

Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Redução de Modelos de Sistemas Discretos

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Fernando Ryu Ramos Kawaoka

Engenheiro Eletricista — FEEC/UNICAMP(2003)

em 10 de setembro de 2004 perante a banca examinadora:

José Cláudio Geromel

Orientador

Alexandre Trofino Neto - UFSC

Akebo Yamakami - FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

K179r Kawaoka, Fernando Ryu Ramos
Redução de modelos sistemas discretos / Fernando
Ryu Ramos Kawaoka. --Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: José Cláudio Geromel.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistema lineares invariantes no tempo. 2. Sistemas
de tempo discreto. 3. Programação (matemática). I.
Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.

REDUÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS DISCRETOS

Autor: Fernando Ryu Ramos Kawaoka
Orientador: Prof. Dr. José Cláudio Geromel

*Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais
para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.*

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto - UFSC
Prof. Dr. Akebo Yamakami - FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. José Cláudio Geromel - FEEC/UNICAMP

Resumo

Esta dissertação descreve dois novos métodos de redução de ordem de modelos a tempo discreto, baseados na minimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do erro de redução. Os métodos são definidos a partir de um problema de programação convexa dado em termos de desigualdades matriciais lineares. A solução assim obtida é subótima.

Os métodos são comparados ao truncamento balanceado, procedimento clássico para a redução de modelos. Quanto à redução em norma \mathcal{H}_2 , os resultados indicam que o método proposto tem desempenho equivalente àquele do truncamento balanceado. No caso \mathcal{H}_∞ , no entanto, o método proposto apresenta desempenho significativamente superior.

Abstract

This work describes two new methods for model reduction of discrete time models, based on the minimization of the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms of the reduction error. The methods are defined by a convex optimization problem given in terms of linear matrix inequalities. The resulting solution is suboptimal.

The methods are compared to the balanced truncation, a classical model reduction procedure. The results indicate that, with respect to the \mathcal{H}_2 norm reduction, the proposed method has a similar performance to that from balanced truncation. In the \mathcal{H}_∞ case, however, the proposed method performs significantly better.

“E disse. Eu conheci! Como em todo o tempo antes eu não contei ao senhor — e mercê peço: — mas para o senhor divulgar comigo, a par, justo o travo de tanto segredo, sabendo somente no átimo em que eu também só soube... Que Diadorim era o corpo de uma mulher, moça perfeita... Estarreci. A dor não pode mais do que a surpresa. A côice d’arma de coronha.”

João Guimarães Rosa, *Grande Sertão: Veredas*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização deste trabalho. Em particular, agradeço

- ao professor José Cláudio Geromel, pelo entusiasmo, brilhantismo e dedicação;
- ao professor Mauricio Carvalho de Oliveira, pela paciência ao me explicar os resultados mais óbvios da teoria de controle;
- à FAPESP, pelo suporte e organização exemplares;
- à UNICAMP e aos professores que souberam ir além do quadro-negro;
- aos amigos Levin, Reinaldo, e Luiz, com quem devo dividir todo o mérito deste trabalho;
- aos amigos do Canil, minha segunda família;
- aos colegas da graduação, por estes cinco anos de convivência;
- a Isabella e a minha família, pelo carinho e pelo apoio.

Índice

Lista de Tabelas	vi
1 Introdução e Notação	1
1.1 Notação	2
2 Fundamentos	3
2.1 Desigualdades matriciais e LMIs	3
2.1.1 LMIs, teoria de controle e otimização convexa	9
2.2 Sistemas Discretos LTI	10
2.3 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	14
2.4 Redução de Modelos	16
3 Redução de Modelos via Desigualdades Matriciais Lineares	19
3.1 Definição do Problema	20
3.2 Redução de Modelos em Norma \mathcal{H}_2	21
3.3 Redução de Modelos em Norma \mathcal{H}_∞	33
4 Avaliação dos Métodos de Redução Propostos	43
4.1 Comparação numérica	43
4.2 Aplicação ao Modelo de uma Estrutura Flexível	46
4.3 Aplicação a um sistema de massas, molas e amortecedores	49
4.4 Conclusão	52
Referências Bibliográficas	53

Lista de Figuras

4.1	Redução de modelos em norma \mathcal{H}_2	45
4.2	Redução de modelos em norma \mathcal{H}_∞ – primeira comparação.	46
4.3	Redução de modelos em norma \mathcal{H}_∞ – segunda comparação.	47
4.4	Barra engastada de seção transversal variável.	48
4.5	Resposta ao impulso entre o primeiro atuador e o primeiro sensor.	51
4.6	Valor singular máximo dos erros de redução.	52

Lista de Tabelas

4.1	Norma \mathcal{H}_2 do erro de redução.	48
4.2	Norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução.	48
4.3	Norma \mathcal{H}_2 do erro de redução.	51
4.4	Norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução.	52

Capítulo 1

Introdução e Notação

Esta dissertação descreve dois novos métodos de redução de ordem de modelos em tempo discreto, baseados na minimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do erro de redução. A discussão é restrita a modelos estáveis, lineares e invariantes no tempo.

O problema de redução ótima em norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ ainda está em aberto, no sentido de que não são conhecidos métodos que garantidamente calculem sua solução ótima em tempo razoável. Os métodos introduzidos por esta dissertação propõem uma solução subótima, baseada na escolha *a priori* de uma das variáveis do problema. Esta escolha, realizada de forma a minimizar o grau de subotimalidade da solução, é o ponto fundamental do método.

O problema de redução de modelos em norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ é formulado em termos de um problema de otimização. As restrições são dadas por desigualdades matriciais não-lineares e por um limite sobre o posto de determinadas variáveis do problema. Grande parte do que é discutido na dissertação gira em torno da linearização destas restrições, i.e. busca-se uma formulação dada por um problema de otimização expresso unicamente em termos de desigualdades matriciais lineares e relações lineares entre as variáveis. A grande vantagem desta formulação é sua convexidade, que permite a aplicação de algoritmos extremamente eficientes ao problema.

A dissertação está dividida em quatro capítulos, dos quais o primeiro inclui esta introdução e a listagem da notação utilizada nos capítulos seguintes .

O capítulo 2 traz conceitos e resultados fundamentais e desenha o pano de fundo para o desenvolvimento dos capítulos 3 e 4. Este capítulo tem o intuito de servir de orientação para o estudante que não seja especialista em controle ótimo.

O capítulo 3 demonstra os principais resultados da dissertação e propõe os dois novos métodos de redução citados. A redução em norma \mathcal{H}_2 é discutida antes da redução em norma \mathcal{H}_∞ , por apresentar resultados mais simples. O texto reflete o fato de os dois casos serem, em sua maior parte, análogos.

O capítulo 4 avalia os métodos propostos no capítulo 3 a partir de uma comparação com o truncamento balanceado, procedimento clássico de redução. Na seção 4.1, a comparação é realizada com base em modelos gerados aleatoriamente, e, nas seções 4.2 e 4.3, são utilizados modelos de sistemas reais: uma barra flexível e um sistema de massas acoplados por molas e amortecedores.

Os resultados apresentados por esta dissertação são análogos àqueles obtidos por Egas (2004), que trata da redução de modelos em tempo contínuo. Os dois trabalhos foram desenvolvidos em conjunto e devem muito à flexibilidade garantida pelo Programa Integrado de Formação (PIF) da UNICAMP. O trabalho conjunto gerou quatro artigos, três já aceitos para publicação (Geromel, Egas e Kawaoka 2004a, Geromel, Kawaoka e Egas 2004a, Geromel, Egas e Kawaoka 2004b, Geromel, Kawaoka e Egas 2004b).

1.1 Notação

Buscou-se conservar a notação comumente utilizada nos artigos e livros da área, embora muitas vezes seja difícil identificar o uso que pode ser chamado de padrão. A lista abaixo deve evitar qualquer ambigüidade.

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais;
\mathbb{C}	conjunto dos números complexos;
$(')$	transposição;
(\bullet)	respectivo bloco simétrico;
ζ	variável complexa da transformada Z ;
$\text{tr}(\cdot)$	função traço;
$H(\zeta) = \left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	forma compacta para representar uma função de transferência a partir de uma de suas realizações no espaço de estados;
$\text{diag}(A, B)$	construção de uma matriz bloco diagonal, onde as submatrizes A e B compõem sua diagonal principal;
$\lambda(\cdot)$	autovalor qualquer da matriz (\cdot) ;
$\lambda_{\max}(\cdot)$	autovalor máximo da matriz (\cdot) ;
$\bar{\sigma}(A)$	valor singular máximo da matriz A , $\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(AA')}$;
$\rho(A)$	posto da matriz A ;
■	fim de uma demonstração.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Desigualdades matriciais e LMIs

Esta seção discute as desigualdades matriciais e, mais especificamente, as desigualdades matriciais lineares¹ (LMIs). Os conceitos e resultados apresentados são simples, mas fundamentais para a clareza do restante do texto.

Inicialmente, convém definir os conceitos de positividade e negatividade de uma matriz simétrica.

Definição 2.1 *Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real e simétrica.*

$$i. \quad Q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'Qx > 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

$$ii. \quad Q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'Qx \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

$$iii. \quad Q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'Qx < 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

$$iv. \quad Q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'Qx \leq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

No primeiro caso, Q é dita positiva definida, no segundo caso, positiva semi-definida, no terceiro caso, negativa definida e, no quarto caso, negativa semi-definida. Se não se encaixar em nenhum dos casos acima, a matriz Q é dita indefinida.

O teorema a seguir introduz condições necessárias e suficientes para a positividade ou negatividade de uma matriz real e simétrica em função unicamente de seus autovalores. Vale observar que os autovalores de uma matriz simétrica e real são necessariamente reais.

¹Do inglês *Linear Matrix Inequalities*.

Teorema 2.2 *Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real e simétrica. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- i. $Q > 0 \Leftrightarrow$ Todos os autovalores de Q são positivos.
- ii. $Q \geq 0 \Leftrightarrow$ Nenhum autovalor de Q é negativo.
- iii. $Q < 0 \Leftrightarrow$ Todos os autovalores de Q são negativos.
- iv. $Q \leq 0 \Leftrightarrow$ Nenhum autovalor de Q é positivo.

A prova deste teorema pode ser encontrada em Strang (1988).

O conceito de desigualdade matricial deriva naturalmente da definição acima. Se Q_1 e Q_2 são matrizes reais, simétricas, e de mesma dimensão, a desigualdade $Q_1 > Q_2$ é verdadeira, se e somente se a matriz $(Q_1 - Q_2)$ for positiva definida. Da mesma forma, a desigualdade $Q_1 \geq Q_2$ é verdadeira, se e somente se a matriz $(Q_1 - Q_2)$ for positiva semi-definida.

As LMIs são desigualdades matriciais que dependem linearmente de uma variável $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, conforme a definição abaixo.

Definição 2.3 (LMI) *Recebe o nome de desigualdade matricial linear, ou LMI, uma desigualdade matricial na forma*

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.1)$$

em que o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável do problema, x_i é o seu i -ésimo elemento, e as matrizes $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$, são dadas.

Na maioria dos casos, não é conveniente escrever uma desigualdade matricial linear na forma padrão (2.1). Assim, recebe o nome de LMI qualquer desigualdade matricial cuja equivalência com uma desigualdade na forma padrão (2.1) seja óbvia. O lema a seguir discute um caso especialmente freqüente.

Lema 2.4 *O conjunto de LMIs $\{F_k(x) > 0\}_{k=1}^p$ sempre pode ser escrito como uma única LMI na forma padrão (2.1).*

Prova: A prova deste lema é sugerida por Boyd, Ghaoui, Feron e Balakrishnan (1994b). Da definição 2.1, as LMIs $\{F_k(x) > 0\}_{k=1}^p$ são simultaneamente satisfeitas, se e somente se a LMI

$F(x) = \text{diag}\{F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x)\} > 0$ também for satisfeita. ■

O conjunto definido por uma LMI é sempre convexo. Esta propriedade, importante no contexto dos problemas de otimização, é demonstrada pelo lema a seguir.

Lema 2.5 *O conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a LMI $F(x) > 0$ é convexo.*

Prova: Sejam u e $v \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, F(x) > 0\}$ dois vetores que satisfaçam a LMI $F(x) > 0$, e w uma combinação convexa de u e v dada por $w = \alpha u + (1 - \alpha)v$, em que $0 \leq \alpha \leq 1$. O conjunto Ω é convexo, se e somente se w pertence a Ω para quaisquer u, v e α nos conjuntos dados (Luenberger 1973). Observando a expressão (2.1), verifica-se que

$$\begin{aligned} F(w) &= F_0 + \sum_{i=1}^m [\alpha u_i + (1 - \alpha)v_i] F_i \\ &= \alpha F(u) + (1 - \alpha)F(v) > 0. \end{aligned}$$

A combinação convexa w pertence, portanto, ao conjunto Ω . ■

Os cinco lemas abaixo distanciam-se da discussão anterior, no sentido de que apresentam resultados mais sofisticados, entre eles, por exemplo, o Complemento de Schur. Estes resultados permitem a simplificação das desigualdades matriciais lineares e não-lineares obtidas com a formulação do problema de redução no capítulo 3.

Lema 2.6 (Complemento de Schur) *Considere a matriz real e simétrica*

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & \bullet \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix},$$

em que $Q_{11} = Q'_{11}$ e $Q_{22} = Q'_{22}$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- i. $Q > 0$
- ii. $Q_{11} > 0$ e $Q_{22} - Q_{21} Q_{11}^{-1} Q'_{21} > 0$
- iii. $Q_{22} > 0$ e $Q_{11} - Q'_{21} Q_{22}^{-1} Q_{21} > 0$

A prova deste lema pode ser encontrada em Geromel, Colaneri e Locatelli (1997).

Lema 2.7 *Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada não-singular e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real e simétrica. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

$$i. A > 0 \Leftrightarrow P'AP > 0$$

$$ii. A < 0 \Leftrightarrow P'AP < 0$$

$$iii. A \geq 0 \Leftrightarrow P'AP \geq 0$$

$$iv. A \leq 0 \Leftrightarrow P'AP \leq 0$$

Prova: Suponha que A seja positiva definida, mas que $P'AP$ não seja. Então existe um vetor não-nulo $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $(Px)'A Px \leq 0$. Como P é não-singular, o vetor $y \triangleq Px$ é não-nulo e $y'A y \leq 0$, o que contraria a hipótese de que A é positiva definida.

Suponha agora que $P'AP$ seja positiva definida, mas que A não seja. Então existe um vetor não-nulo $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $(PP^{-1}x)'A (PP^{-1}x) \leq 0$. Como P é não-singular, o vetor $y \triangleq P^{-1}x$ é não-nulo e $y'(P'AP)y \leq 0$, o que contraria a hipótese de que $P'AP$ é positiva definida.

A demonstração dos itens *ii*, *iii* e *iv* é análoga. ■

Lema 2.8 Considere as matrizes simétricas Q e \hat{Q} dadas por

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & \bullet & \bullet \\ Q_{21} & Q_{22} & \bullet \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q_{22} & \bullet & \bullet \\ Q'_{21} & Q_{11} & \bullet \\ Q_{32} & Q_{31} & Q_{33} \end{bmatrix}.$$

As seguintes afirmações são verdadeiras.

$$i. Q > 0 \Leftrightarrow \hat{Q} > 0$$

$$ii. Q < 0 \Leftrightarrow \hat{Q} < 0$$

$$iii. Q \geq 0 \Leftrightarrow \hat{Q} \geq 0$$

$$iv. Q \leq 0 \Leftrightarrow \hat{Q} \leq 0$$

Prova: Basta aplicar o lema 2.7 à matriz $\hat{Q} = P'QP$, em que P é uma matriz de permutação de colunas, não-singular, dada por

$$P \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

■

Lema 2.9 (Complemento de Schur) *Considere a matriz simétrica Q dada por*

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & \bullet & \bullet \\ Q_{21} & Q_{22} & \bullet \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}.$$

As seguintes afirmações são equivalentes.

i. $Q > 0$

ii. $Q_{22} > 0$ e $\begin{bmatrix} Q_{11} & Q'_{31} \\ Q_{31} & Q_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{21} \\ Q_{32} \end{bmatrix} Q_{22}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{21} & Q'_{32} \end{bmatrix} > 0$

Prova: A equivalência é obtida diretamente da aplicação do lema 2.6 e do lema 2.7 à desigualdade do item i. ■

O fato de ambos os lemas 2.6 e 2.9 serem denominados *Complemento de Schur* não deve dar margem a ambigüidades. O lema 2.9 é, de fato, um caso particular do lema 2.6.

Lema 2.10 (Eliminação) *Dadas as matrizes Ω , Ψ e Θ , existe uma matriz Υ tal que*

$$\Omega + \Psi\Upsilon\Theta' + \Theta\Upsilon'\Psi' > 0,$$

se e somente se $\hat{\Psi}'\Omega\hat{\Psi} > 0$ e $\hat{\Theta}'\Omega\hat{\Theta} > 0$, em que $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Theta}$ são os complementos ortogonais de Ψ e Θ , respectivamente.

A prova do Lema da Eliminação pode ser encontrada em Boyd et al. (1994b).

Os lemas abaixo introduzem resultados simples, não necessariamente relacionados a desigualdades matriciais, aos quais o capítulo 3 faz referência. Ao apresentá-los aqui, procura-se manter um grau mínimo de autonomia no texto.

Lema 2.11 *Para quaisquer matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, verifica-se que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.*

Prova: O termo (i, j) da matriz AB é dado por $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, de forma que

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ik} = \text{tr}(BA). \quad (2.2)$$

■

Lema 2.12 *Sejam Q , R e Z matrizes reais, simétricas e de mesma dimensão. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

i. $Z > 0 \Rightarrow \text{tr}(Z) > 0$.

ii. $Q > R \Rightarrow \text{tr}(Q) > \text{tr}(R)$.

iii. $Q > R$ e $Z > 0 \Rightarrow \text{tr}(QZ) > \text{tr}(RZ)$.

iv. $Q > R$ e $Z > 0 \Rightarrow \lambda_{\max}(QZ) > \lambda_{\max}(RZ)$.

Prova: A decomposição de $Z = Z' > 0$ em valores singulares é dada por $Z = U\Sigma U'$, com U unitária. Verifica-se, portanto, que $\text{tr}(Z) = \text{tr}(U\Sigma U') = \text{tr}(U'U\Sigma) = \text{tr}(\Sigma)$. Os valores singulares de Z são necessariamente positivos, de forma que $\text{tr}(Z) = \text{tr}(\Sigma) > 0$, o que prova o item *i*.

Da linearidade do traço, $\text{tr}(Q) - \text{tr}(R) = \text{tr}(Q - R)$. Como a matriz $(Q - R)$ é positiva definida, o item *i* garante que $\text{tr}(Q) - \text{tr}(R) > 0$, o que prova o item *ii*.

Da linearidade do traço, verifica-se que $\text{tr}(QZ) - \text{tr}(RZ) = \text{tr}[(Q - R)Z]$. A decomposição de $Z = Z' > 0$ em valores singulares é dada por $Z = U\Sigma U'$, com U unitária e Σ não-singular. Do lema 2.11, verifica-se, portanto, que $\text{tr}(QZ) - \text{tr}(RZ) = \text{tr}[\Sigma^{1/2}U'(Q - R)U\Sigma^{1/2}]$. Como $Q - R > 0$, o lema 2.7 garante que $\Sigma^{1/2}U'(Q - R)U\Sigma^{1/2} > 0$, o que prova o item *iii*.

Decompondo Z como acima e definindo $P = U\Sigma^{1/2}$, verifica-se que $\lambda(QZ) = \lambda(P'QP)$ e que $\lambda(RZ) = \lambda(P'RP)$. Sejam u e v dois vetores unitários associados aos autovalores máximos de QZ e RZ , respectivamente. Da definição de u , é possível concluir que $v'P'QPv \leq u'P'QPu = \lambda_{\max}(QZ)$. Assim, se o autovalor máximo de QZ é menor do que o autovalor máximo de RZ , então necessariamente $v'P'(Q - R)Pv \leq 0$, o que contradiz a hipótese da positividade de $(Q - R)$ e prova o item *iv*. ■

Lema 2.13 (Desigualdade de Sylvester) *Dadas $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, verifica-se que*

$$\rho(A) + \rho(B) - n \leq \rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}, \quad (2.3)$$

em que $\rho(A)$ e $\rho(B)$ denotam o posto das matrizes A e B , respectivamente.

Prova: A prova deriva da identidade entre o posto de uma matriz e a dimensão da sua imagem, e do fato de que a nulidade de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ qualquer é dada por $n - \rho(A)$. ■

2.1.1 LMIs, teoria de controle e otimização convexa

As LMIs aparecem no contexto da teoria de controle pela primeira vez no fim do século XIX, no artigo em que Lyapunov discute a estabilidade de sistemas dinâmicos. Desde então, diversos pesquisadores têm se dedicado ao seu estudo, seja através da formulação de problemas de controle em termos de LMIs, ou através da busca por soluções para estas mesmas formulações. Em especial, nas últimas duas décadas do século XX, o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes para a solução de LMIs incentivou a pesquisa por novas formulações para antigos problemas de controle. Alguns problemas até então considerados intratáveis foram resolvidos neste período. Em Boyd, Ghaoui, Feron e Balakrishnan (1994a), discute-se com mais detalhes estes acontecimentos.

Dentro da teoria de controle, o termo LMI é utilizado tanto para as desigualdades matriciais na forma (2.1), quanto para problemas de factibilidade ou de otimização envolvendo estas mesmas desigualdades. Assim, quando se fala em *solução* de uma LMI refere-se, de fato, à solução de um dos dois problemas a seguir.

- . **Problema de factibilidade:** Dada a LMI $F(x) > 0$ na variável $x \in \mathbb{R}^n$, o problema de factibilidade consiste em determinar se existe $x_f \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x_f) > 0$ e, se possível, em obter x_f .
- . **Problema de otimização:** Dadas a LMI $F(x) > 0$ na variável $x \in \mathbb{R}^n$ e a função objetivo $f(x) = c'x$, em que $c \in \mathbb{R}^n$ é dado, o problema de otimização consiste em determinar $x_f \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x_f) > 0$ que minimize a função objetivo. Este problema é formalmente descrito por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) = c'x \mid F(x) > 0\}. \quad (2.4)$$

Neste trabalho, formula-se o problema de redução de modelos lineares discretos como um problema de otimização na forma (2.4), com função objetivo linear e restrições em termos de LMIs. O interesse nesta formulação deve-se ao fato de que foram desenvolvidos e implementados algoritmos muito eficientes para a sua solução.

A eficiência dos algoritmos para a solução de LMIs baseia-se, antes de tudo, no fato de que (2.4) é um problema de otimização convexa, em que pesa a identidade fundamental entre mínimos locais e globais. Boyd et al. (1994b) cita um artigo de Rockafellar (Rockafellar 1993) em que o autor destaca a importância da convexidade no contexto dos problemas de otimização. “Uma série de propriedades favoráveis à obtenção e à interpretação de soluções derivam deste conceito e, de fato, o grande divisor de águas [dentro da teoria da otimização] encontra-se não

entre problemas lineares e não-lineares, mas entre problemas convexos e não-convexos.”

Para resolver os exemplos numéricos discutidos no capítulo 4, utilizou-se o programa LMI-Solver, desenvolvido na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP (de Oliveira, de Farias e Geromel 1997). O núcleo do programa é um algoritmo de pontos interiores específico para problemas de otimização na forma (2.4) e aceita, além das LMIs, restrições na forma de igualdades matriciais afins. Algoritmos de pontos interiores para LMIs são extremamente eficientes e derivam do trabalho de Karmarkar, Nesterov e Nemirovsky ainda na década de 80. Uma discussão mais detalhada deste e de tópicos relacionados pode ser encontrada em Boyd et al. (1994b) e de Oliveira (1996).

2.2 Sistemas Discretos LTI

Este trabalho aborda a redução de sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo (sistemas discretos LTI). São apresentados abaixo a notação utilizada para representar estes sistemas e alguns conceitos e resultados associados a que fazem referência os capítulos 3 e 4.

Todo sistema discreto LTI pode ser representado por sua função de transferência $H(\zeta)$ ou por uma realização no espaço de estados dada por

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k). \end{cases} \quad (2.5)$$

em que as matrizes A , B , C e D têm dimensões apropriadas, $u(k)$ é o sinal de entrada, $y(k)$ é o sinal de saída, e $x(k)$ é o estado do sistema. A relação entre as duas representações é dada por

$$H(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B + D. \quad (2.6)$$

Por conveniência, utiliza-se a notação a seguir para indicar tanto a função de transferência, quanto uma de suas realizações no espaço de estados.

$$H(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B + D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \quad (2.7)$$

Como sugerido acima, há infinitas possíveis realizações para um dado sistema ou função de transferência. O lema abaixo parametriza um conjunto destas realizações em função de uma matriz não-singular Δ .

Lema 2.14 (Similaridade) *Dois sistemas são ditos similares, se suas funções de transferência são iguais. Neste sentido, o sistema $\hat{H}(\zeta)$ dado por*

$$\hat{H}(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \Delta A \Delta^{-1} & \Delta B \\ \hline C \Delta^{-1} & D \end{array} \right] \quad (2.8)$$

é similar ao sistema $H(\zeta)$ dado por

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (2.9)$$

em que Δ é, por hipótese, não-singular.

Prova: Da relação entre a representação no espaço de estados e a correspondente função de transferência, verifica-se que

$$\begin{aligned} \hat{H}(\zeta) &= C \Delta^{-1} (\zeta I - \Delta A \Delta^{-1})^{-1} \Delta B + D \\ &= C (\zeta \Delta - \Delta A)^{-1} \Delta B + D \\ &= C (\zeta I - A)^{-1} B + D \\ &= H(\zeta), \end{aligned}$$

o que prova o lema proposto. ■

Não necessariamente a ordem da realização — seu número de estados — é igual à ordem da correspondente função de transferência — seu número de pólos. De fato, a ordem da realização é sempre maior ou igual àquela da função de transferência, uma vez que esta representa o sistema apenas do ponto de vista da relação entre seus sinais de entrada e saída. Uma realização no espaço de estados é dita mínima, quando a sua ordem e a ordem da função de transferência correspondente são iguais.

A controlabilidade e a observabilidade são conceitos fundamentais para o estudo dos sistemas dinâmicos e levam a uma interpretação importante da diferença entre as ordens da realização e da função de transferência de um sistema. Um sistema é dito controlável, se sempre é possível levá-lo de um estado x_1 qualquer para um estado x_2 qualquer, e é dito observável, se sempre é possível identificar seu estado inicial a partir da observação de sua saída. Os teoremas 2.15 e 2.16 abaixo estabelecem condições necessárias e suficientes para a controlabilidade e a observabilidade de um sistema LTI discreto.

Teorema 2.15 (Controlabilidade) *Considere o sistema discreto LTI assintoticamente estável dado pela realização no espaço de estados (2.5). As seguintes afirmações são equivalentes.*

- i. *O sistema é controlável.*
- ii. *O gramiano de controlabilidade associado ao sistema, definido por*

$$P_c \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B' (A')^k, \quad (2.10)$$

é positivo definido.

- iii *Se n é o número de estados do sistema, a matriz de controlabilidade do sistema, definida abaixo, tem posto n .*

$$W_c \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Teorema 2.16 (Observabilidade) *Considere o sistema discreto LTI assintoticamente estável dado pela realização no espaço de estados (2.5). As seguintes afirmações são equivalentes.*

- i. *O sistema é observável.*
- ii. *O gramiano de observabilidade associado ao sistema, definido por*

$$P_o \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k C' C A^k, \quad (2.12)$$

é positivo definido.

- iii *Se n é o número de estados do sistema, a matriz de observabilidade do sistema, definida abaixo, tem posto n .*

$$W_o \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A prova dos teoremas 2.15 e 2.16 pode ser encontrada em Kailath (1980).

Vale observar que é comum não distinguir o sistema de sua realização no espaço de estados, como nos teoremas acima. No entanto, se se entende que o sistema é definido por sua função

de transferência, deixa de fazer sentido afirmar que ele é ou não controlável ou observável, já que há infinitas realizações possíveis para uma dada função de transferência. Neste caso, a controlabilidade e a observabilidade são propriedades da realização e não do sistema em si.

Kailath (1980) demonstra que uma realização é mínima, se e somente se ela é controlável e observável. A diferença de ordem entre a realização e a correspondente função de transferência é determinada, portanto, pelo fato de alguns estados definidos pela realização serem não-controláveis ou não-observáveis. Este resultado é aplicado na formulação do problema de redução no capítulo 3. Nele, o modelo reduzido é descrito por uma realização de ordem igual àquela do modelo original, mas impõe-se que alguns de seus estados sejam não-observáveis, de forma que sua função de transferência tenha ordem reduzida. A solução do problema é dada, assim, por uma realização mínima associada à função de transferência do modelo reduzido.

A estabilidade assintótica é outra propriedade fundamental para a descrição de sistemas dinâmicos. O lema abaixo estabelece as condições necessárias e suficientes para que um sistema discreto LTI definido por sua realização no espaço de estados seja assintoticamente estável.

Lema 2.17 (Estabilidade assintótica) *Considere o sistema discreto LTI descrito por sua realização no espaço de estados (2.5). As seguintes afirmações são equivalentes.*

- i. O sistema é assintoticamente estável.*
- ii. Todos os autovalores da matriz A têm módulo estritamente menor do que a unidade.*
- iii. A solução P da equação de Lyapunov $A'PA - P + Q = 0$, com $Q = Q' > 0$, é única e positiva definida.*

A prova deste lema pode ser encontrada em Kailath (1980).

Os gramianos de controlabilidade e observabilidade associados a um sistema discreto LTI assintoticamente estável e descrito por (2.5) podem ser calculados através da solução das equações de Lyapunov

$$AP_cA' - P_c + BB' = 0, \quad (2.14)$$

$$A'P_oA - P_o + C'C = 0, \quad (2.15)$$

em que P_c e P_o são os gramianos de controlabilidade e observabilidade, de acordo com as definições (2.10) e (2.12), respectivamente. Glover (1984) discute com mais detalhes a relação entre os gramianos, a controlabilidade e a observabilidade de sistemas dinâmicos. A discussão leva naturalmente à definição do truncamento balanceado e da redução ótima em norma de Hankel, dois métodos clássicos de redução de modelos.

2.3 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

As normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ operam sobre o espaço das funções $H(\zeta) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, do qual fazem parte as funções de transferência de sistemas dinâmicos MIMO lineares, estáveis e invariantes no tempo. Cada uma das duas normas introduz uma forma de medir a distância entre sistemas dinâmicos quaisquer e, neste sentido, são fundamentais para a definição do problema de redução de modelos via otimização.

Esta seção define as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e discute o seu cálculo para o caso particular em que $H(\zeta)$ é a função de transferência de um sistema dinâmico MIMO linear, estável e invariante no tempo.

Definição 2.18 (Norma \mathcal{H}_2) *Considere a matriz racional $H(\zeta)$ analítica para $|\zeta| \geq 1$. A norma \mathcal{H}_2 de $H(\zeta)$ é definida por (de Oliveira 1999)*

$$\|H(\zeta)\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} \left[H^*(e^{j\theta}) H(e^{j\theta}) \right] d\theta \quad (2.16)$$

$$= \sum_0^{\infty} \text{tr} [h(k)h(k)'], \quad (2.17)$$

em que $h(k)$ é a transformada Z inversa de $H(\zeta)$.

Definição 2.19 (Norma \mathcal{H}_∞) *Considere a matriz racional $H(\zeta)$ analítica para $|\zeta| \geq 1$. A norma \mathcal{H}_∞ de $F(\zeta)$ é definida por (de Oliveira 1999)*

$$\|H(\zeta)\|_\infty \triangleq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma} \left[H(e^{j\theta}) \right].$$

Os dois lemas a seguir estabelecem condições necessárias e suficientes para que a norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ de um sistema estável seja inferior a um dado $\gamma > 0$. Estas condições são utilizadas, no capítulo 3, para formular o problema de redução de modelos em norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Lema 2.20 *Considere o sistema discreto, assintoticamente estável*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = 0 \\ z(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (2.18)$$

e sua função de transferência

$$H(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B + D, \quad (2.19)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$. Sobre este sistema, as seguintes afirmações são equivalentes (de Oliveira 1999).

i. $\|H(\zeta)\|_2^2 < \gamma$

ii. Existem matrizes simétricas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tais que

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} P & A'P & C \\ \bullet & P & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'P & D' \\ \bullet & P & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.22)$$

Lema 2.21 Considere o sistema discreto, assintoticamente estável dado por (2.18) e (2.19). Sobre este sistema, as seguintes afirmações são equivalentes (de Oliveira 1999).

i. $\|H(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$

ii. Existe uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} P & A'P & 0 & C' \\ \bullet & P & PB & 0 \\ \bullet & \bullet & \gamma I & D' \\ \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.23)$$

Os lemas 2.20 e 2.21 sugerem que as norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares, estáveis e in-variantes com o tempo possam ser calculadas através de problemas de otimização com função objetivo γ e restrições dadas pelas LMIs (2.20–2.22), no caso \mathcal{H}_2 , ou pela LMI (2.23), no caso \mathcal{H}_∞ .

Do ponto de vista da relação entrada–saída e de forma simplificada, a norma \mathcal{H}_2 estabelece uma medida da energia do sinal de saída de um sistema para um sinal de entrada impulsivo, e a norma \mathcal{H}_∞ , mais comum no contexto do controle robusto de sistemas, representa a máxima razão entre as energias do sinal de saída e de entrada de um sistema para todos os possíveis sinais de entrada de energia finita. Uma discussão mais detalhada sobre as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ pode

ser encontrada em Doyle, Francis e Tannenbaum (1992), Geromel et al. (1997) e Zhou e Doyle (1998).

2.4 Redução de Modelos

Muitas situações no processo de análise e projeto de sistemas dão origem a modelos de ordem elevada. A descrição da dinâmica de estruturas flexíveis, discutida na seção 4.2, é um caso típico. Modelos de ordem elevada são normalmente evitados na engenharia, tanto porque são mais difíceis de analisar, como porque a implementação de controladores ou filtros de ordem elevada é mais custosa, mais complexa e mais susceptível a falhas (Zhou e Doyle 1998).

O problema de redução trata então de determinar modelos de ordem mais baixa que se aproximem do modelo original segundo algum critério pré-definido. A cada critério corresponde um problema de redução diferente. Skelton e de Oliveira (2001) discutem alguns dos principais métodos de redução a partir das características que buscam preservar no modelo de ordem reduzida.

Dentre os diversos métodos de redução de modelos, o truncamento balanceado destaca-se por sua simplicidade e eficiência e, por este motivo, é utilizado como referência na avaliação dos métodos de redução propostos no capítulo 3. O truncamento balanceado faz parte de uma classe de métodos em que a estratégia comum é encontrar uma realização para o sistema original que deixe em evidência os estados menos significativos para o problema e realizar, em seguida, uma operação simples de truncamento de estados.

Os métodos propostos por esta dissertação fazem parte de uma segunda classe, em que o modelo reduzido é obtido a partir da solução de um problema de otimização e não diretamente a partir do truncamento de estados.

O objetivo desta seção é introduzir o algoritmo do truncamento balanceado e discutir alguns aspectos de interesse no método. A apresentação do algoritmo segue aquela de Skelton e de Oliveira (2001).

Algoritmo 2.1 (Truncamento balanceado) *Seja $H(\zeta)$ um sistema de ordem n , assintoticamente estável, descrito pela realização mínima no espaço de estados*

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \quad (2.24)$$

Considere matrizes F , Σ e U tais que

$$F'F = P_c, \quad (2.25)$$

$$U\Sigma U' = FP_oF', \quad (2.26)$$

em que U e Σ definem uma possível decomposição de FP_oF' em valores singulares, obtida de forma a garantir que os elementos da diagonal de Σ estejam em ordem decrescente. As matrizes P_o e P_c são, respectivamente, os gramianos de observabilidade e controlabilidade associados ao sistema. Considere também a partição para U e Σ dada por

$$U \triangleq \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

em que $U_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$, e $q < n$. O modelo reduzido de ordem q é dado por

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} R'_1 A T_1 & R'_1 B \\ \hline C T_1 & D \end{array} \right], \quad (2.29)$$

em que R_1 e T_1 são obtidas de F , U_1 e Σ_1 segundo

$$T_1 \triangleq F' U_1 \Sigma_1^{-1/4}, \quad (2.30)$$

$$R_1 \triangleq F^{-1} U_1 \Sigma_1^{1/4}. \quad (2.31)$$

A idéia do truncamento balanceado vem da observação de que estados pouco observáveis ou pouco controláveis tendem a ter influência pequena no sinal de saída. É comum, no entanto, que os estados de um sistema sejam simultaneamente pouco observáveis e muito controláveis, ou muito observáveis e pouco controláveis, de forma que não é evidente a identificação dos estados menos significativos.

A solução proposta pelo truncamento balanceado para este problema é determinar, para o sistema original, uma realização em que os gramianos P_c e P_o sejam matrizes diagonais idênticas. Essa realização, dita internamente balanceada, existe para todo sistema na forma (2.24). Como a observabilidade e a controlabilidade dos diversos estados de uma realização estão intimamente associadas aos valores singulares de seus gramianos, torna-se simples, num sistema internamente balanceado, determinar os modos de menor influência no sistema. O modelo reduzido é obtido a partir do truncamento dos modos simultaneamente menos controláveis e menos observáveis

associados aos menores elementos das diagonais de P_c e de P_o .

Uma discussão mais detalhada do truncamento balanceado e de outros métodos de redução via truncamento de estados pode ser encontrada em Glover (1984), Zhou e Doyle (1998), e Skelton e de Oliveira (2001).

Capítulo 3

Redução de Modelos via Desigualdades Matriciais Lineares

Este capítulo define o problema de redução de modelos discretos, lineares e invariantes no tempo e propõe uma solução subótima em termos de um problema de otimização na forma dada por (2.4).

Dois modelos estão envolvidos no processo de redução. O primeiro, dito original, é conhecido precisamente. O segundo, dito reduzido, é desconhecido, mas de ordem dada. O problema consiste em determinar o modelo reduzido que melhor aproxime o modelo original segundo um critério específico.

Esta dissertação restringe-se ao estudo de modelos discretos, lineares e invariantes no tempo, de forma que é possível representar os modelos original e reduzido de acordo com a notação introduzida na seção 2.2. O critério utilizado para quantificar a qualidade da aproximação é definido em termos do erro de redução e das duas normas discutidas na seção 2.3.

O problema de redução discutido nesta dissertação parece não ter solução simples. O obstáculo principal, do ponto de vista dos métodos baseados em otimização, deve-se à sua não-convexidade. Uma formulação comum em muitos trabalhos (Skelton e de Oliveira 2001) inclui entre suas restrições um limitante ao posto de determinadas variáveis matriciais. Não foi encontrada até o momento qualquer transformação que torne esta restrição convexa ou, mais especificamente, que permita expressá-la na forma de uma LMI.

No entanto, dada a importância prática e teórica do problema, muitos autores têm se dedicado à busca de sua solução. Alguns métodos propõem soluções subótimas baseadas na definição e minimização de limitantes da norma do erro de redução (Glover 1984, Anderson e Liu 1989). Uma abordagem diferente aparece em Skelton, Iwasaki e Grigoriadis (1997), onde os autores introduzem um método de projeções alternadas capaz de lidar com restrições ao posto de variáveis

matriciais, mas que não garante a otimalidade global da solução.

Esta dissertação segue um terceiro caminho. O problema de redução de modelos é convertido em um problema de otimização convexa em termos de LMIs através da escolha *a priori* de uma de suas variáveis. A escolha é um passo crítico do método proposto e determina o grau de subotimalidade da solução.

3.1 Definição do Problema

Considere o sistema discreto, linear e invariante no tempo descrito por

$$H(\zeta) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (3.1)$$

em que as matrizes $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{r \times n}$ e $D \in R^{r \times m}$ são precisamente conhecidas. Assume-se que o sistema seja assintoticamente estável e que a realização A, B, C, D seja controlável e observável.

O problema consiste em determinar o sistema discreto, linear e invariante no tempo $H_r(\zeta)$ que melhor aproxime o sistema original $H(\zeta)$. A ordem de $H_r(\zeta)$ é pré-especificada e arbitrária. Esta dissertação restringe-se, no entanto, à particular situação em que a ordem de $H_r(\zeta)$ é menor do que a ordem de $H(\zeta)$. A solução para os demais casos é trivial.

O sistema reduzido $H_r(\zeta)$ é descrito por

$$H_r(\zeta) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right], \quad (3.2)$$

em que $A_r \in R^{q \times q}$, $B_r \in R^{q \times m}$, $C_r \in R^{r \times q}$, $D_r \in R^{r \times m}$ e $0 \leq q \leq n$. Vale notar que, se $H_r(\zeta)$ tem ordem estritamente igual a q , a realização A_r, B_r, C_r, D_r é necessariamente mínima.

O critério utilizado para avaliar a aproximação é dado pela norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ do erro de redução $E(\zeta)$, definido por

$$E(\zeta) \triangleq H(\zeta) - H_r(\zeta). \quad (3.3)$$

Formalmente, o sistema reduzido é dado, no caso \mathcal{H}_2 , pela solução ótima do problema

$$\min_{H_r(\zeta) \in \mathcal{H}} \|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_2^2 \quad (3.4)$$

e, no caso \mathcal{H}_∞ , pela solução ótima do problema

$$\min_{H_r(\zeta) \in \mathcal{H}} \|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2, \quad (3.5)$$

em que \mathcal{H} denota o conjunto de todos os modelos lineares e invariantes no tempo com ordem menor ou igual à especificada.

A solução de (3.4) e (3.5) foi investigada por diversos autores (Glover 1984, Anderson e Liu 1989, Skelton et al. 1997, Skelton e de Oliveira 2001). Como as funções objetivo são convexas, a dificuldade de resolvê-los concentra-se no conjunto \mathcal{H} , que geralmente é não-convexo, dada a imposição de que a ordem de $H_r(\zeta)$ seja estritamente menor do que n . No entanto, como mostra este capítulo, técnicas de programação convexa para LMIs podem ser utilizadas na obtenção de soluções subótimas para (3.4) e (3.5) que possuam desempenho superior àquele de outros métodos disponíveis na literatura, em particular àquele do truncamento balanceado.

3.2 Redução de Modelos em Norma \mathcal{H}_2

Esta seção discute o caso \mathcal{H}_2 do problema de redução definido formalmente por (3.4). Uma abordagem diferente daquela normalmente encontrada em outros trabalhos é utilizada. O modelo reduzido é construído a partir de uma realização de ordem igual àquela do modelo original sobre a qual se impõe que alguns modos sejam não-observáveis. Uma realização mínima para o modelo reduzido em função dos parâmetros do problema é, por fim, obtida.

O lema 3.1 e o teorema 3.2 introduzem resultados já conhecidos, apesar de as demonstrações serem originais. O lema 3.1 se baseia largamente nos resultados em filtragem ótima obtidos por Geromel, Bernoussou, Garcia e de Oliveira (2000), enquanto o teorema 3.2 segue, em certa medida, os resultados em redução de modelos apresentados por Skelton e de Oliveira (2001).

Lema 3.1 *Todas as funções de transferência $H_r(\zeta)$ assintoticamente estáveis de ordem $q = n$ tais que a restrição $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_2^2 < \gamma$ seja satisfeita são dadas por*

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} (X - Z)^{-1}M & (X - Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right] \quad (3.6)$$

em que as matrizes $F, M, L, K, Z = Z', X = X'$ e $W = W'$, todas com dimensões compatíveis,

satisfazem as desigualdades matriciais lineares

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'Z & B'X - L' & D' - K' \\ \bullet & Z & Z & 0 \\ \bullet & \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X - M' & C' - F' \\ \bullet & X & A'Z & A'X & C' \\ \bullet & \bullet & Z & Z & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.9)$$

Prova: Seja $H_r(\zeta)$ um sistema assintoticamente estável de ordem $q = n$ descrito por (3.2). Uma possível realização para o erro de redução $E(\zeta) \triangleq H(\zeta) - H_r(\zeta)$ associado a $H_r(\zeta)$ é dada por

$$E(\zeta) \triangleq H(\zeta) - H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline C & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right]. \quad (3.10)$$

De acordo com o lema 2.20, o sistema reduzido $H_r(\zeta)$ satisfaz $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_2^2 < \gamma$, se e somente se existirem matrizes simétricas P e W que satisfaçam as desigualdades matriciais

$$\text{tr}(W) < \gamma, \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'P & C \\ \bullet & P & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}'P & D' \\ \bullet & P & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.13)$$

de forma que é possível afirmar que todas as funções de transferência $H_r(\zeta)$ estáveis de ordem $q = n$ tais que $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_2^2 < \gamma$ seja satisfeita são dadas por

$$H_r(\zeta) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right], \quad (3.14)$$

em que A_r, B_r, C_r e D_r satisfazem (3.11–3.13) para alguma matriz W simétrica e alguma matriz P positiva definida.

É necessário demonstrar, portanto, a validade de ambas as proposições abaixo.

- i. A cada conjunto de matrizes $\{A_r, B_r, C_r, D_r, P\}$ que satisfaz (3.11–3.13) está associado um conjunto correspondente $\{F, K, L, M, X, Z\}$ que satisfaz (3.7–3.9) e garante

$$\left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right]. \quad (3.15)$$

- ii. A cada conjunto de matrizes $\{F, K, L, M, X, Z\}$ que satisfaz (3.7–3.9) está associado um conjunto correspondente $\{A_r, B_r, C_r, D_r, P\}$ que satisfaz (3.11–3.13) e garante

$$\left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right]. \quad (3.16)$$

Neste sentido, considere a partição para P e P^{-1} dada por

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

em que $X = X', \hat{X} = \hat{X}', Y = Y', \hat{Y} = \hat{Y}', U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Esta partição obviamente implica relações de dependência entre as seis matrizes definidas acima. É fácil ver, por exemplo, que X, U e \hat{X} determinam Y, V e \hat{Y} . Antes de determinar estas relações, vale observar que tanto (3.12) quanto (3.13) garantem, pelo Complemento de Schur, que P é positiva definida, de forma que é possível definir sua inversa. A positividade de P garante, por sua vez, que X, \hat{X}, Y e \hat{Y} são positivas definidas e inversíveis. Como $PP^{-1} = I$, $X, \hat{X}, Y, \hat{Y}, U$ e V devem satisfazer, por fim, as equações

$$XY + UV' = I, \quad (3.18)$$

$$\hat{X}\hat{Y} + U'V = I, \quad (3.19)$$

$$XV + U\hat{Y} = 0, \quad (3.20)$$

$$\hat{X}V' + U'Y = 0, \quad (3.21)$$

das quais uma é redundante, dada a simetria das matrizes P e P^{-1} .

Considere as matrizes

$$M_1 \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & Y & 0 \\ 0 & 0 & V' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad M_2 \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad M_3 \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

e a desigualdade

$$\begin{bmatrix} W & B'Y^{-1} & B'X + B'_rU' & D' - D'_r \\ \bullet & Y^{-1} & Y^{-1} & 0 \\ \bullet & \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.23)$$

obtida a partir da multiplicação de (3.13) por $M_1M_2M_3$ à direita e $M'_3M'_2M'_1$ à esquerda. O lema 2.7 garante a equivalência entre as duas desigualdades, desde que as matrizes em questão não sejam singulares. A matriz M_3 é uma matriz de permutação de colunas e, portanto, não-singular. A matriz M_2 é claramente não-singular, dada a positividade de Y e Y^{-1} . A matriz M_1 é não-singular desde que a matriz T definida por

$$T \triangleq \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V' \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

seja não-singular. Se as restrições (3.11–3.13) são factíveis, sempre é possível fixar U não-singular de forma a mantê-las factíveis. A equação (3.21) garante, por outro lado, que, dada U não-singular, a matriz V também é não-singular. Com V e conseqüentemente T não-singulares, garante-se, por fim, a equivalência entre (3.13) e (3.23).

Considere, em seguida, as matrizes

$$M_4 \triangleq \begin{bmatrix} I & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad M_5 \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad M_6 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

e a desigualdade

$$\begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & A'Y^{-1} & A'X + Y^{-1}VA_r'U' & C' - Y^{-1}VC_r' \\ \bullet & X & A'Y^{-1} & A'X & C' \\ \bullet & \bullet & Y^{-1} & Y^{-1} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.26)$$

obtida a partir da multiplicação de (3.12) por $M_4M_5M_6$ à direita e $M_6'M_5'M_4'$ à esquerda. É fácil verificar que, como no caso anterior, M_4 , M_5 e M_6 são não-singulares, de forma que é possível afirmar que (3.12) e (3.26) são equivalentes. As fatorações $M_1M_2M_3$ e $M_4M_5M_6$ refletem o desenvolvimento dos resultados em Geromel et al. (2000).

A mudança de variáveis definida abaixo associa (3.23) a (3.8), (3.26) a (3.9), e prova que, se existe $\{A_r, B_r, C_r, D_r, P\}$ que satisfaz (3.11–3.13), existe $\{F, K, L, M, X, Z\}$ que satisfaz (3.7–3.9).

$$Z \triangleq Y^{-1}, \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} M & L \\ F & K \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

A mudança de variáveis acima também garante a validade de (3.15). Aplicando (3.27–3.28) a (3.6) obtém-se a função de transferência

$$H_r(\zeta) = \left[\frac{(Z-X)^{-1}UA_rV'Y^{-1}}{C_rV'Y^{-1}} \mid \frac{(Z-X)^{-1}UB_r}{D_r} \right]. \quad (3.29)$$

De (3.18) e (3.21), verifica-se que $X - Z = U'\hat{X}U$. Como \hat{X} é necessariamente positiva definida e sempre é possível escolher U não-singular, conclui-se que $U'\hat{X}U = X - Z$ também é positiva definida, de forma que sua inversa em (3.15) e (3.29) de fato existe.

É fácil verificar, a partir de (3.18), que $U^{-1}(Y^{-1} - X) = V'Z$. Como, por definição, $Z = Y^{-1}$, é possível reescrever (3.29) na forma

$$H_r(\zeta) = \left[\frac{\Delta A_r \Delta^{-1}}{C_r \Delta^{-1}} \mid \frac{\Delta B_r}{D_r} \right], \quad \text{com } \Delta = (Z - X)^{-1}U. \quad (3.30)$$

que, de acordo com o lema 2.14, é similar a (3.14). A equação (3.15) é, portanto, satisfeita, e a proposição *i*, válida.

Para provar a validade da proposição *ii*, basta verificar que, dadas uma matriz U não-singular

qualquer e duas matrizes simétricas X e Z que satisfaçam as LMIs $X - Z > 0$ e (3.7–3.9), sempre é possível determinar $\hat{X} > 0$, $\hat{Y} > 0$ e V não-singular que satisfaçam (3.18–3.21). Neste caso, a mudança de variáveis definida por (3.27–3.28) é inversível. Prova-se mais à frente que quaisquer X e Z que satisfaçam (3.7–3.9) são tais que $X - Z > 0$, o que garante a validade da proposição ii e conclui esta demonstração. ■

O resultado do lema 3.1 pode ser consideravelmente simplificado através da eliminação das variáveis F , M , L e K . A idéia, descrita no teorema a seguir, é determinar estas variáveis matriciais em termos das variáveis restantes Z e X , sem qualquer perda de generalidade no que diz respeito ao conjunto dos modelos $H_r(\zeta)$ factíveis.

Teorema 3.2 *Se X e Z são matrizes simétricas que satisfazem as LMIs*

$$\text{tr}(B'ZB) < \gamma, \quad (3.31)$$

$$X > Z, \quad (3.32)$$

$$A'XA - X + C'C < 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} Z & A'Z \\ \bullet & Z \end{bmatrix} > 0, \quad (3.34)$$

então a função de transferência assintoticamente estável

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A(X - A'ZA)^{-1}(X - Z) & B \\ \hline C(X - A'ZA)^{-1}(X - Z) & D \end{array} \right] \quad (3.35)$$

é tal que $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_2^2 < \gamma$.

Prova: Aplicando o complemento de Schur ao bloco (2,2) da LMI (3.8), verifica-se que esta equivale às LMIs $Z > 0$ e

$$\Phi = \begin{bmatrix} W - B'ZB & B'(X - Z) - L' & D' - K' \\ \bullet & X - Z & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.36)$$

Seguindo a notação do Lema da Eliminação, são definidas as matrizes

$$\Psi' = \begin{bmatrix} 0 & I & I \end{bmatrix}, \quad \Theta' = \begin{bmatrix} I & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} B'(X-Z) - L' & D' - K' \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} W - B'ZB & 0 & 0 \\ \bullet & X - Z & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

de forma que $\Omega + \Theta\Upsilon_1\Psi' + \Psi\Upsilon_1'\Theta' = \Phi$. De acordo com o mesmo lema, existe Υ_1 tal que $\Phi > 0$, se e somente se

$$W - B'ZB > 0, \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} X - Z & 0 \\ \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.41)$$

É fácil verificar que, se (3.40) e (3.41) são satisfeitas, $\Upsilon_1 = 0$ é tal que $\Phi > 0$. Portanto, impor $\Upsilon_1 = 0$ garante a equivalência entre (3.36) e (3.40–3.41). Esta nova restrição fixa L e K em função de X e Z , mas não implica perda de generalidade, já que L e K não aparecem nas demais restrições (3.7) e (3.9).

A LMI (3.41) equivale, pelo Complemento de Schur, a (3.32). A LMI (3.40) implica $\text{tr}(W) > \text{tr}(B'ZB)$, de forma que $\gamma > \text{tr}(W) > \text{tr}(B'ZB)$. Como W não aparece em outras restrições, sempre é possível impor $W \rightarrow B'ZB$ de forma a satisfazer (3.40). Esta escolha implica a equivalência entre (3.10) e (3.31) e não envolve qualquer perda de generalidade.

Um raciocínio análogo leva às restrições (3.33) e (3.34). Aplicando o Complemento de Schur ao bloco (3,3) da LMI (3.9) e, em seguida, ao bloco (2,2) da desigualdade resultante, verifica-se a equivalência entre (3.9) e

$$X - A'ZA > 0, \quad (3.42)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} \\ \bullet & \Phi_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.43)$$

em que Φ_{11} , Φ_{21} e Φ_{31} são dadas por

$$\Phi_{11} = Z - A'ZA - (Z - A'ZA)(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA), \quad (3.44)$$

$$\Phi_{21} = \begin{bmatrix} A'(X - Z) - M' & C' - F' \end{bmatrix} - (Z - A'ZA)(X - A'ZA)^{-1} \begin{bmatrix} A'(X - Z) & C' \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\Phi_{22} = \begin{bmatrix} (X-Z) - M' & 0 \\ \bullet & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (X-Z)A \\ C \end{bmatrix} (X - A'ZA)^{-1} \begin{bmatrix} A'(X-Z) & C' \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Seguindo a notação do lema da eliminação, são definidas as matrizes

$$\Psi' = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta' = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{21} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \bullet & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

de forma que $\Omega + \Theta\Upsilon_2\Psi' + \Psi\Upsilon_2'\Theta' = \Phi$. Existe Υ_2 tal que $\Phi > 0$, se e somente se $\Phi_{11} > 0$ e $\Phi_{22} > 0$. Se estas duas desigualdades são satisfeitas, $\Upsilon_2 = 0$ é tal que $\Phi > 0$. A imposição da nulidade de Υ_2 garante a equivalência entre (3.43) e (3.47) e fixa M e F em função de X e Z sem qualquer perda de generalidade, já que M e F não aparecem nas demais restrições do problema.

As equivalências a seguir, obtidas através da repetida aplicação do Complemento de Schur, associam $\Phi_{11} > 0$ a (3.34) e $\Phi_{22} > 0$ a (3.33).

$$\begin{aligned} \Phi_{11} > 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Z - A'ZA & Z - A'ZA \\ \bullet & X - A'ZA \end{bmatrix} > 0 \\ &\Leftrightarrow Z - A'ZA > 0, \quad X - Z > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Z & A'Z \\ \bullet & Z \end{bmatrix} > 0, \quad X - Z > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{22} > 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X - Z & 0 & (X - Z)A \\ \bullet & I & C \\ \bullet & \bullet & X - A'ZA \end{bmatrix} > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X - Z & (X - Z)A \\ \bullet & X - A'ZA - C'C \end{bmatrix} > 0 \\ &\Leftrightarrow X - A'XA - C'C > 0, \quad X - Z > 0 \end{aligned}$$

Vale observar que (3.42) é sempre satisfeita para $X > Z$ e $A'XA - X + C'C < 0$. De fato,

$$X - A'ZA > A'XA - A'ZA + C'C = A'(X - Z)A + C'C > 0. \quad (3.48)$$

A relação entre as variáveis $\{F, K, L, M\}$ e $\{X, Z\}$, estabelecida ao longo desta demonstração,

é dada por

$$\Upsilon_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = (X - Z)B \\ K = D \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\Upsilon_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} M = (X - Z)A - (X - Z)A(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA) \\ F = C - C(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA) \end{cases} \quad (3.50)$$

As equações acima garantem a equivalência entre as funções de transferência (3.6) e (3.35) e concluem a demonstração do teorema. Vale observar que

$$\begin{aligned} M &= (X - Z)[A - A(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA)] \\ &= (X - Z)[A - A(X - A'ZA)^{-1}(Z - X + X - A'ZA)] \\ &= (X - Z)A(X - A'ZA)^{-1}(X - Z). \end{aligned}$$

■

A solução do problema de redução proposta por esta dissertação se baseia no resultado do teorema 3.2. Impondo a relação $Z = \beta X$ com $0 < \beta < 1$, as LMIs (3.32 - 3.34) dadas pelo teorema continuam factíveis. Forçando β tender a zero, verifica-se que $H_r(\zeta)$ dada por (3.35) tende a $H(\zeta)$ e que o erro de redução γ tende arbitrariamente a zero, como esperado. Por outro lado, forçando β tender a 1, as matrizes A_r e C_r em (3.35) se anulam e $H_r(\zeta)$ tende à aproximação de ordem nula $H_0(\zeta) = D$, para a qual o erro de redução é dado por $\|C(\zeta I - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{tr}(B'PB)$, em que P é o gramiano de observabilidade associado a $H(\zeta)$. A parametrização de $H_r(\zeta)$ dada por (3.35) inclui, portanto, modelos de ordem n , entre eles o modelo original $H(\zeta)$, e modelos de ordem arbitrariamente próxima a zero.

Esta análise sugere que modelos de ordem n_r entre 0 e n também façam parte do conjunto de modelos definido por (3.35). De fato, impondo que Z tenda a X em parte do espaço $\mathbb{R}^{n \times n}$, i.e., impondo que um dado número q de autovalores de $X - Z$ tenda a zero, verifica-se que a realização de $H_r(\zeta)$ dada por (3.35) tende à não-observabilidade e que, em particular, a ordem do modelo $H_r(\zeta)$ tende arbitrariamente a $n - q$.

A afirmação de que alguns modos do modelo tornam-se não observáveis baseia-se na fatoração da matriz de observabilidade W_o associada a $H_r(\zeta)$. Partindo de (3.35), é fácil verificar que W_o pode ser fatorada na forma $W_o = \bar{W}_o(X - Z)$. Quando X tende a Z , o posto de W_o cai e a realização (3.35) torna-se não-observável.

Da discussão acima, conclui-se que impor a igualdade entre X e Z em partes do espaço implica uma restrição à ordem do modelo reduzido (3.35). Matematicamente, esta condição é

representada por

$$X - Z = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ \bullet & O(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ J' \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

em que $S = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix}$ é uma matriz não-singular apropriadamente particionada, $\Sigma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é uma matriz positiva definida, $O(\varepsilon)$ é uma matriz positiva da ordem de ε , e $\varepsilon > 0$ é um escalar arbitrariamente pequeno. Com base em (3.51), é possível reescrever a realização (3.35) do modelo reduzido na forma

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A(X - A'ZA)^{-1}(V\Sigma V' + JO(\varepsilon)J') & B \\ \hline C(X - A'ZA)^{-1}(V\Sigma V' + JO(\varepsilon)J') & D \end{array} \right]. \quad (3.52)$$

Impor ε arbitrariamente pequeno equivale, no limite, a restringir a ordem de $H_r(\zeta)$ a q . De fato, quando ε tende a zero, a matriz $JO(\varepsilon)J'$ também tende a zero e (3.52) reduz-se a

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V' & B \\ \hline C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V' & D \end{array} \right]. \quad (3.53)$$

No espaço de estados,

$$\begin{cases} \dot{x} = A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V'x + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, & x(0) = 0 \\ y = C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V'x + Du \end{cases} \quad (3.54)$$

A realização mínima equivalente a (3.53) é obtida multiplicando a equação de estado em (3.54) por V' à esquerda e definindo a variável de estado reduzida $x_r \triangleq V'x$. No espaço de estados,

$$\begin{cases} \dot{x}_r = V'A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma x_r + V'Bu, & x_r \in \mathbb{R}^q, & x_r(0) = 0 \\ y = C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma x_r + Du \end{cases} \quad (3.55)$$

ou, de forma equivalente,

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} V'A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma & V'B \\ \hline C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma & D \end{array} \right]. \quad (3.56)$$

A representação (3.51) para a matriz $(X - Z)$ restringe a ordem do modelo reduzido e evita a formulação usual, dada em termos de uma restrição explícita ao posto de $X - Z$. Vale observar que, quando ε tende a zero, (3.51) reduz-se a $X - Z = V\Sigma V'$, em que $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{q \times q}$. O

lema de Sylvester garante que esta igualdade implica $\rho(X - Z) \leq q$. Como, a princípio, não são feitas restrições adicionais a V ou Σ , é fácil verificar que $V\Sigma V'$ parametriza qualquer matriz com posto menor ou igual a q e que, portanto, $X - Z = V\Sigma V'$ equivale a $\rho(X - Z) \leq q$. Ainda neste contexto, é fácil verificar que $X - Z \geq 0$ e $\Sigma > 0$ também são equivalentes.

A desigualdade não-estrita $X - Z \geq 0$ substitui a restrição original $X - Z > 0$ quando se impõe que $X - Z$ seja deficiente em posto. Como, de fato, $S = [V \ J]$ é não-singular e $O(\varepsilon) > 0$, (3.51) garante que $X - Z > 0$ é sempre satisfeita. Deve ficar claro, desta discussão, que, apesar da aparente inconsistência, é sempre possível reduzir (3.51) à restrição mais simples $X - Z = V\Sigma V'$.

Os resultados do teorema 2 e a imposição de (3.51) com $\varepsilon \rightarrow 0$ resultam em uma formulação equivalente para o problema de redução em norma \mathcal{H}_2 definido por (3.4).

$$\min_{X, V, Z > 0, \Sigma > 0} \text{tr}(BB'Z) \quad (3.57)$$

$$\text{s.a.} \quad A'XA - X + C'C < 0 \quad (3.58)$$

$$A'ZA - Z < 0 \quad (3.59)$$

$$X - Z = V\Sigma V' \quad (3.60)$$

A variável γ , introduzida no teorema 3.2 para manter algum paralelismo com o problema de redução em norma \mathcal{H}_∞ , é desnecessária e foi eliminada. A nova função objetivo é equivalente à anterior, já que, pelo lema 2.12, $\text{tr}(B'ZB) = \text{tr}(BB'Z)$. A mudança deixa mais evidente o desenvolvimento da solução para o problema de redução apresentado mais à frente.

À exceção da restrição (3.60), que impõe que a ordem de $H_r(\zeta)$ seja menor ou igual a q , todas as restrições da nova formulação, bem como sua função objetivo, são lineares nas variáveis do problema. A linearização de (3.60) converte a nova formulação em um problema de otimização expresso em termos de LMIs, o que, de acordo com a discussão da seção (2.4), equivale a resolver numericamente o problema de redução original.

Determinar o valor de V antes do processo de otimização propriamente dito é a forma mais simples de linearizar (3.60). A solução assim obtida é subótima e depende fortemente da escolha de V . Com $V = 0$, $X = Z$ e o erro de redução é dado por $\|C(\zeta I - A)^{-1}B\|_2^2$; com $V = V^*$, em que V^* está associada à solução ótima do problema não-linearizado, o erro de redução é mínimo e a solução obtida é, de fato, ótima.

Para a escolha de V , considere o problema de programação convexa dado por

$$\min_{X, V, Z > 0, \Sigma > 0} \{\text{tr}(QZ) : (3.58) - (3.60)\}, \quad (3.61)$$

em que $Q > BB'$. Como $\text{tr}(QZ) > \text{tr}(BB'Z)$, este problema determina um modelo reduzido que

minimiza um limitante superior do erro de redução. Impõe-se que $S = [V \ J]$ seja tal que

$$SS' = P, \quad S'QS = \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_V & 0 \\ 0 & \Lambda_J \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

em que $\Lambda > 0$ é uma matriz diagonal e P é o gramiano de observabilidade associado a $H(\zeta)$. Como $QP = QSS'$ é similar a $S'QS = \Lambda$, conclui-se que os valores singulares de QP são dados pela diagonal de Λ . Partindo da restrição (3.60), é possível reescrever a função objetivo de (3.61) na forma

$$\text{tr}(QZ) = \text{tr}(QX) - \text{tr}(QV\Sigma V'). \quad (3.63)$$

Como $A'PA - P + C'C = 0$, a restrição (3.58) impõe $A'(P - X)A - (P - X) > 0$. Os autovalores da matriz A estão, por hipótese, no interior do círculo unitário do plano complexo e, do lema 2.17, conclui-se que $X > P$. Aplicando o lema (2.11) a $\text{tr}(QX)$ com $X > P$, verifica-se que

$$\begin{aligned} \text{tr}(QZ) &> \text{tr}(QP) - \text{tr}(QV\Sigma V') \\ &= \text{tr}(S'QS) - \text{tr}(QV\Sigma V') \\ &= \text{tr}(V'QV(I - \Sigma)) + \text{tr}(J'QJ) \\ &= \text{tr}(\Lambda_V(I - \Sigma)) + \text{tr}(\Lambda_J) \end{aligned}$$

O termo $\text{tr}(\Lambda_J)$ independe das variáveis do problema de otimização e interessa, portanto, minimizá-lo. Neste sentido, a melhor escolha para V é dada pelas q colunas de S associadas aos q maiores elementos da diagonal de Λ . Com esta escolha, $\text{tr}(\Lambda_J)$ equivale à soma dos $n - q$ menores valores singulares de QP .

Há muitas possíveis escolhas para Q , entre as quais destacam-se aquelas dadas por

$$Q = \sum_{i=0}^k A^i B B' A'^i, \quad (3.64)$$

em que $k \in \mathbb{N}$. Associados a cada escolha de Q estão um limitante superior para o erro de redução e uma correspondente escolha de V . Entre as alternativas dadas por (3.64), duas são de particular importância. Para $k = 0$, $Q = BB'$ e o limitante superior coincide com o próprio erro de redução. Para $k = \infty$, Q é o gramiano de controlabilidade associado a $H(\zeta)$ e a diagonal de Λ dá o quadrado dos valores singulares de Hankel da realização (3.6) de $H(\zeta)$. O capítulo 4 analisa os resultados obtidos a partir da segunda alternativa.

3.3 Redução de Modelos em Norma \mathcal{H}_∞

Os procedimentos seguidos nesta seção são análogos àqueles da seção anterior, com a diferença que a norma \mathcal{H}_∞ substitui a norma \mathcal{H}_2 na avaliação do erro de redução. É interessante observar que as principais propriedades do problema não mudam com a troca das normas.

Lema 3.3 *Todas as funções de transferência $H_r(\zeta)$ assintoticamente estáveis de ordem $q = n$ tais que a restrição $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$ seja satisfeita são dadas por*

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right] \quad (3.65)$$

em que as matrizes $F, M, L, K, Z = Z'$ e $X = X'$, todas com dimensões compatíveis, satisfazem a desigualdade matricial linear

$$\left[\begin{array}{cccccc} Z & 0 & A'Z & A'X - M' & C' - F' & Z \\ \bullet & \gamma I & B'Z & B'X - L' & D' - K' & 0 \\ \bullet & \bullet & Z & Z & 0 & ZA \\ \bullet & \bullet & \bullet & X & 0 & XA \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I & C \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & X \end{array} \right] > 0 . \quad (3.66)$$

Prova: Seja $H_r(\zeta)$ um sistema assintoticamente estável de ordem $q = n$ descrito por (3.2). Uma possível realização para o erro de redução $E(\zeta) \triangleq H(\zeta) - H_r(\zeta)$ associado a $H_r(\zeta)$ é dada por

$$E(\zeta) \triangleq H(\zeta) - H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline C & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right]. \quad (3.67)$$

De acordo com o lema 2.21, o sistema reduzido $H_r(\zeta)$ satisfaz $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$, se e somente se existir uma matriz simétrica P que satisfaça a desigualdade matricial

$$\left[\begin{array}{cccc} P & \mathcal{A}'P & 0 & C' \\ \bullet & P & PB & 0 \\ \bullet & \bullet & \gamma I & \mathcal{D}' \\ \bullet & \bullet & \bullet & I \end{array} \right] > 0 \quad (3.68)$$

de forma que é possível afirmar que todas as funções de transferência $H_r(\zeta)$ estáveis de ordem $q = n$ tais que $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$ seja satisfeita são dadas por

$$H_r(\zeta) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right], \quad (3.69)$$

em que A_r, B_r, C_r e D_r satisfazem (3.68) para alguma alguma matriz P positiva definida.

É necessário demonstrar, portanto, a validade de ambas as proposições abaixo.

- i. A cada conjunto de matrizes $\{A_r, B_r, C_r, D_r, P\}$ que satisfaz (3.68) está associado um conjunto correspondente $\{F, K, L, M, X, Z\}$ que satisfaz (3.66) e garante

$$\left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right]. \quad (3.70)$$

- ii. A cada conjunto de matrizes $\{F, K, L, M, X, Z\}$ que satisfaz (3.66) está associado um conjunto correspondente $\{A_r, B_r, C_r, D_r, P\}$ que satisfaz (3.68) e garante

$$\left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} (X-Z)^{-1}M & (X-Z)^{-1}L \\ \hline F & K \end{array} \right]. \quad (3.71)$$

Neste sentido, considere a partição de P e P^{-1} dada por

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

em que $X = X', \hat{X} = \hat{X}', Y = Y', \hat{Y} = \hat{Y}', U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A desigualdade (3.68) exige, pelo Complemento de Schur, que P seja positiva definida, de forma que é possível definir sua inversa. A positividade de P garante, por outro lado, que X, \hat{X}, Y e \hat{Y} são positivas definidas e inversíveis. Como $P^{-1}P$ é, por definição, a identidade, $X, \hat{X}, Y, \hat{Y}, U$ e V devem satisfazer as equações

$$XY + UV' = I, \quad (3.73)$$

$$\hat{X}\hat{Y} + U'V = I, \quad (3.74)$$

$$XV + U\hat{Y} = 0, \quad (3.75)$$

$$\hat{X}V' + U'Y = 0, \quad (3.76)$$

das quais uma é redundante, dada a simetria de P .

Considere as matrizes

$$M_1 \triangleq \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, M_2 \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, M_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

e a desigualdade

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & A'Z & A'X + Y^{-1}VA_r'U & C' - Y^{-1}VC_r' & Z \\ \bullet & \gamma I & B'Z & B'X + B_r'U' & D' - D_r' & 0 \\ \bullet & \bullet & Z & Z & 0 & ZA \\ \bullet & \bullet & \bullet & X & 0 & XA \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I & C \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & X \end{bmatrix} > 0, \quad (3.78)$$

obtida a partir da multiplicação de (3.68) por $M_1M_2M_3$ à direita e $M_3'M_2'M_1'$ à esquerda. O lema 2.7 garante a equivalência entre as duas desigualdades, já que M_1 , M_2 e M_3 são não-singulares. A situação espelha aquela da versão \mathcal{H}_2 do problema de redução. M_3 é uma matriz de permutação de colunas, Y^{-1} é positiva definida e T , dada por

$$T \triangleq \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V' \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

é não-singular, uma vez que sempre é possível impor que U e V sejam não-singulares.

A mudança de variáveis definida abaixo associa (3.78) a (3.66) e prova que, se existe um conjunto de variáveis $\{A_r, B_r, C_r, D_r, P\}$ que satisfaz (3.78), existe $\{F, K, L, M, X, Z\}$ que satisfaz (3.66).

$$Z \triangleq Y^{-1}, \quad (3.80)$$

$$\begin{bmatrix} M & L \\ F & K \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Aplicando (3.80–3.81) a (3.65), obtém-se a função de transferência

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} (Z-X)^{-1}UA_rV'Y^{-1} & (Z-X)^{-1}UB_r \\ \hline C_rV'Y^{-1} & D_r \end{array} \right]. \quad (3.82)$$

De (3.73) e (3.76), verifica-se que $X - Z = U'\hat{X}U$. Como \hat{X} é necessariamente positiva definida e sempre é possível escolher U não-singular, conclui-se que $U'\hat{X}U = X - Z$ também é positiva definida, de forma que sua inversa em (3.65) e (3.29) de fato existe.

É fácil verificar, a partir de (3.73), que $U^{-1}(Y^{-1} - X) = V'Z$. Como, por definição, $Z = Y^{-1}$, é possível reescrever (3.82) na forma

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \Delta A_r \Delta^{-1} & \Delta B_r \\ \hline C_r \Delta^{-1} & D_r \end{array} \right], \quad (3.83)$$

com $\Delta = (Z - X)^{-1}U$. De acordo com o lema 2.14, a função de transferência $H_r(\zeta)$ acima é similar a (3.69). A equação (3.70) é, portanto, satisfeita, e a proposição *i*, válida.

Para provar a validade da proposição *ii*, basta verificar que, dadas uma matriz U não-singular qualquer e duas matrizes simétricas X e Z que satisfaçam as LMIs $X - Z > 0$ e (3.66), sempre é possível determinar $\hat{X} > 0$, $\hat{Y} > 0$ e V não-singular que satisfaçam (3.73–3.76). Neste caso, a mudança de variáveis definida por (3.80–3.81) é inversível. Prova-se mais à frente que quaisquer X e Z que satisfaçam (3.66) são tais que $X - Z > 0$, o que garante a validade da proposição *ii* e conclui a demonstração. ■

Como no caso \mathcal{H}_2 , as matrizes M , F , L e K podem ser eliminadas do problema sem qualquer perda de generalidade. O teorema a seguir apresenta formalmente este resultado.

Teorema 3.4 *Se $X > 0$ e $Z > 0$ são matrizes simétricas que satisfazem as LMIs*

$$X > Z, \quad (3.84)$$

$$A'XA - X + C'C < 0, \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} Z & A'Z & 0 \\ \bullet & Z & ZB \\ \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.86)$$

então a função de transferência assintoticamente estável

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A(X - A'ZA)^{-1}(X - Z) & B + A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB \\ \hline C(X - A'ZA)^{-1}(X - Z) & D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB \end{array} \right] \quad (3.87)$$

é tal que $\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$.

Prova: Aplicando o Complemento de Schur ao bloco (3,3) da LMI (3.66), e, em seguida, ao bloco (5,5) da matriz resultante, verifica-se que esta equivale às LMIs

$$Z > 0 \quad (3.88)$$

$$X - A'ZA > 0 \quad (3.89)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} \\ \bullet & \Phi_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.90)$$

em que as matrizes Φ_{11} , Φ_{21} e Φ_{22} são dadas por

$$\Phi_{11} \triangleq \begin{bmatrix} Z - A'ZA & -A'ZB \\ \bullet & \gamma I - B'ZB \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z - A'ZA \\ -B'ZA \end{bmatrix} (X - A'ZA)^{-1} \begin{bmatrix} Z - A'ZA & -A'ZB \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{21} \triangleq \begin{bmatrix} A'(X - Z) - M' & C' - F' \\ B'(X - Z) - L' & D' - D'_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z - A'ZA \\ -B'ZA \end{bmatrix} (X - A'ZA)^{-1} \begin{bmatrix} A'(X - Z) & C' \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{22} \triangleq \begin{bmatrix} X - Z & 0 \\ \bullet & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (X - Z)A \\ C \end{bmatrix} (X - A'ZA)^{-1} \begin{bmatrix} A'(X - Z) & C' \end{bmatrix}.$$

Seguindo a notação do Lema da Eliminação, são definidas as matrizes

$$\Psi' \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Theta' \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon \triangleq \begin{bmatrix} \Phi_{21} \end{bmatrix}, \quad \Omega \triangleq \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ 0 & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

de forma que $\Omega + \Psi\Upsilon\Theta' + \Theta\Upsilon'\Psi' = \Phi$. De acordo com o mesmo lema, existe Υ tal que $\Phi > 0$, se e somente se

$$\Phi_{11} > 0, \quad (3.92)$$

$$\Phi_{22} > 0. \quad (3.93)$$

É fácil verificar que, se (3.92) e (3.93) são satisfeitas, $\Upsilon = 0$ é tal que $\Phi > 0$. Portanto, a imposição da nulidade de Υ garante a equivalência entre (3.90) e (3.92–3.93). A nova restrição fixa M , L , F e K em função de X e Z , e não implica perda de generalidade, já que as variáveis eliminadas não aparecem nas demais restrições do problema.

As equivalências a seguir, obtidas através da repetida aplicação do Complemento de Schur, associam $\Phi_{11} > 0$ a (3.84) e (3.86) e $\Phi_{22} > 0$ a (3.84) e (3.85).

$$\begin{aligned}
\Phi_{22} > 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X-Z & 0 & (X-Z)A \\ \bullet & I & C \\ \bullet & \bullet & X-A'ZA \end{bmatrix} > 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & C \\ \bullet & X-A'ZA \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bullet & A'(X-Z)A \end{bmatrix} > 0, \quad X > Z \\
&\Leftrightarrow A'XA - X + C'C < 0, \quad X > Z \\
\\
\Phi_{11} > 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Z-A'ZA & -A'ZB & Z-A'ZA \\ \bullet & \gamma I - B'ZB & -B'ZA \\ \bullet & \bullet & X-A'ZA \end{bmatrix} > 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma I - B'ZB & -B'ZA \\ \bullet & X-A'ZA \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B'ZA(Z-A'ZA)^{-1}A'ZB & -B'ZA \\ \bullet & Z-A'ZA \end{bmatrix} > 0 \\
&\Leftrightarrow \gamma I - B'ZB - B'ZA(Z-A'ZA)^{-1}A'ZB > 0, \quad X > Z \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma I - B'ZB & -B'ZA \\ \bullet & Z-A'ZA \end{bmatrix} > 0, \quad X > Z \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ \bullet & Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B'Z \\ A'Z \end{bmatrix} Z^{-1} \begin{bmatrix} ZB & ZA \end{bmatrix} > 0, \quad X > Z
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Z & A'Z & 0 \\ \bullet & Z & ZB \\ \bullet & \bullet & \Upsilon \end{bmatrix} > 0, \quad X > Z$$

A desigualdade $X - A'ZA > 0$ (3.89) é sempre satisfeita para $X > Z$ e $A'XA - X + C'C < 0$ e, portanto, não é necessário incluí-la entre as LMIs (3.84–3.86).

A relação entre as variáveis $\{F, K, L, M\}$ e $\{X, Z\}$, estabelecida pela imposição da nulidade da matriz Υ , é dada por

$$\begin{cases} F = C - C(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA) \\ K = D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB \\ L = (X - Z)B + (X - Z)A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB \\ M = (X - Z)A - (X - Z)A(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA) \end{cases} \quad (3.94)$$

As equações acima garantem a equivalência entre as funções de transferência (3.65) e (3.87) e concluem a demonstração do teorema. Como no caso \mathcal{H}_2 , vale observar que

$$\begin{aligned} M &= (X - Z)[A - A(X - A'ZA)^{-1}(Z - A'ZA)] \\ &= (X - Z)[A - A(X - A'ZA)^{-1}(Z - X + X - A'ZA)] \\ &= (X - Z)A(X - A'ZA)^{-1}(X - Z). \end{aligned}$$

■

A partir de argumentos análogos àqueles desenvolvidos para o caso \mathcal{H}_2 , conclui-se que impor a igualdade entre X e Z em parte do espaço $\mathbb{R}^{n \times n}$ implica uma restrição à ordem do modelo reduzido (3.87). Matematicamente, esta condição é descrita por

$$X - Z = S\tilde{\Sigma}(\varepsilon)S' = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ \bullet & O(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ J' \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

em que $S = \begin{bmatrix} V & J \end{bmatrix}$ é uma matriz não-singular particionada convenientemente, $\Sigma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é uma matriz positiva definida, ε é um escalar positivo, e $O(\varepsilon) > 0$ é uma matriz da ordem de ε . Com base em (3.95), é possível reescrever a realização (3.87) do modelo reduzido na forma

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A(X - A'ZA)^{-1}(V\Sigma V' + JO(\varepsilon)J') & B + A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB \\ \hline C(X - A'ZA)^{-1}(V\Sigma V' + JO(\varepsilon)J') & D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB \end{array} \right]. \quad (3.96)$$

Quando ε tende a zero, a matriz $JO(\varepsilon)J'$ também tende a zero e (3.52) reduz-se à função de transferência de ordem q dada por

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V'}{C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V'} & \frac{B + A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB}{D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB} \end{array} \right]. \quad (3.97)$$

No espaço de estados,

$$\begin{cases} \dot{x} = A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V'x + [B + A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB]u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = 0 \\ y = C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma V'x + [D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB]u \end{cases} \quad (3.98)$$

A realização mínima equivalente a (3.97) é obtida multiplicando a equação de estado (3.98) por V' à esquerda e definindo a variável de estado reduzida $x_r \triangleq V'x$. No espaço de estados,

$$\begin{cases} \dot{x}_r = V'A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma x_r + V'[B + A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB]u, & x_r \in \mathbb{R}^q, \quad x_r(0) = 0 \\ y = C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma x_r + [D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB]u \end{cases}$$

ou, de forma equivalente,

$$H_r(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{V'A(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma}{C(X - A'ZA)^{-1}V\Sigma} & \frac{V'[B + A(X - A'ZA)^{-1}A'ZB]}{D + C(X - A'ZA)^{-1}A'ZB} \end{array} \right]. \quad (3.99)$$

Os resultados do teorema 2 e a imposição de (3.95) com $\varepsilon \rightarrow 0$ levam, desta forma, a uma formulação equivalente para o problema de redução em norma \mathcal{H}_∞ definido por (3.5).

$$\min_{X, V, Z > 0, \Sigma > 0} \gamma \quad (3.100)$$

$$\text{s.a.} \quad X - Z = V\Sigma V' \quad (3.101)$$

$$A'XA - X + C'C < 0 \quad (3.102)$$

$$\begin{bmatrix} Z & A'Z & 0 \\ \bullet & Z & ZB \\ \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.103)$$

A igualdade (3.101) é a única restrição não-linear na formulação acima. Determinar o valor de V antes do processo de otimização propriamente dito é a forma mais simples de linearizá-la. A solução assim obtida é subótima e depende fortemente de V .

Aplicando o Complemento de Schur ao bloco (1, 1) de (3.103) e, em seguida, ao bloco (2, 2) da LMI resultante, verifica-se que Z deve satisfazer

$$AZ^{-1}A' - Z^{-1} + \gamma^{-1}BB' < 0. \quad (3.104)$$

Conforme a discussão da Seção 2.2, o gramiano de controlabilidade Q associado a $H(\zeta)$ é dado pela solução da equação $AQA' - Q + BB' = 0$, de forma que $A(\gamma Z^{-1} - Q)A' - (\gamma Z^{-1} - Q) < 0$. De acordo com o lema 2.17, Z deve satisfazer a desigualdade $\gamma Z^{-1} > Q$, uma vez que o sistema original é assintoticamente estável. Conclui-se, portanto, que o maior autovalor de QZ equivale à função objetivo do problema de minimização (3.100), que é reescrita na forma abaixo.

$$\lambda_{\max}(QZ) = \lambda_{\max} \left\{ QX - QS \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ \bullet & O(\varepsilon) \end{bmatrix} S' \right\}. \quad (3.105)$$

O gramiano de observabilidade P associado a $H(\zeta)$ é dado pela solução única de $A'PA - P + C'C = 0$, de forma que, da restrição (3.102), $A'(P - X)A - (P - X) > 0$. De acordo com o lema 2.17, X satisfaz $X > P$, uma vez que o sistema original é assintoticamente estável. O lema (2.11) aplicado a $\lambda_{\max}\{QZ\}$ garante, portanto, que

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\{QZ\} &= \lambda_{\max}\{Q[X - S\tilde{\Sigma}(\varepsilon)S']\} \\ &> \lambda_{\max}\{Q[P - S\tilde{\Sigma}(\varepsilon)S']\} \end{aligned}$$

Impõe-se que a matriz $S = [V \ J]$ seja tal que

$$SS' = P, \quad S'QS = \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_V & 0 \\ 0 & \Lambda_J \end{bmatrix}, \quad (3.106)$$

em que $\Lambda > 0$ é uma matriz diagonal. Os valores singulares de QP são dados pela diagonal de Λ , já que $QP = QSS'$ e $\Lambda = S'QS$ são similares. Verifica-se, desta forma, que

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(QZ) &> \lambda_{\max}\{Q[P - S\tilde{\Sigma}(\varepsilon)S']\} \\ &> \lambda_{\max}\{QS[I - \tilde{\Sigma}(\varepsilon)]S'\} \\ &= \lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda_V(I - \Sigma) & 0 \\ 0 & \Lambda_J \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

O termo Λ_j independe das variáveis do problema de otimização e interessa, portanto, minimizá-lo. Neste sentido, a melhor escolha para V é dada pelas q colunas de S associadas aos q maiores elementos da diagonal de Λ . Com esta escolha, a parte da função objetivo que não depende de Σ é determinada pelo maior entre os $n - q$ menores valores singulares de QP . É interessante notar que os valores singulares de QP são exatamente o quadrado dos valores singulares de Hankel associados a $H(\zeta)$. O capítulo 4 analisa os resultados obtidos a partir da escolha de V proposta nesta seção.

Capítulo 4

Avaliação dos Métodos de Redução Propostos

Este capítulo compara os métodos de redução propostos nas seções 3.2 e 3.3 ao truncamento balanceado. A comparação foi realizada com base na aplicação destes métodos a uma série de modelos de ordem e natureza diferentes. Os resultados da seção 4.1 foram obtidos a partir da redução de modelos gerados aleatoriamente, sem correspondência com qualquer sistema físico em particular. Nas seções 4.2 e 4.3, por outro lado, foram utilizados modelos derivados de dois sistemas reais: uma barra engastada flexível, na seção 4.2, e um sistema de massas, molas e amortecedores, na seção 4.3.

4.1 Comparação numérica

Para a comparação, foram utilizados dezenove modelos SISO com ordem variando entre dois e vinte e estrutura padrão dada por

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (4.1)$$

em que A , B , C e D definem uma realização mínima. Os elementos de cada matriz foram gerados de acordo com uma distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão unitário. A matriz dinâmica A de cada modelo foi multiplicada por uma constante escolhida de forma a garantir que o máximo módulo dos seus autovalores fosse $5/6$, o que impôs a estabilidade assintótica dos modelos gerados.

Para cada um dos modelos, foram calculados modelos reduzidos com ordem q variando entre

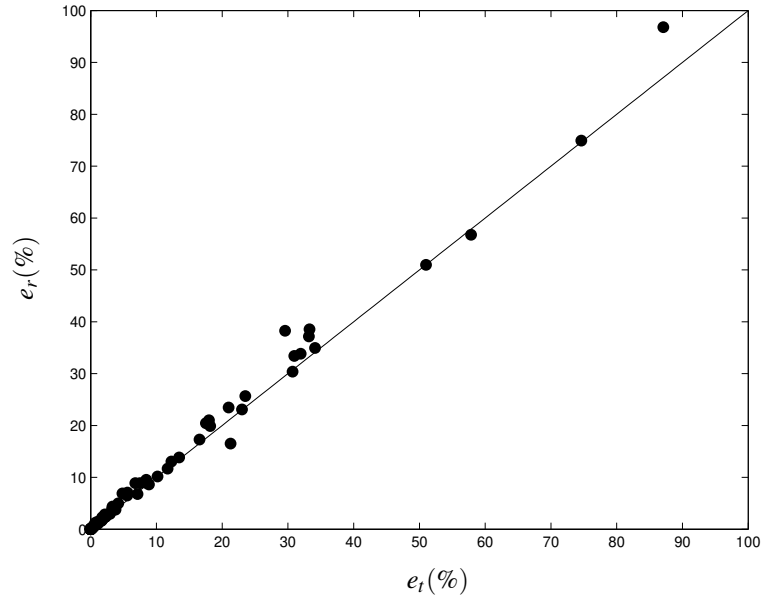


Figura 4.1: Redução de modelos em norma \mathcal{H}_2 .

1 e $(n - 1)$, em que n é a ordem do modelo original. Os modelos obtidos através do truncamento balanceado são denotados por $H_t(\zeta)$ e as matrizes que definem sua realização, por A_t , B_t , C_t e D_t . Os modelos obtidos pelos métodos propostos são denotados por $H_r(\zeta)$ e as matrizes que definem sua realização, por A_r , B_r , C_r e D_r .

Para a redução de modelos em norma \mathcal{H}_2 , os modelos $H_r(\zeta)$ foram obtidos através da resolução do problema de otimização definido por (3.57–3.60) e a matriz V foi determinada *a priori*, de acordo com a discussão da seção 3.2. Para $Q = BB'$, os resultados obtidos não foram satisfatórios, talvez pelo fato de que a matriz Q assim definida tenha posto muito reduzido. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos para Q dada pelo gramiano de controlabilidade associado a $H(\zeta)$. Os modelos $H_t(\zeta)$ foram obtidos via truncamento balanceado, com a matriz de ganho estático D_t idêntica àquela do modelo original.

Os seguintes índices de desempenho foram calculados para cada par de modelos reduzidos $H_t(\zeta)$ e $H_r(\zeta)$.

$$e_t \triangleq \frac{\|H(\zeta) - H_t(\zeta)\|_2^2}{\|H(\zeta)\|_2^2} \quad e_r \triangleq \frac{\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_2^2}{\|H(\zeta)\|_2^2}$$

A figura 4.1 mostra que o desempenho dos dois métodos é aproximadamente igual, apesar de o truncamento balanceado apresentar melhores resultados na maioria dos casos resolvidos.

Para a redução de modelos em norma \mathcal{H}_∞ , os modelos $H_r(\zeta)$ foram obtidos através da reso-

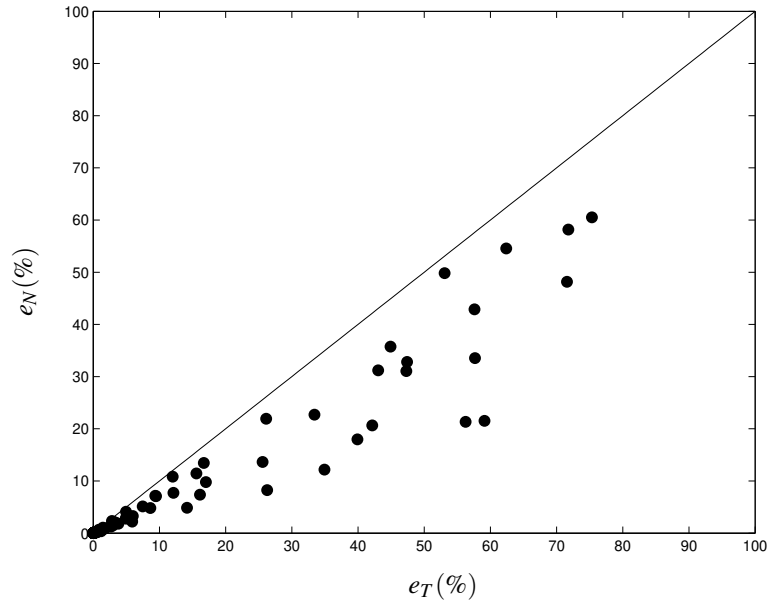


Figura 4.2: Redução de modelos em norma \mathcal{H}_∞ – primeira comparação.

lução do problema de otimização definido por (3.100–3.103). A matriz V foi determinada *a priori*, conforme a discussão da seção 3.3. Duas comparações diferentes foram feitas. Na primeira, os modelos $H_t(\zeta)$ foram obtidos via truncamento balanceado, com a matriz de ganho estático D_t idêntica àquela do modelo original. Na segunda, a partir do resultado do truncamento balanceado, a matriz D_t foi escolhida de forma a minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução.

Para a primeira comparação, os seguintes índices de desempenho foram calculados para cada par de modelos reduzidos $H_t(\zeta)$ e $H_r(\zeta)$.

$$e_t \triangleq \frac{\|H(\zeta) - H_t(\zeta)\|_\infty^2}{\|H(\zeta)\|_\infty^2} \quad e_r \triangleq \frac{\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2}{\|H(\zeta)\|_\infty^2}$$

A figura 4.2 mostra que, neste caso, o método proposto apresenta desempenho sempre superior ao truncamento balanceado.

Para a segunda comparação, os seguintes índices de desempenho foram calculados para cada par de modelos reduzidos $H_t(\zeta)$ e $H_r(\zeta)$.

$$e_t \triangleq \frac{\|H(\zeta) - H_t(\zeta)\|_\infty^2}{\min_{D_r} \|H(\zeta) - D_r\|_\infty^2} \quad e_r \triangleq \frac{\|H(\zeta) - H_r(\zeta)\|_\infty^2}{\min_{D_r} \|H(\zeta) - D_r\|_\infty^2}$$

A figura 4.3 mostra que o método proposto foi superior em praticamente todos os casos resolvidos.

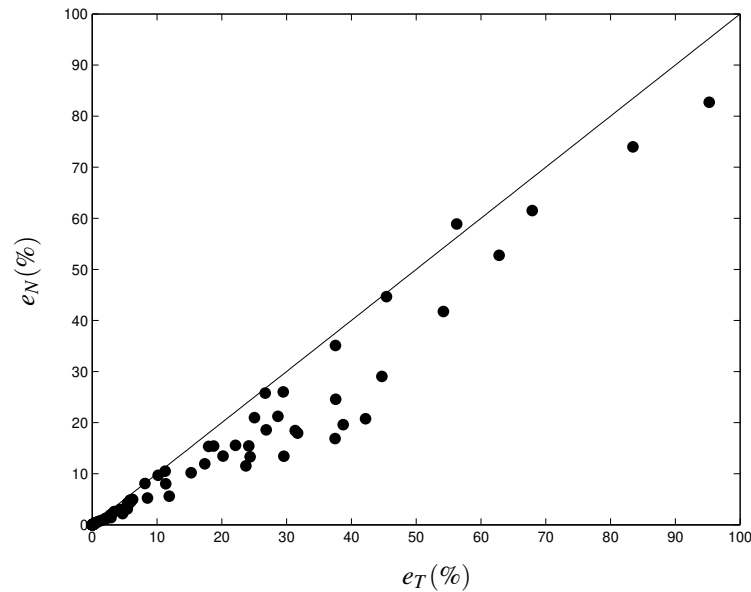


Figura 4.3: Redução de modelos em norma \mathcal{H}_∞ – segunda comparação.

Vale ressaltar que, na segunda comparação, o cálculo de $H_t(\zeta)$ inclui a resolução de um problema de otimização que envolve uma função de transferência de ordem $n + q$, o que requer um esforço computacional significativo. A redução via truncamento balanceado com a escolha ótima da matriz D_t é conhecida como aproximação de Hankel (Glover 1984).

4.2 Aplicação ao Modelo de uma Estrutura Flexível

Nesta seção, os métodos propostos no capítulo 3 são aplicados ao modelo discretizado de uma estrutura flexível controlada e os erros de redução são comparados àqueles obtidos via truncamento balanceado. Apenas uma breve descrição do modelamento da estrutura é apresentada. Mais detalhes podem ser encontrados em de Souza (1994).

A estrutura, uma barra engastada com seção transversal variável, é mostrada na figura 4.4. A barra tem comprimento $L = 10 \text{ m}$ e a constante de rigidez de seu material, suposto homogêneo, vale $E = 100N$. Os pontos 0 m e 10 m correspondem ao ponto de engastamento e à ponta da barra, respectivamente. A área da seção transversal da barra varia linearmente com a distância ao engaste e é nula na sua ponta. No ponto médio da barra (5 m), a área da seção transversal e a densidade linear de massa são dadas por $A_0 = 0,01 \text{ m}^2$ e $M_0 = 1 \text{ kg/m}$, respectivamente.

A barra é controlada por dois atuadores, localizados nos pontos $p_1 = 3,5 \text{ m}$ e $p_2 = 5,5 \text{ m}$ e dois sensores medem o deslocamento dos pontos $l_1 = 3,5 \text{ m}$ e $l_2 = 6,5 \text{ m}$. Supõe-se que a

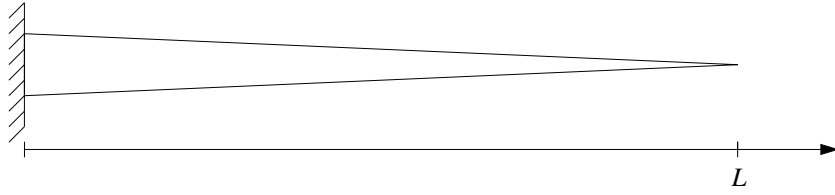


Figura 4.4: Barra engastada de seção transversal variável.

barra vibre apenas na direção longitudinal e que os esforços de controle e eventuais perturbações também estejam restritos a esta direção.

O modelo da barra para $t \geq 0$ e N modos de vibração é descrito pelas equações diferenciais lineares

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = \phi_i(p_1) u_1(t) + \phi_i(p_2) u_2(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(l_1) x_i(t), \quad (4.3)$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(l_2) x_i(t), \quad (4.4)$$

em que $u_1(t)$ e $u_2(t)$ indicam o esforço de controle dos atuadores em p_1 e p_2 , e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ indicam a leitura dos sensores em l_1 e l_2 , respectivamente.

Supõe-se que a viga esteja inicialmente em repouso, de forma que

$$\dot{x}_i(0) = x_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.5)$$

As frequências naturais ω_i e as funções $\phi_i(\eta)$, são dadas pelas equações

$$J_0(10\omega_i) = 0, \quad (4.6)$$

$$\phi_i(\eta) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{J_0(\omega_i(10 - \eta))}{J_1(10\omega_i)}, \quad (4.7)$$

em que $J_0(\cdot)$ e $J_1(\cdot)$ denotam as funções de Bessel de ordem zero e ordem um do primeiro tipo.

O modelo final da viga é obtido com a definição da lei de controle $u(t) = -R\dot{y}(t) + w(t)$, em que $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz simétrica, positiva definida escolhida de forma a produzir um fator de amortecimento pré-definido e $w(t)$ representa eventuais perturbações ao sistema.

$$u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad y(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

n_r	Truncamento Balanceado	Metódo proposto
2	2,0164	2,3031
4	0,6811	0,7177
6	0,4393	0,4938
8	0,0673	0,0742

Tabela 4.1: Norma \mathcal{H}_2 do erro de redução.

n_r	Truncamento Balanceado	Metódo proposto
2	7,7795	5,6809
4	2,0031	1,4630
6	1,9212	0,8772
8	0,1802	0,1085

Tabela 4.2: Norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução.

$$R = \begin{bmatrix} 0,6307 & -0,0309 \\ -0,0309 & 0,4402 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

A realização mínima no espaço de estados do sistema em malha fechada é dada por

$$H(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & I & 0 \\ -\Omega & -BRB' & B \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.10)$$

em que $\Omega = \text{diag}\{w_1^2, \dots, w_n^2\}$, $B_{ij} = \phi_i(p_j)$, e $C_{ki} = \phi_i(l_k)$. A função de transferência $H(s)$ representa, portanto, um sistema linear e invariante no tempo de ordem $n = 2N$, com m entradas e m saídas. Para a aplicação dos métodos de redução, foram considerados apenas os quinze primeiros modos naturais da barra, de forma que o sistema em malha fechada é de ordem trinta.

A discretização foi feita com base na constante de tempo do pólo mais rápido do sistema em malha fechada. Neste sentido, adotou-se o tempo de amostragem $T_s = 2$ s e assumiu-se que um segurador de ordem zero é utilizado para a conversão dos sinais de entrada. Sobre o sistema discretizado foram aplicados o truncamento balanceado e os métodos de redução de ordem propostos no capítulo 3. No caso \mathcal{H}_2 , a redução foi obtida com Q dada pelo gramiano de controlabilidade associado ao sistema de ordem completa, conforme discutido na seção 3.2.

A tabela 4.1 compara os erros de redução em norma \mathcal{H}_2 obtidos através do truncamento balanceado e do método proposto na seção 3.2 para modelos reduzidos de diferentes ordens. Os

resultados são coerentes com aqueles mostrados na seção anterior. O truncamento balanceado produz erros de redução ligeiramente menores nos quatro casos em destaque.

É importante observar que o erro de redução associado ao modelo reduzido de segunda ordem representa apenas 15% da norma \mathcal{H}_2 do modelo original de ordem trinta, o que indica que o modelo reduzido preserva boa parte das características dinâmicas do modelo original mesmo sob severa redução de ordem. O erro associado ao modelo reduzido de quarta ordem é ainda menos significativo.

A figura 4.5 mostra a resposta ao impulso entre o primeiro atuador e o primeiro sensor para os sistemas original e reduzido de segunda ordem. A semelhança das respostas é notável. A diferença entre a resposta ao impulso dos sistemas original e reduzido de quarta ordem é quase imperceptível.

A tabela 4.2 compara os erros de redução em norma \mathcal{H}_∞ obtidos através do truncamento balanceado e do método proposto na seção 3.3. A matriz de ganho estático dos modelos reduzidos via truncamento balanceado foi escolhida de forma a minimizar o erro de redução associado. Os resultados mais uma vez são coerentes com aqueles mostrados na seção 4.1. O método proposto é significativamente superior nos quatro casos em destaque.

A razão entre o erro de redução e a norma do sistema original é ainda menor no caso \mathcal{H}_∞ . Os erros associados aos modelos de segunda e quarta ordem representam respectivamente 6% e 2% da norma \mathcal{H}_∞ do sistema original de ordem trinta, o que indica que a redução não introduz perdas excessivas na qualidade do modelo.

A figura 4.6 mostra o valor singular máximo do erro de redução $E(e^{j\omega})$ em função de ω para os modelos reduzidos de quarta ordem obtidos através do truncamento balanceado e do método proposto.

4.3 Aplicação a um sistema de massas, molas e amortecedores

Nesta seção, os métodos propostos no capítulo 3 são aplicados ao modelo discretizado de um sistema de massas acopladas por molas e amortecedores. Os erros de redução são comparados àqueles obtidos via truncamento balanceado. Apenas uma breve descrição do modelamento é apresentada. Mais detalhes podem ser encontrados em Skelton e de Oliveira (2001).

Uma possível realização no espaço de estados para este sistema é dada por

$$H(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & I & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & 0 \end{array} \right], \quad (4.11)$$

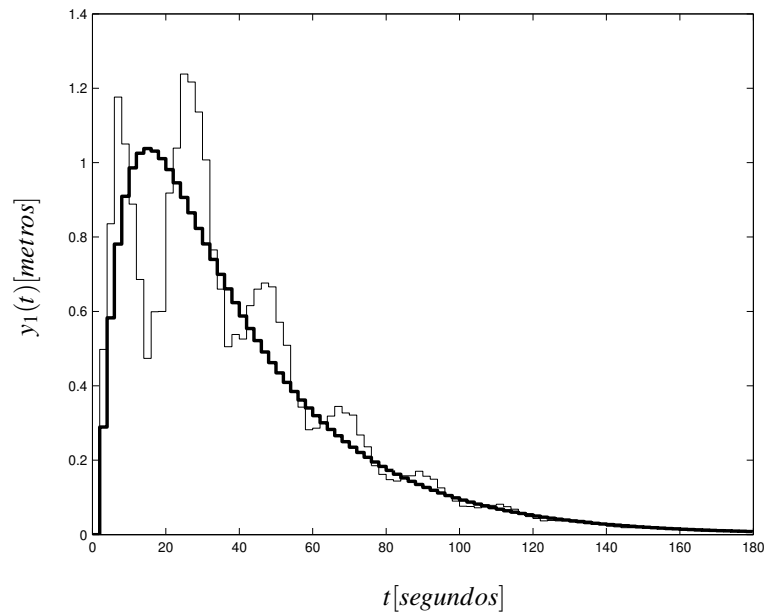


Figura 4.5: Resposta ao impulso entre o primeiro atuador e o primeiro sensor para os modelos de ordem completa (linha fina) e reduzido de segunda ordem (linha grossa).

em que as matrizes indicadas são dadas por

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

O modelo discretizado $H(\zeta)$ foi obtido a partir de um tempo de amostragem $T_s = 0,25s$, supondo que um segurador de ordem zero é utilizado para a conversão dos sinais de entrada do sistema. O modelo de ordem completa é de oitava ordem, com duas entradas e duas saídas.

A tabela 4.3 compara os erros de redução em norma \mathcal{H}_2 obtidos através do truncamento balanceado e do método proposto na seção 3.2 para modelos reduzidos de diferentes ordens. Como nos casos já discutidos, o truncamento balanceado produz erros de redução ligeiramente menores do que aqueles obtidos através do método de redução proposto.

Neste exemplo, os erros de redução são mais significativos do que aqueles obtidos na seção

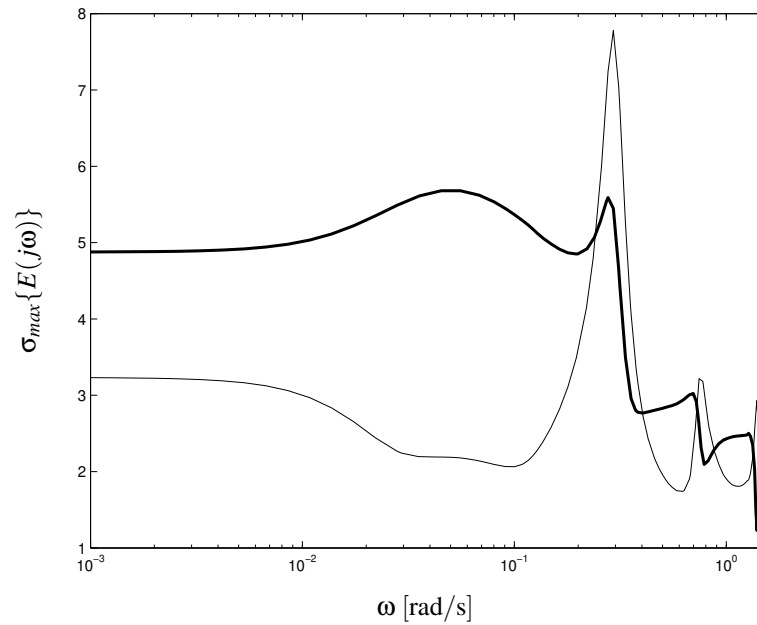


Figura 4.6: Valor singular máximo dos erros de redução associados ao truncamento balanceado (linha fina) e ao método proposto (linha grossa) para modelos reduzidos de segunda ordem.

n_r	Truncamento Balanceado	Metódo proposto
2	0,1899	0,1936
4	0,1595	0,1623
6	0,0266	0,0357

Tabela 4.3: Norma \mathcal{H}_2 do erro de redução.

anterior, indicando que as distorções introduzidas pela redução de ordem podem não ser desprezíveis. O erro associado ao modelo reduzido de segunda ordem representa quase 60 % da norma \mathcal{H}_2 do modelo original.

A tabela 4.4 compara os erros de redução em norma \mathcal{H}_∞ obtidos através do truncamento balanceado e do método proposto na seção 3.3. A matriz de ganho estático dos modelos reduzidos via truncamento balanceado foi escolhida de forma a minimizar o erro de redução associado. O resultado é coerente com aqueles da seção 4.1. O método proposto é significativamente superior ao truncamento balanceado.

Também no caso \mathcal{H}_∞ , o erro de redução é mais significativo do que no exemplo da seção anterior. O erro associado ao modelo reduzido de segunda ordem representa 40 % da norma \mathcal{H}_∞ do sistema de original de ordem oito.

n_r	Truncamento Balanceado	Metódo proposto
2	0,6359	0,4997
4	0,5277	0,3516
6	0,0845	0,0524

Tabela 4.4: Norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução.

4.4 Conclusão

Nesta dissertação foi discutida a redução de ordem de modelos em tempo discreto com base na minimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do erro de redução. A solução proposta para o problema é subótima e se baseia na escolha *a priori* de uma das variáveis do processo de otimização.

A solução proposta foi avaliada a partir de comparações com o truncamento balanceado, método clássico de redução de modelos. Quanto à redução em norma \mathcal{H}_2 , os resultados indicam que o método proposto tem desempenho equivalente àquele do truncamento balanceado. No caso \mathcal{H}_∞ , no entanto, o método proposto apresenta desempenho significativamente superior.

O grande obstáculo para a solução ótima do problema se concentra em uma de suas restrições, um limite sobre o posto de determinadas variáveis matriciais. Esta restrição, não-linear e não-convexa, deriva diretamente da imposição de um limite sobre a ordem do sistema reduzido. Parece não ser possível formular o problema de redução através de um problema de programação convexa.

A escolha da matriz V é um passo crítico nos métodos propostos por esta dissertação. Resultados pobres foram obtidos com escolhas diferentes daquelas utilizadas nas comparações deste capítulo. Como continuação deste trabalho, sugere-se, desta forma, a busca por novas escolhas para a matriz V que minimizem a subotimalidade inerente à estratégia.

É importante avaliar, por outro lado, a possibilidade de estender os métodos propostos para o caso em que o modelo de ordem completa contém incertezas, situação em que o truncamento balanceado não é aplicável. A formulação em termos de LMIs aparentemente permite esta abordagem, conforme resultados similares em filtragem robusta (Geromel et al. 2000). Neste sentido, é interessante considerar alguns trabalhos recentes sobre novas condições de estabilidade em termos de LMIs (de Oliveira, Bernussou e Geromel 1999, Geromel, de Oliveira e Bernussou 2002).

Referências Bibliográficas

- Anderson, B. D. O. and Liu, Y. (1989). Controller reduction : Concepts and approaches, *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(8): 802–812.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994a). History of linear matrix inequalities in control theory, *Proceedings of the American Control Conference* .
- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994b). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- de Oliveira, M. C. (1996). *Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares*, Tese de mestrado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- de Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems and Control Letters* **37**: 261–265.
- de Oliveira, M. C., de Farias, D. P. and Geromel, J. C. (1997). *LMISol User's Guide*, 1.0 edn.
- de Souza, C. C. (1994). *Controle Ótimo de Sistemas Flexíveis via Realimentação de Saída*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company.
- Egas, R. G. (2004). *Redução de modelos lineares em tempo contínuo*, Tese de mestrado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.
- Geromel, J. C., Bernoussou, J., Garcia, G. and de Oliveira, M. C. (2000). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete time linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **38**(5): 1353–1368.

- Geromel, J. C., Colaneri, P. and Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: an RH_2 and RH_∞ viewpoint*, Academic Press.
- Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. and Bernussou, J. (2002). Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions, *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(3): 700–711.
- Geromel, J. C., Egas, R. G. and Kawaoka, F. R. R. (2004a). \mathcal{H}_∞ model reduction with application to flexible systems. Submetido para publicação.
- Geromel, J. C., Egas, R. G. and Kawaoka, F. R. R. (2004b). Redução de modelos de sistemas contínuos via desigualdades matriciais lineares. Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS.
- Geromel, J. C., Kawaoka, F. R. R. and Egas, R. G. (2004a). Model reduction of discrete time systems through linear matrix inequalities. Aceito para publicação no International Journal of Control.
- Geromel, J. C., Kawaoka, F. R. R. and Egas, R. G. (2004b). Redução de modelos de sistemas discretos via desigualdades matriciais lineares. Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS.
- Glover, K. (1984). All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds, *International Journal of Control* **39**(6): 1115–1193.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall Information and System Sciences Series, Prentice-Hall, Inc.
- Luenberger, D. G. (1973). *Introduction to linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Rockafellar, R. T. (1993). Lagrange multipliers and optimality, *SIAM Review* **35**(2): 183–238.
- Skelton, R. E. and de Oliveira, M. C. (2001). Model reduction, in H. Ünbekuen (ed.), *The Encyclopedia of Life Support Systems*, EOLSS Publishers Co., London, UK.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. and Grigoriadis, K. (1997). *A Unified Algebraic Approach to Control Design*, Taylor & Francis, London, UK.
- Strang, G. (1988). *Linear Algebra and its Applications*, third edn, Harcourt Brace Jovanovich.

Zhou, K. and Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.