



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Controle Robusto de Sistemas Discretos com Alocação de Pólos

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Claudio Kiyoshi Umezu *in/2*
Engenheiro Eletricista - UNESP - Ilha Solteira

em 24 de junho de 1994 perante a banca examinadora

Pedro Luis Dias Peres *in* - Orientador

Alexandre Trofino Neto - DEE/UFSC

José Claudio Geromel - FEE/UNICAMP

Este exemplar corresponde à defesa da tese
defendida por **CLAUDIO KIYOSHI UMEZU**
Julgadora em 24 / 06 / 94
Pedro L. Dias
Orientador



*Aos meus pais:
Francisco e Luzia.*

“ Um homem vivia na beira da estrada e vendia cachorros-quentes. Não tinha rádio e, por deficiência de vista, não podia ler jornais, mas, em compensação, vendia bons cachorros-quentes. Colocou um cartaz na beira da estrada, anunciando a mercadoria, e ficou por ali, gritando quando alguém passava: – Olha o cachorro-quente especial !!!

E as pessoas compravam. Com isso, aumentou os pedidos de pão e salsichas, e acabou construindo uma boa mercearia. Então, mandou buscar o filho, que estudava na Universidade, para ajudá-lo a tocar o negócio, e alguma coisa aconteceu. O filho veio e disse: – Papai, o senhor não tem ouvido rádio ? Não tem lido jornais ? Há uma crise muito séria, e a situação internacional é perigosíssima ! Diante disso, o pai pensou: – Meu filho estudou na Universidade ! Ouve rádio e lê jornais, portanto, deve saber o que está dizendo ! E então reduziu os pedidos de pão e salsichas, tirou o cartaz da estrada, e não ficou por ali, apregoando os seus cachorros-quentes. As vendas caíram do dia para noite, e ele disse ao filho convencido: – Você tinha razão, meu filho, a crise é muito séria ”

Texto original de um anúncio da Quark State Metals Co., publicado em 24 de fevereiro de 1958 e divulgado pela agência ELLCE, de São Paulo, em novembro de 1990.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, e em especial:

- Ao Professor Pedro Luis Dias Peres pela oportunidade a mim concedida e pela orientação, incentivo e amizade;
- Aos Professores Alexandre Trofino Neto, José Claudio Geromel e Rafael Santos Mendes pelas valiosas sugestões na etapa final e pela participação no julgamento deste trabalho;
- Aos amigos inesquecíveis Julimara, Michelle, Nádia, Sirlene, Glauco, Elton, Hamilton, Joaquim, Júnior e Pereira, pelo agradável convívio, companheirismo e apoio nestes anos;
- Ao pessoal do Laboratório de Análise Convexa e da Faculdade de Engenharia Elétrica: Andréa, Cristiane, Isamara, Celso, Fábio, Gapski, Miguel, Serginho, Sérgio, Welfane e tantos outros, pelos conselhos e amizade;
- Aos Professores Nelson Luís Cappelli e Antonio José da Silva Maciel da Faculdade de Engenharia Agrícola, pelo apoio e compreensão;
- A minha família que sempre me incentivou;
- Ao governo brasileiro, através da CAPES, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de alocação de pólos em sub-regiões do plano complexo para sistemas dinâmicos lineares, discretos no tempo, modelados por variáveis de estado e com possíveis incertezas nos parâmetros dos modelos. Além da alocação de pólos, um procedimento de otimização convexa é utilizado, garantindo a minimização de índices de desempenho ou a pré-especificação de níveis de atenuação. Estudou-se a alocação de pólos em sub-regiões com a otimização de critérios do tipo norma de uma função de transferência: minimização de um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 , minimização de um limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ e minimização de um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 sujeita a um limitante \mathcal{H}_∞ (otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$). Um algoritmo que permite a resolução dos problemas de controle robusto com alocação de pólos é apresentado e, também, exemplos numéricos ilustrativos.

ABSTRACT

This work addresses the problem of regional pole constraints for discrete-time dynamic linear systems described by state space models with uncertain parameters. Besides pole assignment, a convex optimization procedure is also considered, guaranteeing the minimization of performance indices or prespecified disturbance attenuation levels. Regional pole constraint under transfer function norm minimization has been investigated: the minimization of a limiting bound to the \mathcal{H}_2 norm, the minimization of a limiting bound to the \mathcal{H}_∞ norm and the minimization of a limiting bound to the \mathcal{H}_2 norm under a \mathcal{H}_∞ bound (mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimization). An algorithm for solving robust control problems under pole constraints is presented, as well as some illustrative examples.

Conteúdo

Notação	iv
Introdução Geral	1
1 Estabilização e Controle de Sistemas Discretos	4
1.1 Introdução	4
1.2 Definições	5
1.3 Estabilidade Quadrática	7
1.4 Controle \mathcal{H}_2	11
1.4.1 Caso Precisamente Conhecido - Equação de Riccati	11
1.4.2 Solução via Análise Convexa	12
1.5 Controle \mathcal{H}_∞	15
1.5.1 Caso Precisamente Conhecido - Equação de Riccati	16
1.5.2 Solução via Análise Convexa	18
1.6 Generalizações : Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	21
1.7 Conclusão	24
2 Alocação de Pólos em Sub-Regiões	26
2.1 Introdução	26
2.2 Alocação em uma Faixa Vertical	28
2.3 Alocação em uma Região Circular	30
2.4 Alocação em uma Região Parabólica	32
2.5 Alocação em um Anel Circular	33
2.6 Conclusão	35
3 Controle de Sistemas com Alocação de Pólos	36
3.1 Introdução	36
3.2 Interseção com uma Faixa Vertical	36
3.3 Interseção com uma Região Circular	40
3.4 Interseção com uma Região Parabólica	43
3.5 Interseção com um Anel Circular	46

3.6	Conclusão	49
4	Solução Numérica e Exemplos	50
4.1	Introdução	50
4.2	Método de Planos de Corte	50
4.3	Exemplo 1	53
	4.3.1 Otimização \mathcal{H}_2	54
	4.3.2 Otimização \mathcal{H}_∞	56
4.4	Exemplo 2	57
4.5	Exemplo 3	59
4.6	Exemplo 4	61
4.7	Conclusão	64
	Conclusão Geral	65
	Bibliografia	66

Notação

\mathfrak{R}	– conjunto dos números reais
A, B, \dots	– matrizes
A'	– matriz transposta de A
I	– matriz identidade
0	– matriz ou vetor de zeros
A^*	– matriz conjugada transposta de A
$\text{Tr}(A)$	– traço de A
$\lambda(A)$	– autovalores de A
$\sigma(A)$	– valores singulares de A
$\sigma_{\max}(A)$	– valor singular máximo de A
$\ H(z)\ _2$	– norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência $H(z)$
$\ H(z)\ _\infty$	– norma \mathcal{H}_∞ de matriz de transferência $H(z)$
$A > (\geq) \mathbf{0}$	– matriz A (semi-) definida positiva
$A < (\leq) \mathbf{0}$	– matriz A (semi-) definida negativa

Introdução Geral

Atualmente, na teoria moderna de controle, um dos problemas mais importantes e de grande destaque é a pré-especificação de uma sub-região do plano complexo que deve abrigar os pólos do sistema em malha fechada. Esse problema é conhecido na literatura como “alocação de pólos”, ou ainda “pole placement”, “pole assignment” e “regional pole constraints”. O objetivo da alocação de pólos é, como o próprio nome indica, a colocação de todos os autovalores do sistema em malha fechada em uma sub-região do plano complexo, através da determinação de uma lei de controle conveniente. A localização dos pólos do sistema em malha fechada está diretamente associada com alguns índices de desempenho do sistema, tais como a velocidade de resposta, fator de amortecimento e frequência natural de oscilação. Portanto, uma forma de se garantir tais índices é a determinação de uma sub-região do plano complexo, que deve abrigar os pólos do sistema em malha fechada para que isso ocorra. A alocação de pólos para sistemas contínuos no tempo tem sido abordada em diversos artigos (ver [19] e suas referências), através de métodos que mapeiam a região de alocação usando equações do tipo Lyapunov. Em muitos casos não é necessária a especificação da exata localização de cada pólo, sendo suficiente determinar uma região de alocação, onde todos os pólos do sistema em malha fechada devem estar contidos.

Nos últimos anos houve também um progresso muito grande em controle de sistemas lineares, notadamente em aspectos de robustez e rejeição a perturbações, como por exemplo a otimização de critérios do tipo norma de uma função de transferência, como a minimização da norma \mathcal{H}_2 (ver referências [13], [15] e [25]), minimização da norma \mathcal{H}_∞ (ver referência [16]), e mais recentemente, minimização da norma \mathcal{H}_2 sujeita a um limitante da norma \mathcal{H}_∞ (otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) (ver referências [14] e [17]). As normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são bastante usadas na teoria de controle como parâmetros de desempenho. A norma \mathcal{H}_2 é usada para sinais exógenos que são constantes ou têm um espectro de potência conhecido, sendo geralmente associada a uma medida do tipo “valor médio”. Por outro lado, a norma \mathcal{H}_∞ se refere a sinais exógenos que têm um espectro de potência limitado, sendo geralmente associada a uma medida do tipo “pior caso”.

Uma outra característica importante da literatura recente em controle é a uti-

lização de técnicas de programação convexa na resolução dos problemas. Muitos trabalhos têm surgido nessa linha, cuja característica básica é a existência de um novo espaço paramétrico convexo, que mapeia por completo o conjunto de ganhos estabilizantes para um dado sistema (para maiores detalhes ver referências [4] e [12]). Graças à convexidade pode-se tratar a estabilização de sistemas incertos e também controles do tipo custo garantido, usando-se como critérios de desempenho as citadas normas \mathcal{H}_2 e/ou \mathcal{H}_∞ .

Este trabalho propõe um método para se obter um controlador robusto de realimentação de estado para sistemas discretos, com ou sem a presença de incertezas, que garante a alocação de pólos em uma sub-região pré-especificada do plano complexo. Garante-se também a otimização de um limitante do tipo norma (norma \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ ou mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$). As restrições que garantem a alocação de pólos são manipuladas através da construção de mapas analíticos que transformam a região de alocação desejada no interior do círculo unitário, através de equações do tipo *Lyapunov*. Os problemas resultantes são convexos no espaço paramétrico adotado. É apresentado também um método de planos de corte que possibilita a resolução dos problemas aqui abordados. Deve-se ressaltar que a convexidade é uma propriedade essencial quando soluções numéricas são investigadas, pois permite que qualquer restrição convexa adicional possa ser considerada no processo de otimização. No caso de alocação de pólos, adicionam-se aos elementos do conjunto que definem os ganhos estabilizantes, restrições também convexas que garantem a alocação na sub-região desejada.

Para o caso de sistemas precisamente conhecidos, as regiões de alocação abordadas neste trabalho foram: uma faixa vertical, uma região circular, uma região parabólica e um anel circular (todas inscritas no círculo unitário, garantindo em primeira instância a estabilidade do sistema). Já para a alocação de pólos para sistemas incertos é necessário que a região de alocação seja conexa. As regiões estudadas neste caso foram: uma faixa vertical, uma região circular e uma região parabólica, inscritas no círculo unitário. É importante notar que as várias regiões de alocação podem ser combinadas de diversas maneiras, gerando assim, da interseção destas, novas regiões de alocação.

Este trabalho é dividido em 4 capítulos, resumidos a seguir:

- Capítulo 1 - *Estabilização e Controle de Sistemas Discretos*

Neste Capítulo estudamos o problema de estabilização e controle de sistemas discretos por realimentação de estado. Busca-se também a minimização de índices de desempenho ou a pré-especificação de níveis de atenuação, abordando os seguintes casos: minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2 , minimização de um custo garantido \mathcal{H}_∞ e minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2 sujeito a um limitante \mathcal{H}_∞ .

- *Capítulo 2 - Alocação de Pólos em Sub-Regiões*

Aqui são apresentadas equações do tipo Lyapunov que garantem a alocação dos pólos do sistema de controle em malha fechada em sub-regiões do plano complexo. As sub-regiões estudadas foram: uma faixa vertical, uma região circular, uma região parabólica e um anel circular.

- *Capítulo 3 - Controle de Sistemas com Alocação de Pólos*

Neste Capítulo são apresentados resultados que garantem condições suficientes para alocação de pólos nas sub-regiões estudadas, simultaneamente com a otimização de um critério de desempenho do tipo norma de uma função de transferência.

- *Capítulo 4 - Solução Numérica e Exemplos*

Neste Capítulo é apresentado um algoritmo baseado no método de planos de corte, que permite a resolução numérica dos problemas abordados neste trabalho, através de programação convexa. São também apresentados exemplos referentes a controle robusto com alocação de pólos.

Capítulo 1

Estabilização e Controle de Sistemas Discretos

1.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados em estudar o problema de controle de sistemas discretos por realimentação de estado. Primeiramente, discute-se o problema de estabilização de sistemas discretos precisamente conhecidos. Introduce-se também o conceito de estabilidade quadrática, e condições para a estabilização quadrática de sistemas incertos, obtendo-se um ganho de realimentação de estados e uma função quadrática de Lyapunov, garantindo a estabilidade para todo o domínio de incertezas.

A seguir, através da minimização de índices de desempenho ou ainda da pré-especificação de níveis de atenuação, busca-se um controle de realimentação de estados robusto, ou seja, que garanta a estabilidade em malha fechada face às incertezas do modelo e que também atenda a um dos seguintes critérios de desempenho:

- minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2
- minimização de um custo garantido \mathcal{H}_∞
- minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2 sujeito a um limitante \mathcal{H}_∞

Para sistemas precisamente conhecidos, apresentamos soluções via análise convexa e também via equações do tipo Riccati, e no caso incerto apresentamos apenas soluções via abordagem convexa.

Os resultados aqui descritos advêm principalmente dos artigos [3], [8], [12], [15], [16], [17] e [25].

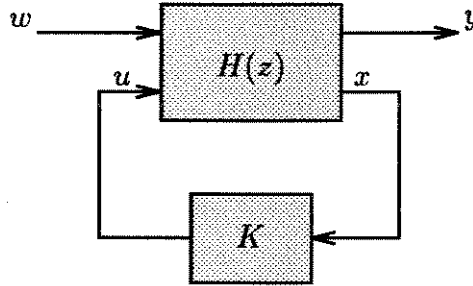


Figura 1.1: Diagrama de Blocos do Sistema (1.1).

1.2 Definições

Considere o sistema linear discreto, invariante no tempo, dado pelas seguintes equações de estado

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k \\ u_k = -Kx_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $x_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle, $w_k \in \mathfrak{R}^l$ é o vetor de perturbações externas e $y_k \in \mathfrak{R}^q$ é o vetor de saída observado. As matrizes $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathfrak{R}^{n \times l}$, $B_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ possuem dimensões apropriadas e são inicialmente supostas conhecidas. Pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $C'D = \mathbf{0}$ (chamada hipótese de ortogonalidade, indicando que o vetor de saída observado y_k tem uma parte que depende apenas do estado e outra, independente desta, afetada apenas pelo controle u_k) e ainda $D'D > \mathbf{0}$ (ou seja, todas as componentes do vetor de controle devem ser ponderadas).

Considerando-se um ganho de realimentação de estado $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, podemos definir as matrizes de malha fechada

$$A_{cl} \triangleq A - B_2 K, \quad C_{cl} \triangleq C - DK \quad (1.2)$$

e então a função de transferência de w para y é dada por

$$H(z) = C_{cl} (z\mathbf{I} - A_{cl})^{-1} B_1 \quad (1.3)$$

Na figura 1.1 tem-se uma representação em blocos do sistema descrito por (1.1), cuja função de transferência $H(z)$ é dada por (1.3).

Os gramianos de controlabilidade L_c do par (A_{cl}, B_1) e observabilidade L_o do par (A_{cl}, C_{cl}) para sistemas discretos são definidos por

$$L_c \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} A_{cl}^k B_1 B_1' A_{cl}'^k \quad (1.4)$$

$$L_o \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} A_{cl}'^k C_{cl}' C_{cl} A_{cl}^k \quad (1.5)$$

e podem ser obtidos da solução das equações

$$A_{cl} L_c A_{cl}' - L_c + B_1 B_1' = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

$$A_{cl}' L_o A_{cl} - L_o + C_{cl}' C_{cl} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

Tem-se ainda o seguinte Lema envolvendo os gramianos de controlabilidade e observabilidade:

Lema 1 Se a matriz A_{cl} é assintoticamente estável, tem-se

- $L_c > \mathbf{0}$ se e somente se o par (A_{cl}, B_1) é controlável
- $L_o > \mathbf{0}$ se e somente se o par (A_{cl}, C_{cl}) é observável

Prova ver referência [6].

□

Neste trabalho, assumimos $\text{rank}(B_1) = n$. Utilizando a formulação aumentada para sistemas dinâmicos (proposta em [2]), definindo-se com $p \triangleq n + m$, $F \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e $G \in \mathfrak{R}^{p \times m}$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

e também as matrizes $Q \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e $R \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, simétricas e semi-definidas positivas

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C' C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D' D \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Denotando-se o espaço nulo de G' por \mathcal{N} é imediato que qualquer $v \in \mathcal{N}$ é tal que

$$v \in \mathcal{N} \iff v = \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad x \neq \mathbf{0} \in \mathfrak{R}^n \quad (1.10)$$

Pode-se afirmar que dificilmente um sistema matemático modela com total exatidão um sistema físico real. Assim, deve-se incorporar no modelo matemático do sistema, erros ou incertezas que podem afetar o desempenho do sistema de controle, aproximando-o do sistema real. Considerando-se então as matrizes A e B_2 , que descrevem o comportamento dinâmico da planta, de dimensões conhecidas porém incertas, pode-se definir o domínio de incertezas

$$\mathcal{D}_F \triangleq \left\{ F : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (1.11)$$

significando que qualquer F factível pode ser escrito como uma combinação convexa das matrizes “extremas”, geradas a partir dos valores máximo e mínimo de cada parâmetro incerto em A e B_2 . O número total de vértices de F é dado por $N = 2^{n_{inc}}$, onde n_{inc} é o número de parâmetros incertos e limitados considerados em A e B_2 . Portanto, a cada vértice F_i , $i = 1 \dots N$ está associado um par extremo $(A, B_2)_i$. Este tipo de descrição de incerteza é bastante geral, cobrindo, por exemplo, a classe de sistemas descritos por “matrizes-intervalo”.

1.3 Estabilidade Quadrática

Um resultado amplamente conhecido na teoria de controle moderno é o Teorema de Lyapunov, que relaciona a estabilidade de um sistema linear autônomo com a existência de uma matriz Lyapunov. Considerando-se inicialmente um sistema autônomo, com A_{cl} arbitrária, porém fixa, tem-se

Teorema 1 Todos os autovalores de A_{cl} têm módulo menor que 1 (estão contidos no círculo unitário), ou ainda, o estado $x = 0$ do sistema autônomo $x_{k+1} = A_{cl}x_k$ é assintoticamente estável, se e somente se

$$A'_{cl}PA_{cl} - P < 0 \quad (1.12)$$

para alguma matriz $P = P' > 0$.

Prova Ver referência [6].

□

Usando-se o Lema de inversão de matrizes ¹, pode-se chegar a um resultado equivalente

$$A_{cl}WA'_{cl} - W < 0 \quad (1.13)$$

¹ $A'PA - P < 0 \iff AP^{-1}A' - P^{-1} < 0$

que também pode ser visto como a equação de Lyapunov associada ao sistema autônomo $x_{k+1} = A'_{cl}x_k$, que possui os mesmos autovalores de A_{cl} . Ou ainda, A_{cl} é assintoticamente estável, se e somente se, para qualquer matriz $Q = Q' > \mathbf{0}$ a equação

$$A'_{cl}PA_{cl} - P = -Q \quad (1.14)$$

tem uma única solução $P = P' > \mathbf{0}$.

Um sistema é dito quadraticamente estabilizável por um ganho linear de realimentação de estado, quando admite uma mesma solução de Lyapunov em todo o domínio de incertezas considerado. Portanto, é de grande interesse a caracterização do conjunto de ganhos de realimentação de estados que assegura a estabilidade quadrática, isto é, \mathcal{K} definido por

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : (A - B_2K) \text{ quadraticamente estável} \right\} \quad (1.15)$$

e uma lei de controle $u = -Kx$ com o mesmo ganho K . A definição implica em que todos os autovalores de $A_{cl} = A - B_2K$ estejam contidos no círculo unitário, ou seja, $|\lambda_j(A_{cl})| < 1$, $j = 1 \dots n$, assegurando então que existe uma mesma matriz de Lyapunov $P = P' > \mathbf{0}$ e um ganho K tal que

$$(A - B_2K)'P(A - B_2K) - P < \mathbf{0} \quad (1.16)$$

para todo o domínio de incertezas $F \in \mathcal{D}_F$, ou seja, $\forall (A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$.

Através da utilização de um espaço paramétrico adequado, pode-se transformar o problema de estabilizabilidade quadrática de sistemas discretos em um problema convexo. Definindo-se as funções matriciais $\Theta_i(\cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta_i(\mathcal{W}) \triangleq F_i \mathcal{W} F_i' - \mathcal{W} \quad (1.17)$$

e também o conjunto

$$\mathcal{C} \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_i \quad (1.18)$$

com

$$\mathcal{C}_i \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v' \Theta_i(\mathcal{W}) v < 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (1.19)$$

sendo as matrizes $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_i$ particionadas da seguinte forma

$$\mathcal{W} \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (1.20)$$

onde $W_1 > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Lembrando ainda que \mathcal{N} é o espaço nulo de G' , definido em (1.10) e que $v \in \mathcal{N}$ pode ser escrito na forma $v' = \begin{bmatrix} x' & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, tem-se o seguinte resultado

Lema 2 O conjunto \mathcal{C} , definido em (1.18) é convexo em \mathcal{W} e $\mathcal{C} \neq \emptyset$ se e somente se $\mathcal{K} \neq \emptyset$. O conjunto de ganhos que estabilizam quadraticamente o sistema (1.1) é dado por

$$\mathcal{K} = \left\{ W_2' W_1^{-1} \quad : \quad W \in \mathcal{C} \right\} \quad (1.21)$$

Prova Para provar a convexidade de \mathcal{C} basta notar que ele é definido como sendo a interseção de conjuntos convexos afins em relação a \mathcal{W} . Portanto, para quaisquer W^1 e $W^2 \in \mathcal{C}$, o elemento genérico $\alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2$, para $\alpha \in [0, 1]$, também pertence a \mathcal{C} .

Para provar a suficiência, toma-se um elemento $W \in \mathcal{C}$ tal que

$$v' [F_i W F_i' - W] v < 0 \quad (1.22)$$

para todo i , $i = 1 \cdots N$, ou seja,

$$v' \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right\} v < 0 \quad (1.23)$$

como $v \in \mathcal{N}$, desenvolvendo-se tem

$$x' [A_i W_1 A_i' - W_1 - B_{2i} W_2' A_i' - A_i W_2 B_{2i}' + B_{2i} W_3 B_{2i}'] x < 0 \quad , \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \quad (1.24)$$

para todo i , $i = 1 \cdots N$. A equação (1.24) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x' & \left[(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - W_1 \right] x + \\ & + x' B_{2i} [W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2] B_{2i}' x < 0 \quad , \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (1.25)$$

e como

$$W \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2 \quad (1.26)$$

o termo $B_{2i} [W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2] B_{2i}'$ é sempre maior ou igual a zero para $W \in \mathcal{C}$, implicando em

$$(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - W_1 < \mathbf{0} \quad (1.27)$$

para todo i , $i = 1 \cdots N$. Finalmente, (1.27) é convexa em relação a A_{cli} (ver referência [12]), e portanto pode-se concluir que $K = W_2' W_1^{-1}$ é um ganho robusto estabilizante e W_1 é uma matriz de Lyapunov que caracteriza a estabilidade quadrática do par incerto $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$.

Para se provar a necessidade, supõe-se a existência de um ganho $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e de uma matriz de Lyapunov W tais que

$$A_{cl}WA'_{cl} - W < \mathbf{0} \quad (1.28)$$

para todo $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ e, em particular,

$$A_{cli}WA'_{cli} - W < \mathbf{0} \quad , \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.29)$$

ou seja

$$(A_i - B_{2i}K)W(A_i - B_{2i}K)' - W < \mathbf{0} \quad , \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.30)$$

desenvolvendo-se, para todo $i, i = 1 \dots N$

$$\begin{aligned} x' [A_iWA'_i - W - A_iWK'B'_{2i} - B_{2i}KWA'_i + \\ + B_{2i}KWK'B'_{2i}] x < 0 \quad , \quad \forall x \neq 0 \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (1.31)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma, para todo $i, i = 1 \dots N$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' - \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

implicando que a matriz

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (1.33)$$

satisfaz a condição $v'\Theta_i(\mathcal{W})v < 0, \forall v \in \mathcal{N}, \forall i = 1 \dots N$, e portanto, tem-se que $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$, provando-se a necessidade. A definição do conjunto \mathcal{K} a partir de (1.21) é consequência direta do desenvolvimento anterior. □

Conclui-se que o conjunto \mathcal{K} de ganhos que estabilizam quadraticamente os pares (A, B_2) é inteiramente mapeado pelo conjunto \mathcal{C} . Outra conclusão importante é que para o tipo de incerteza considerada, as condições propostas só necessitam serem testadas nos vértices do domínio poliedral de incertezas. No caso de sistemas precisamente conhecidos ($N = 1$), as condições se resumem à estabilizabilidade do par (A, B_2) .

1.4 Controle \mathcal{H}_2

Para $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ arbitrário, mas fixo, e se o ganho de realimentação K é tal que A_{cl} é assintoticamente estável, a norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência $H(z)$ é definida como

$$\|H(z)\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{Tr} [H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega})] d\omega \quad (1.34)$$

e pode ser calculada através dos gramianos de controlabilidade (1.6) e observabilidade (1.7) resultando em

$$\|H(z)\|_2^2 = \text{Tr} (B_1' L_o B_1) = \text{Tr} (C_{cl} L_c C_{cl}') \quad (1.35)$$

O problema de otimização em \mathcal{H}_2 pode ser escrito da seguinte forma

$$(P1) \quad \min \left\{ \|H(z)\|_2 : K \in \mathcal{K} \right\}$$

ou uma forma equivalente

$$(P2) \quad \min \left\{ \sigma : \|H(z)\|_2 \leq \sigma : K \in \mathcal{K} \right\}$$

Note que a expressão direta do valor do critério em termos do ganho K pode ser bastante complicada, e que, tratando-se de sistemas incertos, o limitante da norma \mathcal{H}_2 deve ser respeitado $\forall F \in \mathcal{D}_F$; portanto, utilizamos limitantes superiores que aproximam a solução de (P2). A solução de (P2) iguala a solução de (P1) apenas para sistemas sem incertezas ($N = 1$). Neste caso o problema (P1) tem solução conhecida via equação de Riccati (o chamado problema ótimo linear quadrático - PLQ). Porém, esta solução não é facilmente extensível ao tratamento de incertezas. A solução via análise convexa permite tratar com facilidade os sistemas incertos, garantindo a minimização de um limitante da norma \mathcal{H}_2 , definindo um custo garantido para todo par incerto $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Para o caso precisamente conhecido, esse limitante é igual ao valor da norma obtido pela solução clássica do problema.

1.4.1 Caso Precisamente Conhecido - Equação de Riccati

Considerando-se o sistema precisamente conhecido ($N = 1$), apenas um par (A, B_2) descreve o comportamento dinâmico do sistema e o conjunto \mathcal{K} contém todos os ganhos estabilizantes. Para este caso as condições de otimalidade de (P1) fornecem, a partir de

$$A_{cl} L_c A_{cl}' - L_c + B_1 B_1' = 0 \quad (1.36)$$

$$A_{cl}' L_o A_{cl} - L_o + C_{cl}' C_{cl} = 0 \quad (1.37)$$

e

$$\|H(z)\|_2^2 = \text{Tr} (C_{cl}L_cC'_{cl}) = \text{Tr} (B'_1L_oB_1) \quad (1.38)$$

a seguinte igualdade matricial

$$\left[(B'_2L_oB_2 + D'D)K - B'_2L_oA \right] L_c = \mathbf{0} \quad (1.39)$$

Considerando-se que a matriz $A_{cl} = A - B_2K$ é assintoticamente estável e como $B_1B'_1 > \mathbf{0}$, tem-se que $L_c > \mathbf{0}$ e, conseqüentemente, para $N = 1$, (P1) admite uma solução única dada por

$$K = (B'_2PB_2 + D'D)^{-1} B'_2PA \quad (1.40)$$

onde $P = L_o > \mathbf{0}$ é a solução definida positiva da equação discreta de Riccati

$$A'PA - P - A'PB_2(B'_2PB_2 + D'D)^{-1} B'_2PA + C'C = \mathbf{0} \quad (1.41)$$

Um resultado facilmente verificável é que na solução ótima tem-se $\|H(z)\|_2^2 = \text{Tr} (B'_1PB_1)$. Isto mostra que a solução ótima de (P1) pode ser interpretada como a solução do Problema Linear Quadrático (PLQ)

$$(P3) \quad \min_{u_k} \sum_{k=0}^{\infty} (x'_k C' C x_k + u'_k D' D u_k)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + B_2u_k \quad , \quad x_0 \text{ dado} \quad (1.42)$$

e apesar do valor ótimo do critério quadrático, $J^* = x'_0 P x_0$ depender da condição inicial x_0 , o valor do ganho K dado em (1.40) não depende. Reescrevendo a equação de Riccati em malha fechada

$$A'_{cl} P A_{cl} - P + C'_{cl} C_{cl} = \mathbf{0} \quad (1.43)$$

implicando que, com $P = L_o$ e, impondo-se $B_1B'_1 = x_0x'_0$, tem-se

$$J^* = \min \|H(z)\|_2^2 \quad (1.44)$$

Como por hipótese, $\text{rank}(B_1) = n$, para efeitos de comparação, consideraremos neste trabalho x_0 como variável aleatória de média zero e covariância igual à $B_1B'_1$.

1.4.2 Solução via Análise Convexa

Considerando-se agora sistemas incertos ($N > 1$), com os pares $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Neste caso a solução via análise convexa fornece uma aproximação da solução global do problema (P2), minimizando σ , que é um limitante superior da norma

\mathcal{H}_2 para todos os modelos admissíveis. Usando a notação de sistema aumentado, pode-se definir as funções matriciais $\Theta_{2i}(\cdot) : \mathfrak{R}^{p \times p} \rightarrow \mathfrak{R}^{p \times p}$

$$\Theta_{2i}(\mathcal{W}) \triangleq F_i \mathcal{W} F_i' - \mathcal{W} + Q \quad (1.45)$$

e ainda o conjunto convexo

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{2i} \quad (1.46)$$

onde

$$\mathcal{C}_{2i} \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v' \Theta_{2i}(\mathcal{W}) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (1.47)$$

sendo as matrizes \mathcal{W} definidas conforme (1.20).

O Lema a seguir formaliza uma solução para o problema (P2).

Lema 3 Considere \mathcal{W}^* a solução ótima do problema

$$(P3) \quad \min \left\{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2 \right\}$$

então $K = W_2' W_1^{-1}$ resolve o problema (P2) e

$$\sigma^2 \triangleq \text{Tr}(R\mathcal{W}^*) \geq \|H(z)\|_2^2, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.48)$$

Prova Inicialmente é necessário estabelecer a equivalência entre a estabilizabilidade quadrática do par incerto (A, B_2) e a existência de pelo menos um elemento \mathcal{W} pertencente ao conjunto \mathcal{C}_2 . Supondo-se o par (A, B_2) quadraticamente estabilizável, tem-se que

$$(A - B_2 K)W(A - B_2 K)' - W + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (1.49)$$

implicando que, para $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$

$$A W A' - W - B_2 K W A' - A W K' B_2' + B_2 K W K' B_2' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (1.50)$$

que é válida em particular nos vértices $i, i = 1 \dots N$. Pode-se então escrever

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & W K' \\ K W & K W K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' - \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} W & W K' \\ K W & K W K' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

que é válida para todo $i = 1 \cdots N$, e conclui-se que a matriz

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (1.52)$$

pertence a \mathcal{C}_2 . Para provar-se a suficiência, partindo de $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$, tem-se

$$v' [F_i W F_i' - \mathcal{W} + Q] v \leq 0 \quad , \quad \forall v \in \mathcal{N}, \forall i, i = 1 \cdots N \quad (1.53)$$

implicando em

$$\begin{aligned} v' \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' - \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \leq 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Sabendo-se que $v \in \mathcal{N}$, tem-se

$$x' [A_i W_1 A_i' - W_1 - B_{2i} W_2' A_i' - A_i W_2 B_{2i}' + B_{2i} W_3 B_{2i}' + B_1 B_1'] x \leq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \quad (1.55)$$

válido para todo $i = 1 \cdots N$, de onde obtém-se

$$\begin{aligned} x' \left[(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - W_1 + B_1 B_1' \right] x + \\ + x' B_{2i} [W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2] B_{2i}' x \leq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (1.56)$$

Lembrando-se que

$$\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2 \quad (1.57)$$

temos

$$(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - W_1 + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad (1.58)$$

Portanto, conclui-se que $K = W_2' W_1^{-1}$ é um ganho robusto estabilizante e que $W_1 > \mathbf{0}$ é uma matriz de Lyapunov que caracteriza a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada.

Com relação à otimalidade, supõe-se que $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, pois caso contrário o par (A, B_2) não é quadraticamente estabilizável. Considerando-se que $C'D = \mathbf{0}$ e novamente que

$$\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$$

implicando para todo $W \in \mathcal{C}_2$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(RW) &= \text{Tr}(C'CW_1 + D'DW_3) \\ &\geq \text{Tr}(CW_1C' + DW_2'W_1^{-1}W_2D') \\ &\geq \text{Tr}\left[(C - DW_2'W_1^{-1})W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'\right] \end{aligned} \quad (1.59)$$

Com K dado por $K = W_2'W_1^{-1}$ e a matriz $W_1 > \mathbf{0}$ satisfazendo (1.59) para um par $(A, B_2) \rightsquigarrow F$ arbitrário, porém fixo, conclui-se que $W_1 \geq L_c$, onde L_c é o gramiano de controlabilidade, solução de (1.6), para o ganho K dado acima e o par (A, B_2) em consideração. Tem-se portanto

$$\text{Tr}(RW) \geq \text{Tr}(C_{cl}L_cC_{cl}') = \|H(z)\|_2^2 \quad (1.60)$$

ou seja, $\text{Tr}(RW)$ é um limitante superior do quadrado da norma \mathcal{H}_2 para o sistema (1.1) em malha fechada, para um dado modelo F . Como as relações (1.59) e (1.60) valem $\forall F \in \mathcal{D}_F$, para qualquer $W \in \mathcal{C}_2$, tem-se

$$\text{Tr}(RW) \geq \|H(z)\|_2^2, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.61)$$

Finalmente, uma vez que W^* , solução ótima de (P3) fornece o mínimo valor de $\text{Tr}(RW)$, conclui-se que

$$\sigma^2 \triangleq \text{Tr}(RW^*) \geq \|H(z)\|_2^2, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.62)$$

ou seja, $\sigma \geq \|H(z)\|_2, \forall F \in \mathcal{D}_F$, e o Lema está provado. □

1.5 Controle \mathcal{H}_∞

Trataremos agora do problema de otimização \mathcal{H}_∞ . Para um par $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ arbitrário, mas fixo, se o ganho de realimentação K é tal que A_{cl} é assintoticamente estável, a norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência $H(z)$ pode ser definida para $\omega \in [-\pi, \pi]$ por

$$\|H(z)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}[H(e^{j\omega})] \quad (1.63)$$

O problema de otimização \mathcal{H}_∞ é definido como

$$(P4) \quad \min \left\{ \|H(z)\|_\infty : K \in \mathcal{K} \right\}$$

Como no caso de otimização \mathcal{H}_2 , a expressão da função a ser minimizada, $\|H(z)\|_\infty$, não é facilmente obtida em função do ganho de realimentação K . Utiliza-se então uma solução que aproxima o valor mínimo da norma \mathcal{H}_∞ , trabalhando com um limitante superior γ . Assim o problema de otimização \mathcal{H}_∞ que aproxima a solução ótima de (P4) pode ser dado por

$$(P5) \quad \min \left\{ \gamma : \|H(z)\|_\infty \leq \gamma : K \in \mathcal{K} \right\}$$

Mesmo para sistemas precisamente conhecidos ($N = 1$) é necessário se utilizar problemas do tipo (P5) para otimização \mathcal{H}_∞ . Assim, um limitante γ é gradativamente diminuído até o seu valor mínimo. Novamente para sistemas sem incertezas, (P5) tem uma solução conhecida via equação de Riccati, enquanto que, para sistemas incertos, utiliza-se um método de otimização convexa, agindo conjuntamente sobre o limitante γ e o ganho de realimentação de estado.

1.5.1 Caso Precisamente Conhecido - Equação de Riccati

Os resultados discutidos nesse item são válidos para sistemas precisamente conhecidos, ou seja, $N = 1$, onde o modelo matemático é descrito apenas por um único par (A, B_2) . Considerando-se que um ganho $K \in \mathcal{K}$ foi determinado, tem-se as matrizes $A_{cl} = A - B_2K$ e $C_{cl} = C - DK$. Temos então o seguinte resultado

Lema 4 Para um $\gamma > 0$ dado, e supondo-se o par (A_{cl}, C_{cl}) observável, tem-se

$$\|H(z)\|_\infty \leq \gamma \tag{1.64}$$

se e somente se a equação de Riccati

$$A_{cl}WA'_{cl} - W + WC'_{cl}(I + C_{cl}WC'_{cl})^{-1}C_{cl}W + \gamma^{-2}B_1B'_1 = 0 \tag{1.65}$$

admite uma solução simétrica definida positiva $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Prova Ver referência [33].

□

Conforme já foi dito, o problema de minimização da norma \mathcal{H}_∞ exige um procedimento iterativo. A ideia é diminuir progressivamente o valor de γ , testando-se simultaneamente se a igualdade (1.65) admite uma solução $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e definida positiva. Uma versão dual da equação (1.65) é definida em [33] por

$$A'_{cl}PA_{cl} - P + \gamma^{-2}PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B'_1PB_1)^{-1}B'_1P + C'_{cl}C_{cl} = \mathbf{0} \quad (1.66)$$

podendo-se também utilizar inequações ao invés das equações tipo Riccati.

Note que as expressões acima relacionam um sistema em malha fechada descrito pela matriz dinâmica A_{cl} e um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência. Incorporando-se ao problema a escolha do ganho $K \in \mathcal{K}$ tal que $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$, ou seja, garantindo a atenuação de distúrbios γ , temos o seguinte resultado

Lema 5 Seja $\gamma > 0$ dado. Existe um ganho estabilizante $K \in \mathcal{K}$ tal que $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se existir $P = P' > \mathbf{0}$ que satisfaz a seguinte equação de Riccati

$$\begin{aligned} A'PA - P - A'PB_2(D'D + B'_2PB_2)^{-1}B'_2PA + \\ + \gamma^{-2}PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B'_1PB_1)^{-1}B'_1P + C'C = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.67)$$

No caso afirmativo, o ganho de realimentação é dado por

$$K = (D'D + B'_2PB_2)^{-1}B'_2PA \quad (1.68)$$

Prova Ver referência [33].

□

Através dos resultados mostrados, verifica-se que, usando um procedimento iterativo, é possível minimizar um limitante da norma \mathcal{H}_∞ , resolvendo assim o problema (P5). O limitante γ é reduzido gradativamente até o limite de existência de uma solução P definida positiva para (1.67). Como no caso da otimização \mathcal{H}_2 , via equação de Riccati, o ganho calculado depende explicitamente das matrizes A e B_2 , tornando difícil a extensão dos resultados do Lema 5 para sistemas incertos. A abordagem convexa, tratada a seguir, permite resolver problemas do tipo (P5) para sistemas incertos, porém utiliza-se apenas de condições suficientes.

1.5.2 Solução via Análise Convexa

A seguir é apresentado um Lema válido para sistemas precisamente conhecidos ($N = 1$), que posteriormente será estendido para o tratamento de sistemas incertos.

Lema 6 Considere $\gamma > 0$ dado e $A_{cl} = A - B_2K$ e $C_{cl} = C - DK$ definidos para algum $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Se a desigualdade matricial

$$A_{cl}WA'_{cl} - W + WC'_{cl}C_{cl}W + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq 0 \quad (1.69)$$

admite uma solução simétrica definida positiva $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, então $K \in \mathcal{K}$ e vale

$$H(\zeta)H(\zeta)^* \leq \gamma^2(\mathbf{I} - C_{cl}WC'_{cl}) \leq \gamma^2\mathbf{I} \quad , \quad \zeta = e^{j\omega} \quad , \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad (1.70)$$

Prova Ver referência [16].

□

Note que a expressão (1.69) faz uma aproximação em relação à condição necessária e suficiente expressa no Lema 4, isto é, $(\mathbf{I} + C_{cl}WC'_{cl})^{-1} \cong \mathbf{I}$, e graças a essa aproximação pode-se obter uma solução convexa para o problema \mathcal{H}_∞ .

Consideremos agora sistemas discretos incertos, com $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Uma extensão do Lema 6 de modo a garantir estabilidade quadrática com atenuação de distúrbios γ é dada pelo Corolário a seguir.

Corolário 1 Considere um dado ganho $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Então, a matriz incerta $A_{cl} = A - B_2K$, para $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ é quadraticamente estável com atenuação de distúrbios γ se o conjunto de inequações

$$A_{cli}WA'_{cli} - W + WC'_{cl}C_{cl}W + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq 0 \quad (1.71)$$

admitir uma mesma solução simétrica definida positiva $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ para todo i , $i = 1 \dots N$.

Prova Imediata, levando-se em conta que para todo $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ tem-se $\xi_i \geq 0$, $\sum \xi_i = 1$,

$$A_{cl}WA'_{cl} \leq \sum_{i=1}^N \xi_i A_{cli}WA'_{cli} \quad (1.72)$$

e multiplicando todos os termos de (1.71) por $\xi_i \geq 0$ e fazendo a soma de 1 a N , temos que (1.69) vale para todo par incerto $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ e, portanto, a expressão é convexa em W .

□

Utilizando a notação de sistema aumentado, podemos definir as funções matriciais $\Theta_{\infty i}(\cdot, \cdot) : (\mathfrak{R}^{p \times p}, \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}^{p \times p}$

$$\Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \mu) \triangleq F_i \mathcal{W} F_i' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \mu Q \quad (1.73)$$

e ainda o conjunto convexo

$$\mathcal{C}_\infty \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{\infty i} \quad (1.74)$$

com

$$\mathcal{C}_{\infty i} \triangleq \left\{ (\mathcal{W}, \mu) : \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0}, \mu \geq 0 : v' \Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (1.75)$$

sendo as matrizes \mathcal{W} particionadas como em (1.20).

Note que, para um nível de atenuação γ pré-especificado, (1.73) descreve uma função apenas de \mathcal{W}

$$\Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \gamma^{-2}) \triangleq F_i \mathcal{W} F_i' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q \quad (1.76)$$

e assim podemos definir o conjunto convexo (para cada $\gamma > 0$)

$$\mathcal{C}_\infty(\gamma) \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{\infty i}(\gamma) \quad (1.77)$$

sendo

$$\mathcal{C}_{\infty i}(\gamma) \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v' \Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \gamma^{-2}) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (1.78)$$

sendo novamente as matrizes \mathcal{W} particionadas como em (1.20). Tem-se então o seguinte resultado

Lema 7 Considere um nível de atenuação $\gamma > 0$ pré-especificado. Então,

- $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ é convexo em relação a \mathcal{W} .
- Se $\mathcal{C}_\infty(\gamma) \neq \emptyset$, então o sistema linear discreto descrito por (1.1) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ .

Prova A convexidade de $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ é nítida, uma vez que, sendo a matriz R semi-definida positiva, tem-se que qualquer que seja v , $v'\Theta_\infty(\mathcal{W}, \gamma^{-2})v$ é convexa em relação a \mathcal{W} , para todo i , $i = 1 \dots N$. Tomando-se agora um elemento \mathcal{W} em $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$. Então, $\forall v \in \mathcal{N}$, para $i = 1 \dots N$ e \mathcal{W} dada por (1.20), tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\geq v'\Theta_\infty(\mathcal{W}, \gamma^{-2})v \\ &\geq x'[(A_i - B_{2i}W_2'W_1^{-1})W_1(A_i - B_{2i}W_2'W_1^{-1})' - W_1 + \\ &\quad + W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'(C - DW_2'W_1^{-1})W_1 + \\ &\quad + \gamma^{-2}B_1B_1' + B_2(W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2)B_2']x \end{aligned} \quad (1.79)$$

Como $\mathcal{W} \geq \mathbf{0}$ implica em $W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2 \geq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} &(A_i - B_{2i}W_2'W_1^{-1})W_1(A_i - B_{2i}W_2'W_1^{-1})' - W_1 + \\ &+ W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'(C - DW_2'W_1^{-1})W_1 + \gamma^{-2}B_1B_1' \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.80)$$

e então (1.39) vale para todo i , $i = 1 \dots N$, com $K = W_2'W_1^{-1}$, $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ e $W = W_1 > \mathbf{0}$. Usando o resultado do Corolário 1, concluímos que o sistema é quadraticamente estável com a atenuação γ de distúrbios prescrita.

□

O resultado anterior fornece uma solução para o problema de se caracterizar o conjunto de ganhos $K \in \mathcal{K}$ tais que $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$. É claro que a condição é apenas suficiente, porém esse foi o preço pago para se conseguir a convexidade de $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$. Um procedimento iterativo, com γ cada vez menores, pode ser perfeitamente utilizado em conjunto com o Lema 7 para se aproximar a solução do problema (P5). Entretanto, resultados melhores podem ser obtidos mediante a otimização conjunta, envolvendo o par (\mathcal{W}, μ) , como descrito pelo Corolário a seguir.

Corolário 2 A solução ótima do problema convexo

$$\max \left\{ \mu : (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \right\} \quad (1.81)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ e $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$, que é uma solução sub-ótima para o problema (P5).

Prova Pela demonstração do Lema anterior, está claro que $K = W_2'W_1^{-1}$ e $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ formam um par factível para o problema (P6), e $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ é o mínimo valor de γ , no que diz respeito à condição expressa pelo Lema 6.

□

É claro que o problema (1.81) fornece soluções próximas do ótimo para (P5), baseando-se em condições suficientes, mas que possibilitam uma abordagem via análise convexa. Em [17], um limitante superior para μ é obtido, possibilitando assim uma solução numérica eficaz para o problema, com $\mu \in [0, \mu_M]$. Na continuação deste trabalho, adotou-se o intervalo fechado.

1.6 Generalizações : Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

O problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, consiste em se minimizar o custo de um critério \mathcal{H}_2 sobre uma classe de controladores, que simultaneamente satisfaz uma atenuação prescrita de distúrbios γ , especificada em termos da norma \mathcal{H}_∞ . O problema de otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser definido como

$$(P6) \quad \min \left\{ \sigma : \|H(z)\|_2 \leq \sigma : K \in \mathcal{K}_\gamma \right\}$$

onde

$$\mathcal{K}_\gamma \triangleq \left\{ K \in \mathcal{K} : \|H(z)\|_\infty \leq \gamma \right\} \quad (1.82)$$

Note que, da maneira que foi colocado, novamente nem a função objetivo nem a restrição de norma \mathcal{H}_∞ têm propriedades geométricas utilizáveis, como por exemplo a convexidade. Mesmo para sistemas precisamente conhecidos ($N = 1$), a solução de (P6) é aproximada por limitantes das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ usando-se inequações do tipo Riccati. O Lema a seguir apresenta uma relação entre um limitante γ da norma \mathcal{H}_∞ e uma desigualdade matricial. Na verdade, o resultado é equivalente ao apresentado no Lema 6 fazendo-se a mudança de variável $P = \gamma^2 W$.

Lema 8 Considere $\gamma > 0$ dado e as matrizes $A_{cl} = A - B_2K$ e $C_{cl} = C - DK$ definidas para um $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ qualquer. Se a inequação matricial

$$A_{cl}PA_{cl}' - P + \gamma^{-2}PC_{cl}'C_{cl}P + B_1B_1' \leq 0 \quad (1.83)$$

admite uma solução $P = P' > 0$, então o sistema é quadraticamente estável com atenuação de distúrbios γ , e conseqüentemente, $K \in \mathcal{K}_\gamma$.

Prova Ver referência [16].

□

Da mesma forma que no Lema 6, a condição imposta pelo Lema 8 (ver referência [17]) é apenas suficiente. Para sistemas discretos precisamente conhecidos, existe uma condição similar necessária e suficiente [33], onde um termo não linear é incorporado ao termo quadrático. Adota-se neste trabalho a condição do Lema 8, pois ela é convexa em relação a P . Um comentário importante é que, sendo convexa, a inequação (1.83) poderia ser substituída por N inequações expressas nos vértices do domínio de incertezas. Este fato será explorado na resolução numérica dos problemas.

De maneira a reafirmar um resultado que permite descrever o conjunto \mathcal{K} de forma mais adequada à resolução numérica de problemas como (P7), define-se a função matricial, para $\gamma > 0$ dado

$$\tilde{\Theta}_{\infty i}(\mathcal{W}) \triangleq F_i \mathcal{W} F_i' - \mathcal{W} + \gamma^{-2} \mathcal{W} R \mathcal{W} + Q \quad (1.84)$$

onde $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é simétrica e particionada na conforme (1.20). Novamente, a matriz \mathcal{W} aqui difere daquela de (1.73) por um fator de γ^{-2} , assim como a expressão que define $\Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \mu)$. Definindo-se o conjunto convexo

$$\tilde{\mathcal{C}}_\infty \triangleq \bigcap_{i=1}^N \tilde{\mathcal{C}}_{\infty i} \quad (1.85)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\infty i} \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 : v' \tilde{\Theta}_{\infty i}(\mathcal{W}) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (1.86)$$

tem-se os seguintes resultados:

Lema 9 Se $\tilde{\mathcal{C}}_\infty \neq \emptyset$, então $K = W_2' W_1^{-1}$ estabiliza quadraticamente o sistema (1.1) com atenuação prescrita γ , isto é, $K \in \mathcal{K}_\gamma$.

Prova De (1.86), para todo $i, i = 1 \dots N$

$$0 \geq v' \tilde{\Theta}_{\infty i}(\mathcal{W}) v \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} &\geq x' \left[(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - W_1 \right. \\ &\quad \left. + \gamma^{-2} W_1 (C - D W_2' W_1^{-1})' (C - D W_2' W_1^{-1}) W_1 \right. \\ &\quad \left. + B_1 B_1' + B_{2i} (W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2) B_{2i}' \right] x \end{aligned} \quad (1.88)$$

como $\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \geq & (A_i - B_{2i}W_2'W_1^{-1})W_1(A_i - B_{2i}W_2'W_1^{-1})' - W_1 \\ & + \gamma^{-2}W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'(C - DW_2'W_1^{-1})W_1 + B_1B_1' \end{aligned} \quad (1.89)$$

e portanto $K = W_2'W_1^{-1}$ é tal que (com A_{cl} e C_{cl} dados em (1.2))

$$\mathbf{0} \geq A_{cli}W_1A_{cli}' - W_1 + \gamma^{-2}W_1C_{cl}'C_{cl}W_1 + B_1B_1' \quad (1.90)$$

Fazendo a combinação convexa das inequações (1.90), obtém-se a condição do Lema 9. A prova está concluída. □

Para maiores detalhes em relação à prova do Lema anterior, veja [16]. Note que, para $\gamma \rightarrow +\infty$, $\tilde{\mathcal{C}}_\infty$ tende para \mathcal{C}_2 . Os conjuntos \mathcal{C}_2 e $\tilde{\mathcal{C}}_\infty$, definidos em (1.46) e (1.85) respectivamente, mapeiam completamente o conjunto dos ganhos que estabilizam quadraticamente o sistema (1.1). A imposição de uma atenuação de distúrbios $\gamma > 0$ faz com que a existência de $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_\infty(\gamma)$ ou $\mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{C}}_\infty$ seja condição suficiente para a existência de $K \in \mathcal{K}_\gamma$. Do Lema 9, portanto, uma relação entre \mathcal{K}_γ e $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ é estabelecida. Um problema de otimização convexa pode então ser definido a fim de seleccionar, dos elementos de $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$, aquele que minimiza um critério do tipo \mathcal{H}_2 .

Lema 10 Para $\gamma > 0$ dado, considere \mathcal{W} a solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{C}}_\infty(\gamma) \right\} \quad (1.91)$$

então, $K = W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$ é tal que

$$\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (R\mathcal{W}) \quad \text{e} \quad \|H(z)\|_\infty \leq \gamma, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.92)$$

Prova A prova vem do fato que (lembrando que $\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$ e $C'D = \mathbf{0}$)

$$\text{Tr} (R\mathcal{W}) = \text{Tr} (CW_1C' + DW_3D') \quad (1.93)$$

$$\geq \text{Tr} (CW_1C' + DW_2'W_1^{-1}W_2D')$$

$$\geq \text{Tr} [(C - DK)W_1(C - DK)'] \quad (1.94)$$

da equação (1.90), tem-se para qualquer $A_{cl} \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$

$$A_{cl}W_1A'_{cl} - W_1 + B_1B'_1 \leq -\gamma^2W_1C'_{cl}C_{cl}W_1 \quad (1.95)$$

portanto

$$A_{cl}W_1A'_{cl} - W_1 + B_1B'_1 \leq 0 \quad (1.96)$$

comparando-se (1.96) com (1.6), resulta que $W_1 \geq L_c$, então de (1.94)

$$\text{Tr}(RW) \geq \text{Tr}(C_{cl}L_cC'_{cl}) \quad (1.97)$$

para um par fixo (A, B_2) , e finalmente

$$\text{Tr}(RW) \geq \|H(z)\|_2^2, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.98)$$

Note que (1.98) é válida para todo $W \in \tilde{\mathcal{C}}_\infty$. A solução ótima de (1.91) fornece o ganho associado ao menor limitante para a norma \mathcal{H}_2 de todos os modelos factíveis, e que garante a atenuação prescrita γ para a norma \mathcal{H}_∞ .

□

Com os Lemas 9 e 10, tem-se uma relação entre $W \in \mathcal{C}_\infty$ e $K \in \mathcal{K}_\gamma$, e além disso, escolhendo-se o elemento W que minimiza um limitante da norma \mathcal{H}_2 , obtém-se uma solução aproximada para o problema (P6). Um comentário que se coloca é que as ponderações do estado e do controle para medidas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ não precisam ser necessariamente as mesmas.

1.7 Conclusão

Um caso importante no projeto de controladores é o chamado controle descentralizado, isto é, deseja-se obter um ganho de realimentação de estado de estrutura bloco-diagonal, implicando que cada sub-sistema deve ser controlado apenas com as realimentações a nível local. Finalmente uma restrição de estrutura do tipo descentralização do controle poderia ser facilmente incluída, impondo-se à matriz W pertencente aos conjuntos \mathcal{C}_2 ou $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ uma estrutura do tipo

$$W_D = W'_D = \begin{bmatrix} W_{1D} & W_{2D} \\ W'_{2D} & W_3 \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

O ganho $K_D = W'_{2D}W_{1D}^{-1}$ resultante seria um ganho descentralizado. Outras restrições poderiam ser acrescentadas, desde que a convexidade fosse preservada.

Neste Capítulo foram apresentados resultados que permitem, via análise convexa, o controle de sistemas discretos no tempo por realimentação de estado. Através dos métodos abordados, problemas de controle robusto e rejeição a perturbações podem ser facilmente resolvidos, como por exemplo a otimização de critérios do tipo norma de uma função de transferência (minimização da norma \mathcal{H}_2 , minimização da norma \mathcal{H}_∞ ou minimização da norma \mathcal{H}_2 sujeita a um limitante \mathcal{H}_∞). Uma colocação muito importante é que as condições para o controle \mathcal{H}_2 são necessárias e suficientes, enquanto que as condições para o controle \mathcal{H}_∞ são apenas suficientes. Outro fato importante é que na síntese de um determinado controlador, as restrições podem se sobrepor, desde que a convexidade seja mantida. Por exemplo, podemos exigir para um controlador robusto à presença de incertezas e a falha de atuadores, a minimização de um critério \mathcal{H}_2 , sujeita à uma atenuação prescrita γ , via realimentação de estado com ganho descentralizado e alocação de pólos em uma sub-região do plano complexo.

Capítulo 2

Alocação de Pólos em Sub-Regiões

2.1 Introdução

O problema de alocação de pólos é de extrema importância em projetos de sistemas de controle. Isto porque, garantir a estabilidade e minimizar os distúrbios por meio de normas do tipo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ nem sempre é o suficiente para garantir o adequado comportamento de um sistema.

No projeto de sistemas de controle, as características de desempenho desejadas podem ser especificadas em termos da resposta transitória para uma entrada do tipo degrau unitário. A resposta transitória do sistema de controle está diretamente associada com a localização, no plano complexo, dos pólos do sistema em malha fechada. Assim, índices de desempenho tais como: velocidade de resposta, fator de amortecimento, frequência natural de oscilação, sobre sinal máximo (overshoot), etc, podem ser relacionados principalmente com a localização dos pólos em malha fechada do sistema de controle (é claro que alguns casos os zeros do sistema em malha fechada podem ter alguma influência sobre esses índices). Na maioria dos casos, ao invés da alocação precisa, delimitar uma sub-região do plano complexo onde os pólos em malha fechada do sistema devem, obrigatoriamente, estar situados é a melhor garantia de desempenho, e praticamente a única abordagem possível quando se trata de sistemas incertos.

Para sistemas sujeitos a incertezas na planta do processo, o desempenho geralmente é especificado em termos de intervalos aceitáveis para as características de resposta transitória, que, por sua vez, podem ser traduzidos por uma região no plano complexo, onde devem estar localizados os pólos do sistema em malha fechada.

A figura 2.1 mostra uma região de grande interesse no projeto de controladores

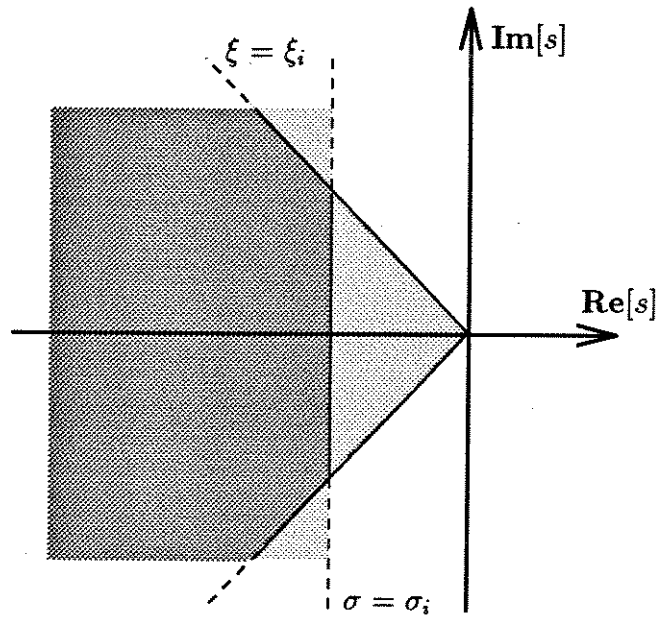


Figura 2.1: Região de Alocação de Pólos – Sistemas Contínuos.

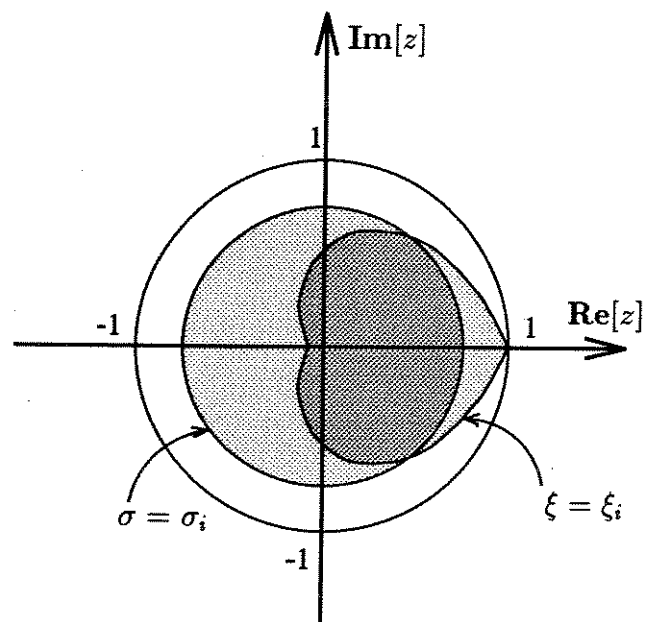


Figura 2.2: Região de Alocação de Pólos – Sistemas Discretos.

para sistemas contínuos no tempo. O mapeamento análogo para sistemas discretos da região de interesse para locação de pólos é mostrado na figura 2.2. Essas regiões, onde devem estar contidos os pólos de malha fechada do sistema, são obtidas a partir de especificações de resposta transitória para um sistema de segunda ordem, tendo como entrada um sinal do tipo degrau unitário.

O comportamento dinâmico de sistemas de segunda ordem pode ser descrito em termos dos parâmetros ξ - fator de amortecimento, ω_n - frequência natural de oscilação e σ - fator de atenuação. As regiões mostradas nas figuras 2.1 e 2.2 garantem, como característica de resposta transitória, um amortecimento maior do que ξ_i e um tempo de acomodação menor do que $4/\sigma_i$ (critério de 2%). Embora as regiões analisadas tenham sido determinadas para sistemas contínuos e discretos de segunda ordem, elas também podem ser adotadas para sistemas de ordem superior que possam ser aproximados por um modelo de segunda ordem, ou seja, que possam ser caracterizados por apenas um par de pólos dominantes. Nestes casos, os índices de desempenho devem ser checados através de uma simulação. Se estes não satisfizerem as especificações de projeto, deve-se efetuar mudanças na região de alocação de pólos, considerando-se as limitações do sistema físico, até que resultados satisfatórios sejam obtidos.

Neste trabalho utilizamos equações do tipo Lyapunov para se conseguir a alocação de pólos nas regiões desejadas. O processo de alocação de pólos se baseia na construção de desigualdades matriciais que, se satisfeitas, garantem a alocação de pólos desejada. Estudou-se a alocação em uma faixa vertical, em uma região circular, em uma região parabólica e em um anel circular.

2.2 Alocação em uma Faixa Vertical

Definindo $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ a região de alocação como sendo uma faixa vertical, parametrizada em termos de α e β , sendo $\alpha > \beta$, mostrada na figura 2.3. O objetivo é encontrar (se existir) um ganho de realimentação de estado $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que aloque todos os pólos na região desejada, ou seja, para todo j , $j = 1 \cdots n$, deve-se impor que

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{S}(\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

Como a região analisada é uma faixa vertical, é usado o fato de que $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ pode ser tratada como a interseção do semi-plano complexo esquerdo, deslocado de α , com o semi-plano complexo direito, deslocado de β . Assim, pode-se definir as matrizes deslocadas

$$A_\alpha = A - \alpha \mathbf{I} \quad , \quad A_\beta = A - \beta \mathbf{I} \quad (2.2)$$

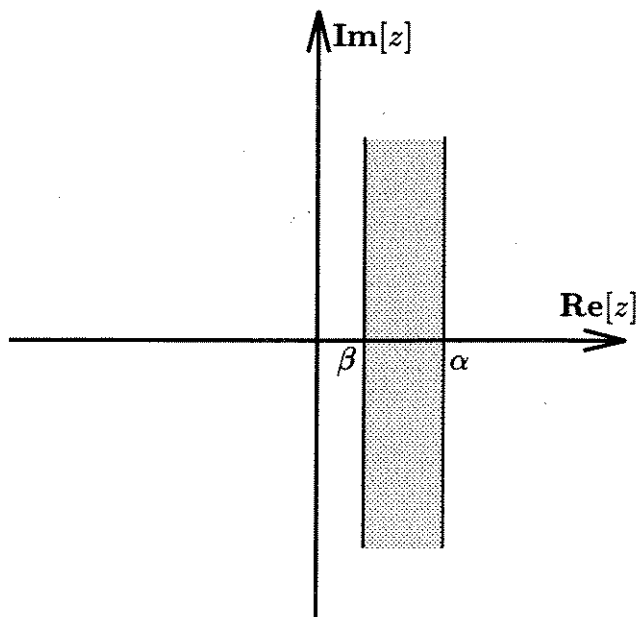


Figura 2.3: Alocação em uma Faixa Vertical.

e ainda as matrizes deslocadas em malha fechada

$$A_{cl\alpha} \triangleq A_\alpha - B_2K \quad , \quad A_{cl\beta} \triangleq A_\beta - B_2K \quad (2.3)$$

O próximo Teorema reúne condições suficientes para a alocação de pólos em uma faixa vertical.

Teorema 2 Se existir um mesmo ganho $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma mesma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ tais que as seguintes desigualdades matriciais do tipo Lyapunov sejam verificadas

$$A_{cl\alpha}P + PA'_{cl\alpha} < \mathbf{0} \quad (2.4)$$

$$-A_{cl\beta}P - PA'_{cl\beta} < \mathbf{0} \quad (2.5)$$

os pólos em malha fechada do sistema (1.1) estão alocados na região $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$.

Prova Note que a desigualdade (2.4) é normalmente associada a funções de Lyapunov para sistemas contínuos e, se satisfeita, implica que todos os autovalores de $A_{cl\alpha}$ têm parte real negativa. Analogamente, a segunda desigualdade, se satisfeita,

assegura que todos os autovalores de $-A_{cl\beta}$ têm parte real negativa, ou equivalentemente, que todos os autovalores de $A_{cl\beta}$ têm parte real positiva. Portanto, para todo j , $j = 1 \cdots n$, tem-se

$$\operatorname{Re} [\lambda_j(A_{cl\alpha})] = \operatorname{Re} [\lambda_j(A_{cl} - \alpha\mathbf{I})] < 0 \iff \operatorname{Re} [\lambda_j(A_{cl})] < \alpha \quad (2.6)$$

e também

$$\operatorname{Re} [\lambda_j(-A_{cl\beta})] = -\operatorname{Re} [\lambda_j(A_{cl} - \beta\mathbf{I})] < 0 \iff \operatorname{Re} [\lambda_j(A_{cl})] > \beta \quad (2.7)$$

Logo, se um mesmo ganho K e uma mesma P solucionam ambas as desigualdades, pode-se afirmar que

$$\beta < \operatorname{Re} [\lambda_j(A_{cl})] < \alpha \quad (2.8)$$

para todo j , $j = 1 \cdots n$, e a prova está completa. □

Devido ao fato de que a faixa vertical é uma região convexa, o Teorema anterior é válido também para sistemas incertos, bastando para isso verificar as desigualdades (2.4) e (2.5) em todo o domínio de incertezas.

2.3 Alocação em uma Região Circular

A região de alocação estudada neste caso $\mathcal{T}(\delta, \rho)$ é definida como sendo uma circunferência de raio $\rho > 0$, centrada em δ , conforme mostrado na figura 2.4. Novamente, o problema é encontrar, caso exista, um ganho de realimentação de estado $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que coloque todos os autovalores de A_{cl} na região desejada, ou seja, para todo j , $j = 1 \cdots n$, é necessário que

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{T}(\delta, \rho) \quad (2.9)$$

O Teorema a seguir fornece condições suficientes para a alocação de pólos na região circular.

Teorema 3 Se existir um ganho $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ tais que a seguinte desigualdade matricial do tipo Lyapunov seja verificada

$$A_{cl\delta} P A_{cl\delta}' - \rho^2 P < \mathbf{0} \quad (2.10)$$

onde

$$A_{cl\delta} \triangleq A_{cl} - \delta\mathbf{I} \quad (2.11)$$

os pólos em malha fechada do sistema (1.1) estão alocados na região $\mathcal{T}(\delta, \rho)$.

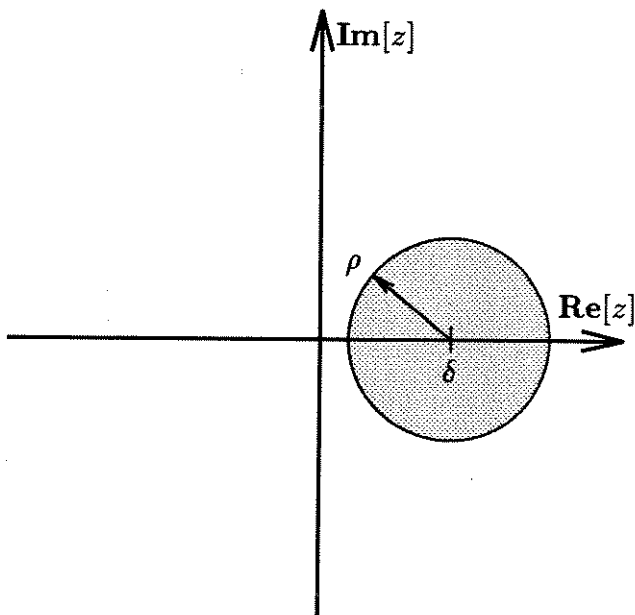


Figura 2.4: Alocação em uma Região Circular.

Prova A desigualdade de Lyapunov $A_{cl\delta} P A'_{cl\delta} - P < \mathbf{0}$, se satisfeita, garante que os autovalores de $A_{cl\delta}$ estão localizados no interior do círculo unitário de centro na origem, ou seja $\text{Re} [\lambda_j(A_{cl\delta})]^2 + \text{Im} [\lambda_j(A_{cl\delta})]^2 < 1$ (ver Teorema 1). Portanto a desigualdade (2.10) implica, para todo j , $j = 1 \dots n$, em

$$\begin{aligned}
 1 &> \text{Re} [\lambda_j(A_{cl\delta}/\rho)]^2 + \text{Im} [\lambda_j(A_{cl\delta}/\rho)]^2 \\
 \rho^2 &> \text{Re} [\lambda_j(A_{cl\delta})]^2 + \text{Im} [\lambda_j(A_{cl\delta})]^2 \\
 &> \text{Re} [\lambda_j(A_{cl} - \delta\mathbf{I})]^2 + \text{Im} [\lambda_j(A_{cl} - \delta\mathbf{I})]^2 \\
 &> \{\text{Re} [\lambda_j(A_{cl})] - \delta\}^2 + \text{Im} [\lambda_j(A_{cl})]^2
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Portanto os autovalores de $\lambda_j(A_{cl})$, para todo j , $j = 1 \dots n$, estão situados na região circular $\mathcal{T}(\delta, \rho)$ e a prova está completa. □

O Teorema anterior também pode ser estendido para sistemas incertos. Para isso, a condição (2.10) deve ser verificada para todo o domínio de incertezas.

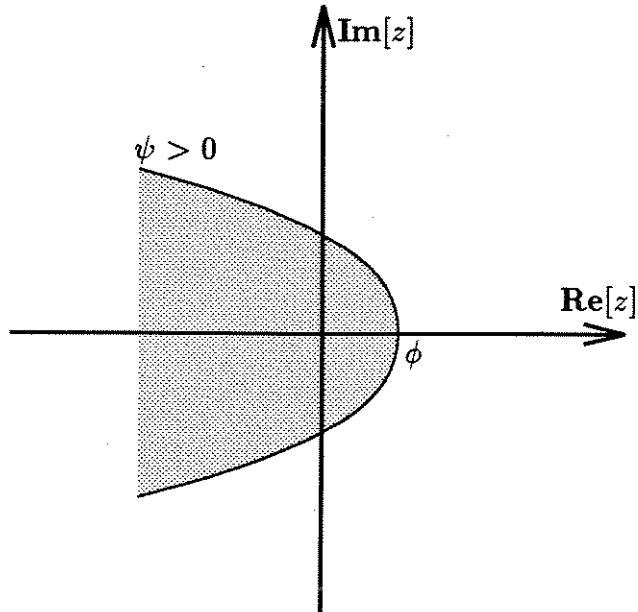


Figura 2.5: Alocação à Esquerda de uma Região Parabólica.

2.4 Alocação em uma Região Parabólica

O problema a estudado pode ser formulado definindo-se a região de alocação $\mathcal{U}(\psi, \phi)$ como sendo a região à esquerda de uma parábola de vértice ϕ e convexidade $\psi > 0$, conforme mostrado na figura 2.5. A equação da região parabólica pode ser dada por: $\psi \{ \text{Im} [\lambda_j(A_{cl})] \}^2 + \text{Re} [\lambda_j(A_{cl})] - \phi \leq 0$. O objetivo é também encontrar, se existir, um ganho de realimentação de estado $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que aloque todos os pólos do sistema em malha fechada (1.1) na região parabólica, ou seja, para todo $j, j = 1 \dots n$, deve-se ter

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\psi, \phi) \quad (2.13)$$

O próximo Teorema fornece condições suficientes para alocação de pólos na região parabólica. Para maiores detalhes envolvendo a alocação de pólos em uma região parabólica, ver referência [34].

Teorema 4 Se existir um ganho $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma matriz $P = P' > \mathbf{0}$, tais que a seguinte desigualdade matricial do tipo Lyapunov seja verificada

$$A_{cl\phi}P + PA'_{cl\phi} + \psi A_{cl}PA'_{cl} < \mathbf{0} \quad (2.14)$$

onde

$$A_{cl\phi} \triangleq A_{cl} - \phi \mathbf{I} \quad (2.15)$$

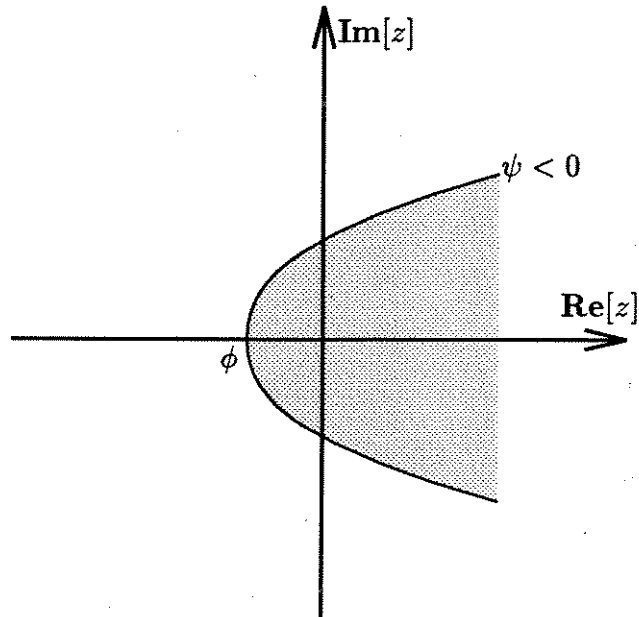


Figura 2.6: Alocação à Direita uma Região Parabólica.

Os pólos em malha fechada do sistema (1.1) estão alocados na região $\mathcal{U}(\psi, \phi)$.

Prova Ver referência [34].

□

Os resultados do Teorema anterior podem ser estendidos para sistemas incertos, verificando-se a condição (2.14) em todo o domínio de incertezas.

Nota: Se a região parabólica for como mostrada na figura 2.6, com uma convexidade $\psi < 0$, a alocação deve ser à direita da parábola, e portanto, a desigualdade de Lyapunov deve ser modificada para

$$-A_{cl\phi}P - PA'_{cl\phi} - \psi A_{cl}PA'_{cl} < \mathbf{0} \quad (2.16)$$

2.5 Alocação em um Anel Circular

Para este caso, a região de alocação é definida como $\mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$, sendo parametrizada em termos do centro δ , do raio médio ρ e da espessura $\varepsilon > 0$ do anel circular, naturalmente com $\rho > \varepsilon$, conforme mostrado na figura 2.7. Devemos encontrar,

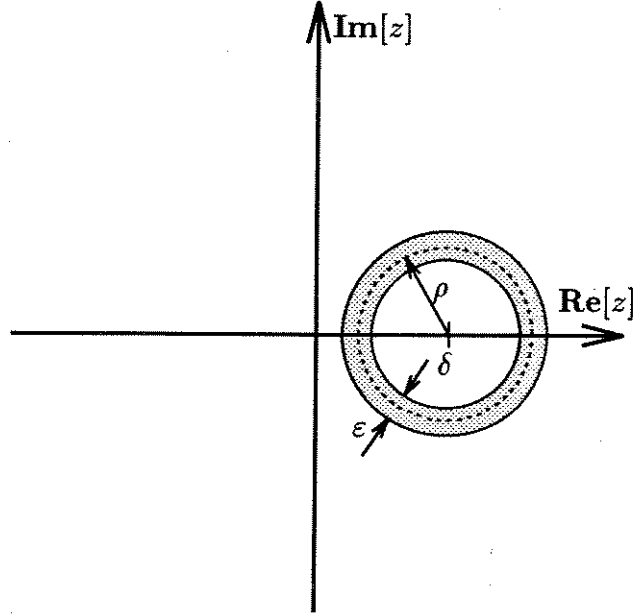


Figura 2.7: Alocação em um Anel Circular.

se existir, um ganho de realimentação de estado $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que aloque todos os autovalores de A_{cl} na região desejada, ou seja, para todo j , $j = 1 \cdots n$, é necessário que

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon) \quad (2.17)$$

O seguinte Teorema implica em condições suficientes para a alocação de pólos desejada.

Teorema 5 Se existir um mesmo ganho $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma mesma matriz $P = P' > \mathbf{0}$, tais que as seguintes desigualdades matriciais do tipo Lyapunov sejam verificadas

$$A_{cl\delta} P A_{cl\delta}' - (\rho + \varepsilon/2)^2 P < \mathbf{0} \quad (2.18)$$

$$-A_{cl\delta} P A_{cl\delta}' + (\rho - \varepsilon/2)^2 P < \mathbf{0} \quad (2.19)$$

para $A_{cl\delta} \triangleq A_{cl} - \delta \mathbf{I}$. Os pólos em malha fechada do sistema (1.1) estão alocados na região $\mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$.

Prova A prova deste Teorema é semelhante à do Teorema 3, exceto pela segunda desigualdade (2.19), que garante a alocação externa à circunferência.

□

Nota: A alocação de pólos em um anel circular só é possível para sistemas precisamente conhecidos ($N = 1$). As condições do Teorema anterior, para sistemas incertos ($N > 1$), garantem apenas a alocação dos autovalores correspondentes aos vértices do domínio poliedral no anel circular, nada podendo-se afirmar com relação à combinação convexa dos mesmos.

2.6 Conclusão

Os resultados descritos neste capítulo permitem, através de equações do tipo Lyapunov, a alocação dos pólos em malha fechada do sistema de controle nas regiões desejadas. O método de alocação se baseia na imposição de desigualdades matriciais que, se satisfeitas, garantem a alocação de pólos na região desejada.

A idéia básica utilizada foi a de se transladar o semi-plano esquerdo (para o caso de alocação em uma faixa vertical) ou o círculo unitário com raio ρ (para a alocação em uma região circular). Para a região parabólica, utilizamos diretamente as equações desenvolvidas em [34]. As considerações dos teoremas que garantem a alocação de pólos são apenas suficientes.

Capítulo 3

Controle de Sistemas com Alocação de Pólos

3.1 Introdução

A partir dos resultados apresentados nos capítulos anteriores, é possível formular condições suficientes que, além de assegurarem uma minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , ou ainda, a minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2 sujeito a um limitante \mathcal{H}_∞ (otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$), impõem a alocação de pólos em uma sub-região do plano complexo, contida no interior do círculo unitário.

A ideia aqui desenvolvida é a busca dentre todos os ganhos de realimentação K que garantem a alocação dos pólos na região desejada, aquele que minimiza um limitante da norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , ou ainda, garante a minimização de um custo garantido \mathcal{H}_2 , sujeito a um limitante \mathcal{H}_∞ .

As regiões de alocação estudadas foram: uma faixa vertical, uma região circular, uma região parabólica e um anel circular. A alocação para um anel circular só é possível para sistemas precisamente conhecidos, ao contrário das demais regiões consideradas no capítulo anterior, cujos resultados são válidos também para sistema incertos.

Neste Capítulo, as regiões consideradas são dadas pela interseção das regiões estudadas no Capítulo 2 com o círculo unitário.

3.2 Interseção com uma Faixa Vertical

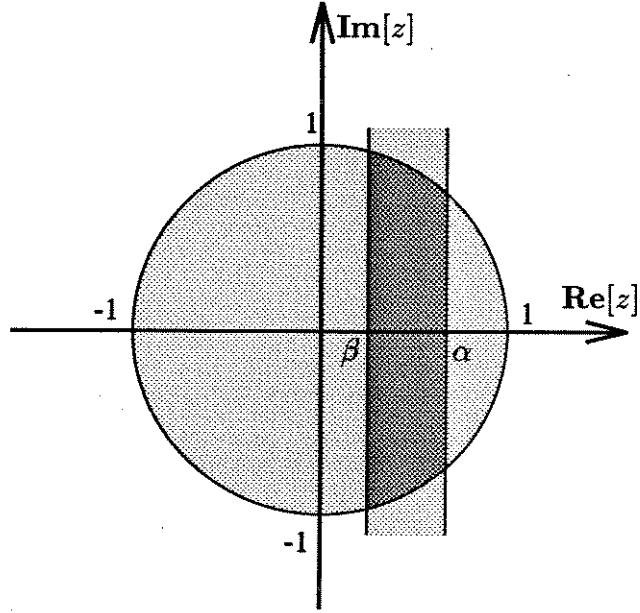


Figura 3.1: Interseção com uma Faixa Vertical.

Definindo-se as matrizes aumentadas

$$F_\alpha \triangleq \begin{bmatrix} A_\alpha & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad F_\beta \triangleq \begin{bmatrix} A_\beta & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde $A_\alpha \triangleq A - \alpha \mathbf{I}$ e $A_\beta \triangleq A - \beta \mathbf{I}$, tem-se o seguinte Teorema abordando alocação de pólos na interseção de uma faixa vertical com o círculo unitário, região $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ mostrada na figura 3.1.

Teorema 6 Definindo-se as funções matriciais $\Theta_{\alpha i}(\cdot)$ e $\Theta_{\beta i}(\cdot)$ como sendo

$$\Theta_{\alpha i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\alpha i} \mathcal{W} + \mathcal{W} F_{\alpha i}' \quad (3.2)$$

$$\Theta_{\beta i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\beta i} \mathcal{W} + \mathcal{W} F_{\beta i}' \quad (3.3)$$

e o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_S = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{R}_{S_i} \quad (3.4)$$

onde (para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno)

$$\mathcal{R}_{S_i} = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v' \Theta_{\alpha i}(\mathcal{W}) v \leq -\epsilon, -v' \Theta_{\beta i}(\mathcal{W}) v \leq -\epsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.5)$$

A existência de $W \in \mathcal{R}_S$ garante que o ganho $K = W_2'W_1^{-1}$ aloca todos os pólos do sistema em malha fechada na região $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$, para qualquer $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova Das equações (3.2) e (3.3) que definem $\Theta_{\alpha i}(W)$ e $\Theta_{\beta i}(W)$, respectivamente, tem-se que $\forall v \in \mathcal{N}$ e $\forall i = 1 \dots N$

$$\begin{aligned}
-\epsilon &\geq v' \Theta_{\alpha i}(W) v \\
&\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\alpha i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\alpha i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \right\} v \\
&\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\alpha i} W_1 - B_{2i} W_2' & A_{\alpha i} W_2 - B_{2i} W_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 A_{\alpha i}' - W_2 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ W_2' A_{\alpha i}' - W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \\
&\geq x' \left[(A_{\alpha i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_{\alpha i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' \right] x \quad (3.6)
\end{aligned}$$

que resulta, para todo $i, i = 1 \dots N$, com $K = W_2' W_1^{-1}$ e $P = W_1$

$$(A_{\alpha i} - B_{2i} K) P + P (A_{\alpha i} - B_{2i} K)' < \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Por outro lado, $\forall v \in \mathcal{N}$, e $\forall i = 1 \dots N$

$$\begin{aligned}
-\epsilon &\geq -v' \Theta_{\beta i}(W) v \\
&\geq -v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\beta i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\beta i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \right\} v \\
&\geq -v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\beta i} W_1 - B_{2i} W_2' & A_{\beta i} W_2 - B_{2i} W_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 A_{\beta i}' - W_2 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ W_2' A_{\beta i}' - W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \\
&\geq -x' \left[(A_{\beta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_{\beta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' \right] x \quad (3.8)
\end{aligned}$$

resultando

$$\left[-(A_{\beta i} - B_{2i} K) \right] P + P \left[-(A_{\beta i} - B_{2i} K) \right]' < \mathbf{0} \quad (3.9)$$

para todo $i, i = 1 \dots N$. Note que o escalar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno é usado para “fechar” as desigualdades estritas em (3.7) e (3.9), resultando em $\beta <$

Re $[\lambda_j(A_{cl})] < \alpha$, $j = 1 \cdots n$, ou seja, todos os autovalores estão na região prescrita $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$, para todo F_i , $i = 1 \cdots N$, devido à convexidade da do domínio de incertezas, também vale para qualquer par incerto $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$.

□

Corolário 3 A solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_S] \right\} \quad (3.10)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (R\mathcal{W})$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{S}(\alpha, \beta)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 3 no Capítulo 1.

□

Corolário 4 A solução ótima de

$$(\mathcal{W}, \mu) = \arg \max \left\{ \mu : \mu \in [0, \mu_M] , (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \text{ e } \mathcal{W} \in \mathcal{R}_S \right\} \quad (3.11)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{S}(\alpha, \beta)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 7 e Corolário 2 no Capítulo 1.

□

Corolário 5 A solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty(\gamma) \cap \mathcal{R}_S] \right\} \quad (3.12)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

(a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (R\mathcal{W})$ e $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$.

(b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{S}(\alpha, \beta)$, $j = 1 \dots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 10 no Capítulo 1. □

3.3 Interseção com uma Região Circular

Definindo-se a matriz aumentada

$$F_\delta \triangleq \begin{bmatrix} A_\delta & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde $A_\delta \triangleq A - \delta\mathbf{I}$, tem-se então o seguinte Teorema envolvendo alocação de pólos na interseção de uma região circular com o círculo unitário, $\mathcal{T}(\delta, \rho)$ mostrada na figura 3.2.

Teorema 7 Definindo-se a função matricial $\Theta_{\delta i}(\cdot)$ como

$$\Theta_{\delta i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\delta i}\mathcal{W}F_{\delta i}' - \rho^2\mathcal{W} \quad (3.14)$$

e o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_T = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{R}_{T_i} \quad (3.15)$$

onde (para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno)

$$\mathcal{R}_{T_i} = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v'\Theta_{\delta i}(\mathcal{W})v \leq -\epsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.16)$$

A existência de $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_T$ garante que o ganho $K = W_2'W_1^{-1}$ aloca todos os pólos do sistema em malha fechada na região $\mathcal{T}(\delta, \rho)$, para qualquer $F \in \mathcal{D}_F$.

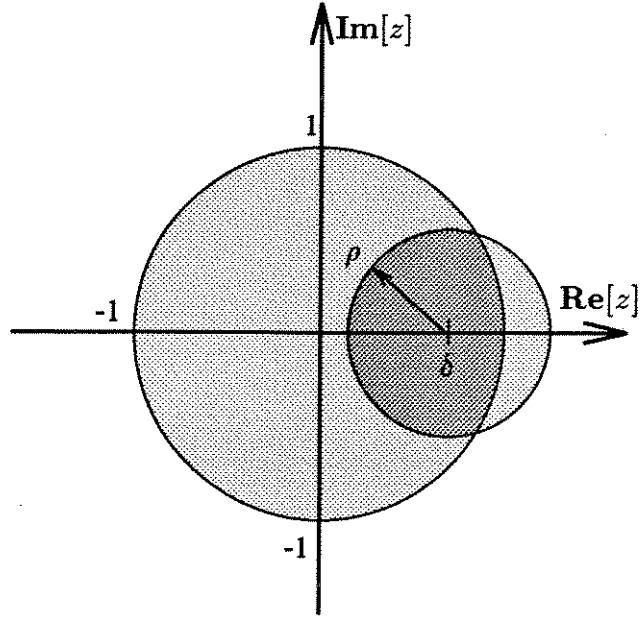


Figura 3.2: Interseção com uma Região Circular.

Prova Da equação (3.14), tem-se que $\forall v \in \mathcal{N}, \forall i = 1 \dots N$

$$\begin{aligned}
 -\epsilon &\geq v' \Theta_{\delta i}(\mathcal{W}) v \\
 &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\delta i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\delta i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' - \rho^2 \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right\} v \\
 &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\delta i} W_1 A_{\delta i}' - B_{2i} W_2' A_{\delta i}' - A_{\delta i} W_2 B_{2i}' + B_{2i} W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \right. \\
 &\quad \left. - \rho^2 \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right\} v \\
 &\geq x' \left[(A_{\delta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_{\delta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - \rho^2 W_1 \right] x + \\
 &\quad + x' B_{2i} [W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2] B_{2i}' x \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

e visto que $\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$, para todo $i, i = 1 \dots N$

$$(A_{\delta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_{\delta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' - \rho^2 W_1 < \mathbf{0} \tag{3.18}$$

Finalmente, com $K = W_2'W_1^{-1}$ e $P = W_1$

$$(A_{\delta i} - B_{2i}K)P(A_{\delta i} - B_{2i}K)' - \rho^2 P < 0 \quad (3.19)$$

implicando que (2.10) vale para todo i , $i = 1 \dots N$ e graças à convexidade, também vale para qualquer $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Portanto a prova está completa. \square

Corolário 6 A solução ótima de

$$W = \arg \min \left\{ \text{Tr}(RW) : W \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_T] \right\} \quad (3.20)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr}(RW)$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{T}(\delta, \rho)$, $j = 1 \dots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 3 no Capítulo 1. \square

Corolário 7 A solução ótima de de

$$(W, \mu) = \arg \max \left\{ \mu : \mu \in [0, \mu_M] , (W, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \text{ e } W \in \mathcal{R}_T \right\} \quad (3.21)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{T}(\delta, \rho)$, $j = 1 \dots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 7 e Corolário 2 no Capítulo 1. \square

Corolário 8 A solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty(\gamma) \cap \mathcal{R}_T] \right\} \quad (3.22)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

(a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (R\mathcal{W})$ e $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$.

(b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{T}(\delta, \rho)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 10 no Capítulo 1. □

3.4 Interseção com uma Região Parabólica

Defindo-se a matriz aumentada

$$F_\phi \triangleq \begin{bmatrix} A_\phi & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde $A_\phi \triangleq A_i - \phi\mathbf{I}$, o Teorema seguinte trata da alocação de pólos na interseção de uma região parabólica com o círculo unitário, denominada $\mathcal{U}(\psi, \phi)$ conforme a figura 3.3.

Teorema 8 Definindo-se a função matricial $\Theta_{\phi i}(\cdot)$ como

$$\Theta_{\phi i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\phi i}\mathcal{W} + \mathcal{W}F_{\phi i}' + \psi F_i\mathcal{W}F_i' \quad (3.24)$$

e o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_U = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{R}_{U_i} \quad (3.25)$$

onde (para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno)

$$\mathcal{R}_{U_i} = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v'\Theta_{\phi i}(\mathcal{W})v \leq -\epsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.26)$$

A existência de $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_U$ garante que o ganho $K = W_2'W_1^{-1}$ aloca todos os pólos do sistema em malha fechada na região $\mathcal{U}(\psi, \phi)$, para qualquer $F \in \mathcal{D}_F$.

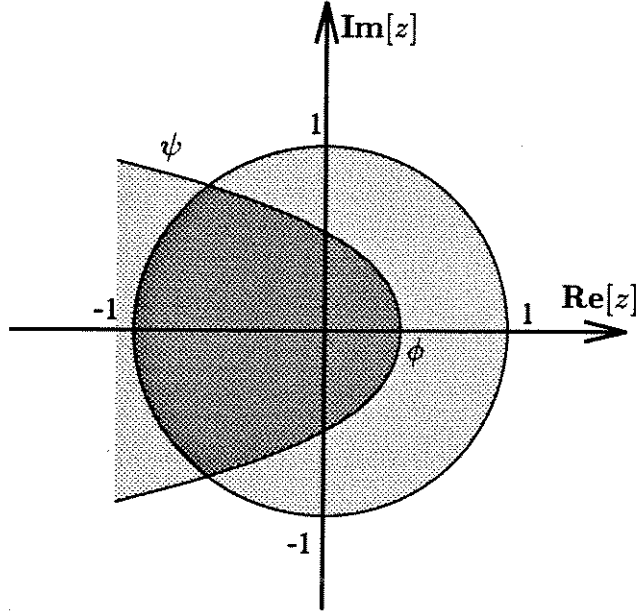


Figura 3.3: Interseção com uma Região Parabólica.

Prova A partir das equações (1.45) que definem $\Theta_{\phi i}(\mathcal{W})$, tem-se que $\forall v \in \mathcal{N}$ e $\forall i = 1 \dots N$.

$$\begin{aligned}
 -\epsilon &\geq v' \Theta_{\phi i}(\mathcal{W}) v \\
 &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\phi i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\phi i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' + \right. \\
 &\quad \left. + \psi \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \right\} v \\
 &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\phi i} W_1 - B_{2i} W_2' & A_{\phi i} W_2 - B_{2i} W_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 A_{\phi i}' - W_2 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ W_2' A_{\phi i}' - W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. + \psi \begin{bmatrix} A_i W_1 A_i' - B_{2i} W_2' A_i' - A_i W_2 B_{2i}' + B_{2i} W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \\
 &\geq x' \left[(A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + \right. \\
 &\quad \left. + \psi (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + \right] v
 \end{aligned}$$

$$+ B_{2i} \left(W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2 \right) B_{2i}' \Big] x \quad (3.27)$$

e visto que $W \geq 0 \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$, para todo $i = 1 \dots N$ e $\forall v \in \mathcal{N}$ tem-se

$$\begin{aligned} & \left(A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1} \right) W_1 + W_1 \left(A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1} \right)' + \\ & + \psi \left(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1} \right) W_1 \left(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1} \right)' < 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

que resulta, para todo $i, i = 1 \dots N$, com $K = W_2' W_1^{-1}$ e $P = W_1$

$$\left(A_{\phi i} - B_{2i} K \right) P + P \left(A_{\phi i} - B_{2i} K \right)' + \psi \left(A_i - B_{2i} K \right) P \left(A_i - B_{2i} K \right)' < 0 \quad (3.29)$$

ou seja, (2.14) vale para todo $i, i = 1 \dots N$ e, devido à convexidade da equação, vale para qualquer $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Portanto a prova está completa. □

Corolário 9 A solução ótima de

$$W = \arg \min \left\{ \text{Tr} (RW) : W \in \left[\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_u \right] \right\} \quad (3.30)$$

fornece $K = W_2' W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (RW)$.
- (b) $\lambda_j(A_d) \in \mathcal{U}(\psi, \phi) \quad , \quad j = 1 \dots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 3 no Capítulo 1. □

Corolário 10 A solução ótima de

$$(\mathcal{W}, \mu) = \arg \max \left\{ \mu : \mu \in [0, \mu_M] \quad , \quad (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \quad \text{e} \quad \mathcal{W} \in \mathcal{R}_u \right\} \quad (3.31)$$

fornece $K = W_2' W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.

$$(b) \lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\psi, \phi) \quad , \quad j = 1 \cdots n.$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 7 e Corolário 2 no Capítulo 1. □

Corolário 11 A solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) \quad : \quad \mathcal{W} \in \left[\mathcal{C}_\infty(\gamma) \cap \mathcal{R}_U \right] \right\} \quad (3.32)$$

fornece $K = W_2' W_1^{-1}$ assegurando

$$(a) \|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (R\mathcal{W}) \text{ e } \|H(z)\|_\infty \leq \gamma.$$

$$(b) \lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\psi, \phi) \quad , \quad j = 1 \cdots n.$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 10 no Capítulo 1. □

Observação : Para a alocação à direita de uma parábola, ou seja, para a convexidade $\psi < 0$, o conjunto dado por (3.26) deve ser descrito como:

$$\mathcal{U}_i = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} \quad : \quad -v' \Theta_{\phi_i}(\mathcal{W}) v \leq -\epsilon, \quad \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.33)$$

3.5 Interseção com um Anel Circular

Devido a não convexidade da região de alocação $\mathcal{V}(\delta, \rho, \epsilon)$ mostrada na figura (3.4), definida como a interseção do anel circular com a circunferência unitária, o Teorema a seguir envolvendo alocação de pólos em um anel circular, é válido apenas para sistemas precisamente conhecidos.

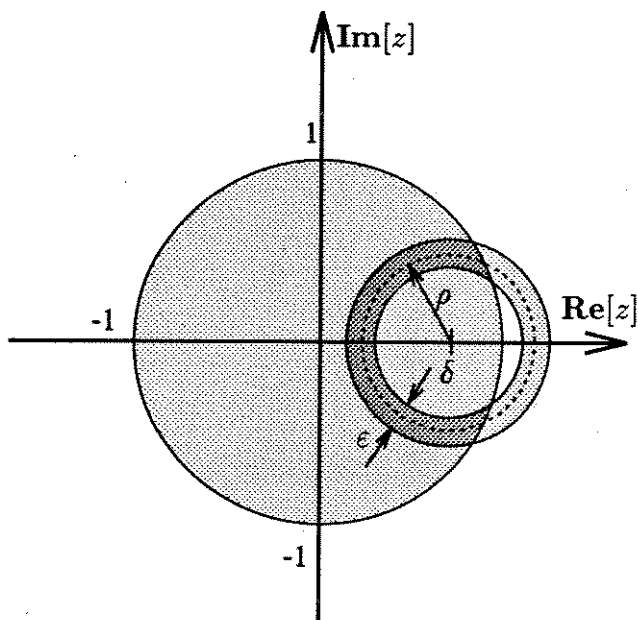


Figura 3.4: Interseção com um Anel Circular.

Teorema 9 Para F_δ definido como

$$F_\delta \triangleq \begin{bmatrix} A_\delta & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

com $A_\delta \triangleq A - \delta \mathbf{I}$. Pode-se definir as seguintes funções matriciais $\Theta_{ext}(\cdot)$ e $\Theta_{int}(\cdot)$ como:

$$\Theta_{ext}(\mathcal{W}) \triangleq F_\delta \mathcal{W} F'_\delta - (\rho + \epsilon/2) \mathcal{W} \quad (3.35)$$

$$\Theta_{int}(\mathcal{W}) \triangleq F_\delta \mathcal{W} F'_\delta - (\rho - \epsilon/2) \mathcal{W} \quad (3.36)$$

e o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_\mathcal{V} = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0} : v' \Theta_{ext}(\mathcal{W}) v \leq -\epsilon, -v' \Theta_{int}(\mathcal{W}) v \leq -\epsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.37)$$

A existência de $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_\mathcal{V}$ garante que o ganho $K = W'_2 W_1^{-1}$ aloca todos os pólos do sistema em malha fechada na região $\mathcal{V}(\delta, \rho, \epsilon)$ para um dado par $(A, B_2) \rightsquigarrow F$.

Prova A prova deste Teorema é semelhante ao Teorema 7 e por esse motivo não será apresentada.

□

Corolário 12 A solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_\nu] \right\} \quad (3.38)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr} (R\mathcal{W})$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$, $j = 1 \dots n$.

para um dado par $(A, B_2) \rightsquigarrow F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 3 no Capítulo 1.

□

Corolário 13 A solução ótima de

$$(\mathcal{W}, \mu) = \arg \max \left\{ \mu : \mu \in [0, \mu_M] , (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \text{ e } \mathcal{W} \in \mathcal{R}_\nu \right\} \quad (3.39)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H(z)\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$, $j = 1 \dots n$.

para um dado par $(A, B_2) \rightsquigarrow F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 7 e Corolário 2 no Capítulo 1.

□

Corolário 14 A solução ótima de

$$\mathcal{W} = \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty(\gamma) \cap \mathcal{R}_\nu] \right\} \quad (3.40)$$

fornece $K = W_2'W_1^{-1}$ assegurando

(a) $\|H(z)\|_2^2 \leq \text{Tr}(RW)$ e $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$.

(b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$, $j = 1 \cdots n$.

para um dado par $(A, B_2) \rightsquigarrow F$.

Prova O item (b) decorre do Teorema anterior; para (a), veja Lema 10 no Capítulo 1.

□

3.6 Conclusão

Neste Capítulo foram apresentadas condições suficientes que asseguram a otimização de critérios do tipo norma de funções de transferência, além de garantir a alocação de pólos em uma sub-região do plano complexo, contida no interior do círculo unitário.

Desde que a convexidade seja mantida, qualquer restrição de alocação de pólos pode ser incorporada ao problema, bem como a combinação de várias regiões de alocação.

Capítulo 4

Solução Numérica e Exemplos

4.1 Introdução

Uma metodologia numérica para a resolução dos problemas de controle robusto com alocação de pólos é proposto neste Capítulo, através de um algoritmo de linearização externa, baseado no método de planos de corte. São apresentados também quatro exemplos numéricos que abordam praticamente todos os casos possíveis de otimização (\mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) e alocação de pólos (faixa vertical, região circular, região parabólica e anel circular) discutidos neste trabalho. Os exemplos ilustram sistemas de controle reais e hipotéticos, discretos no tempo, com e sem a presença de incertezas nos parâmetros dos modelos.

4.2 Método de Planos de Corte

A idéia básica do método de planos de corte é a resolução de uma série de problemas de programação linear, cujas soluções convergem para a solução do problema original. Esse método possibilita a resolução dos problemas convexos tratados nos capítulos anteriores, gerando hiperplanos que se aproximam gradativamente do conjunto de soluções factíveis, num processo denominado linearização externa. Trata-se de um método dual, que “caminha” de solução infactível em solução infactível, piorando o valor da função objetivo a cada iteração, até que, dentro de uma certa precisão, atinge-se uma solução factível, obtendo-se a solução ótima do problema.

Apenas o algoritmo de alocação em uma faixa vertical com o critério \mathcal{H}_2 é apresentado. As demais situações são abordadas com algoritmos análogos e portanto, não descritas neste trabalho.

O algoritmo de linearização externa é dado por:

- **Passo 1:** Defina um politopo inicial \mathcal{P}^0 que contenha o conjunto convexo $[\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_S]$. Faça $\ell = 0$ (contador de iterações).
- **Passo 2:** Resolva o problema de Programação Linear:

$$\min \left\{ \text{Tr} (RW) \quad : \quad W \in \mathcal{P}^\ell \right\}$$

Se o problema for infactível, então $\mathcal{C}_2 = \emptyset$ e o programa se encerra.

- **Passo 3:** Verifique se a solução $W^\ell \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_S]$. No caso afirmativo pare. O algoritmo atingiu a solução ótima, cujo ganho correspondente é dado por $K = W_2' W_1^{-1}$. Caso contrário, calcule a matriz $\Phi(W^\ell)$ e o escalar $\varphi(W^\ell)$ que definem o hiperplano separador entre W^ℓ e $[\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_S]$, e obtenha o novo politopo $\mathcal{P}^{\ell+1}$, dado por:

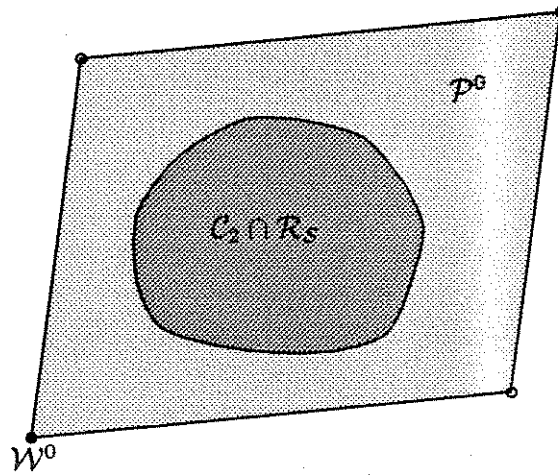
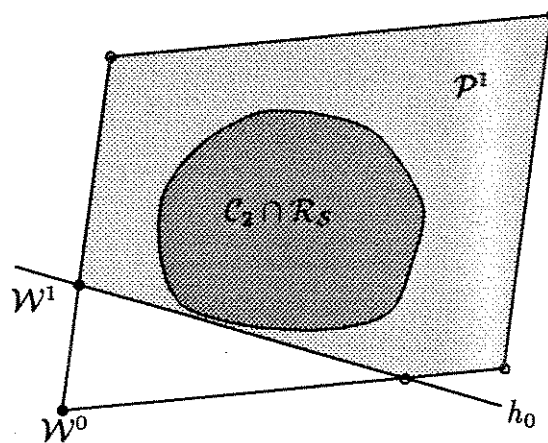
$$\mathcal{P}^{\ell+1} \triangleq \mathcal{P}^\ell \cap \left\{ \varphi(W^\ell) + \langle \Phi(W^\ell), W \rangle \leq -\epsilon \right\} \quad (4.1)$$

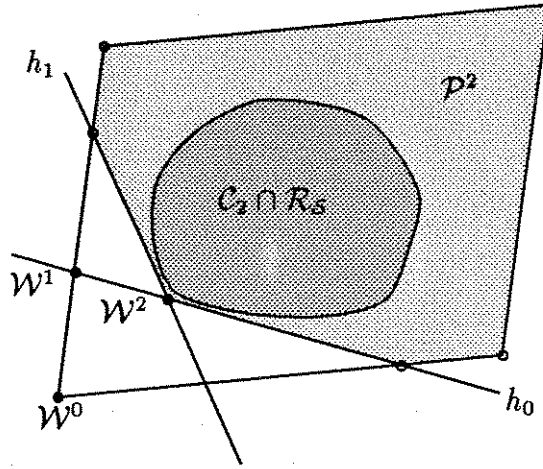
Faça $\ell = \ell + 1$ e retorne ao passo 2.

Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 tem-se uma seqüência ilustrando o método de planos de corte. Esta seqüência se prolonga até que uma solução factível seja encontrada, ou caso contrário, que não exista uma solução para o problema de otimização convexa. Note que a seqüência de politopos \mathcal{P}^ℓ , $\ell = 0, 1, \dots$, satisfaz

$$\mathcal{P}^0 \supset \mathcal{P}^1 \supset \mathcal{P}^2 \supset \dots \supset [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_S] \quad (4.2)$$

O procedimento sempre converge para o seu ótimo global quando uma solução existe. Como nos demais procedimentos do tipo plano de corte, a taxa de convergência (que depende da profundidade dos cortes dados) não pode ser calculada de maneira global. Neste algoritmo, a cada iteração, calculamos o hiperplano separador a partir da restrição mais violada do conjunto de restrições, garantindo com isso que, localmente, realizamos o corte mais profundo.

Figura 4.1: Politopo Inicial \mathcal{P}^0 .Figura 4.2: Politopo \mathcal{P}^1 .

Figura 4.3: Polígono P^2 .

No caso de otimização \mathcal{H}_2 a equação do plano de corte que separa \mathcal{W} de C_2 correspondente à restrição $v'\Theta_{2i}(\mathcal{W})v \leq 0$, $v \in \mathcal{N}$, definida em (1.45) é dado por

$$f(\mathcal{W}) \geq f(\mathcal{W}_0) + \langle F_i' v_0 v_0' F_i - v_0 v_0', \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \rangle \quad (4.3)$$

Para a alocação de pólos em uma faixa vertical, a equação do plano de corte que separa \mathcal{W} de \mathcal{R}_S correspondente à restrição $v'\Theta_{\alpha i}(\mathcal{W})v \leq 0$, $v \in \mathcal{N}$, definida em (3.2) é dado por

$$f(\mathcal{W}) \geq f(\mathcal{W}_0) + \langle 2F_i' v_0 v_0', \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \rangle \quad (4.4)$$

onde i , F_i e v_0 , são obtidos a partir da restrição mais violada.

4.3 Exemplo 1

Este primeiro exemplo numérico foi gerado aleatoriamente, contendo incertezas nas matrizes A e B_2 , definindo um polígono de incertezas \mathcal{D}_F composto de 4 “vértices”. São abordados os casos de alocação de pólos em uma região parabólica com otimização da norma \mathcal{H}_2 e alocação de pólos em uma região circular com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

As matrizes A e B_2 que definem a dinâmica do problema são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6677 & 0.5439 & 0.3157 \\ 0.6820 & 0.1392 & 0.5147 \\ 0.1996 & 0.4503 & 0.8815 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.9166 & 0.9894 & 0.4397 \\ 0.8659 & 0.2155 & 0.4675 \\ 0.8900 & 0.4460 & 0.8066 \end{bmatrix}$$

e

$$B_{2_1} = \begin{bmatrix} 0.5625 & -0.6202 & 0.9765 \\ -0.1274 & 0.2371 & 0.9778 \\ 0.5542 & -1.5870 & 1.1700 \end{bmatrix}, \quad B_{2_2} = \begin{bmatrix} -1.0970 & -0.4015 & 0.1593 \\ -0.7313 & -0.7707 & 0.4995 \\ 1.4050 & -0.2627 & -1.0550 \end{bmatrix}$$

com as matrizes de ponderação dadas por:

$$B_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Portanto, os 4 “vértices” do sistema incerto são dados por:

$$F_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -B_{2_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} A_1 & -B_{2_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} A_2 & -B_{2_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} A_2 & -B_{2_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

4.3.1 Otimização \mathcal{H}_2

Primeiramente efetuou-se apenas a minimização de um limitante σ da norma \mathcal{H}_2 (item (a)). A seguir, impôs-se uma restrição de alocação de pólos em uma região parabólica (item (b)), com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

(a) Otimização \mathcal{H}_2 sem Alocação de Pólos: $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$

(b) Otimização \mathcal{H}_2 + Alocação de Pólos em $\mathcal{U}(\psi, \phi)$: $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_U]$

Na figura 4.4, à esquerda, tem-se a representação da nuvem de pólos referente a otimização \mathcal{H}_2 , sem alocação de pólos. Já à direita, tem-se a nuvem de pólos referente a otimização \mathcal{H}_2 conjuntamente com alocação de pólos em uma região parabólica, com $\psi = -1$ e $\phi = -0.5$. Na tabela 4.1 tem-se os resultados numéricos obtidos dos processos de otimização \mathcal{H}_2 e alocação de pólos.

Os ganhos de realimentação de estados são denotados por $K_{(a)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_2 simples e por $K_{(b)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_2 com alocação de pólos na região parabólica $\mathcal{U}(\psi, \phi)$.

$$K_{(a)} = \begin{bmatrix} -0.3284 & -0.1707 & -0.1575 \\ -1.0880 & -0.7933 & -0.8295 \\ 0.2604 & 0.1781 & 0.1286 \end{bmatrix}$$

$$K_{(b)} = \begin{bmatrix} -0.4520 & -0.0867 & -0.2883 \\ -0.9706 & -0.8493 & -0.7610 \\ 0.2636 & 0.0345 & 0.1250 \end{bmatrix}$$

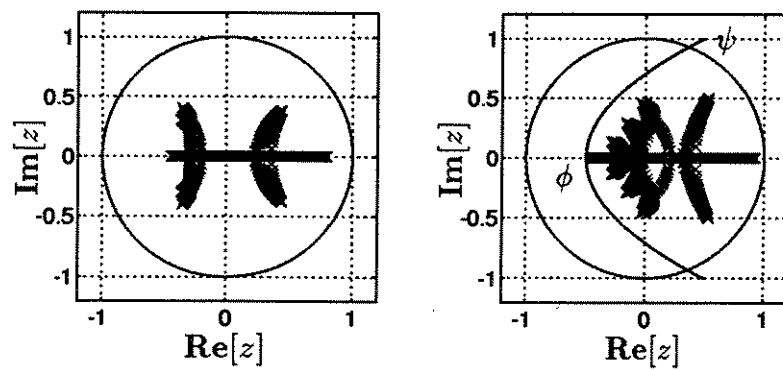


Figura 4.4: Nuvens de Pólos - Otimização \mathcal{H}_2 .

	(a)	(b)
	s/ alocação	$\mathcal{U}(-1, -0.5)$
$\text{Tr}(RW)$	18.0704	32.1826
$\ H(z)\ _2^2$	14.0213	10.8617
	11.6137	23.6166
	10.0528	10.0595
	14.8680	21.0745
iterações	199	188

Tabela 4.1: Otimização \mathcal{H}_2 e Alocação de Pólos.

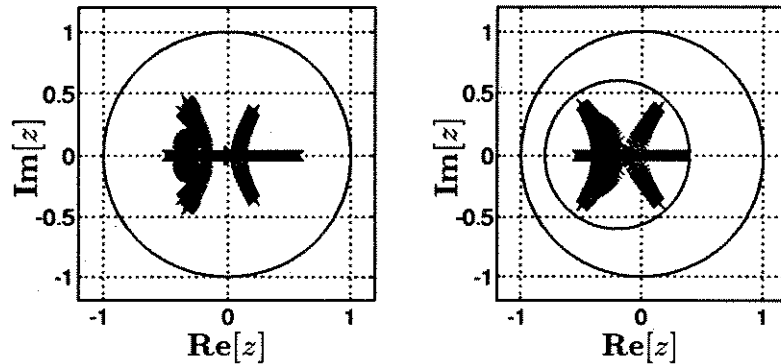


Figura 4.5: Nuvens de Pólos - Otimização \mathcal{H}_∞ .

Pode-se notar que com o processo de alocação de pólos houve um acréscimo de aproximadamente 78% sobre o limitante da norma \mathcal{H}_2 . Este fato deve ser levado em consideração para o projeto de sistemas.

4.3.2 Otimização \mathcal{H}_∞

Inicialmente, efetuou-se apenas a minimização de um limitante γ da norma \mathcal{H}_∞ (item (a)). Então, impôs-se a restrição de alocação de pólos em uma região circular $\mathcal{T}(\delta, \rho)$ (item (b)).

(a) Otimização \mathcal{H}_∞ sem Alocação de Pólos: $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_\infty$

(b) Otimização \mathcal{H}_∞ + Alocação de Pólos em $\mathcal{T}(\delta, \rho)$: $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_\mathcal{T}]$

Na figura 4.5, à esquerda, tem-se a representação da nuvem de pólos referente a otimização \mathcal{H}_∞ , sem alocação de pólos. Já à direita, tem-se a representação da nuvem de pólos referente a otimização \mathcal{H}_∞ conjuntamente com alocação de pólos em uma região circular, com $\delta = -0.2$ e $\rho = 0.6$. Na tabela 4.2 tem-se os resultados numéricos obtidos dos processos de otimização \mathcal{H}_∞ e alocação de pólos.

Os ganhos de realimentação de estados são denotados por $K_{(a)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_∞ simples e por $K_{(b)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_∞ com alocação de pólos na região circular $\mathcal{T}(\delta, \rho)$.

$$K_{(a)} = \begin{bmatrix} -0.4755 & -0.2196 & -0.0971 \\ -1.1077 & -0.8071 & -0.9232 \\ 0.2491 & 0.1558 & 0.0334 \end{bmatrix}$$

	(a) s/ alocação	(b) $\mathcal{T}(-0.2, 0.6)$
γ	7.1253	10.7385
$\ H(z)\ _\infty$	5.1106	8.1680
	4.1885	4.3098
	4.2447	4.9027
	4.4276	4.2449
iterações	433	302

Tabela 4.2: Otimização \mathcal{H}_∞ e Alocação de Pólos.

$$K_{(b)} = \begin{bmatrix} -0.3967 & -0.1857 & 0.0035 \\ -1.1481 & -0.8426 & -1.0372 \\ 0.3396 & 0.1979 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

É claro que trata-se de um exemplo puramente ilustrativo; o valor do limitante \mathcal{H}_∞ impondo-se a alocação de pólos na região $\mathcal{T}(-0.2, 0.6)$ é cerca de 51% superior ao caso sem alocação.

4.4 Exemplo 2

Este exemplo ilustra a alocação de pólos em um anel circular com otimização da norma \mathcal{H}_2 . Conforme já foi dito anteriormente, a alocação nesse tipo de região só pode ser realizada para sistemas precisamente conhecidos, devido a não convexidade da região no plano complexo. O sistema de controle, precisamente conhecido e de ordem 3 é dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0.8642 & 0.6908 & 0.4845 \\ 0.1943 & 0.6769 & 0.5965 \\ 0.0580 & 0.9687 & 0.0726 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.2831 \\ -0.7361 \\ -0.2531 \end{bmatrix}$$

com as matrizes de ponderação dadas por:

$$B_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Novamente o exemplo foi dividido em duas partes. Na primeira (item(a)) efetuou-se apenas a otimização \mathcal{H}_2 , obtendo-se um ganho de realimentação de estado $K_{(a)}$.

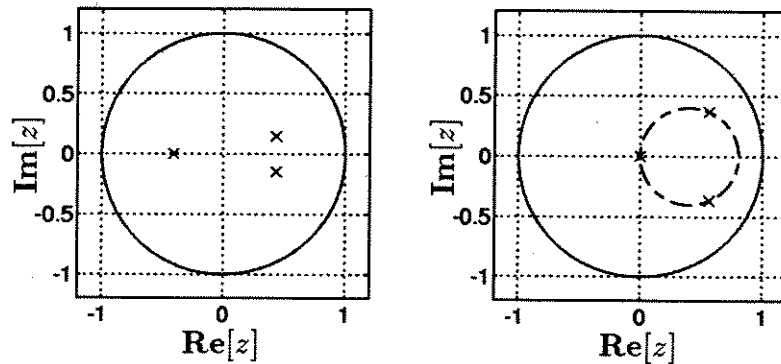


Figura 4.6: Pólos - Alocação em um Anel Circular.

Na segunda parte (item(b)) efetuou-se a otimização \mathcal{H}_2 com alocação de pólos em um anel circular, com $\delta = 0.4$, $\rho = 0.4$ e $\varepsilon = 0.001$, obtendo-se um ganho $K_{(b)}$.

(a) Otimização \mathcal{H}_2 sem Alocação de Pólos: $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$

(b) Otimização \mathcal{H}_2 + Alocação de Pólos em $\mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$: $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_\mathcal{V}]$

Na figura 4.6, à esquerda, tem-se a representação dos pólos referentes a otimização \mathcal{H}_2 . Já à direita, tem-se a visualização dos pólos referentes a otimização \mathcal{H}_2 conjuntamente com alocação de pólos em um anel circular, com $\delta = 0.4$, $\rho = 0.4$ e $\varepsilon = 0.001$. Na tabela 4.3 tem-se os resultados numéricos obtidos dos processos de otimização \mathcal{H}_2 e alocação de pólos.

	(a) s/ alocação	(b) $\mathcal{V}(0.4, 0.4, 0.001)$
$\text{Tr}(RW)$	7.2909	1.8368×10^4
$\ H(z)\ _2^2$	7.2909	12.5052
iterações	42	188

Tabela 4.3: Otimização \mathcal{H}_2 e Alocação de Pólos em $\mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$.

Os ganhos de realimentação de estados são denotados por $K_{(a)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_2 simples e por $K_{(b)}$ para o caso de otimização com alocação de pólos no anel circular $\mathcal{V}(\delta, \rho, \varepsilon)$.

$$K_{(a)} = \begin{bmatrix} 0.5099 & 1.1197 & 0.6753 \end{bmatrix}$$

$$K_{(b)} = \begin{bmatrix} 0.4794 & 0.1275 & 1.0389 \end{bmatrix}$$

Note que apesar do limitante da norma \mathcal{H}_2 ter aumentado de forma acentuada com a imposição de alocação de pólos em $\mathcal{V}(0.4, 0.4, 0.001)$, o mesmo não ocorreu com o valor real da norma \mathcal{H}_2 , que teve um acréscimo de aproximadamente 58%.

4.5 Exemplo 3

Este exemplo foi anteriormente apresentado em [32]. Esse exemplo, gerado aleatoriamente, ilustra a otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com alocação em uma faixa vertical, e consiste de um sistema de ordem 4, com incerteza na matriz A , sendo descrito pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7012 & 0.7564 & 0.0727 & 0.2749 \\ 0.9103 & 0.9910 & 0.6316 & 0.3593 \\ 0.7622 & 0.3653 & 0.8847 & 0.1665 \\ 0.2625 & 0.2470 & 0.2727 & 0.4865 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.0475 & 0.9826 & 0.4364 & 0.8977 \\ 0.7361 & 0.7227 & 0.7665 & 0.9092 \\ 0.3282 & 0.7534 & 0.4777 & 0.0606 \\ 0.6326 & 0.6515 & 0.2378 & 0.9047 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.5045 & 0.4940 & 0.0737 \\ 0.5163 & 0.2661 & 0.5007 \\ 0.3190 & 0.0907 & 0.3841 \\ 0.9866 & 0.9478 & 0.2771 \end{bmatrix}$$

com as matrizes de ponderação dadas por

$$B_1 = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema incerto tem dois “vértices” dados por

$$F_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad e \quad F_2 = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

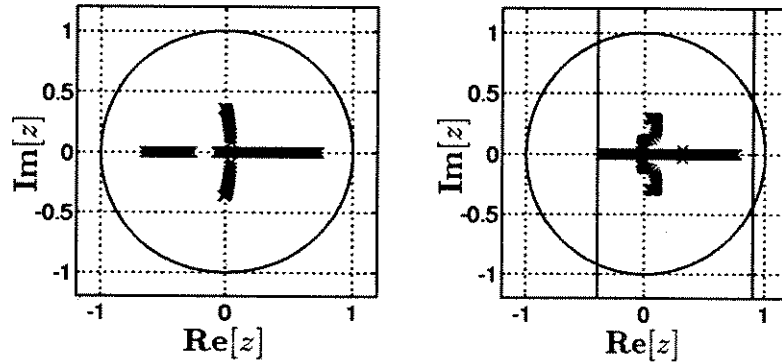


Figura 4.7: Nuvens de Pólos - Alocação em uma Faixa Vertical.

No item (a) efetuou-se a otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ sem restrições sobre a norma \mathcal{H}_∞ , isto é, otimização \mathcal{H}_2 simples, com alocação de pólos em uma faixa vertical, com $\alpha = 0.9$ e $\beta = -0.4$. Em seguida (b) efetuou-se a otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ sem alocação de pólos. Finalmente em (c) otimizou-se a norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com alocação de pólos na mesma faixa vertical, $\alpha = 0.9$ e $\beta = -0.4$.

- (a) Otimização \mathcal{H}_2 + Alocação de Pólos em $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$: $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_S]$
- (b) Otimização Mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_\infty(\gamma)$
- (c) Otimização Mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ + Alocação de Pólos em $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$:
 $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty(\gamma) \cap \mathcal{R}_S]$

Primeiramente (item(a)), especificou-se a alocação dos pólos na faixa vertical $\mathcal{S}(0.9, -0.4)$, com $\gamma \rightarrow +\infty$ (portanto sem restrições sobre a norma \mathcal{H}_∞), obtendo-se o ganho $K_{(a)}$. Escolhendo então uma atenuação prescrita $\gamma = 9$, o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ sem a restrição de alocação de pólos resulta em um ganho $K_{(b)}$ (item(b)). Note que, com a imposição do limitante $\gamma = 9$ as normas calculadas $\|H(z)\|_\infty$ são menores que as precedentes. Agora, impondo-se a alocação de pólos na região $\mathcal{S}(0.9, -0.4)$ com $\gamma = 9$, obteve-se o ganho $K_{(c)}$ (item(c)).

A figura 4.7 mostra a nuvem de raízes para o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ sem alocação e com a restrição de alocação na faixa vertical.

$$K_{(a)} = \begin{bmatrix} 0.4711 & 0.5749 & 0.3707 & 0.4068 \\ -0.1923 & 0.1282 & 0.0036 & 0.3276 \\ 0.9756 & 0.5960 & 0.6123 & 0.2120 \end{bmatrix}$$

	(a) Otimização \mathcal{H}_2 $\mathcal{S}(0.9, -0.4)$	(b) Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ $\gamma = 9$	(c) Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ $\mathcal{S}(0.9, -0.4), \gamma = 9$
$\text{Tr}(RW)$	15.6544	17.5274	24.8092
$\ H(z)\ _2^2$	13.1000 10.2412	12.8699 9.8890	12.5509 11.1539
$\ H(z)\ _\infty$	8.4985 3.2074	6.4130 3.0478	7.5408 3.2526
iterações	650	776	1091

Tabela 4.4: Otimização Mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e Alocação de Pólos em $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$.

$$K_{(b)} = \begin{bmatrix} 0.5526 & 0.6147 & 0.4472 & 0.4864 \\ -0.0382 & 0.1115 & 0.1261 & 0.4369 \\ 0.8565 & 0.7590 & 0.5357 & 0.2102 \end{bmatrix}$$

$$K_{(c)} = \begin{bmatrix} 0.5069 & 0.6315 & 0.3670 & 0.4367 \\ -0.2282 & -0.0108 & -0.0504 & 0.1792 \\ 1.0566 & 0.7592 & 0.6372 & 0.3741 \end{bmatrix}$$

É claro que o custo aumentou significativamente com a restrição imposta. Note também que, graças à convexidade, não só os vértices do sistema incerto satisfazem as restrições, mas também as combinações lineares entre os dois extremos.

4.6 Exemplo 4

Este exemplo foi utilizado em [28]. Ele foi originariamente extraído de [29], onde um controle não linear, contínuo no tempo é estudado. Ele consiste em um modelo de estado de uma aeronave F4-E, nos quatro pontos de operação (P.O.). Este problema também foi tratado em [12] e [15] no contexto de estabilização quadrática e custo \mathcal{H}_2 garantido, respectivamente. Com um tempo de discretização dado por $\Delta t = 0.05$ segundos, a matriz incerta F é a seguinte

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & 0.2231 & -0.7769 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde os valores dos parâmetros incertos são dados na Tabela 4.5.

P.O.	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
1	0.9572	0.8329	2.2670	2.5873	0.0127	0.9638	-0.2682	0.2909
2	0.9693	0.8767	1.9881	11.4728	0.0040	0.9694	-0.2691	0.2818
3	0.9313	2.3567	5.2814	-1.3790	0.0102	0.9445	-0.7538	0.7506
4	0.9498	1.4220	3.8014	4.7405	-0.0327	0.9161	-0.8440	0.6196

Tabela 4.5: Modelos Extremos - Sistema Discreto no Tempo.

com as matrizes de ponderação

$$B_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Novamente o exemplo foi tratado segundo vários critérios. Primeiramente, estudou-se a otimização \mathcal{H}_2 sem a imposição de alocação de pólos (item(a)). A seguir, resolveu-se o problema de otimização \mathcal{H}_2 com alocação de pólos na região circular, com $\rho = 0.5$ e $\delta = 0.6$.

(a) Otimização \mathcal{H}_2 sem Alocação de Pólos: $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$

(b) Otimização \mathcal{H}_2 + Alocação de Pólos em $\mathcal{T}(\delta, \rho)$: $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_T]$

Na figura 4.8, à esquerda, tem-se a representação da nuvem de pólos referente a otimização \mathcal{H}_2 , sem alocação de pólos. Já à direita, tem-se a representação da nuvem de pólos referente a otimização \mathcal{H}_2 conjuntamente com alocação de pólos em uma região circular, com $\delta = 0.6$ e $\rho = 0.5$. Note que a região de alocação é dada pela interseção de $\mathcal{T}(0.6, 0.5)$ com o círculo unitário. Na tabela 4.6 tem-se os resultados numéricos obtidos dos processos de otimização \mathcal{H}_2 e alocação de pólos na região circular.

Os ganhos de realimentação de estados são denotados por $K_{(a)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_2 simples e por $K_{(b)}$ para o caso de otimização \mathcal{H}_2 com alocação de pólos na região circular $\mathcal{T}(\delta, \rho)$.

$$K_{(a)} = \begin{bmatrix} -0.0380 & -0.5719 & 0.3495 \end{bmatrix}$$

$$K_{(b)} = \begin{bmatrix} -0.0296 & -0.4932 & 0.2367 \end{bmatrix}$$

Novamente houve um aumento do limitante da norma \mathcal{H}_2 quando se considerou a alocação de pólos em $\mathcal{T}(0.6, 0.5)$. Nesse caso o aumento foi de aproximadamente de 12%.

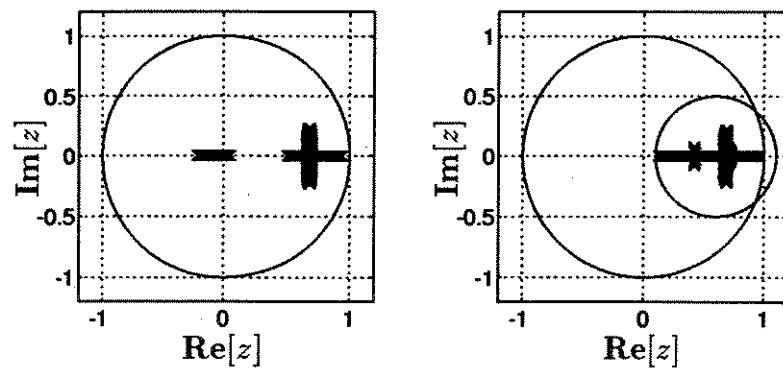


Figura 4.8: Nuvens de Pólos - Otimização \mathcal{H}_2 .

	(a) s/ alocação	(b) $\mathcal{T}(0.6, 0.5)$
$\text{Tr}(RW)$	1433.9	1607.9
$\ H(z)\ _2^2$	123.6810	136.7504
	366.5789	372.8504
	387.7737	435.6003
	104.5213	97.3150
iterações	110	126

Tabela 4.6: Otimização \mathcal{H}_2 e Alocação de Pólos.

4.7 Conclusão

Os exemplos apresentados neste Capítulo comprovam a validade dos procedimentos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Os exemplos mostram, através de figuras ilustrativas das nuvens de lugares de raízes, a alocação de pólos em sub-regiões do plano complexo, sendo que em todos eles, procurou-se otimizar um critério do tipo norma. É importante ressaltar que as regiões de alocação são resultantes da interseção das regiões descritas por equações do tipo Lyapunov com o círculo unitário.

Conclusão Geral

Neste trabalho foi apresentado uma metodologia que permite resolver o problema de alocação de pólos em sub-regiões do plano complexo. Essa teoria é aplicável a sistemas dinâmicos lineares, discretos no tempo, modelados por variáveis de estado, podendo ou não estarem sujeitos à presença de incertezas nos parâmetros do modelo. As possíveis incertezas são descritas através de matrizes extremas, gerando intervalos de variação para os parâmetros, não havendo a princípio, restrições quanto ao número de parâmetros incertos (apenas deve-se notar que há um consequente aumento do esforço computacional com a elevação do número de parâmetros incertos).

A metodologia adotada permite, além da alocação de pólos em sub-regiões, a otimização de critérios do tipo norma de uma função de transferência, mais especificamente norma \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. A otimização deste tipo de critério pode ser bastante útil quando, por exemplo neste caso, uma função de transferência entre uma entrada de distúrbio e uma saída é abordada, com minimização de um critério do tipo norma.

O algoritmo iterativo apresentado, baseado no método de planos de corte, permite a resolução do problema de controle robusto com alocação de pólos em sub-regiões. Neste método, qualquer restrição convexa adicional, seja de estrutura ou de alocação de pólos, pode ser incorporada ao problema original.

Possíveis extensões deste trabalho apontam nas seguintes direções: estudo de outras regiões de alocação, controle descentralizado, realimentação de saída, etc. No caso de critérios \mathcal{H}_∞ , os resultados podem ser bastante melhorados com o uso de condições necessárias e suficientes convexas (ver referência [37]).

Bibliografia

- [1] R. Bambang, E. Shimemura and K. Uchida, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control with Pole Placement: State Feedback Case", *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, Vol. 3, pp. 2777-2779, June, 1993.
- [2] B. R. Barmish, "Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No. 8, pp. 848-850, August, 1983.
- [3] J. Bernussou, P. L. D. Peres and J. C. Geromel, "A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72, July, 1989.
- [4] S. P. Boyd and C. H. Barratt, "Linear Control Design: Limits of Performance", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [5] J. W. Brewer, "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, No. 9, September, 1978.
- [6] C. T. Chen, "Linear System Theory and Design", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [7] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, "Feedback Control Theory", Macmillan, New York, 1992.
- [8] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, August, 1989.
- [9] K. Furuta and S. B. Kim, "Pole Assignment in Specified Disk", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 5, pp. 423-427, May, 1987.
- [10] J. C. Geromel, J. Bernussou and P. L. D. Peres, "Decentralized Control Through Parameter Space Optimization", *Automatica*, aceito para publicação.

-
- [11] J. C. Geromel, G. Garcia and J. Bernussou, " \mathcal{H}_2 Robust Control with Pole Placement", *12th IFAC World Congress on Automatic Control*, Sidney, Austrália, Vol. 2, pp. 283-288, July, 1993.
- [12] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and J. Bernussou, "On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, No. 2, pp. 381-402, March, 1991.
- [13] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, " \mathcal{H}_2 Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-Time Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 19, pp. 23-27, 1992.
- [14] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control for Continuous-Time Systems", *31st Conference on Decision and Control*, Tucson, USA, 1992.
- [15] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, " \mathcal{H}_2 Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete-Time Linear Systems", *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 4, pp. 853-864, 1993.
- [16] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, " \mathcal{H}_∞ Control of Discrete-Time Uncertain Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, aceito para publicação.
- [17] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, "A Convex Approach to the Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control Problem for Discrete-Time Uncertain Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, aceito para publicação.
- [18] G. Guaitolli e P. L. D. Peres, "Controle \mathcal{H}_∞ para Sistemas Contínuos Incertos com Alocação de Pólos", *10^o Congresso Brasileiro de Automática*, aceito para publicação, 1994.
- [19] W. M. Haddad and D. S. Bernstein, "Controller Design with Regional Pole Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 54-69, January, 1992.
- [20] Y. T. Juang, "Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 635-637, May, 1991.
- [21] Y. T. Juang, Z. C. Hong and Y. T. Wang, "Robustness of Pole-Assignment in a Specified Region", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, pp. 758-760, July, 1989.

-
- [22] I. Kaminer, P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Systems via Convex Optimization", *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp. 57-70, 1993.
- [23] J. Medanic, H. S. Tharp and W. R. Perkins, "Pole Placement by Performance Criterion Modification", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 33, No. 5, pp. 469-472, May, 1988.
- [24] P. L. D. Peres "Sur la Robustesse des Systemes Lineares: Approche par Programmation Lineaire", Tese de Doutorado, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1989.
- [25] P. L. D. Peres and J. C. Geromel, " \mathcal{H}_2 Control for Discrete-Time Systems: Optimality and Robustness", *Automatica*, vol. 29, No. 1, pp. 225-228, 1993.
- [26] P. L. D. Peres, G. Guaitoli and C. K. Umezú, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control of Uncertain Continuous-Time Systems with Regional Pole Constraints", *IFAC Symposium on Robust Control Design*, aceito para publicação, 1994.
- [27] P. L. D. Peres, S. R. Souza e J. C. Geromel, "Uma Abordagem Convexa para o Problema de Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos", publicação FEE No. 27/92 - Unicamp, 1992.
- [28] P. L. D. Peres, C. K. Umezú and G. Guaitoli, " \mathcal{H}_2 Control of Uncertain Discrete-Time Systems with Regional Pole Constraints", *33rd Conference on Decision and Control*, aceito para publicação, 1994.
- [29] I. R. Petersen, "A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-Linear State Feedback Control", *Automatica*, Vol. 23, N. 1, pag. 33-40, 1987.
- [30] S. R. Souza, "Controle em \mathcal{H}_∞ de Sistemas Dinâmicos Incertos", Tese de Mestrado, FEE - Unicamp, 1991.
- [31] C. K. Umezú e P. L. D. Peres, "Otimização \mathcal{H}_2 para Sistemas Discretos Incertos com Alocação de Pólos", Nota Interna FEE No. 012/93 - Unicamp, 1993.
- [32] C. K. Umezú e P. L. D. Peres, "Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de Sistemas Discretos Incertos com Alocação de Pólos", *10^o Congresso Brasileiro de Automática*, aceito para publicação, 1993.
- [33] I. Yaesh and U. Shaked, "A Transfer Function Approach to the Problems of Discrete-Time Systems: \mathcal{H}_∞ Optimal Linear Control and Filtering", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1264-1271, November, 1991.

-
- [34] E. Yaz, A. Azemi and E. E. Skelton, "Design of Covariance Controller and Estimator with Prescribed Pole Location", *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Vol. 1, pp. 197-202, December, 1992.
- [35] E. Yas, K. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Discrete-Time $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Norm-Bounding Pole Placement", *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 1, pp. 487-492, December, 1992.
- [36] B. Wittenmark, R. J. Evans and Y. C. Soh, "Constrained Pole Placement using Transformation and LQ-Design", *Automatica*, Vol. 23, No. 6, pp. 767-769, 1987.
- [37] F. J. V. Zuben, S. R. Souza and P. L. D. Peres, "A Linear Optimization Approach to Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Uncertain Systems", *33rd Conference on Decision and Control*, submetido para publicação, 1994.



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Tese : **Controle Robusto de Sistemas Discretos
com Alocação de Pólos**

Autor : **Claudio Kiyoshi Umezu**

Orientador : **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres**

Aprovada em 24 de junho de 1994 pela banca examinadora

Pedro Luis Dias Peres

Prof. Pedro Luis Dias Peres (Presidente)

Alexandre Trofino Neto

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto - DEE/UFSC

José Claudio Geromel

Prof. Dr. José Claudio Geromel - FEE/UNICAMP