UMA TEORIA DE APROXIMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA, A INTERPOLAÇÃO DE 2^n ESPAÇOS DE BANACH E SUAS VERSÕES DUAIS

ULYSSES SODRÉ

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UMA TEORIA DE APROXIMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA A INTERPOLAÇÃO DE 2^n ESPAÇOS DE BANACH E SUAS VERSÕES DUAIS

ULYSSES SODRÉ

ORIENTADOR : DR. DICESAR LASS FERNANDEZ

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA PELO SR. ULYSSES SODRÉ
E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA
CAMPINAS, 22 DE OUTUBRO DE 1984

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática .

SETEMBRO DE 1984

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar o mais sincero agradecimento ao Prof.Dr. Dicesar Lass Fernandez que assegurou-me uma orientação precisa e clara sem a qual tudo isso seria inóquo .

À Malou e à Cibele que colaboraram constantemente no sentido deste trabalho vir a ser uma realidade. Ambas souberam entender as minhas ausências.

A meus pais, Ronat e Margarida, que sempre puseram a Educação num pedestal muito mais alto que qualquer bem terreno .

Aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Londrina que colaboraram direta ou indiretamente.

Ao CNPq e à Universidade Estadual de Londrina pelas bolsas recebidas assim como pela colaboração de toda ordem que tive .

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Os teoremas clássicos de aproximação direta e inversa de Jackson e Bernstein inspiraram J. Peetre ([33]) a elaborar uma teoria abstrata de aproximação que utiliza resultados da teoria dos espaços de interpolaçao e que permite obter novos teoremas de aproximação direta e inversa em espaços de funções definidas no R^n .

As idéias de J. Peetre foram exaustivamente desenvolvidas por P.L.Butzer e seus colaboradores numa série de trabalhos ([09] ,[10] , [11] , [12] , [13] , [14], etc) .

Por outro lado, versões multidimensionais dos teoremas clássicos de Jackson e Bernstein têm sido estudadas por diversos autores como Brudnyi [05],[06], Johnen[25], Kipiani [26], Nikolskii[31],Potapov [36], Yudin [52] , entre outros.

Inspirado na versão dada por Nikolskii para funções definidas no R^n e seguindo as idéias de Peetre [33] ; D.L.Fernandez ([23]) desenvolveu uma teoria multiparamétrica de aproximação relacionada com a teoria de interpolaçao de 2^n espaços de Banach ([20] , [21] , [22]) e que permite a obtenção e recuperação de teoremas de aproximaçao direta e inversa de funções definidas no R^n, por funções inteiras de tipo exponencial .

Como o trabalho de Fernandez [23] é paralelo ao de Peetre [33] , coloca-se o problema de desenvolver um programa paralelo àquele levado a efeito por P:L.Butzer e seus colaboradores .

O objetivo deste trabalho é então (i) realizar um estudo de teoremas de aproximação direta e inversa dos tipos de

Jackson e Bernstein para funções periódicas de varias variá - veis, com essa motivação, (ii) desenvolver uma teoria abstrata de aproximaçao multiparamétrica bem como sua versão dual (o que não é feito em Fernandez [23]) utilizando métodos discretos de interpolação de vários espaços de Banach e,(iii) aplicá-la na obtenção de novos teoremas de aproximação dos tipos de Jackson e Bernstein para funções periódicas de várias variáveis .

Vamos agora descrever sucintamente o conteúdo deste trabalho .

O capítulo 1 é dedicado a apresentar uma versão dos teoremas de Jackson e Bernstein para funções periódicas de duas variáveis. Como aproximantes são utilizados os quase-polinômios, isto é , funções w_{mn} de $C_\pi(R^2)$ que podem ser decompostas na forma

$$w_{mn}(x,y) = p_m(x,y) + q_n(x,y) + r_{mn}(x,y)$$

onde p_m e q_n são funções 2^π-periódicas polinomiais nas variáveis x e y, de ordem m e n respectivamente e r_{mn} é um polinômio de ordem m na primeira variável e de ordem n na segunda variável . A regularidade das funções será dada em termos dos espaços de funções com derivadas mistas dominantes e os espaços de Lipschitz-Nikolskii, isto é, espaços de Lipschitz de funções de duas variáveis que envolvem diferenças mistas . Resultados correlatos foram obtidos por Potapov [36] , Brudnyi [5] , Nikolskii [32] e Yudin [52] , entre outros . Em particular, o trabalho de Potapov [35] tem uma interseção de aproximadamente um terço com este capítulo .

No segundo capítulo desenvolvemos a teoria de interpolação para escalas d-paramétricas de 2^d espaços de Banach, utilizando variáveis discretas. A hipótese de que as famílias de interpolação formam uma escala (i.e., se $E_{k'}$ e $E_{k''}$ pertencem à família e $k' \leq k''$, então $E_{k''} \subset E_{k'}$) será assumida implicitamente em todo o trabalho. O desenvolvimento deste capítulo segue a linha de Butzer-Scherer [14] sempre apoiado nos trabalhos de Fernandez [19] e [21]. São introduzidas inicialmente as normas funcionais J e K que possibilitam a geração dos espaços de interpolação associados a elas. Caracterizamos completamente esses espaços de interpolação que inicialmente são definidos a partir de certas funções-pesos $a^{N.\theta}$ generalizando de certo modo um capítulo de Fernandez [19] e além disso mostramos que tais espaços podem ser definidos para qualquer valor real fixo de a maior que 1. Em outra oportunidade mostramos que tais funções podem ser substituidas pelos pesos N^{θ} eliminando de vez o problema da constante.

Na sequência identificamos os espaços de tipo J com os espaços do tipo K com equivalência das normas. Ao final estudamos a dualidade para os espaços de interpolação, que terá um papel fundamental no desenvolvimento dos capítulos 5 e 6.

O capítulo 3 contem uma teoria de aproximação multiparamétrica desenvolvida na linha de Butzer-Scherer [14]. Inicialmente construimos duas classes de espaços de aproximação, que poderiam ser chamados espaços de Jackson e espaços de Bernstein, respectivamente. Baseadas em versões abstratas de desigualdades dos tipos de Jackson e Bernstein apresentadas no capítulo 1, introduzimos duas classes K e J, mais gerais, de espaços que contêm os espaços de Jackson e Bernstein, respectivamente. A partir disso podemos estudar a reiteração do peocesso de construção dos espaços de aproximação a fazer a conexão com os espaços de interpolação .

No capitulo 4 estudamos a dualidade dos espaços de aproximação. A dualidade dos espaços de interpolação desempenha aqui um papel fundamental . Por outro lado, um fato típico que podemos observar no capitulo é que conceitos sao trocados e propriedades invertidas quando passadas às versões duais por exemplo, uma desigualdade do tipo Jackson se converte em uma desigualdade dual do tipo Bernstein e uma desigualdade do tipo Bernstein se converte numa desigualdade dual do tipo de Jackson .

No capítulo 5 estudamos os espaços de Sobolev-Nikolskii, os espaços de Bessel-Nikolskii e os espaços de Besov-Nikolskii periódicos. Inicialmente apresentamos de forma sistemática os pré-requisitos para o estudo desses espaços, os quais são encontrados dispersos na literatura . Aqui incluimos a construçao do espaço das distribuiçoes periódicas sobre o R^d e os multiplicadores de Fourier em $L^p_{\shortparallel}(R^d)$. A seguir estudamos os espaços de Sobolev-Nikolskii e de Bessel-Nikolskii seguindo o trabalho de Lizorkin-Nikolskii [2]. A teoria dos espaços de Besov-Nikolskii aparece aqui pela primeira vez . Para a elaboraçao desta teoria seguimos Fernandez [24] que estudou o caso nao periodico e Triebel [46] que estudou o caso periodico isotropico, isto e, o caso dos espaços de Besov periódicos. Finalmente caracterizamos os espaços de Besov-Nikolskii periódicos como espaços de interpolaçao entre espaços de Bessel-Nikolskii periodicos e também como espaços de funçoes que satisfazem certas condiçoes sobre diferenças multiplas recuperando desta forma os espaços introduzidos originalmente por Nikolskii [32] .

No último capitulo particularizamos os conceitos e resultados desenvolvidos nos capitulos 2 , 3 e 4 e utilizamos os resultados do capitulo 5 para a obtençao de novas versoes clássicas dos teoremas de Jackson e Bernstein, utilizando os resultados de dualidade apresentados nos capitulos anteriores obtemos tambem versoes duais desses teoremas da teoria de aproximação .

Encerrando o trabalho obtemos a caracterizaçao dos duais topologicos dos espaços de Besov-Nikolskii em funçao da melhor aproximaçao dual por quase-polinômios, para todos os valores do multiparametro de regularidade. Desta forma vamos alem de Fernandez [24] , onde a caracterizaçao do dual è obtida apenas para os valores positivos desses parametros.

CAPÍTULO 1

OS TEOREMAS DE JACKSON E BERNSTEIN DA TEORIA DE APROXIMAÇÃO

Este capítulo está devotado a apresentar versões "clássicas" bi-dimensionais de teoremas diretos do tipo de Jackson, ou simplesmente Jackson, e inversos do tipo de Bernstein, ou simplesmente Bernstein. Estes teoremas serão estabelecidos tomando-se como aproximantes os quase-polinômios trigonométricos (Ver a definição 1.1.4 abaixo).

Definindo a melhor aproximação de grau $N \in \mathbb{N}^2$ de uma função $f \in C_\pi(\mathbb{R}^2)$ por quase-polinômios trigonométricos W_N de grau $N \in \mathbb{N}^2$ por $E_N(f) = \inf \|f-W_N\|_{C_\pi(\mathbb{R}^2)}$, o teorema de Weierstrass estabelece que $E_N(f)$ tende a zero quando $N \to \infty$, para cada $f \in C_\pi(\mathbb{R}^2)$. Este teorema não nos informa acerca da rapidez como $E_N(f)$ se aproxima de zero, mesmo quando sabemos alguma propriedade de suavidade de f. Por outro lado, teoremas de Jackson estabelecem que quanto maior a suavidade de f mais rapidamente $E_N(f)$ tenderá a zero. Reciprocamente, os teoremas de Bernstein asseguram a suavidade de f a partir do comportamento de $E_N(f)$.

As propriedades de suavidade de f são usualmente dadas em função dos módulos mistos de continuidade, classes de Lipschitz-Nikolskii e propriedades de diferenciabilidade. Mais precisamente, um teorema de Jackson assegura que se $D^R f$ pertence a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ com $0 < \alpha = (\alpha_1,\alpha_2) < 1$ então $E_N(f)$ deve convergir a zero com a rapidez, de no mínimo, da ordem de $N^{-R-\alpha} = n_1^{-r_1-\alpha_1} n_2^{-r_2-\alpha_2}$. Observemos que o resultado é falso se tomarmos como aproximantes os polinômios trigonométricos em duas variáveis. Ver Timan [45 , pag.]

Reciprocamente, se a sequência $\{N^{R+\alpha}E_N(f)\}_{N\in N^2}$ for limitada, então $D^R f \in Lip(\alpha)$ com $0 < \alpha = (\alpha_1,\alpha_2) < 1$.

É importante estudar os casos quando os teoremas diretos e inversos são recíprocos um do outro e neste caso haverá um teorema de equivalência.

A seção 1.1. apresenta os espaços básicos para o estabelecimento dos teoremas do tipo Jackson e do tipo Bernstein. Nesta seção apresentamos também os quase-polinômios trigonométricos, a melhor aproximação de $f \in X_\pi$ por quase-polinômios juntamente com as suas propriedades básicas, o módulo múltiplo de continuidade assim como a definição do espaço de Lipschitz-Nikolskii. A seção 1.2. trata do grupo de teoremas de Jackson. A seção 1.3. está reservada aos teoremas de Bernstein. A seção 1.4. trata da conexão existente entre os teoremas de Jackson e Bernstein.

Quando consideramos a situação unidimensional nossos quase polinômios se reduzem aos polinômios. Portanto, a teoria aqui desenvolvida é uma genuina generalização da situação unidimensional.

Resultados correlatos aos nossos foram obtidos por Potapov [36], Brudnyi [5], Nikolskii [32] e Yudin [52], entre outros.

Em particular, o trabalho de Potapov [35] tem uma interseção de aproximadamente um terço com o presente capítulo.

1.1. ESPAÇOS BÁSICOS

1.1.1. DEFINIÇÃO: Seja d um inteiro positivo. Definimos o conjunto

(1) $$\square = \{k=(k_1,\dots,k_d) \in R^d \mid k_j = 0,1;\ j = 1,\dots,d\} \quad .$$

Observemos que no caso $d = 1$ temos $\square = \{0,1\}$ e no caso $d = 2$ temos

(2) $$\square = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

1.1.2. DEFINIÇÃO: Sejam $N = (n_1,n_2)$ e $N' = (n_1',n_2')$ elementos de N^2. Escreveremos

(1) $$N=(n_1,n_2) \leqslant N'=(n_1',n_2') \Leftrightarrow n_1 \leqslant n_1' \text{ e } n_2 \leqslant n_2' \quad .$$

1.1.3. OS ESPAÇOS $C_\pi(R^2)$ e $L_\pi^P(R^2)$. Denotaremos por $C_\pi(R^2)$ o espaço de todas as funções contínuas definidas no R^2, 2π-periódicas em cada variável, munida da norma

(1) $$\|f\|_{C_\pi} = \sup\{|f(x_1,x_2)|;\ 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi\ ;\ j = 1,2\} \quad .$$

Denotaremos por $L_\pi^P(R^2)$, $1 \leqslant P = (p_1,p_2) < \infty$, o espaço de todas as (classes de) funções mensuráveis definidas sobre R^2, 2π-periódicas em cada variável, tais que

(2) $$\|f\|_{L_\pi^P} = \{(2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} |f(u_1,u_2)|^{p_1} du_1)^{p_2/p_1} du_2\}^{1/p_2} < \infty \quad .$$

O espaço L_π^P é completo em relação a norma $\|.\|_{L_\pi^P}$ (ver [ ]).

No que segue X_π representará sempre $C_\pi(R^2)$ ou $L_\pi^P(R^2)$ para $1 \leqslant P = (p_1,p_2) < \infty$.

1.1.4. DEFINIÇÃO: Um quase-polinômio trigonométrico bidimensional de ordem $N = (n_1, n_2) \in N^2$ é uma função $W_N \in X_\pi$ que po de ser decomposta na forma:

$$(1) \qquad W_N(x_1,x_2) = \sum_{|j_1|\leq n_1} \varphi_{j_1}(x_2)e^{ij_1x_1} + \sum_{|j_2|\leq n_2} \psi_{j_2}(x_1)e^{ij_2x_2}$$

$$+ \sum_{|j_1|\leq n_1} \sum_{|j_2|\leq n_2} C_{j_1j_2} \; e^{i(j_1x_1+j_2x_2)}$$

onde $\varphi_{j_1} \in X_\pi(R)$ e $\psi_{j_2} \in X_\pi(R)$ são funções 2π-periódicas nas variáveis x_2 e x_1 respectivamente e $C_{j_1j_2}$ são constantes.

1.1.5. EXEMPLO: Seja $f \in X'_\pi(R^2)$ e façamos:

$$\hat{f}(j_1,x_2) = \int_T f(t_1,x_2) \; e^{-it_1j_1} \; dt_1$$

$$\hat{f}(x_1,j_2) = \int_T f(x_1,t_2) \; e^{-it_2j_2} \; dt_2$$

$$\hat{f}(j_1,j_2) = \int_T \int_T f(t_1,t_2) \; e^{-i(t_1j_1+t_2j_2)} \; dt_1dt_2$$

com $(j_1,j_2) \in Z^2$. Então:

$$W_N(f)(x_1,x_2) = \sum_{|j_1|\leq n_1} \hat{f}(j_1,x_2) \; e^{ij_1x_1} +$$

$$+ \sum_{|j_2|\leq n_2} \hat{f}(x_1,j_2)e^{ij_2x_2} - \sum_{|j_1|\leq n_1} \sum_{|j_2|\leq n_2} \hat{f}(j_1,j_2)e^{i(j_1x_1+j_2x_2)}$$

é um quase polinômio de ordem $N = (n_1, n_2) \in N^2$.

1.1.6. O espaço de todos os quase-polinômios trigonométricos bidimensionais de ordem $N = (n_1, n_2) \in N^2$ será denotado por Q_N e teremos então algumas propriedades:

(1) $$Q_0 = \{0\}$$

(2) $$Q_N \subset Q_{N'} \qquad (N \leqslant N')$$

(3) Q_N é um subespaço fechado de $L^P_\pi(R^2)$.

Esta última propriedade aparece demonstrada em Brudnyi [5].

1.1.7. DEFINIÇÃO: Definimos a melhor aproximação de $f \in X_\pi$ por elementos de Q_N, como:

(1) $$E_N(f) = \inf\{\|f-W\|_{X_\pi} ; w \in Q_N\}$$

onde $N \in N^2$.

As seguintes propriedades da melhor aproximação de $f \in X_\pi$ por quase-polinômios decorrem imediatamente da definição.

1.1.8. PROPOSIÇÃO: Se $f \in X_\pi$, então:

(1) $$E_0(f) = \|f\|_{X_\pi}$$

(2) $$E_N(f) \leqslant E_{N'}(f) \qquad (N \geqslant N')$$

$$(3) \qquad E_N(f) = E_N(f+w) \qquad (w \in Q_N)$$

Além disso, pelo teorema de Weierstrass obtemos que

$$(4) \qquad \lim_{N\to\infty} E_N(f) = 0$$

Quanto ao exame da existência do quase-polinômio de melhor aproximação temos o teorema abaixo que aparece demonstrado em Brudnyi [5].

1.1.9. TEOREMA: Se $f \in X_\pi = L_\pi^P(R^2)$, $1 < P < \infty$, existe um quase-polinômio w_N^* em Q_N tal que

$$(1) \qquad E_N(f) = \| f - w_N^* \|_{L_\pi^P} \quad ;$$

isto é, para cada $f \in L_\pi^P(R^2)$ existe o quase-polinômio de melhor aproximação de f.

1.1.10. DEFINIÇÃO: Definimos a diferença múltipla de ordem $R = (r_1, r_2) \in N^2$ para uma função $f \in X_\pi$ como

$$(1) \quad \Delta_h^R f(x_1,x_2) = \sum_{m_1=0}^{r_1} \sum_{m_2=0}^{r_2} (-1)^{r_1+r_2-m_1-m_2} \binom{r_1}{m_1}\binom{r_2}{m_2} f(x_1+m_1h_1, x_2+m_2h_2)$$

onde $x = (x_1,x_2) \in R^2$ e $h = (h_1,h_2) \in R^2$.

1.1.11. DEFINIÇÃO: Definimos o módulo múltiplo de continuidade de ordem $R = (r_1,r_2) \in N^2$ de uma função $f \in X_\pi(R^2)$, como:

$$(1) \qquad \omega^R(f;t) = \sup\{ \| \Delta_h^R f \|_{X_\pi} ; \ |h_j| \leqslant t_j, \ j = 1,2 \}$$

onde $t = (t_1, t_2) \geqslant 0$ e $h = (h_1, t_2) \in R^2$.

Algumas propriedades do módulo de continuidade são apresentadas na

1.1.12. PROPOSIÇÃO: Para $f \in X_\pi(R^2)$; $\omega^R(f;t)$ é uma função decrescente para cada t_j; $j = 1,2$. Mais ainda, para $t=(t_1,t_2)\geqslant 0$ fixado e $f,g \in X_\pi(R^2)$:

(1) $$\omega^R(f+g;t) \leqslant \omega^R(f;t) + \omega^R(g;t) \qquad ;$$

e se $0 \leqslant J = (j_1, j_2) \leqslant R = (r_1, r_2)$, vale

(2) $$\omega^R(f;t) \leqslant 2^J \omega^{R-J}(f,t) \qquad .$$

1.1.13. NOTAÇÃO: Denotaremos por $X_\pi^{(R)}$ o espaço de todas as $f \in X_\pi$ para as quais $D^\alpha f \in X_\pi$ para todo $0 \leqslant \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leqslant R = (r_1, r_2)$, sendo que estas derivadas são entendidas no sentido generalizado.

1.1.14. DEFINIÇÃO: Seja $0 < \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) < R = (r_1, r_2) \in N_+^2$. Diremos que uma função f em $C_\pi(R^2)$ pertence ao espaço de Lipschitz-Nikolskii, $Lip(\alpha_1, \alpha_2)$, se

(1) $$\omega^{k.R}(f;t) = O(t^{k.\alpha})$$

para todo $k \in$ □, sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R_+^2$, $t^{k.\alpha} = t_1^{k_1\alpha_1} t_2^{k_2\alpha_2}$ e $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$.

1.2. O TEOREMA DE JACKSON

Para a demonstração do teorema direto de aproximação do tipo Jackson que estamos interessados precisaremos de dois lemas. O primeiro deles é clássico e o segundo é uma versão bidimensional do primeiro (ver Potapov [37]).

1.2.1. LEMA: Seja

$$(1) \qquad K_n(t) = b_r \left(\frac{\operatorname{sen}(rt/2)}{\operatorname{sen}(t/2)}\right)^{2s}$$

com $n \in N$, $r \in N$, $s \in N$, $r = [n/s]+1$ e b_r é uma constante tal que $\int_0^{2\pi} K_n(t)dt = 1$. Então:

(2) $K_n(t)$ é um polinômio trigonométrico de ordem n;

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} |t|^r K_n(t)dt \leqslant C(1+n)^{-r}$$

se $0 \leqslant r \leqslant 2(s-1)$.

(4) Se $f \in X_\pi$ então, $K_n * f$ é um polinômio trigonométrico de ordem $n (n \in N)$.

1.2.2. LEMA: Sejam

$$(1) \qquad K_{n_j}(t_j) = b_{r_j} \left(\frac{\operatorname{sen}(r_j t_j/2)}{\operatorname{sen}(t_j/2)}\right)^{2s_j}$$

onde n_j, r_j, $s_j \in N$, $r_j = [n_j/s_j] + 1$ e as constantes b_{r_j} são tais que $\int_0^{2\pi} K_{n_j}(t_j)dt_j = 1$ para $j = 1,2$. Então:

(2) $$\int_0^{2\pi} |t_j|^{r_j} K_{n_j}(t_j)dt_j \leqslant C(1+n_j)^{-r_j}$$

se $0 \leqslant r_j \leqslant 2(s_j-1)$ e $j = 1,2.$

(3) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |t_1^{r_1} t_2^{r_2}| K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)dt_1dt_2 \leqslant C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2}$$

Se $f \in X_\pi$, então

(4) $$W_N(f) = (K_{n_1}+K_{n_2}-K_{n_1}K_{n_2}) * f$$

é um quase polinômio bidimensional trigonométrico de ordem $N = (n_1,n_2) \in N^2$.

A demonstração do Lema 1.2.2 segue do Lema 1.2.1 e está apresentada em Potapov [35].

1.2.3. PROPOSIÇÃO: Se $f \in X_\pi$, então existe uma constante $C = C(R) > 0$ tal que

(1) $$E_N(f) \leqslant C\, \omega^R(f;1/(1+n_1);1/(1+n_2))$$

onde $R = (n_1,r_2) \in N^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Definamos as funções

$$t_{n_1}(x_1,x_2) = \int_0^{2\pi} K_{n_1}(t_1)[I-(-1)^{r_1} \Delta_{t_1}^{r_1}] f(x_1,x_2)dt_1$$

$$t_{n_2}(x_1,x_2) = \int_0^{2\pi} K_{n_2}(t_2)[I-(-1)^{r_2} \Delta_{t_2}^{r_2}] f(x_1,x_2)dt_2$$

$$t_{n_1n_2}(x_1,x_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)[(I-(-1)^{r_1}\Delta_{t_1}^{r_1})(I-(-1)^{r_2}\Delta_{t_2}^{r_2})]f(x_1,x_2)dt_1dt_2 \quad .$$

Essas funções são 2π-periódicas nas variáveis x_1 e x_2, sendo que t_{n_j} são polinômios trigonométricos de ordens n_j. Nas respectivas variáveis x_j e $t_{n_1n_2}$ é um polinômio trigonométrico de ordem n_1 na variável x_1 e de ordem n_2 na variável x_2. Tomando

$$W_N(f) = t_{n_1} + t_{n_2} - t_{n_1n_2}$$

seguirá que $W_N(f)$ é um quase-polinômio trigonométrico de ordem $N \in N^2$ e que

$$E_N(f) \leqslant \| f-W_N(f)\|_{X_\pi}$$

$$= \left\| \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)\Delta_t^R f(.,.)dt_1dt_2\right\|_{X_\pi}$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)\ \omega^R(f;t)\ dt_1dt_2$$

e pelas propriedades do módulo múltiplo de continuidade, obteremos

$$E_N(f) \leqslant \omega^R(f;1/(1+n_1);1/(1+n_2)) \ .\ G(R)$$

onde

$$G(R)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)[1+|(1+n_1)t_1|]^{r_1}[1+|(1+n_2)t_2|]^{r_2}\ dt_1dt_2$$

e esta última expressão é dominada por uma constante que só depende de $R \in N^2$, em virtude do Lema 1.2.2. Assim obtemos a desigualdade (1), como queriamos.

1.2.4. PROPOSIÇÃO: Se $f \in X_{\alpha}^{(R)}$, então

$$(1) \qquad \omega^{R}(f;t_1,t_2) \leqslant t^{R} \, \| D^{R} f \|_{X_{\pi}^{(R)}}$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $f \in X_{\pi}^{(R)}$, então $D^R f$ é limitada nas vizinhanças de $(x_1,x_2) \in T^2 = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ e temos:

$$(\Delta_h^R f)(x_1,x_2) = \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \cdots \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} (D^R f)(x_1+u_1^1+\ldots+u_{r_1}^1 ; x_2+u_1^2+\ldots+u_{r_2}^2).du$$

onde $du = du_1^1.du_2^1 \ldots du_{r_1}^1.du_1^2 \ldots du_{r_2}^2$; para todo $h = (h_1,h_2) \in R^2$ com h_j suficientemente pequenos para $j = 1,2$.

Tomando a norma $\| . \|_{X_{\pi}^{(R)}}$ em ambos os lados da identidade acima obtemos (1).

1.2.5. PROPOSIÇÃO: Se $f \in X_{\pi}^{(R)}$, então existe uma constante positiva $C = C(R)$ tal que:

$$(1) \qquad E_N(f) \leqslant C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2} \| D^R f \|_{X_{\pi}^{(R)}} \quad .$$

A demonstração segue de 1.2.3 e 1.2.4.

1.2.6. PROPOSIÇÃO: Se $f \in X_{\pi}^{(R)}$, então existe uma constante positiva $C = C(R)$ tal que

(1) $$E_N(f) \leqslant C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2}\, E_N(D^R f)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in X_\pi^{(R)}$. Assim, por 1.1.8 (3) temos que

$$E_N(f) = E_N(f+w_N)$$

para todo quase-polinômio $w_N \in Q_N$. Como para todo quase-polinômio $q_N \in Q_N$ existe $w_N \in Q_N$ tal que

$$q_N = D^R w_N$$

(sendo esta derivada entendida no sentido generalizado) seguirá que

$$E_N(f) = E_N(f-w_N) \leqslant C\, \omega^R(f-w_N; 1/(1+n_1); 1/(1+n_2))$$

$$\leqslant C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2} \, \| D^R(f-w_N) \|_{X_\pi^{(R)}}$$

$$= C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2} \, \| D^R f - q_N \|_{X_\pi^{(R)}}$$

e tomando o ínfimo sobre todos os $q_N \in Q_N$, obtemos a desigualdade (1).

1.2.7. TEOREMA (DE JACKSON): Seja $f \in X_\pi$, tal que $D^R f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha_1,\alpha_2)$ com $0 < \alpha = (\alpha_1,\alpha_2) < 1$ e $R = (r_1,r_2) \in N^2$. Então:

$$(1) \qquad E_N(f) = O(N^{-R-\alpha}) \qquad (N \to \infty)$$

A demonstração seguirá de 1.2.6 e de 1.2.3, pois:

$$E_N(f) \leqslant C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2} E_N(D^R f)$$

$$\leqslant C(1+n_1)^{-r_1}(1+n_2)^{-r_2} \omega^{(1,1)}(D^R f; 1/(1+n_1); 1/(1+n_2))$$

$$\leqslant C(1+n_1)^{-r_1-\alpha_1} (1+n_2)^{-r_2-\alpha_2} \quad .$$

1.3. O TEOREMA DE BERNSTEIN

Para a demonstração do teorema inverso do tipo Bernstein precisaremos de alguns preliminares.

1.3.1. A FÓRMULA DE INTERPOLAÇÃO DE M. RIESZ

Consideremos $T_m(x,y) \in X$ uma função 2π-periódica em cada variável, a qual é um polinômio trigonométrico de ordem m na variável x. Desse modo

$$(1) \qquad T_m(x,y) = \frac{1}{2} a_o(y) + \sum_{k=1}^{m}(a_k(y) \cos(ky) + (b_k(y) \operatorname{sen}(ky))$$

onde $a_k(y)$ e $b_k(y)$ dependem sobre $y \in T$.

Consideremos agora $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{m}$, $k = 1,2,3,\ldots,2m$. Esses pontos anulam a função cos (mx) e então podemos escrever que:

$$(2) \qquad \cos (mx) = A \sum_{k=1}^{2m} \operatorname{sen} (\frac{x-x_k}{2}) \quad .$$

Definamos agora

$$(3) \qquad q_n(x) \equiv \frac{\cos(mx)}{2m} (-1)^n \cot g \left(\frac{x-x_m}{2}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{\cos(mx)}{2m} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x-(\pi+x_n)))}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-x_n)}$$

Podemos mostrar, utilizando a regra de L'Hospital, que:

$$q_n(x_k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = k \\ 0 & \text{se} \quad n \neq k \end{cases}$$

onde $k = 1,2,3,\dots,2m$.

Utilizando esta função, definiremos

$$(4) \qquad T_m^*(x,y) = \frac{\cos(mx)}{2m} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \cot g(\tfrac{1}{2}(x-x_k)) \; T_m(x_k,y)$$

que também pode ser escrito na forma:

$$T_m^*(x,y) = \sum_{k=1}^{2m} q_k(x) \; T_m(x,y)$$

Em virtude das propriedades de q_n, temos que T_m^* é também um polinômio trigonométrico de ordem m na variável x e além disso:

$$T_m^*(x_k,y) = T_m(x_k,y)$$

para todo $k = 1,2,3,\ldots,2m$.

Em virtude da análise feita, temos que

$$T_m(x,y) = C\cos(mx) + T_m^*(x,y) \quad .$$

Mostraremos que $C = a_m(y)$. Realmente, o coeficiente de Fourier em $\cos(mx)$ da expressão $\cos(mx).\mathrm{cotg}\,(\frac{1}{2}(x-x_k))$ é nulo pois:

$$\frac{1}{\pi}\int_T (\cos(mx)\,\mathrm{cotg}(\tfrac{1}{2}(x-x_k)))\cos(mx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T \cos^2 mx\,\mathrm{cotg}(\tfrac{1}{2}(x-x_k))\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T \cos^2(m(u+x_k)\,\mathrm{cotg}(u/2)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T \mathrm{sen}^2\,mu\,\mathrm{cotg}(u/2)\,du = 0$$

e o integrando é ímpar.

Assim, nem $q_n(x)$ nem $T_m^*(x,y)$ têm coeficientes de Fourier em $\cos(mx)$, donde

$$C = a_m(y) \quad .$$

Então

$$(5)\quad T_m(x,y) = a_m(y)\cos mx + \frac{\cos mx}{2m}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\,\mathrm{cotg}(\tfrac{1}{2}(x-x_k))\,T_m(x_k,y)$$

e derivando parcialmente a expressão acima em relação à variável x, obtemos para x = 0 que:

$$\frac{\partial}{\partial x} T_m(0,y) = \frac{1}{4m} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \quad \operatorname{cossec}^2(x_k/2)\ T_m(x_k,y)$$

e como esta última expressão é verdadeira para qualquer polinomial de ordem m na variável x, em particular é também verdadeira para $T_m(x+u,y)$ onde u é uma variável e x é fixo arbitrariamente. Portanto, temos a fórmula de interpolação de M. Riesz:

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x} T_m(x,y) = \frac{1}{4m} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \quad \operatorname{cossec}^2(\tfrac{1}{2}\, x_k)\ T_m(x+x_k,y)$$

para todo $x \in T$.

Como $T_m(x,y)$ é uma função 2π-periódica infinitamente diferenciável na variável x, temos que T_m pode ser escrita através de sua série de Fourier que converge uniformemente para T_m, isto é

$$T_m(x,y) = \sum_{k \in Z} c_k(y)\ e^{ikx}$$

onde

$$c_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_T T_m(x,y)\ e^{-ikx}\ dx \qquad (k \in Z)\ .$$

Como esta série pode ser diferenciada termo a termo qualquer número de vezes, temos que

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} T_m(x,y) = \sum_{k \in Z} (ik)^\alpha\ c_k(y)\ e^{ikx}$$

para todo $\alpha \in N$ e a série à direita é uniformemente convergente para $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} T_m(x,y)$.

Tomando $T_m(x,y) = \text{sen}(mx)$ na fórmula de interpolação de Riesz, teremos em $x = 0$ que:

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{2m} \text{cossec}^2(x_k/2) = 4m^2$$

e esta soma será muito útil na:

1.3.2. DESIGUALDADE DE BERNSTEIN: Se $T_m(x,y)$ é uma função. 2π-periódica nas duas variáveis a qual é um polinômio de ordem m na variável x, então:

$$(1) \qquad \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} T_m \right\|_{X_\pi} \leqslant m^\alpha \| T_m \|_{X_\pi}$$

para todo $\alpha \in N$.

DEMONSTRAÇÃO (PARA $\alpha = 1$):

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} T_m(.,.) \right\|_X = \left\| \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \text{cossec}^2(x_k/2) T_m(.+x_k,.) \right\|_X$$

$$\leqslant \frac{1}{4m} \sum_{k=1}^{2m} \text{cossec}^2(x_k/2) \|T_m\|_X \leqslant m \|T_m\|_X$$

Para $\alpha > 1$, a demonstração segue por reiteração do processo.

1.3.3. DEFINIÇÃO: Seja $f \in X_\pi$. Definimos os núcleos de De La Vallée Poussin, como:

(1) $$V_{n_1,\infty}(f) = \frac{1}{n_1} \sum_{m_1=n_1}^{2n_1-1} S_{m_1,\infty}(f) \qquad (n_1 \geqslant 1)$$

(2) $$V_{\infty,n_2}(f) = \frac{1}{n_2} \sum_{m_2=n_2}^{2n_2-1} S_{\infty,m_2}(f) \qquad (n_2 \geqslant 1)$$

(3) $$V_{n_1 n_2}(f) = V_{n_1,\infty}(V_{\infty,n_2} f) \qquad (n_1 ; n_2 \geqslant 1)$$

e

(4) $$V_{0,\infty}(f) = S_{0,\infty}(f) \quad ; \quad V_{\infty,0}(f) = S_{\infty,0}(f)$$

onde

(5) $$S_{n_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi} \int_T f(x_1+t_1, x_2)\, D_{n_1}(t_1)dt_1$$

(6) $$S_{\infty,n_2}(f) = \frac{1}{\pi} \int_T f(x_1, x_2+t_2)\, D_{n_2}(t_2)dt_2$$

(7) $$S_{n_1 n_2}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(x_1+t_1, x_2+t_2) D_{n_1}(t_1) D_{n_2}(t_2) dt_1 dt_2$$

e

(8) $$D_{m_j}(u_j) = \frac{\operatorname{sen}((2m_j+1)u_j/2)}{2 \operatorname{sen}(u_j/2)} \qquad (j=1,2)$$

é o núcleo de Dirichlet unidimensional.

1.3.4. DEFINIÇÃO: Definimos os núcleos de Fejér, como:

$$(1) \qquad F_{n_1,\infty}(x_1,x_2) = \frac{1}{1+n_1} \sum_{k_1=0}^{n_1} S_{k_1,\infty}(x_1,x_2)$$

$$(2) \qquad F_{\infty,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{1+n_2} \sum_{k_2=0}^{n_2} S_{\infty,k_2}(x_1,x_2)$$

e

$$(3) \qquad F_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{(1+n_1)(1+n_2)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} S_{k_1 k_2}(x_1,x_2) \ .$$

Em virtude dessas definições, podemos escrever que

$$v_{n_1,\infty} = 2\, F_{2n_1-1,\infty} - F_{n_1-1,\infty}$$

$$v_{\infty,n_2} = 2F_{\infty,2n_2-1} - F_{\infty,n_2-1}$$

e

$$v_{n_1 n_2} = 4F_{2n_1-1,2n_2-1} - 2F_{n_1-1,2n_2-1} - 2F_{2n_1-1,n_2-1} + F_{n_1-1,n_2-1}$$

1.3.5. LEMA: Seja $f \in X_\pi$. Então:

$$(1) \qquad \|\sigma_{n_1}(f,.)\|_{X_\pi} \leqslant \|f\|_{X_\pi}$$

onde

$$(2) \qquad \sigma_{n_1}(f;(x_1,x_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(x_1-u_1,x_2)\, F_{n_1}(u_1)du_1$$

é a integral singular de Fejér.

DEMONSTRAÇÃO: Como para todo δ_1 : $0 < \delta_1 < \pi$, vale a desigualdade:

$$\sup\{|F_{n_1}(u_1)|;\delta_1 \leqslant |u_1| \leqslant \pi\} \leqslant 1/(1+n_1)\operatorname{sen}^2(\delta_1/2)$$

então

$$\|\sigma_{n_1}(f)\|_{X_\pi} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_T \sup u_1 \; |F_{n_1}(u_1)| \; du_1 \; \|f\|_X$$

donde

$$\|\sigma_{n_1}(f)\|_X \leqslant [\pi^2/(1+n_1)\;\delta_1^2]\;\|f\|_{X_\pi}$$

Mas existe $n_o \in N$ tal que se $n \geqslant n_o$, temos que $\pi^2 \leqslant (1+n_1)\delta_1^2$ e assim temos a estimada (1).

1.3.6. LEMA: Consideremos os operadores definidos em 1.3.3. Assim:

(1) $$V_{n_1,\infty}: X_\pi \to T_{2n_1-1;\infty}$$

(2) $$V_{\infty,n_2}: X_\pi \to T_{\infty;2n_2-1}$$

(3) $$V_{n_1n_2}: X_\pi \to T_{2n_1-1;2n_2-1}$$

são operadores lineares com normas dominadas por 3, 3 e 9, respectivamente. (Aqui $T_{m,\infty}$ representa o espaço das funções 2π-periódicas nas duas variáveis que são polinômios trigométricos de ordem m_1 na variável x_1. T_{B,m_2} e $T_{m_1m_2}$ são definidos analogamente)

(4) $$V_{n_1n_2}(t_{n_1n_2}) = t_{n_1n_2} \qquad (t_{n_1n_2} \in T_{n_1n_2})$$

(5) $$\|f - V_{n_1,\infty}(f) - V_{\infty,n_2}(f) + V_{n_1n_2}(f)\|_{X_\pi} \leqslant C\ E_N(f)$$

(6) Se $f \in X_\pi^{(R)}$, então

$$V_{n_1n_2}(D^Rf) = D^R(V_{n_1n_2}(f)) \qquad ,$$

DEMONSTRAÇÃO: Como

$$V_{n_1,\infty}(f) = 2\ \sigma_{2n_1;\infty}(f) - \sigma_{n_1-1;\infty}(f)$$

segue pelo Lema 1.3.5 que

$$\|V_{n_1;\infty}(f)\|_{X_\pi} \leqslant 2\|\sigma_{2n_1-1;\infty}(f)\|_{X_\pi} + \|\sigma_{n_1-1;\infty}(f)\|_{X_\pi}$$

donde

$$\|V_{n_1;\infty}(f)\|_{X_\pi} \leqslant 3\ \|f\|_{X_\pi} \qquad (f \in X_\pi)$$

De modo análogo estimamos $\|V_{\infty,n_2}(f)\|_{X_\pi}$ e $\|V_{n_1n_2}(f)\|_{X_\pi}$.

Observamos que

$$V_N(t_N) = t_N \qquad (N \in N^2)$$

Para $(k_1,k_2) \geqslant (n_1,n_2)$, temos que:

$$S_{k_1,\infty}(t_{n_1}) = t_{n_1} \quad , \quad S_{\infty,k_2}(t_{n_1}) = S_{k_1k_2}(t_{n_1}) \quad ,$$

$$S_{\infty,k_2}(t_{n_2}) = t_{n_2} \quad , \quad S_{k_1,\infty}(t_{n_2}) = S_{k_1k_2}(t_{n_2})$$

e

$$S_{k_1k_2}(t_{n_1n_2}) = S_{k_1,\infty}(t_{n_1n_2}) = S_{\infty,k_2}(t_{n_1n_2}) = t_{n_1n_2} \quad .$$

Donde

$$f-V_{n_1,\infty}(f)-V_{\infty,n_2}(f)+V_{n_1n_2}(f) \equiv \phi-V_{n_1,\infty}(\phi)-V_{\infty,n_2}(\phi)+V_{n_1n_2}(\phi)$$

onde $\phi = f-(t_{n_1}+t_{n_2}-t_{n_1n_2})^*$ (a estrela significa que este é o termo que representa a melhor aproximação possível no sentido da norma $\|.\|_{X_\pi}$).

Em virtude dos fatos acima expostos, temos que:

$$\|f-V_{n_1,\infty}(f)-V_{\infty,n_2}(f)+V_{n_1n_2}(f)\|_{X_\pi} \leq$$

$$\leq \|\phi\|_{X_\pi}+\|V_{n_1,\infty}(\phi)\|_{X_\pi}+\|V_{\infty,n_2}(\phi)\|_{X_\pi}+\|V_{n_1n_2}(\phi)\|_{X_\pi}$$

e através das estimadas obtidas, segue que

$$\|f-V_{n_1,\infty}(f)-V_{\infty,n_2}(f)+V_{n_1n_2}(f)\|_{X_\pi} \leq 16\ E_N(f) \qquad (f \in X)$$

A demonstração do item (6) segue do trabalho de Csiszper-Freud [16, pg. 36].

1.3.7. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in X_\pi$ e $R \in N^2$. Então, existe uma constante $C = C(R)$ tal que

$$(1) \qquad \omega^R(f;1/N) \leq C\, N^{-R} \sum_{0 \leq J \leq 1+M} 2^{J.R}\, E_{[2^{J-1}]}(f)$$

onde $2^M \leq N \leq 2^{M+1}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $V_N^*(f)$ o polinômio de melhor aproximação de De La Vallée Poussin de ordem $N \in N^2$ para a função $f \in X_\pi$. Assim:

$$\omega^R(f;1/N) \leq \omega^R(f-V^*_{2^M}(f);1/N) + \omega^R(V^*_{2^M}(f);1/N) \quad .$$

Pelas propriedades do módulo múltiplo de continuidade, temos

$$\omega^R(f-V^*_{2^M}(f);1/N) \leq 2^R\, \|f-V^*_{2^M}(f)\|_X \leq C\,.\,2^R\,.\,E_{2^M}(f) \quad .$$

Tomando $V_0(f) = 0$; $T_{j_1} = V^*_{2^{j_1};2^{n_2}}(f) - V^*_{[2^{j_1-1}];2^{n_2}}(f)$;

$$T_{j_2} = V^*_{2^{n_1};2^{j_2}}(f) - V^*_{2^{n_1};[2^{j_2-1}]}(f) \quad ;$$

$$T_{j_1j_2} = V^*_{2^{j_1};2^{j_2}}(f) - V^*_{2^{j_1};[2^{j_2-1}]}(f) - V^*_{[2^{j_1-1}];2^{j_2}}(f) + V^*_{[2^{j_1-1}];[2^{j_2-1}]}(f)$$

temos que T_{j_1}, T_{j_2} e $T_{j_1j_2}$ são polinômios trigonométricos de ordem $(2^{j_1},2^{n_2})$; $(2^{n_1};2^{j_2})$ e $(2^{j_1},2^{j_2})$, respectivamente, donde:

$$V^{*}_{2^{m_1}\,2^{m_2}}(f) = \sum_{j_1=0}^{m_1} T_{j_1} + \sum_{j_2=0}^{m_2} T_{j_2} - \sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2} T_{j_1 j_2}$$

e pela desigualdade de Bernstein, temos que:

$$\| T_{j_1}^{(r_1,0)} \|_{X_\pi} \leqslant 2^{j_1 r_1} \, \| T_{j_1} \|_{X_\pi}$$

$$\| T_{j_2}^{(0,r_2)} \|_{X_\pi} \leqslant 2^{j_2 r_2} \, \| T_{j_2} \|_{X_\pi}$$

$$\| T_{j_1 j_2}^{(r_1,r_2)} \|_{X_\pi} \leqslant 2^{j_1 r_1} \, 2^{j_2 r_2} \, \| T_{j_1 j_2} \|_{X_\pi}$$

e pela proposição 1.2.4, temos que:

$$\omega^R(T_{j_1};1/N) \leqslant n_1^{-r_1} \,.\, \| D^{(r_1,0)} T_{j_1} \|_{X_\pi}$$

$$\omega^R(T_{j_2};1/N) \leqslant n_2^{-r_2} \,.\, \| D^{(0,r_2)} T_{j_2} \|_{X_\pi}$$

$$\omega^R(T_{j_1 j_2};1/N) \leqslant N^{-R} \,.\, \| D^R T_{j_1 j_2} \|_{X_\pi}$$

e combinando estes dois últimos resultados, obtemos:

$$\omega^R(T_{j_1};1/N) \leqslant n_1^{-r_1} \, 2^{j_1 r_1} \| T_{j_1} \|_{X_\pi}$$

$$\omega^R(T_{j_2};1/N) \leqslant n_2^{-r_2} \, 2^{j_2 r_2} \| T_{j_2} \|_{X_\pi}$$

$$\omega^R(T_{j_1 j_2};1/N) \leqslant N^{-R} 2^{J.R} \| T_{j_1 j_2} \|_{X_\pi} \qquad .$$

Temos também que

$$\| T_{j_1} \|_{X_\pi} \leqslant \| V^*_{2^{j_1};2^{n_2}}(f) - f \|_{X_\pi} + \| f - V^*_{2^{j_1 - 1};2^{n_2}}(f) \|_{X_\pi}$$

donde

$$\| T_{j_1} \|_{X_\pi} \leqslant C \; E_{[2^{j_1 - 1}] \; 2^{n_2}}(f) \qquad .$$

Analogamente temos que:

$$\| T_{j_2} \|_{X_\pi} \leqslant C \; E_{2^{n_1};[2^{j_2 - 1}]}(f)$$

e

$$\| T_{j_1 j_2} \|_{X_\pi} \leqslant C \; E_{[2^{j_1 - 1}][2^{j_2 - 1}]}(f)$$

e desse modo obtemos

$$\omega^R(T_{j_1};1/N) \leqslant C \; n_1^{-r_1} \; 2^{j_1 r_1} \; E_{[2^{j_1} - 1],2^{n_2}}(f)$$

$$\omega^R(T_{j_2};1/N) \leqslant C \; n_2^{-r_2} \; 2^{j_2 r_2} \; E_{2^{n_1};[2^{j_2 - 1}]}(f)$$

$$\omega^R(T_{j_1 j_2};1/N) \leqslant C \; N^{-R} \; 2^{J.R} \; E_{[2^{J-1}]} \; (f)$$

para concluir que

$$\omega^R(V^*_{2^M}(f);1/N) \leqslant \omega^R(\sum_{j_1=0}^{m_1} T_{j_1};\tfrac{1}{N})+\omega^R(\sum_{j_2=0}^{m_2} T_{j_2};1/N)$$

$$+\omega^R(\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2} T_{j_1 j_2};1/N)$$

$$\leqslant \sum_{j_1=0}^{m_1} n_1^{-r_1}\, 2^{j_1 r_1}\, E_{[2^{j_1}-1];2^{n_2}}(f) +$$

$$+ \sum_{j_2=0}^{m_2} n_2^{-r_2}\, 2^{j_2 r_2}\, E_{2^{n_1};[2^{j_2}-1]}(f) +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2} N^{-R}\, 2^{J.R}\, E_{[2^J-1]}(f)$$

e desse modo temos estimada (1).

1.3.8. LEMA (Potapov [35]): Seja $f \in X_\pi$, $R \in N^2$ e suponhamos que

$$(1) \qquad \sum_{J\in N_+^2} 2^{J.R}\, E_{[2^J-1]}(f) < \infty \qquad .$$

Então

$$(2) \qquad D^R f \in X_\pi$$

e existe uma constante $C = C(R)$ tal que

$$(3) \qquad E_{2^{M-1}}(D^R f) \leq C \sum_{J \geq M} 2^{J.R} E_{[2^{J-1}]}(f)$$

para todo $M \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelas considerações feitas na Proposição 1.3.7 e tomando $Q_J = - T_J$, seguirá que:

$$\| f - \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} Q_{j_1 j_2} \|_{X_\pi} = \| f - V^*_{2^{m_1};0}(f) - V^*_{0,2^{m_2}}(f) + V^*_{2^{m_1};2^{m_2}}(f) \|_{X_\pi}$$

$$\leq \| f - V^*_{2^{m_1};0}(f) \|_{X_\pi} + \| f - V^*_{0,2^{m_2}}(f) \|_{X_\pi} + \| f - V^*_{2^{m_1},2^{m_2}}(f) \|_{X_\pi}$$

$$\leq C(E_{2^{m_1};0}(f) + E_{0,2^{m_2}}(f) + E_{2^{m_1};2^{m_2}}(f))$$

e esta expressão converge a zero quando $(m_1, m_2) \to \infty$, o que significa a convergência da série $\sum_{J \in N_+^2} Q_J$ para f na norma de X_π.

Como

$$\| D^R Q_J \|_{X_\pi} \leq C \; 2^{J.R} \; E_{[2^{J-1}]}(f)$$

temos que

$$\sum_{J \in N_+^2} \| D^R Q_J \|_{X_\pi} \leqslant C \sum_{J \in N_+^2} 2^{J.R} E_{[2^{J-1}]}(f) < \infty$$

e como X_π é completo, existe $g \in X_\pi$ tal que

$$\| g - \sum_{0 \leqslant J \leqslant M} D^R Q_J \|_{X_\pi}$$

converge a zero quando $M \to \infty$ e além disso

$$g = D^R f \in X_\pi \qquad .$$

Temos ainda que

$$D^R f - \sum_{j_1=0}^{m_1-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} D^R T_{j_1 j_2} - \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{m_2-1} D^R T_{j_1 j_2} + \sum_{j_1=0}^{m_1-1} \sum_{j_2=0}^{m_2-1} D^R T_{j_1 j_2} =$$

$$\equiv \sum_{J \geqslant M} D^R T_J$$

donde se tomarmos $M = (m_1, m_2) \geqslant 1$, teremos que

$$E_{2^{M-1}}(D^R f) \leqslant C \sum_{J \geqslant M} \| D^R T_J \|_{X_\pi} \leqslant C \sum_{J \geqslant M} 2^{J.R} E_{[2^{J-1}]}(f)$$

1.3.10. TEOREMA DE BERNSTEIN: Seja $f \in X_\pi$, $R = (r_1, r_2) \in N^2$ e $0 < \beta = (\beta_1, \beta_2) < 1$. Se:

(1) $$E_N(f) = O(N^{-R-\beta}) \qquad (N \to \infty)$$

então

(2) $$D^R f \in X_\pi$$

e

(3) $$D^R f \in Lip(\beta)$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $E_N(f) = O(N^{-R-\beta})$ temos que

$$E_{[2^{J-1}]}(f) = O(2^{-J.(R+\beta)}) \qquad (J \to \infty)$$

e pelo Lema 1.3.8 seguirá que

$$E_{2^{M-1}}(D^R f) \leqslant \sum_{J \geqslant M} 2^{-J.\beta} = O(2^{-M.\beta}) \qquad .$$

Assim, em virtude da Proposição 1.3.7 temos que para todo $k \in$ □

$$\omega^k(D^R f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}) \leqslant C\ N^{-k} \sum_{0 \leqslant J \leqslant 1+M} 2^{k.J}\ 2^{-J.\beta}$$

$$= O(N^{-k} \sum_{0 \leqslant J \leqslant 1+M} 2^{J.(k-\beta)}) = O(N^{-k} 2^{M.(k-\beta)})$$

$$= O(N^{-k} N^{k-\beta}) = O(N^{-\beta})$$

onde $N \leqslant 2^M < N+1$ e $N \in N^2$.

Temos então que $D^R f \in Lip\ \beta$, como queriamos demonstrar.

1.4. A CONEXÃO ENTRE OS TEOREMAS DE JACKSON E BERSNTEIN

Os teoremas de Jackson e Bernstein são equivalentes. Isto decorre, como é simples de verificar dos teoremas 1.2.7 e 1.3.9. Vamos explicitar este fato com o seguinte teorema.

1.4.1. TEOREMA: Seja $f \in X_\pi$, $0 < \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) < 1$ e $R \in N^2$. Então, são equivalentes as afirmações

(i) Vale a estimada

(1) $$E_N(f) = O(N^{-R-\alpha}) \qquad (N \to \infty)$$

(ii) Existem as derivadas $D^S f$ em X_π se $S \leqslant R$ e

(2) $$D^R f \in Lip(\alpha) \qquad .$$

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO DISCRETOS, ENTRE 2^d ESPAÇOS DE BANACH

Desenvolveremos neste Capítulo a teoria de interpolação para 2^d espaços de Banach utilizando essencialmente variáveis discretas.

As referências básicas aqui são Fernandez [19] e [21]. Entretanto, este Capítulo não é meramente expositório. Fazemos um estudo mais profundo dos espaços de interpolação gerados pelos métodos K e J, para 2^d espaços de Banach, em suas formas discretas. Isto será feito seguindo-se a linha de Butzer-Scherer [14].

O objetivo principal é obter caracterizações, dos espaços de interpolações, apropriadas para aplicações em problemas de aproximação em espaços de funções periódicas. Demonstraremos que os pesos $2^{N.\theta}$ utilizados por Fernandez em [21] podem ser substituídos por pesos da forma $a^{N.\theta}$, com $a > 1$. Mostraremos também que os mesmos espaços podem ser definidos utilizando-se pesos monomiais da forma N^{θ}. Por outro lado estudaremos propriedades dos espaços de interpolação quando a família admissível satisfizer certas condições de inclusão. Terminaremos o Capítulo apresentando o teorema da dualidade para os espaços de interpolação que será fundamental em Capítulos posteriores para obtenção de propriedades de aproximação duais.

2.1. NOTAÇÕES

Apresentamos aqui algumas notações que serão muito utiliza das na sequência: $t = (t_1, t_2, \ldots, t_d) > 0$ se, e somente se, $t_j > 0$ para cada $j = 1,2,\ldots,d$; se $k = (k_1,\ldots,k_d) \in \square$ então $t^k = t_1^{k_1} \ldots t_d^{k_d}$ · $t = (t_1,\ldots,t_d) \leqslant s = (s_1,\ldots,s_d)$ se, e somente se, $t_j \leqslant s_j$ para cada $j = 1,\ldots,d$; se $\theta = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_d) \in R^d$ e $N = (n_1,\ldots,n_d) \in N^d$ então $N\cdot\theta = (n_1\theta_1,\ldots,n_d\theta_d)$ e para $a = (a_1,\ldots,a_d) \in R_+^d$: $a^{N\cdot\theta} = a_1^{n_1\theta_1} \ldots a_d^{n_d\theta_d}$.

2.2. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Apresentamos aqui as principais definições básicas que serão utilizadas neste Capítulo.

2.2.1. Seja $\mathbb{E} = (E_k | k\in\square)$ uma família de 2^d espaços de Banach imersos algébrica e topologicamente num mesmo espaço vetorial de Hansdorff V. Uma tal família será denominada família admissível de espaços de Banach em V.

Se $\mathbb{E} = (E_k | k\in\square)$ é uma família admissível de espaços de Banach, introduzimos a envoltória linear $\Sigma\mathbb{E}$ e a interseção $\cap\mathbb{E}$ como espaços vetoriais nas formas usuais. Os espaços $\Sigma\mathbb{E}$ e $\cap\mathbb{E}$ são espaços vetoriais completos quando munidos, respectivamente, das normas:

$$(1) \quad \|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = \inf\{ \sum_{k\in\square} \|x_k\|_{E_k} \,|\, x = \sum_{k\in\square} x_k, x_k \in E_k, k\in\square\}$$

$$(2) \quad \|x\|_{\cap\mathbb{E}} = \max\{\|x\|_{E_k} \,;\, k\in\square\}$$

Os espaços $\Sigma\mathbb{E}$ e $\cap\mathbb{E}$ estão continuamente imersos em V.

2.2.2. DEFINIÇÃO: Dada uma família admissível $\mathbb{E}$, denominaremos espaço intermediário em relação à família $\mathbb{E}$ a todo espaço de Banach E que satisfaz às relações de imersão:

$$(1) \qquad \cap\mathbb{E} \subset E \subset \Sigma\mathbb{E} \quad ,$$

onde o símbolo $\subset$ denotará sempre uma imersão contínua.

2.2.3. DEFINIÇÃO: Diremos que um par de espaços de Banach intermediários (E,F) em relação às famílias admissíveis $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$ e $\mathbb{F} = (F_k | k\varepsilon\square)$ respectivamente, tem a propriedade de de interpolação se para toda aplicação linear $T\colon \Sigma\mathbb{E} \to \Sigma\mathbb{F}$ cujas restrições $T|_{E_k}: E_k \to F_k$ forem contínuos para todo $k\varepsilon\square$ tivermos que $T\colon E \to F$ será contínua.

A condição acima implica necessariamente que $T\colon \Sigma\mathbb{E} \to \Sigma\mathbb{F}$ é contínua.

2.2.4. Seja G um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|_G$ e $R^d_+ = (0,\infty) \times \dots \times (0,\infty)$. O espaço das funções $g\colon R^d_+ \to G$, fortemente mensuráveis em relação à medida $d_*t = d_*t_1 \dots d_*t_d = \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_d}{t_d}$ e que são Q-integráveis $(Q = (q_1,\dots,q_d))$, será denotado por $L^Q_*(G)$. O espaço das funções $g\colon R^d \to G$ fortemente mensuráveis em relação à medida usual de Lebesgue sobre o R^d, que são Q-integráveis será denotado por $L^Q(G)$.

Em todos os casos acima descritos, teremos modificações habituais quando $q_j = \infty$ para algum ou para todos os $j = 1,2,\dots,d$.

Quando G = R ou C denotaremos esses espaços simplesmente por L^Q_* e L^Q.

Para toda a teoria dos espaços L^Q com normas mistas nossa referência básica será sempre Benedek-Panzone [1].

2.2.5. Diremos que a sequência múltipla $(x_N)_{N\varepsilon Z^d}$ pertence a $\ell^Q(Z^d)$ se

$$(1)\quad \|(x_N)\|_{\ell^Q(Z^d)} = [\sum_{n_d\varepsilon Z} \ldots (\sum_{n_1\varepsilon Z} |x_N|^{q_1})^{\frac{q_2}{q_1}} \ldots]^{1/q_d} < \infty \quad .$$

Aqui estamos considerando $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) < \infty$ com as modificações habituais para $Q = \infty$.

Diremos que $(x_N)_{N\varepsilon Z^d} \varepsilon \ell^Q_*(N^d_+)$ se

$$(2)\quad \|(x_N)\|_{\ell^Q_*(N^d_+)} = [\sum_{n_d\varepsilon N_+} \ldots (\sum_{n_1\varepsilon N_+} |x_N|^{q_1} \frac{1}{n_1})^{q_2/q_1} \ldots \frac{1}{n_d}]^{\frac{1}{q_d}}$$

for finito. Novamente consideramos as modificações habituais quando $Q = \infty$.

2.3. OS MÉTODOS J E K DE PEETRE

Nesta seção iniciaremos o estudo dos métodos reais de interpolação estendendo os métodos J e K de Peetre [33], [34] para vários espaços de Banach.

Apresentaremos uma extensão dos métodos K e J considerando 2^d espaços de Banach e d parâmetros. Outras extensões foram obtidas por Johnen [25] e Sparr [43] quando os mesmos consideraram d + 1 espaços e d parâmetros.

Os métodos J e K são "duais" e sob certas condições em relação aos parâmetros, geram os mesmos espaços, o que é de importância fundamental tanto nos aspectos teóricos como nas aplicações. Esta equivalência entre os métodos permite demonstrar resultados de reiteração e dualidade e por outro lado obter teoremas de aproximação dos tipos diretos e inversos.

2.3.1. AS NORMAS FUNCIONAIS K E J

Consideremos $\mathbb{E} = (E_k \mid k \varepsilon \square)$ uma família admissível de espaços de Banach, $t = (t_1, \ldots, t_d) > 0$, $y \in \cap E$ e $x \in \Sigma E$. Definimos

$$(1) \qquad J(t,y) = J(t,y,\mathbb{E}) = \max_{k \varepsilon \square} \{t^{-k} \|y\|_{E_k}\}$$

e

$$(2) \qquad K(t,x) = K(t,x,\mathbb{E}) = \inf\{\Sigma t^{-k} \|x_k\|_{E_k}, x = \Sigma x_k, \; x_k \in E_k, k \in \square\}$$

Para cada t fixo, $J(t,y)$ e $K(t,x)$ definem normas equivalentes a $\|y\|_{\cap\mathbb{E}}$ e $\|x\|_{\Sigma\mathbb{E}}$, respectivamente em $\cap\mathbb{E}$ e $\Sigma\mathbb{E}$ e temos ainda que $J(1,y) = \|y\|_{\cap\mathbb{E}}$ e $K(1,x) = \|x\|_{\Sigma\mathbb{E}}$.

2.3.2. LEMA: Para cada $t \in R_+^d$, as normas funcionais K e J definidas acima satisfazem:

(1) São funções contínuas monótonas e decrescentes em t.

(2) $\min_{k \varepsilon \square} (s/t)^k K(s,x) \leqslant K(t,x) \leqslant \max_{k \varepsilon \square} (s/t)^k K(s,x) \qquad (x \in \Sigma\mathbb{E})$

(3) $\min_{k \varepsilon \square} (s/t)^k J(s,x) \leqslant J(t,x) \leqslant \max_{k \varepsilon \square} (s/t)^k J(s,x) \qquad (x \in \cap\mathbb{E})$

(4) $K(t,x) \leqslant \min_{k \varepsilon \square} (s/t)^k J(s,x) \qquad (x \in \cap\mathbb{E})$

(5) $\lim_{t\to s} K(t,x) = K(s,x); \lim_{t\to s} J(t,x) = J(s,x)$

Através das normas funcionais K e J temos métodos para gerar espaços intermediários da família $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$.

2.3.3. DEFINIÇÃO: Seja $a \in R_+^d$, $a > 1$. Definimos $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(a)}$ como o espaço de todos os $x \in \Sigma E$ para os quais

(1) $$\{a^{N.\theta}K(a^N,x)\} \in \ell^Q(Z^d)$$

onde $\Theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) \in R^d$, $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) \leqslant \infty$.

2.3.4. TEOREMA: Para $0 < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) < 1$; $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) < \infty$ e/ou $0 \leqslant \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) \leqslant 1$, $Q = \infty$ os espaços $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$ são completos sob a norma:

(1) $$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} = \|\{a^{N.\theta}K(a^N;x)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e valem ainda as seguintes propriedades:

(2) $$(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(a)} \neq \{0\}$$

Para $a = (a_1,\ldots,a_d) \in R_+^d$; $b = (b_1,\ldots,b_d) \in R_+^d$ com $a \neq b$; $a,b > 1$ temos que as normas

(3) $$\|.\|_{\theta,Q,K(a)} \approx \|\cdot\|_{\theta,Q,K(b)} \quad ,$$

isto é, as normas são equivalentes.

(4) $\qquad \cap\mathbb{E} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(a)} \subset \Sigma\mathbb{E}$

(5) $\qquad E_k \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{k,\infty,K(a)} \qquad\qquad (k \varepsilon \square)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $A(\theta;Q,a) = \| \{\min_{k\varepsilon\square} (a^{-N.k}) a^{N.\theta}\} \|_{\ell^Q(Z^d)}$ é finito, temos que existe $x \neq 0$, $x \varepsilon (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$. Mostremos agora a segunda imersão de (4). Seja $x \varepsilon (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$. Como

$$K(a^N;x) \geq \min_{k\varepsilon\square} (a^{-N.k}) K(1,f)$$

segue que

$$\|x\|_{\theta,Q,K} = \| \{a^{N.\theta} K(a^N,x)\} \|_{\ell^Q(Z^d)} \geq \| \{a^{N.\theta} \min_{k\varepsilon\square} (a^{-N.k}) K(1,x)\} \|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\geq K(1,x)\ A(\theta,Q,a) \geq C\|x\|_{\Sigma\mathbb{E}}$$

e desta última desigualdade temos que $\|x\|_{\theta,Q,K(a)} = 0$ implica $\|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = 0$ e consequentemente $x = 0$. Mostremos agora a primeira imersão de (4).

Seja $x \varepsilon \cap\mathbb{E}$. Como

$$K(a^N;x) \leq \min_{k\varepsilon\square} (a^{-N.k}) J(1,x)$$

temos que

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} = \|\{a^{N.\theta}K(a^N,x)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\{a^{N.\theta}\min_{k\varepsilon\square}(a^{-N.k})J(1,x)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant \quad A(\theta,Q,a)\ J(1,x)$$

$$\leqslant \quad C \quad \|x\|_{\cap\mathbb{E}}$$

A demonstração de (5) segue do fato que

$$K(a^N,x) \leqslant a^{-N.k}\|x\|_{E_k}$$

para todo $k \varepsilon \square$ e $x \varepsilon E_k$.

Obteremos agora a demonstração de (3) para $b > a > 1$. Dado $a^N \varepsilon R$ existe $k \varepsilon Z^d$ tal que $b^k \leqslant a^N < b^{k+1}$ e assim podemos escrever que

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)}=\{\sum_{n_d\varepsilon Z}\cdots(\sum_{n_1\varepsilon Z}(a^{N.\theta}K(a^N;x))^{q_1})^{q_2/q_1}\cdots\}^{\frac{1}{q_d}}$$

$$=\{\sum_{k_d\varepsilon Z}\sum_{n_d[k_d]}1\ldots[\sum_{k_1\varepsilon Z}\sum_{n_1[k_1]}1.(a^{N.\theta}K(a^N;x))^{q_1}]^{q_2/q_1}\cdots\}^{\frac{1}{q_d}}$$

onde $\sum_{n_j[k_j]} 1$ é a soma sobre todos os índices compreendidos entre $b_j^{k_j}$ e $b_j^{k_j+1}$ $(j = 1,2,\ldots,d)$ e, além disso tira-se que

$$1 \leqslant \sum_{n_j[k_j]} 1 \leqslant \log b_j/\log a_j \qquad (j=1,2,\ldots,d)$$

Assim:

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} \leqslant \{ \sum_{k_d \in Z} \sum_{n_d [k_d]} 1 \ldots [\sum_{k_1 \in Z} \sum_{n_1 [k_1]} 1 (b^{(1+k)\cdot\theta} K(b^k;x))^{q_1} \ldots \}^{\frac{1}{q_d}}$$

$$\leqslant b^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \log b_j / \log a_j \; \|x\|_{\theta,Q,K(b)}$$

donde

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} \leqslant C \|x\|_{\theta,Q,K(b)} \qquad .$$

Reciprocamente, utilizando um raciocínio semelhante, temos que

$$\|x\|_{\theta,Q,K(b)} = \{ \sum_{k_d \in Z} \ldots (\sum_{k_1 \in Z} (b^{k\cdot\theta} K(b^k;x))^{q_1})^{q_2/q_1} \ldots \}^{\frac{1}{q_d}}$$

$$\leqslant \{ \sum_{k_d \in Z} \sum_{n_d [k_d]} 1 \ldots [\sum_{k_1 \in Z} \sum_{n_1 [k_1]} 1 . (b^{k\cdot\theta} K(b^k;x))^{q_1}]^{q_2/q_1} \ldots \}^{\frac{1}{q_d}}$$

$$\leqslant \{ \sum_{n_d \in Z} \ldots [_{n_1 \in Z} (a^{n\cdot\theta} K(a^N/b;x))^{q_1}]^{q_2/q_2} \ldots \}^{\frac{1}{q_d}}$$

$$\leqslant C \; \|x\|_{\theta,Q,K(a)}$$

Mostremos que $(E_k | k \varepsilon \square)_{\theta,Q,K}$ é completo. Suponhamos que

$$\sum_{m \varepsilon N} \|f_m\|_{\theta,Q,K} < \infty \qquad .$$

Desse modo

$$\sum_{m\in N} K(1,f_m) = \sum_{m\in N} \|f_m\|_{\Sigma \mathbb{E}} \leqslant \sum_{m\in N} \|f_m\|_{\theta,Q,K} < \infty$$

e como $\Sigma\mathbb{E}$ é completo, existe $f \in \Sigma\mathbb{E}$ tal que

$$\| \sum_{m\in N} f_m - f\|_{\Sigma\mathbb{E}} \to 0 \qquad .$$

Como $K(a^N,f) \leqslant \sum_{m\in N} K(a^N,f_m)$, temos que

$$\|f\|_{\theta,Q,K(a)} = \|\{a^{N.\theta} K(a^N;f)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant \|\{a^{N.\theta} \sum_{m\in N} K(a^N;f_m)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e pela desigualdade de Minkowski, temos que

$$\|f\|_{\theta,Q,K(a)} \leqslant \sum_{m\in N} \|f_m\|_{\theta,Q,K(a)} < \infty$$

Além disso

$$\| \sum_{m\in N} f_m - f\|_{\theta,Q,K(a)}$$

converge a zero quando $m \to \infty$ e desse modo mostramos que a série $\sum_{m\in N} f_m$ é somável na norma do espaço $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(a)}$. Portanto o espaço $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(a)}$ é completo.

2.3.5. OBSERVAÇÃO: Como as normas $\|.\|_{\theta,Q,K(a)}$ e $\|.\|_{\theta,Q,K(b)}$ são equivalentes, os espaços $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(a)}$ e $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K(b)}$ coincidem. Portanto, quando não houver necessidade de explitar a "base" considerada, escreveremos simplesmente $\|.\|_{\theta,Q,K}$ e $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$.

2.3.6. PROPOSIÇÃO: Sejam $\mathbb{E} = (E_k|k\varepsilon\square)$ e $\mathbb{F} = (F_k|k\varepsilon\square)$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach em V e W, respectivamente. Se $T:\Sigma\mathbb{E} \to \Sigma\mathbb{F}$ é uma transformação linear cujas restrições

$$(1) \qquad T|_{E_k}:E_k \to F_k \qquad (k \varepsilon \square)$$

são contínuas, então, para todo $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) \varepsilon R^d +$ e $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) \leqslant \infty$ tem-se que

$$(2) \qquad T:(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \to (F_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$$

é uma aplicação linear contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \varepsilon (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$ e tomemos uma de suas decomposições $x = \sum_{k\varepsilon\square} x_k$ com $x_k \varepsilon E_k$. Desse modo, existem constantes $C_k > 0$, tal que as desigualdades

$$\|Tx_k\|_{F_k} \leqslant C_k \|x_k\|_{E_k}$$

sejam verdadeiras para todos os $x_k \varepsilon E_k$ e $k \varepsilon \square$. Assim,

$$K(a^N;Tx;\mathbb{F})=K(a^N;\sum_{k\varepsilon\square} Tx_k;F) \leqslant \sum_{k\varepsilon\square} K(a^N,Tx_k)$$

$$\leqslant \sum_{k\varepsilon\square} a^{-N.k}.C_k\|x_k\|_{E_k} \leqslant (\max_{k\varepsilon\square} C_k) \sum_{k\varepsilon\square} a^{-N.k}\|x_k\|_{E_k}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de x, segue que

$$K(a^N, Tx; \mathbb{F}) \leqslant C\ K(a^N; x, \mathbb{E})$$

donde

$$\|Tx\|_{\theta,Q,K,\mathbb{F}} = \|\{a^{N\cdot\theta} K(a^N; Tx, \mathbb{F})\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant C\|\{a^{N\cdot\theta} K(a^N; x, \mathbb{E})\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant C\|x\|_{\theta,Q,K,\mathbb{E}}$$

Com esta última proposição mostramos que os espaços $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$ têm a propriedade de interpolação e a partir daqui nós os denominaremos espaços de interpolação.

2.3.7. DEFINIÇÃO: Seja $a = (a_1,\ldots,a_d) \varepsilon R^d_+$, $a > 1$. Definimos $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$ como o espaço de todos os $x \varepsilon \Sigma\mathbb{E}$ para os quais existem sequências $\{U_N\}_{N\varepsilon Z^d} \subset \cap\ \mathbb{E}$ tal que

(1) $$x = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N \qquad \|\cdot\|_{\Sigma\mathbb{E}}$$

e

(2) $$\{a^{N\cdot\theta} J(a^N; U_N)\} \varepsilon\ \ell^Q(Z^d)$$

onde $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) \varepsilon R^d$ e $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) \leqslant \infty$.

2.3.8. TEOREMA: Para $0 < \theta = (\theta_1,\dots,\theta_d) < 1$, $1 < Q = (q_1,\dots,q_d) \leqslant \infty$ e/ou $0 \leqslant \theta = (\theta_1,\dots,\theta_d) \leqslant 1$, $Q = 1$, os espaços $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$ são completos sob a norma

(1) $\|x\|_{\theta,Q,J(a)} = \inf\{\|\{a^{N.\theta} J(a^N, U_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} ; x = \sum_{n\varepsilon Z^d} U_N\}$

e

(2) $$(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J} \neq \{0\} \quad .$$

Mais ainda para $a = (a_1,\dots,a_d) \varepsilon R_+^d$, $b = (b_1,\dots,b_d) \varepsilon R_+^d$ com $a \neq b$; $a,b > 1$ temos

(3) $$\|.\|_{\theta,Q,J(a)} \approx \|.\|_{\theta,Q,J(b)} \quad ,$$

isto é as normas $\|.\|_{\theta,Q,J(a)}$ e $\|.\|_{\theta,Q,J(b)}$ são equivalentes;

(4) $$\cap\mathbb{E} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)} \subset \Sigma\mathbb{E}$$

(5) $$(E_k | k\varepsilon\square)_{k,1,J(a)} \subset E_k \qquad (k \varepsilon \square)$$

(6) $$\overline{\cap\mathbb{E}} = (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)} \qquad (1 \leqslant Q < \infty)$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $A(\theta,Q';a) = \|\{\min_{k\varepsilon\square} a^{-N.k} . a^{N.\theta}\}\|_{\ell^{Q'}(Z^d)}$ é finito, existe $x \neq 0$ com $x \varepsilon (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)}$. Mostremos a segunda imersão de (4). Seja $x \varepsilon (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)}$. Assim, existe uma sequência $\{U_N\}_{N\varepsilon Z^d}$ em $\cap\mathbb{E}$ tal que $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N \varepsilon \Sigma\mathbb{E}$. Logo

$$\|x\|_{\Sigma \mathbf{E}} \leqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} \|U_N\|_{\Sigma \mathbf{E}} = \sum_{N\varepsilon Z^d} K(1;U_N) \leqslant \min_{k\varepsilon\square} (a^{-N.k}) J(a^N;U_N)$$

$$\leqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} (\min_{k\varepsilon\square} a^{-N.k} a^{-N.\theta})(a^{N.\theta} J(a^N; J(a^N;U_N))$$

e pela desigualdade de Hölder, temos que:

$$\|x\|_{\Sigma E} \leqslant A(\theta,Q',a) \; \|x\|_{\theta,Q,J(a)}$$

donde obtemos que

$$\|x\|_{\Sigma E} \leqslant C \; \|x\|_{\theta,Q,J(a)}$$

Da última desigualdade, temos que $\|x\|_{\theta,Q,J(a)} = 0$ implica $\|x\|_{\Sigma E} = 0$ e consequentemente $x = 0$.

Mostremos agora a primeira imersão de (4). Seja $x \varepsilon \cap\mathbf{E}$. Assim, tomando a particular decomposição $U_N = x$ se $N = 0$ e $U_N = 0$ se $N \neq 0$, $N \varepsilon Z^d$, poderemos escrever que $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N = U_0$, donde

$$\|x\|_{\theta,Q,J(a)} = \inf\{\|\{a^{N.\theta} J(a^N;U_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} ; x = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N\}$$

$$\leqslant J(1,U_0) = J(1,x) = \|x\|_{\cap\mathbf{E}} \qquad .$$

Façamos agora a demonstração de (5). Consideremos $x \varepsilon (E_k | k\varepsilon\square)_{k,1,J(a)}$. Desse modo, existe uma sequência $\{U_N\}_{N\varepsilon Z^d} \subset \cap\mathbf{E}$ tal que $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N$ e $\|x\|_{k,1,J(a)} < \infty$. Logo

$$\|x\|_{E_k} \leq \sum_{N \in Z^d} \|U_N\|_{E_k} \leq \sum_{N \in Z^d} a^{N.k} J(a^N, U_N)$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de $x = \sum_{N \in Z^d} U_N$, temos que

$$\|x\|_{E_k} \leq \|x\|_{k,1,J(a)}$$

para todo $k \in \square$.

Demonstremos agora que $(E_k | k \in \square)_{\theta,Q,J(a)}$ é completo. Seja $\{f_r\}_{r \in N} \subset (E_k | k \in \square)_{\theta,Q,J(a)}$ tal que

$$\sum_{r \in N} \|f_r\|_{\theta,Q,J(a)} < \infty$$

Pela definição de ínfimo, temos que para um dado $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $\{U_N^r\}_{N \in Z^d} \subset \cap \mathbb{E}$ tal que:

$$\|\{a^{N.\theta} J(a^N, U_N^r)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leq \|f_r\|_{\theta,Q,J(a)} + 2^{-r}.\varepsilon \qquad .$$

Desse modo, para cada $N \in Z^d$ temos que:

$$\sum_{r \in N} \|U_N^r\|_{\cap \mathbb{E}} = \sum_{r \in N} J(1, U_N^r) \leq \max_{k \in \square}(a^{N.k}) \sum_{r \in N} J(a^N, U_N^r)$$

$$\leq [\max_{k \in \square} (a^{N.k})\, a^{-N.\theta}][\sum_{r \in N} a^{N.\theta} J(a^N, U_N^r)]$$

$$\leq [\max_{k \in \square} (a^{N.k}) a^{-N.\theta}][\sum_{r \in N} \|f_r\|_{\theta,Q,J(a)} + \varepsilon] < \infty$$

e como $\cap\mathbb{E}$ é completo, existe $U_N \in \cap\mathbb{E}$ tal que $U_N = \sum_{r\in N} U_N^r$. Além disso temos que

$$\sum_{N\in Z^d} \|U_N\|_{\Sigma\mathbb{E}} \leq \sum_{r\in N} \sum_{N\in Z^d} \|U_N^r\|_{\Sigma\mathbb{E}}$$

$$\leq \sum_{r\in N} \sum_{N\in Z^d} \min_{k\in\square} (a^{N.k}) J(a^N, U_N^r)$$

$$\leq \sum_{r\in N} \sum_{N\in Z^d} (\min_{k\in\square}(a^{N.k}) a^{-N.\theta})(a^{N.\theta} J(a^N, U_N^r))$$

e pela desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\sum_{N\in Z^d} \|U_N\|_{\Sigma\mathbb{E}} \leq A(\theta, Q', a) \sum_{r\in N} \|\{a^{N.\theta} J(a^N, U_N^r)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leq A(\theta, Q', a) \sum_{r\in N} (\|f_r\|_{\theta,Q,J(a)} + 2^{-r}\varepsilon)$$

$$\leq C \sum_{r\in N} \|f_r\|_{\theta,Q,J(a)} + C.\varepsilon$$

e como $\Sigma\mathbb{E}$ é completo, existe $f \in \Sigma\mathbb{E}$ tal que $f = \sum_{N\in Z^d} U_N$ e pela desigualdade de Minkowski, temos que

$$\|\{a^{N.\theta} J(a^N, U_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leq \sum_{r\in N} \|\{a^{N.\theta} J(a^N; U_N^r)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leq \sum_{r\in N} \|f_r\|_{\theta,Q,J(a)} + \varepsilon < \infty$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$f \in (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$$

e

$$\| f - \sum_{r=0}^{M} f_r \|_{\theta,Q,J(a)} \leqslant \sum_{r>M} \| f_r \|_{\theta,Q,J(a)} \to 0 \qquad ,$$

quando $M \to \infty$, donde o resultado desejado.

Mostremos agora a densidade de $\cap\mathbf{E}$ em $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)}$. Seja $f \in (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)}$. Desse modo, existe uma decomposição da forma $f = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N$ na norma de $\Sigma\mathbf{E}$ tal que

$$\{a^{N.\theta} \; J(a^N, U_N)\} \in \ell^Q(Z^d)$$

Definindo $R_M = \{N = (n_1, \ldots, n_d) \in Z^d; \; |n_j| \leqslant m_j, \; M = (m_1, \ldots, m_d)\}$ teremos

$$f - f_{R_M} = \sum_{N\varepsilon Z^d - R_M} U_N$$

e se tomarmos a particular decomposição da forma

$$f - f_{R_M} = \sum_{N\varepsilon Z^d} V_N$$

poderemos escrever, para $M \to \infty$, que

$$\| f - f_{R_M} \|_{\theta,Q,J(a)} \leqslant \{ \sum_{N\varepsilon R_M} ((a^{N.\theta} J(a^N, V_N))^{q_1})^{q_2/q_1} \ldots \}^{1/q_d} \to 0$$

donde obtemos a densidade desejada. Façamos a demonstração de (3). Consideremos $b > a > 1$ e $x \in (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(b)}$. Assim, $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N$ e além disso:

$$\{b^{N.\theta} J(b^N, U_N)\} \in \ell^Q(Z^d)$$

Definindo

$$V_k = U_N / \prod_{j=1}^{d} \sum_{n_j[k_j]} 1 \equiv U_N / \sum_{N[K]} 1$$

se $b^N \leqslant a^K < b^{N+1}$ e $N\varepsilon Z^d$, teremos:

$$\sum_{K\varepsilon Z^d} V_K = \sum_{N\varepsilon Z^d} \sum_{N[K]} 1 \ . \ U_N / \prod_{j=1}^{d} \sum_{n_j[k_j]} 1 = \sum_{N\varepsilon Z^d} U_N = x$$

e além disso

$$\|\{a^{K.\theta} J(a^K, v_K)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant b^{\theta} \|\{b^{N.\theta} J(b^N, U_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições definidas acima:

$$\|x\|_{\theta,Q,J(a)} \leqslant C \ \|x\|_{\theta,Q,J(b)}$$

Reciprocamente, seja $x \in (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)}$. Desse modo existe $\{v_K\}_{K\varepsilon Z^d} \subset \cap\mathbb{E}$ tal que $x = \sum_{K\varepsilon Z^d} v_K$ na norma de $\Sigma\mathbb{E}$ e além disso

$$\{a^{K.\theta} \ J(a^K, v_K)\} \in \ell^Q(Z^d)$$

Definindo agora $\{U_N\}_{N\in Z^d}$ através de

$$U_N = \sum_{K[N]} v_K$$

teremos que

$$\sum_{N\in Z^d} U_N = \sum_{N\in Z^d} \sum_{K[N]} v_K = \sum_{K\in Z^d} v_K = x$$

e

$$\|\{b^{N.\theta} J(b^N, U_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant \prod_{j=1}^{d} (\log b_j/\log a_j)^{q_j/q'_j} \|\{a^{K.\theta} J(\frac{a^K}{b}; v_K)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições acima teremos que

$$\|x\|_{\theta,Q,J(b)} \leqslant C \; \|x\|_{\theta,Q,J(a)}$$

A demonstração está completa.

2.3.9. OBSERVAÇÃO: Como as normas $\|.\|_{\theta,Q,J(a)}$ e $\|.\|_{\theta,Q,J(b)}$ são equivalentes, os espaços $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(a)}$ e $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J(b)}$ coincidem. Portanto, quando não houver necessidade de explicitar a "base" que está sendo usada, escreveremos simplesmente $\|.\|_{\theta,Q,J}$ e $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$.

2.3.10. PROPOSIÇÃO: Sejam $\mathbb{E} = (E_k|k\varepsilon\square)$ e $\mathbb{F} = (F_k|k\varepsilon\square)$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach em V e W respectivamente. Se $T:\Sigma\mathbb{E} \to \Sigma\mathbb{F}$ é uma transformação linear cujas restrições

$$(1) \qquad T|_{E_k}: E_k \to F_k \qquad (k \in \square)$$

são contínuas, então para todo $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_d) \in R^d_+$ e $1 \leqslant Q = (q_1,\dots,q_d) \leqslant \infty$, tem-se que

$$(2) \qquad T:(E_k|k\in\square)_{\theta,Q,J} \to (F_k|k\in\square)_{\theta,Q,J}$$

é uma transformação linear contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in (E_k|k\in\square)_{\theta,Q,J}$ e $x = \sum_{N\in Z^d} U_N$ uma decomposição de x na norma de $\Sigma\mathbb{E}$. Por hipótese, existem constantes $C_k > 0$ tal que

$$\|T\ U_N\|_{F_k} \leqslant C_k\ \|U_N\|_{E_k}$$

desde que $U_N \in \cap\mathbb{E}$ e $k \in \square$.

Desse modo:

$$J(a^N, T\ U_N;\mathbb{F}) = \max_{k\in\square}(a^{-N.k}\|T\ U_N\|_{F_k}) \leqslant \max_{k\in\square}(a^{-N.k} C_k \|U_N\|_{E_k})$$

$$\leqslant C \max_{k\in\square}(a^{-N.k}\|U_N\|_{E_k}) \leqslant C\ J(a^N, U_N, \mathbb{E}) \qquad .$$

Assim

$$\|T_x\|_{\theta,Q,J,\mathbb{F}} \leqslant \|\{a^{N.\theta} J(a^N, T\ U_N, \mathbb{F})\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant C\|\{a^{N.\theta} J(a^N, U_N, \mathbb{E})\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de

$x = \sum_{N \in Z^d} U_N$ seguirá que

$$\|Tx\|_{\theta,Q,J,\mathbb{F}} \leqslant C \, \|x\|_{\theta,Q,J,\mathbb{E}}$$

Concluimos assim que os espaços $(E_k | k \in \square)_{\theta,Q,J}$ têm a propriedade de interpolação, sendo denominados a partir daqui espaços de interpolação.

2.4. A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS MÉTODOS J e K DE INTERPOLAÇÃO

2.4.1. PROPOSIÇÃO: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ temos:

$$(E_k | k \in \square)_{\theta,Q,J} \subset (E_k | k \in \square)_{\theta,Q,K} \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in (E_k | k \in \square)_{\theta,Q,J}$. Assim, existe uma sequência $\{u_M\}_{M \in Z^d} \subset \cap \mathbb{E}$, tal que

$$x = \sum_{M \in Z^d} u_M$$

e

$$\{a^{M.\theta} \, J(a^M, u_M)\} \in \ell^Q(Z^d) \qquad (a > 1)$$

Como

$$K(a^N, x) = K(a^N, \sum_{M \in Z^d} u_{N-M}) \leqslant \sum_{M \in Z^d} K(a^N, u_{N-M})$$

$$\leqslant \sum_{M \in Z^d} \min_{k \in \square} (a^{-M.k}) \, J(a^{N-M}; u_{N-M})$$

temos que

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} = \|\{a^{N.\theta}\ K(a^N,x)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leq \|\min_{k\in\square}(a^{-M.k})a^{M.\theta}\|_{\ell^{Q'}(Z^d)}\ \|a^{K.\theta}\ J(a^K;u_K)\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leq A(\theta,Q',a)\ \|a^{N.\theta}\ J(a^N,u_N)\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições da forma $x = \sum_{N\in Z^d} u_N$, temos que

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} \leq C\ \|x\|_{\theta,Q,J(a)}$$

Antes de introduzir o lema seguinte, será necessária a inclusão de uma hipótese essencial à sua demonstração . Esta hipótese garante que a família $(E_k | k\in\square)$ passa a ser uma escala de espaços de Banach ; isto é, se $k' \leq k''$ então $E_{k'} \subset E_{k''}$ para $k',k'' \in \square$. Quando temos dois parâmetros a família satisfaz às imersões abaixo :

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{10} & & \\ & \subset & & \subset & \\ E_{00} & & & & E_{11} \\ & \subset & & \subset & \\ & & E_{01} & & \end{array}$$

Esta hipótese será considerada até o final deste trabalho e será essencial nas aplicações .

2.4.2. LEMA : Seja $(E_k | k \in \square)$ uma família de espaços de Banach tal que $E_{k'} \subset E_{k''}$ se $k'' \leq k'$, $k', k'' \in \square$. Vamos supor que exista uma sequência $(P_n)_{n \in N}$ de operadores lineares $P_n : V \to V$ com $P_n(E_k) \subset \cap \mathbf{E}$ $k \in \square$, tal que $P_n x \to x$ em E_k para cada x fixo em E_k e para todo $k \in \square$. Se para $x \in \Sigma \mathbf{E}$, tivermos que

$$(1) \qquad K(a^m, a^n, x) \leq C(x) \quad a^{-m\alpha} \quad a^{-n\beta}$$

com $0 < (\alpha, \beta) < 1$, então existirá (u_{mn}) em $\cap \mathbf{E}$ tal que

$$(2) \qquad x = \sum_{m \in Z} \sum_{n \in Z} u_{mn} \qquad (\text{em } \Sigma \mathbf{E})$$

e

$$(3) \qquad J(a^m, a^n, u_{mn}) \leq C \; K(a^m, a^n, x)$$

DEMONSTRAÇÃO : Como

$$K(a^m, a^n, x) = \inf\{K_0(a^m, x_0) + a^{-n} K_1(a^m, x_1)\}$$

onde $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in E_{00} + E_{10}$, $x_1 \in E_{01} + E_{11}$, $K_0(a^m, x_0) = K(a^m, x_0, E_{00}, E_{10})$ e $K_1(a^m, x_1) = K(a^m, x_1, E_{01}, E_{11})$, seguirá para $m \leq 0$, que :

$$K_0(a^m, x_0) \cong \| x_0 \|_{E_{00}}$$

e

$$K_1(a^m, x_1) \cong \| x_1 \|_{E_{01}}$$

Teremos então para $m \leq 0$, que :

$$K(a^m, a^n, x) \cong \inf\{\| x_0 \|_{E_{00}} + a^{-n} \| x_1 \|_{E_{01}}\}$$

Então, dado $K(1,a^n,x)$, existe uma decomposição de $x = x_o+x_1$ em $(E_{00}+E_{10})$ + $(E_{01} + E_{11})$, que depende somente de n , tal que

$$\|x_o^n\|_{E_{00}} + \|x_1^n\|_{E_{01}} \leq 2\ K(1,a^n,x) \leq C\ K(a^m,a^n,x)$$

Para todo $m \leq 0$ e para todo $n \in Z$ e $x \in \Sigma\, \mathbf{E}$.

Agora, dado $x \in \Sigma\, \mathbb{E}$, seja $y = Px$ em $\cap\, \mathbf{E}$ e uma decomposição de y da forma $y = (Px)_o^n + (Px)_1^n$ tal que

$$\|(Px)_o^n\|_{E_{00}} + a^{-n}\ \|(Px)_1^n\|_{E_{01}} \leq C\ K(1,a^n,y) \ .$$

Usando o fato que $P^2 = P$, seguirá que $Py = y_o^n + y_1^n$ onde $y_o^n = P(Px)_o^n$ e $y_1^n = P(Px)_1^n$, sendo que y_o^n e y_1^n pertencem a $\cap E$ e além disso :

$$\|y_o^n\|_{E_{10}} + a^{-n}\ \|y_1^n\|_{E_{11}} \leq C\ K(1,a^n,y)$$

Consideremos agora $m \geq 0$, $m \in Z$. Assim :

$$(4) \qquad K_o(a^m,y_o^n) + a^{-n}\ K_1(a^m,y_1^n) \leq a^{-m}\ \|y_o^n\|_{E_{10}} + a^{-m}\ a^{-n}\ \|y_1^n\|_{E_{11}}$$

$$\leq C\ a^{-m}\ K(1,a^n,y) \ \leq\ C\ K(a^m,a^n,y)$$

pois $y_o^n = 0 + y_o^n$ e $y_1^n = 0 + y_1^n$ são decomposições possíveis de y_o^n e y_1^n em $E_{00}+E_{10}$ e $E_{01}+E_{11}$, respectivamente .

Consideremos $x \in \Sigma E$ e suponhamos que $K(a^m,a^n,x) \leq C\ a^{-m\alpha}\ a^{-n\beta}$. De (4) segue que dados m e n , existe uma decomposição $y = y_o^n + y_1^n$ que só depende de n , tal que

$$K_o(a^m,y_o^n) + a^{-n}\ K_1(a^m,y_1^n) \leq C\ K(a^m,a^n,y) \ .$$

Tomando $m = 0$, teremos que

$$\| y_o^n \|_{E_{00}+E_{10}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to -\infty)$$

e

$$\| y_1^n \|_{E_{01}+E_{11}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

e fazendo

$$v_n = y_o^{n+1} - y_o^n = y_1^n - y_1^{n+1}$$

seguirá que

$$y = \sum_{n \in Z} v_n \qquad (\text{em } \Sigma\mathbf{E})$$

sendo que $v_n \in (E_{00}+E_{10}) \cap (E_{01}+E_{11})$ e

$$K_o(a^m, v_n) + a^{-n} K_1(a^m, v_n) \leq C \;\; K(a^m, a^n, y)$$

Agora, para todo $m \in Z$, existe uma decomposição de v_n da forma

$$v_n = v_{mn}^o + v_{mn}^1$$

tal que

$$\| v_{mn}^o \|_{E_{00}} + a^{-m} \| v_{mn}^1 \|_{E_{10}} \leq C \; K_o(a^m, v_n)$$

e novamente usando a projeção P teremos a existência de w_{mn}^o e w_{mn}^1 em $\cap\mathbf{E}$ tal que

$$v_n = w_{mn}^o + w_{mn}^1$$

$$\| w_{mn}^o \|_{E_{00}} + a^{-m} \| w_{mn}^1 \|_{E_{10}} \leq C \; K(a^m, v_n)$$

e

$$\|w^o_{mn}\|_{E_{01}} + a^{-m}\|w^1_{mn}\|_{E_{11}} \leq C\ K(a^m,v_n)$$

e definindo

$$v_{mn} = w^o_{m+1,n} - w^o_{m,n} = w^1_{m,n} - w^1_{m+1,n}$$

seguirá que

$$v_n = \sum_{m\in Z} v_{mn} \qquad (\text{em } \Sigma\mathbf{E})$$

e ainda teremos :

$$J(a^m,a^n,v_{mn}) \leq J_o(a^m,v_{mn}) + a^{-n} J_1(a^m,v_{mn})$$

$$\leq \|v_{mn}\|_{00} + a^{-n}\|v_{mn}\|_{10} + a^{-m}\|v_{mn}\|_{01} + a^{-m}a^{-n}\|v_{mn}\|_{11}$$

$$\leq (\|w^o_{mn}\|_{00} + \|w^o_{m+1,n}\|_{00}) + a^{-n}(\|w^1_{m,n}\|_{10} + \|w^1_{m+1,n}\|_{10})$$

$$+ a^{-m}(\|w^o_{m,n}\|_{01} + \|w^o_{m+1,n}\|_{01}) +$$

$$+ a^{-m}a^{-n}(\|w^1_{m,n}\|_{11} + \|w^1_{m+1,n}\|_{11})$$

$$\leq C\ (K_o(a^m,v_n) + a^{-n} K_1(a^m,v_n))$$

$$\leq C\quad K(a^m,a^n,y)$$

Considerando agora $x \in \Sigma\,\mathbf{E}$, teremos que $x = \sum_{k\in \square} x_k$; $Px = y = \sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z} v_{mn}$ e $y_\lambda = P_\lambda x = P_\lambda\left(\sum_{k\in\square} x_k\right) = \sum_{k\in\square} P_\lambda x_k$ para todo $\lambda \in N$.

Assim , quando $\lambda \to \infty$, temos que

$$K(a^m,a^n,y_\lambda - x)=K(a^m,a^n,P_\lambda x-x) \leq C(m,n) \sum_{k\in\square} \|P_\lambda x_k - x_k\|_{E_k} \to 0$$

e teremos então

$$K(a^m,a^n,y_\lambda - x) \leq K(a^m,a^n,y_\lambda) + K(a^m,a^n,x) \leq C\ K(a^m,a^n,x)$$

o que garante para $\theta = (\alpha,\beta)$ que :

$$\|y_\lambda - x\|_{(E_k | k\in\square)_{\theta,Q,K}} \leq C\ \|x\|_{(E_k | k\in\square)_{\theta,Q,K}}$$

2.4.3. PROPOSIÇÃO : Para $0 < \theta < 1$, $1 \leq Q \leq \infty$, temos que

$$(E_k | k\in\square)_{\theta,Q,K} \subset (E_k | k\in\square)_{\theta,Q,J}$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $x \in (E_k | k\in\square)_{\theta,Q,K}$. Então

$$\{a^{N.\theta} K(a^N,x)\} \in \ell^Q(Z^d)$$

donde

$$K(a^N;x) \leq C\ \ a^{-N.\theta}$$

e em virtude do Lema 2.4.2. , existe uma sequência $(u_N)_{N\in Z^d}$ em $\cap E$, tal que

$$x = \sum_{N\in Z^d} u_N \qquad \text{(na norma de } \Sigma E)$$

$$J(a^N;u_N) \leqslant C\ K(a^N;x) \qquad .$$

Assim,

$$\|x\|_{\theta,Q,J} \leqslant \|a^{N.\theta}\ J(a^N;u_N)\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant C\|\{a^{N.\theta}\ K(a^N;x)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

donde

$$\|x\|_{\theta,Q,J} \leqslant C\ \|x\|_{\theta,Q,K}$$

2.4.4. TEOREMA: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, temos:

(1) $$(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \cong (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$$

e para os casos limites, onde $\theta = k\ \varepsilon\ \square$, temos:

(2) $$(E_k|k\varepsilon\square)_{k,1,J} \subset E_k \subset (E_k|k\varepsilon\square)_{k,\infty,K} \qquad .$$

2.4.5. COROLÁRIO: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$, temos:

(1) $$\overline{\cap E} = (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$$

e para $0 < \theta < 1$ e $1 \leqslant P \leqslant Q \leqslant \infty$, temos:

(2) $$(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,P,K} \subset (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$$

(3) $$(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,P,J} \subset (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$$

2.5. TEOREMAS DE REITERAÇÃO

Nesta seção estudaremos quais espaços intermediários provêm da iteração dos processos de interpolação J e K. Como resultado disto, mostramos que $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,(.)}$ são estáveis sob os métodos J e K.

2.5.1. DEFINIÇÃO: Seja E um espaço de Banach intermediário da família $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Então:

(1) $\quad E \varepsilon K(\theta,\mathbb{E})$ se $K(t,x) \leqslant C\, t^{-\theta} \|x\|_E \qquad (x\varepsilon E,\ t\varepsilon R_+^d)$

(2) $\quad E \varepsilon J(\theta,\mathbb{E})$ se $\|x\|_E \leqslant C\, t^{\theta} J(t,x) \qquad (x\varepsilon E,\ t\varepsilon R_+^d)$

(3) $\quad E \varepsilon H(\theta,\mathbb{E})$ se $E \varepsilon K(\theta,\mathbb{E}) \cap J(\theta,\mathbb{E})$

Uma caracterização dessas classes, é dada pelo:

2.5.2. LEMA: Seja E um espaço se Banach intermediário da família $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Então:

(1) $\quad E \varepsilon K(\theta,\mathbb{E})$ sse $E \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,\infty,K}$

(2) $\quad E \varepsilon J(\theta,\mathbb{E})$ sse $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,1,J} \subset E$

(3) $\quad E \varepsilon H(\theta,\mathbb{E})$ sse $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,1,J} \subset E \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,\infty,K}$

DEMONSTRAÇÃO DE (1): Como

$$\sup_{N\varepsilon Z^d} \{a^{N.\theta} K(a^N;x)\} \cong \sup_{t\in R_+^d} \{t^{\theta} K(t,x)\}$$

temos que

$$E \in K(\theta,\mathbb{E}) \quad \text{sse} \quad \sup_{t\in R_+^d} \{t^{\theta}\ K(t,x)\} \leqslant C\ \|x\|_E$$

$$\text{sse} \quad \sup_{N\in Z^d} \{a^{N.\theta}\ K(a^N,x)\} \leqslant C\|x\|_E$$

$$\text{sse} \quad E \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,\infty,K}$$

DEMONSTRAÇÃO DE (2): Seja $E \in J(\theta,\mathbb{E})$ e $x \in (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,1,J}$. Assim, existe $\{u_N\}_{N\in Z^d} \subset \cap\mathbb{E}$ tal que $x = \sum_{N\in Z^d} u_N$, $\{a^{N.\theta}\ J(a^N,U_N)\} \in \ell^1(Z^d)$ para $a > 1$ e

$$\|u_N\|_E \leqslant D\ a^{N.\theta}\ J(a^N;u_N) \qquad .$$

Assim

$$\sum_{N\in Z^d} \|u_N\|_E \leqslant D\ \|a^{N.\theta}\ J(a^N;u_N)\|_{\ell^1(Z^d)}$$

e como E é completo, temos a existência de $g \in E$ tal que

$$g = \sum_{N\in Z^d} u_N \qquad \text{(na norma de } \Sigma\mathbb{E})$$

logo, podemos afirmar que $g = x \in \cap\mathbb{E}$, donde:

$$\|x\|_E \leqslant \sum_{N\in Z^d} \|u_N\|_E \leqslant D\|x\|_{\theta,1,J} \qquad .$$

Reciprocamente, seja $(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,1,J} \subset E$, $x \varepsilon (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,1,J}$ e $x \varepsilon \cap\mathbb{E}$.

Então

$$\|x\|_E \leqslant D \inf \{\|a^{N.\theta} J(a^N, u_N)\|_{\ell^1(Z^d)} \ ; \ x = \sum_{N\varepsilon Z^d} u_N\}$$

e para a particular decomposição $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} v_N$, onde $v_N = x$ para apenas um índice $N \varepsilon Z^d$, sendo $x \varepsilon \cap\mathbb{E}$, temos que

$$\|x\|_E \leqslant D\ a^{N.\theta}\ J(a^N;x) \leqslant D\ t^\theta\ J(t/a;x) \leqslant a\ D\ t^\theta\ J(t,x)$$

assim

$$E \varepsilon J(\theta, \mathbb{E})$$

DEMONSTRAÇÃO DE (3): Segue de (1) e (2).

Um fato importante é que as classes $K(\theta,\mathbb{E})$, $J(\theta,\mathbb{E})$ e $H(\theta,\mathbb{E})$ são não vazias.

2.5.3. COROLÁRIO: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$ e/ou $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $Q = \infty$, temos que:

(1) $$(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \varepsilon H(\theta,\mathbb{E})$$

e para $0 < \theta < 1$, $1 < Q \leqslant \infty$ e/ou $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $Q = 1$, temos que

(2) $$(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J} \varepsilon H(\theta,\mathbb{E})$$

Além disso para $\theta = k \varepsilon \square$, temos que:

(3) $$(E_k | k\varepsilon\square)_{k,1,J} \subset E_k \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{k,\infty,K}$$

e para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant P \leqslant Q \leqslant \infty$:

$$(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,P,K} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \quad ,$$

$$(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,P,J} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J} \quad .$$

Consequentemente

$$(E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,1,J} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J} \cong (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,\infty,K} \quad .$$

2.5.4. LEMA: Sejam F_k espaços de Banach intermediários pertencentes às classes $K(\theta_k, \mathbb{E})$; $\theta_k = (\theta^1_{k_1}; \theta^2_{k_2}; \ldots; \theta^d_{k_d})$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \; \varepsilon \; \square$, $0 \leqslant \theta_o = (\theta^1_o, \theta^2_o, \ldots, \theta^d_o)$; $\theta_1 = (\theta^1_1, \theta^2_1, \ldots, \theta^d_1) \leqslant 1$. Então, se $0 < \Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^d) < 1$ e $\theta = (\theta^1; \ldots; \theta^d)$; $1 \leqslant Q < \infty$ e/ou $0 \leqslant \Lambda \leqslant 1$, $Q = \infty$, temos que

$$(F_k | k\varepsilon\square)_{\Lambda;Q;K} \subset (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta;Q;K}$$

onde $\theta^j = (1-\lambda^j)\theta^j_o + \lambda^j \theta^j_1$ e $j = 1,2,\ldots,d$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \; \varepsilon \; \Sigma\mathbb{F}$ e $x \; \varepsilon \; \Sigma\mathbb{E}$. Então, para cada decomposição da forma

$$x = \sum_{k\varepsilon\square} x_k \qquad (x_k \; \varepsilon \; F_k, \; k \; \varepsilon \; \square) \quad ,$$

e escrevendo $b = a^{\theta_1 - \theta_o}$ teremos:

$$K(a^N;x) \leqslant M\ a^{-N.\theta_o}\ K(b^N;x;\mathbb{F}) \quad .$$

Portanto

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} = \|a^{N.\theta}\ K(a^N;x)\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant M\ \|a^{N.(\theta-\theta_o)}\ K(b^N;x;\mathbb{F})\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant M\ \|a^{N.\Lambda.(\theta_1-\theta_o)}\ K(b^N;x;\mathbb{F})\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant M\ \|b^{N.\Lambda}K(b^N;x;\mathbb{F})\|_{\ell^Q(Z^d)} \quad .$$

Consequentemente

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} \leqslant M\|x\|_{\Lambda;Q;K_{\mathbb{F}}} \quad .$$

($K_{\mathbb{F}}$ está significando aqui a norma funcional em $\mathbb{F}$).

2.5.5. LEMA: Sejam F_k espaços de Banach intermediários pertencentes às classes $J(\theta_k;\mathbb{E})$; $\theta_k = (\theta^1_{k_1}, \theta^2_{k_2}; \ldots; \theta^d_{k_d})$, $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \square$; $0 \leqslant \theta_o = (\theta^1_o, \ldots, \theta^d_o)$; $\theta_1 = (\theta^1_1, \ldots, \theta^d_1) \leqslant 1$. Então, se $0 < \Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^d) < 1$, $1 < Q \leqslant \infty$ e/ou $0 \leqslant \Lambda \leqslant 1$, $Q = 1$, temos que:

$$(E_k | k\in\square)_{\theta,Q,J} \subset (F_k | k\in\square)_{\Lambda;Q,J}$$

onde $\theta^j = (1-\lambda^j)\theta^j_o + \lambda^j\theta^j_1$ e $j = 1,2,\ldots,d$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in (E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$ e $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} u_N$ (em $\Sigma\mathbb{E}$) uma representação para x, com $\{u_N\}_{N\varepsilon Z^d} \subset \cap\mathbb{E}$ e

$$\{a^{N.\theta}\ J(a^N;u_N)\} \in \ell^Q(Z^d) \qquad .$$

Pelo fato de $\cap E_k \subset F_k$ para todo $k \in \square$, temos que $\{u_N\}_{N\varepsilon Z^d} \subset \cap\mathbb{F}$ e tomando $b = a^{\theta_1-\theta_0}$ vem que:

$$J(b^N,U_N,\mathbb{F}) = \max_{k\varepsilon\square}\{b^{-k.N}\}\|U_N\|_{F_k} = \max_{j\varepsilon\square}\{a^{-j.N(\theta_1-\theta_0)}\|u_N\|_{F_j}\}$$

$$\leqslant M\ a^{N.\theta_0}\ J(a^N,U_N)$$

e como

$$\|x\|_{\Sigma\mathbb{F}} \leqslant A(\theta,Q',a)\ .\ \|x\|_{\theta,Q,J(a)}$$

temos que

$$\sum_{N\varepsilon Z^d}\|u_N\|_{\Sigma\mathbb{F}} \leqslant A(\Lambda,Q',b)\|\{b^{N.\Lambda}J(b^N,u_N;\mathbb{F})\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

$$\leqslant M.A(\Lambda,Q',b)\ \|\{a^{N.}\ J(a^N;u_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e em virtude de $\Sigma\mathbb{F}$ ser completo, existe $g \in \Sigma\mathbb{F}$ tal que $g = \sum_{N\varepsilon Z^d} u_N$ e temos então que, na norma de $\Sigma\mathbb{E}$, $x = g$, donde tomando o ínfimo sobre todas as decomposições de $x = \sum_{N\varepsilon Z^d} u_N$ seguirá que

$$\|x\|_{\Lambda,Q,J_{\mathbb{F}}} \leqslant M\|x\|_{\theta,Q,J(a)}$$

onde $J_{\mathbb{F}}$ ē a norma funcional J em F.

2.5.6. TEOREMA: Dados $\theta \leqslant \theta_o = (\theta_o^1,\ldots,\theta_o^d)$; $\theta_1 = (\theta_1^1,\ldots,\theta_1^d) \leqslant 1$, consideremos a sequência de parâmetros associada

$$\theta_k = (\theta_{k_1}^1,\ldots,\theta_{k_d}^d) \ , \ k = (k_1,\ldots,k_d) \ \varepsilon \ \square \qquad .$$

Dados $0 < \Lambda = (\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^d) < 1$, definimos $\theta = (\theta^1,\ldots,\theta^d)$, por $\theta^j = (1-\lambda^j)\theta_o^j + \lambda^j \ \theta_1^j$. Suponhamos que para todo $k \ \varepsilon \ \square$ os F_k sejam espaços de Banach intermediārios de classe $H(\theta_k;\mathbb{E})$ e $\mathbb{F} = (F_k|k\varepsilon\square)$. Assim:

(1) $$(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} = (F_k|k\varepsilon\square)_{\Lambda,Q,K}$$

e em particular, se $F_k = (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta_k,Q,K}$ com $k \ \varepsilon \ \square$, temos que:

(2) $$((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta_k,Q,K})_{\Lambda;Q,K} = (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$$

2.5.7. COROLĀRIO: Para $0 < \Lambda < 1$, $1 \leqslant P,Q,R \leqslant \infty$, $0 \leqslant \theta_o < \theta_1 \leqslant 1$ e $\theta = (1-\Lambda)\theta_o + \Lambda\theta_1$, temos:

(1) $$((F_k|k\varepsilon\square)_{\theta_k,P,K})_{\Lambda;Q,K} \cong (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,R,K}$$

e

(2) $$((F_k|k\varepsilon\square)_{\theta_k,P,J})_{\Lambda;Q,J} \cong (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,R,J}$$

onde $\mathbb{F} = (F_k | k \varepsilon \square)$ é uma família admissível de espaços intermediários de Banach da família $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$.

2.6. INTERPOLAÇÃO DE ESCALAS DE ESPAÇOS DE BANACH

2.6.1. Lembremos que uma família arbitrária $(X_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ de espaços de Banach é denominada uma escala de espaços de Banach se Λ for um sistema reticulado e se $\lambda_1, \lambda_2 \ \varepsilon\ \Lambda$ com $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ tivermos que

$$X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_2} \qquad .$$

2.6.2. Neste parágrafo estudaremos a interpolação de escalas finitas (mais precisamente de 2^d espaços de Banach).

Seja então $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$ uma escala de 2^d espaços de Banach. Vamos ter então

$$(1) \qquad\qquad E_o \subset E_k \subset E_1$$

para todo $k \ \varepsilon\ \square$, e se $k' \leqslant k''$, teremos

$$(2) \qquad\qquad E_{k'} \subset E_{k''} \qquad .$$

No caso biparamétrico, onde $\square = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ temos

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{1o} & & \\ & \subset & & \subset & \\ E_{oo} & & & & E_{11} \\ & \subset & & \subset & \\ & & E_{o1} & & \end{array}$$

2.6.3. LEMA: Seja $\mathbb{E} = (E_k | k \varepsilon \square)$ a escala referida em 2.6.2. Então:

(1) $$K(1,f) = \|f\|_{\Sigma E} = \|f\|_{E_1} \qquad (f \varepsilon E_1)$$

(2) $$J(1,f) = \|f\|_{\cap E} = \|f\|_{E_0} \qquad (f \varepsilon E_0)$$

(3) $$K(t,f) = K(1,f) = \|f\|_{E_1} \qquad (f \varepsilon E_1,\ 0<t\leqslant 1)$$

(4) $$t.J(t,f) = J(1,f) = \|f\|_{E_0} \qquad (f \varepsilon E_0,\ 0<t\leqslant 1)$$

Uma consequência de (1) e (2) é que:

$$\Sigma\mathbb{E} = E_1$$

e

$$\cap\mathbb{E} = E_0 \qquad .$$

2.6.4. DEFINIÇÃO: Seja $a > 1$, $a \varepsilon R^d_+$. Definimos $(E_k | k\varepsilon\square)^+_{\theta,Q,K}$ como o espaço de todos os $x \varepsilon E_1$ para os quais

$$\{a^{N.\theta} K(a^N,x)\} \varepsilon \ell^Q(N^d)$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; $1 \leqslant Q \leqslant \infty$.

2.6.5. TEOREMA: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$ e/ou $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $Q = \infty$, os espaços $(E_k | k\varepsilon\square)^+_{\theta,Q,K}$ são completos sob as normas:

(1) $$\|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} = \|a^{N.\theta}K(a^N;x)\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e valem ainda as seguintes propriedades:

(2) $$E_o \subset (E_k|k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,K} \subset E_1$$

e

(3) $$(E_k|k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,K} \cong (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \quad .$$

Para $a > 1$, temos que:

(4) $$\|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} \cong \|x\|_{\theta,Q,K(a)} \quad ,$$

para todo x em $\Sigma\mathbb{E}$.

DEMONSTRAÇÃO DE (2): Mostraremos que $(E_k|k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,K} \subset E_1$. Consideremos $x \in (E_k|k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,K}$. Assim

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} = \|a^{N.\theta}\ K(a^N,x)\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \|\min_{k\varepsilon\square}(a^{-N.k})a^{N.\theta}\ K(1,x)\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$= K(1,x)\ \|\min_{k\varepsilon\square} a^{N.(\theta-k)}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\|x\|_{E_1} \quad .$$

Mostraremos agora que $E_o \subset (E_k|k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,K}$.

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} = \|a^{N.\theta} K(a^{N},x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$\leqslant \|\min_{k\varepsilon\square} (a^{-N.k}) a^{N.\theta} J(1,x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$= J(1,x) \|\min_{k\varepsilon\square} (a^{N.(\theta-k)})\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$\leqslant C \|x\|_{E_{o}} \quad . \qquad (x \varepsilon E_{o})$$

DEMONSTRAÇÃO DE (4).

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} = \|a^{N.\theta} K(a^{N},x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$\leqslant \|a^{N.\theta} K(a^{N},x)\|_{\ell^{Q}(Z^{d})} = \|x\|_{\theta,Q,K(a)} \quad .$$

Reciprocamente,

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} = \|a^{N.\theta} K(a^{N},x)\|_{\ell^{Q}(Z^{d})}$$

$$\leqslant \|a^{N.\theta} K(a^{N},x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})} + \|a^{-N.\theta} K(a^{-N},x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$\leqslant \|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} + \|a^{-N.\theta} K(1,x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$= \|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)} + \|x\|_{E_{1}} \|a^{-N.\theta}\|_{\ell^{Q}(N^{d})} \quad .$$

e como

$$\|x\|_{E_1} \leqslant C \; \|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)}$$

e

$$\|a^{-N.\theta}\|_{\ell^Q(N^d)} < \infty$$

temos que

$$\|x\|_{\theta,Q,K(a)} \leqslant C \; \|x\|^{+}_{\theta,Q,K(a)}$$

DEMONSTRAÇÃO DE (5): É semelhante à demonstração de 2.3.4 (3).

Em virtude de 2.6.5 (3) passaremos a escrever

$$(E_k | k \varepsilon \square)^{+}_{\theta;Q;K} \cong (E_k | k \varepsilon \square)_{\theta;Q,K}$$

se $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ e $1 \leqslant Q \leqslant \infty$.

2.6.6. COROLÁRIO: Sejam θ, $\theta' \varepsilon R^d$ com $0 \leqslant \theta < \theta' < 1$. Então

$$(1) \qquad (E_k | k \varepsilon \square)^{+}_{\theta',P,K} \subset (E_k | k \varepsilon \square)^{+}_{\theta,Q,K} \qquad (1 \leqslant P, Q \leqslant \infty)$$

e

$$(2) \qquad (E_k | k \varepsilon \square)^{+}_{\theta,P,K} \subset (E_k | k \varepsilon \square)^{+}_{\theta,Q,K} \qquad (1 \leqslant P \leqslant Q \leqslant \infty)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja R tal $1/Q = 1/P + 1/R$. Então, pela desigualdade de Hölder (-Benedek-Panzone) temos

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,K} = \|C^{N.\theta}\ K(C^{N};x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})} = \|C^{N.(\theta-\theta')}C^{N.\theta'}K(C^{N};x)\|_{\ell^{Q}(N^{d})}$$

$$\leqslant \|C^{N.(\theta-\theta')}\|_{\ell^{R}(N^{d})}\ \|C^{N.\theta'}\ K(C^{N};x)\|_{\ell^{P}(N^{d})}$$

$$\leqslant D\ \|x\|^{+}_{\theta',P,K}$$

A demonstração de (2) já foi feita anteriormente.

2.6.7. TEOREMA: Para $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, são equivalentes as seguintes afirmações:

(1) $\{M^{\theta}\ K(M;x)\} \in \ell^{Q}_{*}(N^{d}_{+})$

(2) $t^{\theta}\ K(t;x) \in \ell^{Q}_{*}(R^{d}_{+})$

(3) $\{a^{N.\theta}\ K(a^{N};x)\} \in \ell^{Q}(Z^{d})$

sendo que todas as três expressões são normas para $(E_k|\,k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,K}$.

DEMONSTRAÇÃO DE (3) IMPLICA (2):

$$\|t^{\theta}K(t;x)\|_{\ell^{Q}_{*}(R^{d}_{+})} = \{\int_{0}^{\infty} \cdots (\int_{0}^{\infty} (t^{\theta}K(t,x))^{q_1}\frac{dt_1}{t_1})^{q_2/q_1}\cdots\}^{1/q_d}$$

$$= \sum_{n_d\varepsilon Z}\int_{a_d^{n_d}}^{a_d^{n_d+1}} \cdots (\sum_{n_1\varepsilon Z}\int_{a_1^{n_1}}^{a_1^{n_1+1}} (t^{\theta}K(t,x))^{q_1}\frac{dt_1}{t_1})^{q_2/q_1}\cdots)^{1/q_d}$$

e tomando $a_j^{n_j} \leqslant t_j < a_j^{n_j+1}$, para $j = 1,2,\dots,d$, segue que:

$$\|t^{\theta}K(t,x)\|_{\ell^{Q}_{*}(R^{d}_{+})} \leqslant C\{\sum_{n_d \varepsilon Z}\int_{a_d^{n_d}}^{a_d^{n_d+1}} \dots (\sum_{n_1 \varepsilon Z}\int_{a_1^{n_1}}^{a_1^{n_1+1}} a^{N.\theta}K(a^{N};x))^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \dots)^{1/q_d}$$

$$\leqslant C(\sum_{n_d \varepsilon Z} \dots (\sum_{n_1 \varepsilon Z} (a^{N.\theta}K(a^{N},x))^{q_1})^{q_2/q_1} \dots)^{1/q_d}$$

$$\leqslant C \ \|a^{N.\theta} \ K(a^{N};x)\|_{\ell^{Q}(Z^{d})}$$

DEMONSTRAÇÃO DE (1) IMPLICA (3): Consideremos $a^{N} \leqslant M < a^{N+1}$. Desse modo

$$\|a^{N.\theta}K(a^{N};x)\|_{\ell^{Q}(N^{2})} = \{\sum_{n_2=0}^{\infty} (\sum_{n_1=0}^{\infty} (a^{N.\theta} \ K(a^{N};x))^{q_1})^{q_2/q_1}\}^{1/q_2}$$

$$\leqslant C(\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{m_2[n_2]} \frac{1}{m_2} (\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1[n_1]} \frac{1}{m_1} (M^{\theta} \ K(M/a;x))^{q_1})^{q_2/q_1})^{1/q_2}$$

(a passagem acima foi possível em virtude de $1 \leqslant \sum_{M[N]} 1/M$) e assim tem-se na continuação que

$$\|a^{N.\theta}K(a^{N};x)\|_{\ell^{Q}(N^{2})} \leqslant C(\sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} (M^{\theta} \ K(M,x))^{q_1} \frac{1}{m_1})^{q_2/q_1}\frac{1}{m_2})^{1/q_2}$$

$$\leqslant C \ \|M^{\theta} \ K(M,x)\|_{\ell^{Q}_{*}(N^{2}_{+})}$$

Nesta demonstração tudo o que fizemos para $d = 2$ valerá também para d maior que 2, $d \in N_+$.

DEMONSTRAÇÃO DE (2) IMPLICA (1): Tomemos $M \leqslant t < M+1$. Assim

$$\|M^\theta K(M;x)\|_{\ell^Q_*(N^2_+)} = \{\sum_{m_2=1}^{\infty} (\sum_{m_1=1}^{\infty} (M^\theta \; K(M;x))^{q_1} \frac{1}{m_1})^{q_2/q_1} \frac{1}{m_2}\}^{1/q_2}$$

$$\leqslant C \{\sum_{m_2=1}^{\infty} \int_{m_2}^{m_2+1} (\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{m_1}^{m_1+1} (t^\theta K(t;x))^{q_1} \frac{dt_1}{t_1})^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2})\}^{1/q_2}$$

$$\leqslant C\{\int_1^\infty (\int_1^\infty (t^\theta \; K(t,x))^{q_1} \; \frac{dt_1}{t_1})^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2}\}^{1/q_2}$$

$$\leqslant C \; \|t^\theta \; K(t,x)\|_{\ell^Q_*(R^2_+)} \qquad .$$

Observamos novamente que tal demonstração também valerá para d maior que 2, $d \in N_+$ e salientamos ainda que se $a^N \leqslant M < a^{N+1}$ com $a > 1$, então teremos:

$$\frac{a-1}{a} \leqslant \sum_{M[N]} \frac{1}{M} \leqslant a-1$$

onde $M[N] = \{M \in Z^2 \,|\, a^N \leqslant M < a^{N+1}\}$.

2.6.8. LEMA: Para $\alpha \in R^d$, são equivalentes as normas:

(1) $\qquad \|M^\theta \; K(M;x)\|_{\ell^Q_*(N^d_+)}$

(2) $\qquad \|M^{\alpha.\theta} \; K(M^\alpha;x)\|_{\ell^Q_*(N^d_+)}$

DEMONSTRAÇÃO: Segue do teorema 2.6.7, tomando $t = s^{\alpha}$.

2.6.9. DEFINIÇÃO: Seja $a > 1$, $a \in R_+^d$. Definimos $(E_k \mid k \in \square)^+_{\theta,Q,J}$ como o espaço de todos os $x \in E_1$ para os quais existem sequências $\{u_N\}_{N \in N^d} \subset E_0$ tal que:

(1) $$x = \sum_{N \in N^d} u_N$$

e

(2) $$\{a^{N.\theta} J(a^N; u_N)\} \in \ell^Q(N^d)$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$, $1 \leq Q \leq \infty$.

2.6.10. TEOREMA: Para $0 < \theta < 1$, $1 < Q \leq \infty$ e/ou $0 \leq \theta \leq 1$, $Q = 1$, os espaços $(E_k \mid k \in \square)^+_{\theta,Q,J}$ são completos sob as normas:

(1) $$\|x\|^+_{\theta,Q,J(a)} = \inf\{\|a^{N.\theta} J\ a^N; u_N)\|_{\ell^Q(N^d)} ; x = \sum_{N \in N^d} u_N\}$$

e valem ainda as seguintes propriedades:

(2) $$E_0 \subset (E_k \mid k \in \square)^+_{\theta,Q,J} \subset E_1 \qquad ,$$

(3) $$(E_k \mid k \in \square)^+_{\theta,Q,J} \cong (E_k \mid k \in \square)_{\theta,Q,J} \qquad .$$

Mais ainda, para $a,b > 1$, $a \neq b$ e $x \in \Sigma E$, temos que:

(4) $$\|x\|^+_{\theta,Q,J(a)} \cong \|x\|^+_{\theta,Q,J(b)} \qquad .$$

DEMONSTRAÇÃO DE (2): Mostremos que $E_0 \subset (E_k | k \varepsilon \square)^+_{\theta,Q,J}$. Seja $x \varepsilon E_0$. Assim, tomando $u_0 = x$ e $u_N = 0$ para $N \neq 0$, teremos

$$x = \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} u_N$$

e

$$\|x\|^+_{\theta,Q,J} = \inf\{\|a^{N.\theta} J(a^N;x)\|_{\ell^Q(\mathbb{N}^d)} \ ; \ x = \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} u_N\}$$

$$= J(1,x) = \|x\| E_0$$

Mostremos agora que $(E_k | k \varepsilon \square)^+_{\theta,Q,J} \subset E_1$. Consideremos $x \varepsilon (E_k | k \varepsilon \square)^+_{\theta,Q,J}$. Assim, existe uma sequência $(u_N)_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} \subset E_0$ tal que

$$x = \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} u_N \qquad \text{(na norma de } E_1) .$$

Assim

$$\|x\|_{E_1} \leqslant \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} \|u_N\|_{E_1} = \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} K(1,u_N) \leqslant \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} J(a^N;u_N)$$

$$\leqslant \sum_{N \varepsilon \mathbb{N}^d} a^{-N.\theta} (a^{N.\theta} \ J(a^N;u_N))$$

e utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\|x\|_{E_1} \leqslant \|\{a^{-N.\theta}\}\|_{\ell^{Q'}(\mathbb{N}^d)} \ \|\{a^{N.\theta} J(a^N;u_N)\}\|_{\ell^Q(\mathbb{N}^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de x, seguirá que

$$\|x\|_{E_1} \leq C \, \|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO DE (4): Seja $x \in (E_k | k \in \square)^{+}_{\theta,Q,J}$ com a decomposição $x = \sum_{N \in N^d} w_N$. Se tomarmos $u_N = w_N$ para $N \geq 0$ e $u_N = 0$ nos outros casos obteremos $x = \sum_{N \in Z^d} u_N$ e

$$\|\{a^{N.\theta} J(a^N;u_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} = \|\{a^{N.\theta} J(a^N;w_N)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de x, obteremos

$$\|x\|_{\theta,Q,J} \leq \|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \quad .$$

Reciprocamente, consideremos $x \in (E_k | k \in \square)_{\theta,Q,J}$. Assim existe uma sequência $\{u_N\}_{N \in Z^d}$ tal que $x = \sum_{N \in Z^d} u_N$ na norma de E_1 e tal que

$$\{a^{N.\theta} J(a^N,u_N)\} \in \ell^Q(Z^d) \quad .$$

Se para $k \in \square$, definirmos

$$v_{(k.N)} = v_{k_1 n_1;k_2 n_2;\ldots,k_d n_d} = \sum_{N \in (Z-N_+)^{d-|k|}} u_N$$

teremos que

$$\sum_{N\varepsilon N^d} v_{(k.N)} = \sum_{N\varepsilon Z^d} u_N = x$$

e além disso

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \leqslant \|a^{N.\theta}\ J(a^N, v_{(k.N)})\|_{\ell^Q(N^d)} \qquad (k\ \varepsilon\ \square)$$

$$\leqslant \|a^{N.\theta}\ J(a^N; \sum_{N\varepsilon(Z-N_+)^{d-|k|}} u_N)\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \| \sum_{N\varepsilon(Z-N_+)^{d-|k|}} a^{N.\theta} J(a^N; u_N)\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \sum_{N\varepsilon(Z-N_+)^{d-|k|}} \|a^{N.\theta.k}\ J(a^{N.k}, u_N)\|_{\ell^{(Q.k)}(N_+^{|k|})}$$

Façamos agora a estimada para

$$M = \|a^{N.\theta.k}\ J(a^{N.k}, u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})} \qquad (k\ \varepsilon\ \square)$$

Vamos ter

$$M = \|a^{N.\theta.k} J(a^{N.k}; u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})} \leqslant \|a^{N.\theta.k} \max_{j\varepsilon\square}\{a^{N.(1-k).j}\} J(a^N; u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})}$$

Logo

$$M \leqslant \|\max_{j\varepsilon\square}(a^{N.(1-k).j})a^{N.\theta.(k-1)} a^{N.\theta} J(a^N; u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})}$$

$$= \|\max_{j\varepsilon\square}(a^{N.(1-k).(j-\theta)})a^{N.\theta} J(a^N, u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})}$$

$$\leqslant a^{N.(1-k).(1-\theta)} \|a^{N.\theta} J(a^N, u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})}$$

e voltando à primeira estimada, temos

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \leqslant \sum_{N\varepsilon(Z-N_+)^{d-|k|}} \|a^{N.(1-k).(1-\theta)} a^{N.\theta} J(a^N, u_N)\|_{\ell^{Q.k}(N_+^{|k|})}$$

e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \leqslant M \|a^{N.(1-k).(1-\theta)}\|_{\ell^{Q.(1-k)}(Z-N_+)^{d-|k|}}$$

donde

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \leqslant C \, \|a^{N.\theta} \, J(a^N; u_N)\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições de x, segue que

$$\|x\|^{+}_{\theta,Q,J} \leqslant C \|x\|_{\theta,Q,J} \quad .$$

2.6.11. COROLÁRIO: Sejam θ, $\theta' \in R^d$ com $0 \leqslant \theta < \theta' < 1$. Então:

(1) $\quad (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\theta',P,J} \subset (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,J} \quad (1<P,Q\leqslant\infty)$

(2) $\quad (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,P,J} \subset (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,J} \quad (1<P\leqslant Q<\infty)$

2.6.12. TEOREMA: Seja $a > 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ e $x \in (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\theta,Q,J}$. São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) Existe uma sequência $\{v_M\}_{N\in N_+^d} \subset E_o$ com

(1) $$x = \sum_{M\in N_+^d} (1/M) v_M \qquad (1/M = 1/m_1 \ldots m_d)$$

na norma de E_1, e

(2) $$\{M^\theta\ J(M, v_M)\} \in \ell_*^Q(N_+^d)$$

(ii) Existe uma sequência $\{u_N\}_{N\in N^d} \subset E_o$ com

(3) $$x = \sum_{N\in N^d} u_N \qquad \text{(na norma de } E_1)$$

e

(4) $$\{a^{N.\theta}\ J(a^N; u_N)\} \in \ell^Q(N^d)$$

(iii) Existe uma função fortemente mensurável $u=u(t)$, em relação à medida dt/t em E_o, tal que

$$x = \int_{R_+^d} u(t)\ \frac{dt}{t} \qquad \text{(na norma de } E_1)$$

e

$$t^\theta\ J(t; u(t)) \in L_*^Q(R_+^d)$$

Faremos a demonstração para o caso bi-paramétrico.

DEMONSTRAÇÃO DE (ii) IMPLICA (i): Seja $x \in (E_k | k\in\square)^+_{\theta,Q,J}$ e vamos assumir que existe uma decomposição da forma $x = \sum_{N\in N^d} u_N$ na norma de E_1 com

$$\{a^{N.\theta} J(a^N;u_N)\} \in \ell^Q(N^d) \qquad .$$

Se tomarmos $a^N \leqslant M < a^{N+1}$, $1/M = 1/m_1 \dots m_d$ e

(5) $$v_M = u_M \left(\sum_{M[N]} 1/M\right)^{-1}$$

poderemos escrever

$$\sum_{M\in N_+^d} (1/M) v_M = \sum_{M\in N_+^d} \sum_{M[N]} (1/M) v_M = \sum_{N\in N^d} u_N \left(\sum_{M[N]} 1/M\right)^{-1} \sum_{M[N]} 1/M = \sum_{N\in N^d} u_N = x$$

e além disso

$$\| M^{\theta} \; J(M, v_M) \|_{\ell_*^Q(N^d)} \leqslant \| a^{(N+1).\theta} J(a^N \; u_N \left(\sum_{M[N]} 1/M\right)^{-1} \sum_{M[N]} 1/M \|_{\ell_*^Q(N_+^d)}$$

$$\leqslant a^{\theta} \| a^{N.\theta} \; J(a^N;u_N)1/\left(\sum_{M[N]} 1/M\right) \|_{\ell_*^Q(N_+^d)}$$

$$\leqslant C \; \| a^{N.\theta} \; J(a^N;u_N) \|_{\ell^Q(N^d)}$$

DEMONSTRAÇÃO DE (i) IMPLICA (ii): Seja $x \in (E_k | k\in \square)^+_{\theta,Q,J}$ e vamos assumir que

$$x = \sum_{M\in N_+^d} (1/M) v_M \qquad \text{(na norma de } E_1)$$

e

$$\{M^{\theta}\ J(M;v_M)\}\ \varepsilon\ \ell_{*}^{Q}(N_{+}^{d})$$

Usando um argumento semelhante ao do caso recíproco, obtemos

$$x = \sum_{M\varepsilon N_{+}^{d}} (1/M)v_M = \sum_{N\varepsilon Z^{d}} u_N \qquad ,$$

com v_M dado por (5). Além disso

$$\|a^{N.\theta}J(a^{N};u_N)\|_{\ell^{Q}(N^{d})} \leqslant \|M^{\theta}\ J(M/a;v_M\ .\ \sum_{M[N]} 1/M)\|_{\ell_{*}^{Q}(N_{+}^{d})}$$

$$\leqslant C\ \|M^{\theta}\ J(M,v_M)\ .\ \sum_{M[N]} 1/M\|_{\ell_{*}^{Q}(N_{+}^{d})}$$

$$\leqslant C\ \|M^{\theta}\ J(M,v_M)\|_{\ell_{*}^{Q}(N_{+}^{d})}$$

donde a equivalência entre (i) e (ii).

2.7. A DUALIDADE DOS ESPAÇOS $\Sigma\mathbb{E}$ e $\cap\mathbb{E}$

2.7.1. Dada uma família admissível de espaços de Banach $\mathbb{E} = (E_k|k\varepsilon\square)$, existe uma dualidade natural entre $\cap\mathbb{E}$ e $\Sigma\mathbb{E}$ e entre os espaços de interpolação $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K}$ e $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$.

Para examinar essa dualidade vamos fazer a seguinte hipótese de densidade (D) sobre a família admissível $\mathbb{E}$:

(D) $\quad \cap \mathbb{E}$ é densa em $E_k \quad (k \in \square)$.

Consideremos $\mathbb{E}' = (E'_k | k \in \square)$ a família constituida pelos duais dos elementos da família $\mathbb{E}$.

Os espaços E'_k $(k \in \square)$ podem ser imersos em $(\cap \mathbb{E})'$ de maneira canônica:

$$\cap \mathbb{E} \to E_k$$

$$E'_k \to (\cap \mathbb{E})'$$

Esta imersão está assegurada pela hipótese de densidade (D) e assim $\mathbb{E}' = (E'_k | k \in \square)$ será uma família admissível de espaços de Banach.

2.7.2. TEOREMA: Seja $\mathbb{E} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach que satisfaz à hipótese de densidade (D) e $\mathbb{E}' = (E'_k | k \in \square)$ a sua família dual. Então:

(1) $$\Sigma \mathbb{E}' = (\cap \mathbb{E})'$$

e

$$\| x' \|_{\Sigma \mathbb{E}'} = \sup \left\{ \frac{| \langle x, x' \rangle |}{\| x \|_{\cap \mathbb{E}}} \; ; \; x \in \cap \mathbb{E} \right\}$$

onde $\langle . \; ; \; . \rangle_\cap$ denota a dualidade entre $\cap \mathbb{E}$ e $(\cap \mathbb{E})'$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x' \in \Sigma \mathbb{E}'$ com $x' = \sum\limits_{k \in \square} x'_k$, $x'_k \in E_k$ $(k \in \square)$. Para $x \in \cap \mathbb{E}$, temos

$$|<x';x>| \leqslant \sum_{k\varepsilon\square} |<x;x'_k>_{E_k}| \leqslant \sum_{k\varepsilon\square} \|x\|_{E_k} \|x'_k\|_{E'_k}$$

$$\leqslant \max\{\|x\|_{E_k} ; k\varepsilon\square\} \sum_{k\varepsilon\square} \|x'_k\|_{E'_k}$$

$$\leqslant \|x\|_{\cap\mathbb{E}} \|x'\|_{\Sigma\mathbb{E}'} .$$

Donde podermos escrever que:

$$\|x'\|_{(\cap\mathbb{E})'} \leqslant \|x'\|_{\Sigma\mathbb{E}'} .$$

Reciprocamente, seja $\phi \varepsilon (\cap\mathbb{E})'$ e $x \varepsilon \cap\mathbb{E}$. Então:

$$\|\phi(x)\| \leqslant \|\phi\|_{(\cap\mathbb{E})'} \|x\|_{\cap\mathbb{E}} .$$

Consideremos agora o subespaço diagonal de $\bigoplus_{k\varepsilon\square} E_k$:

$$\Delta = \{(x_{oo},x_{1o},x_{o1},x_{11}) \varepsilon \bigoplus_{k\varepsilon\square} E_k ; x_{oo}=x_{o1}=x_{1o}=x_{11}\}$$

e definamos a forma linear

$$F : (x_{oo},x_{1o},x_{o1},x_{11}) \to \phi(2^{-d} \sum_{k\varepsilon\square} x_k)$$

onde d é o número de espaços envolvidos.

Como F é contínua sobre Δ, na norma:

$$\max_{k\varepsilon\square} \{\|x_k\|_{E_k}\}$$

temos pelo teorema de Hahn-Banach a existência de

$$(x'_{oo}, x'_{1o}, x'_{o1}, x'_{11}) \in \bigoplus_{k \in \square} E'_k$$

tal que

$$\sum_{k \in \square} \|x'_k\|_{E'_k} \leqslant \|\phi\|_{(\cap \mathbb{E})'}$$

e

$$\phi(x_{oo}, x_{1o}, x_{o1}, x_{11}) = \sum_{k \in \square} \langle x'_k, x_k \rangle$$

com $(x_{oo}, x_{1o}, x_{o1}, x_{11}) \in \Delta$. Então, se tomarmos $x_{oo} = x_{1o} = x_{o1} = x_{11} = x$, com $x \in \cap \mathbb{E}$, temos que

$$F(x) = \sum_{k \in \square} \langle x'_k, x \rangle = \langle \sum_{k \in \square} x'_k ; x \rangle$$

e em virtude da hipótese de densidade, temos que os x'_k são determinados por seus valores em $\cap \mathbb{E}$. Assim, pondo $\phi = \sum_{k \in \square} x'_k$, teremos que:

$$\|\phi\|_{\Sigma \mathbb{E}} = \|\sum_{k \in \square} x'_k\|_{\Sigma \mathbb{E}'} \leqslant \sum_{k \in \square} \|x'_k\|_{E'_k} \leqslant \|\phi\|_{(\cap \mathbb{E})'}$$

2.7.3. TEOREMA: Seja $\mathbb{E} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach que satisfaz à hipótese de densidade (D) e $\mathbb{E}' = (E'_k | k \in \square)$ a sua família dual. Então:

(1) $$(\Sigma \mathbb{E})' = \cap \mathbb{E}'$$

e

$$(2) \qquad \|x'\|_{\cap \mathbb{E}'} = \sup \{\frac{|\langle x;x'\rangle_\Sigma|}{\|x\|_{\Sigma E}} \; ; \; x \in \Sigma\mathbb{E}\}$$

onde $\langle . \; ; \; .\rangle_\Sigma$ denota a dualidade em $\Sigma\mathbb{E}$ e $(\Sigma\mathbb{E})'$.

2.7.4. COROLÁRIO: Seja $\mathbb{E} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach que satisfaz à hipótese de densidade (D) e $\mathbb{E}' = (E_k' | k \in \square)$ a sua família dual. Então

$$(1) \qquad K(t,x';\mathbb{E}') = \sup \{|\langle x;x'\rangle|/J(t^{-1},x,\mathbb{E}) \; ; \; x \in \cap\mathbb{E}\}$$

e

$$(2) \qquad J(t,x';\mathbb{E}') = \sup \{|\langle x;x'\rangle|/K(t^{-1},x;\mathbb{E}) \; ; \; x \in \Sigma\mathbb{E}\}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja E um espaço normado e $t > 0$. Denotando por tE o espaço E munido da norma $\|.\|_{tE} = t\|.\|_E$, teremos que

$$(tE)' = t^{-1}E'$$

e considerando a família $(t^k E_k | k \in \square)$, teremos o resultado desejado em virtude das fórmulas para $\|.\|_{\Sigma\mathbb{E}'}$ e $\|.\|_{\cap\mathbb{E}'}$ exibidas nos teoremas anteriores.

2.8. A DUALIDADE DOS ESPAÇOS $(E_k | k \in \square)_{\theta,Q}$

2.8.1. Consideremos agora uma família admissível de espaços intermediários de Banach que satisfaz à hipótese de densidade (D). Podemos então considerar espaços intermediários em relação à família dual $\mathbb{E}'$ e em particular aos espaços de interpolação $(E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q}$.

Seja E um espaço intermediário em relação à família admissível $\mathbb{E}$. Então, para que E' seja um espaço intermediário em relação à família dual $\mathbb{E}'$ é necessário e suficiente que $\cap\mathbb{E}'$ seja denso em E; e em particular se $\mathbb{E} = (E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q}$, o teorema de densidade assegura que $E' = ((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q})'$ é um espaço intermediário em relação à família $\mathbb{E}' = (E_k'|k\varepsilon\square)$.

Estudaremos agora as relações entre os espaços intermediários $(E_k'|k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q'}$ e $((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q})'$.

2.8.2. PROPOSIÇÃO: Seja $\mathbb{E} = (E_k|k\varepsilon\square)$ uma família admissível de espaços de Banach que satisfaz à hipótese de densidade (D) e $\mathbb{E}' = (E_k'|k\varepsilon\square)$ a sua família dual e consideremos os parâmetros $1 \leqslant Q < \infty$ e $0 < \theta < 1$. Então:

$$(1) \qquad (E_k'|k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q';J} \subset ((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K})'$$

onde $(1/q_j) + (1/q_j') = 1$, $j = 1,2,\ldots,d$ e $Q = (q_1,q_2,\ldots,q_d)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x' \varepsilon (E_k'|k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q';J}$ e escrevamos

$$x' = \sum_{N\varepsilon N^d} x_N' \qquad \text{(na norma de } \Sigma\mathbb{E}'=(\cap\mathbb{E})')$$

Desse modo

$$<x';x> \leqslant \sum_{N\varepsilon N^d} <x_N';x> \leqslant \sum_{N\varepsilon N^d} J(2^{-N};x_N';\mathbb{E}')\ K(2^N;x;\mathbb{E})$$

em virtude da expressão que aparece em 2.7.4(2). Como

$$J(2^{-N};x'_N;\mathbb{E}') = 2^{-N}\, J(2^N,x'_N;\mathbb{E}')$$

temos que

$$<x';x> \leqslant \sum_{N\in N^d} 2^{-N}\, J(2^N,x'_N,\mathbb{E}')\; K(2^N,x,\mathbb{E})$$

e desse modo

$$\|x'\|_{((E_k|k\in\square)_{\theta,Q,K})'} = \sup\,\{|<x';x>|/\|x\|_{\theta,Q,K};\; x\neq 0\}$$

$$\leqslant \{\sum_{N\in N^d} (2^{-N(1-\theta)}J(2^N,x'_N,\mathbb{E}')(2^{-N.\theta}K(2^N,x;\mathbb{E}))\}/\|x\|_{\theta,Q,K}$$

e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\|x'\|_{((E_k|k\in\square)_{\theta,Q,K})'} \leqslant C\|2^{-N.(1-\theta)}J(2^N,x'_N;\mathbb{E}')\|_{\ell^{Q'}(Z^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições de x', temos:

$$\|x'\|_{((E_k|k\in\square)_{\theta,Q,K})'} \leqslant C\|x'\|_{(E'_k|k\in\square)_{1-\theta,Q',J}}$$

2.8.3. DEFINIÇÃO: Definimos o espaço de sequências $\Lambda^{\theta,Q}(Z^d)$ como

$$\Lambda^{\theta,Q}(Z^d)=\{x=(x_N)_{N\in Z^d};\{2^{-N.\theta}|x_N|\}\in \ell^Q(Z^d)\}$$

onde $0<\theta<1$, $1\leqslant Q<\infty$ e d é a dimensão do espaço base sobre o qual estamos trabalhando. Uma norma neste espaço é dada por

$$\|x\|_{\Lambda^{\theta,Q}(Z^d)} = \|2^{-N.\theta}|x_N|\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

2.8.4. LEMA: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$ os espaços $\Lambda^{\theta,Q}(Z^d)$ e $\Lambda^{1-\theta,Q'}(Z^d)$ estão em dualidade, ou seja, para qualquer funcional $f \in (\Lambda^{\theta,Q}(Z^d))'$ corresponde um $\beta = \beta_f = (\beta_N) \in \Lambda^{1-\theta,Q'}(Z^d)$ tal que

$$<f;x> = \sum_{N \in Z^d} 2^{-N} x_N \beta_N$$

para todo $x = (x_N) \in \Lambda^{\theta,Q}(Z^d)$ e além disso

$$\|f\|_{(\Lambda^{\theta,Q}(Z^d))'} = \|\beta\|_{\Lambda^{1-\theta,Q'}Z^d)}$$

(Q' é o conjugado de Q e significa que se $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_d)$ então $Q' = (q_1', \ldots, q_d')$ sendo $(1/q_j) + (1/q_j') = 1$, $j = 1, \ldots, d$.

DEMONSTRAÇÃO: Definamos

$$<f;x> = \sum_{N \in Z^d} 2^{-N} x_N \beta_N$$

com $x = (x_N) \in \Lambda^{\theta,Q}$; $\beta = (\beta_N) \in \Lambda^{1-\theta,Q'}$ e $f \in (\Lambda^{\theta,Q})'$.

Assim

$$|<f;x>| \leqslant \sum_{N \in Z^d} |2^{-N} x_N \beta_N|$$

$$\leqslant \sum_{N \in Z^d} (2^{-N.\theta} |x_N|)\, (2^{-N.(1-\theta)} |\beta_N|)$$

e pela desigualdade de Hölder, temos

$$|<f;x>| \leqslant \|x\|_{\Lambda^{\theta,Q}} \|\beta\|_{\Lambda^{1-\theta,Q'}}$$

donde

$$\|f\|_{(\Lambda^{\theta,Q})'} \leqslant \|\beta\|_{\Lambda^{1-\theta,Q'}}$$

e se em particular tomarmos a sequência $x = (x_N)$ com

$$x_N = \prod_{j=1}^{d} 2^{n_j(1-q_j'+\theta_j q_j')} |\beta_{n_j}|^{q_j'-2} \in \Lambda^{\theta,Q}(Z^d)$$

teremos

$$<f;x> = \|\beta\|^{Q'}_{\Lambda^{1-\theta,Q'}}$$

Temos também em virtude da definição de $x = (x_N)$ que

$$<f;x> = \|x\|_{\Lambda^{\theta,Q}} \|\beta\|_{\Lambda^{1-\theta,Q'}}$$

donde podermos afirmar que o supremo é atingido por $x = (x_N)$ na norma do funcional e isso nos garante que

$$\|f\|_{(\Lambda^{\theta,Q}(Z^d))'} = \|\beta\|_{\Lambda^{1-\theta,Q'}(Z^d)}$$

2.8.5. PROPOSIÇÃO: Seja $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$ uma família admissível de espaços de Banach que satisfaz à hipótese de densidade (D) e $\mathbb{E}' = (E_k' | k\varepsilon\square)$ a sua família dual e consideremos os parâmetros $1 \leqslant Q < \infty$ e $0 < \theta < 1$. Então:

(1) $\qquad ((E_k | k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})' \subset (E_k' | k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q',K}$

onde $(1/q_j) + (1/q'_j) = 1$, $j = 1,\dots,d$ e $Q = (q_1,\dots,q_d)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x' \in ((E_k|k\in\square)_{\theta,Q,J})'$. Em virtude de 2.7.4 (1), temos que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\{y_N\} \subset \cap E$, $y_N \neq 0$ tal que

$$K(2^{-N};x',E') - \varepsilon \min_{k\in\square}(2^{-N.k}) \leqslant (J(2^N,y_N,E))^{-1} \langle x';y_N\rangle \quad .$$

Seja agora uma sequência $\alpha = (\alpha_N)_{N\in Z^d} \in \Lambda^{\theta,Q}$ e coloquemos

$$x_\alpha = \sum_{N\in Z^d} \alpha_N y_N / J(2^N;y_N;E)$$

e desse modo

$$\|x_\alpha\|_{(E_k|k\in\square)_{\theta,Q,J}} \leqslant \|2^{-N.\theta}\, J(2^N;\, \alpha_N y_N/J(2^N,y_N;E);E\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

donde

$$\|x_\alpha\|_{(E_k|k\in\square)_{\theta,Q,J}} \leqslant \|\{2^{-N,\theta}|\alpha_N|\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

assim

$$\|x_\alpha\|_{\theta,Q,J} \leqslant \|\alpha\|_{\Lambda^{\theta,Q}}$$

donde concluimos que

$$x_\alpha \in (E_k|k\in\square)_{\theta,Q,J} \quad .$$

Como

$$<x';x_\alpha> = <x'; \sum_{N\varepsilon Z^d} \{\alpha_N y_N/J(2^N;y_N;E)\} >$$

$$= \sum_{N\varepsilon Z^d} \alpha_N <x';y_N/J(2^N;y_N;E)>$$

$$\geqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} \alpha_N (K(2^{-N};x';E') - \varepsilon.[\min_{k\varepsilon\square} (2^{-N.k})]$$

e pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que

$$<x';x_\alpha> \geqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} \alpha_N K(2^{-N},x',E') \qquad .$$

Além disso:

$$<x';x_\alpha> \leqslant \|x'\|_{((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})'} \|x\|_{\theta,Q,J}$$

$$\leqslant \|x'\|_{((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})'} \|\alpha\|_{\Lambda^{\theta,Q}}$$

e desse modo temos:

$$\sum_{N\varepsilon Z^d} \alpha_N.K(2^{-N};x';E') \leqslant \|\alpha\|_{\Lambda^{\theta,Q}} \|x'\|_{((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})'}$$

e como $\Lambda^{\theta,Q}$ e $\Lambda^{1-\theta,Q'}$ são espaços que estão em dualidade através da dualidade definida por

$$<x';x_\alpha> = \sum_{N\varepsilon Z^d} 2^{-N} \alpha_N y_N$$

temos para $\beta = (\beta_N)$, com a particular definição:

$$\beta_N = K(2^N; x', E')$$

que

$$\|x'\|_{(\Lambda^{\theta,Q})'} = \|\beta\|_{\Lambda^{1-\theta,Q'}}$$

Mais ainda

$$\|x'\|_{(\Lambda^{\theta,Q})'} = \sup\{|\langle x', x_\alpha\rangle| / \|\alpha\|_{\Lambda^{\theta,Q}}\}$$

ou seja

$$\|x'\|_{(\Lambda^{\theta,Q})'} \leqslant \|x'\|_{((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})'}$$

e como

$$\|x'\|_{(E'_k|k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q';K}} = \|\beta\|_{1-\theta,Q'}$$

temos que

$$\|x'\|_{(E'_k|k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q';K}} = \|x'\|_{(\Lambda^{\theta,Q})'} \leqslant \|x'\|_{((E_k|k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})'}$$

concluindo assim o resultado desejado.

2.8.6. TEOREMA: Seja $\mathbb{E} = (E_k|k\varepsilon\square)$ uma família admissível de espaços de Banach satisfazendo à hipótese de densidade:

(D) $\qquad \cap E$ é densa em E_k $\qquad (k\varepsilon\square)$

e $\mathbb{E}' = (E_k' \mid k\varepsilon\square)$ a sua família dual. Sejam os parâmetros $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$ e Q' o conjugado de Q (definido em 2.8.3). Então:

$$(E_k' \mid k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q'} \equiv ((E_k \mid k\varepsilon\square)_{\theta,Q})'$$

DEMONSTRAÇÃO: Em virtude da proposição 2.8.2., temos que

$$(E_k' \mid k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q',J} \subset ((E_k \mid k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K})' \quad .$$

Pelo teorema de equivalência 2.4.4., temos que

$$(E_k \mid k\varepsilon\square)_{\theta,Q,K} \cong (E_k \mid k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J}$$

e

$$(E_k' \mid k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q',J} = (E_k' \mid k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q',K} \quad .$$

Pela proposição 2.8.5., temos que

$$((E_k \mid k\varepsilon\square)_{\theta,Q,J})' \subset (E_k' \mid k\varepsilon\square)_{1-\theta,Q',K}$$

Em virtude de todas essas imersões citadas acima temos o resultado desejado.

CAPÍTULO 3

ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO E A CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO E OS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Neste Capítulo estabeleceremos conexões entre os espaços de interpolação $(E_k | k\varepsilon\square)_{\alpha,Q}$ e os espaços de aproximação $(E)_{\theta,Q}$ impondo algumas restrições aos espaços e parâmetros envolvidos.

Com o objetivo de mostrar a estabilidade dos métodos de aproximação, são introduzidas duas classes de aproximação. Estas classes são inspiradas nas desigualdades de Jackson e Bernstein.

Ao final mostraremos a identidade entre os espaços de aproximação e os espaços de interpolação.

3.1. OS MÉTODOS J E K DE MELHOR APROXIMAÇÃO

3.1.1. Consideremos E um espaço de Banach e uma escala múltipla de subespaços de E, isto é, uma família $(W_N | N \varepsilon N^d)$ tal que

$$(1) \qquad W_{N'} \subset W_{N''}$$

se $N'=(n_1,\dots,n_d') \leqslant N''=(n_1'',\dots,n_d'')$ e $W_0=\{0\}$.

3.1.2. DEFINIÇÃO: Para todo $x \varepsilon E$, definimos a melhor aproximação de x por elementos de W_N, como:

(1) $$E_N(x) = \inf\{\|x-w\|_E; w\varepsilon W_N\}$$.

Desta definição seguem algumas propriedades.

3.1.3. PROPOSIÇÃO: Seja $x \varepsilon E$ e $y \varepsilon E$. Então:

(1) $$E_o(x) = \|x\|_E$$

(2) $$E_{N'}(x) \geqslant E_{N''}(x) \qquad (N' \leqslant N'')$$

(3) $$E_N(\alpha x) = |\alpha| E_N(x) \qquad (\alpha \varepsilon R)$$

(4) $$E_N(x+y) \leqslant E_N(x) + E_N(y)$$

(5) $$E_N(w) = 0 \qquad (w \varepsilon W_N)$$

(6) $$E_N(x+w) = E_N(x) \qquad (w \varepsilon W_N)$$

3.1.4. DEFINIÇÃO: Um espaço F é um espaço de aproximação de E, se:

(1) $$W_N \subset F \subset E$$

para todo $N = (n_1,\ldots,n_d) \varepsilon N^d$.

3.1.5. DEFINIÇÃO: Seja $(W_N | N\varepsilon N^d)$ uma escala múltipla de subespaços de E, $0 < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) < 1$; $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) \leqslant \infty$. Definimos $(E)_{\theta,Q,K}$ como o espaço de todos os elementos $x \varepsilon E$ para os quais

(1) $\{a^{N.\theta} E_{a^N}(x)\} \in \ell^Q(N^d)$

onde $a = (a_1,\ldots,a_d) > 1$, $E_{a^N}(x) = E_{[a^N]}(x)$ e $[a^N] = \max\{M \in Z^d | M \leq a^N\}$.

3.1.6. TEOREMA: Para $0 < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) < 1$, $a = (a_1,\ldots,a_d) > 1$, $1 \leq Q = (q_1,\ldots,q_d) \leq \infty$; o espaço $(E)_{\theta,Q,K}$ é completo sob qualquer uma das normas equivalentes:

(1) $\|x\|^{\theta,Q,K(a)} = \|x\|_E + \|\{a^{N.} E_{a^N}(x)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$

(2) $\|x\|^{\theta,Q,K} = \|x\|_E + \|\{M^\theta E_M(x)\}\|_{\ell_*^Q(N_+^d)}$.

Mais ainda para $a = (a_1,\ldots,a_d) \in R_+^d$, $b = (b_1,\ldots,b_d) \in R_+^d$ com $a \neq b$, $a,b > 1$ temos a equivalência entre as normas $\|.\|^{\theta,Q,K(a)}$ e $\|.\|^{\theta,Q,K(b)}$.

Valem também as imersões

(3) $W_N \subset (E)_{\theta,Q,K} \subset E$,

para todo $N = (n_1,\ldots,n_d) \in N^d$.

DEMONSTRAÇÃO: Demonstremos a primeira imersão de (3). Seja $p_M \in W_M$ com $M \in N_+^d$. Assim:

$$\|\{a^{N.\theta}E_{a^N}(p_M)\}\|_{\ell^Q(N^d)} = \{\sum_{n_d=0}^{\infty} \ldots [\sum_{n_1=0}^{\infty}(a^{N.\theta}e_{a^N}(p_M))^{q_1}]^{q_2/q_1}\ldots\}^{1/q_d}$$

e pela Proposição 3.1.3. a expressão da direita será dominada por

$$\{\sum_{n_d=0}^{a_d^{n_d}<m_d} \dots \Big[\sum_{n_1=0}^{a_1^{n_1}<m_1} (a^{N.\theta} E_{a^N}(p_M))^{q_1}\Big]^{q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant \{\sum_{n_d=0}^{a_d^{n_d}<m_d} \dots \Big[\sum_{n_1=0}^{a_1^{n_1}<m_1} (a^{N.\theta} \| p_M \|_E)^{q_1}\Big]^{q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant \| p_M \|_E \{\sum_{n_d=0}^{a_d^{n_d}<m_d} \dots \Big[\sum_{n_1=0}^{a_1^{n_1}<m_1} (a^{N.\theta})^{q_1}\Big]^{q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C \| p_M \|_E$$

e assim temos que

$$\| p_M \|^{\theta, Q, K} \leqslant C \| p_M \|_E$$

o que mostra que $W_M \subset (E)_{\theta, Q, K}$.

Mostraremos agora a equivalência entre (1) e (2)

$$\| \{M^\theta E_M(x)\} \|_{\ell^Q_*(N^d_+)} = \{\sum_{m_d=1}^{\infty} \dots \Big[\sum_{m_1=1}^{\infty} (M^\theta E_M(x))^{q_1} \frac{1}{m_1}\Big]^{q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

e tomando $a_j^{n_j} \leqslant m_j < a_j^{n_j+1}$ para cada $j = 1,2,\dots,d$, seguirá que a última expressão pode ser reescrita na forma

$$\{\sum_{n_j=0}^{\infty} \sum_{m_d[n_d]} \dots \Big[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1[n_1]} (M^\theta E_M(x))^{q_1} \frac{1}{m_1}\Big]^{q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C \| \{a^{N.\theta} E_{a^N}(x)\} \|_{\ell^Q(N^d)} \quad .$$

Reciprocamente, mostraremos que (2) majora (1)

$$\|a^{N.\theta}E_{a^N}(x)\|_{\ell^Q(N^d)} = \{\sum_{n_d=0}^{\infty} \dots (\sum_{n_1=0}^{\infty} (a^{N.\theta}E_{a^N}(x))^{q_1})^{q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C\{\sum_{n_d=0}^{\infty}\sum_{m_d[n_d]}^{\infty} \dots \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{m_1[n_1]} (a^{N.\theta}E_{a^N}(x))^{q_1}\frac{1}{m_1}) \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C\{\sum_{m_d=0}^{\infty} \dots \sum_{m_1=0}^{\infty} ((M+1)^{\theta}E_{M+1}(x))^{q_1} \frac{1}{1+m_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C\ \|M^{\theta}\ E_M(x)\|_{\ell_*^Q(N_+^d)}$$

donde a equivalência entre as normas (1) e (2).

A demonstração das demais equivalências é análoga àquela apresentada em 2.3.4 (3).

3.1.7. PROPOSIÇÃO: Se $x \in (E)_{\theta,\infty,K}$, então

(1) $$E_M(x) \leqslant C\ M^{-\theta}\ \|x\|^{\theta,\infty,K}$$

e além disso

(2) $$E_M(x) \to 0 \qquad (M \to \infty)$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue do teorema 3.1.6.

A desigualdade 3.1.7 (1) será denominada desigualdade de Jackson de ordem θ, $\theta \geqslant 0$ e os espaços $(E)_{\theta,Q,K}$ serão chamados espaços de aproximação do tipo Jackson.

3.1.8. PROPOSIÇÃO: Seja $(W_N | N \in N^d)$ uma escala múltipla de subespaços de E, $0 < \theta < 1$ e $1 \leqslant Q \leqslant \infty$. Definimos $(E)_{\theta,Q,J}$ como o espaço de todos os elementos $x \in E$ para os quais existe uma decomposição da forma

(1) $$x = \sum_{N \in N^d} u_N \qquad \text{(na norma de E)}$$

sendo $u_N \in W_{a^N}$ e

(2) $$\{a^{N.\theta} \| u_N \|_E\} \in \ell^Q(N^d) \qquad .$$

3.1.9. TEOREMA: Para $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$; o espaço $(E)_{\theta,Q,J}$ é completo sob qualquer das normas equivalentes:

(1) $$\|x\|^{\theta,Q,J(a)} = \|x\|_E + \inf_{x = \Sigma u_N} \{ \| \{ a^{N.\theta} \| u_N \|_E \} \|_{\ell^Q(N^d)} \}$$

(2) $$\|x\|^{\theta,Q,J} = \|x\|_E + \inf_{x = \Sigma v_{M/M}} \{ \| \{ M^\theta \| v_M \|_E \} \|_{\ell_*^Q(N_+^d)} \}$$

Mais ainda, para $a,b > 1$; $a \neq b$, temos que

(3) $$\|x\|^{\theta,Q,J(a)} \cong \|x\|^{\theta,Q,J(b)} \qquad ,$$

e valem as seguintes inclusões

(4) $$W_N \subset (E)_{\theta,Q,J} \subset E \qquad ,$$

para todo $N = (n_1,\dots,n_d) \in N^d$.

DEMONSTRAÇÃO DE (4): Seja $p_M \in W_M$, $M = (m_1,\dots,m_d) \in N_+^d$ e definamos $U_N = p_M$ se $a^{N-1} \leqslant M < a^N$ e $U_N = 0$ nos outros casos. Desse modo, $U_N \in W_{a^N}$ para cada $N \in N^d$ e $p_M = \sum_{N\in N^d} U_N$. Assim

$$\|p_M\|^{\theta,Q,J} = \|p_M\|_E + CM^\theta \|p_M\|_E \leqslant C \max_{k\in\square} \{M^{k.\theta}\} \|p_M\|_E$$

donde o resultado desejado.

DEMONSTRAÇÃO DA EQUIVALÊNCIA ENTRE (1) e (2): Seja $x \in (E)_{\theta,Q,J}$; $x = \sum_{N\in N^d} U_N$ com $U_N \in W_{a^N}$ e

$$\{a^{N.\theta}\|U_N\|_E\} \in \ell^Q(N^d) \qquad .$$

Se $N = (n_1,\dots,n_d) \in N^d$ definimos o conjunto

$$M[N] = \{M=(m_1,\dots,n_d)\in N_+^d \mid a^{n_j} \leqslant m_j < a^{1+n_j}; j=1,2,\dots,d\}$$

e se $a^N \leqslant M < a^{1+N}$ definiremos

$$B_N = \sum_{M[N]} 1/M \qquad (1/M = 1/m_1,\dots,m_d)$$

e

$$v_M = (1/B_N)\, U_N$$

Desse modo $v_M \in W_M$ e além disso:

$$x = \sum_{N \varepsilon N^d} u_N = \sum_{N \varepsilon N^d} \sum_{M[N-1]} (1/M)\, v_M = \sum_{M \varepsilon N_+^d} (1/M)\, v_M \quad .$$

Temos também que

$$\| \{ M^\theta \| v_M \|_E \} \|_{\ell_*^Q(N_+^d)} = \{ \sum_{m_d=1}^{\infty} \cdots [\sum_{m_1=1}^{\infty} (M^\theta \| v_M \|_E)^{q_1} \frac{1}{m_1}]^{q_2/q_1} \cdots \}^{1/q_d}$$

$$= \{ \sum_{n_d=0}^{\infty} \sum_{m_d[n_d]} \cdots \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1[n_1]} (M^\theta \| \frac{u_N}{B_N} \|_E)^{q_1} \frac{1}{m_1})^{q_2/q_1} \cdots \}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C \sum_{n_d=0}^{\infty} \cdots (\sum_{n_1=0}^{\infty} (a^{N.\theta} \| u_N \|_E)^{q_1} B_{n_1}^{1-q_1}) B_{n_2}^{1-q_2}) \cdots \}^{1/q_d}$$

$$\leqslant C \ \| \{ a^{N.\theta} \ u_N \ _E \} \|_{\ell^Q(N^d)}$$

donde, tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de x apresentadas acima, segue que

$$\| x \|^{\theta,Q,J} \leqslant C \| x \|^{\theta,Q,J(a)}$$

Reciprocamente consideremos $x = \sum_{M \varepsilon N_+^d} (1/M) v_M$ com $v_M \varepsilon W_M$ e $\{ M^\theta \| v_M \|_E \} \varepsilon \ell_*^Q(N_+^d)$. Se para $a^N \leqslant M < a^{N+1}$ tomarmos

$$U_N = \sum_{m_d[n_d-1]} \cdots \sum_{m_1[n_1-1]} (1/M) v_M \quad .$$

com $M \in N^d_+$ e $U_N = 0$ se algum $n_j = 0$ com $j = 1,2,\dots,d$. Então

$$\sum_{N\in N^d} U_N = \sum_{N\in N^d_+} U_N = \sum_{N\in N^d_+} \sum_{M[N-1]} (1/M)v_M = \sum_{M\in N^d_+} (1/M)v_M = x$$

e além disso

$$\|\{a^{N.\theta}\|U_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)} = \|\{a^{N.\theta}\| \sum_{M[N-1]} (1/M)v_M\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d_+)}$$

$$=\{\sum_{n_d=1}^{\infty} \dots \sum_{n_1=1}^{\infty} (a^{N.\theta}\| \sum_{M\ N-1} (m/M)v_M\|_E)^{q_1\ q_2/q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant\{\sum_{n_d=1}^{\infty} \dots \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1[n_1-1]} (a^{N.\theta}\| \sum_{m_d[n_d-1]} \sum_{m_2[n_2-1]} (1/M)v_M\|_E)\frac{1}{m_1}^{q_1} \dots)\}^{1/q_d}$$

$$\leqslant\{\sum_{n_d=1}^{\infty} \dots \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} (m_1^{\theta_1} \, {}_2^{n_2\theta_2} \dots a_d^{n_d\theta_d}\| \sum_{m_d[n_d-1]} \dots \sum_{m_2[n_2-1]} (1/M)v_M\|_E \cdot \frac{1}{m_1}^{q_1} \dots\}^{1/q_d}$$

e reiterando o processo, obteremos:

$$\|\{a^{N.\theta}\|U_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)} \leqslant C\|\{M^{\theta}\|v_M\|_E\}\|_{\ell^Q_*(N^d_+)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições de x nas formas acima, seguirá que

$$\|x\|^{\theta,Q,J(a)} \leqslant C\|x\|^{\theta,Q,J} \quad .$$

A demonstração de (3) é análoga àquela de 2.3.7 (3).

3.1.10. PROPOSIÇÃO: Se $w \in W_M$, então:

(1) $$\|w\|^{\theta,Q,J} \leqslant C\, M^{\theta}\, \|w\|_E \quad .$$

A demonstração segue do teorema 3.1.9.

A desigualdade que aparece na Proposição 3.1.10 será denominada desigualdade de Bernstein de ordem $\theta \geqslant 0$ e os espaços $(E)_{\theta,Q,J}$ serão chamados espaços de aproximação do tipo Bernstein.

3.2. A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS MÉTODOS J E K DE MELHOR APROXIMAÇÃO

3.2.1. LEMA: Para $0 < \theta \leqslant 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, temos,

(1) $$(E)_{\theta,Q,J} \subset (E)_{\theta,Q,K}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in (E)_{\theta,Q,J}$. Assim, existe $\{u_N\} \subset W_{a^N}$ tal que

$$x = \sum_{N \in N^d} u_N \qquad \text{(na norma de E)}$$

e

$$\{a^{N\cdot\theta} \|u_N\|_E\} \in \ell^Q(N^d) \quad .$$

Desse modo

$$\|\{a^{N.\theta}E_{a^N}(x)\}\|_{\ell^Q(N^d)} \leqslant \|\{a^{N.\theta} \sum_{M\in N^d} F_{a^N}(u_M)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \|\{a^{N.\theta} \sum_{M\in N^d} E_{a^N}(u_{M+N})\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \|\{a^{-M.\theta} a^{(M+N).\theta} \sum_{M\in N^d} E_{a^N}(u_{M+N})\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \|\{ \sum_{M\in N^d} a^{-M.\theta} a^{(M+N).\theta} E_{a^N}(u_{M+N})\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e pela desigualdade de Minkowski, temos que:

$$\|\{a^{N.\theta}E_{a^N}(x)\}\|_{\ell^Q(N^d)} \leqslant \sum_{M\in N^d} a^{-M.\theta}\|\{a^{K.\theta} E_{a^N}(U_K)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C \;\|\{a^{K.\theta}\|u_K\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições de x na forma apresentada no início da demonstração, temos que:

$$\|\{a^{N.\theta} E_{a^N}(x)\}\|_{\ell^Q(N^d)} \leqslant C\|x\|^{\theta,Q,J} \quad .$$

donde o resultado desejado.

3.2.2. LEMA: Para $0 < \theta \leqslant 1$; $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, temos:

(1) $$(E)_{\theta,Q,K} \subset (E)_{\theta,Q,J} \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in (E)_{\theta,Q,K}$. Desse modo,

$$\lim_{N\to\infty} E_N(x) = 0 \quad .$$

Logo é possível encontrar $w_N \in W_{a^N}$ tal que

$$\|w_{a^N} - x\|_E \leqslant C\ E_{a^N}(x) \leqslant C\ \|w_N - x\|_E \to 0$$

quando $N \to \infty$. Se escolhermos (no caso bi-paramétrico):

$$u_N = \begin{cases} w_{n_1;n_2} - w_{n_1-1;n_2} - w_{n_1;n_2-1} + w_{n_1-1;n_2-1} & N \gtrsim (1,1) \\ w_{n_1;0} - w_{n_1-1;0} & \text{se } n_1 \geqslant 1 \text{ e } n_2 = 0 \\ w_{0;n_2} - w_{0;n_2-1} & \text{se } n_1 = 0 \text{ e } n_2 \geqslant 1 \\ 0 & \text{se } N = (0,0) \end{cases}$$

poderemos escrever que

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} u_{n_1 n_2} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N=(N_1,N_2)}} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} u_N = \lim_{N\to\infty} w_N = x$$

na norma de E e além disso

$$u_N \in W_{a^N}$$

e

$$\|u_N\|_E \leqslant \begin{cases} C\,E_{a_1^{n_1-1}\,a_2^{n_2-1}}(x) & \text{se } N \geqslant (1,1) \\ C\,E_{a_1^{n_1-1},0}(x) & \text{se } n_1 \geqslant 1,\ n_2 = 0 \\ C\,E_{0;a_2^{n_2-1}}(x) & \text{se } n_1 = 0;\ n_2 \geqslant 1 \\ 0 & \text{se } N = (0,0) \end{cases}$$

donde

$$\|\{a^{N.\theta}\|u_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^2)} = \{\sum_{n_2=0}^{\infty}[\sum_{n_1=0}^{\infty}(a^{N.\theta}\|u_N\|_E)^{q_1}]^{q_2/q_1}\}^{1/q_2}$$

$$\leqslant \{\sum_{n_1=1}^{\infty}(a_1^{n_1\theta_1}\|u_{n_1 0}\|_E)^{q_1}\}^{1/q_1} + \{\sum_{n_2=0}^{\infty}(a_2^{n_2\theta_2}\|u_{0n_2}\|_E)^{q_2}\}^{1/q_2}$$

$$+ \|a^{N.\theta}\|u_N\|_E\|_{\ell^Q(N_+^2)}$$

$$\leqslant C\ \{\|\{a_1^{n_1\theta_1}\ E_{a_1^{n_1-1};0}(x)\}\|_{\ell^{q_1}(N_+)} + \|\{a_2^{n_2\theta_2}E_{0;a_2^{n_2-1}}(x)\}\|_{\ell^{q_2}(N_+)}$$

$$+ \|\{a^{N.\theta}\ E_{a^{N-1}}(x)\}\|_{\ell^Q(N_+^2)}$$

$$\leqslant C\ \|\{a^{N.\theta}\ E_{a^N}(x)\}\|_{\ell^Q(N^2)}$$

donde

$$\|x\|^{\theta,Q,J} \leqslant C\|x\|^{\theta,Q,K}$$

3.2.3. TEOREMA: Para $0 < \theta < 1$; $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, temos:

(1) $$(E)_{\theta,Q,K} \cong (E)_{\theta,Q,J}$$

3.2.4. COROLÁRIO: Para $\theta' < \theta < 1$, $1 \leqslant P$, $Q \leqslant \infty$, temos:

(1) $$(E)_{\theta,Q,K} \subset (E)_{\theta',P,K}$$

(2) $$(E)_{\theta,Q,J} \subset (E)_{\theta',P,J}$$

e para $0 < \theta < 1$ e $1 \leqslant P \leqslant Q \leqslant \infty$, temos:

(3) $$(E)_{\theta;P,K} \subset (E)_{\theta,Q,K}$$

(4) $$(E)_{\theta,Q,J} \subset (E)_{\theta,P,J} \quad .$$

3.3. A ESTABILIDADE DOS MÉTODOS J E K DE MELHOR APROXIMAÇÃO

3.3.1. DEFINIÇÃO: Seja $F \subset E$ um espaço de aproximação e $\theta \geqslant 0$. Então:

(1) $F \in A_\theta^K = A_\theta^K(E)$ SEE $E_N(x) \leqslant C\ N^{-\theta}\|x\|_F \qquad (x \in F)$

(2) $F \in A_\theta^J = A_\theta^J(E)$ SEE $\|w\|_F \leqslant C\ N^{\theta}\|w\|_E \qquad (w \in W_N)$

(3) $F \in A_\theta = A_\theta(E)$ SEE $F \in A_\theta^K \cap A_\theta^J$

3.3.2. LEMA: Para $\theta \geqslant 0$, seja $F \subset E$ um espaço de aproximação. Então:

(1) $F \in A_\theta^K(E)$ SEE $F \subset (E)_{\theta,\infty,K}$

(2) $F \in A_\theta^J(E)$ SEE $(E)_{\theta,1,J} \subset F$

(3) $F \in A_\theta$ SEE $(E)_{\theta,1,J} \subset F \subset (E)_{\theta,\infty,K}$

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $F \in A_\theta^K(E)$ se e somente se $E_N(x) \leqslant C\, N^{-\theta} \|x\|_F$ e como

$$\sup_{N \in N^d}\{a^{N.\theta} E_{a^N}(x)\} \cong \sup_{N \in N_+^d}\{N^\theta\ E_N(x)\}$$

temos que

$$\sup_{N \in N^d}\{a^{N.\theta}\ E_{a^N}(x)\} \leqslant C\ \|x\|_F$$

donde

$$\|x\|^{\theta,\infty,K} \leqslant C\ \|x\|_F$$

o que é equivalente a afirmar que $F \subset (E)_{\theta,\infty,K}$.

DEMONSTRAÇÃO DE (2): Seja $(E)_{\theta,1,J} \subset F$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_F \leqslant C\ a^{-\theta}\ \|x\|^{\theta,1,J}$$

e por 1.9 (4) temos que

$$\|p_j\|^{\theta,Q,J} \leqslant C \max_{k\varepsilon\square} \{j^{k.\theta}\}\|p_j\|_E \qquad (p_j \varepsilon W_j)$$

assim

$$\|p_j\|_F \leqslant C\ a^{-\theta}\|p_j\|^{\theta,1,J} \leqslant C\ a^{-\theta} \max_{k\varepsilon\square}\{j^{k.\theta}\}\|p_j\|_E$$

donde

$$\|p_j\|_F \leqslant C\ j^{\theta}\ \|p_j\|_E$$

e podemos concluir que $F \varepsilon A^J_\theta(E)$.

Reciprocamente, seja $F \varepsilon A^J_0(E)$ e $x \varepsilon (E)_{\theta,1,J}$. Então, existe $\{u_N\} \subset W_{a^N}$ tal que $X = \Sigma_N u_n$(em E) e

$$\sum_{N\varepsilon N^d} a^{N.\theta} \|u_N\|_E < \infty$$

Assim, obtemos que

$$\sum_{N\varepsilon N^d} \|u_N\|_F \leqslant C \sum_{N\varepsilon N^d} a^{N.\theta}\|u_N\|_E < \infty$$

e como F é completo, temos que a soma $\sum_{N\varepsilon N^d} u_N$ converge na norma de F para um elemento $x' \varepsilon F$ e consequentemente na norma de E também, donde concluimos que $x = x'$ e assim pela desigualdade acima temos que

$$\|x\|_F \leqslant C \sum_{N\varepsilon N^d} a^{N.\theta}\|u_N\|_E$$

donde

$$\|x\|_F \leqslant C \ \|x\|^{\theta,1,J} \qquad .$$

DEMONSTRAÇÃO DE (3): Segue de (1) e (2).

Uma consequência deste último lema é que as classes $A_\theta(E)$ são não vazias.

3.3.3. COROLÁRIO: Para $\theta > 0$ e $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, temos que:

(1) $$(E)_{\theta,Q,K} \in A_\theta(E)$$

(2) $$(E)_{\theta,Q,J} \in A_\theta(E)$$

3.3.4. LEMA: Se $F \in A_\alpha^k(E)$, $\alpha \geqslant 0$ e $1 < Q < \infty$, então:

(1) $$F_{\theta-\alpha,Q;K_F} \subset (E)_{\theta,Q,K} \qquad ,$$

para todo $\theta \in R^d$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos

$$F_N(x) = \inf_{p_N \in W_N} \{\|x - p_N\|_F\}$$

a melhor aproximação de x por elementos de W_N na norma do espaço F. Temos então para cada $x \in F$, a existência de $p_N^r \in W_N$ tal que

$$F_N(x) = \lim_{r\to\infty} \|x - p_N^r\|_F \qquad .$$

Dai segue que

$$E_N(x) = E_N(x - p_N^r) \leqslant C\ N^{-\alpha}\ \|x - p_N^r\|_F$$

e então

$$E_N(x) \leqslant C\ N^{-\alpha}\ \ F_N(x) \qquad\qquad (N\varepsilon N_+^d)$$

Como $x\ \varepsilon\ (F)_{\theta-\alpha,Q,K_F}$, então

$$\|\{N^{\theta-\alpha}\ \ F_N(x)\}\|_{\ell_*^Q(N_+^d)} < \infty$$

donde

$$\|\{N^{\theta}\ E_N(x)\}\|_{\ell_*^Q(N_+^d)} \leqslant C\ \|\{N^{\theta-\alpha}\ \ F_N(x)\}\|_{\ell_*^Q(N_+^d)} \qquad ,$$

o que implica que $x\ \varepsilon\ (E)_{\theta,Q,K}$.

3.3.5. LEMA: Se $F\ \varepsilon\ A_\alpha^J(E)$, $\alpha < \theta$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ e/ou $\theta = \alpha$, $Q = 1$, então:

$$(1) \qquad E_{\theta,Q,J} \subset (F)_{\theta-\alpha,Q,J_F} \qquad ,$$

para todo $\theta\ \varepsilon\ R^d$.

DEMONSTRAÇÃO: Para $x\ \varepsilon\ (E)_{\theta,Q,J}$, seja $x = \Sigma_N\ u_N$, com $u_N\ \varepsilon\ W_{a^N}$, uma possível decomposição de x em E, e

$$\{a^{N.\theta}\|u_N\|_E\} \in \ell^Q(N^d) \qquad .$$

Então

$$\|\{a^{N.(\theta-\alpha)}\|u_N\|_F\}\|_{\ell^Q(N^d)} \leqslant C \ \|\{a^{N.\theta}\|u_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e assim

$$\sum_{N\varepsilon N^d} \|u_N\|_F \leqslant C \ \|\{a^{-N.(\theta-\alpha)}\}\|_{\ell^{Q'}(N^d)} \|\{a^{N.\theta}\|u_N\|_F\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e como F é completo, a soma $\Sigma_N u_N$ converge para um elemento $x' \varepsilon F$ na norma de F e também na norma de E, donde $x = x'$, logo

$$\|x\|^{\theta-\alpha,Q,J_F} \leqslant C\|x\|^{\theta,Q,J}$$

e concluimos então que $x \varepsilon (F)_{\theta-\alpha,Q,J_F}$.

3.3.6. TEOREMA: Seja $F \varepsilon A_\alpha(E)$, $0 < \alpha < \theta$ e $1 \leqslant Q \leqslant \infty$. Então:

(1) $\quad (F)_{\theta-\alpha,Q,K_F} \cong (E)_{\theta,Q,K} \cong (E)_{\theta,Q,J} \cong (F)_{\theta-\alpha,Q,J_F}$

3.3.7. COROLÁRIO: Seja $0 < \theta' \leqslant \theta$ e $1 \leqslant P,\ Q \leqslant \infty$. Então

(1) $\quad ((E)_{\theta-\theta',Q,K})_{\theta',P,K} \cong (E)_{\theta,P,K} \cong (E)_{\theta,P,J} \cong ((E)_{\theta-\theta',Q,K})_{\theta',P,J}$.

Este último corolário caracteriza a propriedade dos espaços de aproximação denominada estabilidade.

3.4. A CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO E OS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

3.4.1. LEMA: Sejam $0 \leqslant \theta_o = (\theta_o^1,\ldots,\theta_o^d) \leqslant \theta_k = (\theta_k^1,\ldots,\theta_k^d) \leqslant \theta_1 = \theta_1 = (\theta_1^1,\ldots,\theta_1^d)$; $\theta_o < \theta_1$; $0 < \alpha = (\alpha^1,\ldots,\alpha^d) < 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ e/ou $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $Q = \infty$; $\theta = (1-\alpha)\theta_o + \alpha\,\theta_1$; $\mathbb{E} = (E_k \mid k \varepsilon \square)$ uma família de espaços de aproximação pertencentes às classes $A^k_{\theta_k}(E)$. Então:

$$(1) \qquad (E_k \mid k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,K} \subset (E)_{\theta,Q,K}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \varepsilon (E_k \mid k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,K}$ e $x = \Sigma_k\, x_k$ uma possível decomposição para x, com $x_k \varepsilon E_k$, $k \varepsilon \square$, $\Sigma\mathbb{E} \subset E$. Então

$$E_N(x) \leqslant \sum_{k\varepsilon\square} E_N(x_k) \leqslant C \sum_{k\varepsilon\square} N^{-\theta_k} \|x_k\|_{E_K}$$

$$= C\, N^{-\theta_o} \sum_{k\varepsilon\square} N^{-(\theta_k-\theta_o)} \|x_k\|_{E_k}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições para x, temos:

$$E_N(x) \leqslant C\, N^{-\theta_o}\, K(N^{\theta_1-\theta_o};x) \qquad (N\varepsilon N_+^d)$$

Pelo fato de $\Sigma\mathbb{E} \subset E$, existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|x\|_E \leqslant C\|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = C\, K(1;x)$$

donde obtemos:

$$\|x\|^{\theta,Q,K} = \|x\|_E + \|\{a^{N.\theta}\ E_{a^N}(x)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\ \{K(1;x) + \|\{a^{N.(\theta-\theta_o)}\ K(a^{N.(\theta_1-\theta_o)};x)\}\|_{\ell^Q(N^d)}\}$$

e tomando $b = a^{\theta_1-\theta_o}$, vem:

$$\|x\|^{\theta,Q,K} \leqslant C\{K(1;x) + \|\{b^{N.\alpha}\ K(b^N;x)\}\|_{\ell^Q(N^d)}\}$$

e pelo fato de $(E_k|\ k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,K} \subset \Sigma\mathbb{E}$, existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = K(1;x) \leqslant C\ \|x\|_{\alpha,Q,K}$$

donde obtemos

$$\|x\|^{\theta,Q,K} \leqslant C\ \|x\|_{\alpha,Q,K}$$

3.4.2. COROLÁRIO: Se além das hipóteses do lema 4.1., aceitarmos que

(1) $$E_0 \subset E_k \subset E_1 \qquad (k\varepsilon\square)$$

para $0 \leqslant \alpha < 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ e/ou $\alpha = 1$, $Q = \infty$, então:

(2) $$(E_k|\ k\varepsilon\square)^+_{\alpha,Q,K} \subset (E)_{\theta,Q,K}$$

DEMONSTRAÇÃO: Para $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$ e/ou $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $Q = \infty$, temos que

$$(E_k|\,k\varepsilon\square)^{+}_{\alpha,Q,K} \cong (E_k|\,k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,K}$$

donde o resultado desejado.

3.4.3. LEMA: Sejam $0 \leqslant \theta_o = (\theta_o^1,\ldots,\theta_o^d) \leqslant \theta_k = (\theta_k^1,\ldots,\theta_k^d) \leqslant \theta_1 = (\theta_1^1,\ldots,\theta_1^d)$; $\theta_o < \theta_1$; $0 < \alpha = (\alpha^1,\ldots,\alpha^d) < 1$, $1 < Q < \infty$ e/ou $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $Q = 1$; $\theta = (1-\alpha)\theta_o + \alpha\,\theta_1$, $\mathbb{E} = (E_k|\,k\varepsilon\square)$ uma família de espaços de aproximação pertencentes às classes $A^J_{\theta_k}(E)$. Então:

(1) $$(E)_{\theta,Q,J} \subset (E_k|\,k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,J}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in (E)_{\theta,Q,J}$. Assim, existe $\{u_N\} \subset W_{a^N}$ tal que $x = \sum\limits_{N\varepsilon \mathbb{N}^d} u_N$ e

$$\{a^{N.\theta}\,\|u_N\|_E\} \in \ell^Q(\mathbb{N}^d) \qquad (a > 1)\ .$$

Assim, temos também que $u_N \in \cap\{E_k|\,k\varepsilon\square\}$ e

$$J(b^N;u_N) = \max_{k\varepsilon\square}\{b^{-N.k}\|u_N\|_{E_k}\} \leqslant C \max_{k\varepsilon\square}\{b^{-N.k}\, a^{N.\theta_k}\,\|u_N\|_E\}$$

e tomando $b = a^{\theta_1-\theta_o}$, vem:

$$J(b^N;u_N) \leqslant C \max_{k\varepsilon\square}\{a^{-N.k.(\theta_1-\theta_o)+N.k.\theta_k}\,\|u_N\|_E\}$$

$$\leqslant C\, a^{N.\theta_o} \max_{k\varepsilon\square}\{a^{-N.k.(\theta_1-\theta_o)-k.\theta_k+\theta_o)}\}\,\|u_N\|_E$$

$$\leqslant C\, a^{N.\theta_o}\,\|u_N\|_E \qquad .$$

Definindo agora $v_N = u_N$ se $N \varepsilon \mathbb{N}^d$ e $v_N = 0$ nos outros casos obtemos que $x = \Sigma_N v_N = \Sigma_N u_N$,

$$\|\{b^{N.\alpha} J(b^N;v_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} = \|\{b^{N.\alpha} J(b^N;u_N)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C \|\{b^{N.\alpha} a^{N.\theta_o} \|u_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C \|\{a^{N.\alpha.(\theta_1-\theta_o)+N.\theta_o} \|u_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e

$$(2) \quad \|\{b^N J(b^N;v_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)} \leqslant C \|\{a^{N.\theta}\|u_N\|_E\}\|_{\ell^Q(N^d)} < \infty \quad .$$

Portanto

$$\|x\|_{\Sigma \mathbb{E}} \leqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} \|v_N\|_{\Sigma \mathbb{E}} = \sum_{N\varepsilon Z^d} K(1,u_N)$$

$$\leqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} \min_{k\varepsilon\square}\{b^{N.k}\} J(b^N;u_N)$$

$$\leqslant \sum_{N\varepsilon Z^d} \min_{k\varepsilon\square} \{b^{N.(k-\alpha)}\}\{b^{N.\alpha} J(b^N;u_N)\}$$

e pela desigualdade de Hölder, temos:

$$\sum_{N\varepsilon Z^d} \|v_N\|_{\Sigma \mathbb{E}} \leqslant \|\{\min_{k\varepsilon\square} b^{N.(k-\alpha)}\}\|_{\ell^{Q'}(Z^d)} . \|\{b^{N.\alpha} J(b^N;u_N)\}\|_{\ell^Q(Z^d)}$$

e como $\Sigma\mathbb{E}$ é completo, temos que $x = \Sigma_N v_N$ (em E) e então podemos concluir que $x \in (E_k | k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,J}$.

Tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições para x, na desigualdade (2), vem que:

$$\|x\|_{\alpha,Q,J} \leqslant C \ \|x\|^{\theta,Q,J} \quad .$$

3.4.4. COROLÁRIO: Se além das hipóteses do lema 3.4.3, aceitarmos que

$$(1) \qquad E_0 \subset E_k \subset E_1 \qquad (k\varepsilon\square)$$

onde $\alpha > 0$, $1 < Q \leqslant \infty$ e/ou $\alpha \geqslant 0$, $Q = 1$, então:

$$(2) \qquad (E)_{\theta,Q,J} \subset (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\alpha,Q,J}$$

DEMONSTRAÇÃO: Nas hipóteses que temos, segue que

$$(E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\alpha,Q,J} \cong (E_k | k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,J}$$

donde o resultado desejado.

3.4.5. LEMA: Sejam $E_k \in A_{\theta_k}(E)$, $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1$; $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant Q < \infty$; $\theta = \alpha(\theta_1 - \theta_0)$. Então:

$$(1) \qquad (E_1)_{\theta,Q,K} \subset (E_k | k\varepsilon\square)^{+}_{\alpha,Q,K}$$

Temos então o teorema que caracteriza a conexão existente entre alguns espaços de aproximação e outros espaços de interpolação.

3.4.6. TEOREMA: Sejam $0 \leqslant \theta_o = (\theta_o^1, \ldots, \theta_o^d) \leqslant \theta_k = (\theta_k^1, \ldots, \theta_k^d) \leqslant \theta_1 = (\theta_1^1, \ldots, \theta_1^d)$; $\theta_o < \theta_1$, $0 < \alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^d) < 1$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, $\theta = (1-\alpha)\theta_o + \alpha\,\theta_1$; $\mathbb{E} = (E_k | k \varepsilon \square)$ uma família de espaços de aproximação pertencentes às classes $A_{\theta_k}(E)$. Então:

(1) $(E)_{\theta,Q,J} = (E_k | k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,J} = (E_k | k\varepsilon\square)_{\alpha,Q,K} = (E)_{\theta,Q,K}$

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Teorema 2.4.4.; do Lema 3.4.1, Lema 3.4.3. e do Teorema 3.2.3.

3.4.7. COROLÁRIO: Se além das hipóteses do Teorema 3.4.6 aceitarmos que

(1) $E_o \subset E_k \subset E_1$

para todo $k \ \varepsilon \ \square$, teremos:

(2) $(E)_{\theta,Q,J} = (E_k | k\varepsilon\square)^+_{\alpha,Q,J} = (E_k | k\varepsilon\square)^+_{\alpha,Q,K} = (E)_{\theta,Q,K}$

3.4.8. TEOREMA: Sejam $0 \leqslant \theta_o = (\theta_o^1, \ldots, \theta_o^d) \leqslant \theta_k = (\theta_k^1, \ldots, \theta_k^d) \leqslant \theta_1 = (\theta_1^1, \ldots, \theta_1^d)$; $\theta_o < \theta_1$; $0 < \alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^d) < 1$; $\theta = (1-\alpha)\theta_o + \alpha\,\theta_1$ e $\mathbb{E} = (E_k | k\varepsilon\square)$ uma família de espaços de aproximação pertencentes às classes $A_{\theta_k}(E)$, $k \ \varepsilon \ \square$. Então:

(1) $F \ \varepsilon \ A_\theta^k(E)$ SEE $F \ \varepsilon \ K\ (\alpha;E)$

(2) $F \ \varepsilon \ A_\theta^J(E)$ SEE $F \ \varepsilon \ J\ (\alpha;E)$

(3) $F \ \varepsilon \ A_\theta(E)$ SEE $F \ \varepsilon \ K\ (\alpha;E) \cap J(\alpha;E)$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 3.4.6, temos que

$$(E)_{\theta,\infty,K} = (E_k \mid k \varepsilon \square)_{\alpha;\infty;K} \quad .$$

Pelo Lema 2.5.2. e pelo Lema 3.3.2.:

$$F \; \varepsilon \; A_\theta^K(E) \qquad \text{SEE} \qquad F \subset (E)_{\theta,\infty,K}$$

$$F \; \varepsilon \; K(\alpha;E) \qquad \text{SEE} \qquad F \subset (E_k \mid k\varepsilon\square)_{\alpha;\infty;K}$$

donde o resultado desejado para a demonstração de (1). A demonstração de (2) é análoga e a de (3) segue de (1) e (2).

CAPÍTULO 4

A DUALIDADE NOS ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO

O objetivo neste Capítulo é obter a conexão entre os duais dos espaços de aproximação introduzidos no Capítulo 3 e os duais dos espaços de interpolação estudados no Capítulo 2. Para isso seguiremos as idéias de Butzer-Scherer [14].

Para a obtenção da caracterização explícita do dual do espaço de aproximação $(X)_{\theta,Q}$ foi necessária a obtenção de teoremas duais do tipo Jackson e Bernstein assim como a respectiva equivalência. Um lema fundamental foi obtido no contexto quando mostramos que uma desigualdade de Jackson para a melhor aproximação se converte em uma desigualdade dual do tipo Bernstein e que uma desigualdade Bernstein converte-se em uma desigualdade do tipo Jackson para a melhor dual. Estas desigualdades nos mostram um fato típico observado em todo o Capítulo no qual conceitos são trocados e propriedades invertidas quando passados à versão dual.

4.1. PRELIMINARES SOBRE A TEORIA DE APROXIMAÇÃO

4.1.1. Seja X um espaço de Banach e $\{Q_N | N \in \mathbb{N}^d\}$ uma escala múltipla de subespaços vetoriais fechados de X tal que:

(1) $$Q_N \subset Q_{N'}$$

se $N \leqslant N'$ e $Q_0 = \{0\}$.

Para todo $f \in X$, definimos a melhor aproximação de f por elementos de Q_N, como:

(2) $$E_N(f;X) \equiv \inf\{\|f-q_N\|_X \ ; \ q_N \in Q_N\} \quad .$$

Vamos assumir que a seguinte condição seja satisfeita:

(W_X) $$\lim_{N\to\infty} E_N(f;X) = 0 \qquad (f\in X)$$

Esta condição é equivalente a supor que vale um teorema do tipo do teorema de Weierstrass em X.

Uma consequência da condição (W_X) é que:

(3) $$\overline{\cup\{Q_N;N\in N^d\}} = X$$

4.1.2. DEFINIÇÃO: Diremos que Y é um espaço de aproximação de X, se

(1) $$\cup\{Q_N;N\in N^d\} \subset Y \subset X$$

Como a seguir nos restringiremos a espaços de aproximação Y, suporemos que vale

(W_Y) $$\lim_{N\to\infty} E_N(f;Y) = 0 \qquad (f\in Y)$$

A seguir definiremos duas propriedades que fazem uma conexão entre Y e X.

4.1.3. DEFINIÇÃO: Diremos que Y satisfaz à:

(J_θ) Desigualdade do tipo Jackson de ordem $\theta=(\theta_1,\theta_2) \geqslant 0$ se

(1) $$E_N(f,X) \leqslant C\ N^{-\theta} \quad E_N(f,Y) \qquad (f\varepsilon Y, N\varepsilon N^2)$$

(B_θ) Desigualdade do tipo Bernstein de ordem $\theta = (\theta_1,\theta_2) \geqslant 0$ se:

(2) $$\|q_N\|_Y \leqslant C\ N^\theta \|q_N\|_X \qquad (q_N\varepsilon Q_N, N\varepsilon N^2)$$

4.1.4. DEFINIÇÃO: Um espaço de aproximação Y é de ordem $\theta \geqslant 0$ se satisfaz às desigualdades J_θ e B_θ.

A fim de introduzir o conceito de melhor aproximação no espaço dual vamos introduzir uma importante interpretação da melhor aproximação $E_N(f;X)$.

Denotaremos por (Q_N,X) e (Q_N,Y) os subespaços vetoriais fechados de X e Y, respectivamente.

4.1.5. Dada uma sequência de subespaços vetoriais fechados $\{(Q_N;X)|N\varepsilon N^2\}$; consideremos a sequência de espaços quocientes a ela associada:

(1) $$\{X/(Q_N;X)|N\varepsilon N^2\} \quad .$$

Vamos interpretar a melhor aproximação de $f\varepsilon X$ por elementos de $(Q_N;X)$ como a norma da classe de equivalência $f + (Q_N;X)$ no espaço quociente $X/(Q_N;X)$.

Assim, se $\pi:X \to X/(Q_N;X)$ é a aplicação quociente, temos:

(2) $$\|\pi f\|_{X/(Q_N;X)} = E_N(f;X) \quad .$$

É muito comum identificarmos a classe de equivalência de f com a própria f e escrevemos então:

(3) $$\|f\|_{X/(Q_N;X)} = E_N(f,X)$$

4.2. ALGUMAS CONEXÕES ENTRE $(Q_N;X)$ E SEUS DUAIS

4.2.1. Como $(Q_N;X)' \cong X'/(Q_N;X)^{\perp}$ e $(Q_N;X)^{\perp} \cong (X/(Q_N;X))'$, temos que a norma de $f' \in X'/(Q_N;X)^{\perp}$ é dada por:

(1) $$E_N'(f';X') = \inf\{\|f'-q_N')\|_{X'};\quad q_N' \in (Q_N;X)^{\perp}\} \qquad (f' \in X')$$

ou seja

(2) $$E_N'(f';X') = \|f'\|_{X'/(Q_N;X)^{\perp}}$$

e em virtude dessas informações, podemos escrever que

(3) $$E_N'(f';X') = \sup\{\frac{|<f',q_N>|}{\|q_N\|_{(Q_N;X)}}\} \;;\; q_N \in (Q_N;X) \qquad (f' \in X')$$

e então

(4) $$\|q_N'\|_{(Q_N;X)} = \|q_N'\|_{(X/Q_N;X))'} = \sup\{\frac{|<q_N';f>|}{\|f\|_{X/(Q_N;X)}} \;;\; f \neq 0\}$$

e levando em consideração as informações dadas em 4.1.5, podemos escrever:

(5) $$\|q_N'\|_{(Q_N;X)^{\perp}} = \sup\{\frac{|<q_N';f>|}{E_N(f;X)} \;,\; f \in X,\; f \neq 0\}$$

Através das imersões canônicas de $(Q_N;X)$ e $X/(Q_N;X)$ em seus respectivos biduais temos, para $q_N \varepsilon (Q_N;X)$, que

(6) $$\|q_N\|_X = \sup\{\frac{|<f';q_N>|}{E'_N(f';X')} \;;\; f' \varepsilon X'\}$$

e, para $f \varepsilon X$,

(7) $$E_N(f;X) = \sup\{\frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{(Q_N;X)^\perp}} \;;\; q'_N \varepsilon (Q_N;X)^\perp\}$$

4.2.2. OBSERVAÇÃO: Um fato típico observado nas expressões de $E'_N(f';X')$ e $\|q_N\|_X$ e nas expressões de $E_N(f;X)$ e $\|q'_N\|_{(Q_N;X)^\perp}$ é aquele que mostra a troca entre esses elementos. Este fenômeno no qual conceitos são trocados e propriedades invertidas quando passadas à versão dual servirá como guia ao longo deste capítulo.

4.3. A CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO D_X

Construiremos nesta seção o espaço D_X com a propriedade de estar continuamente imerso em todos os espaços de aproximação $Y = Y_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$. Estudaremos algumas propriedades de D_X que serão utilizadas na seção seguinte.

4.3.1. Sejam $X_{\theta,Q}$ e $Y^k_{\theta,Q}$, onde $\theta = (\theta_1,\theta_2) \geqslant 0$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ e $k \varepsilon$ □, espaços de aproximação e façamos:

(1) $$D_X = \cap\,\{X_{\theta,Q} | \theta, Q\}$$

e

(2) $$D_{Y^k} = \cap\{Y^k_{\theta,Q} | \theta,Q\} \qquad (k \in \square) \quad .$$

Se tomarmos $F = Y^k$ no teorema 3.3.6 obteremos:

(3) $$(X)_{\theta,Q} \cong (Y^k)_{k.(\sigma-2\theta);Q}$$

para $0 < \theta < \sigma$; $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, $Y^{oo} = X$ e se tomarmos a família $(Y^k | k\in\square)$ de espaços de aproximação no teorema 3.4.6, obteremos:

(4) $$(X)_{\theta,Q} = (Y^k | k\in\square)_{\theta/\sigma,Q,K}$$

para $0 < \theta < \sigma$; $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, $X = Y^{oo}$.

4.3.2. LEMA: Os espaços D_X e D_{Y^k} definidos em 4.3.1. coincidem, para todo $k \in \square$.

DEMONSTRAÇÃO: Realmente; tomando $k = (1,1)$, temos que $x \in D_X$

(i) se e somente se $x \in (X)_{\sigma-\theta,Q}$,

(ii) se e somente se $x \in Y^{11}_{\theta,Q}$,

(iii) se e somente se $x \in \cap\, Y^{11}_{\theta,Q} = D_{Y^{11}}$,

para todo $\theta > 0$ e todo Q com $1 \leqslant Q \leqslant \infty$.

Para $k = (0,1)$ e $k = (1,0)$ temos uma demonstração análoga.

4.3.3. LEMA: Definindo

(1) $$D = \cap\, \{X_{R,\infty,K} | R \in N^2\}$$

temos que

(2) $$D = D_X \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \varepsilon D$. Assim, $x \varepsilon X_{R,\infty,K}$ para todo $R \varepsilon N_+^2$. Portanto:

$$\sup \{N^R E_N(x;X)\} < \infty \quad ,$$

para todo $R \varepsilon N_+^2$. Assim, para todo $\theta < R$ e para todo Q com $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, temos que

$$\|x\|_{(X)_{\theta,Q,K}} = \|N^\theta E_N(x)\|_{\ell_*^Q(N_+^2)} \leqslant C\|N^{\theta-R}\|_{\ell_*^Q(N_+^2)}$$

logo $x \varepsilon (X)_{\theta,Q,K}$ para todo θ, e para todo Q, donde $x \varepsilon D_X$.

Reciprocamente, se $x \varepsilon D_X$, então $x \varepsilon (X)_{\theta,Q}$, para todo $\theta \geqslant 0$, e, para todo Q com $1 \leqslant Q \leqslant \infty$, donde $x \varepsilon (X)_{\theta,\infty,K}$, para todo $\theta \geqslant 0$, e desse modo $x \varepsilon (X)_{R,\infty,K}$, para todo $R \varepsilon N^2$ e assim $x \varepsilon D$.

A demonstração está completa.

Em virtude do Lema 4.3.3, consideremos $f \varepsilon D_X$ e a família de semi normas

(3) $$\{\|f\|_{(X)_{R,\infty,K}} | R \varepsilon N_+^2\}$$

e definamos então

(4) $$\|f\|_{D_X} = \sup \{\|f\|_{(X)_{R,\infty,K}} | R \varepsilon N_+^2\} \quad .$$

A partir dessas definições, temos a seguinte proposição:

4.3.4. PROPOSIÇÃO: O espaço D_X munido da norma definida em 4.3.3. (4) é completo.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{f_m\}$ uma sequência de Cauchy em D_X. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in N$ tal que se $m,n \geqslant n_o$ temos que:

$$\|f_m - f_n\|_{D_X} < \varepsilon$$

donde

$$\|f_m - f_n\|_{(X)_{R,\infty,K}} < \varepsilon \qquad ,$$

para todo $R \in N^2_+$ e como cada $(X)_{R,\infty,K}$ é completo, existe para cada $R \in N^2$, uma $f \in (X)_{R,\infty,K}$ tal que

$$\|f_m - f\|_{(X)_{R,\infty,K}} < \varepsilon$$

e desse modo temos que $f \in D_X$ e

$$\|f_m - f\|_{D_X} < \varepsilon \qquad .$$

4.3.5. PROPOSIÇÃO: O espaço D_X é denso em Y^k para todo $k \in \square$.

DEMONSTRAÇÃO: Como para todo $k \in \square$, temos

$$\cup\{Q_N | N \in N^2\} \subset D_X \subset Y^k$$

então

$$Y^k = \overline{\cup\{Q_N \mid N \in \mathbb{N}^2\}}^{Y^k} \subset \overline{D_X}^{Y^k} \subset Y^k .$$

4.3.6. PROPOSIÇÃO: As topologias de D_X e X coincidem sobre cada $(Q_N;X)$ fixo.

DEMONSTRAÇÃO: Realmente, sobre cada $(Q_N;X)$ fixo, temos:

$$\| q_N \|_{D_X} = \sup_{0 \leqslant R \leqslant N} \{ \| q_N \|_{(X)_{R,\infty,K}} \}$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant R \leqslant N} \{ \sup_{0 \leqslant M \leqslant N} [M^R E_M(q_N;X)] \}$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant R \leqslant N} \{ \sup_{0 \leqslant M \leqslant N} [M^R \| q_N \|_X] \}$$

assim

$$\| q_N \|_{D_X} \leqslant N^N \| q_N \|_X$$

Reciprocamente, temos que

$$D_X \subset X .$$

4.4. A CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO D_X'

Nesta seção construiremos um processo de aproximação para elementos $f' \in D_X'$ em termos de uma "melhor aproximação dual", e, em virtude disto construiremos o espaço D_X' levando em consideração a coincidência das topologias de D_X e X sobre cada $(Q_N;X)$ fixo, como foi demonstrado em 4.3.6.

4.4.1. Construido o espaço D_X, consideremos agora o dual topológico D_X' com a topologia $\sigma(D_X', D_X)$ e $Y^k = Y_\sigma^k$ $(\sigma \geqslant 0)$ espaços de aproximação.

Desse modo

$$(1) \qquad X' \subset (Y^k)' \subset D_X' \quad .$$

Em virtude de 4.1.1 (1) e do fato que

$$(2) \qquad (Q_N; Y^k) \subset (Q_N; X) \qquad (k \varepsilon \square)$$

temos que se $M \leqslant N$, então

$$(3) \qquad (Q_N; X)^{\perp} \subset (Q_M; X)^{\perp}$$

e então temos as imersões:

$$(4) \qquad (Q_N; X)^{\perp} \subset \ldots \subset (Q_0; X)^{\perp} \equiv X' \subset (Y^k)' \subset D_X' \quad .$$

Como as expressões $E_N'(f'; X')$ definem uma melhor aproximação dual para elementos $f' \varepsilon X'$ e a nossa intenção e definir para $f' \varepsilon D_X'$; devemos extender o funcional $E_N'(f'; X')$ de X' para D_X'.

4.4.2. Em virtude da proposição 4.3.5. podemos restringir o domínio do funcional $f' \varepsilon D_X'$ ao subespaço $(Q_N; X)$ para obter:

$$(1) \quad \| f'|_{(Q_N;X)} \|_{(Q_N;X)'} = \sup \left\{ \frac{|\langle f'; q_N \rangle|}{\| q_N \|_{(Q_N;X)}} ; \ q_N \ \varepsilon \ (Q_N; X) \right\}$$

$$\equiv E_N'(f', X')$$

e definindo então

$$(2) \qquad E'_N(f';D'_X) \equiv \|f'\|_{(Q_N;X)'} \qquad (f' \varepsilon D'_X) .$$

teremos que $E'_N(f';D'_X)$ será a extensão procurada.

A seguir apresentaremos uma proposição que faz uma conexão entre as desigualdades de Jackson e Bernstein $(J_\sigma;B_\sigma)$ e as desigualdades duais de Bernstein e Jackson. Mais precisamente, mostraremos que uma desigualdade de Jackson para a melhor aproximação se converte em uma desigualdade dual de Bernstein e uma desigualdade de Bernstein converte-se em uma desigualdade de Jackson para a melhor aproximação dual.

4.4.3. PROPOSIÇÃO: Seja X um espaço de Banach, $(Y_k | k \varepsilon \mathbb{N})$ uma família de espaços de aproximação de X tal que Y_k seja de ordem $k.\sigma \geq 0$ com

$$(1) \qquad Y_k \subset X \qquad (k \varepsilon \mathbb{N})$$

e

$$(2) \qquad Y_k \subset Y_{k'} \qquad (k' \leq k)$$

(i) A desigualdade de Jackson (J_σ) é verdadeira se, e somente se, vale a desigualdade dual de Bernstein (B'_σ):

$$(3) \qquad \|q'_N\|_{Y'_k} \leq C\, N^{-k.\sigma} \|q'_N\|_{X'} \qquad (q'_N \varepsilon (Q_N;X)')$$

(ii) A desigualdade de Bernstein (B_σ) é verdadeira se, e somente se, vale a desigualdade dual de Jackson (J'_σ):

(4) $$\|f'\|_{(Q_N;X)'} \leq C\ N^{k.\sigma} \|f'\|_{(Q_N;Y_k)'} \qquad (k\varepsilon\square)$$

DEMONSTRAÇÃO PARA $k = (1,1)$: Suponhamos verdadeira a hipótese B'_σ. Assim:

$$\frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{X'}} \leq D\ N^{-\sigma}\ \frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{Y'_{11}}}$$

e tomando os supremos sobre todos os $q'_N \in (Q_N;X)^{\perp}$, teremos

$$E_N(f;X) = \sup\left\{\frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{X'}}\ ;\ q'_N \in (Q_N;X)^{\perp}\right\}$$

$$\leq D\ N^{-\sigma}\ \sup\left\{\frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{X'}}\ ;\ q'_N \in (Q_N;Y_{11})^{\perp}\right\}$$

donde

$$E_N(f;X) \leq D\ N^{-\sigma}\ E_N(f;Y_{11})$$

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, existe $q'_N \in (Q_N;Y_{11})^{\perp}$ tal que

$$E_N(f;Y_{11}) \leq (1+\varepsilon)\ \frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{Y'_{11}}}$$

e como por hipótese é verdadeira J_σ, teremos que

$$E_N(f;X) \leq C\ N^{-\sigma}\ (1+\varepsilon)\ \frac{|<q'_N;f>|}{\|q'_N\|_{Y'_{11}}}$$

e pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos o resultado.

DEMONSTRAÇÃO DE (ii) PARA k = (1,1): Consideremos verdadeira B_σ e $q_N \neq 0$. Então

$$\frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_X} \leqslant C\ N^\sigma\ \frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_{Y_{11}}}$$

e tomando o supremo sobre todos os $q_N \in (Q_N;X)$, obteremos:

$$\|f'\|_{(Q_N;X)'} \leqslant C\ N^\sigma\ \|f'\|_{(Q_N;Y_{11})'} \quad .$$

Reciprocamente, seja J'_σ verdadeira. Desse modo

$$\sup\{\frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_X}\ ;\ q_N \in (Q_N;X)\} \leqslant C\ N^\sigma\ \sup\{\frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_{Y_{11}}};\ q_N \in (q_N;Y_{11})$$

donde

$$\frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_X} \leqslant C\ N^\sigma\ \sup\ \{\frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_{Y_{11}}}\ ;\ q_N \in (Q_N;Y_{11})\}$$

para todo $q_N \in (Q_N;X)$, e, em particular para os $q_N \in (Q_N;Y_{11})$, temos que

$$\frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_X} \leqslant C\ N^\sigma\ \frac{|\langle f';q_N\rangle|}{\|q_N\|_{Y_{11}}}$$

e assim obtemos que

$$\|q_N\|_{Y_{11}} \leqslant D\ N^\sigma\ \|q_N\|_X \quad .$$

A seguir apresentaremos um lema que será utilizado na demonstração da equivalência entre os teoremas duais de Jackson e Bernstein.

4.4.4. LEMA: Seja X um espaço de Banach, $(Y_k | k \in \square)$ uma família de espaços de aproximação de X de ordem $k.\sigma \geqslant 0$, com

(1) $$Y_k \subset X \qquad (k \in \square)$$

e

(2) $$Y_k \subset Y'_k \qquad (k' \leqslant k)$$

Consideremos também $\theta > 0$ e $1 \leqslant Q \leqslant \infty$. Assim, se

(3) $$\{N^{-\theta} \| f' \|_{(Q_N;X)'}\} \in \ell^Q_*(N^2_+)$$

teremos que $f' \in Y'_{11}$ e além disso

(4) $$\{N^{\sigma-\theta} \| f' - f'_{X;n_1,0} - f'_{X;0,n_2} + f'_{X;n_1,n_2} \|_{Y'_{11}}\} \in \ell^Q_*(N^2_+)$$

onde $\sigma > \theta$ e $f'_{X;n_1,n_2}$ é definido tal que $M \geqslant N$:

(5) $$f'_{X;M}|_{(Q_N;X)} = f'_{X;N}$$

(6) $$\langle f'_{X;m_1,0}; q_N \rangle = 0$$

(7) $$\langle f'_{X;0,m_2}; q_N \rangle = 0$$

(8) $$f'_{X;0,0} \equiv 0$$

(9) $$\|f'\|_{(Q_N;X)'} = \|f'_{X;N}\|_{X'} \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: O funcional $f'_{X;k.N}$ $(k\varepsilon\square)$ existe em virtude do teorema de Hahn-Banach pois a restrição $f' \varepsilon D'_X$ a $(Q_N;X)$ é um funcional linear contínuo com $\|f'\|_{(Q_N;X)} < \infty$.

Consideremos as notações $q_t = q_{[t]}$; $f'_{X;t} = f'_{X;[t]}$ e $[t] = \max\{(n_1,n_2) \varepsilon N^2;\ n_i \leqslant t_i;\ i = 1,2\}$.

Tomemos agora o funcional $f'_{X;N}$ tal que:

$$<f'_{X;N};q_N> = <f';q_N> \qquad (q_N \varepsilon (Q_N;X))$$

e

$$\|f'_{X;N}\|_{X'} = \|f'\|_{(Q_N;X)'} \quad .$$

Denotemos por $\Delta^{11}_{11}\ f'_{X;\,t.2^k}$ a expressão:

$$\Delta^{11}_{11} f'_{X;t_2k} = \sum_{\ell=(\ell_1,\ell_2)\varepsilon\square} (-1)^{\ell_1+\ell_2} f'_{X,t_1 2^{\ell_1+k_1} t_2 2^{\ell_2+k_2}}$$

Em virtude da desigualdade dual de Bernstein, temos que

(10) $$\|\Delta^{11}_{11}\ f'_{X;t2^k}\|_{Y'_{11}} \leqslant C(t2^k)^{-\sigma}\ \|f'_{X;t2^{k+1}}\|_{X'}$$

e tomando $t_1 = t_2 = 1$, obteremos

$$\|\Delta^{11}_{11}\ f'_{X;2^k}\|_{Y'_{11}} \leqslant C\ 2^{-k.\sigma} \|f'_{X;2^{k+1}}\|_{X'}$$

e desse modo

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \|\Delta_{11}^{11} f'_{X;2^k}\|_{Y'_{11}} \leqslant C \sum_{k=-1}^{\infty} 2^{-k.\sigma} \|f'_{X;2^{k+1}}\|_{X'}$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\sigma} \|f'\|_{(Q_k;X)'}$$

$$= C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(\sigma-\theta)} [k^{-\theta} \|f'\|_{(Q_k;X)'}]$$

$$\leqslant C \sup_{k \in N_+^2} \{k^{-\theta} \|f'\|_{(Q_k;X)'}\} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(\sigma-\theta)} < \infty$$

donde concluimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{11}^{11} f'_{X;2^k}$$

é absolutamente somável e como Y'_{11} é completo, temos a existência de um elemento de Y'_{11} para o qual esta série converge. Em virtude das propriedades de $f'_{X;N}$, temos com $M > N$, que:

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{11}^{11} f'_{X;2^k}; q_{2^N} > =$$

$$= \lim_{M\to\infty} < f'_{X;2^{1+m_1}\,2^{1+m_2}} - f'_{X;2^{1+m_1},0} - f'_{X;0,2^{1+m_2}} + f'_{X;0,0}; q_{2^N} >$$

$$= \lim_{M\to\infty} < f'_{X;2^{M+1}}, q_{2^N} > = < f'_{X;2^N}; q_{2^N} > = < f'; q_{2^N} >$$

e desse modo temos que

$$f' = \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_{11}^{11} f'_{X;2^k}$$

sobre $(Q_N;X)$ para todo $N \in N^2$ e como $\cup \{Q_N; N \in N^2\}$ é denso em Y_{11}, temos que $f' \in Y'_{11}$ e

$$f' = \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_{11}^{11} f'_{X;2^k}$$

sobre todo Y'_{11}.

Em virtude de (10) e da desigualdade de Minkowski, temos que:

$$\| N^{\sigma-\theta} \| f' - f'_{X;n_1,0} - f'_{X;0,n_2} + f'_{X;n_1,n_2} \|_{Y'_{11}} \|_{\ell^Q_*(N^2_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \{ \sum_{n_2=0}^{\infty} [\sum_{n_1=0}^{\infty} (N^{\sigma-\theta} \| f' - f'_{X;n_1,0} - f'_{X;0,n_2} + f'_{X;n_1,n_2} \|_{Y'_{11}})^{q_1})]^{q_2/q_1} \}^{1/q_2}$$

$$\leqslant C \{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{n_2}^{n_2+1} [(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{n_1}^{n_1+1} (t^{\sigma-\theta} \| f' - f'_{X;t_1,0} - f'_{X;0,t_2} + f'_{X;t_1,t_2} \|_{Y'_{11}})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \}^{1/}$$

$$\leqslant C \{ \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} (t^{\sigma-\theta} \| f' - f'_{X;t_1,o} - f'_{X;0,t_2} + f'_{X;t_1,t_2} \|_{Y'_{11}})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \}^{1/q_2}$$

$$\leqslant C \{ \int_0 [\int_0^{\infty} (t^{-\theta} (\sum_{k=0}^{\infty} \| \Delta_{11}^{11} f'_{X;t_2 k} \|_{Y'_{11}} +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty} \| f'_{X;t_1 2^{1+k_1},0} - f'_{X;t_1 2^{1+k_1},1} - f'_{X;t_1 2^{k_1},0} + f'_{X;t_1 2^{k_1},1} \|_{Y'_{11}}$$

$$+ \sum_{k_2=0}^{\infty} \| f'_{X;0,t_2 2^{1+k_2}} - f'_{X;1,t_2 2^{k_2}} - f'_{X;0,t_2 2^{k_2}} + f'_{X;1,t_2 2^{1+k_2}} \|_{Y'_{11}} \cdot \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2}]^{1/q_2}$$

$$\leq C\{ \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} t^{\sigma-\theta} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \| f'_{X;t_1 2^{1+k_1}, t_2 2^{1+k_2}} \|_{Y'_{11}} +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty} \| f'_{X;t_1 2^{k_1+1};1} \|_{Y'_{11}} + \sum_{k_2=0}^{\infty} \| f'_{X;1,t_2 2^{1+k_2}} \|_{Y'_{11}})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \}^{1/q_2}$$

$$\leq C\{ \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} t^{\sigma-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \| f'_{X;t2^{1+k}} \|_{Y'_{11}})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \}^{1/q_2}$$

$$\leq C\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\sigma-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} (t2^k)^{-\sigma} \| f' \|_{(Q_{t2^{1+k}};X)'})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \}^{1/q_2}$$

$$\leq C\{ \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} t^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k.\sigma} \| f' \|_{(Q_{t2^{1+k}};X)'})^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}]^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \}^{1/q_2}$$

e tomando a mudança de variãveis $u = t.2^{1+k}$, teremos:

$$\leq C\{ \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} (u^{-\theta} \| f' \|_{(Q_u;X)'})^{q_1} \frac{du_1}{u_1}]^{q_2/q_1} \frac{du_2}{u_2} \}^{1/q_2}$$

$$\leq C \{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{n_2}^{n_2+1} [\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{n_1}^{n_1+1} (u^{-\theta} \| f' \|_{(Q_u;X)'})^{q_1} \frac{du_1}{u_1}]^{q_2/q_1} \frac{du_2}{u_2} \}^{1/q_2}$$

$$\leq C \{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{n_2}^{n_2+1} \int_{n_1}^{n_1+1} (u^{-\theta} \| f' \|_{(Q_u;X)'})^{q_1} \frac{du_1}{u_1}]^{q_2/q_1} \frac{du_2}{u_2} \}^{1/q_2}$$

e esta última expressão é dominada por

$$\{N^{-\theta}\|f'\|_{(Q_N;X)'}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)} \quad .$$

Para mostrar que

$$\|\{n_i^{\sigma_i-\theta_i}\|f'-f'_{X;n_i}\|_{Y'_i}\|_{\ell^{q_i}_*(N_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\ \|\{n_i^{-\theta_i}\|f'\|_{(Q_{n_i};X)'}\|_{\ell^{q_i}_*(N_+)}$$

onde $i = (1,0)$ ou $i = (0,1)$; basta fazer esta demonstração de modo semelhante àquela do caso uniparamétrico.

A seguir apresentaremos a equivalência entre os teoremas duais de Jackson e Bernstein.

4.4.5. TEOREMA: Seja $(Y_k | k\varepsilon\square)$ uma família de espaços de aproximação de X tal que a ordem de Y_k seja $k.\sigma \geqslant 0$;

(1) $$Y_k \subset X \qquad (k\varepsilon\square)$$

e

(2) $$Y_k \subset Y_{k'} \ ; \ Y_{oo} = X \qquad (k' \leqslant k)$$

admitindo os parâmetros $\theta > 0$; $1 \leqslant Q \leqslant \infty$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

(3) $\{N^{-k.\theta}\| f'\|_{(Q_{k.N};X)'}\} \in \ell_*^{|k.Q|}(N_+^{|k|})$

(4) $f' \in Y_k'$ e $\{N^{k.(\sigma-\theta)}K(N^{-k.\sigma};f',(Y_k'|k\in\square))\} \in \ell_*^{|k.Q|}(N_+^{|k|})$

onde $\theta < \sigma$, $k \in \square$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o caso $k = (1,1)$. Sejam $f'_{X;n_1,0} \in Y'_{1,0}$; $f'_{X;0,n_2} \in Y'_{0,1}$; $f'_{X;n_1,n_2} \in Y'_{11}$ e $f' \in Y'_{oo} = X'$ e façamos

$$f'_{oo} = f'_{X;n_1,n_2} \in X'$$

$$f'_{01} = f'_{X;0,n_2} - f'_{X;n_1,n_2} \in Y'_{0,1}$$

$$f'_{10} = f'_{X;n_1,0} - f'_{X;n_1,n_2} \in Y'_{1,0}$$

$$f'_{11} = f' - f'_{X;n_1,0} - f'_{X,0,n_2} + f'_{X;n_1,n_2} \in Y'_{11}$$

Desse modo $f' = \sum_{k\in\square} f'_k$ e

$$K(N^{-\sigma};f';(Y_k'|k\in\square)) \leqslant \sum_{k\in\square} N^{-k.\sigma}\|f_k'\|_{Y_k'}$$

assim

$$N^{\sigma-\theta}K(N^{-\sigma},f';(Y_k'|k\in\square)) \leqslant N^{\sigma-\theta}\|f'_{11}\|_{Y'_{11}} + N^{-\theta}\|f'_{oo}\|_{X'}$$

$$+ n_1^{-\theta_1} n_2^{-\theta_2}\|f'_{10}\|_{Y'_{10}} + n_1^{-\theta_1} n_2^{-\theta_2}\|f'_{01}\|_{Y'_{01}}$$

e em virtude do lema 4.4.4. nos casos $k = (1,0)$ e $k = (0,1)$,

temos que

$$\|\{n_1^{-\theta_1} n_2^{\sigma_2-\theta_2} \|f'_{X;0,n_2} - f'_{X;n_1,n_2}\|_{Y'_{10}}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C \; \|\{n_1^{-\theta_1} n_2^{-\theta_2} \|f'_{X;0,n_2}\|_{X'}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)}$$

$$\leqslant C \; \|\{N^{-\theta} \|f'_{X,N}\|_{X'}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)}$$

e analogamente, temos que

$$\|\{n_1^{\sigma_1-\theta_1} n_2^{-\theta_2} \|f'_{X;n_1,0} - f'_{X;n_1,n_2}\|_{Y'_{01}}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C \; \|\{N^{-\theta} \|f'_{X;N}\|_{X'}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)}$$

Novamente, pelo lema 4.4.4, temos ainda que:

$$\|\{N^{\sigma-\theta} \|f' - f'_{X,n_1,0} - f'_{X,0,n_2} + f'_{X,n_1,n_2}\|_{Y'_{11}}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C \; \|\{N^{-\theta} \; \|f'_{X;N}\|_{X'}\}\|_{\ell^Q_*(N^2_+)}$$

assim, temos concluido que (3) implica (4).

Reciprocamente, seja uma decomposição arbitrária de f':

$$f' = \sum_{k\in\square} f'_k$$

sendo $f'_k \varepsilon Y'_k$, $k \varepsilon \square$. Desse modo

$$\|f'\|_{(Q_N;X)'} \leqslant \sum_{k\varepsilon\square} \|f'_k\|_{(Q_N;X)'} \quad .$$

Em virtude da desigualdade de Jackson dual (J'_σ), temos

$$\|f'\|_{(Q_N;X)'} \leqslant C \sum_{k\varepsilon\square} N^{k.\sigma}\|f'_k\|_{Y'_k}$$

$$\leqslant C\ N^{\sigma}\{\|f'_{11}\|_{Y'_{11}} + n_1^{-\sigma_1}\|f'_{10}\|_{Y'_{10}} + n_2^{-\sigma_2}\|f'_{01}\|_{Y'_{01}} + N^{-\sigma}\|f'_{oo}\|_{X'}\}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis decomposições de f', vem:

$$\|f'\|_{(Q_N;X)'} \leqslant C\ N^{\sigma}\ K(N^{-\sigma};f';(Y_k|k\varepsilon\square))$$

donde o resultado desejado.

4.4.6. Consideremos finalmente a conexão existente entre os duais dos espaços de aproximação e os duais dos espaços de interpolação.

Já mostramos em 3.3.6 que

$$(X)_{\theta,Q} \cong (Y_k|k\varepsilon\square)_{\frac{\theta}{\sigma};Q,K}$$

e desse modo

$$[(X)_{\theta,Q}]' \cong [(Y_k|k\varepsilon\square)_{\frac{\theta}{\sigma};Q,K}]'$$

Como também já provamos no teorema 2.8.5 que

$$[(Y_k|k\varepsilon\square)_{\frac{\theta}{\sigma};Q}]' \cong (Y_k'|k\varepsilon\square)_{1-\frac{\theta}{\sigma};Q'}$$

temos como conclusão que:

$$[(X)_{\theta,Q}]' \cong (Y_k'|k\varepsilon\square)_{1-\frac{\theta}{\sigma};Q'}$$

Desde que a afirmação

$$f'\varepsilon Y_k' \text{ e} \{N^{k.(\sigma-\theta)} K(N^{-k.\sigma};f',(Y_k'|k\varepsilon\square))\} \varepsilon \ell_*^{|k.Q|}(N_+^{|k|})$$

é equivalente a

$$f' \varepsilon (Y_k'|k\varepsilon\square)_{1-\frac{\theta}{\sigma};Q'}$$

quando trocamos Q por Q', o teorema 4.4.5 fornece uma caracterização explícita para o dual do espaço de aproximação definido em 3.1.5.

Podemos desse modo concluir com o teorema:

4.4.7. TEOREMA: Para $0 < \theta < \sigma$, $1 \leqslant Q < \infty$, o dual de $(X)_{\theta,Q}$ é o espaço das distribuições $f' \varepsilon \mathcal{D}'(X)$ que satisfaz a uma das condições equivalentes:

(1) $\{N^{-k.\theta}\|f'\|_{(Q_{k.N};X)'}\} \varepsilon \ell_*^{(k.Q)}(N_+^{|k|})$

(2) $f'\varepsilon Y_k'$ e $\{N^{k.(\sigma-\theta)}K(N^{-k.\sigma};f';(Y_k'|k\varepsilon\square))\} \varepsilon \ell_*^{(k.Q)}(N_+^{|k|})$

$(k \varepsilon \square)$.

CAPÍTULO 5

OS ESPAÇOS DE SOBOLEV-NIKOLSKII E DE BESOV-NIKOLSKII

Neste capítulo apresentamos os espaços de Sobolev-Nikolskii e de Besov-Nikolskii e intermediariamente introduzimos os espaços de Bessel-Nikolskii.

Inicialmente apresentamos as principais definições e proposições necessárias à construção do espaço das distribuições periódicas sobre o espaço R^d, assim como a caracterização deste espaço. A seguir definimos os multiplicadores de Fourier em $L^P_\pi(R^d)$ e apresentamos algumas de suas propriedades bem como o papel desempenhado pelos multiplicadores na identificação entre algunas espaços de Bessel-Nikolskii e de Sobolev-Nikolskii.

Na sequência apresentamos os operadores potenciais de Bessel e os utilizamos na construção dos espaços de Bessel-Nikolskii $H^S_p(T^d)$.

A seguir definimos os espaços de Sobolev-Nikolskii $W^M_p(T^d)$ e mostramos que os espaços $H^S_p(T^d)$ coincidem com os espaços $W^M_p(T^d)$ quando $S = M \varepsilon N^d$.

Os espaços de Besov-Nikolskii, com outra notação, $B^S_{P,Q}(R^d)$ foram introduzidos por Nikolskii [32] . Aqui desenvolveremos os espaços $B^S_{P,Q}(T^d)$ para o toro d-dimensional do ponto de vista de Peetre [34] quando é utilizada certa partição da unidade. Obtemos também os espaços $B^S_{P,Q}(T^d)$ através da interpolação da família $(H_p^{S_k}(T^d)\ ;\ k \varepsilon \square)$ e com este resultado o dual topológico de $B^S_{P,Q}(T^d)$ é obtido.

Finalmente apresentamos uma outra caracterização de $B^S_{P,Q}(T^d)$, desta vez através do módulo múltiplo de continuidade em $L^p_\pi(R^d)$ com a finalidade de recuperar os espaços inicialmente introduzidos por Nikolskii [32].

A utilização dos espaços $B^s_{p,q}(T^d)$ na teoria de aproximação desenvolvida anteriormente, será feita no próximo capítulo.

5.1. CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção apresentamos as principais definições e proposições que serão utilizadas neste capítulo.

5.1.1. DEFINIÇÃO: Consideremos uma função $f:R^d \to R$. Para cada $h \in R^d$ definimos a translação de f por

(1) $$(\tau_h f)(x) = f(x-h)$$

com $x \in R^d$.

5.1.2. DEFINIÇÃO: Seja $f \in \mathcal{D}'(R^d)$ uma distribuição. A translação da distribuição f, denotada por $\tau_h f$, é definida por

(1) $$(\tau_h f;\varphi) = (f;\tau_{-h}\varphi)$$

para toda $\varphi \in C^\infty_c(R^d)$. Aqui $(f;\varphi)$ significa o valor da distribuição f sobre a função φ.

5.1.3. DEFINIÇÃO: Uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(R^d)$ é periódica e de período $2\pi = (2\pi,\dots,2\pi)$ se

(1) $$\tau_{2\pi m} f = f \qquad ,$$

qualquer que seja $m \in Z^d$.

O espaço de todas as distribuições periódicas será denotado por $\mathcal{D}'_\pi(R^d)$.

5.1.4. Denotaremos por $\varepsilon_\pi(R^d)$ o espaço de todas as funções periódicas infinitamente diferenciáveis munido da topologia gerada pela família de seminormas $\{P_\alpha\}_{\alpha\in N^d}$ definida por

$$(1) \qquad P_\alpha(f) = \sup_{x\in T^d} |D^\alpha f(x)| \quad .$$

5.1.5. Denotaremos por $\varepsilon'_\pi(R^d)$ o espaço dos funcionais lineares contínuos definidos sobre $\varepsilon_\pi(R^d)$.

5.1.6. OBSERVAÇÃO: O conjunto $\mathcal{D}'_\pi(R^d)$ das distribuições periódicas é um subconjunto de $\mathcal{D}'(R^d)$, o espaço das distribuições. No teorema 5.1.15 identificaremos os espaços $\varepsilon'_\pi(R^d)$ e $\mathcal{D}'_\pi(R^d)$.

5.1.7. EXEMPLO: Seja $f \in L^1_{loc}(R^d)$. O funcional linear

$$(1) \qquad (f;\varphi) = \int_{T^d} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (\varphi \in \varepsilon_\pi(R^d))$$

define uma distribuição pertencente a $\varepsilon'_\pi(R^d)$, a qual é frequentemente denotada pela mesma letra f. Às vezes denotaremos (1) por

$$(1') \qquad (f,\varphi)_{T^d} = \int_{T^d} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (\varphi \in \varepsilon_\pi(R^d))$$

para chamar a atenção sobre o toro d-dimensional.

5.1.8. A convergência em $\varepsilon_\pi'(R^d)$. Uma sequência $\{f_n\}_{n\varepsilon N} \subset \varepsilon_\pi'(R^d)$ converge a $f \varepsilon \varepsilon_\pi'(R^d)$, no sentido de $\varepsilon_\pi'(R^d)$, e denotamos tal fato por

(1) $$f_n \to f \qquad (\varepsilon_\pi'(R^d))$$

se, para toda $\varphi \varepsilon \varepsilon_\pi(R^d)$ tivermos que

(2) $$(f_n,\varphi)_{T^d} \underset{n\to\infty}{\to} (f,\varphi)_{T^d} \quad .$$

5.1.9. DEFINIÇÃO: Definimos a transformada periódica de $\varphi \varepsilon \mathcal{D}(R^d)$, por:

(1) $$P\varphi = \sum_{m\varepsilon Z^d} \tau_{2\pi m} \varphi \quad .$$

Como φ tem suporte compacto a série em (1) só contém um número finito de termos não nulos.

5.1.10. PROPOSIÇÃO: Sejam φ, $\psi \varepsilon \mathcal{D}(R^d)$. Então:

(1) $$P\varphi \varepsilon \varepsilon_\pi(R^d)$$

(2) $$(P\varphi,\psi) = (\varphi,P\psi)$$

Vamos agora estender a noção de transformada periódica ao espaço $\varepsilon'(R^d)$ das distribuições de suporte compacto.

5.1.11. DEFINIÇÃO: Seja T uma distribuição a suporte compacto. Definimos a transformada periódica de T pela relação

(1) $$(PT,\varphi) = (T,P\varphi)$$

onde $\varphi \in \mathcal{D}(R^d)$.

5.1.12. PROPOSIÇÃO: (i) A aplicação

(1) $$P:\mathcal{D}(R^d) \to \varepsilon(R^d)$$

e a sua transposta

(2) $${}^tP:\varepsilon'(R^d) \to \mathcal{D}'(R^d)$$

são contínuas.

(ii) Para toda $T \in \varepsilon'(R^d)$ a distribuição PT é periódica e para $m = (m_1,\ldots,m_d) \in Z^d$ temos que

(3) $$P(\tau_{2\pi m}T) = \tau_{2\pi m}(PT) = PT$$

(iii) Para toda $F \in \mathcal{D}'(R^d)$ e toda $\varphi \in \mathcal{D}(R^d)$ temos:

(4) $$P(\varphi F) = (P\varphi)F$$

e para toda $f \in \varepsilon_\pi(R^d)$ e para toda $T \in \varepsilon'_\pi(R^d)$:

(5) $$P(fT) = f(PT)$$

A demonstração está em Vo-Khac Khoan, pag. 62, vol. II.

5.1.13. DEFINIÇÃO: Denomina-se partição periódica da unidade em $\mathcal{D}(R^d)$ a uma função $\theta \in \mathcal{D}(R^d)$ para a qual a transformada periódica é igual a 1, isto é:

$$(1) \qquad P\theta = 1$$

5.1.14. LEMA DA SOBREJETIVIDADE: Toda função $f \in \varepsilon_\pi(R^d)$ é a transformada periódica de uma função $\varphi \in \mathcal{D}(R^d)$ e toda distribuição periódica é a transformada periódica de uma distribuição a suporte compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in \varepsilon_\pi(R^d)$ e θ uma partição da unidade em $\mathcal{D}(R^d)$. Se definirmos $\varphi = \theta.f$ teremos que $\varphi \in \mathcal{D}(R^d)$ e além disso:

$$P\varphi = P(\theta.f) = (P\theta)f = f \quad .$$

Tomemos agora $F \in \mathcal{D}'_\pi(R^d)$, θ uma partição da unidade em $\mathcal{D}(R^d)$ e definamos $T = \theta.F$. Temos então que T é uma distribuição a suporte compacto e além disso:

$$PT = P(\theta.F) = (P\theta)F = F \quad .$$

5.1.15. TEOREMA: Os espaços $\varepsilon'_\pi(R^d)$ e $\mathcal{D}'_\pi(R^d)$ são algébrica e topologicamente isomorfos.

A demonstração está em Vo-Khac Khoan [48] vol. II, pag. 64.

5.1.16. DEFINIÇÃO: Uma sequência $\{a_m\}_{m\in Z^d}$ é rapidamente decrescente se para todo $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in N^d$ existir uma constante

$C > 0$ tal que

(1) $$|a_m| \leqslant C|m^{-\alpha}| \qquad (m \neq 0)$$

(Lembremos que $m^{-\alpha} = m_1^{-\alpha_1} \dots m_d^{-\alpha_d}$).

O conjunto das sequências rapidamente decrescentes será denotado por $s(Z^d)$. Munido da família de semi-normas $\{Q_\alpha\}_{\alpha \varepsilon N^d}$ definida por

(2) $$Q_\alpha(a) = \sup_{m \varepsilon Z^d} |m^\alpha a_m|$$

onde $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \varepsilon N^d$ e $a = \{a_m\}_{m \varepsilon Z^d}$; $s(Z^d)$ será um espaço vetorial topológico localmente convexo.

5.1.17. DEFINIÇÃO: Uma sequência $\{a_m\}_{m \varepsilon Z^d}$ é de crescimento lento se existem $\alpha \varepsilon N^d$ e $C > 0$ tal que

(1) $$|a_m| \leqslant C|m^\alpha| \qquad (m \neq 0)$$

O conjunto das sequências de crescimento lento será denotado por $r(Z^d)$.

5.1.18. TEOREMA: O espaço $r(Z^d)$ é isomorfo a $s'(Z^d)$ o dual topológico de $s(Z^d)$.

DEMONSTRAÇÃO: Ver [48] Vo-Khac Khoan, vol. II, pag. 59.

5.1.19. DEFINIÇÃO: Seja f uma distribuição periódica de período $2\pi = (2\pi,\dots,2\pi)$. Para cada $m \varepsilon Z^d$ definimos os coeficientes de Fourier de f por:

(1) $$\hat{f}_m = (f; e^{-i<m,.>})_{T^d}$$

onde $<m,x> = m_1x_1 + \dots + m_dx_d$, $m = (m_1,\dots,m_d) \in Z^d$ e $x = (x_1,\dots,x_d) \in R^d$.

A sequência $\hat{f} = \{\hat{f}_m\}_{m \in Z^d}$ será denominada a sequência dos coeficientes de Fourier de $f \in \varepsilon'_\pi(R^d)$.

Mostraremos que a série de Fourier $\sum_{m \in Z^d} \hat{f}_m e^{imx}$ de $f \in \varepsilon'_\pi(R^d)$ converge para f no sentido de $\varepsilon'_\pi(R^d)$.

Realmente, para toda $\phi \in \varepsilon_\pi(R^d)$, temos que:

$$(\sum_{-N \leq m \leq N} \hat{f}_m e^{imx}; \phi) = \sum_{-N \leq m \leq N} \hat{f}_m e^{imx}; \phi) = \sum_{-N \leq m \leq N} \hat{f}_m (e^{imx}; \phi) =$$

$$= \sum_{-N \leq m \leq N} (f; e^{-imx})(e^{imx}; \phi) = (f; \sum_{-N \leq m \leq N} (e^{imx}; \phi) e^{-imx})$$

$$= (f; \sum_{-N \leq m \leq N} \phi_m e^{imx}) = (f; S_N(\phi, x))$$

e esta última expressão converge a $(f;\phi)$ pois $S_N(\phi,x)$ converge a $\phi(x)$ no sentido de $\varepsilon_\pi(R^d)$, isto é, $D^\alpha S_N(\phi,x)$ converge uniformemente para $D^\alpha \phi(x)$ quando $N \to \infty$, para todo $\alpha \in N^d$.

O fato que $S_N(\phi,x)$ converge a $\phi(x)$ no sentido de $\varepsilon_\pi(R^d)$, depende do teorema abaixo que aparece demonstrado em Nikolskii [30].

5.1.20. TEOREMA: Seja $m = (m,m,\dots,m)$ um vetor cujas componentes são todas iguais a um número natural m e suponhamos que as derivadas parciais $D^{\alpha}f$ sejam contínuas para todo $\alpha \in N^d$ tal que $\alpha \leqslant m$ e que as derivadas parciais $D^{k.m}f \in L^2_{\pi}(R^d)$ para todo $k \in \square$. Então:

(1) $$|f(x) - S_N(f,x)| = 0\ (N^{(1/2)-m}) \qquad (N \to \infty)$$

5.1.21. Pelo teorema acima toda função $\phi \in \varepsilon_{\pi}(R^d)$ pode ser escrita como a soma de sua série de Fourier uniformemente convergente para ϕ, isto é,

(1) $$\phi(x) = \sum_{m \in Z^d} C_m\, e^{imx}$$

onde

(2) $$C_m = (2^{\pi})^{-d} \int_{T^d} \phi(t)\, e^{-itx}\, dt \qquad .$$

A série pode ser diferenciada termo a termo qualquer número de vezes, sendo que

(3) $$D^{\alpha}\ \phi(x) = \sum_{m \in Z^d} (im)^{\alpha}\, C_m\, e^{imx}$$

e a série à direita é uniformemente convergente para $D^{\alpha}\ \phi(x)$, para qualquer $\alpha \in N^d$.

Desse modo, se $\phi \in \varepsilon_{\pi}(R^d)$, então $S_N(\phi,x)$ converge para $\phi(x)$ no sentido de $\varepsilon_{\pi}(R^d)$.

5.1.22. A aplicação que associa a cada distribuição periódica f a correspondente sequência dos coeficientes de Fourier será denotada por

(1) $$A:\varepsilon_\pi'(R^d) \to C_{oo}(Z^d)$$

$$f \quad \to A(f) = \hat{f} = \{\hat{f}(k)\}_{k\in Z^d}$$

onde $C_{oo}(Z^d)$ é o conjunto das sequências finitas definidas sobre Z^d.

5.1.23. Uma inversa para a aplicação A não é trivial e apresentaremos algumas condições para a existência da mesma, antes porém, façamos uma digressão. Se $a = \{a_m\}_{m\in Z^d}$ é uma sequência numérica tal que a série $\sum_{m\in Z^d} a_m \exp(i<m,.>)$ converge para uma distribuição periódica u, então diremos que os coeficientes a_m são exatamente os coeficientes de Fourier de u e neste caso poderemos definir

(1) $$S:C_{oo}(Z^d) \to \varepsilon_\pi'(R^d)$$

$$a \quad \to S(a) = u$$

e esta aplicação é uma inversa para A.

A seguir apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que uma sequência seja a sequência dos coeficientes de Fourier de uma distribuição periódica.

5.1.24. LEMA: O espaço $\varepsilon_\pi(R^d)$ é isomorfo a $s(Z^d)$.

DEMONSTRAÇÃO: Ver [48] Vo-Khac Khoan, vol. II, pag. 68.

5.1.25. TEOREMA: O espaço das distribuições periódicas $\varepsilon_\pi'(R^d)$

é isomorfo ao espaço das sequências de crescimento lento $r(Z^d)$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo lema 5.1.20 temos que $\varepsilon_\pi(R^d)$ e $s(Z^d)$ são isomorfos mas pelo teorema 5.1.18, $r(Z^d)$ e $s'(Z^d)$ são isomorfos donde podermos concluir que $\varepsilon_\pi'(R^d)$ e $r(Z^d)$ são isomorfos.

Este teorema afirma que uma sequência $\{a_m\}_{m\varepsilon Z^d}$ é a sequência dos coeficientes de Fourier de uma distribuição periódica se, e somente se, $\{a_m\}_{m\varepsilon Z^d}$ é de crescimento lento.

5.2. MULTIPLICADORES DE FOURIER

Os multiplicadores de Fourier desempenham um papel fundamental neste capítulo e um resultado básico é uma variante do teorema de Mihlin-Lizorkin. Esta variante fornecerá condições para determinar se uma sequência é ou não um multiplicador de Fourier em $L^P_\pi(R^d)$.

5.2.1. DEFINIÇÃO: Seja $\{m_k\}_{k\varepsilon Z^d} \varepsilon\ r(Z^d)$, $1 \leqslant P = (p_1,\dots,p_d) \leqslant \infty$. Diremos que $\{m_k\}$ é um multiplicador de Fourier em $L^P_\pi(R^d)$, e denotaremos tal fato por $\{m_k\} \varepsilon\ M_P(T^d)$, se:

(1) $$S(\{m_k\}) * \varphi \ \varepsilon\ L^P_\pi(R^d)$$

para toda $\varphi \ \varepsilon\ L^P_\pi(R^d)$, onde S é a aplicação definida em 5.1.19, e se

(2) $$\|\{m_k\}\|_{M_P(T^d)} = \sup\{\|S(\{m_k\})*\varphi\|_{L^P_\pi(R^d)} ; \|\varphi\|_{L^P_\pi(R^d)} \leqslant 1\}$$

for finito.

5.2.2. OBSERVAÇÃO: Como $\varepsilon_\pi(R^d)$ é denso em $L_\pi^P(R^d)$, o operador T_m definido por $T_m(\varphi) = S(m) * \varphi$ pode ser estendido a todo o espaço $L_\pi^P(R^d)$ sem crescimento da norma.

5.2.3. PROPOSIÇÃO: Se $1 \leqslant P = (p_1,\dots,p_d) \leqslant \infty$ e $P' = (p_1',\dots,p_d')$ é definido por $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j'} = 1$, $j = 1,2,\dots,d$, então

$$(1) \qquad M_P(T) = M_{P'}(T)$$

Além disso,

$$(2) \qquad M_1(T^d) = \{\{M_k\}_{k\varepsilon Z^d} \varepsilon\ r(Z^d) \mid \sum_{k\varepsilon Z^d} |m_k| < \infty\}$$

e

$$(3) \qquad \|\{m_k\}\|_{M_1(T^d)} = \sum_{k\varepsilon Z^d} |m_k|$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{m_k\}_{k\varepsilon Z^d} \varepsilon\ M_P(T^d)$, φ, $\psi\ \varepsilon\ \varepsilon_\pi(R^d)$. Assim, pela desigualdade de Hölder (-Benedek-Panzone) para normas mistas, temos:

$$|S(\{m_k\}) * \varphi * \psi(0)| = |S(\{m_k\}) * \psi * \varphi(0)|$$

$$\leqslant \|S(\{m_k\}) * \psi\|_{L_\pi^{P}} \cdot \|\varphi\|_{L_\pi^{P'}}$$

$$\leqslant \|\{m_k\}\|_{M_P(T^d)} \|\psi\|_{L_\pi^P} \|\varphi\|_{L_\pi^{P'}}$$

e tomando o supremo sobre todas as ψ para as quais $\|\psi\|_{L^P_\pi} = 1$, vem que:

$$(4) \qquad \|S(\{m_k\}) * \varphi\|_{L^P_\pi} \leq \|\{m_k\}\|_{M_p(T^d)} \|\varphi\|_{L^P_\pi}$$

e tomando o supremo em (4) com $\|\varphi\|_{L^P_\pi} = 1$ tem que:

$$\|\{m_k\}\|_{M_{p'}(T)} \leq \|\{m_k\}\|_{M_p(T)}$$

Finalmente, trocando os papéis de φ e ψ obtemos a desigualdade inversa.

5.2.4. PROPOSIÇÃO: Sejam $1 \leq p_0^j, p_1^j \leq \infty$ e consideremos a família $\{P_k = (p^1_{k_1}, p^2_{k_2}, \ldots, p^d_{k_d}) \mid k \in \square\}$. Se

$$(1) \qquad \{m_n\}_{n \in Z^d} \in \bigcap_{k \in \square} M_{P_k}(T^d)$$

então

$$(2) \qquad \{m_n\}_{n \in Z^d} \in M_P(T^d)$$

para todo $P = (p^1, p^2, \ldots, p^d)$ tal que $(p^j)^{-1} = (1-\theta^j)(p_0^j)^{-1} + \theta^j(p_1^j)^{-1}$ $0 < \theta^j = (\theta_1^j, \theta_2^j, \ldots, \theta_d^j) < 1$ e $j = 1,2,\ldots,d$. Além disso

$$(3) \qquad \|\{m_n\}\|_{M_P} \leq \prod_{k \in \square} \|\{m_n\}\|^{\theta(k)}_{M_{P_k}}$$

onde $\theta(k) = \prod_{j=1}^{d} (1-k_j+(-1)^{1+k_j}\theta_j)$ e $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \square$.

Observemos que quando d = 2 a desigualdade (3) fica da forma:

$$\|\{m_n\}\|_{M_P} \leq \|\{m_n\}\|_{M_{P_{00}}}^{(1-\theta_1)(1-\theta_2)} . \|\{m_n\}\|_{M_{P_{10}}}^{\theta_1(1-\theta_2)} . \|\{m_n\}\|_{M_{P_{01}}}^{(1-\theta_1)\theta_2} . \|\{m_n\}\|_{M_{P_{11}}}^{\theta_1\theta_2}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varphi \in \varepsilon_{\pi}(R^d)$ e T_m definido por

$$T_m(\varphi) = S(\{m_k\}) * \varphi \quad .$$

Se $(m_k) \in \bigcap_{k\varepsilon\square} M_{P_k}$, segue que

$$T_m : L_{\pi}^{P_k}(R^d) \to L_{\pi}^{P_k}(R^d)$$

é um operador contínuo qualquer que seja $k \in \square$. Pelo teorema de Riesz-Thorin para 2^d espaços L_{π}^{P} (ver Fernandez [20]), segue que

$$T_m : L_{\pi}^{P}(R^d) \to L_{\pi}^{P}(R^d)$$

é um operador linear contínuo, o que garante que $\{m_k\} \in M_P(T^d)$.

Finalmente, a estimada (3) segue de Bertolo-Fernandez [04].

5.2.5. PROPOSIÇÃO: Se $1 < P = (p_1,\ldots,p_d) < Q = (q_1,\ldots,q_d) \leq 2$, então

(1) $$M_1(T) \subset M_P(T) \subset M_Q(T) \subset M_2(T)$$

A demonstração segue de 5.2.4 (3).

O lema seguinte é a contra parte periódica de um resultado bem conhecido (Ver Bergh-Löfström [03]).

5.2.6. LEMA: Sejam $\alpha \in N_+$, $m \in L^2_\pi(R)$ e $D^\alpha m \in L^2_\pi(R)$. Então, $A(m) \in M_p(T)$ se $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e além disso

(1) $$\|A(m)\|_{M_p(T)} \leqslant C\|m\|^{1-\theta}_{L^2_\pi(R^1)} \|D^\alpha m\|^\theta_{L^2_\pi(R^1)}$$

onde $2.\alpha.\theta = 1$ e A é a aplicação definida em 5.1.19 (2).

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\alpha \in N_+$, $m \in L^2_\pi(R)$ e $D^\alpha m \in L^2_\pi(R)$. Desse modo, a aplicação A define uma sequência $A(m) = \{\hat{m}(k)\}_{k \in Z}$ que é a sequência dos coeficientes de Fourier de m. Em virtude da Proposição 5.2.5 temos que $M_1(T) \subset M_p(T)$ se $1 < P < 2$ e sendo assim bastará estimarmos a expressão

$$\|A(m)\|_{M_1(T)}$$

A idéia é comum e consiste em separar a série em uma parte limitada e outra não limitada.

Realmente, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{|k| \leqslant \lambda} |\hat{m}(k)| \leqslant C^{\frac{1}{2}} \|A(m)\|_{\ell^2(Z^1)}$$

e pela identidade de Parseval

$$\sum_{|k| \in \lambda} |\hat{m}(k)| \leqslant C\, \lambda^{1/2} \|m\|_{L^2_\pi(R^1)}$$

Também temos que:

$$\sum_{|k|>\lambda} |\hat{m}(k)| = \sum_{|k|>\lambda} |k|^{-\alpha} |(ik)^{\alpha}\hat{m}(k)|$$

$$\leqslant C\, \lambda^{\frac{1}{2}-\alpha} \|A(D^{\alpha}m)\|_{\ell^2(Z)}$$

ou seja

$$\sum_{|k|>\lambda} |\hat{m}(k)| \leqslant C\, \lambda^{\frac{1}{2}-\alpha} \|D^{\alpha}m\|_{L^2_{\pi}(R^1)}$$

Se escolhermos $\lambda \in N_+$ tal que

$$\lambda \leqslant \|D^{\alpha}m\|_{L^2_{\pi}(R)}^{\frac{1}{\alpha}} \|m\|_{L^2_{\pi}(R)}^{\frac{-1}{\alpha}}$$

$$\vdots$$

seguirá que

$$\sum_{|k|\leqslant\lambda} |\hat{m}(k)| \leqslant C\|m\|^{1-\theta}_{L^2_{\pi}(R)} \|D^{\alpha}m\|^{\theta}_{L^2_{\pi}(R)}$$

e que

$$\sum_{|k|>\lambda} |\hat{m}(k)| \leqslant C\, \|m\|^{1-\theta}_{L^2_{\pi}(R)} \|D^{\alpha}m\|^{\theta}_{L^2_{\pi}(R)}$$

desde que $2\alpha\theta = 1$.

Assim, completando a demonstração temos que

$$\|A(m)\|_{M_p(T)} \leqslant \|A(m)\|_{M_1(T)} = \int_T |m(x)|\,dx$$

$$\leqslant C \sum_{n\varepsilon Z} |\hat{m}(n)| \leqslant C[(\sum_{|n|>\lambda} + \sum_{|n|\leqslant\lambda})|\hat{m}(n)|]$$

$$\leqslant C \|m\|^{1-\theta}_{L^2_\pi(R)} \|D^\alpha m\|^{\theta}_{L^2_\pi(R)}$$

Uma forma multidimensional deste lema pode ser apresentada na forma de sequências.

5.2.7. PROPOSIÇÃO: Sejam $\alpha_j \varepsilon N_+$; $j = 1,2,\ldots,d$; as sequências unidimensionais $\{m_{n_j}\}_{n_j\varepsilon Z} \varepsilon\ \ell^2(Z)$ e $\{(in_j)^{\alpha_j} m_{n_j}\}_{n_j\varepsilon Z} \varepsilon\ \ell^2(Z)$ com $i^2 = -1$. Se definirmos a sequência múltipla

$$(1) \qquad \{m_n\} = \{m_{n_1}.m_{n_2}\ldots m_{n_d}\} = \{\prod_{j=1}^{d} m_{n_j}\}$$

teremos que $\{m_n\}\ \varepsilon\ M_p(T^d)$ se $1 \leqslant P = (p_1,\ldots,p_d) \leqslant \infty$ e além disso

$$(2) \qquad \|\{m_n\}\|_{M_p(T^d)} \leqslant C \prod_{j=1}^{d} \|\{m_{n_j}\}\|^{1-\theta_j}_{\ell^2(Z)} \|\{n_j^{\alpha_j} m_{n_j}\}\|^{\theta_j}_{\ell^2(Z)}$$

onde $2\alpha_j\theta_j = 1$, $j = 1,2,\ldots,d$ e cada m_{n_j} satisfaz às hipóteses do Lema 5.2.6. Com

$$(3) \qquad A(m_n) = \prod_{j=1}^{d} m_{n_j} \quad .$$

5.2.8. OBSERVAÇÃO: Se $\{m_n\}_{n\varepsilon Z^d} \varepsilon M_p(T^d)$ e $m = S(\{m_n\})$, então:

$$(1) \qquad \|m(t.)\|_{M_p(T^d)} = \|m(.)\|_{M_p(T^d)} \qquad (t \neq 0)$$

Se $m \varepsilon M_p(T^1)$ então $m(<\lambda,.>) \varepsilon M_p(T^d)$ e

$$(2) \qquad \|m(<\lambda,.>)\|_{M_p(T^d)} = \|m(.)\|_{M_p(T^1)}$$

desde que $\lambda \varepsilon Z - \{0\}$.

As expressões acima significam que $M_p(T^d)$ é invariante sob transformações afins de T^d.

Para obtermos algumas propriedades do operador de Bessel que será apresentado em 5.3 assim como algumas propriedades dos multiplicadores apresentaremos um lema que faz uma conexão entre funções de $L^1(R^d)$ e de $L^1_\pi(R^d)$.

5.2.9. LEMA: Seja $g \varepsilon L^1(R^d)$ e definamos

$$(1) \qquad g_\pi(x) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(Pg)(x) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \sum_{m\varepsilon Z^d} g(x+2m\pi)$$

com $m = (m_1,\ldots,m_d) \varepsilon Z^d$. Então:

$$(2) \qquad g_\pi \;\varepsilon\; L^1_\pi(R^d)$$

$$(3) \qquad \|g_\pi\|_{L^1_\pi(R^d)} \leqslant \|g\|_{L^1(R^d)}$$

$$(4) \qquad (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{T^d} g_\pi(u)du = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{R^d} g(u)du$$

Se além disso $f \in L^P_\pi(R^d)$, com $1 \leq P = (p_1,\ldots,p_d) < \infty$;

$$(5) \quad (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{T^d} f(x-u)g(u)du = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{R^d} f(x-u)g(u)du \qquad \text{q.s.}$$

e para $f(x) = \exp(-ix)$. temos que

$$(6) \qquad \hat{g}_\pi(m) = \hat{g}(m)$$

para todo $m = (m_1,\ldots,m_d) \in Z^d$.

Para concluir este parágrafo enunciaremos dois resultados fundamentais da teoria de multiplicadores de $L^P_\pi(R^d)$. O primeiro deles é o teorema clássico devido a J. Marcinkiewicz (ver [28]). Para evitar problemas de notações apresentaremos o teorema de Marcinkiewicz somente no caso d = 2. Para uma discussão do caso geral ver Nikolskii [31].

5.2.10. TEOREMA DE MARCINKIEWICZ: Seja $\{\lambda_{m,n}\}_{\substack{m\in N\\ n\in N}}$ uma sequência numérica dupla tal que

$$(1) \quad \sum_{m=2^\alpha}^{2(2^\alpha-1)} \sum_{n=2^\beta}^{2(2^\beta-1)} |\lambda_{m,n}-\lambda_{m+1,n}-\lambda_{m,n+1}+\lambda_{m+1,n+1}| + \sum_{m=2^\alpha}^{2(2^\alpha-1)} |\lambda_{m,2^\beta+1}-\lambda_{m+1,2^\beta+1}|$$

$$+ \sum_{n=2^\beta}^{2(2^\beta-1)} |\lambda_{2^\alpha,n}-\lambda_{2^\alpha,n+1}| + |\lambda_{2(2^\alpha-1),2(2^\beta-1)}| \leq M$$

onde $(\alpha,\beta) \in N^2$ e M independe de α e β; então

$$\{\lambda_{m,n}\}_{(m,n)\in N^2} \in M_p(T^2) \qquad .$$

A demonstração encontra-se em Marcinkiewicz [28].

O seguinte teorema de multiplicadores sobre $L^p_\pi(R^d)$ é uma variante do teorema de Mihlin-Lizorkin para multiplicadores sobre $L^p(R^d)$.

5.2.11. TEOREMA: Seja $\lambda(x)$ uma função definida sobre R^d tal que suas derivadas $D^k\lambda$ sejam contínuas e que

$$|x^k D^k \lambda(x)| \leqslant M$$

para todo $k \in \square$. Então $\{\lambda(k)\}_{k\in Z^d}$ é um multiplicador em $L^p_\pi(R^d)$.

Se λ satisfaz às hipóteses acima, a sequência $\{\lambda(k)\}_{k\in Z^d}$ satisfaz às hipóteses do teorema de Marcinkiewicz (ver Nikolskii [31 , pg.]) o que nos garante que $\{\lambda(k)\}_{k\in Z^d} \in M_p(T^d)$ e desse modo pela definição 5.2.1 temos que

$$F = S(\{\lambda(k)\}_{k\in Z^d} * \varphi) \in L^p_\pi(R^d)$$

para toda $\varphi \in L^p_\pi(R^d)$. Assim, esta função pode ser representada pela sua série de Fourier, isto é,

$$F \sim \sum_{k\in Z^d} \lambda(k)\, \hat{\varphi}(k)\, e^{ik(.)}$$

e então para todo $k \in Z^d$:

$$\hat{F}(k) = \lambda(k)\ \hat{\varphi}(k) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)_\pi(k)\ \hat{\varphi}(k)$$

donde

$$F = (\mathcal{F}^{-1}\lambda)_\pi * \varphi$$

onde $(\mathcal{F}^{-1}\lambda)_\pi = S(\{\lambda(k)\}_{k \in Z^d})$.

A penúltima expressão nos dá a forma geral que deve ter a função F conhecida a função λ que satisfaz às hipóteses do Teorema 5.2.10.

5.3. OS ESPAÇOS $W_P^M(T^d)$ e $H_P^S(T^d)$

Definimos aqui os espaços de Sobolev-Nikolskii $W_P^M(T^d)$ e os espaços de Bessel-Nikolskii $H_P^S(T^d)$.

5.3.1. DEFINIÇÃO: Consideremos $M = (m_1, \ldots, m_d) \in N^d$ um multi-índice fixo e $1 \leq P = (p_1, \ldots, p_d) \leq \infty$. Definimos $W_P^M(T^d)$ como e espaço das $f \in \varepsilon'_\pi(R^d)$ para as quais

$$(1) \qquad D^\alpha f \in L_\pi^P(R^d)$$

para todo $\alpha \in N^d$ com $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \leq M = (m_1, \ldots, m_d)$.

A proposição seguinte é basica mas omitiremos a demonstração.

5.3.2. PROPOSIÇÃO: Os espaços $W_P^M(T^d)$ munidos da norma

$$(1) \qquad \|f\|_{W_p^M(T^d)} = \sum_{0\leq\alpha\leq M} \|D^\alpha f\|_{L_\pi^P(R^d)}$$

são completos.

Apresentaremos agora os operadores potenciais de Bessel necessários à construção dos espaços de Bessel-Nikolskii.

5.3.3. DEFINIÇÃO: Seja $f \in \varepsilon'_\pi(R^d)$. Definimos o operador de Bessel J^S, de ordem $S = (s_1,\ldots,s_d) \in R^d$, por

$$(1) \qquad \widehat{(J^S f)}(m) = \prod_{j=1}^{d} (1+m_j^2)^{s_j/2}\ \hat{f}(m)$$

onde $m = (m_1,\ldots,m_d) \in Z^d$.

Se tomarmos

$$(2) \qquad \widehat{(G^S)}(m) = \prod_{j=1}^{d} (1+m_j^2)^{s_j/2}$$

teremos que

$$(3) \qquad J^S f = G^S * f$$

e assim poderemos escrever que

$$(4) \qquad J^0 = I \quad ; \quad J^{R+S} = J^R \cdot J^S$$

se $S,\ R \in R^d$.

5.3.4. DEFINIÇÃO: Definimos $H_p^S(T^d)$ como o espaço das $f \in \varepsilon'_\pi(R^d)$ para as quais

(1) $$J^S f \in L_\pi^P(R^d)$$

onde $S = (s_1,\ldots,s_d) \in R^d$ e $1 \leqslant P = (p_1,\ldots,p_d) \leqslant \infty$.

5.3.5. TEOREMA: Seja $S = (s_1,\ldots,s_d) \in R^d$ e $1 \leqslant P = (p_1,\ldots,p_d) \leqslant \infty$. Então, $H_P^S(T^d)$ é um espaço completo quando munido da norma

(1) $$\|f\|_{H_P^S(T^d)} = \|J^S f\|_{L_\pi^P(R^d)}$$

5.4. SEQUÊNCIAS DE FUNÇÕES TESTES E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Nesta seçao apresentamos alguns lemas interligados com a construçao de sequências de funções testes as quais são largamente utilizadas no contexto. Propriedades dos espaços $H_P^S(T^d)$ são obtidas em função dessas sequências.

Ao final obtemos a identificação dos espaços $W_P^M(T^d)$ e $H_P^S(T^d)$ quando $S = M \in N^d$.

5.4.1. LEMA: Existe uma função $\theta \in \mathcal{S}(R)$ tal que:

(1) $$\operatorname{supp} \theta = \{x \in R \; ; \; 2^{-1} \leqslant |x| \leqslant 2\}$$

(2) $$\theta(x) > 0 \quad \text{se} \quad 2^{-1} < |x| < 2$$

(3) $$\sum_{m \in Z} \theta(2^{-m}x) = 1 \quad \text{se} \quad x \neq 0$$

A demonstração encontra-se em Bergh-Lofstrom [03], pag. 135.

5.4.2. Usando a função θ do lema anterior definimos as funções θ^m e ψ respectivamente por:

(1) $$\mathcal{F}(\theta^m)(x) = \theta(2^{-m}x) \qquad (n \in Z)$$

(2) $$\mathcal{F}(\psi)(x) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \theta(2^{-m}x) \qquad (m \in Z)$$

Consideremos agora a sequência periodizada de funções $(\theta_\pi^m)_{m\in Z}$ em $\varepsilon_\pi(R)$. Temos então, por 5.2.9, que

(3) $$\mathcal{F}(\theta_\pi^m)(n) = \theta(2^{-m}n) \qquad (n \in Z)$$

Tomemos $M = (m_1,\dots,m_d) \in N^d$ e $N = (n_1,\dots,n_d) \in Z^d$, e, para cada $k \in \square$ com $|k| = 1$ consideremos as sequências unidimensionais $(\theta_\pi^{k.m}(|k.N|))_{M\in N^d}$ obtidas do mesmo modo que a sequência $(\theta_\pi^m)_{m\in Z}$. (Observemos que no caso $d = 2$ temos duas sequências $(\theta_\pi^{(m_1,0)})_{m_1\in Z}$ e $(\theta_\pi^{(0,m_2)})_{m_2\in Z}$) onde $k{\bullet}z = (k_1z_1,\dots,k_dz_d)$ e $|k.z| = k_1z_1 + \dots + k_dz_d$, mas sempre lembrando que $|k| = 1$.

Definimos uma sequência múltipla $(\theta_\pi^N)_{N\in N^d}$ por

(4) $$\theta_\pi^M(N) = \prod_{\substack{k\in\square\\ |k|=1}} \theta_\pi^{k.M}(|k.N|)$$

onde $N = (n_1,\dots,n_d) \in Z^d$.

5.4.3. LEMA: Seja $f \in \varepsilon_\pi'(R^d)$ e $(\theta_\pi^N)_{N\in N^d}$ a sequência de funções definida em 5.4.2. Se $\theta_\pi^N * f \in L_\pi^P(R^d)$ e $1\leqslant P=(p_1,\dots,p_d)\leqslant\infty$, então

(1) $$\|J^{S'}(\theta_\pi^N) * f\|_{L_\pi^P} \leqslant C\ 2^{N.S'}\ \|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}$$

onde $S' = (s'_1, \dots, s'_d) \in R^d$.

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $N \in N^d$, temos que

$$\theta_\pi^N * f = \sum_{-1 \leqslant L \leqslant 1} \theta_\pi^{N+L} * \theta_\pi^N * f$$

com $L = (\ _1, \dots, \ _d) \in Z^d$. Assim:

$$\|J^{S'}\ \theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P} = \|\sum_{-1 \leqslant L \leqslant 1} J^{S'}\ \theta_\pi^{N+L} * \theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}$$

$$\leqslant \sum_{-1 \leqslant L \leqslant 1} \|J^{S'}\ \theta_\pi^{N+L} * \theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}$$

$$= \sum_{-1 \leqslant L \leqslant 1} \|S(A(J^{S'}\theta_\pi^{N+L}))\|_{L_\pi^P} \|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}$$

$$\leqslant \sum_{-1 \leqslant L \leqslant 1} \|A(J^{S'}(\theta_\pi^{N+L}))\|_{M_p(T^d)} \|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}$$

$$\leqslant C\ 2^{N.S'}\ \|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}$$

pois

$$\|A(J^{S'}\theta_\pi^{N+L})\|_{M_p(T^d)} \leqslant C\ 2^{N.S'}$$

para todo $L \in Z^d$ com $-1 \leqslant L \leqslant 1$.

5.4.4. PROPOSIÇÃO: Se $S = (s_1,\dots,s_d) \leqslant 0$ e $1 \leqslant P = (p_1,\dots,p_d) < \infty$, então, J^S é um operador contínuo em $L^P_\pi(R^d)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in L^P_\pi(R^d)$. Assim:

$$\| J^S f\|_{L^P_\pi} = \| J^S(\Sigma_N\ \theta^N_\pi * f)\|_{L^P_\pi} \leqslant \Sigma_N \| J^S(\theta^N_\pi * f)\|_{L^P_\pi}$$

$$\leqslant C(\Sigma_N\ 2^{N.S})\ \|\theta^N_\pi * f\|_{L^P_\pi} \quad C(\Sigma_N\ 2^{N.S})\|f\|_{L^P_\pi}$$

donde o resultado desejado, pois $N.S < 0$.

5.4.5. PROPOSIÇÃO: Se $S' = (s'_1,\dots,s'_d) \leqslant S'' = (s''_1,\dots,s''_d)$ e $1 \leqslant P = (p_1,\dots,p_d) \leqslant \infty$. Então

(1) $$H^{S''}_P(T^d) \subset H^{S'}_P(T^d)$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $S'-S'' < 0$, segue de 5.4.3. que

$$\| f\|_{H^{S'}_P} = \| J^{S'}_P f\|_{L^P_\pi} = \| J^{S'-S''} J(S''f)\|_{L^P_\pi} \leqslant C\ \|f\|_{H^{S''}_P} .$$

5.4.6. TEOREMA: Seja $S' = (s'_1,\dots,s'_d) \in R^d$. Então a aplicação

(1) $$J^{S'} : H^S_P(T^d) \to H^{S-S'}_P(T^d)$$

é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO: Considerando $S-S' < 0$, teremos que

$$\|J^{S'}(f)\|_{H_P^{S-S'}(T^d)} = \|J^{S-S'}(J^{S'}f)\|_{L_\pi^P} \leq C\|J^S f\|_{L_\pi^P} \leq C\|f\|_{H_P^S(T^d)}$$

5.4.7. PROPOSIÇÃO: Se $\alpha \in N^d$ é tal que $\alpha \leq S$ e $1 < P = (p_1,\dots,p_d) < \infty$, então $D^\alpha J^S$ é um operador contínuo em $L_\pi^P(R^d)$. Além disso,

$$(1) \qquad J^{2\alpha} \equiv J^{(2\alpha_1,\dots,2\alpha_d)} = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^{\alpha_1} \dots \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right)^{\alpha_d}$$

para todo $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in N^d$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\lambda(x) = (ix)^\alpha \prod_{j=1}^{d} (1+x_j^2)^{-s_j/2}$ com $x = (x_1,\dots,x_d) \in R^d$. Esta função satisfaz às hipóteses do Teorema 5.2.11 e então:

$$\{\lambda(k)\}_{k \in Z^d} \in M_P(T^d) \qquad .$$

Mas

$$\lambda(k) = \prod_{j=1}^{d} (ik_j)^{\alpha_j} (1+k_j^2)^{-s_j/2}$$

para todo $k = (k_1,\dots,k_d) \in Z^d$, o que implica que

$$D^\alpha J^S f(k) = C\ \hat{\lambda}(k)\hat{f}(k)$$

para todo $k \in Z^d$ e para toda $f \in L_\pi^P(R^d)$. Assim, o operador $D^\alpha J^S : L^P(R^d) \to L_\pi^P(R^d)$ definido para todo $\alpha \leq S$ por:

$$(D^{\alpha}J^{S})f = C(S(\{\lambda(k)\}_{k\varepsilon Z^d})*f) = C(\lambda * f)$$

é contínuo.

5.4.8. TEOREMA: Se $M = (m_1,\ldots,m_d) \varepsilon N^d$ e $1 < P = (p_1,\ldots,p_d) < \infty$, então:

$$(1) \qquad H_P^M(T^d) = W_P^M(T^d) \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \varepsilon H_P^M(T^d)$. Assim, existe $g \varepsilon L_\pi^P(R^d)$ tal que $J^M f = g$, donde $f = J^{-M}g$. Desse modo, para $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \varepsilon N^d$ tal que $\alpha \leqslant M$,temos pela Proposição 5.4.7 que $D^\alpha J^M$ é um operador contínuo em $L_\pi^P(R^d)$ e assim

$$\| D^\alpha f\|_{L_\pi^P} = \| D^\alpha J^{-M} g\|_{L_\pi^P} \leqslant C\| g\|_{L_\pi^P} \leqslant C\| J^M f\|_{L_\pi^P} = C\| f\|_{H_P^M(T^d)}$$

donde concluimos que

$$\| f\|_{W_P^M(T^d)} \leqslant C\| f\|_{H_P^M(T^d)}$$

Reciprocamente, consideremos $f \varepsilon W_P^M(T^d)$. Assim, para todo $\alpha \varepsilon N^d$ com $\alpha \leqslant M$ temos que

$$D^\alpha f \varepsilon L_\pi^P(R^d) \quad .$$

Agora, dados $M = (m_1,\ldots,m_d) \varepsilon N^d$ e $S = (s_1,\ldots,s_d) \varepsilon N^d$ existe $R = (r_1,\ldots,r_d) \geqslant 0$, $R \varepsilon N^d$ tal que $M + R = 2S$ e considerando $\alpha \leqslant R \leqslant 2S$ teremos novamente pela Proposição 5.4.7 que $D^\alpha J^{-R} f \varepsilon L_\pi^P(R^d)$. Agora, como

$$J^M f = J^{2S-R} f = J^{2S}(J^{-R} f)$$

seguirá por 5.4.7(1) que

$$\| J^M f\|_{L^P_\pi} = \| \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^{s_j} J^{-R} f\|_{L^P_\pi}$$

$$\leqslant C \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant S} \| D^{2\alpha}(J^{-R} f)\|_{L^P_\pi}$$

$$\leqslant C \; \| f\|_{W^M_P(T^d)} \qquad .$$

5.5. OS ESPAÇOS DE BESOV-NIKOLSKII

Os espaços de Besov-Nikolskii foram introduzidos por Nikolskii |32| e correspondem aos espaços de Lipschitz com diferenças parciais e mistas ou módulos de continuidade parciais e mistos. Desenvolveremos aqui esses espaços para o toro d-dimensional sob o ponto de vista de Peetre |34|

Propriedades dos espaços $B^S_{P,Q}(T^d)$ que serão definidos a seguir são obtidos quando fazemos uso das proposições da seção 5.4.

5.5.1. DEFINIÇÃO: Sejam $S = (s_1, \ldots, s_d) \in R^d$ e $1 < P = (p_1, \ldots, p_d) \leqslant \infty$. Definimos $B^S_{P,Q}(T^d)$ como o espaço de todas as $f \in \mathcal{E}'_\pi(R^d)$ para as quais

$$(1) \qquad \{2^{N.S} \| \theta^N_\pi * f\|_{L^P_\pi}\} \in \ell^Q(N^d)$$

5.5.2. PROPOSIÇÃO: O espaço $B^S_{P,Q}(T^d)$ é completo quando munido da norma

$$(1) \quad \|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} = \|\{2^{N.S}\|\theta^N_\pi * f\|_{L^P_\pi}\}_{N\in N^d}\|_{\ell^Q(N^d)} \quad .$$

5.5.3. TEOREMA: Seja $R = (r_1,\ldots,r_d) \in R^d$. Então, o operador

$$(1) \qquad J^R : B^S_{P,Q}(T^d) \to B^{S-R}_{P,Q}(T^d)$$

é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO:

$$\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} = \|\{2^{N.S}\|\theta^N * f\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$= \|\{2^{N.S}\|\theta^N_\pi * J^{-R}(J^R f)\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e pelo lema 5.4.3 temos que

$$\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} \leqslant \|\{2^{S.N}2^{-R.N}\|\theta^N_\pi * J^R f\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$= \|\{2^{N.(S-R)}\|\theta^N_\pi * J^R f\|_{L^P_\pi(R^d)}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \|J^R f\|_{B^{S-R}_{P,Q}(T^d)}$$

Além disso

$$\|J^R f\|_{B^{S-R}_{P,Q}(T^d)} = \|\{2^{N.(S-R)}\|\theta^N_\pi * J^R f\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

e novamente pelo lema 5.4.3 temos que:

$$\|J^R f\|_{B^{S-R}_{P,Q}(T^d)} \leqslant C\|\{2^{N.(S-R)}2^{N.R}\|\theta^N_\pi * f\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$= C\|\{2^{N.S}\|\theta^N_\pi * f\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} \quad .$$

5.6. INTERPOLAÇÃO DOS ESPAÇOS DE BESSEL-NIKOLSKII

Neste parágrafo o espaço $B^S_{P,Q}(T^d)$ é obtido através da interpolação da família $(H_P^{S_k} | k \varepsilon \square)$.

5.6.1. TEOREMA: Sejam $S = (s_1,\ldots,s_d) \varepsilon R^d$; $0<\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) < 1$; $1 \leqslant P = (p_1,\ldots,p_d)$; $Q = (q_1,\ldots,q_d) \leqslant \infty$ e $S_j = (1-\theta_j)s_o^j+\theta_j s_1^j$ com $S_o = (s_o^1,\ldots,s_o^d) < S_1 = (s_1^1,\ldots,s_1^d)$. Então

$$(1) \qquad B^S_{P,Q}(T^d) = (H_P^{S_k}(T^d) | k\varepsilon\square)_{\theta,Q}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \varepsilon (H_P^{S_k}(T^d) | k\varepsilon\square)_{\theta,Q}$ e $f = \sum_{k\varepsilon\square} f_k$ uma decomposição arbitrária com $f_k \varepsilon H_P^{S_k}(T^d)$, $k \varepsilon \square$. Então:

$$\|\theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^p} \leqslant \sum_{k\varepsilon\square} \|\theta_\pi^M * f_k\|_{L_\pi^p}$$

Agora, para cada $k \ \varepsilon\ \square$ temos:

$$\|\theta_\pi^M * f_k\|_{L_\pi^p} = \|J^{-S_k} J^{S_k} \theta_\pi^M * f_k\|_{L_\pi^p}$$

$$\leqslant C\ 2^{-S_k . M} \|J^{S_k}\ \theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^p}$$

$$\leqslant C\ 2^{-S_k . M} \|\theta_\pi^M * J^{S_k} f_k\|_{L_\pi^p}$$

$$\leqslant C\ 2^{-S_k . M} \|\theta_\pi^M\|_{L_\pi^1} \|J^{S_k} f_k\|_{L_\pi^p}$$

$$\leqslant C\ 2^{-S_k . M} \|f_k\|_{H_p^{S_k}(T^d)}$$

e desse modo

$$\|\theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^p} \leqslant C \sum_{k\varepsilon\square} 2^{-S_k . M} \|f_k\|_{H_p^{S_k}(T^d)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as decomposições de f, segue que:

$$\|\theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^p} \leqslant C\ 2^{-S_o} K(2^{(S_o - S_1) . M}; f)$$

onde $S_o = (s_o^1,\dots,s_o^d)$ e $S_1 = (s_1^1,\dots,s_1^d)$. Portanto:

$$\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} = \|\{2^{S.M}\|\theta^M_\pi * f\|_{L^P_\pi}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\ \|\{2^{(S-S_o).M}K(2^{(S_o-S_1).M};f)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\ \|\{2^{-(S_o-S_1).\theta.M}K(2^{(S_o-S_1).M};f)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\ \|f\|_{(H_P^{S_k}(T^d)|\,k\in\Box)_{\theta,Q,K}}$$

ou seja

$$\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} \leqslant C\|f\|_{(H_P^{S_k}(T^d)|\,k\in\Box)_{\theta,Q}}$$

Reciprocamente, consideremos $f \in B^S_{P,Q}(T^d)$ com a decomposição $f = \sum_{N\in N^d} \theta^N_\pi * f$ onde $(\theta^N_\pi)_{N\in N^d}$ é a sequência definida em 5.5.2. Mostraremos que esta série converge para f na norma de $\sum_{k\in\Box} H_P^{S_k}(T^d)$.

Realmente, como existe $k' \in \Box$ tal que $S_{k'} \leqslant S_k$ para todo $k \in \Box$, então

$$\sum_{k\in\Box} H_P^{S_k}(T^d) = H_P^{S_{k'}}(T^d) \qquad ,$$

donde

$$\sum_{N\in N^d} \|\theta_\pi^N * f\|_{H_p^{S_{k'}}(T^d)} \leqslant \sum_{N\in N^d} \|J^{S_{k'}}\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P(R^d)}$$

$$\leqslant C \sum_{N\in N^d} 2^{N.S_{k'}}\|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P(R^d)}$$

$$= C \sum_{N\in N^d} [\{2^{N.(S_{k'}-S)}\}] \ [\{2^{n.S}\|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P(R^d)}\}]$$

e pela desigualdade de Hölder temos que

$$\sum_{N\in N^d} \|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P} \leqslant C\|2^{(S_{k'}-S).N}\|_{\ell^{Q'}(N^d)} . \|f\|_{B_{P.Q}^S(T^d)} < \infty .$$

Em virtude da decomposição de f segue que:

$$\|f\|_{(H_p^{S_k}(T^d)|k\in\square)_{\theta,Q,J}} \leqslant \{\|2^{-M.\theta(S_o-S_1)} J(2^{M.(S_o-S_1)};\theta_\pi^M * f)\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant \|\{2^{M.(S-S_o)} \max_{k\in\square}\{2^{|(S_o-S_1).M.k|}\|J^{S_k}\theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^P}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leqslant C\|\{2^{M.(S-S_o)} 2^{(S_o-S_1).M} 2^{M.S_1}\|\theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^P}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

$$\leq C\|\{2^{M.S}\|\theta_\pi^M * f\|_{L_\pi^P(R^d)}\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

ou seja

$$\|f\|_{(H_P^{S_k}(T^d)|k\in\square)_{\theta,Q}} \leq C\|f\|_{B_{P,Q}^S(T^d)} \quad .$$

5.6.2. COROLÁRIO: Se $1 \leq P = (p_1,\dots,p_d) < \infty$ temos:

(1) $$(H_P^S(T^d))' = H_{P'}^{-S}(T^d)$$

com $S = (s_1,\dots,s_d) \in R^d$.
Se além disso $1 \leq Q = (q_1,\dots,q_d) < \infty$, também teremos

(2) $$(B_{P,Q}^S(T^d))' = B_{P',Q'}^{-S}(T^d)$$

para $S = (s_1,\dots,s_d) \in R^d$.

DEMONSTRAÇÃO DE (1): Tomando

(3) $$\langle f,g\rangle = \sum_{k\in Z^d} \hat{f}(k)\hat{g}(k)$$

com $f \in L_\pi^P(R^d)$ e $g \in L_\pi^{P'}(R^d)$, teremos para $S > 0$ que

(4) $$\langle f,g\rangle = \sum_{k\in Z^d} J^S f(k)\ J^{-S}g(k) = \langle J^S f;J^{-S}g\rangle$$

com $f \in H_P^S(T^d)$ e $g \in H_{P'}^{-S}(T^d)$.
Assim

$$\|g\|_{(H_p^S(T^d))'} = \sup\{|<f,g>|; f \varepsilon H_p^S(T^d), f \neq 0\}$$

$$= \sup\{|<J^S f; J^{-S} g>|; J^{+S} f \varepsilon L_\pi^P(T^d),\ f \neq 0\}$$

$$= \|J^{-S} g\|_{(L_\pi^P)'} = \|J^{-S} g\|_{L_\pi^{P'}} = \|g\|_{H_{P'}^{-S}(T^d)}$$

O funcional g pode ser estendido para todo $S \varepsilon R^d$ em virtude do Teorema de Hahn-Banach.

DEMONSTRAÇÃO DE (2): Pelo Teorema 5.6.1 temos que

$$(B_{P,Q}^S(T^d))' = ((H_P^{S_k}(T^d)|k\varepsilon\square)_{\theta,Q})' =$$

$$= (H_{P'}^{-S_k}(T^d)|k\varepsilon\square)_{\theta,Q'} = B_{P',Q'}^{-S}(T^d)$$

5.7. OUTRA CARACTERIZAÇÃO DE $B_{P,Q}^S(T^d)$

A seguir apresentaremos uma outra caracterização de $B_{P,Q}^S(T^d)$ desta vez através do módulo múltiplo de continuidade em $L_\pi^P(R^d)$. Desta forma recuperamos os espaços inicialmente introduzidos por Nikolskii [32].

5.7.1. DEFINIÇÃO: O módulo múltiplo de continuidade em $L_\pi^P(R^d)$, de ordem $M = (m_1,\ldots m_d) \varepsilon N^d$ é definido por

$$(1) \qquad \omega_P^M(t;f) = \sup_{|h|\leqslant t} \|\Delta_f^M f\|_{L_\pi^P}$$

onde $t = (t_1,\dots,t_d) \in R^d_+$ e

(2) $$\Delta^M_h f(x) = \sum_{0\leqslant J\leqslant M} \binom{M}{J}(-1)^J f(x+J.h)$$

com $J = (j_1,\dots,j_d) \in N^d$; $h = (h_1,\dots,h_d) \in R^d$; $M = (m_1,\dots,m_d)\in N^d$ e $\binom{M}{J} = \prod_{=1}^{d} \binom{m_\ell}{j_\ell}$

Observamos que

$$\omega^0_P(t,f) = \|f\|_{L^P_\pi(R^d)}$$

5.7.2. DEFINIÇÃO: Sejam $S = (s_1,\dots,s_d) > 0$ e $1\leqslant P = (p_1,\dots,p_d)$; $Q = (q_1,\dots,q_d) \leqslant \infty$. Diremos que $f \in L^P_\pi(R^d)$ pertence a $B^{S,M}_{P,Q}(T^d)$ se

$$t^{-k.S}\, \omega^{k.M}_P(t,f) \in L^{k.Q}_\star(T^{|k|})$$

para todo $k \in \square$ e $0 < S = (s_1,\dots,s_d) < M = (m_1,\dots,m_d)$.

Observemos a introdução da letra M a qual dá a característica da ordem do módulo múltiplo de continuidade.

5.7.3. TEOREMA: Sejam $S = (s_1,\dots,s_d) > 0$ e $M=(m_1,\dots,m_d)\in N^d$ e $N = (n_1,\dots,n_d) \in N^d$ tais que $0 \leqslant N < S < N+M$. Consideremos também os parâmetros $1 \leqslant P = (p_1,\dots,p_d)$; $Q = (q_1,\dots,q_d) \leqslant \infty$. Então:

(1) $$\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^d)} \cong \sum_{k\in\square} \|t^{-k.S}\omega^{k.M}_P(t;f)\|_{L^{k.Q}_\star(T^{|k|})}$$

A demonstração será feita para dois parâmetros. Seja $f \in B^S_{P,Q}(T^2)$ e tomemos

$$(2) \qquad F\rho_{h_j}(t_j) = (1 - e^{ih_jt_j})^{m_j} \qquad (j=1,2)$$

e

$$F\rho_h(t) = F\rho_{h_1h_2}(t_1,t_2) = F\rho_{h_1}(t_1).F\rho_{h_2}(t_2) \qquad .$$

Assim

$$\Delta_{h_1}^{m_1,0} f = \rho_{h_1} * f \ , \ \Delta_{h_2}^{0,m_2} = \rho_{h_2} * f \quad e \quad \Delta_{hf}^{M} = \rho_h * f \qquad .$$

Consideremos agora a sequência de funções $(\theta_\pi^J)_{J\in N^2}$ definida em 5.5.2. Assim:

$$\|\rho_{h_1} * \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f\|_{L_\pi^P} = \|\rho_{h_1} * (\sum_{-1\leqslant L\leqslant 1} \theta_\pi^{J+L}) * \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f\|_{L_\pi^P}$$

$$\leqslant \sum_{-1\leqslant L\leqslant 1} \|\rho_{h_1} * \theta_\pi^{J+L} * \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f\|_{L_\pi^P}$$

$$\leqslant \sum_{-1\leqslant L\leqslant 1} \|F\rho_{h_1} . F\theta_\pi^{J+L}\|_{M_1(T^d)} \|\theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f\|_{L_\pi^P}$$

e tomando $<h,x> = h_1x_1 + \dots + h_dx_d$ como o produto escalar em R^d, a última expressão ficará majorada por

$$\sum_{-1\leqslant L\leqslant 1} \|F\rho_{h_1} <h_1,.>^{-m_1}\|_{M_1(T^d)} \|<h_1,.>^{m_1} F\theta_\pi^{J+L}\|_{M_1(T^d)} \|\theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f\|_{L_\pi^P}$$

Em virtude de (2) e de 5.2.8 esta última expressão será majorada por

$$\sum_{-1\leq L\leq 1} C|h_1|^{m_1}\, 2^{(J+L).(m_1,0)} \| \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f \|_{L_\pi^P}$$

$$\leq C|h_1|^{m_1}\, 2^{j_1 m_1} \| \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f \|_{L_\pi^P} ,$$

$$\| \rho_{h_1} * \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f \|_{L_\pi^P} \leq C\, 2^{j_1 m_1} |h_1|^{m_1} \| \theta_\pi^J * D^{(n_1,0)} f \|_{L_\pi^P}$$

Analogamente obtemos que

$$\| \rho_{h_2} * \theta_\pi^J * D^{(0,n_2)} f \|_{L_\pi^P} \leq C\, 2^{j_2 m_2} |h_2|^{m_2} \| \theta_\pi^J * D^{(0,n_2)} f \|_{L_\pi^P(R^d)}$$

e

$$\| \rho_h * \theta_\pi^J * D^N f \|_{L_\pi^P(R^d)} \leq C\, 2^{J.M} |h|^M \| \theta_\pi^J * D^N f \|_{L_\pi^P(R^d)}$$

e que

$$\| \rho_{h_1} * \psi_{1,0} * D^{(n_1,0)} f \|_{L_\pi^P} \leq C \min\{1, |h_1|^{m_1}\} \| \psi_{1,0} * f \|_{L_\pi^P}$$

$$\| \rho_{h_2} * \psi_{0,1} * D^{(0,n_2)} f \|_{L_\pi^P} \leq C \min\{1, |h_2|^{m_2}\} \| \psi_{0,1} * f \|_{L_\pi^P}$$

$$\| \rho_h * \psi_{1,1} * D^N f \|_{L_\pi^P} \leq C \min\{1, |h_1|^{m_1}; |h_2|^{m_2}; |h^M|\} \| \psi_{1,1} * f \|_{L_\pi^P}$$

Mas também temos que:

$$\|\Delta^{(m_1,0)}_{2^{-i_1}} D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi} = \|\Delta^{(m_1,0)}_{2^{-i_1}} \Big(\sum_{j_1\varepsilon N} \theta_\pi^{j_1} + \psi_\pi^{1}\Big) * (D^{(n_1,0)} f))\|_{L^p_\pi}$$

$$\leqslant \sum_{j_1\varepsilon N} \|\rho_{2^{-i_1}} * \theta_\pi^{j_1} * D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi} + \|\rho_{2^{-i_1}} * \psi_\pi^{1} * D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi}$$

$$\leqslant C \sum_{j_1\varepsilon N} 2^{j_1 m_1 - i_1 m_1} \|\theta_\pi^{j_1} * D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi} + C \min(1, 2^{-i_1 m_1}) \|\psi_\pi^{1} * f\|_{L^p_\pi}$$

$$\leqslant C \sum_{j_1\varepsilon N} 2^{(j_1-i_1)m_1} . 2^{j_1 n_1} \|\theta_\pi^{j_1} * f\|_{L^p_\pi} + C \min(1, 2^{-i_1 m_1}) \|\psi_\pi^{1} * f\|_{L^p_\pi}$$

$$= C \sum_{j_1\varepsilon N} 2^{(j_1-i_1)m_1 + j_1 n_1} \|\sum_{j_2\varepsilon N} \theta_\pi^{j_2} * \theta_\pi^{j_1} * f\|_{L^p_\pi} + C \min(1, 2^{-i_1 m_1}) \| f$$

$$\leqslant C \sum_{J\varepsilon N^2} 2^{(j_1-i_1)m_1 + j_1 n_1} \|\theta_\pi^{J} * f\|_{L^p_\pi} + C \min(1, 2^{-i_1 m_1}) \| f\|_{L^p_\pi}$$

e assim

$$2^{i_1(s_1-n_1)} \|\Delta^{(m_1,0)}_{2^{-i_1}} (D^{(n_1,0)} f)\|_{L^p_\pi} \leqslant$$

$$\leqslant C\ 2^{i_1(s_1-n_1)} \sum_{J\varepsilon N^2} 2^{(j_1-i_1)m_1 + j_1 n_1} \|\theta_\pi^{J} * f\|_{L^p_\pi} +$$

$$+\ 2^{i_1(s_1-n_1)} \min(1, 2^{-i_1 m_1})\ \| f\|_{L^p_\pi}$$

$$\leq C \sum_{j_2 \varepsilon N} \Big(\sum_{j_1 \varepsilon N} 2^{i_1(s_1-n_1)} 2^{j_1 n_1} 2^{-s_1 j_1} \min\{1, 2^{-i_1 m_1}\} . 2^{s_1 j_1} \| \theta_\pi^J * f \|_{L_\pi^P} \Big) +$$

$$+ C \min \big(2^{i_1(s_1-n_1)}; 2^{i_1(s_1-n_1-m_1)}\big) \| f \|_{L_\pi^P}$$

$$\leq C \sum_{j_2 \varepsilon N} \{2^{j_1(s_1-n_1)} \min(1; 2^{-j_1 n_1})\} * \{2^{s_1 j_1} \| \theta_\pi^J * f \|_{L_\pi^P}\}$$

$$+ C \{2^{j_1(s_1-n_1)} \min(1, 2^{-j_1 m_1})\} * a_{j_1}$$

onde $a_{j_1} = 0$ se $j_1 < 0$ e $a_{j_1} = \| f \|_{L_\pi^P}$ se $j_1 = 0$.
Como

$$\sum_{j_1 \varepsilon Z} 2^{j_1(s_1-n_1)} \min(1; 2^{-j_1 m_1}) < \infty$$

temos que

$$\| 2^{i_1(s_1-m_1)} \omega_P^{(m_1,0)} (2^{-i_1}; D^{(n_1,0)} f) \|_{\ell^{q_1}(Z)} \leq$$

$$\leq C \sum_{j_2 \varepsilon N} \| \{2^{j_1 s_1} \| \theta_\pi^J * f \|_{L_\pi^P}\}_{j_1 \varepsilon Z} \|_{\ell^{q_1}(Z)}$$

$$\leq C \| \{2^{S.J} \| \theta_\pi^J * f \|_{L_\pi^P}\}_{J \varepsilon Z^2} \|_{\ell^Q(Z^2)}$$

$$\leq C \| f \|_{B_{P,Q}^S(T^2)}$$

As outras estimadas são análogas. Assim, fazendo um agrupamento das estimadas obtidas teremos que as três expressões abaixo:

$$(3) \qquad \| 2^{i_1(s_1-n_1)} \omega_P^{(m_1,0)}(2^{-i_1}; D^{(n_1,0)} f)\|_{\ell^{q_1}(Z)}$$

$$(4) \qquad \| 2^{i_2(s_2-n_2)} \omega_P^{(0,m_2)}(2^{-i_2}; D^{(0,n_2)} f)\|_{\ell^{q_2}(Z)}$$

$$(5) \qquad \| 2^{i.(S-N)} \omega_P^{M}(2^{-i}; D^{(n_1,n_2)} f)\|_{\ell^{Q}(Z)}$$

são dominadas por $C \|f\|_{B^S_{P,Q}(T^2)}$.

Reunindo estas estimadas obtemos

$$\|f\|_{L^P_\pi} + \| t_1^{n_1-s_1} \omega_P^{(m_1,0)}(t_1; D^{(n_1,0)} f)\|_{L_*^{q_1}(R_+)} +$$

$$\| t_2^{n_2-s_2} \omega_P^{(0,m_2)}(t_2; D^{(0,n_2)} f)\|_{L_*^{q_2}(R_+)} +$$

$$\| t^{N-S} \omega_P^{M}(t; D^N f)\|_{L_*^Q(R_+^2)} \leqslant C \|f\|_{B^S_{P,Q}(T^2)}$$

Para a desigualdade inversa necessitamos do

5.7.4. LEMA: Existe $\chi \in \mathcal{S}(R)$ tal que

$$(1) \qquad \mathcal{F}\chi(z) = 1$$

se $z \in \operatorname{supp} \theta = \{z \mid 2^{-1} \leqslant |z| \leqslant 2\}$ e

$$(2) \qquad \operatorname{supp} \widehat{\chi} = \{z \mid |z| \geqslant 1/3\}$$

onde θ é a função utilizada no lema 5.4.1.

A demonstração do lema 5.7.4 encontra-se em [03] Bergh-Löfström, pag. 145.

Utilizando este lema podemos concluir a demonstracão do Teorema 5.7.3.

Mostraremos que

$$\|\theta_\pi^{k_1,0} * f\|_{L^p_\pi} \leqslant C\, 2^{-n_1 k_1}\, \omega_p^{(m_1,0)}(2^{-k_1}; D^{(n_1,0)} f)$$

Realmente, se $\chi_1 \in \mathcal{S}(R)$ satisfaz a 5.7.4 (1)-(2) temos que

$$\|\theta_\pi^{k_1,0} * f\|_{L^p_\pi} = \|F^{-1} F\, \theta_\pi^{k_1,0} * f\|_{L^p_\pi} =$$

$$= \|F^{-1}[(F\, \theta_\pi^{k_1,0}).F_f[\, \|_{L^p_\pi}$$

$$= \|F^{-1}(\theta_\pi(2^{-k_1} z_1).F_f)\|_{L^p_\pi}$$

$$= \|F^{-1}(\widehat{\chi}_1(2^{-k_1} z_1)\theta_\pi(2^{-k_1}.z_1).F_f)\|_{L^p_\pi}$$

$$= \|F^{-1}[\, (\widehat{\rho}_{2^{-k_1}}(e^{i.2^{-k_1}.z_1}-1)^{-m_1}\, \widehat{\chi}_1(2^{-k_1} z_1)\theta_\pi(2^{-k_1} z_1)$$

$$.\ (iz_1)^{-n_1}(iz_1)^{n_1} Ff]\, \|_{L^p_\pi}$$

$$= \| \rho_{2^{-k_1}} * F^{-1}((e^{i.2^{-k_1}.z_1}-1)^{-m_1}\ 2^{-k_1.n_1}\ \hat{\chi}_1(2^{-k_1}z_1)\ .$$

$$.\ (\theta_\pi(2^{-k_1}z_1))(2^{-k_1}z_1)^{-n_1} * D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi}$$

$$\leq \|(e^{i.2^{-k_1}z_1}-1)^{-m_1}\ 2^{-k_1 n_1}\ \hat{\chi}_1(2^{-k_1}z_1).(2^{-k_1}z_1)^{-n_1}\|_{M_p(T^d)}$$

$$.\ \|\rho_{2^{-k_1}} * D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi}$$

$$\leq C\ 2^{-k_1 n_1} \|(e^{in_1}-1)^{-m_1}\ \hat{\chi}_1(u_1)\ \theta_\pi(u_1)u_1^{-n_1}\|_{M_p(T^d)}$$

$$.\ \|\Delta^{(m_1,0)}_{2^{-k_1}}\ D^{(n_1,0)} f\|_{L^p_\pi}$$

$$\leq C\ 2^{-k_1 n_1}\ \omega_p^{(m_1,0)}\ (2^{-k_1};D^{(n_1,0)}f)$$

pois

$$(e^{iu}-1)^{-m}\ \hat{\chi}_1(u)\ \theta_\pi(u)u^{-n}\ \varepsilon\ M_p(T^1)$$

e de modo análogo obtemos que

$$\|\theta_\pi^{0,k_2} * f\|_{L^p_\pi} \leq C\ 2^{-k_2 n_2}\ \omega_p^{0,m_2}(2^{-k_2};D^{(0,n_2)}f)$$

e que

$$\|\theta_\pi^{k_1,k_2} * f\|_{L^P_\pi} \leqslant C\ 2^{-k_1 n_1}\ 2^{-k_2 n_2}\ \omega_P^M(2^{-k_1};2^{-2k_2};D^N f)$$

e então

$$\|f\|_{B^S_{P,Q}(T^2)} = \|\{^{S.J}\|\theta_\pi^J * f\|_{L^P_\pi(R^d)}\}\|_{\ell^Q(N^2)}$$

$$\leqslant \|\psi * f\|_{L^P_\pi} + \|(2^{S_1 j_1 - n_1 j_1}\ \omega_P^{(m_1,0)}(2^{-j_1};D^{(n_1,0)}f))\|_{\ell^{q_1}(N)}$$

$$+ \|(2^{s_2 j_2 - n_2 j_2}\ \omega_P^{(0,m_2)}(2^{-j_2};D^{(0,n_2)}f))\|_{\ell^{q_2}(N)} +$$

$$+ \|(2^{S.J-N.J}\ \omega_P^M(2^{-J};D^N f))\|_{\ell^Q(N^2)}$$

$$= \sum_{k\varepsilon\square} \|t^{-k.S}\ \omega_P^{k.M}(t,f)\|_{L_*^{k.Q}(T^{|k|})}$$

CAPÍTULO 6

TEOREMAS DE JACKSON E BERNSTEIN E SUAS VERSÕES DUAIS

Neste último Capítulo vamos particularizar os conceitos e resultados desenvolvidos nos Capítulos 2, 3 e 4 e utilizar os resultados do Capítulo 5 para obter versões "clássicas" dos teoremas de Jackson e Bernstein paralelos aqueles apresentados no Capítulo 1. Na realidade vamos além, obtendo também versões duais. Os espaços de Besov-Nikolskii $B_Q^{SP}(T^d)$ serão caracterizados como espacos de aproximação para todos os valores de S em $\mathbb{R}^d$, via os teoremas de Jackson e Bernstein duais. Lembremos que Fernandez em [22] e [23] não trata de problemas duais.

6.1. O ESPAÇO DE APROXIMACÃO $[L_\pi^P(R^d)]_{S,Q}$

Vamos especializar a definição 3.1.5 (lembrando também o teorema 3.1.6) no caso que $E = L_\pi^P(R^d)$ e a escala múltipla é a escala $(Q_N | N \in N^d)$ dos quase polinômios d-dimensionais trigonométricos.

6.1.1. DEFINIÇÃO: Definimos $[L_\pi^P(R^d)]_{S,Q}$ como o espaço de todas as $f \in L_\pi^P(R^d)$ para as quais

$$(1) \qquad \{2^{N.S} E_N(f)_P\}_N \in \ell^Q(N^d)$$

onde $S = (s_1,\ldots,s_d) \in R^d$, $1 \leqslant Q = (q_1,\ldots,q_d) \leqslant \infty$ e $E_N(f)_P$ é a melhor aproximação de f por quase polinômios de ordem 2^N.

Munimos o espaço $[L_\pi^P(R^d)]_{S,Q}$ com a norma

(2) $$\|f\|_{[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}} = \|f\|_{L^P_\pi} + \|\{2^{N.S}E_N(f)_P\}\|_{\ell^Q(N^d)}$$

Agora vamos caracterizar os espaços $[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}$ em termos dos espaços $B^S_{P,Q}(T^d)$.

6.1.2. TEOREMA: Para $0 < S = (s_1,\dots,s_d) < 1$ e $1 \leqslant Q = (q_1,\dots,q_d) \leqslant \infty$ temos que

(1) $$[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q} = B^S_{P,Q}(T^d) \qquad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Para simplicidade de notação vamos nos restringir ao caso $d = 2$. Sejam $f \in B^S_{P,Q}(T^d)$; $(\theta^N_\pi)_{N\in N^2}$ a sequência de funções testes definida em 5.5.2 e definamos

$$f_{n'_0;\infty} = \sum_{|n'|\leqslant n'_0} \theta_\pi^{n';\infty} * f$$

$$f_{\infty;n''_0} = \sum_{|n''|\leqslant n''_0} \theta_\pi^{\infty;n''} * f$$

$$f_{n'_0;n''_0} = \sum_{\substack{|n'|\leqslant n'_0\\ |n''|\leqslant n''_0}} \theta_\pi^{n',n''} * f$$

Se tomarmos as somas parciais das séries de Fourier como estão indicadas abaixo, obteremos polinômios

$$p_{m';\infty} = S_{m';\infty}(f_{n'_0,\infty})$$

$$p_{\infty,m''} = S_{\infty,m''}(f_{\infty,n''_o})$$

$$p_{m',m''} = S_{m',m''}(f_{n'_o;n''_o})$$

e então poderemos escrever que

$$f-p_{m';\infty}-p_{\infty;m''}+p_{m',m''} \equiv \sum_{\substack{|n'|\leqslant m'\\ |n''|\leqslant m''}} \theta_\pi^{n';n''} * f$$

e desse modo

$$E_{2^M}(f)_P \leqslant \| \sum_{N>M} \theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P} \leqslant \sum_{N\in N^2} \|\theta_\pi^{N+M} * f\|_{L_\pi^P}$$

Assim

$$\|\{2^{M.S} E_{2^M}(f)_P\}\|_{\ell^Q(N^2)} \leqslant C\|\{2^{M.S} \sum_{N\in N^2} \|\theta_\pi^{N+M} * f\|_{L_\pi^P}\}\|_{\ell^Q(N^2)}$$

$$= C\|\{\sum_{N\in N^2} 2^{-N.S} 2^{(N+M).S} \|\theta_\pi^{N+M} * f\|_{L_\pi^P}\}\|_{\ell^Q(N^2)}$$

$$\leqslant C\|\{2^{K.S} \|\theta_\pi^K * f\|_{L_\pi^P}\|\}_{\ell^Q(N^2)}$$

Reciprocamente, consideremos $M > N$. Assim

$$\widehat{\theta_\pi^N}(K) \,.\, \widehat{p_{m',\infty}}(K) = 0$$

$$\widehat{\theta_\pi^N}(K) \,.\, \widehat{p_{\infty,m''}}(K) = 0$$

$$\widehat{\theta_\pi^N}(K) \cdot \widehat{p_M}(K) = 0$$

para todo $K > M = (m',m")$ e se tomarmos

$$W_M = p_{m';\infty} + p_{\infty,m"} - p_{m';m"}$$

teremos que

$$\theta_\pi^N * W_M = 0$$

e desse modo

$$\theta_\pi^N * f = \theta_\pi^N * (f - W_M)$$

e assim

$$\|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^p} \leqslant \|\theta_\pi^N\|_{L_\pi^1(R^2)} \|f - W_M\|_{L_\pi^p(R^2)}$$

e tomando o ínfimo sobre todos os possíveis quase polinômios de ordem menor ou igual a 2^M, vem que:

$$\|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^p} \leqslant C\ E_M(f)_p$$

e como $M > N$ temos que

$$\|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^p} \leqslant C\ E_N(f)_p$$

e então

$$\|\{2^{N.S}\|\theta_\pi^N * f\|_{L_\pi^P}\}\|_{\ell^Q(N^2)} \leqslant C\|\{2^{N.S}E_N(f)_p\}\|_{\ell^Q(N^2)} .$$

6.2. O TEOREMA DE JACKSON

Como consequência do teorema 6.2.2 temos o teorema de Jackson que fornece uma estimada da melhor aproximação de $f \in B^S_{P,Q}(T^d)$ em função de ordem de decrescimento de f. Versões multidimensionais destes teoremas denominados diretos foram obtidas também por Yudin [52], Kipiani [26], Potapov [36] e Nikolskii [32].

6.2.1. TEOREMA (DE JACKSON): Se $f \in B^S_{P,Q}(T^d)$ então

$$(1) \qquad E_N(f)_P = 0\,(N^{-S}) \qquad (N \to \infty)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in B^S_{P,Q}(T^d)$. Então, para $S < M$, existem $N \in N^d$ e $0 < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) < 1$ com $1 \leqslant N \leqslant M-1$ e $S = N+\theta$. Como $B^S_{P,Q}(T^d) = [L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}$ segue que $f \in [L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}$ e como $[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}$ é um espaço de aproximação do tipo Jackson de classe S, temos pela Proposição 3.1.7 que

$$(2) \qquad E_N(f)_P \leqslant C\ 2^{-N.S}\|f\|_{[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}}$$

e em virtude da equivalência entre as normas (1) e (2) do teorema 3.1.6 temos que

$$(3) \qquad E_N(f)_P \leqslant C\ N^{-S}\|f\|_{[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}}$$

donde o resultado desejado.

6.3. O ESPAÇO DE INTERPOLAÇÃO $[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}$

Em 6.1.2 já caracterizamos o espaço $[L^P_\pi(R^d)]_{S,Q}$ em termos de um espaço de Besov. Agora, para conhecer melhor a estrutura, obteremos diretamente este mesmo espaço através da interpolação da família $(W_p^{k.M}(T^d) \mid k \in \square)$.

6.3.1. TEOREMA: Os espaços $W_p^N(T^d)$ pertencem à classe $H(\alpha;(W_p^{k.M}(T^d) \mid k \in \square))$ com $N = \alpha.M$, isto é:

$$(1) \quad \|f\|_{W_p^N(T^d)} \leqslant C\, t^{-\alpha}\, J(t;f;(W_p^{k.M}(T^d) \mid k \in \square))$$

e

$$(2) \quad K(t,f,(W_p^{k.M}(T^d) \mid k \in \square)) \leqslant C\, t^{\alpha}\, \|f\|_{W_p^N(T^d)}$$

para toda $f \in W_p^N(T^d)$.

A demonstração deste teorema é equivalente à demonstração de

$$(3) \qquad B^S_{P,1}(T^d) \subset H^S_p(T^d) \subset B^S_{P,\infty}(T^d)$$

onde $S \in N^d$, em virtude do lema 3.3.2.

Seja $f \in H_p^S(T^d)$. Assim $J^S f \in L^P_\pi(R^d)$ e novamente utilizando as sequências $(\theta^N_\pi)_{N \in N^d}$ definidas em 5.5.2 segue que $J^S(\theta^M_\pi * f) \in L^P_\pi(R^d)$. Desse modo

$$\|\theta^{M}*f\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})} = \|J^{-S}J^{S}(\theta^{M}_{\pi}*f)\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})}$$

$$\leqslant C\ 2^{-M.S}\ \|J^{S}(\theta^{M}_{\pi} * f)\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})}$$

e

$$\|f\|_{B^{S}_{P,\infty}(T^{d})} = \sup_{M\varepsilon N^{d}} \{2^{M.S}\|\theta^{M}_{\pi} * f\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})}\}$$

$$\leqslant C\ \|J^{S}(\theta^{M}_{\pi} * f)\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})} < \infty$$

o que mostra que $H^{S}_{P}(T^{d}) \subset B^{S}_{P,\infty}(T^{d})$.

Demonstremos agora a segunda imersão. Seja $f \varepsilon B^{S}_{P,1}(T^{d})$. Assim:

$$\sum_{M\varepsilon N^{d}} 2^{M.S}\ \|\theta^{M}_{\pi} * f\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})} < \infty$$

Desse modo

$$\|f\|_{H^{S}_{P}(T^{d})} = \|J^{S}f\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})} \leqslant \|J^{S}(\sum_{M\varepsilon N^{d}} \theta^{M}_{\pi} * f)\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})}$$

$$\leqslant \sum_{M\varepsilon N^{d}} \|J^{S}\ \theta^{M}_{\pi} * f\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})}$$

$$\leqslant \sum_{M\varepsilon N^{d}} 2^{M.S}\ \|\theta^{M}_{\pi} * f\|_{L^{P}_{\pi}(R^{d})} < \infty \qquad .$$

Portanto, as imersões em (3) são verdadeiras e temos que os espaços $H_P^S(T^d)$ são de classe $H(\alpha;(W_P^{k.M}(T^d)|k\varepsilon\square))$ com $S = \alpha.M$.

6.3.2. TEOREMA: Sejam $1 \leqslant N = (n_1,\dots,n_d) < M-1 = (m_1-1,\dots, m_d-1)$ e $0 < \theta < 1$. Então:

(1) $$|L^P(R^d)|_{N+\theta,Q}=(W_P^{N+k}(T^d)|k\varepsilon\square)_{\theta,Q}=(W_P^{k.M}(T^d)|k\varepsilon\square)_{\frac{N+\theta}{M};Q}$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo teorema 6.1.2 temos que

$$B_{P,Q}^{N+\theta}(T^d) = [L_\pi^P(R^d)]_{N+\theta,Q}$$

entretanto pelo teorema 3.4.6 temos que

$$B_{P,Q}^{N+\theta}(T^d) = (H_P^{k.M}(T^d)|k\varepsilon\square)_{\frac{N+\theta}{M};Q} .$$

Mas, para cada $M \varepsilon N^d$ temos que $H_P^{k.M}(T^d) = W_P^{k.M}(T^d)$ e assim

$$[L_\pi^P(R^d)]_{N+\theta,Q} = (W_P^{k.M}(T^d)|k\varepsilon\square)_{\frac{N+\theta}{M},Q} .$$

6.4. O TEOREMA DE BERNSTEIN

O espaço $B_{P,Q}^S(T^d)$ com $Q = \infty$ propicia-nos um teorema que generaliza o teorema unidimensional de Bernstein. Para isso utilizaremos a relação 6.3.2 (1).

6.4.1. TEOREMA: Seja $1 \leqslant P = (p_1,\dots,p_d) \leqslant \infty$ e $S < M$. Se $f \varepsilon L_\pi^P(R^d)$ é tal que

(1) $$E_N(f)_P = O(N^{-S}) \qquad (N \to \infty)$$

então

(2) $$\omega_P^{k.M}(t;f) = O(t^{k.S})$$

para todo $k \in \square$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos $S < M$ e $0 < \theta < 1$. Assim, existe $N \in N^d$ tal que $1 \leqslant N \leqslant M-1$ e $S = N + \theta$ de modo análogo ao que ocorreu em 6.3.2.

Se $f \in L_\pi^P(R^d)$ é tal que $E_N(f)_P = 0\ (N^{-S})$ então $f \in [L_\pi^P(R^d)]_{S,\infty}$ e pelo Teorema 6.1.2 com $S = N + \theta$, temos que

$$f \in B_{P,\infty}^S(T^d)$$

o que é equivalente a

$$\omega_P^{k.M}(t,f) = O(t^{k.S}) \qquad (k \in \square)$$

em virtude da definição 5.7.2.

6.4.2. TEOREMA (de redução): Seja $f \in B_{P,Q}^{N+\theta,M}(T^d)$ com $0 < N + \theta < M$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$ e $M \in N^d$. Se $0 \leqslant N < M$ e $0 < \theta < 1$ então temos que

(1) $$f \in W_P^N(T^d)$$

e

(2) $$D^N f \in B^{\theta,1}_{P,Q}(T^d)$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $B^{N+\theta,M}_{P,Q}(T^d)$ pode ser obtido através da interpolação da família $(H^{k.M}_P(T^d) \mid k \in \square)$, conforme o teorema 6.3.2 e como $H^{k.M}_P(T^d) \equiv W^{k.M}_P(T^d)$ em virtude de 5.4.8 basta demonstrarmos que

$$D^N\colon W^{N+k}_P(T^d) \to W^k_P(T^d)$$

é um operador contínuo para todo $k \in \square$, o que é claro em virtude da definição de $W^M_P(T^d)$.

6.4.3. TEOREMA: Seja $f \in B^{S,M}_{P,Q}(T^d)$ e $S = (s_1,\ldots,s_d) > 1$. Se $S = N + \theta < M$ com $M \in N^d$ e $0 < \theta < 1$, então:

(1) $$E_N(D^N f)_P = O(N^{-\theta}) \qquad (N \to \infty)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in B^{S,M}_{P,Q}(T^d)$. Pelo teorema de redução com $S = N + \theta < M$ temos que $f \in W^N_P(T^d)$ e $D^N f \in B^{\theta,1}_{P,Q}(T^d)$. Como $B^{\theta,1}_{P,Q}(T^d) = [L^P_\pi(R^d)]_{\theta,Q}$ em virtude de 6.1.2 e como $[L^P_\pi(R^d)]_{\theta,Q}$ é um espaço de aproximação de ordem θ segue pela desigualdade de Jackson 3.1.7 (1) que

$$E_N(D^N f) \leqslant C\, N^{-\theta} \|f\|_{[L^P_\pi(R^d)]_{\theta,Q}}$$

ou seja

$$E_N(D^N f) = O(N^{-\theta}) \qquad (N \to \infty)$$

6.4.4. TEOREMA: Seja $f \in L^P_\pi(R^d)$ e $S = (s_1,\ldots,s_d) > 1$. Se

(1) $$E_N(f)_P = O(N^{-S}) \qquad (N \to \infty)$$

e $S = N+\theta$ com $0 < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) < 1$, então

(2) $$f \in W^N_P(T^d)$$

e

(3) $$D^N f \in B^\theta_{P,\infty}(T^d) \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $f \in L^P_\pi(R^d)$ e $E_N(f)_P = O(N^{-S})$ então, com $S = N+\theta$ temos que $f \in B^{N+\theta}_{P,\infty}(T^d)$ e novamente pelo teorema de redução

$$f \in W^N_P(T^d) \quad \text{e} \quad D^N f \in B^\theta_{P,\infty}(T^d)$$

6.4.5. OBSERVAÇÃO: O espaço $B^S_{P,\infty}(T^d)$ coincide com o espaço Lip(S,P) definido em 1.1. Tomando $S = R + \alpha$ com $R \in N^d$ e $0 < \alpha < 1$ no Teorema 6.2.1 teremos que se $f \in B^{R+\alpha}_{P,\infty}(T^d)$ então

(1) $$E_N(f)_P = O(N^{-R-\alpha})$$

e este resultado coincide com aquele apresentado em 1.2.7 num caso particular. Recuperamos portanto o teorema de Jackson. Tomando agora $S = R + \alpha$ com $R \in N^d$, $0 < \alpha < 1$ e $f \in L^P_\pi(R^d)$ tal que

$$E_N(f)_P = O(N^{-R-\alpha}) \qquad N \to \infty$$

obteremos, em virtude do teorema 6.4.4, que

$$f \in W_P^R(T^d)$$

e

$$D^R f \in B_{P,\infty}^{\alpha}(T^d)$$

e este resultado generaliza aquele obtido em 1.3.10 (teorema de Bernstein).

Observamos então que o material desenvolvido até aqui no 6º Capítulo recupera os teoremas de Jackson e Bernstein da teoria de aproximação utilizando a teoria de interpolação.

6.5. DUALIDADE

Nas seções anteriores caracterizamos os espaços de Besov-Nikolskii $B_{P,Q}^S(T^d)$ tanto como espaços de aproximação $[L_\pi^P(R^d)]_{S,Q}$ como espaços de interpolação $(W_P^{k.M}(T^d)\,|\,k\varepsilon\square)_{S,Q}$. A partir dessas caracterizações obtivemos teoremas de Jackson e Bernstein. Caracterizaremos agora o dual topológico de $B_{P,Q}^S(T^d)$ em função da melhor aproximação dual por quase-polinômios. Utilizando as caracterizações acima mencionadas e o teorema de dualidade para espaços de interpolação estabeleceremos teoremas duais de Jackson e Bernstein.

6.5.1. Consideremos os espaços

$$Y_k = H_P^{S_k}(T^d) \qquad (k \in \square)$$

e

$$X = L_\pi^P(R^d)$$

e seus respectivos duais

$$Y'_k = H_{P'}^{-S_k}(T^d)$$

e

$$X' = L_\pi^{P'}(R^d)$$

Representando por $K(M;f)$ o K-funcional em relação à família $(Y_k | k\varepsilon\square)$, representaremos $K'(M,f')$ o K-funcional em relação à família dual $(Y'_k | k\varepsilon\square)$.

Desta forma, o teorema 4.4.8 pode ser interpretado, neste caso particular, como segue:

6.5.2. TEOREMA: Para $0 < \Theta < \sigma$, $1 \leqslant Q \leqslant \infty$: O dual topológico de $B^S_{P,Q}(T^d)$ é o espaço das distribuições $f' \varepsilon \varepsilon'_\pi(R^d)$ que satisfaz a uma das condições equivalentes:

(1) $\{N^{-k.S} \| f' \|_{(Q_{k.N};L^P_\pi(R^d))}\} \varepsilon \ \ell^{|k.Q'|}(N_+^{|k|}) \qquad (k \varepsilon \square)$

(2) $\begin{cases} f' \varepsilon \Sigma_k H_{P'}^{-S_k}(T^d) = \Sigma_k Y'_k \\ \{N^{k.(\sigma-S)} K(N^{-\sigma}; f'; (Y'_k | k\varepsilon\square))\} \varepsilon \ \ell^{Q'}_*(N_+^{|k|}) \end{cases}$

6.5.3. OBSERVAÇÃO: As afirmações deste teorema também podem ser escritas do seguinte modo:

$$(1') \qquad \{N^{-S}\|f'\|_{(Q_N;L^{P'}_{\pi}(R^d))}\}_{N\varepsilon N^d} \;\varepsilon\; \ell^{Q'}_{*}(N^d_+)$$

$$(2') \qquad \{N^{\sigma-S}K(N^{-\sigma};f';(H^{-S}_{P'}{}^{k}(T^d)\,|\,k\varepsilon\square))\}_{N\varepsilon N^d} \;\varepsilon\; \ell^{Q'}_{*}(N^d_+) \qquad .$$

Mas, em virtude da definição da melhor aproximação dual e de 4.4.3 (2) temos que

$$E'_N(f')_{P'} = \|f'\|_{(Q_N;L^{P'}_{\pi}(R^d))}$$

e desse modo a estimada (1') pode ser reescrita na forma

$$\{N^{-S}E'_N(f')_{P'}\}_{N\varepsilon N^d} \;\varepsilon\; \ell^{Q'}_{*}(N^d_+)$$

e esta última forma nos dá a caracterização do dual $(B^S_{P,Q}(T^d))'$ em termos da melhor aproximação dual por quase-polinômios e então escreveremos que

$$f' \;\varepsilon\; (B^S_{P,Q}(T^d))'$$

se, e somente se,

$$f' \;\varepsilon\; \varepsilon'_{\pi}(R^d)$$

e

$$\{N^{-S}E'_N(f)_{P'}\}_{N\in N^d} \in \ell_*^{Q'}(N_+^d)$$

Portanto esta caracterização coincide com aquela obtida em 5.5.4 para $B^S_{P,Q}(T^d)$ através do Teorema 6.1.2 quando substituimos S,P e Q respectivamente por -S, P' e Q', i.e., a melhor aproximação de f por quase-polinômios $E_N(f)_P$, pela melhor aproximação dual de P' pelos quase-polinômios $E'_N(f')_{P'}$.

Os teoremas de caracterização e de dualidade fornecem ainda como consequência as desigualdades duais de Jackson e Bernstein.

Lembrando, em virtude de 6.3.1 e 5.4.5 que os espaços $H_P^{\theta.N}(T^d)$ são espaços de aproximação de ordem $\theta \geqslant 0$ no espaço $L_\pi^P(R^d)$, obtemos como caso particular do teorema 4.4.4 o seguinte:

6.5.4. TEOREMA: Vale a desigualdade de Jackson

$$(J_\theta) \qquad E_N(f)_P \leqslant C\ N^{-\theta}\ E_N(f)_{H_P^{\theta.M}(T^d)}$$

se, e somente se, vale a desigualdade dual de Bernstein

$$(B'_\theta) \qquad \|q'_N\|_{H_P^{-\theta.M}(T^d)} \leqslant C\ N^{-\theta}\|q'_N\|_{L_\pi^{P'}(R^d)}$$

qualquer que seja $q'_N \in (Q_N;L_\pi^P(R^d))$ e vale a desigualdade de Bernstein

$$(B_\theta) \qquad \|q_N\|_{H_P^{\theta.M}(T^d)} \leqslant C\ N^{\theta}\ \|q_N\|_{L_\pi^P(R^d)}$$

se, e somente se, vale a desigualdade dual de Jackson

$$(J'_\theta) \qquad \|f'\|_{(Q_N, L^P_\pi(R^d))'} \leqslant C\, N^\theta \|f'\|_{(Q_N, H^{\theta, M}_P(T^d))'}$$

B I B L I O G R A F I A

[01] - A.BENEDEK - A.PANZONE ; The spaces L^P, with mixed norm, Duke Math. J. 28 (1961) , 301-324 .

[02] - R.BEALS ; Advanced Mathematical Analysis,Springer -Verlag, New York , 1974 .

[03] - J.BERGH - J.LÖFSTRÖM ; Interpolation Spaces, Springer - Verlag, New York , 1976 .

[04] - J.I.BERTOLO - D.L. FERNANDEZ ;On the connection between the Real and the complex Interpolation Method for several Banach Spaces, Rend.Sem.Univ.Padova,vol.66,1982 , 193-209 .

[05] - Ju.A.BRUDNYI ; Approximation of functions of n variables by quasipolynomials, Izv.Akad.Nauk SSSR. Ser. Mat. Tom.34,(1970) , nº 3, 568-586 .

[06] - Ju.A.BRUDNYI ; A multidimensional analog of a theorem of Whitney, Mat.Sbornik, Tom.82(124,(1970)),nº2,157-170

[07] - Ja.S.BUGROV ; Imbedding Theorems for some classes of functions, Trudy Mat.Inst.Steklov.77(1965), 45-64 .

[08] - P.L.BUTZER ; A survey of work on Approximation at Aachen 1968-1972, Proced. of an International Symposium in Numerical Analysis,Austin, Texas, January,22-24,1973,Edited by G.G.Lorentz, Academic Press,Inc.

[09] - P.L.BUTZER - H.BERENS; Semi-groups of operators and Approximation, Springer-Verlag, New York, 1967 .

[10] - P.L.BUTZER - J.R.NESSEL ; Fourier Analysis and Approximation,vol.I:One dimensional theory,Academic Press, New York, 1971 .

[11] - P.L.BUTZER-K.SCHERER ; Über die Fundamentalsätze der klassischen Approximationstheorie in abstrakten Räumen, Abstract Spaces and Approximation,8,Proc.Conf.Math.Res. Inst.Oberwolfach,Black Forest,18-27,1968, 113-125 .

[12] - P.L.BUTZER-K.SCHERER ; On fundamental theorems of Approximation theory and their dual versions, J. Approx. Th. 3, (1970) , 87-100 .

[13] - P.L.BUTZER - K.SCHERER ; On the fundamental theorems of D.Jackson,S.N.Bernstein and Theorems of M.Zamansky and S.B.Steckin, Aeq.Math. vol.3,(1969),170-185 .

[14] - P.L.BUTZER - K.SCHERER ; Approximationsprozesse und Interpolationmethoden, Mannheim , 1968 .

[15] - A.P.CALDERON ; Lebesgue Spaces of Differentiable Functions and Distributions, Proc. of Symposia in Pure Math. Vol.IV, A.M.S.,Partial Diff. Equations, 1961 , 33-49 .

[16] - CSISZPER - FREUD ; Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses Dérivées successives par um polynome trigonométrique et par ses dérivées successives,Acta Mathematica,99 Uppsala, 1967 (33-51) .

[17] - P.J.DAVIS ; Interpolation and Approximation, Dover Publ. Inc., New York , 1975 .

[18] - R.E. EDWARDS ; Fourier Series , Vol. I - II , Holt , Rinehart and Winston , 1967 , x + 208 pp./ ix + 318 pp.

[19] - D.L.FERNANDEZ ; Interpolation of 2^n Banach Spaces,Studia Math. 65 (1979) , 175-201 .

[20] - D.L.FERNANDEZ ; On the interpolation of 2^n Banach Spaces(1) , Bull.Inst.Polyth.Iasi; 24(I-2), 49-54 .

[21] - D.L.FERNANDEZ ; Duality of interpolation spaces of several Banach Spaces,Acta Sci.Math.44(1982),43-51 .

[22] - D.L.FERNANDEZ ; Interpolation of Sobolev-Nikolskii Spaces,Atas do 18º Sem.Bras.de Análise,Rio,nov de 1983 .

[23] - D.L.FERNANDEZ ; Interpolation of 2^n Banach Spaces and Multiparametric Approximation,J.Approx. Theory , 38 (1983), 240-257 .

[24] - D.L.FERNANDEZ; On Besov-Nikol'skii Spaces. Pre-print .

[25] - H.JOHNEN ; Über sätze von M.Zamansky und S.B. Steckin und ihre Umkehrungen auf dem n-dimensionalen Torus,J. Approx. Theory 2 (1969), 97-110 .

[26] - T.G.KIPIANI ; Direct and converse theorems on the approximation of a class of functions with a dominant derivatives,Sakharth-SSR Mech.Akad.Moambe 86(1970), 541-544 .

[27] - P.I.LIZORKIN - S.M.NIKOLSKII ; A classification of differentiable functions in some fundamental spaces with dominant mixed derivative; Trudy Mat.Inst.Steklov 77, (1965), 143-167 = Proc.Steklov Inst.Math.77(1965),160-187 .

[28] - J.MARCINKIEWICZ ; Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math. 8(1939), 78-91 .

[29] - R.J.NESSEL - G.WILMES ; A multiplier criterion in Euclidean n-space with applications to Bernstein Inequalities;Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 44(1975),143-151 .

[30] - S.M.NIKOLSKII ; A course of Mathematical Analysis, MIR Publ. Vol.I-II , Moscou , 1977 .

[31] - S.M.NIKOLSKII ; Approximation of functions of several variables and imbedding Theor.,Springer,Berlin, 1975 .

[32] - S.M.NIKOLSKII ; Functions with dominant mixed derivative satisfying a multiple Hölder condition, English Tr. Amer.Math.Soc. Transl. (2), 102(1973), 27-51 .

[33] - J.PEETRE ; A theory of interpolation of Normed Spaces. Notas de Matemática nº 39, IMPA, 1968 .

[34] - J.PEETRE ; New Thoughts on Besov Spaces; Duke Univ.Math Series nº 1, Durham , N.C., 1976 .

[35] - M.K.POTAPOV ; On "angular" approximation; Proc.conference Construtive Function Theory (Budapest,1969),Akad Kiadó, Budapest, 1972 , 371-399 .

[36] - M.K.POTAPOV ; Investigation of certain classes of functions by "angular" approximation,Proc.Steklov Inst. Math. 117 (1972) , 301-342 .

[37] - M.K.POTAPOV ; Certain conditions for mixed derivatives to belong to L_p, Mathematica (Cluj), 10 (33), (1968) , 355-367 .

[38] - W.RUDIN ; Functional Analysis ; Tata Mc-Graw Hill Co. New Delhi , 1974 .

[39] - K.SCHERER ; Über die dualen von Banachräumen,die durch lineare Approximationsprozesse erzeugt werden, und anwendungen für periodische Distributionen, Acta Math. Acad.Sci.Hungaricae, Tomus 23(3-4),(1972),343-365 .

[40] - L.SCHWARTZ ; Théorie des distributions,vol.I-II, Paris 1950-1951 .

[41] - U.SODRÉ ; Teoria de Interpolação e teoria de Aproximação, dissertação de mestrado, UNICAMP,Campinas,1977 .

[42] - U.SODRÉ ; Interpolação de vários espaços de Banach e a teoria de aproximação,Atas do 8º Sem.Bras.de Análise , Brasília , 1978 .

[43] - G.SPARR ; Interpolation of several Banach Spaces, Ann. Mat.Pura App. 99(1974) , 247-316 .

[44] - M.TAIBLESON ; On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space,I;J.Math.Mech. 13, (1964),407-479 ; II , J.Math.Mech.14(1965),821-839 .

[45] - TIMAN, A.F. ; Theory of aproximation of functions of a Real Variable , Pergamon Press , New York , 1963 .

[46] - H.TRIEBEL ; Theory of Functions Spaces,Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig , 1983 .

[47] - V.VLADIMIROV ; Distributions en Physique Mathēmatique, Editions Mir , Moscou , 1979 .

[48] - VO-KHAC KHOAN ; Distributions; Analyse de Fourier, Operateurs aux Dērivēes Partielles, Vol.I-II,Librairie Vuibert, Paris , 1972 .

[49] - S.WAINGER ; Special trigonometric series in k-dimensions , Mem.Amer. Math. Soc. , 59 (1965), S.102 .

[50] - A.YOSHIKAWA ; Sur la thēorie d'espaces d'interpolation des espaces de moyenne de plusiers espaces de Banach , J.Fac.Sci.Univ.Tokio, (3), 16(1970), 407-468 .

[51] - K.YOSIDA ; Functional Analysis , 5st.edition,Springer, New York, 1978 .

[52] - V.A.YUDIN ; The multidimensional Jackson Theorem , Math. Notes 20 (1976) , 801-804 .

[53] - A.ZYGMUND ; Trigonometric Series; Cambridge Univ.Press 1968 .