



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

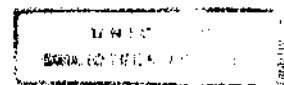
**CÁLCULO DOS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS
GERADOS PELA INTERAÇÃO DE UM CORPO
TRIDIMENSIONAL COM UMA ONDA
ELETROMAGNÉTICA USANDO O MÉTODO DOS
MOMENTOS E FUNÇÕES DE BASE SOLENOIDAIS**

Sérgio Antenor de Carvalho → autor

Tese de Doutorado

↓
D

1998 → ano



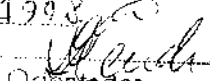


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

**CÁLCULO DOS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS
GERADOS PELA INTERAÇÃO DE UM CORPO
TRIDIMENSIONAL COM UMA ONDA
ELETROMAGNÉTICA USANDO O MÉTODO DOS
MOMENTOS E FUNÇÕES DE BASE SOLENOIDAIIS**

Autor: Sérgio Antenor de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. Leonardo de Souza Mendes

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por SÉRGIO ANTENOR
DE CARVALHO e aprovada pela Comissão
Julgada em 07/01/1998

Orientador

Tese submetida à Faculdade de
Engenharia Elétrica e de
Computação da Universidade
Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a
obtenção do Título de Doutor em
Engenharia Elétrica.

Campinas - SP
Abril - 1998

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C254c

Carvalho, Sérgio Antenor de

Cálculo dos campos eletromagnéticos gerados pela interação de um corpo tridimensional com uma onda eletromagnética usando o método dos momentos e funções de base solenoidais / Sérgio Antenor de Carvalho.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Leonardo de Souza Mendes.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Maxwell, Equações de. 2. Espalhamento (Física). 3. Espalhamento difrativo. 4. Equações integro-diferenciais - Soluções numéricas. 5. Métodos iterativos (Matemática) I. Mendes, Leonardo de Souza. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.

Leonardo da Vinci

Agradecimentos

- Ao Professor Leonardo de Souza Mendes, pelo tema de pesquisa, orientação e por ter acreditado em nosso trabalho.
- Aos Professores da FEEC (UNICAMP), que contribuíram para a minha formação.
- À minha esposa, pelo carinho e apoio, sem o qual não seria possível realizar este trabalho.
- Às minhas filhas, que são uma fonte de luz na minha vida, apontando o caminho a seguir.
- Aos meus pais, pela minha educação e formação profissional.
- Ao meu irmão, pelo companheirismo e apoio ao trabalho.
- Ao amigo João Crisóstomo Costa, pela acolhida em Campinas e apoio.
- Aos funcionários do DECOM/FEEC, por fornecerem as condições necessárias para desenvolver este trabalho.
- Aos funcionários do CENAPAD, por manterem o sistema computacional sempre “em linha”, permitindo a qualquer hora e dia a execução dos programas.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Acima de tudo a Deus.

À minha esposa Ercilene e

às minhas filhas Luiza e Clara

Resumo

Este trabalho usa uma formulação volumétrica para calcular os campos gerados pela interação entre um corpo tridimensional e uma onda eletromagnética. Usamos o princípio equivalente para obter, das equações de Maxwell, uma equação integral que relaciona as correntes volumétricas equivalentes ao campo incidente. O método dos momentos é aplicado para transformar a equação integral em um sistema de equações algébricas, que pode ser resolvido numericamente.

Para aplicar o método dos momentos expandimos as correntes equivalentes em termos de funções de base solenoidais. Estas funções não geram cargas espúrias dentro das regiões homogêneas do corpo, assim nós podemos aplicar o método a corpos com altos valores de constante dielétrica. As funções são definidas sobre tetraedros, o que permite uma melhor discretização do corpo. Até onde conhecemos, esta é a primeira vez que estas funções são usadas para analisar problemas harmônicos no tempo.

Um novo método iterativo de solução da equação integral é desenvolvido. O método consiste em dividir o corpo em partes, cada uma com a sua matriz momento, que determina o campo induzido por uma excitação. A solução completa é construída pela interação entre todas as partes, sendo o campo incidente a excitação inicial.

Apresentamos resultados mostrando a aplicabilidade da formulação com o uso das funções solenoidais e do método iterativo. Analisamos o espalhamento por um cubo dielétrico homogêneo e não homogêneo, esfera homogênea e não homogênea e por conjuntos de cubos. Os resultados concordaram com aqueles disponíveis na literatura e com os obtidos com o uso de funções pulso. No caso da esfera comparamos os resultados com os obtidos através da série de Mie, com uma boa concordância.

Abstract

This work deals with the use of a volume formulation to calculate the field distribution of tridimensional bodies. We use the equivalent principle to obtain, from Maxwell's equations, an integral equation that relates the equivalent volume polarization currents to the incident field. The method of moments is applied to transform the integral equation into a system of algebraic equations that can be solved numerically.

To apply the method of moments we first expand the equivalent currents in terms of solenoidal basis functions. These functions do not generate spurious charges inside the homogeneous portion of body so we can apply this method to the bodies with high values of dielectric constant. The functions are defined on tetrahedrons permitting a better fitting of the object to be discretized. As far as we know, this is the first time that these functions are used to analyze time-harmonic problems.

A new iterative method of solution of the integral equation is developed. The method consists in the division of the body in parts, with every part being characterized by a matrix moment that determines the induced field by excitation. The entire solution is built by interaction among the parts with the incident field like initial excitation.

We present results showing the effectiveness of the formulation with the use of solenoidal functions. We analyze scattering by homogeneous and inhomogeneous dielectric cube, homogeneous and inhomogeneous sphere and by ensemble of cubes. The results are in good agreement with results found in the published literature and with those obtained using pulse basis functions. In the case of the sphere we compare the results with those obtained using the Mie's series.

Sumário

Lista de Tabelas	V
Lista de Figuras	VI
1. Introdução	1
1.1 Tema de pesquisa	1
1.2 Equações integrais	4
1.3 Método dos momentos	12
1.4 Funções de base solenoidais definidas sobre triângulos e tetraedros	16
1.5 Organização da tese	21
2. Obtenção das equações integro-diferenciais e método de solução ...	23
2.1 Equação integral de volume	23
2.2 Aplicação do método dos momentos	29
2.3 Funções de base solenoidais definidas sobre tetraedros	33
3. Aplicação da equação integral ao corpo homogêneo	43
3.1 Corpo dielétrico homogêneo	43
3.2 Campo espalhado por um cubo homogêneo	50
3.3 Campo espalhado e campo interno de uma esfera homogênea	64
3.4 Campo espalhado por um conjunto de cubos	79
4. Aplicação da equação integral ao corpo não homogêneo	90
4.1 Campo espalhado por um cubo não homogêneo	90
4.2 Campo espalhado e campo interno de uma esfera duas camadas	98

4.3 Campo espalhado por um conjunto de cubos distintos	120
5. Método iterativo de solução da equação integral	128
5.1 Definição do método iterativo de solução da equação integral	128
5.2 Campo espalhado e campo interno de um cubo homogêneo pelo método iterativo	135
5.3 Campo espalhado e campo interno de uma esfera homogênea pelo método iterativo	149
5.4 Campo espalhado e campo interno de uma esfera duas camadas pelo método iterativo	162
5.5 Campo espalhado e campo interno de um conjunto de cubos homogêneos pelo método iterativo	175
5.6 Campo espalhado e campo interno de um conjunto de cubos distintos pelo método iterativo	185
5.7 Análise do método iterativo	193
6. Conclusões	197
Referências Bibliográficas	200
Apêndice A - Avaliação das integrais de volume e superfície	205
Apêndice B - Primitivas de discretização	211
Apêndice C - Discretização da esfera	217

Lista de tabelas

Tabela 2.1 Exemplos de funções de base	39
Tabela 3.1 Níveis de discretização de um cubo	63
Tabela 3.2 Comportamento do erro na análise de esferas homogêneas	78
Tabela 4.1 Comportamento do erro na análise de esferas duas camadas	119
Tabela A.1 Fórmula de integração numérica para triângulo e tetraedro	209
Tabela C.1 Definições dos números de pontos em r , θ e ϕ	220

Lista de figuras

Figura 1.1 Espalhamento de uma onda eletromagnética por um corpo	2
Figura 1.2 Mapa conceitual do método dos momentos generalizado	15
Figura 2.1 Corpo tridimensional iluminado por uma onda eletromagnética ...	24
Figura 2.2 Definição de uma função de base solenoidal	34
Figura 2.3 Exemplo de funções de base geradas por tetraedros	38
Figura 2.4 Exemplos de conjuntos de funções de base	42
Figura 3.1 Cubo dielétrico iluminado por uma onda plana	51
O sistema de coordenadas coincide com o centro do cubo	
Figura 3.2 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta	
0.2 λ e $\epsilon_c = 4.0$	52
funções solenoidais, 384 tetraedros e 480 incógnitas	
Sarkar e diádica, 512 cubos e 1536 incógnitas	
Figura 3.3 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta	
0.2 λ e $\epsilon_c = 9.0$	54
funções solenoidais, 384 tetraedros e 480 incógnitas	
Sarkar e diádica, 512 cubos e 1536 incógnitas	
Figura 3.4 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta	
0.2 λ e $\epsilon_c = 1.0 - j1000.0$	55
funções solenoidais, 384 tetraedros e 480 incógnitas	
Sarkar e diádica, 512 cubos e 1536 incógnitas	

Figura 3.5 Campo espalhado pelo cubo de aresta 0.1λ e $\epsilon_c = 16.0$	56
funções solenoidais 1, 384 tetraedros e 480 incógnitas	
funções solenoidais 2, 750 tetraedros e 900 incógnitas	
funções solenoidais 3, 1296 tetraedros e 1512 incógnitas	
funções solenoidais 4, 2058 tetraedros e 2352 incógnitas	
Figura 3.6 Campo espalhado pelo cubo de aresta 0.1λ e $\epsilon_c = 25.0$	57
funções solenoidais 1, 384 tetraedros e 480 incógnitas	
funções solenoidais 2, 750 tetraedros e 900 incógnitas	
funções solenoidais 3, 1296 tetraedros e 1512 incógnitas	
funções solenoidais 4, 2058 tetraedros e 2352 incógnitas	
Figura 3.7 Campo espalhado pelo cubo de aresta 0.1λ e $\epsilon_c = 16.0$	59
diádica 1, 512 cubos e 1536 incógnitas	
diádica 2, 729 cubos e 2187 incógnitas	
diádica 3, 1000 cubos e 3000 incógnitas	
Figura 3.8 Campo espalhado pelo cubo de aresta 0.1λ e $\epsilon_c = 25.0$	60
diádica 1, 512 cubos e 1536 incógnitas	
diádica 2, 729 cubos e 2187 incógnitas	
diádica 3, 1000 cubos e 3000 incógnitas	
Figura 3.9 Campo espalhado pelo cubo de aresta 0.1λ e $\epsilon_c = 16.0$	61
funções solenoidais, 2058 tetraedros e 2352 incógnitas	
diádica, 1000 cubos e 3000 incógnitas	
Figura 3.10 Campo espalhado pelo cubo de aresta 0.1λ e $\epsilon_c = 25.0$	62
funções solenoidais, 2058 tetraedros e 2352 incógnitas	
diádica, 1000 cubos e 3000 incógnitas	

Figura 3.11 Esfera homogênea iluminada por uma onda plana	65
Figura 3.12 Esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\varepsilon_r = 4,0$ discretizada com 520 tetraedros ..	66
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.13 Esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\varepsilon_r = 4,0$ discretizada com 2128 tetraedros.	67
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.14 Esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\varepsilon_r = 4,0$ discretizada com 2128 tetraedros.	68
(a) campo interno do 1 ^o ao 1064 ^o tetraedro	
(b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno do 1065 ^o ao 2128 ^o tetraedro	
(d) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.15 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 4,0$ discretizada com	
520 tetraedros	70
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.16 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$ discretizada com	
520 tetraedros	71
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.17 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 16,0$ discretizada com	
520 tetraedros	72
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie	

Figura 3.18 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$ discretizada com 520 tetraedros	73
(a) bistatic cross section	(b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno	(d) erro em relação a série de Mie
Figura 3.19 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$ discretizada com 2128 tetraedros	74
(a) bistatic cross section	(b) erro em relação a série de Mie
Figura 3.20 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$ discretizada com 2128 tetraedros	75
(a) campo interno do 1 ^o ao 1064 ^o tetraedro	
(b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno do 1065 ^o ao 2128 ^o tetraedro	
(d) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.21 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 40,0$ discretizada com 2128 tetraedros	76
(a) bistatic cross section	(b) erro em relação a série de Mie
Figura 3.22 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 40,0$ discretizada com 2128 tetraedros	77
(a) campo interno do 1 ^o ao 1064 ^o tetraedro	
(b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno do 1065 ^o ao 2128 ^o tetraedro	
(d) erro em relação a série de Mie	
Figura 3.23 Conjunto de cubos de $0,1\lambda$ sobre o qual incide uma onda plana propagando na direção +z	80

Figura 3.24 Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta 0,1λ, d = 0,001λ e ε _c = 4,0	81
funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas	
diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas	
Figura 3.25 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta 0,1λ, d = 0,001λ e ε _c = 4,0	82
funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas	
diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas	
Figura 3.26 Campo espalhado por quatro cubos homogêneos de aresta 0,1λ, d = 0,001λ e ε _c = 4,0	83
funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas	
diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas	
Figura 3.27 Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta 0,1λ, d = 0,1λ e ε _c = 9,0	84
funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas	
diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas	
Figura 3.28 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta 0,1λ, d = 0,1λ e ε _c = 9,0	85
funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas	
diádica - 648 cubos, 1944 incógnitas	
Figura 3.29 Campo espalhado por quatro cubos homogêneos de aresta 0,1λ, d = 0,1λ e ε _c = 9,0	86
funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas	
diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas	

Figura 3.30 Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$	87
funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas	
diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas	
Figura 3.31 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$	88
funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas	
diádica - 648 cubos, 1944 incógnitas	
Figura 3.32 Campo espalhado por quatro cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$	89
funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas	
diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas	
Figura 4.1 Cubo dielétrico não homogêneo em que incide uma onda plana	91
O sistema de coordenadas coincide com o centro do cubo	
Figura 4.2 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.1 aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_1 = 4,0$ $\epsilon_2 = 9,0$	92
funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas	
Figura 4.3 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.1 aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_1 = 2,0$ $\epsilon_2 = 9,0$	93
funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas	
Figura 4.4 Cubo dielétrico não homogêneo em que incide uma onda plana	95
Sistema de coordenadas coincide com o centro dos cubos. aresta do cubo interno a_1	

aresta do cubo externo a_2

- Figura 4.5 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.4
 $a_1 = 0,1\lambda$, $a_2 = 0,2\lambda$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ 96
funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas
diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas
- Figura 4.6 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.4
 $a_1 = 0,1\lambda$, $a_2 = 0,2\lambda$, $\epsilon_2 = 9,0$ e $\epsilon_1 = 4,0$ 97
funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas
diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas
- Figura 4.7 Esfera não homogênea iluminada por uma onda plana 99
O sistema de coordenadas coincide com o centro da esfera.
- Figura 4.8 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ 100
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie
- Figura 4.9 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$ 101
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie
- Figura 4.10 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 16,0$ 103
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie
- Figura 4.11 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 16,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ 104
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie
- Figura 4.12 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 16,0$ e $\epsilon_2 = 25,0$ 105

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.13 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 16,0$ 106

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.14 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$ 107

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.15 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ 108

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.16 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 40,0$ 109

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.17 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 40,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ 110

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.18 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$ discretizada
com 1800 tetraedros 111

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

Figura 4.19 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$ discretizada
com 1800 tetraedros 112

- (a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro
- (b) erro em relação a série de Mie

- (c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro
- (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.20 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ discretizada com 1800 tetraedros 113

- (a) bistatic cross section
- (b) erro em relação a série de Mie

Figura 4.21 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ discretizada com 1800 tetraedros 114

- (a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro
- (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro
- (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.22 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 40,0$ discretizada com 1800 tetraedros 115

- (a) bistatic cross section
- (b) erro em relação a série de Mie

Figura 4.23 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 40,0$ discretizada com 1800 tetraedros 116

- (a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro
- (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro
- (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.24 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 40,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ discretizada com 1800 tetraedros 117

- (a) bistatic cross section
- (b) erro em relação a série de Mie

Figura 4.25 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 40,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ discretizada com 1800 tetraedros 118

- (a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro
- (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro
- (d) erro em relação a série de Mie

Figura 4.26 Conjunto de cubos de $0,1\lambda$ sobre o qual incide uma onda plana propagando na direção $+z$ 121

Figura 4.27 Campo espalhado por dois cubos de aresta $0,1\lambda$,
 $d = 0,1\lambda$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ 122
 funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas
 diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

Figura 4.28 Campo espalhado por três cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$,
 $\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 9,0$ e $\epsilon_3 = 14,0$ 123
 funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas
 diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas

Figura 4.29 Campo espalhado por quatro cubos de aresta $0,1\lambda$,
 $d = 0,1\lambda$, $\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 8,0$, $\epsilon_3 = 12,0$ e $\epsilon_4 = 16,0$ 124
 funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas
 diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas

Figura 4.30 Campo espalhado por dois cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1,0\lambda$,
 $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ 125
 funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas
 diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

Figura 4.31 Campo espalhado por três cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1,0\lambda$, $\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 9,0$ e $\epsilon_3 = 14,0$ 126	126
funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas	
diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas	
Figura 4.32 Campo espalhado por quatro cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$, $\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 8,0$, $\epsilon_3 = 12,0$ e $\epsilon_4 = 16,0$ 127	127
funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas	
diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas	
Figura 5.1 Significado físico do processo iterativo 133	133
Figura 5.2 Mapa conceitual do método iterativo 134	134
Figura 5.3 Divisão de um cubo em duas e oito partes 136	136
Figura 5.4(a) Campo espalhado de um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$ 137	137
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas	
Figura 5.4(b) Campo interno de um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$ 138	138
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas	
Figura 5.4(c) Campo interno de um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$ 139	139
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas	

Figura 5.5(a) Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda e \epsilon_c = 4,0$	140
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas	
Figura 5.5(b) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 4,0$	
141	
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas	
Figura 5.5(c) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 4,0$	142
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas	
Figura 5.6 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0,2 \lambda e \epsilon_c = 9,0$	143
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas	
Figura 5.7(a) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$	144
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas	
Figura 5.7(b) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$	145
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas	
Figura 5.8 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0.2 \lambda e \epsilon_c = 9.0$	146
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	

método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas	
Figura 5.9(a) Campo interno de um cubo com 0.2λ de aresta e $\epsilon_c = 9.0$	147
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas	
Figura 5.9(b) Campo interno de um cubo com 0.2λ de aresta e $\epsilon_c = 9.0$	148
método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas	
método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas	
Figura 5.10 Divisão da esfera para aplicar o método iterativo	150
Figura 5.11 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$ dividida em duas partes	151
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie	
Figura 5.12 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$ dividida em duas partes	152
(a) campo interno da parte 1 (b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno da parte 2 (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 5.13 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$ dividida em duas partes	153
(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de	
Figura 5.14 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$ dividida em duas partes	154
(a) campo interno da parte 1 (b) erro em relação a série de Mie	
(c) campo interno da parte 2 (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 5.15 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$	156
(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie	
(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 5.16(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$	157
Da 1ª à 4ª parte.	

Figura 5.16(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 4,0$	158
Da 5 ^a à 8 ^a parte.	
Figura 5.17 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$ dividida em duas partes	159
(a) bistatic cross section – método direto	(b) erro em relação a série de Mie
(c) bistatic cross section – método iterativo	(d) erro em relação a série de Mie
Figura 5.18(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$	160
Da 1 ^a à 4 ^a parte.	
Figura 5.18(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$	161
Da 5 ^a à 8 ^a parte.	
Figura 5.19 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 9,0$	163
(a) bistatic cross section – método direto	(b) erro em relação a série de Mie
(c) bistatic cross section – método iterativo	(d) erro em relação a série de Mie
Figura 5.20(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e	
$\varepsilon_1 = 4,0$ $\varepsilon_2 = 9,0$. Da 1 ^a à 4 ^a parte	164
Figura 5.20(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e	
$\varepsilon_1 = 4,0$ $\varepsilon_2 = 9,0$. Da 5 ^a à 8 ^a parte	165
Figura 5.21 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_1 = 9,0$ $\varepsilon_2 = 4,0$	166
(a) bistatic cross section – método direto	(b) erro em relação a série de Mie
(c) bistatic cross section – método iterativo	(d) erro em relação a série de Mie
Figura 5.22(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e	
$\varepsilon_1 = 9,0$ $\varepsilon_2 = 4,0$. Da 1 ^a à 4 ^a parte	167
Figura 5.22(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e	
$\varepsilon_1 = 9,0$ $\varepsilon_2 = 4,0$ Da 5 ^a à 8 ^a parte	168

Figura 5.23 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$	169
(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie	
(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 5.24(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$. Da 1 ^a à 4 ^a parte	170
Figura 5.24(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$. Da 5 ^a à 8 ^a parte	171
Figura 5.25 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$	172
(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie	
(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie	
Figura 5.26(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$. Da 1 ^a à 4 ^a parte	173
Figura 5.26(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$. Da 5 ^a à 8 ^a parte.....	174
Figura 5.27 Campo espalhado por dois cubos iguais de aresta $0,1 \lambda$, $d = 0,1\lambda$ e $\varepsilon_c = 9,0$	176
método direto - 768 tetraedros e 960 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas	
Figura 5.28 Campo interno de dois cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\varepsilon_c = 9,0$	177
(a) e (c) campo interno do 1 ^o e 2 ^o cubo, respectivamente.	
(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.	

Figura 5.29 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta 0.1λ , $d = 0.1\lambda$ e $\epsilon_c = 9.0$	178
método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas	
método iterativo - três partes com 384 cubos e 480 incógnitas	
Figura 5.30 Campo interno de três cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$	179
(a), (c) e (f) campo interno do 1 ^o , 2 ^o e 3 ^o cubo, respectivamente.	
(b), (d) e (f) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.	
Figura 5.31 Campo espalhado por dois cubos iguais de aresta 0.1λ , $d = 1\lambda$ e $\epsilon_c = 9.0$	181
método direto - 768 tetraedros e 960 incógnitas	
método iterativo - duas partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas	
Figura 5.32 Campo interno de dois cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$	182
(a) e (c) campo interno do 1 ^o e 2 ^o cubo, respectivamente.	
(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.	
Figura 5.33 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta 0.1λ , $d = 1.0\lambda$ e $\epsilon_c = 9.0$	183
método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas	
método iterativo - três partes com 384 cubos e 480 incógnitas	
Figura 5.34 Campo interno de três cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$	184
(a), (c) e (f) campo interno do 1 ^o , 2 ^o e 3 ^o cubo, respectivamente.	
(b), (d) e (f) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.	

Figura 5.35 Campo espalhado por dois cubos distintos de aresta

0.1λ , $d = 1\lambda$, $\epsilon_1 = 4.0$ e $\epsilon_2 = 9.0$ 186

método direto - 768 tetraedros e 960 incógnitas

método iterativo - duas partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

Figura 5.36 Campo interno de dois cubos com $0,1\lambda$ de aresta e

$\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ 187

(a) e (c) campo interno do 1^o e 2^o cubo, respectivamente.

(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

Figura 5.37 Campo espalhado por três cubos distintos de aresta

0.1λ , $d = 1\lambda$, $\epsilon_1 = 4.0$, $\epsilon_2 = 9.0$ e $\epsilon_3 = 14.0$ 188

método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

método iterativo - três partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

Figura 5.38 Campo interno de quatro cubos com $0,1\lambda$ de aresta e

$\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 9,0$ e $\epsilon_3 = 14,0$ 189

(a), (c) e (f) campo interno do 1^o , 2^o e 3^o cubo, respectivamente

(b), (d) e (f) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

Figura 5.39 Campo espalhado por quatro cubos distintos de aresta

0.1λ , $d = 1\lambda$, $\epsilon_1 = 4.0$, $\epsilon_2 = 8.0$, $\epsilon_3 = 12.0$ e $\epsilon_4 = 16.0$ 190

método direto - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas

método iterativo - quatro partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

Figura 5.40(a) Campo interno de quatro cubos com $0,1\lambda$ de aresta e

$\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 8,0$, $\epsilon_3 = 12,0$ e $\epsilon_4 = 16,0$ 191

(a) e (c) campo interno do 1^o e 2^o cubo, respectivamente.

(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

Figura 5.40(b) Campo interno de quatro cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 8,0, \varepsilon_3 = 12,0$ e $\varepsilon_4 = 16,0$	192
(e) e (g) campo interno do $3^{\text{º}}$ e $4^{\text{º}}$ cubo, respectivamente.	
(f) e (h) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.	
Figura 5.41 Processo de cálculo da corrente equivalente	194
Figura A.1 Vetores de definição das regiões de integração	207
Figura A.2 Definição das quantidades da equação (A.11)	210
Figura A.3 Definição das quantidades da equação (A.12)	210
Figura B.1 Conjunto de oito pontos no espaço usados na tetraedrização	212
Figura B.2 Cubo discretizado por cinco tetraedros - discretização do tipo 1 .	213
Figura B.3 Cubo discretizado por cinco tetraedros - discretização do tipo 2 .	214
Figura B.4 Forma de usar as discretizações do tipo 1 e 2	215
Figura B.5 Cubo discretizado por seis tetraedros	216
Figura C.1 Definição dos pontos para a discretização da esfera	218
Figura C.2 Discretização entre duas camadas da esfera	219
Figura C.3 Discretização entre a primeira camada e o centro da esfera	220

Capítulo 1

Introdução

1.1 Tema de pesquisa

A interação de um corpo com uma onda eletromagnética consiste na absorção de parte da energia da onda incidente pelo corpo, e na subsequente emissão de uma parcela da energia absorvida. Este fenômeno é denominado *espalhamento* e está relacionado com as propriedades eletromagnéticas da matéria que constitui o corpo. As propriedades eletromagnéticas são a permissividade elétrica ϵ , a permeabilidade magnética μ e a condutividade σ , que são propriedades macroscópicas, isto é, representam o comportamento macroscópico da matéria. Estas propriedades decorrem de como o campo eletromagnético interage com os átomos e moléculas que formam a matéria, isto é, o comportamento microscópico da matéria.

Para entender a física do espalhamento não precisamos considerar que propriedade eletromagnética apresenta o material que constitui o corpo, precisamos somente considerar o comportamento microscópico do material. Como toda matéria é composta de cargas elétricas discretas, elétrons e prótons, se um corpo é iluminado por uma onda eletromagnética as cargas elétricas dentro dele são colocadas em movimento oscilatório pelo campo elétrico da onda incidente e cargas elétricas aceleradas emitem energia eletromagnética em todas as direções, Figura 1.1. Esta radiação secundária é denominada *radiação espalhada*. A carga elementar excitada pode transformar parte da energia

eletromagnética incidente em energia de outra forma, como por exemplo energia térmica. Este processo de transformação é denominado de *absorção*. Espalhamento e absorção não são processos independentes e estão presentes na interação da onda eletromagnética com um corpo.

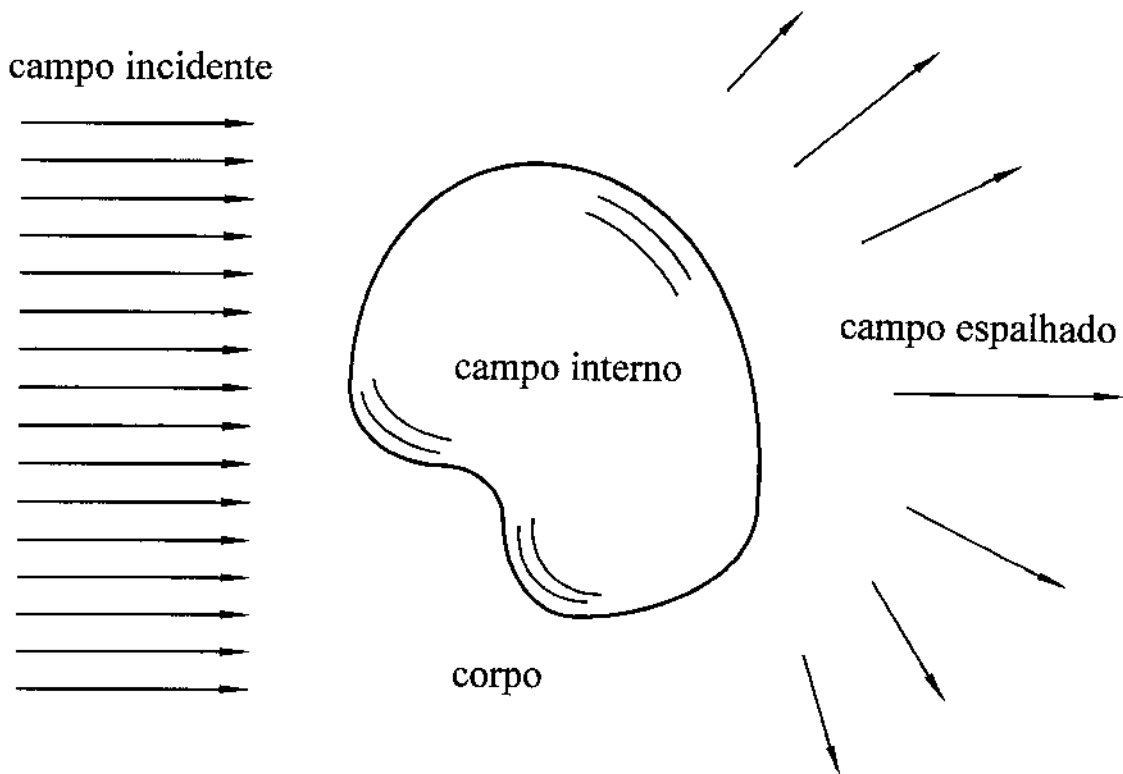


Figura 1.1 Espalhamento de uma onda eletromagnética por um corpo.

O estudo da interação eletromagnética de corpos tridimensionais é importante para muitos problemas de engenharia, alguns exemplos são:

- interferência eletromagnética;
- acoplamento entre antenas de comunicação e corpos próximos;
- aplicações médicas (dosimetria, hipertermia e imagem);
- análise e detecção de objetos;
- projeto e análise de antenas de circuito impresso;
- prospecção eletromagnética.

Quando a maior dimensão do corpo, D , não é pequena ou grande se comparada ao comprimento de onda da fonte, λ , métodos assintóticos não podem ser usados para resolver o problema. Nesta região intermediária, denominada *região de ressonância*, uma solução rigorosa das equações de Maxwell é necessária.

Nesta tese uma equação integral de volume, obtida das equações de Maxwell, é usada para resolver o problema. Com o uso da equação integral passamos de um problema em um domínio ilimitado para um sobre um domínio limitado que, em nosso caso, é o volume ocupado pelo corpo. A equação integral pode, teoricamente, ser aplicada sem levar em conta a razão D/λ , mas é limitada, do ponto de vista computacional, quando $D \gg \lambda$. Para resolver numericamente a equação integral aplicamos o método dos momentos com funções apropriadas a representar o campo interno induzido no corpo, estas funções levam em conta a característica solenoidal ou não do campo interno. Uma nova abordagem de solução iterativa da equação integral é proposta e desenvolvida. Esta abordagem consiste em dividir o corpo em partes e representando o comportamento eletromagnético de cada parte por uma matriz momento. A solução completa é obtida pela interação entre todas as partes.

1.2 Equações integrais

Para calcular os campos gerados pela interação de um corpo tridimensional com uma onda eletromagnética é possível formular uma equação integral de volume (**EIV**), onde as incógnitas são correntes definidas no volume do corpo, ou uma equação integral de superfície (**EIS**), onde as incógnitas são correntes definidas sobre a superfície do corpo.

A **EIS**, usualmente definida pela aplicação do princípio da equivalência de superfície [1,2], apresenta-se em três formas:

- quando impomos que a componente tangencial do campo elétrico total seja zero na superfície do corpo temos a equação integral de campo elétrico (**EICE**) para um corpo condutor;
- quando é a componente tangencial do campo magnético total que é imposta como sendo zero na superfície do corpo temos a equação integral de campo magnético (**EICM**) para um corpo condutor;
- quando impomos as duas condições anteriores temos a equação integral de campo combinado (**EICC**) para um corpo genérico.

A **EICE** pode ser aplicada a corpos condutores fechados ou abertos. Resultados considerando um corpo de revolução metálico são apresentados em [3] para esfera de raio $1,0\lambda$, uma barra cilíndrica e um cone terminado com esferas. Em [4] são apresentados os casos de uma esfera de raio $0,2\lambda$ iluminada por uma onda plana, excitada na fenda equatorial com $E_\theta = \delta(\theta - \pi/2)/r$ ou $E_\phi = \delta(\theta - \pi/2)/r$. Também é analisado o caso de um cone-esfera com as mesmas excitações e iluminação feitas com a esfera. Para calcular o

espalhamento por superfícies de forma arbitrária (fechada e aberta) [5] usou a **EICE** e funções de base definidas sobre triângulos, apresentando resultados para um quadrado condutor de lado $1,0\lambda$ e uma esfera condutora de raio $0,2\lambda$.

A **EICM** só é aplicada a corpos condutores de superfície fechada. Em [6] ela foi aplicada a uma esfera, cilindro e cone. Os resultados foram comparados com os obtidos com as outras duas equações integrais. A **EICE** e a **EICM** apresentaram soluções degeneradas na vizinhança da ressonância da cavidade devido a não terem solução única. A **EICC** não apresenta soluções degeneradas porque tem solução única.

Para corpos tridimensionais homogêneos e não homogêneos é usada a **EICC** para calcular os campos gerados pela incidência de uma onda eletromagnética. Em [7] corpos dielétricos com perdas e de revolução foram estudados. As correntes elétricas e magnéticas de superfície são expandidas em termos de uma série de Fourier em ϕ , ângulo de simetria do corpo. A equação integral é resolvida pelo método dos momentos com o procedimento Galerkin. Esta abordagem cobriu uma grande faixa de parâmetros dielétricos, de $\epsilon_r = 1,44$ a 80 e $\sigma = 0$ a 10^3 mho/m, os corpos estudados foram a esfera e o cilindro dielétricos. Para $\epsilon_r = 80$ a densidade de corrente equivalente sobre a esfera de raio $0,2\lambda$ apresentou oscilações espúrias. Usando o mesmo sistema de equações acopladas e método de solução, mas expandindo todas as correntes, campos incidentes e a função de Green escalar em termos de uma série de Fourier em ϕ , [8] apresentou resultados sem as oscilações espúrias. Corpos de revolução não homogêneos foram estudados em [9], onde o corpo é considerado consistir ou ser modelado por camadas de material homogêneo. As equações

integrais acopladas foram deduzidas pela aplicação do princípio da equivalência, para definir o campo em cada camada, e a imposição da condição de continuidade dos campos tangenciais em cada interface. Foi aplicado o método dos momentos e a matriz momento é da forma bloco tridiagonal o que permite que a solução seja obtida com um procedimento recursivo. Resultados para esfera três camadas, cone-esfera homogêneos e míssil são apresentados.

Para analisar corpos com um eixo de simetria, envolvidos com dielétricos com o mesmo eixo de simetria, [10] generaliza a formulação original para corpos condutores de revolução [4]. Os casos estudados são o de esfera dielétrica e condutora, esfera carregada, esferóide oblato dielétrico e carregado, cone-esfera dielétrico, cone-esfera condutor coberto dieletrica-mente e um esferóide prolato condutor envolvido por um esferóide oblato dielétrico.

Em [11] é feita uma excelente apresentação sobre o desenvolvimento de **EICC**, para o problema de espalhamento de uma onda plana por um corpo homogêneo de revolução. A equação é formulada em termo de correntes equivalentes elétrica e magnética sobre a superfície do corpo, pela aplicação das condições de fronteira temos um grupo de quatro equações integrais a serem satisfeitas. Combinações lineares destas quatro equações levam a um sistema de duas equações acopladas para ser resolvido. Uma combinação de constantes leva à formulação descrita por [12] que foi aplicada a corpos dielétricos de revolução [7] e a cilindros dielétricos [13], esta formulação foi denominada de **PMCHW** (as letras iniciais de Poggio, Miller, Chang, Harrington e Wu). Uma outra possibilidade de combinação leva à formulação obtida por [14], denominada **Müller**. As duas possibilidades foram resolvidas pelo método dos

momentos e resultados para uma esfera dielétrica e um cilindro dielétrico são apresentados. Entre estas duas últimas, a formulação **Müller** foi a mais exata.

Uma revisão das formulações existentes para determinar o campo eletromagnético espalhado por um corpo ou corpos de revolução é feita em [15]. Excitação por uma onda plana e por um dipolo (dentro ou fora do dielétrico) são usadas. Os casos estudados são o de uma esfera dielétrica carregada com um condutor, duas esferas perfeitamente condutoras e unidas, dois cilindros de seção quadrada (um é condutor e o outro dielétrico com perdas), uma antena “dielectric rod” e uma antena microstrip circular. Os casos de um esferóide carregado e de duas esferas condutoras dentro de um cilindro dielétrico são estudados em [16]. Em [17] são analisados os casos de um cilindro condutor com os lados carregados com um dielétrico com perdas, uma esfera com $\kappa_a = 3,0$ e $\mu_r = 5,0 - j0,5$, uma esfera magnética carregada com condutor, cilindro magnético e condutor, duas esferas (condutora perfeita e magnética) e um cone-esfera condutor perfeito coberto com material magnético com perdas. Seguindo esta mesma linha [18] apresenta uma **EICC** para corpos de revolução (em duas e três dimensões) que são axialmente não homogêneos, podendo ser constituídos por camadas. O problema da junção é considerado impondo a condição de continuidade dos campos tangenciais transversos à fronteira dielétrica. Isto implica em forçar a igualdade em certos coeficientes desconhecidos das funções usadas para expandir as correntes equivalentes, assim elimina-se incógnitas na equação matricial, o que equivale a combinar linhas e colunas na matriz. O modelamento da junção completa as análises apresentadas em [19,20].

Em [21] funções de base definidas sobre triângulos foram usadas para calcular o espalhamento de objetos tridimensionais dielétricos com perdas, a formulação é desenvolvida para um objeto de forma arbitrária e resultados para uma esfera homogênea e um cilindro dielétrico finito são comparados com aqueles obtidos com a abordagem para um corpo de revolução. O trabalho é estendido em [22] para considerar o problema do espalhamento por objetos tridimensionais condutores carregados com material dielétrico com perdas de espessura arbitrária. Os casos apresentados são o da esfera condutora carregada com um dielétrico com perdas, um disco condutor envolvido por um cilindro dielétrico e uma esfera condutora no centro de um cubo dielétrico.

A EIV está baseada no relacionamento entre as correntes de polarização induzidas e o campo total, este consistindo nos campos incidente e espalhado pelo corpo. Em [23] associa-se coeficientes de corrente de polarização (um para cada componente x , y e z) em uma célula cúbica dentro do corpo, usa-se a função de Green diádica para relacionar o campo elétrico e o seu elemento gerador. O método dos momentos foi aplicado para resolver a equação integral e funções de base do tipo pulso foram usadas para expandir a corrente. A formulação foi aplicada para calcular os campos induzidos em corpos biológicos. São apresentados resultados de campo induzido em camada condutora, tecido biológico, cubo e cilindro muscular. Usando a mesma abordagem [24] calculou a polarização induzida e a resposta eletromagnética de um corpo tridimensional dentro da terra.

Funções de base definidas sobre tetraedros foram usadas em [25] para analisar corpos dielétricos não homogêneos de forma arbitrária, as funções são análogas a funções telhado (rooftop) que foram usadas para calcular o

espalhamento por condutores [26]. As funções apresentam uma contínua densidade de fluxo transversa as faces dos tetraedros, isto é, não geram cargas superficiais, mas possuem divergente, gerando cargas dentro do tetraedro. Os resultados apresentados foram os de campo ao longo do eixo z de uma esfera dielétrica com $\epsilon_r = 36$ e $\kappa_0 a = 0,408$, potência ao longo do eixo z de uma esfera dielétrica com $\epsilon_r = 35$, $\sigma = 0,7 \text{ S/m}$ e $\kappa_0 a = 0,577$, campo interno de uma esfera duas camadas com $\epsilon_1 = 16$, $\kappa_0 a_1 = 0,0595$ e $\epsilon_2 = 9$, $\kappa_0 a_2 = 0,13$ e a “radar cross section” (seção de choque de espalhamento) de uma barra dielétrica fina.

Em [27] funções de base lineares foram definidas sobre células poliedrais com um procedimento de teste denominado método Galerkin modificado (**MGM**), que consiste em mudar a região de integração do teste, um poliedro, para uma esfera com centro no baricentro do poliedro, assim a equação integral é satisfeita nesta esfera matemática em lugar do poliedro. Este trabalho apresenta resultados do cálculo do campo ao longo do eixo z de uma esfera dielétrica com $\epsilon_r = 36$ e $\kappa_0 a = 0,408$, de esfera dielétrica com perdas de $\epsilon_r = 80 - j80$ e $\kappa_0 a = 0,2$, de esfera duas camadas de $\epsilon_1 = 16$, $\kappa_0 a_1 = 0,0595$ e $\epsilon_2 = 9$, $\kappa_0 a_2 = 0,13$ com resultados melhores que os obtidos com funções sobre tetraedros [25], de esfera duas camadas com perdas de $\epsilon_1 = 40 - j40$, $\kappa_0 a_1 = 0,2$ e $\epsilon_2 = 20 - j20$, $\kappa_0 a_2 = 0,4$, campo ao longo do eixo principal de um esferóide de eixo maior “a” e eixo menor “b” com $\kappa_0 a = 0,3$, $a/b = 3$ e $\epsilon_r = 40 - j40$ e a razão específica de absorção (**SAR**) de um modelo de um rato de tamanho médio iluminado por uma onda plana de 360 MHz.

Usando elementos paramétricos, gerados pela distorção de formas simples tais como triângulo, retângulo, tetraedros, etc., e as mesmas famílias simples de funções usadas em elementos finitos, [28] resolveu equações

integrais de volume com o método dos momentos e apresentou resultados para problemas em duas dimensões. Com a mesma abordagem [29] analisou espalhadores anisotrópicos tridimensionais, apresentou resultados do cálculo do campo ao longo do eixo x de uma esfera dielétrica com $\epsilon_r = 36$ e $\kappa_0 a = 0,408$, cálculo da “bistatic cross section” de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,5$, $\epsilon_r = 5$ e 7 (caso isotrópico) e $\epsilon_r = \epsilon_1, \epsilon_2$ (caso anisotrópico), com

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 5 & -j & 0 \\ j & 5 & 0 \\ 0 & j & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -j \\ 0 & j & 5 \end{bmatrix}.$$

O programa também trata os casos em que os parâmetros do material do espalhador são dados por matrizes singulares. Para este caso, calculou a “bistatic cross section” de duas esferas com $\kappa_0 a = 2$ e $\epsilon_r = \epsilon_1, \epsilon_2$, com

$$\epsilon_1 = I + \epsilon_2 \text{ e } \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}.$$

Resultados para uma limitada faixa de $\kappa_0 a$ das seções de espalhamento “back” e “forward” de uma esfera com $\epsilon_r = 7$ e

$$\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3j \\ 0 & 3j & 7 \end{bmatrix},$$

também foram apresentados.

Em [30] funções de base solenoidais foram definidas sobre células cúbicas e usadas no cálculo do espalhamento por antenas de circuito impresso,

foram apresentados o cálculo de “bistatic scattering” de um slab dielétrico de $2,5\lambda \times 0,05\lambda$ e de um cubo dielétrico com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_r = 4$.

Funções polinomiais definidas sobre paralelepípedos e de domínio global foram usadas em [31] para analisar espalhadores dielétrico. Os resultados apresentados foram os campos espalhados de um cubo dielétrico de $0,2\lambda$ e $\epsilon_r = 9$, campo interno de um paralelepípedo de $a = 0,05\lambda$, $b = 0,1\lambda$, $c = 1,25\lambda$ e $\epsilon_r = 4$, campo interno de um paralelepípedo não homogêneo de $a = b = 0,05\lambda$, $c = 1,0\lambda$, $\epsilon_1 = 3 - j4$ e $\epsilon_2 = 8 - j6$ e a “bistatic cross-section” de um cilindro de seção elíptica com $a = 0,64\lambda$, $b = 0,32\lambda$, comprimento $d = 0,08\lambda$ e permissividade relativa dada por

$$\epsilon_r(x, y, z) = 2 - \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right].$$

A distribuição da energia absorvida dentro do corpo humano também é calculada, o modelo é de 180cm de altura e foi modelado com 9 paralelepípedos com os parâmetros $\epsilon_r = 76$ e $\sigma = 0,85 \text{ S/m}$ e iluminado por uma onda plana na frequência de 90 MHz.

1.3 Método dos momentos

O primeiro esforço em larga escala para resolver problemas práticos na área de eletromagnetismo foi feito durante a 2ª guerra mundial no M.I.T. Radiation Laboratory [32,33], onde Schwinger e outros pesquisadores usaram equações integrais para desenvolver expressões variacionais para importantes quantidades físicas, tais como a reatância equivalente da descontinuidade em guias de onda, impedância de antenas simples, frequência de ressonância de cavidades e capacitância eletrostática.

Em meados da década de 60 alguns pesquisadores começaram a resolver equações integrais por métodos numéricos. Mei e Bladel [34] usaram um método de casamento pontual e funções de base pulso para calcular o espalhamento de cilindros de seção retangular, com abordagens similares, Andreasen [35] calculou o espalhamento de cilindros metálicos paralelos de seção arbitrária e Richmond [36] resolveu o caso de um cilindro dielétrico de seção arbitrária. Todos estes trabalhos resolviam uma equação integral transformando-a em um sistema de equações lineares.

Em 1967 Harrington publicou um trabalho [37] em que dava um tratamento unificado para o método de reduzir uma equação integral a um sistema de equações lineares. A idéia básica já tinha sido desenvolvida por um engenheiro mecânico russo, Galerkin, por volta do ano 1915 [32], sem uma sólida base matemática. O tratamento unificado foi baseado nos conceitos matemáticos de espaços lineares e operadores, adotando-se o nome de *método dos momentos*¹ para o procedimento matemático de definir a matriz do sistema

¹ O nome método dos momentos deriva do fato que no procedimento de teste aparece uma integral da forma $\int w_n f(x) dx$ e que $\int x_n f(x) dx$ é o n momento de f.

linear. Uma expansão deste trabalho foi organizada na monografia *Field Computation by Moment Method* [38] e desde então o método dos momentos é de grande aplicação na solução de problemas práticos do eletromagnetismo.

A solução de problemas eletromagnéticos, através de um sistema matricial, também pode ser obtida pela aplicação do teorema da reação [39]. Richmond [40] observou que a equação integral de reação (**EIR**) reduz-se a **EICE** ou a **EICM** se uma fonte de teste elétrica ou magnética, do tipo função delta, é usada, assim, a **EIR** é mais geral que a **EICE** ou a **EICM**. Como o teorema da reação é uma declaração de reciprocidade, então o método matriz de Richmond satisfaz a reciprocidade.

Métodos iterativos também são usados para resolver equações integrais [41-45] devido a limitação na capacidade de armazenamento e manipulação de um sistema matricial pelo computador. A partir da equação integral define-se um vetor residual \mathbf{R} , a solução do problema é $\mathbf{R} = 0$ sobre o domínio da equação integral. A projeção do vetor solução \mathbf{x} em subespaço N dimensional finito é \mathbf{x}^N , o procedimento iterativo parte de um vetor solução inicial, \mathbf{x}_0^N , e define uma seqüência $\mathbf{x}_1^N, \mathbf{x}_2^N, \dots, \mathbf{x}_m^N$, que se aproxima de \mathbf{x}^N de acordo com um esquema definido, por exemplo, um método gradiente conjugado. O processo gera a seqüência de resíduos $\mathbf{R}_1^N, \mathbf{R}_2^N, \dots, \mathbf{R}_m^N$ que se aproxima de \mathbf{R}^N , a projeção de \mathbf{R} no subespaço. Como critério de erro para terminar o processo iterativo é mais usada a norma residual, $\text{erro}^k = \|\mathbf{R}^k\|^2$.

Um esforço para dar um tratamento unificado aos três principais métodos de solução numérica de equações integrais foi feito por Wang [46,47], ele definiu um *método dos momentos generalizado* (MMG) como uma classe de técnicas de solução numérica aplicadas para resolver um problema físico formulado em termos de equações integrais, estas definidas sobre um domínio finito e pequeno (por causa da limitação computacional). Temos dois tipos de métodos, o *método direto* em que um sistema matricial é explicitamente calculado e resolvido com uma técnica numérica (direta ou iterativa) e o *método iterativo* onde não temos o cálculo de nenhuma matriz e portanto nenhuma solução matricial está explicitamente envolvida. Na Figura 1.2 temos um mapa conceitual dos métodos.

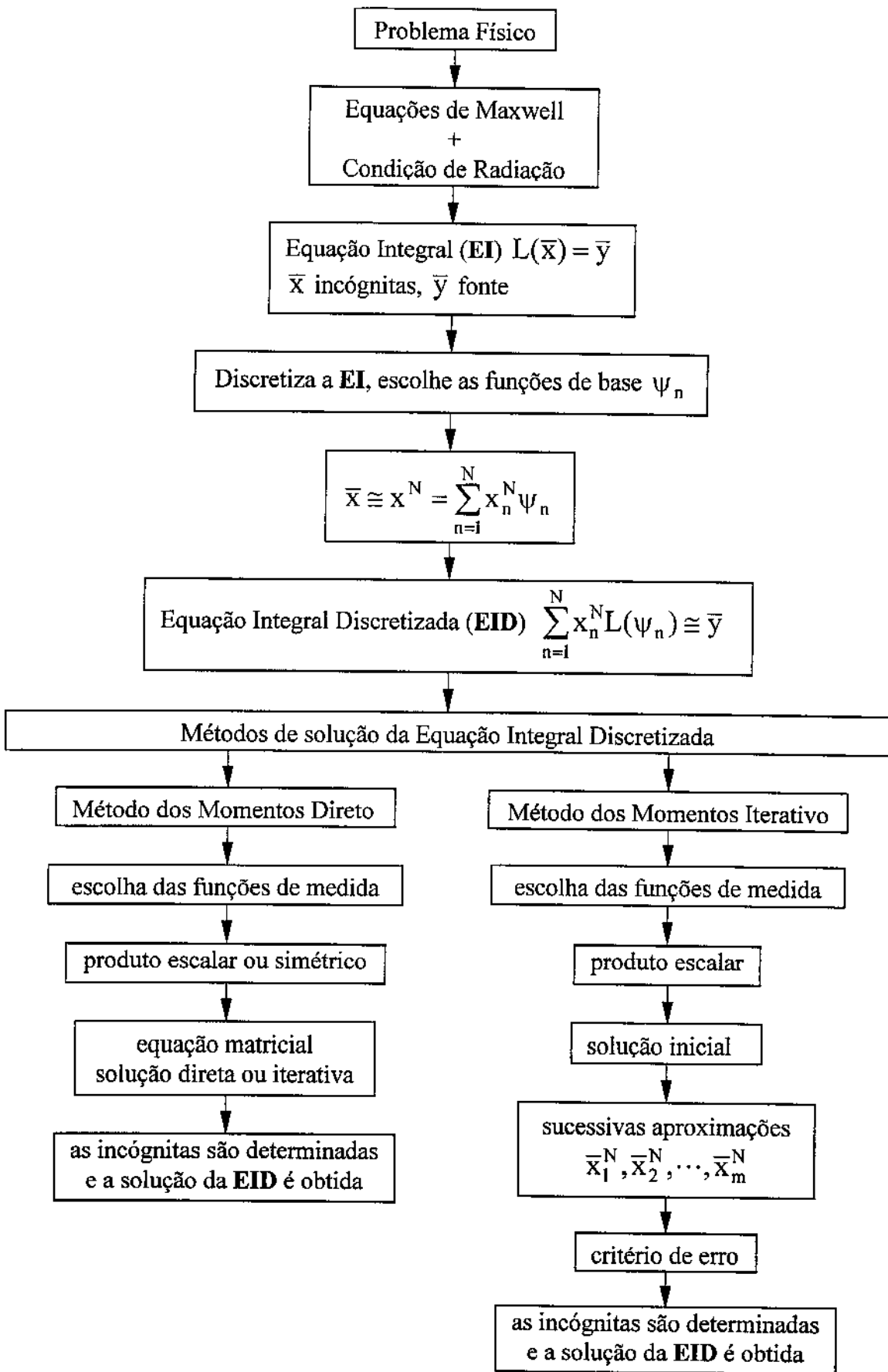


Figura 1.2 Mapa conceitual do método dos momentos generalizado.

1.4 Funções de base solenoidais definidas sobre triângulos e tetraedros

A primeira aplicação de funções de base solenoidais, definidas sobre triângulos, foi feita em [48], onde foi calculada a polarizabilidade magnética de discos condutores e a polarizabilidade elétrica de aberturas. Cinco formas foram consideradas, o círculo, a elipse, o retângulo, o losango e a cruz. Os resultados concordaram bem com os exatos (abertura circular e elíptica) e com os medidos (abertura retangular). Em [49] a radiação e o espalhamento de corpos condutores de forma arbitrária e eletricamente pequenos, foram calculados resolvendo os correspondentes problemas eletrostático e magnetostático. A equação integral eletrostática foi resolvida usando-se o método dos momentos com funções de base do tipo pulso e, na solução da equação integral magnetostática usou-se as funções de base solenoidais. Foram calculados o espalhamento de uma onda plana por uma esfera pequena, os campos gerados por um dipolo elétrico próximo a uma esfera condutora e por um dipolo magnético sobre uma pequena esfera condutora. O momento de dipolo induzido em um disco circular condutor, quando este é iluminado por uma onda plana, por um dipolo elétrico e por um dipolo magnético, foi calculado e comparado com resultados exatos. A densidade de corrente induzida em um cubo condutor com $0,1\lambda$ de aresta, iluminado por uma onda plana, foi calculada e comparada com a obtida usando a **EICE**. O momento de dipolo magnético induzido no cubo, devido a um dipolo magnético sobre a face superior do cubo, também foi avaliado.

Usando os mesmos princípios básicos [50] calculou a radiação e o espalhamento de corpos condutores de forma arbitrária e eletricamente pequenos, que estão sobre um plano terra infinito. A capacitância de uma esfera foi calculada e comparada com os valores exatos (problema eletrostático). O

dipolo magnético induzido em uma placa quadrada acima do plano terra foi avaliado (problema magnetostático), é cerca de 9% maior que no caso da placa no espaço livre. Um outro exemplo é o caso de um pequeno cubo onde um dipolo magnético é colocado tangencialmente a qualquer superfície do cubo, a partir deste caso os autores concluíram que uma fenda estreita, vertical ao plano terra, irradia com menor eficiência que uma outra posicionada paralela ao mesmo plano. O caso de uma caixa condutora sobre o plano terra, iluminada por uma onda plana, também foi considerado. Os momentos de dipolos induzidos foram avaliados e o campo espalhado é aproximado pelo campo destes dipolos, oscilando com a mesma frequência do campo imposto e irradiando na presença do plano terra. A seguir a caixa é assumida possuir fontes internas e uma fenda estreita na sua superfície. A eficiência de irradiação da fenda foi investigada modelando a fenda por um dipolo magnético oscilando suavemente, tangente a superfície da caixa. Foi observado que a radiação da fenda é mínima se ela está sobre uma face lateral e orientada perpendicularmente ao plano terra.

Em [51] as funções solenoidais, definidas sobre triângulos, foram usadas para expandir as correntes volumétricas induzidas em cilindros dielétricos homogêneos infinitos de seção transversa arbitrária. A “bistatic cross-section” de um cilindro de seção $2,5\lambda \times 0,05\lambda$ e $\epsilon_r = 4,0$ foi avaliada para uma incidência normal e para uma incidência paralela ao lado maior da seção. No caso de um cilindro de seção transversal quadrada, com lado igual a $0,1\lambda$, os resultados da “bistatic cross-section” foram apresentados para $\epsilon_r = 5, 10, 20, 40$ e 80 . Estes resultados foram comparados com os obtidos com a formulação baseada em correntes superficiais. A “monostatic cross section” de um cilindro

dielétrico com $0,2\lambda$ de raio e $\epsilon_r = 1,25$ à 30 foi avaliada e comparada com o valor exato, com uma concordância excelente.

O caso do espalhamento por um conjunto de cilindros condutores e dielétricos de seção transversa arbitrária foi considerado em [52]. As correntes sobre o cilindro condutor foram expandidas em termos de funções de base triangulares [38] e as correntes volumétricas no cilindro dielétrico foram expandidas em termos de funções de base solenoidais. A “bistatic cross-section” de um cilindro dielétrico de seção quadrada, com lado igual a $0,1\lambda$ e $\epsilon_r = 40$, foi calculada usando 40 e 99 incógnitas na formulação volumétrica. Os resultados foram comparados com o obtido usando a formulação superficial, esta usando 40 incógnitas. O mesmo cilindro com $\epsilon_r = 80$ é analisado com a formulação volumétrica usando 224 e 399 incógnitas e a formulação superficial usando 100 incógnitas. O resultado concordou mais com o maior nível de discretização. No caso de um cilindro circular com $0,2\lambda$ de raio, $\epsilon_r = 4,0$ e $\mu_r = 1,5$, a “bistatic cross-section” foi calculada e comparada com a obtida usando a formulação superficial, com uma boa concordância.

Em [53] a formulação numérica para resolver a equação integral volumétrica, para o caso de um cilindro quiral, foi apresentada. As funções solenoidais foram usadas no caso de um cilindro de seção transversa circular, com $0,1\lambda$ de raio e caracterizado pelas constantes $\epsilon_r = 1,5$, $\mu_r = 4,0$ e $\xi_c = 0,0005$ (constante quiral), a “bistatic cross-section” foi calculada e concorda bem com resultados publicados na literatura [54].

As funções de base solenoidais, definidas sobre tetraedros, foram propostas para avaliar o espalhamento eletromagnético por corpos

tridimensionais em [55]. Neste trabalho foi provada a característica solenoidal das funções.

Esta tese define o procedimento para que estas funções possam ser usadas para expandir as correntes volumétricas em um corpo tridimensional. O procedimento define um conjunto de funções de base que atendem as seguintes exigências:

- satisfazem as condições de fronteira;
- são funções linearmente independentes.

O primeiro caso considerado foi um cubo homogêneo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_r = 4,0$, iluminado por uma onda plana. Os resultados de campo espalhado foram publicados em [56-58] e concordaram muito bem com os disponíveis na literatura [59]. Em [60] o mesmo cubo, com $\epsilon_r = 9,0$, foi considerado e os resultados concordaram com os de [59]. Os campos internos de uma esfera dielétrica homogênea com $\epsilon_r = 4,0$ e $\kappa_0 a = 0,1$ foram calculados e comparados com os obtidos através da série de Mie em [61] e [62].

Em [63] foi apresentado o caso de um cubo não homogêneo (duas camadas) com $0,2\lambda$ de aresta externa e $0,1\lambda$ de aresta interna, iluminado por uma onda plana e com parâmetros elétricos $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$. O caso de uma esfera não homogênea com duas camadas foi analisado em [64], a “bistatic cross-section” foi calculada e comparada com a obtida através da série de Mie. Foram analisadas duas esferas, uma com $\kappa_0 a_1 = 0,01$, $\kappa_0 a_2 = 0,005$, $\epsilon_1 = 7,5 - j 8,9877$ e $\epsilon_2 = 72,0 - j 161,779$ (índice 2 indica esfera interna) e a

outra com $\kappa_0 a_1 = 0,408$, $\kappa_0 a_2 = 0,204$, $\varepsilon_1 = 9$ e $\varepsilon_2 = 16$. Os resultados concordaram bem com os obtidos usando a série de Mie.

Os campos eletromagnéticos induzidos em tecidos humanos foram calculados, usando as funções solenoidais tridimensionais, em [65]. Foram apresentados os casos de um cilindro muscular com região adiposa e um cilindro adiposo com um região muscular, os resultados concordaram bem com os disponíveis na literatura [23].

1.5 Organização da tese

A tese está dividida em seis capítulos. Neste primeiro capítulo damos uma introdução ao tema, falamos sobre os tipos de equações integrais aplicadas a problemas tridimensionais, sobre o método numérico usado para resolver a equação, sobre funções solenoidais definidas sobre triângulos e tetraedros e sobre a organização da tese. No capítulo 2 deduzimos a equação integral de volume, a partir das equações de Maxwell, para analisar a interação entre um corpo tridimensional e o campo eletromagnético incidente. Aplicamos o método dos momentos para chegar a um sistema de equações lineares, deduzimos funções solenoidais, definidas sobre tetraedros, para expandir as correntes induzidas no corpo e definimos um método para extrair o conjunto de funções de base a partir do conjunto de funções geradas.

No capítulo 3 aplicamos a equação integral ao problema de um corpo homogêneo e mostramos como calcular os termos da matriz momento. O campo espalhado por um cubo homogêneo com $0,2\lambda$ de aresta é calculado e comparado com os resultados publicados na literatura e com o obtido com funções pulso. Os campos interno e espalhado para uma esfera homogênea são avaliados e comparados com os obtidos através da série de Mie. O campo espalhado por conjuntos de cubos com $0,1\lambda$ de aresta é calculado e comparado com o obtido com funções pulso.

A análise de um corpo não homogêneo é feita no capítulo 4. O campo espalhado de um cubo não homogêneo com $0,2\lambda$ de aresta é calculado e comparado com o obtido com funções pulso. Os campos interno e espalhado para uma esfera não homogênea são avaliados e comparados com os obtidos

através da série de Mie. O campo espalhado por conjuntos de cubos distintos, com $0,1\lambda$ de aresta, é calculado e comparado com o obtido com funções pulso.

Um novo método iterativo de solução da equação integral é desenvolvido no capítulo 5. Os resultados gerados nos capítulos 3 e 4 para o cubo homogêneo, esfera homogênea e não homogênea, conjunto de cubos, são recalculados com o novo método. Os resultados obtidos, através do método do iterativo, são comparados com os obtidos usando-se o método dos momentos.

No capítulo 6 fazemos uma revisão do que foi feito e apresentamos as nossas conclusões e desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Obtenção das equações integro-diferenciais e método de solução

Neste capítulo apresentaremos o desenvolvimento da equação integral de volume a partir das equações de Maxwell (seção 2.1). A equação integral fornece a solução para a distribuição do campo eletromagnético de um corpo tridimensional sobre o qual incide uma onda eletromagnética. Na seção 2.2 resolveremos a equação integral usando o método dos momentos com o uso de funções de base solenoidais que serão definidas e analisadas na seção 2.3.

2.1 Equação integral de volume

Um corpo com propriedades macroscópicas (ϵ, μ, σ) ocupa um volume V e está imerso num meio infinito caracterizado pelas propriedades $(\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0)$, Figura 2.1(a). Sobre o corpo incide uma onda eletromagnética $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ gerada por fontes externas $(\mathbf{J}^i, \mathbf{M}^i)$. A presença do corpo perturba ou espalha o campo que existiria se ele não estivesse presente, isto é, o corpo emite um campo devido à corrente induzida em seu interior pelo campo incidente. O campo total fora do volume V satisfaz as equações de Maxwell na forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = -Z_0 \mathbf{H} - \mathbf{M}^i, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = Y_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}^i, \quad (2.2)$$

para pontos no volume V , as seguintes equações são válidas

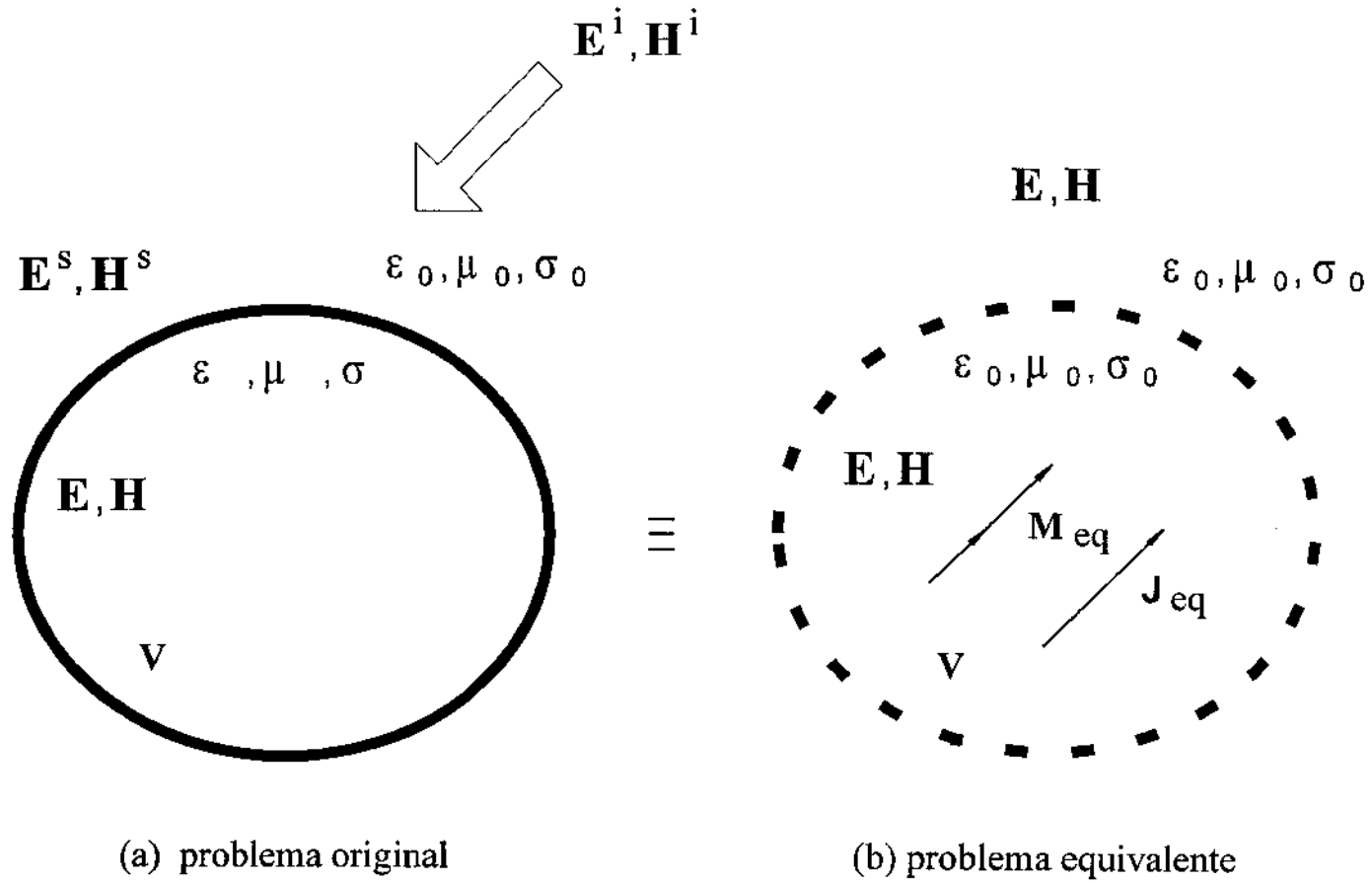


Figura 2.1 Corpo tridimensional iluminado por uma onda eletromagnética

$$\nabla \times \mathbf{E} = -Z\mathbf{H}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = Y\mathbf{E}. \quad (2.4)$$

As quantidades Y_0, Z_0, Y, Z são definidas, em termos das propriedades macroscópicas, por

$$Y_0 = \sigma_0 + j\omega\epsilon_0, \quad (2.5.a)$$

$$Z_0 = j\omega\mu_0, \quad (2.5.b)$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon, \quad (2.5.c)$$

$$Z = j\omega\mu. \quad (2.5.d)$$

Somando e subtraindo $Z_0\mathbf{H}$ na equação (2.3) e $Y_0\mathbf{E}$ na equação (2.4) obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -(Z - Z_0)\mathbf{H} - Z_0\mathbf{H},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (Y - Y_0)\mathbf{E} + Y_0\mathbf{E},$$

que podem ser escritas como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -Z_0\mathbf{H} - \mathbf{M}_{\text{eq}}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = Y_0\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{eq}}, \quad (2.7)$$

com as equivalentes densidades volumétricas de corrente elétrica \mathbf{J}_{eq} e magnética \mathbf{M}_{eq} , definidas como

$$\mathbf{J}_{\text{eq}} = (Y - Y_0)\mathbf{E}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M}_{\text{eq}} = (Z - Z_0)\mathbf{H}, \quad (2.9)$$

estas correntes somente existem no volume V ocupado pelo corpo.

Como as equações (2.1), (2.2) e (2.6), (2.7) são da mesma forma, respectivamente, podem ser escritas numa forma válida para todo o espaço, isto é, dentro e fora do corpo, como segue

$$\nabla \times \mathbf{E} = -Z_0 \mathbf{H} - \mathbf{M}^i - \mathbf{M}_{\text{eq}}, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = Y_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}^i + \mathbf{J}_{\text{eq}}. \quad (2.11)$$

A linearidade das equações de Maxwell permite separar o campo total em duas partes, o campo incidente $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ devido as fontes externas $(\mathbf{J}^i, \mathbf{M}^i)$, e o campo espalhado $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ devido a $(\mathbf{J}_{\text{eq}}, \mathbf{M}_{\text{eq}})$, temos então

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{\text{inc}}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^{\text{inc}}, \quad (2.13)$$

e as equações (2.10) e (2.11) podem ser escritas, em duas partes, como

$$\nabla \times \mathbf{E}^i = -Z_0 \mathbf{H}^i - \mathbf{M}^i, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^i = Y_0 \mathbf{E}^i + \mathbf{J}^i, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -Z_0 \mathbf{H}^s - \mathbf{M}_{\text{eq}}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^s = Y_0 \mathbf{E}^s + \mathbf{J}_{\text{eq}}. \quad (2.17)$$

Estamos interessados em problemas em que o campo incidente num corpo é conhecido, assim as equações (2.14) e (2.15) não precisam ser resolvidas. As equações (2.16) e (2.17) estabelecem que os campos espalhados pelo corpo são gerados a partir das densidades volumétricas de corrente \mathbf{J}_{eq} e \mathbf{M}_{eq} , que existem dentro do corpo e que irradiam em um meio infinito, Figura 2.1(b). O que fizemos foi substituir o corpo (elemento passivo) por uma fonte equivalente

(elemento gerador). Substituindo as equações (2.8) e (2.9) nas equações (2.12) e (2.13), respectivamente, encontramos

$$\frac{\mathbf{J}_{\text{eq}}}{(Y - Y_0)} - \mathbf{E}^s = \mathbf{E}^{\text{inc}}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\mathbf{M}_{\text{eq}}}{(Z - Z_0)} - \mathbf{H}^s = \mathbf{H}^{\text{inc}}, \quad (2.19)$$

Para resolver o sistema de equações acopladas (2.18) e (2.19) temos que estabelecer o relacionamento entre o campo $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ e as suas fontes $(\mathbf{J}_{\text{eq}}, \mathbf{M}_{\text{eq}})$. Em termos dos potenciais vetor elétrico \mathbf{F} e magnético \mathbf{A} e os potenciais escalar elétrico ϕ^e e magnético ϕ^m , os campos espalhados são dados por

$$\mathbf{E}^s = -j\omega \mathbf{A} - \nabla\phi^e - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{H}^s = -j\omega \mathbf{F} - \nabla\phi^m + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.21)$$

Os potenciais \mathbf{A} e \mathbf{F} são soluções das equações

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \kappa_0^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_{\text{eq}}, \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} + \kappa_0^2 \mathbf{F} = -\epsilon_0 \mathbf{M}_{\text{eq}}, \quad (2.23)$$

onde $\kappa_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi / \lambda_0$. As soluções das equações (2.22) e (2.23) são dadas por

$$\mathbf{A} = \mu_0 \int_V \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F} = \epsilon_0 \int_V \mathbf{M}_{\text{eq}}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad (2.25)$$

onde \mathbf{r} é o vetor que define o ponto de observação e \mathbf{r}' o ponto da fonte. $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é a função de Green tridimensional do espaço livre, dada por

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-j\kappa_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2.26)$$

que é a solução da equação $\nabla^2 g + \kappa_0^2 g = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ em que foi imposta a condição de radiação.

Os potenciais escalares ϕ^e e ϕ^m são dados por

$$\phi^e = \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{-j\omega \epsilon_0 \mu_0}, \quad (2.27)$$

$$\phi^m = \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{-j\omega \epsilon_0 \mu_0}, \quad (2.28)$$

obtidos a partir da condição de Lorentz.

Substituindo as equações (2.20) e (2.21) nas equações (2.18) e (2.19) encontramos

$$\frac{\mathbf{J}_{\text{eq}}}{(Y - Y_0)} + j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + \nabla\phi^e(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\mathbf{M}_{\text{eq}}}{(Z - Z_0)} + j\omega \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\text{eq}}) + \nabla\phi^m(\mathbf{M}_{\text{eq}}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{J}_{\text{eq}}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}, \quad (2.30)$$

que são as equações integro-diferenciais que determinam as densidades de correntes equivalentes \mathbf{J}_{eq} e \mathbf{M}_{eq} . Na próxima seção usaremos o método dos momentos para resolver as equações (2.29) e (2.30).

2.2 Aplicação do método dos momentos

Para resolver as equações (2.29) e (2.30) usaremos o método dos momentos, que transformará o sistema de equações integrais em um sistema de equações matriciais. As equações (2.29) e (2.30) podem ser escritas na forma

$$L_1(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + L_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}, \quad (2.31)$$

$$K_2(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + K_1(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}, \quad (2.32)$$

onde L_1, L_2, K_1, K_2 são operadores lineares que atuam sobre um só tipo de corrente, e são definidos, de (2.29) e (2.30), por

$$L_1(\mathbf{J}_{\text{eq}}) = \frac{\mathbf{J}_{\text{eq}}}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + \nabla\phi^e(\mathbf{J}_{\text{eq}}), \quad (2.33)$$

$$L_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\text{eq}}), \quad (2.34)$$

$$K_1(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = \frac{\mathbf{M}_{\text{eq}}}{(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)} + j\omega \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\text{eq}}) + \nabla\phi^m(\mathbf{M}_{\text{eq}}), \quad (2.35)$$

$$K_2(\mathbf{J}_{\text{eq}}) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{J}_{\text{eq}}). \quad (2.36)$$

Expandiremos as densidades de correntes desconhecidas \mathbf{J}_{eq} e \mathbf{M}_{eq} da seguinte forma

$$\mathbf{J}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{J}_i, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M}_{\text{eq}} = \sum_{l=1}^M \beta_l \mathbf{M}_l, \quad (2.38)$$

onde \mathbf{J}_i e \mathbf{M}_l são funções de base que serão definidas na seção 2.3. Para uma solução exata o conjunto de funções de base seria infinito.

Aplicando as equações (2.37) e (2.38) nas equações (2.31) e (2.32) obtemos

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i L_1(\mathbf{J}_i) + \sum_{l=1}^M \beta_l L_2(\mathbf{M}_l) = \mathbf{E}^{inc}, \quad (2.39)$$

$$\sum_{l=1}^M \beta_l K_1(\mathbf{M}_l) + \sum_{i=1}^N \alpha_i K_2(\mathbf{J}_i) = \mathbf{H}^{inc}. \quad (2.40)$$

Para aplicar o método dos momentos definimos dois produtos internos, um para cada função de teste, a saber

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{J}_j \rangle = \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_j \, dv, \quad (2.41)$$

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{M}_t \rangle = \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}_t \, dv, \quad (2.42)$$

onde v é o espaço de definição das funções de teste \mathbf{J}_j e \mathbf{M}_t , respectivamente. Vamos usar a técnica de Galerkin, isto é, as funções de teste \mathbf{J}_j e \mathbf{M}_t serão as mesmas funções \mathbf{J}_i e \mathbf{M}_l , respectivamente. Realizando o produto interno das equações (2.39) e (2.40) com as funções de teste \mathbf{J}_j e \mathbf{M}_t encontramos

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle L_1(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle + \sum_{l=1}^M \beta_l \langle L_2(\mathbf{M}_l), \mathbf{J}_j \rangle = \langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_j \rangle \quad j=1, \dots, N, \quad (2.43)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \mathbf{K}_2(\mathbf{J}_i), \mathbf{M}_t \rangle + \sum_{l=1}^M \beta_l \langle \mathbf{K}_1(\mathbf{M}_l), \mathbf{M}_t \rangle = \langle \mathbf{H}^{\text{inc}}, \mathbf{M}_t \rangle \quad t=1, \dots, M. \quad (2.44)$$

As equações (2.43) e (2.44) formam um sistema de $N + M$ equações lineares com $N + M$ incógnitas, colocando o sistema na forma matricial temos

$$[\mathbf{Z}] [\mathbf{I}] = [\mathbf{V}], \quad (2.45)$$

onde a matriz $[\mathbf{Z}]$ é constituída de quatro submatrizes, a saber

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} Z_{jj} & Z_{jm} \\ Z_{mj} & Z_{mm} \end{bmatrix},$$

$$Z_{jj} \text{ matriz } N \times N \text{ de elemento } ji = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \mathbf{L}_1(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle, \quad (2.46.a)$$

$$Z_{jm} \text{ matriz } N \times M \text{ de elemento } jl = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M \beta_l \langle \mathbf{L}_2(\mathbf{M}_l), \mathbf{J}_j \rangle, \quad (2.46.b)$$

$$Z_{mj} \text{ matriz } M \times N \text{ de elemento } ti = \sum_{t=1}^M \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \mathbf{K}_2(\mathbf{J}_i), \mathbf{M}_t \rangle, \quad (2.46.c)$$

$$Z_{mm} \text{ matriz } M \times M \text{ de elemento } tl = \sum_{t=1}^M \sum_{l=1}^M \beta_l \langle \mathbf{K}_1(\mathbf{M}_l), \mathbf{M}_t \rangle. \quad (2.46.d)$$

Os vetores $[I]$ e $[V]$ são dados por

$$[I] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}^{inc}, J_1 \rangle \\ \langle \mathbf{E}^{inc}, J_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{E}^{inc}, J_N \rangle \\ \langle \mathbf{H}^{inc}, M_1 \rangle \\ \langle \mathbf{H}^{inc}, M_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{H}^{inc}, M_M \rangle \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

A solução é obtida resolvendo o sistema dado pela equação (2.45), de uma maneira geral inverte-se a matriz $[Z]$, então a solução é dada por

$$[I] = [Z]^{-1} [V]. \quad (2.49)$$

2.3 Funções de base solenoidais definidas sobre tetraedros

Na seção 2.2 expandimos as correntes equivalentes \mathbf{J}_{eq} e \mathbf{M}_{eq} em termos de funções de base, equações (2.37) e (2.38). Nesta seção mostraremos como definir funções de base solenoidais tridimensionais [55]. A vantagem das funções solenoidais consiste em não gerar cargas espúrias no interior de regiões homogêneas de um corpo, estas cargas são fontes de erros na definição dos elementos da matriz momento. Quando da análise de corpos com altos valores de ε [66], funções não solenoidais limitam a validade da análise para a região de campo distante. A função é definida a partir da discretização do corpo por tetraedros. Com esta discretização um certo número de tetraedros terão uma aresta comum e para cada aresta será definida uma função de base. Mostraremos a definição para a corrente elétrica, para o caso de corrente magnética o procedimento é o mesmo.

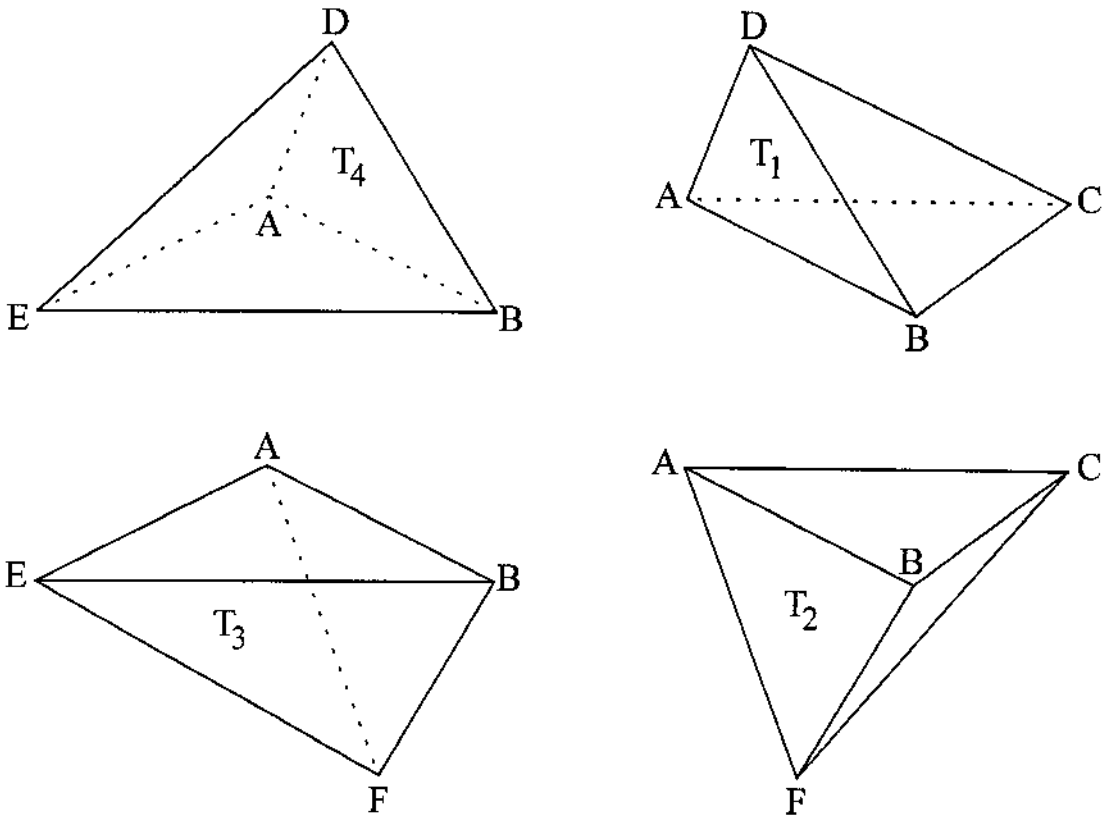
Consideremos quatro tetraedros com uma aresta comum AB, conforme mostrado na figura 2.2.a. A função de base definida pela aresta AB é dada por

$$\mathbf{J}_{AB} = \left\{ \frac{\overline{DC}}{V_1} \text{ em } T_1, \frac{\overline{CF}}{V_2} \text{ em } T_2, \frac{\overline{FE}}{V_3} \text{ em } T_3, \frac{\overline{ED}}{V_4} \text{ em } T_4 \right\}, \quad (2.50)$$

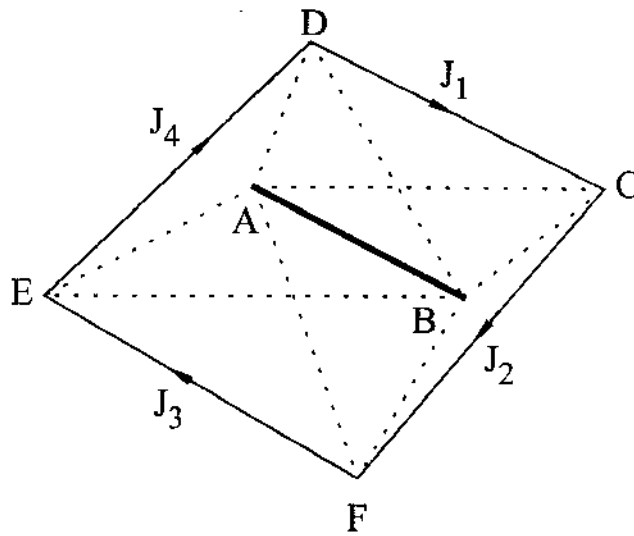
onde V_k é o volume do tetraedro T_k associado à aresta AB e \overline{DC} , \overline{CF} , \overline{FE} e \overline{ED} são vetores apontando no sentido do 1º para o 2º nó. Como a função é solenoidal ela satisfaz a equação $\nabla \cdot \mathbf{J}_{AB} = 0$, no espaço discreto definido pelos tetraedros, o que implica em

$$\oint \mathbf{J}_{AB} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

no espaço discreto.



(a) elementos de volume associados a aresta AB



(b) função de base definida pela aresta AB

Figura 2.2 Definição de uma função de base solenoidal.

Substituindo (2.50) na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{J}_{AB} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{\overline{DC}}{V_1} \cdot (\mathbf{S}_{ABD} + \mathbf{S}_{ACB} + \mathbf{S}_{BCD} + \mathbf{S}_{ADC}) + \\
 &\quad \frac{\overline{CF}}{V_2} \cdot (\mathbf{S}_{ABC} + \mathbf{S}_{AFB} + \mathbf{S}_{BFC} + \mathbf{S}_{ACF}) + \\
 &\quad \frac{\overline{FE}}{V_3} \cdot (\mathbf{S}_{ABF} + \mathbf{S}_{AEB} + \mathbf{S}_{AFE} + \mathbf{S}_{BEF}) + \\
 &\quad \frac{\overline{ED}}{V_4} \cdot (\mathbf{S}_{ABE} + \mathbf{S}_{AED} + \mathbf{S}_{ADB} + \mathbf{S}_{BDE}), \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

onde \mathbf{S}_{abc} indica o vetor área associado ao triângulo definido pelos nós a , b e c e cujo sentido é dado pela rotação do vetor definido por \overline{bc} em torno do nó a .

Da Figura 2.2(a) obtemos as seguintes relações

$$\overline{DC} \perp \mathbf{S}_{BCD} \text{ e } \mathbf{S}_{ADC} \Rightarrow \overline{DC} \cdot (\mathbf{S}_{BCD} \text{ e } \mathbf{S}_{ADC}) = 0, \tag{2.52.a}$$

$$\overline{CF} \perp \mathbf{S}_{BFC} \text{ e } \mathbf{S}_{ACF} \Rightarrow \overline{CF} \cdot (\mathbf{S}_{BFC} \text{ e } \mathbf{S}_{ACF}) = 0, \tag{2.52.b}$$

$$\overline{FE} \perp \mathbf{S}_{AFE} \text{ e } \mathbf{S}_{BEF} \Rightarrow \overline{FE} \cdot (\mathbf{S}_{AFE} \text{ e } \mathbf{S}_{BEF}) = 0, \tag{2.52.c}$$

$$\overline{ED} \perp \mathbf{S}_{AED} \text{ e } \mathbf{S}_{BDE} \Rightarrow \overline{ED} \cdot (\mathbf{S}_{AED} \text{ e } \mathbf{S}_{BDE}) = 0, \tag{2.52.d}$$

além das relações acima, a seguinte identidade é sempre válida

$$\mathbf{S}_{abc} = -\mathbf{S}_{acb}. \tag{2.53}$$

Usando as equações (2.52) e (2.53), podemos reescrever (2.51) como

$$\oint \mathbf{J}_{AB} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\overline{DC}}{V_1} - \frac{\overline{CF}}{V_2} \right) \cdot \mathbf{S}_{ACB} + \left(\frac{\overline{CF}}{V_2} - \frac{\overline{FE}}{V_3} \right) \cdot \mathbf{S}_{AFB} +$$

$$\left(\frac{\overline{FE}}{V_3} - \frac{\overline{ED}}{V_4}\right) \cdot \mathbf{S}_{AEB} + \left(\frac{\overline{ED}}{V_4} - \frac{\overline{DC}}{V_1}\right) \cdot \mathbf{S}_{ADB} . \quad (2.54)$$

Da Figura 2.2(a) obtemos as seguintes relações

$$\overline{DC} \cdot \mathbf{S}_{ACB} = 3V_1, \quad (2.55.a)$$

$$\overline{DC} \cdot \mathbf{S}_{ADB} = 3V_1, \quad (2.55.b)$$

$$\overline{CF} \cdot \mathbf{S}_{ACB} = 3V_2, \quad (2.55.c)$$

$$\overline{CF} \cdot \mathbf{S}_{AFB} = 3V_2, \quad (2.55.d)$$

$$\overline{FE} \cdot \mathbf{S}_{AFB} = 3V_3, \quad (2.55.e)$$

$$\overline{FE} \cdot \mathbf{S}_{AEB} = 3V_3, \quad (2.55.f)$$

$$\overline{ED} \cdot \mathbf{S}_{AEB} = 3V_4, \quad (2.55.g)$$

$$\overline{ED} \cdot \mathbf{S}_{ADB} = 3V_4, \quad (2.55.h)$$

substituindo (2.55) em (2.54) encontramos que

$$\oint \mathbf{J}_{AB} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

o que prova que a função \mathbf{J}_{AB} é solenoidal. Na Figura 2.2(b) temos a representação da função solenoidal \mathbf{J}_{AB} , subdividida em quatro correntes, a saber

$$\mathbf{J}_{AB} = \mathbf{J}_1 \oplus \mathbf{J}_2 \oplus \mathbf{J}_3 \oplus \mathbf{J}_4, \quad (2.56)$$

onde \mathbf{J}_k é a corrente definida pelo tetraedro T_k e o sinal \oplus indica composição de correntes que são definidas sobre domínios diferentes. A demonstração foi feita para quatro tetraedros mas este número é apenas ilustrativo, uma aresta que

define uma função solenoidal deve ter um mínimo de três tetraedros, sem limite para o número máximo.

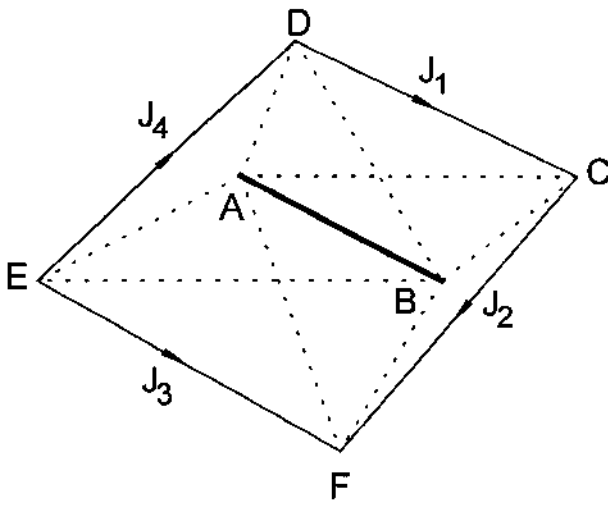
Para representar as densidades de correntes equivalentes \mathbf{J}_{eq} e \mathbf{M}_{eq} necessitamos de funções solenoidais para regiões homogêneas e funções não solenoidais para as interfaces entre regiões. Quando a aresta pertence a interface entre o corpo e o espaço exterior temos que o laço de correntes não se fechará, como mostrado na Figura 2.3(b), portanto a corrente dá origem a uma distribuição de cargas na interface. No caso da aresta pertencer as interfaces de dois ou mais meios introduziremos uma modificação na definição da função dada pela equação (2.56), de forma a representar as densidades de cargas nestas interfaces. A modificação consiste em introduzir um fator multiplicativo para cada corrente definida por um tetraedro, este fator, função da propriedade macroscópica de cada tetraedro, é dado por

$$F_k = \frac{\gamma_r^k - 1}{\gamma_r^k}, \quad (2.57)$$

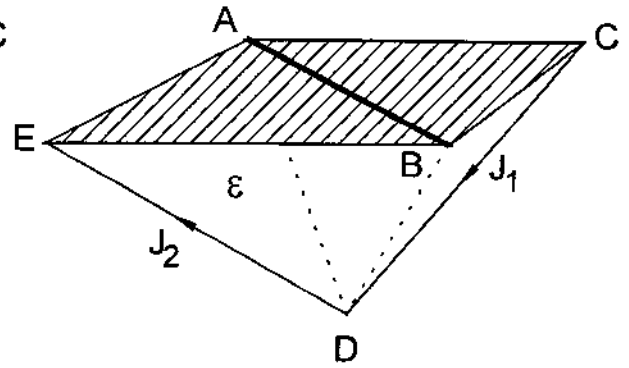
onde γ_r^k pode ser a permissividade relativa ϵ_r (corrente \mathbf{J}) ou a permeabilidade relativa μ_r (corrente \mathbf{M}), o índice k indica que o fator é definido para o tetraedro k . Substituindo a equação (2.57) na (2.56) e considerando um certo número de tetraedros associados a aresta AB temos

$$\mathbf{J}_{AB} = F_1 \mathbf{J}_1 \oplus F_2 \mathbf{J}_2 \oplus F_3 \mathbf{J}_3 \oplus \dots \oplus F_k \mathbf{J}_k, \quad (2.58)$$

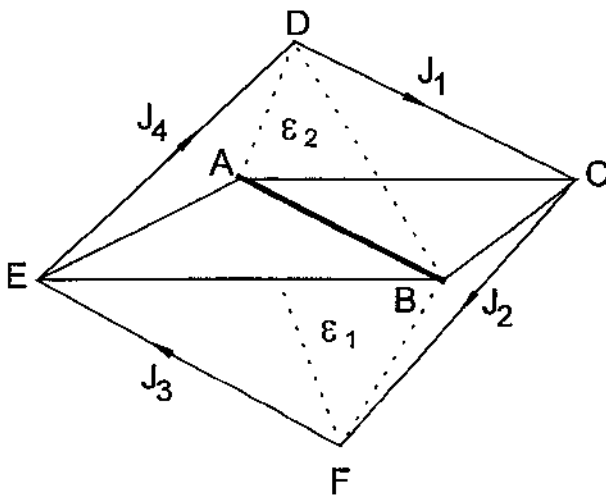
a equação (2.58) representa a forma mais geral de funções de base definidas sobre tetraedros, alguns exemplos estão na Tabela 2.1.



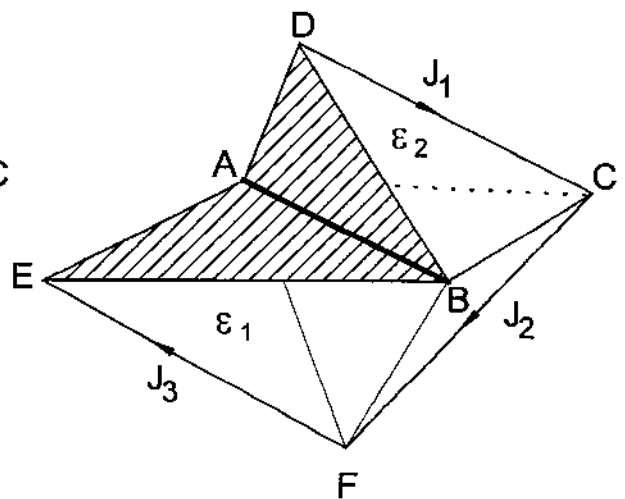
(a) aresta interna a uma região homogênea: função solenoidal



(b) aresta na interface de um meio e o meio externo: função não solenoidal



(c) aresta na interface entre dois meios: função não solenoidal



(d) aresta na interface entre dois meios e o meio exterior: função não solenoidal

Figura 2.3 Exemplo de funções de base geradas por tetraedros.

Tabela 2.1 Exemplos de funções de base

Tipo de função	localização da aresta	definição pela equação (2.58)	Figura
solenoidal	aresta em um meio homogêneo	$F_1 = F_2 = \dots = F_k$ $\mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{J}_k \mathbf{V}_k = 0$	2.3(a) com $k = 4$
não solenoidal	aresta na interface do corpo e o meio exterior	$F_1 = F_2 = \dots = F_k$ $\mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{J}_k \mathbf{V}_k \neq 0$	2.3(b) com $k = 2$
não solenoidal	aresta na interface de dois meios	pelo menos um F_i e' diferente $\mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{J}_k \mathbf{V}_k = 0$	2.3(c) com $k = 4$
não solenoidal	aresta na interface de dois meios e o meio exterior	pelo menos um F_i e' diferente $\mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{J}_k \mathbf{V}_k \neq 0$	2.3(d) com $k = 3$

Os conjuntos de funções de base usados para expandir as correntes equivalentes \mathbf{J}_{eq} e \mathbf{M}_{eq} devem ser linearmente independente (LI), isto é, atendem a seguinte condição

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{J}_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0, \quad (2.59)$$

$$\sum_{l=1}^M \beta_l \mathbf{M}_l = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_M = 0. \quad (2.60)$$

Da discretização de um corpo em P tetraedros temos um conjunto de N funções de base. Este conjunto é sempre linearmente dependente (LD) porque um mesmo domínio T_k suporta mais de uma corrente. Como exemplo consideremos o menor domínio possível no espaço, isto é, um tetraedro, cada aresta define uma função de base, Figura 2.4(a), temos então seis correntes. A condição do conjunto ser LI é

$$\sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathbf{J}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad (2.61)$$

como todas as funções possuem o mesmo suporte temos que a equação acima é válida em T_1 . Da Figura 2.4(a) temos as seguintes equações vetoriais

$$\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 = 0, \quad (2.62.a)$$

$$\mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_6 - \mathbf{J}_1 = 0, \quad (2.62.b)$$

$$\mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_5 - \mathbf{J}_2 = 0, \quad (2.62.c)$$

$$\mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_6 - \mathbf{J}_5 = 0. \quad (2.62.d)$$

De (2.62.a) temos que se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,0$ e $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ o somatório de (2.61) será igual a zero e assim o conjunto é LD. Das equações (2.62.b) a

(2.62.d) temos outras definições de α_i que satisfazem o somatório. Por inspeção da Figura 2.4(a) vemos que devemos ter só três funções formando o conjunto LI. O procedimento que definirá o conjunto de funções de base LI, a partir do conjunto de todas as funções possíveis, está baseado na definição de uma matriz especial denominada matriz de Gram, a saber

Definição 1.1. Seja $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ um conjunto de vetores em um espaço V com produto interno. Então a matriz de Gram associada a X é definida [67] por

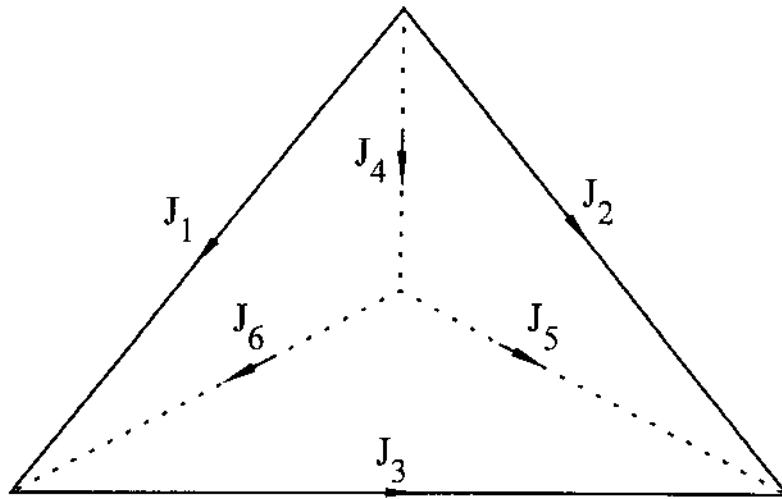
$$G_{kj}(X) \triangleq \langle x^k, x^j \rangle, \quad 1 \leq k, j \leq n. \quad (2.63)$$

Teorema 1.1. O conjunto X é linearmente independente se e somente se a matriz de Gram $G(X)$ é não singular [67].

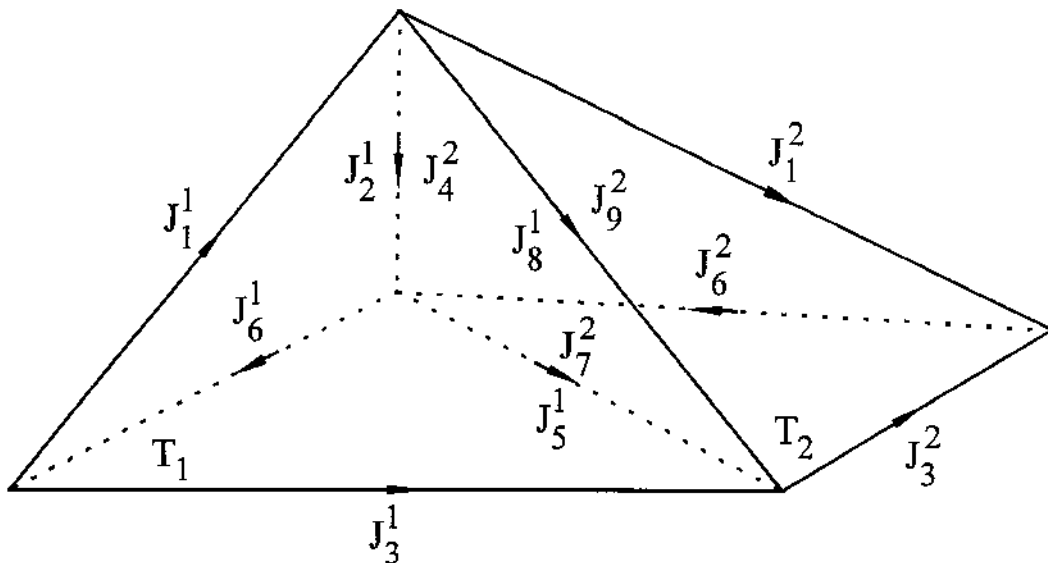
Da definição e do teorema temos que se uma função i for a combinação linear de outras funções (j, k, \dots, t) do conjunto, a linha i da matriz será a combinação linear das respectivas linhas (j, k, \dots, t) e a matriz será singular. O procedimento consiste em determinar quais linhas são linearmente dependentes de outras e retirar a respectiva função. O método mais eficiente, tanto do ponto de vista numérico quanto do tempo computacional gasto, foi o método de decomposição LU, que consiste em escrever a matriz de Gram como um produto de duas matrizes, a saber [68]

$$G=LU = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

por definição os elementos $\alpha_{ii} = 1$. Quando o elemento $\beta_{ii} = 0$ indica que a linha i é linearmente dependente e, portanto, a função i deve ser retirada do conjunto por ser linearmente dependente de outras funções. Na figura 2.4.b temos todas as nove funções geradas por dois tetraedros, deste conjunto o procedimento definiu cinco linearmente independentes.



(a) 1 tetraedro - 6 funções LD - 3 funções LI



(b) 2 tetraedros - 9 funções LD - 5 funções LI

Figura 2.4 Exemplos de conjuntos de funções de base.

Capítulo 3

Aplicação da equação integral ao corpo homogêneo

Neste capítulo apresentaremos os resultados do cálculo dos campos gerados pela interação de uma onda plana com um corpo homogêneo e com conjunto de corpos com mesma característica elétrica.

3.1 Corpo dielétrico homogêneo

Consideremos um corpo tridimensional caracterizado por $(\epsilon, \mu_0, \sigma)$ em que incide o campo \mathbf{E}^{inc} . Como $\mu = \mu_0$ temos que $\mathbf{M}_{eq} = 0$ na equação (2.9) e o sistema dado pelas equações (2.29) e (2.30) reduz-se a

$$\frac{\mathbf{J}_{eq}}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_{eq}) + \nabla\phi^e(\mathbf{J}_{eq}) = \mathbf{E}^{inc}, \quad (3.1)$$

que pode ser escrita, seção 2.2, como

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{J}_{eq}) = \mathbf{E}^{inc}, \quad (3.2)$$

com

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{J}_{eq}) = \frac{\mathbf{J}_{eq}}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_{eq}) + \nabla\phi^e(\mathbf{J}_{eq}). \quad (3.3)$$

Usando a expansão dada pela equação (2.37) na equação (3.2) obtemos

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{L}_1(\mathbf{J}_i) = \mathbf{E}^{inc}, \quad (3.4)$$

que é a equação (2.39) com $L_2(\mathbf{M}_{eq}) = 0$. O sistema linear resultante da aplicação do método dos momentos é dado, de (2.43) com $L_2(\mathbf{M}_{eq}) = 0$, por

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle L_1(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = \langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_j \rangle \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

que é um sistema de N equações lineares. Na seção 2.2 representamos este sistema na seguinte forma matricial

$$[Z] [I] = [V]. \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.5) e redefinindo $Y - Y_0$ como $Y - Y_0 = (\sigma - \sigma_0) + j\omega(\epsilon - \epsilon_0) = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)$, isto é, incorporando σ em um ϵ complexo, encontramos que um elemento ji da matriz Z é dado por

$$Z_{ji} = \left\langle \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)}, \mathbf{J}_j \right\rangle + j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle + \langle \nabla \phi^e, \mathbf{J}_j \rangle, \quad (3.7)$$

os vetores $[I]$ e $[V]$ são, da equação (3.5), dados por

$$[I] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_N \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

Mostraremos agora como obter os elementos de $[Z]$ e $[V]$, isto é, como calcular os produtos internos que aparecem nas equações (3.7) e (3.9).

Cálculo de $\left\langle \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)}, \mathbf{J}_j \right\rangle$

As funções de base \mathbf{J}_i e \mathbf{J}_j são definidas, da equação (2.58), por

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{C} \sum_{t=1}^{K_i} \mathbf{J}_t^i, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{C} \sum_{s=1}^{K_j} \mathbf{J}_s^j, \quad (3.11)$$

onde K_i e K_j são os números de tetraedros associados a aresta i e j , respectivamente; o símbolo \mathbf{C} significa uma composição de correntes como indicado pelo símbolo \oplus na equação (2.56); \mathbf{J}_t^i e \mathbf{J}_s^j são as componentes t e s das funções \mathbf{J}_i e \mathbf{J}_j , respectivamente. Da definição de produto interno, equação (2.41), temos que

$$\left\langle \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)}, \mathbf{J}_j \right\rangle = \int_{v_j} \frac{\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_j}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)} dv, \quad (3.12)$$

onde v_j é o espaço de definição da função teste \mathbf{J}_j . Usando as equações (3.10) e (3.11) na equação acima obtemos

$$\left\langle \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)}, \mathbf{J}_j \right\rangle = \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \int_{v_s} \frac{\mathbf{J}_t^i \cdot \mathbf{J}_s^j}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)} dv, \quad (3.13)$$

onde v_s é o espaço de definição da componente \mathbf{J}_s^j da função de teste \mathbf{J}_j . Como estamos considerando objetos homogêneos ϵ é constante, caso contrário seria aproximado pelo seu valor no centro do tetraedro t . As componentes \mathbf{J}_t^i (ou \mathbf{J}_s^j) são constantes, ao longo da região de integração, assim podemos escrever a equação anterior como

$$\left\langle \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0)}, \mathbf{J}_j \right\rangle = \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \frac{\mathbf{J}_t^i \cdot \mathbf{J}_s^j}{j\omega(\varepsilon_t - \varepsilon_0)} V_s, \quad (3.14)$$

onde ε_t é a constante dielétrica no centro do tetraedro t e V_s é o volume do tetraedro s . A definição das funções de base, equação (2.50), nos permite simplificar (3.14) para

$$\left\langle \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0)}, \mathbf{J}_j \right\rangle = \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \frac{\mathbf{J}_t^i \cdot \mathbf{I}_s^j}{j\omega(\varepsilon_t - \varepsilon_0)}, \quad (3.15)$$

onde \mathbf{I}_s^j é o vetor, associado ao tetraedro s , definido pela aresta do tetraedro que não tem contato com a aresta AB que define a função \mathbf{J}_j .

Cálculo de $\langle \nabla \phi^e, \mathbf{J}_j \rangle$

Da definição de produto interno, equação (2.41), temos que

$$\langle \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = \int_{v_j} \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i) \cdot \mathbf{J}_j \, dv, \quad (3.16)$$

usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\phi \bar{\mathbf{B}}) = \phi \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} + \nabla \phi \cdot \bar{\mathbf{B}}$ podemos escrever a equação acima como

$$\langle \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = \int_{v_j} \nabla \cdot (\phi^e(\mathbf{J}_i) \mathbf{J}_j) \, dv - \int_{v_j} \phi^e(\mathbf{J}_i) \nabla \cdot \mathbf{J}_j \, dv. \quad (3.17)$$

A segunda integral na equação (3.17) é nula porque a função \mathbf{J}_j é constante no volume v_j . Aplicando o teorema da divergência na primeira integral da equação (3.17) encontramos

$$\int_{v_j} \nabla \cdot (\phi^e(\mathbf{J}_i) \mathbf{J}_j) ds = \oint_{s_j} \phi^e(\mathbf{J}_i) \mathbf{J}_j \cdot \bar{\mathbf{n}} ds, \quad (3.18)$$

onde s_j é a superfície fechada englobando o volume v_j e $\bar{\mathbf{n}}$ é a normal à superfície apontando para fora do volume. O potencial escalar ϕ^e é dado, das equações (2.24) e (2.27) mais a equação da continuidade $\nabla \cdot \mathbf{J}_j = -j\omega q$, por

$$\phi^e = \frac{1}{\varepsilon} \int_{s_i} q_s \frac{e^{-j\kappa_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ds, \quad (3.19)$$

onde s_i é a superfície que pertence a fronteira entre dois meios, figura 2.3, e q_s é a densidade de carga nesta superfície, dada por

$$q_s = \frac{\mathbf{J}_i \cdot \bar{\mathbf{n}}}{j\omega}, \quad (3.20)$$

onde $\bar{\mathbf{n}}$ é a normal à superfície apontando para fora do volume. O método de avaliação da integral, que aparece na equação (3.19), para pontos r fora da superfície assim como no caso de $r=r'$ é mostrado no apêndice A. Substituindo a equação (3.18) na equação (3.17) obtemos

$$\langle \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = \oint_{s_j} \phi^e(\mathbf{J}_i) \mathbf{J}_j \cdot \bar{\mathbf{n}} ds, \quad (3.21)$$

e substituindo as equações (3.10) e (3.11) na equação anterior encontramos

$$\langle \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \oint_{s_s} \phi^e(\mathbf{J}_t^i) \mathbf{J}_s^j \cdot \bar{\mathbf{n}} ds. \quad (3.22)$$

Para simplificar a avaliação da equação (3.22) o termo $\phi^e(\mathbf{J}_t^i)$ será considerado constante e igual ao seu valor no baricentro da superfície s .

Cálculo de $j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle$

Da definição de produto interno, equação (2.41), temos que

$$j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = j\omega \int_{v_j} \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) \cdot \mathbf{J}_j \, dv. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.10) e (3.11) na equação anterior encontramos

$$j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = j\omega \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \int_{v_s} \mathbf{A}(\mathbf{J}_t^i) \cdot \mathbf{J}_s^j \, dv, \quad (3.24)$$

onde v_s é o volume do tetraedro s . Para simplificar a avaliação de (3.24) o termo $\mathbf{A}(\mathbf{J}_t^i)$ será considerado constante no volume v_s e o seu valor definido no baricentro do tetraedro s , assim temos

$$j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = j\omega \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \mathbf{A}(\mathbf{J}_t^i) \cdot \mathbf{J}_s^j V_s. \quad (3.25)$$

Usando a definição da função de base, equação (2.50), simplificamos (3.25) para

$$j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle = j\omega \sum_{t=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_j} \mathbf{A}(\mathbf{J}_t^i) \cdot \mathbf{I}_s^j, \quad (3.26)$$

\mathbf{I}_s^j é o vetor associado ao tetraedro s , definido pela aresta do tetraedro que não tem contato com a aresta comum a todos os tetraedros que definem a função \mathbf{J}_j .

Para calcular $\mathbf{A}(\mathbf{J}_t^i)$ usamos o procedimento apresentado no apêndice A.

No cálculo dos termos $\langle \nabla \phi^e, \mathbf{J}_j \rangle$ e $j\omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle$ foi feito a aproximação de $\phi^e(\mathbf{J}_i)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{J}_i)$ no baricentro das respectivas regiões de

integração. Esta aproximação significa que estamos usando a técnica de casamento pontual .

Cálculo de $\langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_j \rangle$

Da definição de produto interno, equação (2.41), temos que

$$\langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_j \rangle = \int_{v_j} \mathbf{E}^{inc} \cdot \mathbf{J}_j \, dv. \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.11) na equação anterior encontramos

$$\langle \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{J}_j \rangle = \sum_{s=1}^{kj} \int_{v_s} \mathbf{E}^{inc} \cdot \mathbf{J}_s^j \, dv, \quad (3.28)$$

onde v_s é o volume do tetraedro s . Para calcular a integral que aparece na equação (3.28) usamos o procedimento apresentado no apêndice A.

3.2 Campo espalhado por um cubo homogêneo

Na Figura 3.1 temos um cubo dielétrico com $0,2\lambda$ de aresta, no qual incide uma onda plana propagando na direção $+z$ com intensidade $E_x^i = 377 \text{ V/m}$. O campo espalhado distante é calculado nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$. A frequência do campo é de 300 MHz e os campos são calculados para $\epsilon_c = 4,0$, $\epsilon_c = 9,0$ e $\epsilon_c = 1,0 - j1000,0$, onde ϵ_c é a permissividade relativa complexa definida por

$$\epsilon_c = \epsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon_0}, \quad (3.29)$$

com

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (3.30)$$

A aresta do cubo foi dividida em quatro segmentos o que gerou 64 cubos e com o uso da primitiva definida no apêndice B temos um total de 384 tetraedros. O número de funções geradas foi de 604 e aplicando o procedimento descrito na seção 2.3 temos a definição de um conjunto de 480 funções de base linearmente independentes.

Na Figura 3.2 temos o campo espalhado para $\epsilon_c = 4,0$ comparado com os resultados apresentados em [59], que discretizou com 512 cubos, com três incógnitas por cubo, num total de 1536 incógnitas. Neste trabalho foram usadas funções pulso para expandir a corrente equivalente. Com esta mesma

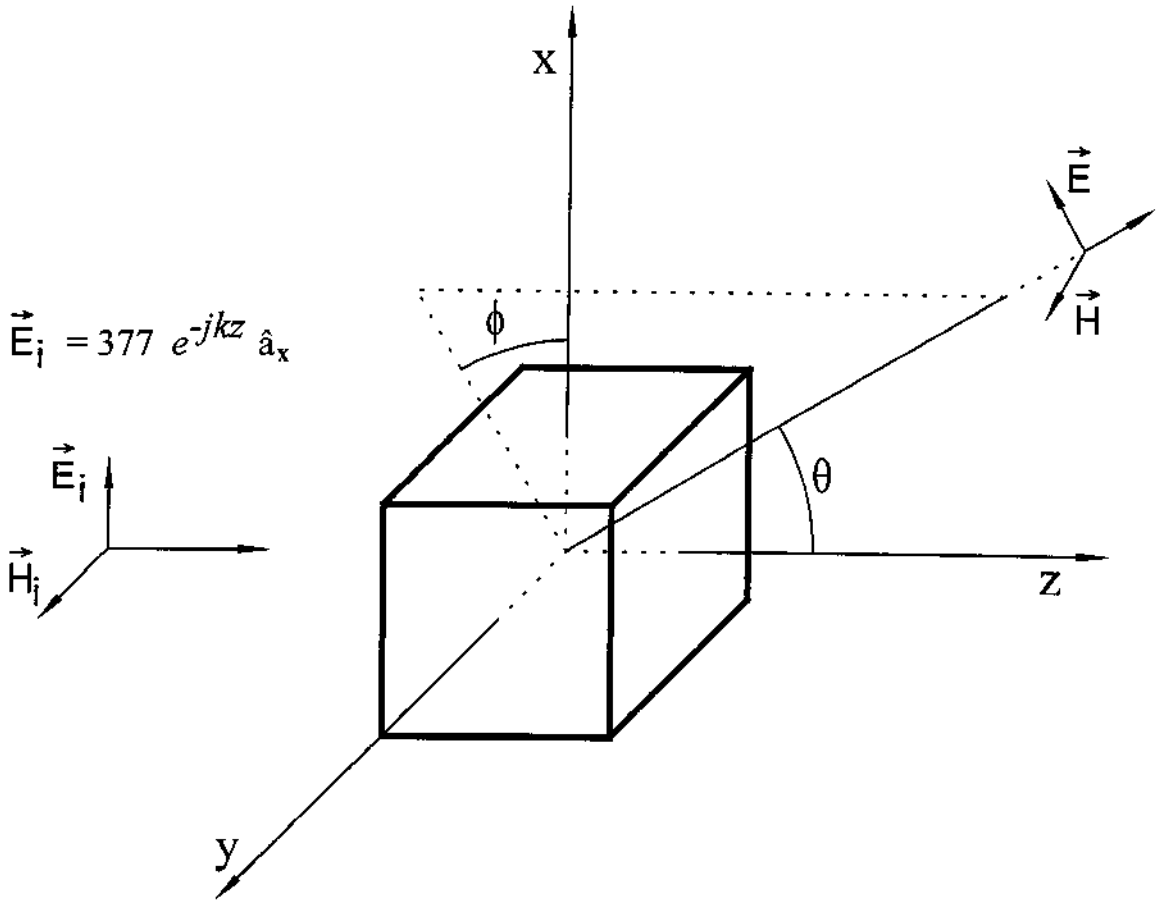


Figura 3.1 Cubo dielétrico iluminado por uma onda plana.

O sistema de coordenadas coincide com o centro do cubo.

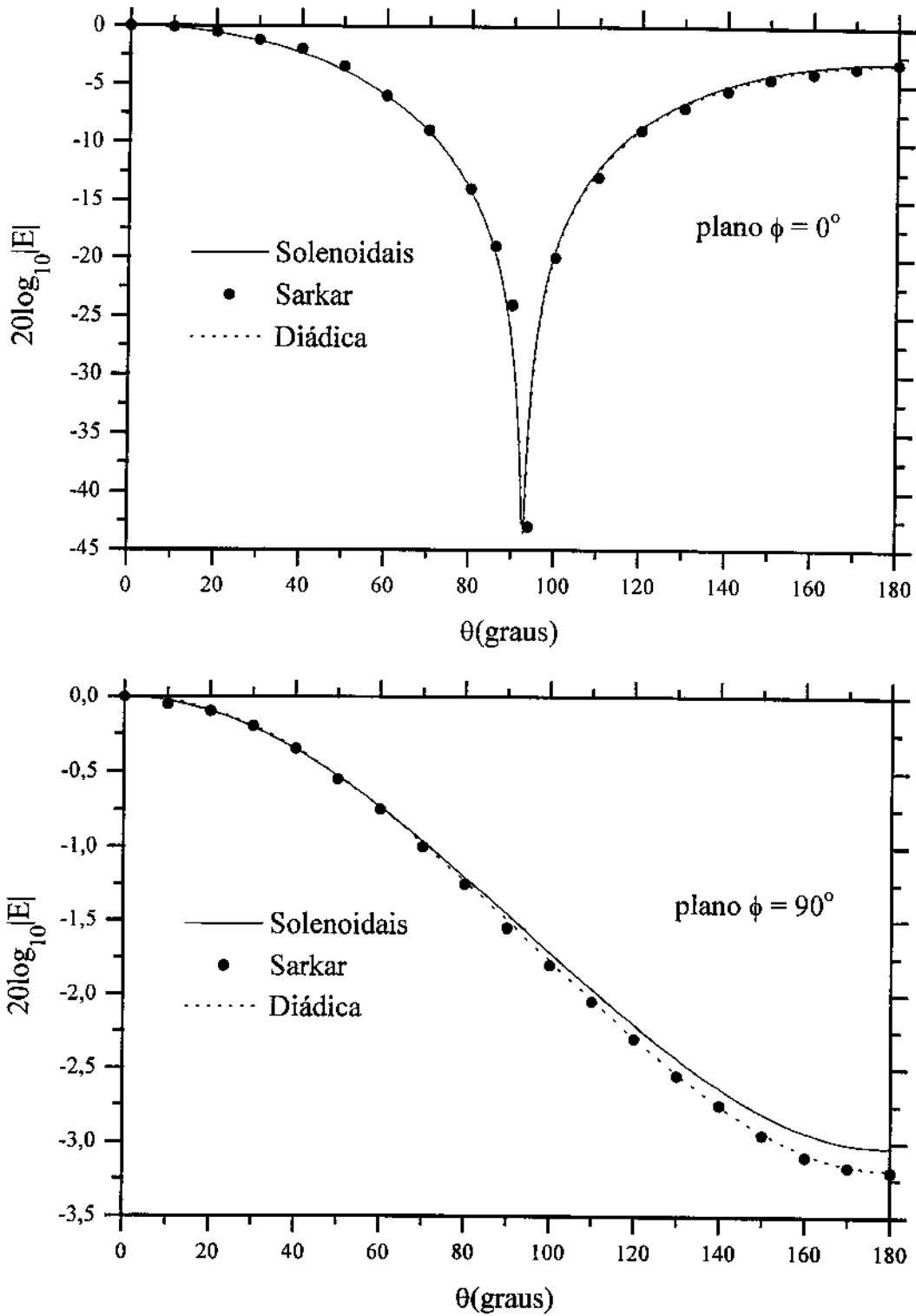


Figura 3.2 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta

$0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$.

funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas

Sarkar e diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas

discretização foi resolvido o problema com a função de Green diádica [47] no lugar da função de Green escalar, para definir o potencial vetor magnético, equação (2.24). O resultado concorda com o apresentado em [59], que usou a técnica de diferenças finitas para calcular o gradiente do potencial ϕ^e . Este mesmo problema foi resolvido com o uso do método da matriz linha de transmissão [69] e os resultados concordaram.

Os campos espalhados para o caso $\epsilon_c = 9,0$ são mostrados na Figura 3.3, comparados com os resultados apresentados em [59] e com o uso da função de Green diádica. Foi usado o mesmo nível de discretização do caso $\epsilon_c = 4,0$. Este problema foi resolvido com o uso de funções polinomiais de domínio global [31] para expandir a corrente equivalente e os resultados concordaram.

O caso do cubo dielétrico com perdas é mostrado na Figura 3.4. O resultado está dentro do comportamento esperado, quando comparado com um cubo condutor perfeito [59]. A maior diferença é de cerca de 1,75 dB, inferior a apresentada em [59] que foi de 2 dB.

Na Figura 3.5 temos o campo espalhado para um cubo com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 16,0$, usamos quatro níveis de discretização para mostrar a convergência do resultado. A primeira discretização foi com 384 tetraedros e 480 incógnitas, a segunda com 750 tetraedros e 900 incógnitas, a terceira com 1296 tetraedros e 1512 incógnitas e a quarta com 2058 tetraedros e 2352 incógnitas. O campo espalhado do mesmo cubo com $\epsilon_c = 25,0$ é mostrado na Figura 3.6.

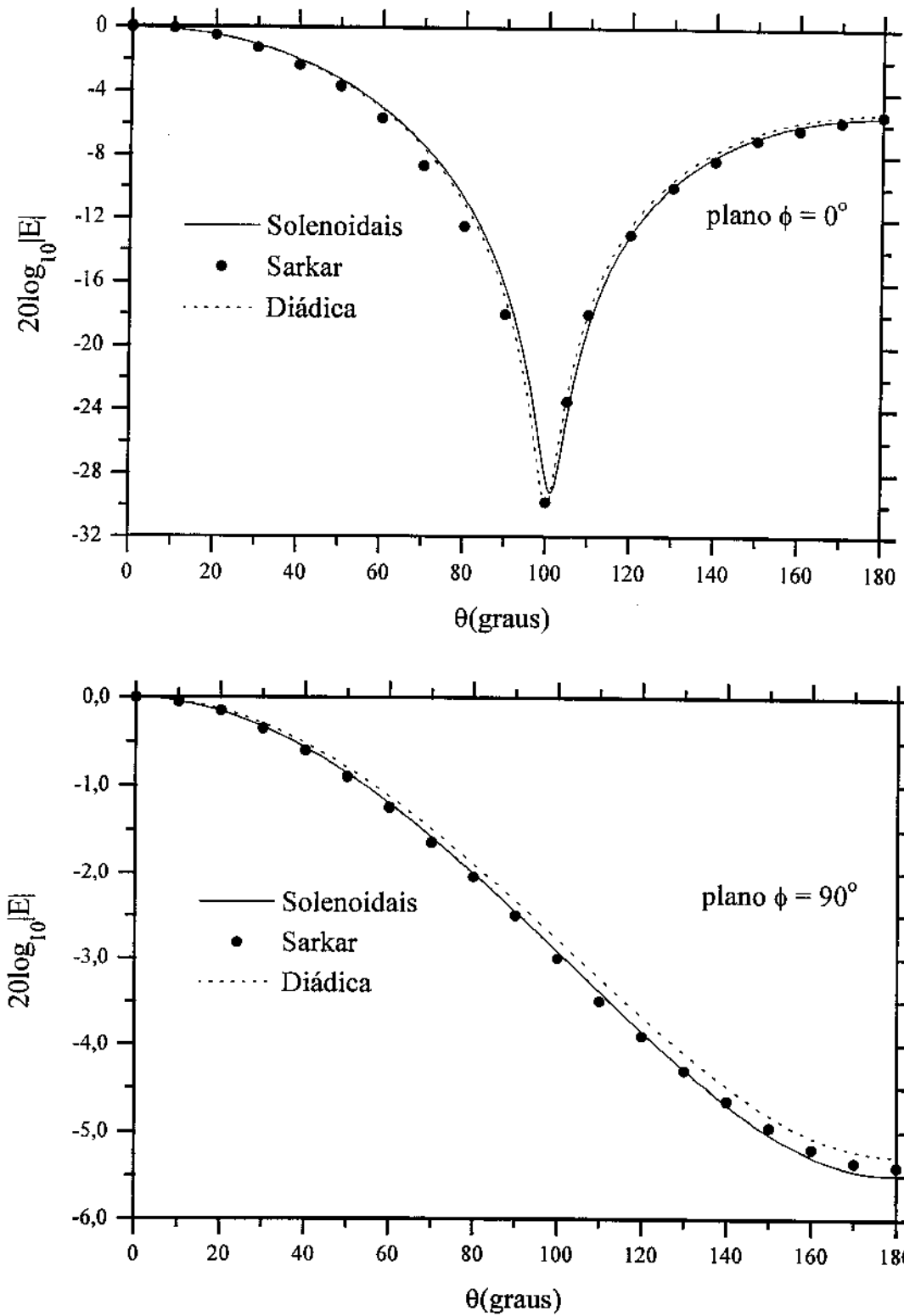


Figura 3.3 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$.

funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 Sarkar e diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas

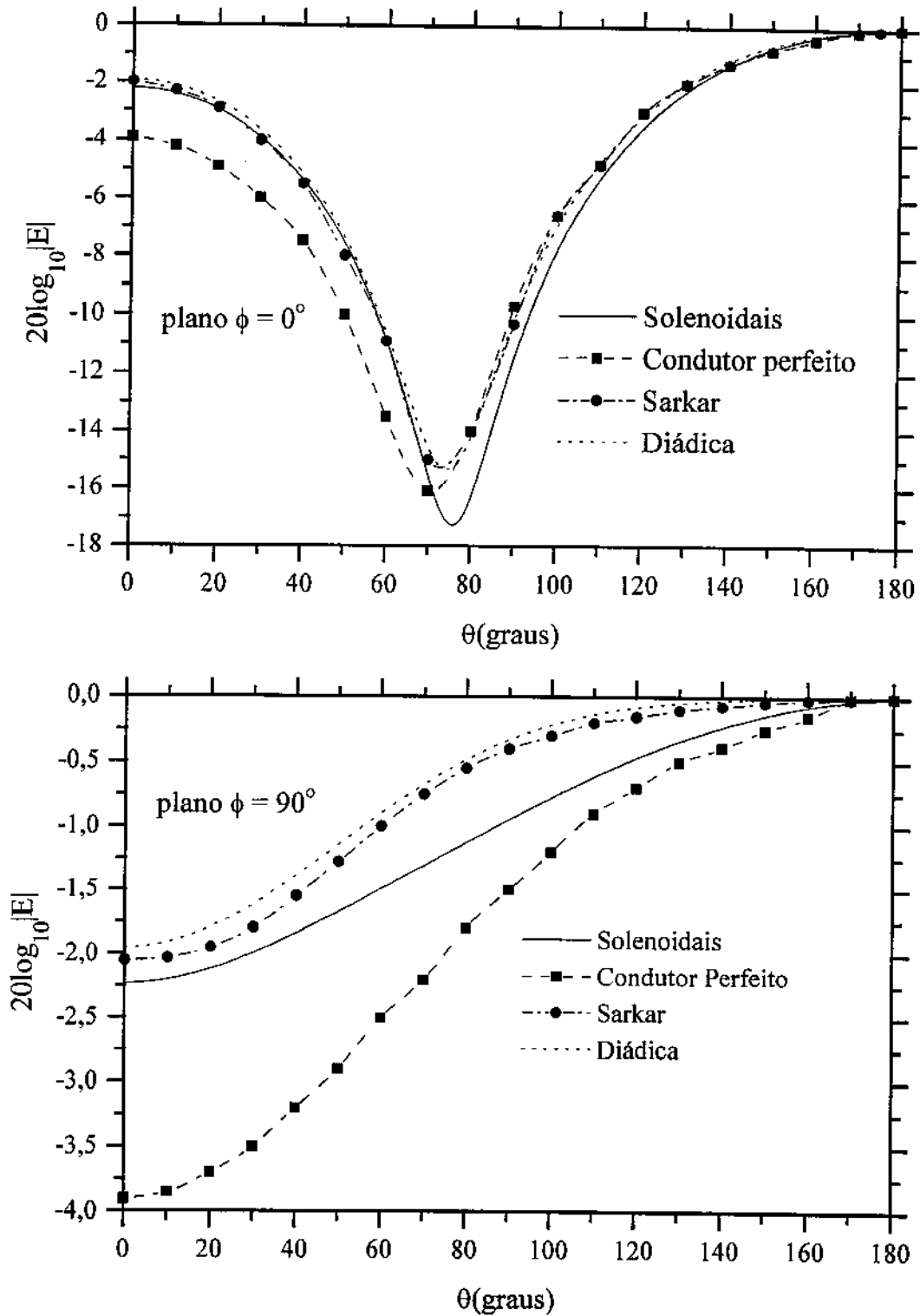


Figura 3.4 Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 1,0 - j1000,0$.

funções solenoidais, 384 tetraedros e 480 incógnitas
Sarkar e diádica, 512 cubos e 1536 incógnitas

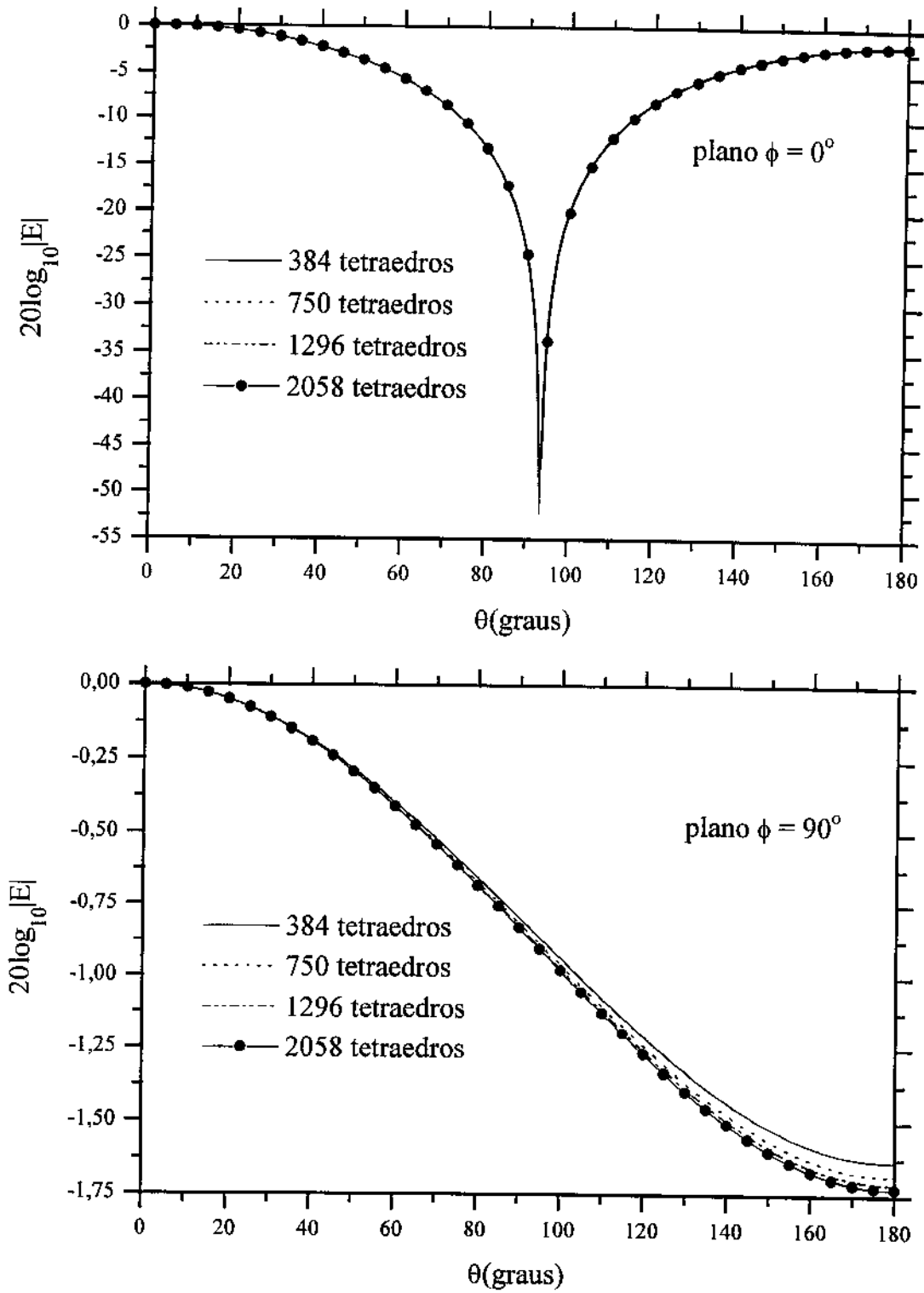


Figura 3.5 Campo espalhado pelo cubo de aresta $0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 16,0$

funções solenoidais 1 - 384 tetraedros e 480 incógnitas

funções solenoidais 2 - 750 tetraedros e 900 incógnitas

funções solenoidais 3 - 1296 tetraedros e 1512 incógnitas

funções solenoidais 4 - 2058 tetraedros e 2352 incógnitas

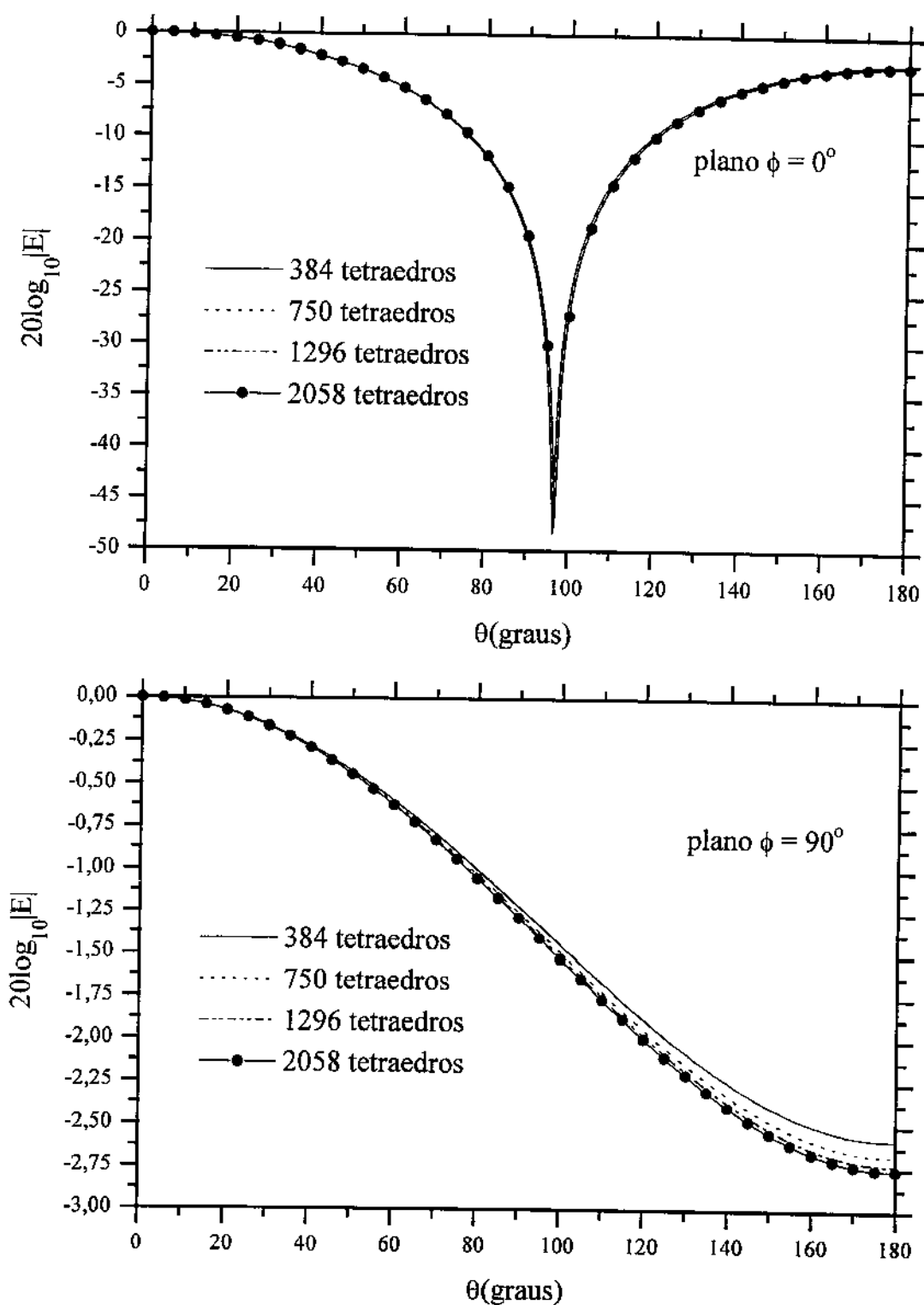


Figura 3.6 Campo espalhado pelo cubo de aresta $0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 25,0$

funções solenoidais 1 - 384 tetraedros e 480 incógnitas

funções solenoidais 2 - 750 tetraedros e 900 incógnitas

funções solenoidais 3 - 1296 tetraedros e 1512 incógnitas

funções solenoidais 4 - 2058 tetraedros e 2352 incógnitas

Usando a função de Green diádica e funções pulso, calculamos o campo espalhado do cubo com $0,1\lambda$ de aresta para $\epsilon_c = 16,0$ e $\epsilon_c = 25,0$, Figuras 3.7 e 3.8, respectivamente. A primeira discretização foi com 512 cubos e 1536 incógnitas, segunda com 729 cubos e 2187 incógnitas e a terceira com 1000 cubos e 3000 incógnitas.

A comparação dos resultados com o uso de funções solenoidais e funções pulso, com o maior nível de discretização, é mostrada na Figura 3.9 e 3.10 para os casos $\epsilon_c = 16,0$ e $\epsilon_c = 25,0$, respectivamente. A diferença entre os resultados pode ser explicada pelas cargas espúrias que as funções pulso geram no interior do cubo, o que não acontece com o uso de funções solenoidais, também é importante notar que a diferença aumenta com o aumento do ϵ .

Na Tabela 3.1 temos as informações sobre a discretização de um cubo, a relação entre funções (incógnitas) e tetraedros diminui com o aumento da discretização. Esta relação tem um limite estimado de 1.1.

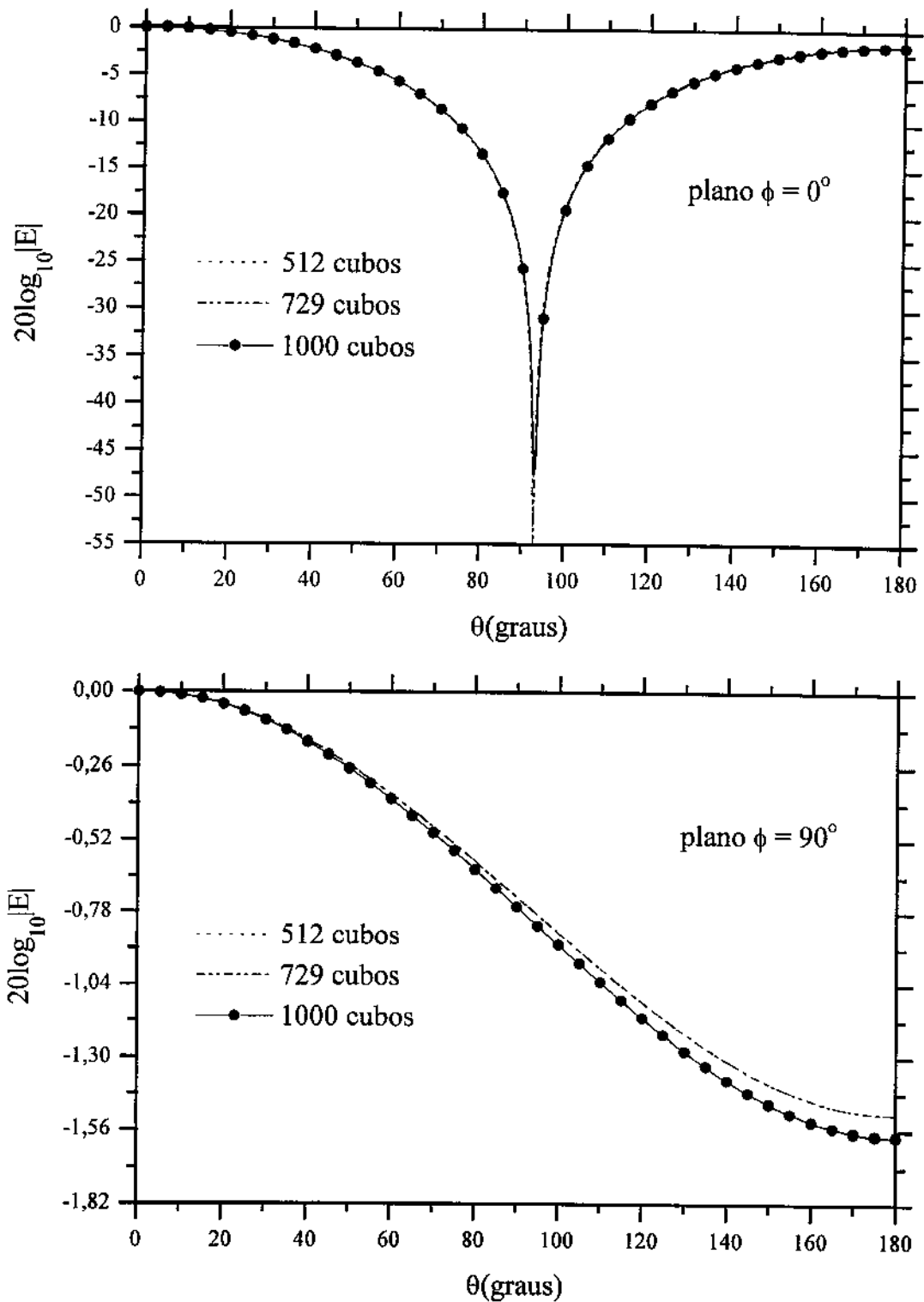


Figura 3.7 Campo espalhado pelo cubo de aresta $0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 16,0$

diádica 1 - 512 cubos e 1536 incógnitas

diádica 2 - 729 cubos e 2187 incógnitas

diádica 3 - 1000 cubos e 3000 incógnitas

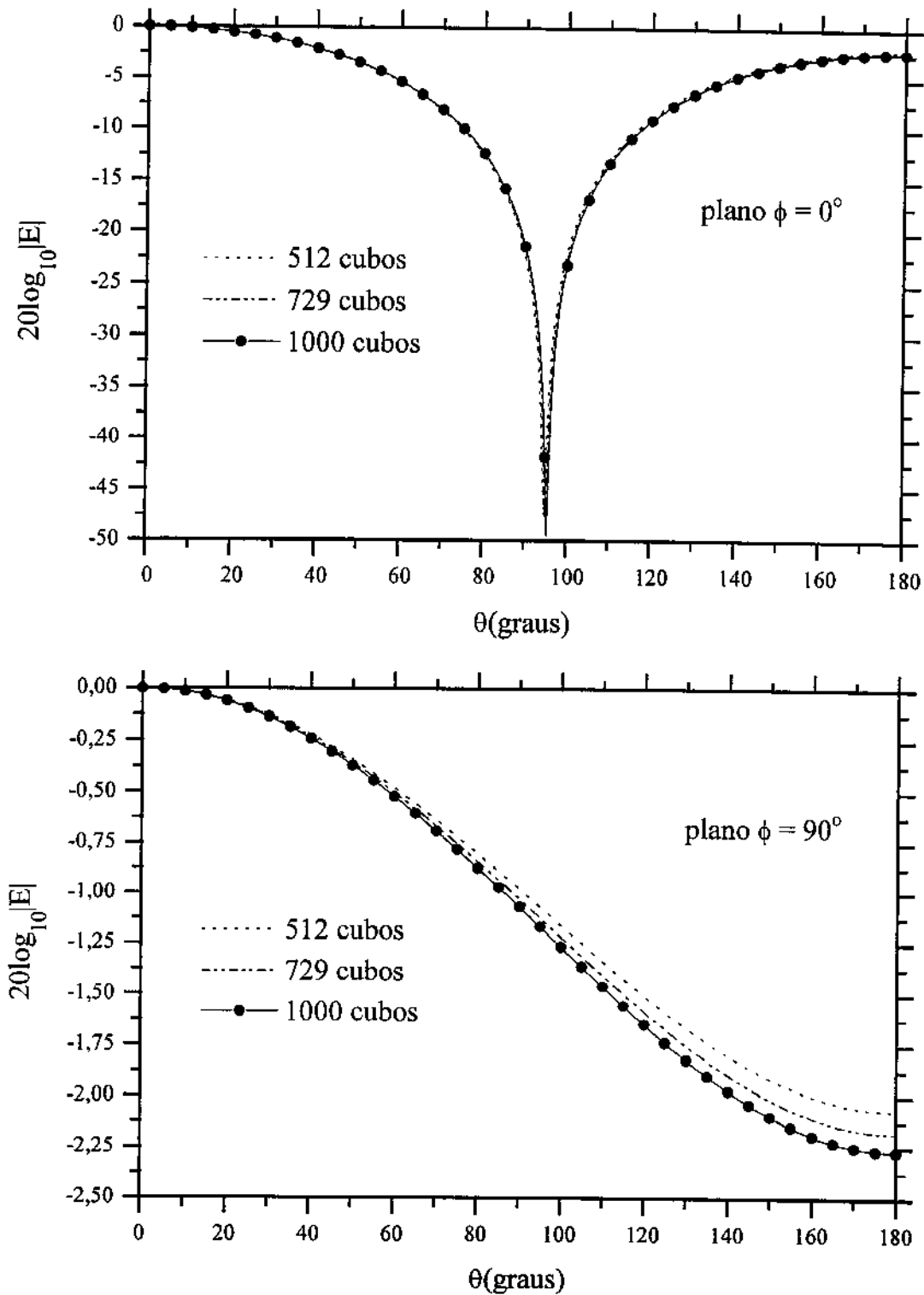


Figura 3.8 Campo espalhado pelo cubo de aresta $0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 25,0$

diádica 1 - 512 cubos e 1536 incógnitas

diádica 2 - 729 cubos e 2187 incógnitas

diádica 3 - 1000 cubos e 3000 incógnitas

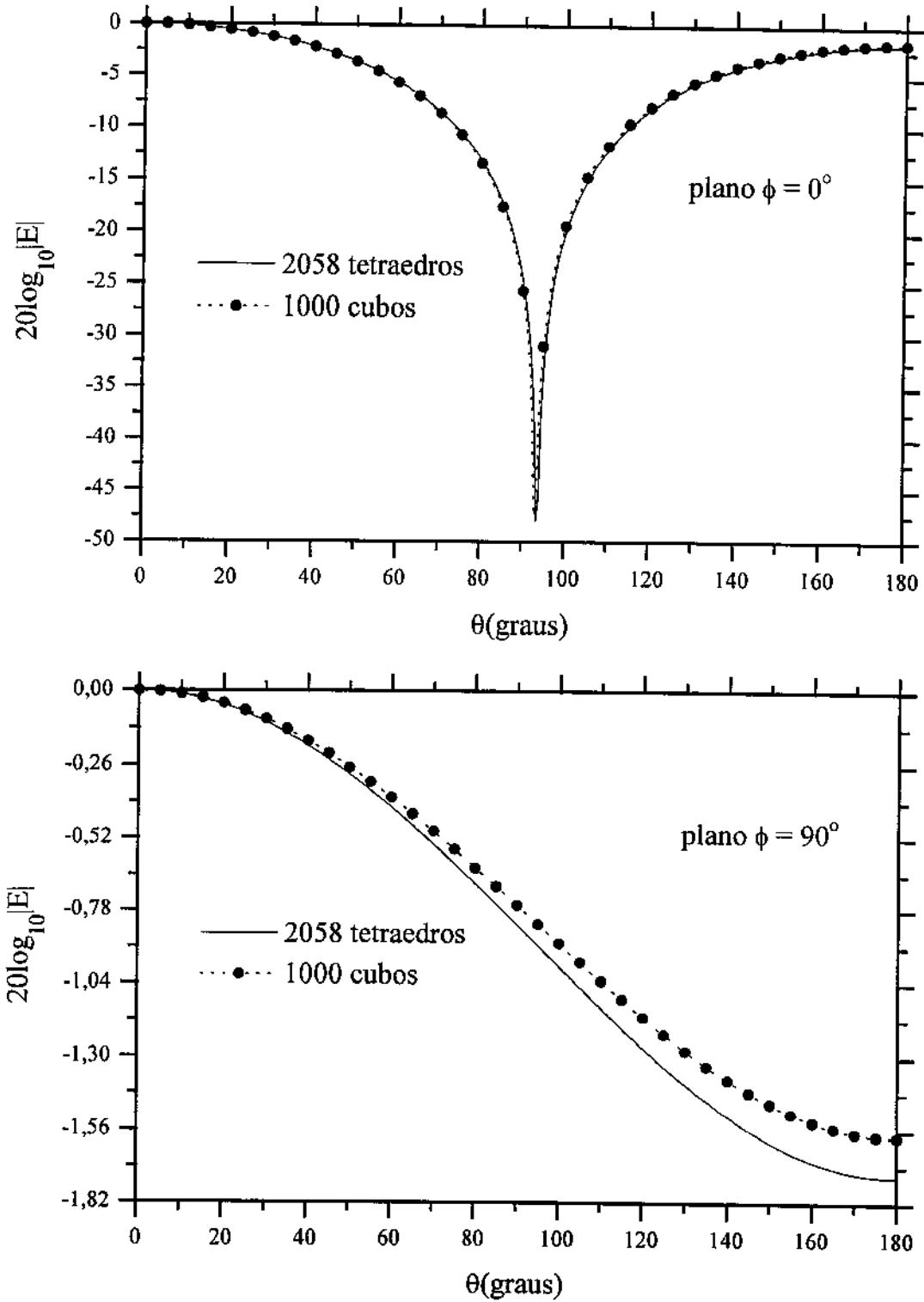


Figura 3.9 Campo espalhado pelo cubo de aresta $0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 16,0$
 funções solenoidais - 2058 tetraedros e 2352 incógnitas
 diádica - 1000 cubos e 3000 incógnitas

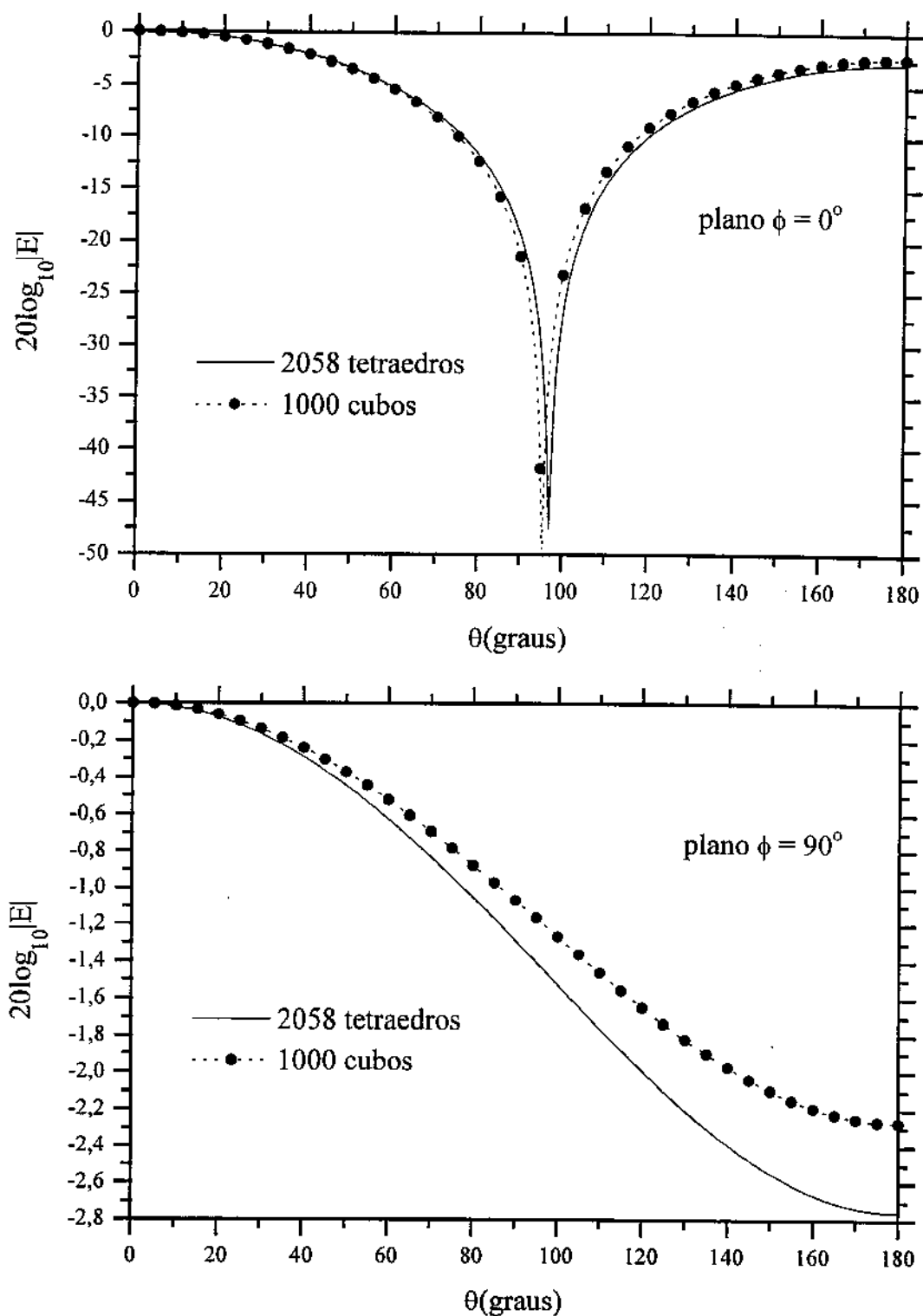


Figura 3.10 Campo espalhado pelo cubo de aresta $0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 25,0$
 funções solenoidais - 2058 tetraedros e 2352 incógnitas
 diádica - 1000 cubos e 3000 incógnitas

Tabela 3.1 Níveis de discretização de um cubo

cubo dividido em x cubos	número de tetraedros	número de funções LD	número de funções LI	relação funções LI/tetraedros
1	6	19	12	2,0
8	48	90	72	1,50
27	162	279	216	1,33
64	384	604	480	1,25
125	750	1115	900	1,20
216	1296	1854	1512	1,17
343	2058	2863	2352	1,14

3.3 Campo espalhado e campo interno de uma esfera homogênea

Na Figura 3.11 temos uma esfera homogênea iluminada por uma onda plana que propaga na direção $+z$. A onda está polarizada paralelamente ao plano xy . As duas polarizações consideradas são definidas como polarização horizontal \vec{E}_h e polarização vertical \vec{E}_v , ambas em relação ao plano xz . Comparamos os resultados do cálculo da “bistatic cross section” e do campo interno, este calculado no baricentro de cada tetraedro, com a solução dada pela série de Mie [70]. A “bistatic cross section” é definida [70] por

$$\sigma_d(\phi, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\vec{E}^s(\phi, \theta)|^2}{|\vec{E}^i(\phi, \theta)|^2}, \quad (3.31)$$

onde \vec{E}^i é o campo incidente na esfera e \vec{E}^s o campo espalhado por ela. Nos gráficos a “bistatic cross section” foi normalizada pelo fator πa^2 . A esfera foi discretizada através do procedimento descrito no apêndice C.

O primeiro caso é de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\epsilon_r = 4,0$ discretizada com 520 tetraedros, 130 na primeira camada e 390 na segunda, Figura C.3, esta discretização gerou 719 funções linearmente independentes. Vemos na Figura 3.12 que a “bistatic cross section” apresenta um erro em torno de 2,8% (polarização vertical) com um pico no ponto de mínimo (polarização horizontal). O campo interno apresenta um erro máximo de 4,2% com a maioria dos pontos com um erro em torno de 1,0%. Aumentando a discretização para 2128 tetraedros, 532 na primeira camada e 1596 na segunda, que geraram 2280 funções LI, temos um erro de 1,16% para a polarização vertical e um erro máximo de 3,0% para polarização horizontal, Figura 3.13. O campo interno apresentou um erro máximo de 2,66%, Figura 3.14.

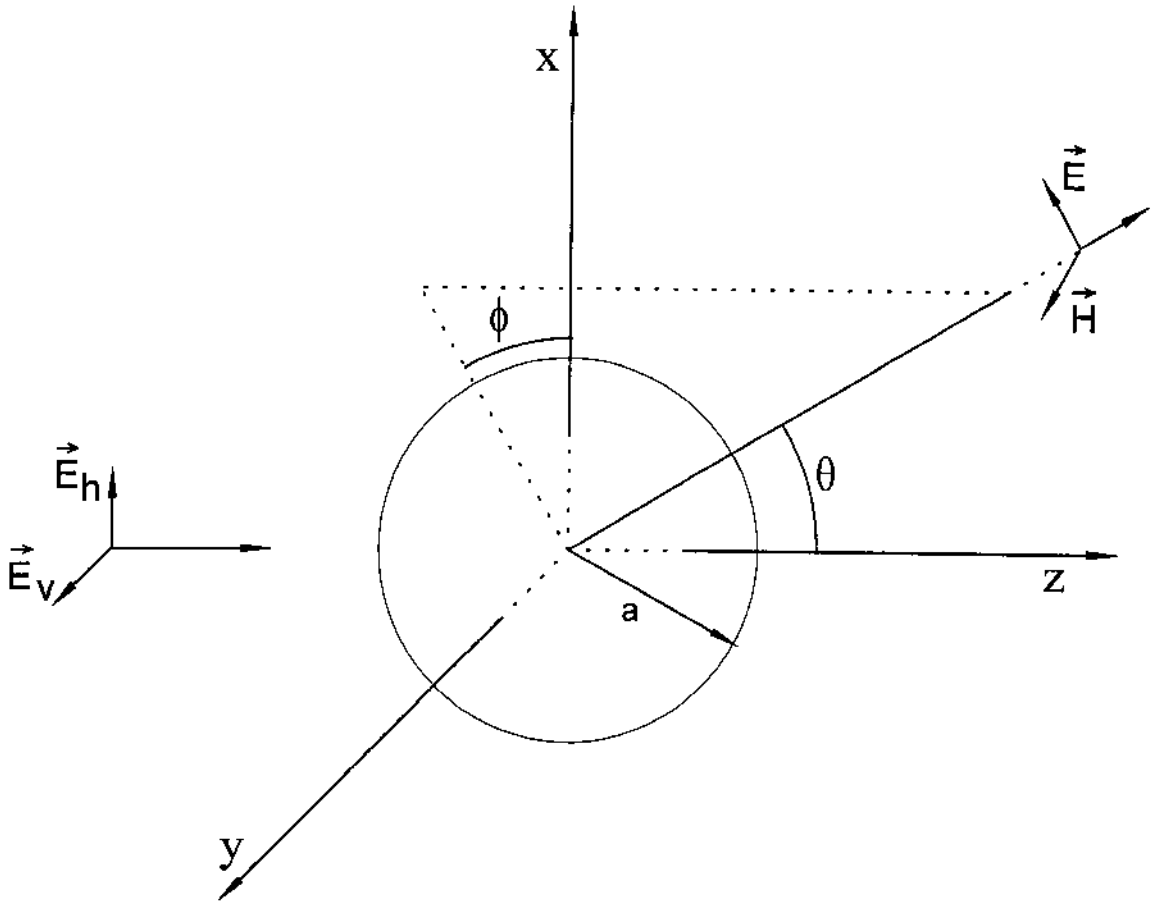


Figura 3.11 Esfera homogênea iluminada por uma onda plana.

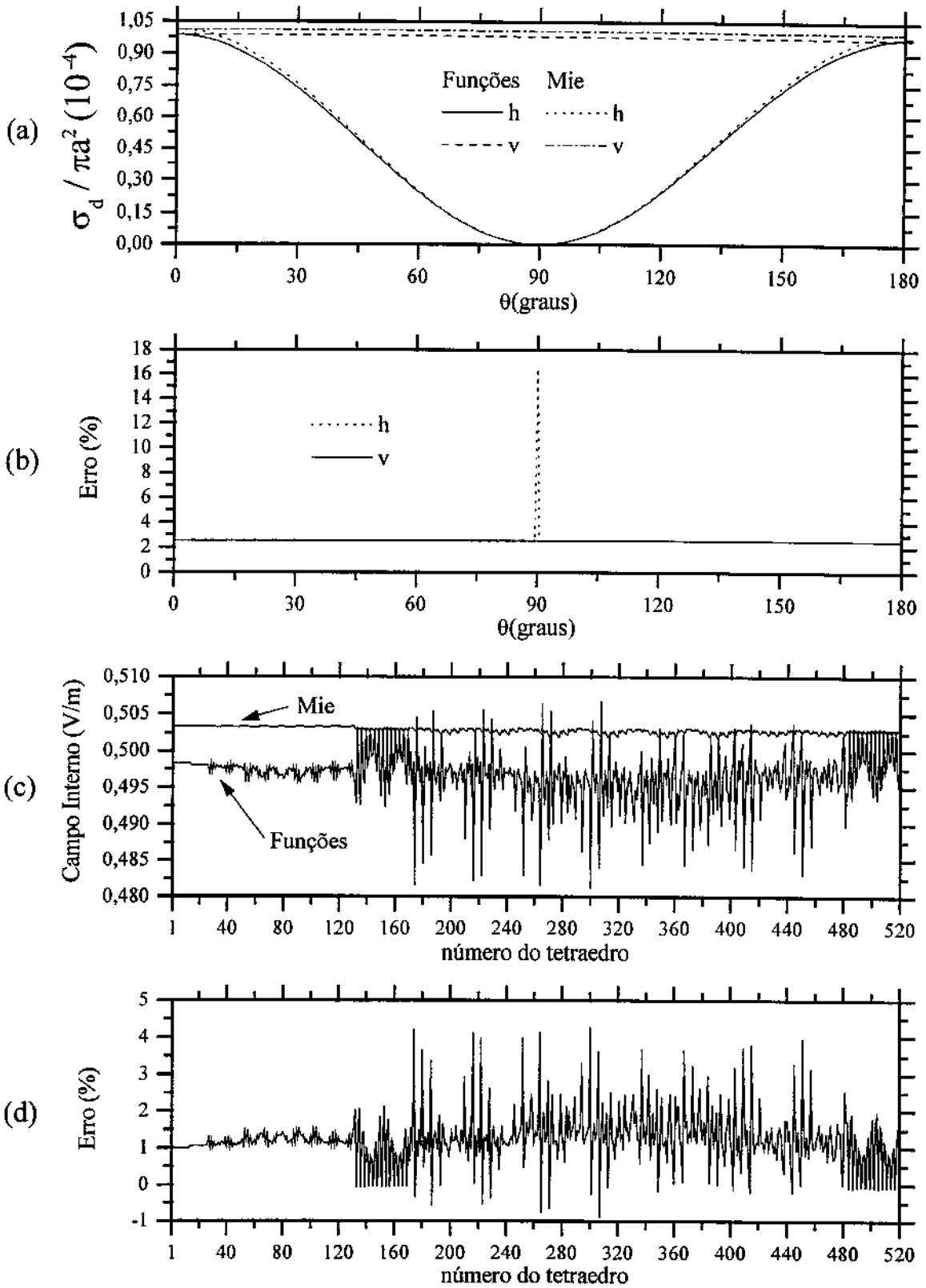


Figura 3.12 Esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\epsilon_r = 4,0$ discretizada com 520 tetraedros

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

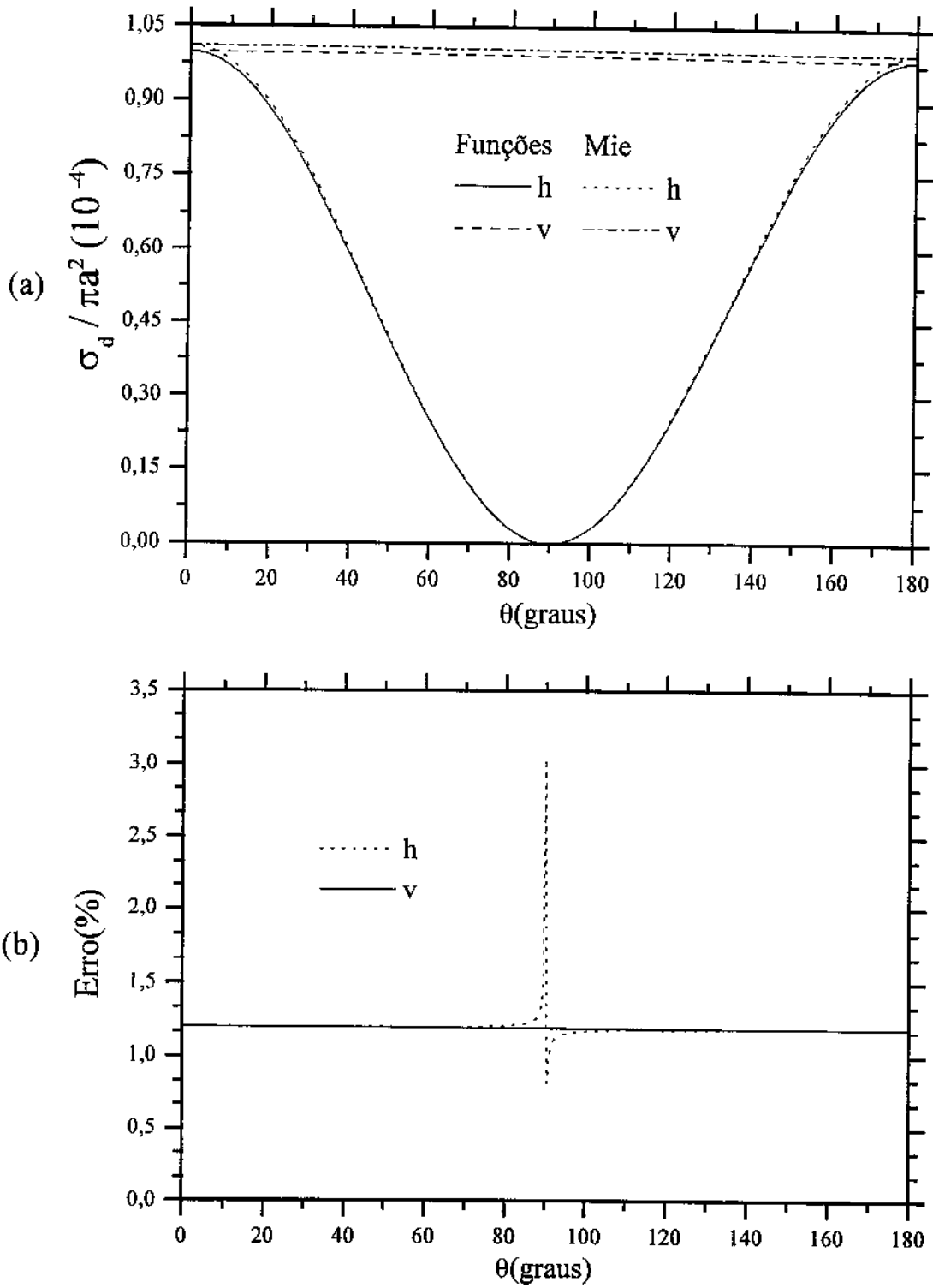


Figura 3.13 Esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\epsilon_r = 4,0$ discretizada com 2128 tetraedros

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

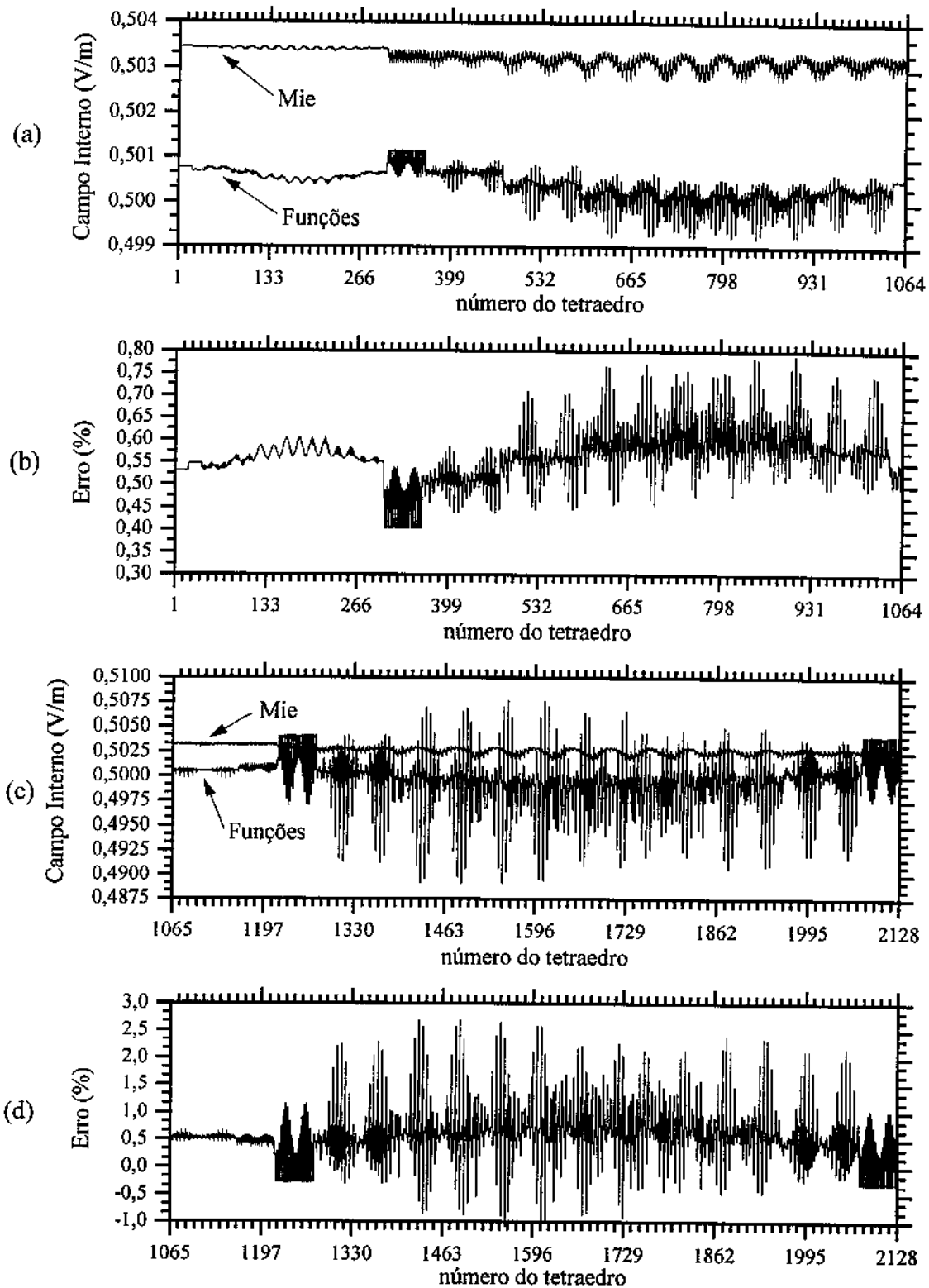


Figura 3.14 Esfera com $\kappa_0 a = 0,1$ e $\epsilon_r = 4,0$ discretizada com 2128 tetraedros

- (a) campo interno do 1^o ao 1064^o tetraedro
- (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno do 1065^o ao 2128^o tetraedro
- (d) erro em relação a série de Mie

Nas Figuras 3.15 à 3.18 temos uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$, $9,0$, $16,0$ e $25,0$, respectivamente, discretizada com os mesmos 520 tetraedros do caso anterior. O erro cresceu com o aumento da constante dielétrica, que aumenta a sensibilidade ao erro introduzido pela aproximação numérica das integrais que aparecem no cálculo da matriz momento [66]. Outro aspecto é que o campo interno da esfera apresenta variações mais rápidas com o aumento de ϵ_r o que significa que devemos aumentar a discretização para ter um conjunto de funções de base que seja apropriado para representar estas variações. Fizemos isto para a esfera de $\epsilon_r = 25,0$ discretizando com os mesmos 2128 tetraedros do caso anterior, com isto diminuimos o erro, Figuras 3.19 e 3.20. Com este mesmo nível de discretização fizemos $\epsilon_r = 40,0$ e vemos que o erro aumenta, Figuras 3.21 e 3.22.

Na Tabela 3.2 temos um quadro do comportamento do erro na análise de esferas homogêneas.

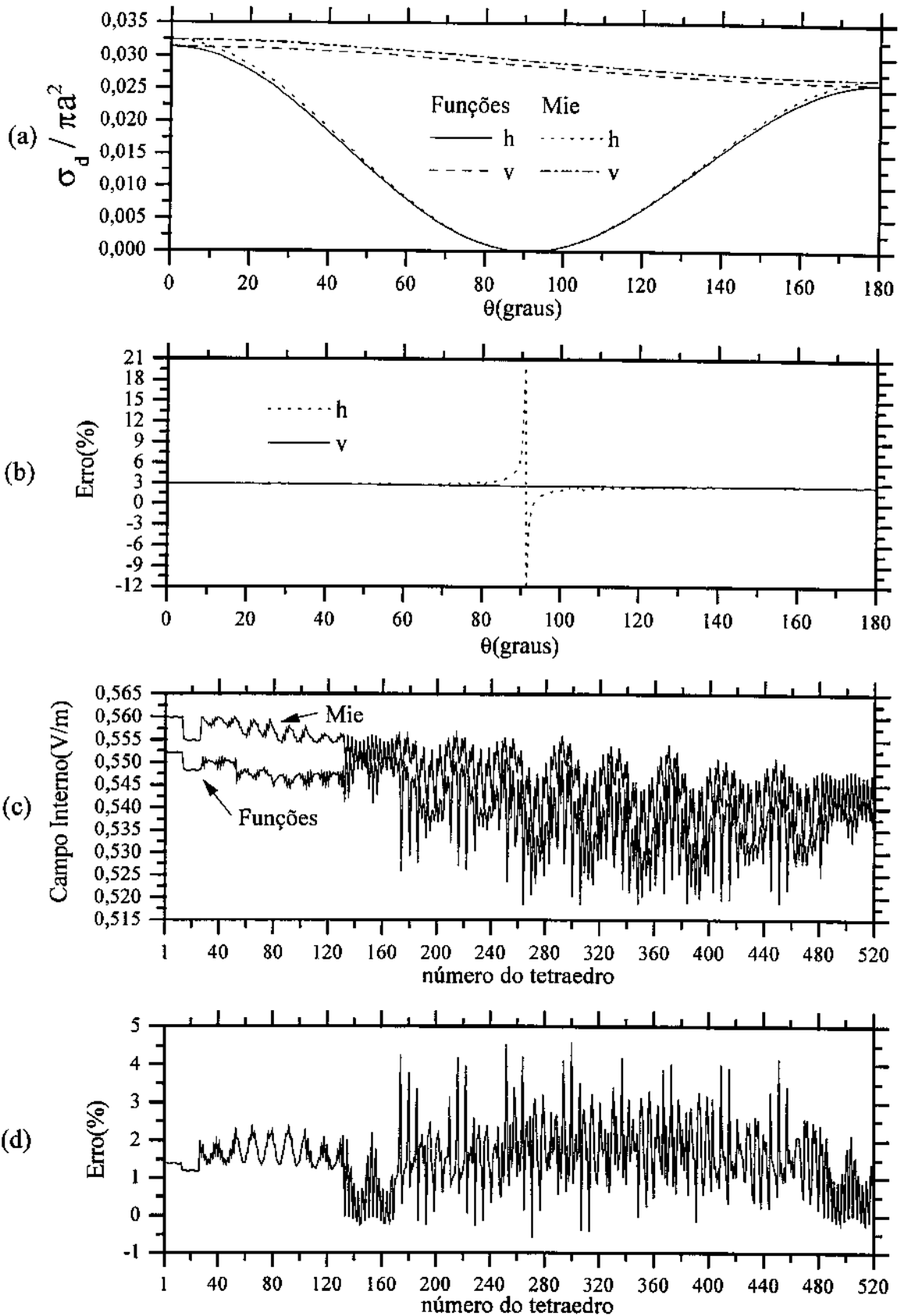


Figura 3.15 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$ discretizada com 520 tetraedros

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

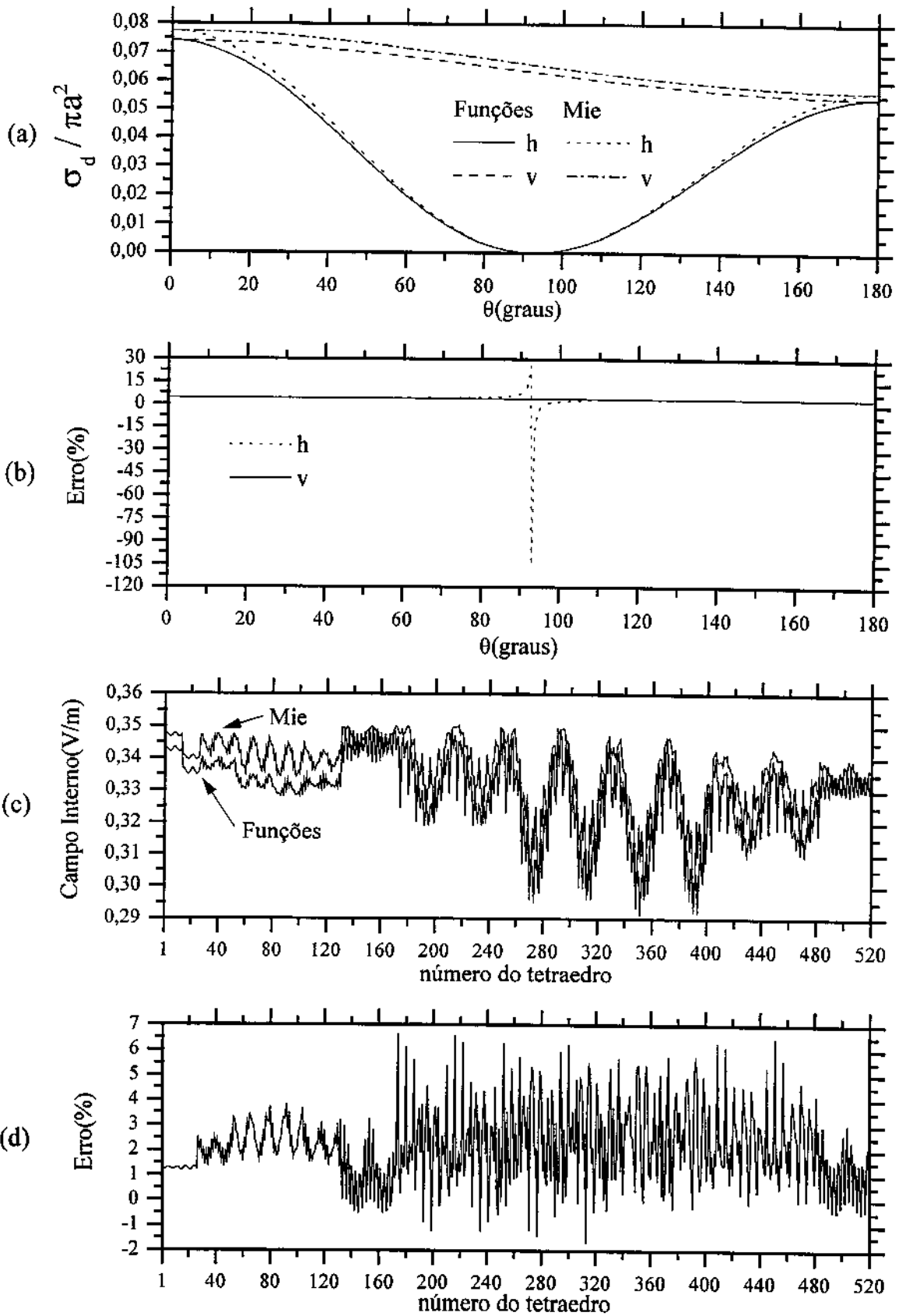


Figura 3.16 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$ discretizada com 520 tetraedros

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de

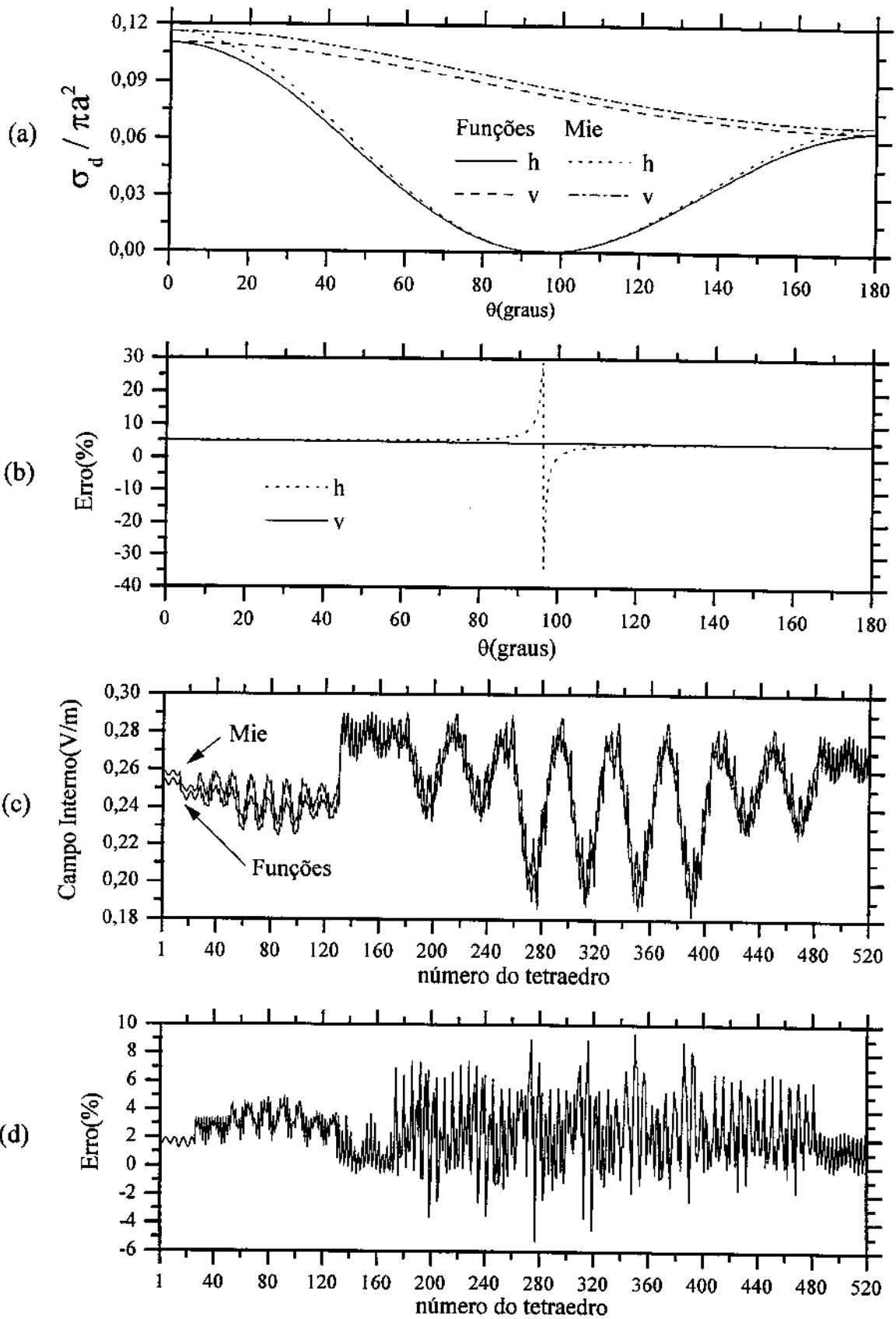


Figura 3.17 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 16,0$ discretizada com 520 tetraedros

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

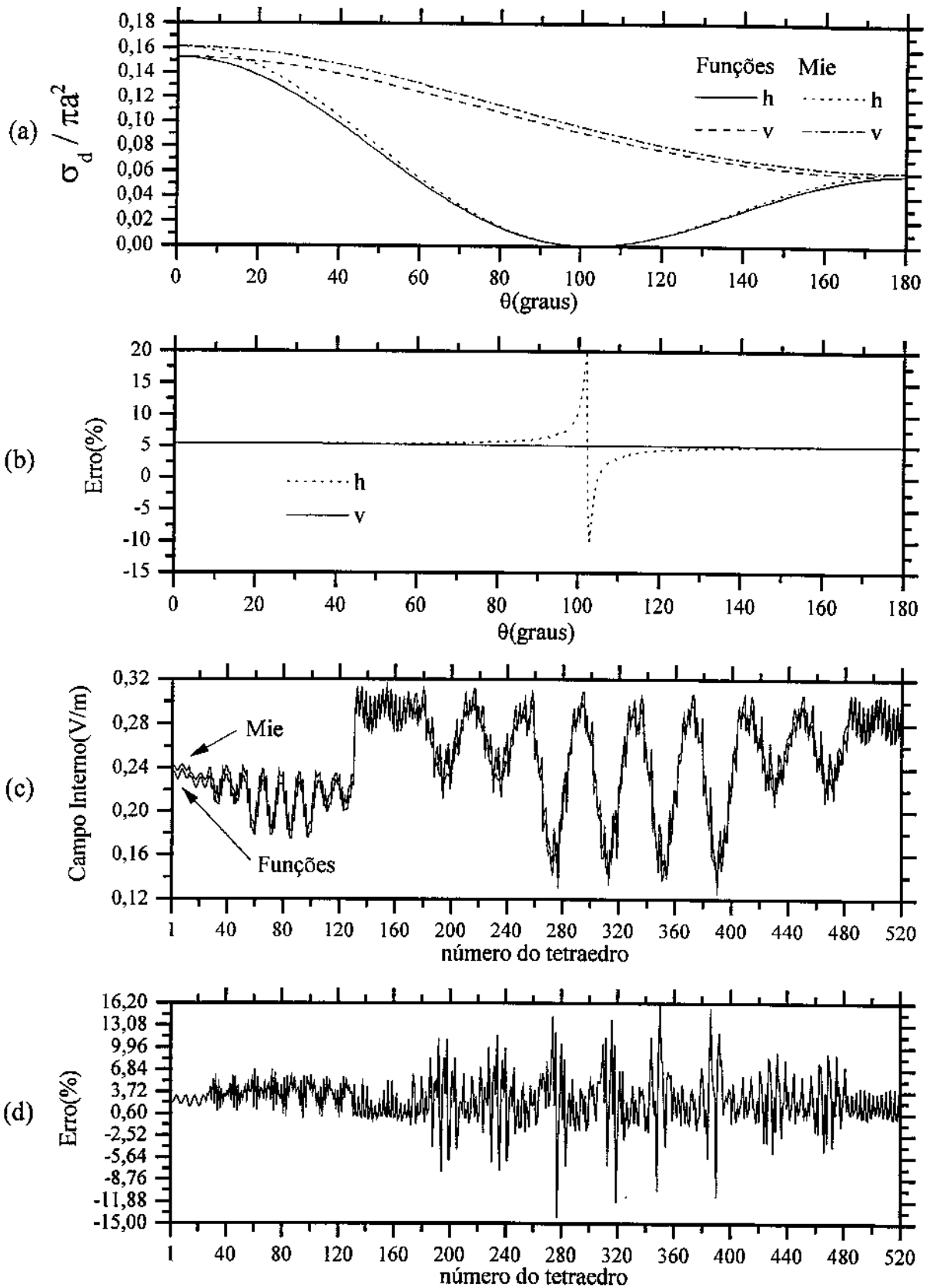


Figura 3.18 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$ discretizada com 520 tetraedros

- (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

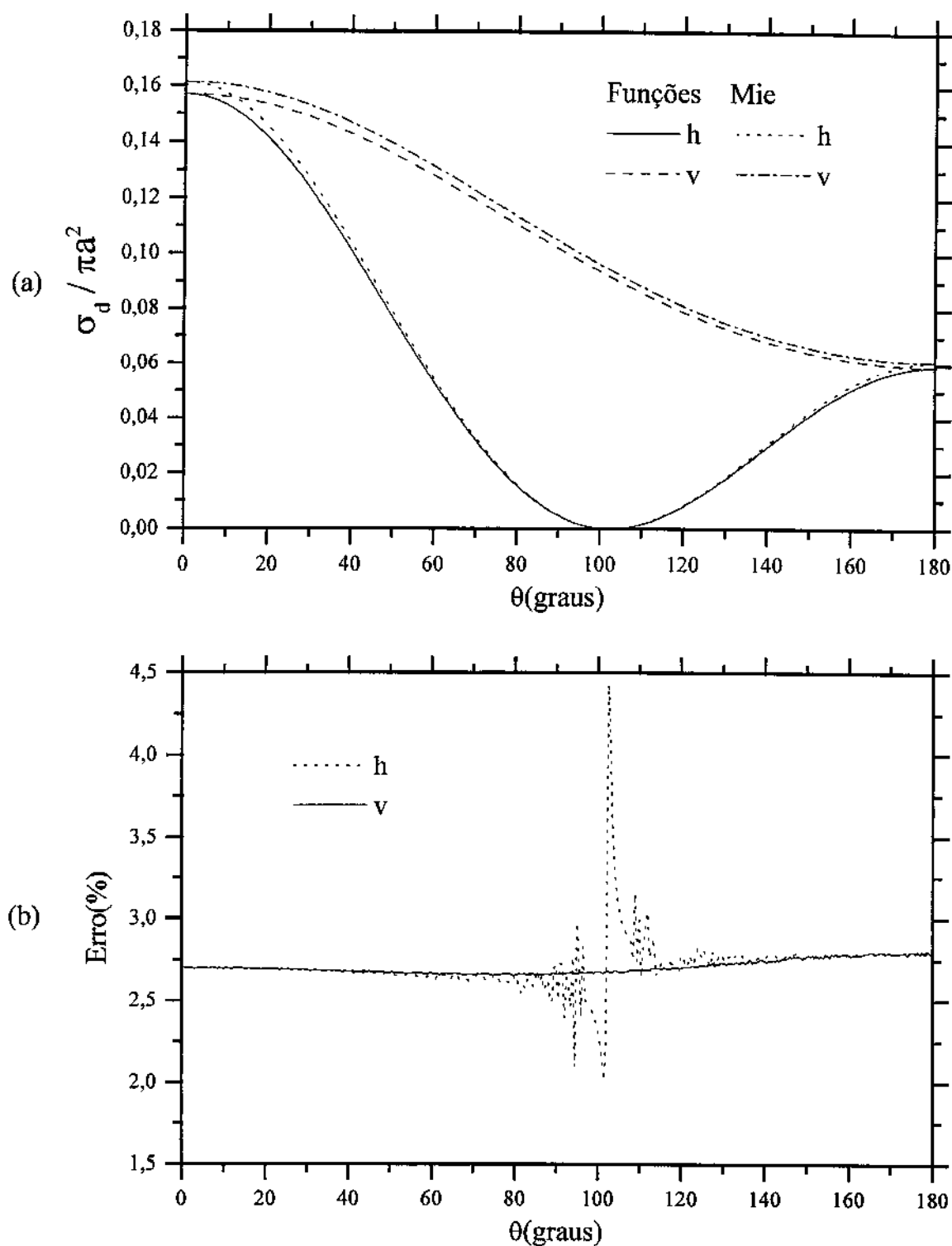


Figura 3.19 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$ discretizada com 2128 tetraedros
 (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

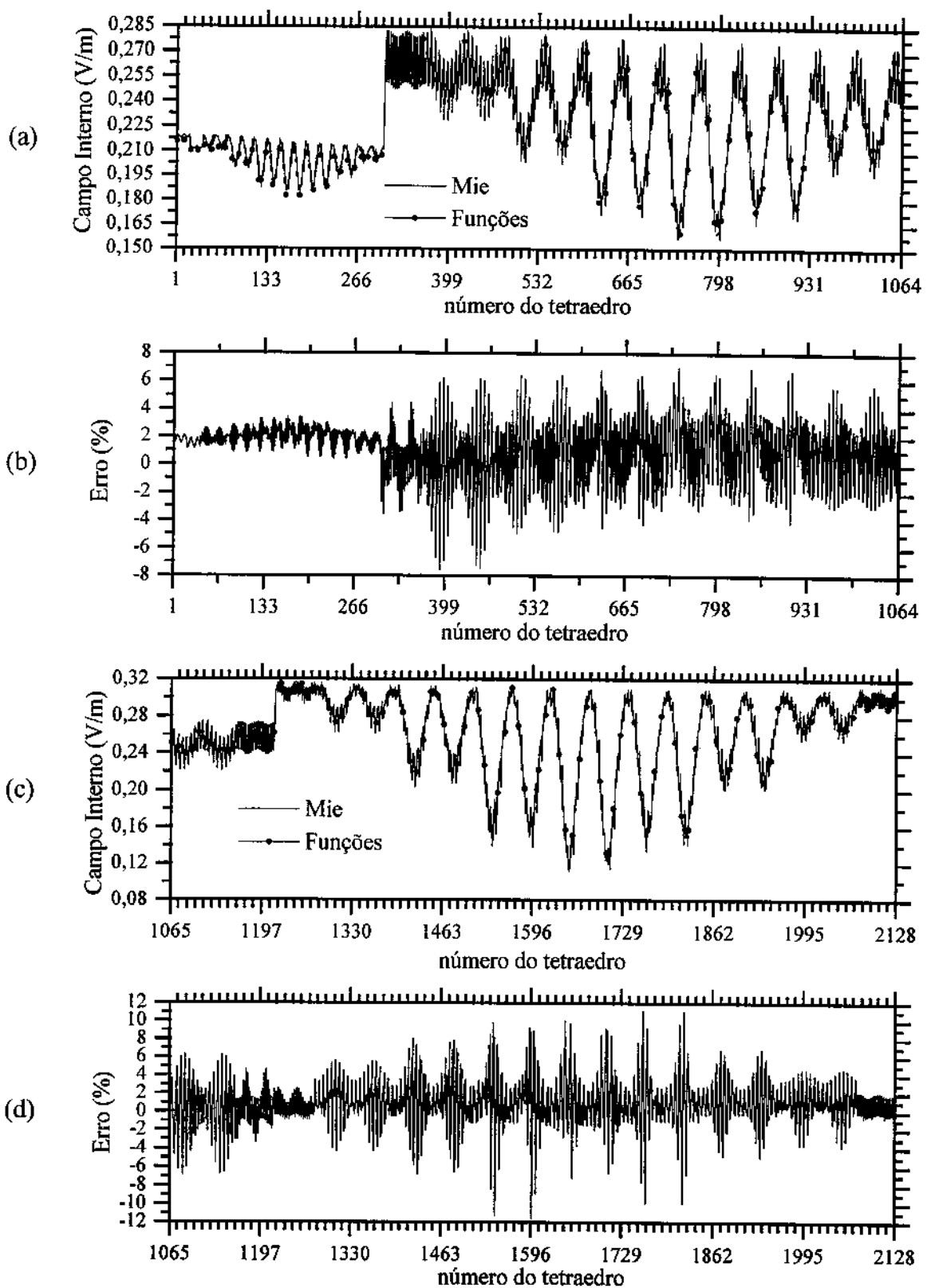


Figura 3.20 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$ discretizada com 2128 tetraedros

(a) campo interno do 1^o ao 1064^o tetraedro

(b) erro em relação a série de Mie

(c) campo interno do 1065^o ao 2128^o tetraedro

(d) erro em relação a série de Mie

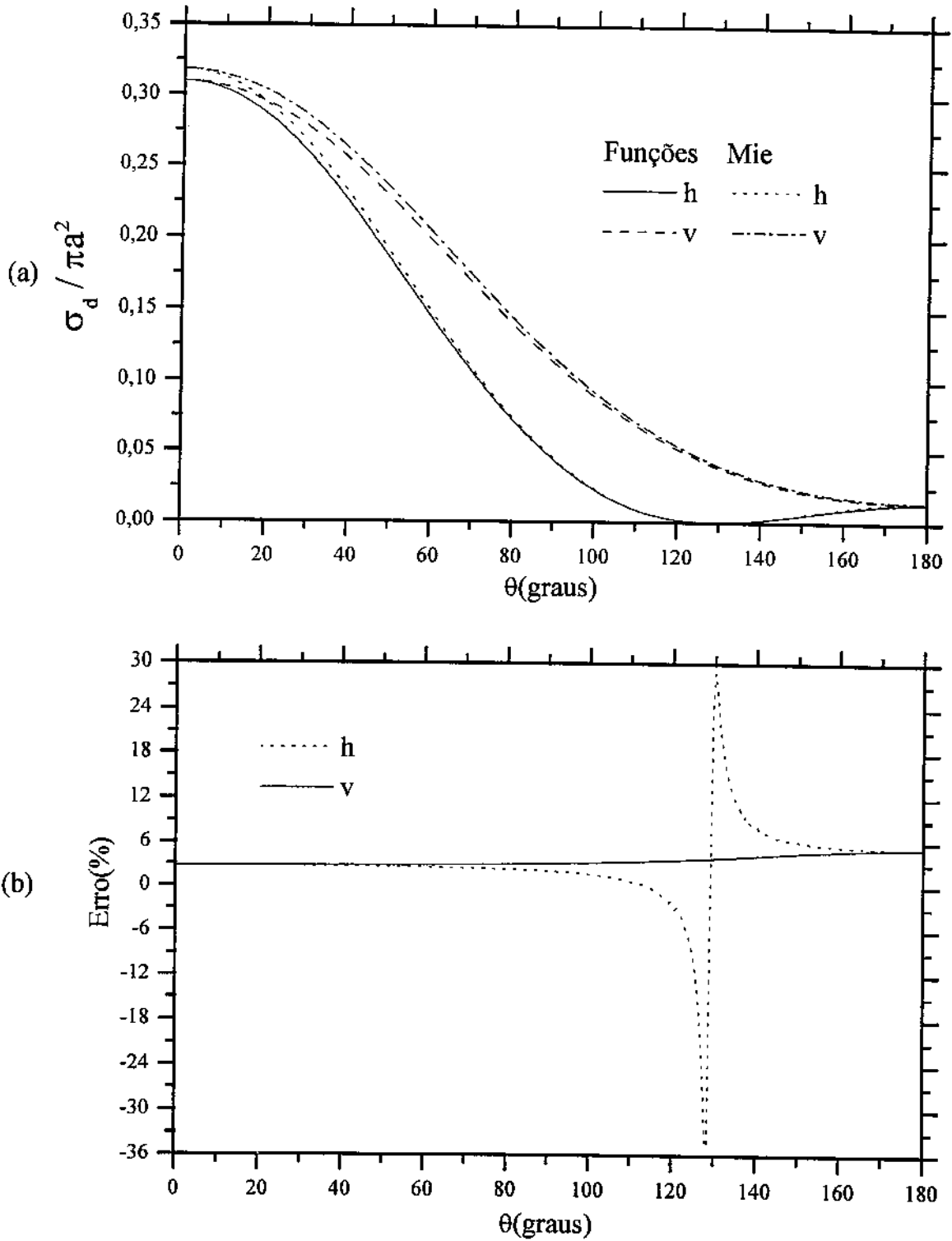


Figura 3.21 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 40,0$ discretizada com 2128 tetraedros
 (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

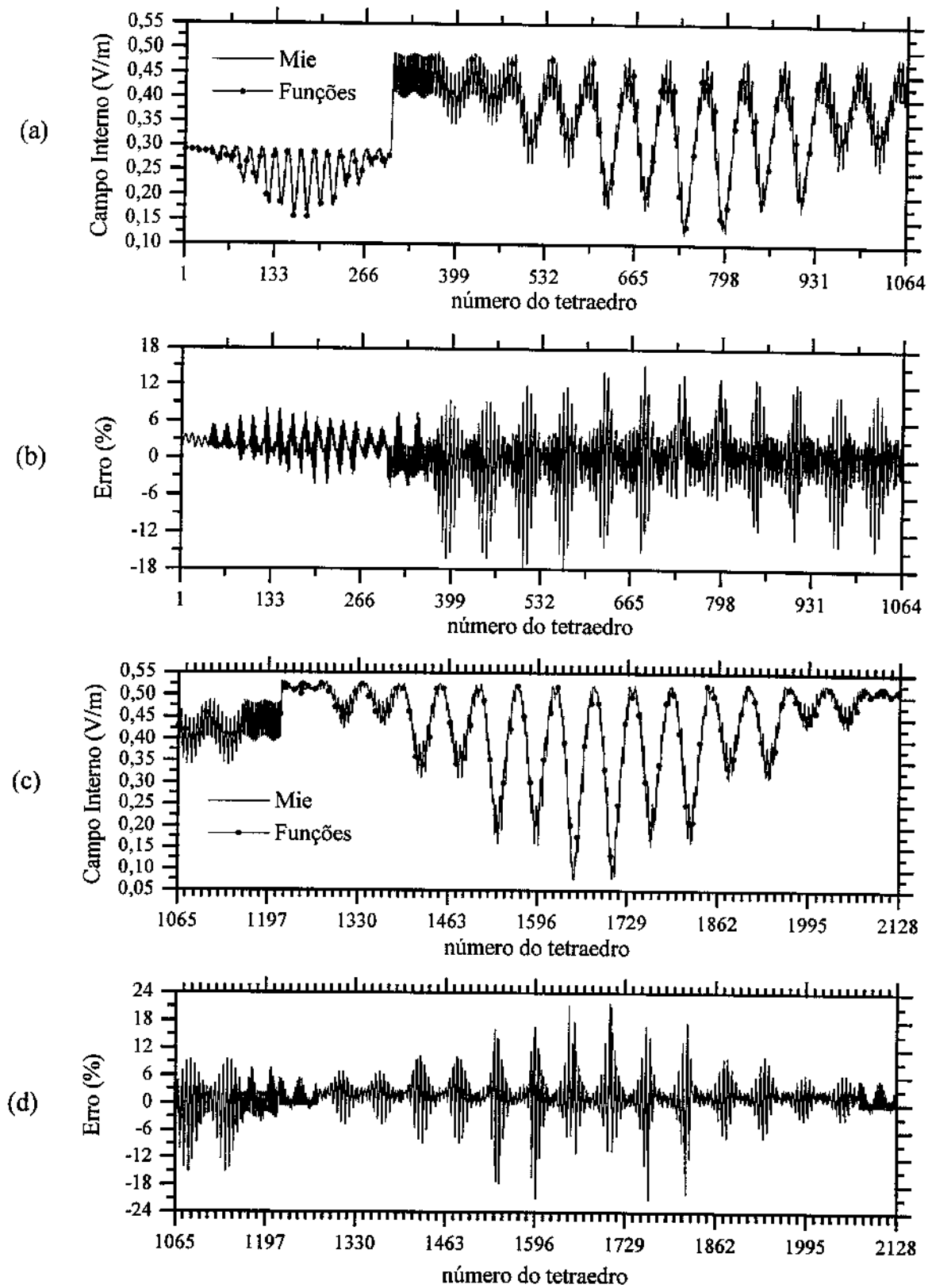


Figura 3.22 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 40,0$ discretizada com 2128 tetraedros

- (a) campo interno do 1^o ao 1064^o tetraedro
- (b) erro em relação a série de Mie
- (c) campo interno do 1065^o ao 2128^o tetraedro
- (d) erro em relação a série de Mie

Tabela 3.2 Comportamento do erro na análise de esferas homogêneas

$\kappa_0 a$	Característica Elétrica ϵ_r	discretização número de tetraedros	número de funções LI	erro na BCS (%) polarização vertical	erro máximo (%) no campo interno
0,1	4,0	520	719	2,8	4,2
0,1	4,0	2128	2280	1,16	3,0
0,408	4,0	520	719	4,5	3,0
0,408	9,0	520	719	6,6	4,3
0,408	16,0	520	719	9,0	4,9
0,408	25,0	520	719	16,61	5,41
0,408	25,0	2128	2280	11,57	2,8
0,408	40,0	2128	2280	21,95	5,2

3.4. Campo espalhado por um conjunto de cubos

Na Figura 3.23 temos três conjuntos de cubos iluminados por uma onda plana que propaga na direção $+z$, com intensidade $E_x^i = 377 \text{ V/m}$. O campo espalhado distante é calculado nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$, a frequência do campo é de 300 MHz.

O primeiro caso são os conjuntos de 2, 3 e 4 cubos com $d = 0,001\lambda$ e $\epsilon_r = 4,0$. Nas Figuras 3.24, 3.25 e 3.26, respectivamente, temos a comparação com o método usando a função de Green diádica [47]. Para o conjunto de dois cubos os resultados concordaram muito bem nos dois planos de observação. No caso de três cubos pequenas diferenças aparecem no plano de observação $\phi = 90^\circ$ e no caso de quatro cubos uma diferença máxima de 0,125 dB aparece no plano $\phi = 90^\circ$. Os resultados para conjuntos de 2, 3 e 4 cubos com $d = 0,1\lambda$ e $\epsilon_r = 9,0$, Figuras 3.27, 3.28 e 3.29, respectivamente, concordaram muito bem. Para conjuntos de 2, 3 e 4 cubos com $d = 1,0\lambda$ e $\epsilon_r = 9,0$, Figuras 3.30, 3.31 e 3.32, respectivamente, não é mais possível observar, graficamente, as diferenças entre os dois métodos. A diferença entre os métodos é porque o método que usa função de Green diádica com as funções pulso, gera cargas espúrias que perturbam a solução. Quando $d = 0,001\lambda$ as cargas espúrias geram um potencial escalar de mesma ordem do gerado pelas cargas reais. A medida que d aumenta o potencial escalar real torna-se de ordem diferente e o erro introduzido pelas cargas espúrias tem o seu peso relativo, na composição dos termos da matriz momento, diminuído.

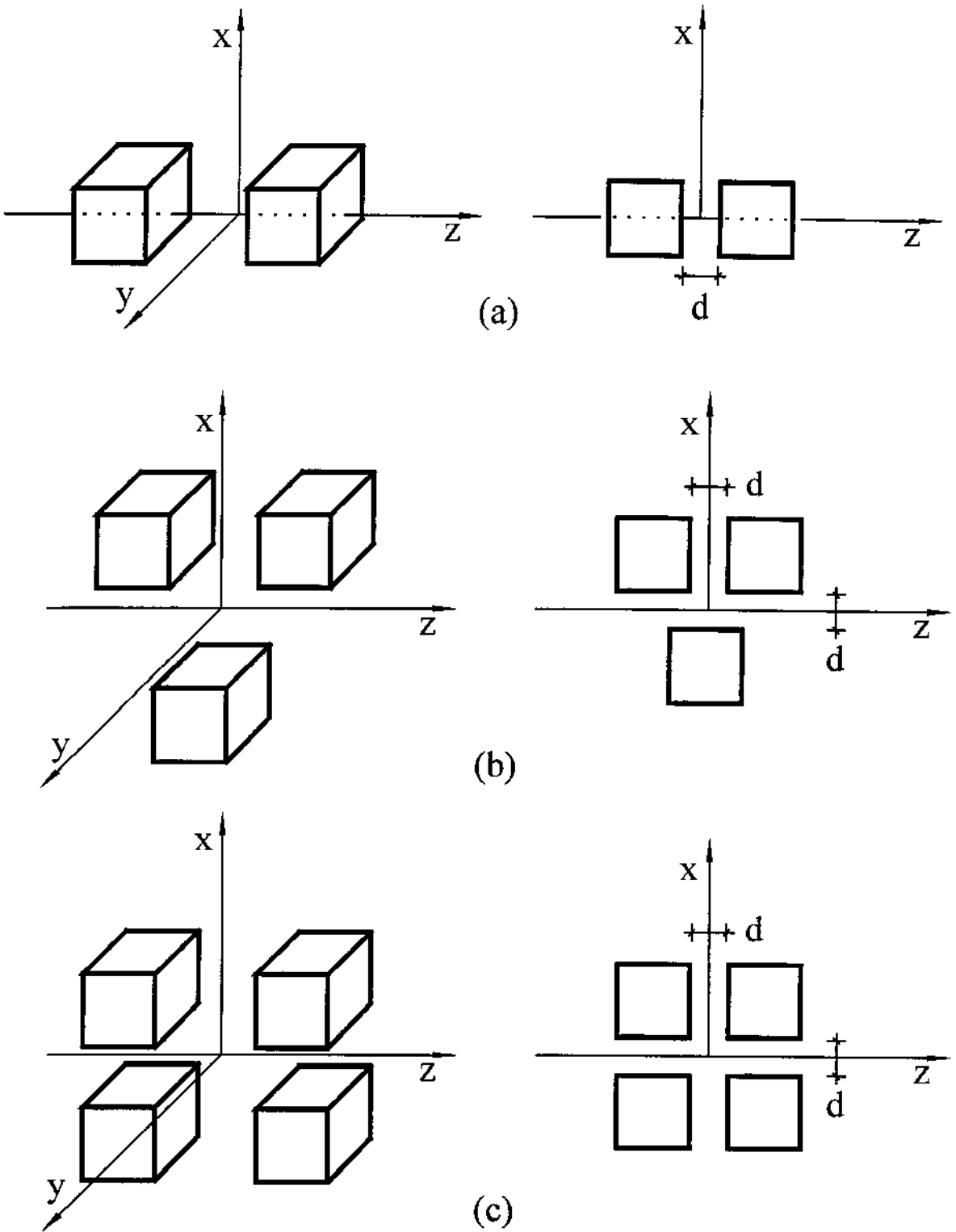


Figura 3.23 Conjunto de cubos de $0,1\lambda$ sobre o qual incide uma onda plana propagando na direção $+z$.

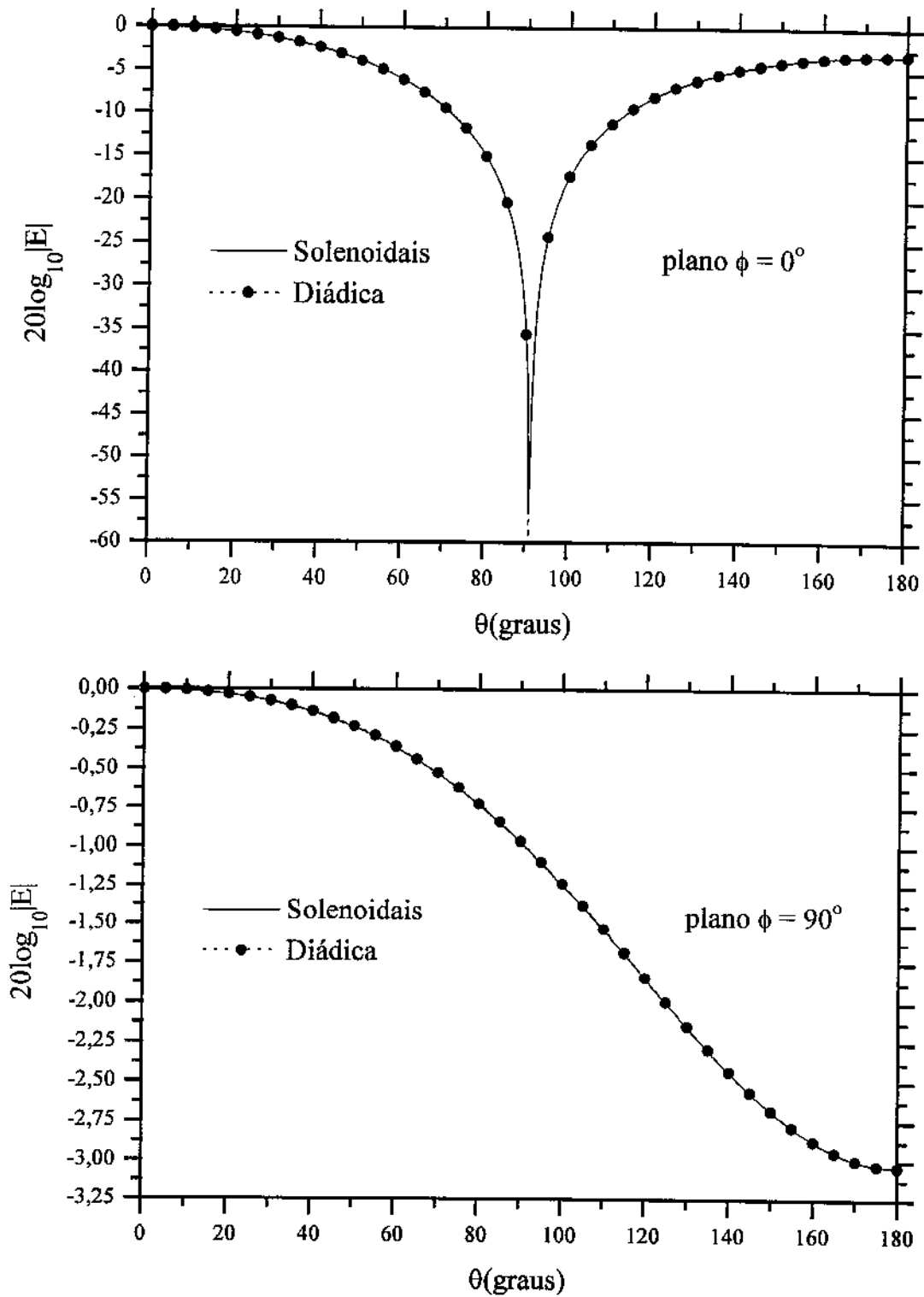


Figura 3.24 Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta

$0,1\lambda$, $d = 0,001\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$

funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas

diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

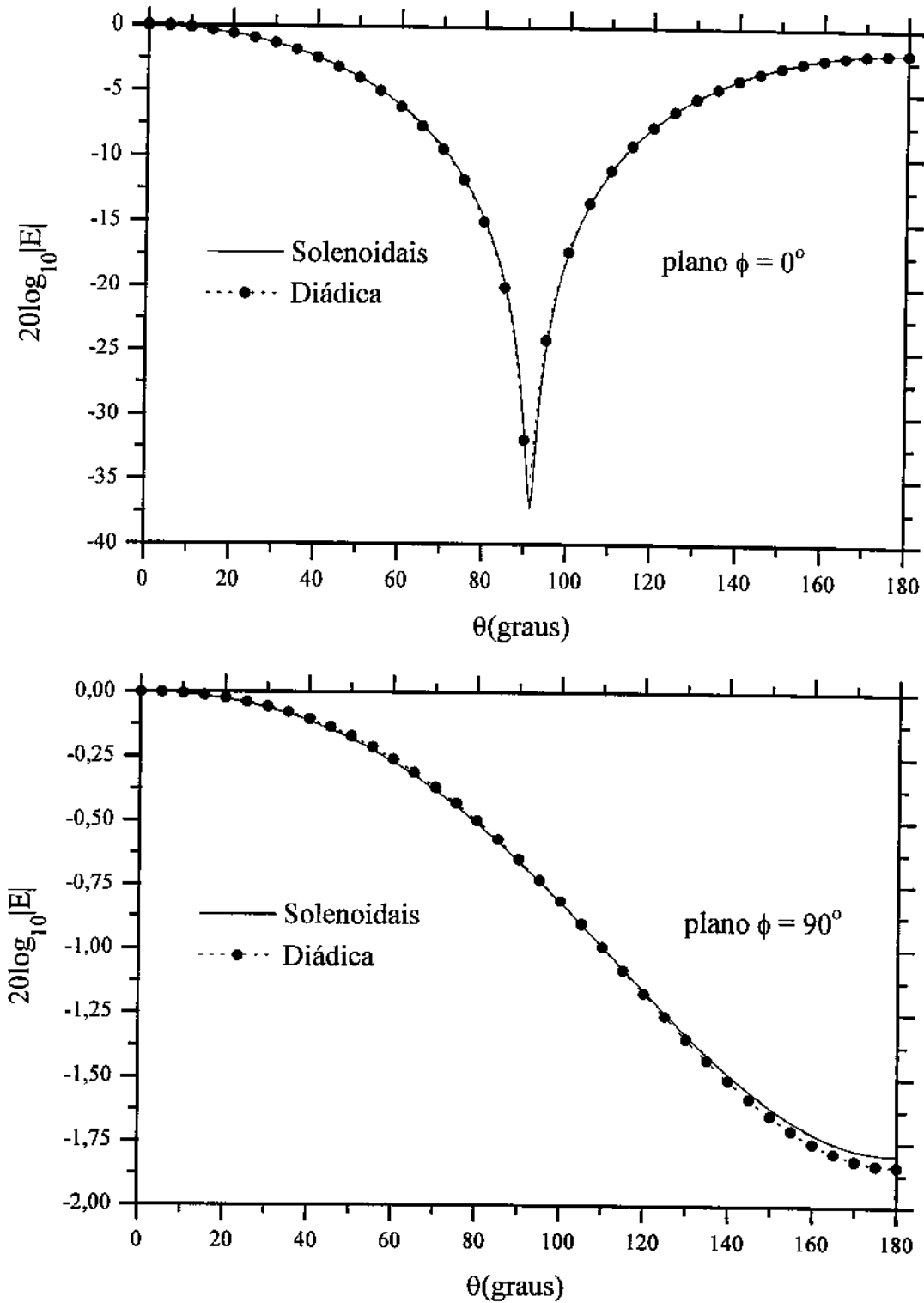


Figura 3.25 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,001\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$
 funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas
 diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas

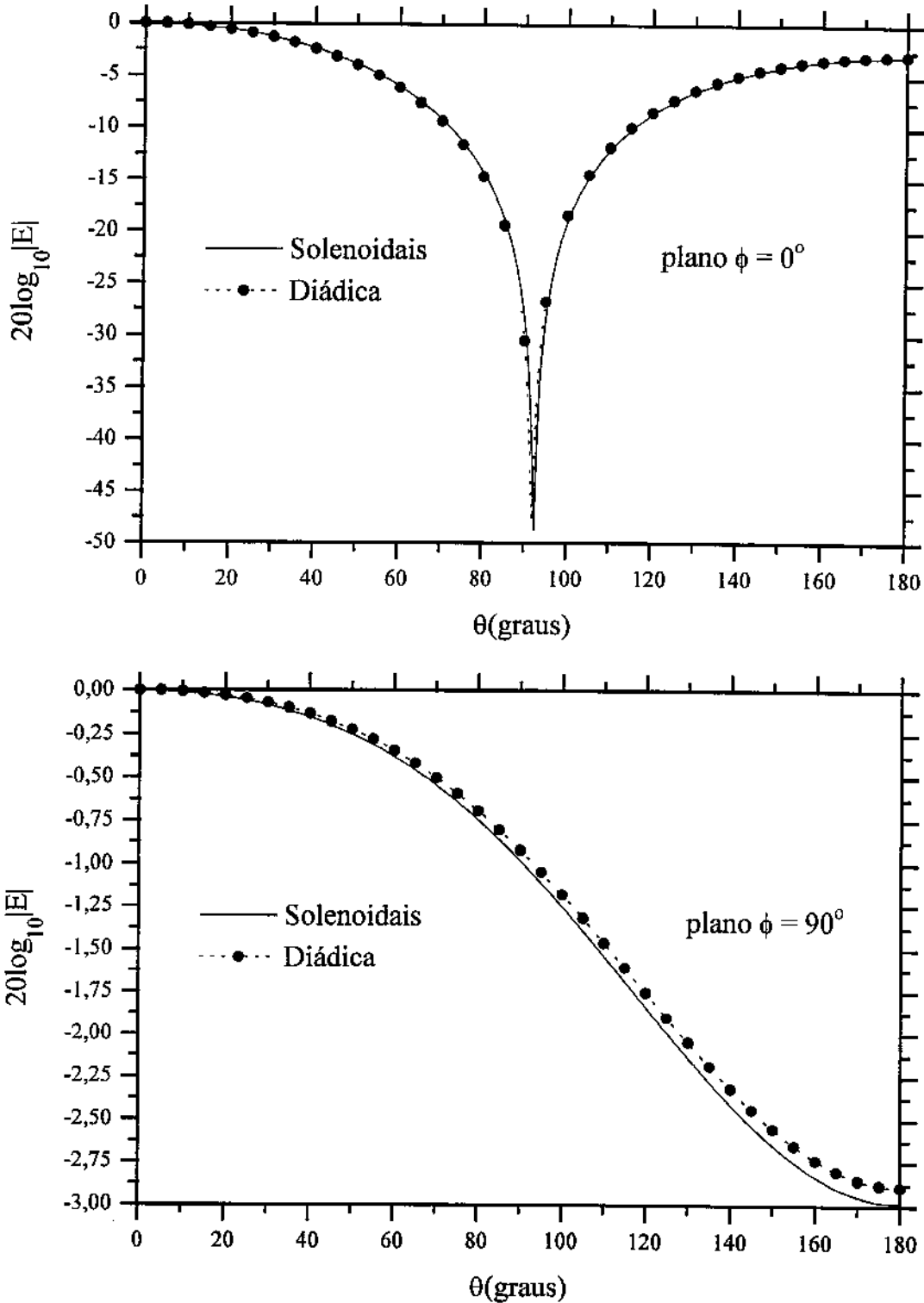


Figura 3.26 Campo espalhado por quatro cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,001\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$

funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas
 diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas

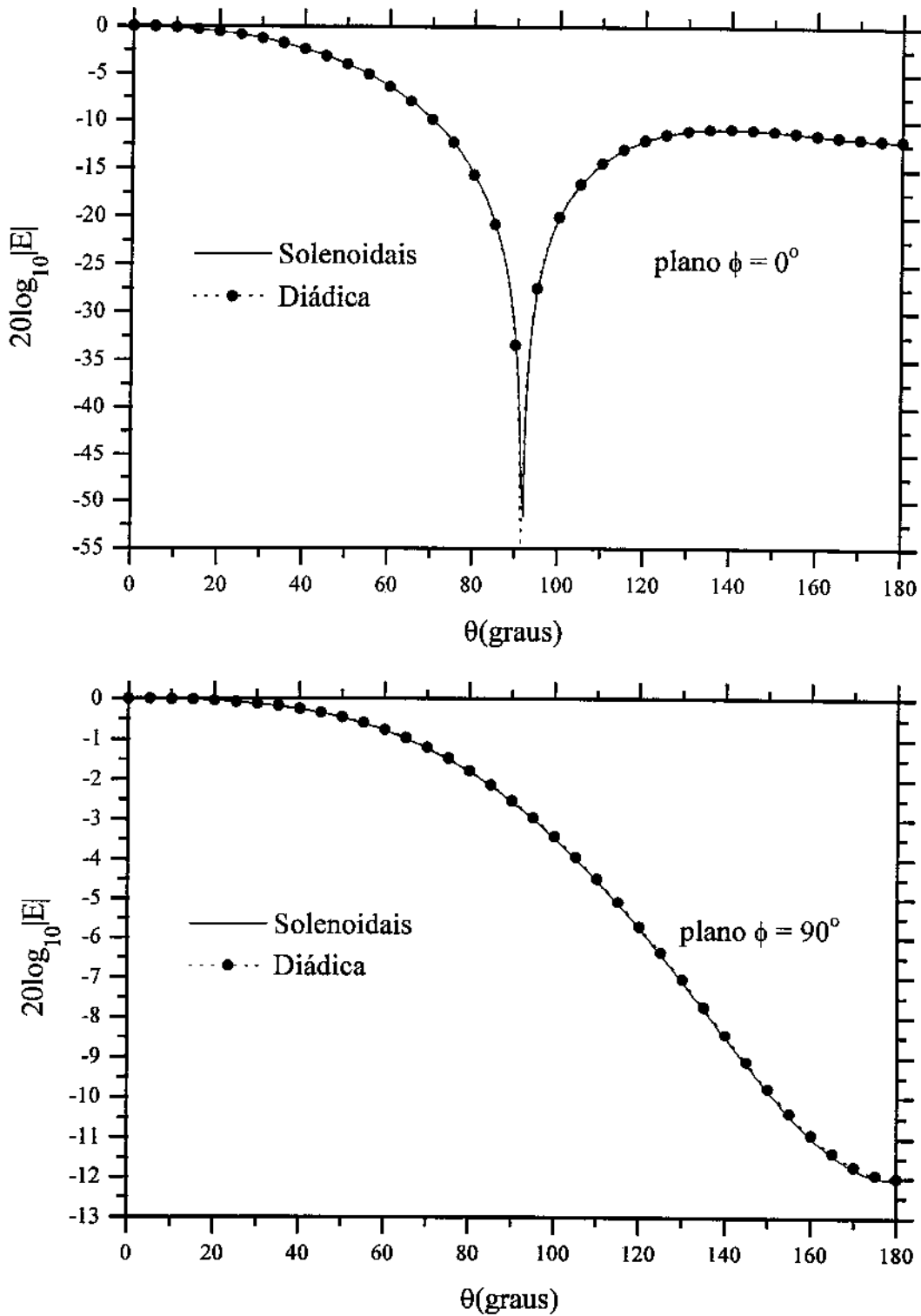


Figura 3.27 Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$
 funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas
 diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

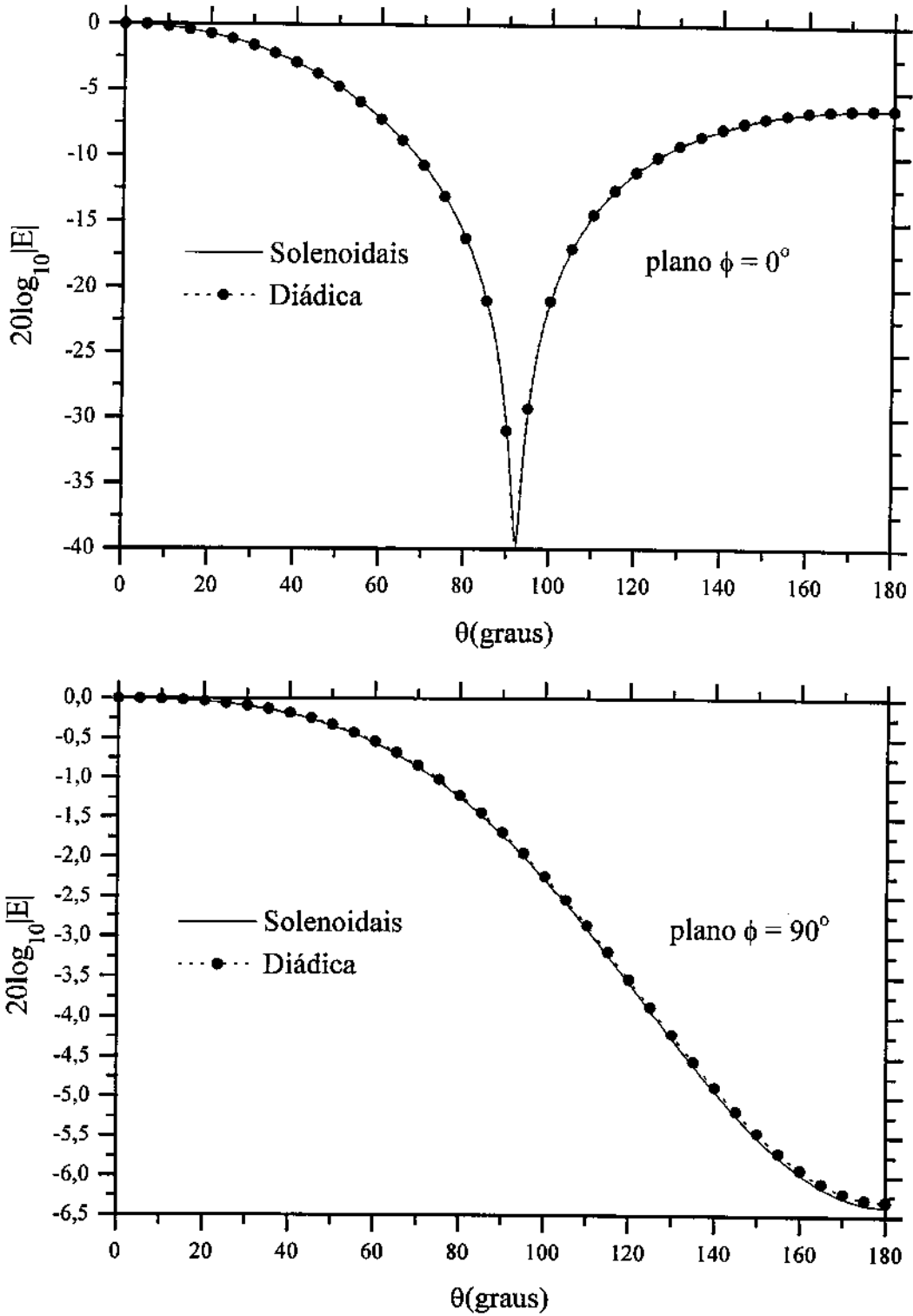


Figura 3.28 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$
 funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas
 diádica - 648 cubos, 1944 incógnitas

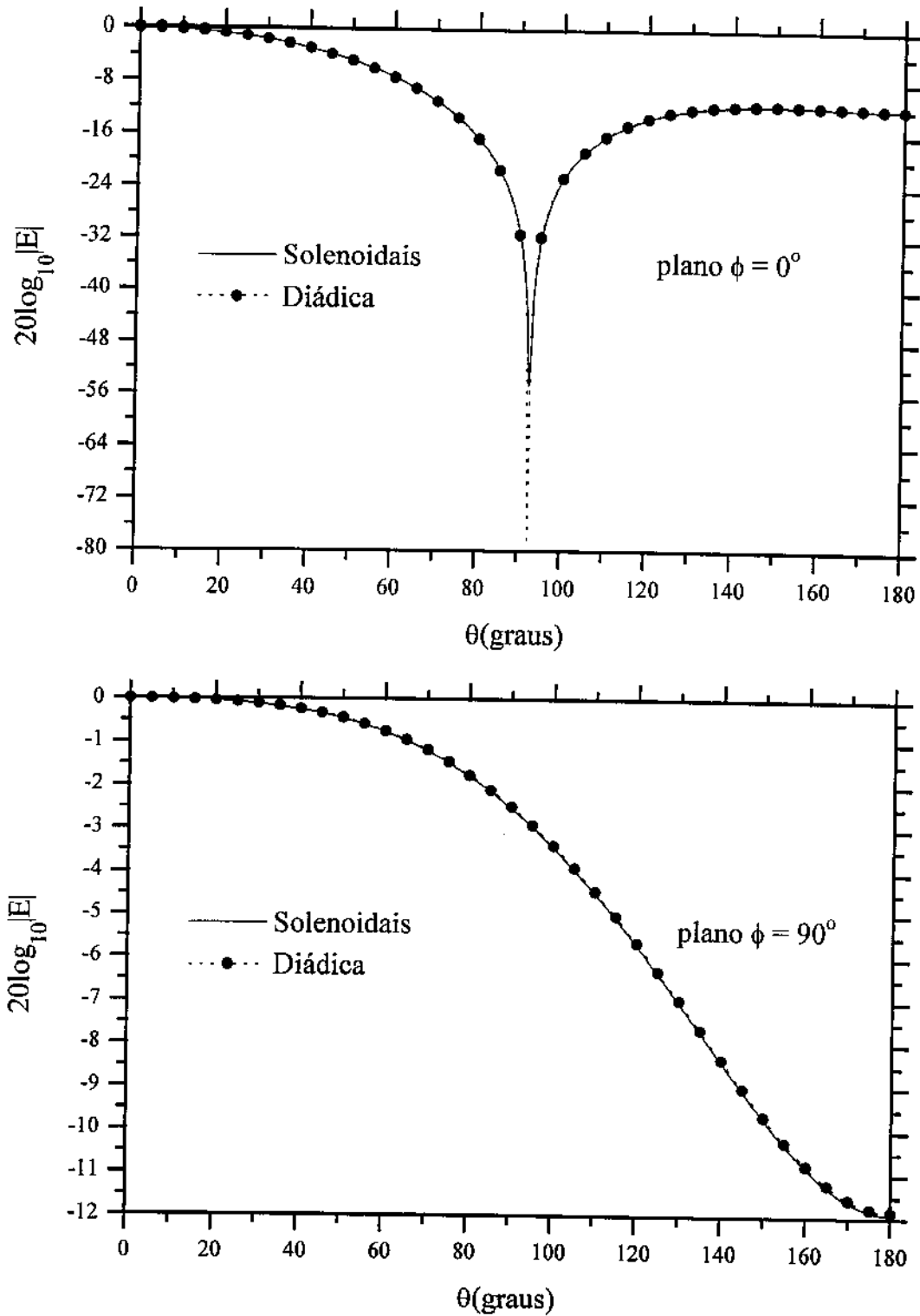


Figura 3.29 Campo espalhado por quatro cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$
 funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas
 diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas

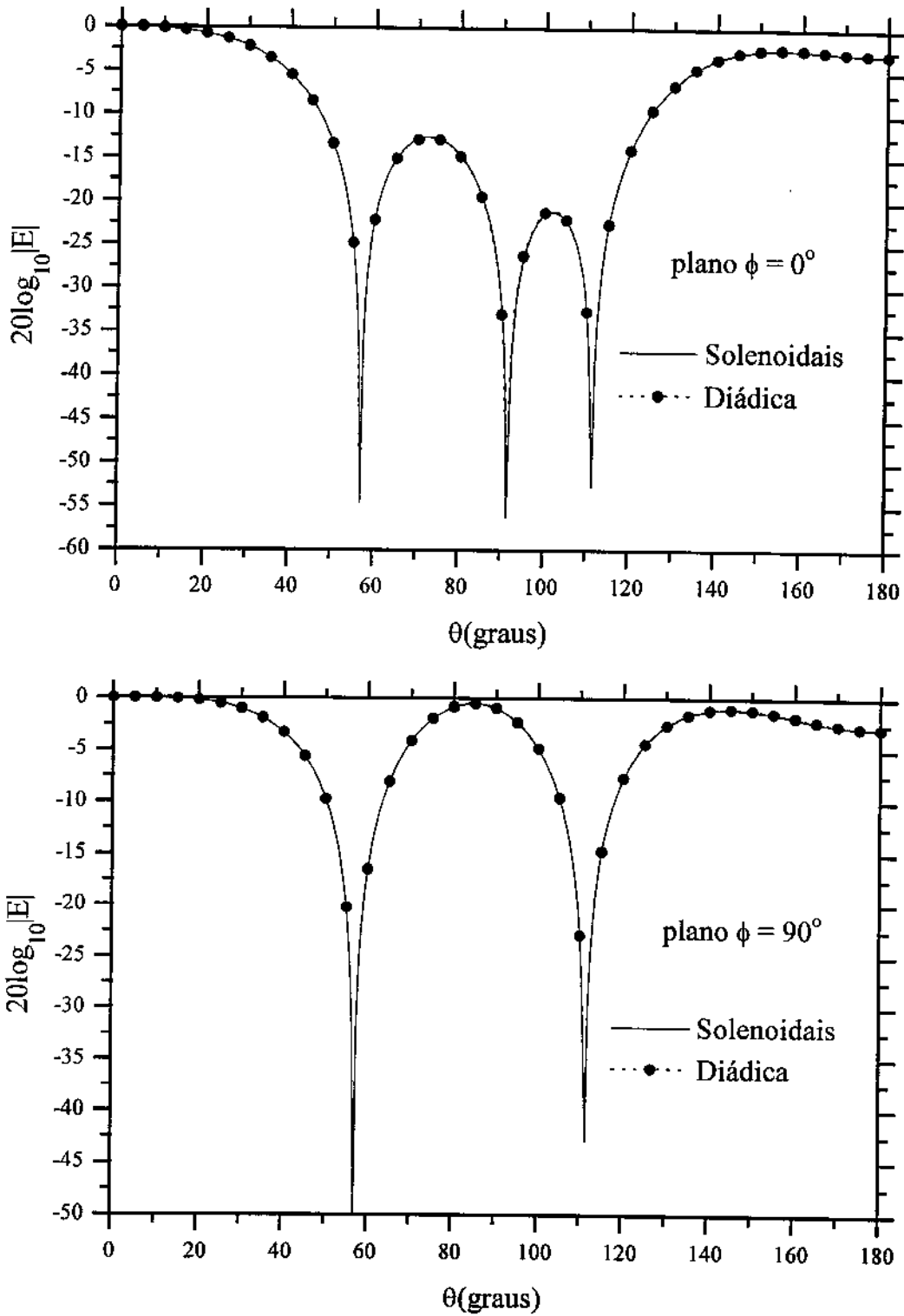


Figura 3.30 Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$ $\epsilon\epsilon_c = 9,0$
 funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas
 diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

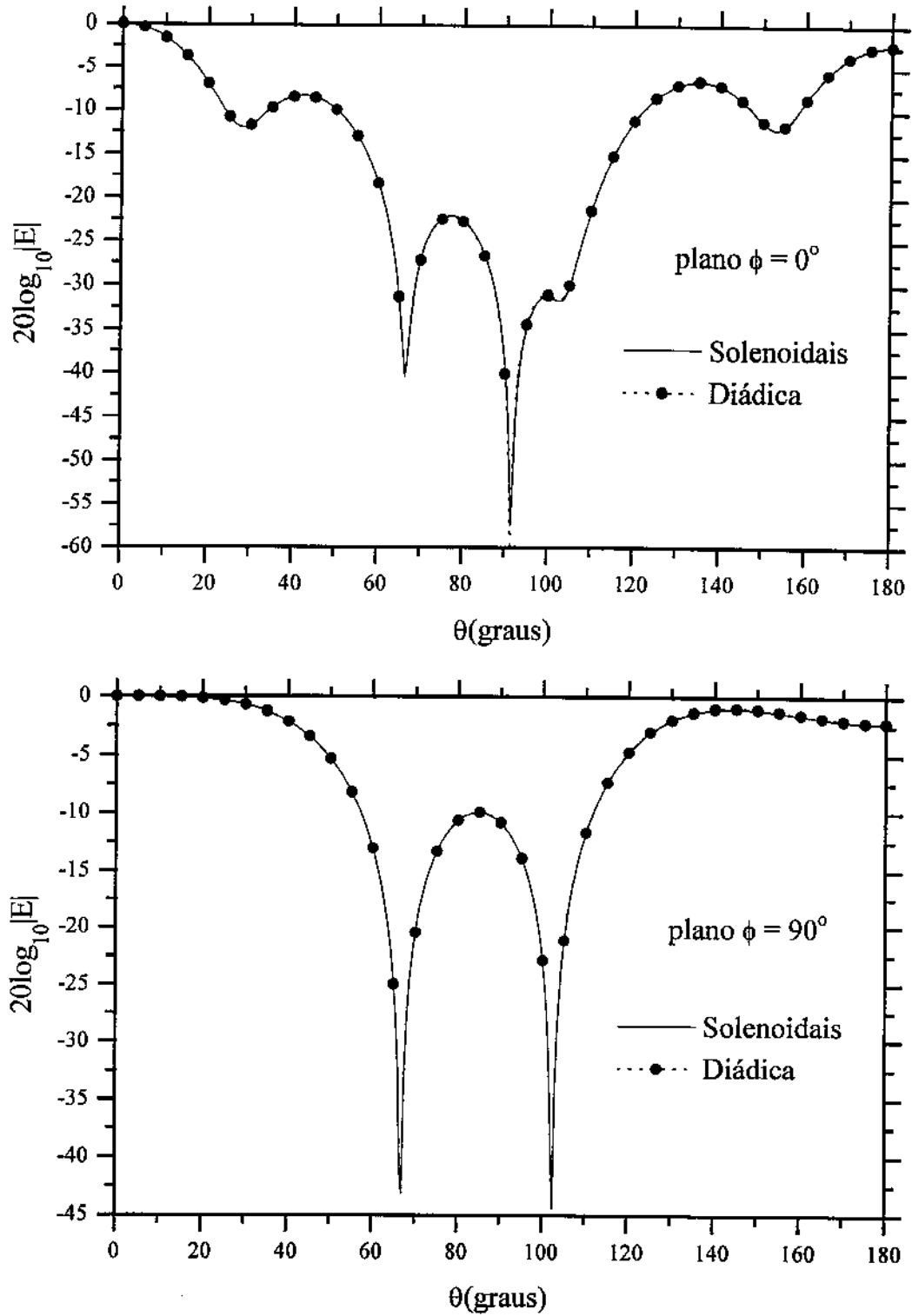


Figura 3.31 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$
 funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas
 diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas

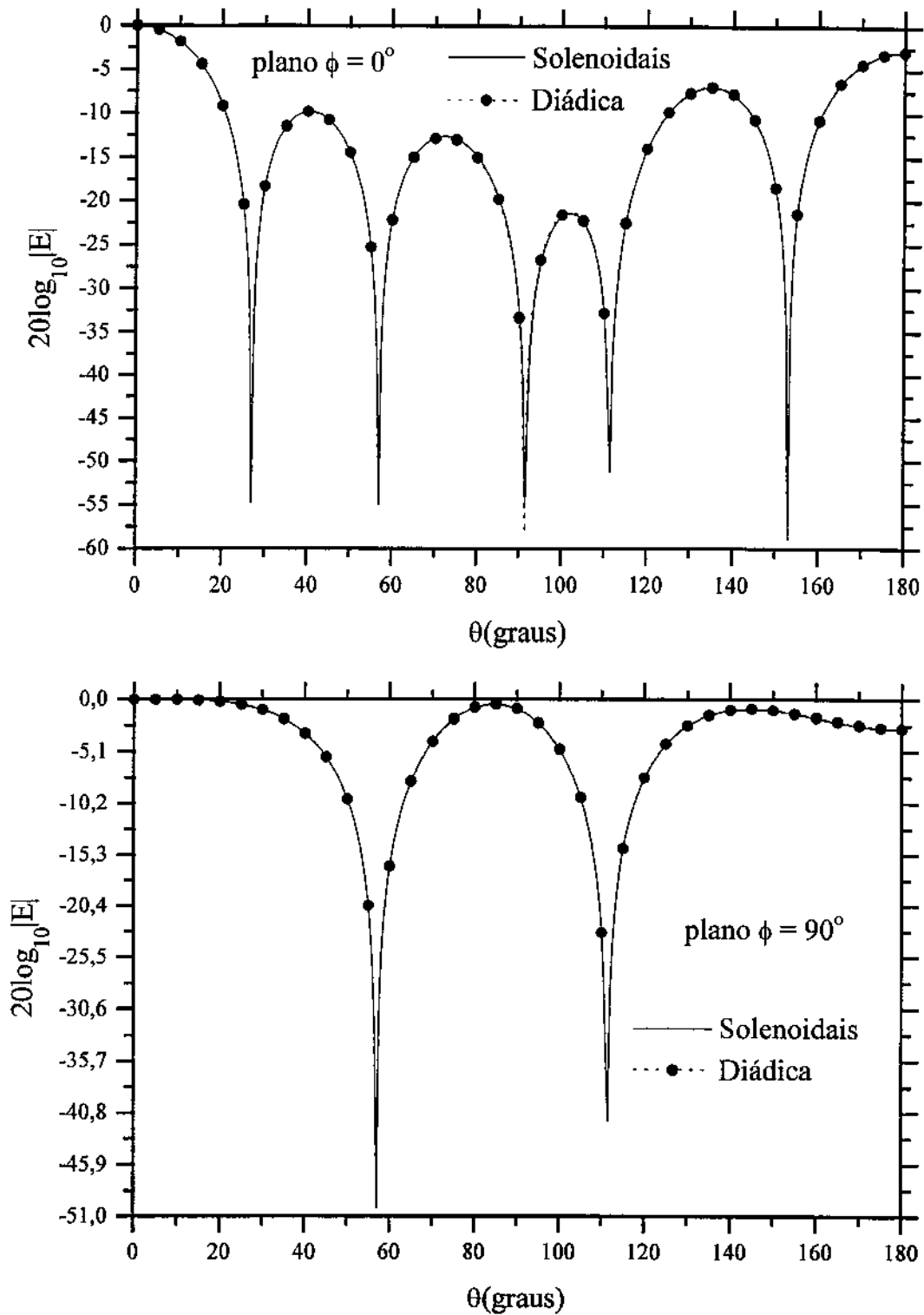


Figura 3.32 Campo espalhado por quatro cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$
 funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas
 diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas

Capítulo 4

Aplicação da equação integral ao corpo não homogêneo

Neste capítulo apresentaremos os resultados do cálculo dos campos gerados pela interação de uma onda plana com um corpo não homogêneo e com um conjunto de corpos com características elétricas distintas.

4.1 Campo espalhado por um cubo não homogêneo

Na Figura 4.1 temos um cubo dielétrico não homogêneo com $0,2\lambda$ de aresta no qual incide uma onda plana propagando na direção $+z$, com intensidade $E_x^i = 377$ V/m e frequência de 300 MHz. O campo espalhado distante é calculado nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$.

A Figura 4.2 mostra o campo espalhado distante por um cubo não homogêneo com $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$, calculado com o uso das funções solenoidais e com o método usando a função de Green diádica e funções pulso [47], vemos uma boa concordância entre os dois métodos. Foi usado o mesmo nível de discretização que no caso homogêneo. Para o caso $\epsilon_1 = 2,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$, Figura 4.3, também temos uma boa concordância entre os dois métodos.

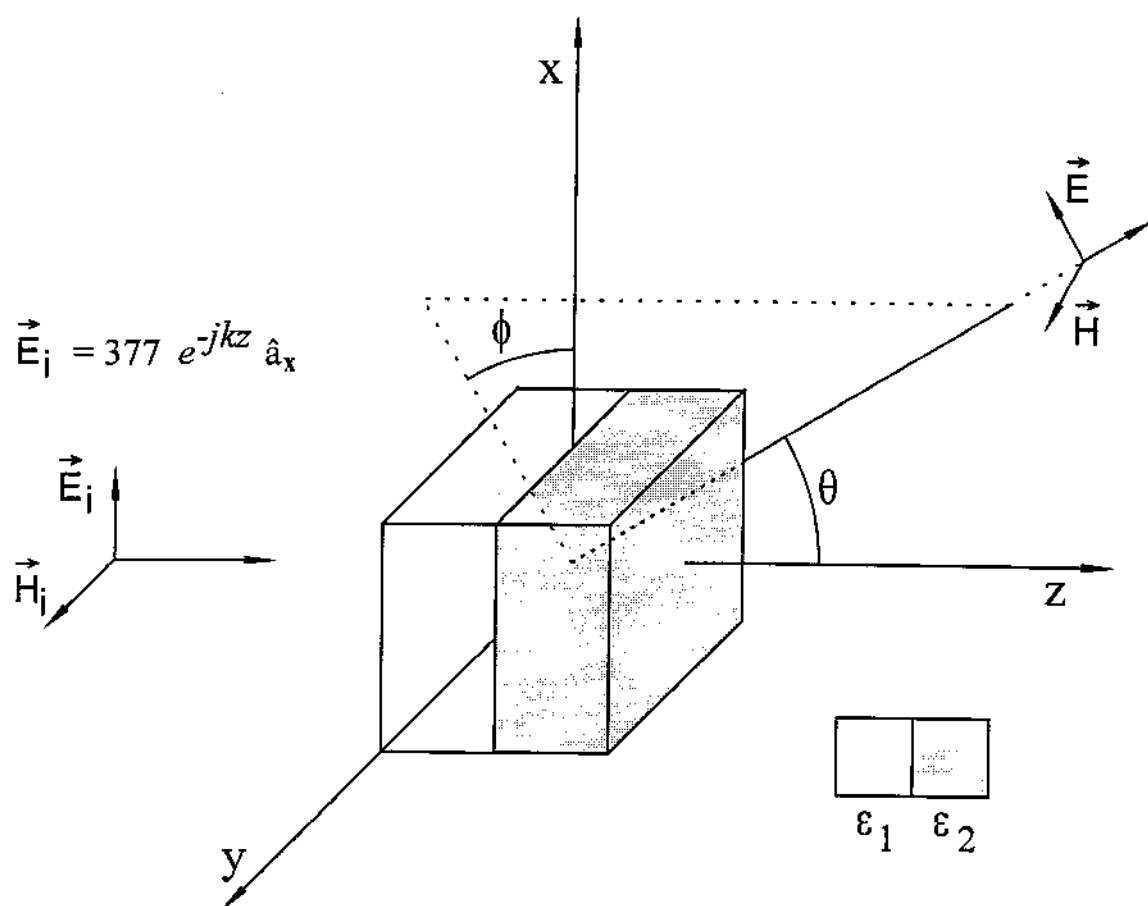


Figura 4.1 Cubo dielétrico não homogêneo em que incide uma onda plana.
O sistema de coordenadas coincide com o centro do cubo.

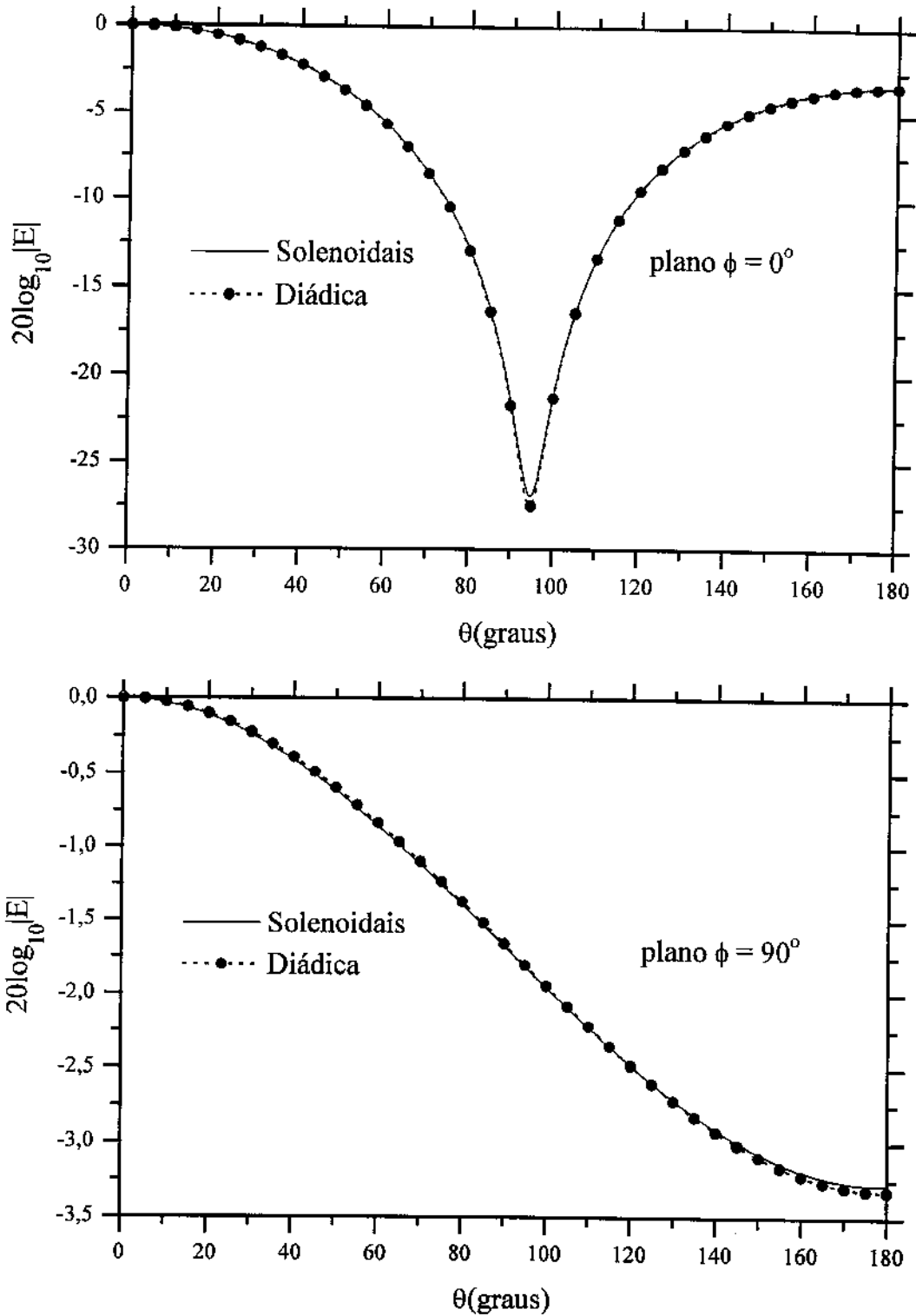


Figura 4.2 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.1

aresta $0,2\lambda$ e $\varepsilon_1 = 4,0$ $\varepsilon_2 = 9,0$

funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas

diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas

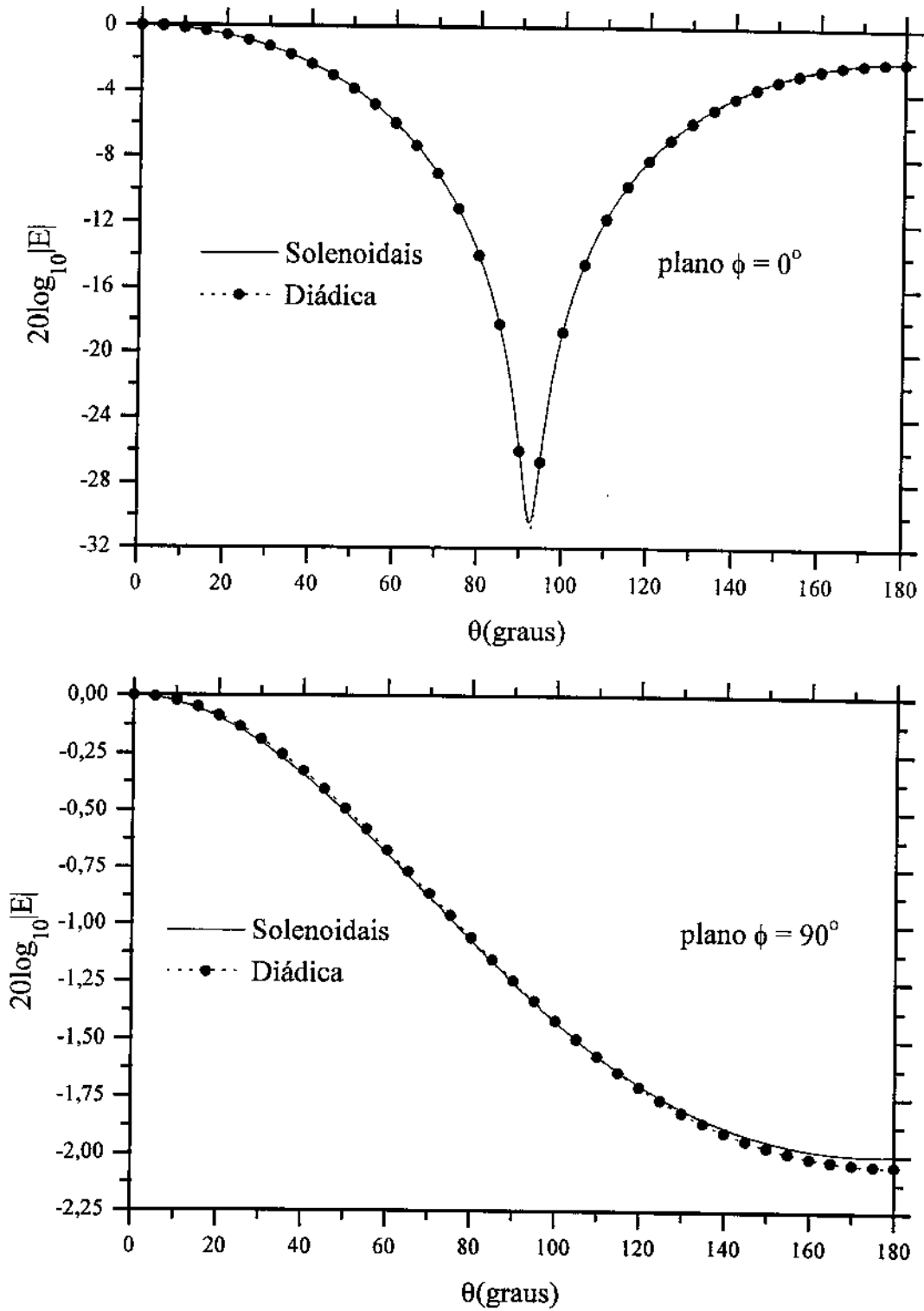


Figura 4.3 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.1

aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_1 = 2,0$ $\epsilon_2 = 9,0$

funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas

diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas

é um cubo dielétrico não homogêneo de duas camadas iluminado por uma onda plana propagando na direção $+z$, com intensidade $E_x^i = 377 \text{ V/m}$ e frequência de 300 MHz. O campo espalhado distante é calculado nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$.

O primeiro caso é de um cubo com $a_1 = 0,1\lambda$, $a_2 = 0,2\lambda$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$, Figura 4.5. Foi usado o mesmo nível de discretização do caso homogêneo. A maior diferença entre os dois métodos ocorreu no plano $\phi = 90^\circ$ e foi de 0,5 dB. Para os cubos com as mesmas dimensões e $\epsilon_1 = 9,0$, $\epsilon_2 = 4,0$, Figura 4.6, vemos que no plano $\phi = 0^\circ$ não se pode perceber nenhuma diferença e no plano $\phi = 90^\circ$ a maior diferença foi de 0,2 dB. É interessante observar que a diferença é maior entre os dois métodos quando o nível do campo interno, induzido pelo campo incidente, é menor. Na próxima seção mostraremos que o método usando funções solenoidais apresenta este comportamento quando aplicado no caso de esfera de duas camadas.

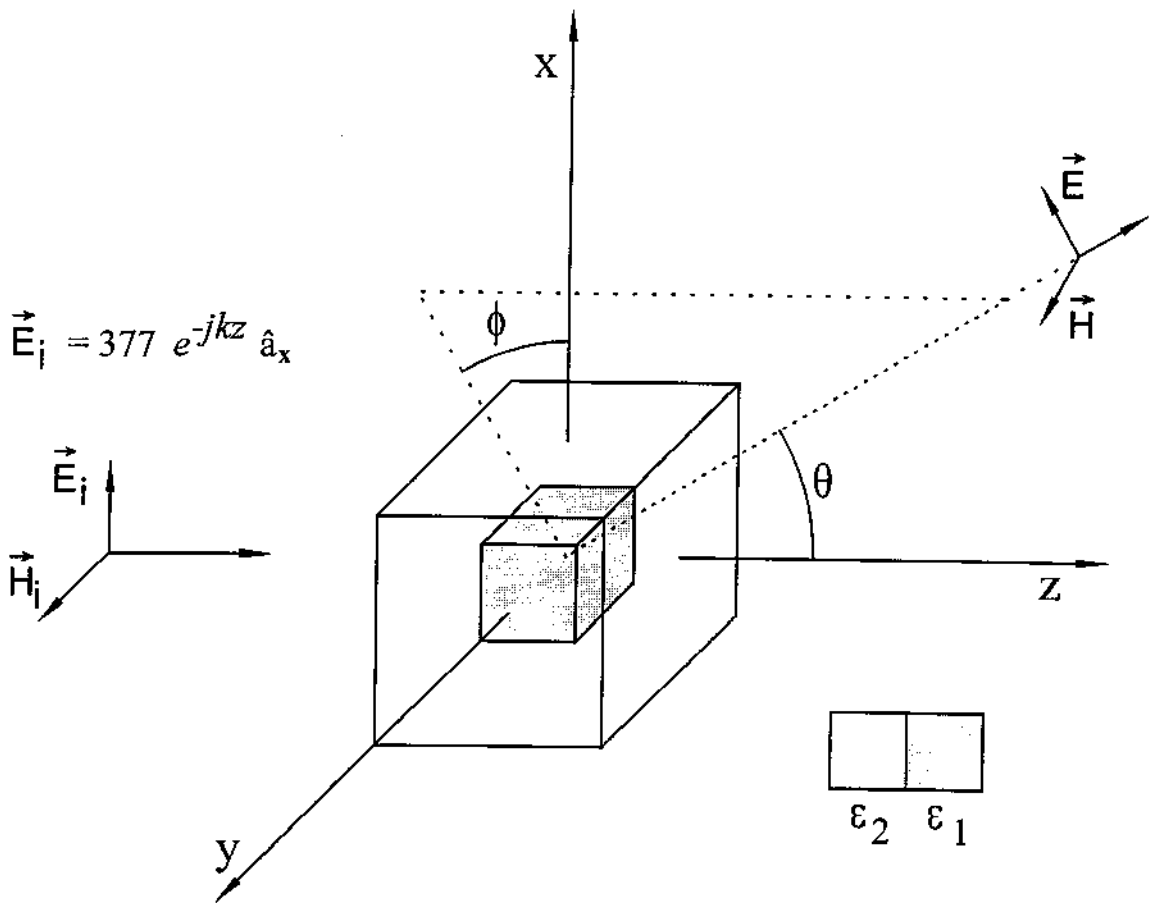


Figura 4.4 Cubo dielétrico não homogêneo em que incide uma onda plana.

Sistema de coordenadas coincide com o centro dos cubos.

aresta do cubo interno a_1

aresta do cubo externo a_2

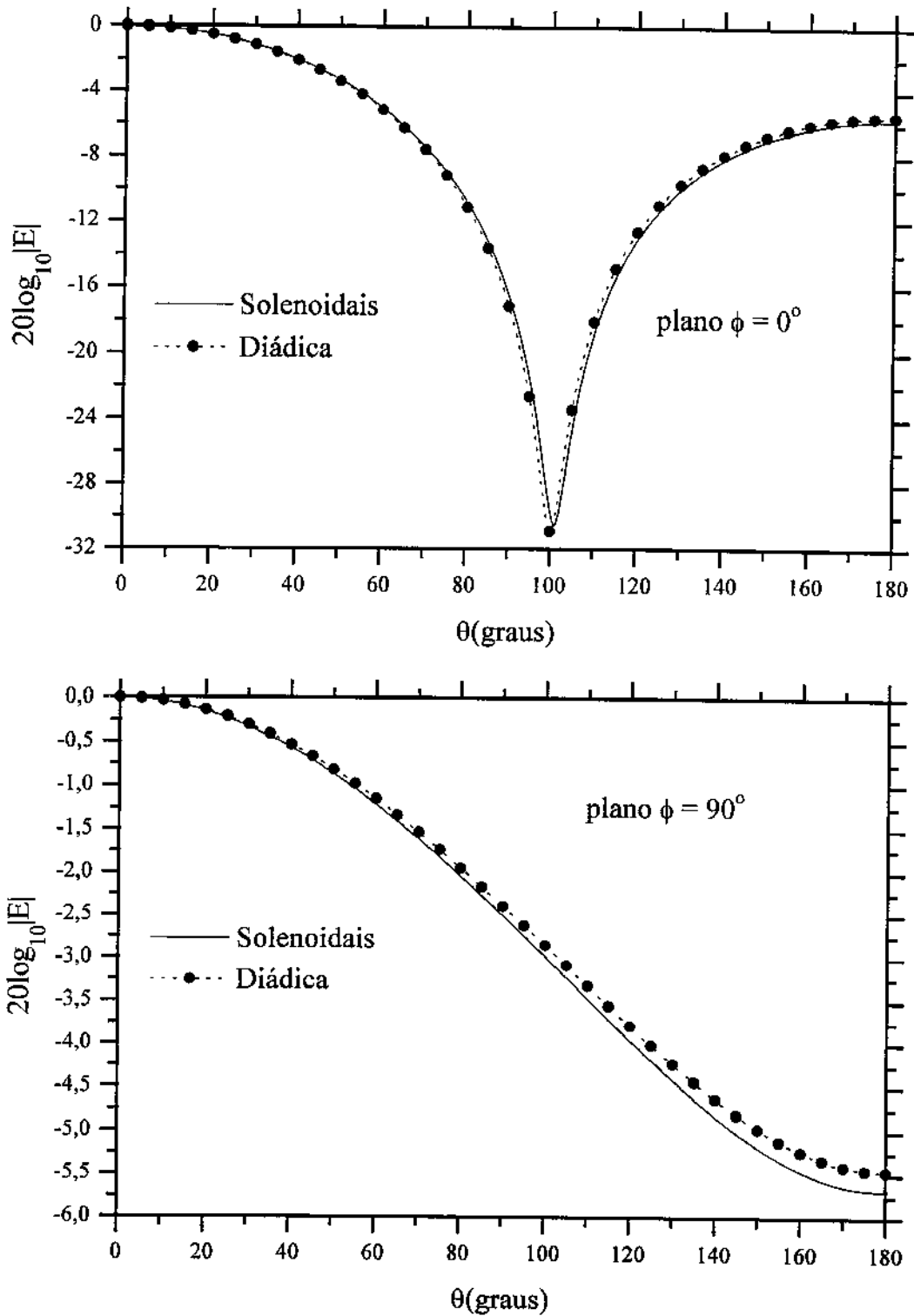


Figura 4.5 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.4

$$a_1 = 0,1\lambda, \quad a_2 = 0,2\lambda, \quad \varepsilon_1 = 4,0 \text{ e } \varepsilon_2 = 9,0$$

funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas

diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas

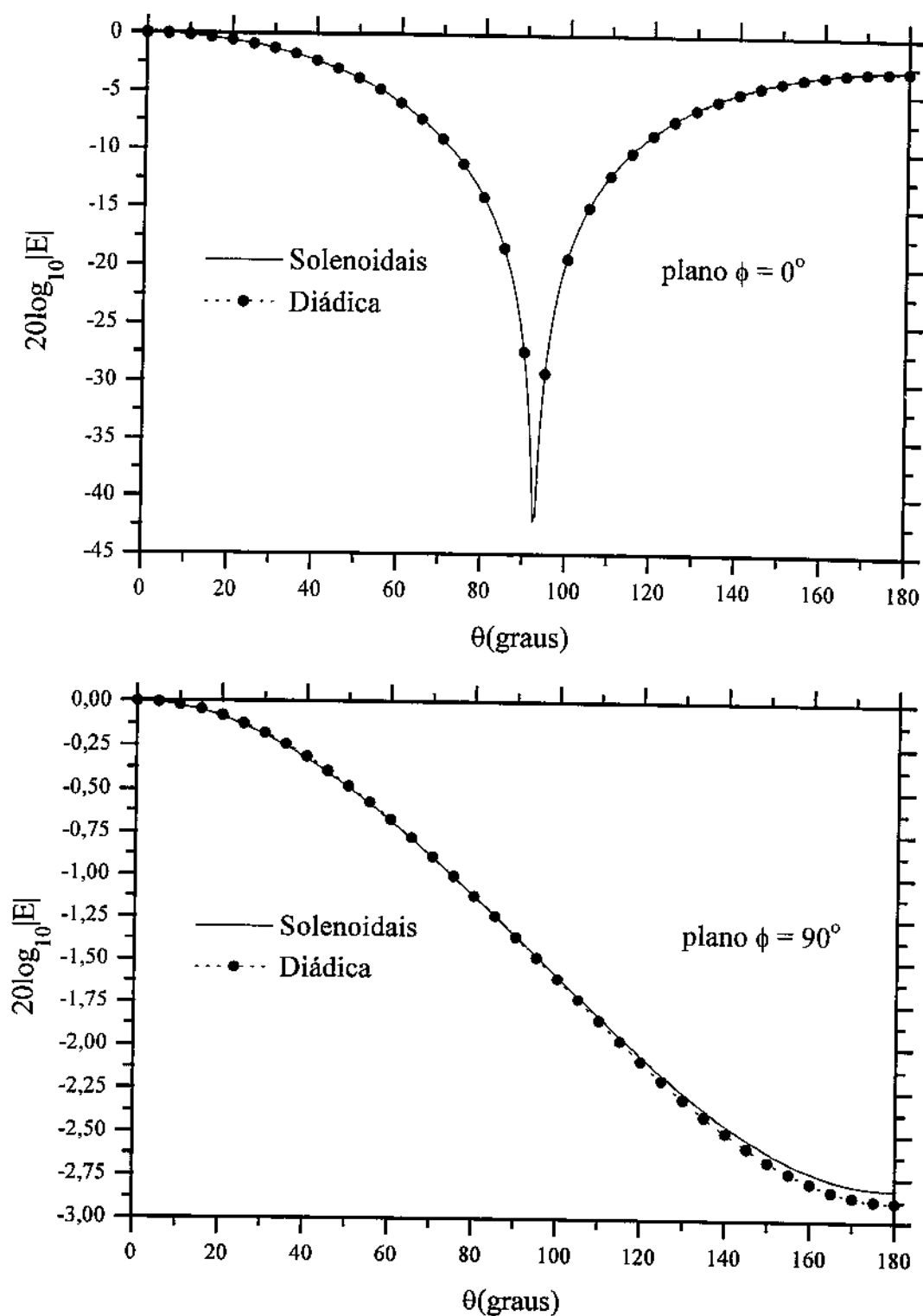


Figura 4.6 Campo espalhado pelo cubo não homogêneo da figura 4.4

$$a_1 = 0,1\lambda, \quad a_2 = 0,2\lambda, \quad \varepsilon_1 = 9,0 \text{ e } \varepsilon_2 = 4,0$$

funções solenoidais - 384 tetraedros e 480 incógnitas

diádica - 512 cubos e 1536 incógnitas

4.2 Campo espalhado e campo interno de uma esfera duas camadas

Na Figura 4.7 temos uma esfera não homogênea iluminada por uma onda plana que propaga na direção $+z$. A onda está polarizada paralelamente ao plano xy . As duas polarizações consideradas neste trabalho são definidas como polarização horizontal \vec{E}_h e polarização vertical \vec{E}_v , ambas em referência ao plano xz . Comparamos os resultados do cálculo da “bistatic cross section” e do campo interno, este calculado no baricentro de cada tetraedro, com a solução dada pela série de Mie [71]. A esfera foi discretizada através do procedimento descrito no apêndice C.

O primeiro caso é de uma esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$ discretizada com 520 tetraedros, 130 na primeira camada e 390 na segunda, que geraram 719 funções linearmente independentes. Vemos na Figura 4.8 que a “bistatic cross section” apresenta um erro em torno de 5,8% (polarização vertical) com um pico no ponto de mínimo (polarização horizontal). O campo interno apresenta um erro máximo de 20,53%, com os pontos da primeira camada com um erro em torno de -6,0% e o da segunda camada na faixa de -3,0% a 20,53%. Trocando as características elétricas da esfera, isto é, $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$, vemos na Figura 4.9 que a “bistatic cross section” apresenta um erro em torno de 4,5% (polarização vertical) com um pico no ponto de mínimo (polarização horizontal), erro menor que o caso anterior. O campo interno também apresenta erro máximo menor, de 15,51%. A diferença entre o comportamento das duas esferas é que a primeira espalha mais o campo incidente e a segunda tem um campo interno maior. O erro no cálculo do campo interno foi menor no caso da esfera que apresenta um campo interno maior.

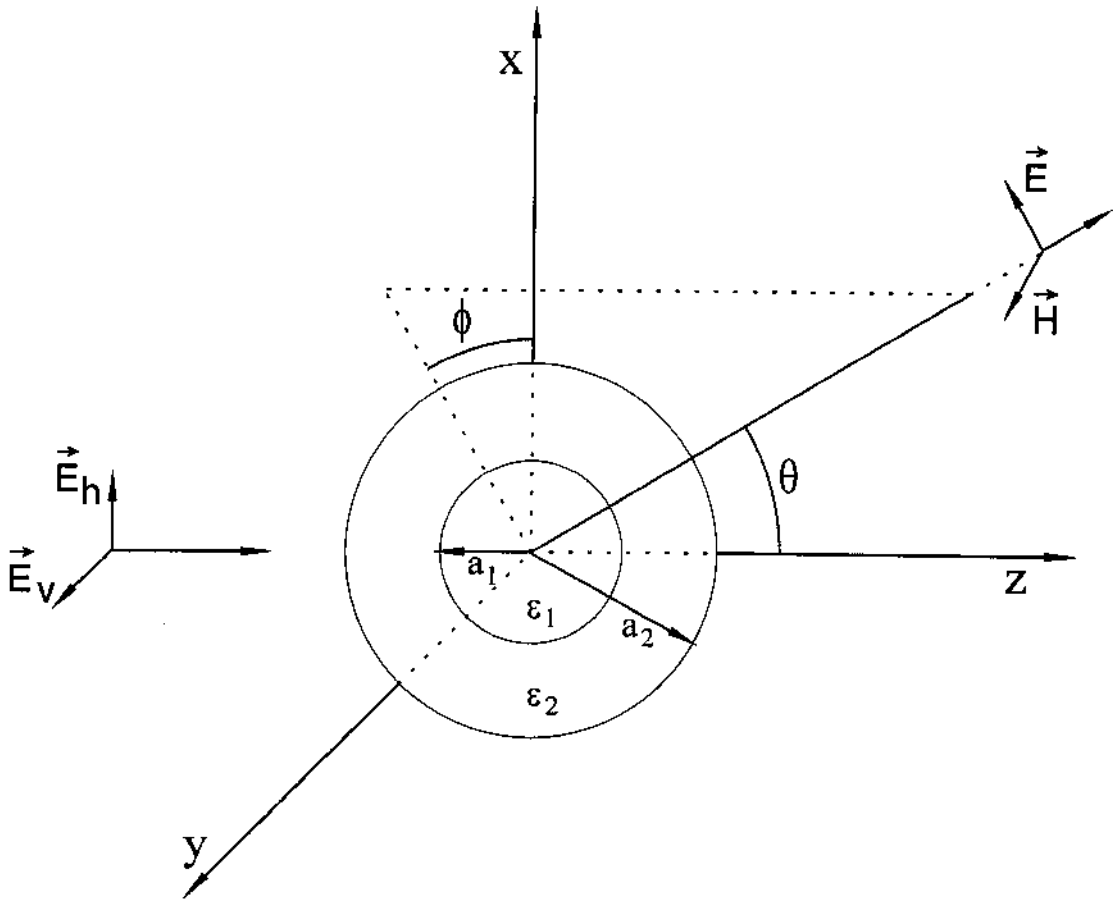


Figura 4.7 Esfera não homogênea iluminada por uma onda plana.

O sistema de coordenadas coincide com o centro da esfera.

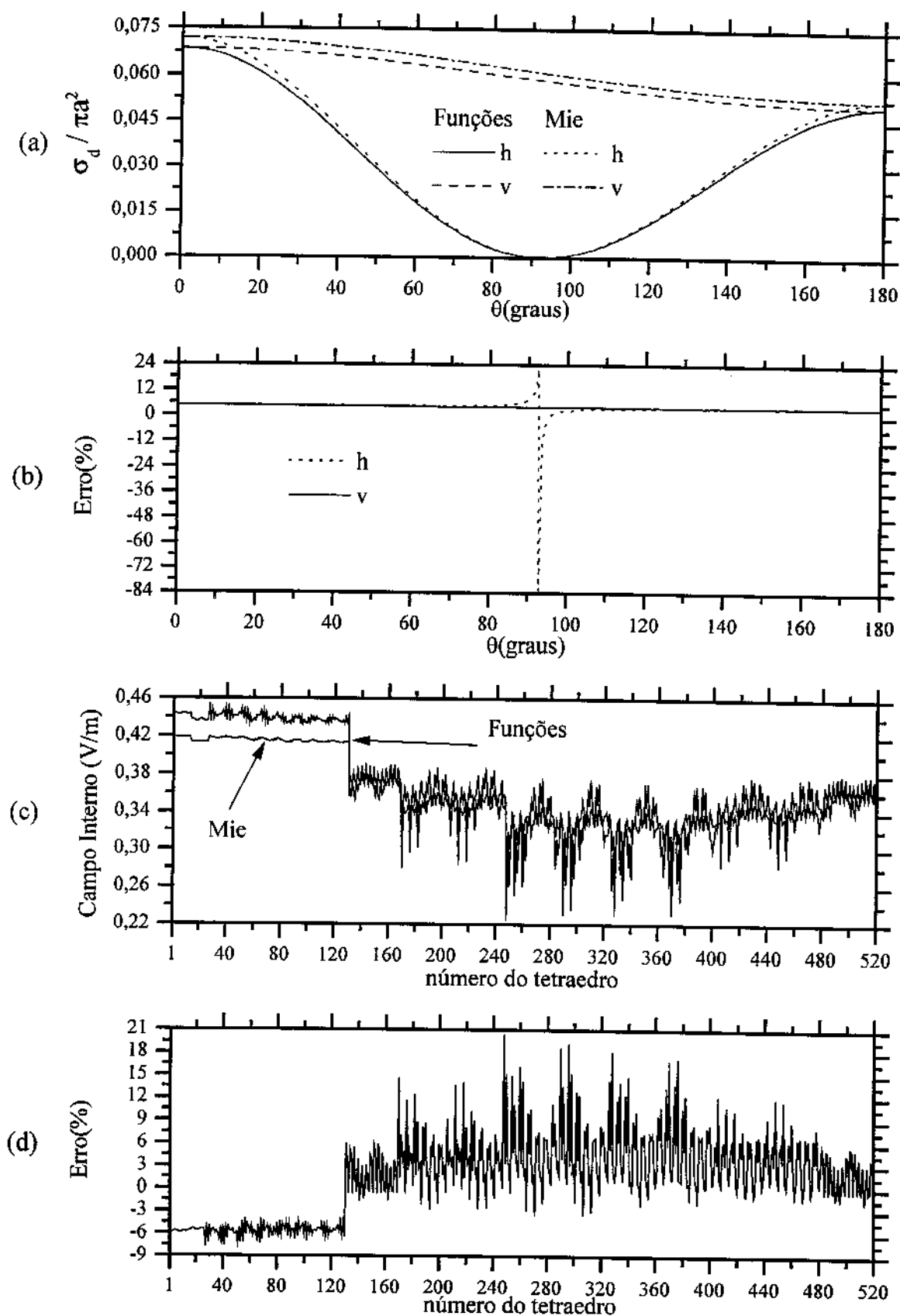


Figura 4.8 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 4,0 \epsilon_2 = 9,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

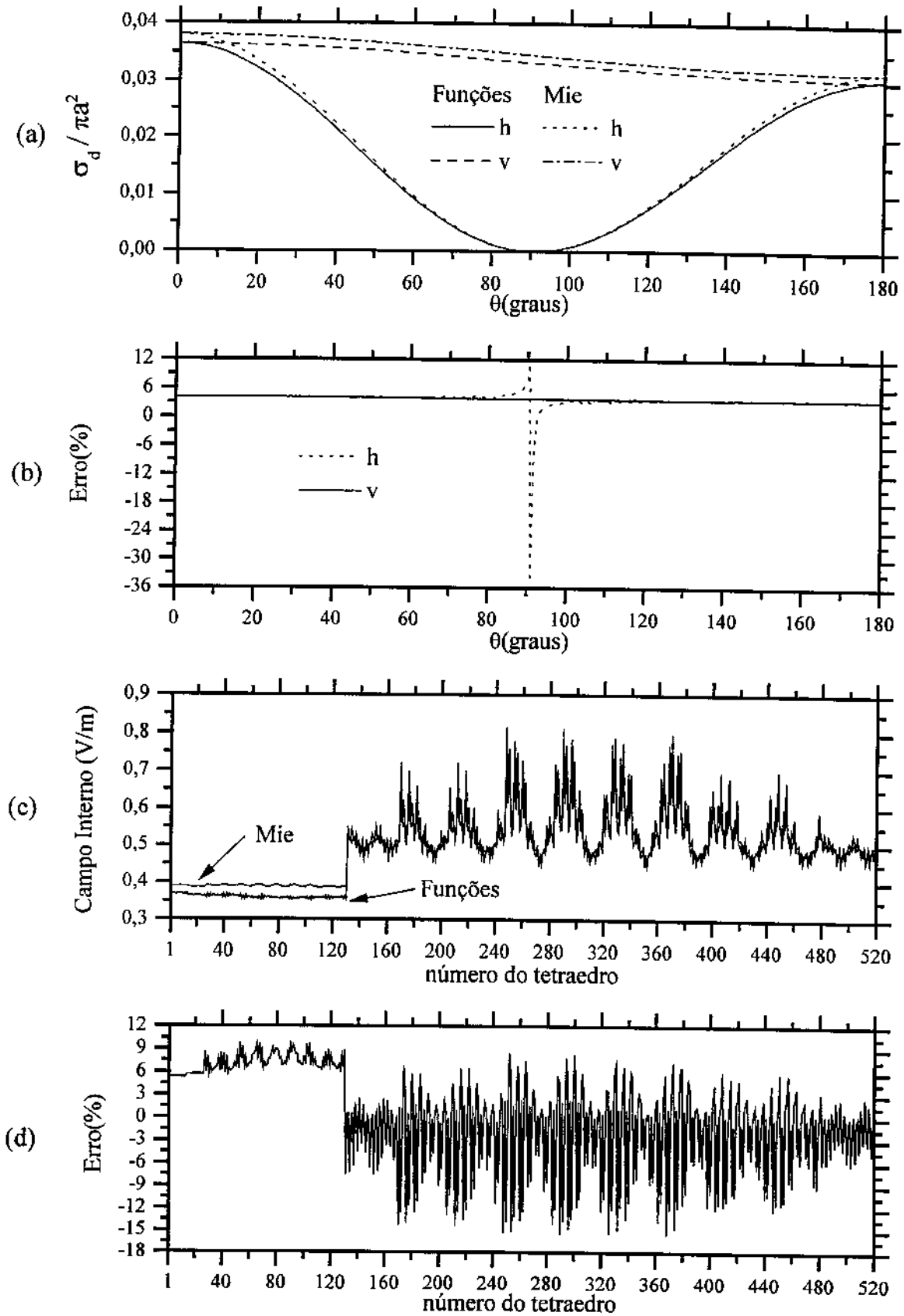


Figura 4.9 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 9,0$ $\epsilon_2 = 4,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

A Figura 4.10 mostra os resultados para a mesma esfera com $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 16,0$ e na Figura 4.11 trocamos as permissividades elétricas. A “bistatic cross section” foi calculada com um erro de mesma ordem dos casos anteriores, mas os campos internos apresentaram erro menor, na Figura 4.10 erro máximo de 10,56% e na Figura 4.11 de 11,65%. Este comportamento está associado com a diferença entre as constantes dielétricas, uma maior razão entre ϵ_2 e ϵ_1 implica num erro maior para o campo interno. Aumentamos o par de constantes dielétricas para $\epsilon_1 = 16,0$ e $\epsilon_2 = 25$, Figuras 4.12 e 4.13, para a “bistatic cross section” o erro se manteve na mesma ordem e o campo interno apresentou um erro maior. Isto é o esperado, porque estamos aumentando a constante dielétrica e já vimos na seção 3.3 que o erro aumenta. O comportamento do erro em relação a intensidade do campo interno foi o mesmo, menor quando o campo interno é maior.

Nas Figuras 4.14 e 4.15 aumentamos o par de permissividades dielétricas para (4,25) e nas Figuras 4.16 e 4.17 aumentamos para (4,40). Temos o mesmo comportamento sobre o erro no cálculo do campo interno e quanto ao aumento do erro quando a constante dielétrica aumenta, com o mesmo nível de discretização. Para estes casos aumentamos a discretização para 1800 tetraedros dividindo a esfera em 4 camadas, a 1^a camada com 180 tetraedros e a 2^a, 3^a e 4^a camadas com 540 tetraedros cada, o número de funções LI gerado foi de 1890. Nas figuras 4.18 a 4.25 temos os resultados dos cálculos e vemos que o erro diminuiu e o comportamento foi como nos casos anteriores.

Na tabela 4.1 temos um quadro do comportamento do erro na análise de esferas duas camadas.

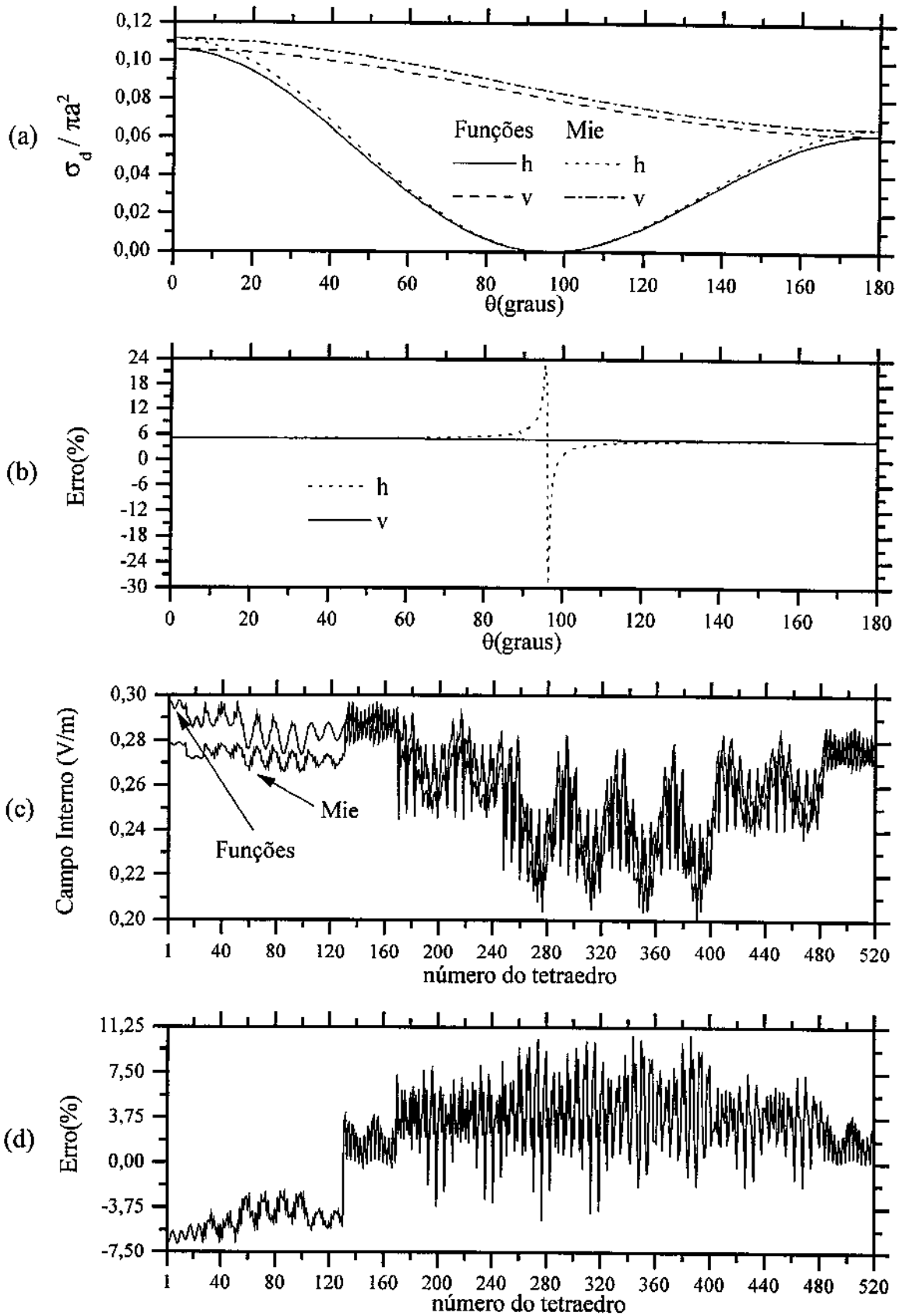


Figura 4.10 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\varepsilon_1 = 9,0$ $\varepsilon_2 = 16,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

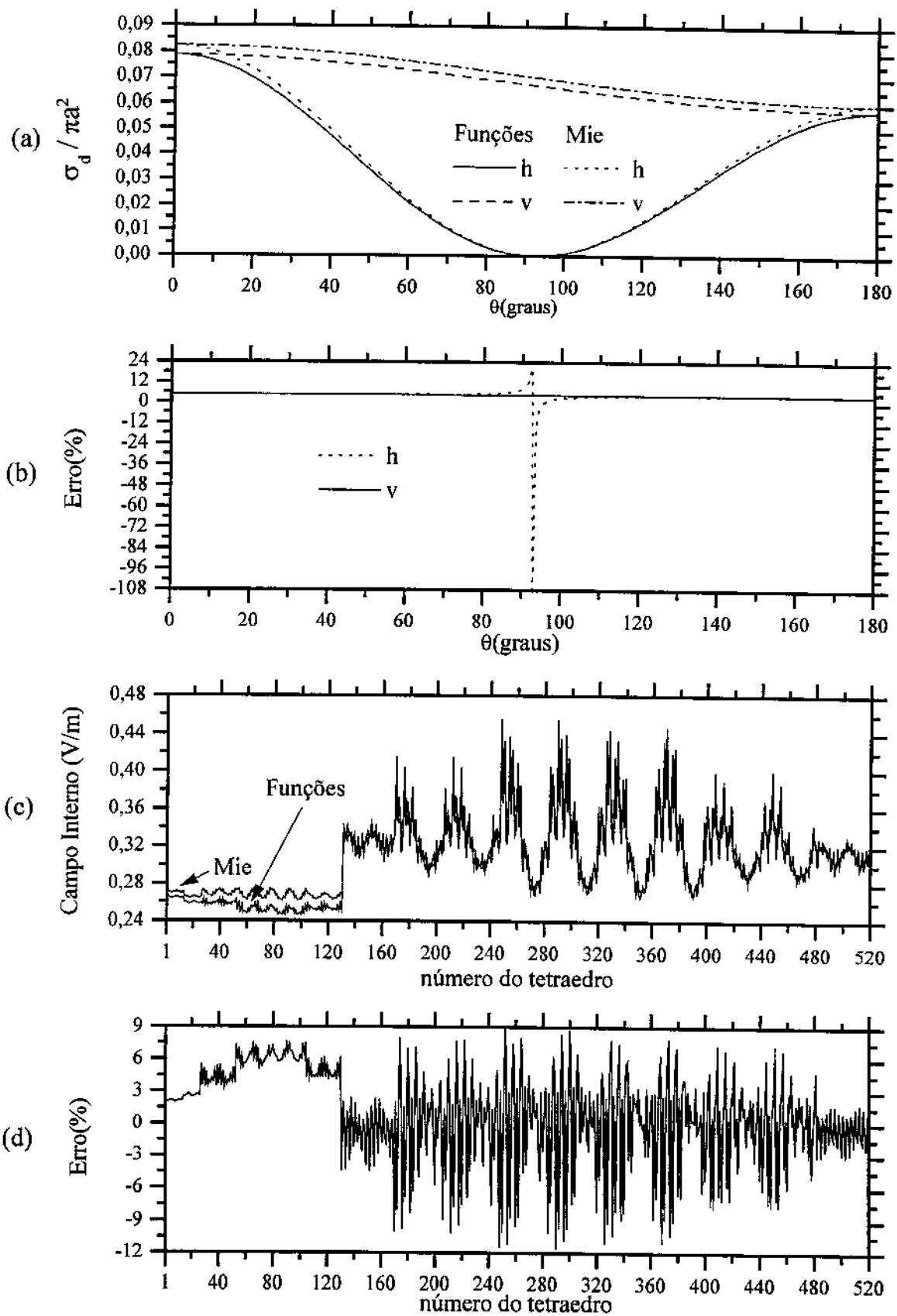


Figura 4.11 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 16,0$ $\epsilon_2 = 9,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

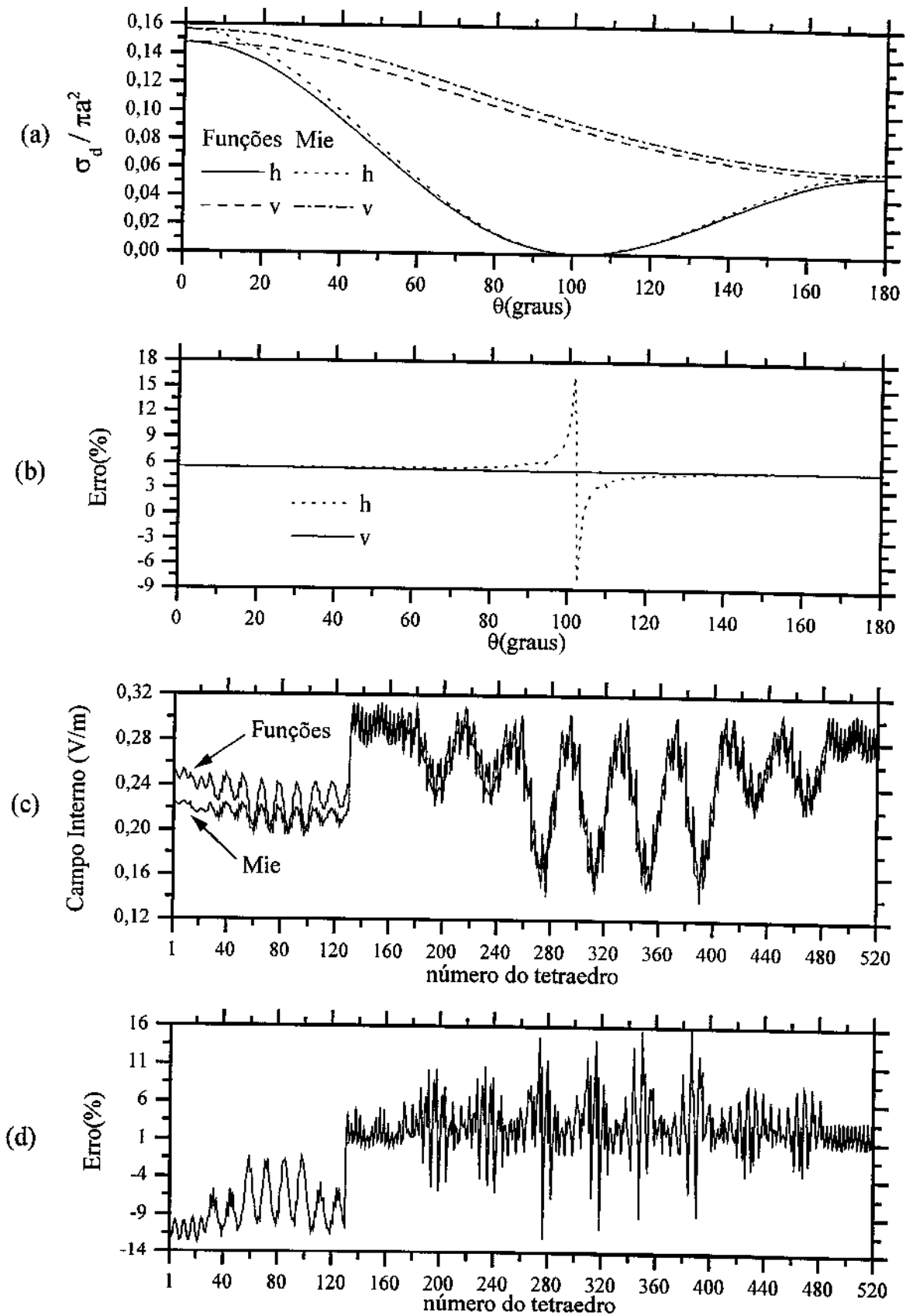


Figura 4.12 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 16,0$ $\epsilon_2 = 25,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

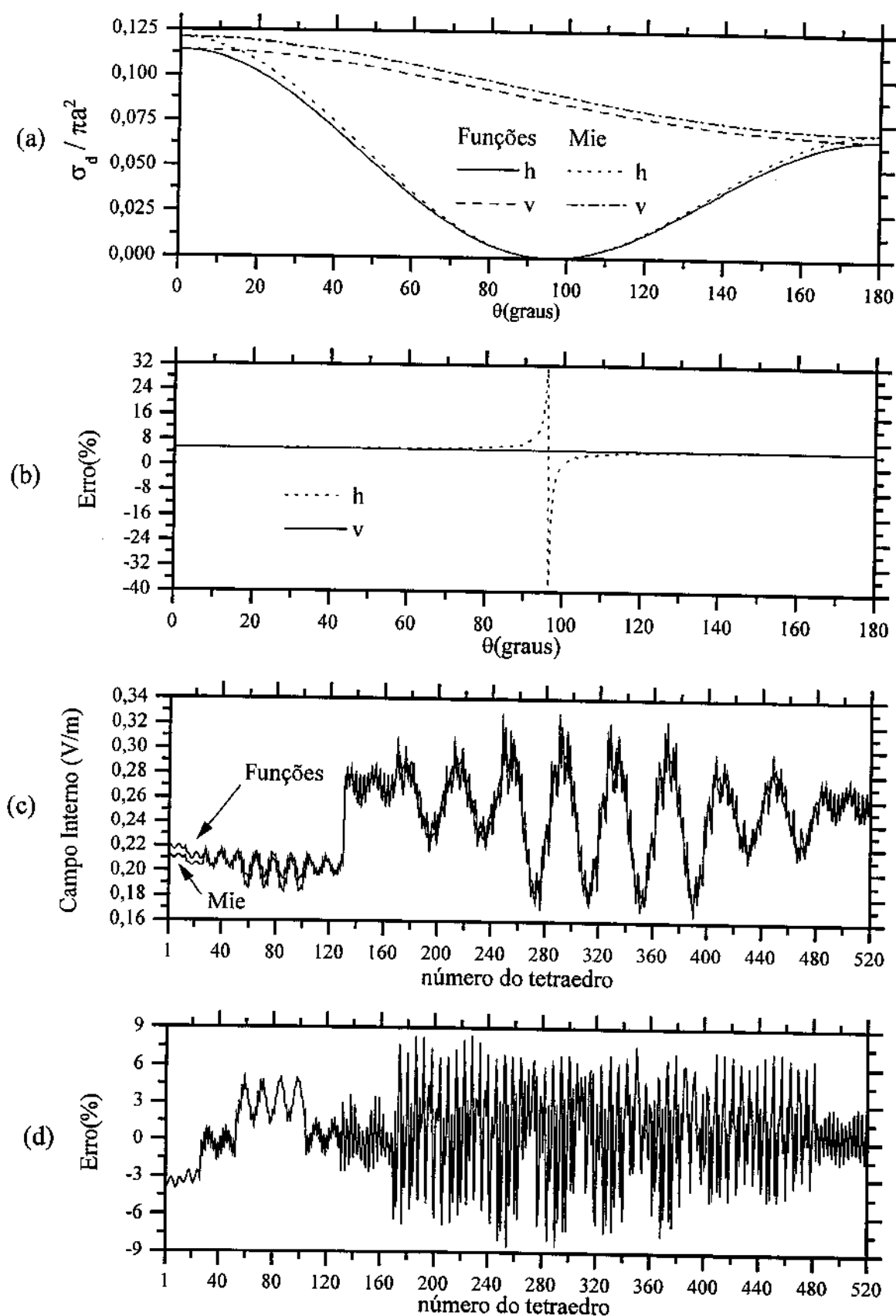


Figura 4.13 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\varepsilon_1 = 25,0$ $\varepsilon_2 = 16,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

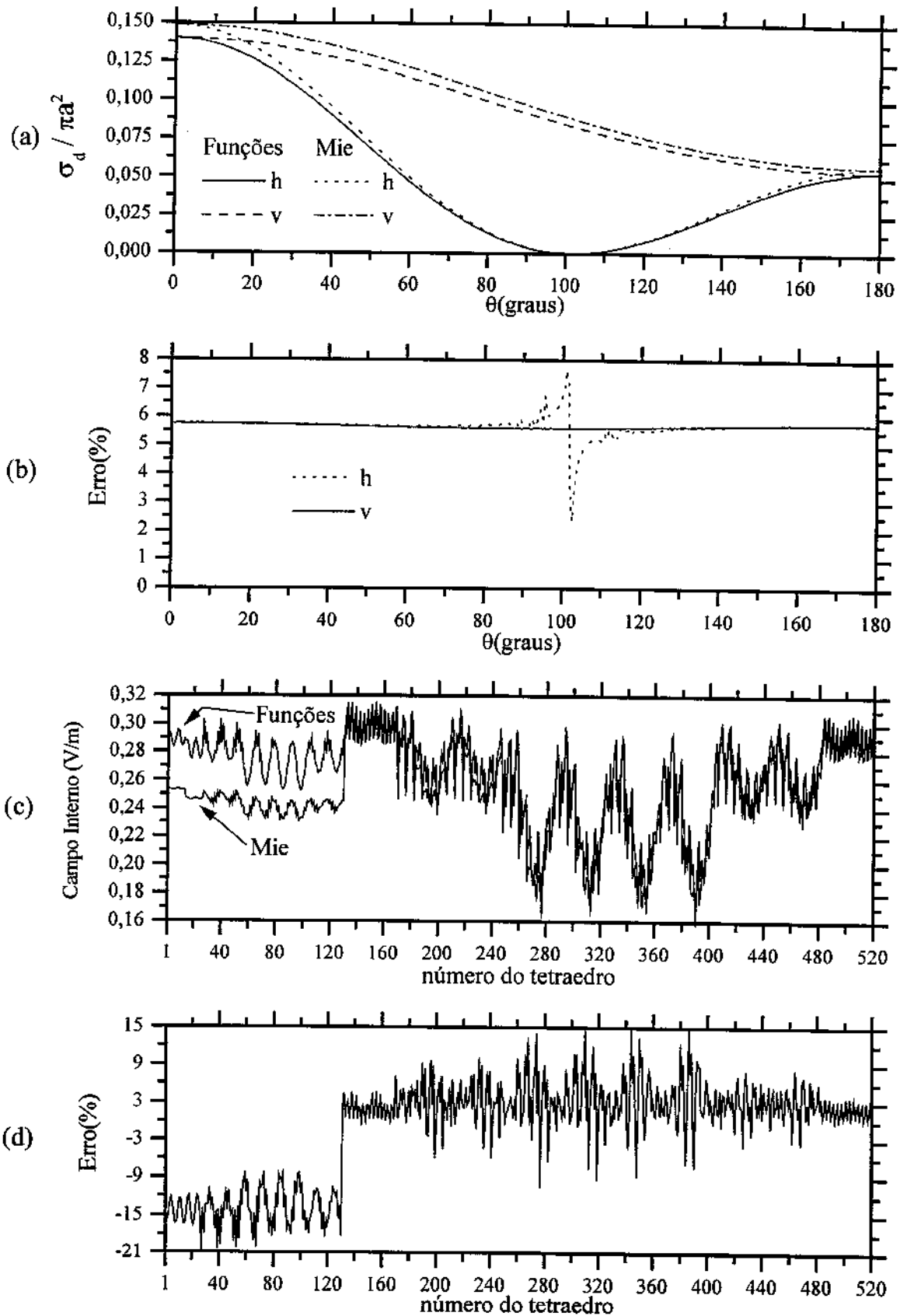


Figura 4.14 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 4,0$ $\epsilon_2 = 25,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

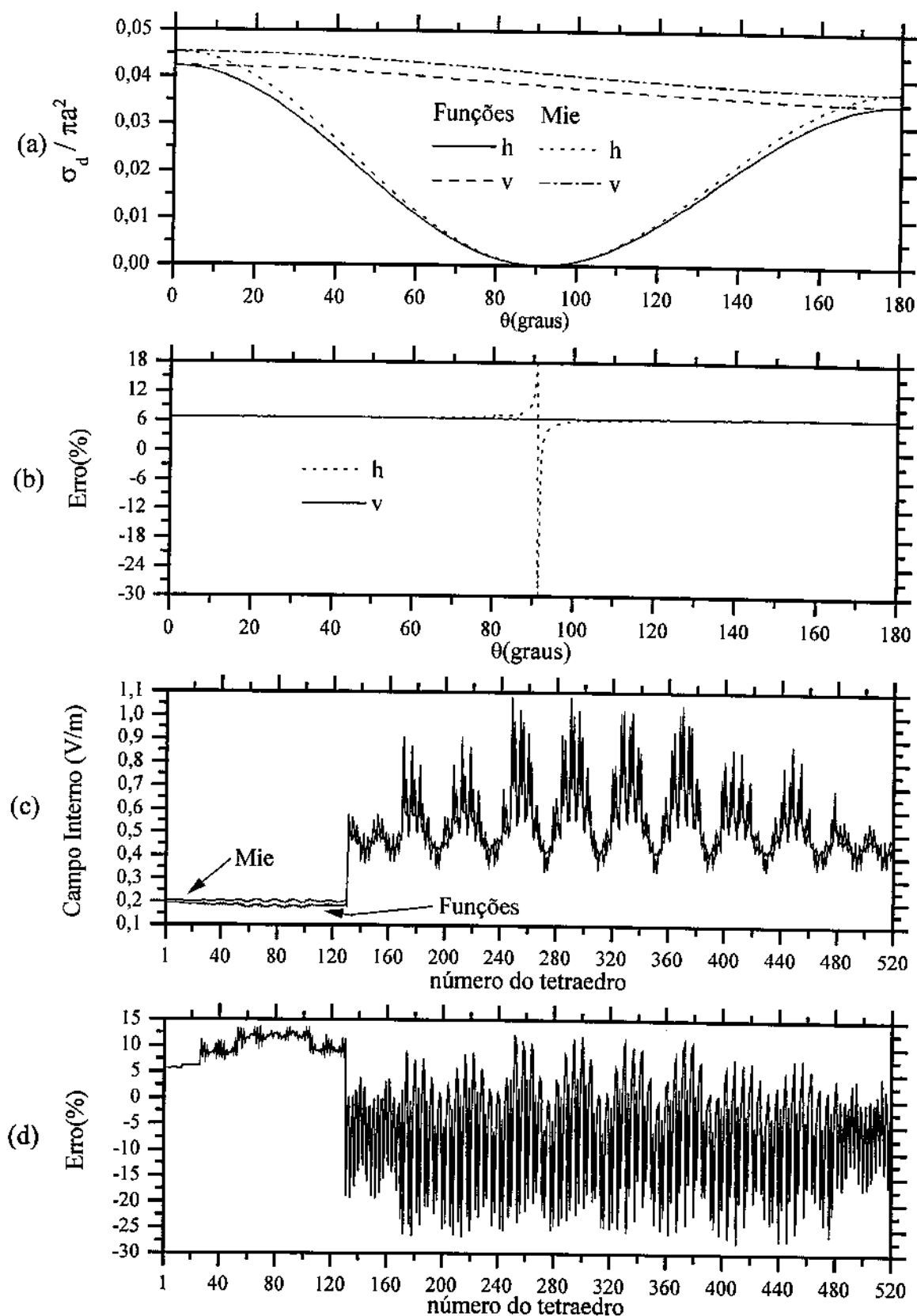


Figura 4.15 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 25,0$ $\epsilon_2 = 4,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

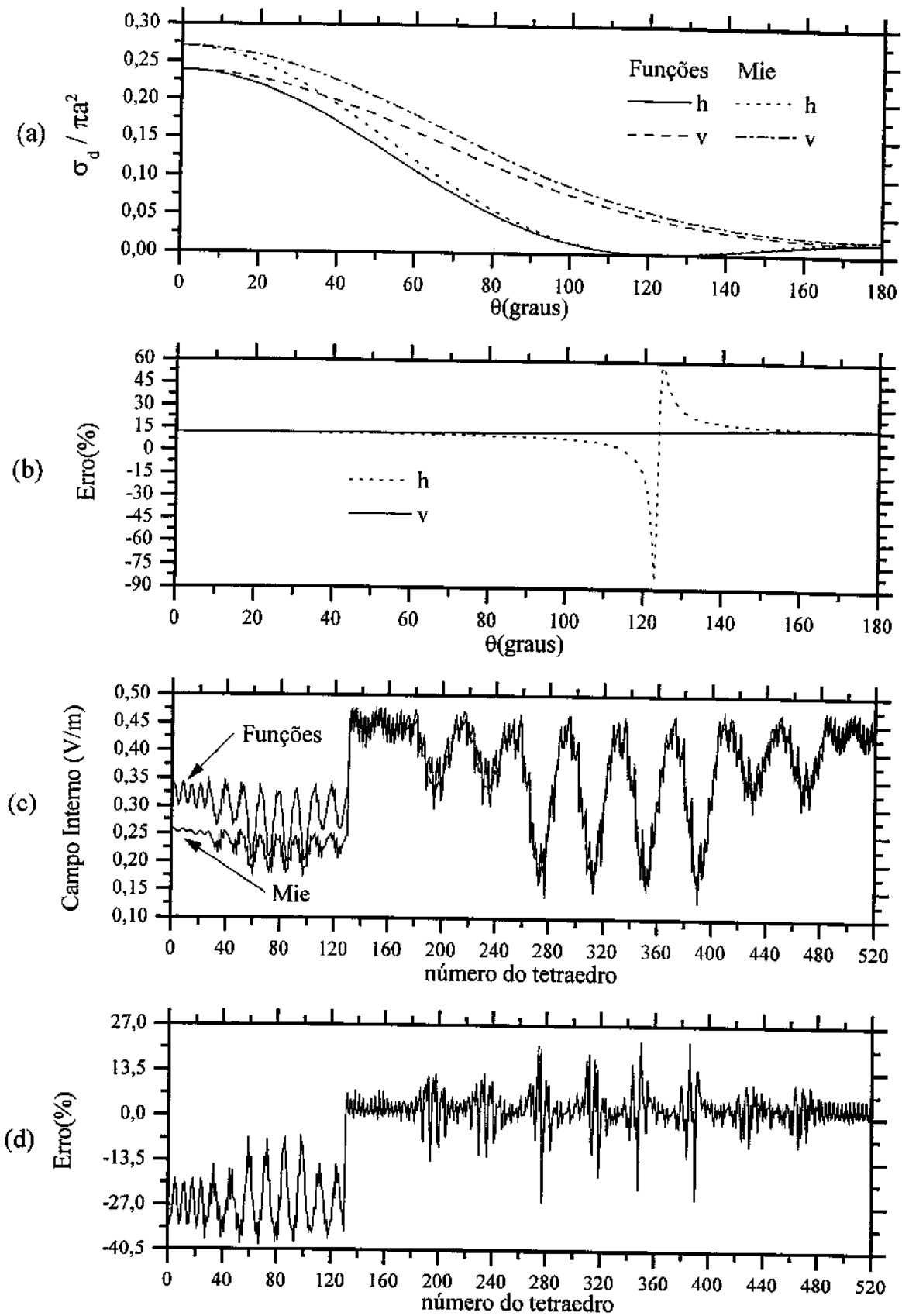


Figura 4.16 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 4,0$ $\epsilon_2 = 40,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

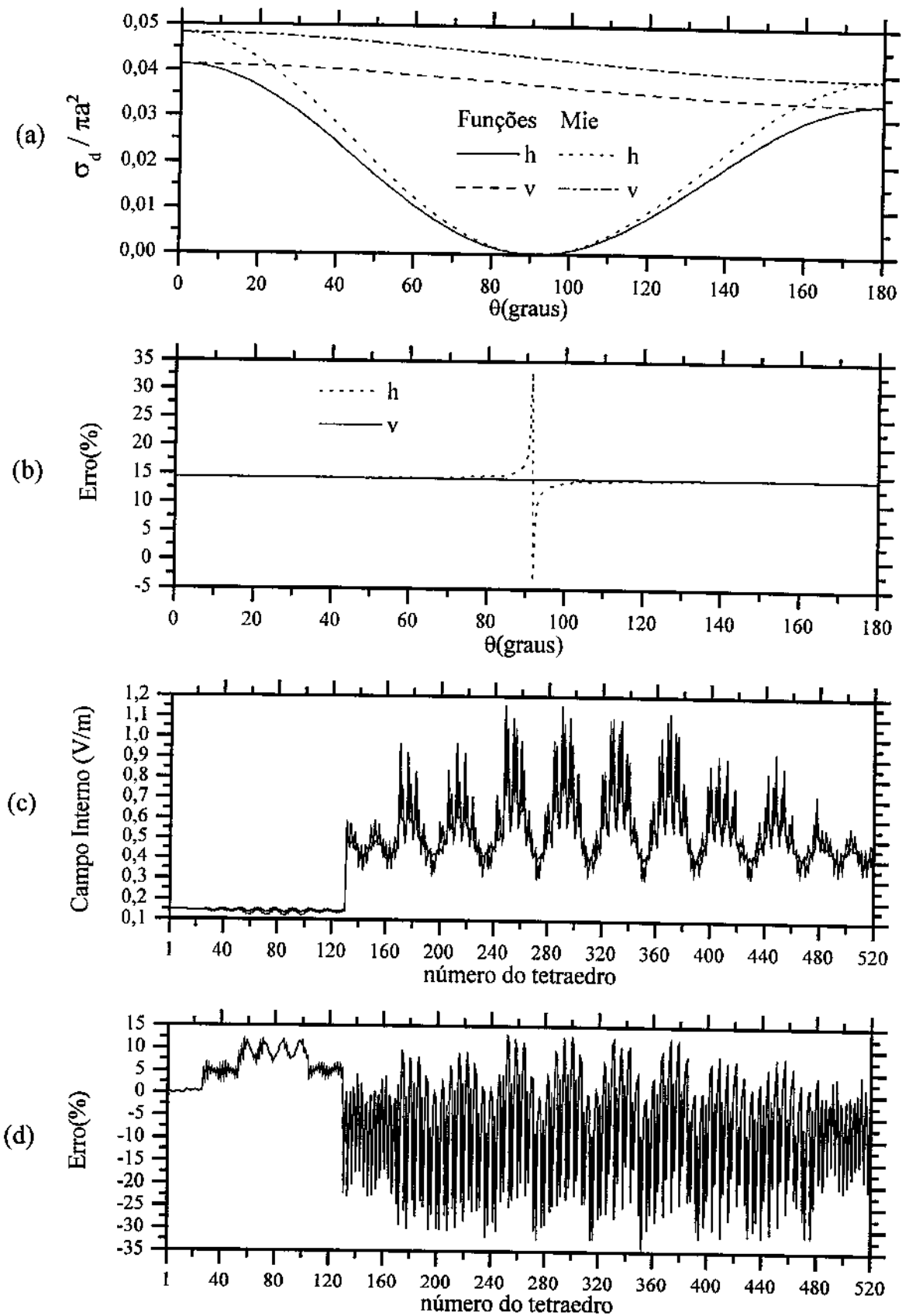


Figura 4.17 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$ e $\epsilon_1 = 40,0$ $\epsilon_2 = 4,0$

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno (d) erro em relação a série de Mie

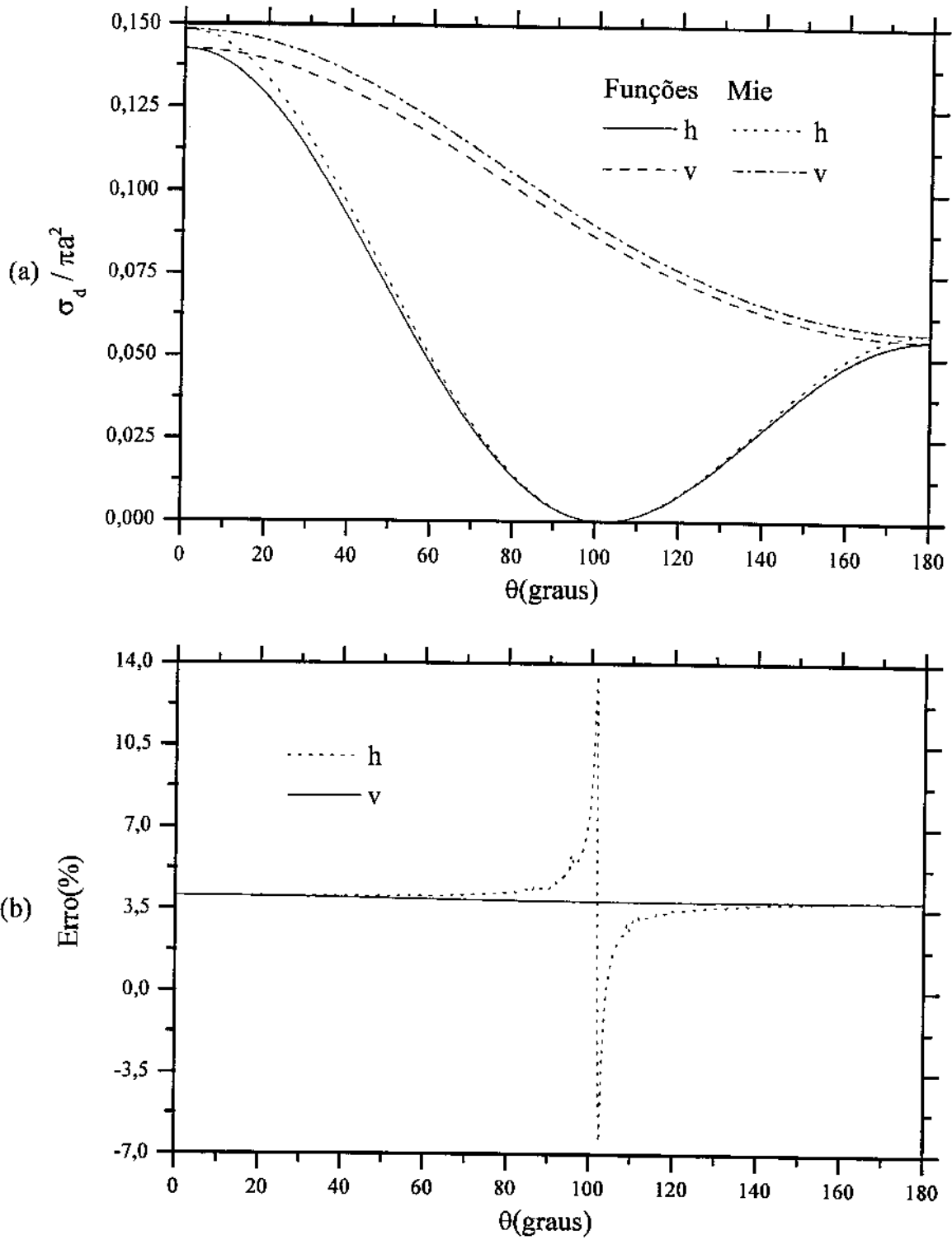


Figura 4.18 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 25,0$

discretizada com 1800 tetraedros.

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

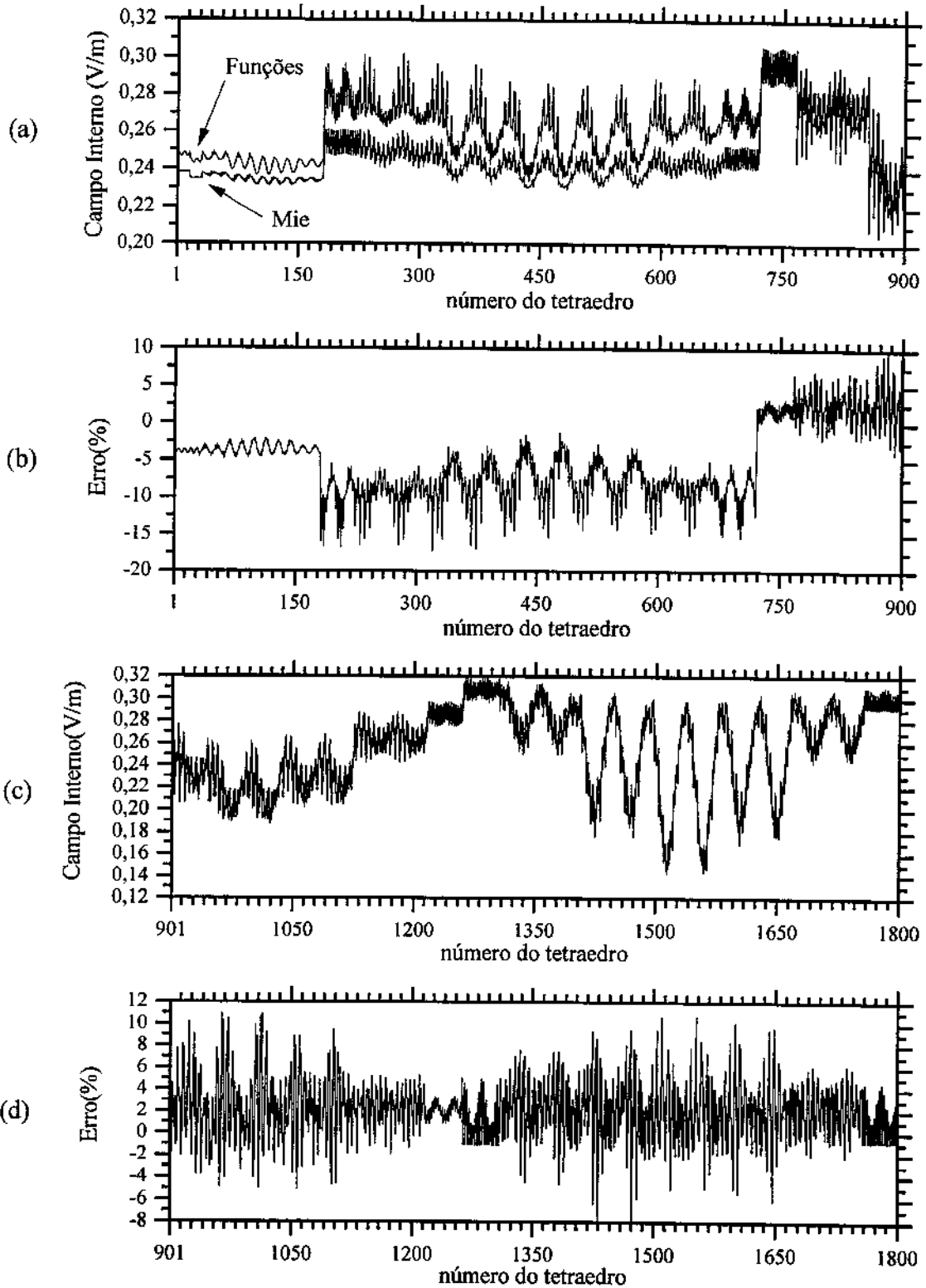


Figura 4.19 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 25,0$ discretizada com 1800 tetraedros

- (a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro (d) erro em relação a série de Mie

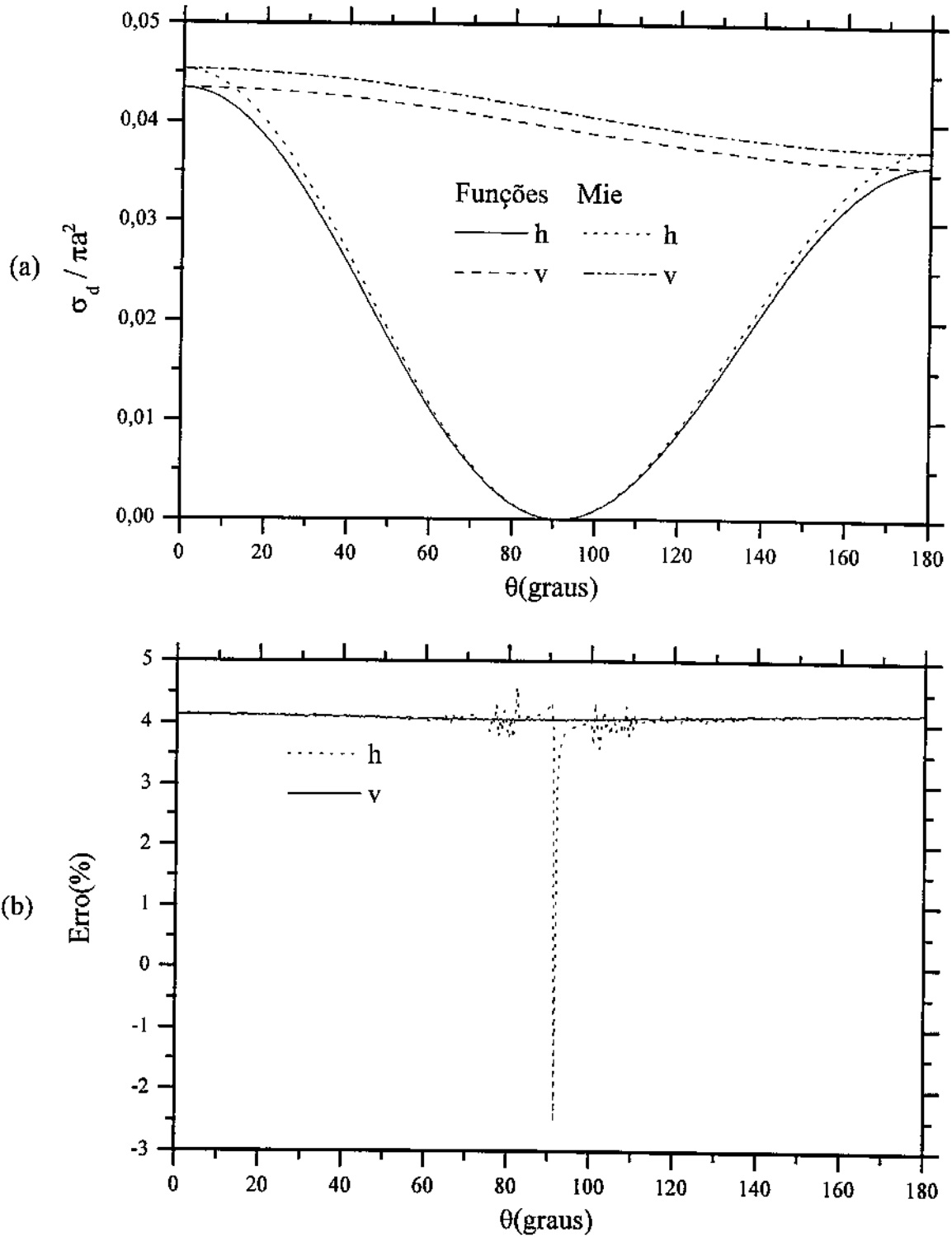


Figura 4.20 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$

discretizada com 1800 tetraedros.

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

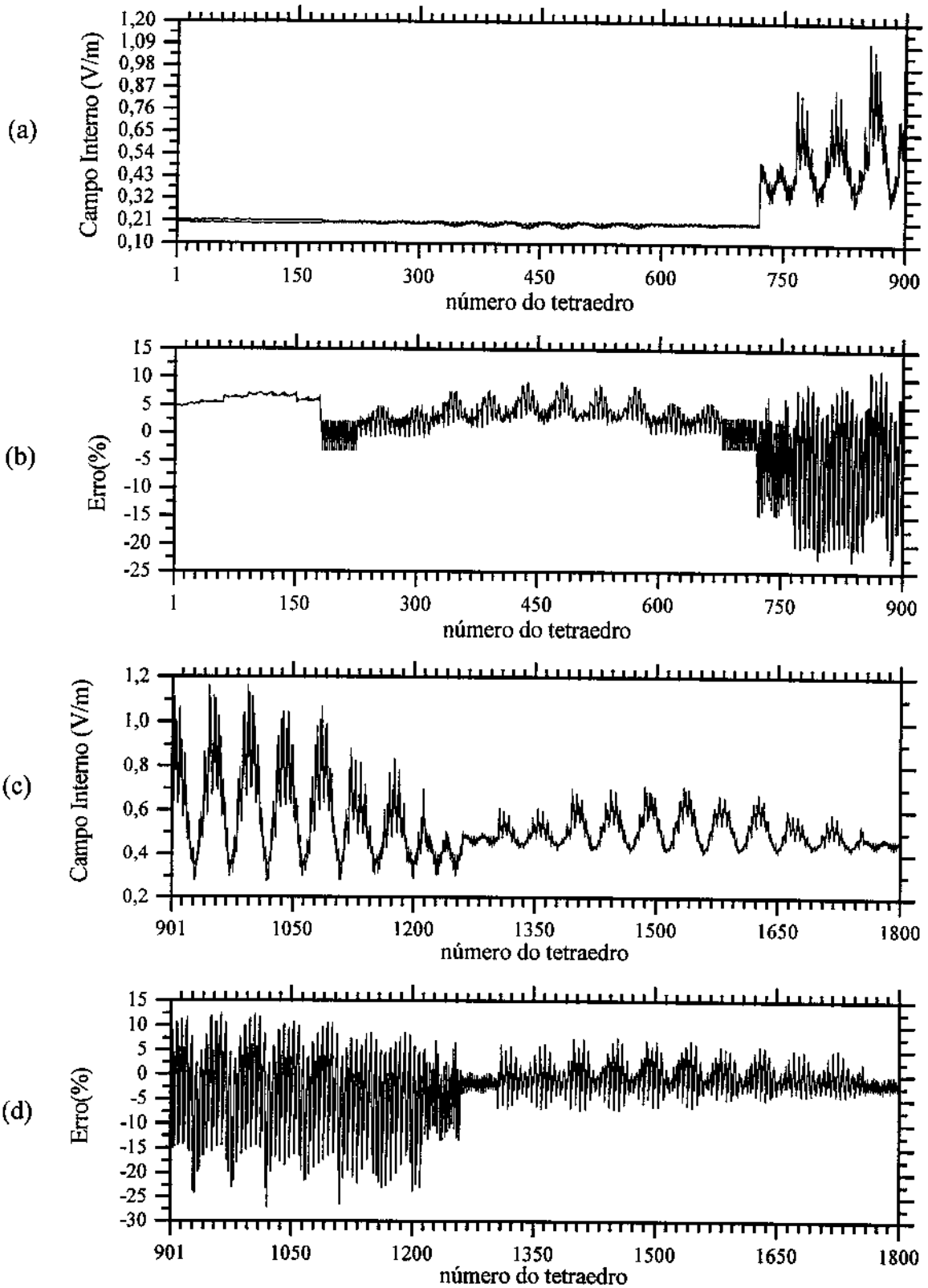


Figura 4.21 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ discretizada com 1800 tetraedros

(a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro (d) erro em relação a série de Mie

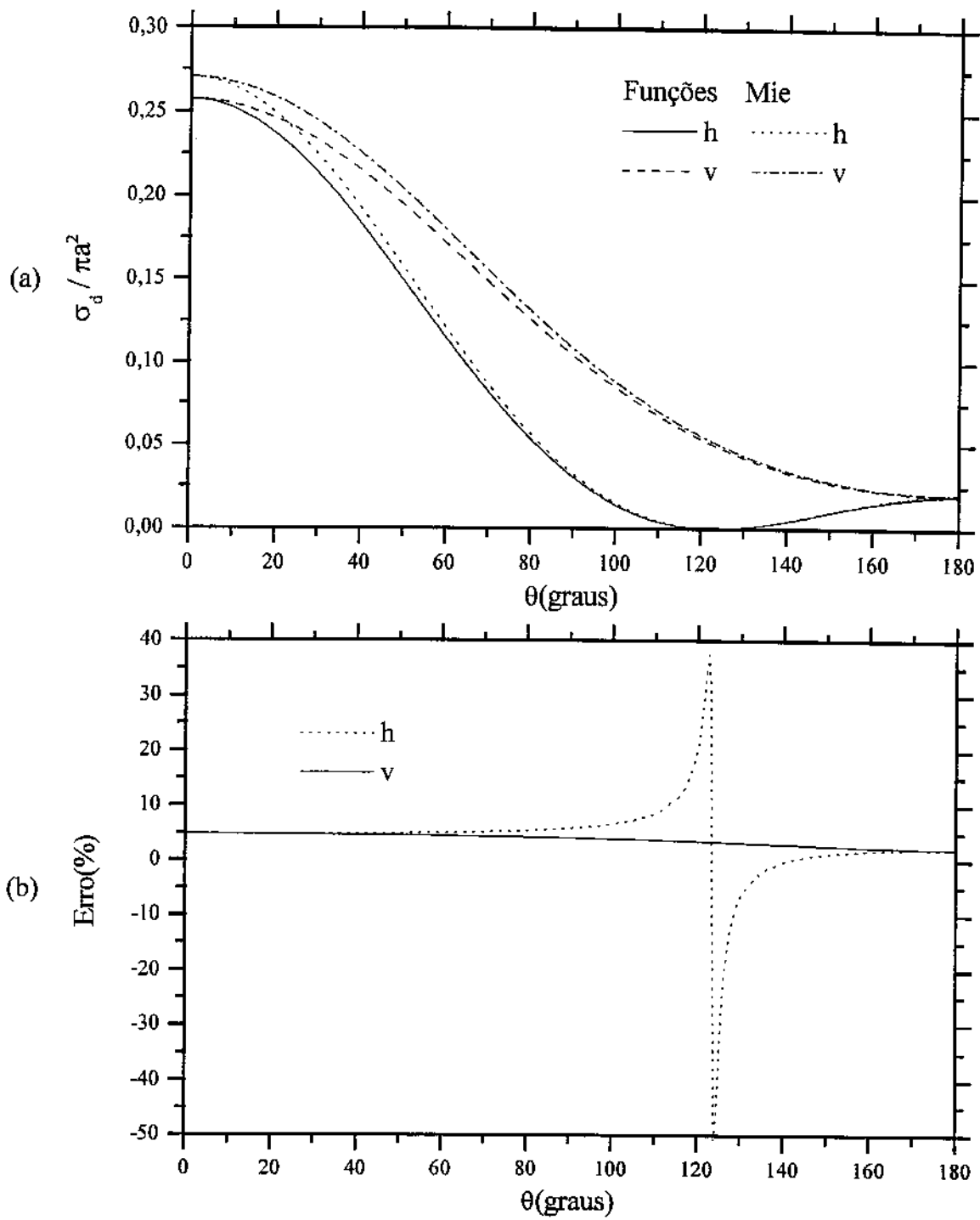


Figura 4.22 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 40,0$

discretizada com 1800 tetraedros.

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

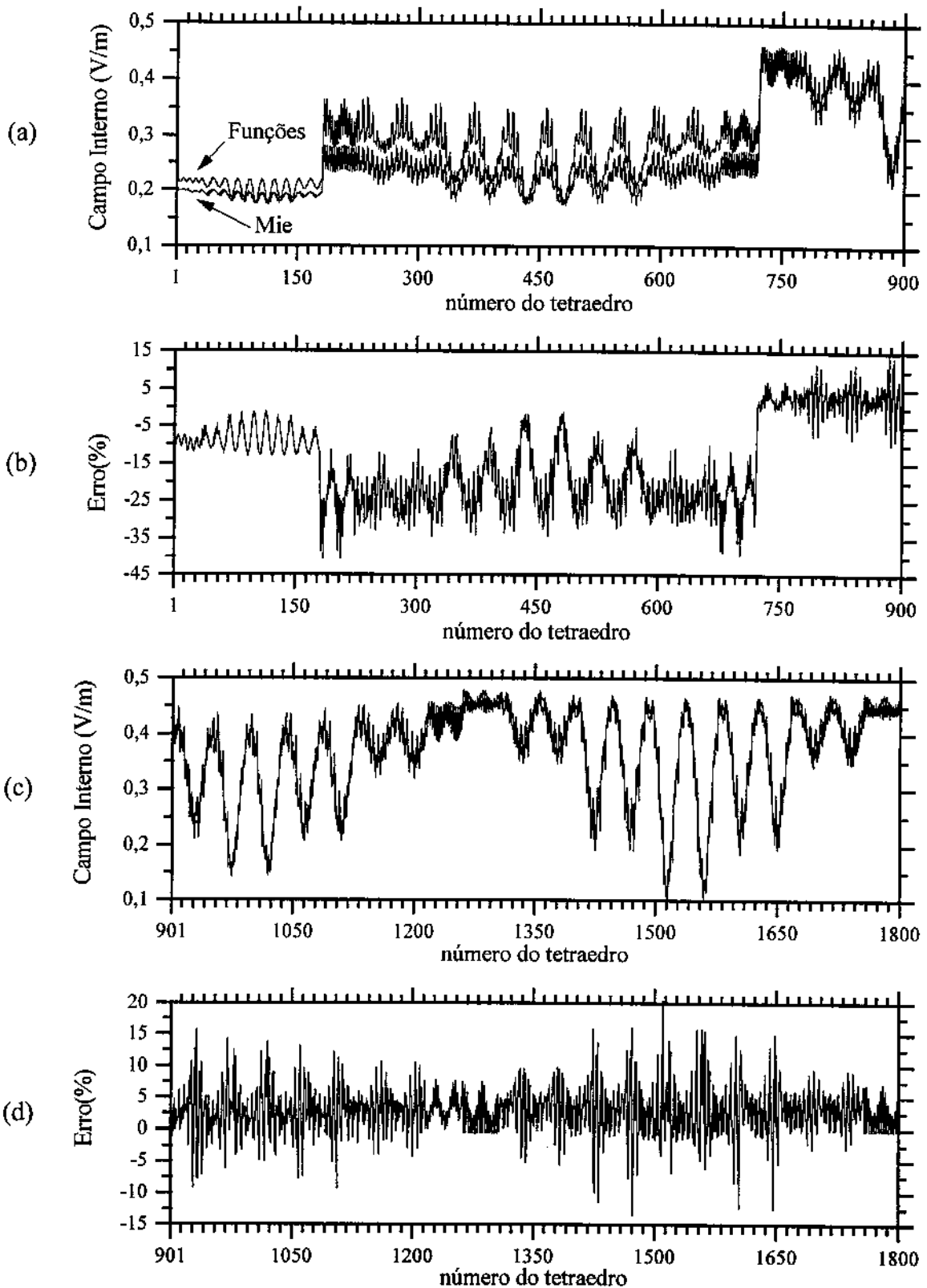


Figura 4.23 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 40,0$ discretizada com 1800 tetraedros

(a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro (d) erro em relação a série de Mie

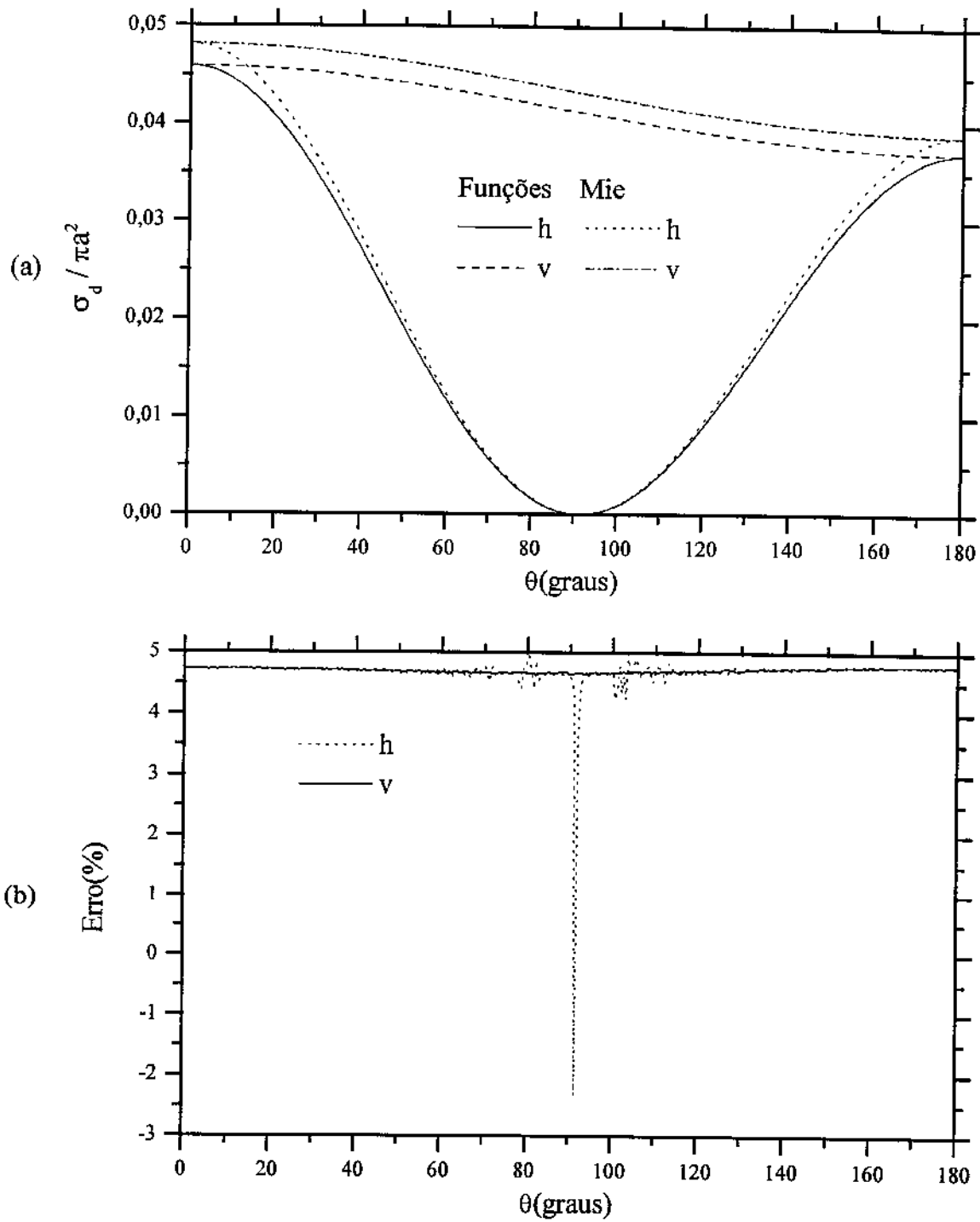


Figura 4.24 Esfera com $\kappa_0 a_2 = 0,408$, $\epsilon_1 = 40,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$

discretizada com 1800 tetraedros.

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

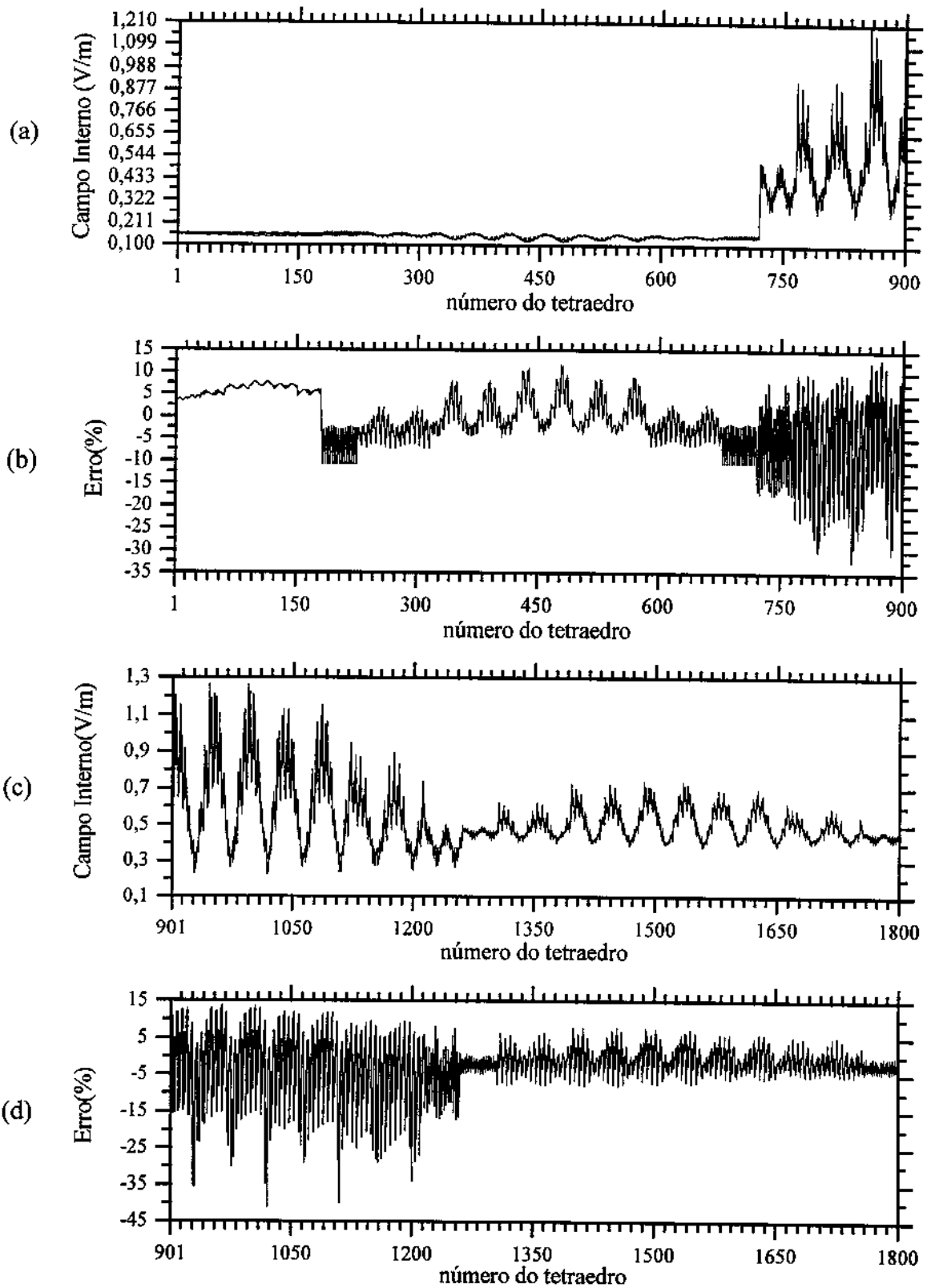


Figura 4.25 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 40,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$ discretizada com 1800 tetraedros

(a) campo interno do 1^o ao 900^o tetraedro (b) erro em relação a série de Mie
(c) campo interno do 901^o ao 1800^o tetraedro (d) erro em relação a série de Mie

Tabela 4.1 Comportamento do erro na análise de esferas duas camadas

$\kappa_0 a_2$	Característica elétrica ($\epsilon_1; \epsilon_2$)	discretização número de tetraedros	número de funções LI	erro máximo na BCS (%) polarização vertical	erro máximo no campo interno na região $0 \leq r \leq a_1$ (%)	erro máximo no campo interno na região $a_1 \leq r \leq a_2$ (%)
0,408	(4,0;9,0)	520	719	4,53	14,63	20,43
0,408	(9,0;4,0)	520	719	4,05	9,8	15,51
0,408	(9,0;16,0)	520	719	5,05	6,7	10,56
0,408	(16,0;9,0)	520	719	4,75	7,39	11,65
0,408	(16,0;25,0)	520	719	5,44	12,61	15,90
0,408	(25,0;16,0)	520	719	5,35	7,70	8,50
0,408	(4,0;25,0)	520	719	5,77	20,46	15,24
0,408	(25,0;4,0)	520	719	6,76	13,38	27,67
0,408	(4,0;40,0)	520	719	16,27	38,55	25,12
0,408	(40,0;4,0)	520	719	14,31	29,17	34,61
0,408	(4,0;25,0)	1800	1890	4,05	17,30	11,0
0,408	(25,0;4,0)	1800	1890	4,18	9,28	27,24
0,408	(4,0;40,0)	1800	1890	4,79	40,70	20,55
0,408	(40,0;4,0)	1800	1890	4,80	11,33	40,00

4.3 Campo espalhado por um conjunto de cubos distintos

Na Figura 4.26 temos três conjuntos de cubos eletricamente distintos, iluminados por uma onda plana que propaga na direção $+z$, com intensidade $E_x^i = 377 \text{ V/m}$. O campo espalhado distante é calculado nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$, a frequência do campo é de 300 MHz.

Nas Figuras 4.27 a 4.29 temos conjuntos de 2 ($\epsilon_1 = 4,0; \epsilon_2 = 9,0$), 3 ($\epsilon_1 = 4,0; \epsilon_2 = 9,0; \epsilon_3 = 14,0$) e 4 ($\epsilon_1 = 4,0; \epsilon_2 = 8,0; \epsilon_3 = 12,0; \epsilon_4 = 16,0$) cubos, respectivamente, com $d = 0,1\lambda$. Todos os resultados concordaram nos dois planos de observação com pequenas diferenças, no caso de três cubos uma diferença máxima de 0,11 dB e no de quatro cubos uma de 0,18 dB. Os resultados para conjuntos de 2, 3 e 4 cubos, com as mesmas características elétricas mas com $d = 1,0\lambda$ são mostrados nas Figuras 4.30, 4.31 e 4.32, respectivamente. A maior diferença no caso de 2 cubos foi de 0,03 dB, no caso três cubos foi de 0,1 dB (neste caso o ponto de mínimo apresentou 5 dB de diferença) e no 4 cubos uma de 0,07 dB.

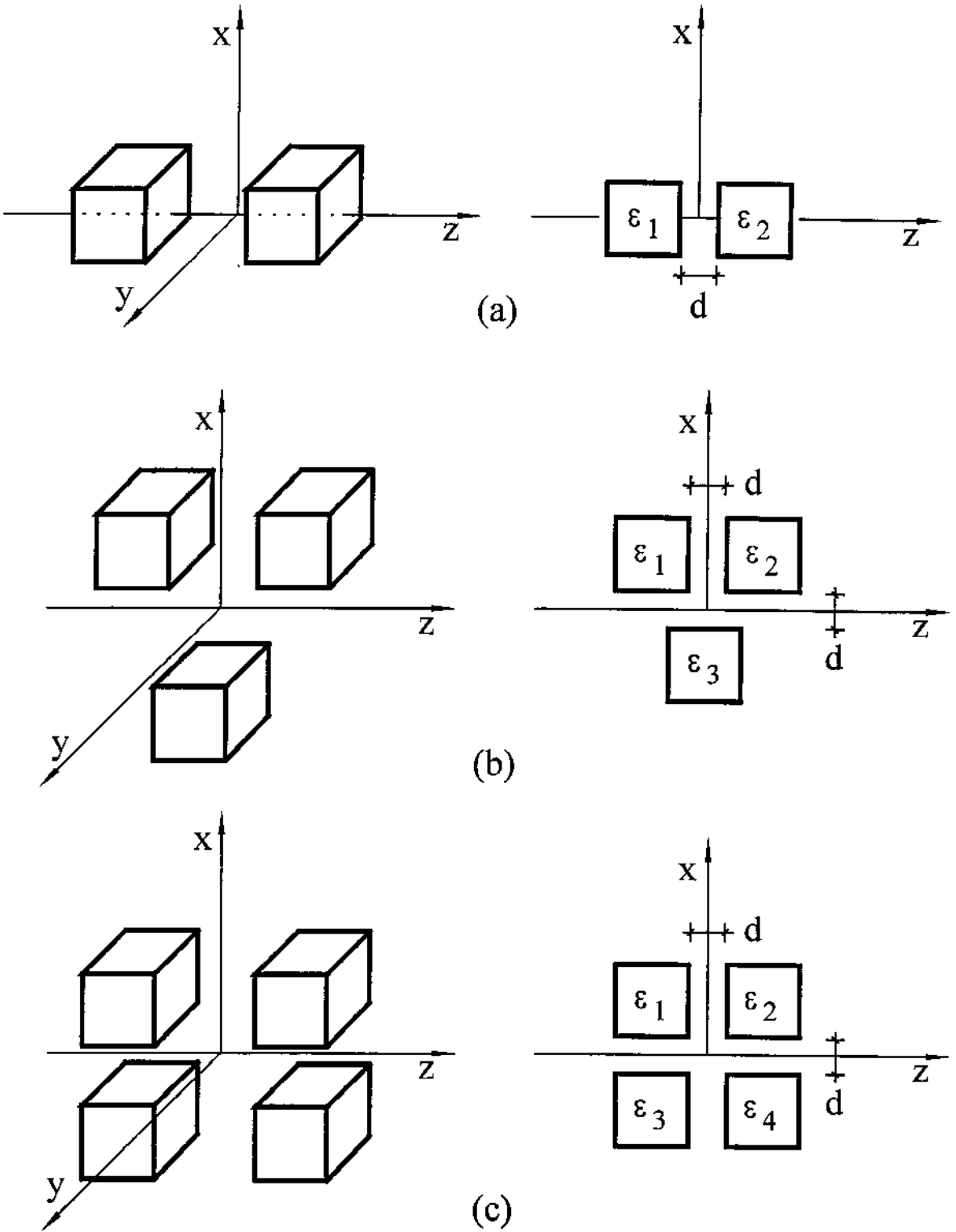


Figura 4.26 Conjunto de cubos de $0,1\lambda$ sobre o qual incide uma onda plana propagando na direção $+z$.

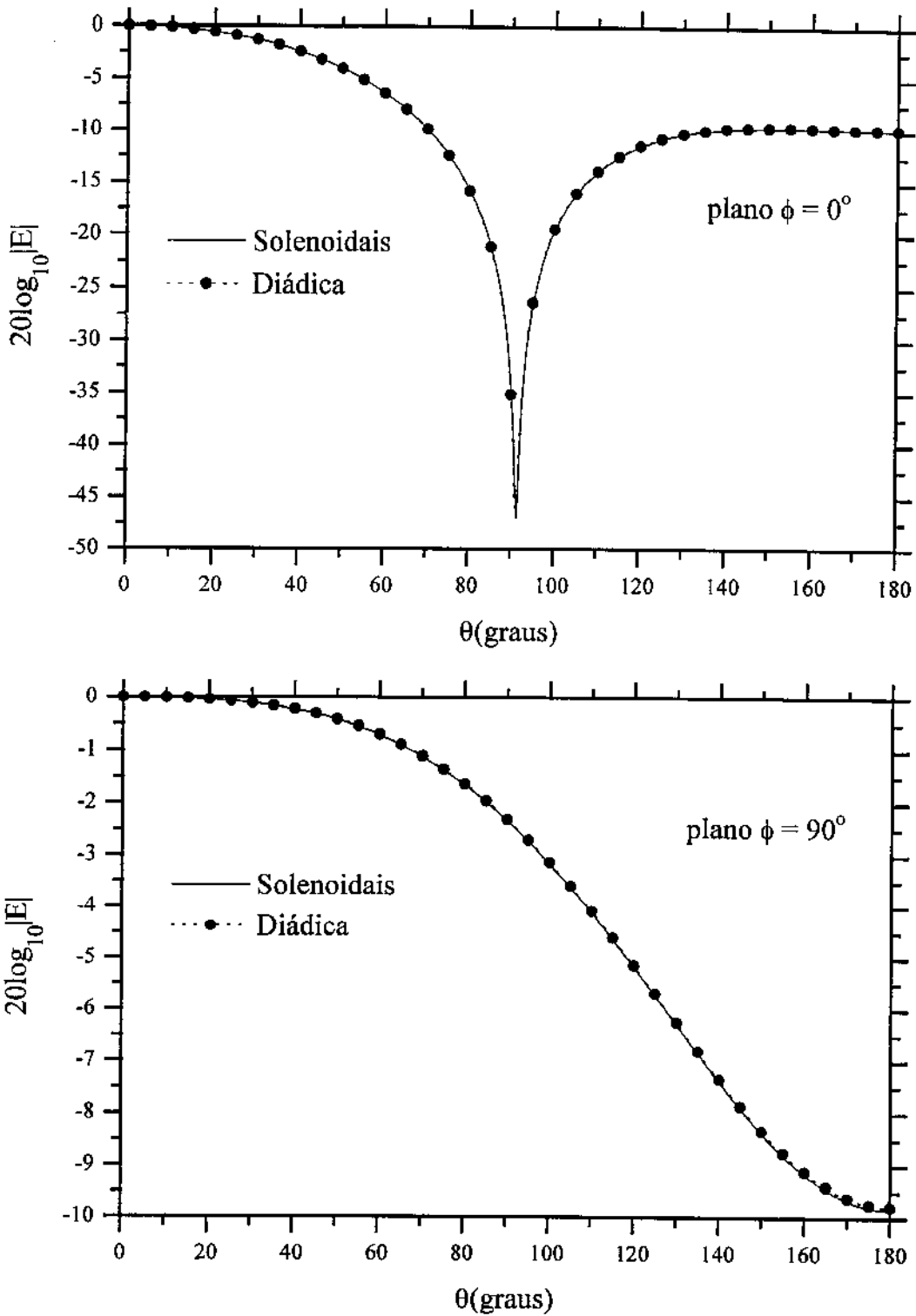


Figura 4.27 Campo espalhado por dois cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$,

$$\varepsilon_1 = 4,0 \text{ e } \varepsilon_2 = 9,0$$

funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas

diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

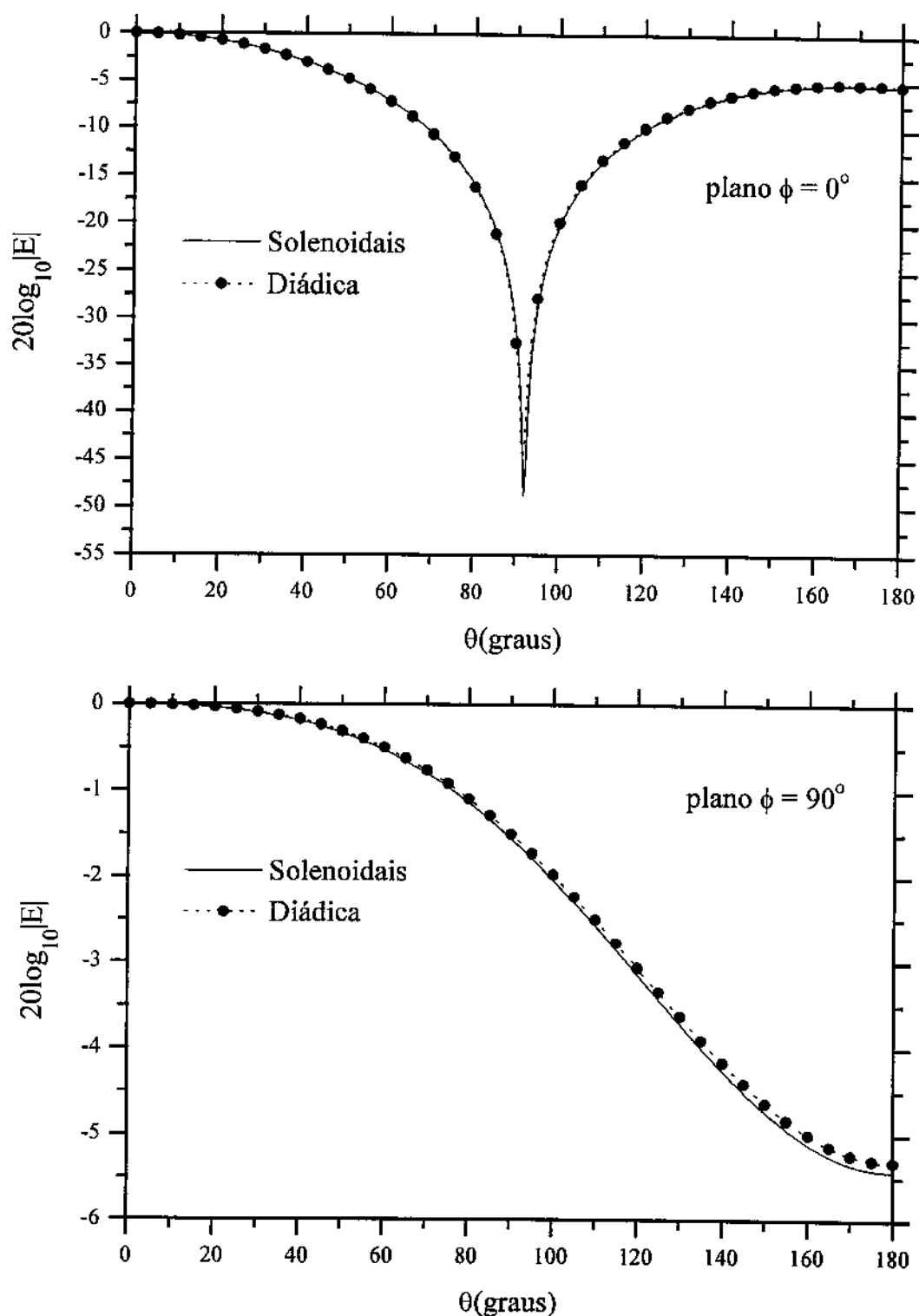


Figura 4.28 Campo espalhado por três cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$,

$$\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 9,0 \text{ e } \varepsilon_3 = 14,0$$

funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas

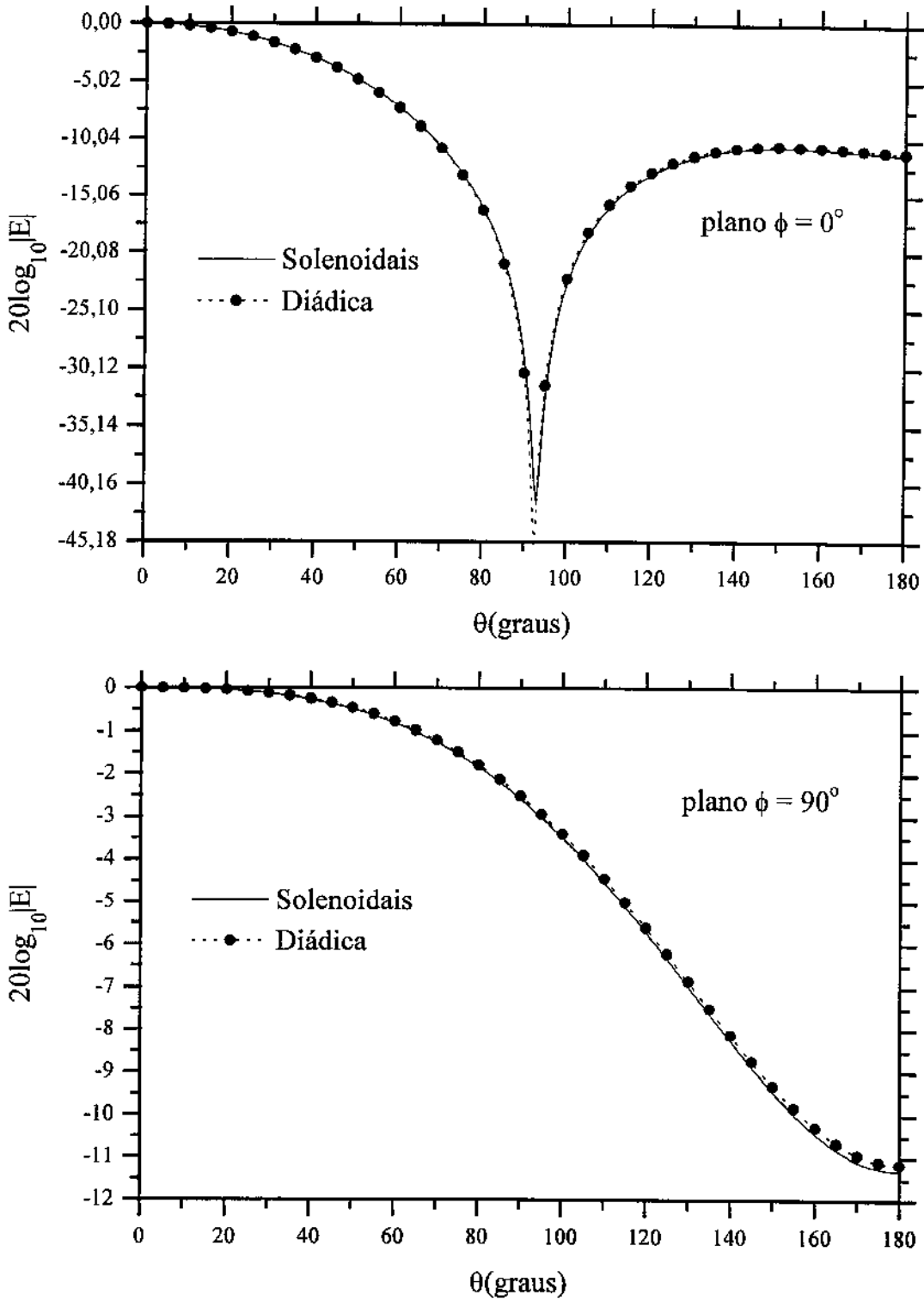


Figura 4.29 Campo espalhado por quatro cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$,

$$\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 8,0, \varepsilon_3 = 12,0 \text{ e } \varepsilon_4 = 16,0$$

funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas

diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas

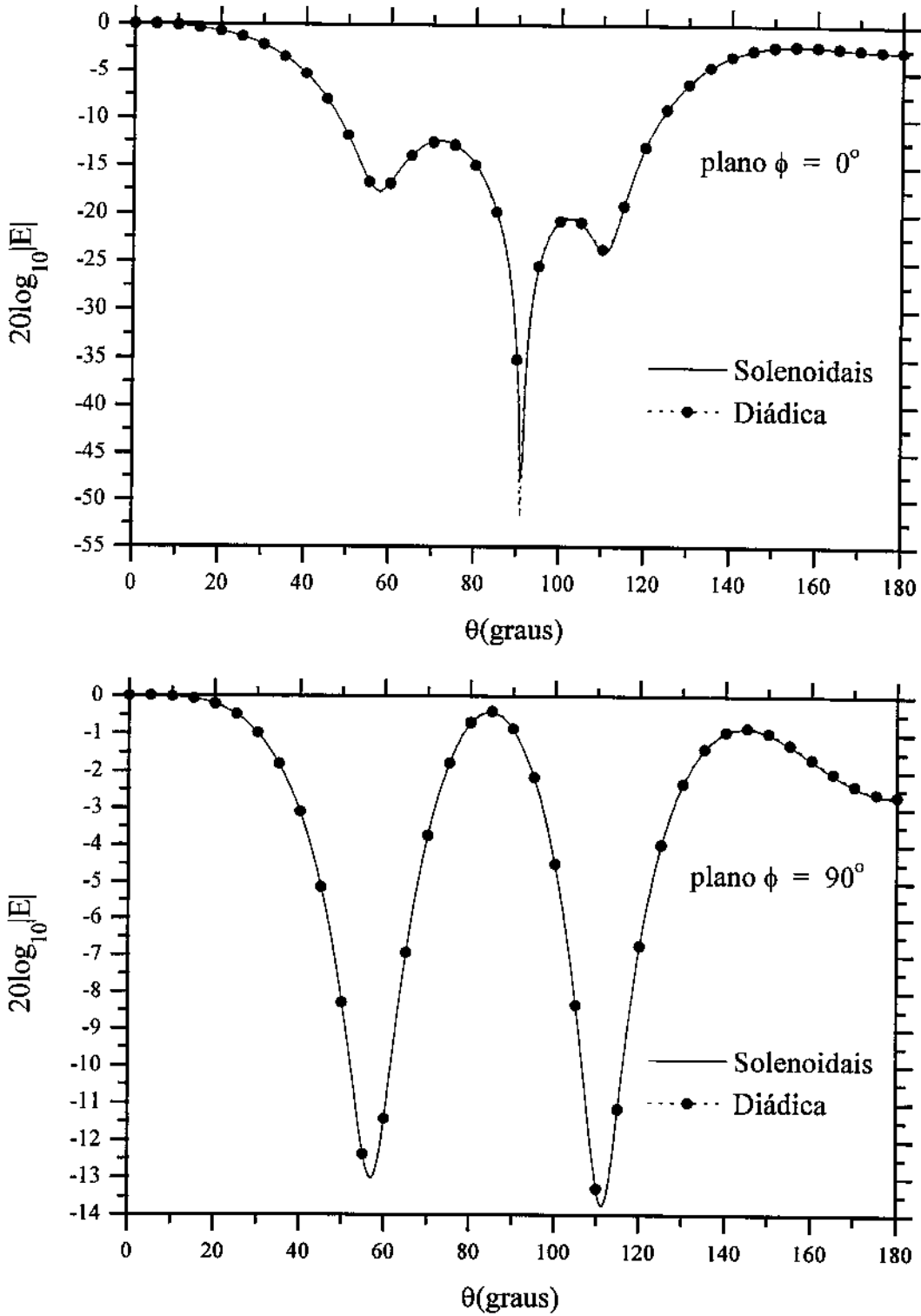


Figura 4.30 Campo espalhado por dois cubos de aresta $0,1\lambda$, $d=1,0\lambda$,

$$\varepsilon_1 = 4,0 \quad \varepsilon_2 = 9,0$$

funções solenoidais - 768 tetraedros e 960 incógnitas

diádica - 432 cubos e 1296 incógnitas

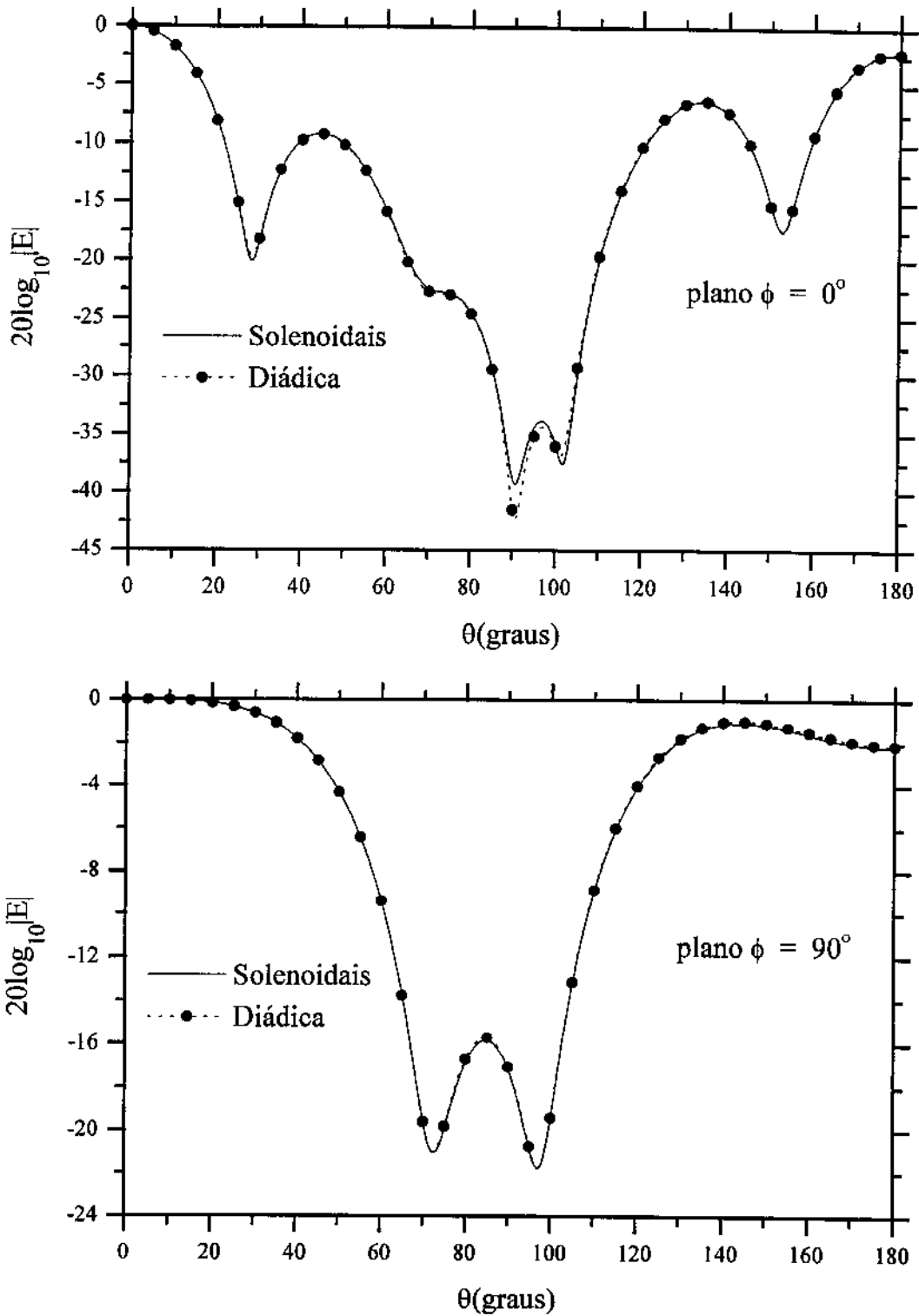


Figura 4.31 Campo espalhado por três cubos de aresta $0,1\lambda$, $d = 1,0\lambda$,

$$\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 9,0 \text{ e } \varepsilon_3 = 14,0$$

funções solenoidais - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

diádica - 648 cubos e 1944 incógnitas

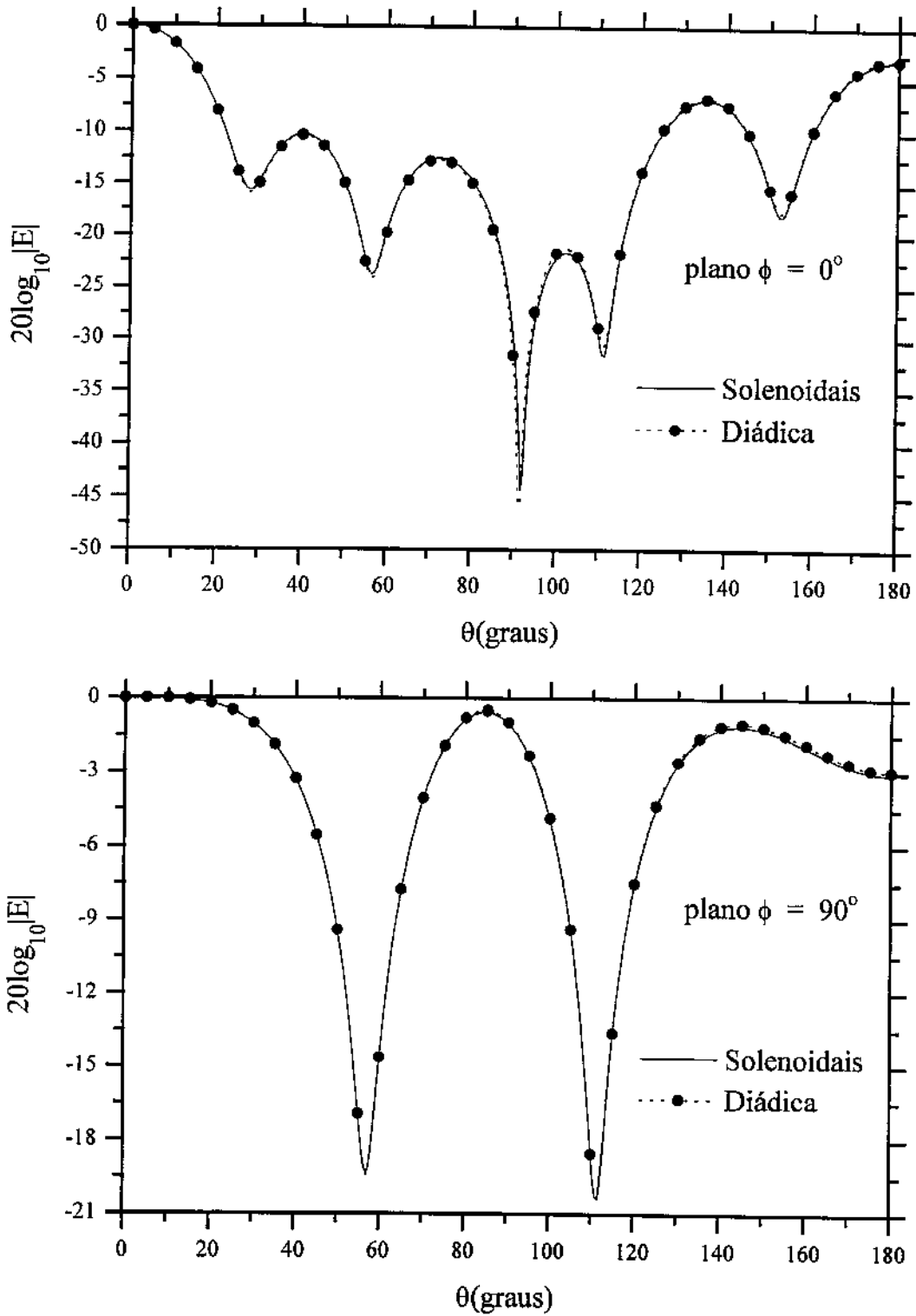


Figura 4.32 Campo espalhado por quatro cubos de aresta $0,1\lambda$, $d=1\lambda$,

$$\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 8,0, \varepsilon_3 = 12,0 \text{ e } \varepsilon_4 = 16,0$$

funções solenoidais - 1536 tetraedros e 1920 incógnitas

diádica - 864 cubos e 2592 incógnitas

Capítulo 5

Método iterativo de solução da equação integral

Neste capítulo desenvolveremos um método iterativo para resolver a equação integral. O método consiste em dividir o corpo em M partes, cada uma com a sua própria matriz momento, que fornece a resposta a uma dada excitação. A solução completa é construída pela interação entre todas as partes, com o campo incidente sendo a excitação inicial.

5.1 Definição do método iterativo de solução da equação integral

A equação integral que fornece a corrente induzida num corpo tridimensional caracterizado por $(\epsilon, \mu_0, \sigma)$ é dada, equação (3.1), por

$$\frac{\mathbf{J}_{eq}}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_{eq}) + \nabla\phi^e(\mathbf{J}_{eq}) = \mathbf{E}^{inc}. \quad (5.1)$$

Substituindo a expansão de \mathbf{J}_{eq} em termos de funções de base, equação (2.37), na equação (5.1), encontramos

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\mathbf{J}_i}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + \sum_{i=1}^N j\omega \alpha_i \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \nabla\phi^e(\mathbf{J}_i) = \mathbf{E}^{inc}. \quad (5.2)$$

Vamos considerar que o conjunto de funções de base foi definido de forma que pode ser dividido em M subconjuntos, com cada subconjunto definido em uma região distinta do corpo, assim temos

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{J}_i = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \mathbf{J}_i. \quad (5.3)$$

A composição dos subdomínios Ω_m definem o domínio inteiro Ω , isto é

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus \dots \oplus \Omega_M, \quad (5.4)$$

com a propriedade $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Substituindo a equação (5.3) na (5.2) encontramos

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \frac{\mathbf{J}_i}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + \sum_{i=1}^{N^m} j\omega \alpha_i \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i) \right] = \mathbf{E}^{inc}. \quad (5.5)$$

A equação (5.5) pode ser escrita como um sistema de M equações, a serem satisfeitas em cada subdomínio Ω_m , da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^1} \alpha_i \frac{\mathbf{J}_i}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + \sum_{i=1}^{N^1} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)] + \sum_{m \neq 1}^M \left[\sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)] \right] &= \mathbf{E}^{inc} \text{ em } \Omega_1, \\ \sum_{i=1}^{N^2} \alpha_i \frac{\mathbf{J}_i}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + \sum_{i=1}^{N^2} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)] + \sum_{m \neq 2}^M \left[\sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)] \right] &= \mathbf{E}^{inc} \text{ em } \Omega_2, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{N^M} \alpha_i \frac{\mathbf{J}_i}{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)} + \sum_{i=1}^{N^M} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)] + \sum_{m \neq M}^M \left[\sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)] \right] &= \mathbf{E}^{inc} \text{ em } \Omega_M. \end{aligned} \quad (5.6)$$

No sistema de equações (5.6) o termo $m \neq i$ no somatório significa que somamos todas as contribuições menos a dada pela região i . O termo $\sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i)]$ é o campo radiado pela corrente equivalente da região m , este termo acopla o sistema de equações (5.6). Definimos este termo como

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}^m = \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \left[\mathbf{j} \omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^e(\mathbf{J}_i) \right]. \quad (5.7)$$

Colocando este termo no lado direito do sistema de equações (5.6) e usando a definição do operador L_1 , equação (2.33), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^1} \alpha_i L_1(\mathbf{J}_i) &= \mathbf{E}^{\text{inc}} - \sum_{m \neq 1}^M \mathbf{E}_{\text{rad}}^m && \text{em } \Omega_1, \\ \sum_{i=1}^{N^2} \alpha_i L_1(\mathbf{J}_i) &= \mathbf{E}^{\text{inc}} - \sum_{m \neq 2}^M \mathbf{E}_{\text{rad}}^m && \text{em } \Omega_2, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{N^M} \alpha_i L_1(\mathbf{J}_i) &= \mathbf{E}^{\text{inc}} - \sum_{m \neq M}^M \mathbf{E}_{\text{rad}}^m && \text{em } \Omega_M. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Usando o método dos momentos para definir um sistema linear para cada região Ω_m , equação (2.43) com $L_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^1} \alpha_i \langle L_1(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle &= \langle \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{J}_j \rangle - \sum_{m \neq 1}^M \langle \mathbf{E}_{\text{rad}}^m, \mathbf{J}_j \rangle \quad j = 1, \dots, N^1 && \text{em } \Omega_1, \\ \sum_{i=1}^{N^2} \alpha_i \langle L_1(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle &= \langle \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{J}_j \rangle - \sum_{m \neq 2}^M \langle \mathbf{E}_{\text{rad}}^m, \mathbf{J}_j \rangle \quad j = 1, \dots, N^2 && \text{em } \Omega_2, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{N^M} \alpha_i \langle L_1(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle &= \langle \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{J}_j \rangle - \sum_{m \neq M}^M \langle \mathbf{E}_{\text{rad}}^m, \mathbf{J}_j \rangle \quad j = 1, \dots, N^M && \text{em } \Omega_M. \end{aligned} \quad (5.9)$$

colocando na forma matricial temos

$$\begin{aligned}
[Z_1][I_1] &= [V_1], \\
[Z_2][I_2] &= [V_2], \\
&\vdots \\
[Z_M][I_M] &= [V_M].
\end{aligned} \tag{5.10}$$

A solução iterativa para o sistema de equações (5.10) é dada por

$$\begin{aligned}
[I_1^n] &= [Z_1]^{-1}[V_1^n], \\
[I_2^n] &= [Z_2]^{-1}[V_2^n], \\
&\vdots \\
[I_M^n] &= [Z_M]^{-1}[V_M^n],
\end{aligned} \tag{5.11}$$

com

$$[V_m^n] = [C_m] - [E_m^{n-1}], \tag{5.12}$$

$$[C_m] = \langle \mathbf{E}_m^{\text{inc}}, \mathbf{J}_j \rangle \quad j=1, \dots, N^m, \tag{5.13}$$

$$[E_m^n] = \left\langle \sum_{t \neq m}^M \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i^n [j\omega \mathbf{A}(\mathbf{J}_i) + \nabla \phi^c(\mathbf{J}_i)], \mathbf{J}_j \right\rangle \quad j=1, \dots, N^m, \tag{5.14}$$

em cada passo de uma iteração o I_i^n de um domínio Ω_i que já foi calculado é usado para calcular o I_{i+1}^n do domínio Ω_{i+1} , este processo é denominado de passo simples [68], quando aplicado na solução de sistemas lineares por um método iterativo. O critério de convergência do processo iterativo é definido como

$$\|I_m^n - I_m^{n-1}\|_2 \leq \text{dist}, \tag{5.15}$$

onde dist é a “distância” entre os vetores e $\|x\|_2$ é a norma euclideana definida por

$$\|x\|_2 \triangleq \left(\sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.16)$$

O significado físico do processo iterativo de solução da equação integral é que estamos representando um corpo por M partes, cada parte é excitada pelo campo incidente e pelo campo secundário emitido pelas outras partes, Figura 5.1. A matriz momento de cada parte fornece a resposta da região a uma dada excitação, isto é, caracteriza o comportamento eletromagnético da região. A solução completa é construída pela interação entre todas as partes. O mapa conceitual de todo o processo é apresentado na Figura 5.2.

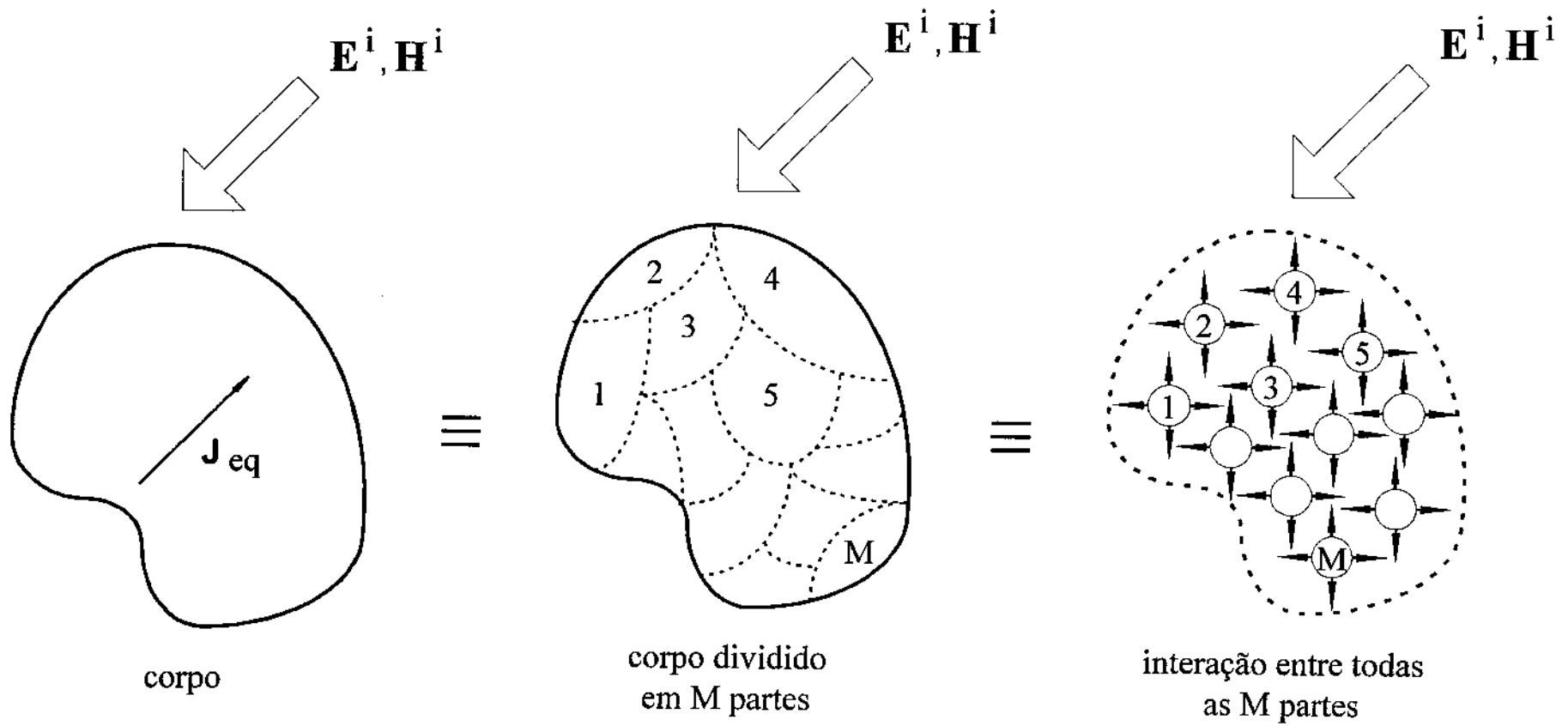


Figura 5.1 Significado físico do processo iterativo

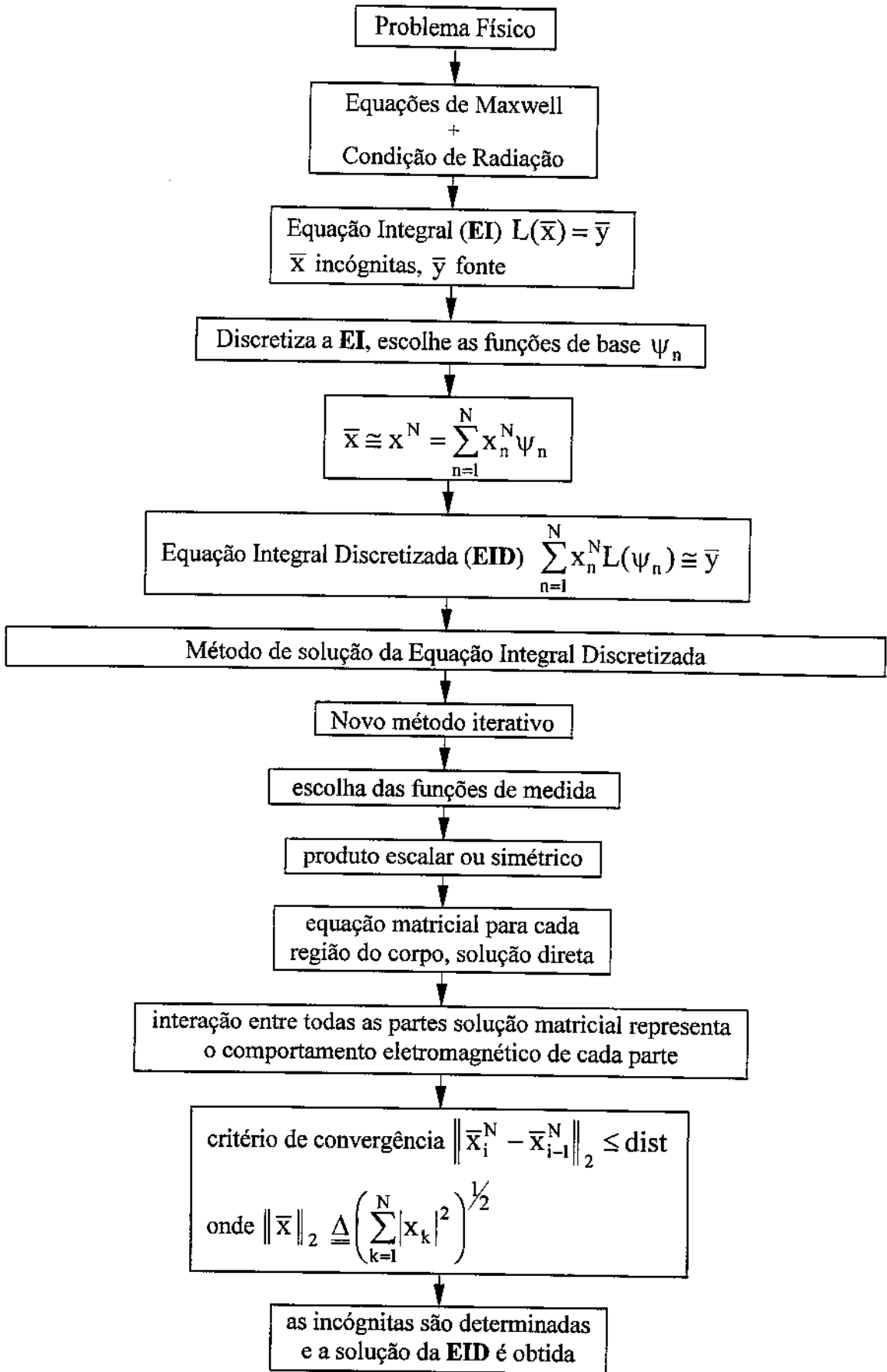


Figura 5.2 Mapa conceitual do método iterativo

5.2 Campo espalhado e campo interno de um cubo homogêneo pelo método iterativo

O primeiro caso é o do cubo homogêneo com $0,2\lambda$ e $\varepsilon_c = 4,0$ da seção 3.2, que foi discretizado com 384 tetraedros que geraram 480 funções LI. Para aplicar o método iterativo dividimos o cubo em duas partes, Figura 5.3(a), cada parte com 192 tetraedros e 256 funções LI. O critério de convergência, equação 5.15, foi definido em $\text{dist} = 10^{-8}$ e o número de iterações foi de 12. Na Figura 5.4(a) temos o campo espalhado distante calculado pelo método dos momentos e pelo método iterativo, vemos que não é possível observar as diferenças entre os dois métodos. Nas Figuras 5.4(b) e 5.4(c) comparamos o campo interno de cada tetraedro nos dois métodos e mostramos o campo induzido, pela onda incidente, em cada parte quando isolada das outras. Vemos que há uma boa concordância, com uma diferença máxima de 0,8%. Dividimos agora o cubo em oito partes, Figura 5.3(b), cada parte com 48 tetraedros e 72 funções LI. Mantemos o mesmo critério de convergência e o número de iterações foi de 15. Na Figura 5.5(a) vemos que também não podemos observar as diferenças no cálculo do campo espalhado distante. Nas Figuras 5.5(b) e 5.5(c) temos o campo interno nos dois métodos e o campo induzido pelo campo incidente em cada parte separadamente. Aparecem diferenças mais significativas entre os dois métodos, em cada parte existem tetraedros que apresentam diferença maior que a da média, a maior diferença foi de 7,5%.

Nas Figuras 5.6 à 5.9 temos os resultados para o cubo homogêneo de $0,2\lambda$ e $\varepsilon_c = 9,0$. Os resultados de campo espalhado distante concordaram muito bem, para campo interno a maior diferença foi de 1,01% para o cubo

dividido em duas partes e 5,6 % para a divisão em oito partes. O número de iterações foi de 30 e 41, respectivamente.

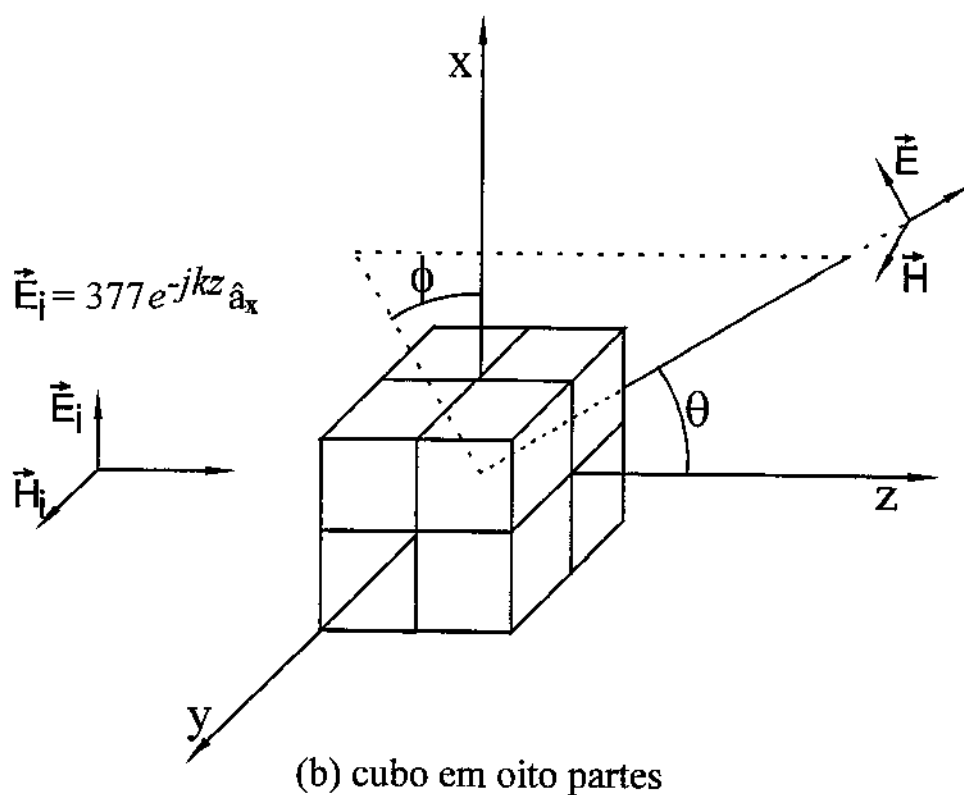
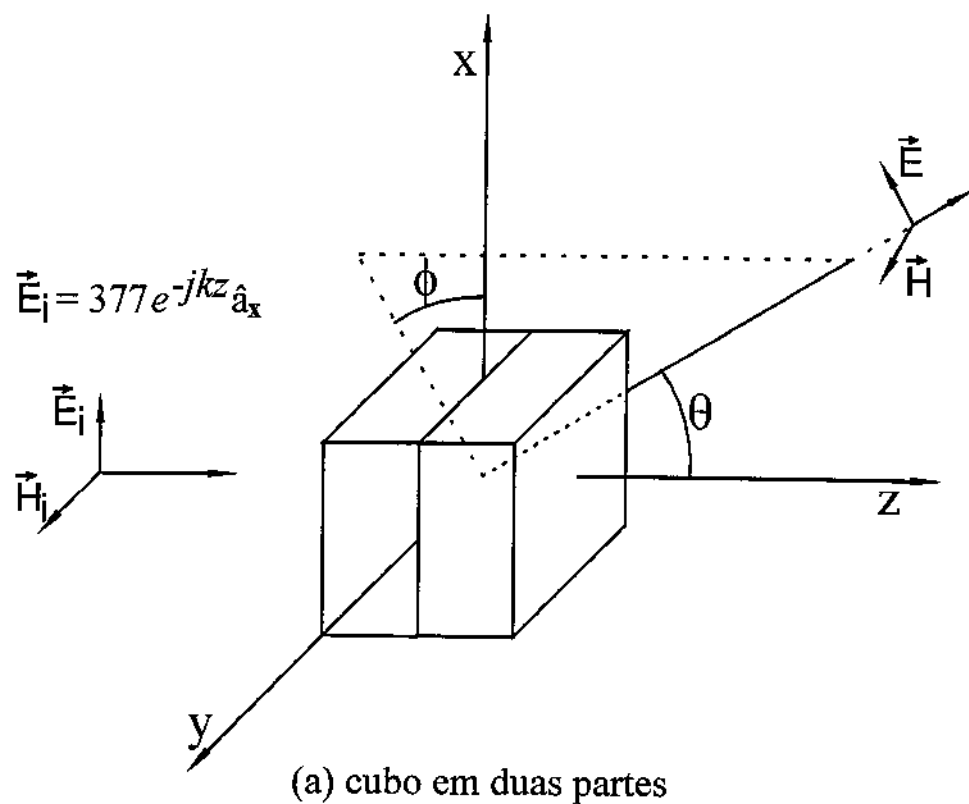


Figura 5.3 Divisão de um cubo em duas e oito partes.

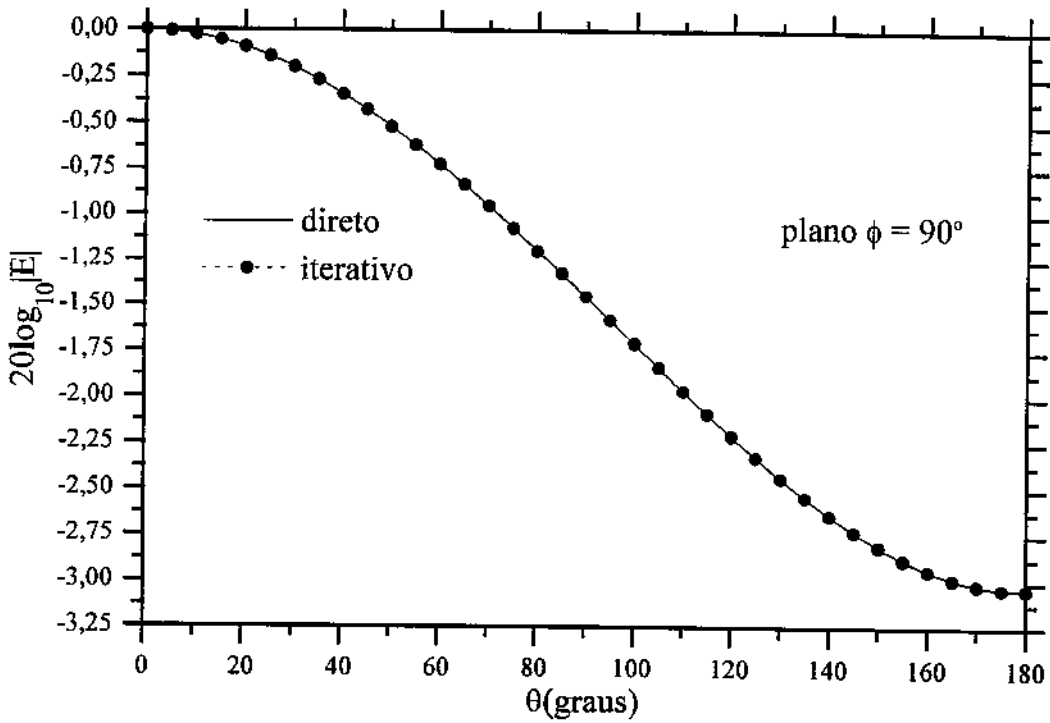
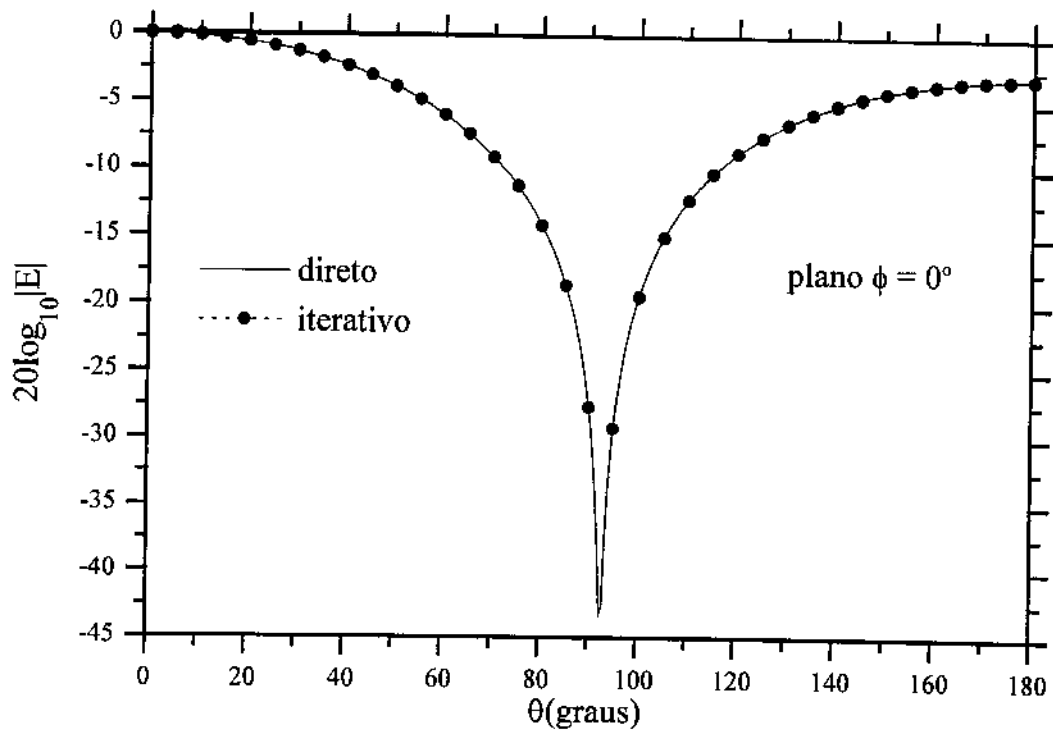


Figura 5.4(a) Campo espalhado por um cubo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas cada

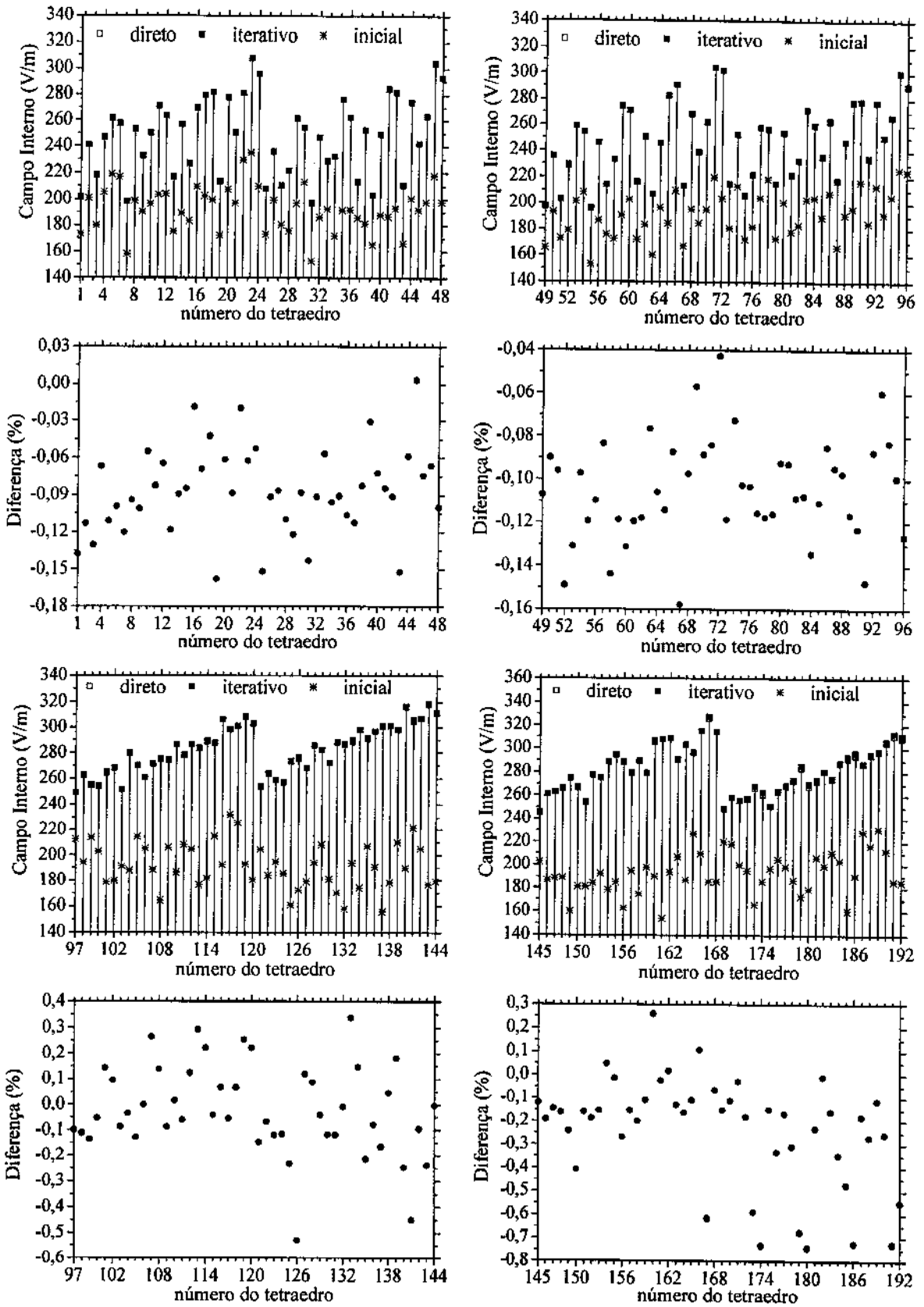


Figura 5.4(b) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 4,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas cada

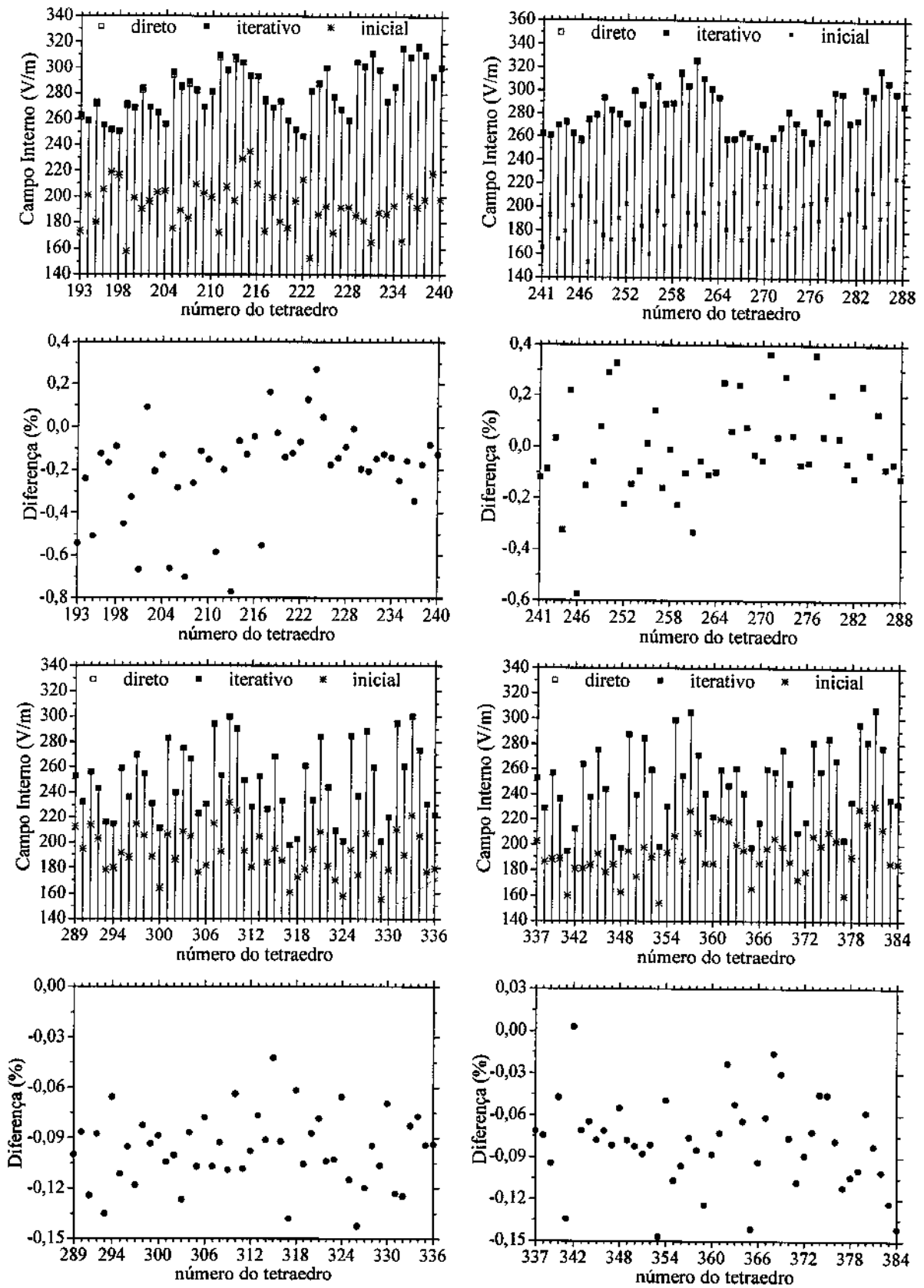


Figura 5.4(c) Campo interno de um cubo com 0.2λ de aresta e $\epsilon_c = 4.0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas cada

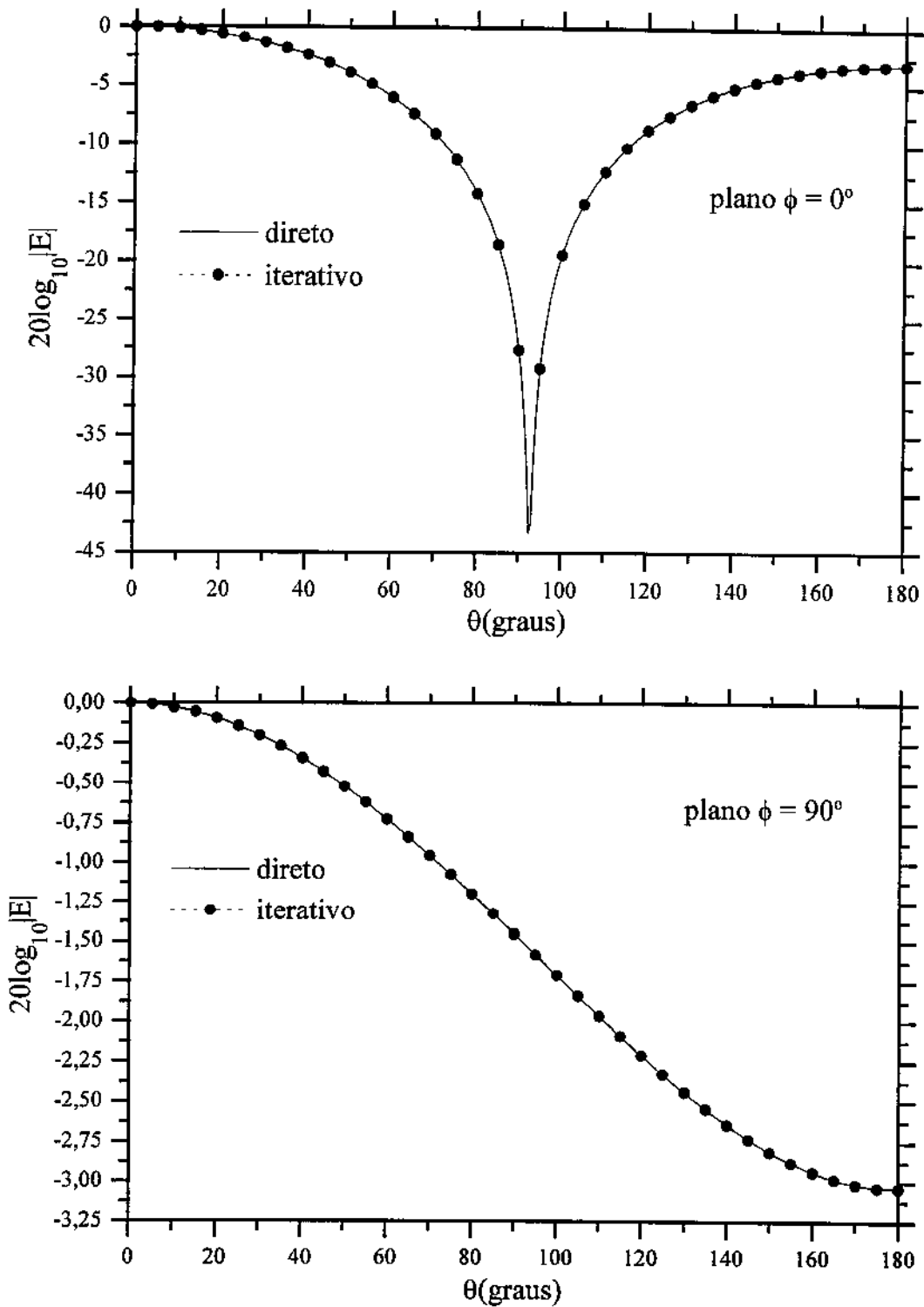


Figura 5.5(a) Campo espalhado por um cubo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 4,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas cada

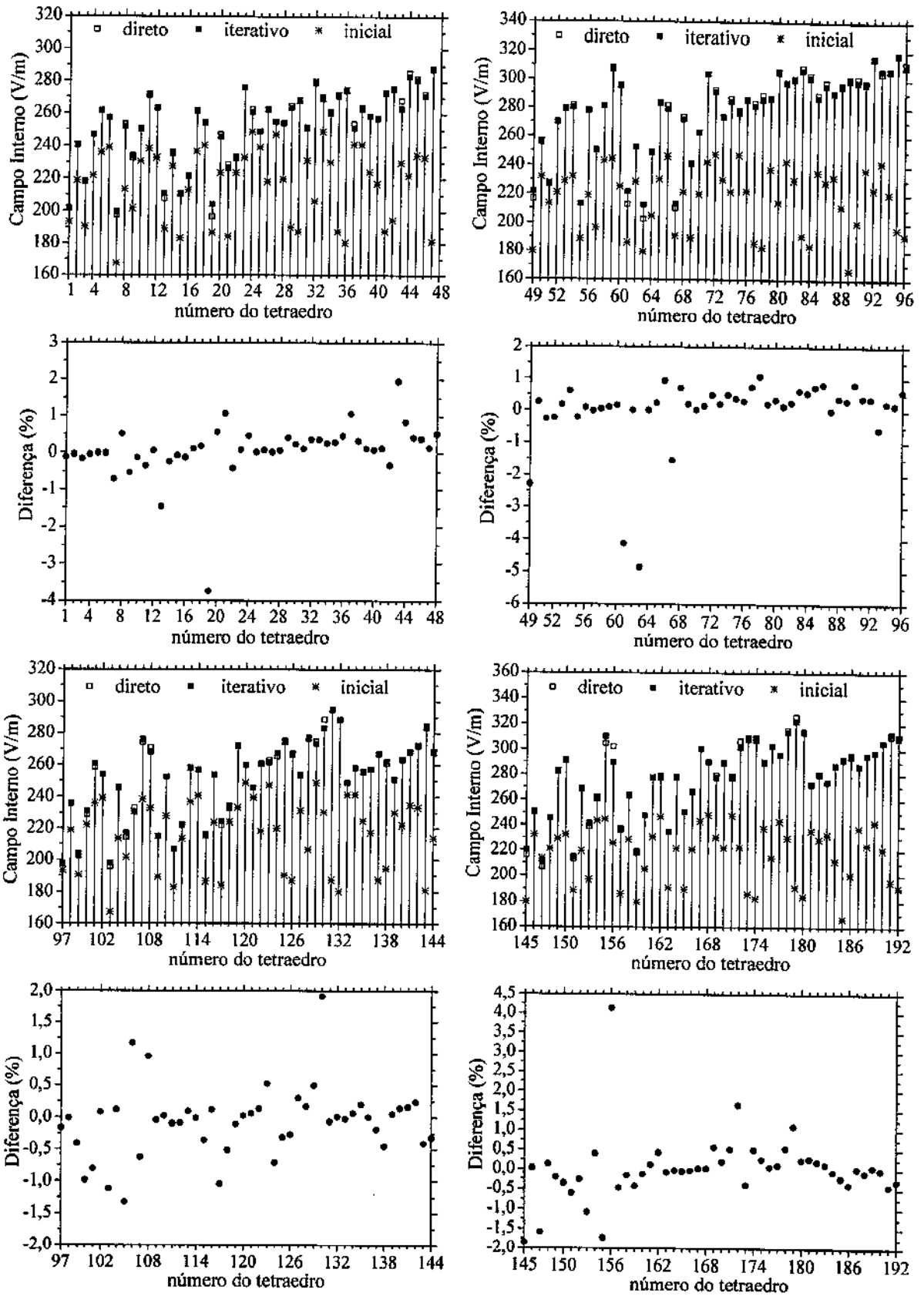


Figura 5.5(b) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 4,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas

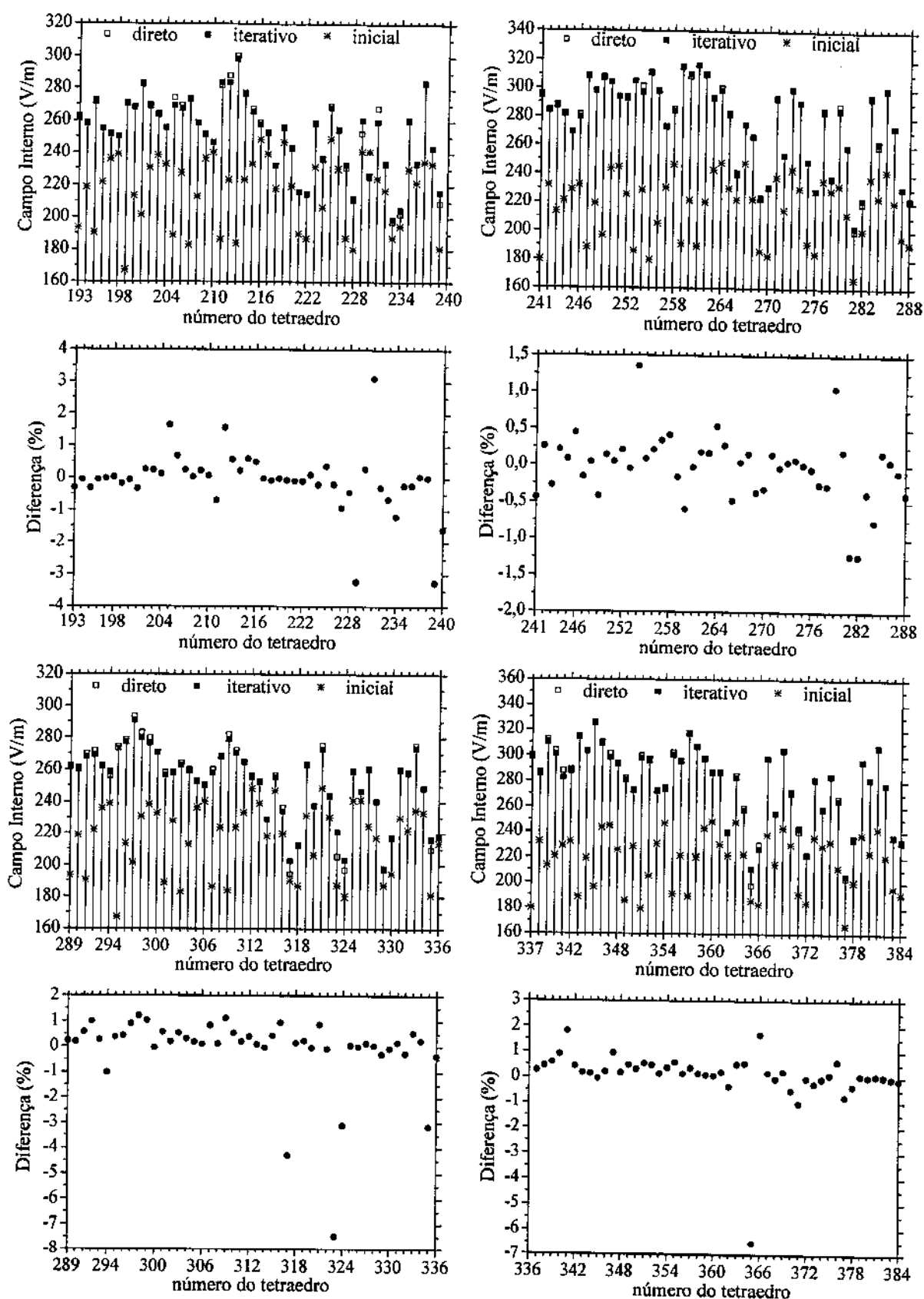


Figura 5.5(c) Campo interno de um cubo com 0.2λ de aresta e $\epsilon_c = 4.0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas cada

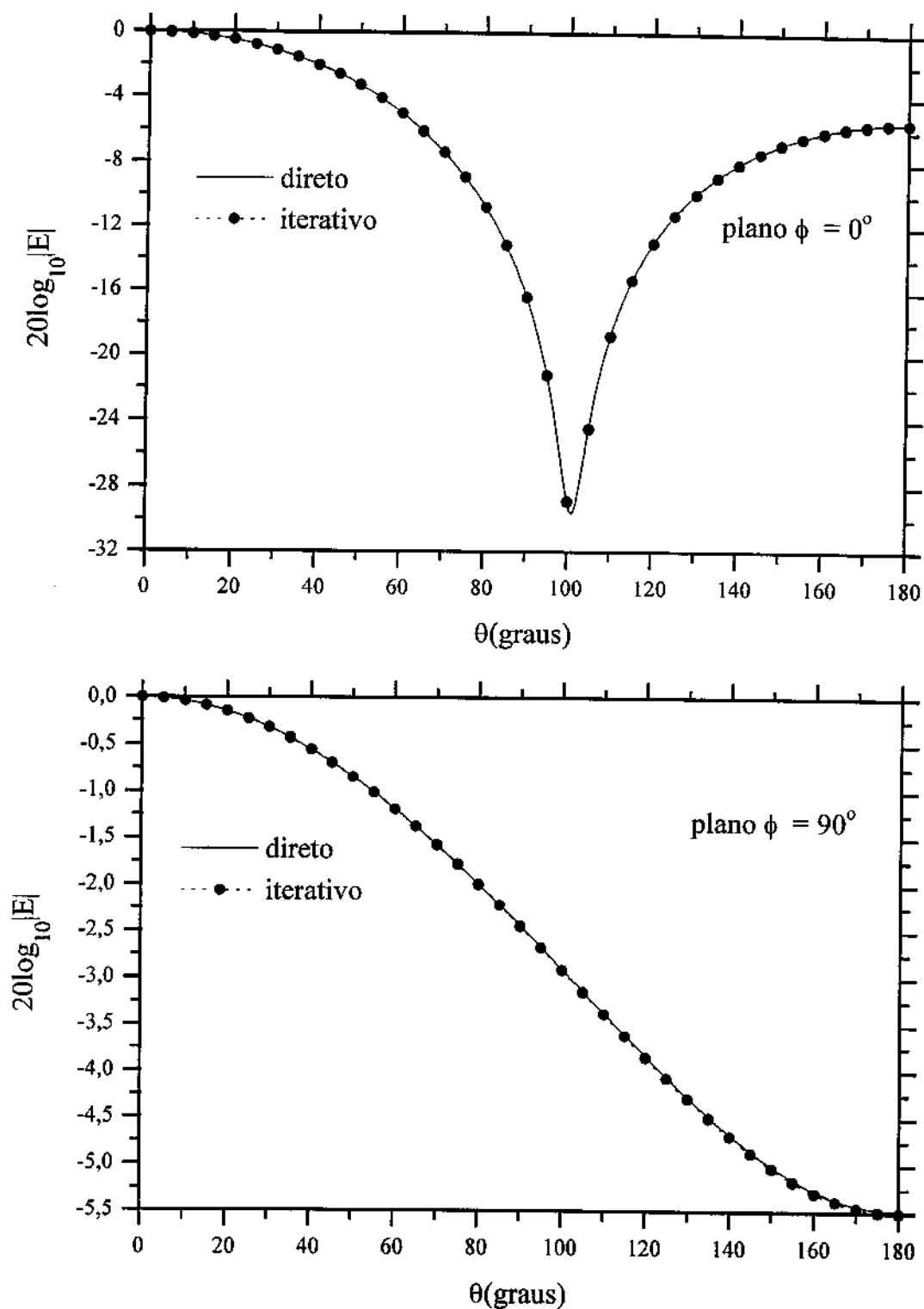


Figura 5.6 Campo espalhado por um cubo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c \approx 9,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas cada

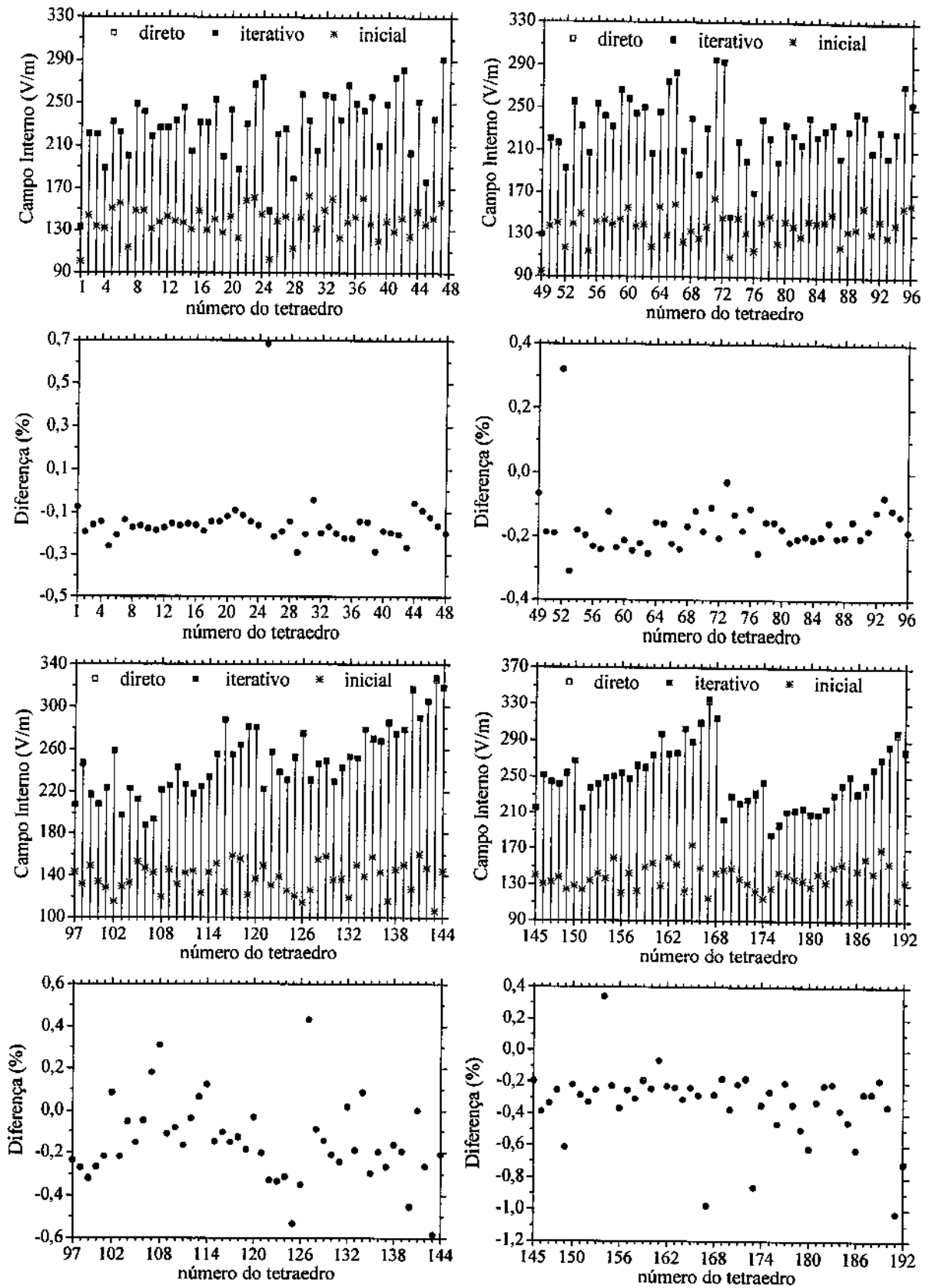


Figura 5.7(a) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas

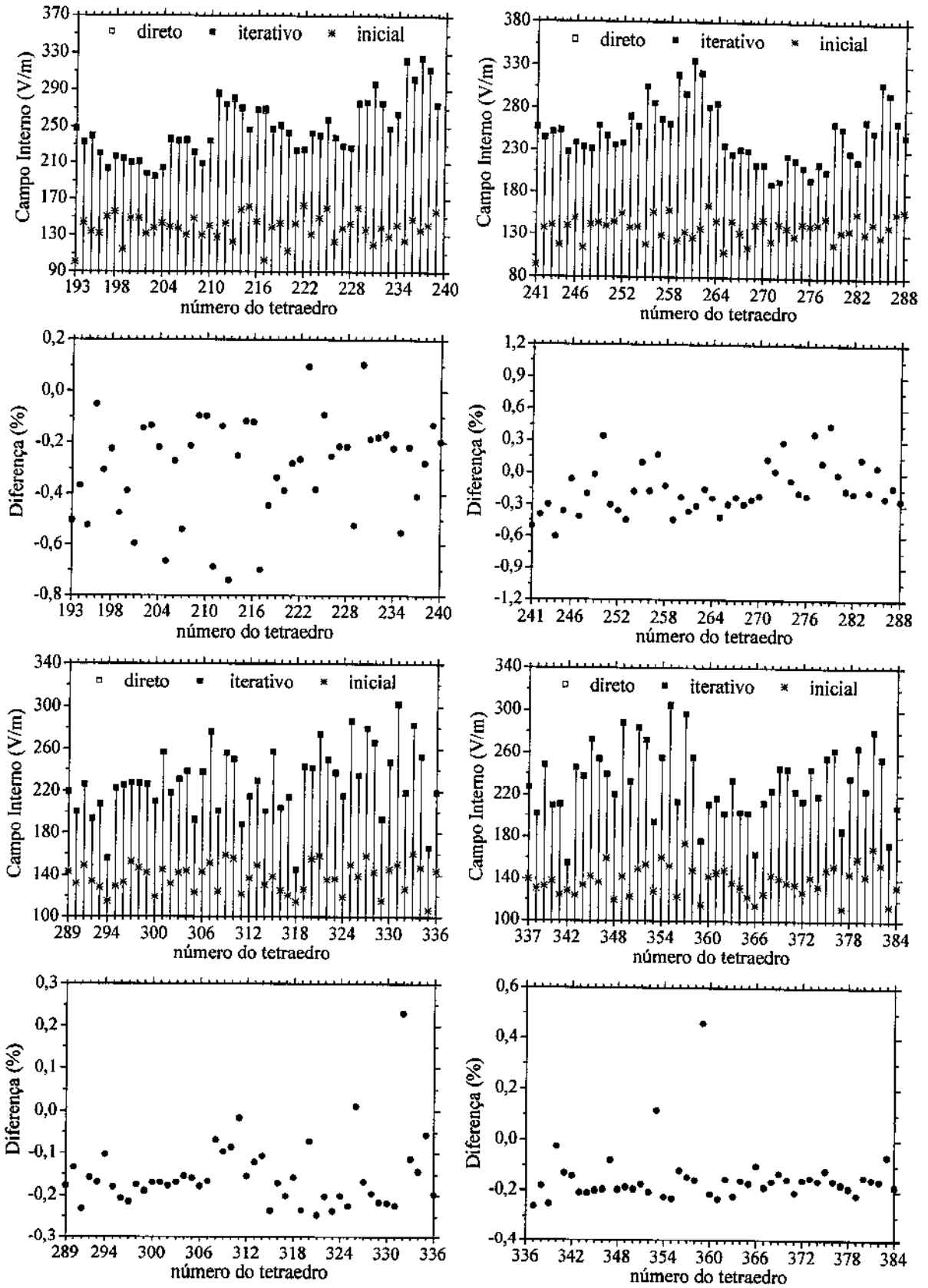


Figura 5.7(b) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - duas partes com 192 tetraedros e 256 incógnitas cada

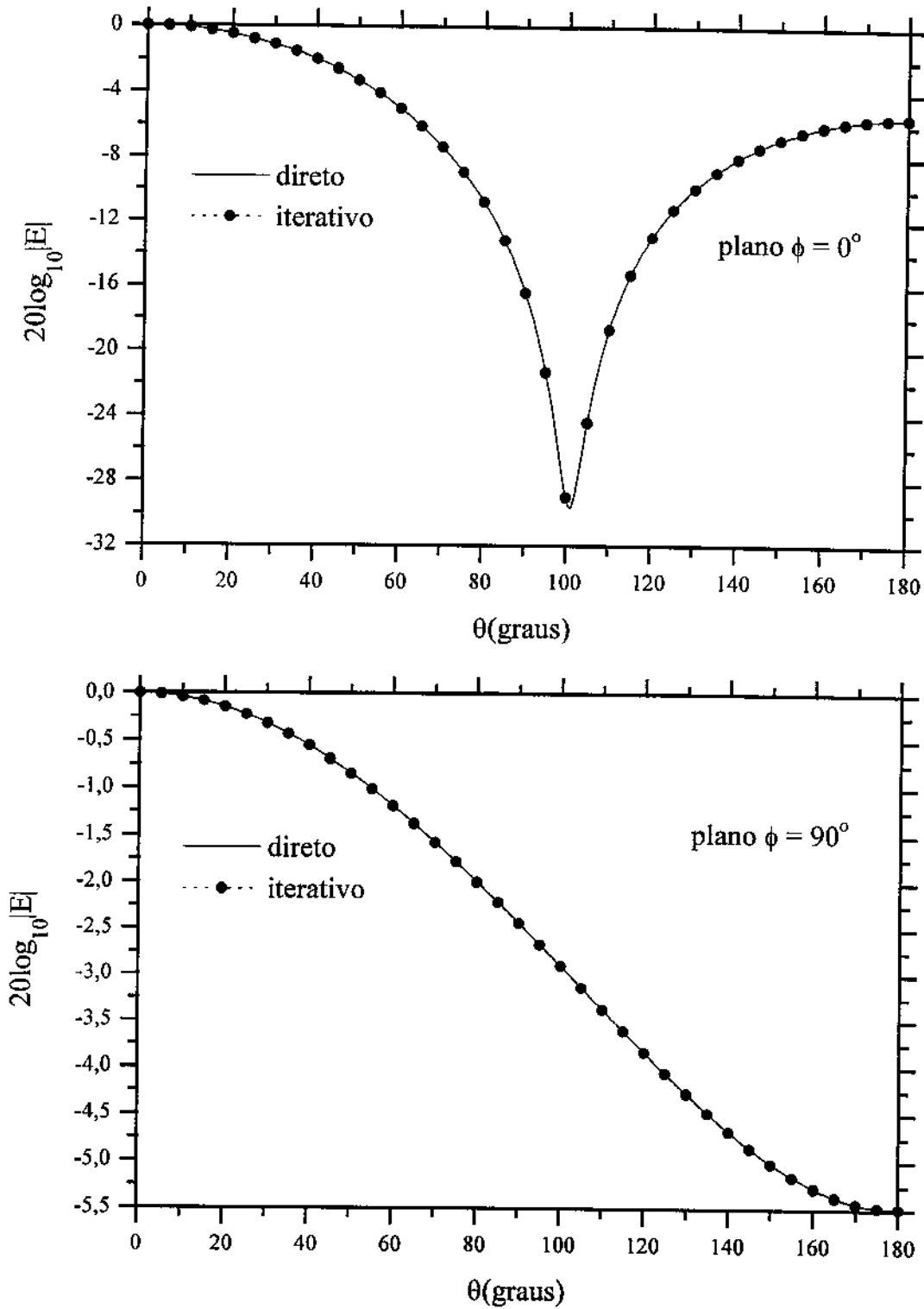


Figura 5.8 Campo espalhado por um cubo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas cada

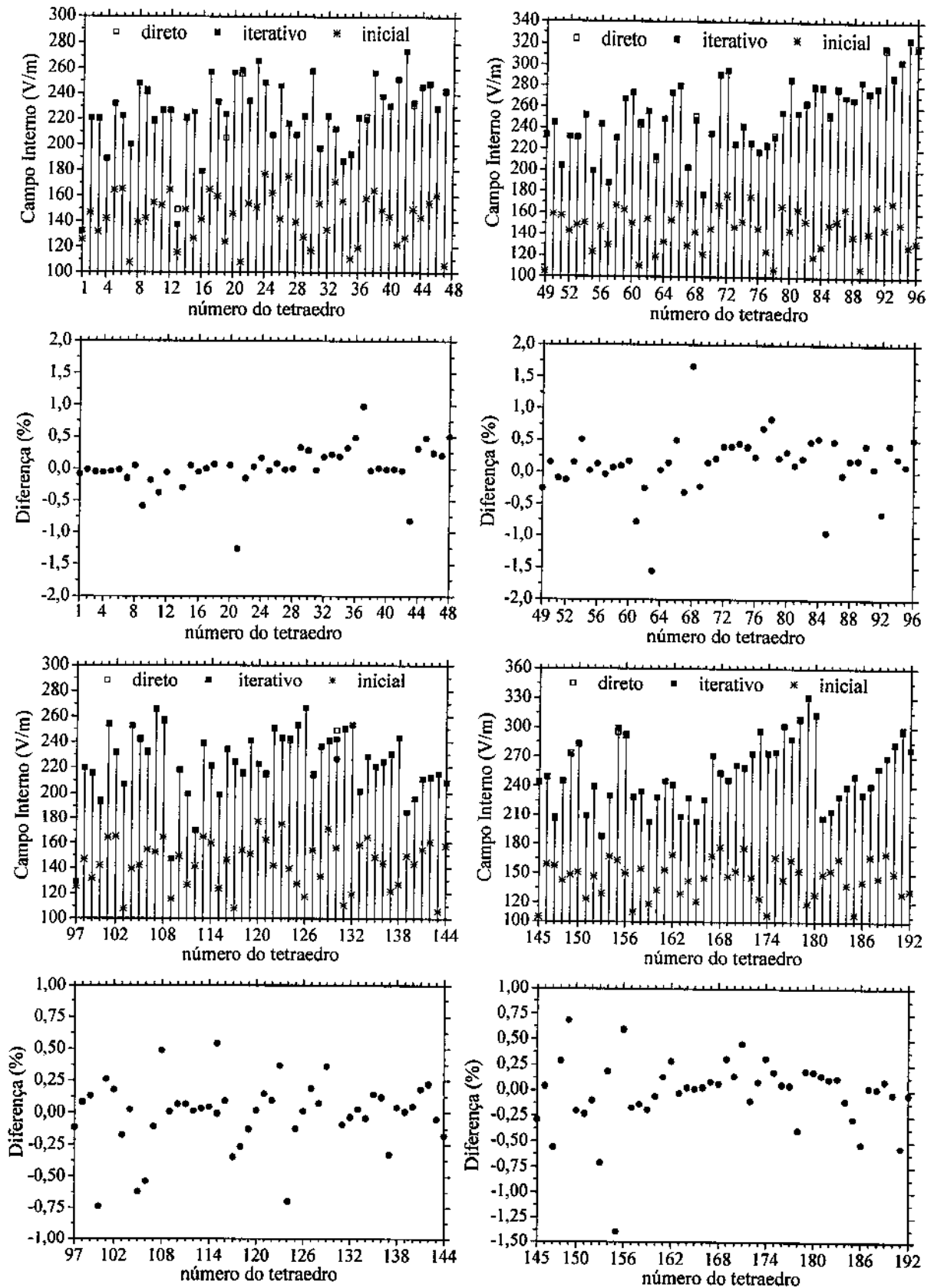


Figura 5.9(a) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas cada

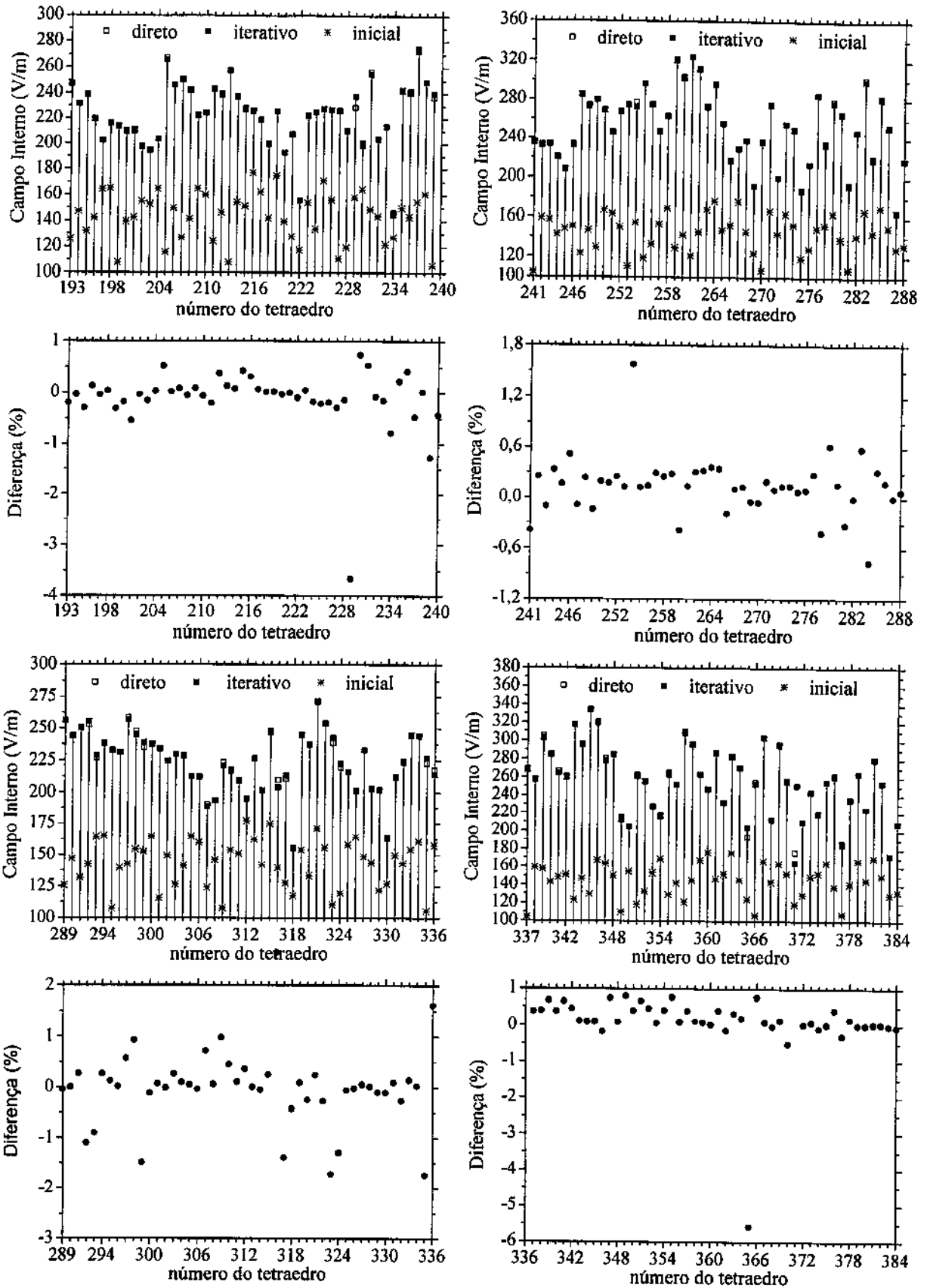


Figura 5.9(b) Campo interno de um cubo com $0,2\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$
 método direto - 384 tetraedros e 480 incógnitas
 método iterativo - oito partes com 48 tetraedros e 72 incógnitas cada

5.3 Campo espalhado e campo interno de uma esfera homogênea pelo método iterativo

O primeiro caso é de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 4,0$ discretizada com 520 tetraedros, como feito na seção 3.3. Esta discretização gerou 719 funções LI. Para aplicar o método iterativo dividimos a esfera em duas partes com 260 tetraedros cada, conforme a Figura 5.10(a). Cada parte gerou 312 funções LI. O critério de convergência foi definido com $\text{dist} = 10^{-8}$ e o número de iterações gasto foi de 8. Na Figura 5.11 temos a “bistatic cross section” comparada com a obtida pela série de Mie, em relação ao resultado obtido pelo método direto, Figura 3.15, temos uma pequena melhora no caso da polarização vertical de cerca de 0,1%, o que não é relevante. No cálculo do campo interno, Figura 5.12, temos que o método iterativo apresentou sempre o menor erro. Mantendo a mesma discretização e a divisão da esfera analisamos o caso da esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$, com o mesmo critério de convergência o resultado foi obtido com 15 iterações. A “bistatic cross section” foi calculada, Figura 5.13, com o mesmo nível de erro que com o método direto, Figura 3.16, o campo interno foi calculado com erro menor que com o método direto, Figura 5.14.

Na Figura 5.10(b) temos esfera dividida em oito partes, cada parte é definida por

parte 1	$x < 0, y < 0, z < 0$	parte 5	$x < 0, y < 0, z > 0$
parte 2	$x > 0, y < 0, z < 0$	parte 6	$x > 0, y < 0, z > 0$
parte 3	$x > 0, y > 0, z < 0$	parte 7	$x > 0, y > 0, z > 0$
parte 4	$x < 0, y > 0, z < 0$	parte 8	$x < 0, y > 0, z > 0$.

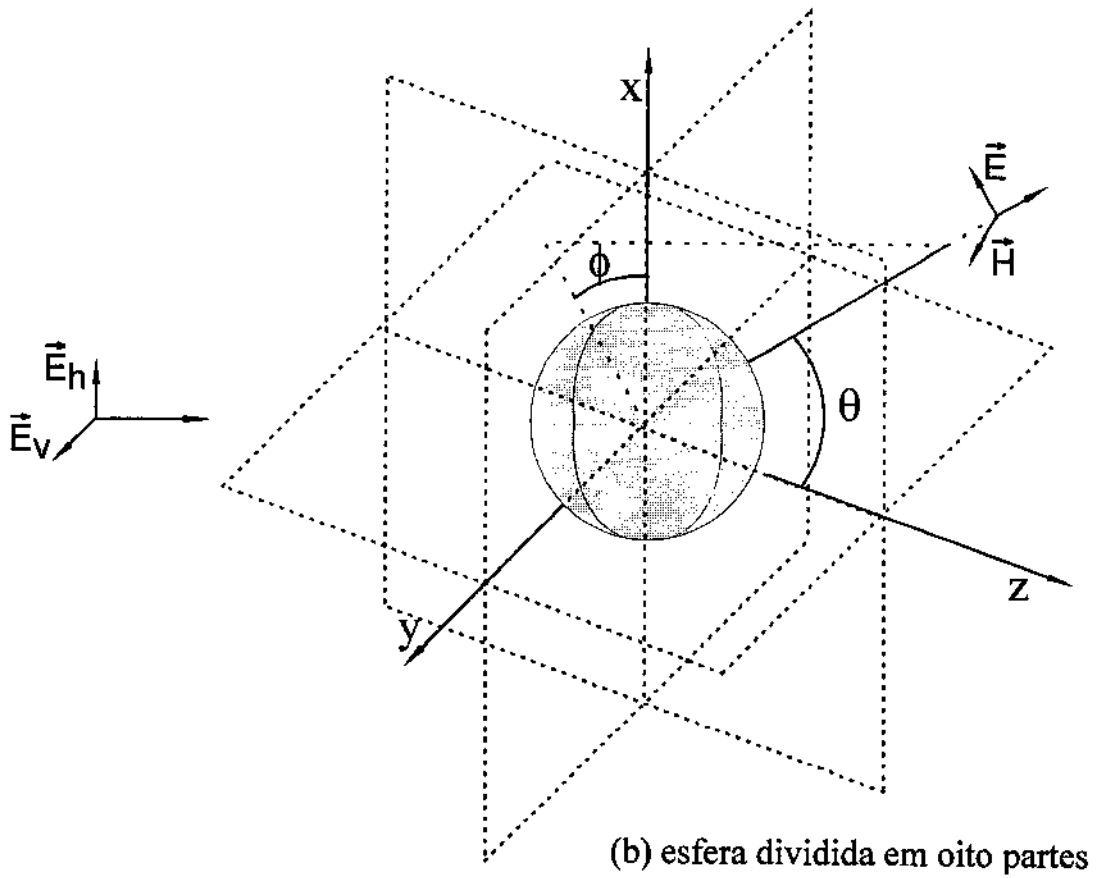
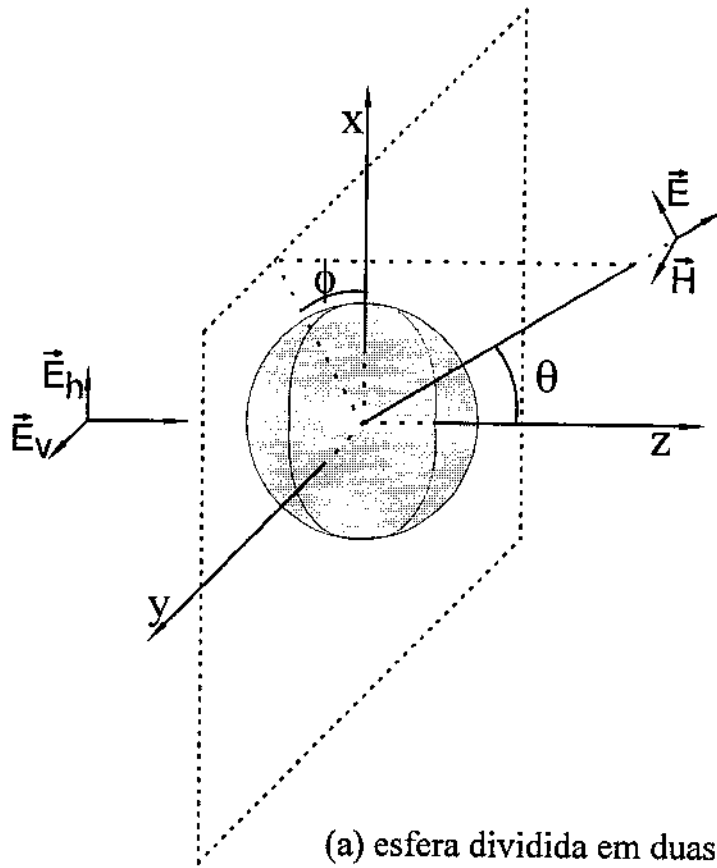


Figura 5.10 Divisão da esfera para aplicar o método iterativo.

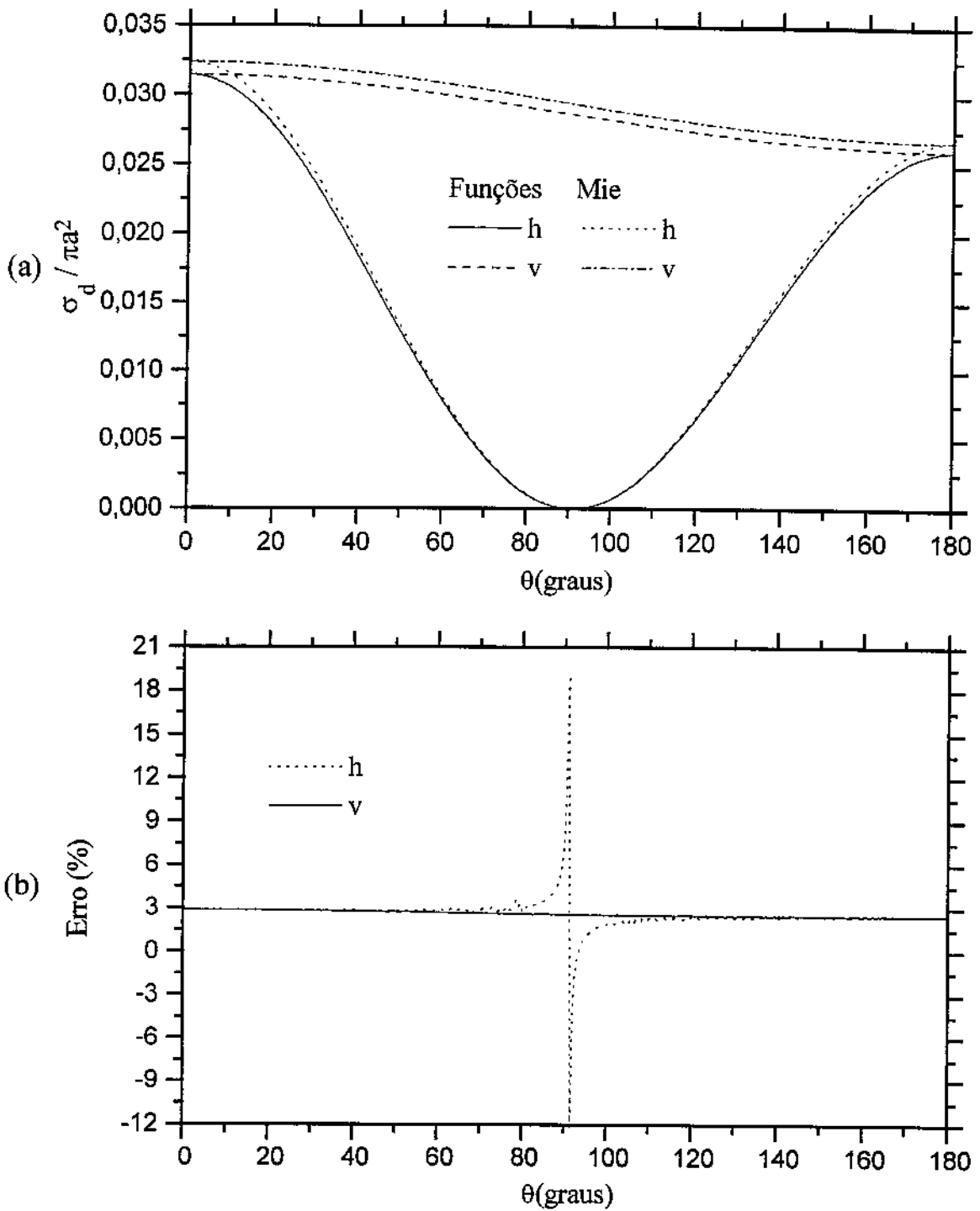


Figura 5.11 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$ dividida em duas partes
 (a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

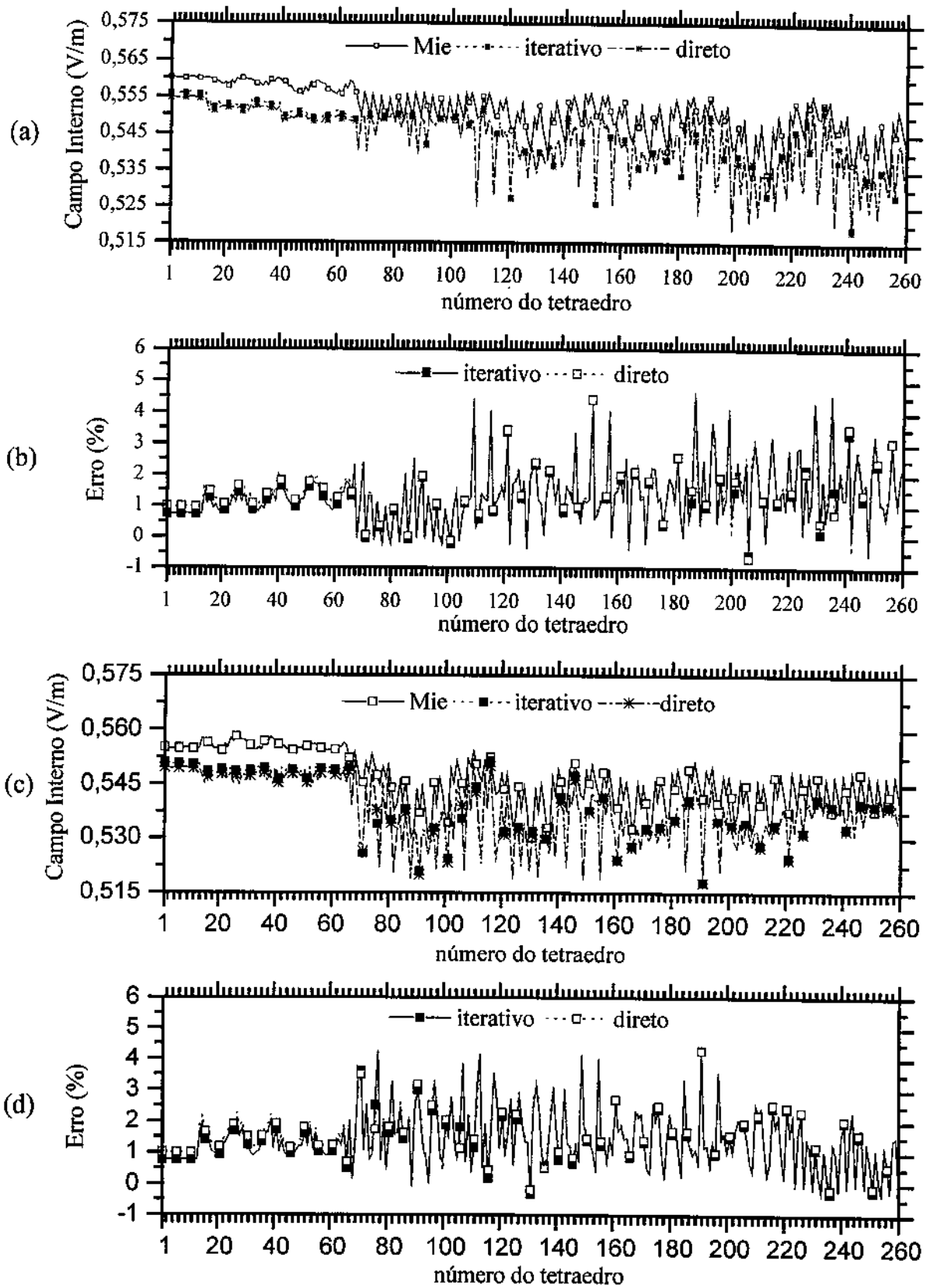


Figura 5.12 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$ dividida em duas partes

(a) campo interno da parte 1 (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno da parte 2 (d) erro em relação a série de Mie

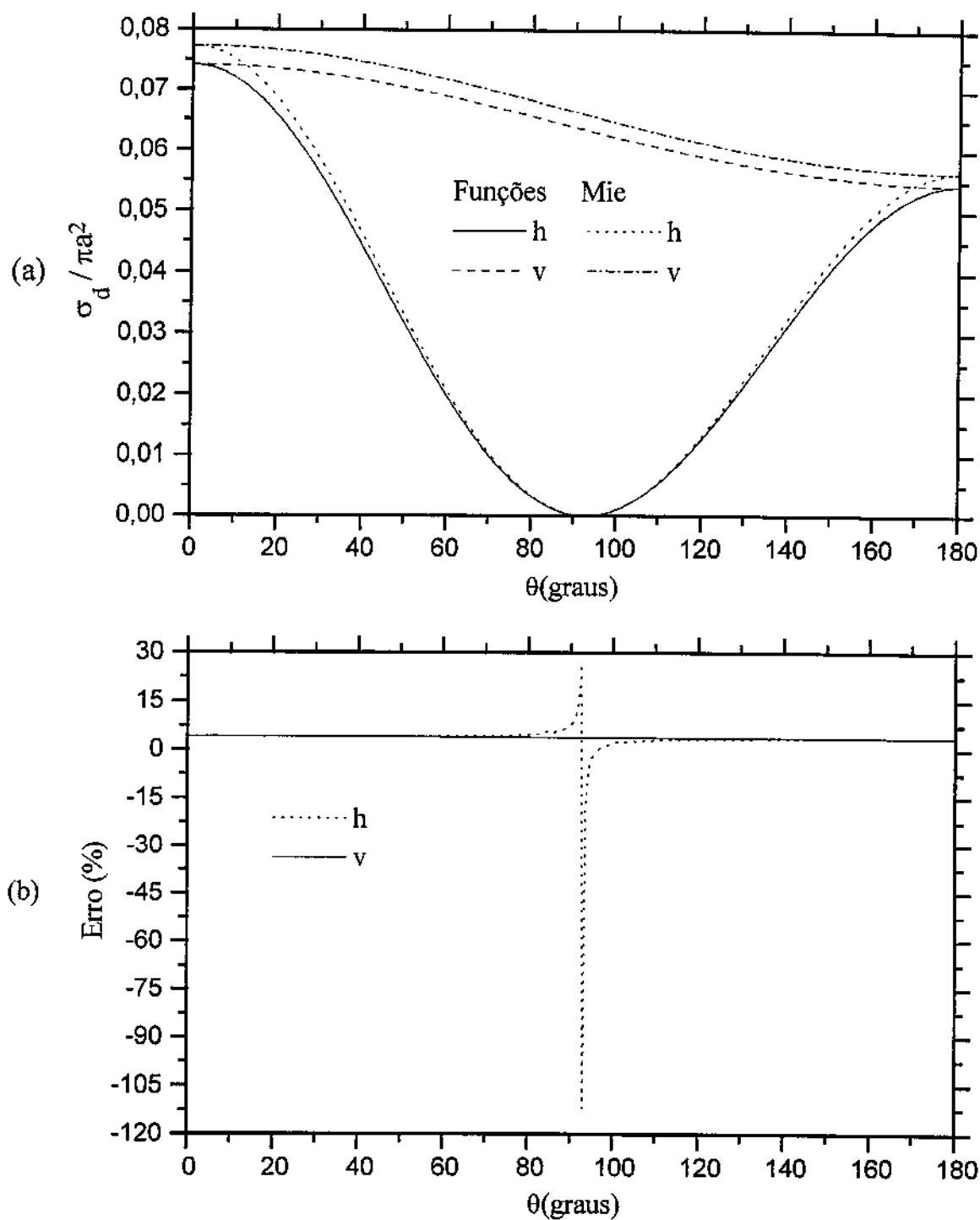


Figura 5.13 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$ dividida em duas partes

(a) bistatic cross section (b) erro em relação a série de Mie

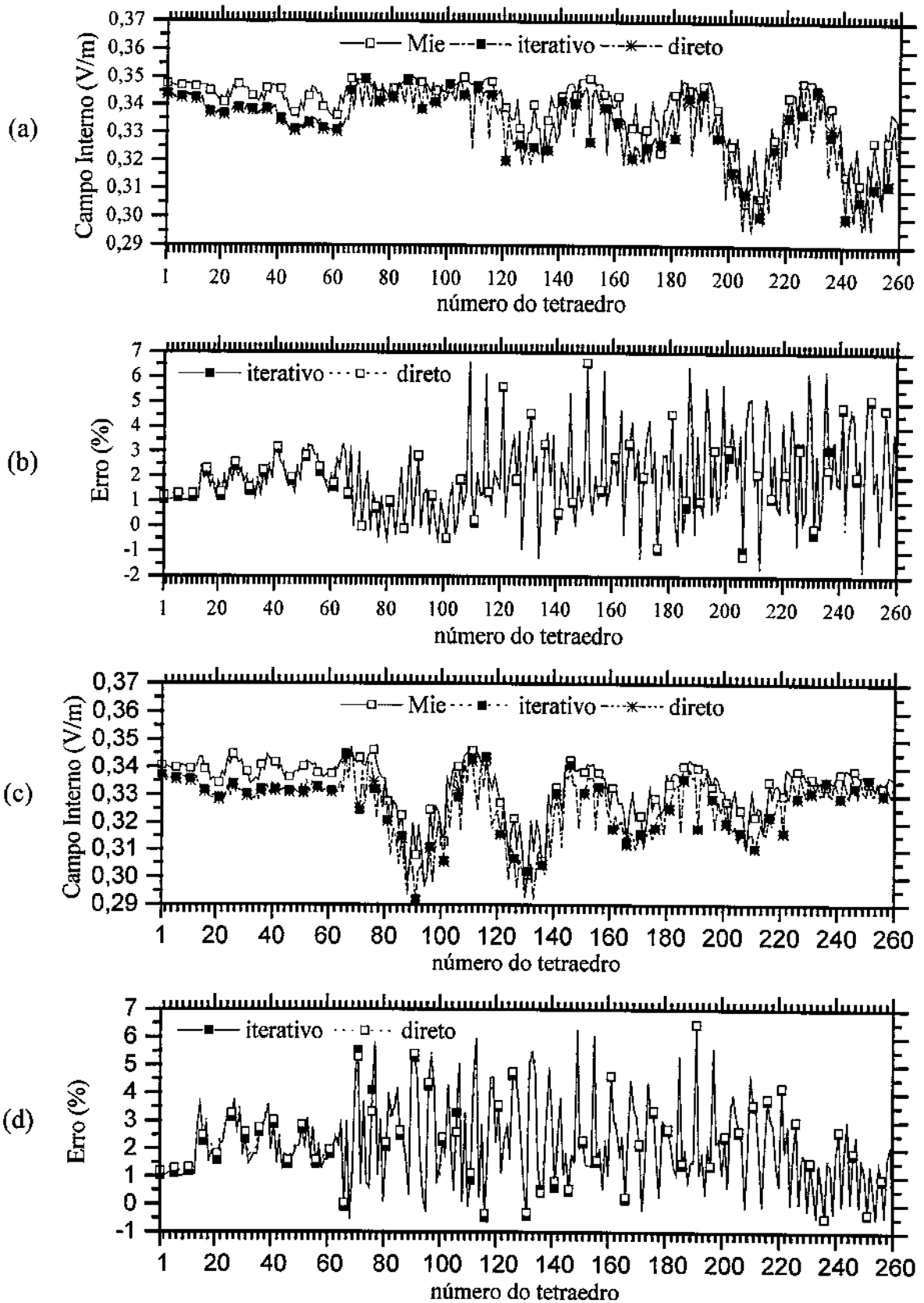


Figura 5.14 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$ dividida em duas partes

- (a) campo interno da parte 1 (b) erro em relação a série de Mie
 (c) campo interno da parte 2 (d) erro em relação a série de Mie

Na divisão da esfera em oito partes aumentamos o número de tetraedros de forma que cada parte tivesse o mesmo número de tetraedros, a esfera foi discretizada com um total de 640 tetraedros com 80 por parte, que geraram 720 funções LI no método direto e 105 funções LI (por parte) no método iterativo. O critério de convergência foi definido com $\text{dist} = 10^{-8}$. No caso da esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 4,0$ o número de iterações gasto foi de 9. Na Figura 5.15 temos o resultado do cálculo da “bistatic cross section”, os dois métodos apresentaram resultados graficamente idênticos. No cálculo do campo interno, Figura 5.16, o método iterativo apresenta resultados melhores que o método direto na maioria dos pontos, mas o ponto de maior erro, em cada parte, é sempre no método iterativo. Para a esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 9,0$ o número de iterações gasto foi de 16. Na Figura 5.17 temos o cálculo da “bistatic cross section” com os dois métodos, não se percebe nenhuma diferença graficamente. No cálculo do campo interno, Figura 5.18, nem sempre o método iterativo apresenta resultado melhor, mas continua a apresentar o maior erro em cada parte.

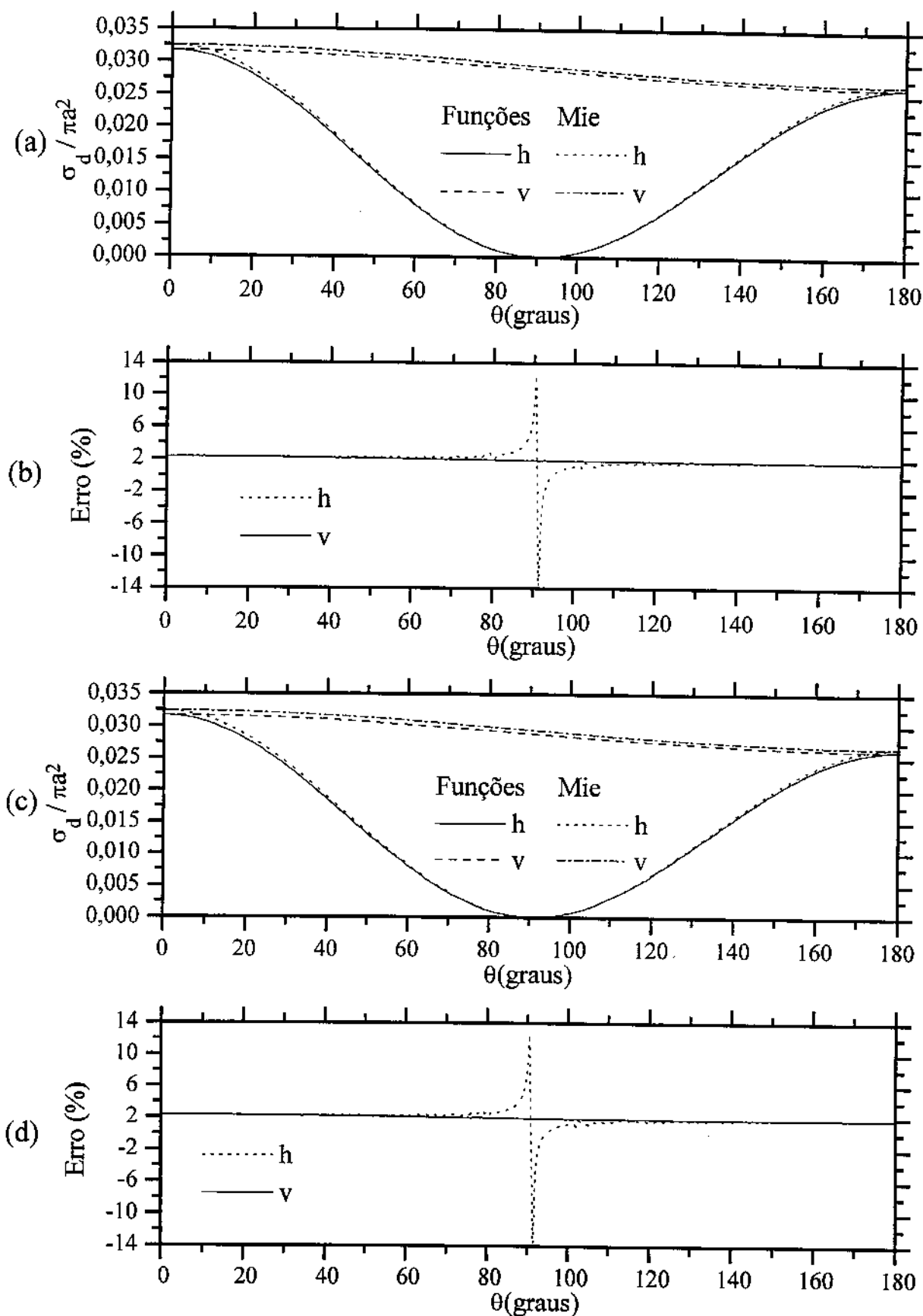


Figura 5.15 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$

(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie

(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie

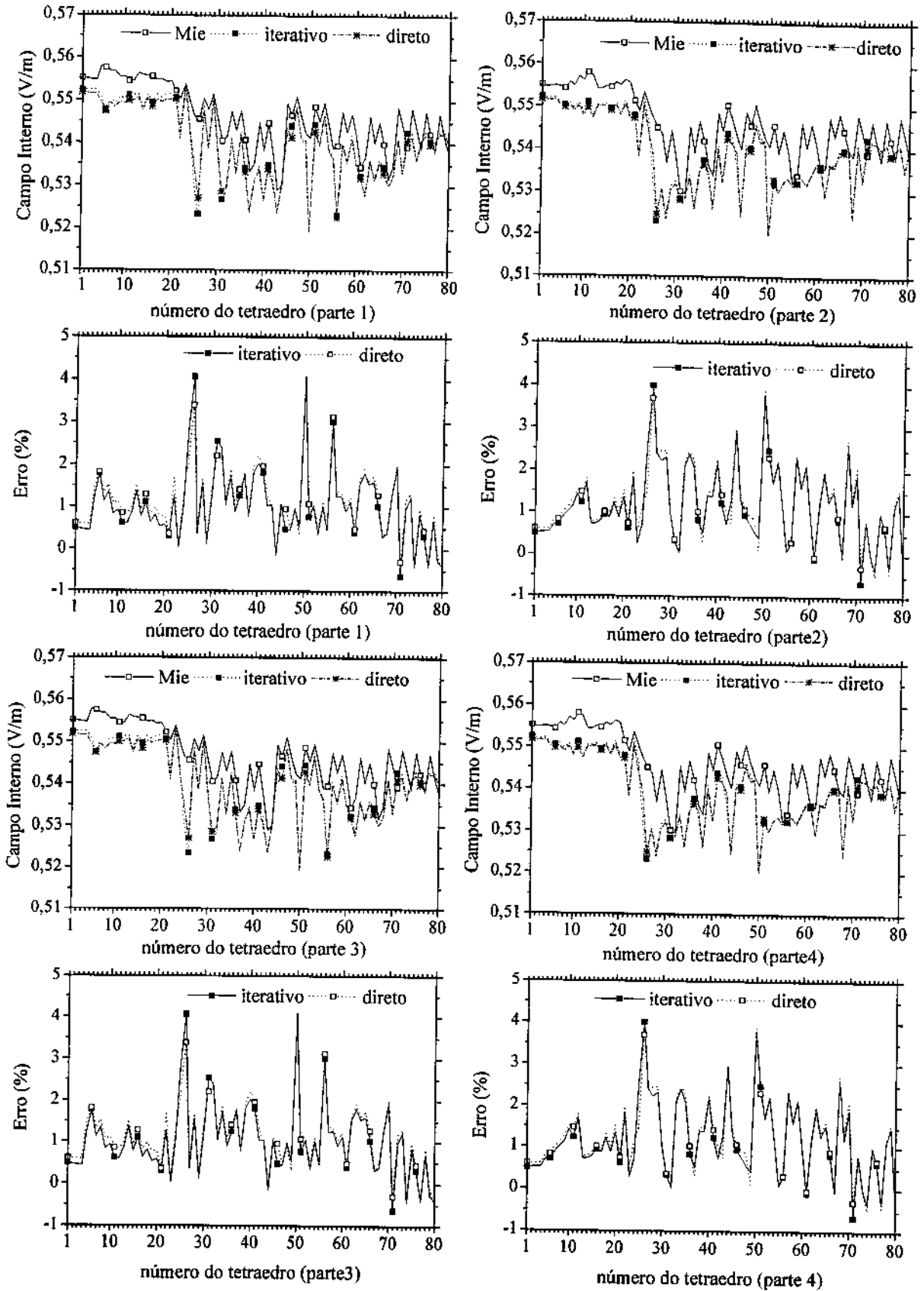


Figura 5.16(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\varepsilon_r = 4,0$.

Da 1^a à 4^a parte.

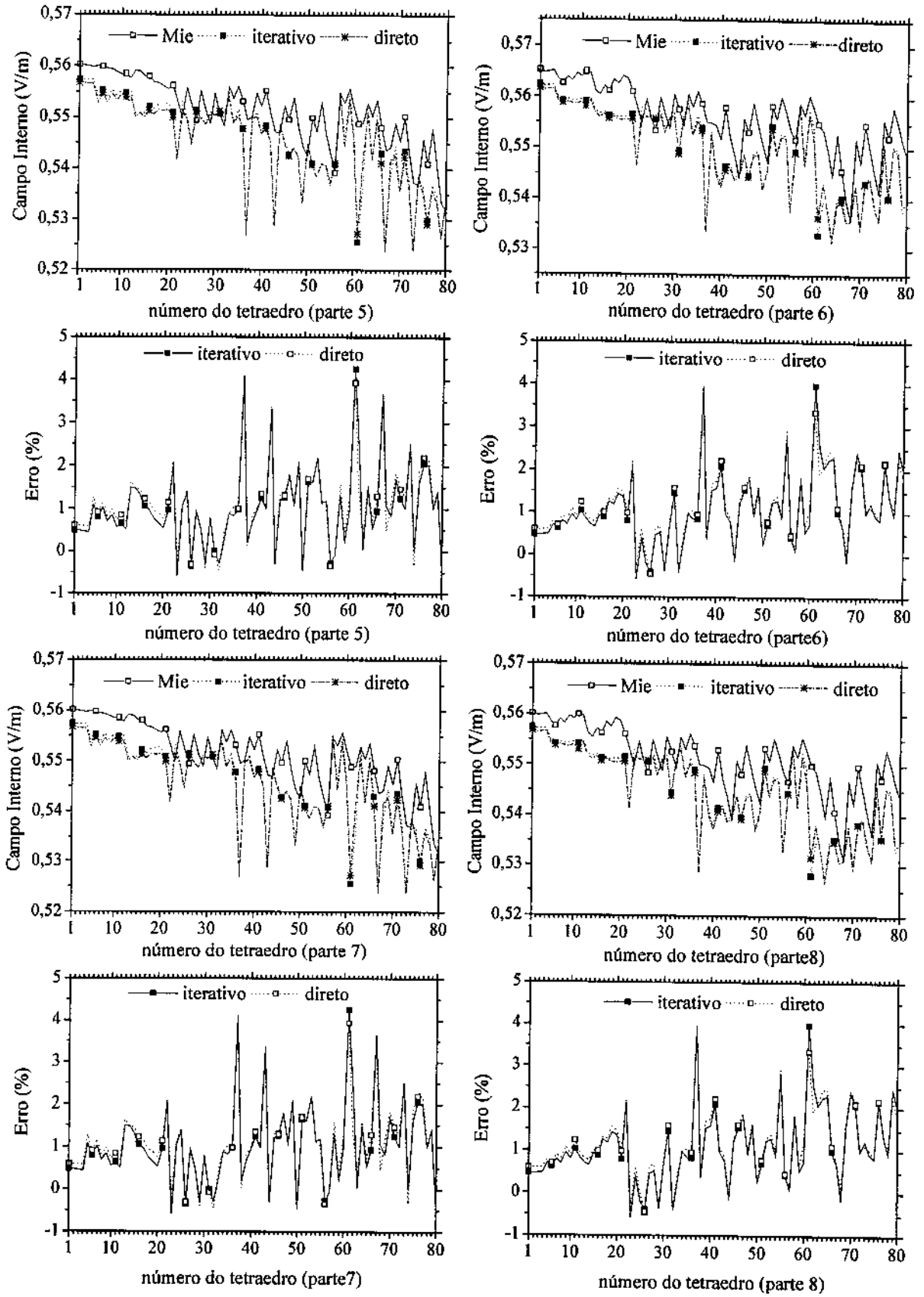


Figura 5.16(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$.

Da 5ª à 8ª parte.

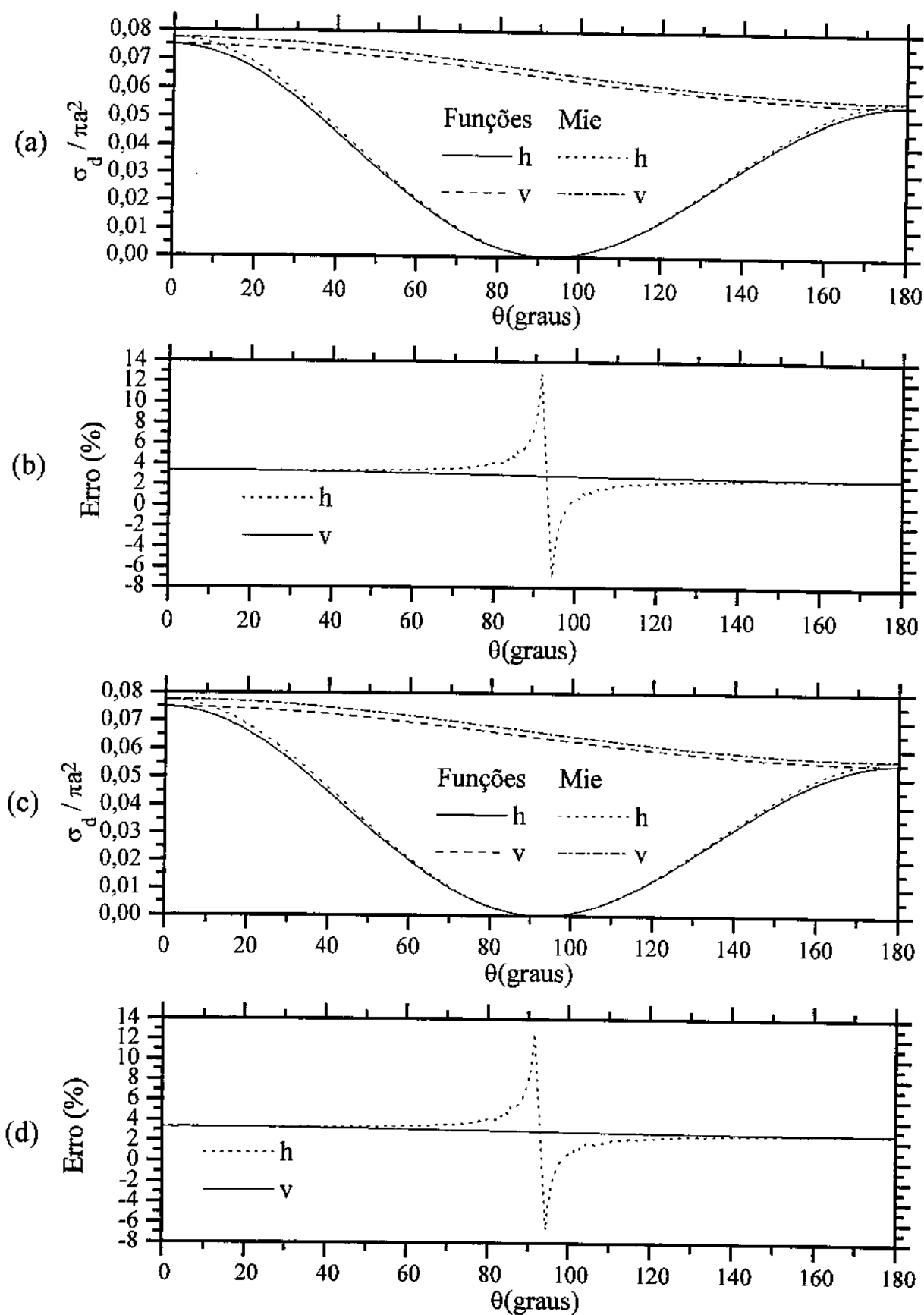


Figura 5.17 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$

(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie
 (c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie

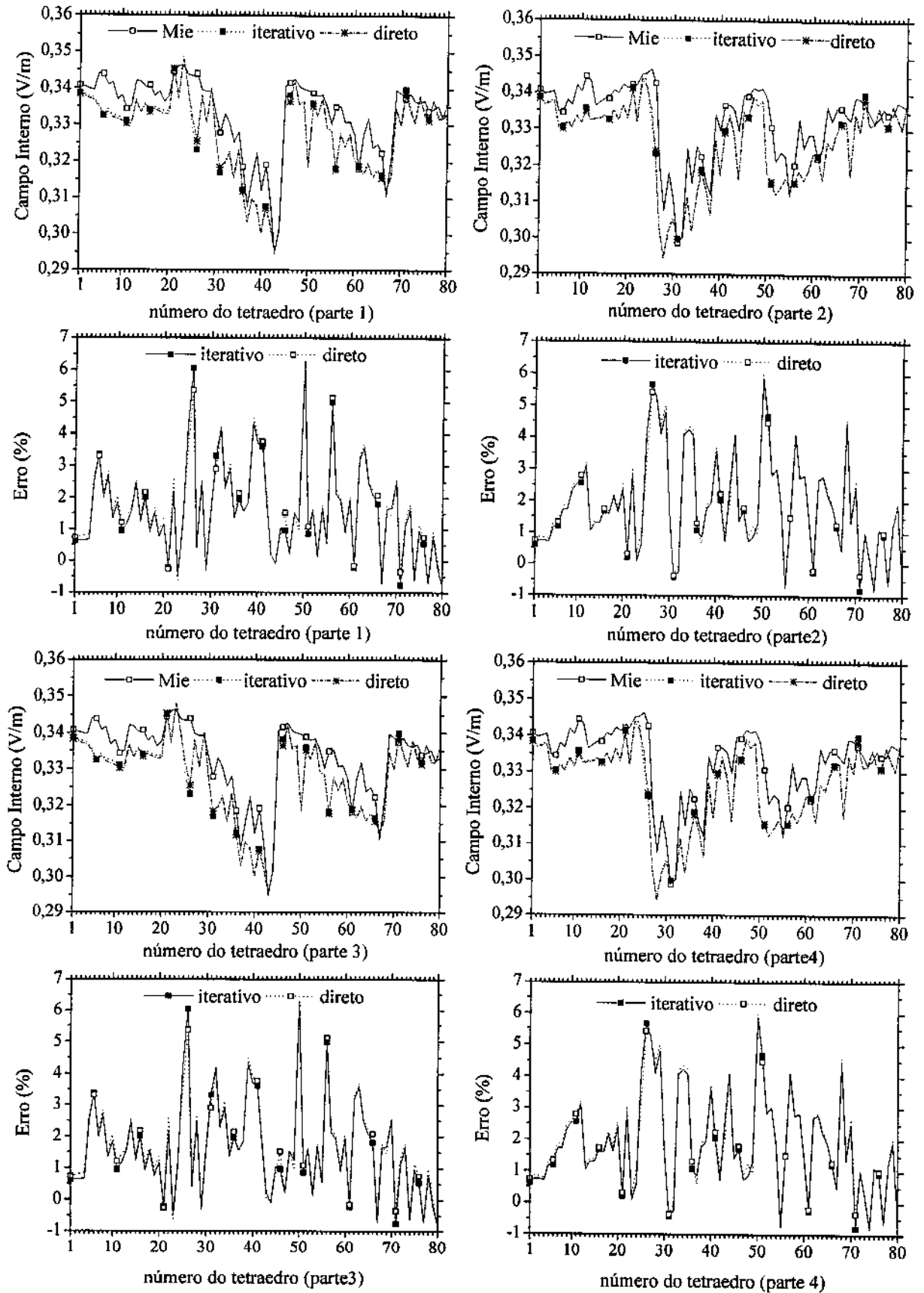


Figura 5.18(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$.
Da 1ª à 4ª parte.

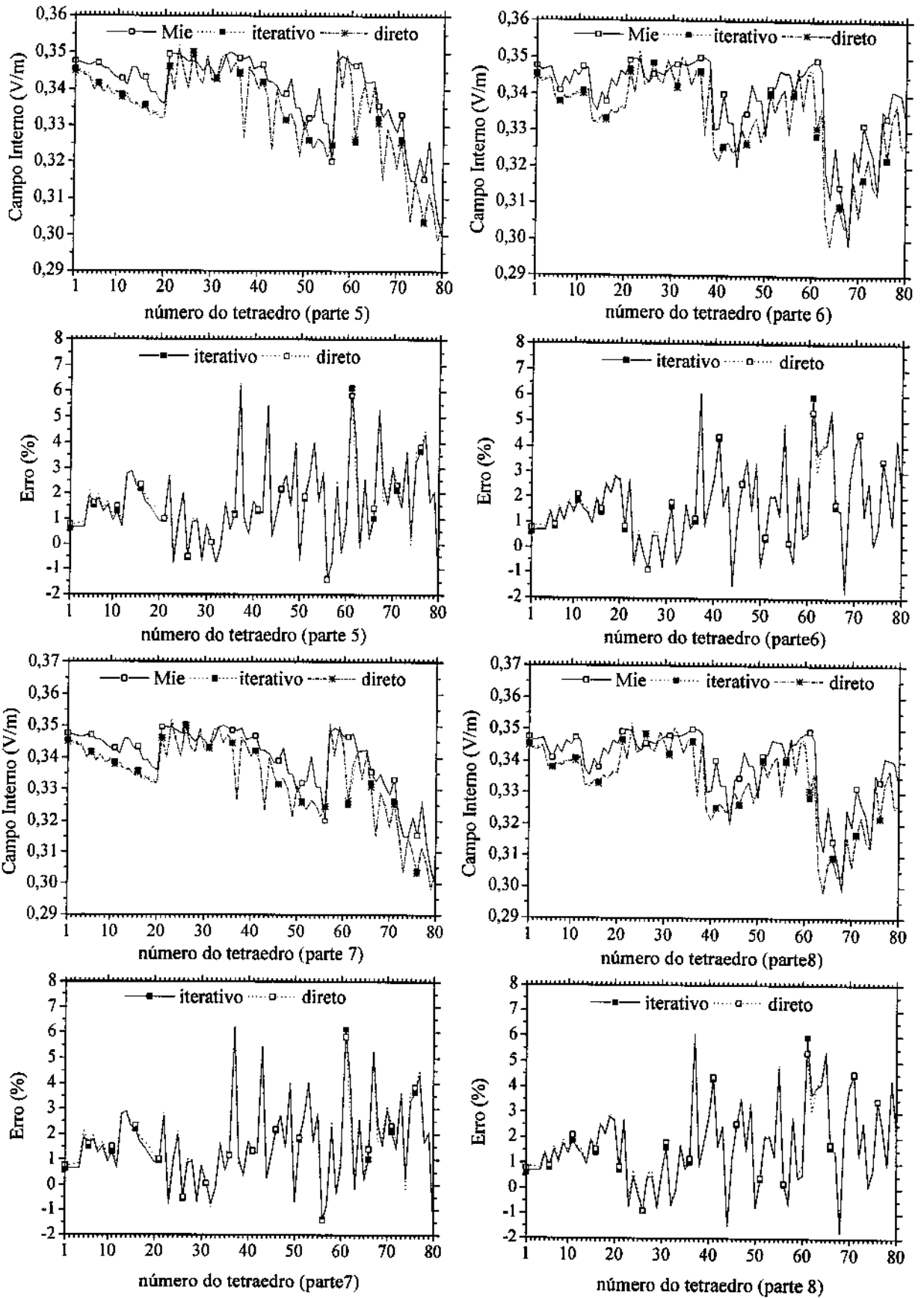


Figura 5.18(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$.
Da 5ª à 8ª parte.

5.4 Campo espalhado e campo interno de uma esfera duas camadas pelo método iterativo

Em todos os casos dividimos uma de esfera com $\kappa_0 a = 0,408$ em oito partes conforme a Figura 5.10.b e discretizamos com um total de 640 tetraedros com 80 tetraedros em cada parte. O método direto gerou 720 funções LI e o método iterativo 105 funções LI por parte. O critério de convergência foi definido com $\text{dist} = 10^{-8}$. Na Figura 5.19 temos o resultado do cálculo da “bistatic cross section” com os dois métodos para uma esfera com $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$, o método iterativo convergiu com 15 iterações e apresentou melhor resultado. No cálculo do campo interno, Figura 5.20, o método iterativo apresenta menor erro na maioria dos pontos, mas o ponto de maior erro em cada parte é sempre do método iterativo. O caso de uma esfera com $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$ convergiu com 13 iterações e o método iterativo apresentou melhor resultado no cálculo da “bistatic cross section”. No cálculo do campo interno o método iterativo apresenta erro menor na maioria dos pontos, mas com o maior erro em cada parte. Nas Figuras 5.22 a 5.24 temos o caso de uma esfera com $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 25,0$, vemos que o método iterativo apresenta melhor resultado no cálculo da “bistatic cross section” e no campo interno apresenta erro menor na maioria dos pontos, mas com o maior erro em cada parte. É também importante notar que a direção do erro não acompanha a apresentada pelo método direto, em alguns trechos de tetraedros, por exemplo, do 12º ao 15º da parte 5 e 7, isto significa uma independência de comportamento entre os dois métodos. O caso da esfera com $\epsilon_1 = 25,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$ é mostrado nas Figuras 5.25 a 5.26, o comportamento dos resultados foi o mesmo que com o caso anterior, sendo que o erro no cálculo do campo interno apresentou uma maior independência de comportamento.

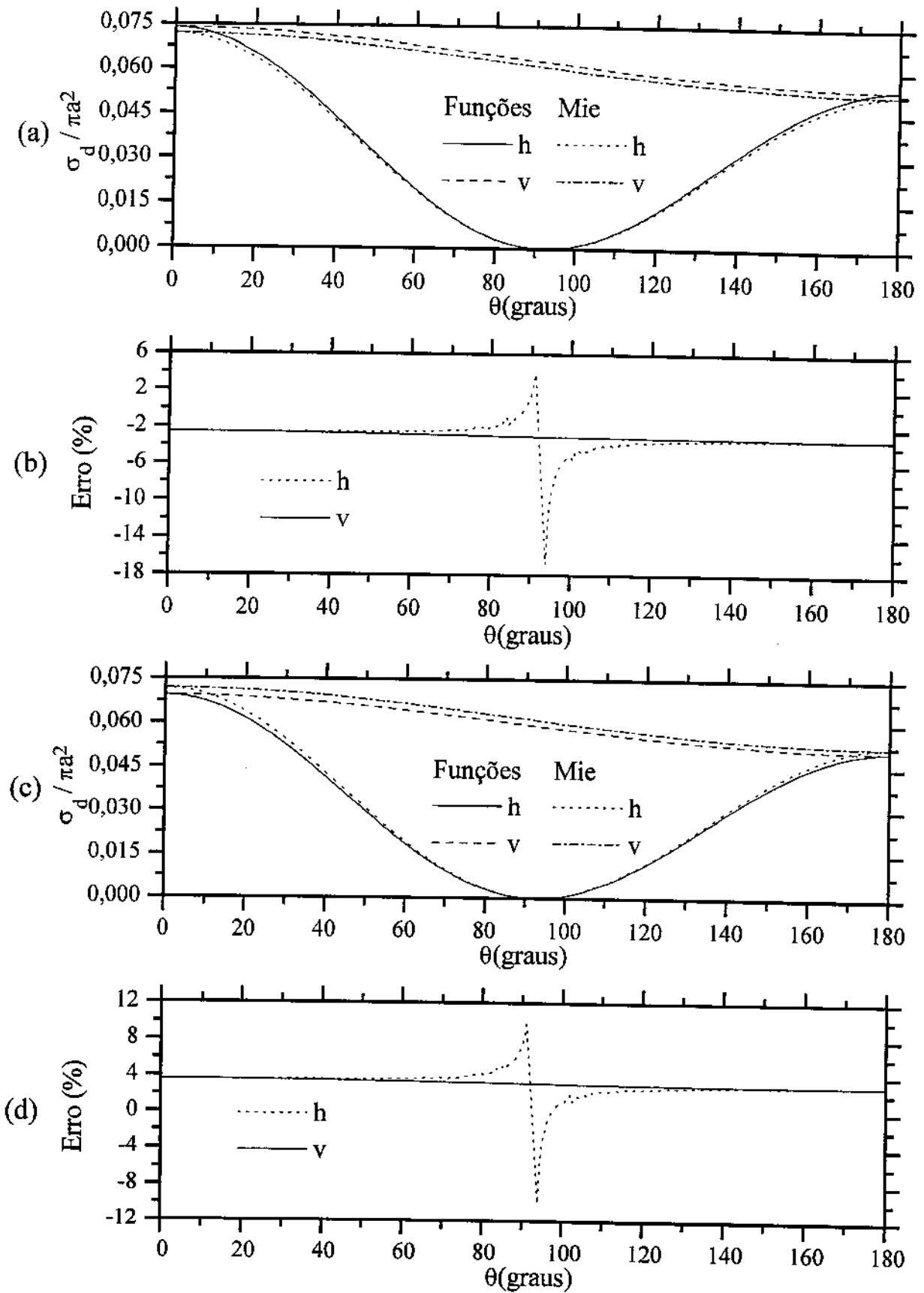


Figura 5.19 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$

(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie

(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie

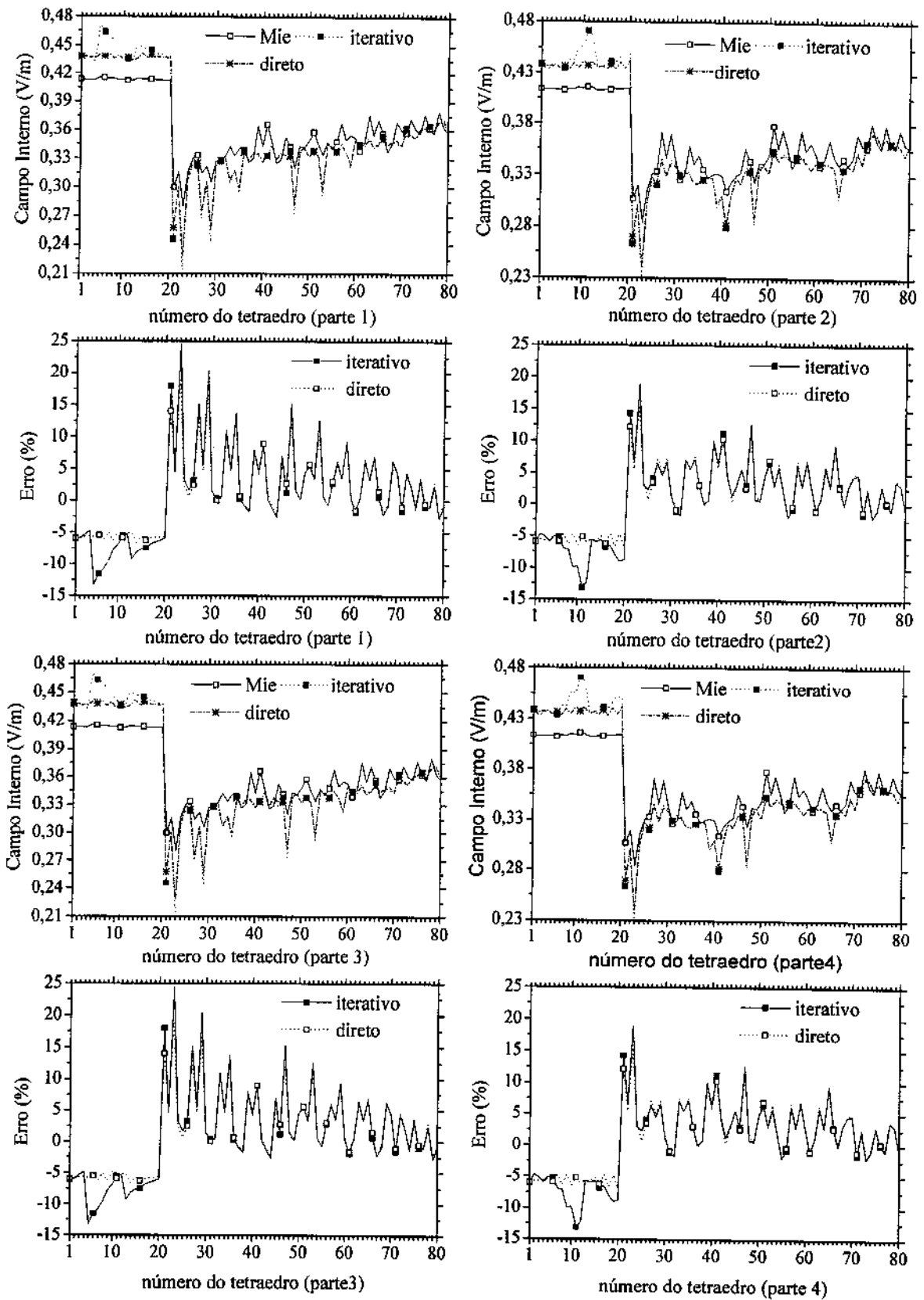


Figura 5.20(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 9,0$. Da 1ª à 4ª parte.

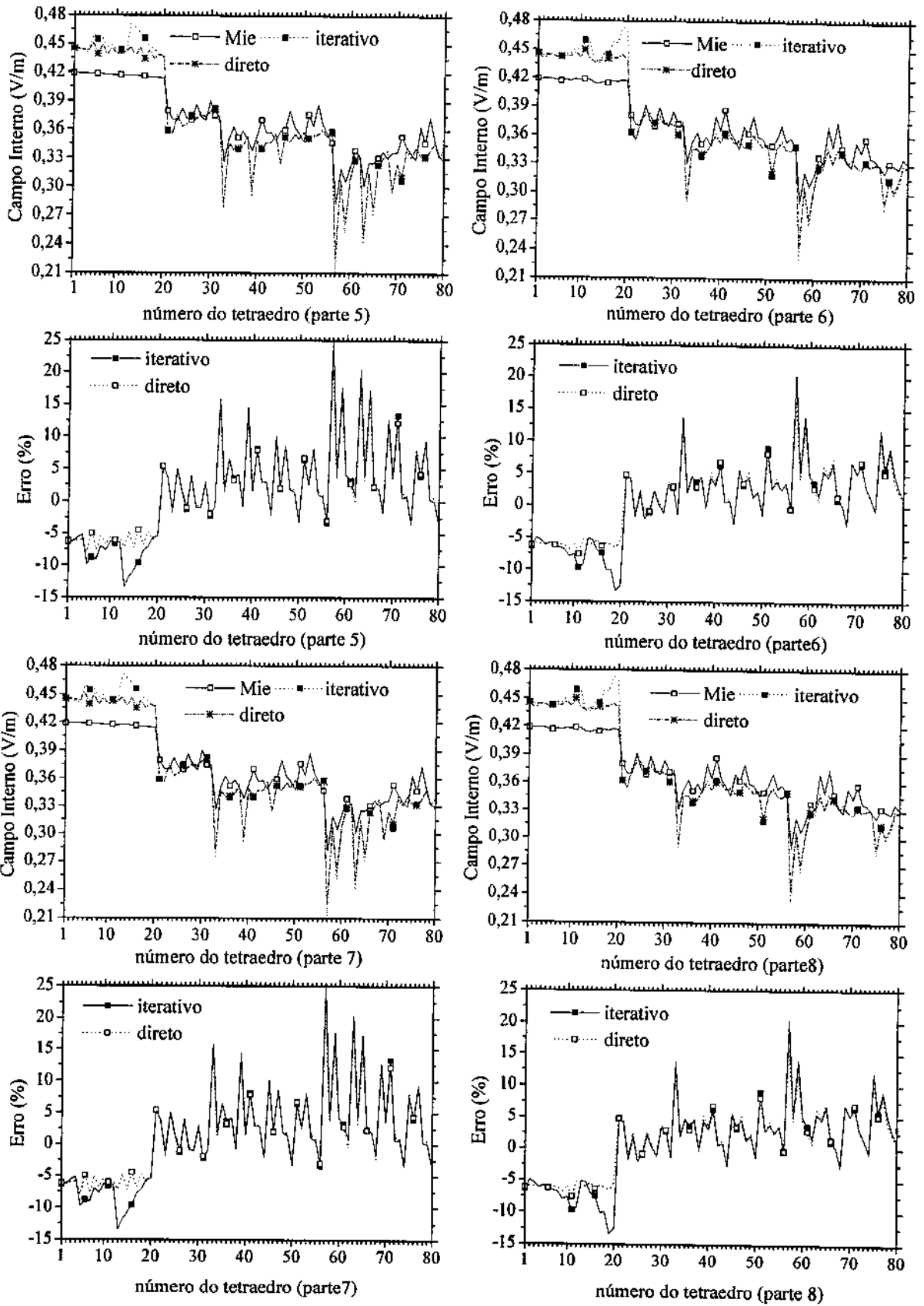


Figura 5.20(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$. Da 5ª à 8ª parte.

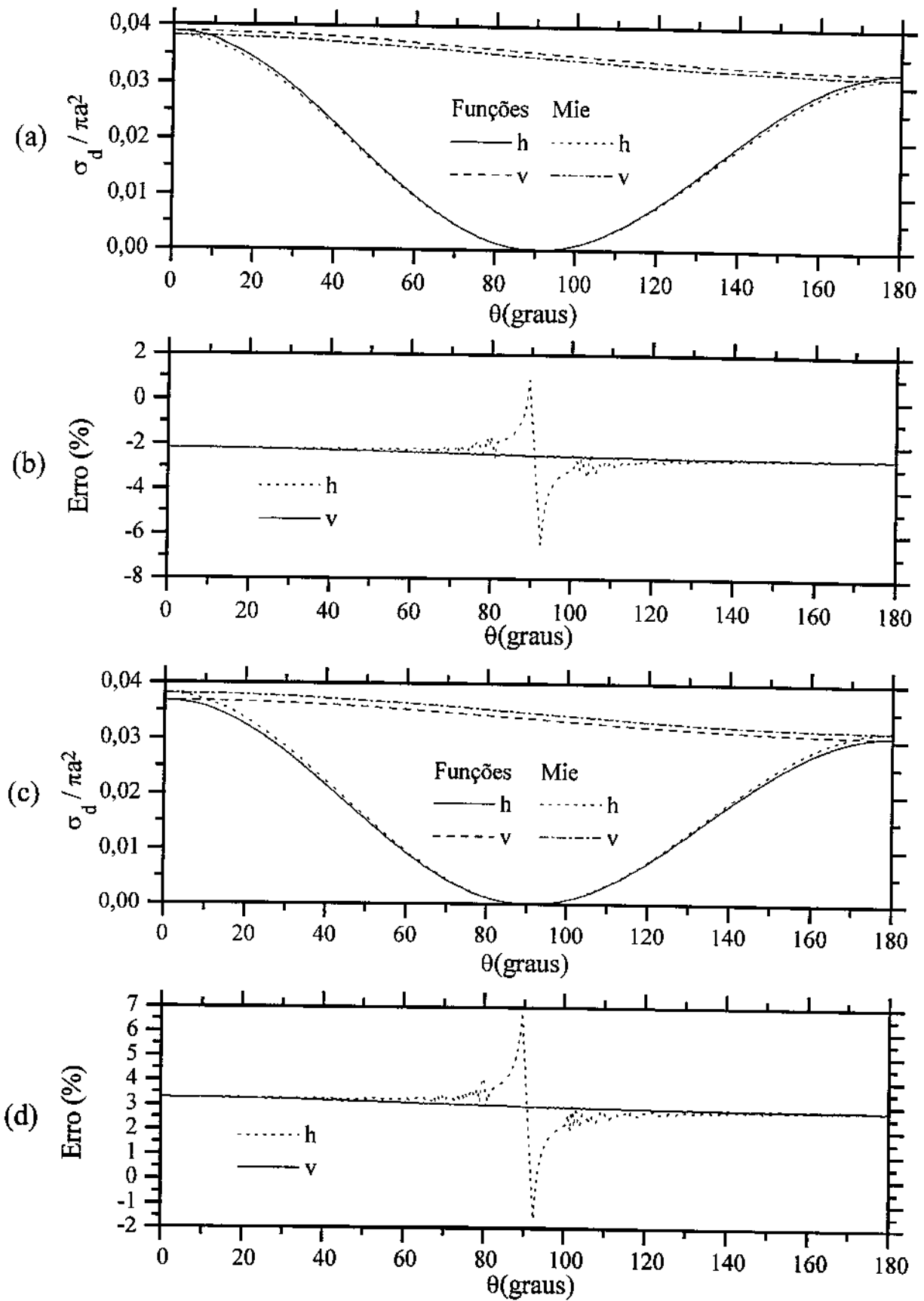


Figura 5.21 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$

(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie

(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie

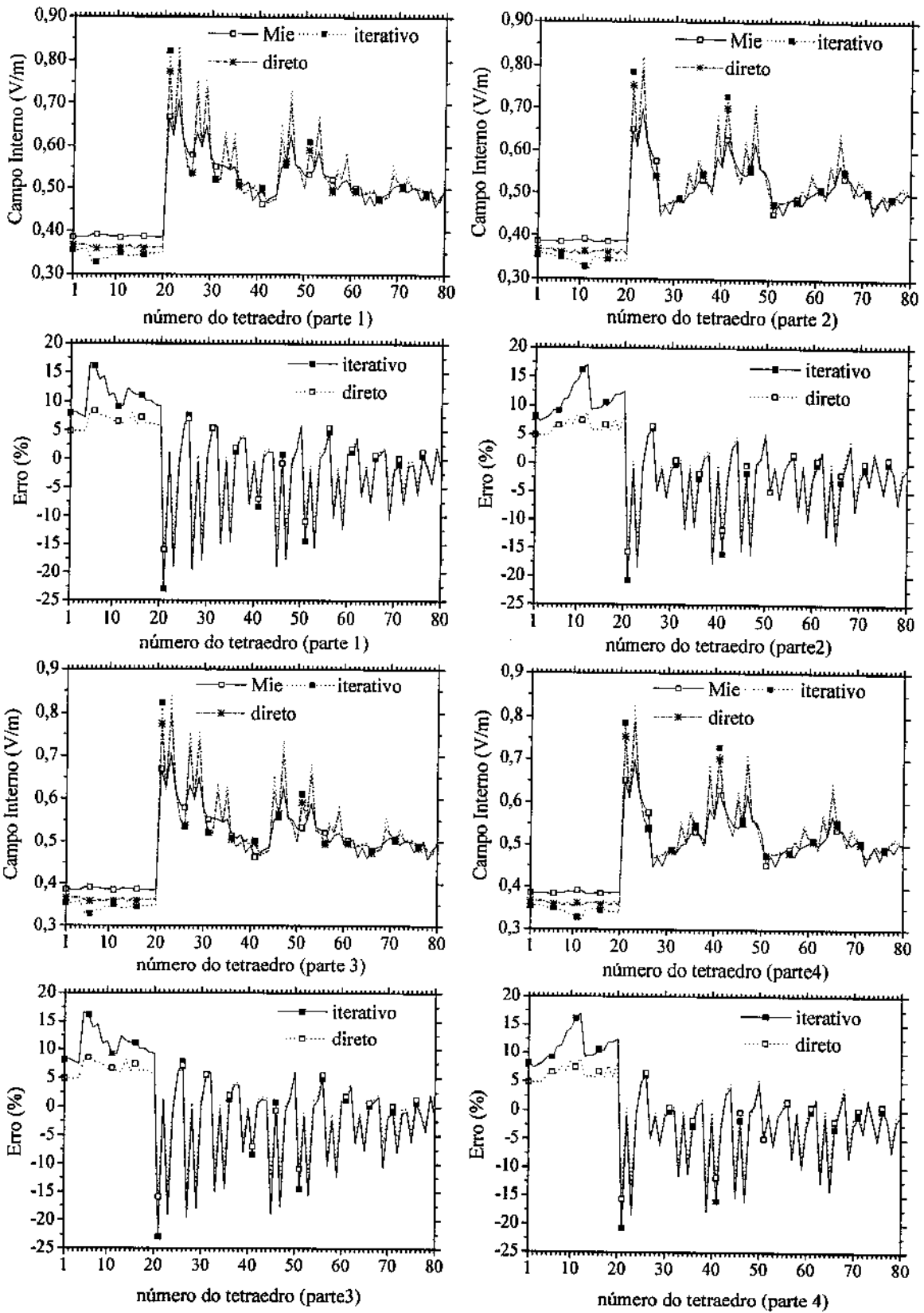


Figura 5.22(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 9,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$. Da 1ª à 4ª parte.

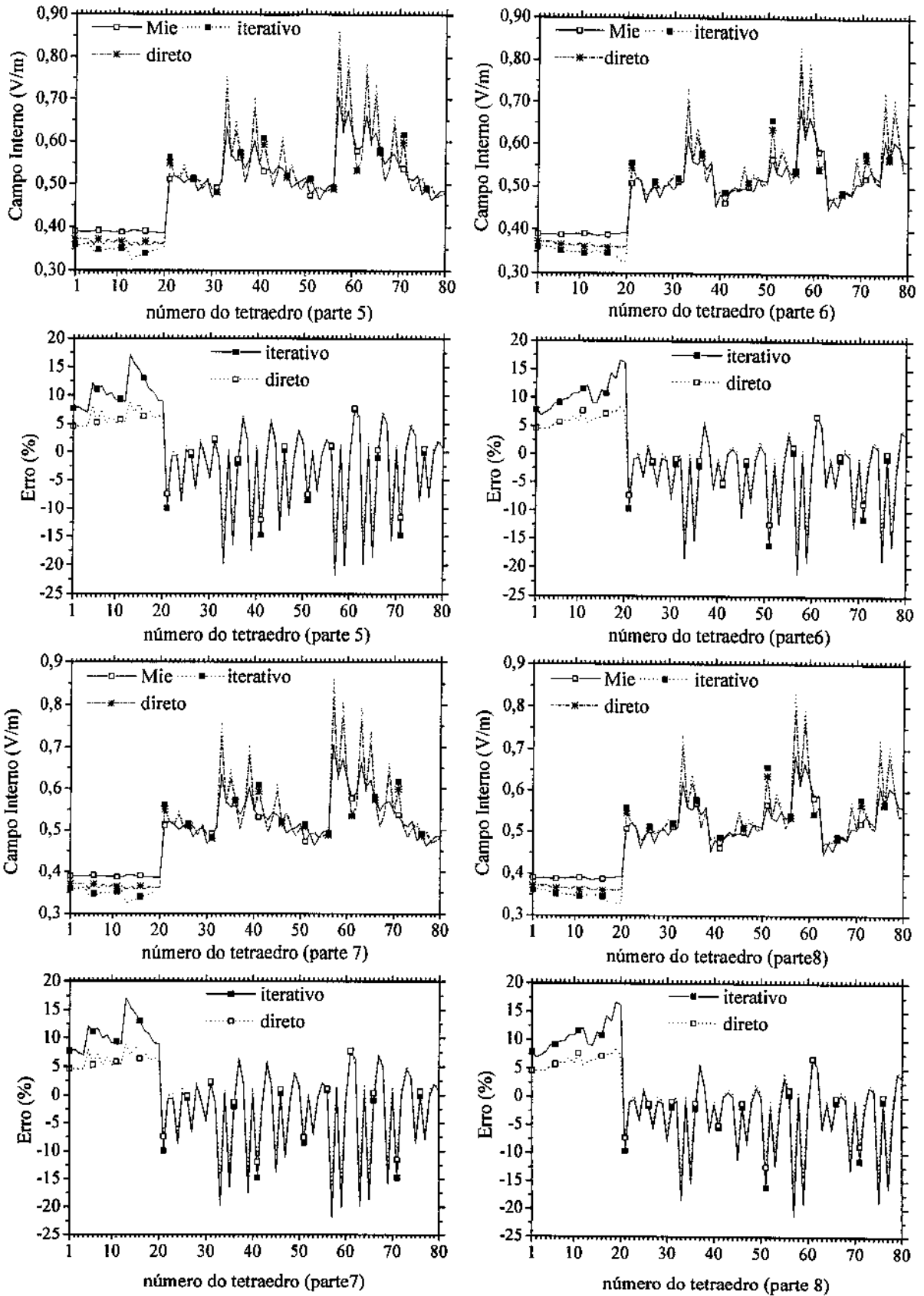


Figura 5.22(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 9,0$ e $\varepsilon_2 = 4,0$. Da 5^a à 8^a parte.

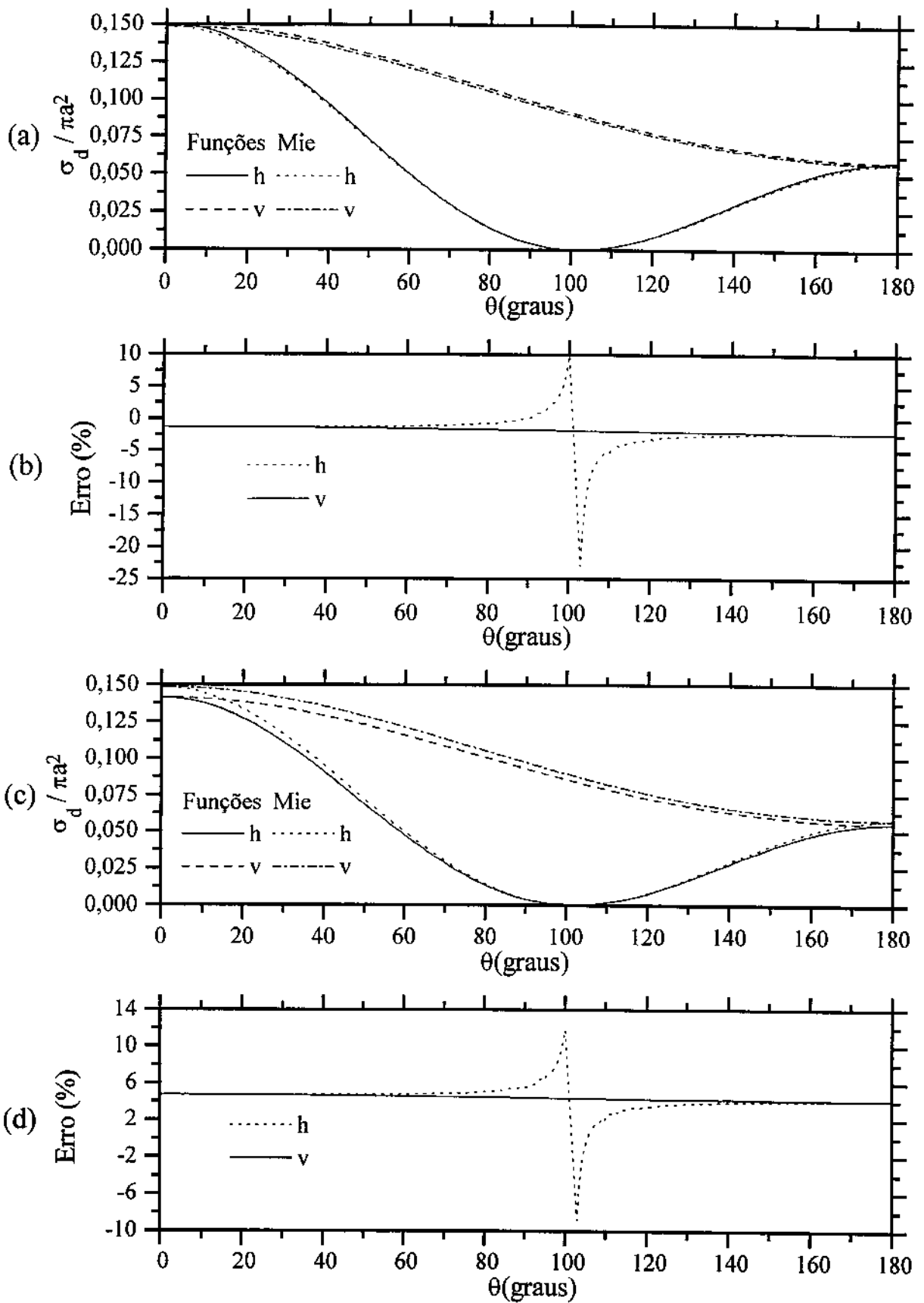


Figura 5.23 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 25,0$

(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie

(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie

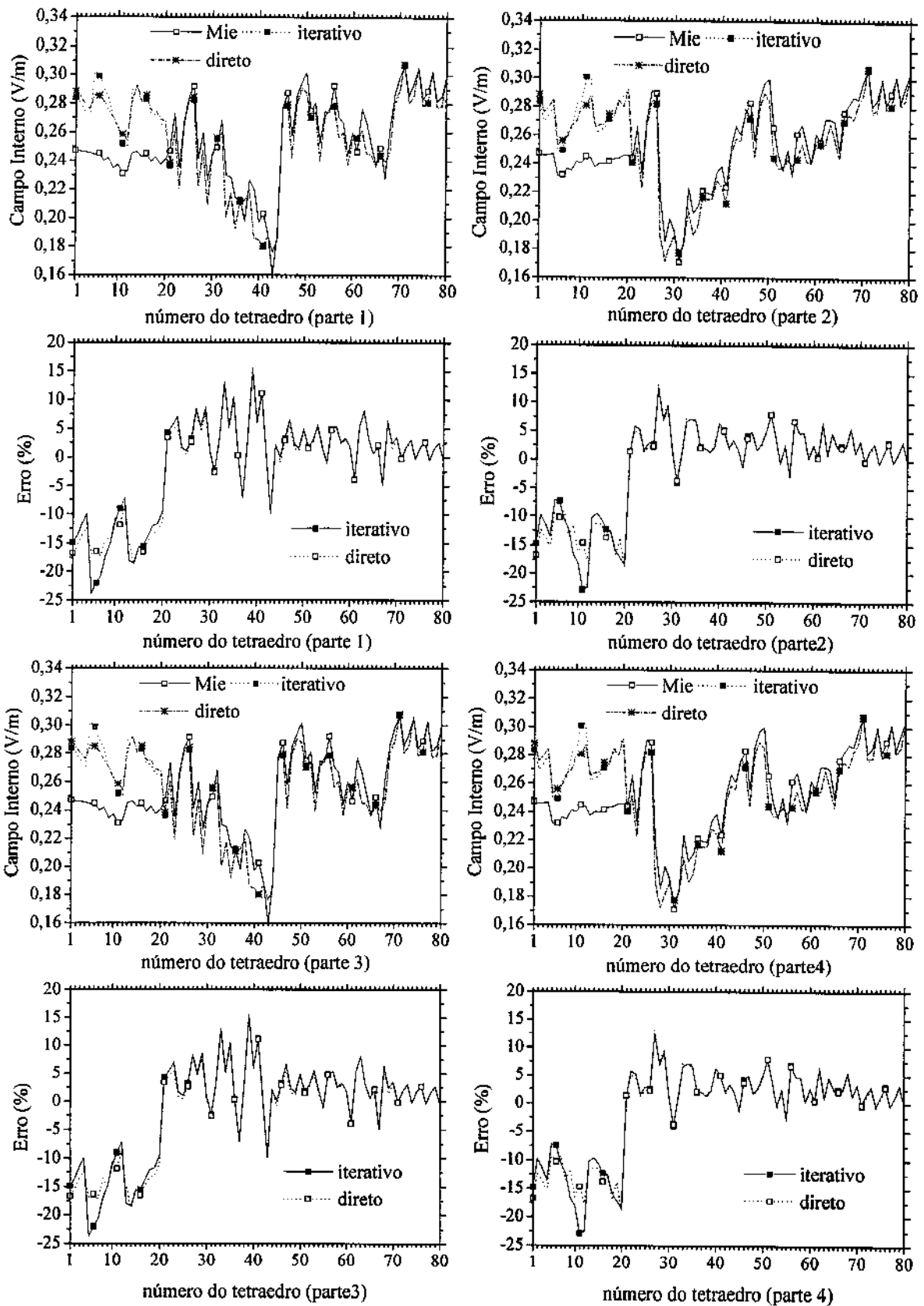


Figura 5.24(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 4,0$ e

$\epsilon_2 = 25,0$. Da 1ª à 4ª parte.

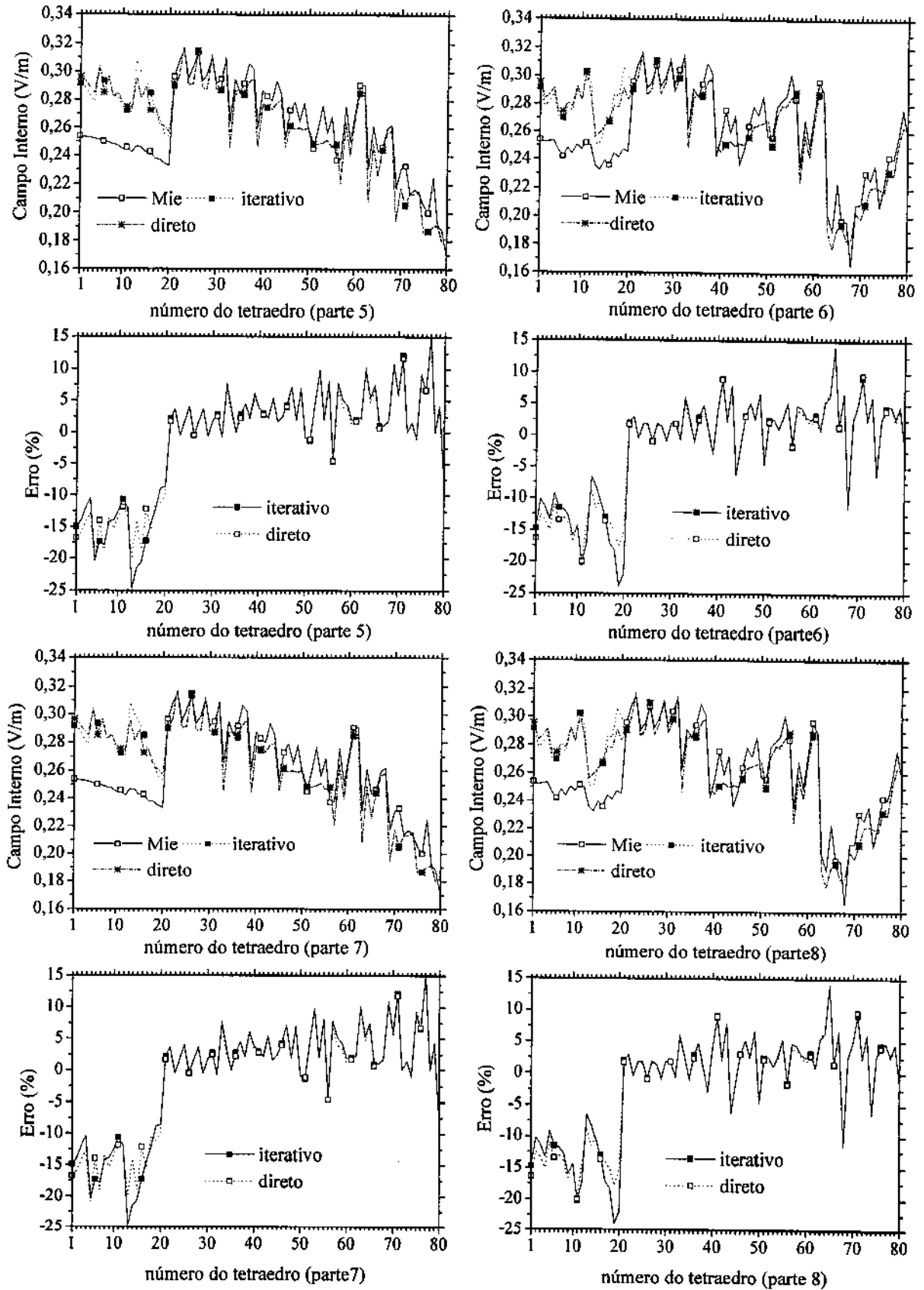


Figura 5.24(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$. Da 5^a à 8^a parte.

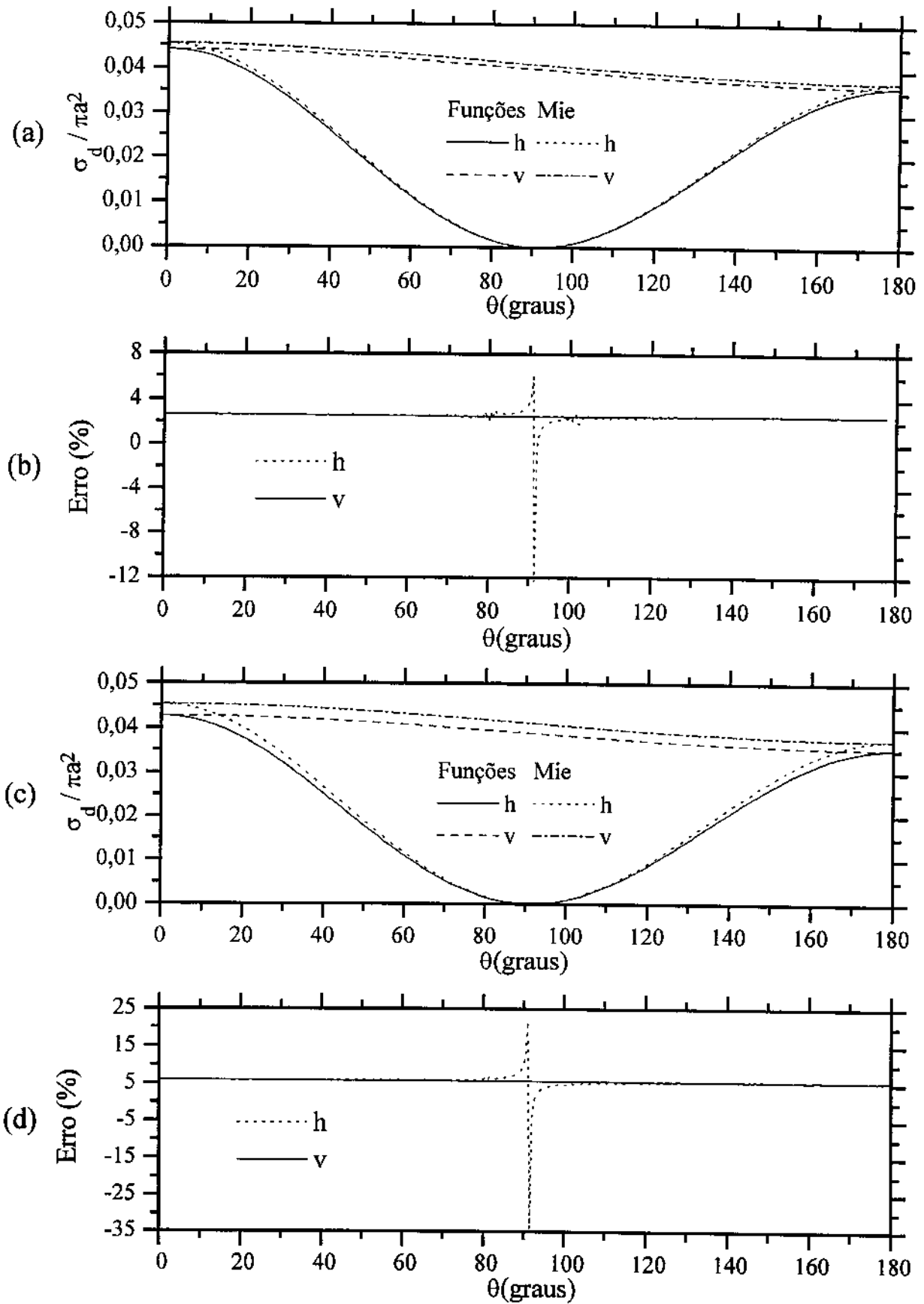


Figura 5.25 Esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 25,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$

(a) bistatic cross section – método direto (b) erro em relação a série de Mie

(c) bistatic cross section – método iterativo (d) erro em relação a série de Mie

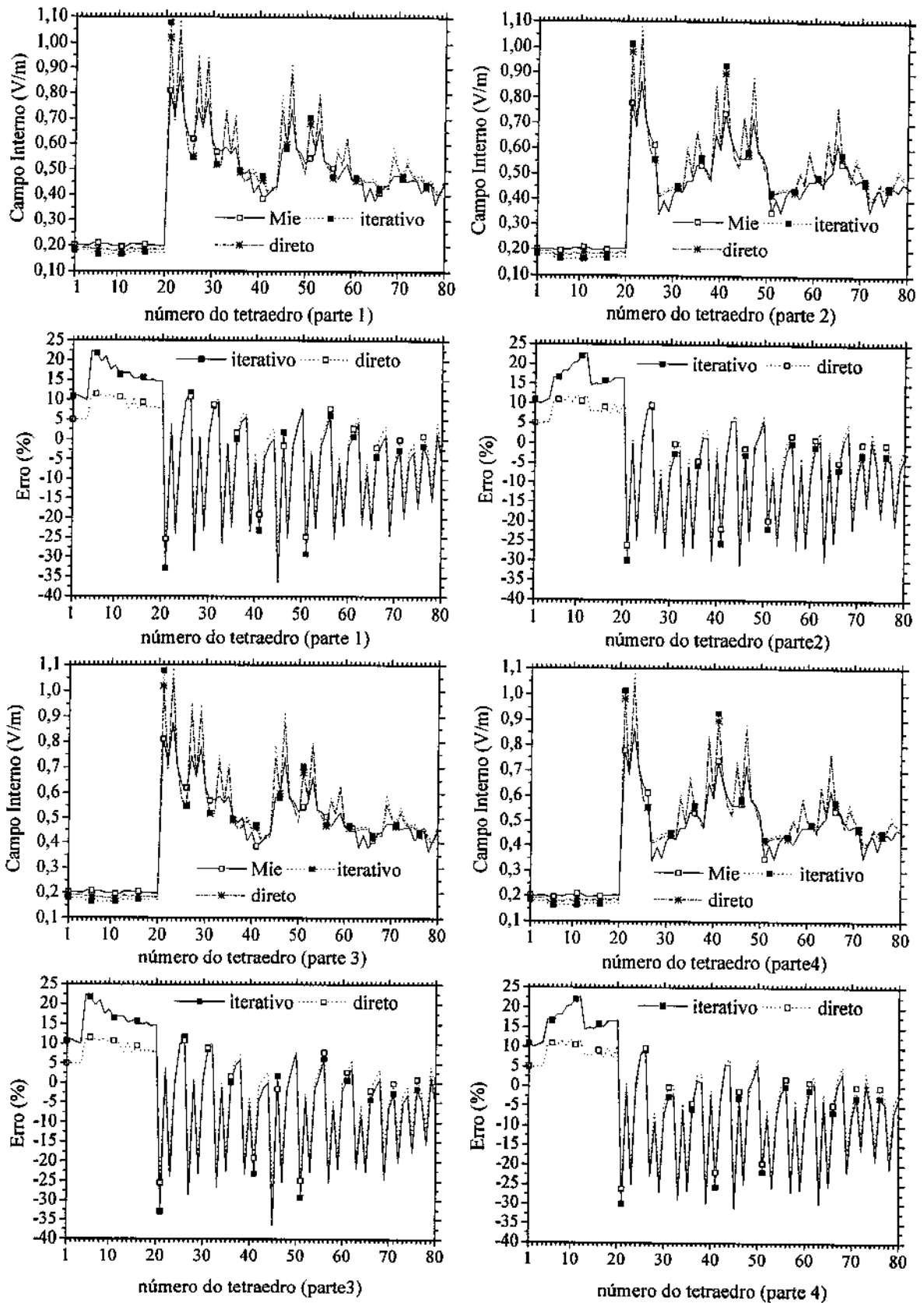


Figura 5.26(a) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\varepsilon_1 = 25,0$ e $\varepsilon_2 = 25,0$. Da 1ª à 4ª parte.

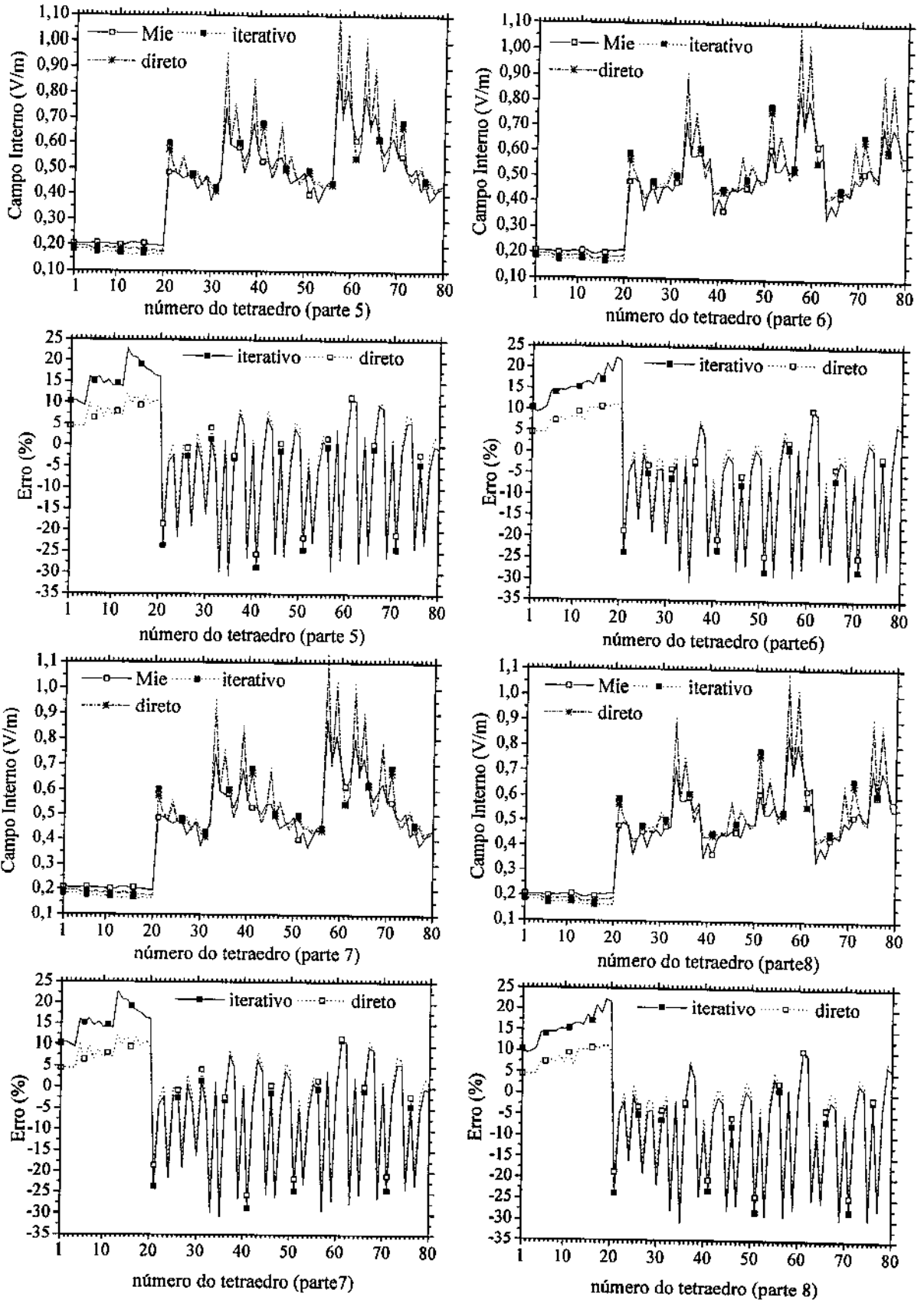


Figura 5.26(b) Campo interno de uma esfera com $\kappa_0 a = 0,408$, $\epsilon_1 = 25,0$ e $\epsilon_2 = 4,0$. Da 5ª à 8ª parte.

5.5 Campo espalhado e campo interno de um conjunto de cubos homogêneos pelo método iterativo

Em todos os conjuntos cada cubo tem $0,1\lambda$ de aresta e foi discretizado com 384 tetraedros gerando 480 funções LI, no método direto o número total de incógnitas é a soma das funções geradas em cada cubo. O critério de convergência foi definido com $\text{dist} = 10^{-8}$. O primeiro caso é um conjunto com dois cubos iguais com uma distância $d = 0,1\lambda$ e $\varepsilon_c = 9,0$, já analisado na seção 3.4 pelo método direto. O método iterativo convergiu com 3 iterações. Na Figura 5.27 vemos que não podemos distinguir graficamente os resultados de campo espalhado obtidos com os dois métodos. No cálculo do campo interno vemos que no primeiro cubo, Figura 5.28(b), a diferença do campo inicial, induzido pelo campo incidente, é de no máximo $-4,6\%$, e a diferença entre os dois métodos fica em torno de $0,05\%$. No segundo cubo, Figura 5.28(d), a diferença máxima é de $7,0\%$ para o campo inicial e a diferença entre os dois métodos fica em torno de $0,01\%$. Foi no segundo cubo que o método iterativo corrigiu mais o campo inicial.

Na Figura 5.29 temos o campo espalhado de um conjunto de três cubos iguais com uma distância $d = 0,1\lambda$ e $\varepsilon_c = 9,0$, já analisado na seção 3.4 pelo método direto. O método iterativo convergiu com 5 iterações. Não podemos distinguir graficamente os resultados de campo espalhado. No cálculo do campo interno, Figura 5.30, partimos de diferenças máximas, para o campo inicial, de $-8,4\%$, $11,5\%$ e $12,2\%$, para o 1º, 2º e 3º cubo, respectivamente, chegando a diferenças de $-0,27\%$, $0,28\%$ e $0,31\%$, respectivamente.

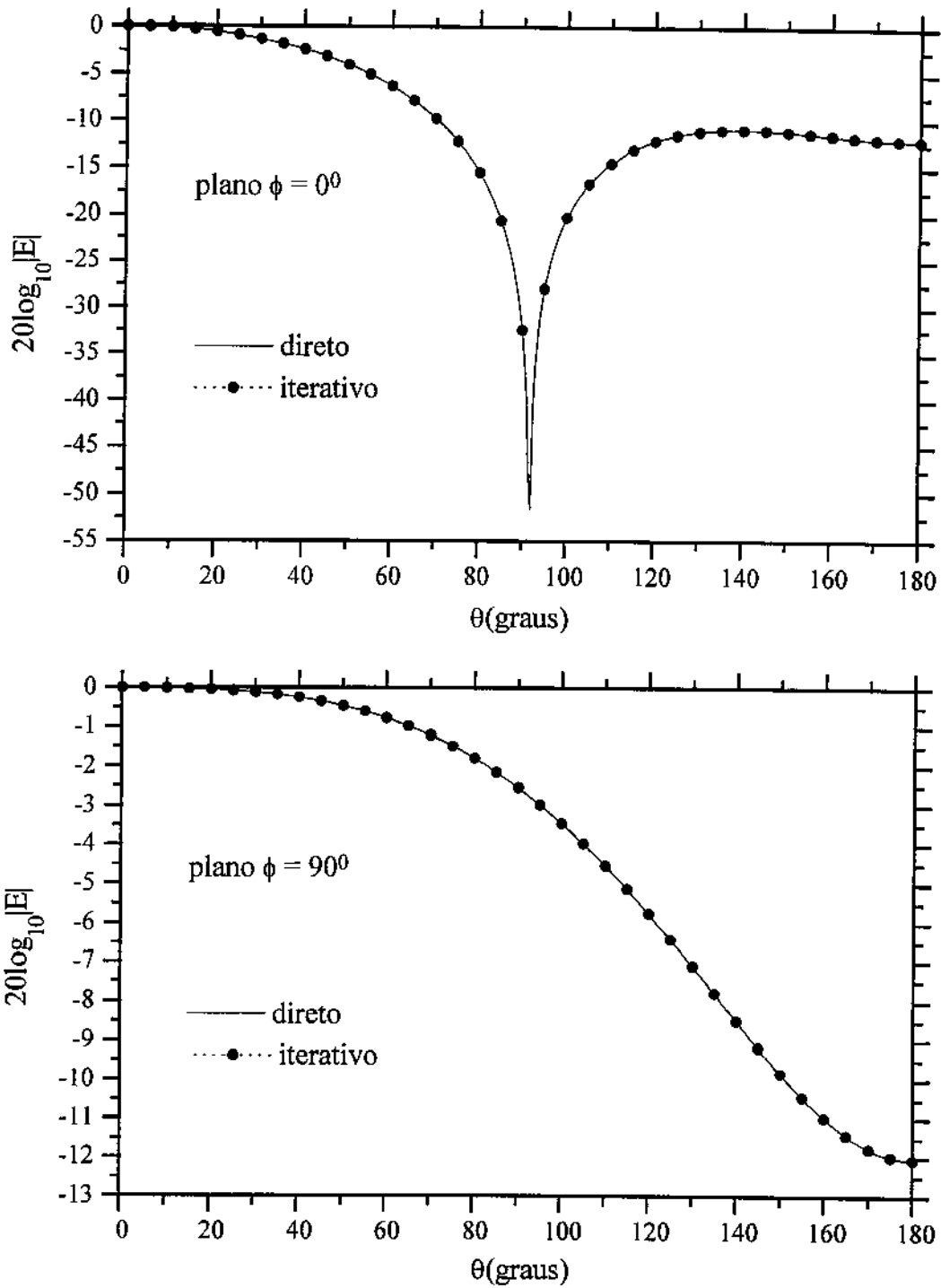


Figura 5.27 Campo espalhado por dois cubos iguais de aresta

$0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$.

método direto - 768 tetraedros e 960 incógnitas

método iterativo - duas partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas cada.

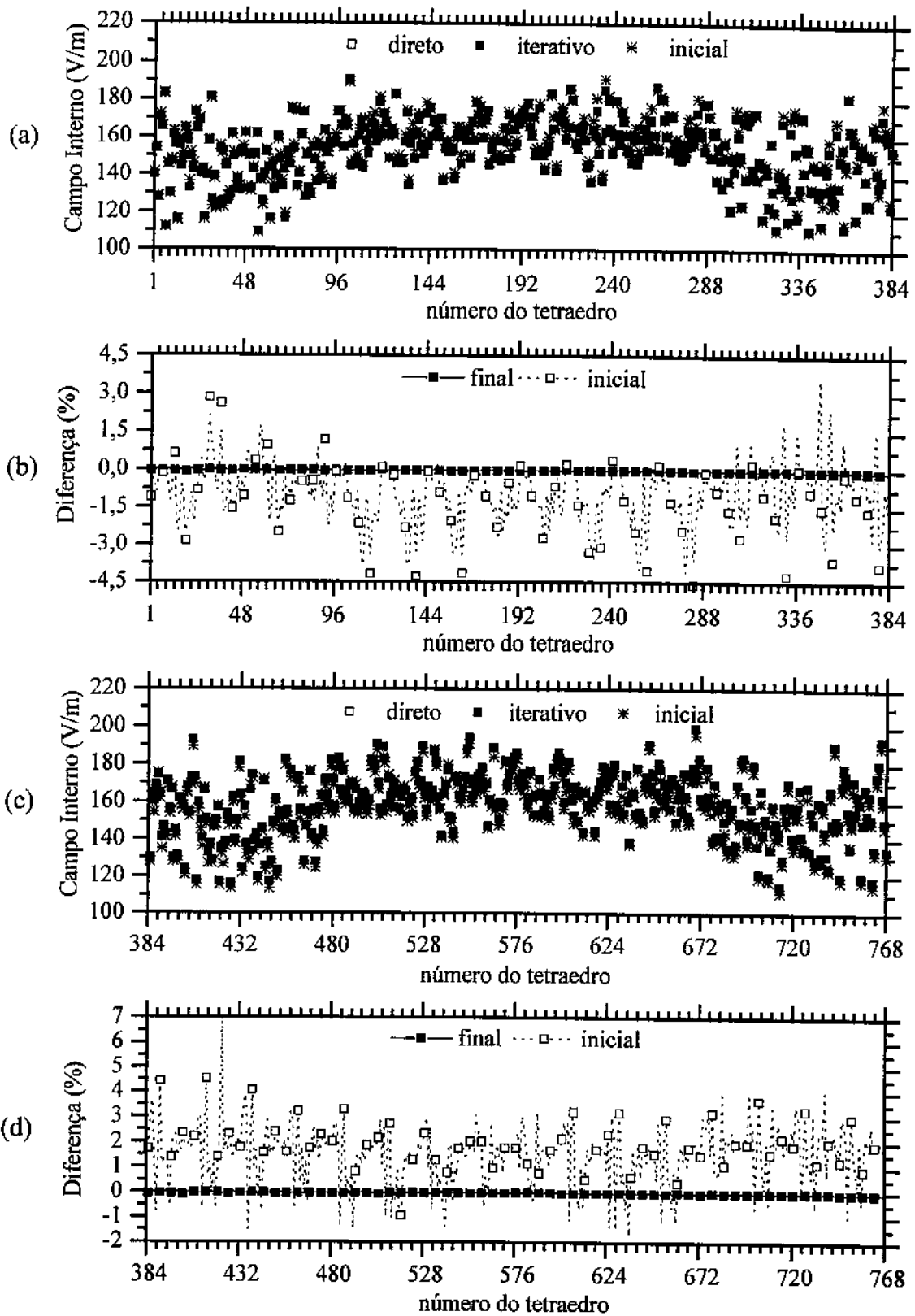


Figura 5.28 Campo interno de dois cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$.

(a) e (c) campo interno do 1^o e 2^o cubo, respectivamente

(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

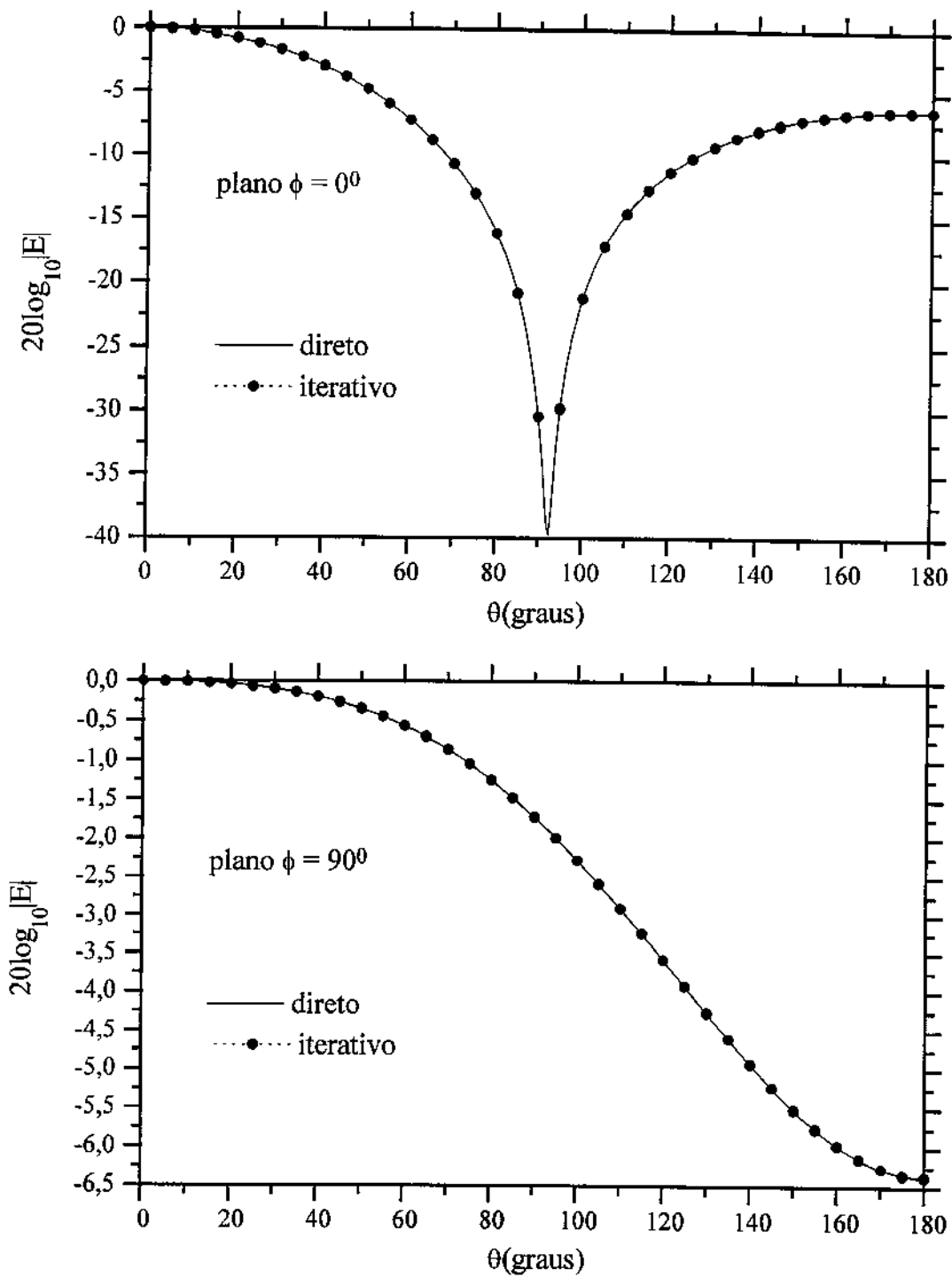


Figura 5.29 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $d = 0,1\lambda$ e $\epsilon_c = 9,0$.

método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

método iterativo - três partes com 384 cubos e 480 incógnitas cada.

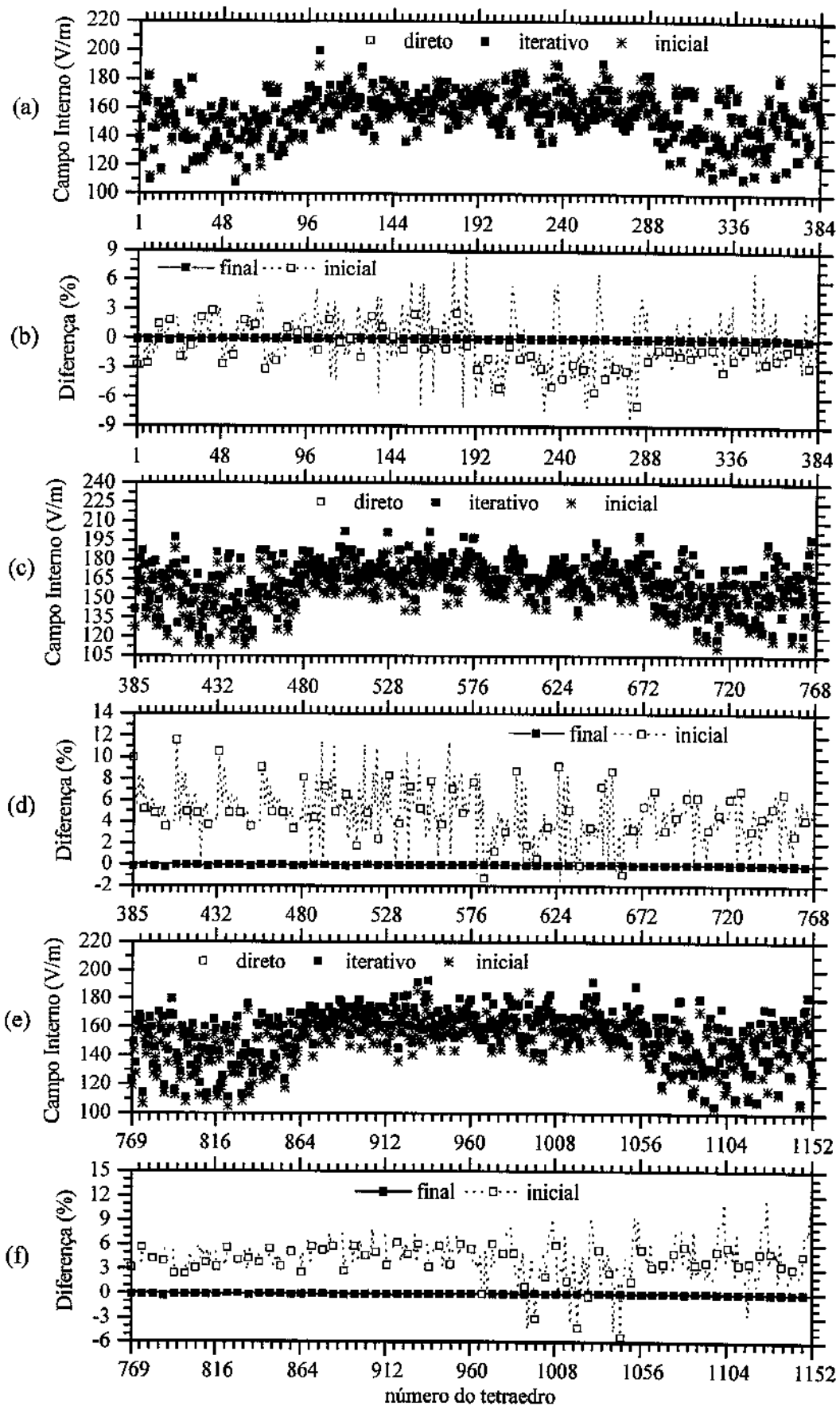


Figura 5.30 Campo interno de três cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$.
 (a), (c) e (e) campo interno do 1^o, 2^o e 3^o cubo, respectivamente
 (b), (d) e (f) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

Aumentamos a distância entre cubos para $d = 1,0\lambda$ mantendo a mesma característica elétrica. Na Figura 5.31 temos o campo espalhado do conjunto com dois cubos, o método iterativo convergiu com 3 iterações, uma a menos que o conjunto com uma distância de $d = 0,1\lambda$, o resultado é graficamente igual. No cálculo do campo interno vemos na Figura 5.32 que o campo inicial está mais próximo do calculado pelo método direto, uma diferença máxima de $-0,65\%$. No caso com uma distância entre cubos de $d = 0,1\lambda$, Figura 5.28, a diferença máxima foi de $-4,6\%$, isto significa que a indução que um corpo faz no outro tem um peso menor na formação do campo total, isto é esperado porque a distância entre os cubos foi aumentada. A diferença entre os dois métodos foi de mesma ordem que o caso com $d = 0,1\lambda$.

O campo espalhado por um conjunto de três cubos é apresentado na Figura 5.33, o método iterativo convergiu com 4 iterações, uma a menos que o conjunto com uma distância de $d = 0,1\lambda$, o resultado é graficamente igual. No cálculo do campo interno, Figura 5.34, vemos o mesmo comportamento observado no conjunto de dois cubos, o campo inicial está mais próximo do campo total que no caso com $d = 0,1\lambda$, Figura 5.30. Em alguns pontos o campo inicial ficou mais próximo do campo total, calculado pelo método direto, que o campo total calculado pelo método iterativo. Não dá para dizer qual método está mais próximo do resultado exato mas isto implica numa independência de comportamento do método iterativo.

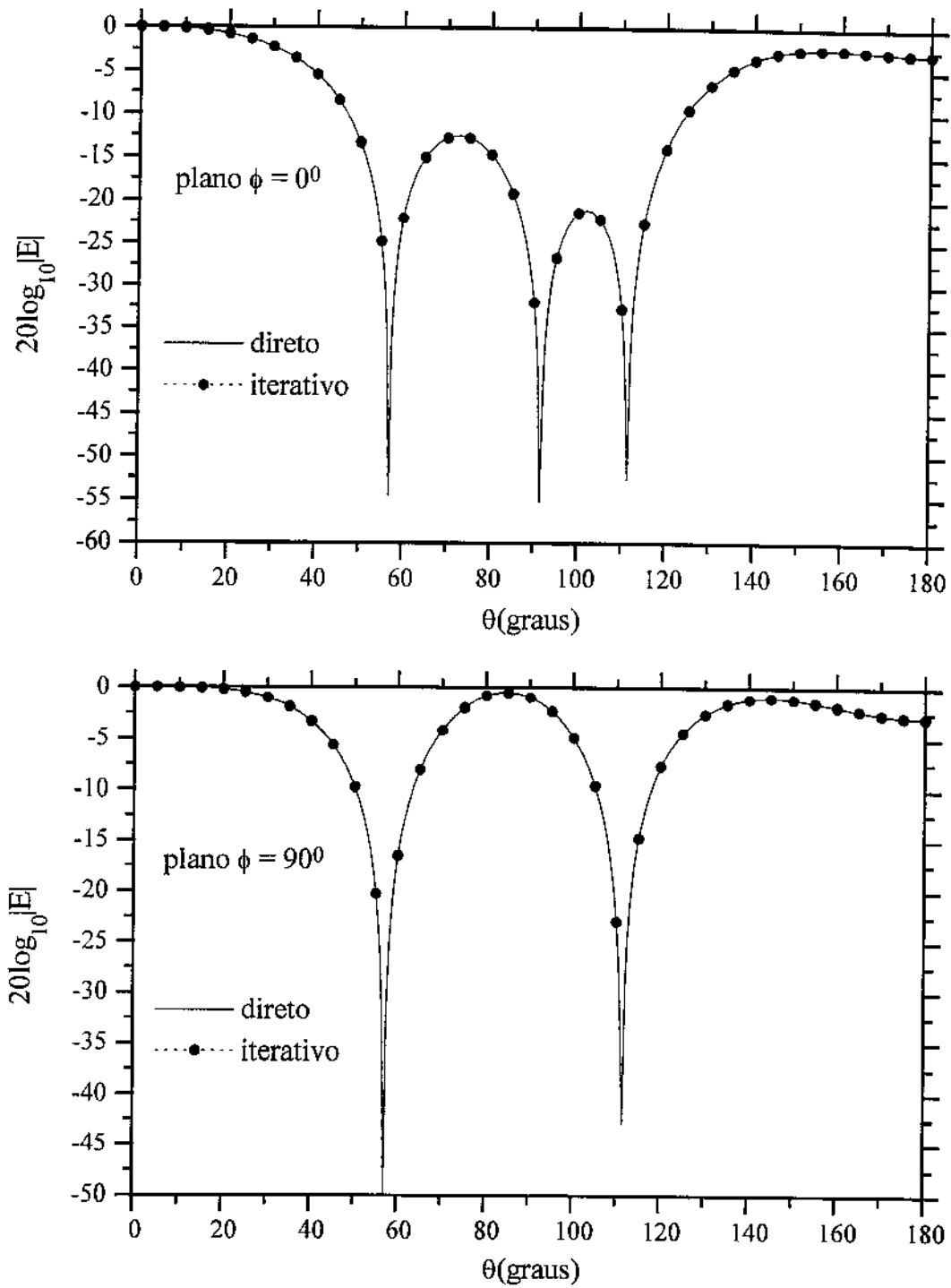


Figura 5.31 Campo espalhado por dois cubos iguais de aresta

$$0,1\lambda, d = 1,0\lambda \text{ e } \epsilon_c = 9,0$$

método direto - 768 tetraedros e 960 incógnitas

método iterativo - duas partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

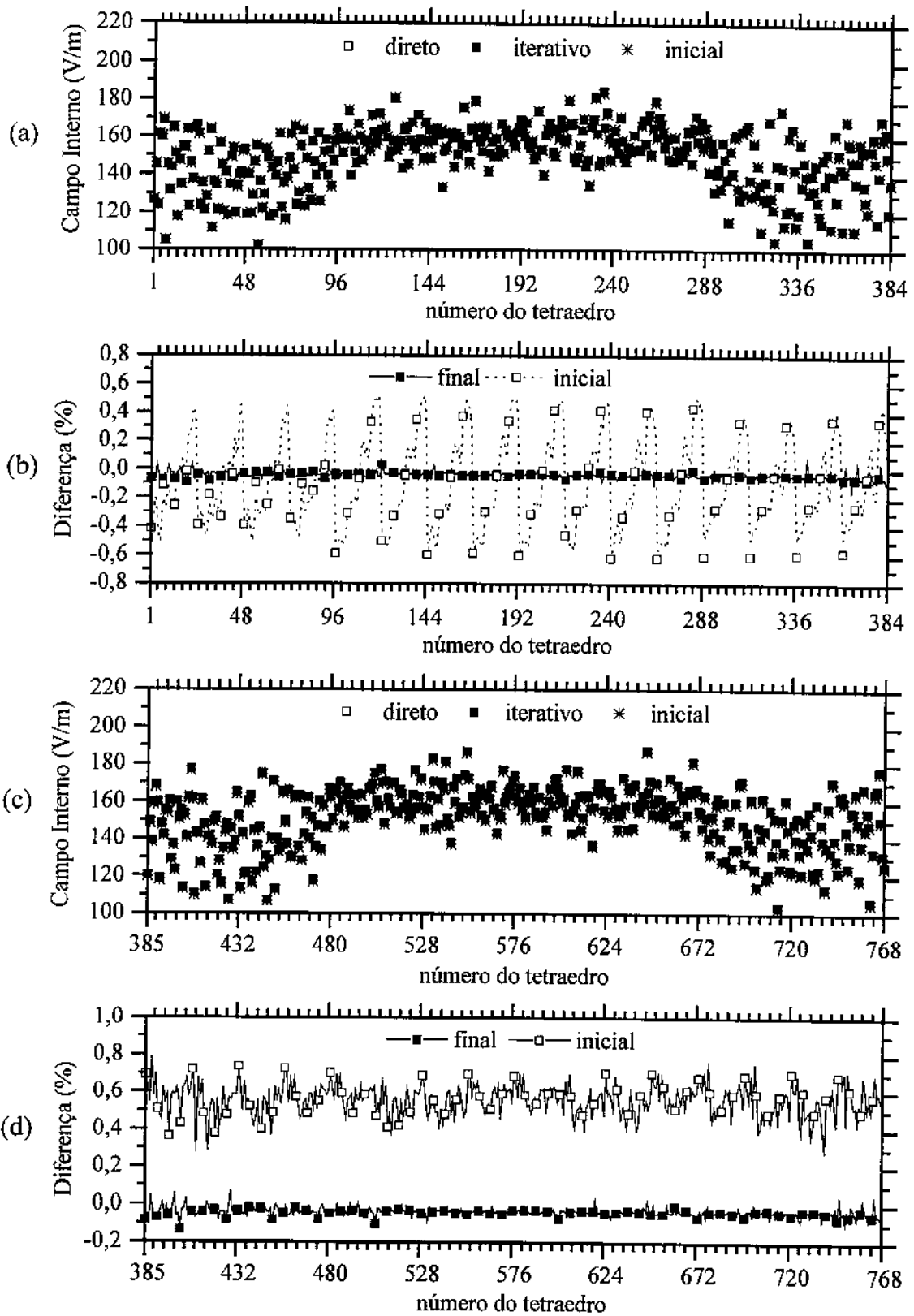


Figura 5.32 Campo interno de dois cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$.

(a) e (c) campo interno do 1^o e 2^o cubo, respectivamente

(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

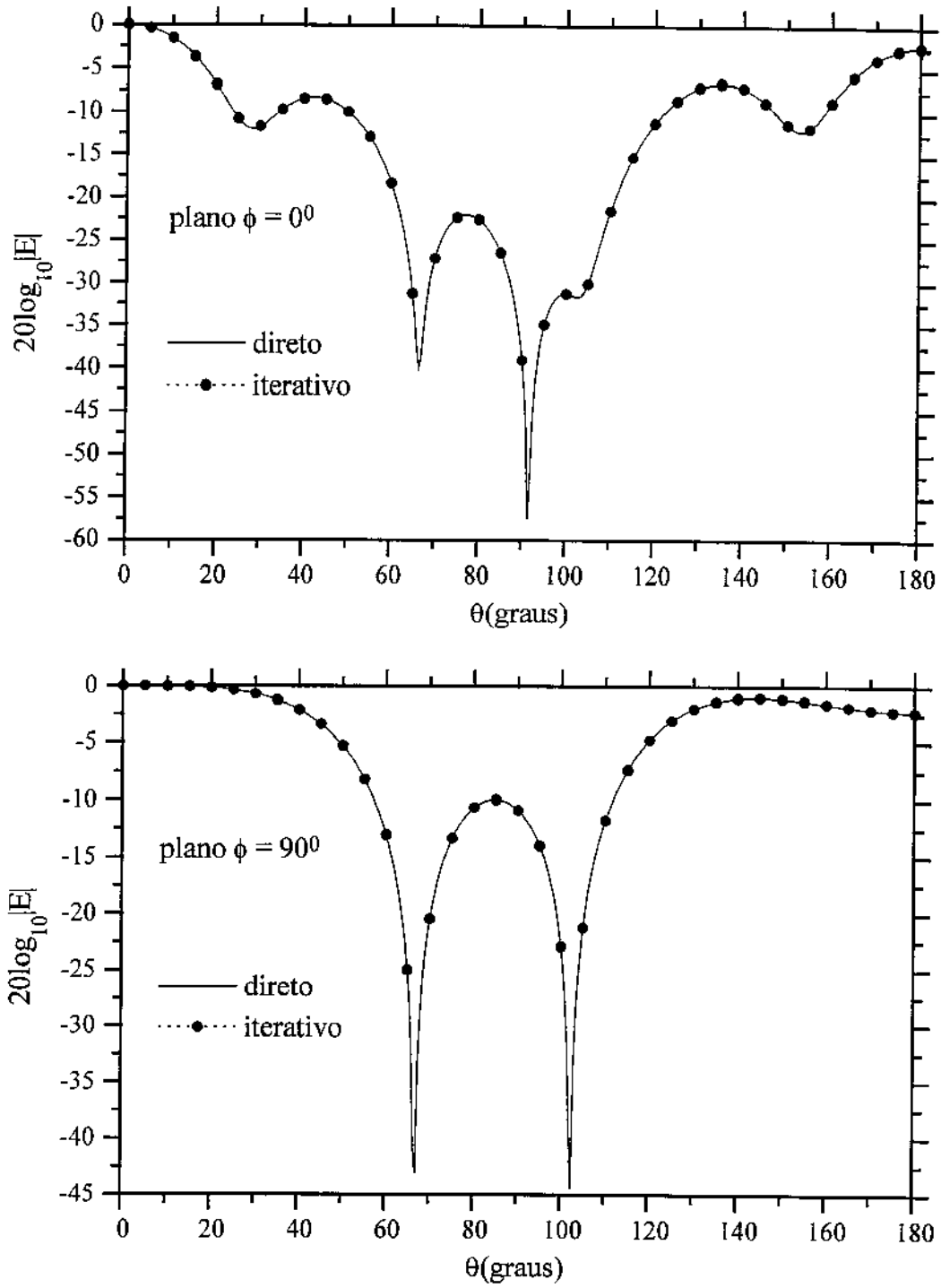


Figura 5.33 Campo espalhado por três cubos homogêneos de aresta

$$0,1\lambda, d = 1,0\lambda \text{ e } \epsilon_c = 9,0.$$

método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

método iterativo - três partes com 384 cubos e 480 incógnitas

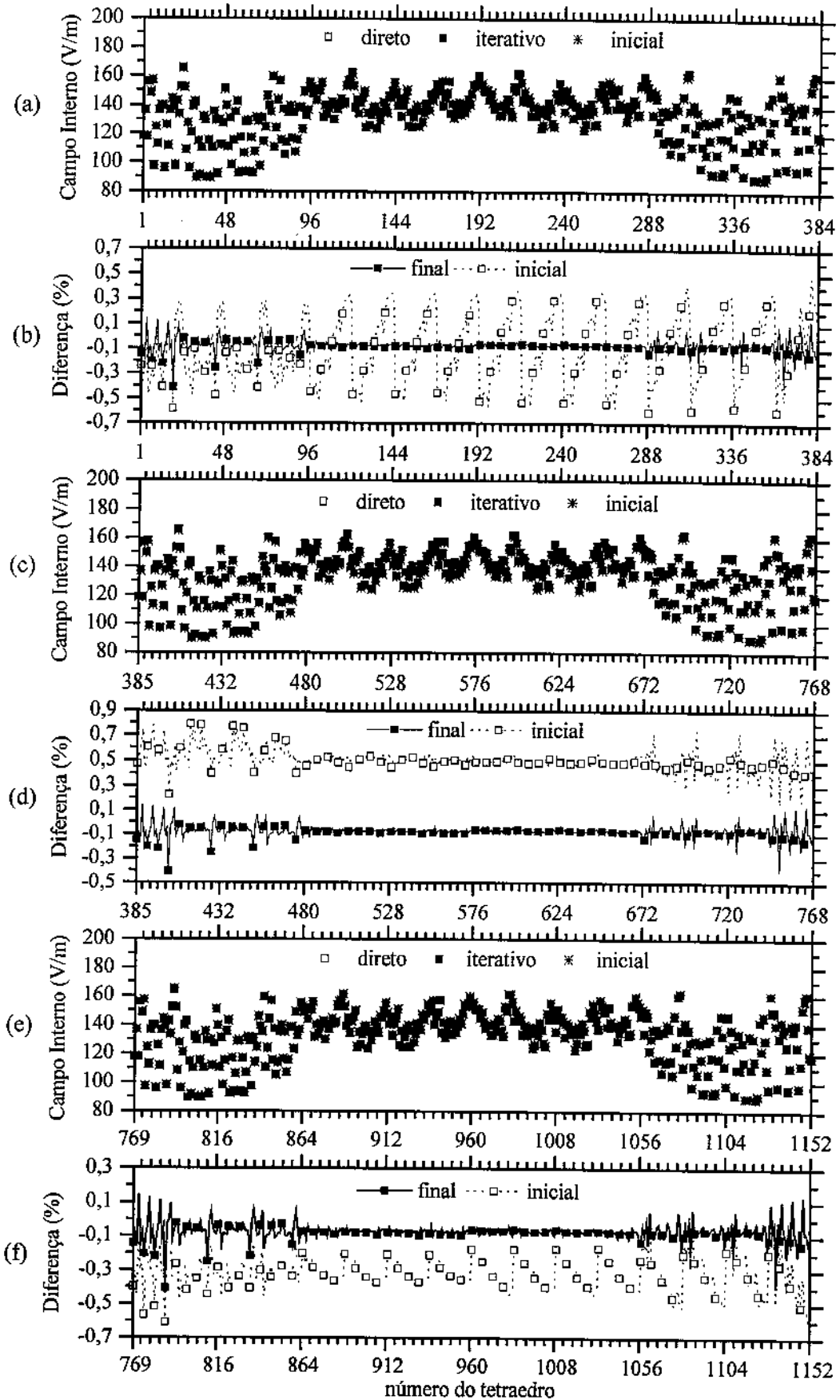


Figura 5.34 Campo interno de três cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_c = 9,0$.

(a), (c) e (f) campo interno do 1^o, 2^o e 3^o cubo, respectivamente

(b), (d) e (f) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

5.6 Campo espalhado e campo interno de um conjunto de cubos distintos pelo método iterativo

Em todos os conjuntos cada cubo tem $0,1\lambda$ de aresta, foi discretizado com 384 tetraedros gerando 480 funções LI e a distância entre cubos é $d = 1.0\lambda$. O critério de convergência foi definido com $\text{dist} = 10^{-8}$. O primeiro caso é um conjunto de dois cubos com $\varepsilon_1 = 4,0$ e $\varepsilon_2 = 9,0$, o método iterativo convergiu com 4 iterações. A Figura 5.35 mostra o resultado de campo espalhado, vemos que não podemos distinguir graficamente os dois métodos. No cálculo do campo interno, Figura 5.36, temos o mesmo comportamento observado no caso homogêneo. O campo inicial está próximo do campo total calculado pelo método direto e o método iterativo corrige o campo dando um resultado mais próximo.

No caso do conjunto com três cubos de $\varepsilon_1 = 4,0$, $\varepsilon_2 = 9,0$ e $\varepsilon_3 = 14,0$, o campo espalhado, Figura 5.37, apresenta os mesmos resultados. No cálculo do campo interno, Figura 5.38, o método iterativo chega a uma diferença de no máximo 0,1% do resultado obtido pelo método direto.

O último caso é um conjunto de quatro cubos de $\varepsilon_1 = 4,0$, $\varepsilon_2 = 8,0$, $\varepsilon_3 = 12,0$ e $\varepsilon_4 = 16,0$. O cálculo do campo espalhado é mostrado na Figura 5.39, vemos que os dois métodos dão o mesmo resultado. No cálculo do campo interno, Figura 5.40, vemos uma concordância excelente entre os dois métodos, graficamente não há diferença e podemos dizer que o método iterativo convergiu ao mesmo resultado do método direto.

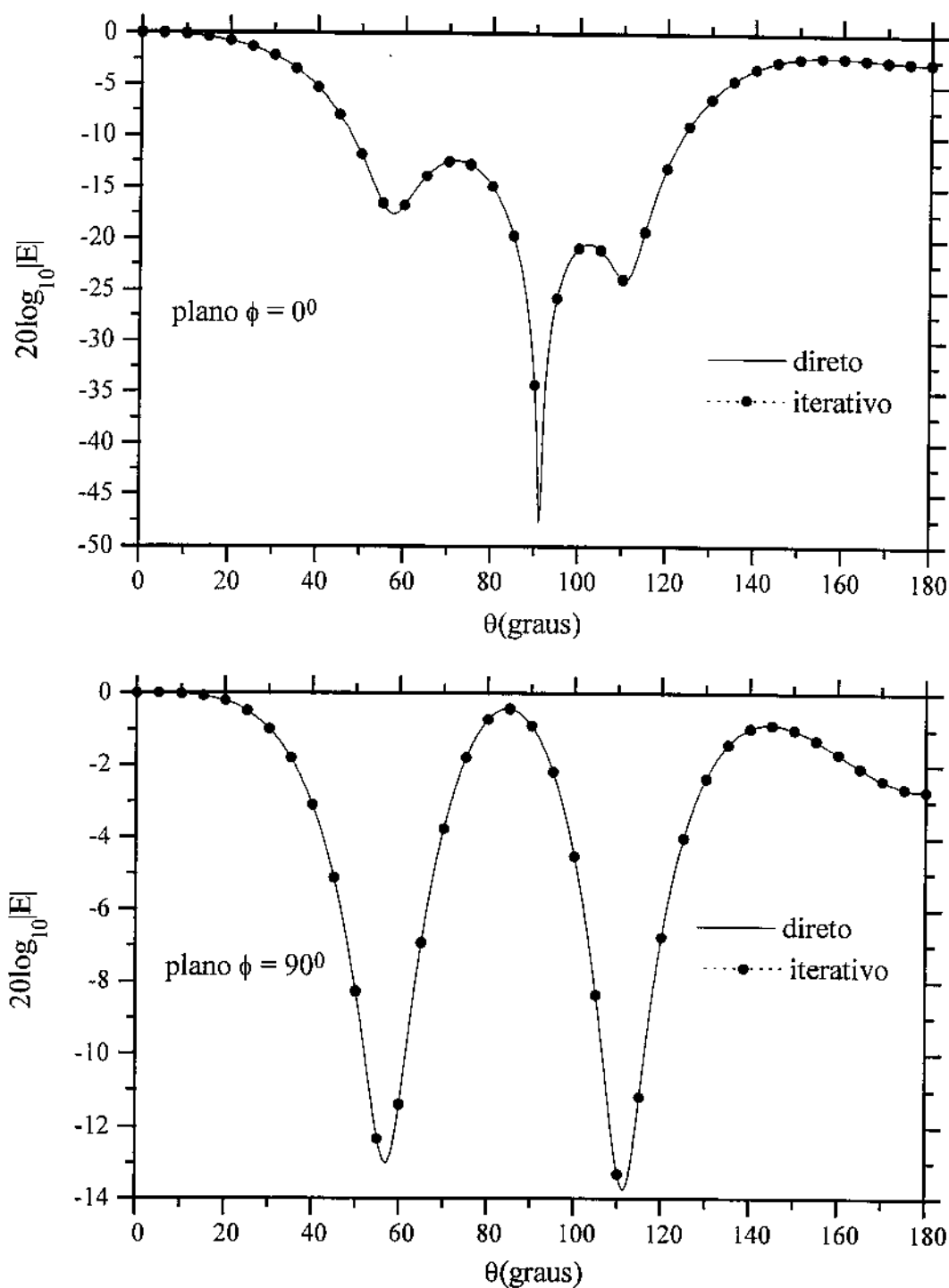


Figura 5.35 Campo espalhado por dois cubos distintos de aresta

$$0,1\lambda, d = 1,0\lambda, \epsilon_1 = 4,0 \text{ e } \epsilon_2 = 9,0$$

método direto - 768 tetraedros e 960 incógnitas

método iterativo - duas partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

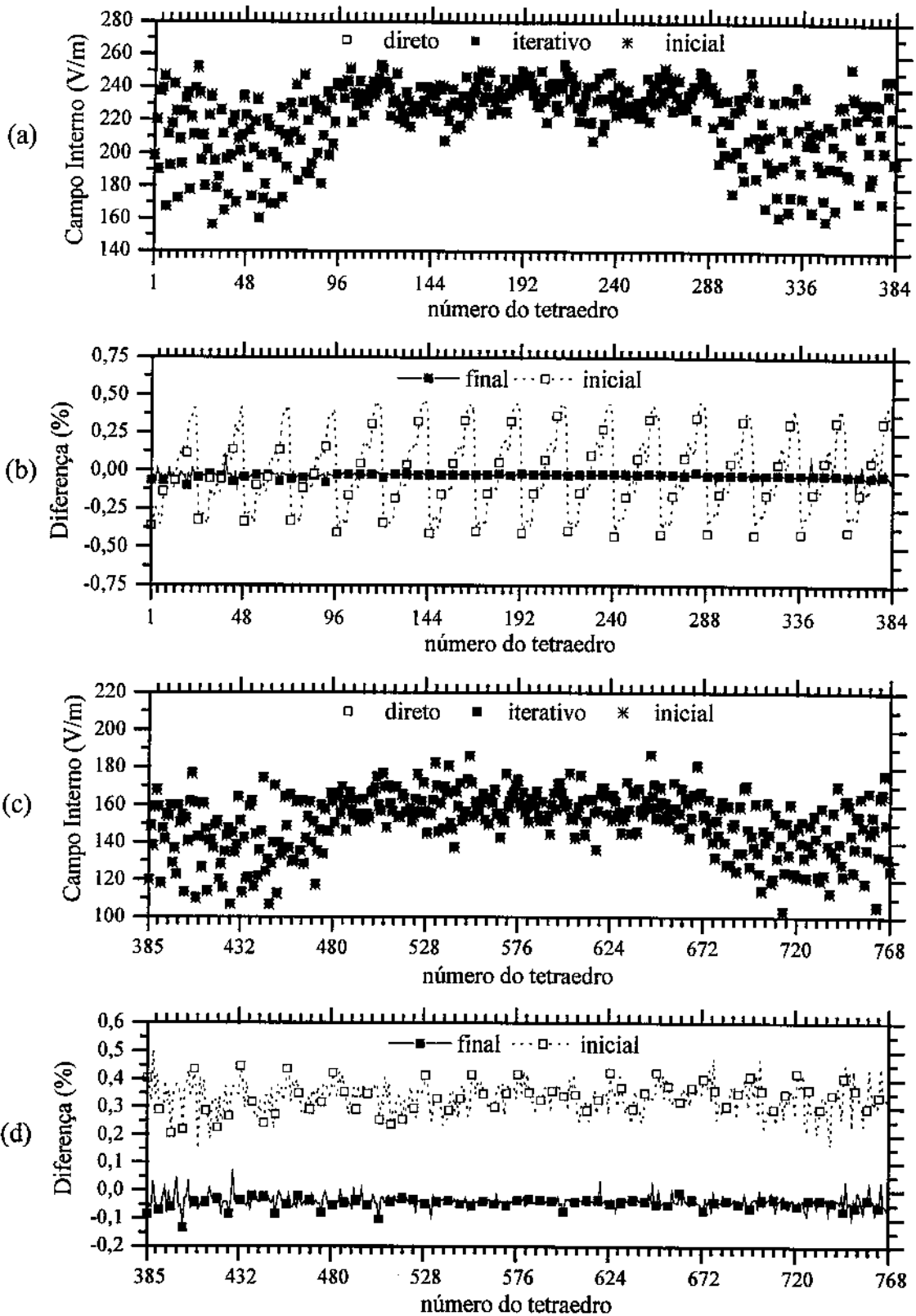


Figura 5.36 Campo interno de dois cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\epsilon_1 = 4,0$ e $\epsilon_2 = 9,0$.

(a) e (c) campo interno do 1^{o} e 2^{o} cubo, respectivamente

(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

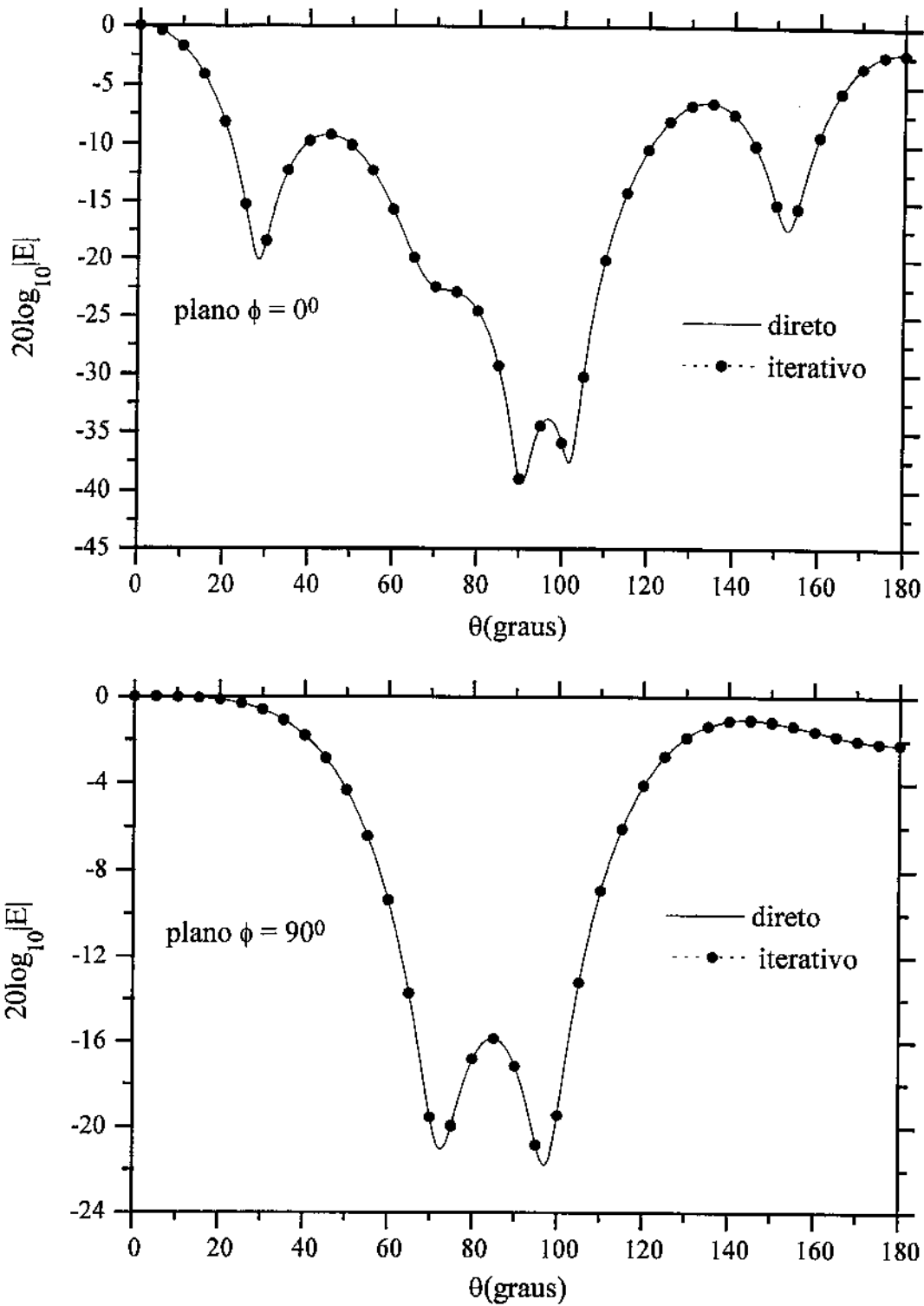


Figura 5.37 Campo espalhado por três cubos distintos de aresta

$$0,1\lambda, d=1,0\lambda, \varepsilon_1=4,0, \varepsilon_2=9,0 \text{ e } \varepsilon_3=14,0$$

método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

método iterativo - três partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

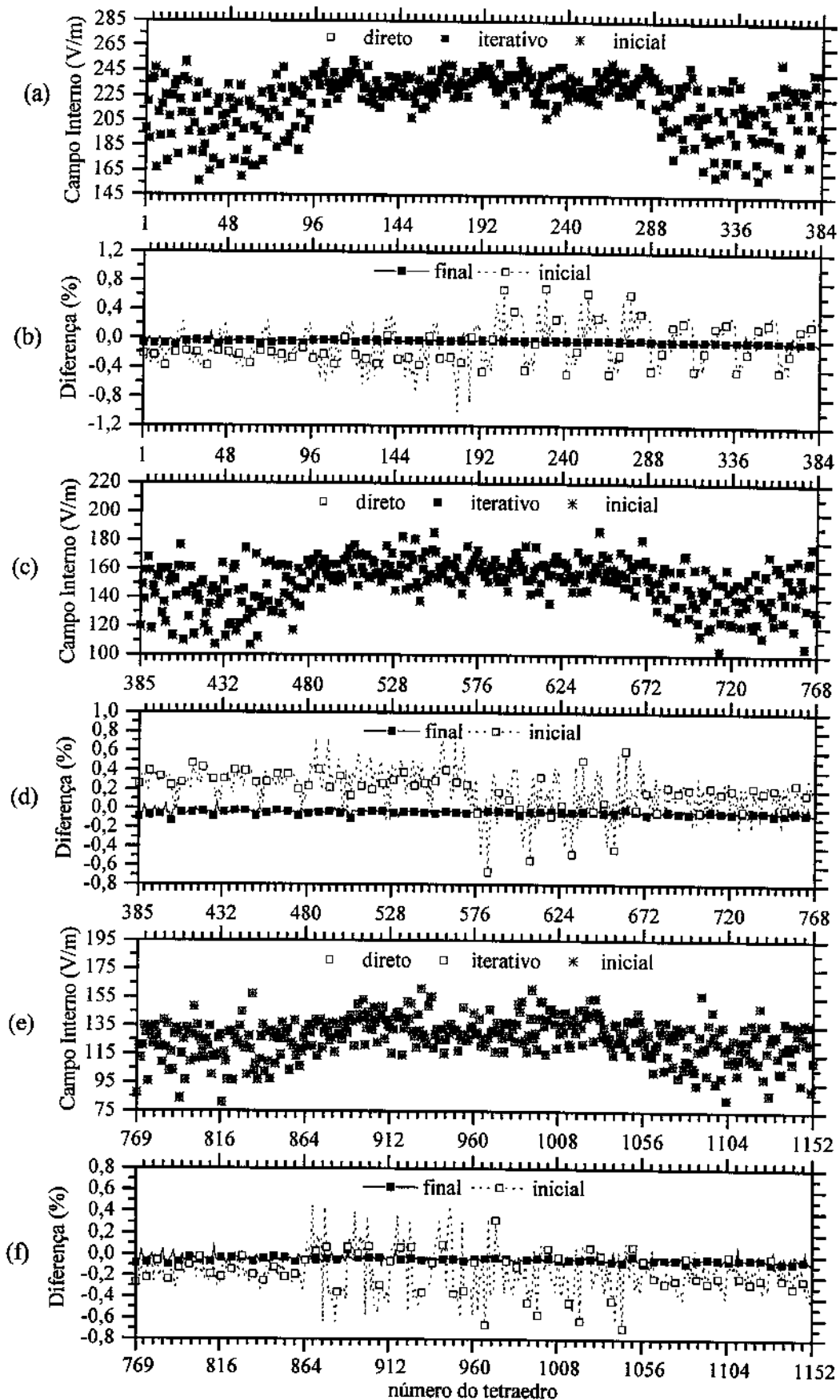


Figura 5.38 Campo interno de quatro cubos com $0,1\lambda$ de aresta e $\varepsilon_1 = 4,0$, $\varepsilon_2 = 9,0$ e $\varepsilon_3 = 14,0$.

(a), (c) e (f) campo interno do 1^o, 2^o e 3^o cubo, respectivamente

(b), (d) e (f) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

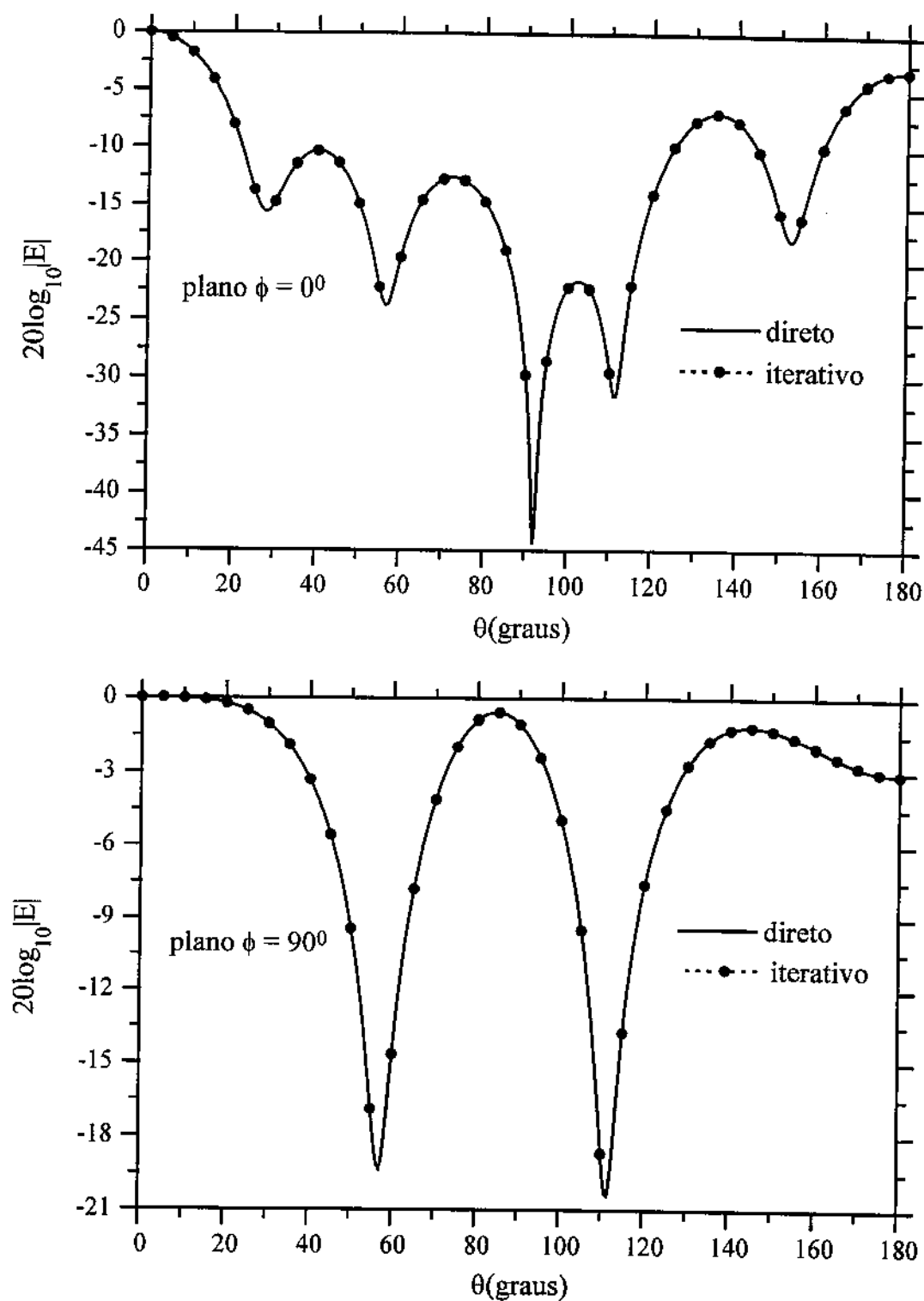


Figura 5.39 Campo espalhado por quatro cubos distintos de aresta

$$0,1\lambda, d = 1,0\lambda, \varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 8,0, \varepsilon_3 = 12,0 \text{ e } \varepsilon_4 = 16,0$$

método direto - 1152 tetraedros e 1440 incógnitas

método iterativo - quatro partes com 384 tetraedros e 480 incógnitas

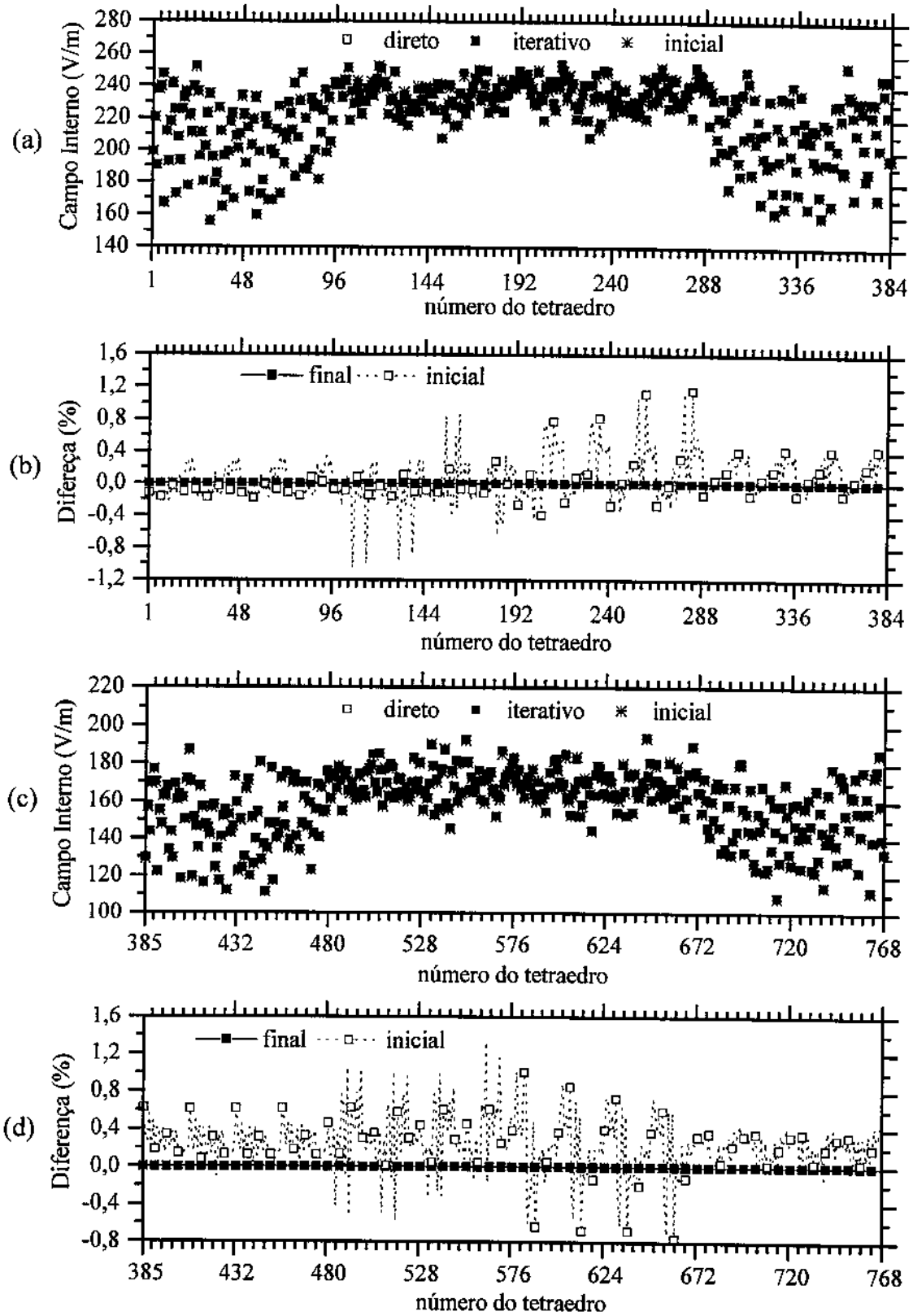


Figura 5.40(a) Campo interno de quatro cubos com $0,1\lambda$ de aresta e

$$\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 8,0, \varepsilon_3 = 12,0 \text{ e } \varepsilon_4 = 16,0.$$

(a) e (c) campo interno do 1^{o} e 2^{o} cubo, respectivamente

(b) e (d) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

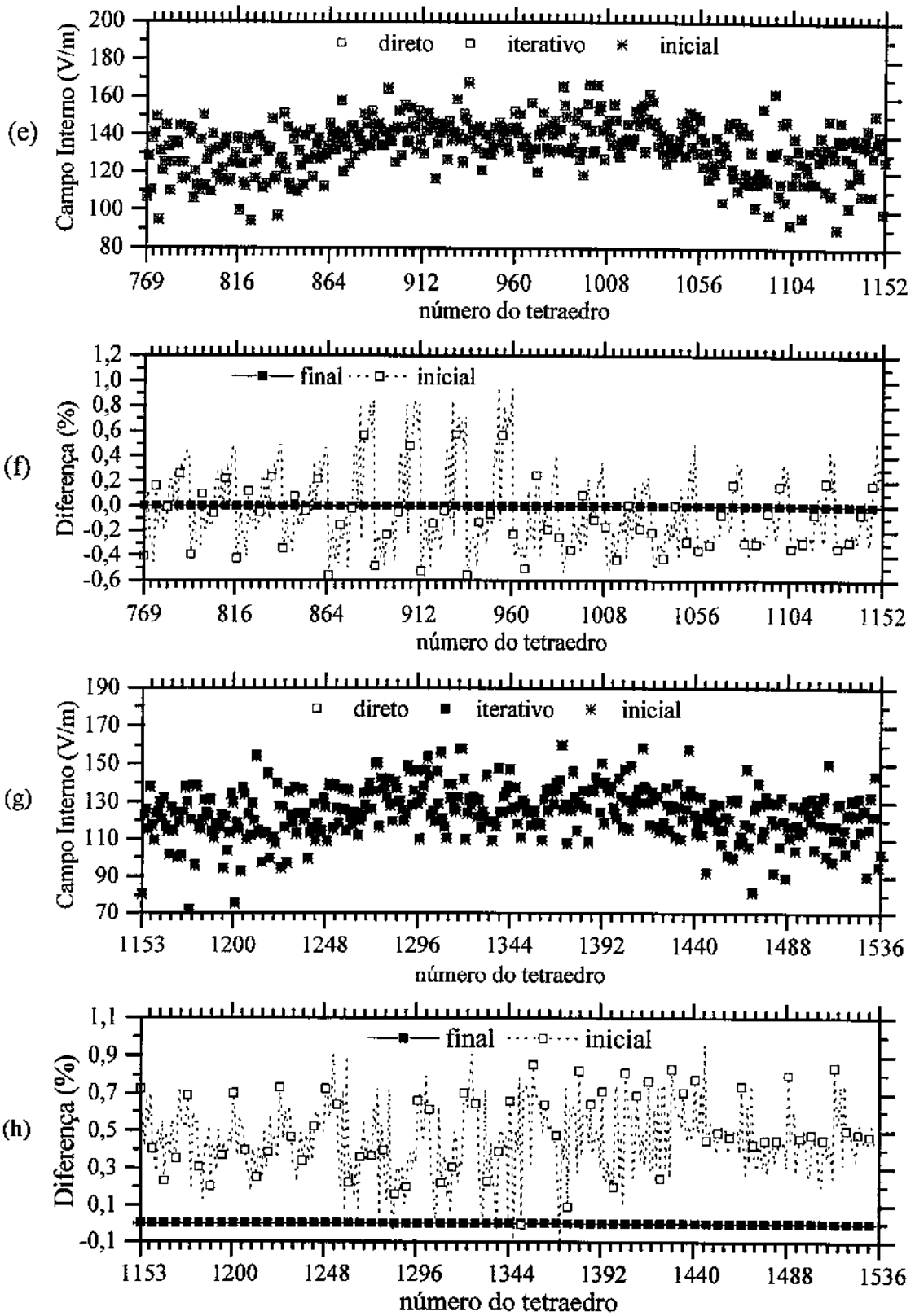


Figura 5.40(b) Campo interno de quatro cubos com $0,1\lambda$ de aresta e

$$\varepsilon_1 = 4,0, \varepsilon_2 = 8,0, \varepsilon_3 = 12,0 \text{ e } \varepsilon_4 = 16,0.$$

(e) e (g) campo interno do 3^o e 4^o cubo, respectivamente

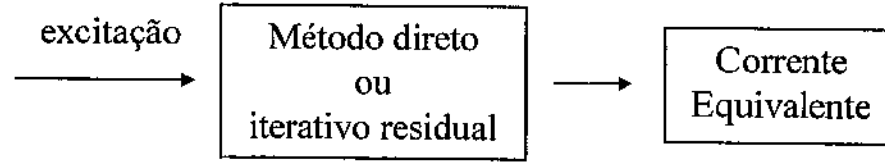
(f) e (h) diferença entre o campo direto e os campos inicial e final.

5.7 Análise do método iterativo

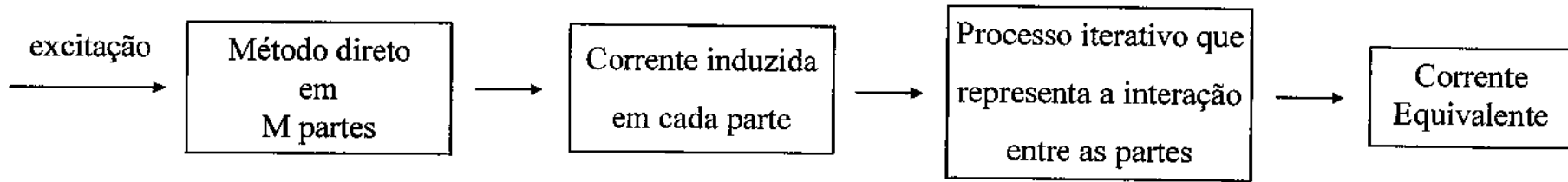
Nas seções anteriores mostramos que o método iterativo proposto gera resultados compatíveis com os obtidos com o método direto, nesta seção faremos uma análise de suas características.

Uma vantagem do método direto sobre o método iterativo baseado no vetor residual é que temos uma matriz solução que fornece a resposta a qualquer excitação, isto é, quando a característica da onda incidente muda, mantendo a frequência da original, basta multiplicar a matriz solução pelo novo vetor excitação para obter os novos coeficientes. No método iterativo residual todo o processo tem que ser repetido. No método iterativo proposto também temos matrizes solução que caracterizam o comportamento de cada região do corpo, assim, ao mudar a excitação, recalculamos o campo induzido em cada região através da multiplicação da matriz solução pelo novo vetor excitação e usamos a nova corrente induzida no processo iterativo.

Quando queremos analisar a influência de uma mudança na característica de uma parte do corpo ou, aumentar a discretização em uma região do corpo, isto implica que no método direto temos que recalcular toda a matriz solução e no método iterativo residual temos que repetir todo o processo, com um alto custo computacional. No método iterativo proposto a influência da mudança estará vinculada a um conjunto de regiões ou, da melhor maneira, a uma região somente, assim só precisamos recalcular as matrizes solução das regiões afetadas e executar o processo iterativo. Esta vantagem é devido a uma característica do método iterativo proposto, que é o cálculo da corrente equivalente a partir das correntes induzidas, em cada parte, pelo campo incidente. Na Figura 5.41 temos uma representação do processo de cálculo da corrente equivalente pelos métodos.



(a) cálculo da corrente equivalente pelo método direto ou iterativo residual



(b) cálculo da corrente equivalente pelo novo método iterativo

Figura 5.41 Processo de cálculo da corrente equivalente

Para verificar o nível de redução que se consegue na memória usada para representar a matriz, suponhamos que temos N funções de base para expandir a corrente equivalente no método direto, gerando uma matriz com N^2 elementos. Consideremos que dividimos o domínio da equação integral em M regiões com N/M funções de base para cada região, gerando M matrizes de $(N/M) \times (N/M)$ elementos cada num total de N^2/M , um fator de redução de ordem M . Vemos que podemos controlar e definir com facilidade o nível de redução de memória desejado, também podemos aumentar o número global de funções de base com redução da memória, como nos casos apresentados nas seções 5.2, 5.3 e 5.4.

A decomposição LU requer cerca de $\frac{1}{3}N^3$ execuções de laço interno com uma multiplicação e uma adição em cada [56], o tempo gasto vai ser aproximadamente proporcional a este fator. Considerando as N e N/M funções para o método direto e iterativo, respectivamente, temos que os tempos para formar as matrizes solução nos dois métodos são dados por

$$t_d^s \propto \frac{1}{3}N^3 \quad \text{matriz solução do método direto}$$

$$t_i^s \propto M \frac{1}{3}(N/M)^3 = \frac{1}{3}N^3 / M^2 \quad M \text{ matrizes solução do método iterativo}$$

então a razão entre os tempos é dada por

$$\frac{t_d^s}{t_i^s} = M^2, \quad (5.17)$$

uma redução no tempo gasto de ordem M^2 .

O tempo total gasto para calcular a solução no método direto pode ser definido, de uma maneira simplificada, como

$$t_d = t_d^e + t_d^s, \quad (5.18)$$

onde t_d^e é o tempo gasto para calcular os elementos da matriz momento. No método iterativo o tempo total gasto pode ser definido como

$$t_i = t_i^e + t_i^s + t_i^p, \quad (5.19)$$

onde t_i^p é o tempo gasto no processo iterativo de cálculo da corrente equivalente e t_i^e é o tempo gasto para calcular as M matrizes momento. Este tempo tem um limite superior dado por

$$t_i^e \leq \frac{t_d^e}{M}, \quad (5.20)$$

onde foi considerado que o tempo para calcular os elementos da matriz momento varia linearmente com o número de funções de base. Apesar disto não corresponder à realidade, esta definição serve para definir o limite superior. Substituindo as equações (5.17) e (5.20) na equação (5.19) obtemos

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{t_d^e}{M} + \frac{t_d^s}{M^2} + t_i^p \\ t_i &= \frac{t_d^e}{M} + \frac{t_d^s}{M} + t_i^p + \frac{t_d^s}{M} \left(\frac{1}{M} - 1 \right) \\ t_i &= t_m + t_i^p - \frac{t_d^s}{M} \left(1 - \frac{1}{M} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

O termo negativo na equação (5.21) representa uma medida (para menos) do ganho de tempo obtido pela divisão do domínio da equação integral em partes. Vemos também que dependendo do número de iterações o método iterativo pode ser mais econômico que o método direto, este é o caso dos conjuntos de cubos, seções 5.5 e 5.6.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido um novo conjunto de funções de base tridimensionais, definidas sobre tetraedros, que são apropriadas para representar distribuições de correntes em regiões homogêneas ou não. O uso de tetraedros permite uma melhor discretização de fronteiras curvas com menor número de elementos. Também o número de funções (incógnitas) geradas por unidade de volume é menor que com funções pulso sobre cubos e funções telhado sobre tetraedros. Os seguintes problemas foram analisados com estas funções:

- espalhamento por cubo homogêneo;
- bistatic cross section e campo interno de esfera homogênea;
- espalhamento por conjuntos de cubos de mesmo tamanho e característica elétrica;
- espalhamento por cubo não homogêneo;
- bistatic cross section e campo interno de esfera duas camadas;
- espalhamento por conjuntos de cubos de mesmo tamanho e característica elétrica diferentes.

Os resultados obtidos mostraram uma boa concordância com resultados publicados, obtidos com o uso de funções pulso e, no caso da esfera, com os gerados pela série de Mie.

Um novo método iterativo foi proposto e comparado com o método direto demonstrando a sua aplicabilidade. Sob certas condições o método iterativo é

mais rápido que o método direto. Todos os problemas analisados com o método direto foram usados para testar o novo método. Os resultados mostraram uma boa concordância entre os métodos e também mostraram que o método iterativo apresenta comportamento independente do método direto.

Alguns desenvolvimentos futuros deste trabalho são a aplicação das funções para analisar corpos com distribuições contínuas de ϵ , corpos anisotrópicos e quiral, estruturas condutor-dielétrico (ex. antenas microstrip) e calcular a absorção por estruturas biológicas. Uma extensão das funções, permitindo variações no espaço, mas mantendo a característica solenoidal em regiões homogêneas é possível. Consideremos que a função solenoidal \mathbf{J} seja multiplicada por uma função $f(x,y,z)$, então temos que a condição para que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ é dada por

$$\nabla \cdot (f \mathbf{J}) = \nabla f \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\nabla f \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla f \perp \mathbf{J}$$

o que significa que a função f só pode variar na direção perpendicular ao fluxo de corrente. Um conjunto de funções, que atendem esta condição, está sendo desenvolvido.

O método iterativo foi aplicado a uma equação integral de volume mas não se restringe a este tipo de equação. Uma clara aplicação do método é a um sistema de equações integrais acopladas, por exemplo, um sistema representando a interação entre uma antena linear e um corpo. O termo de acoplamento é a indução que cada estrutura faz na outra. Então podemos

representar o comportamento de cada estrutura por uma matriz e resolver o problema aplicando o método iterativo. O método também possui uma estrutura claramente paralela, a definição das matrizes para cada região, então pode ser implementado com uma abordagem paralela, só faltando transformar o processo iterativo num algoritmo mais eficiente do ponto de vista paralelo. Esta é uma extensão muito importante do trabalho porque a tecnologia de processamento paralelo aumenta drasticamente a velocidade, permitindo que uma classe de problemas seja resolvida de maneira eficiente.

Referências bibliográficas

- [1] R. F. Harrington, "Time Harmonic Electromagnetic Fields", McGraw-Hill 1961.
- [2] Chen K., "A Mathematical Formulation of the Equivalence Principle", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, N^o 10, pp. 1576-1581, Outubro 1989.
- [3] Andreasen M. G., "Scattering from Bodies of Revolution", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 13, pp. 303-310, 1965.
- [4] Mautz J. R. e Harrington R. F., "Radiation and Scattering from Bodies of Revolution", *Appl. Sci. Res.*, vol. 20, pp. 405-435, Junho 1969.
- [5] Rao S. M. , Wilton D. R. e Glisson A. W., "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 30, N^o 3, pp. 409-418, Maio 1982.
- [6] Mautz J. R. e Harrington R. F., "H-Field, E-Field e Combined-Field Solution for Conducting Bodies of Revolution", *Arch. Elektron. Übertragungstech*, vol. 32, N^o 4, pp. 157-164, Abril 1978.
- [7] Wu T. e Tsai L. L., "Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution", *Radio Sci.*, vol. 12, N^o 5, pp. 709-718, Setembro-Outubro 1977.
- [8] Glisson A. W. e Wilton D. R., "Simple and Efficient Numerical Methods for Problems of Electromagnetic Radiation and Scattering from Surfaces", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 28, N^o 5, pp. 593-603, Setembro 1980.
- [9] Govind S., Wilton D. R. e Glisson A. W., "Scattering from Inhomogeneous Penetrable Bodies of Revolution", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, N^o 11, pp. 1163-1173, Novembro 1984.
- [10] Medgyesi-Mitschang L. N., Eftimiu C., "Scattering from Axisymmetric Obstacles Embedded in Axisymmetric Dielectrics: The Method of Moments Solution", *Appl. Phys.* vol. 19, pp. 275-285, 1979.
- [11] Mautz J. R. e Harrington R. F., "Electromagnetic Scattering from a Homogeneous Material Body of Revolution", *Arch. Elektron. Übertragungstech*, vol. 33, pp. 71-80, 1979.
- [12] Poggio A. J. e Miller E. K., "Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems", eq. 4.17 do capítulo 4 de R. Mittra (ed.), "Computer techniques for electromagnetics", Pergamon Press, Oxford 1973.
- [13] Chang Y. e Harrington R. F., "A surface formulation for characteristic modes of material bodies", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 25, N^o 6, pp. 789-795, Novembro 1977.
- [14] Müller C., "Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves" Springer-Verlag, Berlin 1969, pp. 301, eqs. (40) e (41). (Existem sinais errados nestas equações).
- [15] Kishk A. A. e Shafai L. "Different Formulations for Numerical Solution of Single or Multibodies of Revolution with Mixed Boundary Conditions", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, N^o 5, pp. 666-673, Maio 1986.
- [16] Kishk A. A. e Shafai L. "Numerical solution of scattering from coated bodies of revolution using different integral equation formulations" *IEE Proc.* vol. 133, Pt. H, N^o 3, pp. 227-232, Junho 1986.

- [17] Kishk A. A., Bridges G. E. e Shafai L. "Integral Equation Solution of Scattering from Partially Coated Conducting Bodies of Revolution", *IEEE Trans. on Magnetics.*, vol. 27, N° 5, pp. 4283-4286, Setembro 1991.
- [18] Putman J. M. e Medgyesi-Mitschang L. N., "Combined Field Integral Equation Formulation for Inhomogeneous Two and Three-Dimensional Bodies: The Junction Problem", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 39, N° 5, pp. 667-672, Maio 1991.
- [19] , "Electromagnetic Scattering from Axially Inhomogeneous Bodies of Revolution", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, N° 8, pp. 797-806, Agosto 1984.
- [20] Huddleston P. L., Medgyesi-Mitschang L. N. e Putman J. M., "Combined field integral equation formulation for scattering by dielectrically coated conducting bodies", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, N° 4, pp. 510-520, Abril 1986.
- [21] Umashankar K., Taflove A. e Rao S. M., "Electromagnetic Scattering by Arbitrary Shaped Three-Dimensional Homogeneous Lossy Dielectric Objects", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, N° 6, pp. 758-766, Junho 1986.
- [22] Rao S. M., Cha C., Cravey R. L. e Wilkes D. L., "Electromagnetic Scattering by Arbitrary Shaped Conducting Bodies Coated with Lossy Materials of Arbitrary Thickness", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 39, N° 5, pp. 627-631, Maio 1991.
- [23] Livesay D. E. e Chen K., "Electromagnetic Fields Induced Inside Arbitrarily Shaped Biological Bodies", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 22, N° 12, pp. 1273-1280, Dezembro 1974.
- [24] Hohmann G. W., "Three-Dimensional Induced Polarization and Electromagnetic Modeling", *Geophysics*, vol. 40, , N° 2, pp. 309-324, Abril 1975.
- [25] Schaubert D. H., Wilton D. R. e Glisson A. W., "A Tetrahedral Modeling Method for Electromagnetic Scattering by Arbitrarily Shaped Inhomogeneous Dielectric Bodies", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, N° 1, pp. 77-85, Janeiro 1984.
- [26] Glisson A. W. e Wilton D. R., "Simple and Efficient Numerical Methods for Problems of Electromagnetics Radiation and Scattering from Surfaces", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 28, N° 5, pp. 593-603, Setembro 1980.
- [27] Tsai C., Massoudi H., Durney C. H. e Iskander M. F., "A Procedure for Calculating Fields Inside Arbitrarily Shaped, Inhomogeneous Dielectric Bodies Using Linear Basis Functions with the Moment Method", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, N° 11, pp. 1131-1139, Novembro 1986.
- [28] Graglia R., "The Use of Parametric Elements in the Moment Method Solution of Static and Dynamic Volume Integral Equations", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 36, N° 5, pp. 636-646, Maio 1988.
- [29] Graglia R., "Moment Method with Isoparametric Elements for Three-Dimensional Anisotropic Scatterers", *Proc. IEEE*, vol. 77, N° 5, pp. 750-760, Maio 1989.
- [30] Povinelli M. J. e Harrington R. F., "A Volume and Surface Source Integral Formulations for Electromagnetic Scattering from Printed Circuit Antennas", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 27, N° 5, pp. 4271-4274, Setembro 1991.
- [31] Popovic B. D. e Notaros B. M., "Entire-domain polynomial approximation of volume currents in the analysis of dielectric scatterers", *IEE Proc. Microw. Antennas Propag.*, vol. 142, N° 3, pp. 207-212, Junho 1995.

- [32] Harrington R. F., "Origin and Development of the Method of Moments for Fields Computation", *Applications of the Method of Moments to Electromagnetic Fields*, The SCEEE Press, 1980, capítulo 1.
- [33] Tanner R. L. e Andreasen M. G., "Numerical Solution of Electromagnetic Problems", *IEEE Spectrum*, pp. 53-61, Setembro 1967.
- [34] Mei, K. K. e Van Bladel, "Scattering by Perfectly-Conducting Rectangular Cylinders", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 11, pp. 185-192, Março 1963.
- [35] Andreasen M. G., "Scattering from Parallel Metallic Cylinders with Arbitrary Cross Section", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 12, pp. 746-754, Novembro 1964.
- [36] Richmond J. H., "Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 13, pp. 334-341, Maio 1965.
- [37] Harrington R. F., "Matrix Methods for Field Problems", *Proc. IEEE*, vol. 55, N^o 2, pp. 136-149, Fevereiro 1967.
- [38] Harrington R. F., "Field Computation by Moment Methods", Macmillan New York, 1968.
- [39] Rumsey V. H., "Reaction Concept in Electromagnetic Theory", *The Physical Review*, vol. 94, N^o 6, pp. 1483-1491, 1954.
- [40] Richmond J. H., "Radiation and Scattering by Thin-Wire Structures in the Complex Frequency Domain", Ohio State University Report 2902-10, Julho 1973, reimpresso em "Computation Electromagnetics" editado por E. K. Miller, L. Medgyesi-Mitschang e E. H. Newman, IEEE Press.
- [41] Van Den Berg, P. M., "Iterative Computational Techniques in Scattering Based Upon the Integrated Square Error Criterion", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, N^o 10, pp. 1063-1071, Outubro 1984.
- [42] Van Den Berg, P. M. e Kleinman R. E., "The Conjugate Gradient Spectral Iterative Technique for Planar Structures", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 36, N^o 10, pp. 1418-1423, Outubro 1988.
- [43] Wang J. J. H. e Dubberley J. R., "Computational of Fields in na Arbitrarily Shaped Heterogeneous Dielectric or Biological Body by an Iterative Conjugate Gradient Method", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, N^o 7, pp. 1119-1125, Julho 1989.
- [44] Wang J. J. H. e Dubberley J. R., "Computational of Electromagnetic Fields in Large Biological Bodies by na Iterative Moment Method with a Restart Technique", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, N^o 12, pp. 1918-1923, Dezembro 1989.
- [45] Kleinman R. E. e Van Den Berg, P. M., "Iterative methods for solving integral equations", *Radio Sci.*, vol. 26, N^o 1, pp. 175-181, Janeiro-Fevereiro 1991.
- [46] Wang J. J. H. "Generalized Moment Methods in Electromagnetics", *IEE Proc.* vol. 137, Pt. H, N^o 2, pp. 127-132, Abril 1990.
- [47] ———, "Generalized Moment Methods in Electromagnetics", John Wiley & Sons 1991.
- [48] Arvas E. e Harrington R. F., "Computation of the Magnetic Polarizability of Conducting Disks and the Electric Polarizability of Apertures", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 31, N^o 5, pp. 719-725, Setembro 1983.
- [49] Arvas E., Harrington R. F. e Mautz J. R., "Radiation and Scattering from Electrically Small Conducting Bodies of Arbitrary Shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, N^o 1, pp. 66-77, Janeiro 1986.

- [50] ———, “Radiation and Scattering from Electrically Small Conducting Bodies of Arbitrary Shape Above an Infinite Ground Plane”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 35, N^o 4, pp. 378-383, Abril 1987.
- [51] Mendes L. S. e Arvas E., “TE-Scattering from dense homogeneous infinite dielectric cylinders of arbitrary cross-section”, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 27, N^o 5, pp. 4295-4298, Setembro 1991.
- [52] ———, “TE-Scattering from Multiple Conducting and Dielectric Cylinders of Arbitrary Cross Section Using Solenoidal Basis Functions”, *J. Electromag. Waves Applic.*, vol. 7, N^o 8, pp. 1093-1107, 1993.
- [53] Mendes L. S., “Scattering by Conducting, Chiral, and Dielectric Cylinders of Arbitrary Cross Section: Surface and Volume Formulations”, Tese de Doutorado, Syracuse University, Novembro 1991.
- [54] Kluskens M. S. e Newman E. H., “Scattering by a Chiral Cylinder of Arbitrary Cross Section”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, N^o 9, pp. 1448-1455, Setembro 1990.
- [55] Mendes L. S., “Funções de Base Solenoidais para Aplicação em Problemas de Espalhamento por Objetos Tridimensionais”, 11^o Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, vol. II, pp. 741-744, Setembro 1993.
- [56] Carvalho S. A. e Mendes L. S., “3D Scattering of Homogeneous Dielectric Bodies Using Solenoidal Volume Basis Functions”, The 15th URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, Smolny, St. Petersburg, Russia, Maio de 1995.
- [57] ———, “A Tridimensional Solenoidal Basis Function to Analyze 3D Scattering of Homogeneous Dielectric using the Method of Moments”, 1995 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Opto-electronics Conference, Rio de Janeiro, Brasil, Julho de 1995.
- [58] Mendes L. S. e Carvalho S. A., “Scattering of EM Waves by Homogeneous Dielectrics with the use of the Method of Moments and 3D Solenoidal Basis Functions”, *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 12, N^o 06, pp. 327-331, August 1996.
- [59] Sarkar T. K., Arvas E. e Ponnappalli S., “Electromagnetic Scattering from Dielectric Bodies”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 37, N^o 5, pp. 673-676, Maio 1989.
- [60] Carvalho S. A. e Mendes L. S., “Espalhamento Eletromagnético por corpos dielétricos usando Funções de Base Solenoidais Tridimensionais”, *Telemo96* vol. 1 pp. 375-380, Curitiba, Julho de 1996.
- [61] ———, “Espalhamento de Ondas Eletromagnéticas por Corpos Dielétricos Homogêneos Tridimensionais usando-se o Método dos Momentos e Funções de Base Solenoidais”, *Cbmag 96* pp. 23-26, Ouro Preto Novembro de 1996.
- [62] ———, “Espalhamento Eletromagnético por Corpos Dielétricos usando Funções de Base Solenoidais Tridimensionais”, *J. Microwaves and Optoelectronics*, vol. 1, N^o 1, pp. 30-36, May 1997.
- [63] Carvalho S. A. e Mendes L. S., “Method of Moments with solenoidal basis functions: an approach to analyse the scattering by inhomogeneous dielectrics”, Progress in Electromagnetics Research Symposium Innsbruck, Austria, July 8-12, 1996.
- [64] ———, “Espalhamento Eletromagnético por Objetos Não Homogêneos Usando Funções de Base Solenoidais”, XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Recife, Setembro de 1997.
- [65] ———, “Electromagnetic Fields Induced Inside Human Tissue: An Analysis Using Solenoidal Basis Functions”, 11th Conference on the Computational of Electromagnetic Fields, Rio de Janeiro, Brasil, November 2-6, 1997.

- [66] Jin J. M., Volakis J. L. e Liepa V. V., "A Moment Method Solution of a Volume-Surface Integral Equations Using Isoparametric Elements and Point Matching", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, N^o 10, pp. 1641-1645, Outubro 1989.
- [67] Luenberger D. G., "Optimization by Vector Space Methods", John Wiley & Sons 1969.
- [68] Albrecht P., "Análise Numérica um curso moderno", Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. 1973.
- [69] Rubin B. J. e Daijavad S., "Radiation and Scattering from Structures Involving Finite-Size Dielectric Regions", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, N^o 11, pp. 1863-1873, Novembro 1990.
- [70] Barber P. W. e Hill S. C., "Light Scattering by Particles: Computational Methods", World Scientific 1990.
- [71] Aden A. L. e Kerker M., "Scattering of Electromagnetic Waves from Two Concentric Spheres", *J. Appl. Phys.*, vol. 22, N^o 10, pp. 1242-1246, Outubro 1951.
- [72] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. e Flannery B. P., "Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press.
- [73] P. C. Hammer, O. P. Marlowe e A. H. Stroud, "Numerical integration over simplexes and cones", *Math. Tables Aids Comp.*, vol. 10, pp. 130-137, 1956.
- [74] O. C. Zienkewicz e R. L. Taylor, "The Finite Element Method", McGraw-Hill 1989.
- [75] D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak e C. M. Butler, "Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, N^o 3, pp. 276-281, March 1984.

Apêndice A

Avaliação das integrais de volume e superfície

Na solução da equação integro-diferencial, pelo método dos momentos, aparecem integrais das correntes sobre tetraedros e de sua componente normal sobre triângulos. Como as correntes usadas na expansão são constantes em cada tetraedro, as integrais reduzem-se a integrais da função de Green sobre tetraedros e triângulos, que são dadas por

$$\int \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{|r-r'|} dv, \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{|r-r'|} ds, \quad (\text{A.2})$$

onde r define o ponto de observação e r' o ponto da fonte. Quando $r = r'$ temos uma singularidade no integrando e temos que usar um método analítico para avaliar a integral, quando $r \neq r'$ usamos um método numérico. O método numérico consiste em usar uma técnica de quadratura numérica [73] especialmente desenvolvida para integração sobre triângulos e tetraedros. Em coordenadas de área (ξ, η) e volume (ξ, η, ζ) normalizadas [74] as integrais (A.1) e (A.2) são escritas, respectivamente, por

$$\int_v \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{|r-r'|} dv = 6V \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{|r-r'|} ds = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (\text{A.4})$$

onde V é o volume e A a área das respectivas regiões de integração. O vetor r'

é definido [74], em termos das coordenadas de volume e área normalizadas, respectivamente, por

$$\mathbf{r}' = \xi \mathbf{r}'_1 + \eta \mathbf{r}'_2 + \zeta \mathbf{r}'_3 + (1 - \xi - \eta - \zeta) \mathbf{r}'_4, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{r}' = \xi \mathbf{r}'_1 + \eta \mathbf{r}'_2 + (1 - \xi - \eta) \mathbf{r}'_3, \quad (\text{A.6})$$

os vetores \mathbf{r}'_i definem os vértices do tetraedro e do triângulo em que a integração é feita, Figura A.1. As integrais a direita das equações (A.3) e (A.4) são aproximadas, respectivamente, por

$$6V \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx 6V \sum_{i=1}^5 w_i g(\mathbf{p}_i), \quad (\text{A.7})$$

$$2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx 2A \sum_{i=1}^7 w_i g(\mathbf{p}_i), \quad (\text{A.8})$$

onde os pontos \mathbf{p}_i e os respectivos pesos w_i são definidos na Tabela A.1 e $g(\mathbf{p}_i)$ é a avaliação do integrando no ponto \mathbf{p}_i .

Para avaliar as integrais das equações (A.1) e (A.2) quando $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0$ primeiro adicionamos e subtraímos a singularidade em cada integrando, assim temos

$$\int_v \frac{e^{-jR\kappa_0}}{R} dv = \int_v \frac{e^{-jR\kappa_0} - 1}{R} dv + \int_v \frac{1}{R} dv, \quad (\text{A.9})$$

$$\int_s \frac{e^{-jR\kappa_0}}{R} ds = \int_s \frac{e^{-jR\kappa_0} - 1}{R} ds + \int_s \frac{1}{R} ds. \quad (\text{A.10})$$

A primeira integral do lado direito das equações (A.9) e (A.10) tem o integrando limitado para todo ponto de observação e, portanto, pode ser

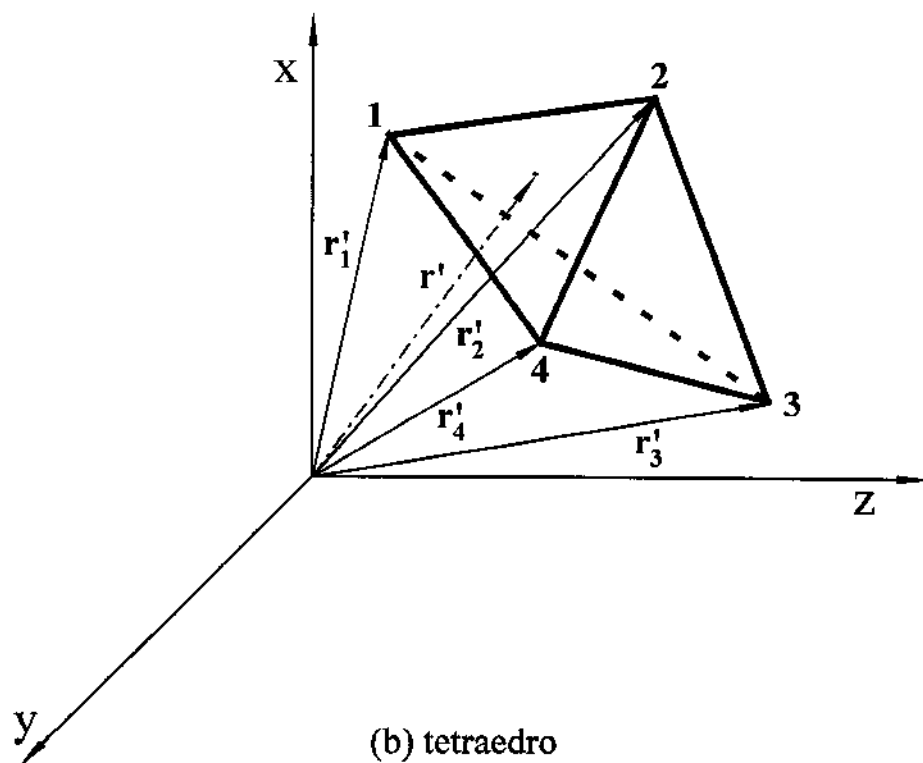
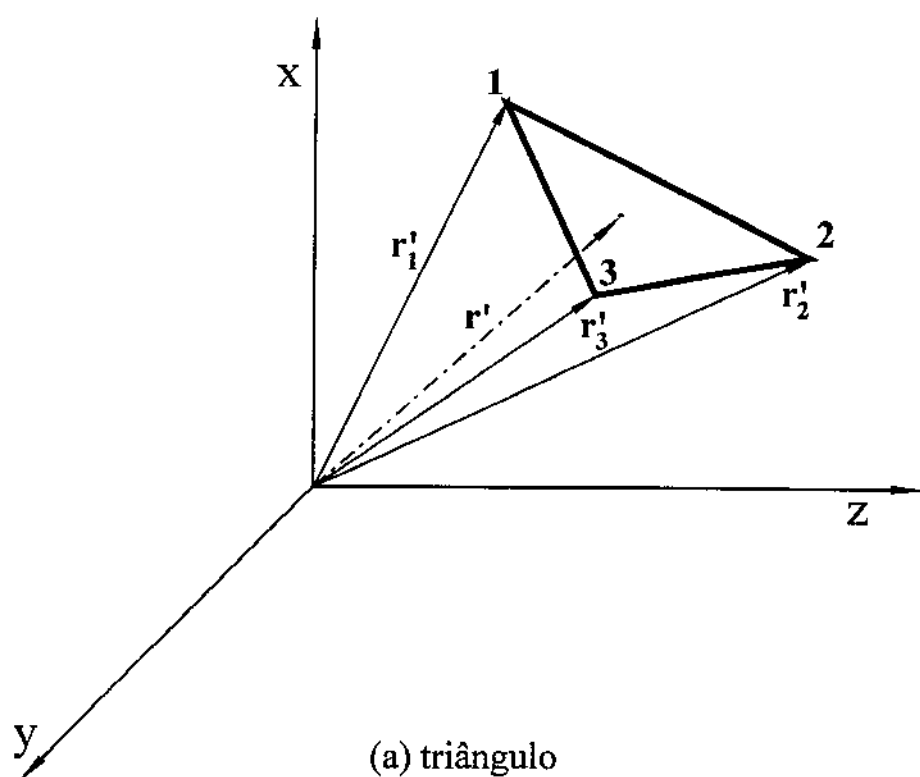


Figura A.1 Vetores de definição das regiões de integração

integrada numericamente usando-se as equações (A.7) e (A.8), respectivamente. A segunda integral do lado direito das equações (A.9) e (A.10) são integradas analiticamente pelo método apresentado em [75], as expressões finais são

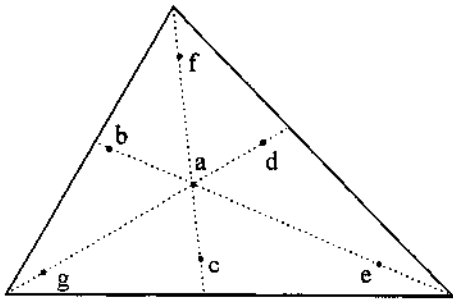
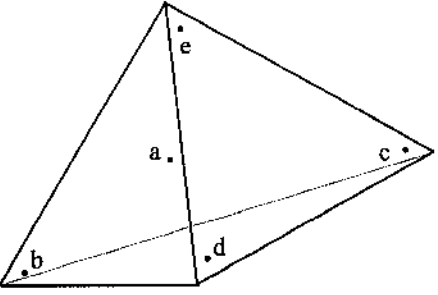
$$\int \frac{1}{R} ds = \sum_{i=1}^3 \hat{P}_i^o \cdot \hat{u}_i \left[P_i^o \ln \frac{P_i^+ + l_i^+}{P_i^- + l_i^-} \right], \quad (\text{A.11})$$

onde \hat{P}_i^o e \hat{u}_i são vetores unitários, as outras quantidades estão ilustradas na Figura A2.

$$\int \frac{1}{R} dv = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 d_j \left\{ \sum_{i=1}^3 \hat{P}_{ij}^o \cdot \hat{u}_{ij} \left[|d_j| \left(\tan^{-1} \frac{P_{ij}^o l_{ij}^+}{(R_{ij}^o)^2 + |d_j| R_{ij}^+} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \tan^{-1} \frac{P_{ij}^o l_{ij}^-}{(R_{ij}^o)^2 + |d_j| R_{ij}^-} \right) - P_{ij}^o \ln \frac{R_{ij}^+ + l_{ij}^+}{R_{ij}^- + l_{ij}^-} \right] \right\}, \quad (\text{A.12})$$

o índice j indica a face do tetraedro e o índice i o lado desta face, as quantidades estão ilustradas na Figura A3.

Tabela A1 Fórmula de integração numérica para triângulo e tetraedro

ordem	região	Erro	pontos (p_i)	coordenadas	pesos (w_i)
5	 <p> $\alpha_1 = 0.0597158717$ $\beta_1 = 0.4701420641$ $\alpha_2 = 0.7974269853$ $\beta_2 = 0.1012865073$ </p>	$O(h^6)$	a b c d e f g	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $(\alpha_1, \beta_1, \beta_1)$ $(\beta_1, \alpha_1, \beta_1)$ $(\beta_1, \beta_1, \alpha_1)$ $(\alpha_2, \beta_2, \beta_2)$ $(\beta_2, \alpha_2, \beta_2)$ $(\beta_2, \beta_2, \alpha_2)$	0.225 0.1323941527 0.1323941527 0.1323941527 0.1259391805 0.1259391805 0.1259391805
3		$O(h^4)$	a b c d e	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$	-4/5 9/20 9/20 9/20 9/20

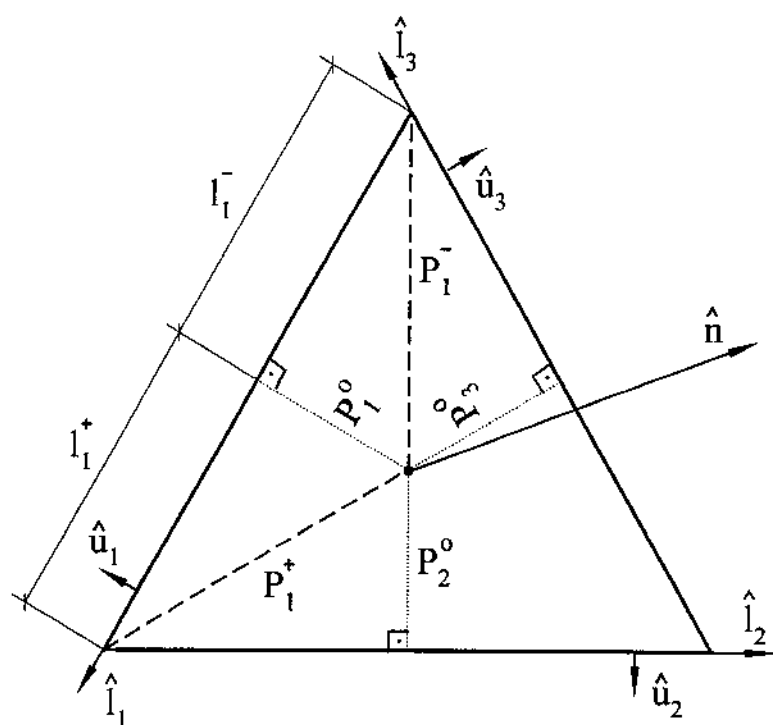
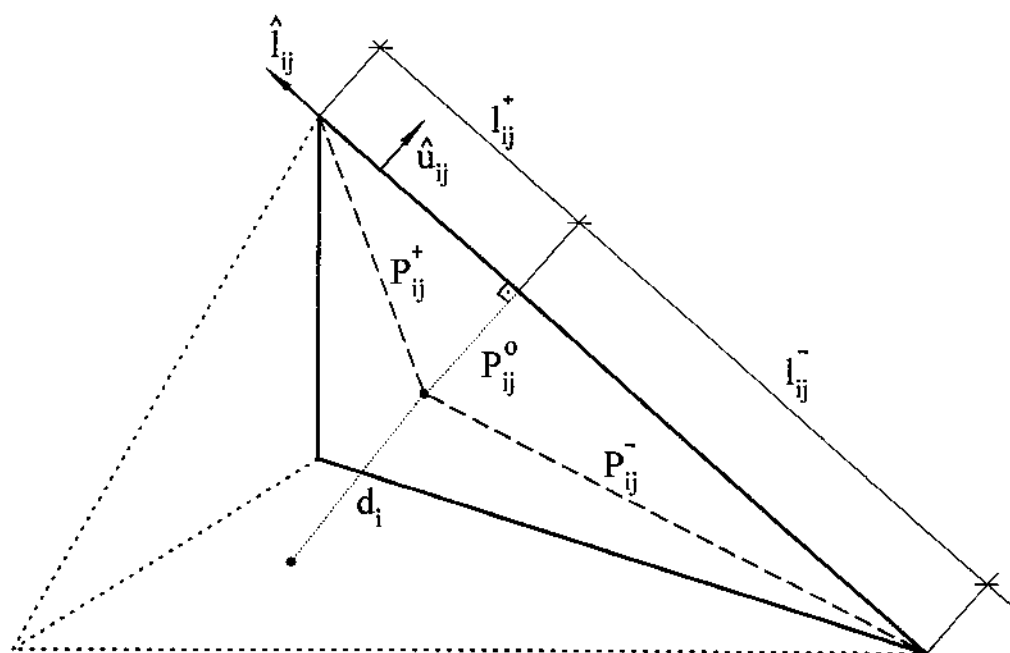


Figura A.2 Definição das quantidades da equação (A.11)



$$R_{ij}^{\pm} = \sqrt{(P_{ij}^{\pm})^2 + d_i^2} \quad R_{ij}^0 = \sqrt{(P_{ij}^0)^2 + d_i^2}$$

Figura A.3 Definição das quantidades da equação (A.12)

Apêndice B

Primitivas de discretização

Para a discretização de um corpo precisamos usar unidades básicas que definem tetraedros, estas unidades são denominadas de *primitivas de discretização*.

A unidade básica usada para discretizar o corpo é um conjunto de oito pontos no espaço que representamos por um cubo, como mostrado na Figura B.1(a). Podemos deformar este cubo para adequar a várias configurações no espaço, como mostrado nas Figuras B.1(b) e B.1(c). Com o conjunto de oito pontos determinados podemos definir um conjunto de cinco ou seis tetraedros.

No caso de cinco tetraedros temos duas possibilidades de discretização, mostradas nas Figuras B.2 e B.3. Cada possibilidade define um tipo de discretização e um corpo é discretizado usando-se os dois tipos, de forma a manter a conexão entre todos os tetraedros, Figura B.4.

O conjunto de seis tetraedros mostrado na Figura B.5 permite que um corpo seja discretizado com um só tipo de bloco, ao preço de se aumentar o número de tetraedros e com isto o número de funções geradas. Em todas os casos apresentados nesta tese, usamos seis tetraedros por bloco, devido a facilidade de ser um só tipo de unidade.

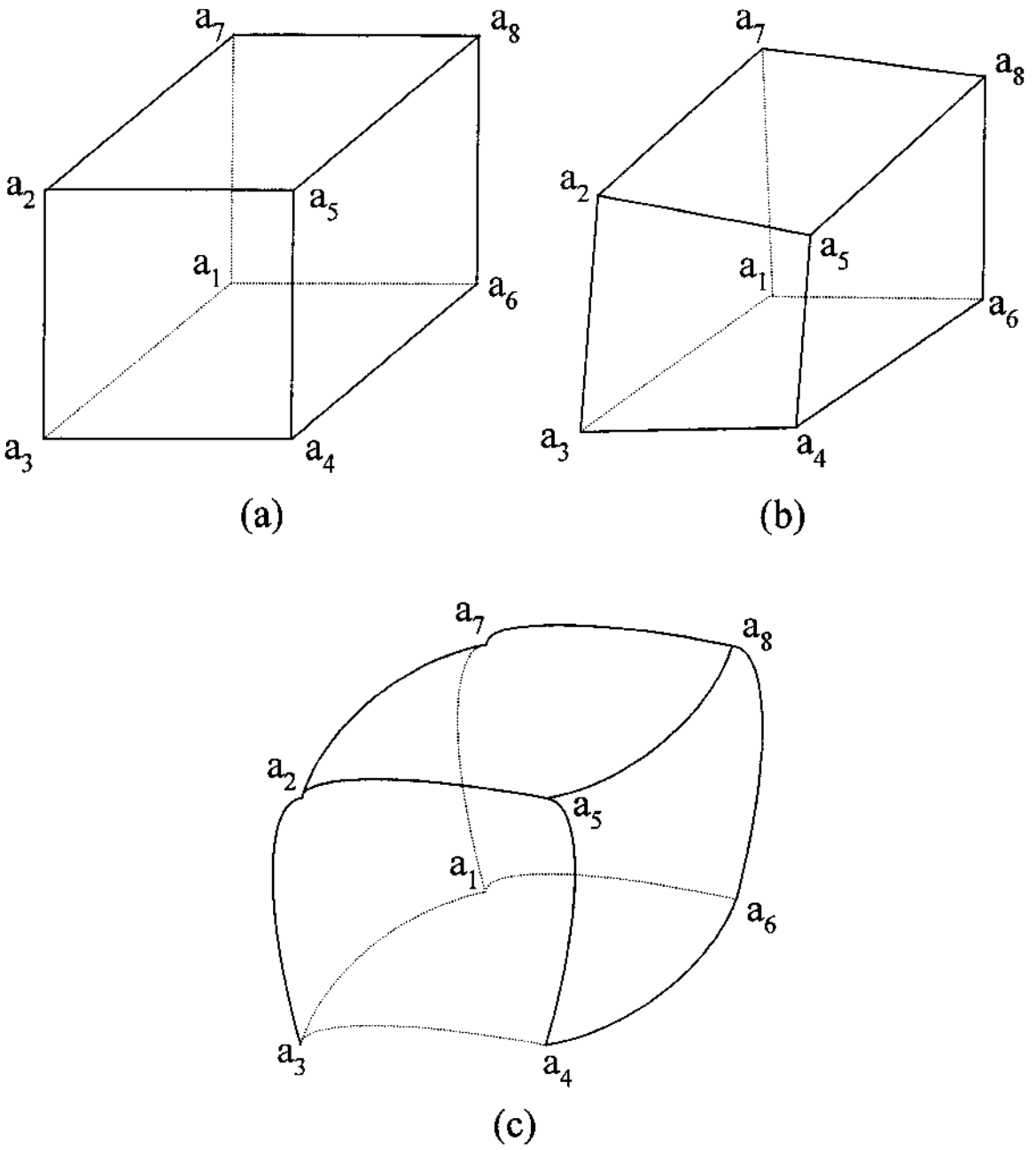


Figura B.1 Conjunto de oito pontos no espaço usados na tetraedrização

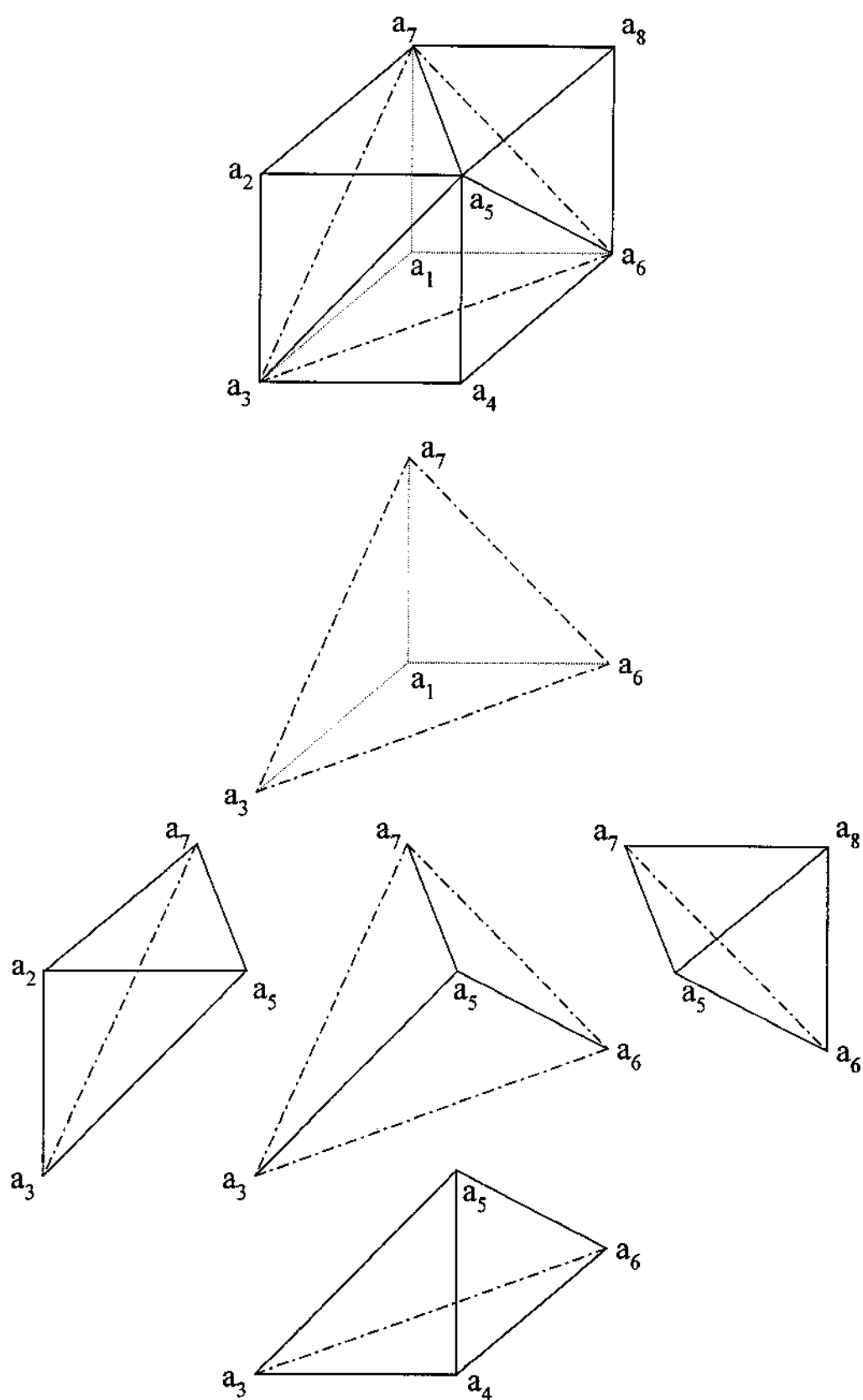


Figura B.2 Cubo discretizado por cinco tetraedros - discretização tipo 1

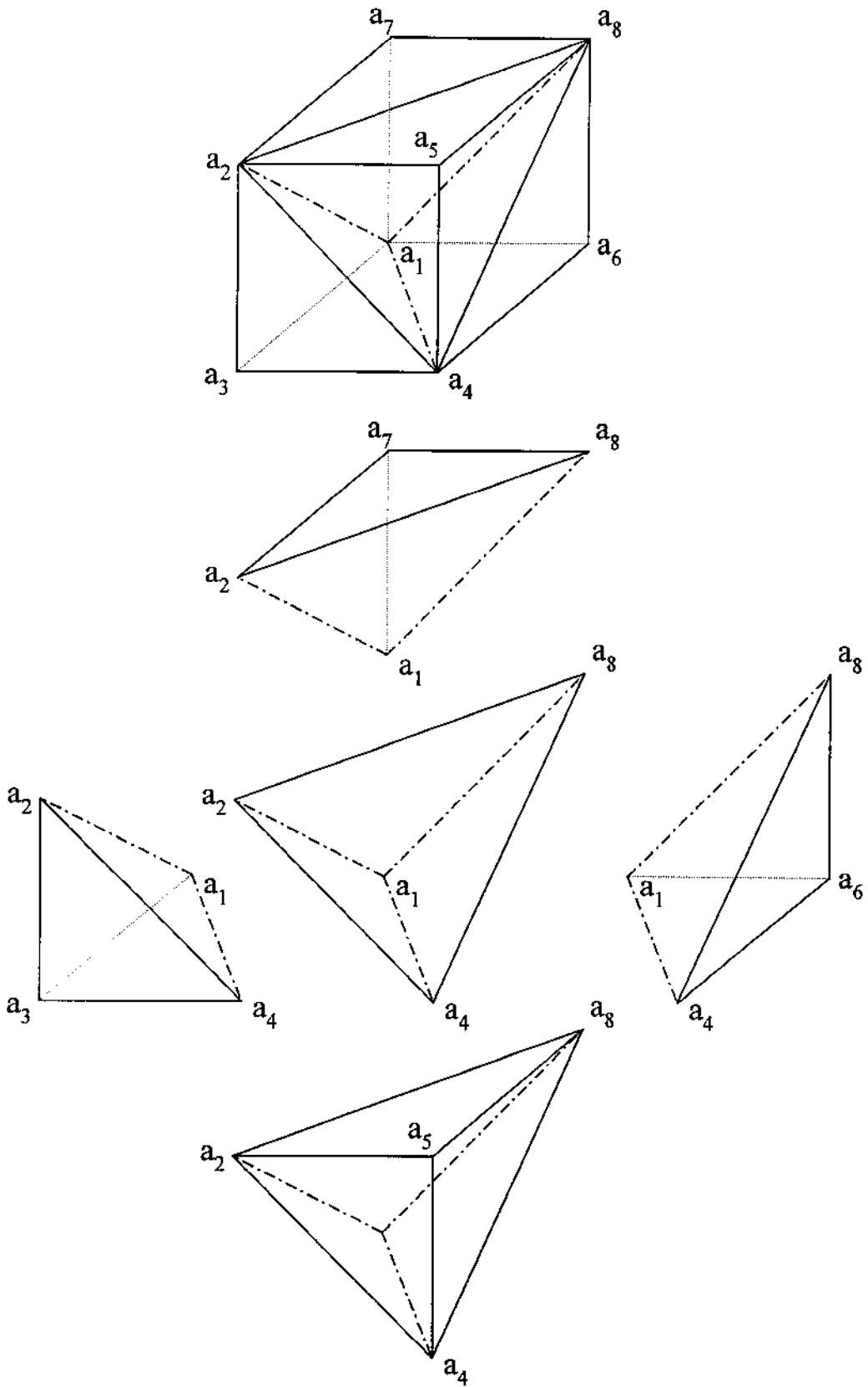


Figura B.3 Cubo discretizado por cinco tetraedros - discretização tipo 2

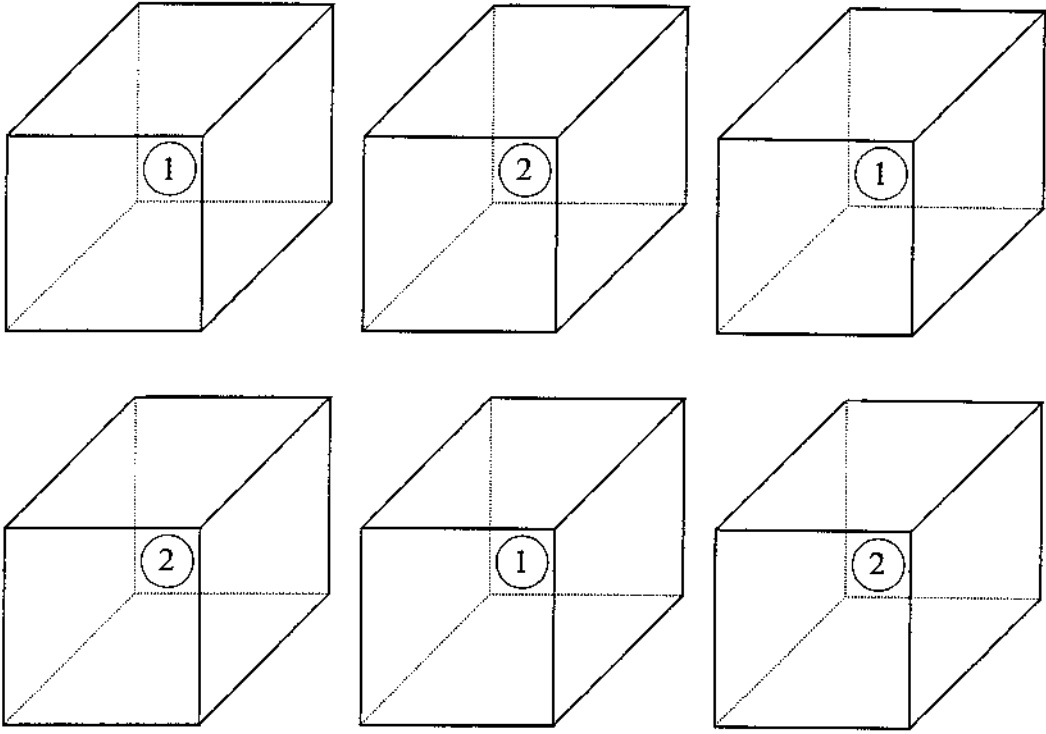


Figura B.4 Forma de usar as discretizações do tipo 1 e 2

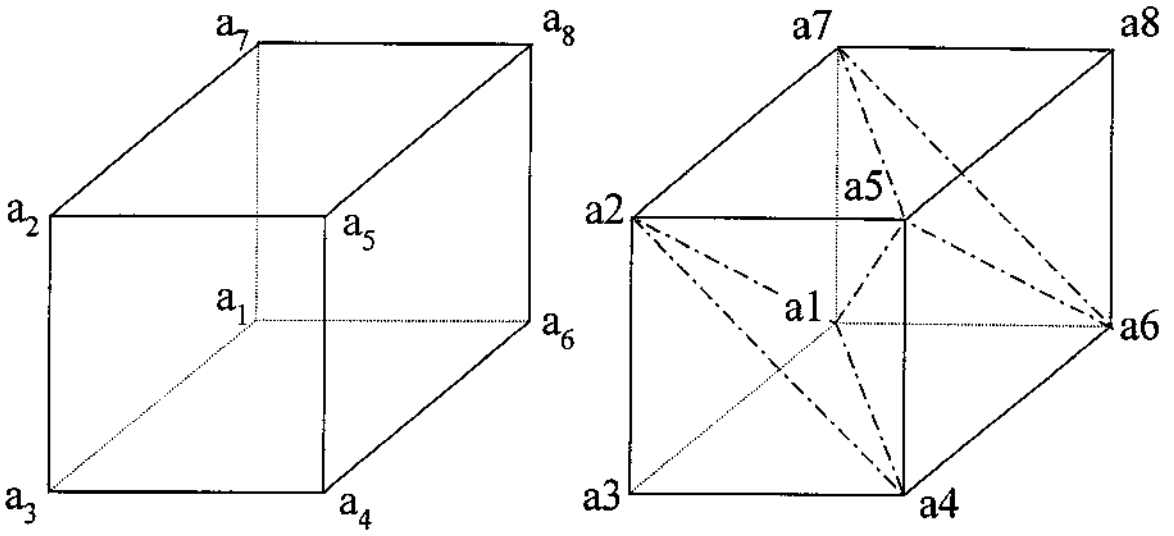


Figura B.5 Cubo discretizado por seis tetraedros.

Apêndice C

Discretização da esfera

A esfera é discretizada dividindo o raio r , o ângulo ϕ e o ângulo θ em N , L e M partes, respectivamente. Na Figura C.1 temos a ilustração de como são definidos os pontos necessários para a discretização da esfera. Os passos em r , θ e ϕ são definidos por

$$\Delta r = \frac{r}{N}, \quad (\text{C.1})$$

$$\Delta \theta = \frac{\pi}{M}, \quad (\text{C.2})$$

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{L}. \quad (\text{C.3})$$

Para que os tetraedros tenham as arestas com comprimentos próximos, a condição $\Delta \theta = \Delta \phi$ deve ser satisfeita, então, das equações (C.2) e (C.3), temos

$$L = 2M \quad (\text{C.4})$$

Na implementação do algoritmo é usado o número de pontos em lugar do número de partes. Os números de pontos N_p , M_p e L_p são dados, em relação ao número de partes N , M e L , por

$$N_p = N + 1, \quad (\text{C.5})$$

$$M_p = M + 1, \quad (\text{C.6})$$

$$L_p = L. \quad (\text{C.7})$$

Substituindo as equações (C.6) e (C.7), na equação (C.4), encontramos

$$L_p = 2M_p - 2, \quad (\text{C.8})$$

que é a relação entre os números de pontos em θ e ϕ para que a condição $\Delta\theta = \Delta\phi$ seja satisfeita.

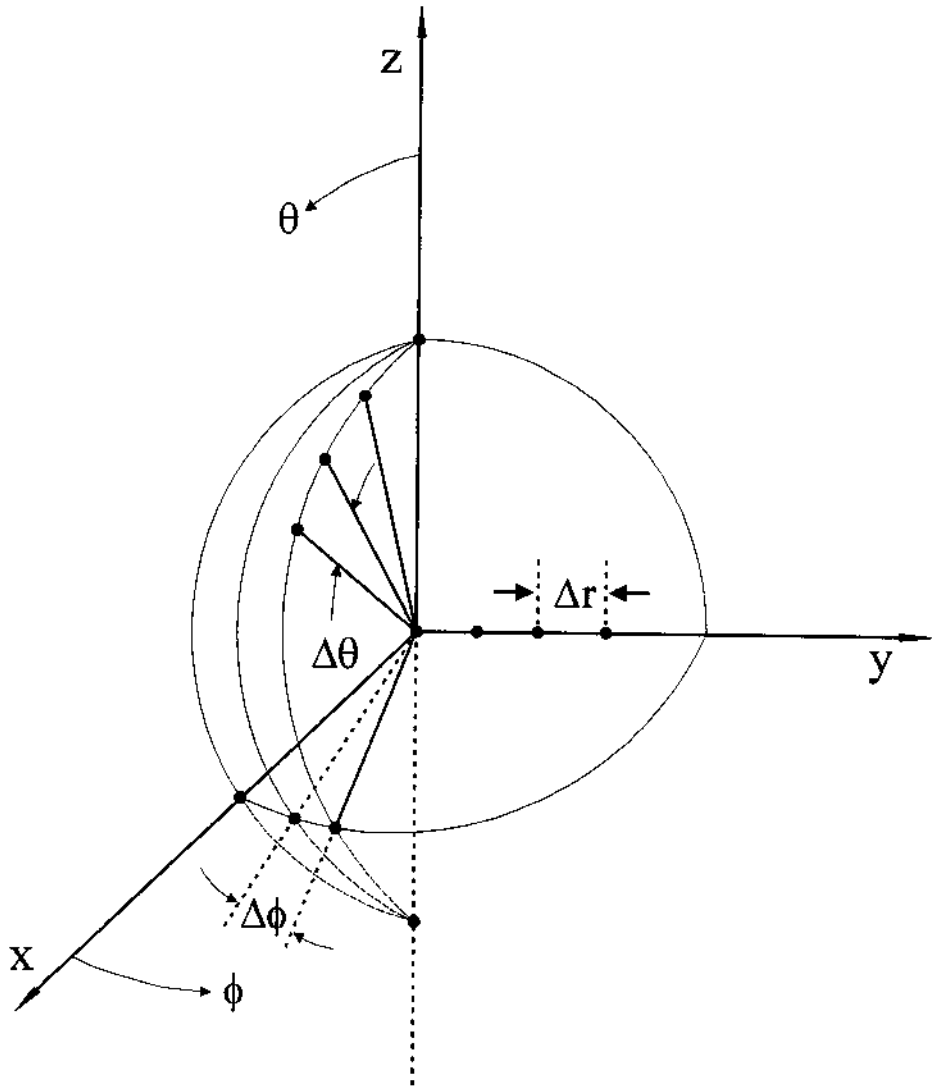
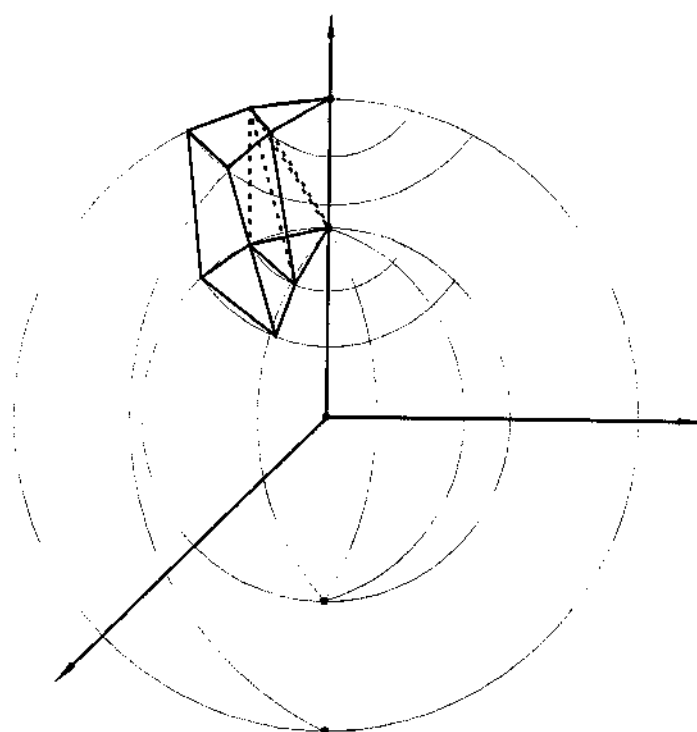
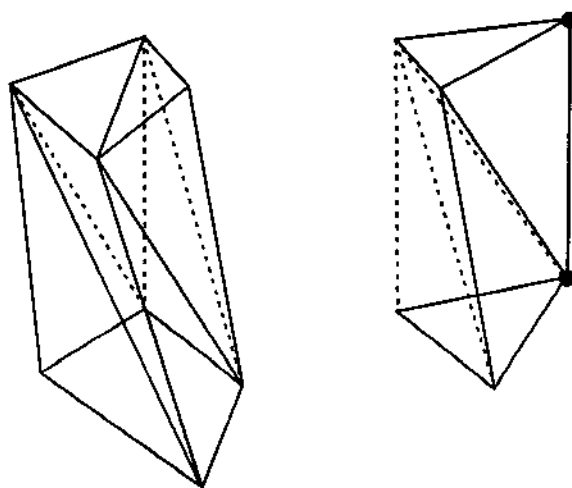


Figura C.1 Definição dos pontos para a discretização da esfera

Na Figura C.2(a) mostramos duas camadas consecutivas de uma esfera, discretizada com dois tipos de setores. Para o setor com oito pontos, Figura C.2(b), usamos a primitiva mostrada na Figura B.5, e, para o setor com seis pontos, colocamos três tetraedros, como mostrado na Figura C.2(c).



(a) discretização entre duas camadas



(b)

(c)

duas estruturas de discretização

Figura C.2 Discretização entre duas camadas da esfera

Na Figura C.3 mostramos a discretização entre a primeira camada da esfera e o seu centro. Na figura estão definidos os tipos de setores em que são definidos os tetraedros.

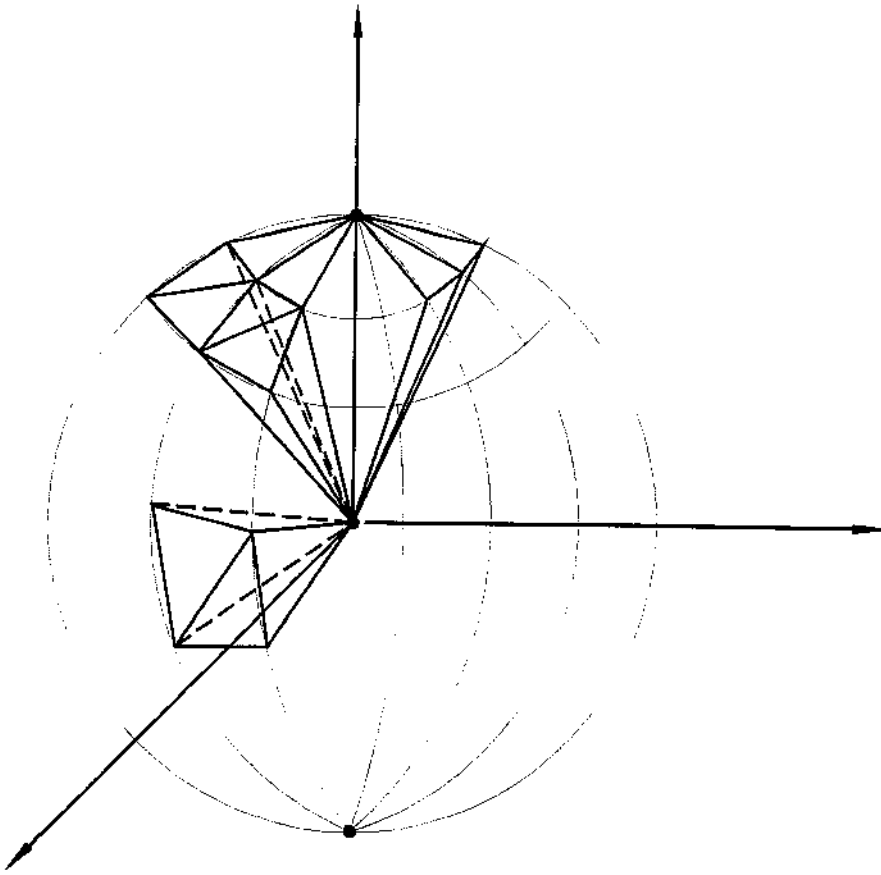


Figura C.3 Discretização entre a primeira camada e o centro da esfera

Na tabela abaixo temos as definições dos números de pontos em r , θ e ϕ , para os casos das esferas usadas nesta tese.

Tabela C.1 Definições dos números de pontos em r , θ e ϕ

Número de pontos em			número de tetraedros				
R	θ	ϕ	1ª camada	2ª camada	3ª camada	4ª camada	total
2	7	12	130	390	-	-	520
3	10	18	304	912	912	-	2128
4	8	14	180	540	540	540	1800
2	8	16	150	450	-	-	600