

**MÉTODOS DO TIPO KACZMARZ PARA SOLUÇÃO DE  
SISTEMAS NÃO LINEARES INDETERMINADOS**

*Raimundo J.B. de Sampaio*



**UNICAMP**

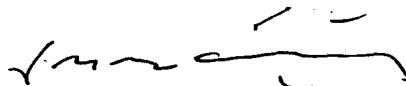
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO  
BRASIL

MÉTODOS DO TIPO KACZMARZ PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS  
NÃO LINEARES INDETERMINADOS

Este exemplar corresponde a redação final <sup>devidamente corrigida</sup> da tese defendida pelo Sr. Raimundo J. B. de Sampaio e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, de 198 .



---

Prof. Dr. José Mário Martínez  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

JANEIRO/1985.

À

Leila e Rúbia.

## AGRADECIMENTOS

À Minervina e Sampainho, pelo caminho e apoio que sempre me dedicaram;

A Martínez, pela orientação;

A Lourdes, pela datilografia dos manuscritos;

A Jacô, pelos desenhos;

E a todos os colegas do IMECC, que de alguma forma me foram sempre de grande ajuda.

---

Este trabalho foi suportado financeiramente pela UFPR e CAPES.

## NOTAÇÃO

$x \in Y$	$x$ é elemento de $Y$
$\{x : P\}$	Conjunto dos elementos $x$ que satisfazem a propriedade $P$ .
$A \subset B$	O conjunto $A$ está contido no conjunto $B$ .
$\mathbb{R}^p$	Espaço euclidiano com pontos $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ .
$\langle x, y \rangle$	Produto interno usual entre os vetores $x$ e $y$ .
$\  \cdot \ $	Norma euclidiano.
$N(A)$	Núcleo de $A$ .
$R(A)$	Imagem de $A$ .
$J$	Jacobiano da função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
$v(x)$	Valor da função $v$ no ponto $x$ .
$\{x^k\}$	Sequência de Vetores.
$A^+$	Inversa generalizada de $A$ .
$\Pi$	Produtório.
$\Sigma$	Somatório.
$x^s$	Vetor $x$ gerado pelo método sequencial.
$x^p$	Vetor $x$ gerado pelo método paralelo.
$F_i$	Bloco das funções $f_i \in F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
$h \circ k$	Composição das funções $h$ e $k$ .

## ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO . . . . .	1
CAPÍTULO II - RESULTADOS GERAIS . . . . .	3
CAPÍTULO III - CONVERGÊNCIA EM PRESENÇA DE UMA VARIEDADE DE PONTOS FIXOS . . . . .	8
CAPÍTULO IV - MÉTODO DE PROJEÇÕES SEQUENCIAIS ( $G_S, \phi_S$ ) . . . . .	20
CAPÍTULO V - MÉTODO DE PROJEÇÕES PARALELAS ( $G_P, \phi_P$ ) . . . . .	33
CAPÍTULO VI - EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS . . . . .	41
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES . . . . .	58
BIBLIOGRAFIA . . . . .	63

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A intenção deste trabalho é apresentar métodos para a solução de sistemas não lineares indeterminados, possivelmente úteis para utilização em sistemas de "porte enorme". Ambos os métodos podem ser classificados como de ação-linha no sentido de Censor [ 1 ].

Sua inspiração foi o trabalho "Solution of Underdetermined Nonlinear Equation by Stationary Iteration Methods" de Klaus-Hermann Meyn, que apareceu na revista Numerische Mathematik número 42, páginas 161-172 (1983). Nesse trabalho, Meyn apresenta um método do tipo Kaczmarz, com um teorema de convergência local em presença de uma variedade de pontos fixos. E assegura que "ele é apropriado para tratamento numérico de problemas grandes e possivelmente mal-condicionados, com jacobiano não quadrado esparso".

De nosso lado, reduzimos as exigências sobre a aplicação  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$ , que dá origem ao sistema não linear indeterminado, acrescentamos uma versão por blocos, e uma versão paralela.

O trabalho está dividido em sete capítulos. O Capítulo I é uma apresentação geral dos métodos definidos nos capítulos IV e

V. O Capítulo II aborda alguns resultados gerais de Álgebra Linear e Análise que serão usados nos capítulos seguintes. O Capítulo III trata da convergência de um operador linear em presença de uma variedade de pontos fixos; os capítulos IV e V apresentam os Métodos para solução de sistemas não lineares indeterminados com seus respectivos teoremas de convergência; O Capítulo VI trata das experiências numéricas com os métodos e apresenta os resultados relativos a quatorze funções-testes (qualquer coisa em torno de cento e sessenta horas de CPU) com versões por blocos e considerando em cada versão três casos distintos. E finalmente, o Capítulo VII apresenta a conclusão do trabalho.

As motivações para o estudo de métodos de ação-linha estão fundadas principalmente, em tornar computacionalmente tratável sistemas cuja dimensão supere a capacidade disponível de armazenamento em memória, chamado acima de sistemas de "porte enorme".

Aplicações práticas desse tipo de método são encontrados na literatura, principalmente na reconstrução de imagem em tomografia ultrasônica, e em sismologia.

Os resultados principais deste trabalho serão publicados em [6].



## CAPÍTULO II

### RESULTADOS GERAIS

DEFINIÇÃO 2.1. Uma aplicação  $H : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é Holder-contínua em  $D$ , se existem constantes  $c \geq 0$  e  $p \in (0,1]$  tais que  $\forall x, y \in D$ ,

$$\|H(y) - H(x)\| \leq c\|x - y\|^p. \quad (1)$$

Segue-se da desigualdade (1), que:

- i) Se  $p=1$ , então  $H$  é Lipschitz-contínua em  $D \subset \mathbb{R}^n$ ;
- ii) A quantidade  $w(t) = \sup \|H(y) - H(x)\| : x, y \in D \text{ e } \|x - y\| \leq t$  é bem definida e limitada por  $ct^p$ .

TEOREMA\* 1. Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continuamente diferenciável sobre um aberto convexo  $D \subset \mathbb{R}^n$ , e suponhamos que existem constantes  $K, p \geq 0$  tais que:

$$\|J(x) - J(y)\| \leq K\|x - y\|^p, \quad \forall x, y \in D.$$

---

(\*) Adaptação de resultados de [7].

Então,  $\forall x, y, u \in D$

$$\|F(x) - F(y) - J(u)(x-y)\| \leq K \max\{\|x-u\|^p, \|y-u\|^p\} \|x-y\|. \quad (2)$$

PROVA. Para  $u \in D$ , fixo, definimos  $G(w) = F(w) - J(u)w$ . Claramente  $G(w)$  satisfaz às condições do teorema.

Agora, pelo teorema do valor médio,

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|G'(x+t(y-x))\| \|x-y\|.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= \|F(x) - J(u)x - F(y) + J(u)y\| \\ &= \|F(x) - F(y) - J(u)(x-y)\| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|G'(x+t(y-x))\| \|x-y\| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|J(x+t(y-x)) - J(u)\| \|x-y\| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \|K[(x+t(y-x)) - u]^p\| \|x-y\| \\ &\leq K \max\{\|x-u\|^p, \|y-u\|^p\} \|x-y\|. \quad \square \end{aligned}$$

Em particular, se  $u = y$ , a desigualdade será

$$\|F(x) - F(y) - J(y)(x-y)\| \leq K\|x-y\|^{p+1}. \quad ([7] - \text{pg. } 73)$$

TEOREMA 2. Seja a matriz  $E$  uma perturbação da matriz  $A_{m \times n}$ . Suponhamos que  $\text{posto}(A+E) \leq \text{posto}(A) = \min(m,n)$  e que  $\|A^+\| \|E\| < 1$ .

Então,

$$\|G\| \leq \frac{C\|E\| \|A^+\|^2}{1 - \|E\| \|A^+\|}$$

onde  $G = \tilde{A}^+ - A^+$ , e  $C$  é uma constante.

PROVA: Ver [2], pag. 46.  $\square$

DEFINIÇÃO 2.2. Uma aplicação  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é não expansiva sobre  $D \subset \mathbb{R}^n$  se

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Se existir  $\alpha < 1$  tal que  $\forall x, y \in D, \|G(x) - G(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ , diremos que  $G$  é uma contração.  $\square$

TEOREMA 3. Seja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear. Então  $G$  é uma contração se e somente se  $\|G\| < 1$ .

PROVA. Se  $\|G\| < 1$ , então pela linearidade de  $G$

$$\|G(x) - G(y)\| = \|G(x-y)\| \leq \|G\| \|x-y\| ,$$

e portanto  $G$  é uma contração.

Agora, se  $\|G(x) - G(y)\| \leq \alpha \|x-y\|$  ,  $\alpha < 1$  , então

$$\|G(x) - G(y)\| = \|G(x-y)\| \leq \alpha \|x-y\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|G(x-y)\|}{\|x-y\|} \leq \alpha \quad , \quad \forall x-y = z \in \mathbb{R}^n \quad , \quad z \neq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x-y\| \neq 0} \frac{\|G(x-y)\|}{\|x-y\|} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \|G\| < 1. \quad \square$$

TEOREMA 4. Se  $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma contração, então  $G$  tem um único ponto fixo.

PROVA. Sejam  $x^*$  e  $y^*$ , pontos fixos de  $G$ . Isto é,

$$x^* = G(x^*) \quad \text{e}$$

$$y^* = G(y^*) .$$

Então,

$$\|x^* - y^*\| = \|G(x^*) - G(y^*)\| < \|x^* - y^*\|$$

é uma contradição, logo

$$x^* = y^*. \quad \square$$

### CAPÍTULO III

#### CONVERGÊNCIA EM PRESENÇA DE UMA VARIEDADE DE PONTOS FIXOS

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e seja  $W$  um conjunto arbitrário.

Definimos um operador  $G : D \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo em  $D$ ,  $\forall w \in W$ . E assumimos que  $G$  possui um conjunto  $E$  de pontos fixos,

$$E = \{u : u = G(u, w) \text{ , } \forall w \in W\} \subset D.$$

Para cada  $x \in D$ , definimos  $v(x) \in E$  tal que

$$\|x - v(x)\| = \min_{u \in E} \|x - u\|.$$

E assumimos que a aplicação  $x \rightarrow v(x)$  está univocamente definida e é contínua.

O seguinte resultado é uma extensão do lema 2.1 de [3]:

LEMA 3.1. Suponhamos que  $u^0 \in E$ , e que existe uma bola aberta  $B(u^0, \varepsilon)$  e um  $\alpha < 1$  tal que:

$$\|G(x, w) - v(x)\| \leq \alpha \|x - v(x)\| \text{ , } \forall x \in B(u^0, \varepsilon) \text{ e } w \in W.$$

Então, existe uma bola aberta  $B(u^0, \delta) \subset B(u^0, \varepsilon)$  tal que para todo ponto inicial  $x^0 \in B(u^0, \delta)$ , a sequência  $x^{k+1} = G(x^k, w_k)$  permanece na bola  $B(u^0, \varepsilon)$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = u \in E \cap B(u^0, \varepsilon)$ .

PROVA. Seja  $\delta$  tal que

$$\delta \leq \frac{1-\alpha}{3-\alpha} \varepsilon < \varepsilon .$$

Então,

$$\delta \leq \frac{1-\alpha}{3-\alpha} \varepsilon \implies \frac{3-\alpha}{1-\alpha} \delta \leq \varepsilon \implies \frac{1+\alpha+2-2\alpha}{1-\alpha} \delta \leq \varepsilon$$

$$\implies \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 2\right) \delta \leq \varepsilon \implies \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \delta + 2\delta \leq \varepsilon .$$

Se  $x^0 \in B(u^0, \delta)$  ;  $\|x^0 - u^0\| \leq \delta$

$$\implies \|x^0 - v(x^0)\| \leq \delta \implies \|v(x^0) - u^0\| \leq 2\delta .$$

Logo,  $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| \leq \varepsilon$ .

Com  $\delta$  escolhido como acima, mostraremos, por indução, que

$$\begin{aligned} \|x^k - u^0\| &\leq \|x^k - v(x^{k-1})\| + \|x^{k-1} - v(x^{k-1})\| + \|x^{k-1} - u^0\| \\ &\leq (1 + \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Começaremos mostrando que  $\|x^k - v(x^{k-1})\| \leq \alpha^k \|x^0 - v(x^0)\|$ .

De fato; para  $k = 1$ ,

$$\|x^1 - v(x^0)\| = \|G(x^0, w) - v(x^0)\| \leq \alpha \|x^0 - v(x^0)\|.$$

Agora, suponhamos

$$\|x^{k-1} - v(x^{k-2})\| \leq \alpha^{k-1} \|x^0 - v(x^0)\|.$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} \|x^k - v(x^{k-1})\| &= \|G(x^{k-1}, w) - v(x^{k-1})\| \leq \alpha \|x^{k-1} - v(x^{k-1})\| \\ &\leq \alpha \|x^{k-1} - v(x^{k-2})\| \leq \alpha^k \|x^0 - v(x^0)\|. \end{aligned}$$

$$\text{Então } \|x^1 - u^0\| = \|x^1 - v(x^0) + v(x^0) - x^0 + x^0 - u^0\|$$

$$\leq \|x^1 - v(x^0)\| + \|x^0 - v(x^0)\| + \|x^0 - u^0\|$$



$$\begin{aligned} &\leq \alpha \|x^0 - v(x^0)\| + \|x^0 - v(x^0)\| + \|x^0 - u^0\| \\ &\leq (1 + \alpha) \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| , \end{aligned}$$

que mostra a validade de (3) para  $k = 1$ .

$$\text{Supondo } \|x^k - u^0\| \leq (1 + \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| ,$$

temos para  $k+1$ , que:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - u^0\| &\leq \|x^{k+1} - v(x^k)\| + \|x^k - v(x^k)\| + \|x^k - u^0\| \\ &\leq \alpha^{k+1} \|x^0 - v(x^0)\| + \alpha^k \|x^0 - v(x^0)\| + (1 + \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \\ &\quad + \|v(x^0) - u^0\| \\ &= (1 + \alpha) \alpha^k \|x^0 - v(x^0)\| + (1 + \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| \\ &= (1 + \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| . \end{aligned}$$

Que é a expressão (3) para  $k+1$ .

$$\begin{aligned} \text{Agora, } (1 + \alpha) \sum_{i=0}^k \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| \\ = (1 + \alpha) \|x^0 - v(x^0)\| \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i + \|v(x^0) - u^0\| . \end{aligned}$$

Porém,  $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$  (soma dos termos de uma progressão geométrica).

Então,  $\|x^k - u^0\| \leq (1+\alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\|$

$$\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \|x^0 - v(x^0)\| + \|v(x^0) - u^0\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Vejamos agora que a sequência  $(x^k)$  é de Cauchy:

$$\|x^p - x^q\| \leq \|x^p - v(x^{p-1})\| + \|x^{p-1} - v(x^{p-1})\| + \|x^{p-1} - x^q\|$$

$$p > q.$$

$$\text{Porém, } \|x^{p-1} - x^q\| \leq \|x^{p-1} - v(x^{p-2})\| +$$

$$+ \|x^{p-2} - v(x^{p-2})\| + \|x^{p-2} - x^q\|, \quad p-2 > q.$$

Repetindo-se o argumento para  $\|x^{p-i} - x^q\|$ ,  $i = 3, 4, \dots, k$ ,

$p-k > q$ , temos:

$$\|x^p - x^q\| \leq \sum_{i=1}^{p-q} [\|x^{q+i-1} - v(x^{q+i-1})\| + \|x^{q+i-1} - v(x^{q+i-1})\|]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p-q} [\alpha^{q+i} \|x^0 - v(x^0)\| + \alpha^{q+i-1} \|x^0 - v(x^0)\|]$$

$$\leq \|x^0 - v(x^0)\| \sum_{i=1}^{p-q} (\alpha^{q+i} + \alpha^{q+i+1})$$

$$\leq \frac{2\alpha^q}{1-\alpha} \|x^0 - v(x^0)\|.$$

Agora, se  $x^0 \in B(u^0, \delta)$ ,  $\|x^0 - v(x^0)\| \leq \delta$

e

$$\|x^p - x^q\| \leq \frac{2\alpha^q}{1-\alpha} \delta$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , qualquer, impomos a condição:

$$\frac{2\alpha^q}{1-\alpha} \delta < \varepsilon \implies \alpha^q < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2}$$

$$\implies q < \frac{\ln\left[\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2}\right]}{\ln \alpha}.$$

Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N = \frac{\ln\left[\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2}\right]}{\ln \alpha}$  tal que se

$$p, q \geq N, \quad \|x^p - x^q\| < \varepsilon.$$

Portanto, o ponto de acumulação é único e o lema está provado.  $\square$

O SUBESPAÇO  $S(u)$ .

Para cada  $u \in E$ , definimos o conjunto  $T(u)$  como sendo:

$$T(u) = \{x - u : u = v(x), x \in D\}.$$

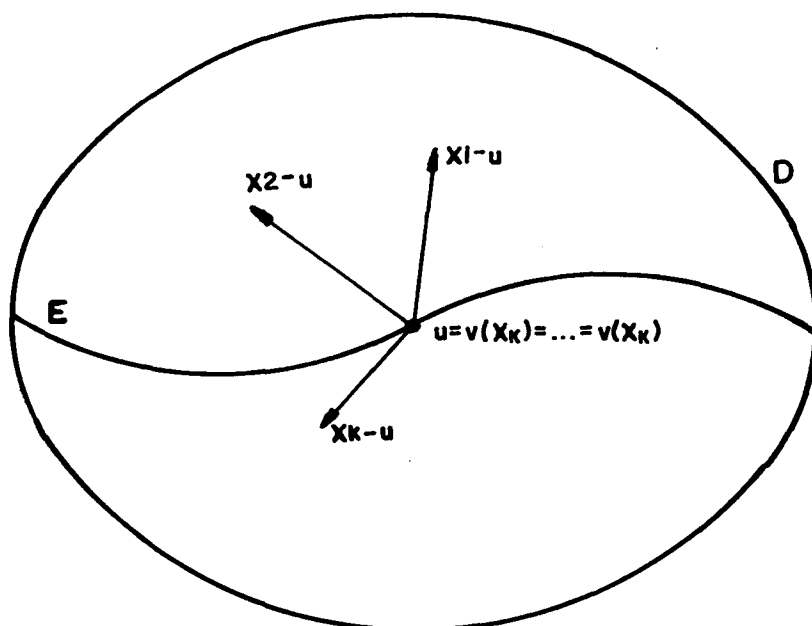


fig. 01

Chamaremos  $S(u)$ , o subespaço vetorial gerado pelos elementos do conjunto  $T(u)$ , e

$$s(u) = \{z \in S(u) : \|z\| = 1\}$$

a esfera unitária de  $S(u)$ .

Suponhamos que a seguinte propriedade é satisfeita por  $s(u)$ :

PROPRIEDADE C: Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que a distância entre  $z$  e  $s(u^0)$  é menor que  $\varepsilon$ , sempre que  $\|z - u^0\| < \delta$ ,  $\forall z \in s(u)$ . Ou seja, a esfera unitária  $s(u)$ , de  $S(u)$ , é contínua em  $u^0$ .

LEMA 3.2. Suponhamos  $G'(u, w)$  uniformemente contínua com respeito a  $W$ , e que  $\forall w \in W$ ,

$$i) \|G'(u^0, w) \Big|_{S(u^0)}\| \leq \beta < 1 ;$$

$$ii) \|G'(x, w) - G'(v(x), w)\| \leq \gamma \|x - v(x)\|^p .$$

Então, existe  $\varepsilon_1 > 0$  e  $\alpha < 1$  tal que se  $x \in B(u^0, \varepsilon_1)$

$$\|G(x, w) - v(x)\| \leq \alpha \|x - v(x)\|$$

PROVA. Se  $z$  pertence a esfera unitária de  $S(u^0)$  então  $\forall w \in W$ ,

$$\|G'(u^0, w) z\| \leq \|G'(u^0, w)\| \|z\| \leq \beta < 1.$$

Agora, pela continuidade da esfera unitária em  $u^0$ , existe uma vizinhança  $V_1$  de  $u^0$ , tal que, se  $y$  pertence a  $V_1$ , então  $\|G'(u^0, w)y\| \leq \beta_1$ , com  $\beta_1 \in (\beta, 1)$ ,  $\forall y \in s(u)$  e  $u \in V_1$ .

Seja  $\beta_2 \in (\beta_1, 1)$ . Pela continuidade uniforme de  $G'$ , existe uma vizinhança  $V_2$  de  $u^0$ , tal que

$$\begin{aligned} \|G'(u,w)y\| &= \|G'(u,w)y - G'(u^0,w)y + G'(u^0,w)y\| \\ &\leq \|G'(u,w) - G'(u^0,w)\| + \|G'(u^0,w)y\| \\ &\leq \|G'(u,w) - G'(u^0,w)\| + \beta_1 \\ &\leq \beta_2 < 1, \text{ com } y \in s(u), u \in V_2 \text{ e } w \in W. \end{aligned}$$

Então, dado  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, de modo que se  $x \in B(u^0, \varepsilon_1)$  também  $v(x) \in B(u^0, \varepsilon_1)$ ,

Se  $x \neq v(x)$ ,  $\frac{x-v(x)}{\|x-v(x)\|}$  pertence a uma esfera unitária  $s(u)$ ,  $u \in B(u^0, \varepsilon_1)$  o que implica

$$\|G'(v(x), w) \frac{x-v(x)}{\|x-v(x)\|}\| \leq \beta_2, \text{ e portanto,}$$

$$\|G'(v(x), w)(x-v(x))\| \leq \beta_2 \|x-v(x)\|. \quad (4)$$

Usando (2), pela hipótese ii) do lema, e (4), a tese segue de:

$$\begin{aligned}
\|G(x,w) - v(x)\| &= \|G(x,w) - G(v(x),w) - G'(v(x),w)(x-v(x)) \\
&\quad + G(v(x),w) + G'(v(x),w)(x-v(x)) - v(x)\| \\
&\leq \|G(x,w) - G(v(x),w) - G'(v(x),w)(x-v(x))\| \\
&\quad + \|G(v(x),w) - v(x)\| + \|G'(v(x),w)(x-v(x))\| \\
&\leq \gamma \|x - v(x)\|^{p+1} + \beta_2 \|x - v(x)\| \\
&\leq [\gamma \|x - v(x)\| + \beta_2] \|x - v(x)\|. \quad \square
\end{aligned}$$

Observe que com as condições do lema 3.2, o lema 3.1 também se verifica.

LEMA 3.3. Seja  $\phi : D \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $\phi$  contínua, tal que  $\forall w \in W$ ,

$$\|\phi(x,w) - G(x,w)\| \leq \psi(x) \|x - u^0\|, \text{ com } \lim_{x \rightarrow u^0} \psi(x) = 0.$$

Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall x \in B(u^0, \varepsilon)$  e  $\alpha_1(\alpha, 1)$ ,

$$\|\phi(x,w) - v(x)\| \leq \alpha_1 \|x - v(x)\|$$

PROVA. A tese segue trivialmente de:

$$\begin{aligned} \|\phi(x,w) - v(x)\| &= \|\phi(x,w) - G(x,w) + G(x,w) - v(x)\| \\ &\leq \|\phi(x,w) - G(x,w)\| + \|G(x,w) - v(x)\|. \quad \square \end{aligned}$$

TEOREMA 3.1. Existe  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que se  $x^0 \in B(u^0, \bar{\varepsilon})$ , a seqüência definida por  $x^{k+1} = \phi(x^k, w_k)$ ,  $w_k \in W$ , permanece em  $B(u^0, \bar{\varepsilon})$  e converge para um ponto de  $E$ .

PROVA. Seja o operador  $\phi$  definido como no lema 3.3. Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall x^0 \in B(u^0, \varepsilon)$  e  $\alpha_1 < 1$

$$\|\phi(x,w) - v(x)\| \leq \alpha_1 \|x - v(x)\|. \quad (\text{tese do lema 3.3})$$

Escolhendo esse  $\varepsilon > 0$ , de modo que  $B(u^0, \varepsilon) \subset B(u^0, \bar{\varepsilon})$  a prova é a mesma do Lema 3.1 trocando-se  $G(x,w)$  por  $\phi(x,w)$ .  $\square$

É interessante notar que o operador  $\phi: D \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , foi construído de modo a ter em todo  $x \in D$ , um valor muito próximo do valor de  $G$  no mesmo ponto. Como o operador  $G$  é uma contração, pelo teorema 4 a seqüência  $\{x^k\}$  gerado por  $x^{k+1} = G(x^k, w)$  converge para um ponto fixo  $x^* = G(x^*, w)$  e portanto o operador  $\phi$  gera uma seqüência  $\{y^k\}$  que converge para o mesmo ponto (fig. 02).



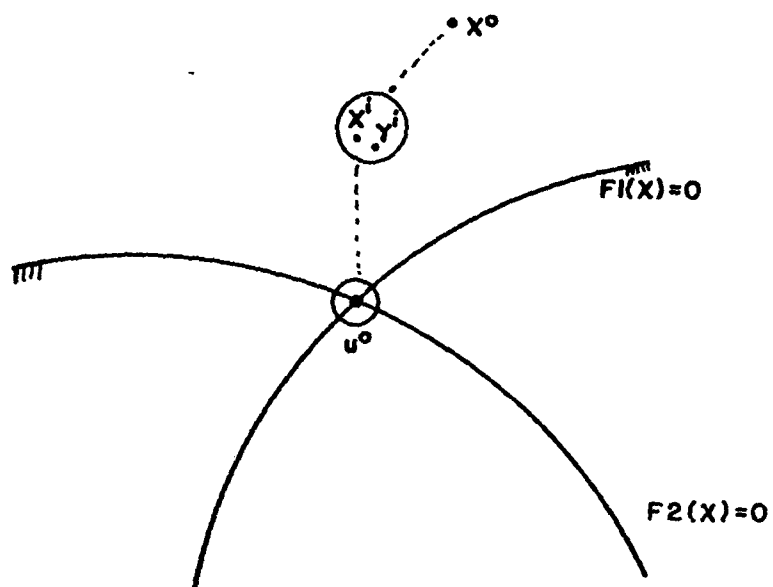


fig. 02

## CAPÍTULO IV

### MÉTODO DE PROJEÇÕES SEQUENCIAIS $(G_S, \phi_S)$

Seja  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $F \in C^1(D)$ .

Definimos o conjunto  $E$  como sendo:

$$E = \{x : F(x) = 0\}.$$

Suponhamos que  $\forall x \in D$  e  $u \in E$

$$\|J(x) - J(u)\| \leq K \|x - u\|^P. \quad (5)$$

Pelo teorema 1, (5) implica que

$$\|F(x) - F(y) - J(u)(x-y)\| \leq K \max\{\|x-u\|^P, \|y-u\|^P\} \|x-y\|. \quad (6)$$

Agrupando as componentes de  $F$  em blocos, com eventual repetição de componentes, exceto no mesmo bloco, o sistema  $F(x) = 0$  é equivalente a

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 0 \\ F_2(x) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x) &= 0 \end{aligned}$$

onde  $F_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Vamos assumir que  $J_i(u^0)$  tenha as linhas linearmente independentes, e sem perda de generalidade, vamos supor que  $J_i(x)$  também tenha as linhas linearmente independentes,  $\forall x \in D$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ .

#### 4.1. DEFINIÇÃO DE $G_s$ .

Seja  $x_0 = \bar{x}_0^s = x_0^s = x \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{x}_i^s = \bar{x}_{i-1}^s - w_i J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^s)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$G_s(x, w) = \bar{x}_m^s. \text{ (fig. 3).}$$

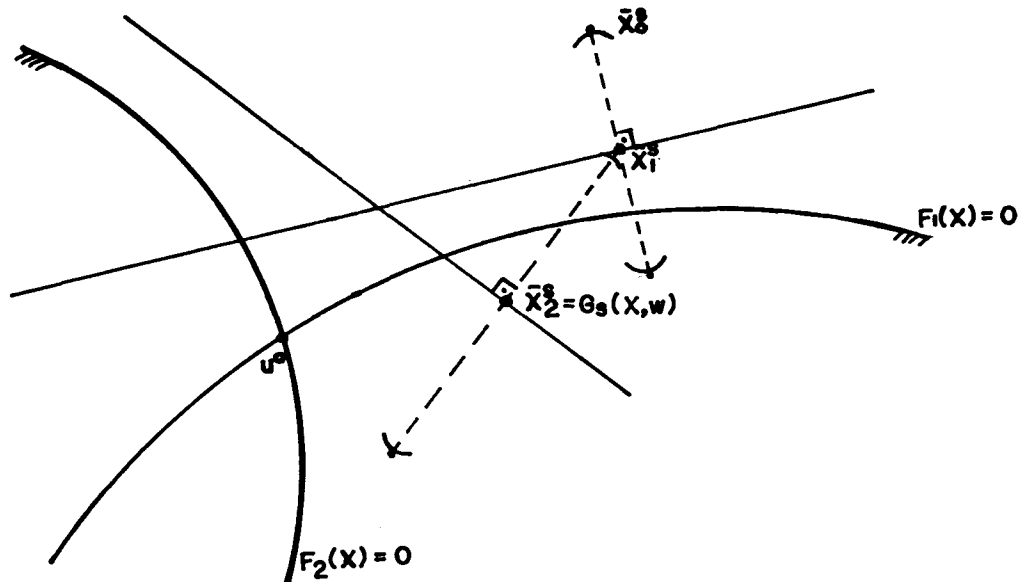


fig. 03

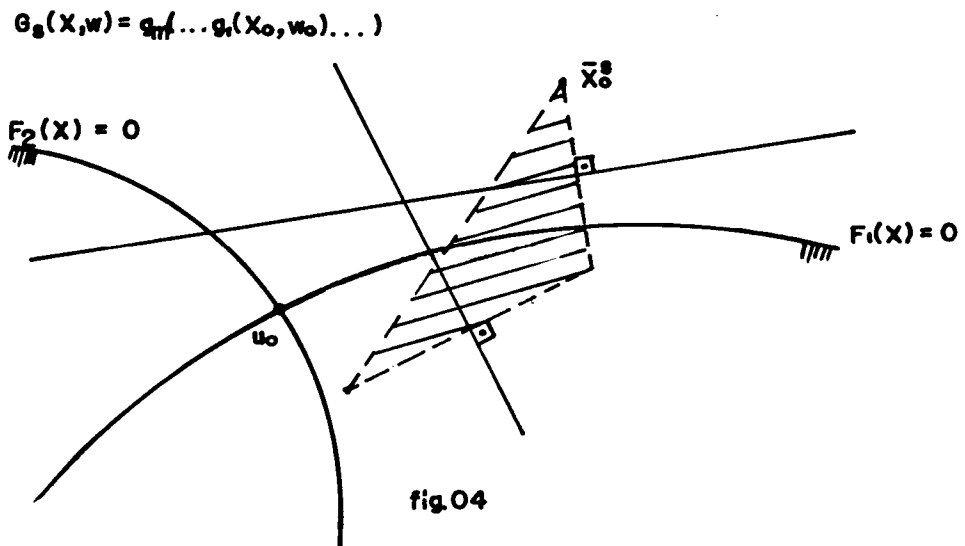
LEMA 4.1. Com  $G_S(x, w)$  definido como acima,  $G'_S(x, w)$  existe para todo  $x \in D$ , e é uniformemente contínua com respeito a  $w \in W$ . Além disso,  $\forall x \in D$  e  $w \in [\delta, 2-\delta]$

$$\|G_S(x, w) - G_S(v(x), w) - G'_S(v(x), w)(x - v(x))\| \leq \psi(x) \|x - v(x)\|$$

com  $\lim_{x \rightarrow u^0} \psi(x) = 0$ .

PROVA.  $G_S(x, w)$  é uma sequência de projeções-reflexões ortogonais

dos pontos  $\bar{x}_i^S = (g_i(\bar{x}_{i-1}^S, w_{i-1}))$  na variedade  $F_i(\bar{x}_{i-1}^S) + J_i(\bar{x}_{i-1}^S)(x - \bar{x}_{i-1}^S) = 0$ , donde a sequência  $\{x^k\}$  está bem definida (Fig. 4).



$G_S(x, w)$  é um ponto da figura hachureada

Usando a regra da cadeia na função composta  $G_S(x, w)$ , suponhamos por indução que

$$\| [g_{m-1}(\dots g_0(x_0, w_0) \dots)]' - [g_{m-1}(\dots g_0(u, w_0) \dots)]' \| \leq \psi_1(x) \|x - u\|$$

com  $\lim_{x \rightarrow u^0} \psi_1(x) = 0$ , e  $u = v(x)$ .

Para  $G_s(x, w) = g_1 \circ g_0$ , a desigualdade é claramente verdadeira. De fato, sejam

$$G'_s(x, w) = g'_1 [g_0(x_0, w_0), w_1] g'_0(x_0, w_0)$$

e

$$G'_s(u, w) = g'_1 [g_0(u, w_0), w_1] g'_0(u, w_0) = g'_1(u, w_1) g'(u, w_0),$$

assim,

$$\begin{aligned} & \| g'_1 [g_0(x_0, w_0), w_1] g'_0(x_0, w_0) - g'_1(u, w_1) g'_0(u, w_0) \| = \\ & = \| g'_1 [g_0(x_0, w_0), w_1] g'_0(x_0, w_0) - g'_1(u, w_1) g'_0(x_0, w_0) + g'_1(u, w_1) g'_0(x_0, w_0) - \\ & \quad - g'_1(u, w_1) g'_0(u, w_0) \| \\ & \leq \| g'_1 [g_0(x_0, w_0), w_1] g'_0(x_0, w_0) - g'_1(u, w_1) g'_0(x_0, w_0) \| + \| g'_1(u, w_1) g'_0(x_0, w_0) - \\ & \quad - g'_1(u, w_1) g'_0(u, w_0) \| \\ & \leq K_1 \| g_0(x_0, w_0) - u \|^P \| g'_0(x_0, w_0) \| + \| g'_1(u, w_1) \| \cdot K_2 \| x_0 - u \|^P . \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \|g_0(x_0, w_0) - u\| &= \|g_0(x_0, w_0) - g_0(u, w_0) - g'_0(u, w_0)(x_0 - u) + g'_0(u, w_0)(x_0 - u)\| \\ &\leq K_0 \|x_0 - u\|^{p+1} + \|g_0^1(u, w_0)\| \|x_0 - u\|, \text{ onde} \end{aligned}$$

$\|g'_0(u, w_0)\|$  e  $\|g'_1(u, w_1)\|$  são constantes, logo

$$\|g'_1[g_0(x_0, w_0), w_1] g'_0(x_0) - g'_1[g_0(u, w_0), w_1] g'_0(u - w_0)\| \leq \psi_1(x) \|x_0 - u\|$$

com  $\lim_{x \rightarrow u} \psi_1(x) = 0$ .

Então,

$$\begin{aligned} &\|g'_m[g_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}), w_m] g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - g'_m(u, w_m) g'_{m-1}(u, w_{m-1})\| \leq \\ &\|g'_m[g_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}), w_m] g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - g'_m(u, w_m) g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1})\| + \\ &\|g'_m(u, w_m) g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - g'_m(u, w_m) g'_{m-1}(u, w_{m-1})\| \leq \\ &\|g'_m[g_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}), w_m] - g'_m(u, w_m)\| \|g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1})\| + \\ &\|g'_m(u, w_m)\| \|g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - g'_{m-1}(u, w_{m-1})\| \leq \\ &\|g_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - u\| \|g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1})\| + \|g'_m(u, w_m)\| \psi_1(x) \|x - u\| \end{aligned}$$

com  $\lim_{x \rightarrow u^0} \psi_1(x) = 0$ , pela hipótese indutiva. (7)

Como  $\|g'_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1})\|$  e  $\|g'_m(u, w_m)\|$  são constantes e

$$\begin{aligned} \|g_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - u\| &= \|g_{m-1}(x_{m-1}, w_{m-1}) - g_{m-1}(u, w_{m-1}) - g'_{m-1}(u, w_{m-1})(x-u)\| \\ &\leq K_{m-1} \|x-u\|^{p+1} + \|g'_{m-1}(u, w_{m-1})\| \|x-u\|, \end{aligned}$$

obtemos que

$$\|G'_S(x, w) - G'_S(u, w)\| \leq \psi(x) \|x-u\| \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow u^0} \psi(x) = 0.$$

A tese se segue usando o teorema 1 do capítulo II.  $\square$

LEMA 4.2. Existe  $\beta^1 \in [0, 1)$  tal que para todo  $w \in [\delta, 2-\delta]$

$$\|G'(u^0, w) |_{S(u^0)}\| \leq \beta^1.$$

PROVA. Pela regra da cadeia,

$$G'_S(u^0, w) = \prod_{i=1}^m [I - w_i J_i(u^0)^+ J_i(u^0)].$$

E suponhamos  $S(u^0) \subset R(J_i(u^0)^T)$  (fig. 5).



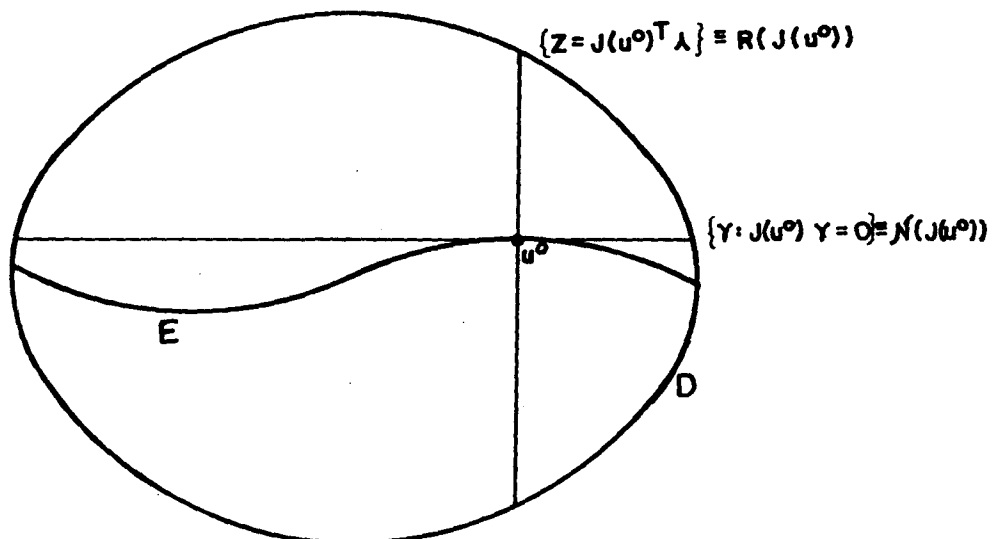


fig. 05

Seja  $y \in s(u^0)$ , isto é  $\|y\| = 1$ .

Então,

$$\|G'_S(u^0, w)y\| = \left\| \prod_{i=1}^m [I - w_i J_i(u^0)^+ J_i(u^0)] y \right\|.$$

onde  $\forall i=1,2,\dots,m$ ,  $(I - w_i J_i(u^0)^+ J_i(u^0))y$  é projeção-reflexão de  $y$  na nulidade de  $J_i(u^0)$ . (fig. 6).

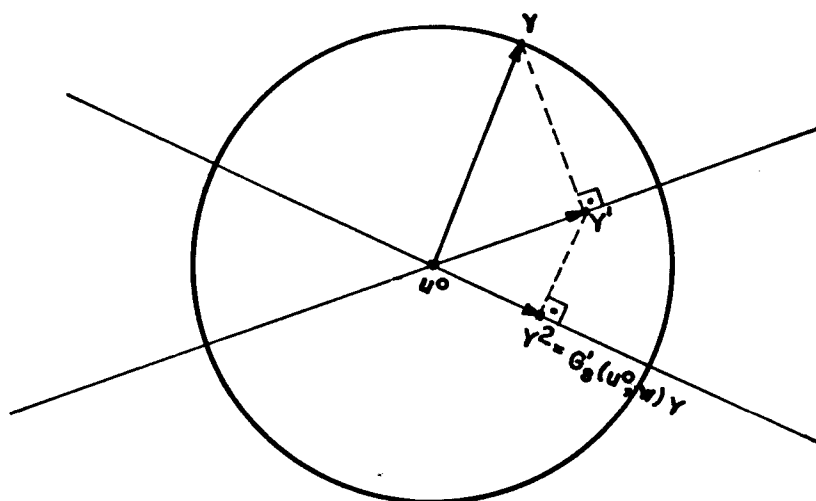


fig. 06

$$\text{Logo, } \|G'_S(u^0, w)y\| = \left\| \prod_{i=1}^m [I - w_i J_i(u^0) + J_i(u^0)] y \right\| \leq 1,$$

onde a igualdade se verifica apenas para  $y \in N(J_i(u^0))$ .

$$\text{Em consequência } \|G'_S(u^0, w)y\| < 1 \quad \forall w \in W \\ y \in s(u^0).$$

Como  $s(u^0)$  é compacto, se segue a tese.  $\square$

4.2. DEFINIÇÃO DE  $\phi_S$ .

Seja  $x_0 = \bar{x}_0^S = x_0^S = x \in \mathbb{R}^n$

$$x_i^S = x_{i-1}^S - w_i J_i(x_{i-1}^S) + F_i(x_{i-1}^S)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$\phi_S(x, w) = x_m^S.$$

LEMA 4.3. Com  $G_S(x, w)$  e  $\phi_S(x, w)$  definidos como antes,  $\forall x \in D$  e  $w \in [\delta, 2-\delta]$ , temos que

$$\|G_S(x, w) - \phi_S(x, w)\| \leq \psi^1(x) \|x - u^0\|$$

com

$$\lim_{x \rightarrow u^0} \psi^1(x) = 0.$$

PROVA. Suponhamos por indução que  $\|\bar{x}_{i-1}^S - x_{i-1}^S\| \leq \psi_{i-1}(x) \|x - u^0\|$ ,

com  $\lim_{x \rightarrow u^0} \psi_{i-1}(x) = 0$ .

Isto é obviamente verdadeiro para  $i = 1$ , dado que  $\bar{x}_0^S = x_0^S = x_0 = x$ .

Então,

$$\begin{aligned}
 \|\bar{x}_i^S - x_i^S\| &= \|\bar{x}_{i-1}^S - w_i J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - x_{i-1}^S + w_i J_i(x_{i-1}^S)^+ F_i(x_{i-1}^S)\| \\
 &\leq \|\bar{x}_{i-1}^S - x_{i-1}^S\| + \|w_i J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - w_i J_i(x_{i-1}^S)^+ F_i(x_{i-1}^S)\| \\
 &\leq \psi_{i-1} \|x - u^0\| + 2 \|J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - J_i(x_{i-1}^S)^+ F_i(x_{i-1}^S)\|. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
 \|J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - J_i(x_{i-1}^S)^+ F_i(x_{i-1}^S)\| &= \|J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - J_i(u^0)^+ F_i(x_{i-1}^S) \\
 &\quad + J_i(u^0)^+ F_i(x_{i-1}^S) - J_i(x_{i-1}^S)^+ F_i(x_{i-1}^S)\| \\
 &\leq \|J_i(u^0)^+ F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - J_i(u^0)^+ F_i(x_{i-1}^S)\| + \\
 &\quad + \|J_i(u^0)^+ F_i(x_{i-1}^S) - J_i(x_{i-1}^S)^+ F_i(x_{i-1}^S)\| \\
 &\leq \|J_i(u^0)^+\| \|F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - F_i(x_{i-1}^S)\| + \|J_i(u^0)^+ - J_i(x_{i-1}^S)^+\| \|F_i(x_{i-1}^S)\|.
 \end{aligned}$$

Pela continuidade de  $F$  e pela hipótese indutiva,

$$\|J_i(u^0)^+\| \|F_i(\bar{x}_{i-1}^S) - F_i(x_{i-1}^S)\| \leq c_1 \psi_{i-1}(x) \|x - u^0\| ,$$

para uma conveniente constante  $c_1$  ; (9)

Pelo teorema 2, do Cap. II, por (5), e pela continuidade de  $F$ ,

$$\begin{aligned} \|J_i(u^0)^+ - J_i(x_{i-1}^S)^+\| \|F_i(x_{i-1}^S)\| &\leq c_2 \|J_i(u^0) - J_i(x_{i-1}^S)\| \|x_{i-1}^S - u^0\|^p \\ &\leq c_2 \cdot K \|x_{i-1}^S - u^0\|^p \|x_{i-1}^S - u^0\|^p \\ &\leq c_3 \psi_{i-1}^1(x) \|x - u^0\| \end{aligned} \quad (10)$$

E a tese segue-se juntando (8) - (10).  $\square$

TEOREMA 4.1. Existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x^0 \in B(u^0, \varepsilon)$ , a sequência definida por  $x^{k+1} = \phi(x^k, w_k)$  converge para um ponto de  $E$ .

PROVA. O operador  $\phi_S$  foi definido de tal maneira, que sua avaliação em qualquer ponto  $x \in D$ , é muito parecida com a avaliação do mesmo ponto feita por  $G_S$ . Isto é,

$$\|\phi_S(x, w) - G_S(x, w)\| \leq \psi^1(x) \|x - u^0\| , \text{ com } \lim_{x \rightarrow u^0} \psi^1(x) = 0 ,$$

$$\forall x \in D \text{ e } w \in [\delta, 2-\delta] \text{ (Lema 4.3)}. \quad (11)$$

Agora, o lema 3.3 garante que se  $\phi_s$  e  $G_s$  cumprem (11), então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x^0 \in \dot{B}(u^0, \varepsilon)$

$$\|\phi_s(x, w) - v(x)\| \leq \alpha_1 \|x - v(x)\|, \quad \text{com } \alpha_1 < 1.$$

Então, a tese se segue como no Lema 3.1 trocando-se  $G(x, w)$  por  $\phi_s(x, w)$ .  $\square$

## CAPÍTULO V

### MÉTODO DE PROJEÇÕES PARALELAS $(G_p, \phi_p)$

Definimos, para  $x \in D$ ,

$$\bar{x}_i = x - w_i J_i(u^0)^+ F_i(x)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$G_p(x, w, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i$$

$$\lambda_i \in (0, 1) \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

LEMA 5.1.  $G'_p(x, w, \lambda)$  existe para todo  $x \in D$  e é uniformemente contínua com respeito a  $w$  e  $\lambda$ . Além disso,  $\forall x \in D, w \in [\delta, 2-\delta],$

$$\lambda_i \in (0, 1) \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

$$\|G_p(x, w, \lambda) - G_p(v(x), w, \lambda) - G'_p(v(x), w, \lambda)(x - v(x))\| \leq \psi^2(x) \|x - v(x)\|$$

com  $\lim_{x \rightarrow u^0} \psi^2(x) = 0.$

PROVA. Da definição de  $G_p(x, w, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i$ , temos pela regra de cadeia,

$$G'_p(x, w, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i [I - w_i J_i(u^0)^+ J_i(x)]$$

Então,

$$\|G'_p(x, w, \lambda) - G'_p(v(x), w, \lambda)\| = \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i J_i(u^0)^+ [J_i(x) - J_i(v(x))] \right\|$$

$$\leq 2 \cdot \|J_i(u^0)^+\| \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i [J_i(x) - J_i(v(x))] \right\|$$

$$\leq 2 \cdot \|J_i(u^0)^+\| \left\| \sum_{i=1}^m |\lambda_i| K \|x - v(x)\|^p \right\|$$

$$\leq 2 \cdot c \cdot K \|x - v(x)\|^p$$

$$\leq \psi^2(x) \|x - v(x)\|, \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow u^0} \psi^2(x) = 0. \quad (12)$$

A tese segue de (12) usando a condição (5).  $\square$



LEMA 5.2. Existe  $\beta^2 \in [0,1)$  tal que  $\forall w \in [\delta, 2-\delta]$ ,  $\lambda_i \in (0,1)$  e

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \|G'_p(u^0, w) \Big|_{S(u^0)}\| \leq \beta^2.$$

PROVA. Usando a regra da cadeia,

$$\|G'_p(u^0, w, \lambda) y\| = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|[I - w_i J_i(u^0) + J_i(u^0)] y\|. \quad (\text{fig. 7}).$$

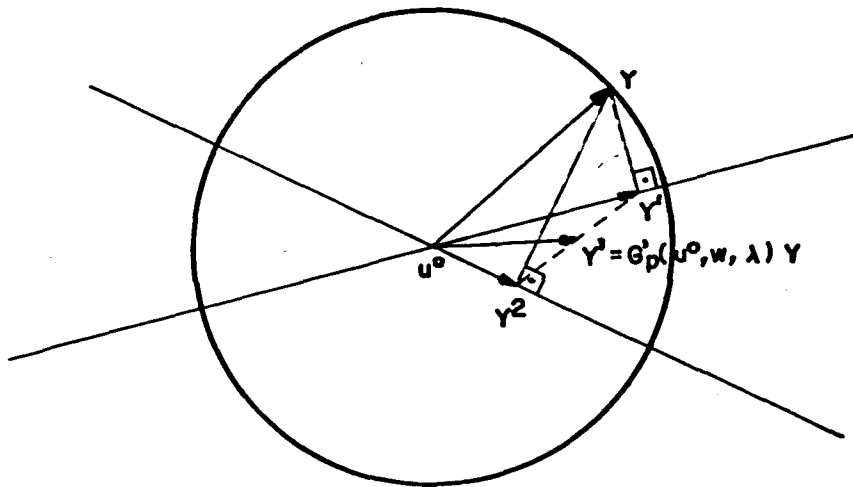


fig. 07

Agora,  $\|[I - w_i J_i(u^0) + J_i(u^0)] y\| \leq \|y\|$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall i$

$$\text{Então, } \|G'_p(u^0, w, \lambda) y\| = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|[I - w_i J_i(u^0) + J_i(u^0)] y\|.$$

$$\leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \|[I - w_i J_i(u^0) + J_i(u^0)] y\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \|y\|$$

$$\leq \|y\| \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \leq \|y\|.$$

onde a igualdade se verifica somente se  $y \in N(J_1(u^0))$ .

Em consequência,

$$\|G'_p(u^0, w, \lambda)y\| < 1 \quad \forall y \in s(u^0), \quad w \in [\delta, 2-\delta], \quad \lambda > 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Tomando-se o máximo nesta última expressão, segue a tese.  $\square$

### 5.1. DEFINIÇÃO DE $\phi_p$

Seja  $x \in D$ ,  $w_i \in [\delta, 2-\delta]$ ,  $\lambda_i \in (0, 1)$  e  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ .

$$x_i = x - w_i J_i(x) + F_i(x)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\phi_p(x, w, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad (\text{fig. 8}).$$

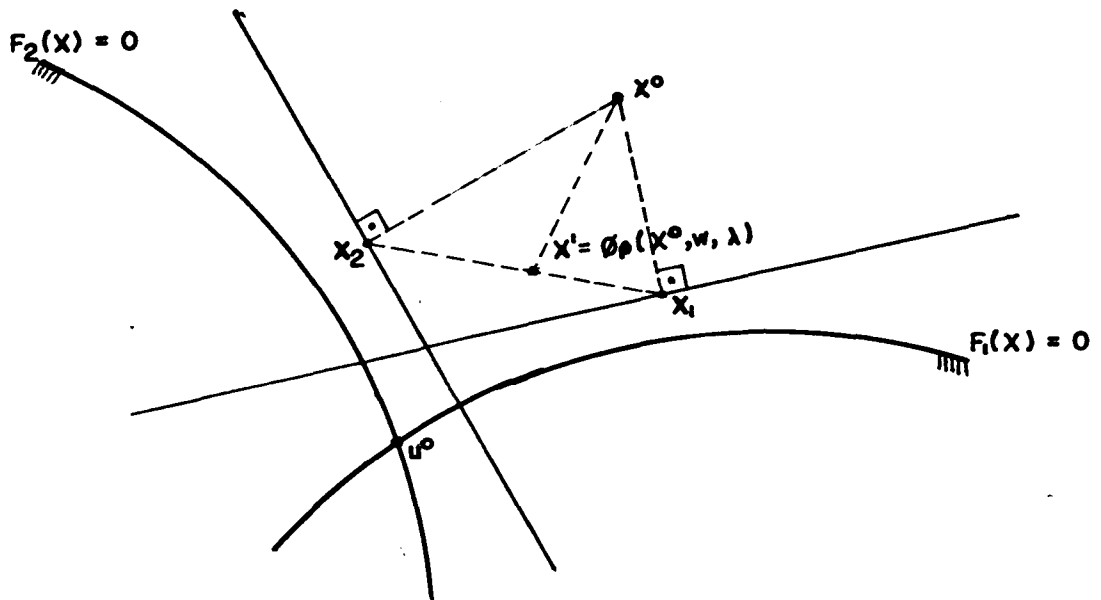


fig. 08

LEMA 5.5. Com  $G_p(x, w, \lambda)$  e  $\phi_p(x, w, \lambda)$  definidos como antes,  $\forall x \in D$

$w \in [\delta, 2-\delta]$ ,  $\lambda_i \in (0, 1)$  e  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ , temos que:

$$\|G_p(x, w, \lambda) - \phi_p(x, w, \lambda)\| \leq \psi^3(x) \|x - u^0\|, \quad \text{com } \lim_{x \rightarrow u^0} \psi^3(x) = 0.$$

PROVA. Suponhamos por indução que

$$\|\bar{x}_{i-1} - x_{i-1}\| \leq \psi_{i-1}^3(x) \|x - u^0\|, \quad \text{com } \lim_{x \rightarrow u^0} \psi_{i-1}^3(x) = 0.$$

Para  $i=1$ , a desigualdade é claramente verdadeira desde que

$$x_0 = \bar{x}_0 = x.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_i - x_i\| &= \|w_i J_i(u^0)^+ F_i(x) - w_i J_i(x)^+ F_i(x)\| \\ &\leq 2 \|J_i(u^0)^+ - J_i(x)^+\| \|F_i(x)\|. \end{aligned} \quad (13)$$

Porém, pelo teorema 2, do Capítulo II

$$\|J_i(u^0)^+ - J_i(x)^+\| \leq K_1 \|J_i(u^0) - J_i(x)\| \leq K_1 K \|x - u^0\|^p, \quad (14)$$

e pela continuidade de  $F$ ,

$$\|F(x)\| = \|F(x) - F(u^0)\| \leq K_2 \|x - u^0\|^p. \quad (15)$$

E a tese se segue de (13) - (15).  $\square$

TEOREMA 5.1. Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall x^0 \in B(u^0, \varepsilon)$  a sequência de finida por  $x^{k+1} = \phi_p(x^k, w_k, \lambda_k)$  converge para um ponto de  $E$ .

PROVA. Da maneira que os operadores  $G_p$  e  $\phi_p$  foram definidos, o Lema 5.5 garante que

$$\|G_p(x,w,\lambda) - \phi_p(x,w,\lambda)\| \leq \psi^3(x) \|x-u^0\| \text{ com } \lim_{x \rightarrow u^0} \psi^3(x) = 0,$$

$\forall x \in D, w \in [\delta, 2-\delta], \lambda_i \in (0,1)$  e  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  (fig. 9).

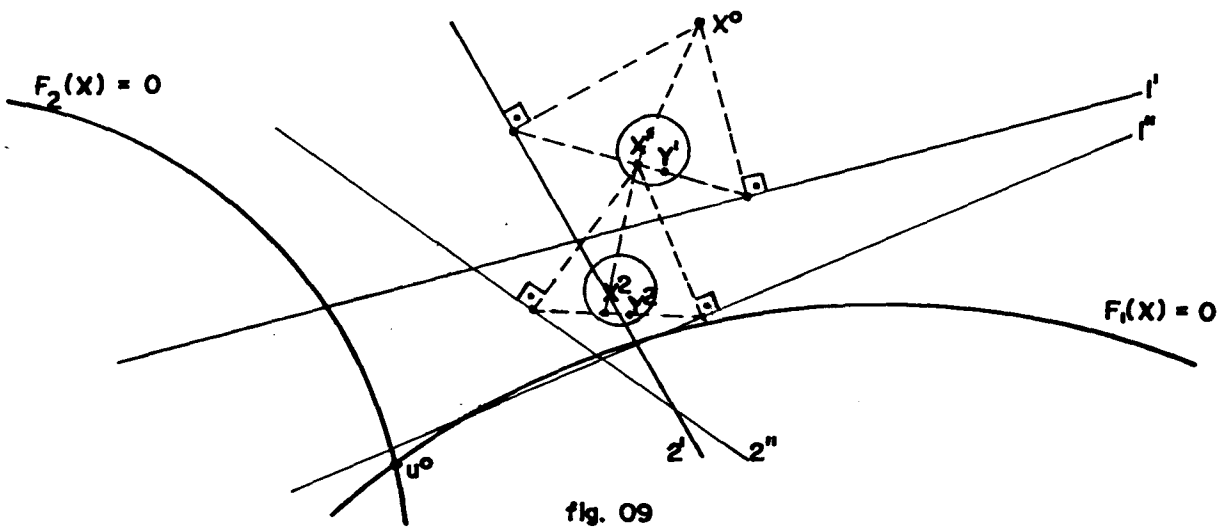


fig. 09

$$x^1 = \Theta_p(x^0, w, \lambda), \quad y^1 = \phi_p(x^0, w, \lambda)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|\phi_p(x, w, \lambda) - v(x)\| &= \|\phi_p(x, w, \lambda) - G_p(x, w, \lambda) + G_p(x, w, \lambda) - v(x)\| \\ &\leq \|\phi_p(x, w, \lambda) - G_p(x, w, \lambda)\| + \|G_p(x, w, \lambda) - v(x)\|. \end{aligned}$$

onde

$$\|\phi_p(x, w, \lambda) - G_p(x, w, \lambda)\| \leq \psi^3(x) \|x - u^0\| \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow u^0} \psi^3(x) = 0, \quad (16)$$

$$\forall x \in D, \quad w \in [\delta, 2-\delta], \quad \lambda_i \in (0, 1) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Por outro lado, o Lema 3.3 garante que se  $\phi_p$  e  $G_p$  cumprem a condição (16), existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x^0 \in B(u^0, \varepsilon)$

$$\|G_p(x, w, \lambda) - v(x)\| \leq \alpha \|x - v(x)\|, \quad \text{com} \quad \alpha < 1 \quad (17)$$

De (16) e (17),

$$\|\phi_p(x, w, \lambda) - v(x)\| \leq \alpha_2 \|x - v(x)\|, \quad \text{com} \quad \alpha_2 < 1.$$

Então a tese se segue como no Lema 3.1 trocando-se  $G(x, w)$  por  $\phi_p(x, w, \lambda)$ .  $\square$

## CAPÍTULO VI

### EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS

Seja  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$  não linear. Nós chamamos NKS e NKP aos métodos não lineares do tipo Kaczmarz, com controle sequencial e paralelo, respectivamente, implementado como segue:

#### 1. NKS

PASSO 1:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $w_i \in [\delta, 2-\delta]$ ,  $K_1 = 0$

PASSO 2:  $K_1 = K_1 + 1$ ;  $F_1 = 0$

PASSO 3: Para  $i=1,2,\dots,m$ , calcule os Passos 4 a 7

PASSO 4:  $F_1 = \max\{F_1, \|F_i(x)\|_\infty\}$

PASSO 5: Se  $F_1 < \epsilon$  vá para o Passo 7

PASSO 6:  $x \leftarrow x - w_i J_i(x)^+ F_i(x)$

PASSO 7: Continue

PASSO 8: Se  $F_1 < \epsilon$  declare "convergência" e pare, de outra forma volte ao Passo 2.

2. NKP

PASSO 1:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $w_i \in [\delta, 2-\delta]$ ,  $\lambda_i \in (0,1)$  e

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad K1 = 0$$

PASSO 2:  $K1 = K1 + 1$ ;  $F1 = 0$

PASSO 3: Para  $i = 1, 2, \dots, m$  calcule os Passos de 4 a 8

PASSO 4:  $F1 = \max\{F1, \|F_i(x)\|_\infty\}$

PASSO 5: Se  $F1 < \epsilon$  vá para o Passo 8

PASSO 6:  $x_i = x - w_i J_i(x) + F_i(x)$

PASSO 7:  $x \leftarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$

PASSO 8: Continue

PASSO 9: Se  $F1 < \epsilon$  declare "convergência" e pare, de outra forma volte ao Passo 2.

Foram testadas diversas funções-testes clássicas com diferentes pontos iniciais.

As experiências foram realizadas com um microcomputador CP-300, da Prológica, usando uma tolerância  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $w_i = 1$  e  $\lambda_i = 1/\text{número de blocos}$ .

Foram as seguintes as funções testes:



QUADRO DE FUNÇÕES

FUNÇÃO 1:  $n = 2$  (Rosembrock).

$$f_1(x) = 10(x_2 - x_1^2)$$

$$f_2(x) = 1 - x_1$$

CASO I:  $x^0 = (-1.2, 1)$

CASO II:  $x^0 = (-12, 10)$

CASO III:  $x^0 = (-120, 100)$

FUNÇÃO 2:  $n = 2$  (Freudenstein-Roth)

$$f_1(x) = -13 + x_1 + [(5-x_2)x_2 - 2]x_2$$

$$f_2(x) = -29 + x_1 + [(x_2+1)x_2 - 14]x_2$$

CASO I:  $x^0 = (0.5, -2)$

CASO II:  $x^0 = (5, -20)$

CASO III:  $x^0 = (50, -200)$

FUNÇÃO 3: N = 10 (Broyden)

$$f_1(x) = (3-2x_1)x_1 - 2x_2 + 1$$

$$f_n(x) = (3-2x_n)x_n - x_{n-1} + 1$$

$$f_i(x) = (3-2x_i) - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1 ,$$

CASO I:  $x^0 = (-1, \dots, -1)$

CASO II:  $x^0 = (-10, \dots, -10)$

CASO III:  $x^0 = (-100, \dots, -100)$

CASO 4: n = 4 (Powell)

$$f_1(x) = x_1 + 10x_2$$

$$f_2(x) = \sqrt{5}(x_3 - x_4)$$

$$f_3(x) = (x_1 - 2x_3)^2$$

$$f_4(x) = \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2$$

CASO I:  $x^0 = (3, -1, 0, 1)$

CASO II:  $x^0 = (30, -10, 0, 10)$

CASO III:  $x^0 = (300, -100, 0, 100)$

FUNÇÃO 5: n = 3 (Fletcher-Powell)

$$t = \text{atan}(x_2/x_1)/(2)$$

$$\theta = t \text{ se } x_1 \geq 0 \text{ e } \theta = t + 0.5 \text{ se } x_1 < 0$$

$$f_1(x) = 10(x_3 - 10)$$

$$f_2(x) = 10[(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 1]$$

$$f_3(x) = x_3$$

$$\text{CASO I: } x^0 = (-1, 0, 0)$$

$$\text{CASO II: } x^0 = (-10, 0, 0)$$

$$\text{CASO III: } x^0 = (-100, 0, 0)$$

FUNÇÃO 6: n = 5 (Brown)

$$f_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^n x_j - (n+1), \quad i=1,2,\dots,n-1$$

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j - 1$$

$$\text{CASO I: } x^0 = (0.5, \dots, 0.5)$$

$$\text{CASO II: } x^0 = (5, \dots, 5)$$

$$\text{CASO III: } x^0 = (50, \dots, 50)$$

FUNÇÃO 7: n = 3 (Brown-Conte)

$$f_1(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3^2 - 3$$

$$f_2(x) = -3x_1 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 - 1$$

$$f_3(x) = 25x_1x_2 + 20x_3 + 12$$

CASO I:  $x^0 = (0, 0, 0)$

CASO II:  $x^0 = (10, 10, 10)$

CASO III:  $x^0 = (100, 100, 100)$

FUNÇÃO 8: n = 6 (Deist-Sefor)

$$f_i(x) = \sum_{i \neq j} \cotg(\beta_i x_j)$$

com  $\beta = (0.02249, 0.02166, 0.02083, 0.02, 0.01918, 0.01835)$

CASO I:  $x^0 = (75, \dots, 75)$

CASO II:  $x^0 = (750, \dots, 750)$

CASO III:  $x^0 = (7500, \dots, 7500)$

FUNÇÃO 9: n = 3 (Martínez)

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4 - 3$$

$$f_2(x) = \text{sen}(\pi x_1/2) + \text{cos}(\pi x_2/2) + \log(x_3) - 1$$

$$f_3(x) = 1/x_1 + 2/x_2 + 1/x_3 - 2$$

CASO I:  $x^0 = (1, 1, 1.5)$

CASO II:  $x^0 = (10, 10, 15)$

CASO III:  $x^0 = (100, 100, 150)$

FUNÇÃO 10: n = 12

$$f_1(x) = c_1 x_3^2 + c_2 x_1 x_5 + c_3 x_1 + x_6^2 + c_4 - 10126.64252$$

$$f_2(x) = c_5 x_3 x_5 + c_6 x_2 x_5 + c_7 x_1 x_4 + x_7^2 - 1$$

$$f_3(x) = c_8 x_2 x_5 + c_9 x_1 x_4 + c_{10} x_3 x_5 + x_8^2 - 1$$

$$f_4(x) = c_{11} x_2^{-1} x_5^{-1} + c_{12} x_1 x_5^{-1} + c_{13} x_2^{-1} x_3^2 x_5^{-1} + x_9^2 - 1$$

$$f_5(x) = c_{14} x_2 x_5 + c_{15} x_1 x_2 + c_{16} x_3^2 + x_{10}^2 - 1$$

$$f_6(x) = c_{17} x_3^{-1} x_5^{-1} + c_{18} x_1 x_5^{-1} + c_{19} x_4 x_5^{-1} + x_{11}^2 - 1$$

$$f_7(x) = c_{20} x_3 x_5 + c_{21} x_1 x_3 + c_{22} x_3 x_4 + x_{12}^2 - 1$$

CASO I:  $x^0 = (78.62, 33.44, 31.07, 44.18, 35.22, 1, \dots, 1)$

CASO II:  $x^0 = (786.2, 334.4, 310.7, 441.8, 352.1, 10, \dots, 10)$

CASO III:  $x^0 = (7862, 3344, 3107, 4418, 3522, 100, \dots, 100)$

J	$c_j$	j	$c_j$	j	$c_j$
1	5.35785470	9	0.00009395	17	2275.132693
2	0.83568910	10	-0.00033085	18	-0.26680980
3	37.239239	11	1330.32937	19	-0.40583930
4	-40792.1410	12	-0.42002610	20	0.00029955
5	0.00002584	13	-0.30585975	21	0.00007992
6	-0.00006663	14	0.00024186	22	0.00012157
7	-0.00000734	15	0.00010159		
8	0.00853007	16	0.00007379		

FUNÇÃO 11:  $n = 7$

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 - 45$$

$$f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5^2 - 10$$

$$f_3(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 + x_6^2 - 5$$

$$f_4(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 + x_7^2 - 10$$

CASO I:  $x^0 = (0, 0, 0, 0, 1, \dots, 1)$

CASO II:  $x^0 = (0, 0, 0, 0, 10, \dots, 10)$

CASO III:  $x^0 = (0, 0, 0, 0, 100, \dots, 100)$

FUNÇÃO 12: n = 11

$$f_1(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + \\ + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7 - 700$$

$$f_2(x) = 7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 + x_8^2 - 282$$

$$f_3(x) = 2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 + x_9^2 - 127$$

$$f_4(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 + x_{10}^2$$

$$f_5(x) = 23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 + x_{11}^2 - 196$$

CASO I:  $x^0 = (1, 2, 3, 0, 1, 1, 1, \dots, 1)$

CASO II:  $x^0 = (10, 20, 0, 40, 0, 10, 10, 10, \dots, 10)$

CASO III:  $x^0 = (100, 200, 0, 400, 0, 100, 100, 100, \dots, 100)$

FUNÇÃO 13: n = 18

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 + (x_3 - 10)^2 + 4(x_4 - 5)^2 + \\ + (x_5 - 3)^2 + 2(x_6 - 1)^2 + 5x_7^2 + 7(x_8 - 11)^2 + 2(x_9 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + 71.95$$

$$f_2(x) = -8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_{10} + x_{11}^2 - 12$$

$$f_3(x) = -3x_1 + 6x_2 + 12(x_9 - 8)^2 - 7x_{10} + x_{12}^2$$

$$f_4(x) = 3(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 2x_3^2 - 7x_4 + x_{13}^2 - 120$$

$$f_5(x) = 5x_1^2 + 8x_2 + (x_3 - 6)^2 - 2x_4 + x_{14}^2 - 40$$

$$f_6(x) = .5(x_1 - 8)^2 + 2(x_2 - 4)^2 + 3x_5^2 - x_6 + x_{15}^2 - 30$$

$$f_7(x) = x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 - 2x_1x_2 + 14x_5 - 6x_6 + x_{16}^2$$

$$f_8(x) = 4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8 + x_{17}^2 - 105$$

$$f_9(x) = 10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 + x_{18}^2$$

CASO I: (2, 3, 5, 5, 1, 2, 7, 3, 6, 10, 1, ..., 1)

CASO II: (20, 30, 50, 50, 10, 20, 70, 30, 60, 100, 10, ..., 10)

CASO III: (200, 300, 500, 500, 100, 200, 700, 300, 600, 1000, 100, ..., 100)

FUNÇÃO 14: n = 37

$$\begin{aligned} f_1(x) = & x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 + (x_3 - 10)^2 + 4(x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 + \\ & + 2(x_5 - 1)^2 + 5x_7^2 + 7(x_8 - 11)^2 + 2(x_1 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + (x_{11} - 9)^2 + \\ & + 10(x_{12} - 1)^2 + 5(x_{13} - 7)^2 + 4(x_{14} - 14)^2 + 27(x_{15} - 1)^2 + x_{16}^4 + \\ & + (x_{17} - 2)^2 + 13(x_{18} - 2)^2 + (x_{19} - 3)^2 + x_{20}^2 - 70 \end{aligned}$$



$$f_2(x) = -8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_{10} + x_{21}^2 - 12$$

$$f_3(x) = -3x_1 + 6x_2 + 12(x_9-8)^2 - 7x_{10} + x_{22}^2$$

$$f_4(x) = 3(x_1-2)^2 + 4(x_2-3)^2 + 2x_3^2 - 7x_4 + x_{23}^2 - 120$$

$$f_5(x) = 5x_1^2 + 8x_2 + (x_3-6)^2 - 2x_4 + x_{24}^2 - 40$$

$$f_6(x) = .5(x_1-8)^2 + 2(x_2-4)^2 + 3x_5^2 - x_6 + x_{25}^2 - 30$$

$$f_7(x) = x_1^2 + 2(x_2-2) - 2x_1x_2 + 14x_5 - 6x_6 + x_{26}^2$$

$$f_8(x) = 4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8 + x_{27}^2 - 105$$

$$f_9(x) = 10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 + x_{28}^2$$

$$f_{10}(x) = x_1 + x_2 + 4x_{11} - 21x_{12} + x_{29}^2$$

$$f_{11}(x) = x_1^2 + 15x_{11} - 8x_{12} + x_{30}^2 - 28$$

$$f_{12}(x) = 4x_1 + 9x_2 + 5x_{13}^2 - 9x_{14} + x_{31}^2 - 87$$

$$f_{13}(x) = 3x_1 + 4x_2 + 3(x_{13}-6)^2 - 14x_{14} + x_{32}^2 - 10$$

$$f_{14}(x) = 14x_1^2 + 35x_{15} - 79x_{16} + x_{33}^2 - 92$$

$$f_{15}(x) = 15x_1^2 + 11x_{15} - 61x_{16} + x_{34}^2 - 54$$

$$f_{16}(x) = 5x_1^2 + 2x_2 + 9x_{17}^4 - x_{18} + x_{35}^2 - 68$$

$$f_{17}(x) = x_1^2 - x_2 + 19x_{19} - 20x_{20} + x_{36}^2 + 19$$

$$f_{18}(x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + x_{19}^2 - 30x_{20} + x_{37}^2$$

CASO I:  $x^0 = (2, 3, 5, 1, 2, 7, 3, 6, 10, 2, 2, 6, 15, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 1, \dots, 1)$

CASO II:  $x^0 = (20, 30, 50, 50, 10, 20, 70, 30, 60, 100, 20, 20, 60, 150, 10, 20, 10, 20, 10, 30, 10, \dots, 10)$

CASO III:  $x^0 = (200, 300, 500, 500, 100, 200, 700, 300, 600, 1000, 200, 200, 600, 1500, 100, 200, 100, 200, 100, 300, 100, \dots, 100)$ .

Os resultados são apresentados na tabela seguinte. O par "k,t" significa que o método convergiu em k iterações, usando t segundos de processamento. A tripla "k,t,F", significa que o método não convergiu em k iterações, usando t segundos de processamento, sendo o valor atual de F igual a  $\|F\|_{\infty}$ . Finalmente, "D,k" significa que o processamento foi interrompido na k-ésima iteração por motivo de não definição da função no ponto ou overflow.

## QUADRO DE RESULTADOS

FUNÇÃO	Nº DE BLOCOS	CASO	NKS	NKP	
1	2	I	26,31	183,181	
		II	49,57	150,205	
		III	59,69	434,677	
2	2	I	236,300,7.223	203,299,4.157	
		II	235,299,7.308	202,299,4.196	
		III	236,300,7.314	203,300,26.623	
3	2	I	4,33	35,271	
		II	7,53	41,315	
		III	10,72	44,338	
	4	4	I	12,81	77,602,1.254E(-3)
			II	14,94	77,601,6.678E(-3)
			III	15,100	77,600, 0.024
4	2	I	161,590	150,602, 0.018	
		II	165,599,6.548E(-3)	150,602, 2.339	
		III	166,601,0.619	150,601,232.98	

FUNÇÃO	Nº DE BLOCOS	CASOS	NKS	NKP
4	4	I	170,599,7.859E(-4)	143,599,0.156
		II	171,602,0.075	143,599,15.63
		III	171,600,7.539	143,602,1551.93
5	3	I	6,17	58,179
		II	7,20	65, 198
		III	7,20	71, 214
6	5	I	115,604,0.716	95,603,384681.0
		II	114,599,0.711	D, 42
		III	114,599,0.699	95,603,2.005 E (+12)
7	3	I	5,14	43, 119
		II	12,30	70, 193
		III	18,43	88, 242
8	2	I	49,601, 0.136	148, 1103
		II	49,605, 7.488	148,1105,3.726
		III	49,605, 0.810	135, 1008

FUNÇÃO	Nº DE BLOCOS	CASO	NKS	NKP
9	3	I	226,601,3.014	D, 51
		II	D, 6	D, 18
		III	D, 6	D, 18
10	7	I	19, 370	81,1817, 5.549E(-3)
		II	7, 130	69, 1568
		III	94,1803,2.016	81,1817, 0.032
11	4	I	84,707,3.378E(-3)	216,1803,0.022
		II	84,606,0.018	216,1802,0.053
		III	84,607,0.020	216,1802,0.060
12	5	I	48,605,28.09	123,1813,17.74
		II	48,605,0.076	123,1804,2.99
		III	48,605,0.843	123,1803,1.87
13	3	I	46,1813,4.63	86,3616,3.044
		II	46,1815,98.67	86,3617,35.89
		III	46,1813,11023.7	86,3615, 1007.49

FUNÇÃO	Nº DE BLOCOS	CASOS	NKS	NKP
13	9	I	58,1805,0.77	97,3613, 1.24
		II	58,1806,0.46	97,3613,28.41
		III	58,1804,26.29	97,3612,70.12
14	2	I	38,11056,8.47	37,11037,23.62
		II	38,11057,79.99	37,11040,38.15
		III	38,11050,944.30	37,11032,6313.43
	3	I	50,10905, 2.63	48,10829, 23.51
		II	50,10904,66.82	48,10829, 63.51
		III	50,10899,25101.9	48,10825,2278.51
	6	I	73,10808, .73	69,10918, 8.28
		II	73,10805,15.98	69,10904, 84.07
		III	73,10803,78.40	69.10895,3413.88
	9	I	85,10835, .597	77, 10854, 16.6
		II	85,10834,17.79	77, 10852, 87.58
		III	85,10834,14.56	77, 10851,637.19

FUNÇÃO	Nº DE BLOCOS	CASO	NKS	NKP
14	10	I	95,10849,1175	78,10812,27.96
		II	95,10848,5.74	78,10810,37.73
		III	95,10847,41.78	78,10808,216.33

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES

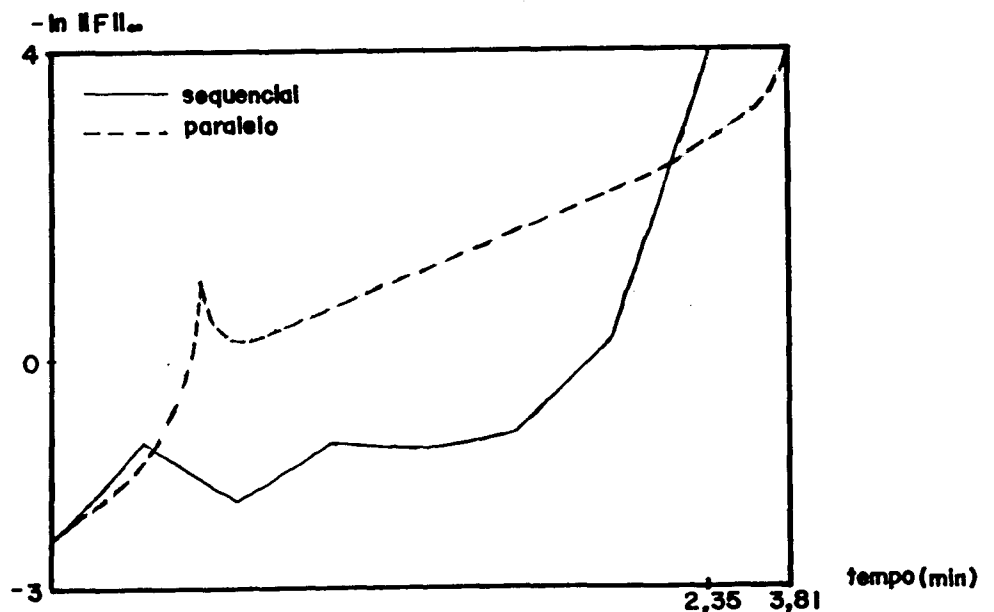
A tabela das experiências numéricas mostra se os métodos aplicados a determinada função convergem, em quanto tempo convergem, e quantas iterações são necessárias para se atingir a solução. Uma importante questão fica transparente: De que maneira os métodos convergem? Para esclarecer essa importante questão serão apresentados três casos a respeito de como os métodos progridem para a solução.

#### CASO 1

Função Nº 10

Ponto inicial: (78.62, 33.44, 31.07, 44.18, 35.22, 1, ..., 1)

Nº de blocos: 7



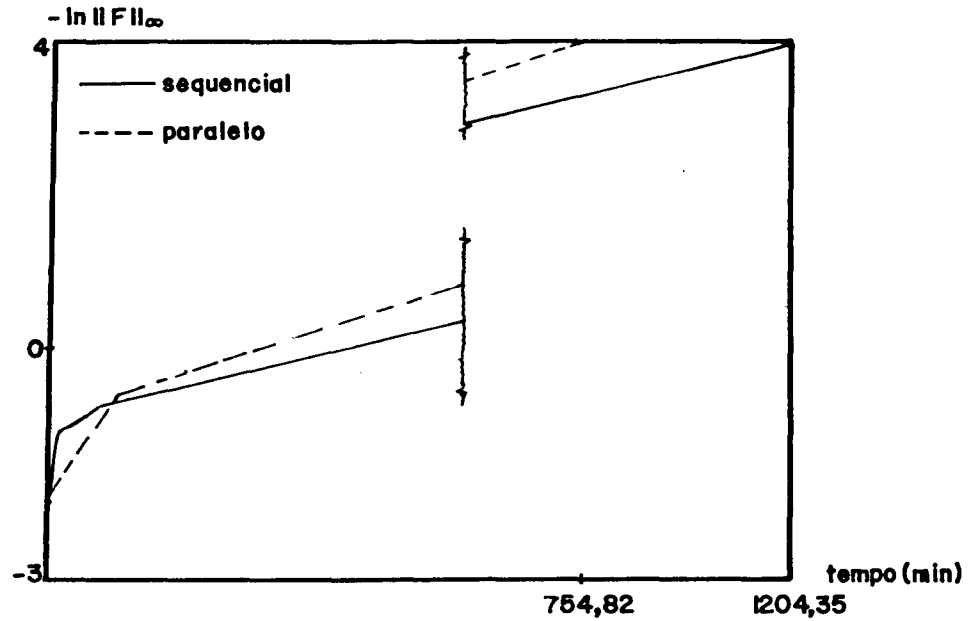


CASO 2

Função Nº 13

Ponto Inicial: (2, 3, 5, 5, 1, 2, 7, 3, 6, 10, 1, ..., 1)

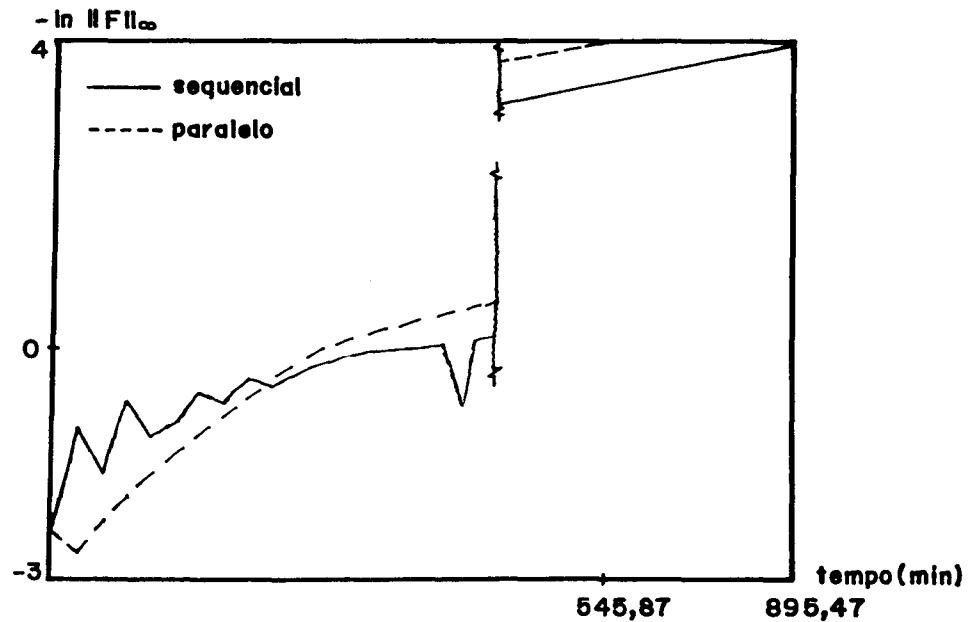
Nº de Blocos: 3

CASO 3

Função Nº 14

Ponto Inicial: (2, 3, 5, 5, 1, 2, 7, 3, 6, 10, 2, 2, 6, 15, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 1, ..., 1)

Nº de Blocos: 6



Muito provavelmente, a impressão que se tinha da leitura da tabela dos resultados numéricos era a de que o método sequencial tem performance superior à do método paralelo. A impressão é falsa. Ambos os métodos têm taxa de convergência geométrica.

Contudo, para efeitos práticos, tão importante quanto a taxa de convergência é a taxa média de convergência, que difere da anterior por esta refletir apenas o "pior caso". Mas, escolher para cada caso o método que apresenta o melhor "caso médio" é um desafio considerável. Duas importantes questões devem ser preliminarmente resolvidas:

i) Qual o tamanho ótimo dos blocos?

ii) Quais os parâmetros  $w_i, \lambda_i$ , ótimos?

Pois os dois métodos têm uma extensa região onde possuem o mesmo "caso médio". (fig. 10)

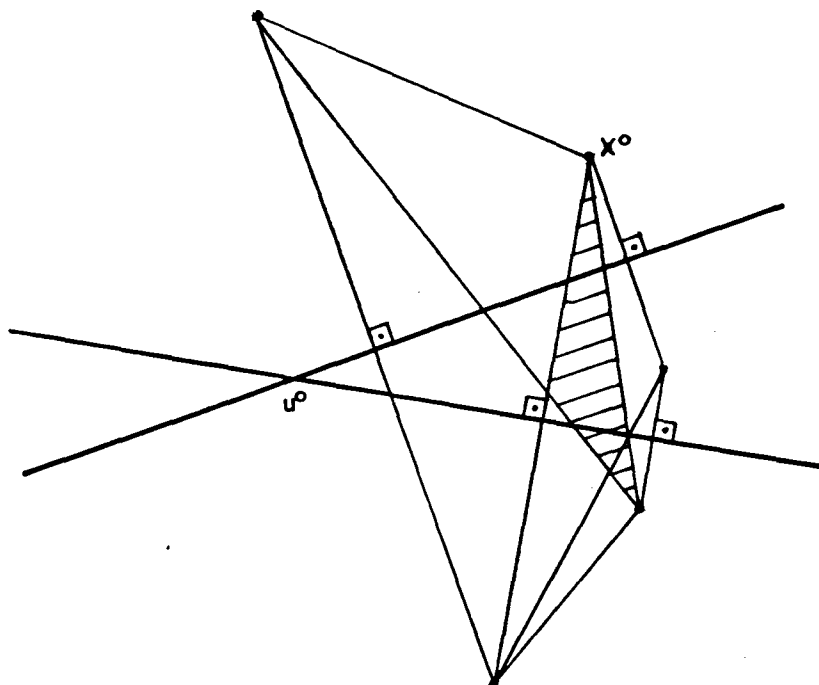


fig. 10

Outra questão que diz respeito a essa escolha é a questão da divisão do sistema não linear em blocos.

A introdução da versão por blocos nos métodos de ação-linha trouxe, sem dúvida alguma, grandes possibilidades a essa classe de algoritmos; Primeiro porque lhe deu grande flexibilidade na solução de problemas de grande porte e "porte enorme", e segundo porque "a versão por blocos do método de Kaczmarz não linear é interessante sob muitos pontos de vista. De um lado observa-se que em muitos sistemas de equações uma parte substancial do trabalho usado

para avaliar um componente é comum a avaliação de outras componentes, portanto, muito tempo pode ser economizado com uma escolha apropriada das componentes de cada bloco. De outro lado, um apropriado agrupamento das funções pode ser usado de maneira a acelerar a convergência. E por fim, em relação aos parâmetros, nós pensamos que a principal vantagem de sua introdução é a possibilidade de se considerar diferentes alternativas de aceleração do método". [ 5 ]

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CENSOR, Y.: Row-action Methods for Huge and Sparce Systems and their Application. SIAM, Review (1981), 23, 4, 444-446.
- [2] LAWSON, L.C., HANSON, J.R.: Solving Least Squares Problems. Prentice-Hall, 1974.
- [3] MEYN, K-H.: Solution of Undetermined Nonlinear Equations by Stationary Iteration Methods. Numer. Math. 42, 161-172 (1983).
- [4] MARTÍNEZ, J.M.: The Method of Successive Orthogonal Projection for Solving Nonlinear Simultaneous Equations. Por aparecer.
- [5] MARTINEZ, J.M.: An Accelerated Nonlinear Kaczmarz Method. Por aparecer.
- [6] MARTÍNEZ, J.M. e SAMPAIO, R.J.B. de: Parallel and Sequential Kaczmarz Methods for Solving Underdetermined Nonlinear Equations, por aparecer.
- [7] ORTEGA, J., RHEINBOLDT, W.C.: Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables. New York: Academic Press, 1970.