

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DA CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

Este exemplar corresponde
à versão final da tese
aprovada por Sygeed Said Dana
e aprovada pela Comissão Julgadora
em 03/07/87



CARLOS I. VEBER

ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES
COM EIXO VERTICAL

SEYYED SAID DANA

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia de Campinas - UNICAMP,
como parte dos requisitos exigidos
para obtenção do Título de Doutor
em Engenharia Mecânica

Julho 1987, Campinas

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Hans Ingo Weber, orientador desta tese, pela dedicação e pelo valioso estímulo e atenção que me tem dispensado.

Ao Prof. Dr. Fernando Iguti, pela concessão do uso de seu programa de elementos finitos implantado no HP-9845A.

Ao Prof. Dr. José Roberto França Arruda, pela sua colaboração e atenção dispensadas.

Ao prof. Robson Pederiva pelas valiosas discussões sobre assuntos diversos.

Ao prof. Natanael Victor de Oliveira pela colaboração na parte experimental .

A Fundação de Stiftung Volkswagenwerk pelo financiamento da bancada de ensaios existente no GEPROM .

Ao tecnico Luiz Roberto Morelli pela constante ajuda na bancada de ensaios .

Aos colegas do Departamento de Tecnologia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, pelo apoio e estímulo que tem me dado.

A todos que me auxiliaram de maneira direta ou indireta, e em particular aos companheiros do GEPRON pela constante boa vontade demonstrada.

A TAYEBEH NIAZ
ARASH, DANIEL
E JALIL DANA

RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo em uma bancada de ensaio de um rotor com eixo vertical as causas da variação dos autovalores e autovetores complexos sobre o comportamento dinâmico do sistema. Desta forma pode-se fazer uma estimativa das velocidades críticas e uma avaliação do estado vibratório do sistema submetido ao efeito giroscópico. Analisa-se a questão dos autovetores à direita e à esquerda e procede-se a uma determinação experimental dos mesmos. Todos estes procedimentos são acompanhados do correspondente estudo analítico que permite avaliar a influência sobre os resultados de uma eventual variação dos parâmetros.

Assim o rotor parado é modelado por elementos finitos de um rotor não amortecido e com ele são feitas previsões dos autovalores do sistema rotativo, isto é, quais as velocidades críticas do sistema. Discute-se também o tema de "forward e backward whirl" .

ÍNDICE

- 1 Introdução

- 2 Dados Geométricos e Dimensionais do Rotor Vertical
 - 2.1 A Faixa de operação do Rotor Vertical

- 3 Formulação Matemática de Sistemas não Rotativos
 - 3.1 Equações Diferenciais para Sistemas Conservativos e suas Soluções
 - 3.2 Resposta em Frequência de Sistemas Conservativos

- 4 Formulação Matemática de Sistemas rotativos
 - 4.1 Equações Diferenciais para Sistemas Conservativos e suas Soluções
 - 4.2 Equações Diferenciais de Sistemas não Conservativos e suas Soluções
 - 4.3 Propriedades de Ortogonalidade de Autovetores à Direita e à Esquerda
 - 4.4 Desacoplamento das Equações do Movimento
 - 4.5 Resposta em Frequência para Sistemas não Conservativos

- 5 Formulação Matemática de Sistemas não-Simétricos
 - 5.1 Equação Característica para Disco não Simétrico
 - 5.2 Backward Whirl e seus Efeitos em Rotores Simétricos e não Simétricos

- 6 Identificação dos Parâmetros Modais do Sistema

- 6.1 Aplicação da Identificação dos Parâmetros Modais
- 6.2 Exigências para o Procedimento de Identificação de Parâmetros Modais
- 6.3 Resumo dos Métodos de Medição
- 6.4 Sistemas de Processamento para Identificação dos Parâmetros Modais

- 7 Identificação dos Parâmetros Modais do Rotor Vertical
 - 7.1 Sistemas não Rotativos
 - 7.1.1 Frequências Naturais da Bancada
 - 7.1.2 Questões sobre a Rigidez da Bancada
 - 7.1.3 Identificação das Frequências Naturais do Eixo Livre-Livre
 - 7.1.4 Frequências Naturais do Rotor Livre-livre
 - 7.1.5 Definindo os Graus de Liberdade do Rotor Vertical
 - 7.1.6 Algumas Considerações
 - 7.1.7 Identificação das Frequências Naturais no Plano YZ
 - 7.1.8 Identificação das Frequências Naturais do Rotor Vertical
 - 7.1.9 Identificação dos Modos Naturais do Rotor
 - 7.2 Sistema Rotativo
 - 7.2.1 Autovalores do Rotor Girando
 - 7.2.2 Autovetores à Direita de um Rotor Vertical
 - 7.2.3 Autovetores à Esquerda de um Rotor Vertical

- 8 Modelo Matemático do Rotor Vertical

- 8.1 Introdução
 - 8.2 O Modelo de Elementos Finitos do Rotor Vertical
 - 8.3 Modelamento do Eixo Livre-Livre
 - 8.4 Modelamento do Rotor Livre-Livre
 - 8.5 Modelamento do Rotor Montado, em Repouso
 - 8.6 Ajustando o Modelo de Elementos Finitos
-
- 9 Síntese do Comportamento Dinâmico do Eixo Vertical
 - 9.1 O Rotor em Repouso
 - 9.2 Baixo Nível de Amortecimento Interno
 - 9.3 Rotor Montado Girando
-
- 10 Conclusão e Perspectivas

1 - INTRODUÇÃO

A temática de velocidade crítica em máquinas rotativas tem mantido uma constante atualidade. Engenheiros e empresas ligadas ao projeto e construção de turbo-geradores, especificamente aqueles com eixo vertical, tem se interessado em muitos aspectos deste problema, tendo em vista as tendências modernas de aproveitar mais amplamente as possibilidades de solicitação do material e dos elementos de projeto. Desta forma há interesse em aproveitar regiões onde as amplitudes de vibrações são maiores e projetar os parâmetros físicos e geométricos da máquina de forma tal a manter uma distância segura as velocidades críticas (no caso de máquinas hidráulicas) ou atravessá-las (como no caso de turbinas a vapor ou a gás) de tal forma que as vibrações se mantenham em níveis aceitáveis.

Parece incrível que por tantos anos de uso de máquinas rotativas este assunto não esteja totalmente resolvido [1]. Embora haja várias razões para a falta de informações nesta área, procuraremos abordar apenas aqueles aspectos que enfatizam o lado tecnológico e o lado científico.

No campo tecnológico tem havido um esforço maior no entendimento construtivo de máquinas com eixos horizontais e isto tem várias razões como o hábito e a tendência de utilizar a força gravitacional para facilitar a produção, o manuseio e a montagem

destas máquinas. No final dos anos 70, com a crise de energia e a introdução de fontes alternativas de energia, muitos fabricantes foram obrigados a mudar os seus hábitos usuais de manufatura e engenharia procurando soluções alternativas ou incrementando as instalações hidroelétricas e nucleares. Como os espaços disponíveis em locais densamente povoados são muito escassos, as máquinas com eixos verticais receberam uma atenção maior e muitos projetos tradicionais foram reciclados ou alterados para faixas de potências mais elevadas. As máquinas verticais possuem particularidades próprias que começaram a ser investigadas a partir de modelos teóricos e experimentais. Muitos fenômenos começaram a ser investigados com uma certa profundidade nesta ocasião.

No Brasil o esforço feito para depender menos das fontes energéticas externas resultou em um incentivo grande à construção de hidroelétricas e plantas nucleares.

Na Universidade Estadual de Campinas com o objetivo de formar pessoal especialmente habilitado para enfrentar os problemas deste tipo de instalação, foi iniciado um esforço científico e tecnológico nesta área, com enfoque particular nos problemas dinâmicos deste tipo de equipamento.

Desde 1981 o Laboratório de Projetos Mecânicos do Departamento de Engenharia Mecânica iniciou uma atividade em

conjunto com a CESP na medição de vibrações em máquinas hidroelétricas do tipo Francis tendo, neste campo, feito um convênio, para facilitar o intercâmbio científico e técnico, com a Universidade de Stuttgart. Como resultado deste trabalho comum foi construída uma bancada de ensaios com um rotor vertical entre Setembro 83 e Março 84 que tem um caráter de bancada original para análise de problemas em rotores com eixo vertical.

Esta bancada foi projetada para simular as várias situações e estágios da operação de máquinas hidroelétricas [2], visando principalmente máquinas do tipo Kaplan e Francis. Esta bancada representa uma tentativa pioneira de uma abordagem científica deste tipo de problema, feita em um país em desenvolvimento.

A bancada, sendo do tipo vertical, tem seu comportamento dinâmico bastante diferente de um rotor horizontal. Temos neste caso situações novas como a falta de uma posição de equilíbrio definida estáticamente através do peso. Na realidade na primeira montagem utilizada ao longo deste trabalho esta posição é definida através de um conjunto de molas.

O objetivo deste trabalho com relação a esta bancada está em identificar os parâmetros do rotor vertical enquanto está em repouso. Com estes resultados prever os parâmetros modais em rotação a uma velocidade especificada. O maior esforço deste trabalho está concentrado nesta parte experimental, objetivando

fornecer uma fundamentação precisa para outros trabalhos de pesquisa na mesma bancada, que se devem suceder ao longo da próxima década.

Como objetivo final estudaremos o problema de como desenvolver um modelo matemático que corresponda ao comportamento dinâmico da bancada de ensaios, isto é, do rotor vertical, enquanto está girando. Neste aspecto procedemos a uma investigação de carácter experimental para abordar diversos assuntos (normalmente polémicos) sobre velocidades críticas e efeitos giroscópicos.

2 - DADOS GEOMÉTRICOS E DIMENSIONAIS DO ROTOR VERTICAL

Há muitos anos os especialistas que lidam com problemas dinâmicos em rotores vem tentando obter modelos matemáticos mais exatos. Além do conceito de modelamento eficaz, os engenheiros também encontram dificuldades para obter os dados geométricos exatos dessas máquinas : primeiro, devido à falta de informações relacionadas à fabricação; segundo, devido às modificações dos parâmetros geométricos e devido à montagem e instalação dessas máquinas.

A falta de dados precisos torna difícil conseguir um modelo exato.

Neste trabalho com um rotor vertical projetado especificamente para esta tarefa, nós temos dados geométricos mais apurados. Alguns trabalhos [3] foram feitos para medir esses dados o mais exato possível e serão descritos a seguir.

A figura 2.1 mostra o rotor vertical e a figura 2.2 suas dimensões atuais, e estão indicados também outros parâmetros importantes do rotor, como massa, inércia e rigidez na figura 2.3, bem como os valores correspondentes, na tabela 2.1 .

2.1 - A FAIXA DE OPERAÇÃO DO ROTOR VERTICAL

O sistema foi projetado para operar até uma velocidade nominal de 3000 rpm. Embora haja possibilidade por parte do acionamento de se atingir até 7200 rpm nominal, a construção da bancada pela sua elasticidade e amortecimento não permite um uso superior a 3000 rpm. A inclusão de amortecedores especiais, a diminuição da ponta em balanço na extremidade inferior pode aumentar este limite. Dadas estas limitações e a relativa distância entre as frequências do rotor e da estrutura da bancada (estas são superiores a 100 Hz) limitou-se o presente estudo a uma faixa de frequências até 50 Hz.

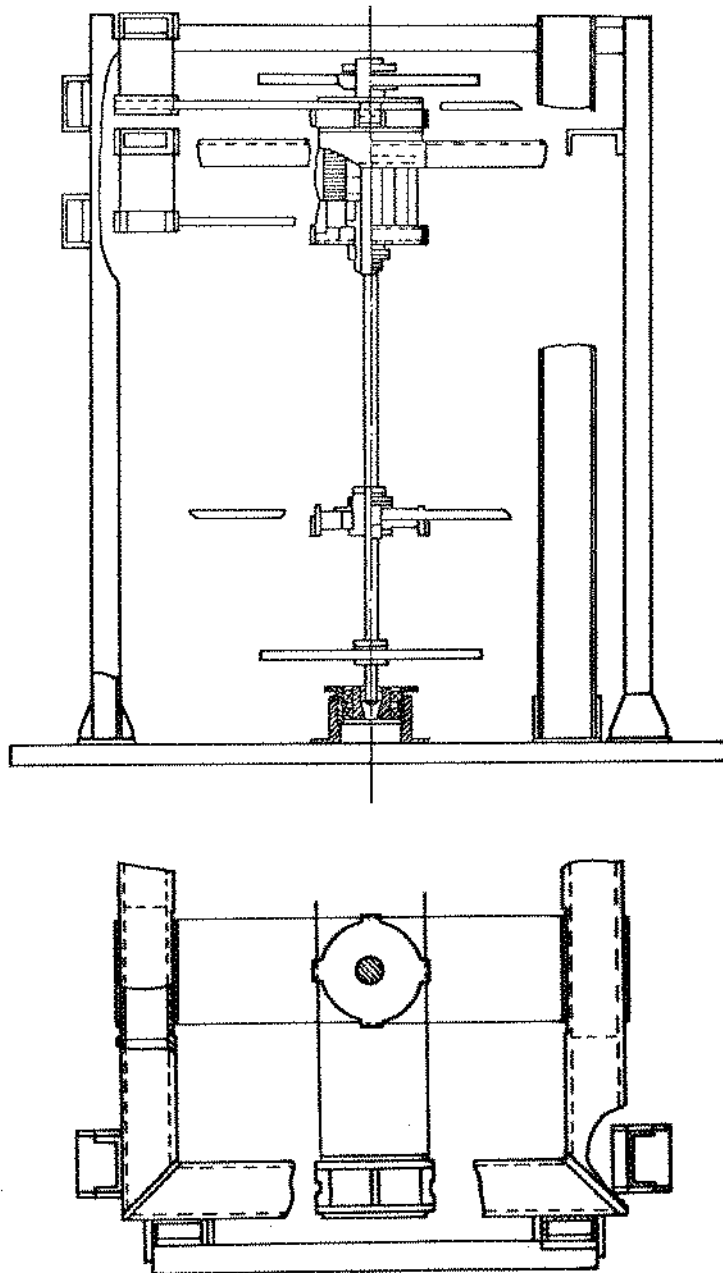


Fig. 2.1 O Rotor Vertical
2 - 3

TABELA 2.1 - As Propriedades do rotor vertical

Núm.	Descrição	Símbolo	Valor	Dimensão
1	Massa do estator	STM	38,796	Kg
2	Massa do rotor	RTM	10,178	Kg
3	Inércia do estator, eixo z	STMIZ	29,260E-2	Kg-m ²
4	Inércia do rotor, eixo z	RTMIZ	10,505E-2	Kg-m ²
5	Inércia polar do rotor	RTMIP	70,628E-4	Kg-m ²
6	Massa do disco superior	SDM	16,975	Kg
7	Inércia do disco sup., eixo z	SDMIZ	9,683E-2	Kg-m ²
8	Inércia polar do disco sup.	SDMIP	19,133E-2	Kg-m ²
9	Massa das duas plataformas	PLM	7,8	Kg
10	Rigidez da 1.ª mola, direção y	1Ky	3,16E5	N/m
11	Rigidez da 2.ª mola, direção y	2Ky	2,86E5	N/m
12	Rigidez da 3.ª mola, direção y	3Ky	2,91E5	N/m
13	Rigidez da 1.ª mola, direção z	1Kz	2,47E5	N/m
14	Rigidez da 2.ª mola, direção z	2Kz	2,94E5	N/m
15	Rigidez da 3.ª mola, direção z	3Kz	2,84E5	N/m
16	Densidade específica do eixo	ρ	7,8E3	Kg/m ³
17	Módulo elasticidade do eixo	E	2,067E11	N/m ²
18	Inércia da secção transversal do eixo sobre o eixo z	I_z	7,822E-9	m ⁴
19	Inércia polar da secção do eixo	I_p	15,645E-9	m ⁴
20	Diâmetro do eixo	d	19,98E-3	m
21	Área da secção transversal	A	3,135E-9	m ²
22	Massa suporte do mancal inter.	BSM	4,988	Kg
23	Massa girante do mancal inter.	BRM	2,936	Kg
24	Inércia do suporte do mancal int.	BSMIZ	2,340E-2	Kg-m ²
25	Inércia girante do mancal inter.	BRMIZ	9,805E-2	Kg-m ²
26	Inércia polar do mancal	BMIP	2,505E-2	Kg-m ²
27	Massa do disco inferior	LDM	11,316	Kg
28	Inércia do disco inf., eixo z	LDMIZ	6,218E-2	Kg-m ²
29	Inércia polar do disco inf.	LDMIP	12,306E-2	Kg-m ²

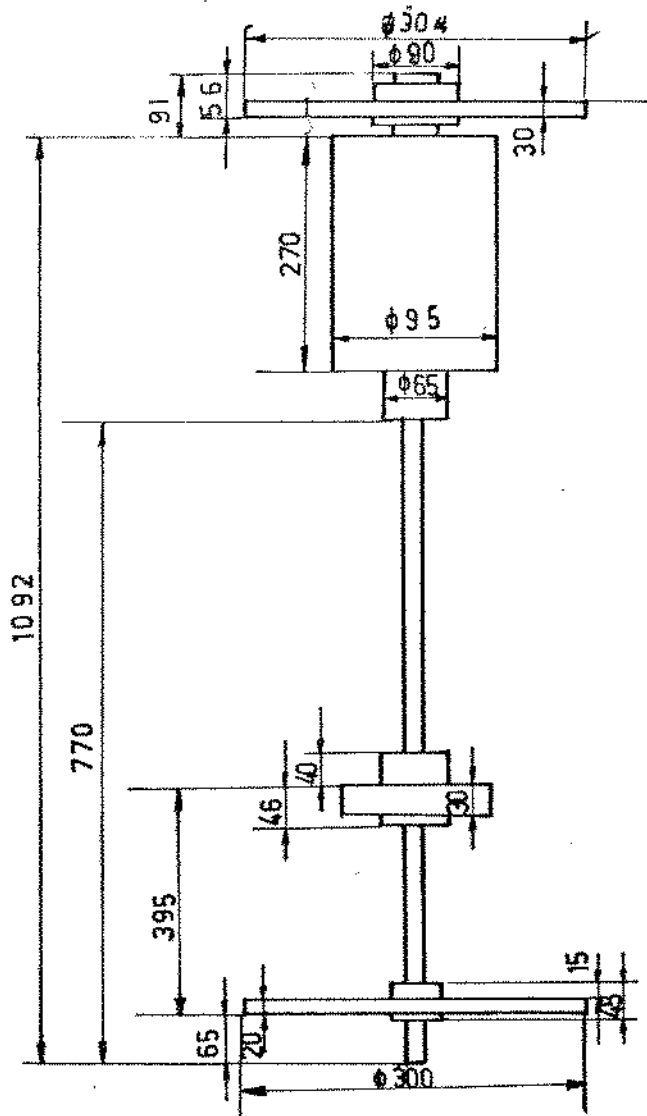


Fig. 2.2 Dimensões do Rotor
2 - 5

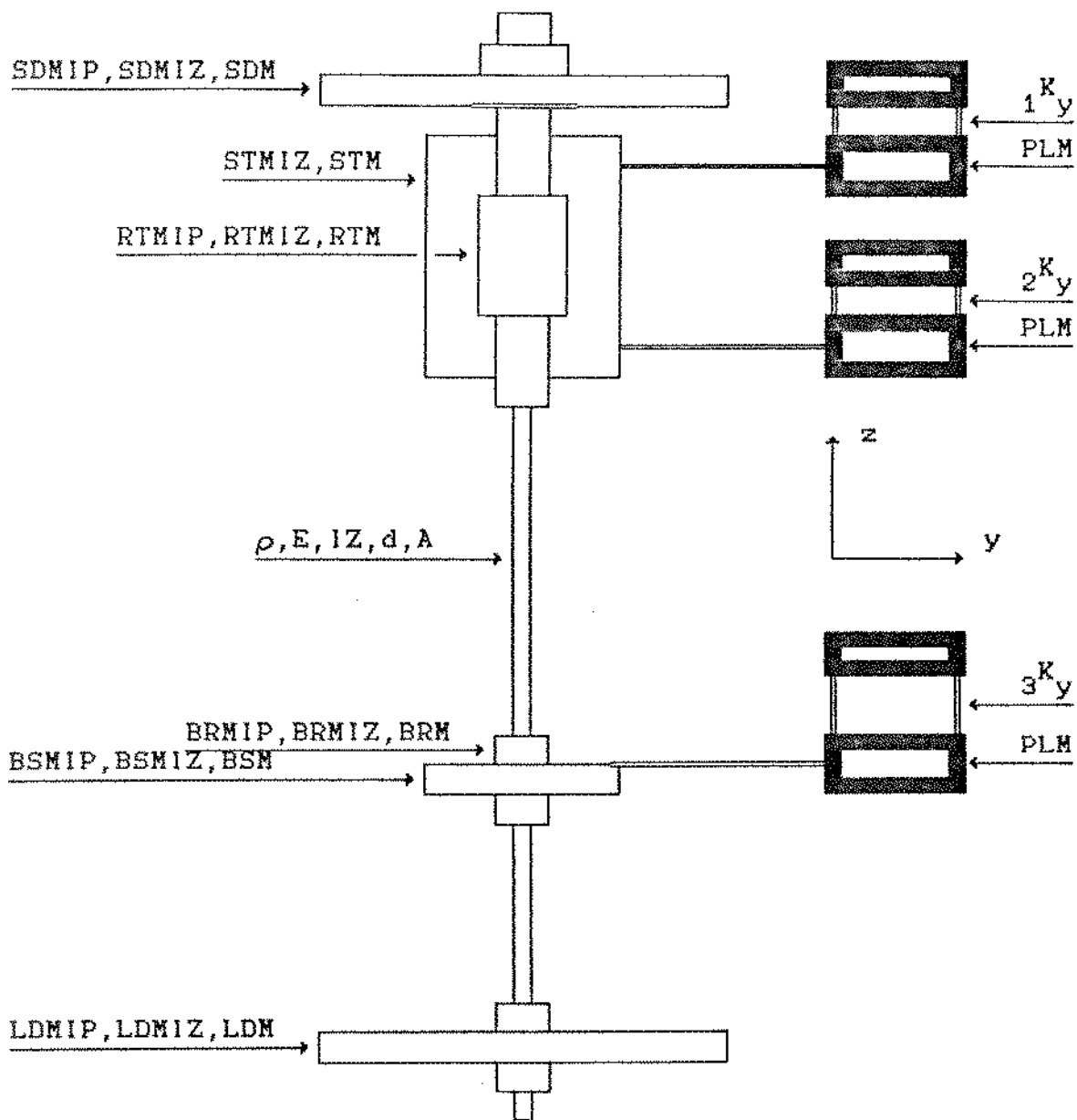


Fig. 2.3 Propriedades do Rotor Vertical
2 - 6

3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS NÃO ROTATIVOS

3.1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS E SUAS SOLUÇÕES

As equações diferenciais que governam o movimento de um sistema não giroscópico, não amortecido e sem forças cíclicas, com n graus de liberdade, são obtidas fazendo-se a matriz giroscópica $[G]$, a matriz de amortecimento $[C]$ e a matriz de amortecimento interno não conservativo $[H]$ na equação geral que rege o movimento linear de um sistema mecânico (3.1) iguais a zero.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [(C)+[G]]\{\dot{x}(t)\} + [(K)+[H]]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1)$$

O resultado é :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} ,$$

onde $[M]$ e $[K]$ são matrizes reais simétricas $n \times n$; a primeira é a matriz de inércia e a segunda é a matriz de rigidez. Ainda $\{x(t)\}$ é um vetor posição com dimensão n e $\{f(t)\}$ o vetor de força generalizado associado.

A matriz de inércia $[M]$ é positiva definida assim como a de rigidez $[K]$.

Iremos obter a solução da equação (3.1) pela análise modal, o que implica em reduzir a resposta de um sistema de n graus de liberdade a uma combinação linear de n sistemas simples e independentes. Para tanto vamos primeiramente verificar a solução da equação diferencial homogênea, fazendo $(f(t))$ nulo na equação (3.2). Assume-se a solução geral como :

$$\{x(t)\} = \{u\} e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

onde $\{x(t)\} = (x_1, \dots, x_n)^t$ e $\{u\} = (u_1, \dots, u_n)^t$.

Primeiramente, iremos determinar os autovalores λ :

$$\lambda [M]\{u\} = [K]\{u\} \quad \lambda = \omega^2 \quad (3.4)$$

Na solução da equação (3.4) pode ser definida a matriz modal : $[U] = [u_1(u), u_2(u), \dots, u_n(u)]$, onde $u_i(u)$ são os autovetores do sistema, isto é, os vetores solução de (3.4). A matriz diagonal dos autovalores é $\text{diag } \lambda_i = \text{diag } \omega_i^2$; onde ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) são as frequências naturais do sistema.

Os autovetores são ortogonais com respeito a $[M]$ (e $[K]$) e podem ser normalizados para satisfazer :

$$[U]^t [M] [U] = I \quad , \quad [U]^t [K] [U] = \Lambda \quad , \quad \Lambda = \text{diag } \omega_i^2 \quad (3.5)$$

O teorema da expansão pode ser formulado, também, em termos de \mathbf{u}_i . Em consequência estes vetores constituem uma base para um espaço linear de dimensão n ; assim, um vetor arbitrário \mathbf{q} no espaço pode ser escrito como :

$$\mathbf{q} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = [\mathbf{U}]\boldsymbol{\alpha} \quad (3.6)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$ é o vetor dos coeficientes.

Denotando as coordenadas do vetor $\{\mathbf{x}(t_i)\}$ com respeito à base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ por : $\eta_1(t_i), \eta_2(t_i), \dots, \eta_n(t_i)$ respectivamente, a resposta do sistema em qualquer instante t_i pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}(t_i)\} &= \eta_1(t_i) \mathbf{u}_1 + \eta_2(t_i) \mathbf{u}_2 + \dots + \eta_n(t_i) \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n \eta_i(t_i) \mathbf{u}_i \\ \{\mathbf{x}(t_i)\} &= [\mathbf{U}]\boldsymbol{\eta}(t_i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\boldsymbol{\eta}(t_i) = [\eta_1(t_i), \eta_2(t_i), \dots, \eta_n(t_i)]^t$ é o vetor das coordenadas no tempo. Mas t_i é arbitrário, assim este valor pode ser mudado ao acaso. Como a equação (3.7) é a mesma para quaisquer outros valores de tempo, e como a solução é contínua, podemos trocar t_i por t e escrever :

$$\{\mathbf{x}(t)\} = [\mathbf{U}]\boldsymbol{\eta}(t) \quad (3.8)$$

Passando a equação (3.8) na equação (3.2) e premultiplicando o resultado por $[U]^t$ teremos :

$$\begin{aligned} [M][U](\ddot{\eta}(t)) + [K][U](\eta(t)) &= (f(t)) \\ [U]^t[M][U](\ddot{\eta}) + [U]^t[K][U](\eta) &= [U]^t(f(t)) \end{aligned}$$

usando a equação (3.5) teremos :

$$(\ddot{\eta}(t)) + \Lambda (\eta(t)) = [U]^t(f(t))$$

definindo :

$$(p(t)) = [U]^t(f(t)), \quad (3.9)$$

então teremos :

$$(\ddot{\eta}(t)) + [\Lambda](\eta(t)) = (p(t)) \quad (3.10)$$

A equação (3.10) representa um conjunto de equações ordinárias e independentes da forma :

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = p_i(t) \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (3.11)$$

As coordenadas η_i ($i=1,2,\dots,n$) são designadas como coordenadas principais ou coordenadas naturais. Por serem coordenadas com respeito a uma base ortogonal, são também chamadas de coordenadas normais.

Pelo princípio da superposição a solução de (3.11) pode ser escrita na forma de uma combinação linear da solução da equação

homogenea e uma solução particular da equação completa, onde a primeira representa a resposta às excitações iniciais e a segunda representa as excitações externas.

Fazendo o deslocamento e a velocidade iniciais serem :

$$\eta_i(0) = \eta_i^0 \quad , \quad \dot{\eta}_i(0) = \dot{\eta}_i^0 \quad , \quad i=1,2,3,\dots,n$$

a solução será da forma :

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t P_i(t-\tau) \sin(\omega_i \tau) d\tau + \eta_i^0 \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{\eta}_i^0}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \quad (3.12)$$

3.2 - RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS CONSERVATIVOS

O comportamento dinâmico de um sistema conservativo é representado pela equação (3.1) do capítulo anterior :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$$

Transformando esta equação no domínio da frequência, e usando propriedades de transformação linear de frequência, teremos;

$$-\omega^2[M](X) + [K](X) = (F) \quad (3.13)$$

onde ω é a frequência em rad/seg, $X(\omega)$ e $F(\omega)$ denotam as variáveis de posição e força no domínio da frequência.

Usando a equação (3.8), a transformação linear pode ser feita :

$$(X) = [U](N)$$

onde $[U]$ é a matriz modal : $[U] = [u_1(u), u_2(u), \dots, u_n(u)]$.

Substituindo (X) da equação anterior em (3.13), teremos :

$$-\omega^2[M][U](N) + [K][U](N) = (F)$$

e premultiplicando por $[U]^t$ teremos :

$$-\omega^2 [U]^t [M] [U] (N) + [U]^t [K] [U] (N) = [U]^t (F) \quad (3.14)$$

Escolhendo normalizar $[U]$ de modo :

$$[U]^t [M] [U] = I$$

assim a equação (3.14) fica :

$$-\omega^2 I (N) + \omega_1^2 (N) = [U]^t (F)$$

onde ω_1 é a 1-ésima frequência natural.

$$\begin{aligned} \left[\omega_1^2 - \omega^2 \right] (N) &= [U]^t (F) \\ (N) &= \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \right] [U]^t (F) \quad \text{ou} \\ (X) &= [U] \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \right] [U]^t (F) \end{aligned} \quad (3.15)$$

A matriz modal é escrita como :

$$[U] = [u_1(u), u_2(u), \dots, u_n(u)]$$

onde $u_k(u) = u_k(u_1, u_2, \dots, u_n)^t$

Para simplificar vamos assumir $(\omega_i^2 - \omega^2)^{-1} = \nabla \omega_i$. Expandindo a equação (3.15), ela pode ser escrita :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_k \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^{u_1} & 2^{u_1} & k^{u_1} & n^{u_1} \\ 1^{u_2} & 2^{u_2} & k^{u_2} & n^{u_2} \\ 1^{u_k} & 2^{u_k} & k^{u_k} & n^{u_k} \\ 1^{u_n} & 2^{u_n} & k^{u_n} & n^{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \omega_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{u_1} & \dots & 1^{u_n} \\ 2^{u_1} & \dots & 2^{u_n} \\ k^{u_1} & \dots & k^{u_n} \\ n^{u_1} & \dots & n^{u_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_k \\ F_n \end{Bmatrix}$$

Depois multiplicando toda a equação, teremos

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_k \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n i^{u_1} \nabla \omega_i & i^{u_1} & \dots & \sum_{i=1}^n i^{u_1} \nabla \omega_i & i^{u_n} \\ \sum_{i=1}^n i^{u_n} \nabla \omega_i & i^{u_1} & \dots & \sum_{i=1}^n i^{u_n} \nabla \omega_i & i^{u_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_k \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Se utilizarmos $(F(\omega))$ o vetor de força generalizado associado em frequência de modo que :

$$(F(\omega)) = (0, 0, F_k, 0, 0)^t,$$

isto é, apenas a componente de F correspondente à coordenada X_k é aplicada ao sistema. Resumindo a resposta em frequência por

$$(X(\omega)) = [X_1, X_2, \dots, X_n]^t,$$

de acordo com a equação (3.16), iremos identificar a coluna k da matriz de transferência. De modo análogo se aplicamos $(F(\omega))$ em todos os pontos de excitação, de modo que :

$$(F(\omega)) = (F_1, F_2, \dots, F_n)^t$$

e medirmos a resposta em frequência no ponto de excitação k , através de :

$$(X(\omega)) = [0, 0, X_k, 0, 0]^t ;$$

nós estaremos identificando a linha k da matriz de transferência.

Agora é fácil demonstrar da equação (3.16) que a função de resposta em frequência (ou função de transferência) relacionando a excitação aplicada no ponto k e o deslocamento medido no ponto l , é :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_k \\ X_l \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{1k} & H_{1l} & H_{1n} \\ H_{k1} & H_{kk} & H_{kl} & H_{kn} \\ H_{l1} & H_{lk} & H_{ll} & H_{ln} \\ H_{n1} & H_{nk} & H_{nl} & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_k \\ F_l \\ F_n \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

ou :

$$X_l = H_{lk}(\omega) F_k ,$$

ou :

$$H_{lk}(\omega) = \frac{X_l}{F_k}$$

Da equação (3.16) podemos concluir que :

$$H_{lk}(\omega) = \frac{X_l}{F_k} = \sum_{i=1}^n \frac{{}_1u_l \quad {}_1u_k}{(\omega_i^2 - \omega^2)} \quad (3.18)$$

como :

$${}_1u_l \quad {}_1u_k = {}_1u_k \quad {}_1u_l$$

podemos concluir a partir de (3.16) que :

$$H_{lk} = H_{kl} , \text{ i.e.,}$$

a matriz da função de transferência é simétrica para um sistema conservativo não rotacional.

É obvio, que uma única função de transferência, relacionando o ponto de excitação com o ponto de medidas, é suficiente para determinar os autovalores (frequências naturais). Já que a função de transferência tende ao infinito quando ω tende a ω_i .

Para podermos determinar a matriz modal [U] é necessário identificar todos os modos. Em outras palavras precisamos determinar u_i , i sendo o índice da ordem do modo e variando de 1 até à ordem do sistema.

Examinando a equação (3.18) podemos reescreve-la como :

$$H_{lk}(\omega) = \frac{1^u_l 1^u_k}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{2^u_l 2^u_k}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{n^u_l n^u_k}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad \text{ou}$$

$$H_{lk}(\omega) = [1^u_k, 2^u_k, \dots, l^u_k, \dots, n^u_k]_{1 \times n} \begin{bmatrix} (\omega_1^2 - \omega^2)^{-1} & & & \\ & (\omega_2^2 - \omega^2)^{-1} & & \\ & & (\omega_l^2 - \omega^2)^{-1} & \\ & & & (\omega_n^2 - \omega^2)^{-1} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} 1^u_l \\ 2^u_l \\ k^u_l \\ n^u_l \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

Vamos observar a matriz modal [U] :

$$[U] = \begin{bmatrix} 1^u_1 & 2^u_1 & l^u_1 & n^u_1 \\ 1^u_2 & 2^u_2 & l^u_2 & n^u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^u_n & 2^u_n & l^u_n & n^u_n \end{bmatrix}$$

1 2 → l → n

é claro que para identificar a matriz modal [U], é suficiente fazer l variar de 1 até n , e geraremos completamente a matriz modal, ou seja, é suficiente obter :

$$H_{lk}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{i^u_l i^u_k}{(\omega_i^2 - \omega^2)}, \text{ para } l = 1, 2, 3, \dots, n$$

Portanto uma coluna da matriz da função de transferência é suficiente para identificar a matriz modal. Podemos repetir o mesmo procedimento para provar que uma linha da matriz de transferência também é suficiente para determinar os parâmetros modais.

4 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS ROTATIVOS

4.1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS E SUAS SOLUÇÕES.

Genericamente, podemos escrever a equação do movimento de um sistema giroscópico e conservativo como :

$$[M](\ddot{x}) + [G](\dot{x}) + [K](x) = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

$[M]$ e $[K]$ são reais positivas definidas e simétricas e $[G]$ é a matriz antisimétrica giroscópica.

Chamando

$$q(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix}, \quad p(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

a forma da equação do movimento é :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [G] & [K] \\ -[K] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

ou seja, teremos :

$$[M](\dot{q}(t)) + [C](q(t)) = p(t) \quad (4.4)$$

$[M]$ é real, simétrica, positiva definida com ordem $2n \times 2n$, e $[C]$

$[\bar{M}]$ é real, simétrica, positiva definida com ordem $2n \times 2n$, e $[\bar{G}]$ é uma matriz antisimétrica.

Vamos escrever a equação (4.4) para a vibração livre :

$$[\bar{M}]\{\dot{q}(t)\} + [\bar{G}]\{q(t)\} = 0 \quad (4.5)$$

A solução é da forma :

$$\{q(t)\} = \{Q\} e^{st} \quad (4.6)$$

onde s é uma constante complexa e $\{Q\}$ é um vetor complexo de dimensão $2n$. Substituindo a equação (4.6) na (4.5), teremos :

$$s[\bar{M}]\{Q\}e^{st} + [\bar{G}]\{Q\}e^{st} = 0, \text{ ou}$$

$$s[\bar{M}]\{Q\} + [\bar{G}]\{Q\} = 0 \quad (4.7)$$

Os autovalores da equação (4.7) são constituídos de parte imaginária de n pares

de conjugados complexos, $s_i = \pm j\omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pois o sistema é conservativo, e pela falta do amortecimento.

Correspondentemente os autovetores também ocorrem em pares de complexos conjugados [5] :

$$i(Q) = i(Y) + j i(Z)$$

$$i(Q) = i(Y) - j i(Z)$$

onde $i(Y)$ é a parte real e $i(Z)$ a imaginária.

O problema de autovalores da equação (4.7) tem uma solução complexa.

Entretanto, podemos transformar este problema de autovalores em um que se escreve em termos de matrizes simétricas isoladas, o qual sabe-se que tem solução real [5]. Desde que não haja amortecimento, podemos introduzir $s = j\omega$ e $(Q) = (Y) + j(Z)$ na equação (4.7) e separar as partes imaginária e real. Teremos duas equações em termos de (Y) e (Z) :

$$s[\bar{M}](Q) + [\bar{G}](Q) = 0$$

$$s = j\omega, \quad (Q) = (Y) + j(Z), \quad \text{teremos}$$

$$j\omega[\bar{M}][(Y) + j(Z)] + [\bar{G}][(Y) + j(Z)] = 0$$

$$j\omega[\bar{M}](Y) - \omega[\bar{M}](Z) + [\bar{G}](Y) + j[\bar{G}](Z) = 0$$

$$\begin{cases} \omega[\bar{M}](Y) + [\bar{G}](Z) = 0 & (4.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -[\bar{G}](Y) + \omega[\bar{M}](Z) = 0 & (4.9) \end{cases}$$

Vamos obter (Y) da equação (4.8) e substituir na equação (4.9)

$$\begin{cases} \omega[\bar{M}](Y) = -[\bar{G}](Z) \\ [\bar{G}](Y) = \omega[\bar{M}](Z) \end{cases} \quad \text{ou} \quad (Y) = -\frac{1}{\omega} [\bar{M}]^{-1} [\bar{G}](Z)$$

Chegamos à conclusão que :

$$-[\bar{G}] [\bar{M}]^{-1} [\bar{G}](Z) = \omega^2 [\bar{M}](Z)$$

$$-[\bar{G}] = [\bar{G}]^t \quad :$$

então :

$$\omega^2 [\bar{M}](Z) = [\bar{G}]^t [\bar{M}]^{-1} [\bar{G}](Z) \quad (4.10)$$

vamos assumir

$$\omega^2 = \lambda \quad \text{e} \quad [\bar{G}]^t [\bar{M}] [\bar{G}] = [\bar{K}] \quad (4.11)$$

então :

$$\lambda [\bar{M}](Z) = [\bar{K}](Z) \quad (4.12)$$

e da mesma forma :

$$\lambda [\bar{M}](Y) = [\bar{K}](Y) \quad (4.13)$$

O problema dos autovalores da equação (4.7) é transformado em dois problemas simples de autovalores, equações (4.12) e (4.13), que possuem soluções idênticas. Estas mesmas equações resultam se for utilizado o autovalor e o autovetor complexo conjugado.

4.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SISTEMAS NÃO CONSERVATIVOS E SUAS SOLUÇÕES

As características dinâmicas de um sistema rotacional podem ser descritas pelos seus parâmetros modais : autovalores e modos naturais; estes podem ser calculados pelas equações do sistema não conservativo.

A equação do movimento livre é dada por :

$$[M](\ddot{x}(t)) + [D](\dot{x}(t)) + [K](x(t)) = (0) \quad (4.14)$$

onde $[M]$ e $[K]$ são as matrizes de inércia e de rigidez, respectivamente, ambas reais e positivas definidas.

$[D] = [C] + [G]$, $[C]$ é chamada matriz de amortecimento que é simétrica, $[G]$ é conhecida como matriz giroscópica que é antisimétrica.

A solução da equação (4.14) é da forma :

$$(x(t)) = (u) e^{\lambda t} \quad (4.15)$$

A substituição gera um problema quadrático de autovalores :

$$\left[\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K] \right] (u) = (0) \quad (4.16)$$

com $2n$ autovalores λ_i e os correspondentes modos normais $_i(u)$, se as matrizes forem de ordem n .

Os autovalores assim como os autovetores ocorrem geralmente em pares de complexos conjugados [6] ; então é bom definirmos :

$$\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i \quad \lambda_i^* = \alpha_i - j\omega_i \quad \text{autovalores (4.17)}$$

$$\lambda_i = -\omega_i(\xi_i - j) \quad \lambda_i^* = -\omega_i(\xi_i + j)$$

$${}_i(u) = {}_i(s) + j_i(\rho) \quad {}_i(u^*) = {}_i(s) - j_i(\rho) \quad \text{autovetor (4.18)}$$

com $i = 1, 2, \dots, n$

A parte da solução que é formada por pares de complexos conjugados, pode ser escrita como :

$${}_i(u(t)) = B_i e^{-\xi_i \omega_i t} \left[{}_i(s) \sin(\omega_i t + \gamma_i) + {}_i(\rho) \cos(\omega_i t + \gamma_i) \right] \quad (4.19)$$

sendo ω_i a frequência circular, α_i a constante de amortecimento, e ξ o fator de amortecimento.

A constante de amortecimento α_i (parte real de λ_i) determina se a solução ${}_i(u(t))$ decresce ($\alpha_i < 0$) ou cresce ($\alpha_i > 0$) no tempo. No caso do crescimento de ${}_i(u(t))$, o qual corresponde a $\alpha_i > 0$, observamos uma instabilidade no sistema rotacional.

A constante B_i e o ângulo de fase γ_i dependem das condições iniciais.

Normalmente todos os pares de complexos conjugados contribuem para a solução das vibrações naturais [7]. Para compreendermos os modos naturais vamos imaginar que, no problema homogêneo, as condições iniciais são escolhidas, de tal maneira que somente

$p(u(t))$ contribua para a solução. O sistema vibra especificamente com a frequência natural ω_p e seu correspondente modo natural.

Não é tão simples explicar o modo natural neste caso como foi para o caso de um sistema conservativo.

Vamos considerar a expressão entre parênteses da equação (4.19)

$$(E) = \sum_i (s) \text{sen}(\omega_i t + \gamma_i) + \sum_i (\rho) \text{cos}(\omega_i t + \gamma_i)$$

ou

$$(E) = \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ \tau_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \\ \tau_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n) \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

$$\text{com } \tau_k = \sqrt{\rho_k^2 + s_k^2}$$

Então esta expressão pode ser definida como modo natural, representando todavia uma curva de posições variáveis com o tempo.

4.3 - PROPRIEDADES DE ORTOGONALIDADE DE AUTOVETORES À DIREITA À ESQUERDA

A equação do movimento para um sistema com n graus de liberdade (4.14) pode ser convertida para $2n$ equações diferenciais de primeira ordem com a variável dependente (r) constituída por um vetor de estado, de dimensão $2n$:

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\dot{x}) \\ (x) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\ddot{x}) \\ (\dot{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (0) \\ (0) \end{Bmatrix}$$

$$[A](r) - [B](\dot{r}) = (0) \quad (4.21)$$

As matrizes $[A]$ e $[B]$ são reais .

O problema de autovalor correspondente é :

$$[[A] - \lambda_i [B]](r) = (0) \quad (4.22)$$

este tem os mesmos autovalores λ_i que a equação (4.16) e os autovetores à direita são :

$$r_i(r) = \begin{Bmatrix} \lambda_i r_i(u) \\ r_i(u) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

os autovetores $r_i(u)$ são obtidos da equação (4.16).

Pode-se mostrar, que o problema transposto de autovalores :

$$\left[[A]^t - \lambda_1 [B]^t \right]_i (1) = (0) \quad (4.24)$$

também possui os autovalores λ_1 , mas outros autovetores denominados de autovetores à esquerda, constituídos por :

$${}_i (1) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 \quad {}_i^{(\nu)} \\ {}_i^{(\nu)} \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

Se multiplicarmos as duas diferentes equações de autovalores, (4.22) e (4.24) por ${}_j (1)^t$ e ${}_i (r)^t$, transpormos a segunda e subtraímos da primeira, obteremos :

$${}_j (1)^t [A]_i (r) - \lambda_1 {}_j (1)^t [B]_i (r) = (0) \quad (4.26)$$

$${}_i (r)^t [A]_j^t (1) - \lambda_j {}_i (r)^t [B]_j^t (1) = (0) \quad (4.27)$$

$$(\lambda_j - \lambda_1) {}_j (1)^t [B]_i (r) = (0) \quad (4.28)$$

Destas equações determinamos as propriedades de bi-ortogonalidade :

$$j^{(1)t} [B]_i(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } j \neq i \\ d_j & \text{para } j=i \end{cases}$$

$$j^{(1)t} [A]_i(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } j \neq i \\ c_j & \text{para } j=i \end{cases}$$

e teremos $c_j = \lambda_j d_j$

Se representarmos os autovetores à esquerda e à direita, na matriz modal, por [L] e [R]

$$[R] = [r_1(r), r_2(r), \dots, r_{2n}(r)] \quad (4.31)$$

$$[L] = [l_1(1), l_2(1), \dots, l_{2n}(1)] \quad (4.32)$$

As propriedades de ortogonalidade podem ser escritas na seguinte forma :

$$[L]^t [A] [R] = \text{diag} \left[c_1 \right] ; \quad [L]^t [B] [R] = \text{diag} \left[d_1 \right]$$

podemos normalizar os autovetores de modo que :

$$[L]^t [B] [R] = I \quad (4.33)$$

e teremos :

$$[L]^t [A] [R] = \left[\lambda_1 \right] \quad (4.34)$$

4.4 - DESACOPLAMENTO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As equações do movimento para vibrações forçadas podem ser desenvolvidas em forma de primeira ordem como :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [-K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\dot{x}) \\ (x) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\ddot{x}) \\ (\dot{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (0) \\ -f(t) \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$[A](r) - [B](\dot{r}) = (\hat{f}(t))$$

Novamente expressamos as respostas desconhecidas do sistema por uma expansão em termos dos autovetores à esquerda para um sistema não conservativo :

$$(r(t)) = [R] (\eta(t)) \quad (4.36)$$

onde $(\eta(t))$ são as funções generalizadas do tempo.

Substituindo $(r(t))$ da equação (4.36) em (4.35), e multiplicando por $[L]^t$, teremos :

$$[L]^t [A] [R] (\eta(t)) - [L]^t [B] [R] (\dot{\eta}(t)) = [L]^t (\hat{f}(t)) \quad (4.37)$$

As matrizes $[L]^t [A] [R]$ e $[L]^t [B] [R]$ são diagonais.

Normalizando-as de modo a obtermos :

$$\begin{aligned} [L]^t [A] [R] &= \text{diag} \left[\lambda_1 \right] = \Lambda \\ [L]^t [B] [R] &= \text{diag} \, 1 = I \end{aligned} \quad (4.38)$$

O sistema de equações ordinárias (4.22) é reduzido ao conjunto de equações complexas independentes de primeira ordem, para as coordenadas generalizadas :

$$\lambda_i \dot{\eta}_i(t) - \dot{\eta}_i(t) = {}_i [1]^t (f(t)) = -{}_i (v)^t (f(t)) \quad (4.39)$$

As forças generalizadas são representadas pelos autovetores à esquerda ${}_i (1)$ ou pelos correspondentes autovetores ${}_i (v)$ e o vetor de força $(f(t))$.

As equações desacopladas podem ser facilmente solucionadas para os casos atuais de carregamento (excitação harmônica, impulso, etc.).

A solução geral para as coordenadas generalizadas é dada pela combinação da solução complementar (equação homogênea) e a solução particular.

4.5 - RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA SISTEMAS NÃO CONSERVATIVOS

Vamos iniciar, novamente, pela equação do movimento para um sistema não conservativo

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [D]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.40)$$

Foi mostrado, nos itens anteriores, que podemos converter esta equação em :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (0) \\ -f(t) \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$[A](r) - [B](\dot{r}) = (-\hat{f}(t))$$

e que a resposta do sistema pode ser expressa por :

$$\{r(t)\} = [R]\{\eta(t)\}$$

com as coordenadas generalizadas $\{\eta(t)\}$ e a matriz modal $[R]$.

Transferindo a equação (4.41) para o domínio da frequência e usando a transformação linear em frequência, teremos :

$$[A](G) - j\omega[B](G) = (-F(\omega)) \quad (4.42)$$

ou

$$(N) = \left[\frac{1}{\lambda_i - j\omega} \right] [L]^t(-F) \quad (4.50)$$

Multiplicando a equação (4.50) por [R] :

$$[R](N) = [R] \left[\Delta\omega_i \right] [L]^t(-F) \quad (4.51)$$

com

$$\Delta\omega_i = \frac{1}{\lambda_i - j\omega}$$

Usando novamente a equação (4.43) podemos escrever :

$$(G) = [R] \left[\Delta\omega_i \right] [L]^t(-F) \quad (4.52)$$

Agora é fácil mostrar a partir da equação (4.52) que a função de resposta em frequência, relacionando a excitação aplicada ao ponto k e o deslocamento medido no ponto l , é dada por :

$$H_{lk}(\omega) = \frac{x_l}{F_k} = \sum_{i=1}^{2n} - \frac{i^u_l i^v_k}{\lambda_i - j\omega} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{i^u_l i^v_k}{j\omega - \lambda_i} \quad (4.53)$$

A expressão (4.53), que é uma função complexa de ω , é constituída pelos autovalores λ_i e por elementos dos autovetores à esquerda (i^v_k) e à direita (i^u_l) .

Para um sistema rotacional com n graus de liberdade, existem $n \times n$ funções de resposta de frequência, montada na matriz $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1k} & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2k} & H_{2n} \\ H_{l1} & H_{l2} & \dots & H_{lk} & H_{ln} \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nk} & H_{nn} \end{bmatrix}$$

É importante notar que uma única função de transferência, relacionando um ponto de excitação e um ponto de resposta, é suficiente para identificar os autovalores. A função de transferência $H_{lk}(\omega)$ tende para o máximo quando ω tende para a parte imaginária de λ_i .

Para identificar todos os autovetores à direita $(u)_i$ $i=1,2,3,\dots,n$, devemos identificar uma coluna da matriz de resposta em frequência $H(\omega)$. Para tanto, aplicamos o vetor de força $(F(\omega))$ de modo que :

$$(F(\omega)) = (0,0,F_k,0,0)^t$$

e medimos a resposta em frequência por $(X(\omega)) = (x_1,x_2,\dots,x_n)^t$.

Da mesma forma, para identificar todos os autovetores à esquerda, devemos simplesmente identificar uma linha da matriz de resposta em frequência $H(\omega)$, excitando o sistema em todos os pontos por $(F(\omega)) = (F_1,F_2,\dots,F_n)^t$, e medindo a resposta de frequência somente no ponto k , $(X(\omega)) = (0,0,x_k,\dots,0)^t$.

5 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMA NÃO-SIMÉTRICO

5.1 - EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA PARA ROTOR NÃO SIMÉTRICO

Um sistema típico de rotor flexível analisado tem um disco simples em balanço com um elemento de mola. O sistema é mostrado na fig. 5.1

Fig. 5.1 O Rotor não-simétrico em balanço

O vetor de deslocamento (q) é definido por :

$$(q) = \begin{Bmatrix} Z \\ \phi_y \\ Y \\ \phi_z \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

A equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico do sistema, que é considerada sem amortecimento, porém onde se inclui o efeito giroscópico, é :

$$[M](\ddot{q}) + [G](\dot{q}) + [K](q) = F(t) \quad (5.2)$$

onde $[M]$ e $[K]$ são matrizes de inércia e rigidez, e são reais e simétricas. A matriz $[G]$ é a matriz giroscópica que é antisimétrica. As matrizes podem ser deduzidas como:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_a \end{bmatrix} \quad e \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11}^z & K_{12}^z & 0 & 0 \\ K_{12}^z & K_{22}^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^y & -K_{12}^y \\ 0 & 0 & -K_{12}^y & K_{22}^y \end{bmatrix} \quad e$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega I_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega I_p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde m e I_a são a massa e a inércia do disco respectivamente.

Os valores K_{11} , K_{12} , K_{22} dependem de características do eixo

e da constante de rigidez da mola K . Os mancais neste caso tem simetria radial o que se justifica no estudo de um rotor vertical.

Usando o método dos modos complexos (veja 4.1) podemos reduzir a equação (5.2), tomada homogênea, em :

$$[M]\{\dot{p}\} + [C]\{p\} = (0) \quad (5.3)$$

onde

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^z & K_{12}^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12}^z & K_{22}^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^y & -K_{12}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{12}^y & K_{22}^y \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^z & K_{12}^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega I_p & K_{12}^z & K_{22}^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^y & -K_{12}^y \\ 0 & \Omega I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{12}^y & K_{22}^y \\ -K_{11}^z & -K_{12}^z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{12}^z & -K_{22}^z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{11}^y & K_{12}^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{12}^y & -K_{22}^y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Vamos definir as matrizes [B], [C], [D] e [J] de modo que tenhamos :

$$[B] = \begin{bmatrix} m \\ I_a \end{bmatrix} ; \quad [C] = \begin{bmatrix} K_{11}^z & K_{12}^z \\ K_{12}^z & K_{22}^z \end{bmatrix} ;$$

$$[D] = \begin{bmatrix} K_{11}^y & -K_{12}^y \\ -K_{12}^y & K_{22}^y \end{bmatrix} ; \quad [J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega I_p \end{bmatrix}$$

Substituindo estas matrizes nas equações (5.4) e (5.5) teremos :

$$[M] = \begin{bmatrix} [B] & & & \\ & [B] & & \\ & & [C] & \\ & & & [D] \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[\bar{G}] = \begin{bmatrix} [O] & -[J] & [C] & [O] \\ [J] & [O] & [O] & [D] \\ -[C] & [O] & [O] & [O] \\ [O] & -[D] & [O] & [O] \end{bmatrix}$$

e podemos calcular $[M]^{-1}$:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} [B]^{-1} & & & \\ & [B]^{-1} & & \\ & & [C]^{-1} & \\ & & & [D]^{-1} \end{bmatrix}$$

e também $[K] = [\bar{G}]^t [M]^{-1} [\bar{G}]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [J][B]^{-1}[J]+[C] & [O] & [O] & [J][B]^{-1}[D] \\ [O] & [J][B]^{-1}[J]+[D] & -[J][B]^{-1}[C] & [O] \\ [O] & -[C][B]^{-1}[J] & [C][B]^{-1}[C] & [O] \\ [J][B]^{-1}[J] & [O] & [O] & [D][B]^{-1}[D] \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Considerando que as matrizes $[C]$ e $[D]$ são simétricas, temos que $[D]^t = [D]$ e $[C]^t = [C]$

A equação (5.3) fica :

$$\lambda [M](p) + [K](p) = (0) \quad (5.9)$$

ou

$$\lambda \begin{bmatrix} [B] & & & \\ & [B] & & \\ & & [C] & \\ & & & [D] \end{bmatrix} (p) +$$

$$+ \begin{bmatrix} [J][B]^{-1}[J]+[C] & [O] & [O] & [J][B]^{-1}[D] \\ [O] & [J][B]^{-1}[J]+[D] & -[J][B]^{-1}[C] & [O] \\ [O] & -[C][B]^{-1}[J] & [C][B]^{-1}[C] & [O] \\ [J][B]^{-1}[J] & [O] & [O] & [D][B]^{-1}[D] \end{bmatrix} (p) = (0)$$

Substituindo p teremos :

$$(p) = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi}_z \\ Z \\ \phi_y \\ Y \\ \phi_z \end{Bmatrix}$$

Podemos escrever a equação (5.9) em duas partes separadas :

$$\lambda \begin{bmatrix} [B] \\ [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{\phi}_z \\ Y \\ \phi_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [J][B]^{-1}[J]+[C] & [J][B]^{-1}[D] \\ [D][B]^{-1}[J] & [D][B]^{-1}[D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{\phi}_y \\ Y \\ \phi_z \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} [B] \\ [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{\phi}_y \\ Z \\ \phi_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [J][B]^{-1}[J] + [D] & -[J][B]^{-1}[C] \\ -[C][B]^{-1}[J] & [C][B]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{\phi}_z \\ Z \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Podemos reescrever a equação (5.10) como segue :

$$\begin{bmatrix} \lambda[B] + [J][B]^{-1}[J] + [C] & [J][B]^{-1}[D] \\ [D][B]^{-1}[J] & \lambda[D] + [D][B]^{-1}[D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\phi}_y \\ Y \\ \phi_z \end{Bmatrix} = (0) \quad (5.12)$$

A equação (5.12) pode ser solucionada para obter os autovalores do disco em balanço.

Para obter a equação característica do sistema nós temos :

$$[J][B]^{-1}[J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Omega^2 I_p^2}{I_a} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$[D][B]^{-1}[D] = \begin{bmatrix} \frac{(K_{11}^y)^2}{m} + \frac{(K_{12}^y)^2}{I} & -\frac{K_{12}^y K_{11}^y}{m} - \frac{K_{12}^y K_{22}^y}{I} \\ -\frac{K_{12}^y K_{11}^y}{m} - \frac{K_{22}^y K_{12}^y}{I} & \frac{(K_{12}^y)^2}{m} + \frac{(K_{22}^y)^2}{I} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$[J][B]^{-1}[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Omega \frac{I_p}{I_a} K_{12}^y & \Omega \frac{I_p}{I_a} K_{22}^y \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$[D][B]^{-1}[J] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \frac{I_p}{I_a} K_{12}^y \\ 0 & \Omega \frac{I_p}{I_a} K_{22}^y \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Substituindo as equações (5.13), (5.14), (5.15) e (5.16) em (5.12) teremos :

$$\begin{bmatrix} -\lambda m + K_{11}^z & K_{12}^z & 0 & 0 \\ K_{12}^z & -\lambda I_a + K_{22}^z + \Omega^2 \frac{I_p^2}{I_a} & -K_{12}^y \frac{\Omega I_p}{I_a} & K_{22}^y \frac{\Omega I_p}{I_a} \\ 0 & -K_{12}^y \frac{\Omega I_p}{I_a} & K_{11}^y \left[-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} \right] + \frac{(K_{12}^y)^2}{m} & -K_{12}^y \left[-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} + \frac{K_{22}^y}{I} \right] \\ 0 & K_{22}^y \frac{\Omega I_p}{I_a} & -K_{12}^y \left[-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} + \frac{K_{22}^y}{I} \right] & K_{22}^y \left[-\lambda + \frac{K_{22}^y}{I} \right] + \frac{(K_{12}^y)^2}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\phi}_y \\ \gamma \\ \phi_z \end{Bmatrix} = (0) \quad (5.17)$$

A equação polinomial característica para o problema dos

autovalores da equação (5.17) é :

$$\begin{aligned}
 (mI_a) \left(K_{11}^y K_{22}^y - (K_{12}^y)^2 \right) & \left\{ \left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}^y}{I_a} \right) - \frac{(K_{12}^y)^2}{m I_a} \right] \right. \\
 & \cdot \left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}^z}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}^z}{I_a} \right) - \frac{(K_{12}^z)^2}{m I_a} \right] - \\
 & \left. - \lambda \left(-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{11}^z}{m} \right) \Omega^2 \frac{I_p^2}{I_a^2} \right\} = 0 \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

$$K_{11}^y K_{22}^y - (K_{12}^y)^2 \neq 0 \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{11}^y & -K_{12}^y \\ -K_{12}^y & K_{22}^y \end{bmatrix}$$

A matriz [D] é positiva e definida, então teremos :

$$\begin{aligned}
 \left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}^y}{I_a} \right) - \frac{(K_{12}^y)^2}{m I_a} \right] & \left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}^z}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}^z}{I_a} \right) - \frac{(K_{12}^z)^2}{m I_a} \right] - \\
 - \lambda \left(-\lambda + \frac{K_{11}^y}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{11}^z}{m} \right) \Omega^2 \frac{I_p^2}{I_a^2} & = 0 \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

Se expandirmos a equação (5.11), nós teremos sempre a mesma equação polinomial característica. Isto mostra que os autovalores da equação (5.10) são os mesmos que os da equação (5.11) e a diferença é somente nos autovetores.

5.2 - PRECESSÃO RETRÓGADA E SEUS EFEITOS EM ROTORES SIMÉTRICOS E NÃO SIMÉTRICOS.

Se considerarmos que o rotor é simétrico, ou seja, possui a mesma rigidez nos planos XZ e YZ, ou em outras palavras:

$$K_{11}^y = K_{11}^z = K_{11} \quad , \quad K_{22}^y = K_{22}^z = K_{22} \quad , \quad K_{12}^y = K_{12}^z = K_{12}$$

podemos reescrever a equação (5.19) da seguinte maneira:

$$\left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] \left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] - \lambda \left(-\lambda + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{11}}{m} \right) \Omega^2 \frac{I_p^2}{I_a^2} = 0 \quad (5.20)$$

e teremos a equação (5.20) como:

$$\left[\left(-\lambda + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\lambda + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right]^2 - \lambda \left(-\lambda + \frac{K_{11}}{m} \right)^2 \Omega^2 \frac{I_p^2}{I_a^2} = 0 \quad (5.21)$$

sendo $\lambda = \omega^2$, então:

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^2 + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right]^2 - \omega^2 \left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right)^2 \Omega^2 \frac{I_p^2}{I_a^2} = 0 \quad (5.22)$$

Podemos separar a equação (5.22) em duas outras :

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^2 + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] + \omega \Omega \left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \frac{I_p}{I_a} = 0 \quad (5.23)$$

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^2 + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] - \omega \Omega \left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \frac{I_p}{I_a} = 0 \quad (5.24)$$

Vamos reescrever a equação (5.23) de outra forma :

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I_a} \right) + \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m I_a} - \omega^3 \Omega \frac{I_p}{I_a} + \frac{K_{11} I_p}{m I_a} \omega \Omega = 0$$

ou :

$$\omega^4 - \frac{I_p}{I_a} \Omega \omega^3 - \left(\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I_a} \right) \omega^2 + \frac{K_{11} I_p}{m I_a} \omega \Omega + \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m I_a} = 0 \quad (5.25)$$

A equação (5.25) é a mesma discutida por Gasch [8] , para rotores simétricos.

Para poder explicar melhor o precessão direta e o precessão retrograda , vamos substituir ω na equação 5.24 por ω^* . Podemos escrever a equação 5.23 e 5.24 da seguinte maneira:

$$\left[\left(-\omega^{*2} + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^{*2} + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] + \omega \Omega \left(-\omega^{*2} + \frac{K_{11}}{m} \right) \frac{I_p}{I_a} = 0 \quad (5.26)$$

$$\left[\left(-\omega^{*2} + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^{*2} + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] - \omega^* \Omega \left(-\omega^{*2} + \frac{K_{11}}{m} \right) \frac{I_p}{I_a} = 0 \quad (5.27)$$

Se considerarmos as equações (5.26) e (5.27) para ω constante e para uma velocidade de rotação $\Omega = \text{const}$, e se introduzirmos

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{\omega} \quad , \quad \varepsilon^* = \frac{\Omega}{\omega^*}$$

podemos transformar as duas equações em :

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^2 + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] + \omega(\varepsilon\omega) \left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \frac{I_p}{I_a} = 0$$

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) \left(-\omega^2 + \frac{K_{22}}{I_a} \right) - \frac{K_{12}^2}{m I_a} \right] + \varepsilon \frac{I_p}{I_a} \omega^2 \left(-\omega^2 + \frac{K_{11}}{m} \right) = 0$$

$$\omega^4 \left(1 - \frac{\varepsilon I_p}{I_a} \right) - \omega^2 \left[\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I_a} - \frac{K_{11} \varepsilon I_p}{m I_a} \right] + \frac{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}{m I_a} = 0 \quad (5.28)$$

Podemos fazer a mesma coisa com a equação (5.27) e teremos :

$$\omega^{*4} \left(1 + \frac{\varepsilon^* I_p}{I_a} \right) - \omega^{*2} \left[\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I_a} + \frac{K_{11} \varepsilon^* I_p}{m I_a} \right] + \frac{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}{m I_a} = 0 \quad (5.29)$$

Vamos definir os seguintes parâmetros:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \frac{I_a \omega - \Omega I_p}{I_a \omega} & \text{Fator de inércia reduzida} \quad (5.30) \\ I = \alpha I_a & \text{Inércia reduzida} \quad (5.31) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta = \frac{I_a \omega^* + \Omega I_p}{I_a \omega^*} & \text{Fator de inércia elevada} \quad (5.32) \\ I^* = \beta I_a & \text{Inércia elevada} \quad (5.33) \end{array} \right.$$

Depois de introduzir α na equação (5.28) e β na equação (5.29) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^4 - \omega^2 \left[\frac{K_{11}}{m} \alpha + \frac{K_{22}}{I_a} \right] + \frac{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}{m I_a} = 0 \end{array} \right. \quad (5.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \omega^{*4} - \omega^{*2} \left[\frac{K_{11}}{m} \beta + \frac{K_{22}}{I_a} \right] + \frac{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}{m I_a} = 0 \end{array} \right. \quad (5.35)$$

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I} \right] + \frac{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}{m I} = 0 \quad (5.36)$$

$$\omega^{*4} - \omega^{*2} \left[\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I^*} \right] + \frac{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}{m I^*} = 0 \quad (5.37)$$

É óbvia a similaridade destas duas equações com a equação (5.25) que é a mesma discutida por Gasch [8], quando a velocidade de rotação é $\Omega=0$.

Para verificar as possíveis soluções positivas destas duas equações, vamos primeiramente considerar a equação (5.36).

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I} \right] + \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m I} = 0 \quad (5.36)$$

Se $\frac{\Omega}{\omega} < \frac{I_a}{I_p}$ então $1 - \frac{\Omega I_p}{\omega I_a} > 0$ ou $\alpha > 0$

portanto a equação (5.34) tem as soluções $\pm \omega_1$, e $\pm \omega_2$, das quais somente interessam $+\omega_1$ e $+\omega_2$.

Se $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{I_a}{I_p}$ então $\alpha = 0$ e considerando a

equação (5.34) nós teremos:

$$\omega^2 = \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m K_{22}} \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \pm \left[\frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m K_{22}} \right]^{1/2}$$

dos quais interessa $\omega_1 > 0$.

Se $\frac{\Omega}{\omega} > \frac{I_a}{I_p}$ então $\alpha < 0$ e $\alpha I_a < 0$ temos:

$$\frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m \alpha I_a} < 0 \quad \text{e existe uma solução positiva para } \omega^2 \quad \text{visto que}$$

$$\omega = \pm \omega_1.$$

Estas tres situações são demonstradas na figura 5.2 .

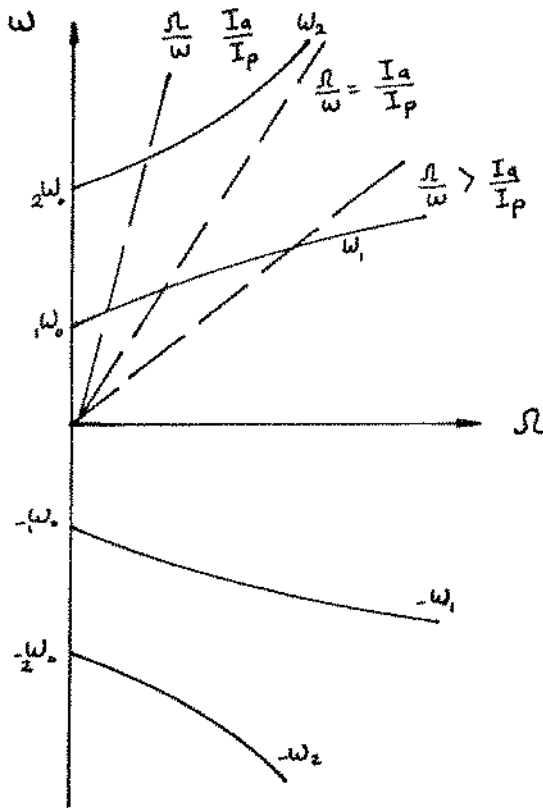


Fig. 5.2 Frequências de "Whirl"

agora podemos considerar a equação (5.37):

$$\omega^{*4} - \omega^{*2} \left[\frac{K_{11}}{m} + \frac{K_{22}}{I^*} \right] + \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}{m I^*} = 0 \quad (5.37)$$

para $\Omega \neq 0$, sempre $\beta > 0$ ou $I^* > 0$ temos então quatro soluções para ω^* ($\pm\omega_1^*$, $\pm\omega_2^*$) , das quais interessam $+\omega_1^*$ e $+\omega_2^*$.

Quando $\beta \rightarrow \infty$ temos:

$$\omega^{*4} - \omega^{*2} \left[\frac{K_{11}}{m} \right] = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_1^{*2} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_1^* = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2^* = \pm \left[\frac{K_{11}}{m} \right]^{1/2}$$

A figura 5.3 demonstra estas condições:

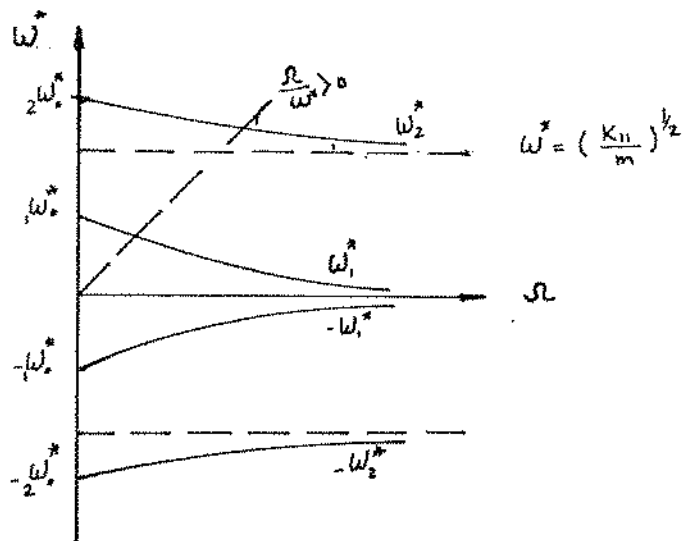


Fig. 5.3 Frequências de "Whirl"

Podemos observar que as duas equações (5.26) e (5.27) tem quatro soluções positivas com sentido físico em vibração. Portanto dependendo do valor Ω poderão existir até quatro velocidades críticas para um disco simétrico em balanço.

6 - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS DO SISTEMA

O estudo experimental da vibração estrutural sempre forneceu a maior contribuição aos nossos esforços para entender e controlar os muitos fenômenos de vibração encontrados na prática. As observações experimentais podem ser divididas em três objetivos principais :

- 1 - Determinar a natureza e ampliar o nível da resposta da vibração,
- 2 - Verificar modelos teóricos e prognósticos,
- 3 - Detectar possíveis combinações dos modos de vibrações que são prejudiciais ao sistema.

Hoje, problemas de vibração estrutural apresentam um risco maior e esboçam limitações para uma ampla variedade de produtos da engenharia. Para começar, existem muitas variedades de estruturas, palhetas de turbina, linhas de transmissão, pontes suspensas ou turbo geradores, para os quais a integridade estrutural é a preocupação mais importante e para os quais um preciso conhecimento da dinâmica estrutural é essencial.

Existe ainda um extenso conjunto de componentes para os quais a vibração está diretamente ligada ao desempenho do sistema, ou em virtude de causar um mau funcionamento temporário durante um movimento vibratório excessivo, ou por criar distúrbios no sistema que podem causar sua destruição final.

Os três objetivos indicados acima representam dois tipos de testes correspondentes : o primeiro é aquele onde as forças de

vibração ou mais usualmente respostas do movimento são medidas durante a operação da máquina ou estrutura em estudo. Por outro lado o segundo tipo de teste aparece para o segundo e o terceiro objetivo onde o componente da estrutura é vibrado com uma excitação conhecida, frequentemente fora do seu meio normal de serviço.

Este segundo tipo de teste é geralmente feito sob condições muito mais rigorosas e controladas do que o primeiro e conseqüentemente fornece dados mais exatos, informações detalhadas e também facilita o próximo passo de executar o primeiro tipo de testes.

Este tipo de teste inclui aquisição de dados, e suas subseqüentes análises é chamada neste trabalho de "Identificação dos Parâmetros Modais".

Aqui, como a bancada de ensaios com o rotor vertical é praticamente projetada, temos como simular condições operacionais, combinando o primeiro e o segundo tipos de testes acima mencionados.

O nome "Identificação dos Parâmetros Modais" é usado neste trabalho para englobar todo o processo envolvido no teste do rotor vertical, com o objetivo de obter uma descrição matemática dos seus autovalores e autovetores, enquanto ele estiver em repouso ou em movimento a uma velocidade específica.

Embora esta designação seja relativamente nova, os princípios da identificação dos parâmetros modais foram estabelecidos há

muitos anos atrás. Estes princípios passaram por várias fases com tais como : "Teste de Ressonância", "Método da Impedância Mecânica" ou "Teste Modal".

Um dos mais importantes marcos no desenvolvimento do assunto foi dado em um trabalho de Kennedy e Pancu [9] ano 1947. Em 1960 alguns outros trabalhos [10,11] descreveram o enunciado da teoria do teste de ressonância. A atual técnica de identificação dos parâmetros modais foi aperfeiçoada a partir de 1970 com o desenvolvimento dos transdutores e da aquisição eletrônica de dados e sua análise digital.

Existe um grande número de trabalhos que relatam este período, e atualmente poderiam ser citadas várias centenas de referências bibliográficas [12].

6.1 - APLICAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

Antes de entrarmos no assunto dos diferentes métodos de identificação dos parâmetros modais, é importante que nós levantemos a questão da razão de sua utilização.

Existem muitas aplicações para as quais os resultados de um teste modal podem ser utilizados e várias das técnicas são de fato muito poderosas. Entretanto, é importante lembrar que nenhum teste ou procedimento de análise único consegue ser o melhor para todos os casos. Portanto, antes que qualquer teste seja realizado, é muito importante que se defina um objetivo claro, para que os métodos ou as técnicas mais apropriadas possam ser usadas em cada caso.

Este procedimento é melhor conduzido formulando as seguintes questões : Qual é o resultado desejado a partir do estudo onde está se realizando o teste modal ? E de que forma os resultados devem ser apresentados para serem de máximo proveito ?

Aqui, explicaremos as aplicações diretamente relacionadas com nosso trabalho e aquelas que respondem às perguntas acima.

Em todos os casos, e particularmente neste caso, é certo dizer que o teste de identificação dos parâmetros modais é realizado para se obter um modelo matemático do rotor vertical.

Uma técnica geralmente usada é a medida dos modos de vibração a fim de compara-los com aqueles obtidos por um programa de elementos finitos ou os obtidos por um modelo teórico. Esta

ferramenta é frequentemente justificada pela necessidade de validar o modelo matemático antes de usá-lo para prever a resposta às excitações mais complexas, ou em outros estágios complementares da análise.

É de prática geral que a corroboração dos principais modos teóricos de vibração por testes aumenta a confiabilidade no modelo que será adotado para uso posterior. Para esta aplicação específica, tudo o que nos exigimos do teste é :

- 1 - Estimativas precisas dos autovalores,
- 2 - Descrição da forma dos modos usando apenas o detalhamento e precisão necessários que permitam sua identificação e comparação com aqueles obtidos a partir do modelo teórico.

Neste ponto, enquanto uma estrutura estiver envolvida no teste não são essenciais os dados exatos do perfil modal. Mas alguns autores [13] extrapolando o método, vem usando o mesmo conceito de identificação dos parâmetros modais estruturais para máquinas rotativas. E outros ainda [14] generalizando este aspecto, ignoram a importância dos dados exatos sobre o perfil modal da estrutura em questão. Algumas perguntas relativas à existência do perfil modal do sistema rotatório com uma certa velocidade de rotação, ainda estão sem resposta. Entretanto no caso de sistemas rotatórios, pode ser necessário a identificação exata dos autovetores, para que seja entendida a natureza do mecanismo da vibração.

Geralmente não é possível prever analiticamente o amortecimento em cada um dos modos de vibração, a partir do modelo teórico, portanto não existe nada com o que se possa comparar as medidas do amortecimento modal obtidas nos testes. Em alguns casos em máquinas rotativas, este amortecimento modal e sua possível dependência com a velocidade rotacional servem para se determinar o nível de estabilidade do rotor. A identificação do amortecimento modal também pode dar informações sobre o quão intensamente o sistema é amortecido.

Uma outra aplicação deste método de identificação dos parâmetros modais é a geração de um modelo que pode ser usado para prever os efeitos de modificações estruturais do sistema original. Isto requer frequências e modos os mais exatos possíveis e é o caso do rotor vertical.

6.2 - EXIGÊNCIAS PARA O PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

A principal exigência no procedimento de identificação é uma total integração em três áreas:

- 1 - O embasamento teórico da vibração,
- 2 - Medidas exatas de vibração,
- 3 - Análise realística e detalhada dos dados obtidos.

No passado havia uma tendência em se considerar estas três áreas como especializações diferentes, com pessoas especializadas em cada uma delas. Entretanto, este assunto no estágio atual exige um alto nível de informação e competência em todas as três áreas e não se pode atingir todo o potencial do método sem uma mistura criteriosa e adequada dos componentes necessários.

Por exemplo, quando tomamos medidas de força de excitação e dos níveis da resposta, pode ser essencial a informação completa de como os dados medidos são processados, se se pretender uma decisão correta em relação à qualidade e adequabilidade dos dados. Repetindo, um entendimento completo das várias formas de curva e seus limites na representação gráfica das funções de resposta em frequência para um sistema complexo podem evitar os esforços inúteis de se analisar medidas incorretas. Nestas representações gráficas existem muitas propriedades que são facilmente visíveis à pessoas conhecedoras das bases teóricas que regem estas

características.

Ao longo deste deste trabalho temos repetido e enfatizado a necessidade desta integração entre o desenvolvimento teórico e as medições experimentais. Na verdade, o caminho escolhido para desenvolver e explicar os detalhes do procedimento de identificação nos levaram inicialmente a realizar uma revisão teórica dos fundamentos necessários (capítulos anteriores). Eles também são pré-requisitos necessários a estudos subsequentes de técnicas de medição, processamento de sinais e análise de dados, os quais procuraremos explicar um pouco mais neste trabalho.

Com a apresentação da base teórica, nós podemos concentrar nossa atenção para o lado prático : para a excitação da estrutura de teste e para a medição dos níveis de entrada e da resposta durante o teste com condições controladas para medição da função transferência.

Também neste caso existem muitos métodos de ensaio, como aqueles que usam excitação harmônica, aleatória ou transiente, que tentaremos resumir a seguir.

6.3 - RESUMO DOS MÉTODOS DE MEDIÇÃO

Como sabemos, nosso objetivo na medição do sistema em questão é identificar as características de sua resposta em frequência. Desta forma, as técnicas de medição principais a serem escolhidas ou desenvolvidas são aquelas que nos permitirão fazer medições diretas das funções de transferência do sistema em teste.

No processo de identificação de funções de transferência específicas relacionadas às posições específicas no rotor, nós precisamos ter a resposta em frequência dos sinais de entrada e saída a fim de identificar as funções de transferência correspondentes.

Existem casos em que o sistema é excitado em várias estações enquanto que a resposta é medida apenas em uma delas.

Neste trabalho, nós nos concentraremos apenas no sistema básico de medição usado para um único ponto isolado de excitação e tipo de teste conveniente para a medição da função de transferência correspondente.

Essencialmente, existem três aspectos nos processos de medição que exigem particular atenção a fim de se obter os dados com a alta qualidade com que são exigidos para o próximo estágio (na análise de dados).

Estes são :

- 1 - Os aspectos mecânicos ligados ao suporte e à excitação (correta) do sistema,
- 2 - A transdução correta das quantidades a serem medidas,
- 3 - O processamento de sinal que é apropriado para o tipo de teste usado.

Na primeira categoria, nós teremos que responder perguntas, tais como: a parte testada deveria ser suspensa ou apoiada ? e como deve ser acionada ? Em geral, uma das 3 opções é escolhida para apoio :

- A) Livre, Sem restrição - o que geralmente significa suspenso por molas muito elásticas,
- B) Fixo - o que requer que certos pontos sejam rigidamente engastados,
- C) "In Situ" - onde a parte testada é conectada a uma estrutura ou outros componente, apresentando uma ligação não rígida.

A escolha será geralmente feita considerando vários fatores. Entre estes pode estar o desejo de relacionar os resultados dos testes com a teoria e, neste caso, deve-se lembrar que condições de contorno ou fronteiras livres são muito mais fáceis de serem simuladas em ensaios do que as fixas ou engastadas.

No caso do rotor vertical, os parâmetros modais foram identificados em três estágios diferentes. No primeiro e no segundo estágio foram usadas fronteiras livres para o processo de medição.

A figura 6.1 mostra como estas fronteiras "livres" foram simuladas, suspendendo o rotor por uma barra flexível de aço.

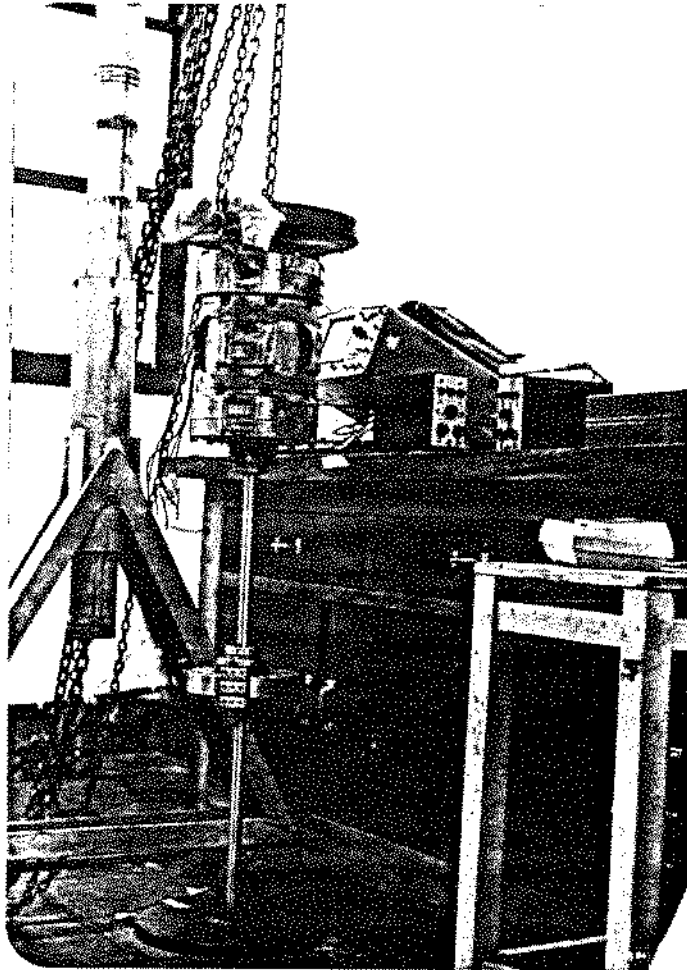


Fig. 6.1 O rotor vertical, no segundo estágio com condição de contorno livre

As fronteiras fixas foram consideradas no caso do rotor montado na bancada de teste, seja com rotor parado ou em rotação numa certa velocidade.

Outra questão que exige cuidado é relativa ao mecanismo de excitação. Vários dispositivos estão disponíveis para excitar uma estrutura e muitos deles tem utilização mais difundida. Eles podem essencialmente ser divididos em duas categorias: existindo contato e sem contato [12].

A primeira delas envolve a conexão de um excitador que permanece ligado à estrutura durante todo o teste. A segunda inclui dispositivos que não tem contato direto com a estrutura durante o ensaio (por exemplo um eletroímã) e por outros que permanecem em contato apenas pelo curto período de tempo, enquanto a excitação está sendo aplicada (tal como um golpe de martelo).

A escolha da fonte do sinal de excitação também dependerá do tipo de teste a ser feito e pode ser qualquer uma das indicadas a seguir :

senoidal, obtido de um oscilador,
aleatório, obtido de um gerador de ruído,
transitório, obtido por um dispositivo de geração de pulsos
ou pela aplicação de um impacto com um martelo,
periódico, obtido por um gerador especial de sinal capaz de
produzir um conteúdo de frequências específico.

Neste trabalho, nós temos por escolha usar um oscilador eletromagnético criando um sinal senoidal, aleatório ou periódico ou então aplicando um impulso com um golpe de martelo, simulando um sinal transitório.

Em ambas as abordagens existem vantagens e desvantagens, e é muito importante escolher a melhor solução para cada caso. Como a discussão desses métodos é muito longa, nós nos limitaremos a explicar algumas razões simples que influenciam nossa escolha.

Primeiramente, vamos observar a figura 6.2 que ilustra duas funções de resposta em frequência do rotor medidas por:

- A) Aplicação de um impulso,
- B) Excitando por um excitador eletromagnético.

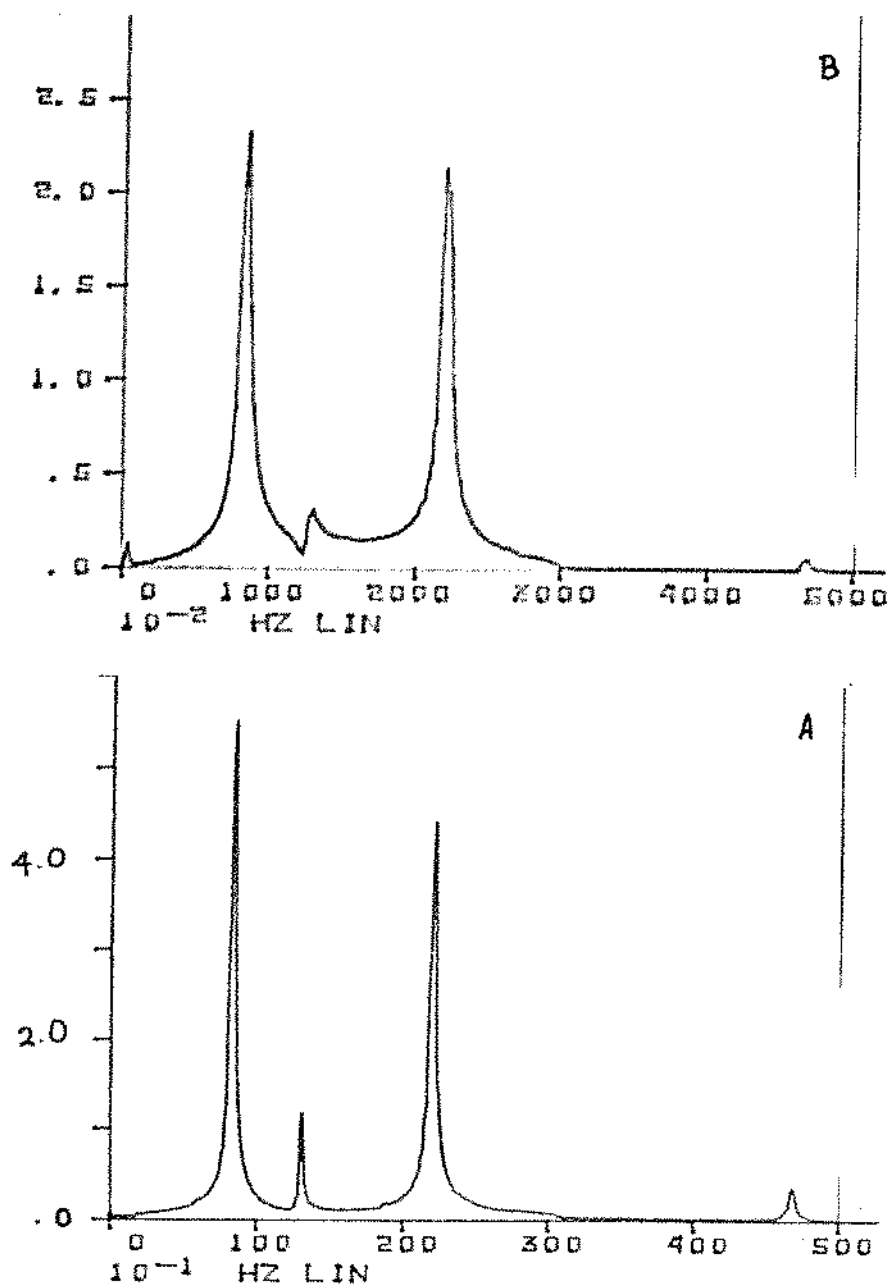


Fig. 6.2 Comparação entre as fontes de excitação
A) por impulso , B) por excitador
eletromagnético.

Não existe nenhuma diferença básica entre as duas fontes de excitação mencionadas. Portanto, em termos de qualidade do sinal e

do nível de energia de excitação estes dois métodos apresentam o mesmo resultado.

Enquanto estivermos trabalhando com medidas sobre o rotor sem girar ou em pontos da estrutura com fronteiras livres, a ligação do excitador com o rotor não cria dificuldades, porém deve se tomar cuidado para que:

- A) a conexão não interfira no comportamento dinâmico do rotor,
- B) o nível de excitação seja mantido em um valor que não afrouxe a base da bancada de teste.
- C) o excitador tenha um porte tal que possa ser considerado como fonte de excitação externa, isto é, não faz parte do sistema dinâmico.

Porém quando o rotor está em movimento, nós teremos dificuldades para definir uma união com a estrutura de modo a obter uma excitação adequada, por exemplo nos pontos A e B do rotor, como mostrado na figura 6.3.

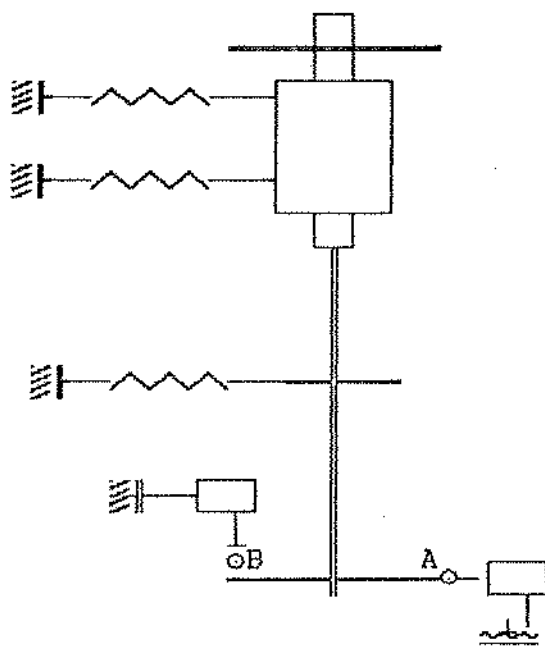


Fig. 6.3 A localização de A e B no rotor, representando as estações de excitação

Lembramos que o ponto correspondente ao ponto A no rotor é móvel, enquanto o ponto A no excitador não tem movimento rotacional. Apesar de não ser impossível construir ligações adequadas e que garantam um contato constante, podemos criar uma rigidez nesta união e, com isto uma possível interferência na dinâmica da união com o rotor.

Outras posições de excitação, por exemplo no eixo, poderiam ser utilizadas porém as estações de excitação A e B representadas na figura 6.3, são indispensáveis para identificar o autovetor à esquerda.

Como foram obtidos resultados satisfatórios usando o impacto do martelo, variando o tipo de martelo (ou da cabeça) para as

varias posições de excitação, nós escolhemos o impacto com o martelo como o mecanismo de excitação. Existem vários tipos de martelo para ajudar a ampliar a taxa de frequência e a intensidade do nível de força sobre o rotor.

No martelo é colocado um transdutor de força que deteta a magnitude do impacto sentido pela superfície. Este impacto é tomado como sendo igual e oposto àquele sentido pelo rotor. O martelo é suprido de um cabo para "manuseio".

Basicamente, a magnitude do impacto é determinada pela quantidade de movimento do martelo com a qual ele se move quando se choca com a estrutura. Neste caso controlamos na realidade a velocidade e, através desta, o nível da força. O ajuste apropriado do nível da força é feito pelo uso de martelos com cabeças de

massas diferentes. A figura 6.4 mostra um dos martelos usados no processo de medida.

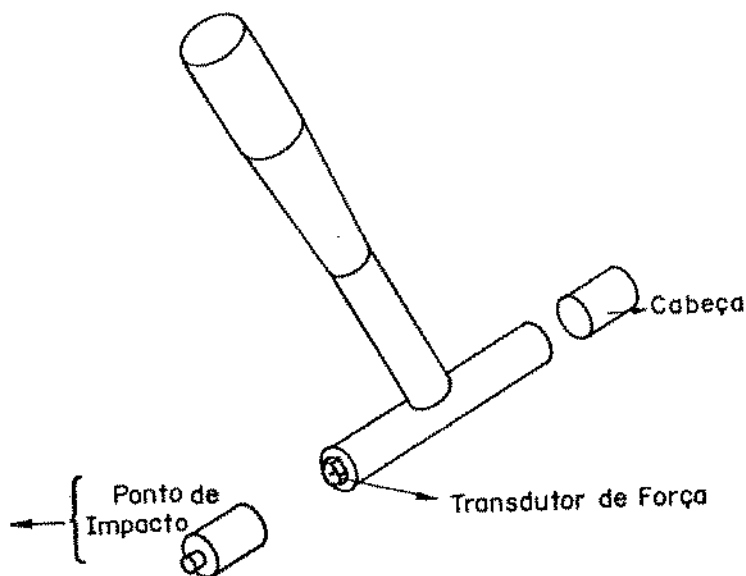


Fig. 6.4 Detalhes do martelo.

A faixa de frequência que é efetivamente excitada por este tipo de dispositivo é função da rigidez das superfícies de contato e da massa da cabeça do martelo.

Existe uma ressonância do sistema em uma frequência dada por:

$$\left(\frac{\text{Rigidez do contato}}{\text{Massa da cabeça do martelo}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

acima da qual é difícil fornecer energia à estrutura de teste.

Quando a cabeça do martelo se choca com o rotor, este sentirá um pulso de força do tipo mostrado na figura 6.5.

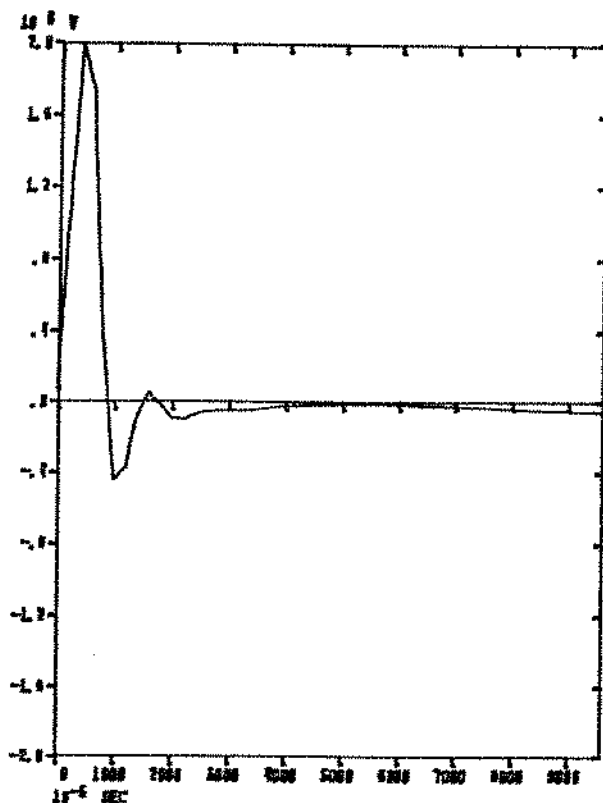


Fig. 6.5 Pulso de força típico de um impacto

Um pulso de força deste tipo tem um conteúdo de frequências como mostrado na figura 6.6. Ele é essencialmente constante a partir de uma frequência (f_s) até uma certa frequência (f_c) e, a partir desta, cai com uma inclinação não determinada.

Certamente, um impulso deste tipo é relativamente ineficiente para excitar vibrações numa faixa de frequência diferente da que vai de (f_s) a (f_c). Para assegurar que nossas frequências de

trabalho estão na faixa entre (f_s) e (f_c), são usados uma série de diferentes tipos de cabeças de martelo e pontas de impacto.

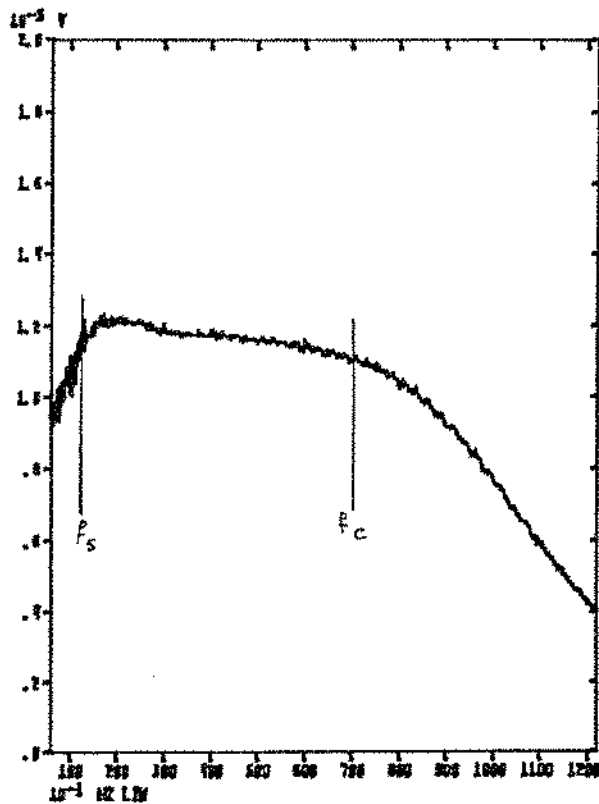


Fig. 6.6 Espectro do impacto do pulso de força.

Para medir os parâmetros de interesse na identificação modal, utiliza-se uma variedade grande de transdutores embora sua descrição detalhada esteja fora do escopo deste trabalho. Nós nos limitaremos a mencionar o tipo de transdutor usado na medição das grandezas necessárias ao estudo do nosso processo de identificação. Usamos em essência um transdutor de força e um acelerômetro, ambos do tipo piezoelétrico para a medida da

excitação. A resposta do rotor nas várias estações de medição foi medida através de um sensor de deslocamento do tipo sensor sem contato, de corrente de Foucault (Eddy Current).

Finalmente, com o dispositivo de excitação e medição apropriados, o sinal de excitação e a resposta do rotor são medidos e através de um conversor analógico-digital enviados para um analisador de FFT, que perfaz a Transformada Discreta de Fourier. A figura 6.7 mostra os princípios do processo de medida.

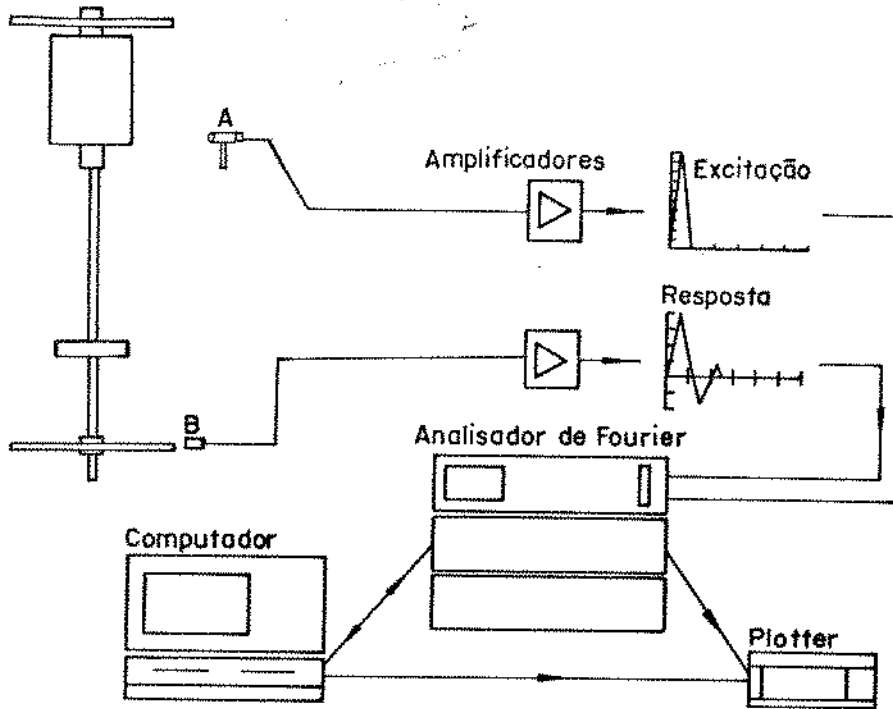


Fig. 6.7 Processo de medição para determinar a função de transferência.

6.4 - SISTEMA DE PROCESSAMENTO PARA IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

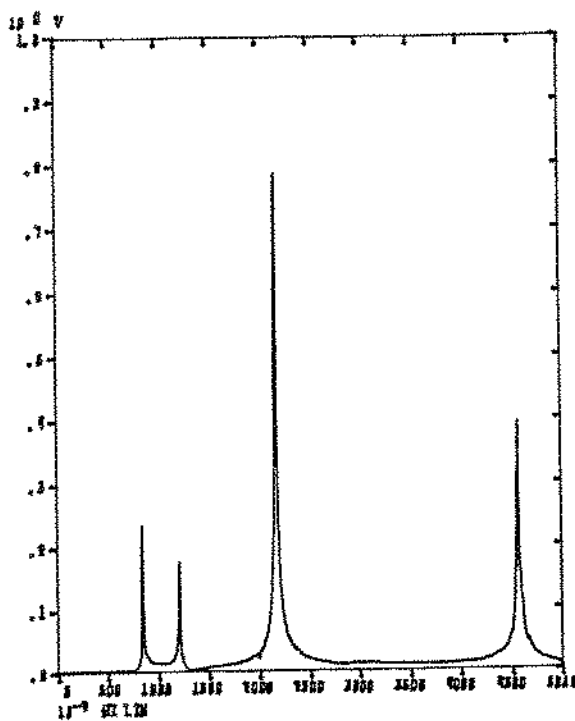
Nos últimos 5 anos, foram desenvolvidos vários tipos de "Software e Hardware", para obtenção da Transformada Discreta de Fourier.

A teoria básica da análise de Fourier é amplamente conhecida [15,16]. Neste trabalho utilizamos o analisador de Fourier HP 5451C, o qual usa o algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

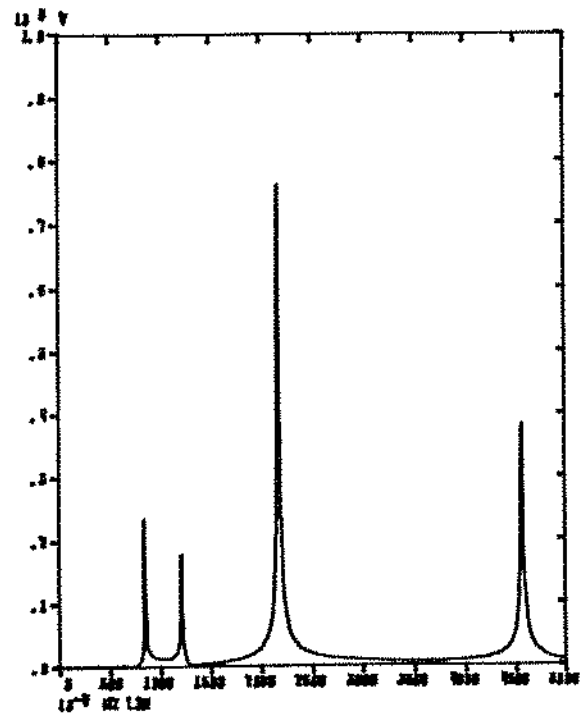
A técnica, de uma forma geral, é baseada no uso do processador digital e na Transformada Rápida de Fourier para obter os dados da função de transferência. O sistema modal usando o Analisador de Fourier compara uma função de transferência analítica aos dados de uma função de transferência medidos, e ajustados por um método de mínimo erro quadrático e um programa de ajuste de curvas polinomiais. Durante este processo, os parâmetros modais desconhecidos são identificados para cada função de transferência medida. Os resíduos para todas as estações de medidas, são obtidos e todos os autovalores identificados numa faixa específica de frequência.

A função de transferência medida e ajustada analiticamente pode ser representada pelo analisador de Fourier HP 5451C no plano complexo, na forma de amplitude e ângulo de fase, ou como parte real e parte imaginária versus frequência. A figura 6.8 mostra a

comparação entre uma função de transferência medida de um rotor e a obtida analiticamente pelo Analisador de Fourier.



Função de transferência
medida



Função de transferência
analítica

Fig. 6.8 Comparação da Função de Transferência medida e analítica

Como o procedimento usado na Transformada Rápida de Fourier é uma aproximação digital (com um número específico de pontos) de um sinal analógico, isto cria limitações e erros.

É necessário tomar cuidado no processo de medição e processamento para evitar o efeito de aliasing, devido a um

intervalo de amostragem finito; e de leakage devido ao tempo finito de observação.

Nós usamos métodos de média para minimizar erros originários de ruídos de medição da função de resposta em frequência.

7 - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS DO ROTOR VERTICAL

7.1 - SISTEMA NÃO ROTATIVO

7.1.1 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DA BANCADA

É importante identificar as frequências naturais da bancada para se verificar se algum modo de vibração da bancada pode interferir com os modos naturais do rotor.

A fotografia da bancada é mostrada na figura 7.1.

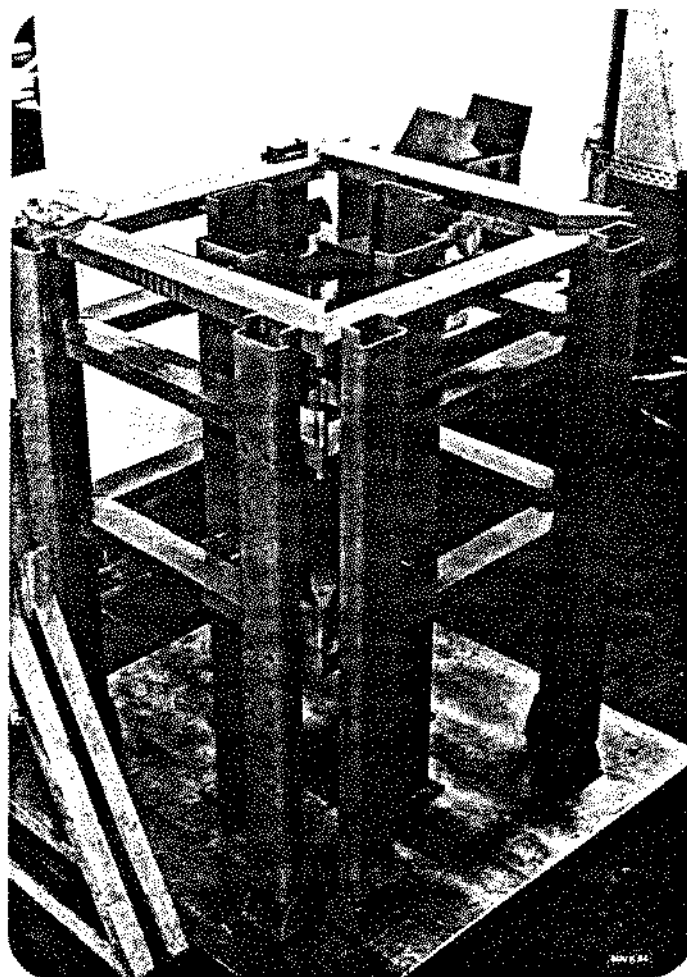


Fig. 7.1 Fotografia da Bancada

é óbvio que nós temos uma estrutura complexa com vários modos naturais. Para se diminuir o erro no processo de identificação, nos escolhemos 56 estações de excitação nas duas direções X e Y. A figura 7.2 mostra as posições e direções dessas estações.

A resposta é medida por um acelerômetro na estação 35 na direção Y, a faixa de frequência escolhida de até 250 Hz.

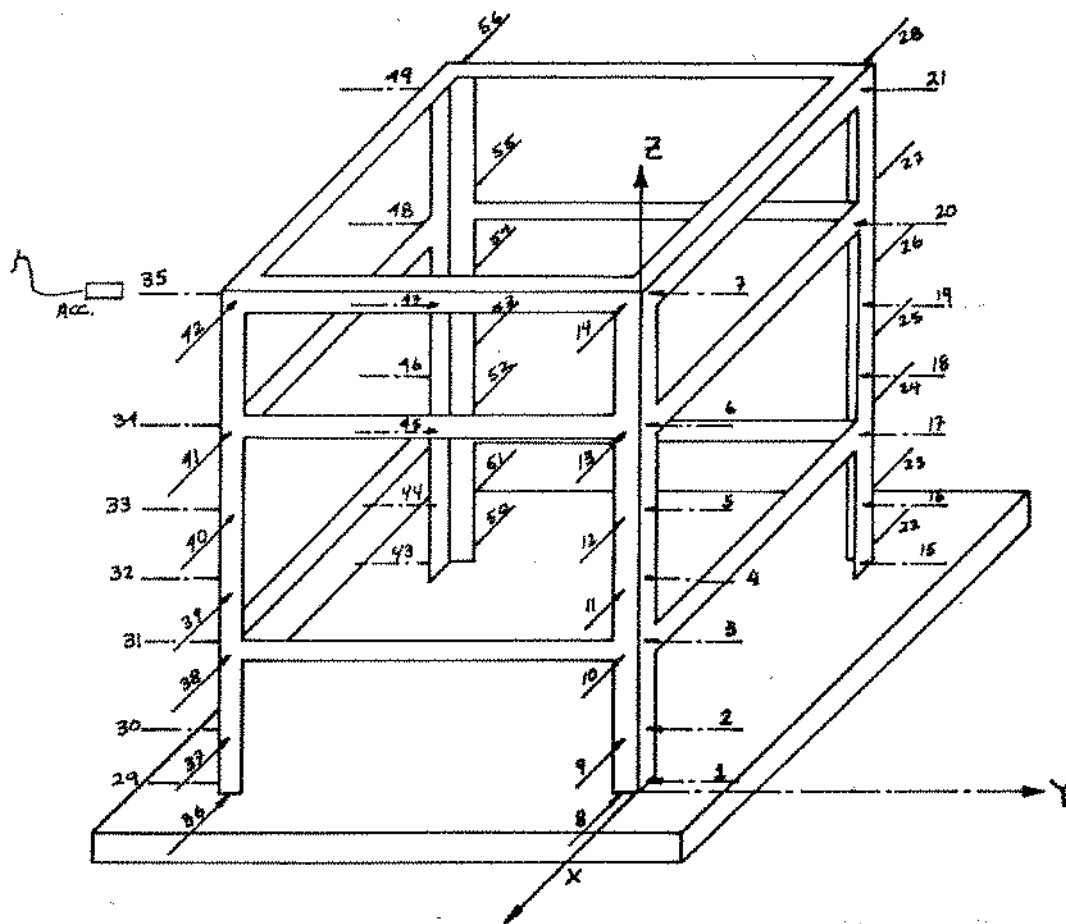


Fig. 7.2 Posição das Estações de Excitação e Resposta na Bancada

A função de transferência para cada resposta é comparada com uma função de transferência analítica, os resultados deste processo de identificação são as frequências naturais da bancada na faixa de zero até 250 Hz, como relacionado na tabela 7.1

TABELA 7.1 Freqüências Naturais da Bancada na Faixa de 250 Hz

modo	Freq. nat. Hz	Fat. amort. %
1	24,52	4,67
2	33,03	2,03
3	40,69	3,06
4	55,70	5,30
5	86,89	3,37
6	122,6	0,51
7	189,7	0,61
8	211,3	0,34
9	231,0	0,32

Para a determinação desta tabela escolhemos a resposta em frequência (função de transferência) medida na estação 35 quando nós aplicamos o impulso de excitação na estação 15 da bancada, como exemplo.

A figura 7.3 ilustra a função de transferência medida e a analítica obtida pelo Analisador de Fourier no processo de

identificação dos modos naturais da bancada.

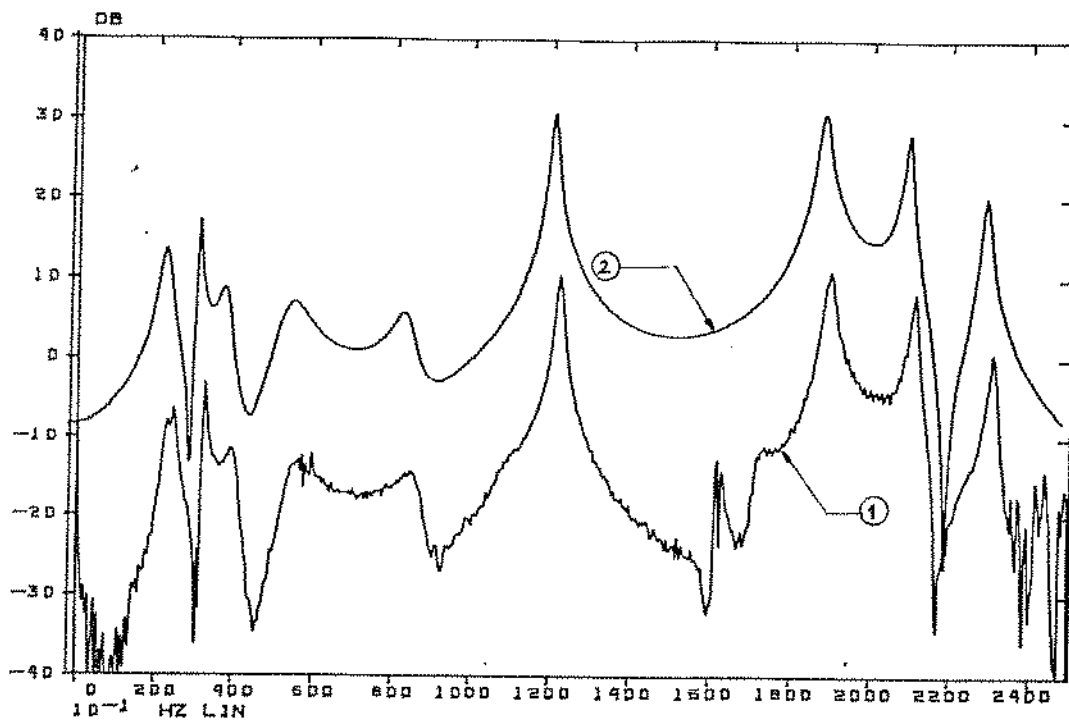


Fig. 7.3 Função de Transferência medida (1) e analítica (2) da bancada

Deslocamos relativamente estas duas curvas para visualizar melhor a sua igualdade. A comparação propriamente dita é mostrada na figura 7.4 em escala logarítmica para possibilitar uma melhor

visualização das curvas e suas diferenças.

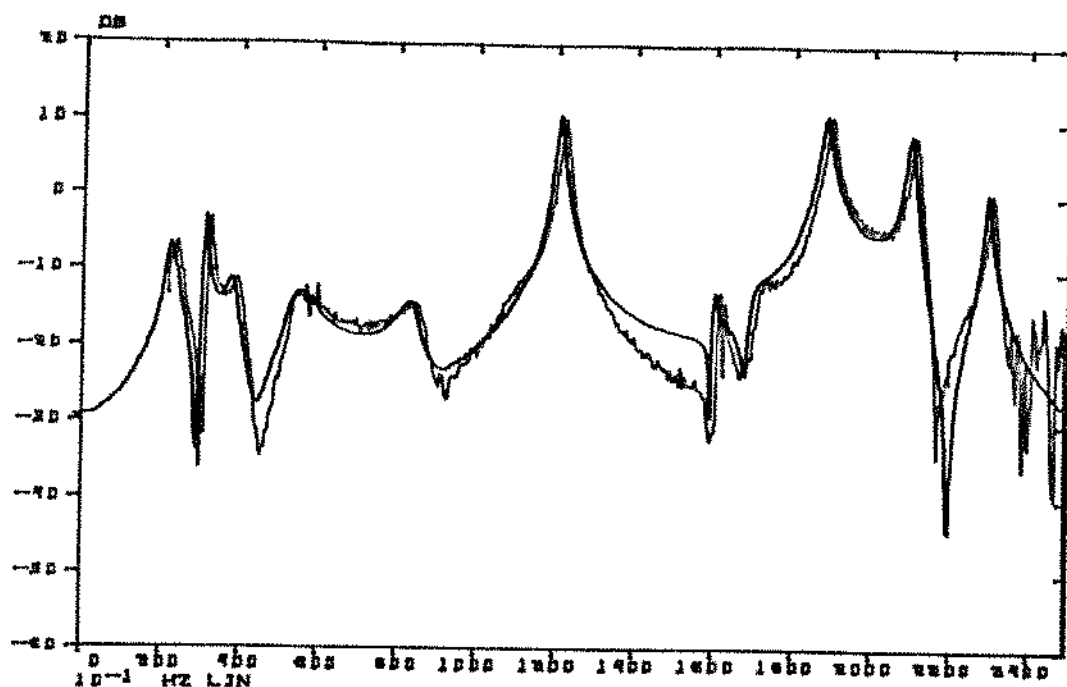


Fig. 7.4 Comparação das Medidas Analíticas e Práticas da Função de Transferência para a Estação de Excitação 15

7.12 - QUESTÕES SOBRE A RIGIDEZ DA BANCADA

Observando a tabela 7.1 verificamos que nós temos para a primeira frequência natural o valor de 24,52 Hz. Esta frequência natural não corresponde a nenhum modo da estrutura, mas ao movimento relativo da bancada em relação ao solo. Como a bancada é montada sobre uma pesada chapa de aço, a qual por sua vez está apoiada no solo através de 4 "vibrastops", isto é, não é fixo rigidamente, ela tem um movimento relativo ao solo como corpo rígido com esta frequência.

As outras frequências até o sexto modo representam vários modos da coluna A, mostrada na figura 7.1, em relação à estrutura. Como sabemos, se nós temos uma estrutura com quatro pontos em contato com o solo, obviamente, um desses pontos de contato pode estar um pouco acima do solo, ou não tendo contato completo. Aqui isto acontece com o ponto que está abaixo da coluna A.

Por outro lado estas frequências naturais (1 até 6) são relativamente mais amortecidas do que as outras.

Olhando para a figura 7.5, que mostra as mesmas respostas em frequência medidas para a estação 35, quando o impulso é aplicado na estação 15, nós observamos que o nível do sinal nas primeiras seis frequências naturais é menor do que 10% das outras, reforçando a hipótese destas frequências não interferirem na

identificação das frequências naturais do rotor em um trabalho na faixa de 50 Hz.

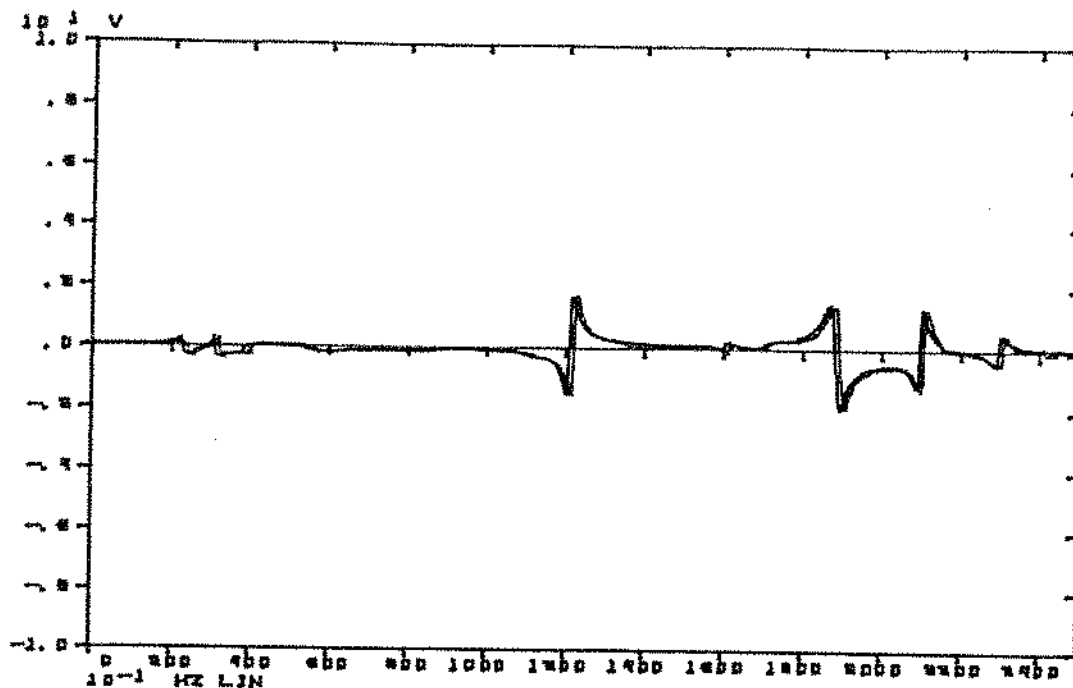
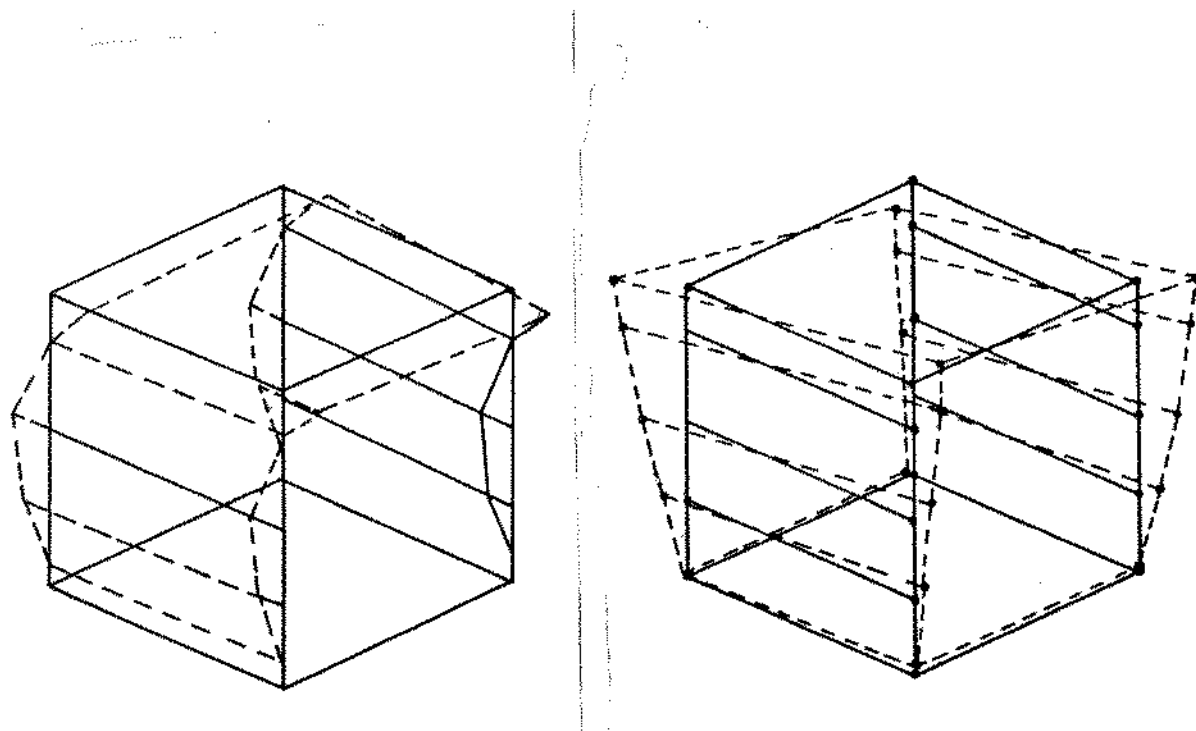


Fig. 7.5 Função de Transferência Medida na Estação 35, quando é Aplicado um Impulso na Estação 15

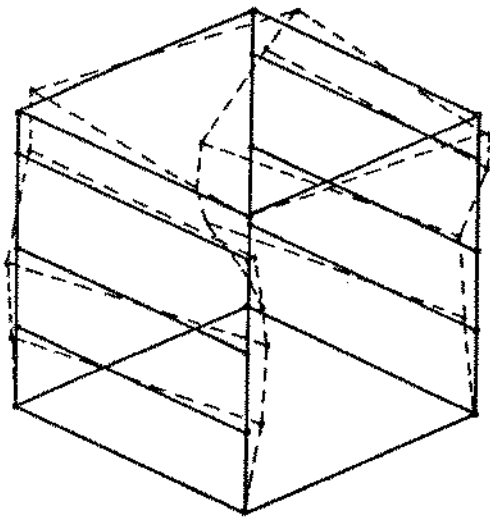
O primeiro modo natural real da estrutura aparece na frequência de 122,6 Hz. O modo correspondente é mostrado no figura 7.6. Outros modos naturais são mostrados na figura 7.7.



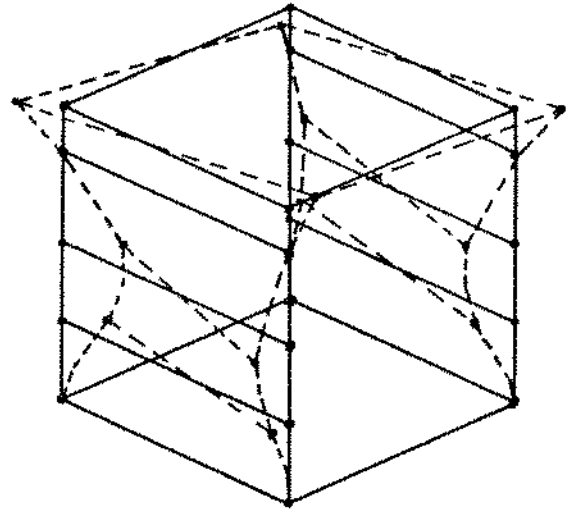
189,7 Hz

122,6 Hz

Fig. 7.6 Os Primeiros Dois Modos Naturais da Bancada



231,0 Hz



211,3 Hz

Fig. 7.7 Os Segundos Dois Modos Naturais da Bancada.

7.13 - IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO EIXO LIVRE-LIVRE

O eixo vertical representa um corpo rígido com a parte superior rígida e a inferior elástica. Na parte rígida é fixado axialmente o rotor de um motor com 4 Kw de potência. A figura 7.8 mostra o eixo vertical. Não há acoplamento entre o rotor e o eixo: a ligação foi feita através de uma união por interferência em condições tais que não há movimento relativo que, por exemplo, propicie amortecimento interno.

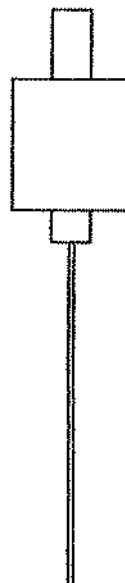


Fig 7.8 Configuração Geométrica do Eixo

Para identificar as frequências naturais do eixo vertical, uma estação de excitação "A" e uma estação de resposta "B" são escolhidos. O eixo é excitado através de um martelo apropriado e a resposta é medida por um acelerômetro. A figura 7.9 mostra as posições de excitação e de resposta.

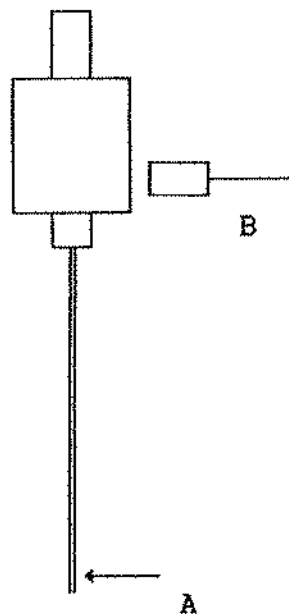


Fig 7.9 Localização das Estações de Excitação (A) e Resposta (B).

As frequências naturais identificadas na faixa de 500 Hz, são mostradas na tabela 7.2

TABELA 7.2 Frequências Naturais do Eixo Livre-Livre

Modo	Freq. Nat. Hz	Fat. Amort. %
1	36,18	3,38
2	153,9	0,81
3	410,5	0,51

A figura 7.10 mostra a função de transferência medida na posição B, e também a ajustada pela função analítica.

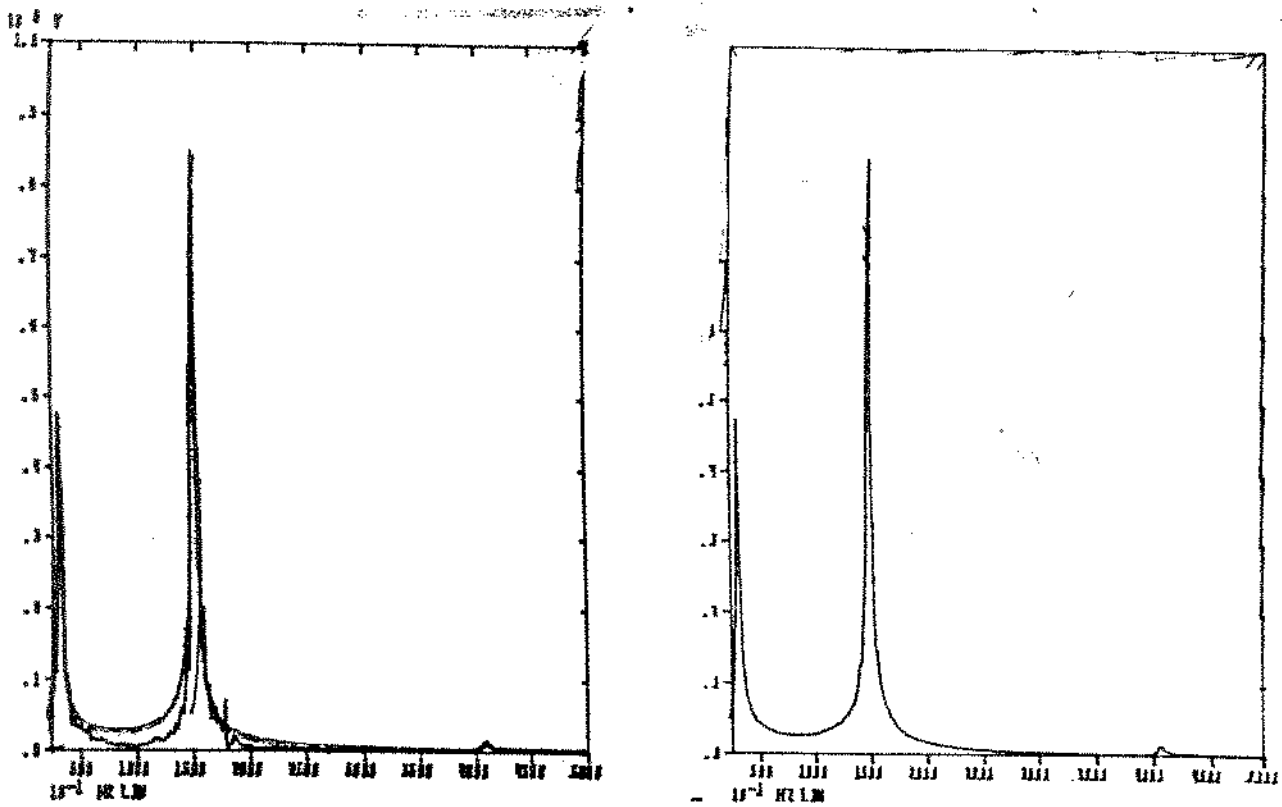


Fig 7.10 Função de Transferência do Ponto B Medida e Ajustada Analiticamente.

7.14 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DO ROTOR LIVRE-LIVRE

O rotor livre-livre é constituído por um eixo com um disco preso na parte superior, com um disco inferior, e um mancal intermediário. Para identificar as frequências naturais do rotor, suspende-se o mesmo por uma mola de aço bem flexível. "A" é escolhido como estação de excitação e a resposta é medida em "B". A figura 7.11 mostra a localização dos pontos A e B.

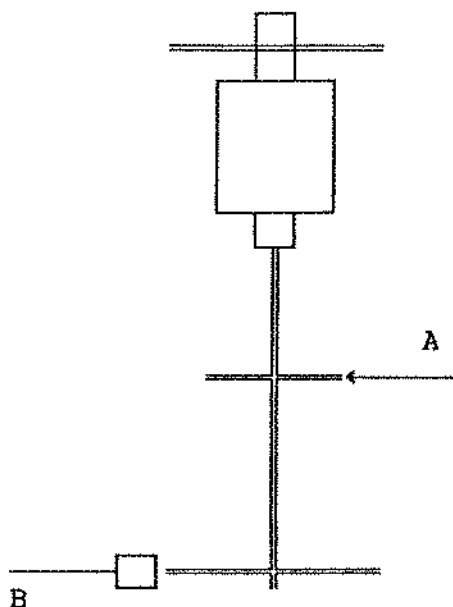


Fig. 7.11 Localização das estações de Excitação e de Resposta do Rotor Livre-Livre

As três frequências naturais na faixa de 100 Hz são identificadas. Os resultados são mostrados na tabela 7.3.

TABELA 7.3 Freqüências Naturais do Rotor Livre-Livre

Modo	Freq. Nat. Hz	Fat. Amort. %
1	14,65	0,53
2	49,81	0,82
3	97,66	1,34

A figura 7.12 mostra a função de transferência medida no ponto B

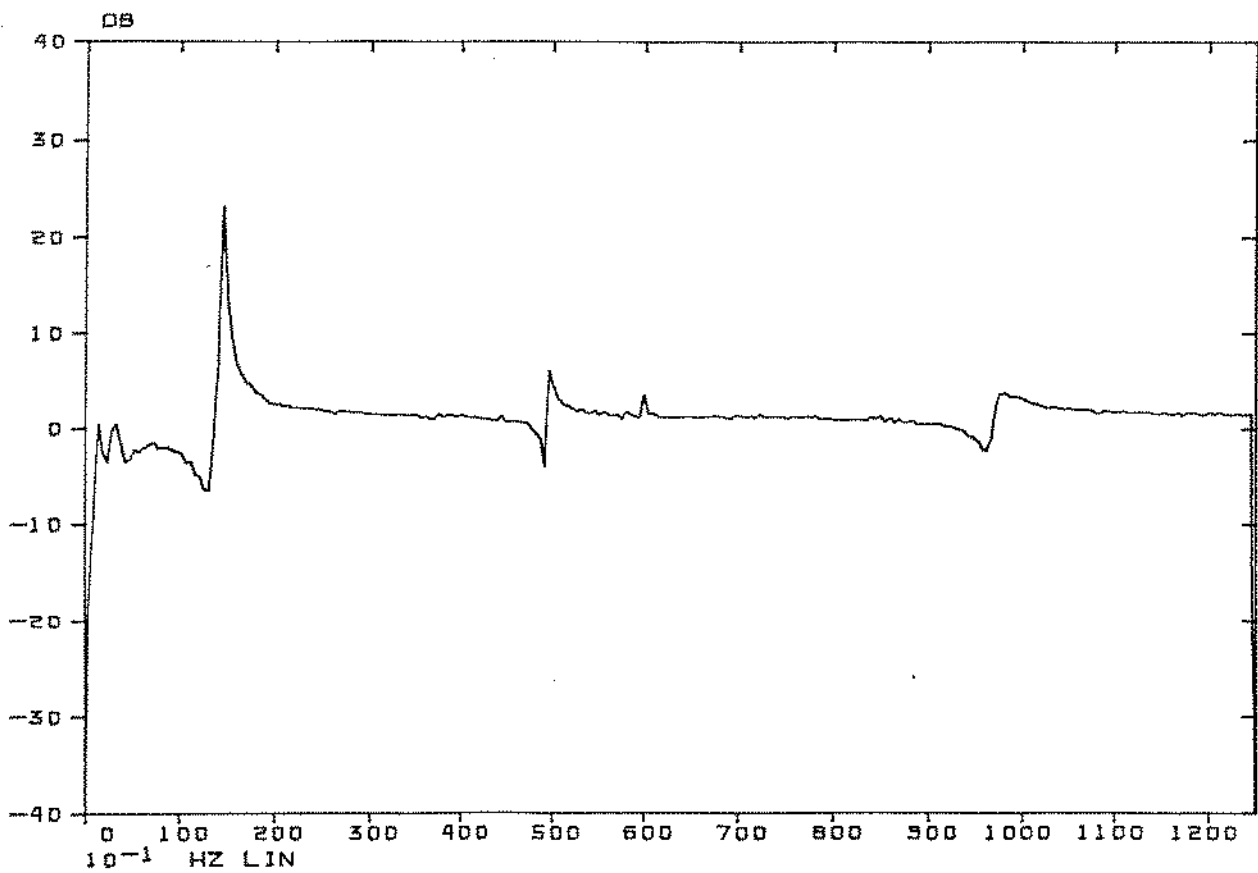


Fig. 7.12 A Função de Transferência Medida na Estação B.

7.15 - DEFININDO OS GRAUS DE LIBERDADE DO ROTOR VERTICAL

A definição clássica de grau de liberdade é dada como número de coordenadas independentes suficientes para descrever o movimento do sistema [17].

O rotor é composto de três partes a primeira é o motor, o mancal intermediário é a segunda e o disco inferior a terceira. As primeira e segunda partes são ligadas por molas à bancada. Além disso o eixo do rotor liga as três partes.

Teoricamente falando, nós necessitamos de um número infinito de coordenadas independentes para descrever o movimento do rotor, se considerarmos o eixo como um corpo contínuo. Entretanto, assumindo o eixo sem massa e permitindo que cada parte tenha seis

possíveis graus de liberdade (como um corpo rígido), poderemos encontrar um total de até dezoito graus de liberdade.

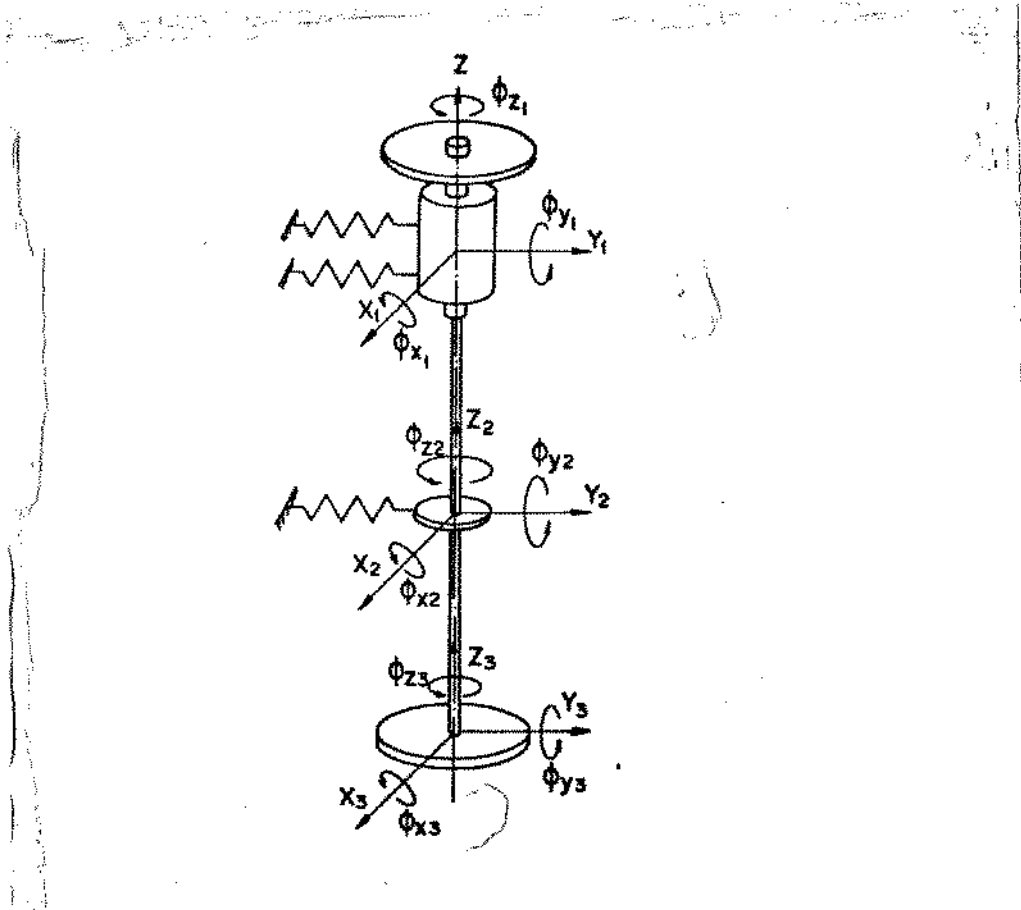


Fig. 7.13 O rotor Vertical e suas Coordenadas

Para determinar os graus de liberdade do sistema podemos ir eliminando aqueles que não apresetam interesse no estudo ou os que estiverem restritos por vinculos. A faixa de frequência que nos interessa está entre 0e 50 Hertz. Vamos tentar determinar as frequências nos planos ou direções que estão nessa faixa.

Consideraremos primeiramente a direção Z do rotor mostrada na figura 7.13. Podemos ter uma vibração translacional se

Consideraremos primeiramente a direção Z do rotor mostrada na figura 7.13. Podemos ter uma vibração translacional se considerarmos o movimento longitudinal do eixo. Esta vibração longitudinal do eixo, considerando-o como corpo elástico entre as massas das partes anteriormente definidas, está em frequências mais altas que as de flexão do mesmo ; elas estão portanto bem longe da faixa de frequências em que estamos trabalhando. Outra possibilidade longitudinal é que o rotor esteja vibrando com as três partes, se comportando como um corpo rígido suportado por molas verticais na primeira e segunda partes, o que é mostrado na figura 7.14.

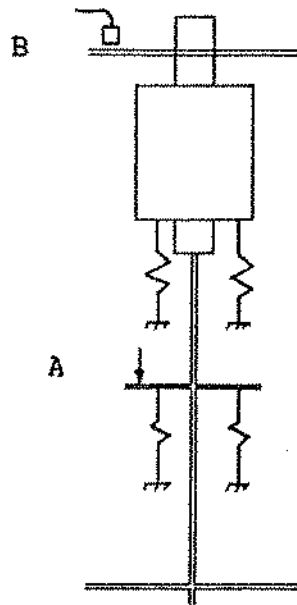


Fig. 7.14 Modelo Matemático para Modo de Vibração no Eixo Z.

Podemos tentar identificar este modo de vibração e sua correspondente frequência, aplicando um impulso na direção Z no ponto A e medindo a resposta do rotor na mesma direção, no ponto B; como é mostrado na figura 7.14.

O resultado do experimento é mostrado na figura 7.15 em duas partes consecutivas (a) e (b). A parte (a) apresenta a resposta de frequência do impulso aplicado no ponto A, e a parte (b) mostra a resposta de frequência medida no ponto B do rotor, na mesma direção.

Podemos afirmar que existe vibração translacional de corpo rígido ao longo de eixo Z. O rotor vibra com a frequência natural de 11.48 Hz, quando é suspenso na bancada de teste. Então existe somente um grau de liberdade nesta direção Z, e os outros dois foram eliminados.

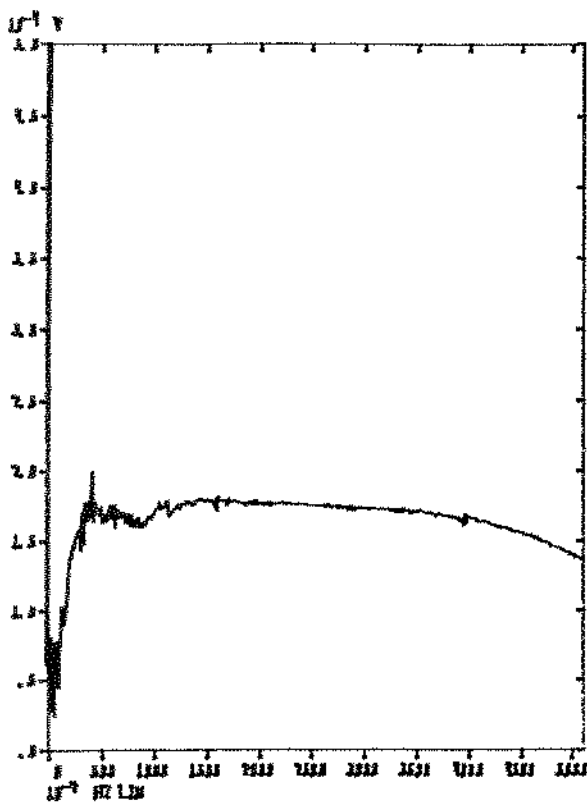


Fig. 7.15a Espectro da Entrada

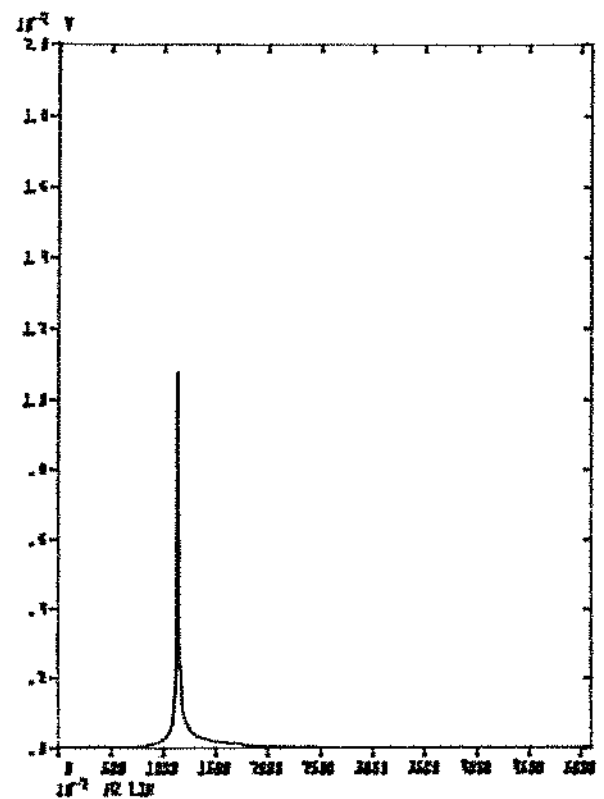


Fig. 7.15b Resposta de Frequência na Estação B

Agora temos que responder uma outra importante questão, este modo de vibração está acoplado ou não com os modos de vibração nas direções X e Y? Vamos examinar a figura 7.16 que é a figura

7.15(b) ampliada duas vezes; podemos perceber que não há nenhum modo de vibração significativo nesta faixa de frequência.

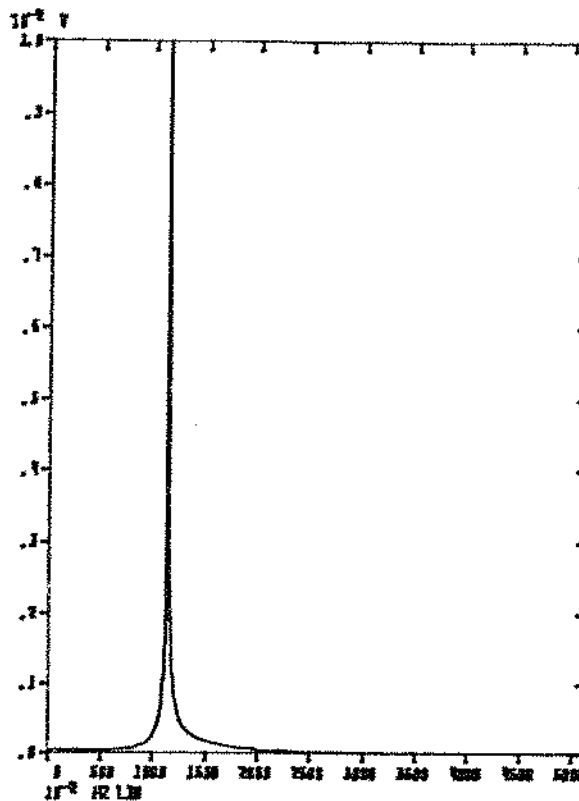


Fig. 7.16 Ampliação da Resposta em Frequência da Estação B.

Para ter certeza do dessacoplamento desse modo de vibrar com os outros, podemos aplicar um impulso na direção Y no ponto C e medir a resposta em frequência no ponto D, na direção Z.

A resposta em frequência do ponto D é mostrada na figura 7.17. A amplitude de vibração desse modo é muito pequena se comparada com a mostrada na figura 7.15(b). Esta amplitude tem uma

magnitude de pico na faixa dos 60 Hz , introduzida por interferência elétrica no nosso sistema de medida. Entretanto isto não mostra o completo desacoplamento dos modos de vibrar entre as direções Z e Y, mas podemos dizer que este erro é desprezível comparado com o nosso erro máximo. Esta única frequência entre os graus de liberdade na direção Z, será ignorada.

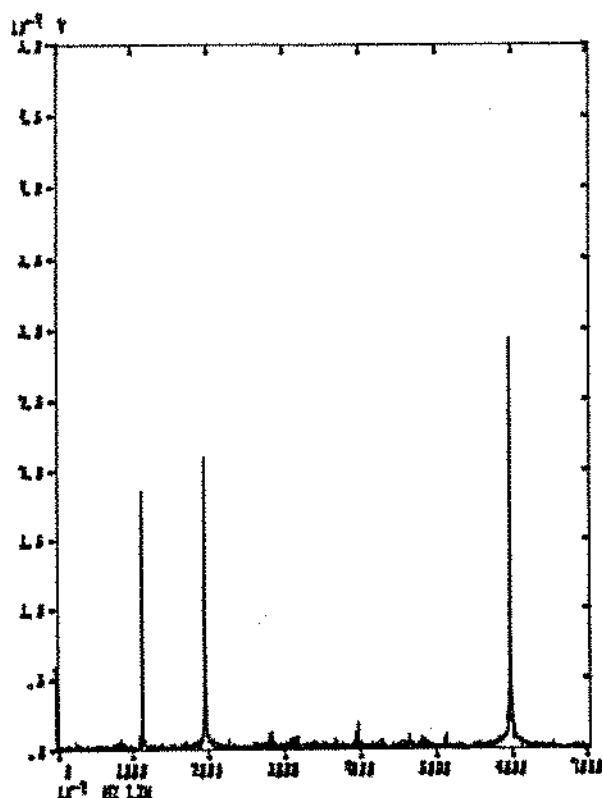


Fig. 7.17 Resposta em Frequência na Estação D.

O próximo passo é analisar a rotação do rotor em trono do eixo Z. Este modo é basicamente uma combinação da vibração torcional do eixo com a massa da terceira parte e a massa parcial

(rotor do motor) da primeira parte. Elas tem frequência mais alta do que as de flexão do eixo. Elas seriam importantes se coincidirem com a velocidade de rotação do rotor. Como isto não ocorre não existe interesse no momento em sua identificação. Assim retiram-se mais 3 graus de liberdade da análise.

Considerando o eixo Y, existe uma vibração translacional nessa direção e uma vibração angular em torno do eixo X, que ocorre no plano YZ. Conseqüentemente nós temos dois graus de liberdade possíveis para cada estação do eixo Y, totalizando seis graus de liberdade.

Aplicamos mesma lógica para determinar os graus de liberdade no eixo X, sendo seis graus em torno do eixo X, ocorrendo no plano XZ.

Chegamos a treze possíveis graus de liberdade para o sistema do rotor, o qual nos fornece treze frequências naturais para determinar. Eliminando o grau de liberdade no eixo Z nós ficamos com doze graus de liberdade.

Tentaremos identificar quantas dessas frequências naturais estão em nossa faixa de 50 Hz.

7.16 - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A SIMETRIA DO ROTOR

O sistema do rotor é projetado para manter a maior simetria possível [2]. Na prática todavia devido (a) à assimetria geométrica do rotor, (b) no diferente posicionamento das molas ao longo dos eixos X e Y, e (c) nos erros de montagem do rotor que causam assimetria nos eixos X e Y, isto não ocorre.

A questão aqui é verificar como estas assimetrias afetam as frequências naturais de flexão que são encontradas nos planos XZ e YZ.

Verificando as três partes notamos que a massa e o momento de inércia são totalmente simétricos em relação aos eixos X e Y. Conseqüentemente o problema está reduzido em verificar a simetria da rigidez dos vários elementos do rotor, com respeito a estes eixos.

Vamos olhar a tabela 7.4 que mostra os valores da rigidez do rotor.

TABELA 7.4 Valores da Rigidez do Rotor.

RIGIDEZ N/M		RIGIDEZ N*M		RIGIDEZ N/M		RIGIDEZ N*M	
KY1	KX1	KOY1	KOX1	KX2	KY2	KOX2	KOY2
6,02E5	5,51E5	9854	10971	2,84E5	2,91E5	6,39	6,54
8,47 %		10,1 %		2,41 %		2,46 %	

Nesta tabela, KY_1 e KX_1 são rigidez total da primeira parte do rotor no eixo Y e no eixo X. Da mesma forma KX_2 e KY_2 são rigidez total da segunda parte do rotor no eixo Y e no eixo X.

KOX_1 e KOY_1 são respectivamente rigidez angular da primeira parte em torno do eixo X e eixo Y. Também KOX_2 e KOY_2 são rigidez angular da segunda parte em torno do eixo X e do eixo Y. Apesar da diferença será considerado simétrico o rotor nestas condições.

7.17 - IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS NO PLANO YZ, NA FAIXA DAS FREQUÊNCIAS DE TRABALHO

Percebemos que temos três modos translacionais na direção Y e também três modos ao longo do eixo X. A questão é determinar quais destas frequências naturais estão em nossa faixa de trabalho.

Necessitamos de um ponto de excitação e um de medição. É importante excitar o rotor e permitir que ele vibre em todos os seus possíveis modos. Possivelmente temos que mudar o posicionamento dos pontos para obter resultados satisfatórios.

A figura 7.18 mostra a indicação dos graus de liberdade possíveis e parte dos modos no plano YZ; também mostra as estações

de excitação e de resposta.

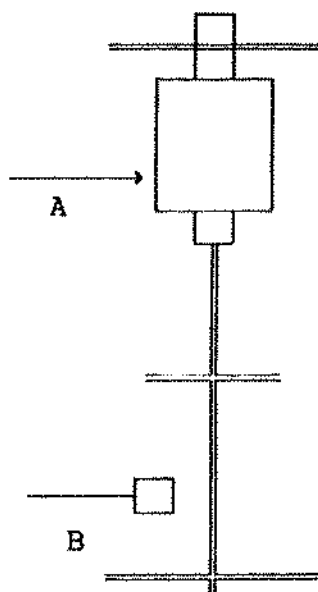


Fig. 7.18 A Localização da Estação de Excitação A e a Resposta B.

Escolhemos a faixa de 250 Hz para verificar a ocorrência dessas frequências. Os resultados deste experimento são mostrados nas figuras 7.19(a) e 7.19(b).

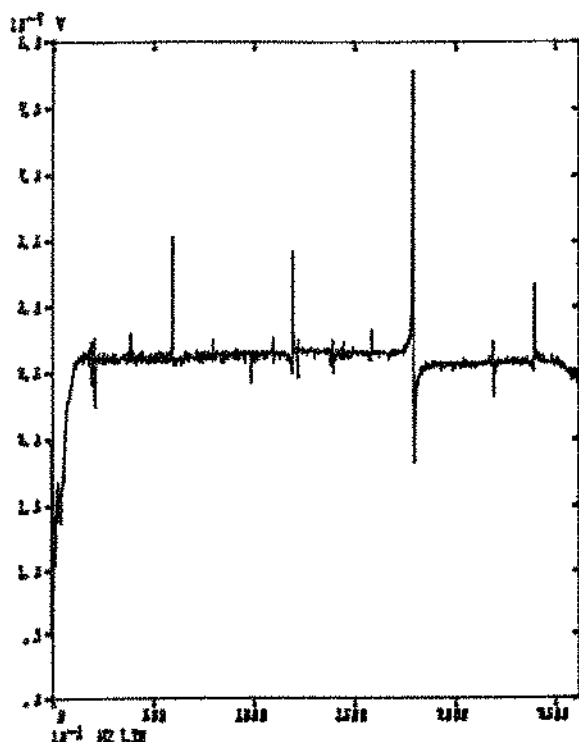


Fig. 7.19a Espectro de Entrada

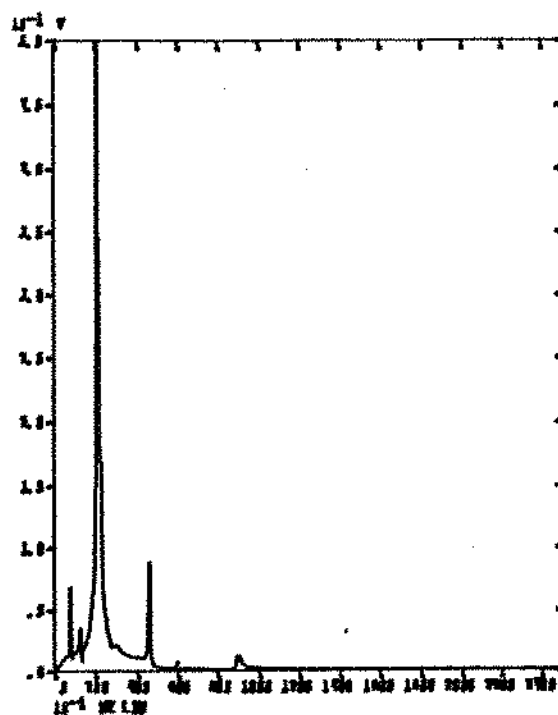


Fig. 7.19b Resposta em Frequência

Temos quatro frequências naturais na faixa de trabalho, até 50 Hz. Uma frequência natural de 90 Hz aparece somente na faixa de trabalho até 250 Hz; entretanto a amplitude desta frequência é muito pequena comparada com as demais. Este modo é, também, muito amortecido e além disso está fora da faixa de trabalho dos 50 Hz.

Conseqüentemente vamos considerar somente as quatro primeiras frequências naturais. A tabela 7.5 mostra as frequências naturais encontradas no plano YZ.

TABELA 7.5 Frequências Naturais de Rotor no Plano YZ.

Modo	Freq. Hz	Fator Amort. %
1	8,376	0,311
2	12,94	0,778
3	22,10	0,617
4	46,81	0,159

7.18 - IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO ROTOR VERTICAL

Agora sabemos que existem quatro frequências naturais na faixa de frequências que estamos trabalhando, em cada um dos planos XZ e YZ. Iremos identificar estas frequências e seus respectivos fatores de amortecimento mais precisamente.

Escolhemos a posição A como de excitação e a B de resposta para o experimento. A figura 7.18 mostra a localização dessas estações no rotor.

Inicialmente aplicaremos simplesmente um impulso, com o martelo na posição A, e mediremos a resposta na posição B. Depois de um ajuste de curva na função de transferência os resultados convergem para uma frequência e um fator de amortecimento, em cada modo. A experiência é repetida vinte vezes. A média e o desvio padrão dos resultados são mostrados na tabela 7.6.

TABELA 7.6 Média e Desvio Padrão das Frequências Naturais e seus Respetivos Fatores de Amortecimento, no Plano YZ, de Vinte Experimentos

MODO	M, méd. Hz	S, desv. pad.	S/M %	M, fat. amor.	S, desv. pad.	S/M %
1	8,4267	2,776 E-2	3,29E-1	0,1500	5,8385E-3	3,89
2	12,9663	1,1242E-1	8,67E-1	1,04293	2,5436E-2	2,44
3	22,1415	8,0989E-2	3,65E-1	0,4411	1,3152E-2	2,98
4	46,7428	1,7259E-2	3,69E-1	0,2195	9,9979E-3	4,55

Com os resultados mostrados é muito baixo o nível de ruído no sistema de medição e o desvio padrão é completamente coerente, exceto para o segundo modo em que o desvio padrão é maior (isto ocorre devido a ligação entre o rotor e o estator). Entretanto o desvio padrão é bem baixo e não necessário para identificar as frequências naturais com os vinte experimentos.

Sabemos que aumentando o número de excitações para calcular a média, nos aproximamos da média e diminuimos o desvio padrão.

Agora, vamos excitar o rotor aplicando 20 impulsos na posição A e fazer a média da resposta. Depois de fazer a transformada da resposta com o Analisador de Fourier, conseguimos os dados da tabela 7.7.

TABELA 7.7 Frequências Naturais para 20 Médias

Exp	Modo	Freq. Hz	Fat.amo. %	Exp	Modo	Freq. Hz	Fat.amo. %
1	1	8,4027	0,1342	2	1	8,4028	0,1359
	2	13,0208	0,7608		2	13,2052	0,7563
	3	22,1051	0,4055		3	22,1066	0,4055
	4	46,6055	0,2379		4	46,6127	0,2404

O objetivo de identificar o rotor enquanto não está em movimento é para facilitar o entendimento e identificação quando em movimento, neste caso precisamos de um procedimento mais

rápido, excitando-o menos vezes.

Aqui investigaremos a possibilidade de obter resultados satisfatórios excitando o rotor cinco vezes e fazendo a média das respostas. Os resultados são mostrados na tabela 7.8. Para garantir que cinco excitações serão suficientes para obter bons resultados excitaremos o rotor da mesma forma que quando foram feitas as vinte médias anteriores.

Os resultados da tabela 7.8 mostram que há uma pequena variação nos dados, mas esta diferença é muito pequena não causando grande diferença na identificação do rotor. Chegamos, então, à conclusão de que podemos identificar o rotor com a média de cinco excitações e ficar certos de que estaremos cometendo um erro pequeno. Parece óbvio supor que a segunda frequência natural e seu respectivo fator de amortecimento, com grande desvio padrão, possui alguma não-linearidade ou na conexão do rotor com o estator ou nas molas que sustentam o estator.

TABELA 7.8 As Frequências Naturais e seus Correspondentes Fatores de Amortecimento para as Médias de Cinco e de Vinte Excitações

n.	modo	Freq. Hz	Fat.amo. %	n.	modo	Freq. Hz	Fat.amo. %
5	1	8,3945	0,1389	20	1	8,4028	0,1359
	2	12,9953	0,9694		2	13,0252	0,7563
	3	22,1062	0,3354		3	22,1051	0,3755
	4	46,6043	0,2394		4	46,6127	0,2404

Concluimos, então, que a média de cinco excitações é suficiente para a identificação das frequências naturais. A figura 7.20 mostra a resposta do rotor medida na estação "B" e a figura 7.21 mostra a curva ajustada analiticamente à função de transferência obtida, pela mesma estação.

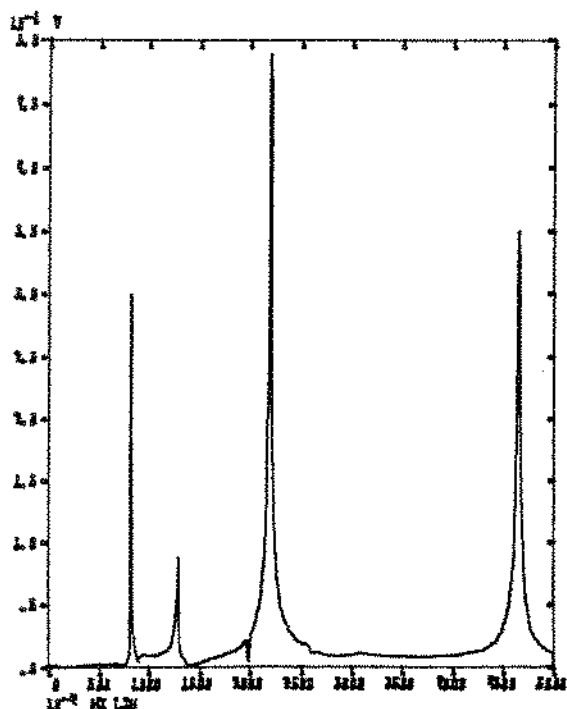


Fig 7.20 Função de Transferência Medida na Estação B

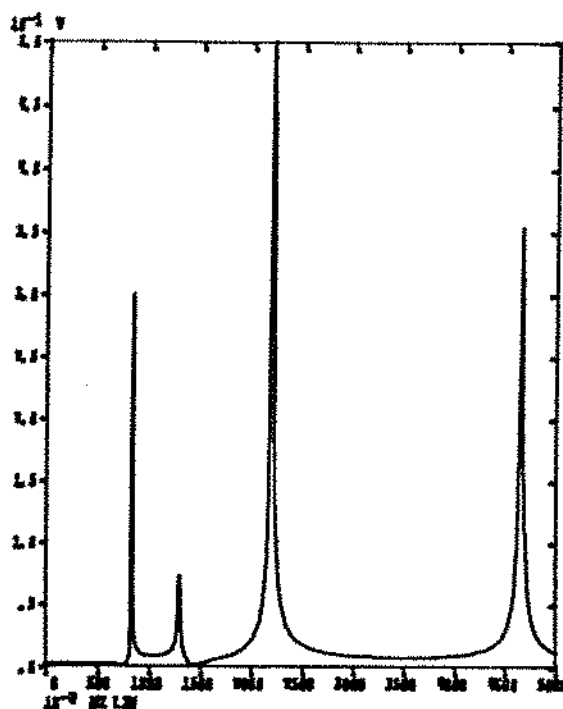


Fig. 7.21 Função de Transferência Ajustada na Estação B

Com um procedimento idêntico identificamos as frequências naturais e seus correspondentes amortecimentos no plano XZ. A

tabela 7.9 mostra as frequências naturais para uma média de vinte impulsos.

Analisando os resultados verificamos que há uma diferença significativa somente no fator de amortecimento do segundo modo, no plano XZ, comparando com o fator de amortecimento no plano YZ. Devemos lembrar que há uma diferença de 8% na rigidez linear e 10% de diferença na rigidez rotacional ou angular nestes dois planos. A conclusão é que devido à menor rigidez rotacional temos a segunda, terceira e quarta frequências naturais levemente menores, além de uma substancial diminuição do fator de amortecimento no segundo modo.

TABELA 7.9 Frequências Naturais e Respectivo Fatores de Amortecimento para um Impulso e para a Média de Vinte Impulsos, no Plano XZ.

n.	modo	Freq. Hz	Fat.amo. %	n.	modo	Freq. Hz	Fat.amo. %
1	1	8,6165	0,1529	20	1	8,6184	0,1669
	2	12,2079	0,3368		2	12,2108	0,3307
	3	21,8416	0,3094		3	21,8390	0,2933
	4	45,7710	0,2091		4	45,7751	0,2277

O resultado da comparação das diferenças das frequências naturais e seus correspondentes fatores de amortecimento nas duas diferentes direções, X e Y, são mostradas na tabela 7.10 .

TABELA 7.10 Diferença das Frequências Naturais e seus Respostivos Fatores de Amortecimento nas Direções X e Y.

Modo	Freq.X Hz	Freq.Y Hz	dif. %	Fat.amo.X %	Fat.amo.Y %	dif. %
1	8,6184	8,4028	2,5	0,1669	0,1359	18,6
2	12,2108	13,0252	6,3	0,3307	0,7563	56,3
3	21,8390	22,1066	3,3	0,2933	0,3755	21,9
4	45,7751	46,6127	1,8	0,2277	0,2404	5,3

7.19 - IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS NATURAIS DO ROTOR

Existem duas maneiras para identificar os modos naturais, identificando-se uma linha ou uma coluna da matriz da função de transferência do rotor.

Aqui escolhemos identificar os modos naturais determinando uma linha da matriz da função de transferência. A vantagem é que temos apenas um ponto de excitação, o que torna possível ajustar o sinal de entrada (impacto com um martelo) em uma única posição conveniente do rotor. O impacto é aplicado na estação A e a

resposta medida nas estações de 1 ate 5. A figura 7.22 mostra a localização das estações de excitação e de resposta.

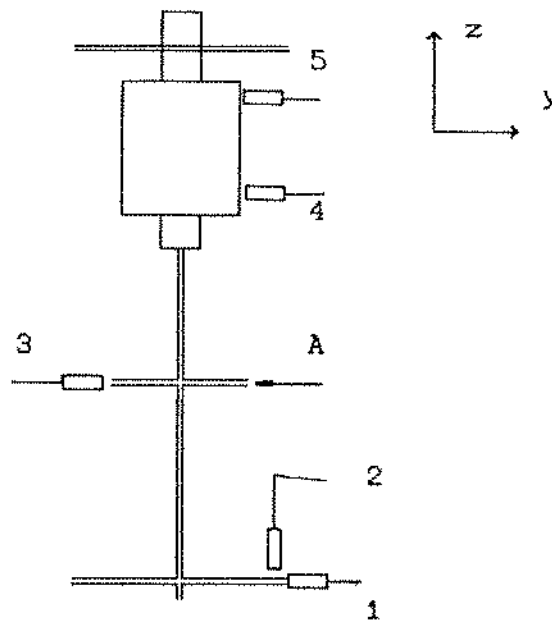


Fig. 7.22 Localização das Estações de Excitação e de Resposta

Um acelerômetro é preso ao martelo com um sinal de entrada de 100 mVolts/g e a resposta é medida por um sensor EDDY CURRENT calibrado na razão de 2 volts/mm.

TABELA 7.11 Resíduos Identificados da Função de Transferência, para cada Modo

Esta. medida	Primeiro Modo 8,40 Hz		Segundo Modo 13,02 Hz	
	Amplitude	Fase	Amplitude	Fase
1	0,1164	356,6	0,3790E-2	344,4
2	0,4052E-1	353,3	0,1685E-2	327,5
3	0,1773E-1	178,9	0,1209E-2	196,6
4	0,3005E-2	178,4	0,1103E-1	4,5
5	0,4438E-2	193,0	0,1615E-1	10,2

Esta. medida	Tercei. Modo 22,10 Hz		Quarto Modo 46,64 Hz	
	Amplitude	Fase	Amplitude	Fase
1	0,3631E-1	186,3	0,5070E-2	182,9
2	0,9065E-1	187,3	0,6932E-2	180,3
3	0,1181	186,6	0,3626E-1	179,1
4	0,5976E-1	10,0	0,3463E-1	182,1
5	0,3193E-1	191,4	0,8039E-2	4,4

Tendo-se obtido as medidas dos resíduos para todas as estações em cada frequência, podemos calcular os modos naturais de vibração.

Olhando a tabela 7.11, podemos observar que o autovetor correspondente a cada frequência natural é complexo como esperado. Mas o amortecimento interno é tão pequeno que o autovetor é sempre real, com a parte imaginária tendendo a zero, assim como os

Ângulos de fase estão muito perto de zero ou 180 graus. Portanto, podemos ilustrar os modos naturais por meio de suas amplitudes em uma dada estação. Os modos próprios de vibração já normalizados são apresentados na figura 7.23 .

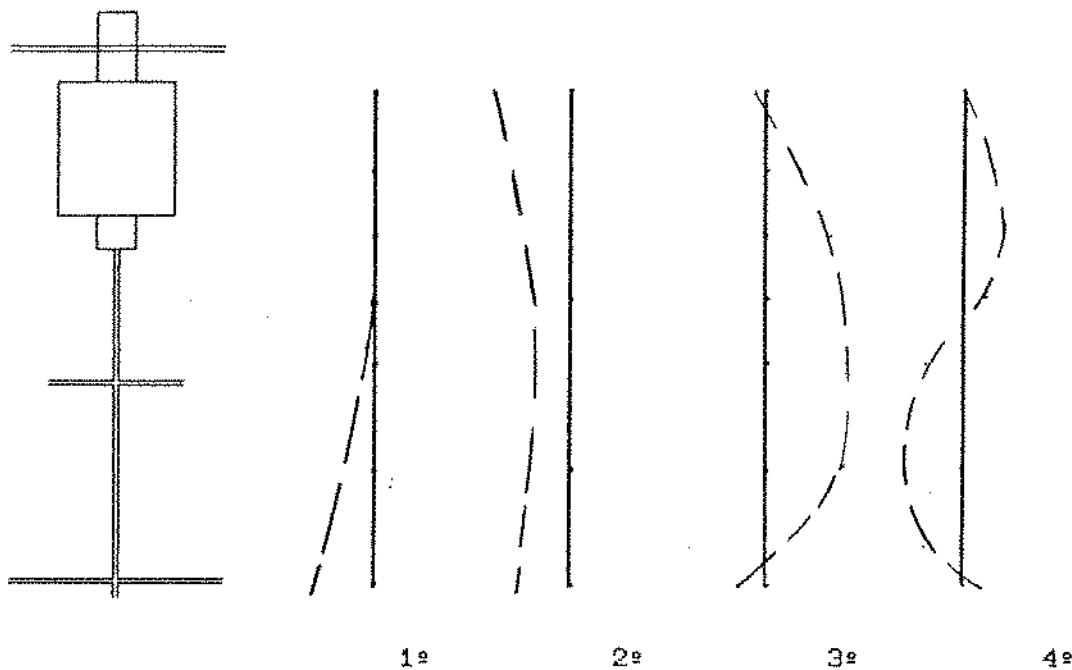


Fig 7.23 Modos Naturais do Rotor Montado

Olhando o quarto modo da figura 7.23, podemos observar que o disco inferior tem um movimento de translação muito pequeno, enquanto o movimento angular em torno do eixo Z é consideravelmente alto. Como o movimento de translação é muito pequeno, o amortecimento oriundo deste movimento diminui. Este fato é bem caracterizado através dos resultados mostrados na tabela 7.5. O quarto modo tem um nível de amortecimento muito

baixo. Existe a possibilidade de que este modo possa causar a instabilidade, enquanto o eixo mantém seu movimento normal de rotação.

7.2 - SISTEMA ROTATIVO

7.2.1 - AUTOVALORES DO ROTOR GIRANDO

Os autovalores são função da velocidade do rotor. Conseqüentemente tentaremos identificá-los em cinco velocidades diferentes. Como conhecemos, a princípio, as frequências naturais do rotor, escolhemos as velocidades de modo que não coincidam com suas frequências naturais. A figura 7.24 mostra a posição das estações de excitação e de resposta, respectivamente A e B.

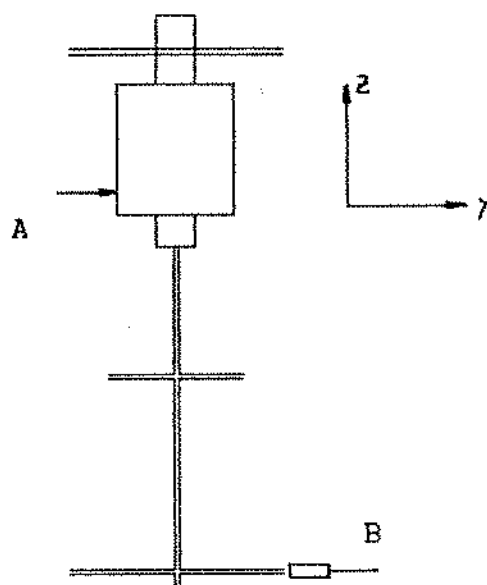


Fig. 7.24 Estações de Excitação e de Resposta, Respectivamente A e B

A velocidade do rotor não é completamente constante, possui uma pequena variação. Para manter a flutuação da velocidade dentro de um limite aceitável, diminuimos o tempo de medição aplicando apenas cinco impulsos, no ponto A.

A tabela 7.12 mostra os autovalores do rotor para a velocidade de 67 rpm.

TABELA 7.12 Autovalores do Rotor a 67 rpm.

Modo	Freq. Hz	Fat.amo. %	Freq. Hz	Fat.amo. %	Freq. Hz	Fat.amo. %
1	8,292	0,548	8,300	0,472	8,319	0,699
2	12,94	0,669	12,97	0,547	12,98	0,514
3	22,08	0,498	22,10	0,486	22,10	0,444
4	46,61	0,444	46,62	0,434	46,62	0,436

Podemos repetir o mesmo experimento para as velocidades de 310 rpm e 685 rpm. Os resultados são mostrados na tabela 7.13, e 7.14 respectivamente.

TABELA 7.13 Autovetores do Rotor Vertical com velocidade na vizinhança de 310 rpm

$\Omega = 307$ rpm		$\Omega = 310$ rpm		$\Omega = 312$ rpm	
Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %
7,976	1,700	8,008	1,687	7,977	,902
8,452	1,160	8,399	0,902	8,394	0,553
12,22	0,220	12,19	0,245	12,20	,226
12,95	0,586	12,99	0,609	12,94	0,513
21,58	0,336	21,58	0,321	21,57	0,300
22,33	0,361	22,36	0,376	22,34	0,360
44,99	0,417	44,92	0,441	44,95	0,494
47,01	0,439	47,09	0,427	47,02	0,450

TABELA 7.14 Autovetores do Rotor Vertical com velocidade na vizinhança de 685 rpm

$\Omega = 680$ rpm		$\Omega = 685$ rpm		$\Omega = 689$ rpm	
Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %
7,764	0,843	7,846	0,817	7,750	0,878
8,545	0,199	8,554	0,257	8,653	0,104
12,18	0,974	12,16	0,874	12,19	0,912
12,94	0,328	13,00	0,577	12,98	0,451
21,74	0,387	21,15	0,315	21,15	0,388
22,74	0,076	22,80	0,078	22,84	0,121
43,74	0,417	43,74	0,439	43,74	0,424
47,90	0,479	47,90	0,495	47,90	0,529

Os resultados das tabelas indicam que o segundo autovalor varia muito pouco em baixas velocidades. Existe dificuldade em identificar o primeiro autovalor porque a contribuição do primeiro modo é muito pequena na estação A. Escolhemos, então, uma nova estação de excitação para melhorar a resposta do primeiro modo. A figura mostra a nova posição de excitação C e a de resposta B.

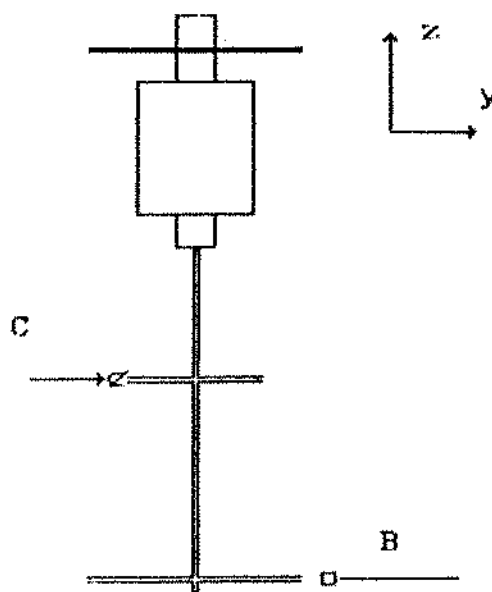


Fig. 7.25 Localização da Nova estação de Excitação

A excitação por impacto é aplicada na estação C e a resposta é medida na estação B. Foi processada média de cinco sinais de entrada e saída respectivamente. Os resultados para quatro velocidades na vizinhança das rotações 350, 620, 890 e 1600 rpm, são mostradas na tabelas 7.15, 7.16, 7.17 e 7.18.

Como se pode observar nestas tabelas, podemos verificar que os autovalores correspondentes ao segundo modo natural de vibração do rotor não conseguiram ser identificados. A razão deste fato é que a contribuição do segundo modo de vibração nestas estações é pequena.

TABELA 7.15 Autovetores do Rotor Vertical com velocidade na vizinhança de 350 rpm

$\Omega = 353 \text{ rpm}$		$\Omega = 356 \text{ rpm}$		$\Omega = 358 \text{ rpm}$	
Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %
7,995	0,488	7,962	0,597	8,002	1,206
8,412	0,644	8,414	0,632	8,414	0,632
21,56	0,313	21,55	0,308	21,56	0,309
22,41	0,342	22,41	0,340	22,42	0,310
44,88	0,410	44,84	0,447	44,83	0,434
47,11	0,450	47,12	0,402	47,10	0,447

TABELA 7.16 Autovetores do Rotor Vertical com velocidade na vizinhança de 620 rpm

$\Omega = 623 \text{ rpm}$		$\Omega = 620 \text{ rpm}$		$\Omega = 618 \text{ rpm}$	
Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %
7,892	0,711	7,853	0,789	7,851	0,728
8,540	0,138	8,535	0,161	8,541	0,177
21,26	0,272	21,257	0,319	21,26	0,315
22,705	0,313	22,69	0,344	22,70	0,332
43,96	0,403	43,97	0,384	43,96	0,418
47,76	0,452	47,74	0,433	47,73	0,436

TABELA 7.17 Autovetores do Rotor Vertical com velocidade na vizinhança de 890 rpm

$\Omega = 890$ rpm		$\Omega = 895$ rpm		$\Omega = 897$ rpm	
Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %
7,664	0,648	7,644	0,714	7,663	0,710
8,667	0,127	8,667	0,119	8,665	0,140
20,93	0,333	20,93	0,332	20,93	0,308
22,99	0,391	22,98	0,362	22,98	0,372
43,04	0,392	43,03	0,408	43,03	0,386
48,38	0,376	48,36	0,406	48,35	0,410

TABELA 7.18 Autovetores do Rotor Vertical com velocidade na vizinhança de 1615 rpm

$\Omega = 1612$ rpm		$\Omega = 1616$ rpm		$\Omega = 1618$ rpm	
Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %	Freq. Hz	Fat. Amor. %
7,244	0,673	7,256	0,614	7,279	0,521
9,088	0,102	8,998	0,188	9,006	0,102
20,168	0,280	20,18	0,268	20,17	0,278
23,82	0,434	23,82	0,435	23,82	0,430
40,60	0,410	40,66	0,516	40,61	0,517
49,97	0,376	49,99	0,386	50,00	0,399

7.2.2 - AUTOVETORES À DIREITA DE UM ROTOR VERTICAL

Para a identificação dos autovetores à direita de um rotor com uma velocidade de rotação determinada, nós excitaremos o rotor na estação A, e mediremos a resposta das estações 1 a 10. A figura 7.26 indica a localização destas estações no rotor.

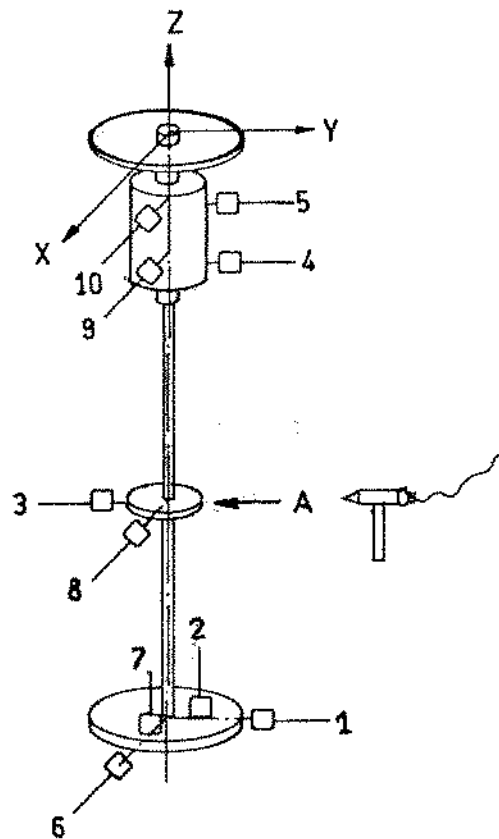


Fig 7.26 Localização da Estação de Excitação e das Estações de Resposta, no Rotor

Os autovalores identificados são mostrados na tabela 7.19 para uma velocidade de 300 rpm.

TABELA 7.19 Autovalores Identificados do Rotor, para uma Velocidade de 300 rpm

Freq. Hz	8,002	8,356	12,22	12,92	21,54	22,29	44,88	46,89
Fat. Amor. %	1,27	0,515	0,220	0,564	0,352	0,368	0,466	0,431

Os elementos do autovetor à direita u_i , onde i é o índice do autovalor correspondente, são identificados através dos resíduos da função de transferência H_{lk} , onde l é o índice da estação de medição, k o índice da estação de excitação, de tal forma que:

$$H_{lk} = \frac{X_l}{F_k} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{i^u_l i^v_k}{j\omega - \lambda_i} \quad k = 3, \quad l = 1, 2, \dots, 10$$

Os valores dos resíduos da função de transferência para cada autovalor e cada estação de medição é visto na tabela 7.20, para a velocidade de 300 rpm.

TABELA 7.20 Resíduos identificados da Função de Transferência, para a Velocidade de 300 rpm

Estação de Medição	8,002 Hz		8,356 Hz		12,22 Hz		12,92 Hz	
	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase
1	480E-4	70,1	143E-3	9,4	829E-6	235	360E-5	6,8
2	184E-4	63,8	542E-4	2,3	935E-7	65,2	140E-5	22,7
3	867E-5	247	245E-4	188	532E-6	1,1	255E-3	216
4	144E-5	299	463E-5	192	342E-6	205	128E-4	22,9
5	206E-5	248	724E-5	187	312E-6	123	226E-4	24,2
6	654E-4	118	794E-4	346	231E-5	131	285E-5	146
7	259E-4	133	344E-4	318	789E-6	46,6	165E-5	88,2
8	114E-4	130	179E-4	319	908E-7	249	643E-6	314
9	311E-5	306	361E-5	138	108E-5	220	109E-5	310
10	546E-5	305	674E-5	125	174E-5	218	137E-5	330

Estação de Medição	21,55 Hz		22,29 Hz		44,80 Hz		46,89 Hz	
	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase
1	120E-4	192	287E-4	192	158E-6	40,8	977E-5	174
2	370E-4	194	659E-3	191	251E-4	184	491E-4	183
3	572E-4	196	103E-3	192	116E-4	186	335E-4	183
4	240E-4	16,9	437E-4	12,0	106E-4	193	263E-4	185
5	139E-4	190	278E-4	194	179E-5	3,40	656E-5	3,50
6	181E-4	282	233E-4	112	260E-5	265	245E-5	111
7	556E-4	288	563E-4	115	386E-4	279	381E-7	103
8	777E-4	107	797E-4	296	206E-4	278	214E-4	105
9	445E-4	107	458E-4	296	206E-4	278	214E-4	105
10	162E-4	287	175E-5	101	237E-5	97,0	250E-5	279

São vistos abaixo, também, os elementos dos autovetores

3

direita, identificados para 300 rpm, como:

$$[u] = \left[u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, \dots, u_8^{(8)} \right]$$

onde $u_i^{(i)}$ é o autovetor correspondente ao i -ésimo autovalor do rotor.

$$1^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (0,492)+j(-,544) \\ (0,164)+j(-,228) \\ (0,083)+j(-,103) \\ (-,014)+j(0,022) \\ (1)+j(0) \\ (0,383)+j(0,102) \\ (0,171)+j(0,036) \\ (-,064)+j(0,008) \end{array} \right\}$$

$$2^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (1)+j(0) \\ (0,376)+j(-,047) \\ (0,171)+j(0,004) \\ (-,041)+j(0,000) \\ (0,331)+j(-,446) \\ (0,150)+j(-,188) \\ (0,080)+j(-,096) \\ (-,018)+j(0,031) \end{array} \right\}$$

$$3^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (-,087)+j(0,348) \\ (0,017)+j(-,037) \\ (0,148)+j(0,176) \\ (0,870)+j(0,062) \\ (1)+j(0) \\ (0,033)+j(-,034) \\ (-,018)+j(0,035) \\ (0,024)+j(0,700) \end{array} \right\}$$

$$4^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (0,195)+j(-,056) \\ (0,079)+j(0,000) \\ (0,140)+j(0,032) \\ (1)+j(0) \\ (-,087)+j(0,135) \\ (0,039)+j(0,084) \\ (0,013)+j(-,034) \\ (0,032)+j(-,060) \end{array} \right\}$$

$$5^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (0,013)+j(0,154) \\ (0,024)+j(0,476) \\ (-,013)+j(-,735) \\ (0,011)+j(-,657) \\ (-,232)+j(0,020) \\ (-,715)+j(-,012) \\ (1)+j(0) \\ (0,182)+j(0) \end{array} \right\}$$

$$6^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (0,074)+j(0,000) \\ (1)+j(0) \\ (-,156)+j(-,003) \\ (-,012)+j(0,000) \\ (0,007)+j(-,034) \\ (0,002)+j(-,083) \\ (-,031)+j(0,117) \\ (-,009)+j(0,032) \end{array} \right\}$$

$$7^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (-,002)+j(0,003) \\ (-,006)+j(-,648) \\ (0,016)+j(0,300) \\ (0,012)+j(-,114) \\ (0,065)+j(-,016) \\ (1)+j(0) \\ (-,616)+j(0,016) \\ (0,236)+j(-,004) \end{array} \right\}$$

$$8^{(u)} = \left\{ \begin{array}{l} (-,197)+j(-,030) \\ (1)+j(0) \\ (-,682)+j(0) \\ (0,200)+j(0,008) \\ (0,015)+j(-,018) \\ (0,135)+j(-,764) \\ (-,096)+j(0,492) \\ (,0426)+j(-,188) \end{array} \right\}$$

7.2.3 - AUTOVETORES À ESQUERDA DE UM ROTOR VERTICAL

Para a identificação de autovetores à esquerda de um rotor com uma velocidade determinada, nós excitaremos o rotor na estação A. A figura 7.27 indica a localização destas estações no rotor.

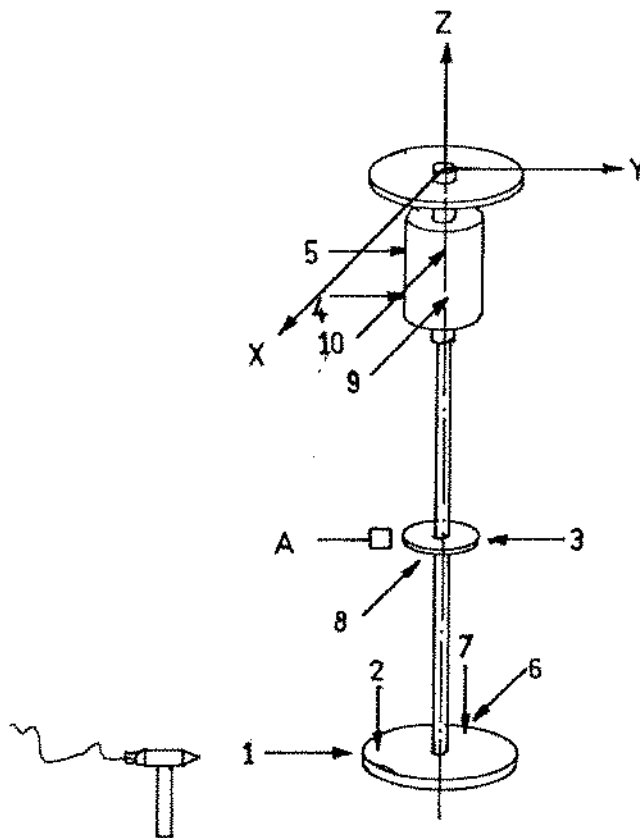


Fig 7.27 Localização das Estações de Excitação e da Estação de Resposta A, no Rotor.

No processo de identificação, nós obtemos os autovalores, os quais são constantes complexas e também os resíduos da função de transferência para cada autovalor e cada estação, os autovalores identificados são mostrados na tabela 7.21 para a velocidade de

300 rpm.

TABELA 7.21 Autovalores identificados do Rotor, para Velocidade 300 rpm

Freq. Hz	7,924	8,364	12,20	12,94	21,56	22,24	44,88	46,88
Fat. Amor. %	0,832	0,318	1,458	0,580	0,342	0,360	0,453	0,448

Na tabela 7.22, abaixo, são vistos os resíduos identificados correspondentes, da função de transferência.

TABELA 7.22 Resíduos identificados da Função de Transferência, para cada Estação com 300 rpm.

Estação de Excita.	7,924 Hz		8,364 Hz		12,20 Hz		12,94 Hz	
	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase
1	317E-4	64,7	876E-4	74,5	742E-5	203,3	339E-5	32,6
2	150E-4	62,6	468E-4	27,5	106E-5	74,5	220E-5	97,6
3	998E-5	274,1	203E-4	327,3	283E-5	27,8	143E-5	211,6
4	335E-5	245,9	333E-5	16,0	138E-5	227,3	130E-4	39,2
5	358E-5	261,1	492E-5	195,4	216E-5	16,0	180E-4	38,2
6	533E-4	302,7	709E-4	279,7	306E-5	195,4	252E-6	61,6
7	253E-4	316,4	332E-4	152,3	199E-5	279,2	548E-8	73,5
8	111E-4	137,5	162E-4	308,8	156E-5	235,0	145E-5	300,4
9	249E-5	302,6	493E-5	118,4	462E-6	308,4	976E-6	288,5
10	309E-5	322,7	631E-5	142,6	128E-5	256,0	833E-6	337,7

Estação de Excita.	21,57 Hz		22,29 Hz		44,92 Hz		46,80 Hz	
	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase	Ampli.	Fase
1	605E-5	208,6	262E-4	199,7	267E-5	343,1	346E-5	13,5
2	373E-4	200,3	654E-4	202,5	208E-4	186,7	547E-4	187,9
3	533E-4	201,3	997E-4	202,2	112E-4	197,6	328E-4	192,4
4	276E-4	25,0	514E-4	24,9	113E-4	188,3	293E-4	190,4
5	101E-4	208,7	210E-4	198,3	257E-5	11,4	560E-5	13,5
6	614E-5	97,5	114E-4	297,6	308E-5	264,2	471E-6	119,2
7	425E-4	108,1	404E-4	289,4	292E-4	92,8	278E-4	277,3
8	751E-4	102,5	757E-4	290,0	222E-4	93,2	246E-4	282,5
9	448E-4	109,7	448E-4	292,8	187E-4	271,8	192E-4	100,4
10	977E-5	287,3	127E-4	116,2	182E-5	90,9	182E-5	295,9

Os elementos do autovalor à esquerda v_i , onde i é o índice do autovalor correspondente, são identificados através dos resíduos da função de transferência H_{lk} , onde l é o índice da estação de medição, e k é o índice da estação de excitação de tal forma que:

$$H_{lk} = \frac{X_l}{F_k} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{i^u_l i^v_k}{j\omega - \lambda_i} \quad l = 3, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 10$$

Os elementos identificados dos autovetores à esquerda, para 300 rpm são:

$$[v] = \left[v_1^{(v)}, v_2^{(v)}, \dots, v_8^{(v)} \right]$$

onde $v_i^{(v)}$ é o autovetor à esquerda que corresponde ao i -ésimo autovalor do rotor.

$$v_1^{(v)} = \begin{Bmatrix} (-,314)+j(0,503) \\ (-,139)+j(0,242) \\ (-,164)+j(0,090) \\ (0,042)+j(-,049) \\ (1) +j(0) \\ (0,461)+j(0,112) \\ (0,202)+j(0,053) \\ (-,051)+j(-,009) \end{Bmatrix}$$

$$v_2^{(v)} = \begin{Bmatrix} (1) +j(0) \\ (0,364)+j(-,390) \\ (0,068)+j(0,221) \\ (-,044)+j(0,008) \\ (-,731)+j(-,344) \\ (0,080)+j(0,370) \\ (0,108)+j(0,150) \\ (-,034)+j(-,053) \end{Bmatrix}$$

$$v_3^{(v)} = \begin{Bmatrix} (1) +j(0) \\ (-,089)+j(-,110) \\ (0,379)+j(0,030) \\ (-,059)+j(0,056) \\ (0,514)+j(-,071) \\ (0,065)+j(0,260) \\ (-,179)+j(-,111) \\ (-,044)+j(-,098) \end{Bmatrix}$$

$$v_4^{(v)} = \begin{Bmatrix} (0,217)+j(-,023) \\ (0,073)+j(0,121) \\ (0,091)+j(-,011) \\ (1) +j(0) \\ (0,014)+j(0,006) \\ (0,000)+j(0,000) \\ (0,001)+j(0,093) \\ (-,002)+j(0,053) \end{Bmatrix}$$

$$v_5^{(v)} = \begin{Bmatrix} (0,022)+j(-,077) \\ (0,067)+j(-,491) \\ (-,108)+j(0,701) \\ (-,021)+j(0,114) \\ (-,081)+j(0,007) \\ (-,563)+j(-,055) \\ (1) +j(0) \\ (0,231)+j(0,019) \end{Bmatrix}$$

$$v_6^{(v)} = \begin{Bmatrix} (-,263)+j(0,011) \\ (-,655)+j(-,003) \\ (1) +j(0) \\ (0,152)+j(0,019) \\ (0,011)+j(-,113) \\ (-,020)+j(-,404) \\ (0,029)+j(0,759) \\ (0,002)+j(0,161) \end{Bmatrix}$$

$$v_7^{(v)} = \begin{Bmatrix} (-,031)+j(-,086) \\ (-,048)+j(0,711) \\ (0,098)+j(-,372) \\ (-,012)+j(0,149) \\ (-,104)+j(0,016) \\ (1) +j(0) \\ (-,761)+j(-,005) \\ (0,289)+j(-,004) \end{Bmatrix}$$

$$v_8^{(v)} = \begin{Bmatrix} (-,063)+j(-,006) \\ (1) +j(0) \\ (-,598)+j(-,004) \\ (0,216)+j(0,067) \\ (0,003)+j(-,008) \\ (0,053)+j(0,509) \\ (0,036)+j(-,148) \\ (-,003)+j(0,160) \end{Bmatrix}$$

8 - MODELO MATEMATICO DO ROTOR VERTICAL

8.1 - INTRODUÇÃO

No estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos rotativos, é importante antecipar com exatidão o comportamento dinâmico do rotor, tanto para se ter uma informação melhor durante o estágio do projeto, como para permitir, na medida do possível, melhor estabilidade, segurança e desempenho operacional. Isto significa que em geral devem ser calculadas a variação das frequências naturais em função da velocidade de rotação, de onde se obtém as velocidades críticas, o desbalanceamento e as respostas devido à excitação de forças assíncronas.

Nos últimos quinze anos foram apresentados vários estudos incluindo modelos matemáticos de rotores e a resolução destas equações. Pestel [18] e Pilkey [19], por exemplo, usaram técnicas de matriz de transferência.

Desde 1970 vários pesquisadores, em geral da área de análise da dinâmica de rotores, tem estudado e usado o método dos elementos finitos para modelamento de tais sistemas.

Em 1974, Polk [20] apresentou um estudo sobre velocidade natural de precessão (Whirl) e análise de velocidades críticas usando o método de Rayleigh. Nelson e Mc.Vaugh [21] apresentaram um estudo em 1975 no qual utilizaram o método de Rayleigh para sistemas mecânicos rotativos similar ao método de Polk. Em ambos as equações de elementos foram desenvolvidas tanto num sistema de

coordenadas fixas como no sistema rotativo. Nelson, em 1980 [22] estendeu o trabalho de Polk e o seu próprio trabalho e apresentou os resultados do estudo numérico do elemento finito do eixo rotativo para determinar a sua exatidão, baseando-se na teoria da viga de Timoshenko, considerando também o efeito de cisalhamento do elemento de viga do eixo no sistema rotativo. Berthier [13] estudou a velocidade crítica, desbalançoamento e respostas assíncronas de uma turbina a gás e um compressor centrífugo, usando o método de elementos finitos, reduzindo o número de graus de liberdade do sistema, usando os modos de vibração do sistema parado. Outros pesquisadores tem estudado sistemas dinâmicos de multicorpos, dos quais derivam as equações dinâmicas do movimento via computador digital. O primeiro trabalho foi publicado por Hooker e Margulier [23], e Roberson e Wittenburg [24]. Este formalismo numérico foi investigado para sistemas mecânicos rotativos de corpos rígidos considerando três configurações. Mais tarde Schiehlen e Kreuzer [25] propôs, em 1977, um método para derivação das equações do movimento para corpos rígidos via computador digital, baseado nas equações de Newton e Euler para cada corpo e nos princípios d'Alembert para completar o sistema. Em 1986 Schiehlen e Rauh [26] apresentam o mesmo método estendendo-o para sistemas multicorpos flexíveis. Neste trabalho, uma comparação entre elementos de multicorpos de forma aproximada e o método de elementos finitos é apresentada como um exemplo simples.

Para o modelo matemático do sistema físico nós podemos mencionar alguns aspectos:

- 1 - A bancada de teste é considerada simétrica, e as razões já foram discutidas no capítulo 7.
- 2 - Temos um sistema com oito graus de liberdade com uma faixa de frequência específica já definida. Enquanto considerarmos a simetria do rotor, nós podemos usar o modelo com quatro graus de liberdade.
- 3 - A bancada de teste foi montada em vários estágios e seus parâmetros modais foram identificados nestes estágios. Também foi projetada de forma a permitir variações nas propriedades do rotor tais como: massa, inércia, rigidez, posições dos mancais e das massas. Portanto, existe a necessidade de se ter um modelo matemático para permitir modificações num intervalo de tempo e esforço mínimos.
- 4 - Como estamos interessados em obter um modelo matemático para antecipar os parâmetros modais do rotor, enquanto este estiver girando, o modelo escolhido deve permitir a inclusão da massa e da inércia de rotação.

O método de elementos finitos é escolhido para representar o modelo matemático, tendo as vantagens mencionadas nos itens 3 e 4 acima. Este método tem as mesmas facilidades como as do método de sistemas de multicorpos assim como outros itens considerados. Além do mais estava implementado no computador HP modelo 9845A.

O método dos elementos finitos que está sendo usado, considera;

- 1) Efeito giroscópico da massa em rotação;
- 2) Massa do eixo e inércia devido à rotação transversal;
- 3) Efeito de cisalhamento sobre o eixo; e
- 4) A simetria do rotor em todos os elementos usados.

O modelo usado é baseado no paper publicado por Nelson e Vaugh [21,22].

8.2 - O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO ROTOR VERTICAL

O modelo é apresentado na figura 8.1, mostrando-se o modelo do elemento finito do rotor vertical simétrico, Usou-se quinze elementos no modelo.

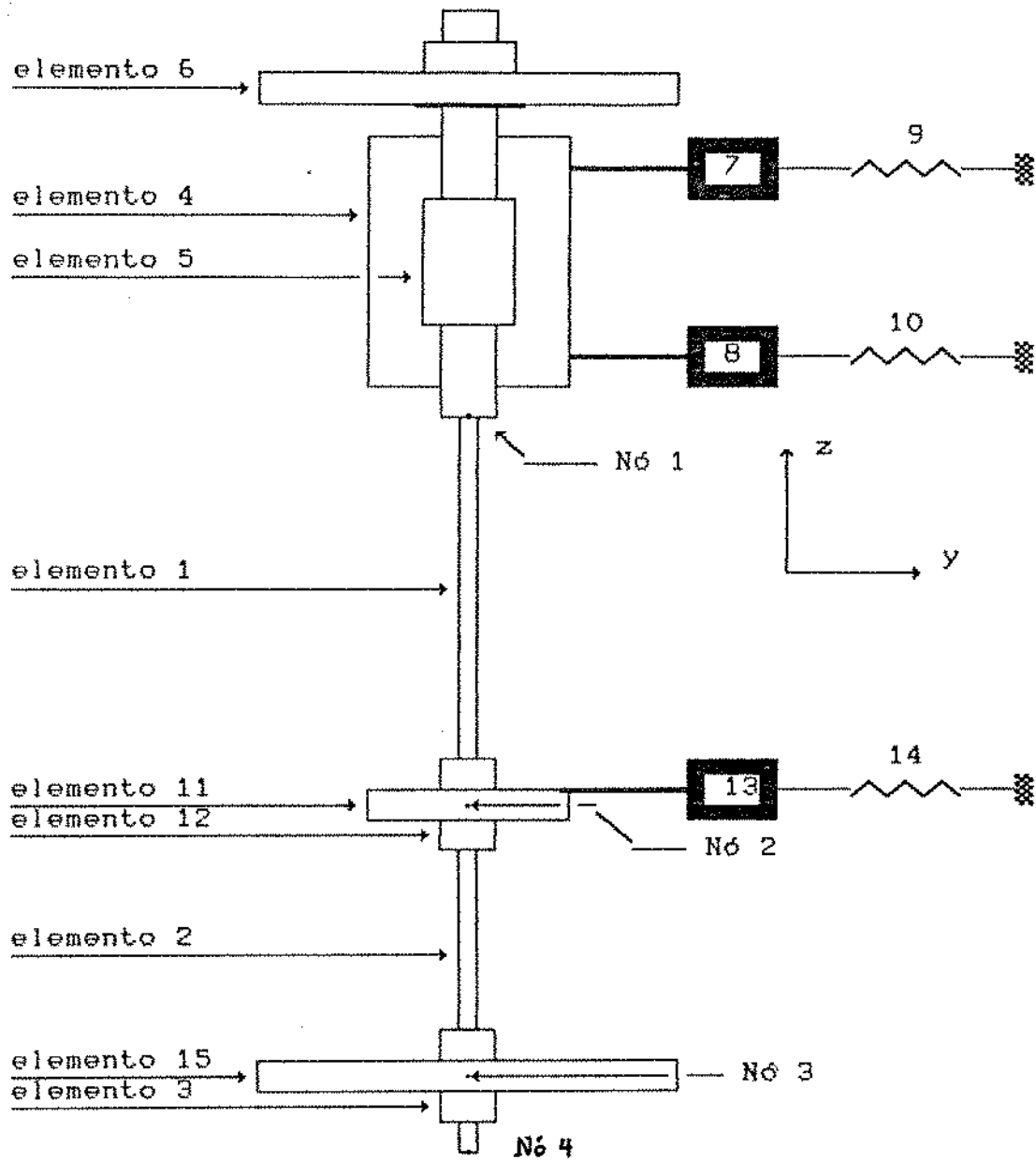


Fig. 8.1 Modelo de Elementos Finitos do Rotor Vertical

Tem-se, basicamente três estações. Na primeira estação, tem-se a máquina com o disco superior montado em molas. Há um total de 7 elementos nesta estação. O quarto elemento representa a massa e a inércia da máquina incluindo o rotor e o estator. O quinto elemento tem somente inércia polar e representa a parte rotativa do rotor com suas próprias ligações. O sétimo e o oitavo elementos são as massas das plataformas das molas. A conexão entre o sétimo e o oitavo elemento com o quarto elemento é rígida. Todos estes elementos são condensados por seus próprios equivalentes dinâmicos no primeiro nó do eixo.

Na segunda estação, tem-se o mancal intermediário montado nas molas. O décimo primeiro elemento representa a massa e a inércia do mancal intermediário, enquanto o décimo segundo elemento representa somente a inércia polar do mancal intermediário. O décimo terceiro elemento é apenas a massa do elemento, que é ligado rigidamente ao suporte do mancal intermediário. A rigidez do mancal intermediário e das molas são condensadas no décimo quarto elemento, que é um elemento de rigidez.

A terceira parte consiste do disco inferior que é modelado, no décimo quinto elemento; pela sua massa, inércia e inércia polar.

As três partes são conectadas por três elementos de viga representando o eixo.

As frequências naturais do eixo foram identificadas no capítulo 7; aqui compararemos aqueles dados com os obtidos através de um modelamento por elementos finitos, nos seguintes três estágios de identificação :

- 1 - Eixo Livre-Livre,
- 2 - Rotor Livre-Livre,
- 3 - Rotor montado em repouso,

8.3 - MODELAMENTO DO EIXO LIVRE-LIVRE

Podemos obter um modelo de elementos finitos do eixo Livre-Livre, através do modelo mostrado na figura 8.1, fazendo os elementos 5,7,8,9,10,12,13 e 14 com valor zero; podemos facilmente obter a matriz de massa [M] e a de rigidez [K] do modelo.

Tendo resolvido o problema dos autovalores através do método geral de Jacobi, obtemos as três primeiras frequências naturais do eixo Livre-Livre.

A tabela 8.1 mostra os resultados para os dados da atual geometria do eixo vertical.

TABELA 8.1 Frequências Naturais do Eixo Livre-Livre, Calculadas pelo M.E.F

Modo	Freq. Nat. Hz
1	36,82
2	157,5
3	463,6

8.4 - MODELAMENTO DO ROTOR LIVRE-LIVRE

Através do modelo geral, podemos obter um modelo para o rotor Livre-Livre; fazendo os elementos 7,8,9,10,13 e 14 assumirem um valor nulo; teremos, então, as matrizes de massa e rigidez.

Tendo determinado os autovalores, obtemos as três primeiras frequências naturais.

A tabela 8.2 demonstra as frequências naturais do rotor Livre-Livre.

TABELA 8.2 Frequências Naturais do Rotor Livre-Livre

Modo	Freq. Nat. Hz
1	14,49
2	49,94
3	92,03

8.5 - MODELAMENTO DO ROTOR MONTADO, EM REPOUSO

No modelo geral, quando a velocidade rotacional Ω é assumida como nula, nos dá a matriz de massa e rigidez do rotor montado, em repouso.

As quatro primeiras frequências naturais, são mostradas na tabela 8.3, que são as frequências na faixa escolhida de 50 Hz.

TABELA 8.3 Frequências Naturais do Modelo do Rotor Montado, em Repouso

Modo	Freq. Nat. Hz
1	7,172
2	13,21
3	21,04
4	46,68

8.6 - AJUSTANDO O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

O objetivo de possuir um modelo matemático é para poder prever o comportamento dinâmico do rotor, nas condições dadas.

Aqui nosso objetivo, utilizando o modelamento por elementos finitos, é prever os parâmetros modais do rotor em movimento a velocidades específicas. E, também, prever estes parâmetros para diferentes configurações de massa e rigidez do rotor. Entretanto queremos um modelo, que, com pequenas mudanças em sua estrutura, possa ser usado com alguma variação geométrica do rotor.

Por esta razão nós identificamos o rotor vertical nos diferentes estágios :

- 1) Eixo Livre-Livre,
- 2) Rotor Livre-Livre e, finalmente,
- 3) Rotor montado na bancada

1 - Eixo Livre-Livre

A tabela 8.4 mostra a comparação entre os resultados obtidos através do modelo por elementos finitos e os identificados experimentalmente.

TABELA 8.4 Comparação das Frequências do Eixo Livre-Livre

Modo	Elementos finitos	Experimentalmente	Erro %
1	36,87	36,18	1,9
2	157,5	153,9	2,3
3	463,6	410,5	13

Os resultados experimentais foram considerados como base da comparação.

Devemos, também, mencionar que estamos comparando os resultados teóricos de um modelo conservativo, com os resultados experimentais de um rotor que é internamente amortecido.

Primeiramente introduziremos o efeito do cisalhamento no eixo e os resultados são mostrados na tabela 8.5.

TABELA 8.5 Efeitos do Cisalhamento no Eixo

com efeito do cisalhamento		sem efeito do cisalhamento	
Modo	Freq. Nat. Hz	Modo	Freq. Nat. Hz
1	36,82	1	36,82
2	157,5	2	157,6
3	463,6	3	464,4

Como nos observamos o cisalhamento terá muito pouco efeito nos resultados

Neste estágio existe a possibilidade de ajuste da massa e das propriedades de inércia do rotor (estator e rotor), e também

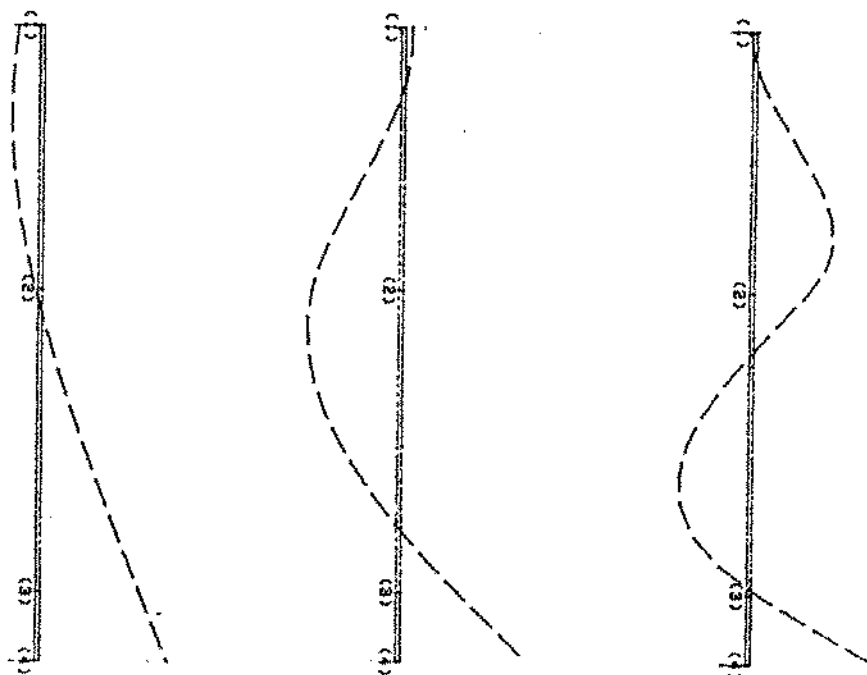


Fig. 8.2 Modos Naturais do eixo Livre-Livre

as propriedades do eixo como: módulo de elasticidade (E), densidade específica (ρ), diâmetro (d), e o comprimento (l). O erro envolvido na medição de (E), (ρ) e (d) é muito pequeno, mas o erro na medição do comprimento é maior devido ao engastamento no primeiro nó. O comprimento não será ajustado pois o erro desta

dimensão só terá influência nas altas frequências. Quanto à massa do rotor, o erro máximo avaliado na medição é da ordem de 1 %. O erro no cálculo da inércia do rotor é comparativamente maior devido a não uniformidade da superfície do rotor, mas não excede 5 % .

Olhando para os modos naturais mostrados na figura 8.2, notamos que a primeira frequência natural é sensível às variações de inércia do rotor; enquanto o segundo modo é mais sensível à variação da massa do rotor; e, também, o erro mostrado na tabela 8.5 demonstra a possibilidade reduzida de medição da massa do rotor já explicado acima.

Entretanto, aqui, tentamos ajustar apenas o primeiro modo diminuindo 2% à inércia do rotor . Estes resultados são mostrados na tabela 8.6, e comparados com os experimentais.

TABELA 8.6 Frequências Naturais do Rotor Livre-Livre, comparadas com os Resultados Experimentais

Modo	Freq.Nat.Modelo Hz	Freq.Nat.Experimental	Erro %
1	37,01	36,18	2,2
2	157,65	153,9	2,8
3	463,4	410,5	13

Podemos aumentar o número de elementos para o modelamento do eixo e veremos que o erro para a terceira frequência natural

diminui, o que é naturalmente esperado.

Os resultados finais desse estágio de ajuste são mostrados na tabela 8.7 , e os erros são mais coerentes.

TABELA 8.7 Frequências Naturais do Rotor Livre-Livre comparando o modelo ajustado aos dados experimentais

Modo	Freq.Nat.Modelo Hz	Freq.Nat.Experimental	Erro %
1	37,01	36,18	2,2
2	157,2	153,9	2,1
3	438,4	410,5	6,8

2 - Rotor Livre-Livre

Agora, iremos tentar ajustar os parâmetros modais para o próximo estágio do rotor Livre-Livre.

Observando o modelo físico do rotor, figura 8.2 , focalizamos nossa atenção na região A , posição do mancal intermediário; e a região B , posição do disco inferior.

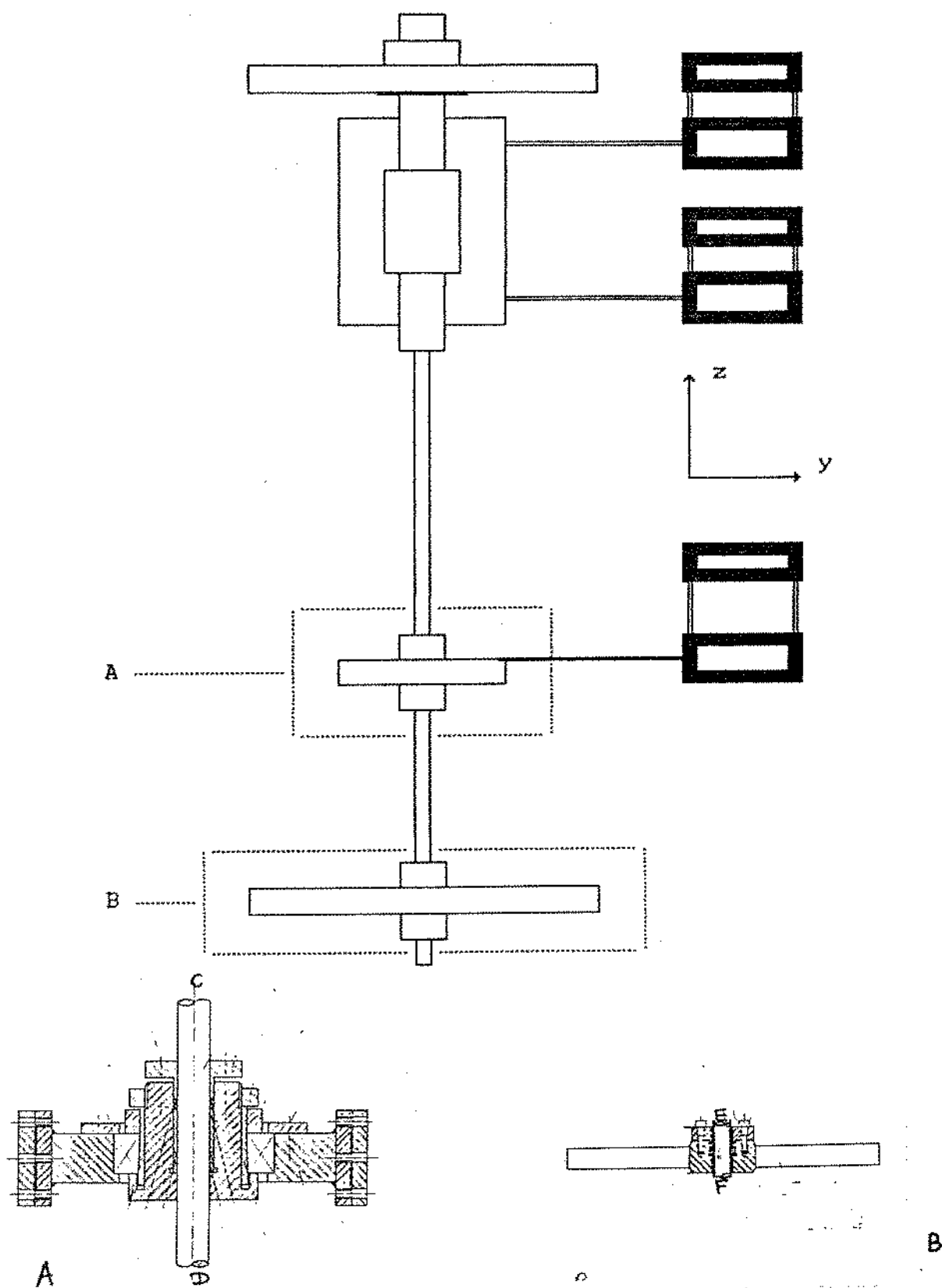


Fig 8.3 Localização das Regiões A e B no Rotor

Vamos considerar a passagem do eixo através do mancal intermediário na região \overline{CD} . Aqui nós notamos que o movimento do eixo é restrito pelo mancal e o contato do trecho \overline{CD} do eixo com o mancal é semirígido. Usando o modelo de elementos finitos, nós teremos a massa do mancal concentrada no seu centro de gravidade G_b . Para construirmos um modelo mais realista devemos considerar o efeito do eixo passando nas regiões \overline{CD} e \overline{EF} .

Existem três modos para se mostrar a passagem do eixo através dessas duas regiões:

1 - Considerando o eixo mais rígido:

o que em nosso modelo é o mesmo que aumentar o módulo de elasticidade E .

2 - Restringir o movimento angular do eixo

3 - Introduzir uma rigidez angular.

Se introduzirmos uma rigidez com uma ordem de grandeza maior para satisfazer a terceira opção, nós praticamente teremos os resultados da segunda opção.

Obviamente nenhum desses caminhos descreverá o que realmente está ocorrendo com o rotor. Mas podemos conseguir uma boa aproximação disso. Aqui escolhemos aumentar somente a rigidez do eixo aumentando o seu módulo de elasticidade E , nos trechos \overline{CD} e \overline{EF} , porque esta é a aproximação mais realista do que realmente ocorre com o rotor.

A tabela 8.7 mostra os resultados para esta variação.

TABELA 8.7 Efeito da Variação da Rigidez do Eixo nas Frequências Naturais do Rotor Livre-Livre.

Modo	$E^* = E$	$E^* = 1,4E$	$E^* = 1,5E$	Experimental
1	14,39	14,71	14,77	14,65
2	49,59	50,18	50,28	49,81
3	91,85	96,69	97,59	97,66

A comparação dos modos naturais obtido pelo modelo matemático com os modos experimentais é mostrada na figura 8.4 .

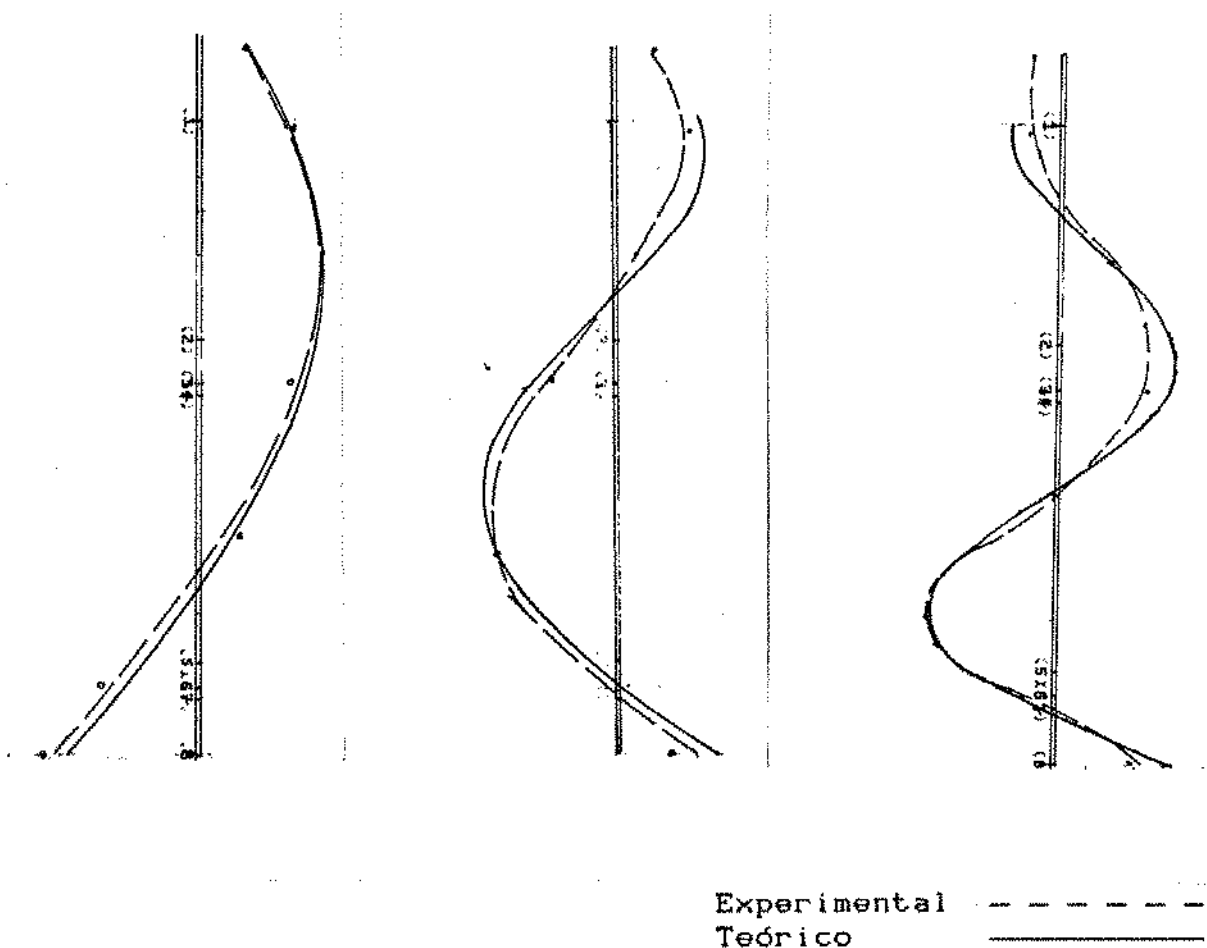


Fig 8.4 Modos Naturais do Rotor Livre-Livre

3 - Rotor montado em repouso

Aqui no estágio final da obtenção dos parâmetros modais do rotor, em repouso, tentaremos ajustar um modelo analítico através de um experimental; concentrando maior atenção nas formas dos

modos naturais.

A tabela 8.9 ilustra as frequências naturais teóricas obtidas usando um modelo ajustado do rotor Livre-Livre, e os valores originais dos coeficientes de rigidez identificados estaticamente na bancada de testes.

TABELA 8.9 Frequências Naturais do Rotor Montado Obtidas por F.E.M

Modo	Frequência Hz
1	7,335
2	13,24
3	21,18
4	46,22

Vamos olhar para os modos naturais mostrados na figura 8.5. Notamos que o primeiro e o quarto modos são muito próximos dos experimentais. Aqui tentaremos ajustar o segundo e o terceiro modos.

Olhando mais atentamente para o segundo modo, podemos ver na figura 8.5 que existem diferenças nos ângulos no ponto "A" do mancal intermediário, no terceiro nó. Para ajustarmos o modelo analítico ao experimental, devemos diminuir este ângulo, o que no modelo físico significa a existência de uma rigidez angular ativa

no mancal e no motor. Isto devido à configuração geométrica do posicionamento das molas no mancal; como é mostrado na figura 8.6.

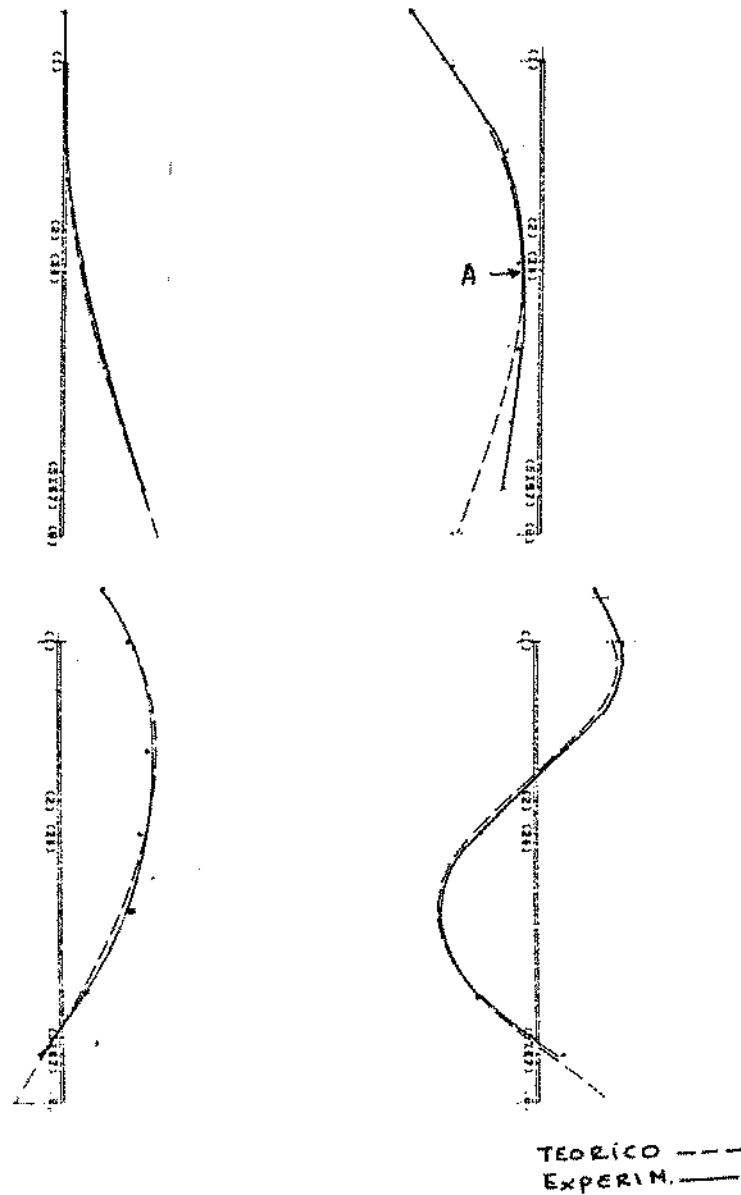


Fig. 8.5 Os Modos Naturais do Rotor Montado

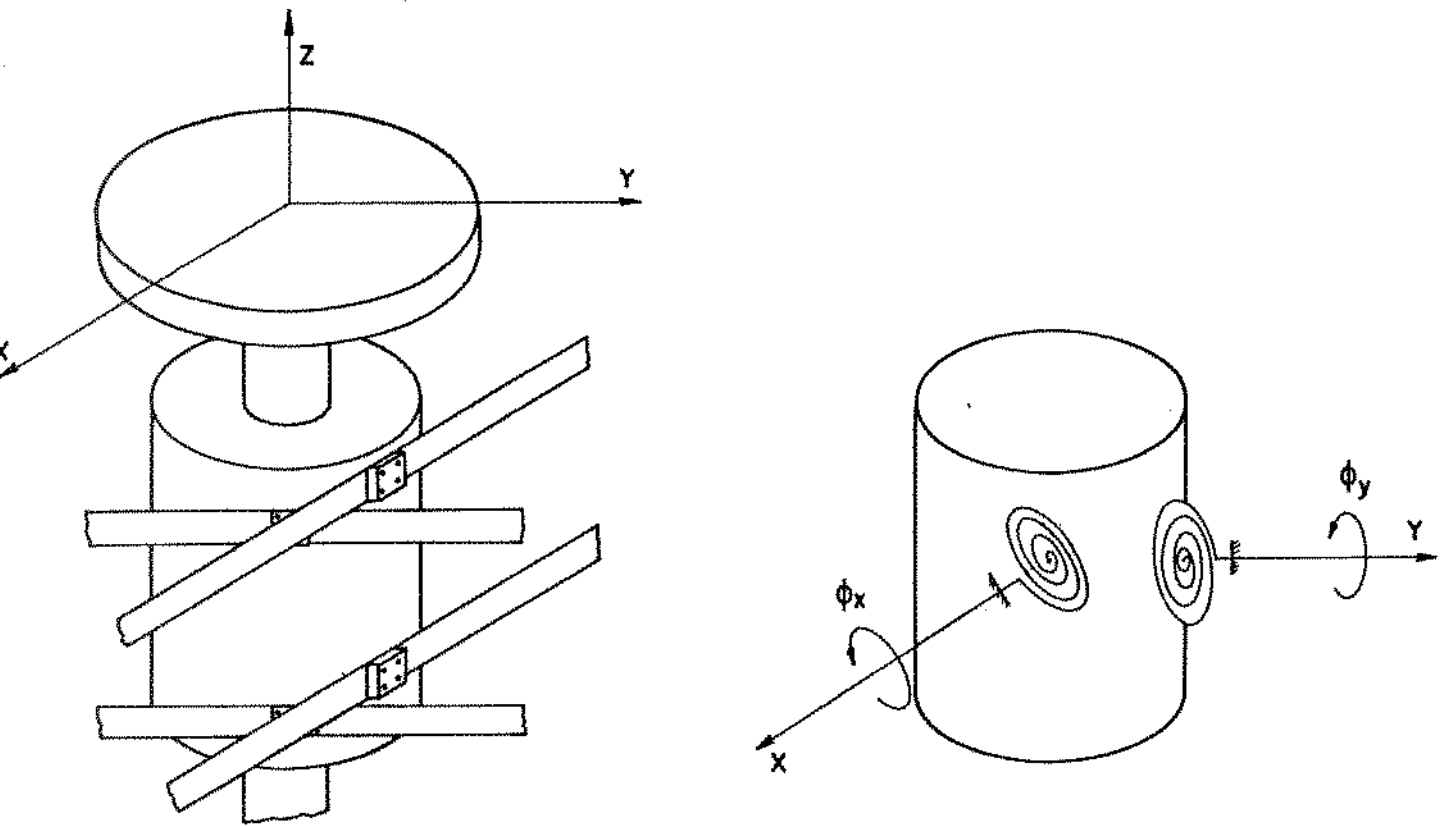


Fig. 8.6 Equivalência do Efeito de Torção

Os resultados deste ajuste são mostrados na tabela 8.10.

TABELA 8.10 Freqüências Naturais do Rotor Montado

Modo	Freq. Nat. Hz	Freq. Nat. Hz
1	8,543	8,394
2	13,27	13,02
3	21,60	22,11
4	48,61	46,60

Olhando a forma do segundo modo, figura 8.8, notamos que ainda devemos aumentar a rigidez angular ${}_1K\phi_x$ para igualar a forma

do segundo modo com o experimental.

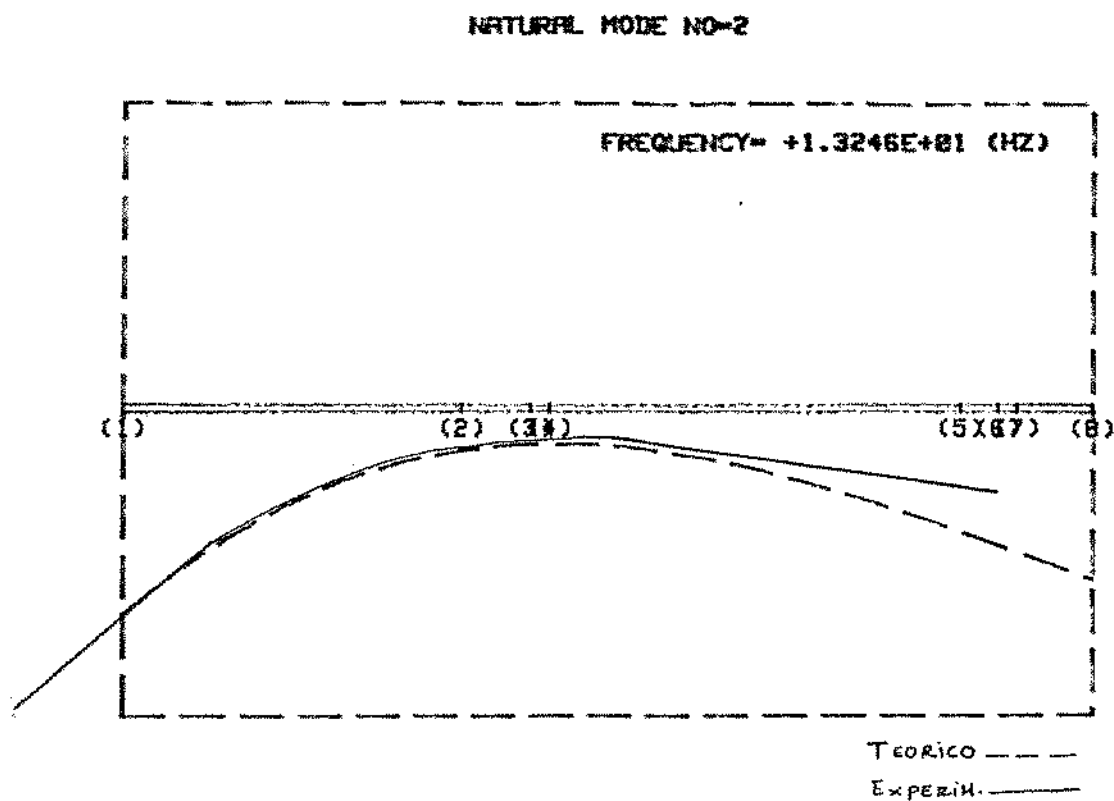


Fig 8.8 Comparação entre a Forma do Segundo Modo obtido através de um Modelo de Elementos Finitos e Experimentalmente

Aqui, devemos introduzir uma mola angular no primeira nó para representar a rigidez angular causada por K_{ϕ_x} como foi mostrado na

figura 8.6. Os resultados obtidos através do modelo para as frequências naturais são mostrados na tabela 8.11 .

TABELA 8.11 Frequências Naturais do Modelo ajustado através da adição de uma Mola Angular

Modo	Modelo	Experimental	Erro %
1	8,565	8,403	1,9
2	13,52	13,02	3,8
3	22,73	22,11	2,3
4	49,29	46,61	5,7

Para fazer que os erros mostrados na tabela 8.11 sejam mais coerentes, devemos aumentar a terceira frequência natural. Olhando para o segundo modo natural, mostrado na figura 8.9 podemos ver que ainda devemos ajustar o segundo modo natural, enquanto aumentamos a terceira frequência natural. Para fazermos isto devemos aumentar o valor da mola angular no primeiro nó e também aumentar a rigidez linear do terceiro nó.

NATURAL MODE NO=2

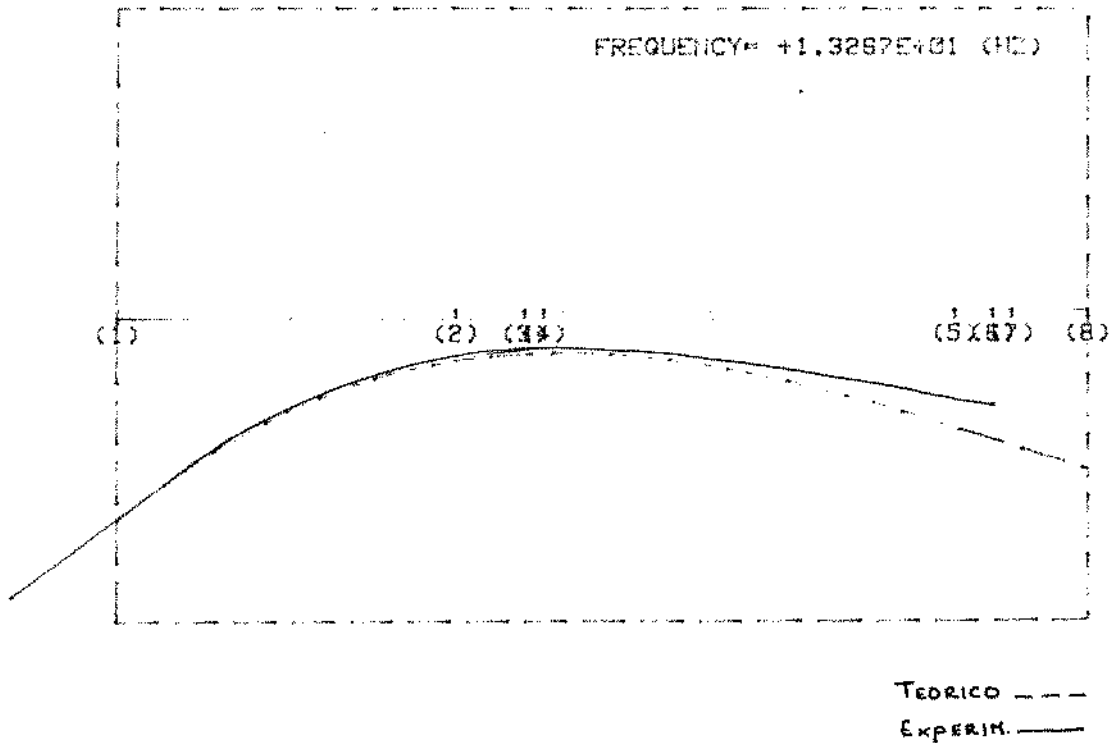


Fig. 8.9 O Segundo Modo Natural

Os resultados destas modificações nas frequências naturais são mostrados na tabela 8.12 .

TABELA 8.12 Frequências Naturais do Rotor montado

Modo	Modelo	Experimental	Erro %
1	8,675	8,34	3,4
2	13,570	13,02	4,2
3	23,26	22,11	5,2
4	49,38	46,8	5,5

Os erros das frequências naturais estão coerentes agora. Podemos, também, observar que o segundo e o terceiro modos naturais, mostrados na figura 8.10, são também muito próximos dos experimentais. Nós estamos usando 7 estações no rotor para identificar os modos naturais.

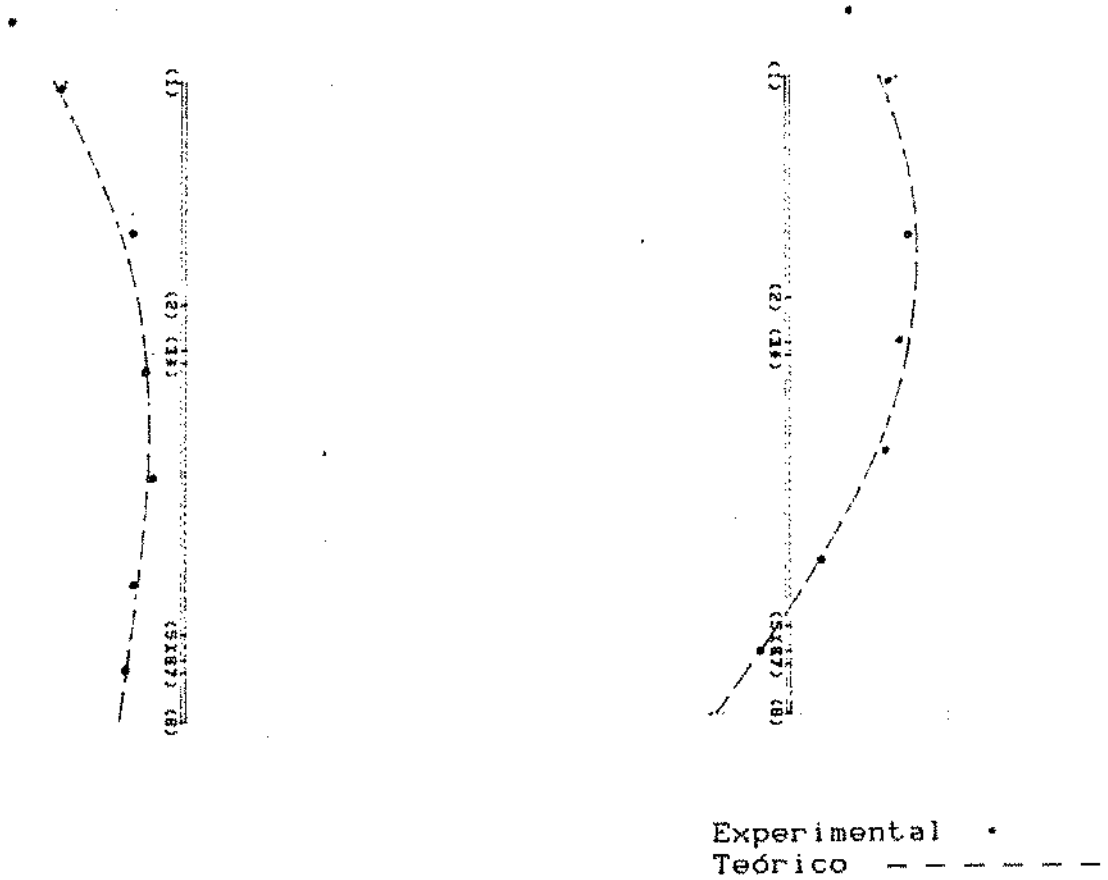


Fig. 8.10 O Segundo e o Terceiro Modos Naturais

Como nós estamos ajustando o modelo através dos modos naturais identificados, principalmente o segundo e terceiro modos, obviamente estes dois modos naturais serão bem ajustados com os modos naturais teóricos obtidos a partir do nosso modelo de elementos finitos. Então tentaremos comparar os resultados para o primeiro e quarto modos naturais.

No caso do primeiro modo natural, a forma do modo, que é mostrada na figura 8.11, é muito próxima da forma do modo do disco rígido engastado no primeiro nó.

A forma do modo pode ser aproximada por uma função cúbica e só dependerá de dois vetores de posição, para dois pontos ao longo do rotor, que já identificamos. A forma do modo varia levemente devido à variação nas frequências naturais. Então iremos focalizar somente a quarta frequência natural.

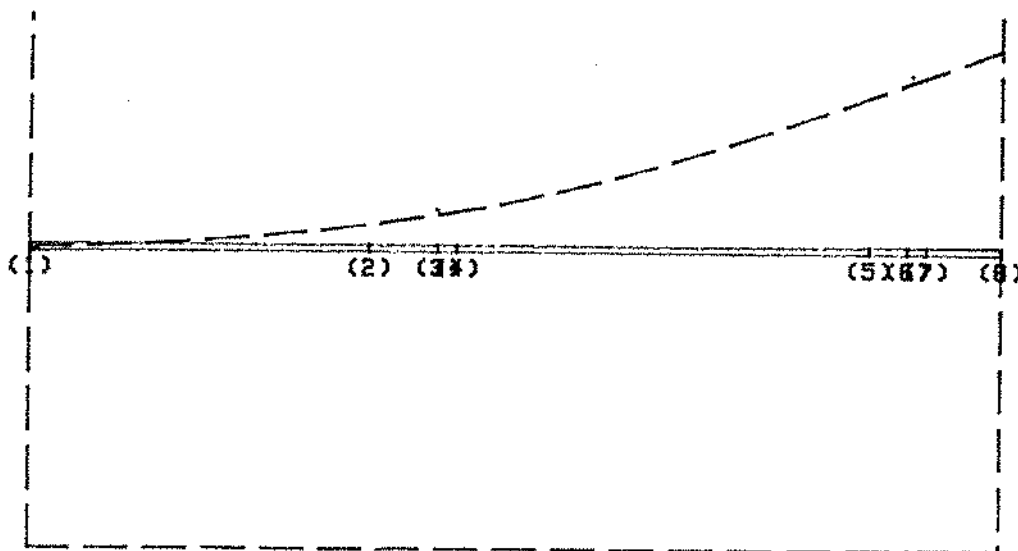


Fig 8.11 Primeiro Modo Natural do Rotor montado

Devemos tentar identificar este modo para os pontos de maior importância:

- a) Localização do nó; e
- b) Localização do pico da função de transferência.

Para conseguirmos este objetivo posicionamos três sensores de deslocamento, na provável posição do pico do deslocamento, no modo, como é mostrado na figura 8.12, e identificamos a função de transferência nestas três posições para o pico do terceiro modo.

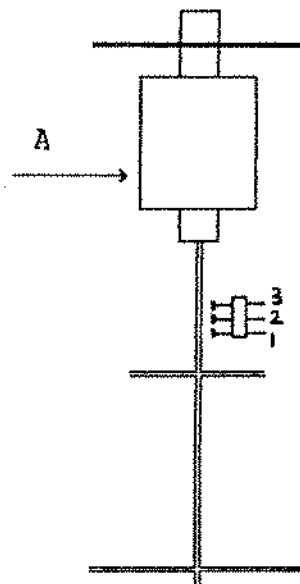
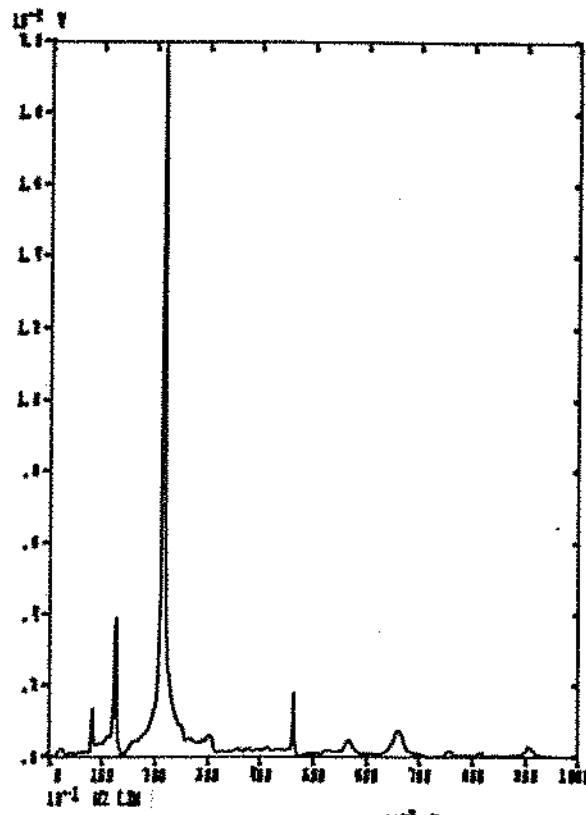


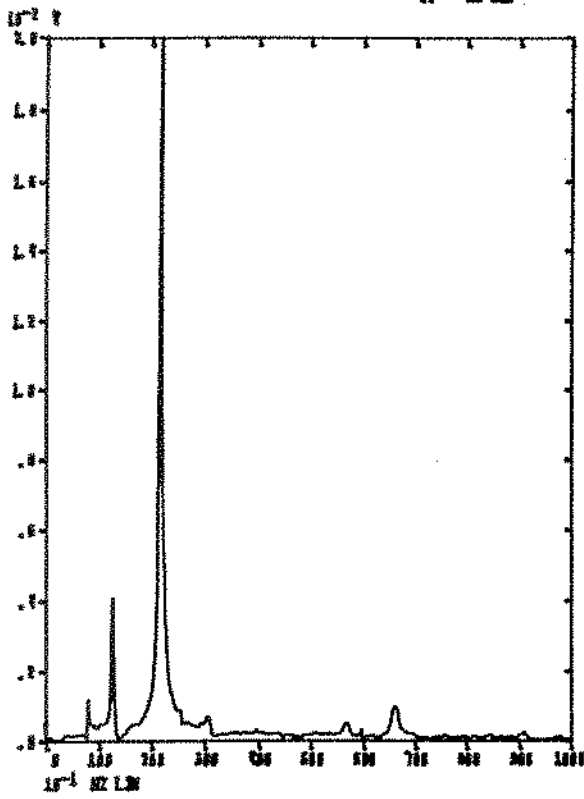
Fig 8.12 Posicionamento das sensores de deslocamento no Rotor montado

O rotor é excitado na posição A e a resposta é medida nas posições 1, 2, 3. Através da variação das posições de medição podemos identificar a localização do nó do quarto modo no rotor. A figura 8.13 ilustra a função de transferência das posições 1, 2 e 3 respectivamente.

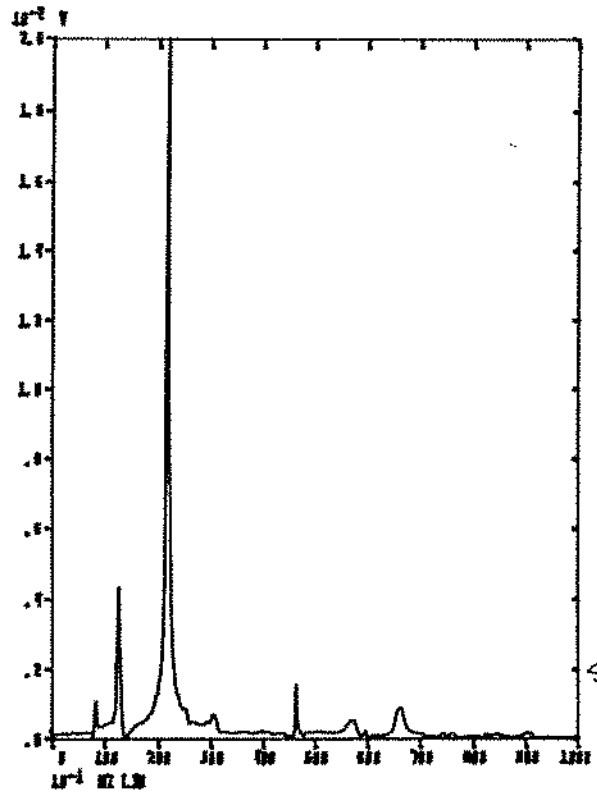
Rotor Vertical



SENSOR 1



SENS.2

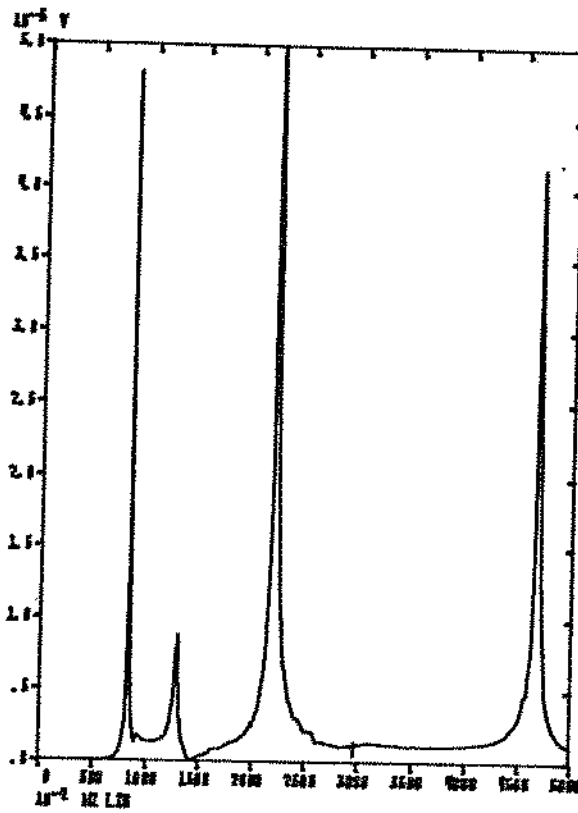


SENS3

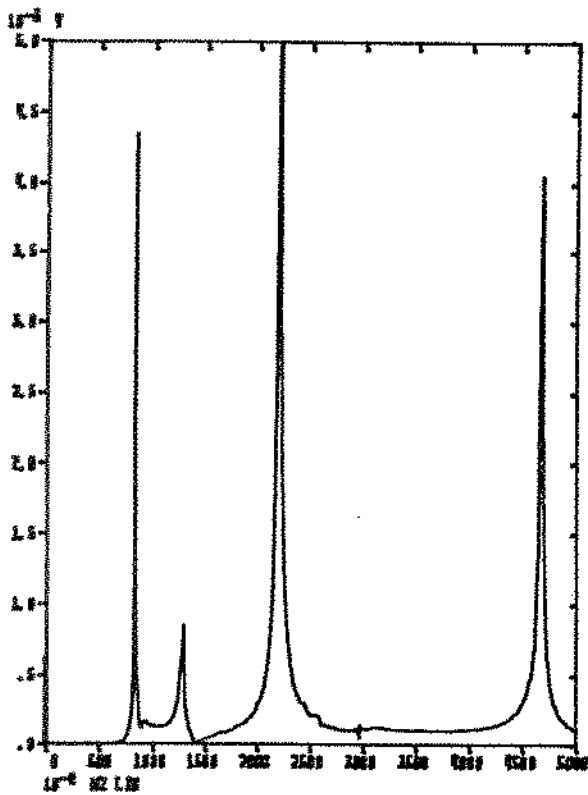
Fig 8.13 A Função de Transferência medida nas Posições 1, 2 e 3 no Rotor montado

Devemos repetir o mesmo procedimento para identificar a posição de pico no quarto modo. A figura 8.14 ilustra a função de transferência para os sensores de deslocamento 1, 2 e 3 respectivamente no rotor.

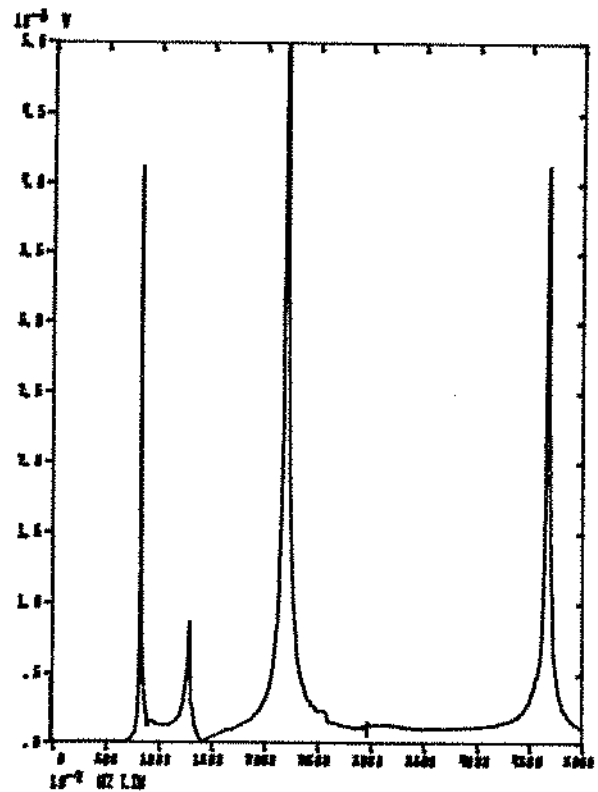
Com mais estas duas posições traçamos o quarto modo natural na figura 8.15 .



SENSOR 1



SENS-2



SENS-3

Fig 8.14 Função de Transferência nas Posições de Medição 1, 2 e 3 no Rotor montado

A comparação com a forma do modo teórico obtido a partir de F.E.M mostra resultados satisfatórios. Além disso, aqui nós atendemos nosso objetivo de ajustar a F.E.M. usando as frequências naturais e os modos naturais. A figura 8.16 demonstra o modelo dos elementos finitos com os parâmetros ajustados. No próximo capítulo iremos utilizar o modelo ajustado para predizer os autovalores do rotor à velocidades específicas.

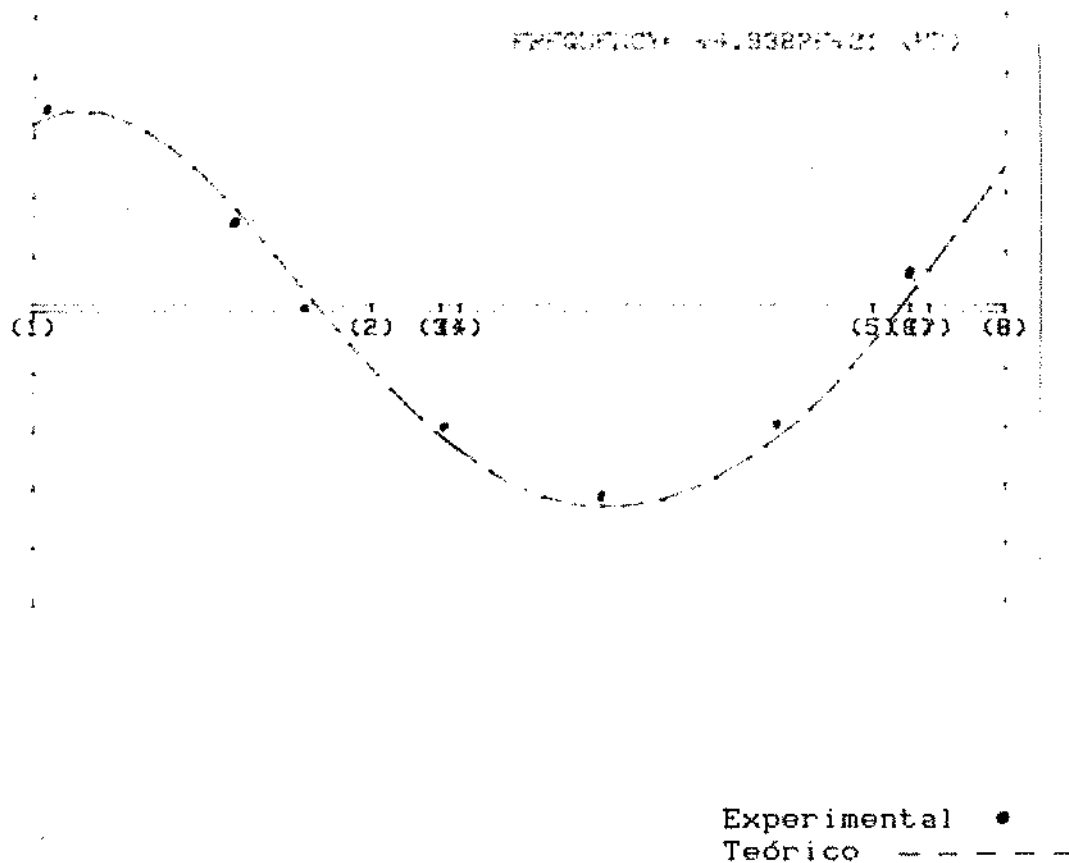


Fig 8.15 Quarto Modo Natural do Rotor

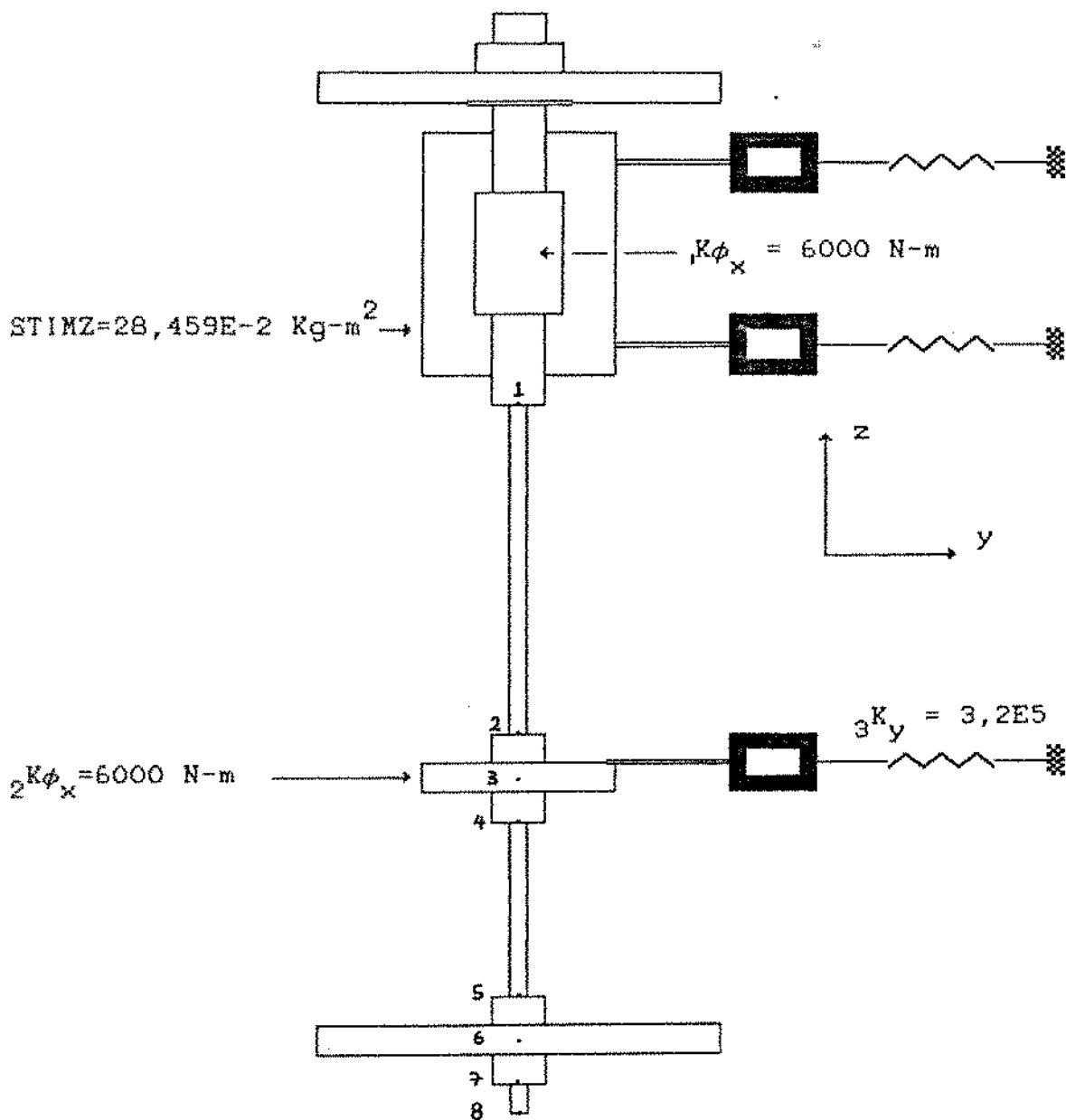


Fig 8.16 Modelo de Elementos Finitos para os Parâmetros ajustados em relação à Figura 2.3

9 - SÍNTESE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO EIXO VERTICAL

9.1 - O ROTOR EM REPOUSO

Considerando o rotor vertical mostrado na figura 9.1, temos três partes distintas :

- 1) Motor com suas molas e o disco superior,
- 2) Mancal intermediário e sua mola de suporte, e
- 3) Disco inferior.

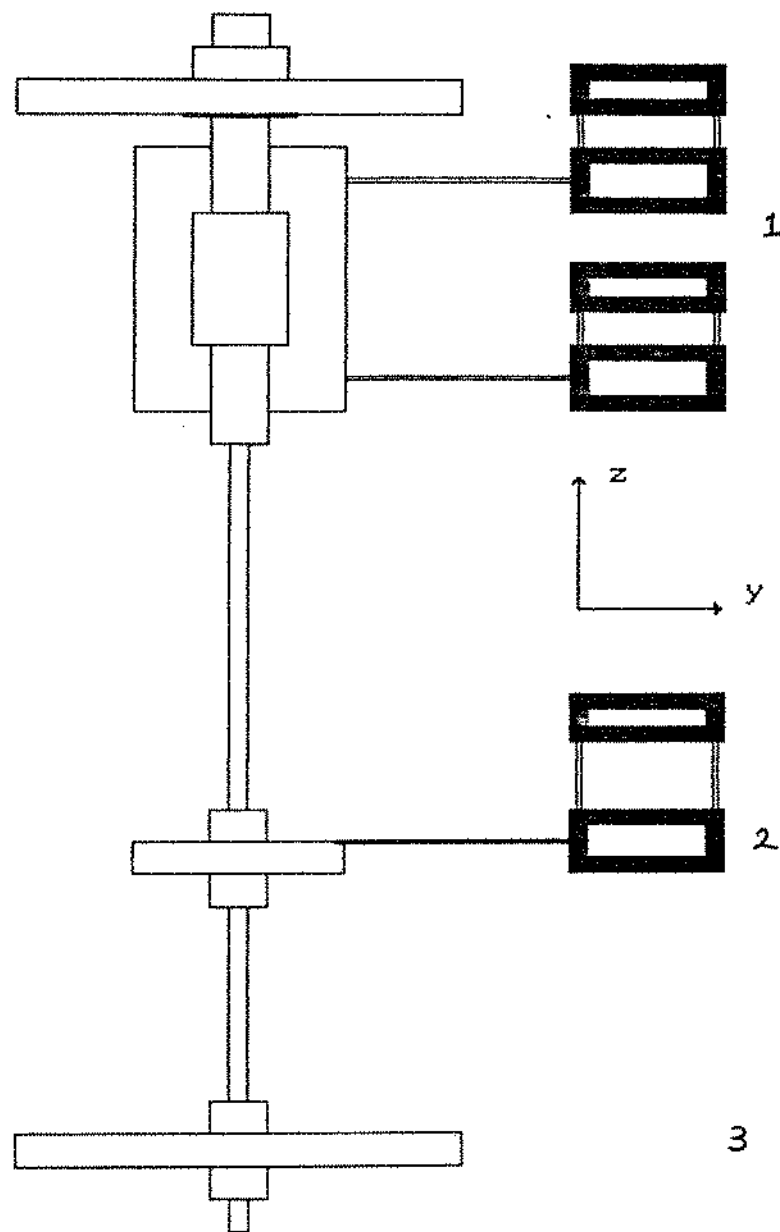


Fig 9.1 O Rotor Vertical e suas três Partes distintas

O eixo é uma conexão elástica entre as partes. No caso do eixo vertical, este é bastante flexível comparado com as demais

partes.

Para entender o papel do eixo no comportamento dinâmico global do rotor, vamos considerar as seguintes situações hipotéticas :

1 - A primeira parte como um sistema de um grau de liberdade. Podemos imaginar esta situação olhando para a figura 9.2

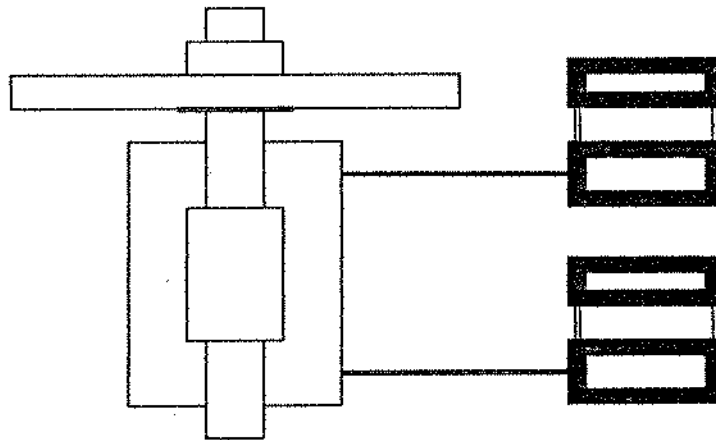


Fig 9.2 Configuração de Sistema de Um Grau de Liberdade para a Primeira Parte

Massa total do sistema = SDM + RTM + STM + 2PLM = 63,52 Kg

Rigidez total do sistema =

$$= Ky_1 + Ky_2 = (3,16 \times 10^5 + 2,86 \times 10^5) = 6,02 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Frequência natural} = \omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{m_s}} = \left(\frac{6,02 \times 10^5}{63,52} \right)^{1/2} =$$

$$= 97,35 \text{ rad/seg} \rightarrow f_N = 15,493 \text{ Hz}$$

Se compararmos estes resultados com a segunda frequência natural identificada para o rotor montado, descobriremos um erro de aproximadamente 19%. Portanto podemos assumir que o segundo

modo natural do rotor é principalmente devido ao movimento translacional da primeira parte.

2 - A segunda parte como um sistema de um grau de liberdade

Vamos repetir o procedimento anterior, com o auxílio da figura 9.3, teremos :

Massa total do sistema = BRM + BSM + PLM = 15,524 Kg

Rigidez total = 2,91E5

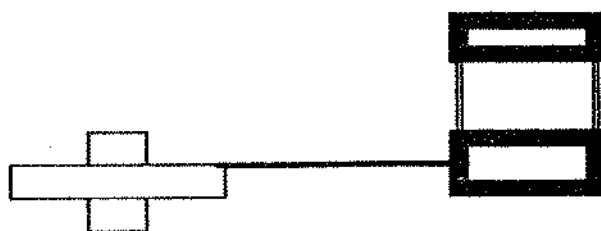


Fig 9.3 A Segunda Parte como um Sistema de Um Grau de Liberdade

Frequência natural = 136,91 rad/seg $\rightarrow f_N = 21,79$ Hz

Surpreendentemente este resultado é menor que o da torçeira frequência natural identificada, o que nos leva a concluir que a rigidez neste ponto deve ser maior do que havíamos considerado.

A razão para um sistema rígido foi exposta no capítulo 8.6, com a figura 8.6 .

3 - A terceira parte como um sistema de um grau de liberdade

Esta parte pode ser representada como um disco em balanço como é mostrado na figura 9.4

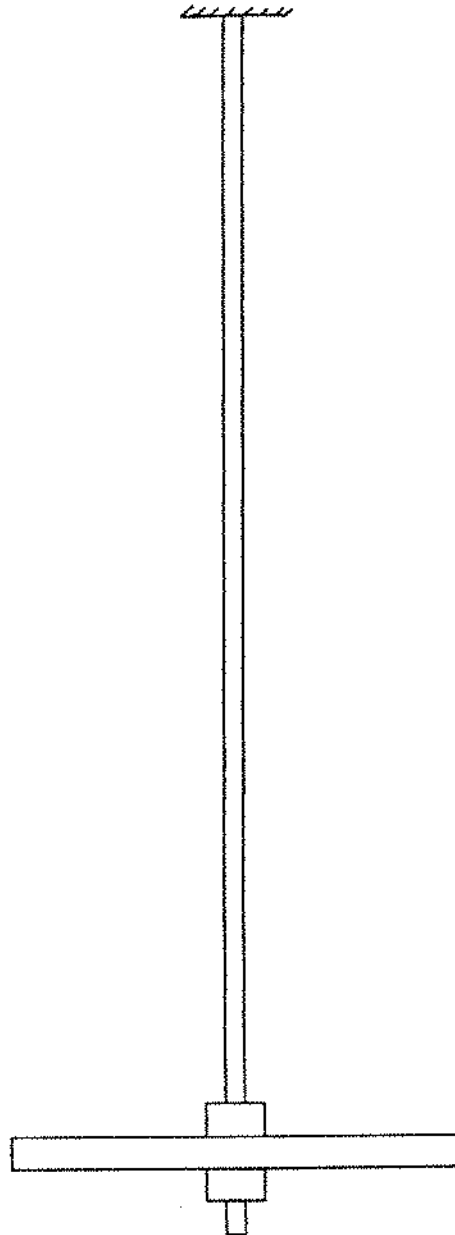


Fig 9.4 A Terceira Parte como um Disco em Balanço

Neste caso, podemos calcular a frequência natural por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_B}{m_B}}$$

onde m_B = LDM (massa do disco inferior), e temos uma expressão para K_B (do capítulo 5) como :

$$K_B = \frac{12 EJ^2}{l^3}$$

onde E, J^2 e l são parâmetros do eixo, os quais podemos obter a partir da tabela 2.1 . Os resultados são :

$$m_B = 11,32 \text{ Kg}$$

$$K_B = 4,24 \times 10^4 \text{ N/m}$$

$$\text{Frequência natural, } \omega_n = \sqrt{\frac{K_B}{m_B}} = 61,26 \text{ rad/seg} \rightarrow f_N = 9,75 \text{ Hz}$$

Estes resultados causam um erro de 16% em comparação com a primeira frequência natural identificada.

Estas comparações nos possibilitam compreender o comportamento dinâmico do eixo vertical e de mecanismos em rotação em geral. Além disso, irá nos auxiliar a modificar a configuração geométrica e as propriedades do rotor para obtermos características especiais .

9.2 - BAIXO NÍVEL DE AMORTECIMENTO INTERNO

Nós já comparamos várias vezes as frequências naturais de um sistema teórico, sem amortecimento, com os autovalores de um sistema levemente amortecido. Esta comparação foi possível porque o rotor é levemente amortecido, e além do amortecimento interno temos outras possíveis fontes de amortecimento, tais como fricção com o ar, atrito seco, e amortecimento magnético.

Voltamos ao capítulo 7.1.8, que descreve a identificação dos autovalores do rotor em repouso; temos fatores de amortecimento variáveis para diferentes modos; o que significa termos uma estrutura com amortecimento interno desproporcional e também, a presença de fontes e seus efeitos em cada modo, que pode nos fornecer fatores de amortecimento diferentes para modos diferentes. O segundo modo é fortemente amortecido em relação aos demais modos, e nos processos de identificação é o de maior desvio padrão.

9.3 - ROTOR MONTADO GIRANDO

É importante verificarmos como os autovalores do sistema físico estão variando com a velocidade de rotação do eixo. Já identificamos estes autovalores para várias rotações no capítulo 7.

Como foi mencionado no capítulo 4, estes autovalores possuem parte real e parte imaginária ($\lambda_i = \alpha_i \pm \omega_i$).

A parte imaginária do autovalor (ω_i) do rotor versus a velocidade de rotação Ω é mostrada no diagrama de Campbell, figura 9.5. Na mesma figura, ilustramos o fator de amortecimento ζ_i versus a velocidade de rotação Ω , que está diretamente relacionado à constante de amortecimento α_i , isto é, a parte real dos autovalores λ_i .

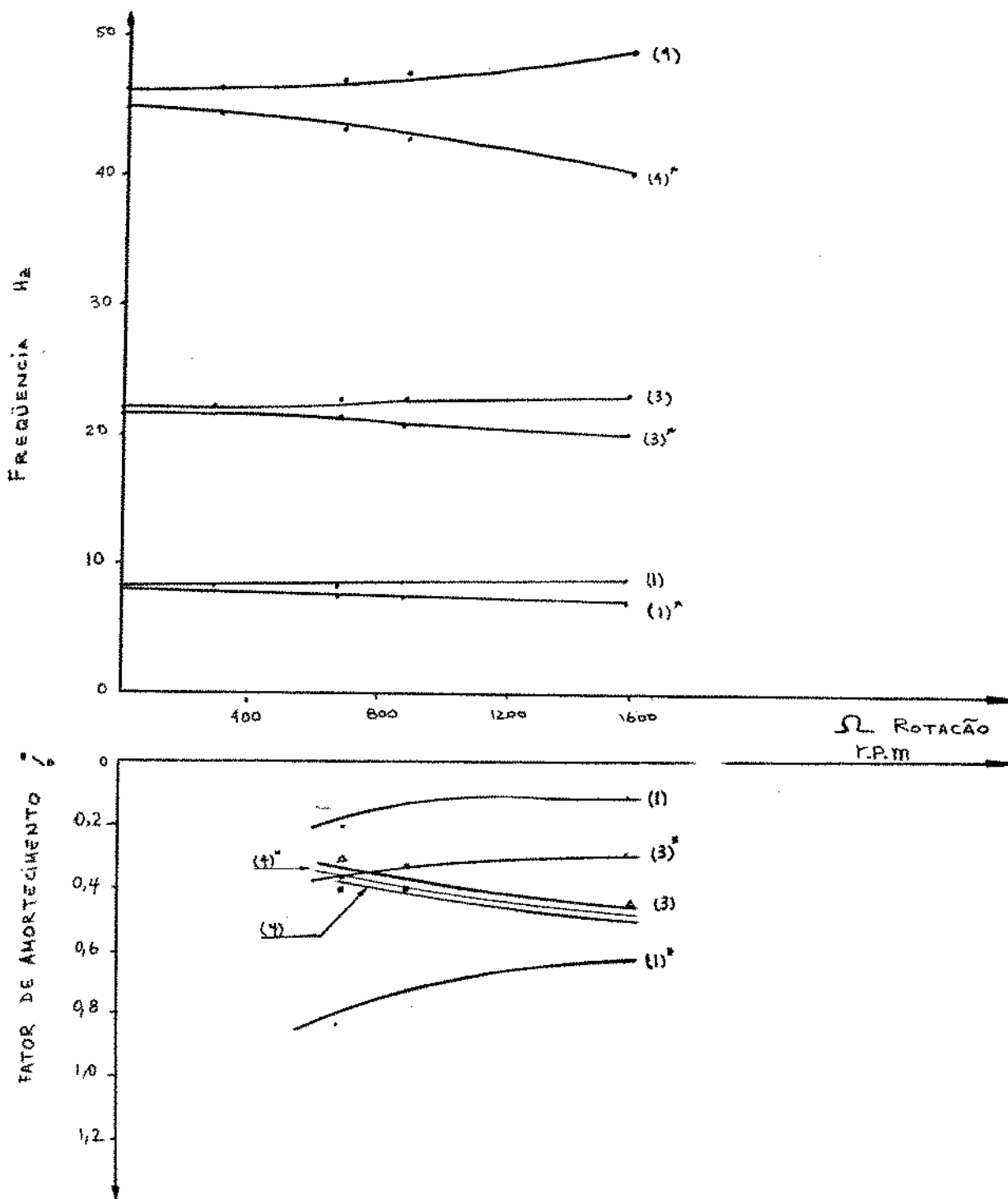


Fig 9.5 Autovalores do Rotor

O fator de amortecimento do segundo modo é consideravelmente baixo quando o rotor está girando a 2000 rpm. Isto significa que a parte real do autovalor, que é negativa, está próxima de zero, o que pode induzir uma vibração não amortecida para o segundo modo. Esta é uma informação importante a ser considerada quando o rotor estiver girando a altas velocidades.

É óbvio que o diagrama de Campbell para o sistema é mostrado em relação às informações estimadas em torno das velocidades críticas do rotor.

Calculamos também as frequências naturais a partir do M.E.F. versus a velocidade de rotação, ver figura 9.6, comparando-as com a parte imaginária dos autovalores do rotor versus a velocidade de rotação. Neste diagrama, para relacionar os resultados

experimentais com os teóricos, calculamos a variação adimensional

$\frac{i\omega_r}{i\omega_0}$ versus a velocidade de rotação. Aqui $i\omega_r$ é a frequência natural do i -ésimo modo de vibração do M.E.F. numa velocidade de rotação específica e $i\omega_0$ é a frequência natural do i -ésimo modo de vibração do rotor parado ($\Omega = 0$).

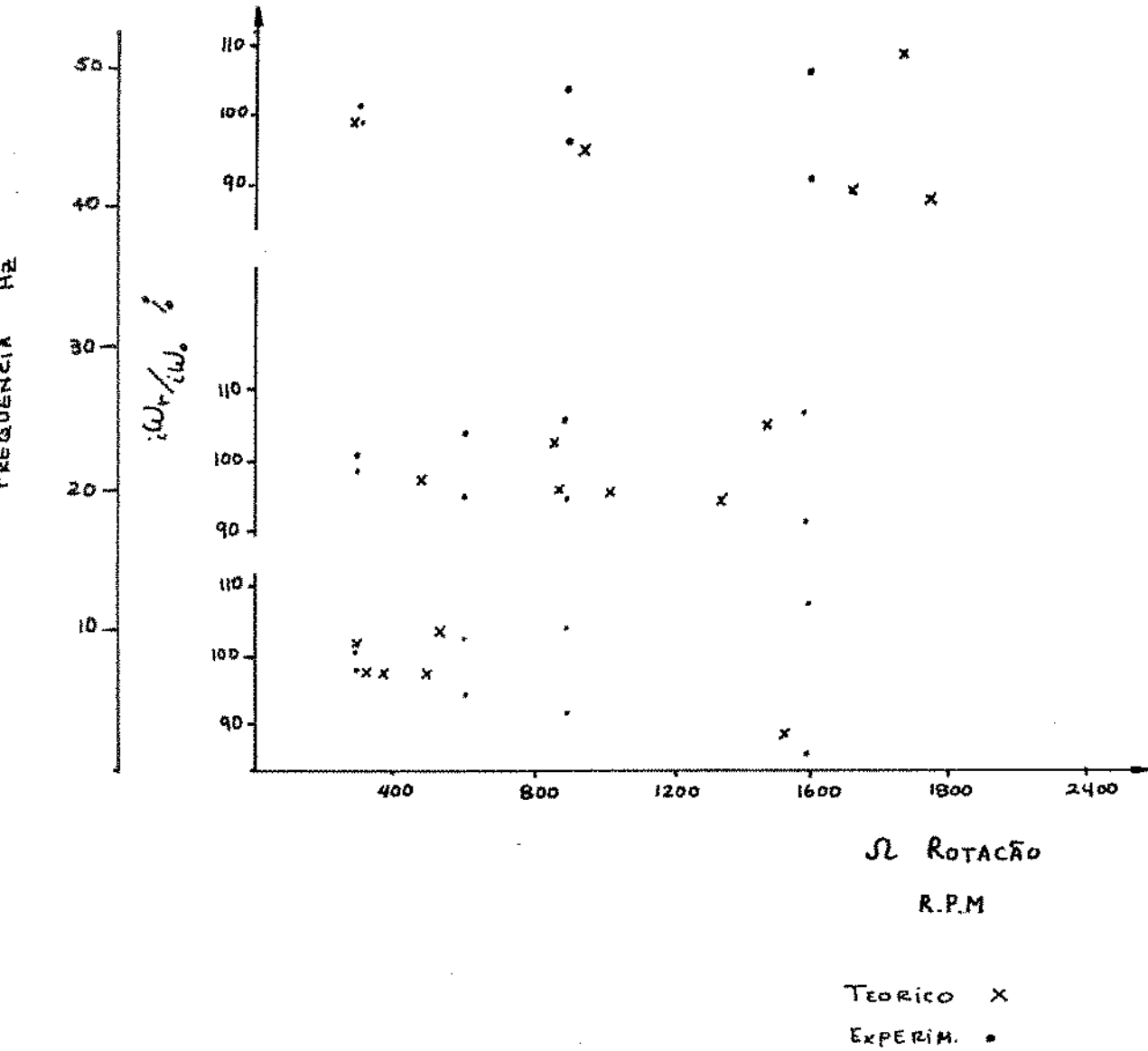


Fig 9.6 Comparação das Frequências Naturais Teóricas e experimentais versus Rotação do Rotor

Considerando que os resultados teóricos em geral apresentam um erro de 5% em relação aos experimentais, o que significa uma estimativa razoável do modelo dos elementos finitos, comparando-se o parâmetro adimensional $\frac{i\omega_r}{i\omega_o}$. A diferença, conforme aparece na

fig

ura 9.6, é muito pequena, portanto, podemos ver que é possível prever, com pequena margem de erro, os autovalores do rotor para uma dada rotação.

10 - CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Mostramos ao longo deste trabalho as dificuldades relacionadas com o entendimento das velocidades críticas em rotores simétricos e não-simétricos.

Berthier em um de seus trabalhos mais recentes [27], discutindo o modelo matemático de turbinas a gás feito através do método de elementos finitos, demonstra em um modelo de eixo "disimétrico", que as velocidades críticas relacionadas ao "backward whirl" e ao "forward whirl" são excitadas por forças desbalanceadas que provocam a vibração do rotor. Mas o trabalho falha na tentativa de explicar se esta "disimetria" pode ocorrer em um sistema real ou simplesmente é uma hipótese de modelo de simulação. O trabalho também falha em mostrar que a mesma coisa pode ocorrer com um rotor simétrico.

Nesta tese, foi desenvolvida a equação polinomial característica para um rotor em balanço, não simétrico, não amortecido na tentativa de melhor caracterizar o efeito giroscópico em máquinas rotativas. A partir desta análise explicamos o "backward whirl" como fenômeno característico na dinâmica de rotores.

No caso do disco simétrico em balanço, como está demonstrado pelas figuras 5.2, e 5.3, as duas equações características (5.26) e (5.24) tem quatro soluções positivas (dependendo da rotação Ω). As duas frequências da precessão $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ podem ser consideradas como direta pelo fato que seus valores aumentam com a rotação Ω ,

e as duas frequências ω_1^* e ω_2^* , por diminuir com a rotação tem sido chamado precessão retrógrada. No caso de um disco em balanço com característica não simétrica na rigidez, estas frequências estão presentes no sistema porém, com a diferença que seus valores não são mais iguais para $\Omega = 0$. Portanto no caso da referência [27], enquanto o autor demonstra que a velocidade de rotação em uma turbina com propriedades elásticas não simétricas cruza a frequência do precessão retrógrada, causando desta forma a amplitude originária da excitação por desbalanceamento, na realidade este fenômeno ocorre pelo fato da excitação por desbalanceamento excitar o precessão direta em sua frequência natural num plano perpendicular ao primeiro considerado.

Mostramos também pela figura 10.1 uma análise de assinatura de duas estações posicionadas com 90° de diferença no disco inferior do rotor vertical da bancada de teste demonstra experimentalmente o que foi mencionado acima.

Este fenômeno também é aparente nos autovetores à direita identificados no Capítulo 7. Os elementos destes autovalores tem o seu valor máximo nestas duas estações de medição do disco inferior do rotor vertical.

Portanto consideramos que pela análise do polinômio característico e através dos dados experimentais da bancada de teste foi possível clarificar esta situação cujo tratamento na literatura ainda é dúbio ou errado.

No Capítulo 8 foi derivado um modelo por elementos finitos, capaz de predizer os autovalores do rotor com um erro aceitável. Isto foi possível utilizando-se métodos de identificação de parâmetros na bancada e também por serem perfeitamente conhecidos, ou determináveis, os parâmetros geométricos da mesma (o que nem sempre é possível em instalações reais já concluídas).

Sugere-se uma alteração nas propriedades de rigidez das molas de lamina para modificar a ordem dos modos de vibração do rotor em repouso, de maneira que correspondam aos de uma máquina hidroelétrica real. Finalmente queremos mencionar a experiência que adquirimos quando tentamos definir os problemas de vibração da bancada por um estudo aproximado da severidade da vibração. As três menores frequências, que correspondem à vibração de translação das três estações de medição da bancada, são em geral mais amortecidas. Elas são facilmente calculadas pela massa e pela rigidez de montagem destas estações, apresentando um erro aceitável para uma estimativa preliminar de engenharia, mesmo sem considerar a rigidez do eixo. Os níveis de vibração destas estações são limitados devido ao amortecimento e à fricção causada no movimento de translação. As frequências mais elevadas estão ligadas a um movimento de rotação, perpendicular ao eixo de rotação do rotor, das estações de medição e suas frequências naturais não podem ser estimadas "a grosso modo" com a mesma facilidade anterior, sem envolver uma análise com um modelo teórico. A possibilidade das estações terem um movimento

translacional elevado é muito restrita. Conseqüentemente o nível de amortecimento pode ser muito pequeno, exceção feita quando houver presença de amortecimento específico neste caso. É difícil detetar este movimento angular das estações de medição por um sensor convencional de deslocamento. Concluímos que este movimento angular no caso de máquinas hidroelétricas com eixo vertical é muito semelhante no seu fundamento físico ao estudo do movimento angular de um disco em balanço.

Queremos aproveitar para sugerir algumas pesquisas futuras envolvendo a bancada de teste utilizando para tanto o conhecimento adquirido ao longo dos inúmeros ensaios que fizemos e do estágio atual da informação que se reflete na bibliografias publicada.

1 Análise do problema de "rubbing", onde o rotor raspa sobre uma superfície lateral e que foi objeto de trabalho de Schweitzer e Czczygielski [28] . Neste caso um modelo teórico deve ser confrontado com medições na bancada, utilizando o disco como se fosse em balanço (isto é, engastando o motor de acionamento) e utilizando o mancal de segurança no extremo inferior para forçar a situação de "rubbing". O programa de elementos finitos pode ser facilmente adaptado para os nossos parâmetros, formando um modelo matemático útil nesta situação.

2 Mudança da configuração geométrica para simular um disco em balanço com propriedades de rigidez não simétricas ou para estudar um rotor não simétrico. Esta alteração é facilmente feita na bancada, cuja versatilidade neste sentido ficou comprovada nos

ensaios já realizados.

3 Alteração de posição do mancal intermediário ao longo do rotor de forma a reduzir a vibração translacional e angular do disco inferior. Uma posição ótima deve ser inicialmente simulada em uma configuração do rotor em balanço do sistema. Devem ser feitos estudos no sentido de diminuir o movimento angular evitando que haja uma tendência para o aparecimento de fenômenos de auto-excitação (típicas de turbogeradores), por exemplo pelo "rubing" (atrito) nos anéis de desgaste (ou de limitação do movimento) ou nas vedações que são usadas via de regra para o controle do movimento translacional.

Finalmente sugerimos enrijecer o suporte da bancada, por exemplo chumbando-a em uma fundação de concreto, o que permitirá a análise até frequências mais altas.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Pederson, P.T.: On Forward and Backward Precession of Rotors, Springer Verlag 1972
- 2 Eiber, A.; Weber, H.I.: Experiments in Rotordynamics, VII COBEM, Dezembro 1985, Uberlandia, MG, Brasil
- 3 Dedini, F.G.: Determinação Experimental das Constantes de Mola de Bancada, GEPRUM Unicamp, Março 1984
- 4 Müller, P.C.: Dynamics of Rotors : A Linear Approach, V COBEM, Dezembro 1979, Campinas, SP, Brasil
- 5 Meirowitch, L.: Methods of Analytical Dynamics, Mc Graw Hill Company, New York, 1970
- 6 Nordmann, R.: Modal Parameter Identification and Sensitivity Analysis in Rotating Machinery
- 7 Nordmann, R.: Modal Analysis in Rotor Dynamics, CISM Courses and Lectures No. 273, Springer Verlag Wien-New York, 1984
- 8 Gasch, R.; Pfützner, H.: Rotordynamik, Springer Verlag, New York, 1975
- 9 Kennedy, C.C., Pancu, C.D.P.: Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis, Journal of Aeronautical Sciences, November 1947
- 10 Bishop, R.E.P.; Gladwell, G.M.L.: An Investigation Into the Theory of Resonance Testing, Proc. Roy. Soc. Phil. Trans, 255(A)241, 1963
- 11 Salter, J.P.: Steady State Vibration, Kenneth Mason Press, 1969
- 12 Ewins, D.J.: Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press LTD. England, 1981
- 13 Berthier, P.; elat: Comportement Dynamique d'un Rotor de Turbine a Vapeur, Proceedings of Sixth World Congress on Theory of Machines and Mechanism, 1983

Bibliografia

- 14 Bert, C.W.; Chen, T.L.C.: Lateral and Tilt Whirl Modes of Flexibly mounted Flywheel Systems, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1975
- 15 Bendat, J.S.; Piersol, A.G.: Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1980
- 16 Newland, D.E.: Random Vibration and Spectral Analysis, Longman Press, 1975
- 17 Thomson, W.J.: Theory of Vibration with Applications, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1978
- 18 Pestel, E.; Leckie, F.: Matrix Method in Electromechanics, Mc Graw Hill, 1963
- 19 Pilkey, W.D., Chang, P.Y.: Modern Formulas for Statics and Dynamics, Mc Graw Hill, 1978
- 20 Polk, S.R.: Finite Element Formulation and Solution of Flexible Rotor - Rigid Disc Systems for Natural Frequencies and Critical Whirl speeds, MSE Engineering Report, Arizona State University, 1979
- 21 Nelson, H.D.; Mc Vaughn, J.M.: The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite-Element, Proceedings of ASME-75-WA/DE-19, USA
- 22 Nelson, H.D.: A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Journal of Mechanical Design, 79-WA/DE-5, USA
- 23 Hooker, W.W.; Margulies, G.: The Dynamical Attitude Equations for an N-Body Satellite, Journal Astr. Sc. 12, 1965
- 24 Roberson, R.E.; Wittenburg, J.: A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies, with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control, Proc. 3rd Congr. Int. Fed. Auto. Control, London, 1966
- 25 Schiehlen, W.O.; Kreuzer, E.J.: Symbolic Computerized Derivation of Equations of Motion, IUTAM Symposium, Munich, Germany, 1977

Bibliografia

- 26 Schiehlen, W.O.; Rauh, J.: Modelling of Flexible Multibeam Systems by Rigid-Elastic Superelements, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol.VHI.Nº 2, 1986
- 27 Bertthier, P.; Ferraris, G.; Lalanne, M.: Prediction of Critical Speeds, Unbalance and Nonsynchronous Forced Response of Rotors, Shock and Vibration Bulletin, Part 7, Bulletin 53, 1983
- 28 Schweitzer, G.; Szczygielski, W.: Dynamics of a High-Speed Rotor Touching a Boundry, IUTAM/IFTOMM Symposium on Dynamics of Multivariable Systems, Cism, UDINE, 1985
- 29 Zhang, Q.; Lallement, G.: New Method of Determining the Eigensolutions of the Associated Conservative Structure form the Identified Eigensolutions, Proc. #rd MAC, FLORIDA, USA, 1985
- 30 Ewins, D.J.; Gleeson, P.T.: A Method for Modal Identification of Lightly Damped Structures, Jour, Sound and Vibration, 1982
- 31 Natke, H.G.: Deliberations on the Improvement of the Computational Model with Meassured Eigenmagnitudes, Editura Academiei Republich Socialiste România, Série de Mécânica Appliquée, Tome 28 Nº 2, 1983
- 32 Ihang, Q.; Lallement, G.: Comparison of Normal Eigenmodes Calculation Methods based on Identified Complex Eigenmodes, Journal of Spacecraft and Robots, USA, 1986
- 33 Kelen, P.; Cave, L.: Calculated and Meassured natural Frequencies of low Pressure Steam Turbine Blades and Wheels with Arch-Coverbands, J.Imeché, USA, 1984
- 34 Ichimonji, M.; Yamakawa, H.: A General Method od Analysis for Dynamic Problems of Rotor Systems, Bulletin ISME, USA, 1984
- 35 Godyer, H.G.D.: Methods and Application of Structural Modelling from Measured Structural Frequency Response Data, I.S.V.R., England, 1979
- 36 Wang, S.; Sato, H.; O-Hori, M.: New Approaches to the Modal Analysis for Machine Tool Structure, ASME 40/VOL. 106, USA, 1984

Bibliografia

- 37 Yuan, J.X.; Wu, X.M.: Identification of the Joint Structural Parameters of Machine Tool by DDS and FEM, ASME 64/VOL. 107, USA, 1985
- 38 Wawer, J.: Modal Analysis of Non-Conservative Distributed Parameter Rotor Systems, Proc. XIVth Conf. Dyn. Mach. Czechoslovakia, 1983
- 39 Natke, H.G.; Rotert, D.: Determination of Normal Modes from Identified Complex Modes, Z. Flugwiss., Weltraumforsch. 9, 1985
- 40 Bajpai, A.C.; Mustoe, L.R.; Walker, D.: Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons Ltd, 1978