||\Delta B||M|\omega \quad (3.26)$$

Substituindo (3.10) (3.11) e (3.17) em (3.26) temos:

$$(\Delta H + \Delta K)\omega \leq |G|A_\delta|G^{-1}|\omega + |G|B_\delta\rho\gamma \quad (3.27)$$

De (3.16), temos que

$$(H + K)\omega + |G|A_\delta|G^{-1}|\omega + \gamma|G|B_\delta\rho \leq -\varepsilon\omega \quad (3.28)$$

Substituindo (3.27) em (3.28) temos:

$$(H + K)\omega + (\Delta H + \Delta K)\omega \leq -\varepsilon\omega \quad (3.29)$$

ou,

$$(H + \Delta H + K + \Delta K)\omega \leq -\varepsilon\omega \quad (3.30)$$

A partir de (3.20) e (3.30), pode ser verificado que as restrições (2.29) e (2.30) da Proposição 7 são também satisfeitas.

□

É importante realçar que a Proposição 8 é uma condição suficiente, baseada nos majorantes (3.24) a (3.26) que em alguns casos podem ser muito conservativos.

Baseado na Proposição 8 e utilizando a seguinte manipulação de programação linear[4]:

$$\begin{aligned} M &= M^+ - M^- \\ |M| &= M^+ + M^- \\ M^+ &\geq 0, \quad M^- \geq 0 \end{aligned}$$

uma forma fácil e eficiente de resolver o PLRR é tomando,

$$F = (M^+ - M^-)G \quad (3.31)$$

onde  $M^+$  e  $M^-$  são obtidos através do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} & \min_{H,K,M^+,M^-, \varepsilon, \gamma} -\varepsilon + p\gamma \\ \text{s.a} \quad & HG - KG - GB_0M^+G + GB_0M^-G = GA_0 \\ & H\omega + K\omega + |G|B_\delta\rho\gamma + \varepsilon\omega \leq -|G|A_\delta|G^{-1}|\omega \\ & M^+\omega + M^-\omega - \rho\gamma \leq 0 \\ & \varepsilon > 0 \\ & 0 \leq \gamma \leq 1 \\ & H(h_{ij}) \geq 0 \text{ para } i \neq j, K \geq 0, M^+ \geq 0, M^- \geq 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Utilizando o Produto de Kronecker, o PL matricial (3.32) pode ser colocado na seguinte forma padrão vetorial

$$\begin{aligned} & \min_{h,k,m^+,m^-, \varepsilon, \gamma} -\varepsilon + p\gamma \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes G') & -(\mathbf{I}_n \otimes G') & -(GB_0 \otimes G') & (GB_0 \otimes G') & \mathbf{0}_{(nn \times 1)} & \mathbf{0}_{(nn \times 1)} \\ (\mathbf{I}_n \otimes \omega') & (\mathbf{I}_n \otimes \omega') & \mathbf{0}_{(n \times mn)} & \mathbf{0}_{(n \times mn)} & \omega & |G|B_\delta\rho \\ \mathbf{0}_{(m \times nn)} & \mathbf{0}_{(m \times nn)} & (\mathbf{I}_m \otimes \omega') & (\mathbf{I}_m \otimes \omega') & \mathbf{0}_{(m \times 1)} & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ m^+ \\ m^- \\ \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix} = d \\ & \begin{matrix} = d \\ \leq c \\ \leq 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Onde  $D(d_{ij}) = GA_0$ ;  $C(c_{ij}) = -|G|A_\delta|G^{-1}|\omega$ ;  $\varepsilon > 0$ ;  $0 \leq \gamma \leq 1$ ;

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{nn} \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{bmatrix} \quad m^+ = \begin{bmatrix} m_{11}^+ \\ m_{12}^+ \\ \vdots \\ m_{mn}^+ \end{bmatrix} \quad m^- = \begin{bmatrix} m_{11}^- \\ m_{12}^- \\ \vdots \\ m_{mn}^- \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{nn} \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$h_{ij} \geq 0 \text{ para } i \neq j, k_{ij} \geq 0, m_{ij}^+ \geq 0, m_{ij}^- \geq 0$$

$\mathbf{0}_{(. \times .)}$  é uma matriz com componentes nulos de dimensão  $(. \times .)$ ;

Pode ser facilmente verificado que o tamanho do problema de programação linear (3.32) e conseqüentemente o esforço computacional necessário para a sua solução, são diretamente relacionados às dimensões  $n$ ,  $m$  do sistema (3.1) e completamente independentes do número de parâmetros incertos das matrizes  $A$  e  $B$ . Esta última característica combinada com existência de pacotes computacionais para a solução de grandes problemas lineares [13], faz com que a abordagem da programação linear (3.31) a (3.32) seja particularmente indicada para sistemas de grande porte ( $n$ ,  $m$  grandes) com grande número de parâmetros incertos.

### 3.4 Exemplo numérico

Considere o sistema de terceira ordem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} 9.10 & 0.47 & -6.33 \\ 7.62 & 0.00 & 7.56 \\ 2.37 & -3.53 & 9.66 \end{bmatrix} \leq A \leq \begin{bmatrix} 9.10 & 0.47 & -6.33 \\ 7.62 & 0.00 & 7.56 \\ 2.87 & -3.03 & 10.16 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5.69 & 1.97 & -1.68 \\ 2.24 & -1.68 & 5.59 \\ 0.00 & 0.00 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -4.91 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 8.75 \\ 10.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

A solução obtida com o problema de programação linear (3.33), com  $p = 0$ , é

$$F = \begin{bmatrix} -0.5336 & 0.6680 & -2.9363 \\ 6.4877 & -0.1455 & 1.5743 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 1.4215, \quad \gamma = 0.9944$$

Assumindo agora que o domínio de incerteza também inclui a matriz  $B$

$$\begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -4.96 & -0.05 \end{bmatrix} \leq B \leq \begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -4.86 & 0.05 \end{bmatrix}$$

a solução obtida é

$$F = \begin{bmatrix} 0.5681 & 1.0495 & -5.0590 \\ 4.5190 & -0.8271 & 5.0403 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0.7291, \gamma = 0.7053$$

Para

$$\begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -5.01 & -0.10 \end{bmatrix} \leq B \leq \begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -4.81 & 0.10 \end{bmatrix}$$

a solução obtida é

$$F = \begin{bmatrix} 0.5098 & 1.0293 & -5.0532 \\ 4.4160 & -0.8627 & 5.0890 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0.0504, \gamma = 0.6983$$

Para

$$\begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -5.06 & -0.15 \end{bmatrix} \leq B \leq \begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -4.76 & 0.15 \end{bmatrix}$$

o programa linear não tem solução factível.

### 3.5 Conclusão

Foi estudado neste capítulo, o problema de regulação linear robusta para sistemas contínuos no tempo, considerando restrições simétricas lineares tanto nos vetores de estado quanto nos de controle e domínio de incerteza definido por intervalos de matrizes  $A$  e  $B$ . Para solução deste problema, uma nova condição suficiente foi derivada da teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes e foi proposto um algoritmo de programação linear padrão, que pode ser facilmente resolvido pelo método Simplex. A independência do tamanho do problema de programação linear com o número de parâmetros incertos e sua forma padrão, faz com que a abordagem desenvolvida neste capítulo seja particularmente indicada para sistemas de grande porte com grande número de parâmetros incertos.

## Capítulo 4

# Alocação Regional de Pólos Utilizando Poliedros Positivamente Invariantes

### 4.1 Introdução

Este capítulo trata da alocação regional de pólos utilizando os conceitos de conjuntos poliédricos positivamente invariantes apresentados no capítulo 2. O objetivo é encontrar uma lei de controle que posicione os autovalores em malha fechada em uma determinada região admissível do plano complexo. A propriedade, de que a invariância positiva de um poliedro simétrico limitado, implica numa alocação regional dos autovalores em malha fechada, é aqui utilizada, de forma que o problema de alocação regional de pólos possa ser resolvido através da obtenção de um poliedro limitado e uma matriz de controle que torne este poliedro positivamente invariante. Seguindo a mesma abordagem, é estudada a alocação regional parcial de pólos, onde será feita uma alocação seletiva dos autovalores do sistema. Um exemplo numérico ilustrativo é então apresentado.

### 4.2 Formulação do Problema

Seja o sistema linear, contínuo, invariante no tempo, representado pela equação de estado,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); & t \in [0, \infty) \\ u(t) &= Fx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$



onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ , o par  $(A, B)$  é completamente controlável,  $\text{posto}(B) = m \leq n$ .

**Definição 4:** O problema de alocação regional de pólos (PARP) a ser tratado neste trabalho, corresponde a determinar  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que todos os autovalores do sistema em malha fechada  $(A + BF)$  estejam localizados na seguinte região do plano complexo:

$$\text{Re} [\lambda(A + BF)] \leq -\varepsilon \quad (4.2)$$

$$|\text{Re} [\lambda(A + BF)]| \geq |\text{Im} [\lambda(A + BF)]| \quad (4.3)$$

onde  $\varepsilon > 0$ .

A região do plano complexo correspondente a (4.2) e (4.3), aqui denominada de “região admissível”, está representada graficamente na figura (4.1).

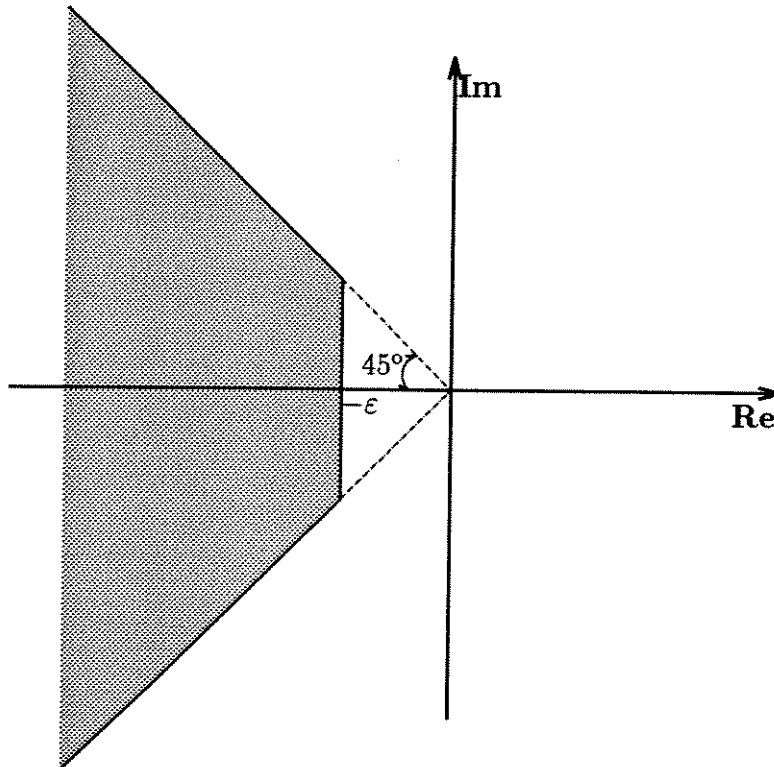


Figura 4.1: Região Admissível do PARP

A região admissível do PARP corresponde a pólos com margem de estabilidade  $\varepsilon$  a ser especificada e fator de amortecimento menor ou igual a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Embora particular, esta limitação do fator de amortecimento é uma especificação utilizada em muitos

casos práticos [14] porque corresponde a um bom compromisso de tempo de subida, sobrelevação e tempo de estabilização da resposta transitória do sistema.

### 4.3 Solução do PARP

Seja o poliedro limitado

$$S(G, \omega) = \{x(t) \in \mathfrak{R}^n : -\omega \leq Gx(t) \leq \omega\} \quad (4.4)$$

onde  $\omega > 0$ ,  $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $\text{posto}(G) = n$ .

**Proposição 9:** Considerando o sistema (4.1) e o poliedro (4.4), uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é solução do PARP se for uma solução factível do conjunto de restrições :

$$(H - K)G = G(A + BF) \quad (4.5)$$

$$(H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega \quad (4.6)$$

onde  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ ,  $k_{ij} \geq 0$  para quaisquer  $i, j$ , e  $\varepsilon > 0$ .

Note que as condições (4.5) e (4.6) se satisfeitas garantem a invariância positiva do poliedro  $S(G, \omega)$  (4.4) e uma margem de estabilidade  $\varepsilon$  para  $(A + BF)$ .

**Prova:** É fácil verificar que as restrições (4.5) e (4.6) podem ser transformadas em

$$(H - K + \varepsilon\mathbf{I})G = G(A + \varepsilon\mathbf{I} + BF) \quad (4.7)$$

$$(H + K + \varepsilon\mathbf{I})\omega \leq 0 \quad (4.8)$$

Das Proposições 2 e 4 na Seção 2.2, temos que:

$$\mathbf{Re} [\lambda(A + \varepsilon\mathbf{I} + BF)] \leq 0 \quad (4.9)$$

$$|\mathbf{Re} [\lambda(A + \varepsilon\mathbf{I} + BF)]| \geq |\mathbf{Im} [\lambda(A + \varepsilon\mathbf{I} + BF)]| \quad (4.10)$$

consequentemente,

$$\mathbf{Re} [\lambda(A + BF)] \leq -\varepsilon \quad (4.11)$$

É fácil verificar que

$$|\mathbf{Re} [\lambda(A + \varepsilon\mathbf{I} + BF)]| = |\mathbf{Re} [\lambda(A + BF)]| - \varepsilon \quad (4.12)$$

$$|\mathbf{Im} [\lambda(A + \varepsilon\mathbf{I} + BF)]| = |\mathbf{Im} [\lambda(A + BF)]| \quad (4.13)$$

Substituindo (4.12), (4.13) em (4.10), temos:

$$|\operatorname{Re} [\lambda(A + BF)]| \geq |\operatorname{Im} [\lambda(A + BF)]| \quad (4.14)$$

De (4.2), (4.3), (4.11) e (4.14) vemos que a prova está concluída.  $\square$

Da Proposição 9 vemos que a solução do PARP pode ser transformada em problema de determinação de um poliedro limitado  $S(G, \omega)$  (4.4) e uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  que torna esse poliedro positivamente invariante para o sistema (4.1) com uma margem de estabilidade  $\varepsilon$  pré-especificada ( $\operatorname{Re} [\lambda(A + BF)] \leq -\varepsilon$ ).

Nos itens seguintes são propostos uma forma de obtenção do poliedro  $S(G, \omega)$  e da matriz de controle  $F$ .

### 4.3.1 Determinação de $S(G, \omega)$

Caso em que  $n \leq 2m$

**Proposição 10:** Dados o sistema (4.1),  $\omega > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , um poliedro (4.4) pode ser sempre encontrado, assumindo:

$$G = \tilde{G}Q \quad (4.15)$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{I}_1 \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $\mathbf{I}_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $\omega_1 \in \mathfrak{R}^{(n-m)}$ ,  $\omega_2 \in \mathfrak{R}^m$ , e as matrizes  $Q$  e  $\tilde{G}_{21}$  são obtidas da seguinte forma:

- $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é uma matriz ortogonal que coloca o par  $(A, B)$  na forma canônica de controlabilidade  $(Ab, Bb)$ , tal que:

$$Ab = QAQ' = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$Bb = QB = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Bb_2 \end{bmatrix}; \quad (4.19)$$

Onde  $Ab_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $Ab_{12} \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $Ab_{21} \in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}$ ,  $Ab_{22} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $Bb_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ .

- $\tilde{G}_{21} \in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}$  é uma solução viável do seguinte conjunto de restrições lineares:

$$H_{11} - K_{11} = -Ab_{12}\tilde{G}_{21} + Ab_{11} \quad (4.20)$$

$$(H_{11} + K_{11})\omega_1 \leq -\varepsilon\omega_1 - |Ab_{12}|\omega_2 \quad (4.21)$$

**Prova:** Para que  $S(G, \omega)$  (4.4) seja um poliedro invariante do sistema (4.1), pela Proposição 1, devemos ter

$$(H - K)G = G(A + BF) \quad (4.22)$$

$$(H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega \quad (4.23)$$

com  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$  e  $k_{ij} \geq 0$  para quaisquer  $i, j$ .

Podemos sempre transformar (4.22) na seguinte forma equivalente

$$(H - K)GQ' = GQ'Q(A + BF)Q' \quad (4.24)$$

Substituindo (4.15), (4.18) e (4.19) em (4.24) temos que:

$$(H - K)\tilde{G} = \tilde{G}(Ab + BbFQ') \quad (4.25)$$

$$(H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega \quad (4.26)$$

Assumindo

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad e$$

$$\begin{aligned} H_{11}, K_{11} &\in \mathfrak{R}^{(n-m) \times (n-m)} \\ H_{12}, K_{12} &\in \mathfrak{R}^{(n-m) \times m} \\ H_{21}, K_{21} &\in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)} \\ H_{22}, K_{22} &\in \mathfrak{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$Q' = \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_2 \end{bmatrix}; \quad Q'_1 \in \mathfrak{R}^{n \times (n-m)} \quad e \quad Q'_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \quad \omega_1 \in \mathfrak{R}^{(n-m)} \quad e \quad \omega_2 \in \mathfrak{R}^m$$

e substituindo (4.16),(4.18),(4.19) e (4.27) em (4.25) e (4.26), temos que:

$$\left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Bb_2 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.28)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \leq -\varepsilon \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

De (4.28) temos que:

$$(H_{11} - K_{11}) + (H_{12} - K_{12})\tilde{G}_{21} = Ab_{11} \quad (4.30)$$

$$H_{12} - K_{12} = Ab_{12} \quad (4.31)$$

$$(H_{21} - K_{21}) + (H_{22} - K_{22})\tilde{G}_{21} = \tilde{G}_{21}Ab_{11} + Ab_{21} + Bb_2FQ'_1 \quad (4.32)$$

$$H_{22} - K_{22} = \tilde{G}_{21}Ab_{12} + Ab_{22} + Bb_2FQ'_2 \quad (4.33)$$

De (4.29) temos que:

$$(H_{11} + K_{11})\omega_1 + (H_{12} + K_{12})\omega_2 \leq -\varepsilon\omega_1 \quad (4.34)$$

$$(H_{21} + K_{21})\omega_1 + (H_{22} + K_{22})\omega_2 \leq -\varepsilon\omega_2 \quad (4.35)$$

Sem prejuízo da existência de solução para (4.29), podemos assumir uma solução de norma mínima para (4.31). Neste caso é fácil verificar que [4]:

$$H_{12} + K_{12} = |Ab_{12}| \quad (4.36)$$

Substituindo (4.31),(4.36) em (4.28) e (4.29) respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & \mathbf{0} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{0} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ab_{12} & Ab_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Ab_{11} & \mathbf{0} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Bb_2 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_2 \end{bmatrix} \right\} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{G}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & Ab_{12} \\ \mathbf{0} & Ab_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & \mathbf{0} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{0} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \leq -\varepsilon \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + |Ab_{12}| \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Podemos reduzir (4.37) a:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & \mathbf{0} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{0} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{G}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Ab_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Ab_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Ab_{11} & \mathbf{0} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Bb_2 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Finalmente, de (4.39) e (4.38), temos que:

$$H_{11} - K_{11} = -Ab_{12}\tilde{G}_{21} + Ab_{11} \quad (4.40)$$

$$(H_{11} + K_{11})\omega_1 \leq -\varepsilon\omega_1 - |Ab_{12}|\omega_2 \quad (4.41)$$

Como o par  $(A, B)$  é controlável,  $Ab_{12}$  tem posto completo. Isto garante que (4.40) e (4.41) sempre têm solução, fazendo com que  $\tilde{G}_{21}$  (4.16) sempre pode ser obtida. Portanto, o poliedro  $S(G, \omega)$  (4.4), com  $G$  dado por (4.15) e (4.16), é um poliedro invariante do sistema (4.1).  $\square$

É importante notar que

$$\lim_{\tilde{G}_{21} \rightarrow 0} G = \mathbf{I}_n$$

Assim sendo, o condicionamento numérico das operações envolvendo  $G$  é favorecido pela diminuição da  $\|\tilde{G}_{21}\|$ . Tendo em vista este fato, para um dado par  $(\varepsilon, \omega)$ , utilizando a Proposição 10, podemos obter  $\tilde{G}(\tilde{g}_{21(ij)})$  através da solução do seguinte problema de programação matemática:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\tilde{G}_{21}, H_{11}, K_{11}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-m} |\tilde{g}_{21(ij)}| \\
 \text{s.a} \quad & H_{11} - K_{11} + Ab_{12}\tilde{G}_{21} = Ab_{11} \\
 & (H_{11} - K_{11})\omega_1 \leq -\varepsilon\omega_1 - |Ab_{12}|\omega_2 \\
 & h_{11(ij)} \geq 0 \text{ para } i \neq j, \quad k_{11(ij)} \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Assumindo uma mudança de variáveis comumente utilizada em programação linear [4],

$$\tilde{g}_{21(ij)} = \tilde{g}_{21(ij)}^+ - \tilde{g}_{21(ij)}^-$$

$$|\tilde{g}_{21(ij)}| = \tilde{g}_{21(ij)}^+ + \tilde{g}_{21(ij)}^-$$

$$\tilde{g}_{21(ij)}^+ \geq 0, \quad \tilde{g}_{21(ij)}^- \geq 0$$

podemos transformar (4.42) no seguinte problema equivalente de programação linear:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\tilde{G}_{21}^+, \tilde{G}_{21}^-, H_{11}, K_{11}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-m} \tilde{g}_{21(ij)}^+ + \tilde{g}_{21(ij)}^- \\
 \text{s.a} \quad & H_{11} - K_{11} + Ab_{12}(\tilde{G}_{21}^+ - \tilde{G}_{21}^-) = Ab_{11} \\
 & (H_{11} - K_{11})\omega_1 \leq -\varepsilon\omega_1 - |Ab_{12}|\omega_2 \\
 & h_{11(ij)} \geq 0 \text{ para } i \neq j, \quad k_{11(ij)} \geq 0 \\
 & \tilde{g}_{21(ij)}^+ \geq 0, \quad \tilde{g}_{21(ij)}^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

**Caso em que  $n > 2m$**

A Proposição 10 pode ser estendida facilmente para sistemas onde  $n > 2m$ . Vamos ilustrar através do exemplo de um sistema onde  $n = 6$  e  $m = 2$ . Similarmente a (4.15) e (4.16), temos que:

$$G = \tilde{G}Q \tag{4.44}$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

onde  $\tilde{G}_{21}, \tilde{G}_{31}, \tilde{G}_{32}, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$  e  $\mathbf{I}_3 \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$

O par  $(A, B)$  na forma canônica de controlabilidade  $(Ab, Bb)$  é dado por:

$$Ab = QAQ' = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \mathbf{0} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & Ab_{23} \\ Ab_{31} & Ab_{32} & Ab_{33} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$Bb = QB = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ Bb_2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

onde  $Ab_{ij} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}, Bb_2 \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$

Substituindo (4.45), (4.46) e (4.47) em (4.25) e (4.26) e considerando  $H, K, F, Q$  e  $\omega$  dimensionadas consistentemente, temos que:

$$\left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \mathbf{0} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & Ab_{23} \\ Ab_{31} & Ab_{32} & Ab_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ Bb_2 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \leq -\varepsilon \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

De (4.48) temos que:

$$H_{12} - K_{12} = Ab_{12} \quad (4.50)$$

$$H_{23} - K_{23} = Ab_{23} \quad (4.51)$$

Da mesma forma que em (4.36), podemos assumir uma solução de norma mínima para (4.50) e (4.51), o que nos permite escrever



$$H_{12} + K_{12} = |Ab_{12}| \quad (4.52)$$

$$H_{23} + K_{23} = |Ab_{23}| \quad (4.53)$$

Substituindo (4.52) e (4.53) em (4.48) e (4.49) respectivamente, podemos simplificar (4.48) e (4.49) de forma que:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Ab_{12} & 0 \\ 0 & 0 & Ab_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 & 0 \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 & 0 \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & 0 \\ Ab_{21} & Ab_{22} & Ab_{23} \\ Ab_{31} & Ab_{32} & Ab_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Bb_2 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & |Ab_{12}| & 0 \\ 0 & 0 & |Ab_{23}| \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \leq \\ & \leq -\varepsilon \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (4.55) \end{aligned}$$

De (4.54) temos que:

$$H_{11} - K_{11} + Ab_{12}\tilde{G}_{21} = Ab_{11} \quad (4.56)$$

$$(H_{22} - K_{22})\tilde{G}_{21} + Ab_{23}\tilde{G}_{31} = \tilde{G}_{21}Ab_{11} + Ab_{21} \quad (4.57)$$

$$H_{22} - K_{22} + Ab_{23}\tilde{G}_{32} = \tilde{G}_{21}Ab_{12} + Ab_{22} \quad (4.58)$$

$$(H_{33} - K_{33})\tilde{G}_{31} = \tilde{G}_{31}Ab_{11} + \tilde{G}_{32}Ab_{21} + Ab_{31} + Bb_2FQ'_1 \quad (4.59)$$

$$(H_{33} - K_{33})\tilde{G}_{32} = \tilde{G}_{31}Ab_{12} + \tilde{G}_{32}Ab_{22} + Ab_{32} + Bb_2FQ'_2 \quad (4.60)$$

$$H_{33} - K_{33} = \tilde{G}_{32}Ab_{23} + Ab_{33} + Bb_2FQ'_3 \quad (4.61)$$

De (4.55) temos que:

$$(H_{11} + K_{11})\omega_1 \leq -\varepsilon\omega_1 - |Ab_{12}|\omega_2 \quad (4.62)$$

$$(H_{22} + K_{22})\omega_2 \leq -\varepsilon\omega_2 - |Ab_{23}|\omega_3 \quad (4.63)$$

$$(H_{33} + K_{33})\omega_3 \leq -\varepsilon\omega_3 \quad (4.64)$$

Para calcular a matriz  $\tilde{G}$  (4.45), as submatrizes  $\tilde{G}_{21}$  e  $\tilde{G}_{32}$  podem ser calculadas utilizando um PL como em (4.43), considerando as seguintes restrições :

- Para a submatriz  $\tilde{G}_{21}$

$$H_{11} - K_{11} + Ab_{12}\tilde{G}_{21} = Ab_{11}$$

$$(H_{11} + K_{11})\omega_1 \leq -\varepsilon\omega_1 - |Ab_{12}|\omega_2$$

- Para a submatriz  $\tilde{G}_{32}$

$$H_{22} - K_{22} + Ab_{23}\tilde{G}_{32} = \tilde{G}_{21}Ab_{12} + Ab_{22}$$

$$(H_{22} + K_{22})\omega_2 \leq -\varepsilon\omega_2 - |Ab_{23}|\omega_3$$

Uma vez que  $H_{22}$ ,  $K_{22}$  e  $\tilde{G}_{21}$  foram obtidos, a submatriz  $\tilde{G}_{31}$ , é calculada diretamente em (4.57).

Finalmente, a matriz  $G$  é obtida de (4.44)

### 4.3.2 Determinação da Matriz $F$

Uma vez determinado o poliedro  $S(G, \omega)$  conforme indicado na seção 4.3.1, uma matriz  $F(f_{ij}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , de norma mínima, solução do PARP, pode ser obtida através do seguinte PL:

$$\begin{aligned} \min_{f, h, k} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f_{ij}| \\ \text{s.a} \quad & (H - K)G = G(A + BF) \\ & (H + K)\omega \leq -\varepsilon\omega \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde:  $h_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ ,  $k_{ij} \geq 0$ ,  $\forall i, j$  e  $\varepsilon > 0$  é a margem de estabilidade desejada.

O esforço computacional para obtenção de  $F$  pode ser significativamente reduzido se utilizarmos os resultados intermediários da obtenção de  $G$ .

No caso,  $n \leq 2m$ , das equações (4.28) e (4.29), é fácil verificar que  $F$  pode ser

obtido da solução do seguinte PL de menor dimensão:

$$\begin{aligned}
 & \min_{f,h,k} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f_{ij}| \\
 & \text{s.a.} \quad \left[ \begin{array}{cc} (H_{21} - K_{21}) & (H_{22} - K_{22}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{G}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{array} \right] = \\
 & \quad = \left[ \tilde{G}_{21} \quad \mathbf{I}_2 \right] \left\{ \left[ \begin{array}{cc} Ab_{11} & Ab_{12} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{array} \right] + Bb_2 FQ' \right\} \\
 & \quad \left[ \begin{array}{cc} (H_{21} + K_{21}) & (H_{22} + K_{22}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} \right] \leq -\varepsilon \left[ \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

onde  $H_{21} \geq 0$ ,  $K_{21} \geq 0$ ,  $K_{22} \geq 0$ ,  $h_{22(ij)} \geq 0$ , para  $i \neq j$  e  $\varepsilon > 0$  é a margem de estabilidade desejada.

É fácil verificar que tratamento similar pode ser feito também no caso  $n > 2m$ .

A transformação dos PLs matriciais (4.65), (4.66) para uma forma vetorial padrão, pode ser facilmente feita, de forma análoga ao apresentado nas seções anteriores.

## 4.4 Alocação Regional Parcial de Pólos

Devido à existência de modos não controláveis no sistema (4.1) ou para a obtenção de uma matriz de realimentação de estados com ganhos menores, em muitas situações práticas é utilizada a alocação regional parcial de pólos.

Considere a fatoração ortogonal QR

$$V = \left[ \begin{array}{cc} Q_1 & Q_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} R \\ O \end{array} \right] \tag{4.67}$$

onde:  $V \in \mathfrak{R}^{n \times l}$  é uma matriz cujas colunas correspondem a um conjunto de autovetores generalizados da matriz  $A$  do sistema (4.1);  $R \in \mathfrak{R}^{l \times l}$  tem posto completo e  $Q_1 \in \mathfrak{R}^{n \times l}$ ,  $Q_2 \in \mathfrak{R}^{n \times (n-l)}$  são matrizes ortogonais com

$$Q_1' Q_2 = 0 \tag{4.68}$$

**Proposição 11:** Sejam o sistema (4.1) e a fatoração QR (4.67). Uma lei de controle

$$u(t) = MQ_2' x(t) \tag{4.69}$$

com  $M \in \mathfrak{R}^{m \times (n-l)}$ , aplicada ao sistema (4.1), não altera os autovalores e autovetores da restrição de  $A$  ao subespaço  $\mathcal{V}$  gerado por  $V$  e garante a livre alocação de parte dos autovalores da restrição de  $A$  ao complemento ortogonal do subespaço  $\mathcal{V}$ .

**Prova:** Considere a mudança de base

$$x(t) = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

onde é fácil verificar que  $\tilde{x}_1(t)$  está associado ao subespaço  $\mathcal{V}$  e  $\tilde{x}_2(t)$  ao seu complemento ortogonal.

Substituindo (4.70) em (4.1), temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}' A \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}' B M Q_2' \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Consequentemente, considerando (4.68), devemos ter:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 M \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

onde:

$$\tilde{A}_{11} = Q_1' A Q_1 \quad ; \quad \tilde{A}_{12} = Q_1' A Q_2 \quad (4.73)$$

$$\tilde{A}_{21} = Q_2' A Q_1 \quad ; \quad \tilde{A}_{22} = Q_2' A Q_2 \quad (4.74)$$

$$\tilde{B}_1 = Q_1' B \quad ; \quad \tilde{B}_2 = Q_2' B \quad (4.75)$$

É fácil verificar também, que na nova base (4.70) o subespaço  $\tilde{\mathcal{V}}$  relacionado a  $\mathcal{V}$  na base antiga corresponde aos vetores

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{x}_1(t) \in \mathfrak{R}^l \quad (4.76)$$

como  $\mathcal{V}$  e  $\tilde{\mathcal{V}}$  tem por base um conjunto de autovetores generalizados, eles são subespaços  $A$ -invariante e  $\tilde{A}$ -invariante respectivamente [6]. Consequentemente considerando (4.76), para que  $\tilde{\mathcal{V}}$  seja  $\tilde{A}$ -invariante, devemos ter também,

$$\tilde{A}_{21} = 0 \quad (4.77)$$

Substituindo (4.77) em (4.72), temos que

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 M \\ 0 & \tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

De (4.78) vemos que os autovalores e autovetores de  $\tilde{A}_{11}$ , correspondente à restrição de (4.1) ao subespaço  $\mathcal{V}$ , não são afetados pela lei de controle (4.69) e uma parte pelo menos dos autovalores de  $\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M$ , correspondentes à restrição de (4.1) ao complemento ortogonal de  $\mathcal{V}$  podem ser livremente posicionados pela matriz  $M$ , o que completa a prova.  $\square$

Baseado na Proposição 11, nos resultados apresentados na seção 4.3 e considerando (4.67), podemos fazer alocação regional parcial dos autovalores do sistema (4.1). Essa alocação consiste em manter inalterados os autovetores componentes de  $\mathcal{V}$  juntamente com seus autovalores e alocar os autovalores de  $(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M)$ , na região do plano complexo indicada na figura 4.1.

Para isso, basta assumir

$$u(t) = MQ'_2 x(t) \quad (4.79)$$

e obter  $M$  através da solução do PARP, conforme indicado na seção 4.3, para o sistema de ordem reduzida

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22} \tilde{x}_2(t) + \tilde{B}_2 \tilde{u}(t) \quad (4.80)$$

$$\tilde{u}(t) = M \tilde{x}_2(t) \quad (4.81)$$

onde:

$$\tilde{A}_{22} = Q'_2 A Q_2 \quad ; \quad \tilde{B}_2 = Q'_2 B$$

## 4.5 Exemplo Numérico

Considere o modelo linear de um sistema de geração de energia elétrica, composto por um gerador síncrono ligado a um barramento infinito através de reatância externa e seus sistemas de controle de velocidade da turbina e do regulador de tensão, obtido de [14]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.82)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} -1.6 & 1.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10.5 & -10.6 & 283 & -131 & -0.41 & 9.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 299 & -502 & -6.05 & 5.9 & -0.04 & -203 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.13 & -6.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -216 & 189 & 117 & -59.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.36 & 0 & -6.670 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.33 & -3.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.15 & -2.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 & -0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -738 & 247 & 534 & 814 & -844 & 517 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.192 & 0 & 0 \\ 0 & 0.114 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.012 & 0 & 1.59 \\ 0 & -0.001 & -0.8 & 0.13 \\ 0 & -0.7 & -2500 & -50 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.15 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix}$$

Para este sistema, os autovalores e autovetores em malha aberta são respectivamente:

$$\lambda(A) = \begin{bmatrix} -9.939 + 376.871i \\ -9.939 - 376.871i \\ -42.654 \\ -4.174 + 9.126i \\ -4.174 - 9.126i \\ -6.699 \\ 0.545 + 1.560i \\ 0.545 - 1.560i \\ -4.136 \\ -2.757 + 0.371i \\ -2.757 - 0.371i \\ -1.672 \\ -0.140 \\ -0.080 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$



Colocando portanto, o par  $(A, B)$  na forma canônica de controlabilidade  $(Ab, Bb)$ , temos que

$$Ab = \begin{bmatrix} -0.528 & -0.403 & -0.501 & 0.404 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 \\ -0.408 & -0.753 & 0.312 & 0.598 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 \\ -0.472 & 0.236 & -3.972 & -0.167 & 0.672 & -0.073 & 0.000 & 0.000 \\ 0.165 & 0.510 & -1.047 & -2.510 & 0.225 & 2.079 & -0.000 & 0.000 \\ 1.114 & -2.346 & 13.584 & 1.777 & -2.986 & -21.211 & -17.800 & -11.757 \\ 33.175 & 39.579 & 21.147 & 43.424 & 54.139 & 67.320 & 230.176 & -348.504 \\ 25.636 & 17.055 & 70.553 & 40.251 & 26.705 & -38.764 & 78.709 & -299.047 \\ 18.526 & 42.784 & -71.393 & 19.710 & 56.826 & 191.680 & 280.425 & -170.735 \\ -4.926 & 6.773 & -53.830 & -10.376 & 7.476 & 80.721 & 58.532 & 70.810 \\ -2.554 & 7.871 & -45.410 & -5.365 & 9.918 & 75.215 & 63.159 & 38.971 \\ -0.034 & -0.046 & 0.002 & -0.020 & -0.002 & -0.002 & 0.009 & -0.005 \\ -92.579 & -11.032 & -48.469 & -33.298 & -10.788 & 32.931 & -107.323 & 251.730 \\ 0.368 & 0.445 & 0.250 & -1.796 & -0.031 & 0.699 & -0.604 & -0.385 \\ -1329.910 & -2017.370 & 886.450 & -800.569 & -312.928 & 136.839 & 221.998 & 634.142 \end{bmatrix}$$

$$Bb = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0 & -0.000 & -0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -1.516 & -1.498 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 \\ 3.475 & -3.517 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 \\ 0.973 & -0.264 & 0.228 & 0.009 & -0.000 & -0.000 \\ 1.577 & -1.453 & 0.043 & -1.140 & -0.000 & -0.000 \\ 0.018 & 0.000 & -0.017 & 0 & 0 & 1.595 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.150 & 0 \\ -100.462 & 71.323 & 0 & 0.070 & 12.900 & 0 \\ 278.270 & -343.908 & -204.420 & -843.991 & 0 & -50 \end{bmatrix} \quad Bb = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.15 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix}$$

Seja

$$\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_7] \quad (4.88)$$

onde  $\omega_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ .

Como pode ser observado em (4.62) e (4.63), valores altos de  $|Ab_{ij}|$  podem aumentar significativamente a margem de estabilidade especificada para o sistema. Sendo assim, determinaremos o vetor  $\omega$  de forma que seus valores diminuam esta influência de  $|Ab_{ij}|$ .

Para isto adotaremos o seguinte procedimento:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Para  $i = 2$  até  $i = 7$ :

$$\omega_i = \frac{0.1}{\gamma_i} \omega_{i-1}$$

$$\gamma_i = \min_{\gamma}$$

s.a

$$(4.89)$$

$$|Ab_{i-1,i}| \omega_{i-1} \leq \gamma \omega_{i-1}$$

onde  $\gamma$  é um escalar.

Desta forma, temos

$$\omega = [ 1.000 \quad 1.000 \quad 0.100 \quad 0.100 \quad 0.043 \quad 0.043 \quad 8.333 \times 10^{-5} \quad 8.333 \times 10^{-5} \quad 1.190 \times 10^{-5}$$

$$1.190 \times 10^{-5} \quad 1.190 \times 10^{-5} \quad 1.190 \times 10^{-5} \quad 9.228 \times 10^{-7} \quad 9.228 \times 10^{-7} ]'$$

$$(4.90)$$

Aplicando os resultados da seção 4.3.1, temos que:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3798 & 1.6075 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5612 & 1.0957 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7.7488 & 5.7819 & 0.0000 & -0.0000 & 1 & 0 & 0 \\ 1.1028 & 0.1677 & -0.4742 & 0.1800 & 0 & 0 & 1 \\ 6.2134 & -5.3813 & -0.3004 & -0.1857 & -0.7500 & 0.0253 & 0 \\ 4.0030 & -3.6671 & -0.2596 & -0.2488 & -0.6499 & -0.1837 & 0 \\ -631.7302 & 551.8592 & 2.8276 & 14.7547 & 82.4493 & 44.1588 & 0 \\ -629.6289 & 536.5417 & 27.3847 & 11.6855 & 68.0163 & -11.0301 & 0 \\ -9398 & 1.687 \times 10^4 & -1.532 \times 10^4 & 1090 & 1.024 \times 10^4 & 3.768 \times 10^4 & 0 \\ 3071 & 206.4 & 9749 & 3958 & 1342 & -9919 & 0 \\ -6.467 \times 10^4 & -1.258 \times 10^5 & 1.533 \times 10^5 & -7.379 \times 10^4 & -1.674 \times 10^5 & -4.951 \times 10^5 & 0 \\ 1.411 \times 10^6 & 1.125 \times 10^6 & 3.196 \times 10^6 & 2.087 \times 10^6 & 1.647 \times 10^6 & -1.004 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -58.6470 & 24.9847 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -128.9513 & 52.2908 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4.726 \times 10^4 & -1.148 \times 10^4 & 798.9 & 5.966 & 1 & 0 & 0 \\ 1286 & -2.923 \times 10^4 & -302.5 & -8.578 & 0 & 1 & 0 \\ -8.077 \times 10^5 & 6.176 \times 10^5 & -8104 & 7832 & -5.373 & 0.7188 & 1 \\ 5.7 \times 10^6 & -1.591 \times 10^7 & -6.887 \times 10^4 & -1.921 \times 10^4 & 115 & -1.665 \times 10^{-15} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Aplicando os resultados da seção 4.3.2, temos a matriz de controle:

$$F = \begin{bmatrix} -5538 & -7.376 \times 10^{-13} & 5.604 \times 10^{-12} & -2734 & 4221 & -734 \\ 3.447 \times 10^4 & -5.157 \times 10^{-11} & 2.109 \times 10^6 & -9.766 \times 10^5 & -7.359 & 1.03 \times 10^5 \\ 3.165 \times 10^4 & 1688 & -90.27 & -1.943 \times 10^4 & -7.907 \times 10^4 & -228.1 & -452 & -8.53 \\ 346.6 & 12.23 & 0.1061 & -183.8 & -749.6 & -5.9 & -3.477 & -0.1598 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Os autovalores do sistema em malha fechada ( $A + BF$ ) são:

$$\lambda(A + BF) = \begin{bmatrix} -226.812 + 74.691i \\ -226.812 - 74.691i \\ -184.165 \\ -23.964 \\ -3.212 \\ -2.786 \\ -2.508 + 0.276i \\ -2.508 - 0.276i \\ -1.972 + 0.405i \\ -1.972 - 0.405i \\ -1.657 \\ -1.144 \\ -1.114 \\ -1.091 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Pode ser verificado, que os autovalores estão localizados na região pré-estabelecida em (4.86), (4.87).

É importante notar que os ganhos da matriz  $F$  (4.92) são muito altos. Neste caso, eles são devido à alocação desnecessária de alguns autovalores e principalmente à alocação dos dois primeiros autovalores em (4.83).

Para contornar este problema, faremos a alocação parcial envolvendo apenas os seguintes autovalores dominantes:

$$0.545 \pm 1.560i \quad ; \quad -0.140 \quad ; \quad -0.080 \quad ; \quad -4.174 \pm 9.126i \quad (4.94)$$

Para isto, construiremos a matriz  $V$ , cujas colunas correspondem às partes reais e imaginárias dos autovetores de  $\psi(A)$  (4.84) correspondentes aos autovalores de  $A$

que não serão alterados:

$$V = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0011 & -0.0002 & -0.0073 & -0.0152 & 0.0144 & 0.0354 & -0.0719 \\ 0.2838 & 0.0057 & -0.0001 & -0.0048 & -0.0208 & 0.0119 & 0.0326 & -0.0860 \\ -0.0044 & 0.3778 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0307 & 0.0007 & 0.0020 & -0.0078 \\ 0.0051 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0640 & 0.0012 & 0.0025 & -0.0081 \\ 0.1170 & -0.1432 & -0.0004 & -0.0082 & -0.1138 & 0.0333 & 0.0754 & -0.1785 \\ -0.0004 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0012 & 0.0275 & -0.0082 & -0.0285 & 0.1067 \\ 0.0001 & 0.0001 & -0.0000 & -0.1024 & 0.0162 & -0.0037 & -0.0066 & 0.0129 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.1012 & -0.0668 & -0.0326 & -0.0172 & 0.0258 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0478 & 0.0723 & 0.0569 & 0.0957 & 0.1163 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & -0.0011 & -0.0010 & -0.0023 & -0.0044 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0003 \\ 0.0006 & -0.0036 & 0.0373 & 0.2286 & 0.3542 & -0.2430 & -0.4266 & 0.6630 \\ 0.0000 & -0.0003 & 0.0031 & 0.0212 & 0.0359 & -0.0251 & -0.0501 & 0.1039 \\ 0.8463 & 0.1620 & -0.9993 & -0.9613 & -0.9186 & 0.5191 & 0.6798 & -0.6924 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

e uma matriz  $Q_2$ , cujas colunas formam uma base ortogonal para o complemento ortogonal do subespaço  $\mathcal{V}$  gerado por  $V$ :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -0.2182 & 0.0056 & -0.0002 & 0.3673 & 0.1827 & 0.7751 \\ -0.1027 & 0.0007 & -0.0000 & -0.2949 & -0.0921 & 0.1001 \\ 0.0750 & -0.0002 & 0.0000 & 0.2631 & 0.0926 & -0.1040 \\ 0.3957 & -0.0101 & 0.0002 & -0.0305 & -0.3593 & 0.5171 \\ 0.1991 & -0.0006 & 0.0000 & 0.6817 & 0.2394 & -0.2756 \\ -0.7886 & 0.0215 & -0.0010 & 0.1930 & -0.0314 & 0.0049 \\ -0.0778 & 0.0114 & -0.0010 & -0.0258 & 0.0346 & -0.0685 \\ -0.2144 & 0.0230 & -0.0017 & -0.2315 & 0.0015 & -0.0843 \\ 0.1944 & 0.0252 & -0.0014 & 0.1218 & -0.0283 & -0.0113 \\ 0.0238 & 0.9990 & 0.0001 & -0.0038 & -0.0015 & 0.0040 \\ -0.0011 & 0.0001 & 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0002 \\ 0.1104 & -0.0017 & 0.0000 & 0.2001 & -0.0576 & 0.0109 \\ 0.1243 & -0.0024 & 0.0000 & -0.3110 & 0.8700 & 0.1517 \\ 0.0045 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0062 & 0.0004 & 0.0008 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

De acordo com (4.80) e (4.81) temos

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2(t) + \tilde{B}_2\tilde{u}(t) \quad (4.97)$$

$$\tilde{u}(t) = M\tilde{x}_2(t) \quad (4.98)$$

onde:

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 15.1507 & 2.6246 & 11.9585 & -12.3993 & -16.4355 & -17.7267 \\ -0.0019 & -0.0881 & -0.0336 & 0.0653 & 0.2175 & 0.0696 \\ 0.0048 & 0.1005 & -0.1377 & -0.0036 & -0.0065 & -0.0033 \\ 58.9181 & 8.8747 & 40.9568 & -37.5515 & -29.2225 & -57.9047 \\ 21.7413 & 3.0971 & 14.3865 & -12.5892 & -6.2488 & -19.4999 \\ -25.0651 & -3.5687 & -16.5597 & 14.0987 & 2.3117 & 21.3964 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.4179 & 11.1548 \\ 0.0543 & -0.1776 \\ -0.0029 & 0.0047 \\ 0.2618 & 15.4745 \\ -0.0609 & 1.0881 \\ -0.0244 & 2.1135 \end{bmatrix}$$

Assim, dos resultados apresentados na seção 4.4, temos que,

$$M = \begin{bmatrix} -6.0638 & 0.6984 & 0.0000 & 7.7820 & 2.7944 & 6.5435 \\ -2.6760 & -1.2153 & -3.6047 & 1.5270 & 1.5983 & 2.5967 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

os autovalores para o sistema (4.97) são:

$$\lambda(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M) = \begin{bmatrix} -1.4328 \\ -1.2470 + 0.0427i \\ -1.2470 - 0.0427i \\ -1.0991 \\ -1.0370 \\ -1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

e a matriz de controle  $F$  (4.85) é:

$$F = MQ'_2 = \begin{bmatrix} 9.7679 & -1.2745 & 1.1713 & -0.2643 & 2.9632 & 6.2436 & -0.0726 & -1.0326 & -0.3668 \\ 3.4432 & -0.0636 & 0.0793 & -0.3253 & 0.1758 & 2.3453 & 0.0359 & -0.0181 & -0.4347 \\ 0.5459 & 0.0053 & 0.7968 & 0.2480 & 0.0278 \\ -1.2759 & -3.6023 & -0.0518 & 0.9798 & 0.0005 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Os autovalores para o sistema em malha fechada ( $A + BF$ ) são então:

$$\lambda(A + BF) = \begin{bmatrix} -9.9391 + 376.87i \\ -9.9391 - 376.87i \\ -42.6536 \\ -6.6987 \\ -4.1360 \\ -2.7571 + 0.37i \\ -2.7571 - 0.37i \\ -1.6724 \\ -1.4328 \\ -1.2470 + 0.0427i \\ -1.2470 - 0.0427i \\ -1.0991 \\ -1.0370 \\ -1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Note que apenas os autovalores escolhidos em (4.94) foram alterados e que eles foram alocados na região especificada (4.86),(4.87). Podemos resolver o mesmo exemplo de forma sequencial, alocando uma parte por vez dos autovalores do conjunto que se quer modificar. Ao final, a matriz de controle  $F$  será:

$$F = f_1 + f_2 + \dots f_k$$

onde  $f_i$  é uma matriz de controle obtida na etapa  $i$ .

Para o exemplo anterior vamos, por exemplo, alocar dois a dois os autovalores escolhidos em (4.94).

Assim, para o par complexo  $\lambda = 0.545 \pm 1.560i$ , temos que:

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} -0.1988 & 1.7829 \\ -1.6746 & 1.2889 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.0352 & -0.7411 \\ -0.1467 & 1.2993 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 19.2851 & 0.0974 & -0.0864 & 2.0225 & -0.3867 & 10.7749 & -0.2757 & -0.7333 & -1.6844 \\ 1.0031 & 0.0136 & -0.0094 & -0.0464 & -0.0320 & 0.0989 & -0.0037 & -0.0232 & -0.0911 \\ -2.1139 & -10.0839 & 0.2026 & 2.6766 & 0.0128 & & & & \\ 0.0343 & -0.1448 & -0.0988 & 1.2856 & 0.0002 & & & & \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$$\lambda(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M_1) = \begin{bmatrix} -1.1540 \\ -1.0000 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda(A + B f_1) = \begin{bmatrix} -9.9391 + 376.87i \\ -9.9391 - 376.87i \\ -42.6536 \\ -4.1745 + 9.13i \\ -4.1745 - 9.13i \\ -6.6987 \\ -4.1360 \\ -2.7571 + 0.37i \\ -2.7571 - 0.37i \\ -0.0798 \\ -0.1402 \\ -1.6724 \\ -1.0000 \\ -1.1540 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Para  $\lambda = -0.140$  e  $\lambda = -0.080$ ,

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0.0013 & 0.1561 \\ -0.0736 & -0.2214 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.0814 & 1.0329 \\ -0.0581 & 0.6296 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} -19.5083 & -0.0992 & 0.0880 & -2.0427 & 0.3927 & -10.9753 & 0.0535 & 0.2606 & 0.8703 \\ -2.1961 & -0.0112 & 0.0099 & -0.2301 & 0.0442 & -1.2349 & 0.0083 & 0.0349 & 0.1093 \\ -32.5198 & -106.4349 & -0.2083 & -2.6664 & -0.0130 \\ -3.1016 & -8.6739 & -0.0233 & -0.3014 & -0.0015 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

$$\lambda(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M_2) = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} ; \quad \lambda(A + Bf_1 + Bf_2) = \begin{bmatrix} -9.9391 + 376.87i \\ -9.9391 - 376.87i \\ -42.6536 \\ -4.1745 + 9.13i \\ -4.1745 - 9.13i \\ -6.6987 \\ -4.1360 \\ -2.7571 + 0.37i \\ -2.7571 - 0.37i \\ -1.6724 \\ -1.1540 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Finalmente, para o par  $\lambda = -4.174 \pm 9.126i$ ,

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} -2.9959 & 3.9118 \\ -21.6473 & -5.3530 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.0172 & -0.5941 \\ -0.1928 & 0.1036 \end{bmatrix}$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} 16.3107 & -0.9314 & 0.8954 & -0.2438 & 2.1858 & 11.6381 & 0.1594 & -0.4134 & -0.7158 \\ -0.1158 & 0.0066 & -0.0064 & 0.0017 & -0.0155 & -0.0827 & -0.0011 & 0.0029 & 0.0051 \\ 25.5652 & 83.1968 & 0.6599 & 0.0278 & 0.0212 \\ -0.1816 & -0.5909 & -0.0047 & -0.0002 & -0.0002 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$\lambda(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 M_3) = \begin{bmatrix} -5.1324 + 4.1206i \\ -5.1324 - 4.1206i \end{bmatrix} ; \lambda(A + Bf_1 + Bf_2 + Bf_3) = \begin{bmatrix} -9.9391 + 376.87i \\ -9.9391 - 376.87i \\ -42.6536 \\ -5.1324 + 4.1206i \\ -5.1324 - 4.1206i \\ -6.6987 \\ -4.1360 \\ -2.7571 + 0.37i \\ -2.7571 - 0.37i \\ -1.6724 \\ -1.1540 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

A matriz de controle  $F$  é dada por

$$F = f_1 + f_2 + f_3$$

que corresponde a:

$$F = \begin{bmatrix} 16.0875 & -0.9332 & 0.8970 & -0.2640 & 2.1918 & 11.4378 & -0.0628 & -0.8861 & -1.5299 \\ -1.3089 & 0.0090 & -0.0059 & -0.2747 & -0.0033 & -1.2187 & 0.0035 & 0.0146 & 0.0233 \\ -9.0685 & -33.3220 & 0.6542 & 0.0381 & 0.0211 \\ -3.2489 & -9.4095 & -0.1268 & 0.9840 & -0.0015 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

Podemos verificar, que em geral, os ganhos da matriz  $F$  (4.109) obtida sequencialmente, são maiores que os da matriz  $F$  em (4.101). Esta diferença é previsível, devido ao fato de o processo sequencial ser uma forma sub-ótima de resolver o problema (4.65) do qual origina a matriz  $F$ .

## 4.6 Conclusão

Através da teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes, foi demonstrado neste capítulo, que uma maneira de se obter a alocação regional de pólos, é através da propriedade da invariância positiva do poliedro definido pelas restrições no estado. Foi visto que para uma dada margem de estabilidade ( $\varepsilon$ ), pré-especificada para o sistema em malha fechada, é possível determinar uma lei de controle ( $F$ ) que ao promover a invariância de um poliedro  $S(G, \omega)$ , posiciona os autovalores do sistema na região admissível do plano complexo. Foram então, propostos algoritmos

---

eficientes e numericamente estáveis para a determinação, de forma integrada, do poliedro  $S(G, \omega)$  e da matriz de controle  $F$  de norma mínima, utilizando programação linear.

Utilizando o algoritmo desenvolvido para alocação regional e o complemento ortogonal dos autovetores relacionados com os autovalores que não se deseja modificar, foi proposto um algoritmo eficiente e numericamente estável para alocação regional parcial de pólos.

Para ilustrar os problemas de alocação regional e regional parcial, foi resolvido um problema de controle de um sistema de geração de energia elétrica.



# Conclusão Geral

O projeto de sistemas de controle para sistemas lineares sujeitos a restrições nas suas variáveis de estado e/ou controle foi abordado neste trabalho através da teoria da invariância positiva de conjuntos poliédricos.

Propriedades como as da invariância positiva de um poliedro simétrico e do Lema de Farkas Extendido, foram utilizadas para demonstrar que a invariância de um poliedro simétrico limitado, implica em um posicionamento regional dos autovalores em malha fechada. Para o caso em que o poliedro é não limitado, condições equivalentes de invariância positiva foram obtidas para um poliedro fechado considerando um sistema de ordem reduzida.

Considerando as condições de invariância dos poliedros definidos pelas restrições aos vetores de estado e/ou controle, assim como a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, foi proposta uma forma fácil e eficiente de resolver o problema de regulação linear com restrições (PLR), através de uma abordagem simples de programação linear matricial. Para transformar o problema de programação linear matricial na sua forma padrão vetorial e assim utilizar as bibliotecas de programas disponíveis, foram utilizadas as propriedades do produto de Kronecker, que facilitam consideravelmente essa transformação.

Para solucionar o problema de regulação linear robusta (PLRR) de sistemas contínuos, considerando restrições tanto nos vetores de estado quanto nos de controle, uma nova condição suficiente foi derivada da teoria de conjuntos poliédricos positivamente invariantes. Baseado nesse método, uma abordagem de programação linear foi proposta para solução do PLRR, particularmente indicada para sistemas com grande número de parâmetros incertos.

A alocação regional de pólos foi também tratada pela teoria de poliedros positivamente invariantes. Algoritmos eficientes e numericamente estáveis foram propostos de forma a determinar uma lei de controle que ao promover a invariância de um poliedro simétrico, posicionasse os autovalores do sistema em malha fechada, em uma região pré-estabelecida do plano complexo.

Utilizando apenas o complemento ortogonal dos autovetores cujos autovalores não se deseja modificar, chegou-se a alocação regional parcial de pólos, utilizando um sistema de ordem reduzida, facilmente resolvido pelo algoritmo proposto para a

alocação regional.

Um exemplo ilustrativo mostrou a eficiência do método proposto e a vantagem da utilização da alocação regional parcial, onde, para o sistema considerado, não era necessário alocar todos autovalores, o que resultou em uma considerável redução nos ganhos da matriz de controle.

Ficam em aberto, perspectivas de continuidade deste trabalho, tais como:

- Desenvolvimento deste estudo para poliedros assimétricos;
- Resolução do PARP com robustez;
- Regulação dinâmica...

# Bibliografia

- [1] E.B.Castelan and J.-C.Hennet, "On Invariant Polyhedra of Continuous-Time Linear Systems", Proceedings of 30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, pp.1736-1741, Brighton, England,1991.
- [2] C.E.T.Dórea and B.E.A. Milani, "Regulação L-Q de Sistemas com Restrições nos Estados", Anais do XII COBEM, Brasília DF, 1993.
- [3] E.B.Castelan and J.-C. Hennet, "Eigenstructure Assignment for Constrained Linear Continuous Time Systems", Automática, Vol. 28, pp. 605-611,1992.
- [4] P.E. Gill,W.Murray and M. W.Wright, "Practical Optimization", Academic Press, 1981, London.
- [5] J.-C.Hennet, "Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes", C.R. Acad. Sci. Paris, t.308, Série I, pp. 415-419, 1989.
- [6] W.M.Wonham, "Linear Multivariable Control a Geometric Approach", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlim (1979).
- [7] E. J. Davison - Ed, "Benchmark Problems for Control System Design", Report of the IFAC Theory Comittee, IFAC, 1990.
- [8] M. Sznaier e A. Sideris, "Suboptimal Norm Based Robust Control of Constrained Systems with an  $\mathcal{H}_\infty$  cost", Proceedings of the 30th Conference on Decision e Control, Brighton, U.K., pp.2280-2286, 1991.
- [9] G. Bitsoris e E. Gravalou, "Robust Linear Controller under State e Control Constraints", Proceedings of the 31st Conference on Decision e Control, Tucson, U.S.A, pp.2640-2642, 1992.
- [10] G. Bitsoris, "Existence of Polyhedral Positively Sets for Continuous-Time Systems", Control-Theory e Advanced Technology, Vol.7, pp.407-427, 1991.

- 
- [11] A.N.Carvalho e B.E.A.Milani, "A Simple Design Method for Robust Linear Discrete-Time Regulators Under Symmetrical Constraints", Proceedings of 1994 American Control Conference, Baltimore MD, 1994.
- [12] M. Vassilaki e G. Bitsoris, "Constrained Regulation of Linear Continuous-Time Dynamical Systems", Systems & Control Letters, Vol.13, pp.247-252, 1989
- [13] L. S. Lasdon, "Optimization Theory for Large Systems", MacMillan Pub.Co., New York, 1970.
- [14] J.Szajner, "Local Modal Control of Synchronous Generator", Doctor of Science Thesis, MIT, Cambridge MA, USA, 1975.
- [15] A.Benzaouia, C. Burgat, "The Regulator Problem for a Class of Linear Systems with Constrained Control", Systems and Control Letters, vol. 10, No.5, 1988, pp. 357-363.
- [16] A.Benzaouia, C. Burgat, "Regulator Problem for Discrete-Time Systems with Nonsymmetrical Constrained Control", Int. J. of Control, vol.48, No.6, 1988, pp.2441-2451.
- [17] G.Bitsoris, "The Linear Constrained Regulation Problem for Discrete-Time Systems", IFAC,1990, Tallinn, vol.2,pp.287-292.
- [18] G.Bitsoris, M.Vassilaki, "Optimization Approach to Linear Constrained Regulation Problem for Discrete-Time Systems", Int.J.Systems SCI, 1991, vol.22, No.10, pp. 1953-1960.
- [19] F.Blanchini, "Constrained Control for Uncertain Linear Systems", J. of Optimization Theory and Appl., vol.71, No.3, 1991, pp.465-484.
- [20] E.B.Castelan, "On Invariant Polyedra of Continuous-Time Linear Systems", IEEE-TAC, vol.38, nov 1993, pp.1680-1685.
- [21] E.B.Castelan, "Sur l'invariance Positive et la Commande sous Contraintes de Systèmes Linéaires Multivariables", Thèse de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France), Rapport LAAS No.92223.
- [22] J.C.Hennet, E.B.Castelan, "Constrained Control of Unstable Multivariable Linear Systems", ECC'93, Groningen, Netherland, 1993, vol.4, pp.2039-2043.
- [23] J.C.Hennet, E.B.Castelan, "Robust Invariant Controllers for Constrained Linear Systems", ACC 1992, vol.2, pp. 993-997.

- 
- [24] S.A.Marques e B.E.A.Milani, “ *Regulação Linear Robusta de Sistemas Contínuos no Tempo Sujeitos a Restrições Simétricas*”, submetido ao CB-MAC,1994.
- [25] S.Barnett and C.Storey, “ *Matrix Methods in Stability Theory*”, Thomas Nelson and Sons Ltd., England, 1970

# Apêndice

## Produto de Kronecker

Neste apêndice apresentaremos a definição e algumas propriedades do Produto de Kronecker [25]:

**Definição :** Dadas duas matrizes  $X_{(n \times m)}$  e  $Y_{(r \times p)}$ , o Produto de Kronecker,  $X \otimes Y$ , é uma matriz de dimensões  $(nr \times mp)$  dada por

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11}Y & x_{12}Y & \dots & x_{1m}Y \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1}Y & x_{n2}Y & \dots & x_{nm}Y \end{bmatrix}$$

Onde  $x_{ij}$  são os elementos da matriz  $X$ .

**Propriedades:** As seguintes propriedades são úteis na transformação de equações matriciais em vetoriais:

Propriedade 1: Dados  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , então

$$AX = B$$

é equivalente a

$$(A \otimes \mathbf{I}_m)x = b$$

Onde

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$(\mathbf{I}_m \otimes A)x = b$$

Onde

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix}$$

Propriedade 2: Dados  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , temos que

$$XA = C$$

é equivalente a

$$(\mathbf{I}_m \otimes A')x = c$$

Onde

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$(A' \otimes I_m)x = c$$

Onde

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}$$

Propriedade 3: Dados  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{r \times s}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{n \times q}$  e  $D \in \mathfrak{R}^{s \times p}$ , temos que,

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$