

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

*Departamento de Automação*

ESTUDO DO DESEMPENHO DE MÉTODOS SEQUÊNCIAIS  
DE FILTRAGEM NÃO LINEAR USANDO  
APROXIMAÇÕES ITERADAS DE PRIMEIRA ORDEM

*Clésio Luis Tozzi*

*Orientador: Prof. Manuel de Jesus Mendes*

*Tese de Mestrado apresentada à  
Faculdade de Engenharia da Uni  
versidade Estadual de Campinas*

OUTUBRO - 1975

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

## AGRADECIMENTOS

*Desejo expressar meu agradecimento a todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram na realização deste trabalho. Em particular sou grato a:*

*Dr. Manuel de Jesus Mendes, meu orientador, pela sua assistência, estímulo e inúmeras sugestões em todas as fases deste trabalho*

*Srta. Eliana Fussako Tsuboka, pela paciência e boa vontade no trabalho de datilografia.*

## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO I - EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN GENERALIZADO ITERADO</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Equações do filtro de Kalman para sistemas lineares discretos . . . . .	2
1.3 Equações do "smoothing" . . . . .	4
1.4 Equações do filtro de Kalman para sistemas não lineares . . . . .	5
1.5 Filtros iterados . . . . .	11
<b>CAPÍTULO II - ESTUDO DAS CARACTERÍSTICAS DO FILTRO GENERALIZADO DE KALMAN ITERADO</b>	<b>18</b>
2.1 Introdução . . . . .	18
2.2 Filtro de Kalman generalizado - erros devido a linearização . . . . .	20
2.3 Filtros iterados . . . . .	25
2.3.1 Iterações locais . . . . .	25
2.3.2 Smoothing . . . . .	27
2.4 Condições iniciais . . . . .	29
2.5 Conclusão . . . . .	30
<b>CAPÍTULO III - ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO FILTRO DE KALMAN</b>	<b>31</b>
3.1 Tempo de computação . . . . .	31
3.2 Memória . . . . .	41
<b>CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN GENERALIZADO A ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS</b>	<b>44</b>
4.1 Introdução . . . . .	44
4.2 Métodos sequenciais . . . . .	45

4.3 Equações do filtro . . . . .	46
4.4 Exemplo . . . . .	47
4.5 Conclusões . . . . .	55
APÊNDICE . . . . .	56
REFERÊNCIAS . . . . .	65

1.1 INTRODUÇÃO

Consideremos um sistema não linear discreto, perturbado por ruído aleatório Gaussiano tanto no estado como nas medidas. Em particular, seja o processo cujos estados são definidos pela seguinte equação às diferenças:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), k) + \underline{w}(k) \quad (1.1)$$

e com medidas descritas pela equação:

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), k) + \underline{v}(k) \quad (1.2)$$

onde  $\underline{x}(k)$  é o vetor  $n \times 1$  que representa as variáveis de estado do sistema,  $\underline{f}(\underline{x}(k), k)$  é o vetor  $n \times n$  de funções de transição de estado,  $\underline{y}(k)$  o vetor  $m \times 1$  que representa as medidas tomadas do sistema,  $\underline{h}(\underline{x}(k), k)$  o vetor  $m \times n$  de funções de medida do sistema e  $\underline{w}(k)$  e  $\underline{v}(k)$ , vetores de ruído Gaussiano branco, de média zero e covariâncias:

$$\begin{aligned} \epsilon\{\underline{w}(k) \underline{w}^T(l)\} &= \underline{W}(k) \delta_{k,l} \\ \epsilon\{\underline{v}(k) \underline{v}^T(l)\} &= \underline{V}(k) \delta_{k,l} \\ \epsilon\{\underline{w}(k) \underline{v}^T(k)\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde  $\epsilon$  é o operador esperança,  $\underline{W}(k)$  e  $\underline{V}(k)$  as matrizes de covariância de  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$  e  $\delta_{k,l}$  o delta de Kronecker.

Tendo observado uma sequência finita  $\{\underline{y}(0), \underline{y}(1), \dots, \underline{y}(k)\}$  de medidas do sistema, deseja-se estimar uma sequência de estados  $\{\underline{x}(0), \underline{x}(1), \dots, \underline{x}(k+i)\}$ , partindo de tais medidas.

Dentro desta formulação, três casos são encontrados:

I - Se  $i > 0$ , com medidas tomadas até o instante  $k$ ,  $\{\underline{y}(0) \dots \underline{y}(k)\}$  pretende-se estimar os estados futuros  $\{\underline{x}(k+1) \dots \underline{x}(k+i)\}$ , e neste caso tem-se um problema de predição;

II - Se  $i < 0$ , baseado em medidas tomadas até o instante  $k$ ,  $\{y(0) \dots y(k)\}$ , procura-se estimações para estados anteriores a  $k$ ,  $\{\dots \underline{x}(k-2), \underline{x}(k-1)\}$ , e fala-se então de alisagem ("smoothing");

III - Se  $i = 0$ , problema de filtragem, com medidas tomadas  $\{y(0), \dots, y(k)\}$ , faz-se uma estimacão do estado atual do sistema, no caso  $\underline{x}(k)$ .

Representando o valor estimado de  $\underline{x}(j)$ , baseado nas medidas  $\{y(0) \dots y(k)\}$  por  $\hat{\underline{x}}(j/k)$  e o erro de estimacão por  $\tilde{\underline{x}}(j/k)$  onde:

$$\tilde{\underline{x}}(j/k) \stackrel{\Delta}{=} \underline{x}(j) - \hat{\underline{x}}(j/k) \quad (1.4)$$

procura-se um estimador, que satisfaça as seguintes condições:

$$\epsilon\{\tilde{\underline{x}}(j/k) / \underline{y}(k)\} = \epsilon\{\underline{x}(j) / \underline{Y}(k)\}, \text{ onde}$$

$$\underline{Y}(k) \stackrel{\Delta}{=} \{y(0), \dots, y(k)\}$$

$$e \quad \epsilon\{\tilde{\underline{x}}(j/k)\} = \epsilon\{\underline{x}(j)\} \quad (1.5)$$

e seja uma função linear da sequência de observações, e ainda que a variância do erro seja mínima, isto é

$$\text{var}\{\tilde{\underline{x}}(j/k)\} = \text{mínimo}$$

A solução para este problema é o filtro de Kalman (1,2), cujas equações são colocadas no ítem 1.2.

## 1.2 - EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN, PARA SISTEMAS LINEARES DISCRETOS

Seja o sistema discreto linear descrito pela equação:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\phi}(k+1, k) \underline{x}(k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{w}(k) \quad (1.6)$$

e medidas também lineares dadas por:

$$\underline{y}(k) = \underline{H}(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (1.7)$$

onde:

$\underline{x}$  - vetor de estado com dimensão  $n \times 1$

$\underline{\phi}$  - matriz transição do estado (de  $t_k$  p/  $t_{k+1}$ ) com dimensão  $n \times n$

$\underline{\Gamma}$  - matriz coeficientes do ruído com dimensão  $n \times r$

$\underline{H}$  - matriz de medidas com dimensão  $m \times n$

$\underline{Y}$  - vetor das medidas em  $t_k$ , com dimensão  $m \times 1$

$\underline{w}$  - vetor de ruídos aleatórios Gaussianos de dimensão  $n \times 1$

$\underline{v}$  - vetor de ruídos aleatórios Gaussianos de dimensão  $m \times 1$

e tendo  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$  médias e variâncias respectivamente:

$$\begin{aligned} \epsilon\{\underline{w}_k\} &= \underline{0} \quad e \quad \epsilon\{\underline{w}_k \underline{w}_l\} = \underline{W}(k) \delta_{k,l} \\ \epsilon\{\underline{v}_k\} &= \underline{0} \quad e \quad \epsilon\{\underline{v}_k \underline{v}_l\} = \underline{V}(k) \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (1.8)$$

As equações do filtro de Kalman (1, 2) aplicadas ao sistema formado pelas equações 1.6 e 1.7 resultam:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) = \underline{\phi}(k+1, k) \hat{\underline{x}}(k/k) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}(k+1/k) &= \underline{\phi}(k+1, k) \underline{X}(k/k) \underline{\phi}^T(k+1, k) + \\ &+ \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{K}(k+1) &= \underline{X}(k+1/k) \underline{H}^T(k+1) (\underline{H}(k+1) \underline{X}(k+1/k) \underline{H}^T(k+1) + \\ &+ \underline{V}(k+1))^{-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1/k+1) &= \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \\ &+ \underline{H}(k+1) \hat{\underline{x}}(k+1/k)) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = (\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{H}(k+1)) \underline{X}(k+1/k) \quad (1.13)$$

onde:

$\hat{\underline{x}}(k+1/k)$  - estado predito para  $t_{k+1}$  dado  $\underline{Y}_k$

$\underline{X}(k+1/k)$  - matriz covariância de  $\hat{\underline{x}}(k+1/k)$

$\underline{K}(k+1)$  - ganho do filtro em  $t_{k+1}$

$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1)$  - estado estimado em  $t_{k+1}$  dado  $\underline{Y}_{k+1}$

$\underline{X}(k+1/k+1)$  - matriz covariância de  $\hat{\underline{x}}(k+1/k+1)$

### 1.3 EQUAÇÕES DO SMOOTHING

Na solução do problema do smoothing, desejamos obter estimações do estado  $\underline{x}(k+i)$ , onde  $i < 0$ , partindo de medidas  $\{\underline{y}(0), \underline{y}(1) \dots \underline{y}(k)\}$ . Este problema pode ser dividido em três casos diferentes:

I - Smoothing para um intervalo fixo: neste caso o intervalo de observação é constante, e  $i$  toma valores entre  $k$  e zero ( $i = k, k-1, \dots, 1, 0$ ), de modo a obter estimações na sequência  $\{\hat{\underline{x}}(0/k), \hat{\underline{x}}(1/k), \dots, \hat{\underline{x}}(k-1/k)\}$ ;

II - Smoothing para um ponto fixo: neste caso o ponto o qual a estimação deve ser obtida é fixo, e esta estimação é baseada nas medidas tomadas no instante corrente. Por exemplo se tomarmos  $\underline{x}(0)$  como o estado a ser estimado, a sequência de estimações obtida é  $\{\hat{\underline{x}}(0/1), \hat{\underline{x}}(0/2) \dots \hat{\underline{x}}(0/k)\}$ ;

III - Smoothing para um atraso fixo: neste caso  $i$  é constante, isto é, o intervalo entre o instante em que a medida é tomada e o instante para o qual a estimação deve ser feita é constante. Se tomarmos  $i = 1$  temos a seguinte sequência de valores estimados  $\{\underline{x}(0/1), \underline{x}(1/2) \dots \underline{x}(k-1/k)\}$ ;

Para o mesmo sistema anterior, descrito pelas equações (1.6) e (1.7), a solução do problema do smoothing para o caso I (4), consiste nas seguintes equações:

$$\underline{K}_s(k) = \underline{X}(k/k) \underline{\phi}^T(k) \underline{X}^{-1}(k+1/k) \quad (1.14)$$



$$\underline{\hat{x}}(k/N) = \underline{\hat{x}}(k/k) + \underline{K}_s(k) (\underline{\hat{x}}(k+1/N) - \underline{\phi}(k) \underline{\hat{x}}(k/k)) \quad (1.15)$$

$$\underline{X}(k/N) = \underline{X}(k/k) + \underline{K}_s(k) (\underline{X}(k+1/N) - \underline{X}(k+1/k)) \underline{K}_s^T(k) \quad (1.16)$$

onde

$\underline{K}_s(k)$  - ganho para o "smoothing" em  $t_k$

$\underline{\hat{x}}(k/N)$  - estimação de  $\underline{x}(k)$  baseados nas medidas  $\{Y(0), \dots, Y(N)\}$

$\underline{X}(k/N)$  - variância do erro em  $\underline{\hat{x}}(k/N)$

#### 1.4 - EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN PARA SISTEMAS NÃO LINEARES (FILTRO DE KALMAN GENERALIZADO)

Sendo grande o número de problemas, envolvendo equações não lineares, é importante a generalização das equações do filtro (eq. 1.9 a 1.13), de modo a abranger também estes casos.

Seja o sistema não linear discreto, definido pelas equações:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{w}(k) \quad (1.17)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), k) + \underline{v}(k) \quad (1.18)$$

onde  $\underline{w}(k)$  e  $\underline{v}(k)$  são perturbações Gaussianas de médias zero e variâncias  $\underline{W}(k)$  e  $\underline{V}(k)$  respectivamente.

$$\begin{aligned} \epsilon\{\underline{w}(k)\} &= \underline{0} \quad \text{e} \quad \epsilon\{\underline{w}(k) \underline{w}^T(l)\} = \underline{W}(k) \delta_{k,l} \\ \epsilon\{\underline{v}(k)\} &= \underline{0} \quad \text{e} \quad \epsilon\{\underline{v}(k) \underline{v}^T(l)\} = \underline{V}(k) \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (1.19)$$

e uma trajetória nominal (ou de referência), com medidas nominais definidas por:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{x}}(k+1) &= \underline{f}(\underline{\bar{x}}(k), k) \\ \underline{\bar{y}}(k) &= \underline{h}(\underline{\bar{x}}(k), k) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Expandindo a equação (1.17) em série de Taylor em torno do ponto  $\bar{\underline{x}}(k)$ , temos:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{f}(\bar{\underline{x}}(k), k) + \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k)=\bar{\underline{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k)) \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{f}(\underline{x}(k), k)}{\partial^2 \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k)=\bar{\underline{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k)) (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k))^T \\ &+ \dots + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Se  $\Delta \underline{x}(k)$ , que é o desvio entre o valor real e a trajetória nominal, for pequeno, os termos de ordem superior e igual a dois podem ser desprezados e  $\underline{x}(k+1)$  pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &\cong \underline{f}(\bar{\underline{x}}(k), k) + \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k)=\bar{\underline{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k)) + \\ &+ \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \end{aligned} \quad (1.22)$$

ou de outra forma:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) - \underline{f}(\bar{\underline{x}}(k), k) &\cong \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k)=\bar{\underline{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k)) \\ &+ \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \end{aligned} \quad (1.23)$$

De modo análogo, expandindo a equação (1.18) em série de Taylor, em torno do ponto  $\bar{\underline{x}}(k)$  temos:

$$\begin{aligned} \underline{y}(k) &= \underline{h}(\bar{\underline{x}}(k), k) + \left. \frac{\partial \underline{h}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k)=\bar{\underline{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k)) + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{h}(\underline{x}(k), k)}{\partial^2 \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k)=\bar{\underline{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k)) (\underline{x}(k) - \bar{\underline{x}}(k))^T \\ &+ \dots + \underline{v}(k) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Desprezando os termos de ordem igual e superior a dois, a equação (1.18) pode ser escrita como:

$$\underline{y}(k) \cong \underline{h}(\underline{\bar{x}}(k), k) + \left. \frac{\partial \underline{h}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k) = \underline{\bar{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \underline{\bar{x}}(k)) + \underline{v}(k) \quad (1.26)$$

ou de outra forma:

$$\underline{y}(k) - \underline{h}(\underline{\bar{x}}(k), k) \cong \left. \frac{\partial \underline{h}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k) = \underline{\bar{x}}(k)} (\underline{x}(k) - \underline{\bar{x}}(k)) + \underline{v}(k) \quad (1.27)$$

Definindo:

$$\underline{x}(k+1) - \underline{\bar{x}}(k+1) = \underline{\Delta x}(k+1) \quad (1.28)$$

$$\underline{x}(k) - \underline{\bar{x}}(k) = \underline{\Delta x}(k) \quad (1.29)$$

$$\underline{y}(k) - \underline{\bar{y}}(k) = \underline{\Delta y}(k) \quad (1.30)$$

das equações (1.28) e (1.30) e das equações (1.23) e (1.26), resulta:

$$\underline{\Delta x}(k+1) = \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k) = \underline{\bar{x}}(k)} \underline{\Delta x}(k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{w}(k) \quad (1.31)$$

e

$$\underline{\Delta y}(k) = \left. \frac{\partial \underline{h}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k) = \underline{\bar{x}}(k)} \underline{\Delta x}(k) + \underline{v}(k) \quad (1.32)$$

Para simplificação da notação, seja:

$$\left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k) = \underline{\bar{x}}(k)} = \underline{F}(\underline{\bar{x}}(k), k) \quad (1.33)$$

e

$$\left. \frac{\partial \underline{h}(\underline{x}(k), k)}{\partial \underline{x}(k)} \right|_{\underline{x}(k) = \underline{\bar{x}}(k)} = \underline{G}(\underline{\bar{x}}(k), k) \quad (1.34)$$

De acordo com esta notação, as equações (1.31) e (1.32), são escritas como:

$$\underline{\Delta x}(k+1) = \underline{F}(\underline{\bar{x}}(k), k) \underline{\Delta x}(k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{w}(k) \quad (1.35)$$

$$\underline{\Delta y}(k) = \underline{G}(\underline{\bar{x}}(k), k) \underline{\Delta x}(k) + \underline{v}(k) \quad (1.36)$$

que são lineares em  $\underline{\Delta x}(k)$ .

Portanto as equações do filtro linear (eq. 1.9 a 1.13) podem ser aplicados em primeira aproximação para este caso, observando-se que ao invés de estado e medida, temos desvio do estado e desvio da medida.

Aplicando as equações do filtro (1.9 a 1.13) ao sistema descrito pelas equações (1.35) e (1.36), resulta:

$$\underline{\hat{\Delta x}}(k+1/k) = \underline{F}(\underline{\bar{x}}(k), k) \underline{\hat{\Delta x}}(k/k) \quad (1.37)$$

$$\underline{X}_{\Delta}(k+1/k) = \underline{F}(\underline{\bar{x}}(k), k) \underline{X}_{\Delta}(k/k) \underline{F}^T(\underline{\bar{x}}(k), k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) \quad (1.38)$$

$$\underline{K}(k+1) = \underline{X}_{\Delta}(k+1/k) \underline{G}^T(\underline{\bar{x}}(k+1), k+1) \{ \underline{G}(\underline{\bar{x}}(k+1), k+1) \underline{X}_{\Delta}(k+1/k) \underline{G}^T(\underline{\bar{x}}(k+1), k+1) + \underline{V}(k+1) \}^{-1} \quad (1.39)$$

$$\underline{\hat{\Delta x}}(k+1/k+1) = \underline{\hat{\Delta x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) \{ \underline{\Delta y}(k+1) - \underline{G}(\underline{\bar{x}}(k+1), k+1) \underline{\hat{\Delta x}}(k+1/k) \} \quad (1.40)$$

$$\underline{X}_{\Delta}(k+1/k+1) = \{ \underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{G}(\underline{\bar{x}}(k+1), k+1) \} \underline{X}_{\Delta}(k+1/k) \quad (1.41)$$

como

$$\underline{\hat{x}}(k+1/k+1) = \underline{\bar{x}}(k+1) + \underline{\hat{\Delta x}}(k+1/k+1) \quad (1.42)$$

o estado pode ser estimado a partir da equação (1.40), conhecida a trajetória nominal.

O erro entre o estado real e o estado estimado  $\tilde{e}$ , por definição:

$$\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1) = \underline{x}(k+1) - \underline{\tilde{x}}(k+1/k+1) \quad (1.43)$$

e como

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\bar{x}}(k+1) + \underline{\Delta x}(k+1) \quad (1.44)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1) = \underline{\bar{x}}(k+1) + \underline{\Delta \tilde{x}}(k+1/k+1) \quad (1.45)$$

resulta das equações (1.43), (1.44) e (1.45)

$$\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1) = \underline{\bar{x}}(k+1) + \underline{\Delta x}(k+1) - \underline{\bar{x}}(k+1) - \underline{\Delta \tilde{x}}(k+1/k+1) \quad (1.46)$$

ou

$$\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1) = \underline{\Delta x}(k+1) - \underline{\Delta \tilde{x}}(k+1/k+1) = \underline{\Delta \tilde{x}}(k+1/k+1) \quad (1.47)$$

Sendo  $\underline{x}(k+1/k+1)$  a covariância de  $\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1)$ , resulta da equação (1.47)

$$\underline{x}(k+1/k+1) = \text{cov}\{\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1)\} = \text{cov}\{\underline{\Delta \tilde{x}}(k+1/k+1)\} \quad (1.48)$$

ou seja:

$$\underline{\tilde{x}}(k+1/k+1) = \underline{\bar{x}}(k+1) + \underline{\Delta \tilde{x}}(k+1/k+1) \quad (1.49)$$

$$\underline{x}(k+1/k+1) = \underline{x}_{\Delta}(k+1/k+1) \quad (1.50)$$

que são os valores do estado estimado e variância para o sistema não linear.

Tomemos agora como trajetória nominal, a trajetória dos valores estimados  $\underline{\hat{x}}(k/k)$  e  $\underline{\hat{x}}(k+1/k)$ ; linearizando as equações de estado em torno de  $\underline{\hat{x}}(k/k)$  e as equações de medida em torno de  $\underline{\hat{x}}(k+1/k)$ . Grande melhoria pode ser introduzida no desempenho do filtro, uma vez que a informação contida nas medidas  $\underline{y}(0 \rightarrow k)$ , é introduzida sequencialmente também na trajetória nominal.

Obtém-se

$$\underline{\bar{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k/k) \quad (1.51)$$

$$\underline{\bar{x}}(k+1) = \underline{\hat{x}}(k+1/k) \quad (1.52)$$

A equação (1.37) pode ser escrita também na seguinte forma:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) - \bar{\underline{x}}(k+1) = \underline{F}(\bar{\underline{x}}(k), k) (\bar{\underline{x}}(k) - \hat{\underline{x}}(k/k)) \quad (1.53)$$

substituindo (1.51) em (1.53) obtemos:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) - \bar{\underline{x}}(k+1) = \underline{F}(\hat{\underline{x}}(k/k)) (\hat{\underline{x}}(k/k) - \bar{\underline{x}}(k/k)) \quad (1.54)$$

de onde se conclui, usando a equação (1.20), que:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(k/k), k) \quad (1.55)$$

A equação (1.40), também pode ser escrita do seguinte modo:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) - \bar{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) - \bar{\underline{x}}(k+1) + \underline{K}(k+1) (\Delta \underline{y}(k+1) - \underline{G}(\bar{\underline{x}}(k+1), k+1) (\hat{\underline{x}}(k+1/k) - \bar{\underline{x}}(k+1))) \quad (1.56)$$

Das equações (1.20), (1.30), (1.52) resulta:

$$\Delta \underline{y}(k+1) = \underline{y}(k+1) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k+1/k)) \quad (1.57)$$

Substituindo (1.52) e (1.57) em (1.56) segue:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1/k) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) - \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) - \underline{G}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) (\hat{\underline{x}}(k+1/k) - \bar{\underline{x}}(k+1/k))) \quad (1.58)$$

que se reduz a:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1)) \quad (1.59)$$

Ordenando os resultados anteriores temos:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(k/k), k) \quad (1.60)$$

$$\underline{X}(k+1/k) = \underline{F}(\hat{\underline{x}}(k/k), k) \underline{X}(k/k) \underline{F}^T(\hat{\underline{x}}(k/k), k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) \quad (1.61)$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k+1/k) \underline{G}^T(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) (\underline{G}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) \underline{x}(k+1/k) \underline{G}^T(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) + \underline{V}(k+1))^{-1} \quad (1.62)$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k+1/k))) \quad (1.63)$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = (\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{G}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1)) \underline{X}(k+1/k) \quad (1.64)$$

que são as equações do filtro generalizado de Kalman.

### 1.5 FILTROS ITERADOS

Do modo como foram obtidas as equações do filtro generalizado (equações 1.60 a 1.64), através de linearização, é evidente que, dependendo das não linearidades envolvidas e da diferença entre o valor real e o valor nominal, tomado para estas linearizações, erros significativos podem estar sendo cometidos, quando se abandonam os termos de segunda ordem em diante.

Parte dos erros introduzidos, com o procedimento descrito acima, pode ser eliminada se se introduzir iterações, que correspondem a relinearizações das equações do sistema em torno de valores mais próximos dos verdadeiros, do que os tomados anteriormente.

#### A - Iterações Locais

Consideremos primeiro as chamadas iterações locais, cuja finalidade é a de corrigir os erros introduzidos pelas não linearidades das medidas.

Para obtenção do filtro de Kalman generalizado, as equações de medida do sistema foram linearizadas em torno do valor  $\hat{\underline{x}}(k+1/k)$ , que corresponde a uma estimação do valor real de  $\underline{x}(k+1)$ , baseada em medidas tomadas até o instante  $t_k$  ( $\underline{y}_i, i=1, k$ ). Se compararmos os valores  $\hat{\underline{x}}(k+1/k+1)$  e  $\hat{\underline{x}}(k+1/k)$  com o valor real de  $\underline{x}(k+1)$ , o primeiro deles deve encontrar-se em média mais pró

ximo do valor real, uma vez que maior quantidade de informação, representada pelas medidas ( $y_i$ ,  $i=1, k+1$ ), é disponível para sua determinação.

Se então, após obtida a estimação  $\hat{x}(k+1/k+1)$ , se se relinearizarem as equações de medida, em torno desse valor, melhores resultados poderão ser obtidos.

Resumindo, o processo consiste: a cada passo da filtração, linearizar as equações em torno de  $\hat{x}(k+1/k)$ , obter uma estimação  $\hat{x}(k+1/k+1)$ , com este novo valor relinearizar as equações e obter uma nova estimação para  $\hat{x}(k+1/k+1)$ .

Das equações (1.56) e (1.57) resulta:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1/k+1) = & \hat{x}(k+1/k) + K(k+1) (y(k+1) - h(\bar{x}(k+1), k+1) - \\ & + G(\bar{x}(k+1), k+1)(\hat{x}(k+1/k) - \bar{x}(k+1))) \end{aligned} \quad (1.65)$$

fazendo

$$\begin{aligned} \underline{n}_i &= \bar{x}(k+1) \\ \underline{n}_{i+1} &= \hat{x}(k+1/k+1) \end{aligned} \quad (1.66)$$

a equação (1.65) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \underline{n}_{i+1} = & \hat{x}(k+1/k) + K(k+1) (y(k+1) - h(\underline{n}_i, k+1) - \\ & + G(\underline{n}_i, k+1) (\hat{x}(k+1/k) - \underline{n}_i)) \end{aligned} \quad (1.67)$$

para  $i = 1, 2$

e onde:

$$\begin{aligned} \underline{n}_1 &= \hat{x}(k+1/k) \\ \underline{n}_3 &= \hat{x}(k+1/k+1) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Sendo o ganho do filtro ( $K(k+1)$ ), função de  $G(\bar{x}(k+1), k+1)$ , é necessário, para cada iteração, recalcular este valor.

Supondo que estas iterações são convergentes [ 3 ], elas



podem ser repetidas, em cada passo do filtro, um número determinado de vezes, ou até que os dois últimos valores obtidos ( $\underline{n}_i$  e  $\underline{n}_{i-1}$ ), estejam suficientemente próximos.

De modo geral as equações do filtro generalizado com iterações locais são escritas:

$$\underline{\hat{x}}(k+1/k) = f(\underline{\hat{x}}(k/k), k) \quad (1.69)$$

$$\underline{X}(k+1/k) = \underline{F}(\underline{\hat{x}}(k/k), k) \underline{X}(k/k) \underline{F}^T(\underline{\hat{x}}(k/k), k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}(k) \quad (1.70)$$

$$\underline{K}_i(k+1) = \underline{X}(k+1/k) \underline{G}^T(\underline{n}_i, k+1) (\underline{G}(\underline{n}_i, k+1) \underline{X}(k+1/k) + \underline{G}^T(\underline{n}_i, k+1) + \underline{V}(k+1))^{-1} \quad (1.71)$$

$$\underline{n}_{i+1} = \underline{\hat{x}}(k+1/k) + \underline{K}_i(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{h}(\underline{n}_i) - \underline{G}(\underline{n}_i, k+1)(\underline{\hat{x}}(k+1/k) - \underline{n}_i)) \quad (1.72)$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = (\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{G}(\underline{n}_i, k+1)) \underline{X}(k+1/k) \quad (1.73)$$

onde as equações (1.71) e (1.72) são computadas para  $i = 1, 2, \dots, N$ ; e com

$$\underline{n}_1 = \underline{\hat{x}}(k+1/k) \quad e$$

$$\underline{n}_{N+1} = \underline{\hat{x}}(k+1/k+1) .$$

### B - Iterações com Alisagem do Estado

Consideremos agora as iterações tipo "smoothing", cuja finalidade é eliminar os erros devidos à linearização das equações de transição dos estados, de  $t_k$  para  $t_{k+1}$ .

Com a informação obtida até  $t_{k+1}$  ( $\underline{y}_i$ ,  $i=1, \dots, k+1$ ), obtêm-se  $\underline{\hat{x}}(k+1/k+1)$  através das equações do filtro generalizado (eq. 1.60 a 1.64). Contando agora com a nova medida  $\underline{y}_{k+1}$ , calculam-se, através das equações do "smoothing", melhores valores para valores estimados em  $t_k$ , que representaremos por  $(\underline{\hat{x}}(k/k+1))$ .

Aplicam-se mais uma vez as equações do filtro generalizado para obter novos valores para  $\underline{\hat{x}}(k+1/k+1)$ .

A generalização das equações do Smoothing (eq. 1.14 a 1.16) para o caso não linear é feita a seguir.

Consideremos novamente o sistema linearizado formado pelas equações (1.35) e (1.36); aplicando as equações do "smoothing" para o caso linear (eq. 1.14 a 1.16), obtemos:

$$\underline{K}_s(k) = \underline{X}_\Delta(k/k) \underline{F}^T(\underline{\hat{x}}(k/k), k) \underline{X}_\Delta^{-1}(k+1/k) \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta\hat{x}}(k/k+1) &= \underline{\Delta\hat{x}}(k/k) + \underline{K}_s(k) (\underline{\Delta\hat{x}}(k+1/k+1) - \\ &\quad + \underline{F}(\underline{\hat{x}}(k/k), k) \underline{\Delta\hat{x}}(k/k)) \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}_\Delta(k/k+1) &= \underline{X}_\Delta(k/k) + \underline{K}_s(k) (\underline{X}_\Delta(k+1/k+1) - \\ &\quad + \underline{X}(k+1/k)) \underline{K}_s^T(k) \end{aligned} \quad (1.76)$$

Considerando a equação (1.50), como:

$$\underline{\Delta\hat{x}}(k/k+1) = \underline{\hat{x}}(k/k+1) - \underline{\bar{x}}(k) \quad (1.77)$$

$$\underline{\Delta x}(k/k) = \underline{\hat{x}}(k/k) - \underline{\bar{x}}(k)$$

onde:  $\underline{\bar{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k/k)$  e  $\underline{\bar{x}}(k+1) = \underline{\bar{x}}(k+1/k)$ .

obtemos:

$$\underline{K}_s(k) = \underline{X}(k/k) \underline{F}^T(\underline{\hat{x}}(k/k), k) \underline{X}^{-1}(k+1/k) \quad (1.78)$$

$$\underline{\hat{x}}(k/k+1) = \underline{\hat{x}}(k/k) + \underline{K}_s(k) (\underline{\hat{x}}(k+1/k+1) - \underline{\hat{x}}(k+1/k)) \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}(k+1/k+1) &= \underline{X}(k/k) + \underline{K}_s(k) (\underline{X}(k+1/k+1) - \\ &\quad + \underline{X}(k+1/k)) \underline{K}_s^T(k) \end{aligned} \quad (1.80)$$

que são as equações do "smoothing" para o sistema linearizado.

O filtro generalizado com "smoothing" é obtido juntando-se as equações (1.60) a (1.64) e as equações (1.78) a (1.80). Po

dendo este tipo de iterações ser aplicado um número qualquer de vezes, as equações citadas são reescritas de modo geral:

$$\hat{\underline{x}}^j(k+1/k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}^j(k/k+1), k) \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}^j(k+1/k) &= \underline{F}(\hat{\underline{x}}^j(k/k+1), k) \underline{X}^j(k/k+1) \underline{F}^T(\hat{\underline{x}}^j(k/k+1), k) \\ &+ \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) \end{aligned} \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned} \underline{K}^j(k+1) &= \underline{X}^j(k+1/k) \underline{G}^T(\hat{\underline{x}}^j(k+1), k+1) (\underline{G}(\hat{\underline{x}}^j(k+1/k), k+1) \cdot \\ &\underline{X}^j(k+1/k) \underline{G}^T(\hat{\underline{x}}^j(k+1/k), k+1) + \underline{V}(k+1))^{-1} \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\hat{\underline{x}}^j(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}^j(k+1/k) + \underline{K}^j(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}^j(k+1/k))) \quad (1.84)$$

$$\underline{X}^j(k+1/k+1) = (\underline{I} - \underline{K}^j(k+1) \underline{G}(\hat{\underline{x}}^j(k+1/k), k+1)) \underline{X}^j(k+1/k) \quad (1.85)$$

Equações do smoothing

$$\underline{K}_s^j(k) = \underline{X}(k/k) \underline{F}^T(\hat{\underline{x}}(k/k), k) (\underline{X}^j(k+1/k))^{-1} \quad (1.86)$$

$$\hat{\underline{x}}^{j+1}(k/k+1) = \hat{\underline{x}}(k/k) + \underline{K}_s^j(k) (\hat{\underline{x}}^j(k+1/k+1) - \hat{\underline{x}}^j(k+1/k)) \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \underline{X}^{j+1}(k/k+1) &= \underline{X}(k/k) + \underline{K}_s^j(k) (\underline{X}^j(k+1/k+1) - \\ &+ \underline{X}^j(k+1/k)) (\underline{K}_s^j(k))^T \end{aligned} \quad (1.88)$$

para  $j = 1, 2, \dots, M$

e onde as condições iniciais para cada passo são:

$$\hat{\underline{x}}^1(k/k+1) = \hat{\underline{x}}(k/k)$$

$$\underline{X}^1(k/k+1) = \underline{X}(k/k)$$

e condições finais (ou de saída)

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}^M(k+1/k+1)$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = \underline{X}^M(k+1/k+1)$$

Os dois tipos de iterações podem ser aplicadas conjuntamente, e as equações para este caso são as seguintes:

$$\hat{\underline{x}}^j(k+1/k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}^j(k/k+1), k) \quad (1.89)$$

$$\underline{x}^j(k+1/k) = \underline{F}(\underline{x}^j(k/k+1), k) \underline{x}^j(k/k+1) \underline{F}^T(\hat{\underline{x}}^j(k/k+1), k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) \quad (1.90)$$

$$\underline{K}_i^j(k+1) = \underline{x}^j(k+1/k) \underline{G}^T(\underline{n}_i^j, k+1) \{ \underline{G}(\underline{n}_i^j, k+1) \underline{x}^j(k+1/k) \underline{G}^T(\underline{n}_i^j, k+1) + \underline{V}(k+1) \} \quad (1.91)$$

$$\underline{n}_{i+1} = \hat{\underline{x}}^j(k+1/k) + \underline{K}_i^j(k+1) \{ \underline{y}(k+1) - \underline{h}(\underline{n}_i^j) - \underline{G}(\underline{n}_i^j, k+1) (\hat{\underline{x}}^j(k+1/k) - \underline{n}_i^j) \} \quad (1.92)$$

com as equações (1.91) (1.92), computadas para  $i = 1, 2, \dots, N$  com

$$\underline{n}_1^j = \hat{\underline{x}}^j(k+1/k) \quad e$$

$$\hat{\underline{x}}^j(k+1/k+1) = \underline{n}_{N+1}^j$$

$$\underline{x}^j(k+1/k+1) = (\underline{I} - \underline{K}_N^j(k+1) \underline{G}(\underline{n}_N^j, k+1)) \underline{x}^j(k+1/k) \quad (1.93)$$

$$\underline{K}_S^j(k) = \underline{x}(k/k) \underline{F}^T(\hat{\underline{x}}(k/k), k) \{ \underline{x}^j(k+1/k) \}^{-1} \quad (1.94)$$

$$\hat{\underline{x}}^{j+1}(k/k+1) = \hat{\underline{x}}(k/k) + \underline{K}_S^j(k) \{ \hat{\underline{x}}^j(k+1/k+1) - \hat{\underline{x}}^j(k+1/k) \} \quad (1.95)$$

$$\underline{x}^{j+1}(k/k+1) = \underline{x}(k/k) + \underline{K}_S^j(k) \{ \underline{x}^j(k+1/k+1) - \underline{x}^j(k+1/k) \} + \{ \underline{K}_S^j(k) \}^T \quad (1.96)$$

para  $j = 1, 2, \dots, M$

com condições iniciais

$$\hat{\underline{x}}^1(k/k+1) = \hat{\underline{x}}(k/k)$$

$$\underline{x}^1(k/k+1) = \underline{x}(k/k)$$

e condições finais

$$\underline{\hat{x}}(k+1/k+1) = \underline{\hat{x}}^M(k+1/k+1)$$

$$\underline{x}(k+1/k+1) = \underline{x}^M(k+1/k+1)$$

## CAPÍTULO II

### 2.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior diferentes algoritmos de filtragem são apresentados, possuindo, cada um deles, características próprias, que devem ser bem conhecidas para que se tenha uma otimização dos resultados obtidos, quando do seu uso em casos práticos.

Neste capítulo procurou-se fazer um levantamento destas características, uma comparação entre elas, ressaltando não só a validade das aproximações feitas para obtenção das equações do filtro de Kalman generalizado, bem como a eficiência das iterações na eliminação de parte dos erros introduzidos por tais aproximações.

Para isso vários sistemas foram simulados em computador, filtrados pelos algoritmos do capítulo anterior, e os resultados obtidos comparados tomando-se como fatores principais:

- influência das não linearidades existentes nas equações do estado e da medida;
- erros entre os valores reais e estimados;
- influência dos valores iniciais;
- tempo de estabilização;
- existência de erros sistemáticos;
- possíveis casos de divergência.

Para maior facilidade de operação e obtenção de uma redução sensível no esforço computacional, sistemas escalares podem ser simulados, e as conclusões obtidas generalizadas para os demais casos.

As equações (1.89) a (1.96) são reescritas para o caso escalar:

$$\hat{x}(k+1/k) = f(\hat{x}(k/k+1), k) \quad (2.1)$$

$$\sigma_x^2(k+1/k) = (f(\hat{x}(k/k+1), k))^2 \sigma_x^2(k/k) + (\Gamma(k))^2 \sigma_w^2 \quad (2.2)$$

$$k_i^j(k+1) = \sigma_x^2(k+1/k) g(n_i, k+1) ((g(n_i, k+1))^2 \sigma_x^2(k+1/k) + \sigma_v^2(k+1))^{-1} \quad (2.3)$$

$$n_{i+1} = \hat{x}(k+1/k) + k(k+1) (y(k+1) - h(n_i, k+1) - g(n_i, k+1) \cdot (\hat{x}(k+1/k) - n_i)) \quad (2.4)$$

$$\sigma_x^2(k+1/k) = (1 - k(k+1) g(n_i, k+1)) \sigma_x^2(k+1/k) \quad (2.5)$$

Equações para o "smoothing"

$$k_s(k) = \sigma_x^2(k/k) f(\hat{x}(k/k), k) (\sigma_x^2(k+1/k))^{-1} \quad (2.6)$$

$$\hat{x}(k/k+1) = \hat{x}(k/k) + k_s(k) (\hat{x}(k+1/k+1) - \hat{x}(k+1/k)) \quad (2.7)$$

$$\sigma_x^2(k/k+1) = \sigma_x^2(k/k) + (k_s(k))^2 (\sigma_x^2(k+1/k+1) - \sigma_x^2(k+1/k)) \quad (2.8)$$

onde

$$f(\hat{x}(k/k), k) = \left. \frac{\partial f(x(k), k)}{\partial x(k)} \right|_{x(k) = \hat{x}(k/k)}$$

$$g(n_i, k+1) = \left. \frac{\partial h(x(k), k)}{\partial x(k)} \right|_{x(k) = \hat{x}(k+1/k)}$$

Para evitar que os resultados obtidos apresentem erros devido a particulares sequências de ruído, foram feitas simulações Monte-Carlo (5), e os resultados apresentados neste capítulo correspondem a médias dos valores obtidos em cada uma das simulações feitas.

## 2.2 FILTRO DE KALMAN GENERALIZADO - ERROS DEVIDOS A LINEARIZAÇÃO

Devido ao fato dos algoritmos de filtragem, para sistemas não lineares, terem sido obtidos por aproximação, isto é, desenvolvendo-se as equações em série de Taylor e desprezando-se os termos de ordem maior ou igual a dois, é natural que erros sejam introduzidos, e que estes erros sejam função das não-linearidades envolvidas.

Para mostrar a existência destes erros, um dos vários casos simulados é apresentado aqui.

Seja a equação não-linear discreta, que descreve a evolução dos estados com o tempo,

$$x(k+1) = x(k) - \alpha \frac{x(k)}{1 + \beta^2 x^2(k)} + u(k) + w(k) \quad (2.9)$$

onde  $u(k) = u_0 - \alpha k$

e tomando valores

$$\alpha = 1,0$$

$$\beta = 1,0$$

$$\mu = 0,0$$

$$a = 0,01$$

$$x(0) = 20,0$$

e  $w(k) = 0$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$

A figura 2.1 mostra a evolução de  $x(k)$  com o tempo, para as condições citadas. É possível observar-se nesta figura, que a evolução com o tempo de  $x(k)$  pode ser dividida, aproximadamente, em três faixas; duas delas, uma no início e outra no fim, apresentam não-linearidades pouco acentuadas (quase linear) e outra, no centro, onde se verifica uma não-linearidade bem acentuada.



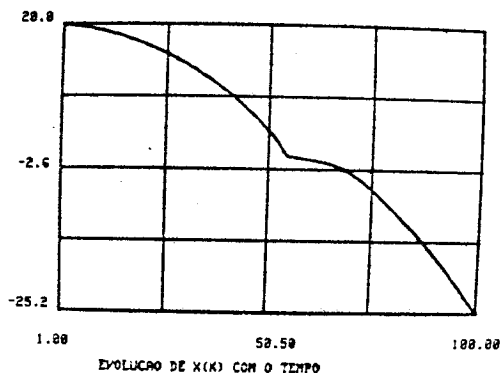


Figura 2.1

Consideremos, agora, que o sistema, descrito pela equação (2.9), é sujeito a ruído  $w(k) = N(0,1)$  e que tenha medidas descritas pela equação linear

$$y(k) = x(k) + v(k) \quad (2.10)$$

com  $v(k) = N(0,1)$ .

Aplicando o filtro de Kalman generalizado ao sistema formado pelas equações (2.9) e (2.10), com condições iniciais,

$$\hat{x}(1/0) = N(15., 10.) ,$$

os seguintes resultados são obtidos:

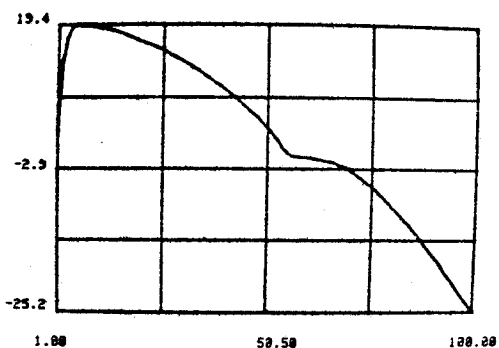


FIG. 2.2a - ESTADO FILTRADO MEDIO

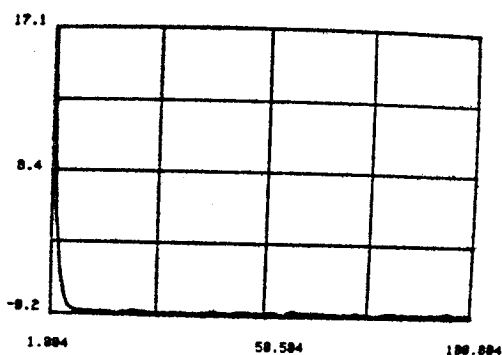


FIG. 2.2b - ERRO MEDIO

Figura 2.2a

Figura 2.2b

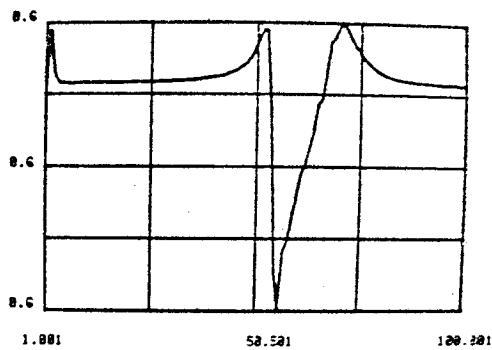


FIG. 2.1C - VARIÂNCIA MÉDIA

Figura 2.2c

De observações das figuras (2.2), verifica-se que o filtro de Kalman generalizado apresenta resultados satisfatórios para os trechos onde as não linearidades são pequenas, e que, no trecho onde as não linearidades são mais acentuadas, o erro aumento ao mesmo tempo em que, a variância diminui. Este fato é contraditório, uma vez que, para este trecho, os erros introduzidos, pela linearização, são maiores, o que deveria provocar, além do aumento dos erros, como realmente foi verificado, o aumento da variância.

Este comportamento pode ser explicado do seguinte modo: na faixa onde as não linearidades são mais acentuadas;

$$f(\hat{x}(k/k), k) = \frac{\partial f(\tilde{x}(k/k), k)}{\partial x(k)} \Big|_{x(k) = \hat{x}(k/k)}$$

assume valores muito próximos de zero, ou iguais a zero (fig. 2.3), o que resume a equação (2.2) a:

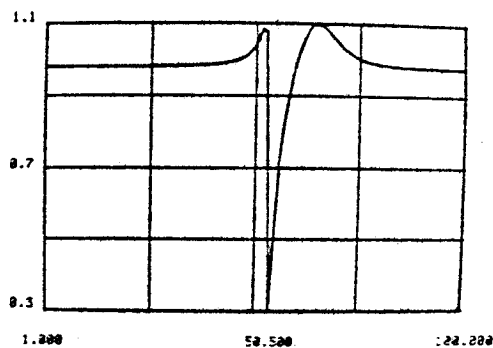


FIG. 2.3 - DERIVADA DA 2.2

Figura 2.3

$$\sigma_x^2(k+1/k) \equiv (\Gamma(k))^2 \sigma_w^2$$

o que é equivalente a fazer a aproximação em torno de um valor de terminista, ou seja assumir que a estimação de  $x(k)$ , que é  $N(\hat{x}(k/k), \sigma_x^2(k/k))$  (fig. 2.4a), passe para  $N(\hat{x}(k/k), 0)$  (fig. 2.4b).

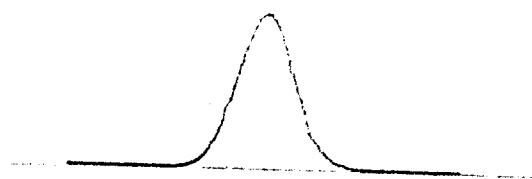


Figura 2.4a

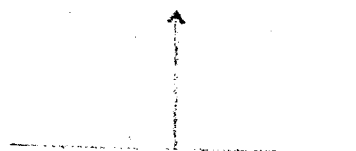


Figura 2.4b

É importante citar que a ocorrência deste fato é função da variância de ruído, que atua sobre o estado, porque as não linearidades do sistema são mascaradas à medida que a variância deste ruído aumenta. As figuras 2.5a e 2.5b mostram resultados obtidos, usando diferentes valores para a variância de  $W(k)$ , e deixam claro a influência do ruído no mascaramento das não linearidades.

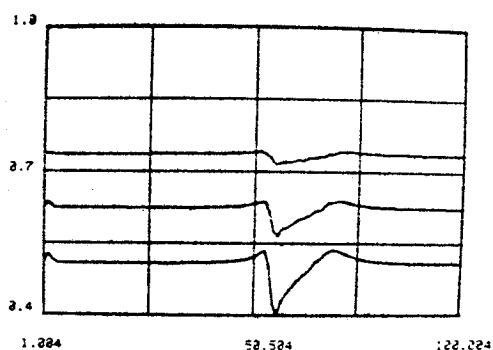


FIG 2.2A - VARIANCIAS MEDIAS

Figura 2.5a

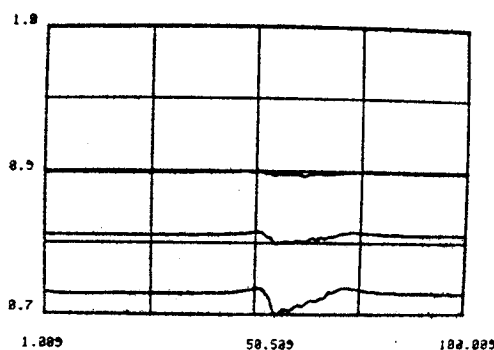


FIG 2.2B - VARIANCIAS MEDIAS

Figura 2.5b

Considerando, agora, medidas também não lineares, representadas por

$$y(k) = A \cdot (x(k) - 10)^3 + v(k) \quad (2.11)$$

$$A = 0,01$$

Para este caso, como mostra a figura 2.6 também existe um trecho onde

$$g(\hat{x}(k+1/k), k+1) = \frac{\partial h(\hat{x}(k+1/k), k+1)}{\partial x(k)} = 0$$

e que pode ser interpretado como uma ausência de informação dada pela medida, uma vez que as equações (2.3) a (2.5) se reduzem a

$$k(k+1) = 0$$

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) \quad (2.12)$$

$$\sigma_x^2(k+1/k+1) = \sigma_x^2(k+1/k)$$

devendo portanto a variância aumentar neste trecho uma vez que o filtro passa funcionar somente como preditor.

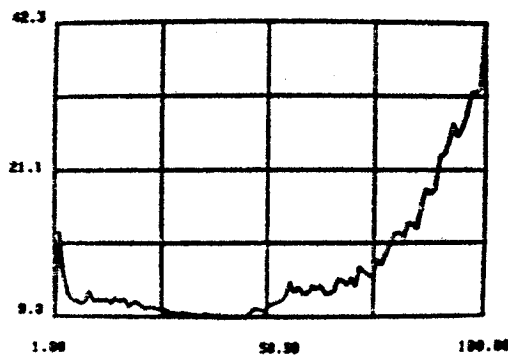


FIG. 2.6 - RECEPÇÃO DA MEDIDA 2.12

Figura 2.6

Aplicando-se o filtro de Kalman generalizado ao sistema formado pelas equações (2.9), (2.11), obteve-se os resultados colocados nas figuras 2.7, que estão de acordo com a interpretação anterior.

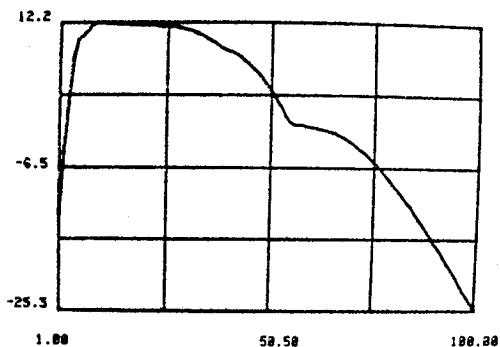


FIG. 2.7A - ESTADO FILTRADO MEDIO

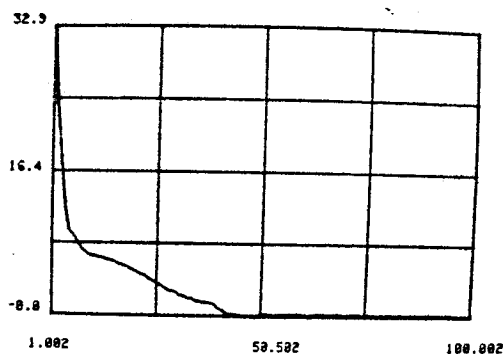


FIG. 2.7B - ERRO MEDIO

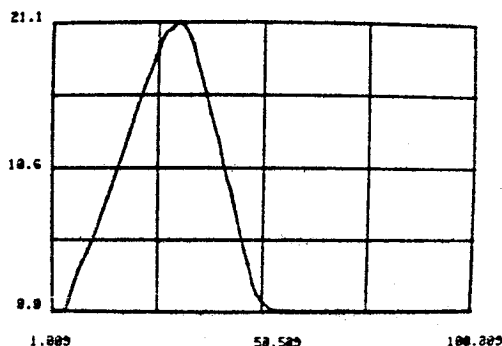


FIG. 2.7C - VARIANCIA MEDIA

Figuras 2.7

### 2.3 FILTROS ITERADOS

Um dos métodos utilizados para se eliminarem ou diminuir os erros devidos às aproximações é o de se considerarem também os termos de segunda ordem ou superior, quando da obtenção das equações do filtro, de modo a conseguir uma melhor aproximação das funções. Isto, porém, aumenta a complexidade dos cálculos, tornando mais difícil sua implementação.

Um outro método consiste em introduzir iterações que levam em conta as não linearidades existentes, corrigindo os erros introduzidos na linearização, com o abandono dos termos de ordem maior ou igual a dois.

#### 2.3.1 Iterações locais

Estas iterações, como foi discutido no capítulo I, tem como finalidade corrigir erros introduzidos pela linearização da equação de medidas.

As estimações obtidas com o uso destas iterações, apre-

sentam valores melhores do que aqueles obtidos com o uso do filtro generalizado, como pode ser observado nas figuras 2.8 onde são comparados os resultados obtidos, usando o filtro generalizado e o filtro generalizado com iterações locais, aplicadas ao sistema formado pelas equações (2.9) e (2.11), com

$$w(k) = N(0,1) \quad v(k) = N(0,1) \quad \hat{x}(0/1) = N(15, 10)$$

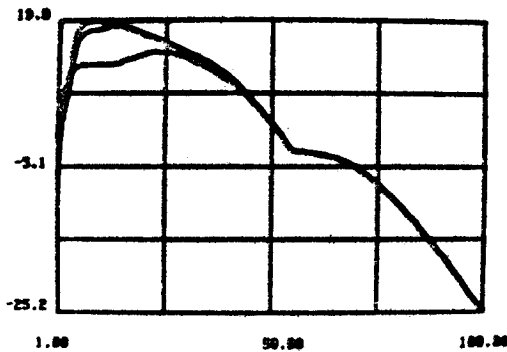


FIG. 2.8a - RESULTADOS MÉDIOS DOS FILTROS IT. LOC.

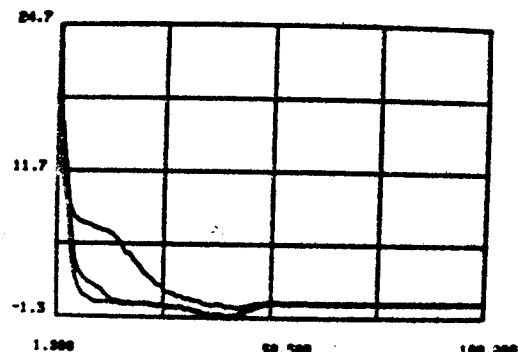


FIG. 2.8b - ERRO MÉDIO ITER. LOCAIS

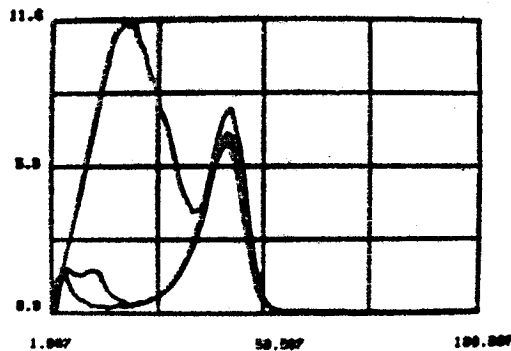


FIG. 2.8c - VARIÂNCIA MÉDIA ITER. LOCAIS

Figuras 2.8

Tabela 2.1

$x$ -real $x(k+1)$	$x$ -estimado $\hat{x}(k+1/k+1)$
21.473430	30.161844
21.473430	24.635485
21.473430	22.018725
21.473430	21.357630
21.473430	21.313432
21.473430	21.312929
21.473430	21.312925
21.473430	21.312926
21.473430	21.312925
21.473430	21.312926

Tabela 2.2

$x$ -real $x(k+1)$	$x$ -estimado $\hat{x}(k+1/k+1)$
6.980979	10.794525
6.980979	10.946447
6.980979	10.878796
6.980979	10.910326
6.980979	10.895908
6.980979	10.902561
6.980979	10.899504
6.980979	10.900912
6.980979	10.900264
6.980979	10.900562

A tabela 2.1, mostra os valores assumidos por  $n_i$  ( $i=1,2, \dots, 10$ ) nas sucessivas iterações, para valores de  $k=1, 2 \dots S$ , onde é possível perceber a convergência deste tipo de iterações.

Observa-se das figuras, que sobre a faixa onde as não linearidades são acentuadas, estas iterações não tem influência, porque a melhoria que é introduzida nas estimações é devida ao reprocessamento das equações (2.3) e (2.4) em torno de novos valores mais próximos aos reais, e para este caso estes novos valores praticamente coincidem com os anteriormente usados, uma vez que o ganho  $K(k+1)$  aproxima-se de zero, de modo que teremos  $n_i = n_{i+1}$ , para  $i=1, 2 \dots n$ . (tabela 2.2)

### 2.3.2 "Smoothing"

Para verificação da influência do "smoothing" nos resultados obtidos, consideremos novamente as equações (2.9) e (2.10) repetidas abaixo

$$x(k+1) = x(k) - \alpha \frac{x(k)}{1+x(k)^2} + w(k)$$

$$y(k) = x(k) + v(k)$$

nas quais são aplicadas as equações do filtro generalizado, e do filtro generalizado com iterações tipo "smoothing". Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 2.9, de onde se verifica que a variância  $\sigma_x^2(k+1/k+1)$  se reduz à medida que as iterações são aplicadas, sem mudar significativamente os erros entre os valores estimados e os valores reais.

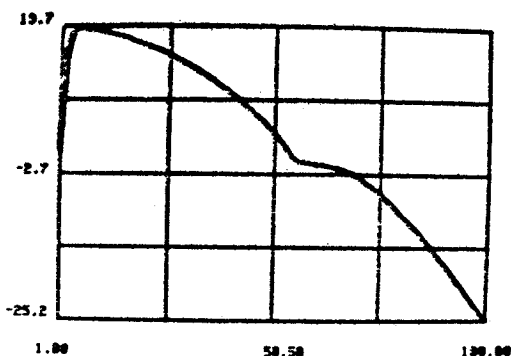


FIG. 2.9a - RESULTADOS MEDIOS DOS FILTROS SMOOTH.

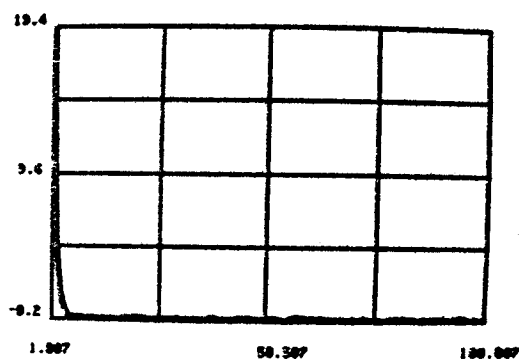


FIG. 2.9b - ERRO MEDIO SMOOTH.

Figura 2.9a

Figura 2.9b

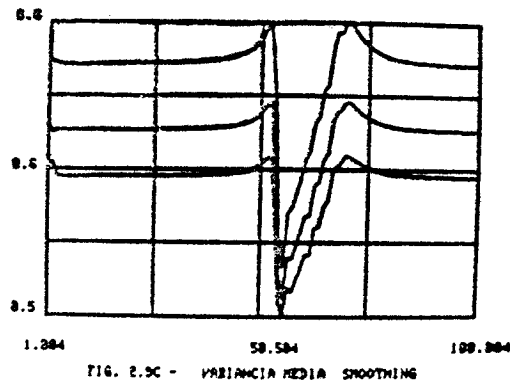


FIG. 2.9c - VARIANÇIA MEDIA SMOOTHING

Figura 2.9c

A vantagem da aplicação do "smoothing" para este caso consiste em diminuir a incerteza existente na estimação, diminuindo gradativamente a variância do erro, como mostra a figura 2.10.



Figura 2.10

Das equações (2.6) a (2.8) verifica-se, que o "smoothing" não tem possibilidades de correção dos erros introduzidos na faixa onde  $\partial f(x(k))/\partial x(k) \approx 0$  ( $F(x(k/k)) \approx 0$ ), uma vez que para este valor, as equações de alisagem se reduzem a:

$$k_s(k) = 0$$

$$\hat{x}(k/k+1) = \hat{x}(k/k)$$

$$\sigma_x^2(k/k+1) = \sigma_x^2(k/k)$$



obtendo-se  $\hat{x}(k/k+1) = \hat{x}(k/k)$ ,

o que é equivalente a não aplicação das iterações.

## 2.4 CONDIÇÕES INICIAIS

A determinação de condições iniciais adequadas para o filtro é, em alguns casos, difícil de ser obtida, e o uso de outras condições que se encontrem demasiadamente longe dos verdadeiros valores leva a obter estimações inválidas e, em alguns casos, até à divergência do filtro.

Este problema pode ser solucionado com o uso de iterações que permitam uma maior flexibilidade na escolha das condições iniciais do filtro, diminuindo o erro das estimações obtidas, e fazendo com que o filtro atinja mais rapidamente uma condição de flexibilidade.

Esta flexibilidade dos filtros iterados, em contornar o problema de condições iniciais inadequadas, é ilustrada pelas figuras 2.8 e 2.9, que mostram resultados obtidos com o uso de iterações locais e iterações "smoothing" respectivamente, e das figuras 2.11 onde são comparados os resultados obtidos usando o filtro generalizado e o filtro generalizado com iterações locais. Verifica-se destas figuras que os resultados que se obtêm com o uso de iterações, apresentam erros menores e uma convergência mais rápida para o valor verdadeiro.

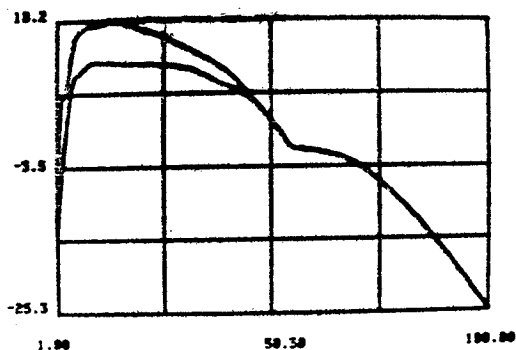


FIG. 2.11a - FILTROS GENE./IT. LOCAIS

Figura 2.11a

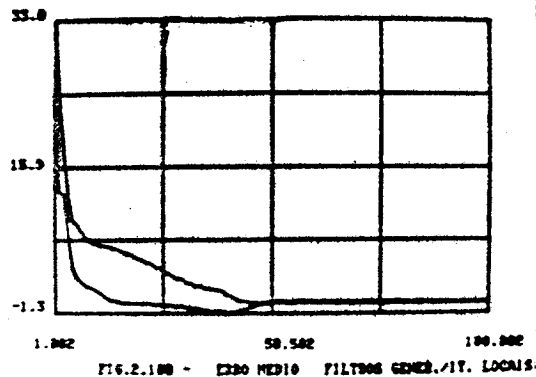


FIG. 2.11b - ERRO MEDIO FILTROS GENE./IT. LOCAIS

Figura 2.11b

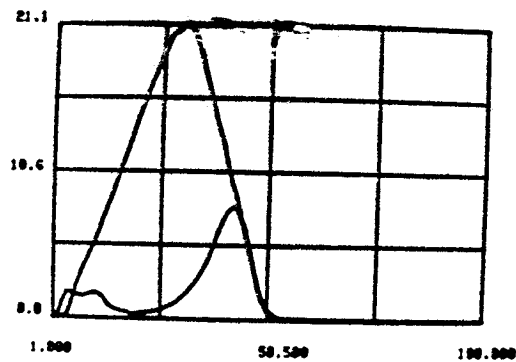


FIG. 2.11C - VARIANCIA MEDIA FILTROS GENÉR./IT. LOCAIS

Figura 2.11c

## 2.5 CONCLUSÃO

Das simulações realizadas e apresentadas neste capítulo, verifica-se que as estimações obtidas através da aplicação do filtro generalizado são aceitáveis. Nos casos em que estas estimações são muito discrepantes dos verdadeiros valores, devido a não linearidades acentuadas nas equações do sistema, ou condições iniciais inadequadas, podem ser corrigidas com o uso de iterações. Em alguns casos de não linearidade acentuada, contudo, a iteração não melhora o desempenho do filtro: isso acontece em particular nas zonas extremas das não-linearidades da saída e transição do estado.

## CAPÍTULO III

### ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO FILTRO DE KALMAN

#### 3.1 TEMPO DE COMPUTAÇÃO

Para aplicações práticas do filtro de Kalman, é importante o conhecimento do tempo necessário para a computação de um ciclo completo do algoritmo empregado, e também da quantidade de memória requerida para o armazenamento das variáveis envolvidas. A determinação destes valores é importante para o estabelecimento dos tempos de amostragem do sistema, bem como da viabilidade da utilização do filtro "on-line".

O tempo de computação e a quantidade de memória utilizada, podem ser expressos como função das dimensões das matrizes envolvidas, ou seja, das dimensões do vetor de estados, da matriz coeficientes dos ruídos, e do vetor de medidas.

Uma vez que as operações básicas para a programação do filtro de Kalman são adição, subtração, multiplicação, transposição, inversão de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar, subrotinas para execução de cada uma destas operações podem ser escritas, utilizando-se um conjunto de instruções, cujos tempos de execução são conhecidos e expressos nas unidades de tempo do computador.

Subrotinas para execução das operações básicas citadas acima, foram desenvolvidas por J.M. Mendel (6), usando as instruções mostradas na tabela 3.1 e obtendo como tempo para execução de cada uma dessas subrotinas os valores da tabela 3.2.

O tempo de execução para a multiplicação e divisão é função do modo pelo qual são implementadas estas instruções, e é variável para cada tipo de computador. Tempos típicos de execução destas instruções são:  $MUL = 6$  ,  $DIV = 12$  . (6)

TABELA 3.1

- INSTRUÇÕES E TEMPO DE EXECUÇÃO -

<i>Instrução</i>	<i>tempo de execução</i>
<i>Add to A</i>	2
<i>Sub from A</i>	2
<i>Load A or B</i>	2
<i>Store A or B</i>	2
<i>Mul A with memory</i>	MUL
<i>Div A by memory</i>	DIV
<i>Mark place and transfer</i>	2
<i>Return branch</i>	2
<i>Transfer on zero or minus</i>	1
<i>Transfer unconditional</i>	1
<i>Transfer on plus</i>	1
<i>Increment A</i>	1
<i>Increment index register <math>R_i</math></i>	1
<i>Decrement index register <math>R_i</math></i>	1
<i>Add to index register <math>R_i</math></i>	1
<i>Sub to index register <math>R_i</math></i>	1
<i>Increment B register</i>	1
<i>Skip on index register zero</i>	1

TABELA 3.2

- OPERAÇÕES COM MATRIZES E TEMPO TOTAL DE COMPUTAÇÃO -

Operação		tempo total de computação (em unidades de tempo)
Soma de matrizes	$C_{MN} = A_{MN} + B_{MN}$	MUL + 27 + 7MN
Subtr. de matrizes	$C_{MN} = A_{MN} - B_{MN}$	MUL + 27 + 7MN
Produto de matrizes	$C_{ML} = A_{MN} B_{NL}$	10 + 8MNL + 19ML + 16M + MUL(MNL)
Produto pela matriz transposta	$C_{MN} = A_{ML} (B_{NL})$	10 + 8MNL + 19NL + 16M + MUL(MNL)
Inversão de matriz	$A_{NN} \rightarrow A_{NN}^{-1}$	10 + 7,5N <sup>4</sup> + 43N <sup>3</sup> + 139,5N <sup>2</sup> + 92N + + DIV(2N <sup>2</sup> +N) + MUL(N <sup>3</sup> +0,5N <sup>2</sup> +2,5N)
Produto de matriz por escalar	$C_{N1} = \mu A_{N1}$	8N + MUL(N)

Dadas as equações do filtro generalizado:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(k/k))$$

$$\underline{x}(k+1/k) = \underline{F}(\hat{\underline{x}}(k/k), k) \underline{x}(k/k) \underline{F}^T(\hat{\underline{x}}(k/k), k) + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k)$$

$$\underline{K}(k+1) = \underline{x}(k+1/k) \underline{G}^T(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) \{ \underline{G}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) \underline{x}(k+1/k) \underline{G}^T(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) + \underline{V}(k+1) \}^{-1}$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) \{ \underline{y}(k+1) - \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k+1/k)) \}$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = \{ \underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{G}(\hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1) \} \underline{X}(k+1/k)$$

10001

onde:

TABELA 3.3

- DIMENSÕES DAS MATRIZES -

Matriz	Dimensões
$\underline{\hat{x}}(k+1/k)$	$n \times 1$
$\underline{x}(k+1/k)$	$n \times n$
$\underline{F}(\underline{\hat{x}}(k/k), k)$	$n \times n$
$\underline{x}(k/k)$	$n \times n$
$\underline{\Gamma}(k)$	$n \times s$
$\underline{W}(k)$	$s \times s$
$\underline{K}(k+1)$	$n \times r$
$\underline{G}(\underline{\hat{x}}(k+1/k), k+1)$	$r \times n$
$\underline{V}(k+1)$	$r \times r$
$\underline{\hat{x}}(k+1/k+1)$	$n \times 1$
$\underline{x}(k+1/k+1)$	$n \times n$
$\underline{y}(k+1)$	$r \times 1$
$\underline{h}(\underline{\hat{x}}(k+1/k))$	$r \times 1$

Partindo das equações acima e das dimensões das variáveis envolvidas é possível, agora, calcular o tempo gasto na computação de cada equação do filtro.

Como as matrizes:  $\underline{f}(\underline{\hat{x}}(k/k), k)$ ,  $\underline{h}(\underline{\hat{x}}(k+1/k))$ ,  $\underline{G}(\underline{n}_i, k+1)$ ,  $\underline{F}(\underline{\hat{x}}(k/k), k)$  são recalculadas a cada passo da execução do algoritmo, um fator IC, expresso em unidades de tempo, será considerado como o tempo gasto para gerar estas matrizes, que serão fornecidas ao filtro.

TABELA 3.4

- TEMPO DE EXECUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES DO FILTRO -

Equação		tempo de computação
$\hat{\underline{x}}(k+1/k)$	$\underline{f}$	IC
$\underline{x}(k+1/k)$	$\underline{F}$	IC
	$\underline{XF}^T$	$10 + 8n^3 + 19n^2 + 16n + \text{MUL}(n^3)$
	$\underline{FXF}^T$	$10 + 8n^3 + 19n^2 + 16n + \text{MUL}(n^3)$
	$\underline{WF}^T$	$10 + 8ns^2 + 19ns + 16s + \text{MUL}(ns^2)$
	$\underline{\Gamma WF}^T$	$10 + 8n^2s + 19n^2 + 16n + \text{MUL}(n^2s)$
	$\underline{FXF}^T + \underline{\Gamma WF}^T$	$\text{MUL} + 27 + 7n^2$
$\underline{K}(k+1)$	$\underline{G}$	IC
	$\underline{XG}^T$	$10 + 8n^2r + 19nr + 16n + \text{MUL}(n^2r)$
	$\underline{GXG}^T$	$10 + 8nr^2 + 19r^2 + 16r + \text{MUL}(nr^2)$
	$\underline{GXG}^T + \underline{V}$	$\text{MUL} + 27 + 7r^2$
	$(\underline{GXG}^T + \underline{V})^{-1}$	$10 + 7,5r^4 + 43r^3 + 139,5r^2 + 92r + \text{DIV}(2r^2+r) + \text{MUL}(r^3+0,5r^2+2,5r)$
	$\underline{XG}^T (\underline{GXG}^T + \underline{V})^{-1}$	$10 + 8nr^2 + 19nr + 16n + \text{MUL}(nr^2)$
$\hat{\underline{x}}(++1/k+1)$	$\underline{h}$	IC
	$\underline{y-h}$	$\text{MUL} + 27 + 7r$
	$\underline{K(y-h)}$	$10 + 8nr + 19n + 16n + \text{MUL}(nr)$
	$\underline{I-KG}$	$\text{MUL} + 27 + 7n$
$\underline{x}(k+1/k+1)$	$\underline{KG}$	$10 + 8n^2r + 19n^2 + 16n + \text{MUL}(n^2r)$
	$\underline{I-KG}$	$\text{MUL} + 27 + 7n^2$
	$(\underline{I-KG}) \underline{x}$	$10 + 8n^3 + 19n^2 + 16n + \text{MUL}(n^3)$

O tempo total de computação  $T(n, r, s)$ , por ciclo, é obtido somando-se os valores para cada operação descrita na tabela 3.4.

Gráficos para este tempo de computação foram obtidos, de compondo a expressão para  $T(n, r, s)$  em duas outras expressões:

$$T(n, r, s) = T(n, r, 0) + T(n, 0, s)$$

e os resultados obtidos são mostrados nas figuras 3.1 e 3.2.

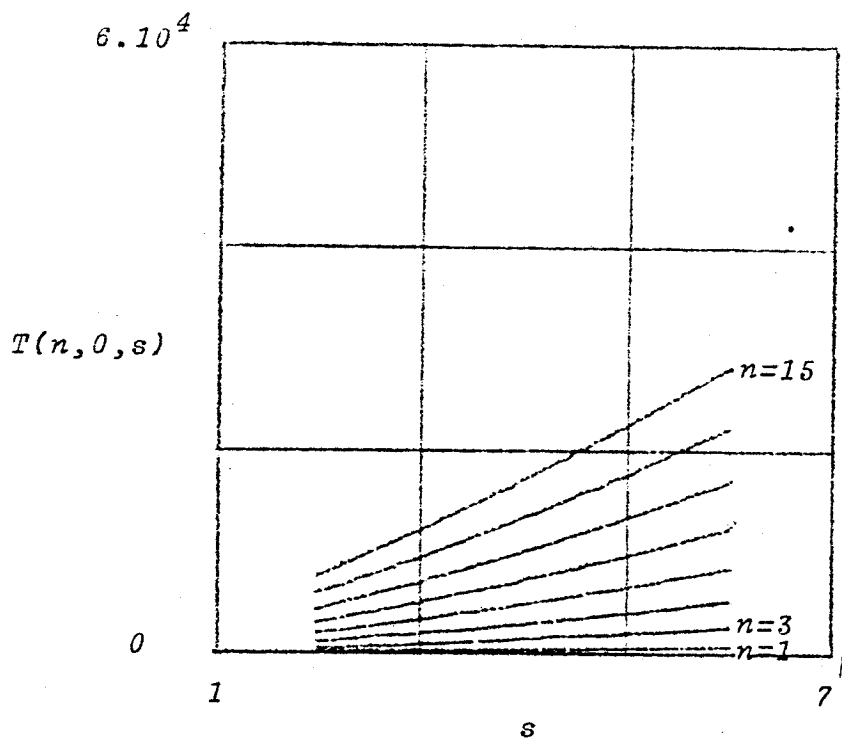


Fig. 3.1 -  $T(n, 0, s)$  - para o filtro de Kalman generalizado

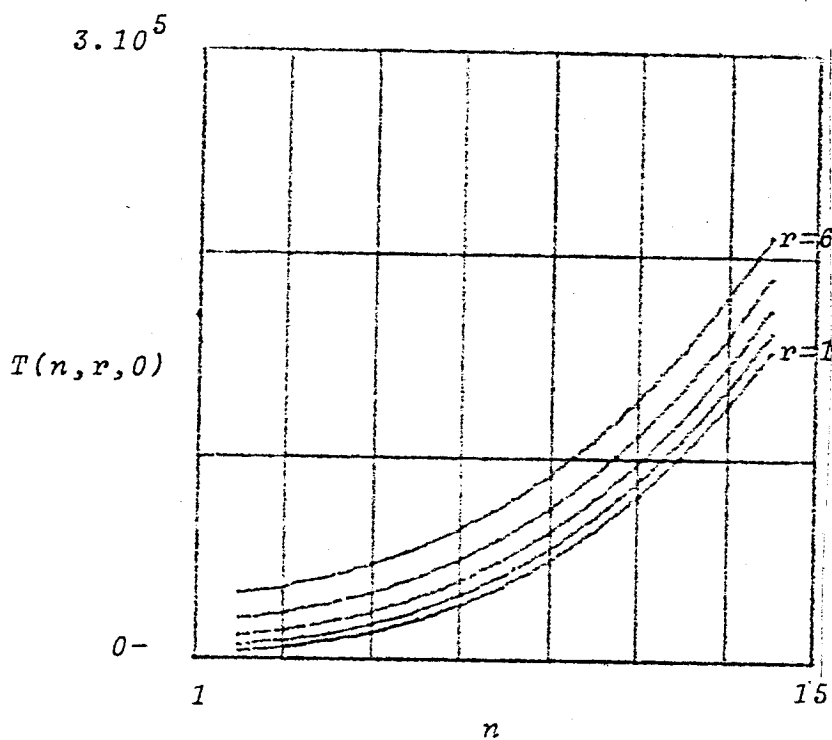


Fig. 3.2 -  $T(n, r, 0)$  - para o filtro de Kalman generalizado



Para os filtros iterados, dois casos são possíveis: iterações locais e "smoothing".

Para as iterações locais, os tempos de computação são os mesmos da tabela 3.4, trocando-se as linhas correspondentes ao cálculo do tempo de  $\hat{x}(k+1/k+1)$  pelos tempos necessários para o cálculo de

$$\underline{n}_{i+1} = \hat{x}(k+1/k+1) + \underline{K}(k+1) \{ \underline{y}(k+1) - \underline{h}(\underline{n}_i) \underline{G}(\underline{n}_i, k+1) (\hat{x}(k+1/k) - \underline{n}_i) \}$$

e multiplicando-se os tempos para os cálculos de  $\underline{K}(k+1)$  e  $\underline{n}_{i+1}$  pelo número de iterações realizadas em cada passo.

TABELA 3.5

- TEMPO PARA O CÁLCULO DE  $\underline{n}_{i+1}$  -

equação	tempo de computação	
$\underline{n}_{i+1}$	$\underline{h}$	IC
	$(\underline{x} - \underline{n}_i)$	MUL + 27 + 7n
	$\underline{G}(\underline{y} - \underline{n}_i)$	10 + 8nr + 19r + 16r + MUL(nr)
	$(\underline{y} - \underline{h})$	MUL + 27 + 7r
	$\underline{y} - \underline{h} - \underline{G}(\underline{x} - \underline{n}_i)$	MUL + 27 + 7r
	$\underline{K}(\underline{y} - \underline{h} - \underline{G}(\underline{x} - \underline{n}_i))$	10 + 8nr + 19n + 16n + MUL(nr)
	$\hat{x} - \underline{K}(\underline{y} - \underline{h} - \underline{G}(\underline{x} - \underline{n}_i))$	MUL + 27 + 7n

Gráficos para o tempo de computação em função de n, r, s, para este caso, são mostrados nas figuras (3.3), (3.4).

Para o "smoothing", a tabela 3.4 deve ser complementada com os tempos que constam na tabela 3.6, e que se referem as seguintes equações:

$$\underline{K}_s(k) = \underline{X}(k/k) \underline{F}^T(\hat{x}(k/k), k) \underline{X}^{-1}(k+1/k)$$

$$\hat{x}(k/k+1) = \hat{x}(k/k) + \underline{K}_s(k) (\hat{x}(k+1/k+1) - \hat{x}(k+1/k))$$

$$\underline{X}(k/k+1) = \underline{X}(k/k) - \underline{K}_s(k) (\underline{X}(k+1/k+1) - \underline{X}(k+1/k)) \underline{K}_s^T$$

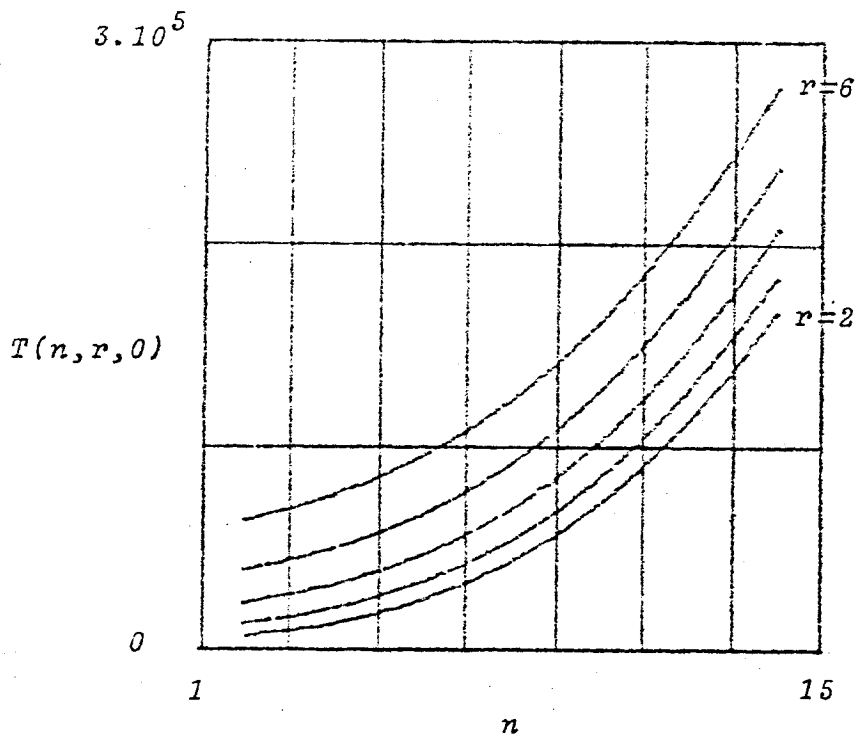


Fig. 3.3 -  $T(n, r, 0)$  - para o filtro com iterações locais

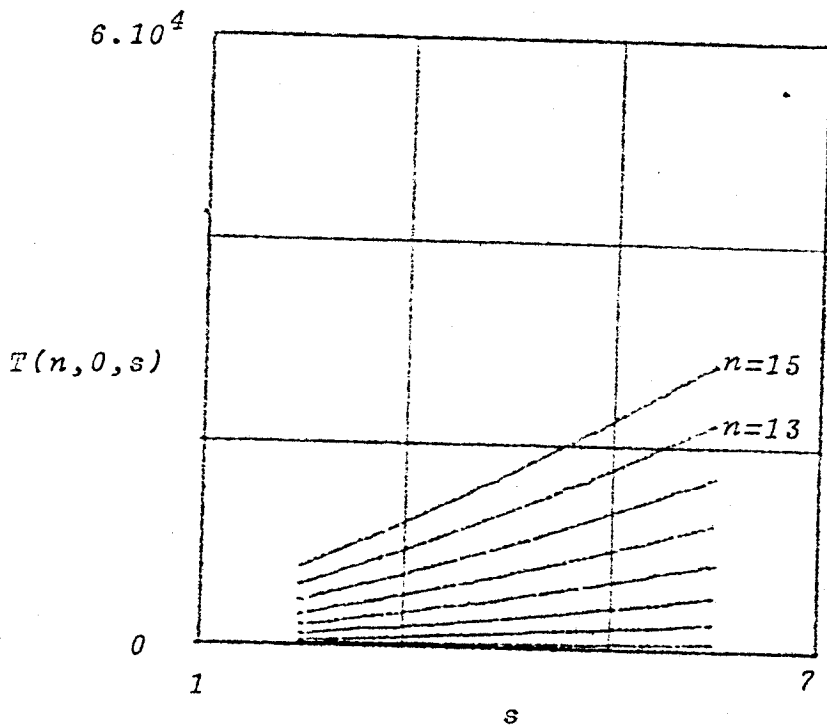


Fig. 3.4 -  $T(n, 0, s)$  - para o filtro com iterações locais

TABELA 3.6

Variável		tempo de computação
$\underline{K}_s(k+1)$	$\underline{X}^{-1}$	$10 + 7,5n^4 + 43n^3 + 139,5n^2 + 92n$ $+ DIV(2n^2+n) + MUL(n^3+0,5n^2+2,5n)$
	$\underline{F}^T \underline{X}^{-1}$	$10 + 8n^3 + 19n^2 + 16n + MUL(n^3)$
	$\underline{X} \underline{F}^T \underline{X}^{-1}$	$10 + 8n^3 + 19n^2 + 16n + MUL(n^3)$
$\underline{\hat{x}}(k/k+1)$	$(\underline{\hat{x}} - \underline{\hat{x}})$	$MUL + 27 + 7n$
	$\underline{K}(\underline{\hat{x}} - \underline{\hat{x}})$	$10 + 8n^2 + 19n + 16n + MUL(n^2)$
	$\underline{\hat{x}} - \underline{K}(\underline{\hat{x}} - \underline{\hat{x}})$	$MUL + 27 + 7n$
$\underline{X}(k/k+1)$	$\underline{X} - \underline{X}$	$MUL + 27 + 7n^2$
	$(\underline{X} - \underline{X}) \underline{K}^T$	$MUL + 8n^3 + 19n^2 + 16n + MUL(n^3)$
	$\underline{K}(\underline{X} - \underline{X}) \underline{K}^T$	$MUL + 8n^3 + 19n^2 + 16n + MUL(n^3)$
	$\underline{X} - \underline{K}(\underline{X} - \underline{X}) \underline{K}^T$	$MUL + 27 + 7n^2$

Para calcular o tempo total para cada passo do filtro - com "smoothing", os valores encontrados na tabela 3.4 devem ser multiplicados pelo número de iterações acrescidas de uma unidade, e os da tabela 3.6 pelo número de iterações, somando-se os valores assim obtidos. Para este caso, de forma análoga aos anteriores, gráficos do tempo, em função de  $n$ ,  $r$ ,  $s$ , foram obtidos figuras 3.5 e 3.6 .

Comparando as figuras 3.1 e 3.6, verifica-se que, de modo geral, o tempo de computação para os filtros, é muito mais sensível a variação em  $n$  do que em  $r$  ou  $s$ , embora a influência de  $r$  aumente a medida que o seu valor cresce.

Quanto aos filtros iterados verifica-se que o "smoothing" é muito mais sensível a variação em  $n$ , enquanto que as iterações locais são mais sensíveis a variações em  $r$ .

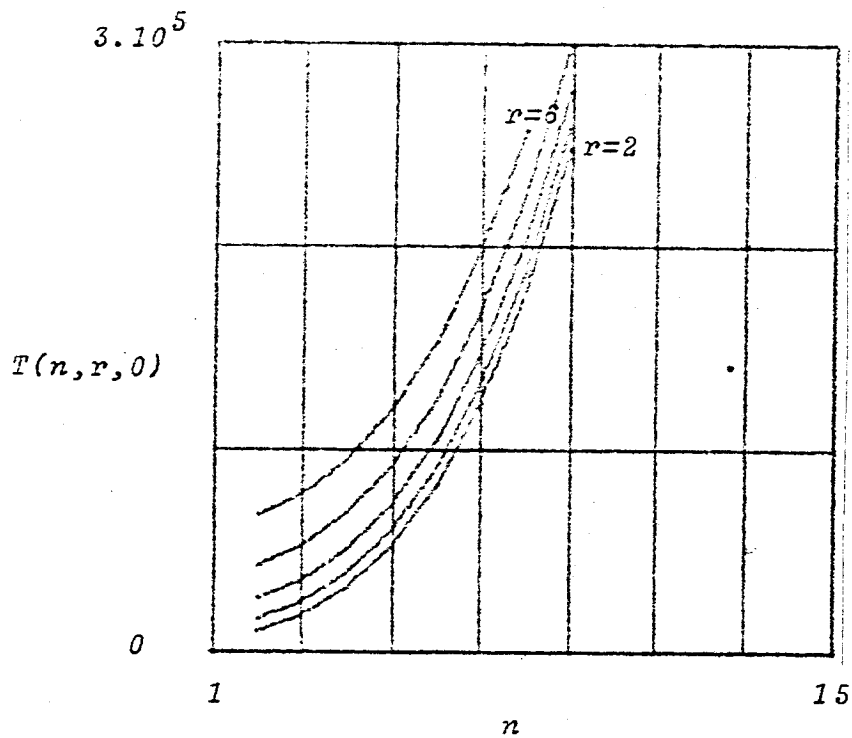


Fig. 3.5 -  $T(n, r, 0)$  - para o filtro iterado "smoothing"

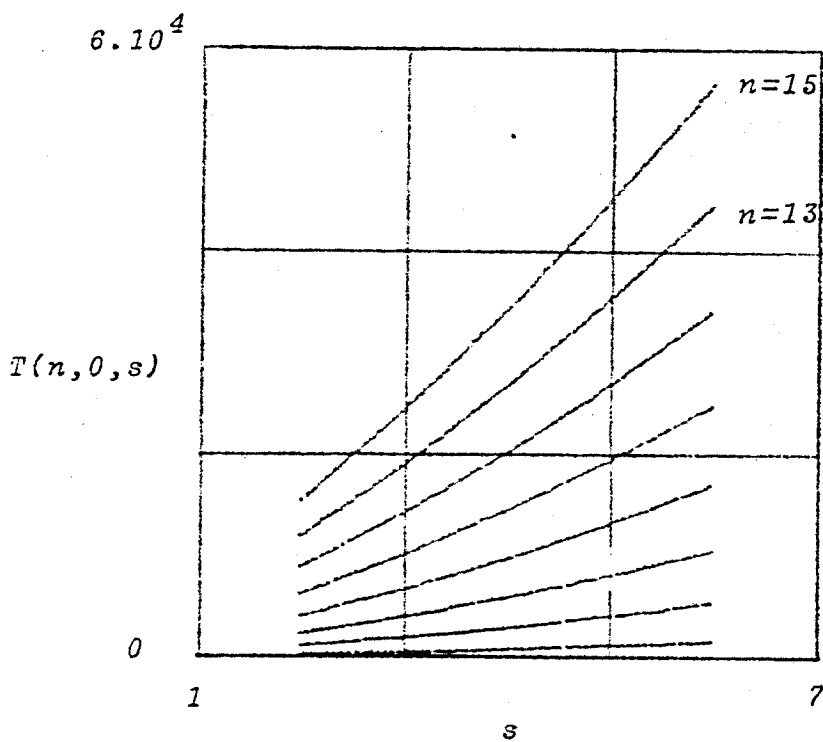


Fig. 3.6 -  $T(n, 0, s)$  - para o filtro iterado "smoothing"

### 3.2 MEMÓRIA

Do mesmo modo que para o tempo de execução, a memória requerida pelo filtro de Kalman também é função das dimensões das variáveis envolvidas.

A memória necessária para o armazenamento de cada uma das variáveis é colocada na tabela 3.7

TABELA 3.7

variável	dimensão	memória
$\underline{f}(\underline{x}(k/k))$	$n \times 1$	$n$
$\underline{X}(k+1/k)$	$n \times n$	$n^2$
$\underline{\hat{x}}(k+1/k)$	$n \times 1$	$n$
$\underline{F}(\underline{\hat{x}}(k/k), k)$	$n \times n$	$n^2$
$\underline{X}(k/k)$	$n \times n$	$n^2$
$\underline{\Gamma}(k)$	$n \times s$	$ns$
$\underline{W}(k)$	$s \times s$	$s^2$
$\underline{K}(k+1)$	$n \times r$	$nr$
$\underline{G}(\underline{\hat{x}}(k+1/k), k+1)$	$r \times n$	$nr$
$\underline{V}(k+1)$	$r \times r$	$r^2$
$\underline{y}(k+1)$	$r \times 1$	$r$
$\underline{h}(\underline{\hat{x}}(k+1/k))$	$r \times 1$	$r$

Além dessas variáveis deve ser também colocado na memória as subrotinas para operações com matrizes e o programa principal.

Observe-se que as variáveis, quer sejam os filtros iterados ou não, são as mesmas e que, em relação a memória requerida, a única diferença encontra-se no tamanho do programa principal.

A tabela 3.8 mostra a memória ocupada pelas subrotinas de operações com matrizes. (6)

TABELA 3.8

<i>função</i>	<i>memória</i>
<i>soma de matriz</i>	18
<i>subtração de matrizes</i>	18
<i>produto de matrizes</i>	36
<i>produto pela matriz transposta</i>	36
<i>inversão de matriz</i>	232
<i>produto por escalar</i>	8

Admitindo  $2n^2$  palavras para memória de trabalho, a memória total necessária será:

$$M = 348 + 5n^2 + 2n + 2nr + ns + s^2 + r^2 + 2r \\ + (\text{memória para o programa principal})$$

Como nos casos anteriores, esta expressão foi decomposta em duas outras

$$M(n,r,s) = M(n,r,0) + M(n,0,s)$$

Para as quais, gráficos da memória em função de  $n$ ,  $r$  e  $s$ , foram obtidos. Figuras 3.7 e 3.8; de onde se conclui a predominância de  $n$  sobre as outras duas variáveis, em relação a quantidade de memória requerida.

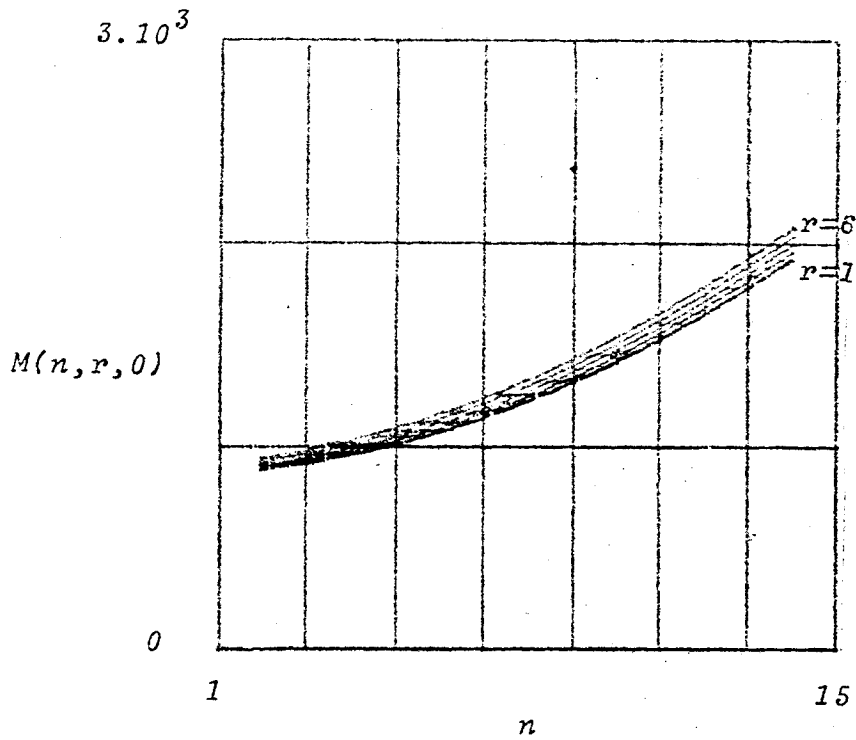


Fig. 3.7 -  $M(n, r, 0)$  - Memória para o filtro

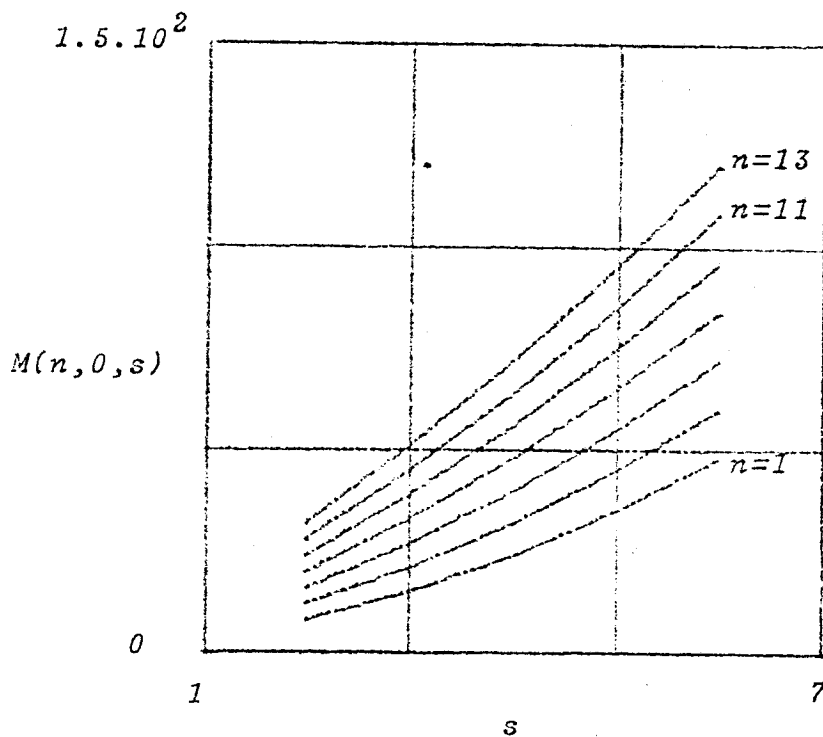


Fig. 3.8 -  $M(n, 0, s)$  - Memória para o filtro

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN GENERALIZADO A ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Seja o problema de estimação de parâmetros no seguinte modelo (7)

$$\underline{y}(t_i) = \int_{-\infty}^t \underline{G}(t_i, t', \underline{P}_1) \underline{u}(t', \underline{P}_2) dt' + \underline{v}(t_i)$$

que represente um sistema multivariável, não estacionário, onde

$\underline{y}(t_i)$  : vetor de dimensão  $m \times 1$  que representa as variáveis de saída

$\underline{u}(t', \underline{P}_2)$  : vetor de dimensão  $r \times 1$  que representa as variáveis de entrada

$\underline{v}(t_i)$  : vetor de dimensão  $m \times 1$  que representa o ruído que atua nas medidas

$\underline{G}(t_i, t', \underline{P}_1)$  : matriz  $m \times r$  que é a função resposta ao impulso do sistema

e

$\underline{P}_1$  e  $\underline{P}_2$  : os parâmetros que devem ser estimados a partir das medidas  $y(t_i)$   
 $i = 1, 2, \dots, N$

Neste problema, três possíveis casos podem ser encontrados:

- a)  $\underline{P}_2$  é conhecido (as funções de entrada são dadas) e  $\underline{P}_1$  é desconhecido e deve ser estimado. Este é o caso mais geral de identificação;
- b)  $\underline{P}_1$  é conhecido (a função resposta ao impulso é conhecida) e  $\underline{P}_2$  deve ser estimado (identificação da função de entrada);



c)  $P_1$  e  $P_2$  são desconhecidos, e devem ser estimados.

#### 4.2 MÉTODOS SEQUENCIAIS DE ESTIMAÇÃO

Os métodos sequenciais de estimação serão considerados para estimação de parâmetros pelas seguintes razões:

- a) O tratamento da informação obtida, em cada medida  $y(t_i)$ , de modo sequencial, permite implementações do estimador "on-line" (por exemplo: aquisição de dados por meio de pequenos computadores conectados, em tempo real, a um processador central);
- b) Parâmetros variáveis com o tempo e diferentes tipos de ruído podem ser facilmente tratados.

O seguinte sistema de equações pode, agora, ser considerado:

$$\underline{P}(k+1) = \underline{f}_p(\underline{P}(k), k) + \underline{w}_p(k) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}(k) &= \int_{-\infty}^{t_k} \underline{G}(t', t_k, \underline{P}_1(k)) \cdot \underline{u}(\underline{P}_2(k), t') dt + \underline{v}(k) = \\ &= \underline{g}(\underline{P}(k), k) + \underline{v}(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $\underline{y}(k) = \underline{y}(t_k)$  e  $\underline{P} \triangleq \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix}$

A equação da evolução dos parâmetros com o tempo é suposta conhecida, sendo na maioria dos casos suficiente considerar-se relações lineares:

$$\underline{P}(k+1) = \underline{\phi}(k) \underline{P}(k) + \underline{w}(k)$$

onde a matriz  $\underline{\phi}(k)$  é conhecida ou dependente da evolução dos parâmetros com o tempo. Os ruídos  $\underline{w}(k)$  são considerados, para eliminar incertezas existentes no sistema.

Em alguns sistemas, outros modelos de descrição podem ser usados. É o caso, por exemplo, do sistema clássico de equações:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}_x(\underline{x}(k), \underline{P}(k), \underline{u}(k), k) + \underline{w}_x(k) \quad (4.3)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{f}_p(\underline{P}(k), k) + \underline{w}_p(k) \quad (4.4)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{P}(k), k) + \underline{v}(k) \quad (4.5)$$

O filtro de Kalman é agora aplicado para a estimação dos estados  $\underline{P}(k)$  no primeiro caso e dos estados  $(\underline{x}^T(k) : \underline{P}^T(k))^T$  no segundo caso.

Comparando-se os dois modelos (equações: (4.1) (4.2) e equações (4.3) a (4.5)), verifica-se um aumento do número de estados para o segundo caso, o que, de acordo com os resultados obtidos no capítulo III, acarreta um aumento do tempo de computação necessário para o processamento da informação, e da memória requerida pelo filtro, havendo, portanto, vantagem na aplicação do primeiro modelo, para estimação dos parâmetros.

#### 4.3 EQUAÇÕES DO FILTRO

Da aplicação do filtro de Kalman generalizado, no modelo 1, resultam as seguintes equações:

$$\underline{\hat{P}}(k+1/k) = \underline{f}_p(\underline{P}(k), k) \quad (4.6)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k+1/k) = \underline{F}(k) \underline{P}(k) \underline{F}^T(k) + \underline{W}(k) \quad (4.7)$$

$$\underline{K}(k+1) = \underline{\tilde{P}}(k+1/k) \underline{G}^T(k+1) (\underline{G}(k+1) \underline{\tilde{P}}(k+1/k) \underline{G}^T(k+1) + \underline{V}(k+1))^{-1} \quad (4.8)$$

$$\underline{\hat{P}}(k+1/k+1) = \underline{\hat{P}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) (y(k+1) - g(\underline{\hat{P}}(k+1/k), k+1)) \quad (4.9)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k+1/k+1) = (\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{G}(k+1)) \underline{\tilde{P}}(k+1/k) \quad (4.10)$$

Nas quais as matrizes  $\underline{F}(k)$  e  $\underline{G}(k)$  resultam da linearização do modelo e são definidas como:

$$\underline{F}(k) \stackrel{\Delta}{=} \left. \frac{\partial \underline{f}_p(\underline{P}, k)}{\partial \underline{P}} \right|_{\underline{P}=\underline{\hat{P}}(k)} \quad (4.11)$$

$$\underline{G}(k+1) \stackrel{\Delta}{=} \nabla_{\underline{P}} \underline{g}(\underline{P}, k+1) \Big|_{\underline{P}=\underline{P}(k+1/k)} =$$

$$\int_{-\infty}^{t_{k+1}} \nabla_{\underline{P}} (\underline{G}(t', t_{k+1}, \underline{P}_1) \underline{u}(\underline{P}_2, t')) dt' \Big|_{\underline{P}=\underline{P}(k+1/k)}$$

(4.12)

Como nos casos discutidos anteriormente, erros introduzidos por linearização podem ser reduzidos, ou eliminados, usando-se iterações que, além disso, também são úteis para diminuir o tempo necessário para estabilização do filtro.

#### 4.4 EXEMPLO

Para mostrar a validade do modelo sugerido e a eficiência do filtro de Kalman, como estimador, apresentamos a seguir um exemplo.

Seja um sistema com resposta de impulso

$$g(t) = K \exp(-t/T) \tag{4.13}$$

onde:

$K$  é constante e igual a 1 ( $K=1$ )

$T$  parâmetro que segue uma exponencial com  $T(k+1)=\alpha T(k)$   
onde  $\alpha=1,01$  e  $T(0)=1,0$

e uma entrada senoidal

$$u(t) = \text{sen}(At) \quad \text{onde} \quad A = \text{constante}$$

Este sistema foi simulado, assumindo diferentes valores para a variância do ruído que atua nas medidas, e os resultados obtidos tomados como leituras para aplicação do filtro de Kalman generalizado a diferentes modelos propostos, para estimação dos parâmetros desse sistema. Verificou-se que, para valores pequenos da variância, resultados satisfatórios são obtidos com o uso deste filtro. A medida que a variância do ruído aumenta se faz necessá-

rio o uso dos filtros iterados, como se vê a seguir, no exemplo em discussão, assumindo-se  $v(k) = N(0, 0,01)$  e tempo de amostragem  $T_a = 0,3$  segundos.

Os resultados da aplicação dos filtros a diferentes modelos, assumindo-se ruído e tempo de amostragem conforme o proposto acima, são discutidos a seguir.

Modelo 1 - o parâmetro  $T(k)$  é suposto desconhecido, mas constante. Um valor errado, para o parâmetro  $\alpha$ ,  $\alpha=1$ , é assumido.

As equações para o filtro são escritas como:

$$K(k+1) = K(k) + w_1(k) \quad (4.14)$$

$$T(k+1) = T(k) + w_2(k) \quad (4.15)$$

com medidas

$$y(t_k) = \int_{-\infty}^{t_k} K(k) e^{-t/T(k)} u(t-t') dt + v(k) \quad (4.16)$$

Dentro deste modelo dois casos são, ainda, considerados:

a) a variância do ruído  $\underline{w}_p$  ( $\underline{w}_p = (w_1 \ w_2)^T$ ) é tomada como:

$$\underline{W}_p(k) = \text{diag.}(0, , 0, )$$

b) a variância do ruído  $\underline{w}_p$  ( $\underline{w}_p = (w_1 \ w_2)^T$ ) é tomada como:

$$\underline{W}_p(k) = \text{diag.}(0,0 , 0,01)$$

O ruído  $v(k)$  é assumido para os dois casos como  $N(0, 0, 01)$ .

Os resultados obtidos, considerando-se estes dois casos, são mostrados na figura 4.1, na qual se verifica que, para o primeiro caso, existe uma grande discrepância entre os valores estimados e os valores reais de  $y(t)$ . Também os valores estimados para  $T(k)$  possuem erros acentuados. No segundo caso, onde se as

sume um ruído para compensar os erros introduzidos, por não se tomar o verdadeiro valor de  $a$ , os resultados obtidos aproximam-se mais dos valores reais ficando clara a importância de se considerar a existência de ruído, nas equações dos parâmetros, para compensar os erros, que são causados por incertezas nos parâmetros dos modelos assumidos.

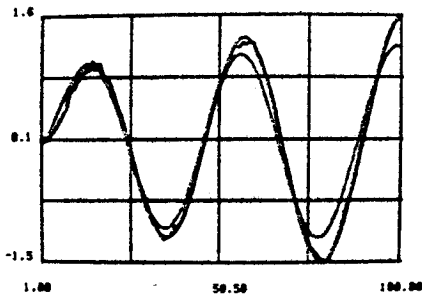


FIG. 4.1A - Y ESTIMADO - MODELO 1 - CASO A E B

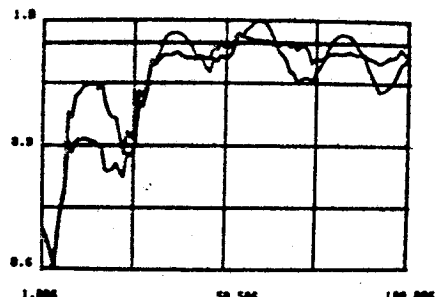


FIG. 4.1B - K ESTIMADO, K REAL - MODELO 1 - CASO A E B

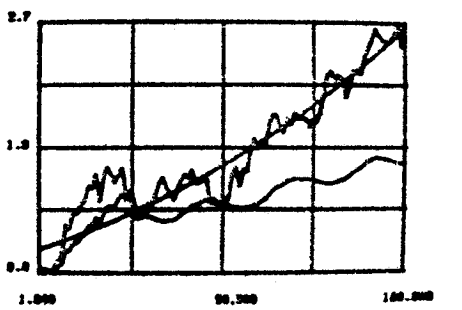


FIG. 4.1C - T ESTIMADO E T REAL - MODELO 1 - CASO A E B

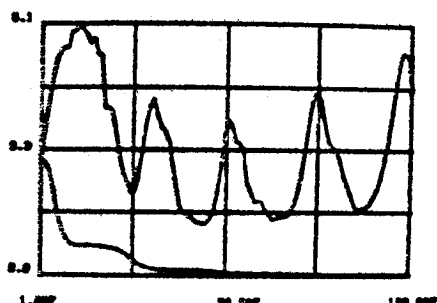


FIG. 4.1D - PRECISAO - MODELO 1 - CASO A E B

Figuras 4.1

Melhorias são introduzidas nos resultados obtidos, para o caso B apresentado, quando se faz uso do filtro iterado. Neste modelo, devido ao fato de existir não-linearidade somente na equação de medida, só as iterações locais terão importância. As figuras 4.2 mostram os resultados obtidos, para os dois casos deste modelo, usando-se o filtro iterado. Comparando-se estas figu-

ras com as figuras 4.1, verifica-se que melhores resultados são obtidos com o uso deste filtro no caso 1b, enquanto que, para o caso 1a, estas iterações não são suficientes para compensar o erro introduzido, por se considerar o modelo inadequado.

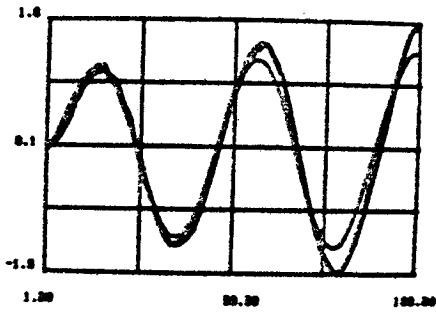


FIG. 4.2A - Y ESTIMADO - MODELO 1 - CASO A E B

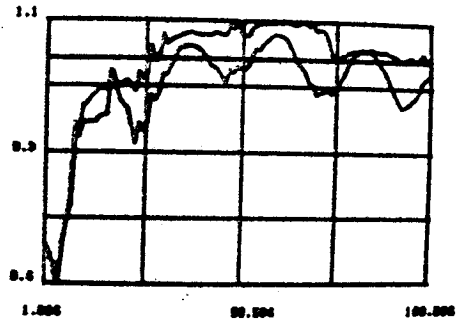


FIG. 4.2B - K ESTIMADO, K REAL - MODELO 1 - CASO A E B

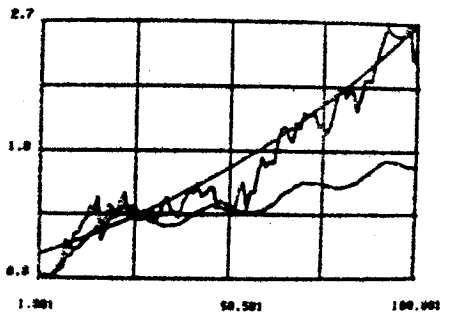


FIG. 4.2C - T ESTIMADO E T REAL - MODELO 1 - CASO A E B

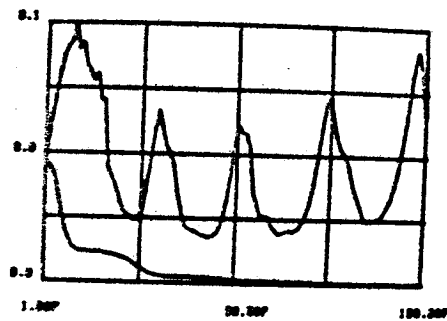


FIG. 4.2D - VARIANCIAS - MODELO 1 - CASO A E B

Figuras 4.2

Modelo 2 - neste modelo, a equação correta para evolução do parâmetro  $T(k)$  é considerada, fazendo-se  $\alpha = 1,01$ . Desse modo as equações para o filtro são escritas:

$$K(k+1) = K(k) + w_1(k) \quad (4.18)$$

$$T(k+1) = 1,01 T(k) + w_2(k) \quad (4.19)$$

e com as medidas descritas pela equação (4.16).

Assumindo  $\underline{W}_p(k) = \text{diag.}(0, 0)$ , e aplicando-se os filtros de Kalman generalizado e generalizado com iterações locais às equações (4.16) (4.18) e (4.19), obteve-se os resultados que são mostrados na figura 4.3. Comparando-se os resultados obtidos com o uso deste modelo, com os resultados anteriores, verifica-se que os ora obtidos são melhores, como era de se esperar, uma vez que as equações corretas para evolução dos parâmetros com o tempo foram considerados.

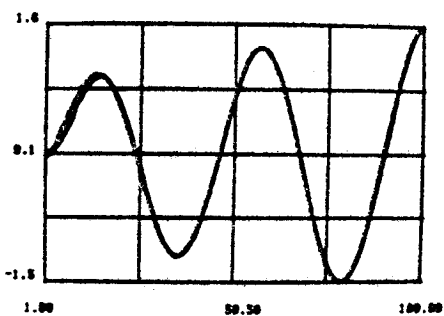


FIG. 4.3A - Y ESTIMADO - MODELO 2 -

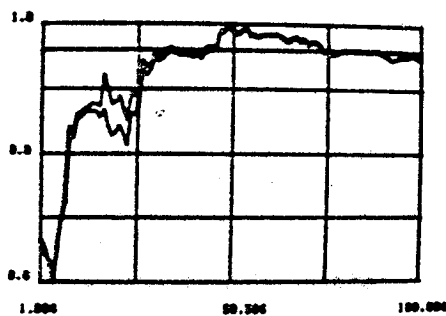


FIG. 4.3B - K ESTIMADO, K REAL - MODELO 2 -

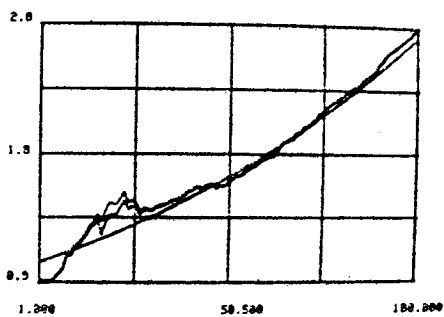


FIG. 4.3C - T ESTIMADO E T REAL - MODELO 2 -

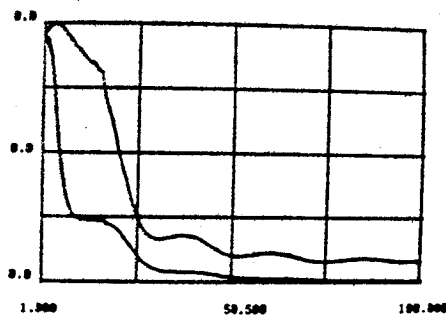


FIG. 4.3D - VARIANCIAS - MODELO 2 -

### Figuras 4.3

Modelo 3 - neste modelo  $\alpha$  também é considerado desconhecido, e as equações para o filtro são escritas como:

$$K(k+1) = K(k) + w_1(k) \quad (4.20)$$

$$T(k+1) = \alpha(k) T(k) + w_2(k) \quad (4.21)$$

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + w_3(k) \quad (4.22)$$

e com medidas descritas pelas equações (4.16).

Observa-se, agora, que existe não-linearidade também nas equações de evolução dos parâmetros, o que significa que o uso de iterações "smoothing" também poderão ser úteis na melhoria das estimativas obtidas.

Tomando-se  $\underline{N}_p(k) = \text{diag.}(0, 0, 0)$  e aplicando-se diferentes algoritmos de filtragem, obtêm-se resultados que são resumidos a seguir:

a - filtro generalizado

Os resultados obtidos com o uso do filtro generalizado são apresentados nas figuras 4.4, e onde se verifica que existem grandes discrepâncias entre os valores reais e os valores estimados.

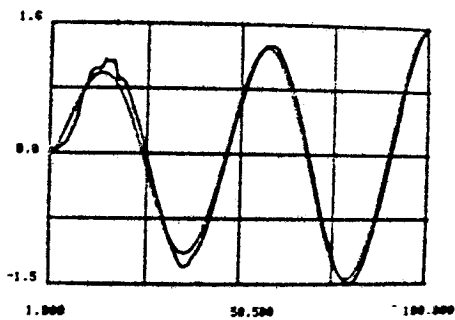


FIG. 4.40 Y REAL, Y ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

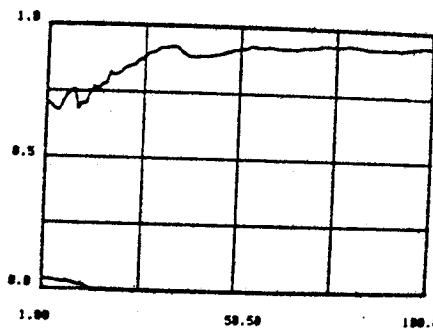


FIG. 4.43 K REAL, K ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

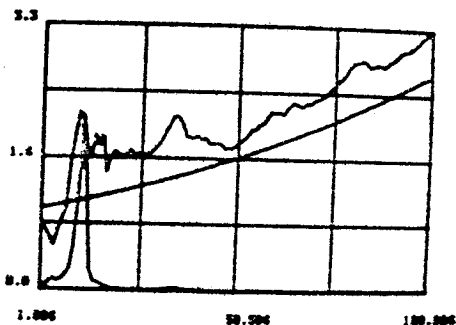


FIG. 4.42 T REAL, T ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

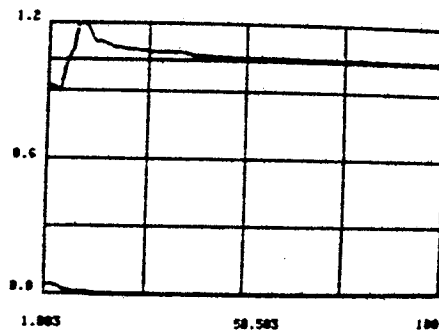


FIG. 4.44 ALPHA REAL, ALPHA ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

Figuras 4.4



b - filtro generalizado com "smoothing"

Os resultados obtidos com o uso do filtro com "smoothing" são apresentados nas figuras 4.5 e, de uma análise destas figuras, verifica-se que, com o uso destas iterações, os resultados obtidos são sensivelmente melhores, embora ainda apresentem erros sistemáticos (bias), para alguns parâmetros.

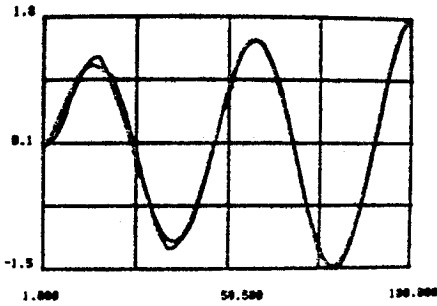


FIG. 4.5A Y ESTIMADO E Y REAL - MODELO 3

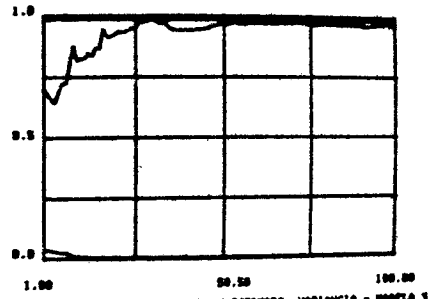


FIG. 4.5B K REAL, K ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

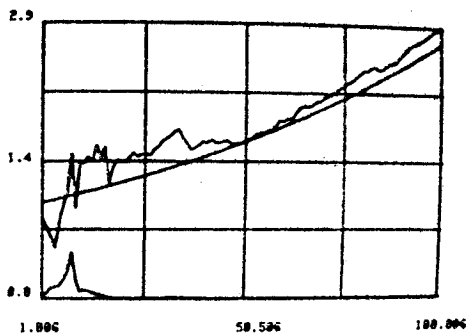


FIG. 4.5C T REAL, T ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

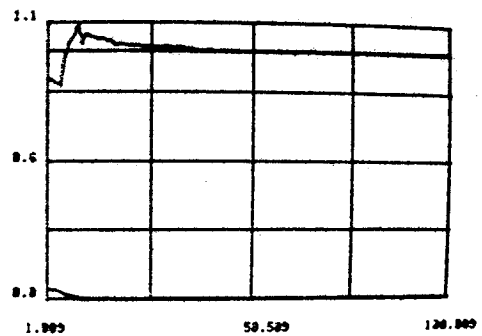


FIG. 4.5D ALFA REAL, ALFA ESTIMADO, VARIANCIA - MODELO 3

Figuras 4.5

c - filtro generalizado com iterações locais

Sendo a não-linearidade da medida muito mais acentuada que a não-linearidade existente nas equações de evolução dos parâmetros, é razoável esperar-se que os resultados obtidos, com o uso desse filtro, sejam melhores que os do caso anterior, o que se con

firma pelos resultados obtidos para este caso e que são apresentados nas figuras 4.6

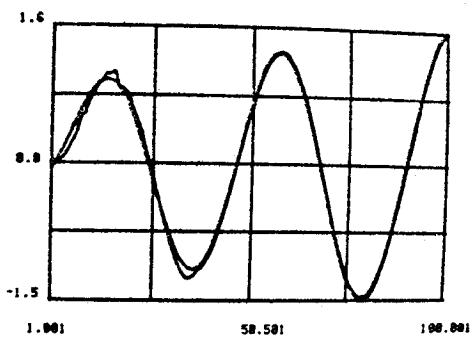


FIG. 4.6A Z REAL, Z ESTIMADO, VARIANÇIA - MODELO 3

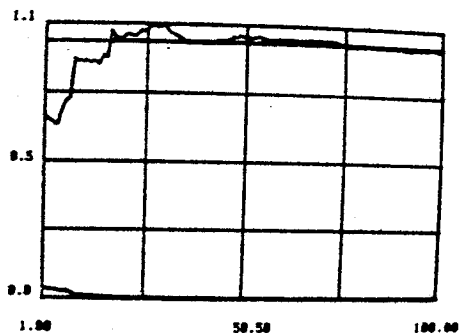


FIG. 4.6B K REAL, K ESTIMADO, VARIANÇIA - MODELO 3

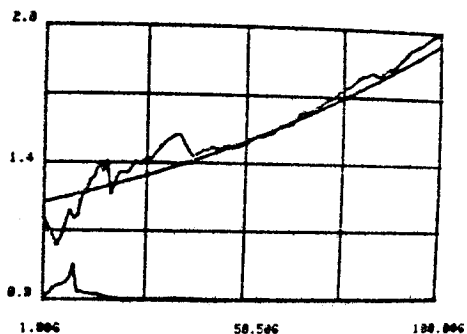


FIG. 4.6C I REAL, I ESTIMADO, VARIANÇIA - MODELO 3

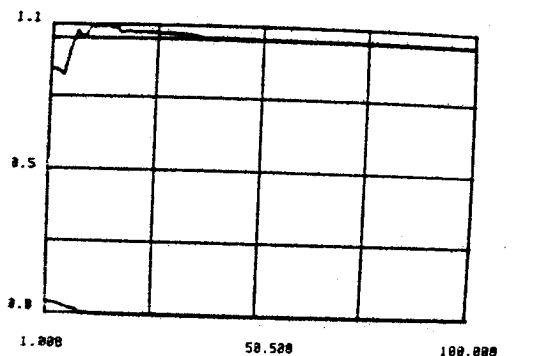


FIG. 4.6D ALFA REAL, ALFA ESTIMADO, VARIANÇIA - MODELO 3

### Figuras 4.6

d - filtro generalizado com iterações locais e "smoothing"

Os resultados obtidos com o uso destes dois tipos de iterações conjuntamente são, em alguns pontos, melhores que os anteriores. Mas, de modo geral, podem ser comparados em qualidade com os obtidos no caso anterior, onde somente iterações locais são usados, principalmente se considerarmos que o esforço computacional dispendido neste caso é muito maior do que aquele dispendido no caso anterior.

#### 4.5 CONCLUSÕES

Dos resultados apresentados neste capítulo, conclui-se ser o filtro de Kalman generalizado iterado um método que possui grande flexibilidade na estimação de parâmetros desconhecidos, e que, por suas características, é muito adequado para aplicações em situações onde uma estimativa de parâmetros "on-line" se faz necessária.

## APÊNDICE

### IMPLEMENTAÇÃO DOS FILTROS EM COMPUTADOR

O programa apresentado a seguir executa os algoritmos a apresentados no capítulo I, deste trabalho.

#### - DESCRIÇÃO DO USO

##### - parâmetros de entrada:

- NW - código do periférico usado para saída dos resultados
- ILOC - número de iterações locais
- SMOTH - número de iterações smoothing
- N - dimensão do vetor de estado
- IR - dimensão do vetor de medidas
- XFZERO - valor inicial para o filtro ( $\hat{x}(1/0)$  com dimensão  $n \times 1$ )
- VZERO - diagonal da matriz da variância inicial  $X(1/0)$
- VARW - variância do ruído  $w(k)$ , com dimensão  $n \times 1$
- VARV - variância do ruído  $v(k)$ , com dimensão  $IR \times 1$
- YZERO - medidas do sistema, com dimensão  $IR \times 1$

##### - parâmetros de saída

- XFZ - valor estimado  $\hat{x}(k+1/k+1)$ , com dimensão  $n \times 1$
- VXFZ - diagonal da matriz, que representa a variância  $X(k+1/k+1)$

- SUBPROGRAMAS NECESSÁRIOS

Subprogramas para inversão e multiplicação de matrizes, e subrotinas para cálculo das funções e suas derivadas, em cada ponto.

SUBROUTINE FUNCF (N,A,II,X)

SUBROUTINE DERIVF (N,A,II,X)

onde:

- N - dimensão do vetor A
- A - vetor dos pontos onde a função ou a derivada deve ser calculada
- II - número inteiro que representa o instante  $t_k$
- X - vetor e matriz que contém respectivamente os valores da função em FUNCF e derivada em DERIVF, calculadas nos pontos dados por A.

SUBROUTINE FUNCH (IR,N,B,II,X)

SUBROUTINE DERIVH (IR,N,B,II,X)

onde:

- IR e N - definem as dimensões das variáveis de entrada e saída do subprograma
- B - vetor dos pontos onde a função que representa as medidas e suas derivadas devem ser calculadas
- II - número inteiro que representa o instante  $t_k$
- X - vetor e matriz que contém, respectivamente em FUNCH e DERIVH, os valores da função da derivada, calculadas nos pontos dados por A.

SUBROUTINE SVARW (N,A,II,X)

SUBROUTINE SVARV (IR,A,II,X)

Constroem respectivamente, as matrizes  $W(k)$  e  $V(k)$ , em cada instante  $t_k$

onde:

$N$  e  $IR$  - definem as dimensões das variáveis de entrada e saída das subrotinas SVARW e SVARV respectivamente

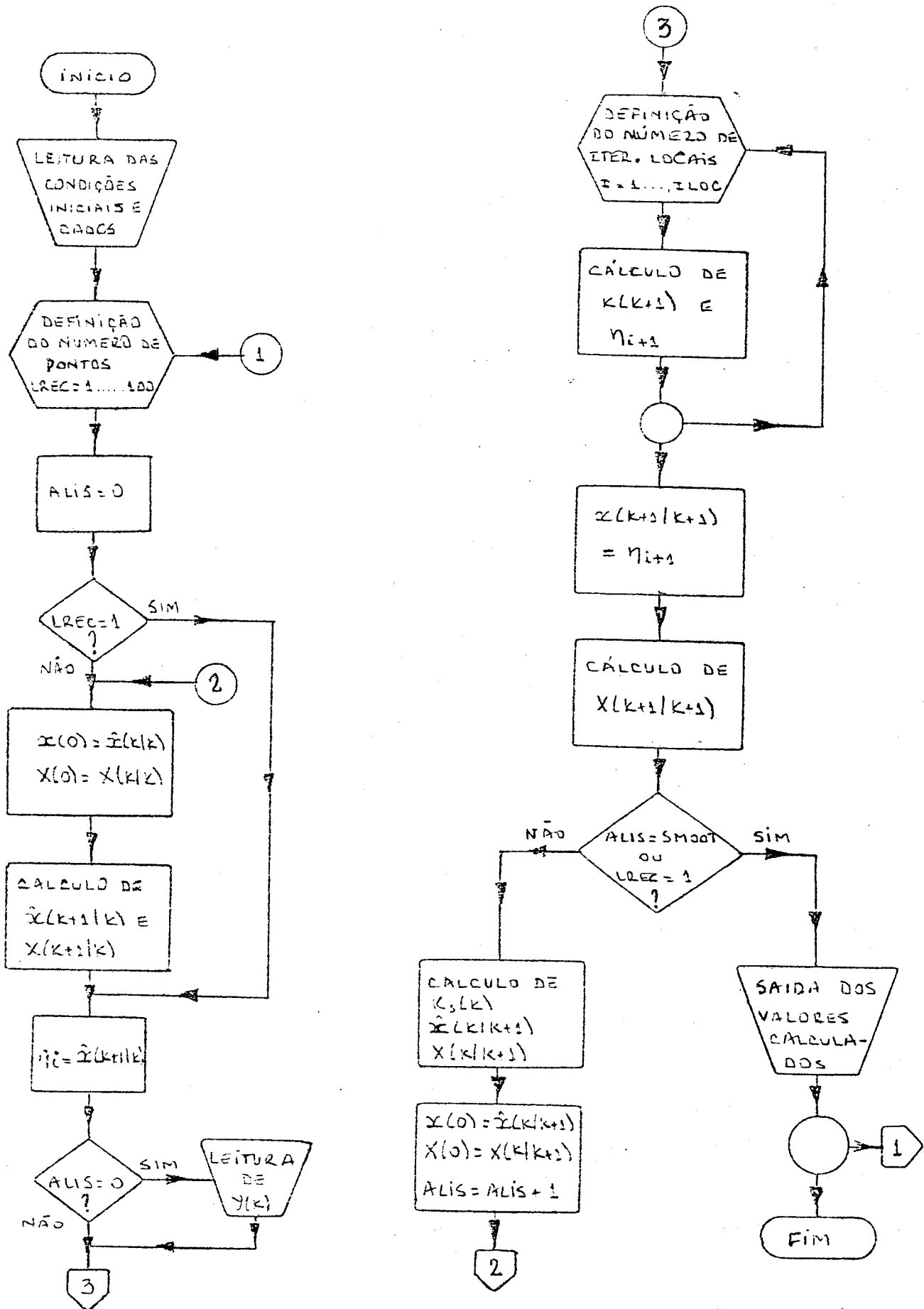
$A$  - vetor de dimensão  $N$  ou  $IR$ , com os valores dos ruídos  $w(k)$  ou  $v(k)$

$II$  - número inteiro que representa o instante  $t_k$

$X$  - matriz da variância  $W(k)$  ou  $V(k)$  conforme a subrotina utilizada

- DIAGRAMA DE BLOCOS

DIAGRAMA DE BLOCOS DO PROGRAMA  
 PARA IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO  
 DE KALMAN GENERALIZADO ITERADO



```

C
C          PROGRAMA PARA CALCULO DO
C          FILTRO DE KALMAN GENERALIZADO
C
C *** MATRIZES DE DIMENSAO N X N
      DIMENSION FD(3,3),VXFZ(3,3),TI(3,3),PI(3,3),VXFZER(3,3),VARWF(3,3)
      *,FDI(3,3),F(3,3)
      DIMENSION VZERO(3)
      DIMENSION AVXFZ(3,3),VXFZA(3,3),AUX(3,3),ACA(3,3),ERROV(3,3),ACAT(
      *3,3),AINT(3,3),AAINT(3,3)
C *** MATRIZES DE DIMENSAO IR X IR
      DIMENSION VARVF(1,1),YI(1,1)
C *** MATRIZES DE DIMENSAO N X IR
      DIMENSION HDT(3,1),XI(3,1),CA(3,1)
C *** MATRIZES DE DIMENSAO IR X N
      DIMENSION HD(1,3),H(1,3)
C *** MATRIZES DE DIMENSAO N X 1 OU U X N
      DIMENSION XFZ(3),XFZERO(3),MEDIAM(3),VARW(3),WK(3),XZREAL(3),ZI(3)
      *,XREAL(3),MEDIWR(3),VARWR(3),MEDIVR(3),VARVR(3),ETA(3),DELTA(3),RL
      *OCAL(3)
      DIMENSION XFZA(3),LXX(3),MXX(3),ERRO(3),PESO(3)
C *** MATRIZES DE DIMENSAO IR X1 OU 1 X IR
      DIMENSION MEDIAV(1),VARV(1),VK(1),YREAL(1),YZERO(1),WI(1),LX(1),MX
      *(1),YESTIM(1),FATOR(1)
      REAL MEDIAW,MEDIAV
      INTEGER ALIS,SMOTH
      NAMELIST/NAM0/NW
      NAMELIST/NAM1/ILOC,SMOTH
      NAMELIST/NAM2/N,IR
      NAMELIST/NAM3/XFZERO,VZERO
      NAMELIST/NAM4/VARW,VARV
      READ(24,NAM0)
      READ(24,NAM1)
      READ(24,NAM2)
      READ(24,NAM3)
      READ(24,NAM4)
C *** PREENCHE MATRIZ DA VARIANCIA INICIAL
      DO 345 I3=1,N
      DO 345 I4=1,N
345  VXFZER(I3,I4)=0.
      DO 346 I3=1,N
346  VXFZER(I3,I3)=VZERO(I3)
C *** INICIALIZACAO DO FILTRO
      LREC=1
      ALIS=0
      GO TO 200
C *** INICIO DA RECORENCIA
      201 DO 202 LREC=2,100
      ALIS=0
      204 CALL FUNCF(N,XFZ,LREC,XFZERO)
      CALL DERIVF(N,XFZ,LREC,FD)
C *** CALCULO DA MATRIZ FI (FD) TRANSPOSTA
      DO 17 I=1,N
      DO 17 J=1,N
17  FDT(I,J)=FD(J,I)
      CALL MAPRO(FD,VXFZ,TI,N,N,N)
      CALL MAPRO(TI,FDT,PI,N,N,N)
      CALL SVARWF(N,VARW,LRECS,VARWF)
      DO 19 I=1,N
      DO 18 J=1,N

```



```

18   VXFZER(I,J)=PI(I,J)+VARWF(I,J)
C *** FIM DO CALCULO DA VARIANCIA
C *** INICIALIZACAO DO FILTRO DADO ESTADO X(K+1/K) E VARIANCIA X(K+1/K)
C *** PARA LREC=1
200  DO 77 I=1,N
77   ETA(I)=XFZERO(I)
C *** ENTRADA DA MEDIDA ATUAL
C *** TESTA O VALOR DO DETERMINANTE DA MATRIZ YI
IF(ALIS.NE.0)GO TO 192
READ(22,103)(YZERO(I),I=1,IR)
192  DO 338 I=1,N
338  XFZA(I)=XFZ(I)
C *** INICIO DAS ITERACOES LOCAIS
DO 78 L=1,ILOC
CALL DERIVH(N,IR,ETA,LREC,HD)
CALL SVARV(IR,VARV,LREC,VARVF)
C *** TRANSPOR MATRIZ H
191  DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,IR
10   HDT(I,J)=HD(J,I)
CALL MAPRO(VXFZER,HDT,XI,N,N,IR)
CALL MAPRO(HD,XI,YI,IR,N,IR)
DO 11 I=1,IR
DO 11 J=1,IR
11   YI(I,J)=YI(I,J)+VARVF(I,J)
CALL MINVC(YI,IR,D,LX,MX)
IF(D.NE.0.) GO TO 723
725  WRITE(NW,724)LREC
724  FORMAT(' EXECUCAO INTERROMPIDA D=0. MATRIZ SINGULAR. LREC=',I4)
GO TO 336
723  CALL MAPRO(XI,YI,CA,N,IR,IR)
C *** CALCULO DO ESTADO X(K+1/K+1)
CALL FUNCH(IR,N,ETA,LREC,YESTIM)
DO 79 I=1,N
79   DELTA(I)=XFZERO(I)-ETA(I)
CALL MAPRO(HD,DELTA,FATOR,IR,N,1)
DO 12 I=1,IR
12   WI(I)=YZERO(I)-YESTIM(I)-FATOR(I)
CALL MAPRO(CA,WI,ZI,N,IR,1)
DO 13 I=1,N
13   XFZ(I)=XFZERO(I)+ZI(I)
DO 80 I=1,N
80   ETA(I)=XFZ(I)
78   CONTINUE
C *** CALCULO DA VARIANCIA X(K+1/K+1)
CALL MAPRO(CA,HD,TI,N,IR,N)
DO 14 J=1,N
DO 14 I=1,N
IF(I-J)15,16,15
15   TI(I,J)=1.-TI(I,J)
GO TO 14
15   TI(I,J)=-TI(I,J)
14   CONTINUE
DO 337 I=1,N
DO 337 J=1,N
337  VXFZA(I,J)=VXFZ(I,J)
CALL MAPRO(TI,VXFZER,VXFZ,N,N,N)
C *** TERMINO DA INICIALIZACAO DO FILTRO PARA LREC=1
IF(LREC.EQ.1)GO TO 203
IF(ALIS.EQ.SMOTH)GO TO 203

```

```

C *** INICIO DO SMOOTHING
C *** CALCULO DE K(K) ALISS
CALL DERIVE(N,XFZA,LRECS,FD)
DO 28 I=1,N
DO 28 J=1,N
28 FDT(I,J)=FD(J,I)
DO 29 I=1,N
DO 29 J=1,N
29 AVXFZ(I,J)=VXFZER(I,J)
CALL MINVC(AVXFZ,N,D,LXX,MXX)
IF(D.EQ.0.) GO TO 725
CALL MAPRO(VXFZA,FDT,AUX,N,N,N)
CALL MAPRO(AUX,AVXFZ,ACA,N,N,N)
C *** CALCULO DO ESTADO X(K/K+1)
DO 30 I=1,N
30 ERRO(I)=XFZ(I)-XFZERO(I)
CALL MAPRO(ACA,ERRO,PESO,N,N,1)
DO 31 I=1,N
31 XFZ(I)=PESO(I)+XFZA(I)
C *** CALCULO DA VARIANCA X(K/K+1)
DO 32 I=1,N
DO 32 J=1,N
32 ERROV(I,J)=VXFZ(I,J)-VXFZER(I,J)
DO 33 I=1,N
DO 33 J=1,N
33 ACAT(I,J)=ACA(J,I)
CALL MAPRO(ACA,ERROV,AINT,N,N,N)
CALL MAPRO(AINT,ACAT,AAINT,N,N,N)
DO 34 I=1,N
DO 34 J=1,N
34 VXFZ(I,J)=VXFZA(I,J)+AAINT(I,J)
ALIS=ALIS+1
GO TO 204
C *** SAIDA DOS RESULTADOS
201 WRITE(NW,100)(XFZ(I),I=1,N)
WRITE(NW,100)(VXFZ(I,I),I=1,N)
IF(LREC.EQ.1)GO TO 201
202 CONTINUE
335 CONTINUE
100 FORMAT(3E14.8)
101 FORMAT(E14.8)
END

```

```

SUBROUTINE FUNCF(N,A,II,X)
DIMENSION A(N),X(N)
X(1)=A(1)
X(2)=A(3)*A(2)
X(3)=A(3)
RETURN
END
SUBROUTINE DERIVF(N,A,II,X)
DIMENSION A(N),X(N,N)
X(1,1)=1,
X(1,2)=0.
X(1,3)=0.
X(2,1)=0.
X(2,2)=A(3)
X(2,3)=A(2)
X(3,1)=0.
X(3,2)=0.
X(3,3)=1.
RETURN
END
SUBROUTINE SVARWF(N,A,II,X)
DIMENSION X(N,N),A(N)
DO 50 I=1,N
DO 50 J=1,N
IF(I-J)10,20,10
20 X(I,J)=A(I)
GO TO 50
10 X(I,J)=0.
50 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE SVARV(IR,A,II,X)
DIMENSION X(IR,IR),A(IR)
DO 50 I=1,IR
DO 50 J=1,IR
IF(I-J)10,20,10
20 X(I,J)=A(I)
GO TO 50
10 X(I,J)=0.
50 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE FUNCH(IR,N,B,II,X)
DIMENSION X(1),B(3),VEC1(1)
COMMON/FUN/A(3),TLINHA,FREQ
EXTERNAL FUN1
DO 10 I=1,N
10 A(I)=B(I)
DELTA=0.3
TLINHA=II*DELTA
FREQ=0.5
K=3
H=0.1
KK=K*II
XI=0.
YI=0.
NN=1
CALL RK2(FUN1,H,XI,YI,KK,NN,VEC1)
X(1)=VEC1(1)
RETURN

```

```

END
SUBROUTINE DERIVH(N,IR,B,II,X)
DIMENSION X(1,3),B(3),VEC2(1),VEC3(1)
COMMON/FUN/A(3),TLINHA,FREQ
EXTERNAL FUN2,FUN3
DO 10 I=1,N
10 A(I)=B(I)
DELTA=0.3
TLINHA=II*DELTA
XI=0.
YI=0.
FREQ=0.5
K=3
H=0.1
KK=K*II
NN=1
CALL RK2(FUN2,H,XI,YI,KK,NN,VEC2)
CALL RK2(FUN3,H,XI,YI,KK,NN,VEC3)
X(1,1)=VEC2(1)
X(1,2)=VEC3(1)
X(1,3)=0.
RETURN
END
FUNCTION FUN1(T,Y)
COMMON/FUN/A(3),TLINHA,FREQ
FUN1=A(1)*SIN(FREQ*(TLINHA-T))*EXP(-T/A(2))
RETURN
END
FUNCTION FUN2(T,Y)
COMMON/FUN/A(3),TLINHA,FREQ
FUN2=SIN(FREQ*(TLINHA-T))*EXP(-T/A(2))
RETURN
END
FUNCTION FUN3(T,Y)
COMMON/FUN/A(3),TLINHA,FREQ
FUN3=A(1)*SIN(FREQ*(TLINHA-T))*EXP(-T/A(2))*T/(A(2)**2)
RETURN
END

```

```

&NAM0 NW=52,&END
&NAM1 ILOC=1,SMOTH=1,&END
&NAM2 N=3,IR=1,&END
&NAM3 XFZERO=0.7,0.85,0.9,VZERO=0.04,0.04,0.04,&END
&NAM4 VARX=0.,0.,0.,VARY=0.01,&END

```

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. KALMAN, R.E. - "A new approach to linear filtering and prediction problems". Trans. ASME Journal of Basic Engineering, New York, v.82:35-45, Mar., 1960.
2. KALMAN, R.E. & BUCY, R.S. - "New results in linear filtering and prediction theory". Trans. ASME Journal of Basic Engineering, New York, v.83:95-108, Mar., 1961.
3. JAZWINSKI, A.H. - Stochastic processes and filtering theory. New York, Academic Press, 1970. (Mathematics in science and engineering, v.64)
4. SAGE, A.P. & MELSA, J.L. - Estimation theory with applications to communications and control. New York, McGraw-Hill, 1971. (McGraw-Hill, series in systems science)
5. SCHWEPPE, F.C. - Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973. (Prentice-Hall in electrical engineering serie)
6. MENDEL, J.M. - "Computational requirements for a discrete Kalman filter". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 16(6): 748-759. Dec., 1971.
7. MENDES, M.J. & DE POLIGNAC, C. - "A sequential method for the estimation of parameter in nonlinear models of multivariable systems". In: EYKHOFF, P. - Identification and system parameter estimation, pt.2. Amsterdam, North-Holland, 1973, p.897-900. (IFAC Symposium, 3. Hague/Delft, Netherlands, 1973)