



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Pré-despacho de um Sistema Hidrotérmico

Roy Wilhelm Probst
Mestrado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Trabalho financiado pela FAPESP

Campinas
Março de 2006

Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Pré-despacho de um Sistema Hidrotérmico

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Roy Wilhelm Probst** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de março de 2006.

Aurelio R. L. de Oliveira

Prof. Dr. **Aurelio Ribeiro Leite de
Oliveira**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Paulo de Barros Correia (FEM/UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada.**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Probst, Roy Wilhelm

P94m Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico / Roy Wilhelm Probst -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Métodos de pontos interiores. 2. Sistemas de potência. 3. Programação quadrática. I. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Interior points methods for the hydrothermal scheduling problem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Interior-point methods. 2. Power systems. 3. Quadratic programming.

Área de concentração: Pesquisa Operacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo de Barros Correia (FEM-UNICAMP)
Profª. Dra. Valéria de Podestá Gomes (IMECC-UNICAMP)

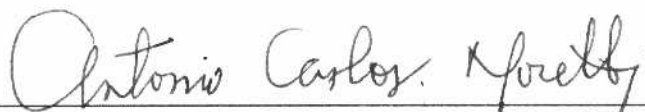
Data da defesa: 24/03/2006

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de março de 2006 e aprovada


Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). AURÉLIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA



Prof. (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS MORETTI



Prof. (a). Dr (a). PAULO DE BARROS CORREIA

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Fluxo de Potência Ótimo	1
1.2	Métodos de Pontos Interiores	3
1.3	Objetivos do Trabalho	4
1.4	Estrutura do Trabalho	5
2	Modelo de Fluxo de Potência Ótimo DC	6
2.1	Modelo Estático	6
2.2	Modelo Dinâmico	10
3	Métodos de Pontos Interiores	14
3.1	Conceitos Iniciais	14
3.2	Método de Newton	15
3.3	Método Primal-Dual Afim-Escala	17
3.4	Variáveis Canalizadas	19
3.5	Método Primal-Dual de Trajetória Central	20
3.6	Método Primal-Dual Preditor-Corretor	23
3.7	Métodos de Pontos Interiores para Programação Quadrática Convexa	26
4	Aplicação ao Problema de Pré-despacho Hidrotérmico	34
4.1	Técnica de Solução	34

4.2	Método de Trajetória Central	38
4.3	Método Preditor-Corretor	40
4.4	Detalhes de Implementação	41
4.5	Redução do Sistema Linear	41
4.6	Modelo sem Restrições de Rampa	47
5	Resultados Numéricos	52
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	59
	Referências Bibliográficas	61

Lista de Figuras

2.1	Sistema de 3 barras	7
5.1	Sistema IEEE30	56
5.2	Caso 1 - Apenas perdas de transmissão	56
5.3	Caso 2 - Apenas custos de geração	57
5.4	Caso 3 - Perdas de transmissão e custos de geração	57
5.5	Caso 4 - Capacidade de geração no limite	58
5.6	Caso 7 - Três tipos de restrições ativas	58

Lista de Tabelas

5.1	Fatores de Carga	54
5.2	Sistema IEEE30 - Iterações e Tempo de CPU (s)	54
5.3	Sistema IEEE118 - Iterações e Tempo de CPU (s)	55
5.4	Modelos - Iterações e Tempo de CPU (s)	55
5.5	Diferença na Função Objetivo	55

Lista de Métodos

3.1	Método Afim-Escala	18
3.2	Método de Trajetória Central para Variáveis Canalizadas	23
3.3	Método Preditor-Corretor para Variáveis Canalizadas	25

Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem a ajuda do professor Aurelio. Agradeço-lhe pelas críticas, sugestões e apoio que me possibilitaram um grande crescimento acadêmico e pessoal.

Meus agradecimentos à minha família, especialmente meus pais Ingrid e Wilson e minha avó Adélia, por seu amor, sabedoria e orações.

Agradeço a todos meus amigos, tantos os feitos em Campinas como os de Blumenau, pela ajuda que recebi em várias ocasiões.

A Deus, por permitir que pudesse realizar meus sonhos.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo e à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Resumo

Os métodos de pontos interiores primais-duais de trajetória central e preditor-corretor são desenvolvidos para o problema de minimização das perdas na geração e transmissão do pré-despacho DC de um sistema de potência hidrotérmico e a estrutura matricial resultante explorada obtendo uma implementação eficiente. No pré-despacho de sistemas hidrotérmicos, as usinas hidroelétricas têm uma meta a cumprir em um determinado dia, estabelecida pelo planejamento de longo prazo. As usinas termoelétricas, por sua vez, apresentam restrições de rampa, pois necessitam de um determinado tempo tanto para aumentar quanto para reduzir sua produção de energia. A implementação dos métodos de pontos interiores é testada em estudos de casos com sistemas IEEE.

Abstract

The central path and the predictor-corrector primal-dual interior points methods are developed for the generation and transmission losses optimization problem for a DC power flow model in a hydrothermal power system and the resulting matrix structure is exploited leading to an efficient implementation. In short term hydrothermal scheduling, the hydro generating units need to satisfy daily targets, established by long-term scheduling models. The thermal generating units have ramp constraints because they need a certain amount of time to change the level of power delivery. Case studies with the developed interior point implementation for IEEE power systems are presented.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo será feita uma breve introdução sobre o problema de fluxo de potência ótimo, sua generalização para o problema de pré-despacho e os métodos de pontos interiores. Além disso, serão definidos os objetivos e a estrutura deste trabalho.

1.1 Fluxo de Potência Ótimo

Fluxo de potência ótimo é um termo genérico dado a uma classe de problemas que busca otimizar uma função objetivo específica satisfazendo restrições provenientes de particularidades físicas e operacionais da rede elétrica [33, 39].

O problema de fluxo de potência ótimo (AC) teve sua primeira formulação nos anos 60 [8]. Desde então, vários métodos de otimização foram propostos para resolver este problema, entre eles: o método do gradiente reduzido de Dommel-Tinney [15], gradiente reduzido generalizado [1], o método de injeção diferencial de Carpentier [9], o método do Lagrangeano projetado [35], métodos de programação quadrática sequencial [6, 7, 40], algoritmos específicos baseados na resolução de uma sequência de problemas de programação linear [3] ou quadrática [22]. A utilização de métodos de pontos interiores para este problema foi sugerida pela primeira vez em 1994, por Granville [21].

A representação linearizada (DC) do fluxo de potência ótimo tem sido utilizada, pois obtém-se maior simplicidade com grau de precisão dos resultados satisfatório [36]. O problema de pré-despacho pode ser modelado como a minimização de uma função objetivo quadrática, correspondente aos custos de geração e perdas na transmissão do sistema de potência, sujeita a restrições lineares representando o fluxo de potência ativa. O pré-despacho de um sistema de potência hidrotérmico é um problema de planejamento operacional de curto prazo, onde curto prazo significa a operação horária durante um dia ou uma semana.

O sistema de geração é composto por um conjunto de unidades geradoras, enquanto que o sistema de transmissão é representado por um modelo de fluxo de carga de corrente contínua (DC). Neste modelo, as leis de Kirchhoff são representadas independentemente. O problema de fluxo de potência ótimo em apenas um intervalo de tempo pode ser formulado como um modelo estático [36]. Já o modelo dinâmico é a extensão desta formulação para cada intervalo de tempo, acrescentando as restrições de acoplamento referente às metas e às rampas [23, 38]. As usinas hidroelétricas tem uma meta a cumprir, estabelecida pelo planejamento de longo prazo. As usinas termoelétricas, por sua vez, apresentam restrições de rampa pois necessitam de um determinado tempo tanto para aumentar quanto para reduzir sua produção de energia. As usinas hidroelétricas também possuem restrições de rampa, mas isso é muito menos crítico.

O problema de fluxo de carga ótimo DC é estudado em [36, 37] e a estrutura matricial do modelo explorada resultando em uma implementação bastante rápida e robusta. Este trabalho por sua vez foi estendido em [38] para o problema de pré-despacho sem a consideração das restrições em rampa. O problema de pré-despacho para sistemas puramente térmicos é abordado em [23].

1.2 Métodos de Pontos Interiores

Programação linear tem sido um assunto dominante em otimização desde que Dantzig [13] desenvolveu o método Simplex na década de 40. Em 1984, a publicação do trabalho de Karmarkar [24] iniciou uma nova linha de pesquisa conhecida como métodos de pontos interiores, e uma década depois os métodos primais-duais surgiram como os métodos mais importantes e úteis desta classe de problemas [44].

Em programação linear, a diferença entre os métodos de pontos interiores e o método simplex está na natureza das soluções obtidas em cada iteração. No método simplex, as soluções pertencem à fronteira da região factível, enquanto que nos métodos de pontos interiores as soluções estão no interior da região factível. Além disso, no método simplex o número de iterações tende a crescer com o tamanho dos problemas, enquanto que nos métodos de pontos interiores não existe esta tendência [2].

Em 1955, surge o primeiro método de pontos interiores, atribuído a Frisch [19]. Este método foi exaustivamente estudado por Fiacco e McCormick [17]. Em 1967, Dikin [14] publicou um trabalho que foi a base de muitos outros na área de pontos interiores. Em 1979, surge o primeiro método de programação linear de complexidade polinomial, o método das elipsóides de Khachiyan [26]. No entanto, sua convergência era muito lenta, não era robusto na presença de erros de arredondamento e necessitava de muita memória de armazenamento à cada iteração [44]. Este método provou ser inferior ao método simplex.

Mas a maior descoberta no campo dos pontos interiores ocorreu em 1984, quando Karmarkar [24] apresentou um novo método de pontos interiores para programação linear, também de complexidade polinomial. O método de Karmarkar é um método primal [44], ou seja, é descrito, motivado e implementado puramente em termos do problema primal, sem referência ao dual. A cada iteração, o método faz uma transformação projetiva do conjunto factível primal que leva a solução atual ao centro do conjunto e caminha no espaço transformado [18, 24].

A classe de métodos de pontos interiores que possui as melhores propriedades práticas e teóricas são os chamados métodos primais-duais. Tanto experimentos computacionais como o desenvolvimento teórico mostram que os métodos primais-duais são superiores aos demais métodos de pontos interiores em problemas práticos, chegando a ser melhor que o método simplex em problemas de grande porte [44].

Entre os métodos primais-duais, destaca-se o método preditor-corretor de Mehrotra [32], que passou a ser a base da maioria dos códigos relacionados a pontos interiores, desde sua publicação em 1992. O método utiliza aproximações de segunda ordem para a trajetória primal-dual, conforme sugerido por Megiddo [31] e desenvolvido em [25, 27, 34]. Além disso, o método parte de um ponto interior infactível, conforme implementado com sucesso em [29]. A contribuição de Mehrotra foi combinar estas idéias já existentes e adicionar heurísticas para escolha do parâmetro de centragem, tamanho do passo e ponto inicial.

Em 1991, Clements, Davis e Frey [12] apresentaram um dos primeiros estudos de pontos interiores aplicados a sistemas de potência. Em 1992, Vargas, Quintana e Vanelli [43] apresentaram um método de pontos interiores para resolver o problema de pré-despacho econômico de sistemas de potência.

1.3 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho consiste em aplicar os métodos de pontos interiores primal-dual e preditor-corretor ao problema de minimização de perdas na transmissão e custos na geração do pré-despacho DC de um sistema de potência hidrotérmico.

Para satisfazer este objetivo, as seguintes etapas devem ser cumpridas:

- Descrever o modelo de fluxo de potência ótimo linearizado.
- Apresentar os métodos de pontos interiores primais-duais de trajetória central e preditor-corretor.

- Estudar a estrutura matricial resultante da aplicação dos métodos de pontos interiores no modelo estudado.
- Implementar de forma eficiente os métodos e realizar testes numéricos com diferentes sistemas.
- Comparar os resultados obtidos com implementações do modelo já existente.

1.4 Estrutura do Trabalho

Além da Introdução e Conclusão, o corpo deste trabalho está dividido em mais quatro capítulos.

No capítulo 2, são definidos os modelos de fluxo de potência ótimo DC para o problema estático e para o pré-despacho. A estrutura matricial é descrita através de um exemplo didático de pequeno porte.

No capítulo 3, são apresentados os métodos de pontos interiores primais-duais.

No capítulo 4, os métodos de pontos interiores são aplicados ao problema de pré-despacho hidrotérmico.

No capítulo 5, são apresentados os experimentos numéricos e testes realizados.

Capítulo 2

Modelo de Fluxo de Potência Ótimo DC

Neste capítulo são definidos os modelos de fluxo de potência ótimo DC para o problema estático e para o pré-despacho. A estrutura matricial é descrita através de um exemplo didático de pequeno porte.

2.1 Modelo Estático

Nesta seção será modelado o problema de fluxo de potência ótimo DC [36]. Para definir este modelo e sua estrutura matricial, vamos utilizar como exemplo o sistema da Figura 2.1. Considerando o grafo que representa o sistema, dizemos que os nós são as barras de carga e geração e os arcos são as linhas de transmissão. Assim, este sistema possui $m = 3$ barras, $n = 3$ linhas de transmissão e $g = 2$ barras de geração. As usinas geradoras, que podem ser hidroelétricas ou termoelétricas, são representados pelas barras pretas.

As variáveis de decisão do problema são os vetores $p \in \mathbb{R}^g$ e $f \in \mathbb{R}^m$, onde p representa o vetor de geração de potência ativa e f representa o vetor de fluxo de potência ativa.

A primeira lei de Kirchhoff, ou lei dos nós, expressa o balanço de potência entre os

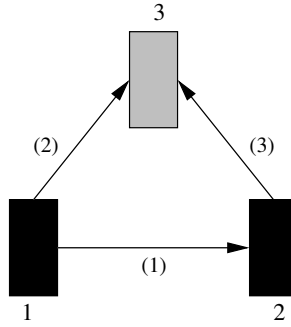


Figura 2.1: Sistema de 3 barras

nós, isto é, a quantidade de potência que entra ou é produzida em cada nó deve ser igual a potência que sai ou é consumida. Esta relação pode ser escrita como:

$$Af = Ep - l \quad (2.1)$$

onde $l \in \mathbb{R}^m$ representa o vetor demanda de potência ativa em cada barra de carga e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de incidência da rede:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz E que aparece no modelo se faz necessária para escrever corretamente esta equação de forma matricial. A matriz $E \in \mathbb{R}^{m \times g}$ é formada por vetores canônicos correspondentes às barras de geração:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A segunda lei de Kirchhoff, ou lei das malhas, considera que a soma das tensões em

cada ciclo da rede deve ser nula. Esta situação pode ser representada pela equação:

$$Tf = 0 \quad (2.2)$$

onde $T \in \mathbb{R}^{(n-m+1) \times n}$ é a matriz de reatância da rede, aqui considerada no sentido horário:

$$T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

Devemos considerar também as capacidades de geração e transmissão de energia, dados por:

$$f^{min} \leq f \leq f^{max} \quad (2.3)$$

$$p^{min} \leq p \leq p^{max} \quad (2.4)$$

onde f^{min} , f^{max} , p^{min} e p^{max} são vetores limites de fluxo e de geração de potência ativa.

Finalmente, definimos a função objetivo quadrática como sendo a ponderação entre os dois objetivos:

$$\alpha \frac{1}{2} f^t R f + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c^t p \right) \quad (2.5)$$

onde $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz diagonal das resistências das linhas, $Q \in \mathbb{R}^{g \times g}$ é a matriz diagonal da componente quadrática do custo de geração e $c \in \mathbb{R}^g$ é a componente linear do custo de geração. Estes custos de geração modelam a perda na geração para as usinas hidroelétricas e o custo do combustível para as usinas termoeletricas (ambos quadráticos). As ponderações α e β dos objetivos a minimizar devem ser aferidas de forma a levar em consideração a diferença de unidades entre os objetivos. Por exemplo, se $\beta = 1$, então α pode ser calculado como o custo marginal de uma unidade de perda de transmissão por unidade monetária. É importante ressaltar que o desenvolvimento feito neste trabalho

se aplica a qualquer função objetivo quadrática separável. A escolha desta função em particular visa facilitar a apresentação do texto.

Com esta notação, o modelo matemático estático de fluxo de potência ótimo é dado por:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha \frac{1}{2} f^t R f + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c^t p \right) \\
 \text{s.a} \quad & A f = E p - l \\
 & T f = 0 \\
 & f^{min} \leq f \leq f^{max} \\
 & p^{min} \leq p \leq p^{max}.
 \end{aligned}$$

onde:

$f \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de fluxo de potência ativa;

$p \in \mathbb{R}^g$ representa o vetor de geração de potência ativa;

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz diagonal das resistências das linhas;

$Q \in \mathbb{R}^{g \times g}$ representa a matriz diagonal da componente quadrática do custo de geração;

$c \in \mathbb{R}^g$ representa a componente linear do custo de geração;

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa a matriz de incidência da rede de transmissão;

$E \in \mathbb{R}^{m \times g}$ é a matriz formada pelos vetores canônicos correspondentes às barras de geração;

$T \in \mathbb{R}^{(n-m+1) \times n}$ representa a matriz de reatância da rede de transmissão;

$l \in \mathbb{R}^m$ representa o vetor demanda de potência ativa;

f^{max} , f^{min} , p^{max} e p^{min} são os vetores de limites de fluxo e de geração de potência ativa;

α e β são ponderações dos objetivos a minimizar.

2.2 Modelo Dinâmico

O modelo descrito na seção anterior corresponde a um único intervalo de tempo da operação. Para estender a formulação é necessário considerar este problema para cada intervalo de tempo, acrescentando as restrições de acoplamento referentes às metas e às rampas.

Para o problema de pré-despacho, será considerado o mesmo exemplo da seção anterior, porém para $t = 2$ intervalos de tempo. Assim, as variáveis de decisão do problema passam a ser os vetores p_1 e $p_2 \in \mathbb{R}^g$ e f_1 e $f_2 \in \mathbb{R}^m$.

As restrições do problema estático se repetem em cada intervalo de tempo:

$$A_i f_i - E_i p_i = -l_i \quad i = 1, \dots, t \quad (2.6)$$

$$T_i f_i = 0 \quad i = 1, \dots, t \quad (2.7)$$

$$f_i^{\min} \leq f_i \leq f_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \quad (2.8)$$

$$p_i^{\min} \leq p_i \leq p_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t. \quad (2.9)$$

Os vetores f_i^{\max} , f_i^{\min} , p_i^{\max} e p_i^{\min} e as matrizes A_i , E_i e T_i não variam com o tempo, embora esta notação se faça necessária.

As usinas hidroelétricas tem uma meta a cumprir, estabelecida pelo planejamento de longo prazo. Esta restrição pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^t p_i = q \quad (2.10)$$

onde $q \in \mathbb{R}^g$ é a meta estabelecida. Matricialmente:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_2(1) \\ p_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \end{bmatrix}.$$

As usinas termoeletricas, por sua vez, apresentam restrições de rampa pois necessitam de um determinado tempo tanto para aumentar quanto para reduzir sua produção de energia. Esta restrição pode ser escrita como:

$$p_{i+1} - d_i \leq p_i \leq p_{i+1} + d_i \quad i = 1, \dots, t-1 \quad (2.11)$$

onde d_i é o vetor que representa a variação de energia permitida no intervalo de tempo i .

A função objetivo também é repetida para todos os intervalos de tempo:

$$\alpha \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} f_i^t R_i f_i + \beta \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2} p_i^t Q_i p_i + c_i^t p_i \right). \quad (2.12)$$

As matrizes R_i e Q_i e os vetores c_i também não variam com o tempo.

Assim, adicionando as restrições de rampa no modelo descrito em [10], um modelo de pré-despacho hidrotérmico para um sistema de potência com m barras, n linhas de transmissão e g geradores pode ser expresso como o seguinte problema de fluxo em redes:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} f_i^t R_i f_i + \beta \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2} p_i^t Q_i p_i + c_i^t p_i \right) \\ \text{s.a} \quad & A_i f_i - E_i p_i = -l_i \quad i = 1, \dots, t \\ & T_i f_i = 0 \quad i = 1, \dots, t \\ & f_i^{\min} \leq f_i \leq f_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \\ & p_i^{\min} \leq p_i \leq p_i^{\max} \quad i = 1, \dots, t \end{aligned}$$

$$p_{i+1} - d_i \leq p_i \leq p_{i+1} + d_i \quad i = 1, \dots, t-1$$

$$\sum_{i=1}^t p_i = q$$

onde:

$f_i \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de fluxo de potência ativa;

$p_i \in \mathbb{R}^g$ representa o vetor de geração de potência ativa;

$R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz diagonal das resistências das linhas;

$Q_i \in \mathbb{R}^{g \times g}$ representa a matriz diagonal da componente quadrática do custo de geração;

$c_i \in \mathbb{R}^g$ representa a componente linear do custo de geração;

$A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa a matriz de incidência da rede de transmissão;

$E_i \in \mathbb{R}^{m \times g}$ é a matriz formada pelos vetores canônicos correspondentes às barras de geração;

$T_i \in \mathbb{R}^{(n-m+1) \times n}$ representa a matriz de reatância da rede de transmissão;

$l_i \in \mathbb{R}^m$ representa o vetor demanda de potência ativa;

f_i^{max} , f_i^{min} , p_i^{max} e p_i^{min} são os vetores de limites de fluxo e de geração de potência ativa;

d_i representa a variação de energia permitida em cada usina termoeletrica;

q representa a meta de geração de energia das usinas hidroeletricas para o horizonte em estudo;

α e β são ponderações dos objetivos a minimizar.

Embora os vetores f_i^{max} , f_i^{min} , p_i^{max} , p_i^{min} , d_i e c_i e as matrizes R_i , Q_i , A_i , E_i e T_i envolvidas no modelo não variem com o tempo, esta notação se faz necessária momentaneamente.

Observando apenas as restrições de igualdade, é possível notar a presença de uma restrição redundante. Considerando as equações da primeira lei de Kirchhoff (2.6) com a

restrição de metas (2.10), temos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -E_1 & & A_1 & & \\ & -E_2 & & A_2 & \\ I & I & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ q \end{bmatrix}$$

ou, explicitamente:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|ccc} -1 & 0 & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & -1 & -1 \\ \hline & -1 & 0 & & & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & & & 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_2(1) \\ p_2(2) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1(1) \\ -l_1(2) \\ -l_1(3) \\ -l_2(1) \\ -l_2(2) \\ -l_2(3) \\ q(1) \\ q(2) \end{bmatrix}.$$

Note que temos uma equação redundante neste sistema. Ao somar todas as linhas, obtemos uma relação entre as metas e as demandas:

$$q(1) + q(2) = l_1(1) + l_1(2) + l_1(3) + l_2(1) + l_2(2) + l_2(3),$$

ou seja, a soma das demandas deve ser igual a soma das metas.

Capítulo 3

Métodos de Pontos Interiores

Neste capítulo serão apresentados os métodos de pontos interiores. Os métodos primais-duais afim-escala, de trajetória central e preditor-corretor são desenvolvidos para problemas de programação linear. Por fim, o método de trajetória central é generalizado para o problema de programação quadrática convexa.

3.1 Conceitos Iniciais

Em um problema de programação linear se quer minimizar uma função objetivo linear, cujas variáveis estão sujeitas à restrições também lineares. Um ponto interior é aquele em que todas as variáveis se encontram estritamente dentro de seus limites.

Um problema de programação linear pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

O problema (3.1) está associado ao problema dual, dado por [28]:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & b^t y \\
 \text{s.a} \quad & A^t y + z = c \\
 & y \text{ livre}, z \geq 0,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $y, z \in \mathbb{R}^m$. Por definição, um ponto (x, y, z) é interior se $(x, z) > 0$.

Se um ponto (x, y, z) é ótimo para os problemas (3.1) e (3.2), então as seguintes condições de otimalidade deverão ser satisfeitas [4]:

- Factibilidade Primal: $b - Ax = 0, x \geq 0$.
- Factibilidade Dual: $c - A^t y - z = 0, z \geq 0$.
- Complementaridade: $x_i z_i = 0, i = 1, \dots, n$.

Definimos γ como a diferença entre os valores da função objetivo do problema primal e dual. No caso das formulações dadas por (3.1) e (3.2), temos: $\gamma = c^t x - b^t y = x^t z$, se o ponto (x, y, z) for primal e dual factível.

3.2 Método de Newton

O método de Newton é a forma mais simples de desenvolver os métodos de pontos interiores do tipo primal-dual [44]. Nesta seção o método será descrito brevemente conforme [42].

Dada a função

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, um problema comum é encontrar um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x^*) = 0$, ou seja, encontrar uma raiz de F . O método de Newton é um método iterativo para resolver este problema. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, o objetivo é encontrar uma direção de busca d tal que $F(x + d) = 0$. Assim, buscamos aproximar esta direção pelos dois primeiros termos da expansão da série de Taylor,

$$F(x + d) \approx F(x) + F'(x)d, \quad (3.3)$$

onde

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

A aproximação é linear em d . Logo, igualando (3.3) à zero, temos um sistema linear para obter a direção de busca:

$$J(x)d = -F(x), \quad (3.4)$$

onde $J(x) = F'(x)$ é o Jacobiano de F no ponto x .

Calculado $d = -[J(x)]^{-1}F(x)$, o método de Newton atualiza a solução substituindo x por $x + d$. Este processo continua até que a solução atual esteja suficientemente próxima de uma raiz ($F(x) \approx 0$). Assim temos um método iterativo da forma

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} F(x^k). \quad (3.5)$$

3.3 Método Primal-Dual Afim-Escala

Seja o problema com a formulação primal e dual dada por (3.1) e (3.2), respectivamente. A idéia para se contruir um método de pontos interiores consiste em se aplicar o método de Newton ao sistema formado pelas condições de otimalidade. Temos que $F(x, y, z)$ é dada por:

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^t y + z - c \\ XZe \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b - Ax \\ c - A^t y - z \\ -XZe \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix},$$

onde $X = \text{diag}(x)$, $Z = \text{diag}(z)$ e e representa o vetor em que todos os elementos tem valor unitário.

Dado um ponto inicial (x^0, y^0, z^0) e desconsiderando as restrições $x \geq 0$ e $z \geq 0$, calculamos o ponto (x^1, y^1, z^1) utilizando o método de Newton:

$$(x^1, y^1, z^1) = (x^0, y^0, z^0) - [J(x^0, y^0, z^0)]^{-1} F(x^0, y^0, z^0), \quad (3.6)$$

onde

$$J(x^0, y^0, z^0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}.$$

Assim, d^0 será dado por:

$$d^0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}.$$

Generalizando, dado (x^k, y^k, z^k) , d^k é calculado por:

$$d^k = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^k & 0 & X^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Método 3.1 Método Afim-Escala

Entradas: $(x^0, z^0) > 0$, y^0 e $\tau \in (0, 1)$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ **faça**

[1] Calcule $r_1^k = b - Ax_k$, $r_2^k = c - A^t y^k - z^k$ e $r_3^k = -X^k Z^k e$.

[2] Calcule a direção de Newton d^k .

[3] Calcule o tamanho do passo α^k tal que $(x^{k+1}, z^{k+1}) > 0$.

[4] Calcule $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, y^k, z^k) + \alpha^k(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta z^k)$.

Fim

Observe que α^k é calculado de forma que x^{k+1} e z^{k+1} sejam pontos interiores. Assim

$$\alpha^k = \min(1, \tau \rho_1^k, \tau \rho_2^k), \quad (3.8)$$

onde:

$$\rho_1^k = \frac{-1}{\min_i(\Delta x_i^k / x_i^k)}$$

$$\rho_2^k = \frac{-1}{\min_i(\Delta z_i^k / z_i^k)}$$

e $\tau \in (0, 1)$. Em programação linear, o tamanho dos passos primal e dual pode ser calculado separadamente, podendo implicar na convergência em menos iterações [29]. Porém, em programação quadrática α^k é calculado conforme (3.8). Adota-se o tamanho máximo do passo $\alpha^k = 1$ porque este é o tamanho de passo natural do método de Newton.

3.4 Variáveis Canalizadas

Em programação linear é comum encontrar problemas com variáveis canalizadas. Nesta seção mostraremos como as canalizações podem ser tratadas.

Consideremos o problema de programação linear dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x^{\min} \leq x \leq x^{\max}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Será feita a seguinte mudança de variáveis para que o limite inferior seja nulo:

$$\tilde{x} = x - x^{\min}. \tag{3.10}$$

Substituindo (3.10) em (3.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t \tilde{x} + c^t x^{\min} \\ \text{s.a} \quad & A\tilde{x} = \tilde{b} \\ & 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{u}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\tilde{b} = b - Ax^{\min}$ e $\tilde{u} = x^{\max} - x^{\min}$.

Adicionando as variáveis de folga e simplificando a notação (eliminando os tils), temos:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x + t = u \\ & x, t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

A partir do problema primal (3.12), podemos escrever o problema dual, já com as

variáveis de folga introduzidas:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^t y - u^t w \\ \text{s.a} \quad & A^t y - w + z = c \\ & w, z \geq 0, y \text{ livre.} \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.5 Método Primal-Dual de Trajetória Central

Nesta seção será construído um método de pontos interiores primal-dual que leve em consideração um problema de programação linear com restrições de igualdade e variáveis canalizadas.

O método afim-escala apresentado na Seção 3.3 possui uma grande desvantagem, pois permite que os pontos (x, z) calculados se aproximem de seus limites muito rapidamente. Consequentemente, as direções calculadas perto destes limites são muito distorcidas, pois o valor de alguns pares $x_i z_i$ se torna próximo de zero rapidamente e o método progride lentamente, podendo inclusive não convergir. Para evitar que isto aconteça, acrescentamos a cada iteração uma perturbação μ^k na condição de complementaridade.

Dada as formulações primal (3.12) e dual (3.13) do problema, podemos escrever as condições de otimalidade, adicionando uma perturbação μ nas condições de complemen-

taridade:

$$\begin{array}{l}
 \text{Factibilidade primal} \\
 \text{Factibilidade dual} \\
 \text{Complementaridade}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 b - Ax = 0 \\
 u - x - t = 0 \\
 (x, t) \geq 0, \\
 \\
 c - A^t y + w - z = 0 \\
 (w, z) \geq 0, \\
 \\
 XZe = \mu e \\
 TWe = \mu e.
 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, temos:

$$\begin{bmatrix}
 A & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I & 0 & I & 0 & 0 \\
 0 & A^t & 0 & -I & I \\
 Z & 0 & 0 & 0 & X \\
 0 & 0 & W & T & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta x \\
 \Delta y \\
 \Delta t \\
 \Delta w \\
 \Delta z
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 r_4 \\
 r_5
 \end{bmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= b - Ax \\
 r_2 &= u - x - t \\
 r_3 &= c - A^t y + w - z \\
 r_4 &= \mu e - XZe \\
 r_5 &= \mu e - TWe.
 \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ \Delta x + \Delta t = r_2 \\ A^t\Delta y - \Delta w + \Delta z = r_3 \\ X\Delta z + Z\Delta x = r_4 \\ T\Delta w + W\Delta t = r_5. \end{cases} \quad (3.14)$$

Considerando que as matrizes X , Z , T e W são diagonais com elementos positivos, podemos isolar as seguintes variáveis em (3.14):

$$\begin{aligned} \Delta t &= r_2 - \Delta x \\ \Delta z &= X^{-1}(r_4 - Z\Delta x) \\ \Delta w &= T^{-1}(r_5 - W\Delta t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.14), o sistema é reduzido para:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ A^t\Delta y - D\Delta x = r_6, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde:

$$\begin{aligned} D &= T^{-1}W + X^{-1}Z \\ r_6 &= r_3 + T^{-1}r_5 - X^{-1}r_4 - T^{-1}Wr_2. \end{aligned}$$

A matriz D pode ser facilmente eliminada, pois é a soma de matrizes diagonais definidas positivas. Assim, podemos eliminar Δx da segunda equação de (3.16):

$$\Delta x = D^{-1}(A^t\Delta y - r_6). \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) na primeira equação de (3.16), obtemos:

$$(AD^{-1}A^t)\Delta y = r_1 + AD^{-1}r_6. \quad (3.18)$$

A matriz $AD^{-1}A^t$ em (3.18) é simétrica definida positiva, logo é possível utilizar a decomposição de Cholesky para resolver o sistema linear [20]. Cabe destacar que a resolução do sistema linear para encontrar Δy envolve a maior parte do esforço computacional dos métodos de pontos interiores.

Método 3.2 Método de Trajetória Central para Variáveis Canalizadas

Entradas: $(x^0, t^0, w^0, z^0) > 0$, y^0 livre, $\sigma \in (0, 1)$ e $\tau \in (0, 1)$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ **faça**

- [1] Calcule μ^k .
- [2] Calcule os resíduos $r_1^k, r_2^k, r_3^k, r_4^k$ e r_5^k .
- [3] Calcule a direção de Newton d^k .
- [4] Calcule o tamanho do passo α^k tal que $(x^{k+1}, t^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}) > 0$.
- [5] Calcule $(x^{k+1}, t^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, t^k, w^k, z^k, y^k) + \alpha^k(\Delta x^k, \Delta t^k, \Delta w^k, \Delta z^k, \Delta y^k)$.

Fim

O valor de μ^k é dado pela fórmula

$$\mu^k = \sigma \frac{\gamma^k}{n}, \quad (3.19)$$

onde $\gamma^k = (x^k)^t z^k + (t^k)^t w^k$ e $n = \dim(x, t)$. Na prática utilizamos $\sigma = n^{-1}$ e $\tau = 0,99995$ [30, 32].

3.6 Método Primal-Dual Preditor-Corretor

O método preditor-corretor desenvolvido por Mehrotra [32] consiste em utilizar uma direção que contempla três componentes:

- Direção Afim-Escala (direção preditora ou de Newton).
- Direção de Centragem, cujo tamanho é determinado pela perturbação μ .
- Direção de Correção, que compensa a aproximação linear do método de Newton.

Ao calcular a direção afim verificamos o progresso do método ao longo desta direção. Se o progresso for grande, a perturbação μ é pequena. Caso contrário, é conveniente aumentar o peso da direção de centragem, tal que a perturbação μ seja grande.

Uma vez que uma segunda direção é calculada, também calculamos a correção não linear utilizando o mesmo Jacobiano, para que o esforço computacional por iteração não duplique.

Para o problema com canalização, primeiro encontramos a direção afim ($\mu = 0$) do ponto (x, t, y, w, z) :

$$\begin{cases} A\Delta\tilde{x} = r_1 \\ \Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{t} = r_2 \\ A^t\Delta\tilde{y} - \Delta\tilde{w} + \Delta\tilde{z} = r_3 \\ X\Delta\tilde{z} + Z\Delta\tilde{x} = -XZe = r_4 \\ T\Delta\tilde{w} + W\Delta\tilde{t} = -TWe = r_5. \end{cases} \quad (3.20)$$

Em seguida usamos o mesmo Jacobiano para calcular a direção de correção $(\Delta\hat{x}, \Delta\hat{t}, \Delta\hat{y}, \Delta\hat{w}, \Delta\hat{z})$ no ponto $(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{y}, \tilde{w}, \tilde{z}) = (x + \Delta\tilde{x}, t + \Delta\tilde{t}, y + \Delta\tilde{y}, w + \Delta\tilde{w}, z + \Delta\tilde{z})$:

$$\begin{cases} A\Delta\hat{x} = 0 \\ \Delta\hat{x} + \Delta\hat{t} = 0 \\ A^t\Delta\hat{y} - \Delta\hat{w} + \Delta\hat{z} = 0 \\ Z\Delta\hat{x} + X\Delta\hat{z} = \mu e - \Delta\tilde{X}\Delta\tilde{Z}e \\ T\Delta\hat{w} + W\Delta\hat{t} = \mu e - \Delta\tilde{T}\Delta\tilde{W}e. \end{cases} \quad (3.21)$$

A direção a ser usada é a soma das duas direções: $(\Delta x, \Delta t, \Delta y, \Delta w, \Delta z) = (\Delta \tilde{x}, \Delta \tilde{t}, \Delta \tilde{y}, \Delta \tilde{w}, \Delta \tilde{z}) + (\Delta \hat{x}, \Delta \hat{t}, \Delta \hat{y}, \Delta \hat{w}, \Delta \hat{z})$. Para obter esta direção, somamos os dois sistemas:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ \Delta x + \Delta t = r_2 \\ A^t\Delta y - \Delta w + \Delta z = r_3 \\ X\Delta z + Z\Delta x = \mu e - XZe - \Delta\tilde{X}\Delta\tilde{Z}e = \tilde{r}_4 \\ T\Delta w + W\Delta t = \mu e - TWe - \Delta\tilde{T}\Delta\tilde{W}e = \tilde{r}_5. \end{cases} \quad (3.22)$$

Método 3.3 Método Preditor-Corretor para Variáveis Canalizadas

Entradas: $(x^0, t^0, w^0, z^0) > 0$, y^0 livre, $\sigma \in (0, 1)$ e $\tau \in (0, 1)$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ **faça**

- [1] Calcule os resíduos $r_1^k, r_2^k, r_3^k, r_4^k$ e r_5^k com $\mu^k = 0$.
- [2] Calcule a direção afim-escala \tilde{d}^k .
- [3] Calcule o tamanho do passo $\tilde{\alpha}^k$ tal que $(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{t}^{k+1}, \tilde{w}^{k+1}, \tilde{z}^{k+1}) > 0$.
- [4] Calcule μ^k .
- [5] Calcule os resíduos \tilde{r}_4^k e \tilde{r}_5^k .
- [6] Calcule a direção de Newton d^k .
- [7] Calcule o tamanho do passo α^k tal que $(x^{k+1}, t^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}) > 0$.
- [8] Calcule $(x^{k+1}, t^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, t^k, w^k, z^k, y^k) + \alpha^k(\Delta x^k, \Delta t^k, \Delta w^k, \Delta z^k, \Delta y^k)$.

Fim

Como estamos utilizando o mesmo Jacobiano, apenas uma decomposição da matriz $AD^{-1}A^t$ é calculada, sendo utilizada na resolução dos dois sistemas lineares.

O cálculo de μ é função da direção afim [44]. Definimos $\tilde{\gamma}$ como sendo o valor do gap se usarmos a direção afim. Se $\tilde{\gamma} \ll \gamma$, a direção afim é uma boa direção de busca e tomamos μ próximo de 0. Se $\tilde{\gamma}$ é apenas um pouco menor que γ , tomamos μ próximo de 1. Assim:

$$\mu = \sigma \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^2, \quad (3.23)$$

onde:

$$\begin{aligned}\gamma &= x^t z + t^t w \\ \tilde{\gamma} &= (x + \tilde{\alpha}\Delta\tilde{x})^t(z + \tilde{\alpha}\Delta\tilde{z}) + (t + \tilde{\alpha}\Delta\tilde{t})^t(w + \tilde{\alpha}\Delta\tilde{w}).\end{aligned}$$

O método preditor-corretor pode ser obtido com uma pequena modificação em relação ao primal-dual, com custo computacional adicional relativamente baixo, mas com ganho no número de iterações.

3.7 Métodos de Pontos Interiores para Programação Quadrática Convexa

O problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico é formulado como um problema de programação quadrática convexa. Nesta seção será feita a dedução do método de pontos interiores para este problema.

Será minimizada uma função quadrática convexa, sujeita à restrições lineares. O problema primal na forma padrão é dado por:

$$\begin{aligned}\min \quad & c^t x + \frac{1}{2}x^t Q x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0,\end{aligned}\tag{3.24}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva. No problema de pré-despacho hidrotérmico, a matriz Q é uma matriz diagonal, hipótese que será assumida a partir de agora.

O problema dual associado á (3.24) é dado pela forma de Dorn [5]:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & b^t y + \frac{1}{2} x^t Q x \\
 \text{s.a} \quad & A^t y - Q x + z = c \\
 & x, z \geq 0, y \text{ livre.}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25) obtemos as condições de otimalidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ A^t y - Qx + z = c \\ XZe = 0 \\ x, z \geq 0, y \text{ livre.} \end{array} \right.$$

Em uma abordagem alternativa, as restrições de não negatividade podem ser impostas a partir de (3.24) adicionando uma função de barreira logarítmica [5]. O Lagrangeano desse problema é portanto:

$$L = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x + y^t (b - Ax) - \mu \ln x \tag{3.26}$$

As condições necessárias de primeira ordem garantem que as derivadas parciais do Lagrangeano se anulam na solução ótima [42]:

$$\begin{aligned}
 L_x &= c + Qx - A^t y - \mu X^{-1} e = 0 \\
 L_y &= b - Ax = 0.
 \end{aligned}$$

Introduzindo a variável $z = \mu X^{-1} e$, obtemos as condições de otimalidade do problema perturbado [16]. As condições de factibilidade primal e dual são as mesmas do problema original e a condição de complementaridade passa a ser $XZe = \mu e$. O problema perturbado tende ao problema original quando $\mu \rightarrow 0$.

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, obtemos:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ Q & -A^t & -I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix},$$

onde:

$$r_1 = b - Ax$$

$$r_2 = c - A^t y + Qx - z$$

$$r_3 = \mu e - XZe.$$

Reescrevendo o sistema linear:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ A^t\Delta y - Q\Delta x + \Delta z = r_2 \\ Z\Delta x + X\Delta z = r_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

Considerando que X e Z são matrizes diagonais com elementos positivos, na última equação de (3.27) é possível isolar Δz :

$$\Delta z = X^{-1}(r_3 - Z\Delta x). \quad (3.28)$$

Aplicando (3.28) na segunda equação de (3.27), o sistema é simplificado para:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ A^t\Delta y - D\Delta x = r_4 \end{cases} \quad (3.29)$$

onde:

$$\begin{aligned} D &= Q + X^{-1}Z \\ r_4 &= A^t \Delta y - Q \Delta x + X^{-1} \Delta x = r_2 - X^{-1} r_3. \end{aligned}$$

A matriz D pode ser facilmente invertida, pois é a soma de matrizes diagonais com elementos positivos. Isolando Δx em (3.29), temos:

$$\Delta x = D^{-1}(r_4 - A^t \Delta y). \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) na primeira equação de (3.29), temos:

$$AD^{-1}A^t \Delta y = AD^{-1}(r_2 - X^{-1}r_3). \quad (3.31)$$

Utilizamos a decomposição de Cholesky para calcular Δy , a partir do sistema linear (3.31) que envolve a matriz $AD^{-1}A^t$.

No problema de programação quadrática estudado neste trabalho, as variáveis são canalizadas. Será feita a dedução do método de pontos interiores para este problema.

O problema primal é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x^{min} \leq x \leq x^{max}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Novamente será assumido que a matriz Q é uma matriz diagonal.

Fazemos uma mudança de variável, para que o limite inferior seja nulo:

$$\tilde{x} = x - x^{min}. \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.32), obtemos:

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^t(\tilde{x} + x^{min}) + \frac{1}{2}(\tilde{x} + x^{min})^t Q(\tilde{x} + x^{min}) \\
\text{s.a} \quad & A\tilde{x} = \tilde{b} \\
& 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{u},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde $\tilde{b} = b - Ax^{min}$ e $\tilde{u} = x^{max} - x^{min}$.

Adicionando as variáveis de folga e simplificando a notação (eliminando os tils), temos:

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& x + t = u \\
& x, t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Adicionando uma função de barreira logarítmica para impor as restrições de não negatividade, o Lagrangeano deste problema é:

$$L = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x + y^t (b - Ax) + w^t (x + t - u) - \mu \ln(x + t) \tag{3.36}$$

As condições necessárias de primeira ordem garantem que as derivadas parciais do Lagrangeano se anulam na solução ótima:

$$\begin{aligned}
L_x &= c + Qx - A^t y + w - \mu X^{-1} e = 0 \\
L_t &= w - \mu T^{-1} e = 0 \\
L_y &= b - Ax = 0 \\
L_w &= u - x - t = 0.
\end{aligned}$$

Introduzindo a variável $z = \mu X^{-1} e$, obtemos as condições de otimalidade do problema

perturbado:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x + t = u \\ A^t y - Qx - w + z = c \\ XZe = \mu e \\ TWe = \mu e. \end{array} \right.$$

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, temos:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 \\ -Q & A^t & 0 & -I & I \\ Z & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & W & T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta t \\ \Delta w \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned} r_1 &= b - Ax \\ r_2 &= u - x - t \\ r_3 &= c - A^t y + Qx + w - z \\ r_4 &= \mu e - XZe \\ r_5 &= \mu e - TWe. \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ \Delta x + \Delta t = r_2 \\ A^t\Delta y - Q\Delta x - \Delta w + \Delta z = r_3 \\ X\Delta z + Z\Delta x = r_4 \\ T\Delta w + W\Delta t = r_5. \end{cases} \quad (3.37)$$

Considerando que as matrizes X , Z , T e W são diagonais com elementos positivos, podemos isolar as seguintes variáveis em (3.37):

$$\begin{aligned} \Delta t &= r_2 - \Delta x \\ \Delta z &= X^{-1}(r_4 - Z\Delta x) \\ \Delta w &= T^{-1}(r_5 - W\Delta t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.37), o sistema é reduzido para:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_1 \\ A^t\Delta y - D\Delta x = r_6, \end{cases} \quad (3.39)$$

onde:

$$\begin{aligned} D &= T^{-1}W + X^{-1}Z + Q \\ r_6 &= r_3 + T^{-1}r_5 - X^{-1}r_4 - T^{-1}Wr_2. \end{aligned}$$

A matriz D pode ser facilmente eliminada, pois é a soma de matrizes diagonais definidas positivas. Eliminando Δx da segunda equação de (3.39):

$$\Delta x = D^{-1}(A^t\Delta y - r_6). \quad (3.40)$$

Substituindo (3.40) na primeira equação de (3.39), obtemos:

$$(AD^{-1}A^t)\Delta y = r_1 + AD^{-1}r_6. \quad (3.41)$$

Novamente, utilizamos a decomposição de Cholesky para calcular Δy , a partir do sistema linear (3.41) que envolve a matriz $AD^{-1}A^t$.

Capítulo 4

Aplicação ao Problema de Pré-despacho Hidrotérmico

Neste capítulo os métodos de pontos interiores de trajetória central e preditor-corretor são aplicados ao problema de pré-despacho hidrotérmico.

4.1 Técnica de Solução

Para simplificar o desenvolvimento do método faremos as seguintes alterações no modelo da Seção 2.2:

- Mudanças de variáveis $\tilde{f}_i = f_i - f_i^{min}$ e $\tilde{p}_i = p_i - p_i^{min}$;
- Mudanças dos vetores $\tilde{f}_i^{max} = f_i^{max} - f_i^{min}$ e $\tilde{p}_i^{max} = p_i^{max} - p_i^{min}$;
- Introdução da variável $h_i = p_i - p_{i+1}$.

Com estas alterações, obtemos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2} \tilde{f}_i^t R_i \tilde{f}_i + c_{f_i}^t \tilde{f}_i \right) + \beta \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2} \tilde{p}_i^t Q_i \tilde{p}_i + c_{p_i}^t \tilde{p}_i \right) \\ \text{s.a} \quad & A_i \tilde{f}_i - E_i \tilde{p}_i = l_i^a \quad i = 1, \dots, t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_i \tilde{f}_i &= l_i^b & i &= 1, \dots, t \\
0 \leq \tilde{f}_i &\leq \tilde{f}_i^{max} & i &= 1, \dots, t \\
0 \leq \tilde{p}_i &\leq \tilde{p}_i^{max} & i &= 1, \dots, t \\
\tilde{h}_i - \tilde{p}_i + \tilde{p}_{i+1} &= d_i & i &= 1, \dots, t-1 \\
0 \leq \tilde{h}_i &\leq 2d_i & i &= 1, \dots, t-1 \\
\sum_{i=1}^t \tilde{p}_i &= \tilde{q}
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
c_{f_i} &= R_i f_i^{min} \\
c_{p_i} &= c_i + Q_i p_i^{min} \\
l_i^a &= E_i p_i^{min} - l_i - A_i f_i^{min} \\
l_i^b &= -T_i f_i^{min} \\
\tilde{q} &= q - \sum_{i=1}^t p_i^{min}.
\end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga (por simplicidade de notação eliminamos os tils) obtemos:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \alpha \left(\frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right) \\
\text{s.a} \quad & A f - E p = l^a \\
& T f = l^b \\
& B p = q \\
& h - C p = d \\
& f + s_1 = f^{max} \\
& p + s_2 = p^{max}
\end{aligned}$$

$$h + s_3 = 2d$$

$$(f, p, h, s_1, s_2, s_3) \geq 0$$

onde f , p , c_f , c_p , l^a , l^b , f^{max} e p^{max} são vetores do tipo $f = (f_1, \dots, f_t)$; h e d são vetores do tipo $h = (h_1, \dots, h_{t-1})$; R , Q , A , E e T são matrizes bloco diagonais do tipo $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_t)$; $B = [I_g I_g \dots I_g]$ e

$$C = \begin{pmatrix} I_g & -I_g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_g & -I_g & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_g & -I_g \end{pmatrix}.$$

Tanto as variáveis de folga como as variáveis estruturais do problema devem ser não negativas; estas restrições de não negatividade podem ser impostas adicionando uma função de barreira logarítmica. O Lagrangeano deste problema é portanto:

$$\begin{aligned} L = & \alpha \left(\frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right) \\ & + y_1^t (A f - E p - l^a) + y_2^t (T f - l^b) + y_3^t (B p - q) + y_4^t (h - C p - d) \\ & + w_1^t (f + s_1 - f^{max}) + w_2^t (p + s_2 - p^{max}) + w_3^t (h + s_3 - 2d) \\ & - \mu \left[\sum_{i=1}^{tg} (\ln p_i + \ln s_{1_i}) + \sum_{i=1}^{tn} (\ln f_i + \ln s_{2_i}) + \sum_{i=1}^{(t-1)g} (\ln h_i + \ln s_{3_i}) \right]. \end{aligned}$$

As condições necessárias de KKT para problemas de programação não linear garantem que as derivadas parciais do Lagrangeano se anulam na solução ótima:

$$L_f = \alpha(Rf + c_f) + A^t y_1 + T^t y_2 + w_1 - \mu F^{-1} e = 0$$

$$L_p = \beta(Qp + c_p) - E^t y_1 + B^t y_3 - C^t y_4 + w_2 - \mu P^{-1} e = 0$$

$$L_h = y_4 + w_3 - \mu H^{-1} e = 0$$

$$\begin{aligned}
L_{y_1} &= Af - Ep - l^a = 0 \\
L_{y_2} &= Tf - l^b = 0 \\
L_{y_3} &= Bp - q = 0 \\
L_{y_4} &= h - Cp - d = 0 \\
L_{w_1} &= f + s_1 - f^{max} = 0 \\
L_{w_2} &= p + s_2 - p^{max} = 0 \\
L_{w_3} &= h + s_3 - 2d = 0 \\
L_{s_1} &= w_1 - \mu S_1^{-1} e = 0 \\
L_{s_2} &= w_2 - \mu S_2^{-1} e = 0 \\
L_{s_3} &= w_3 - \mu S_3^{-1} e = 0.
\end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis $z_1 = \mu F^{-1}e$, $z_2 = \mu P^{-1}e$ e $z_3 = \mu H^{-1}e$, onde e representa o vetor em que todos os elementos tem valor unitário e a notação $F = \text{diag}(f)$ para matrizes

diagonais é utilizada, obtemos as condições de otimalidade do problema perturbado:

$$\text{Factibilidade primal} \left\{ \begin{array}{l} Af - Ep = l^a \\ Tf = l^b \\ Bp = q \\ h - Cp = d \\ f + s_1 = f^{max} \\ p + s_2 = p^{max} \\ h + s_3 = 2d \\ (f, p, h, s_1, s_2, s_3) \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\text{Factibilidade dual} \left\{ \begin{array}{l} A^t y_1 + T^t y_2 + w_1 - z_1 + \alpha Rf = -\alpha c_f \\ -E^t y_1 + B^t y_3 - C^t y_4 + w_2 - z_2 + \beta Qp = -\beta c_p \\ y_4 + w_3 - z_3 = 0 \\ (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3) \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\text{Complementaridade} \left\{ \begin{array}{l} FZ_1 e = \mu e \\ PZ_2 e = \mu e \\ HZ_3 e = \mu e \\ S_1 W_1 e = \mu e \\ S_2 W_2 e = \mu e \\ S_3 W_3 e = \mu e. \end{array} \right.$$

4.2 Método de Trajetória Central

Conforme a Seção 3.5, obtemos um método primal-dual de trajetória central utilizando os vetores $x = (f, p, h, s_1, s_2, s_3)$ e $v = (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3)$.

A direção de Newton é definida pelo seguinte sistema linear*:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Delta f - E\Delta p = r_1 \\ T\Delta f = r_2 \\ B\Delta p = r_3 \\ \Delta h - C\Delta p = r_4 \\ \Delta f + \Delta s_1 = r_5 \\ \Delta p + \Delta s_2 = r_6 \\ \Delta h + \Delta s_3 = r_7 \\ A^t\Delta y_1 + T^t\Delta y_2 + \Delta w_1 - \Delta z_1 + \alpha R\Delta f = r_8 \\ -E^t\Delta y_1 + B^t\Delta y_3 - C^t\Delta y_4 + \Delta w_2 - \Delta z_2 + \beta Q\Delta p = r_9 \\ \Delta y_4 + \Delta w_3 - \Delta z_3 = r_{10} \\ F\Delta z_1 + Z_1\Delta f = r_{11} \\ P\Delta z_2 + Z_2\Delta p = r_{12} \\ H\Delta z_3 + Z_3\Delta h = r_{13} \\ S_1\Delta w_1 + W_1\Delta s_1 = r_{14} \\ S_2\Delta w_2 + W_2\Delta s_2 = r_{15} \\ S_3\Delta w_3 + W_3\Delta s_3 = r_{16} \end{array} \right.$$

*O índice k será desconsiderado a partir deste ponto para evitar uma notação muito carregada.

onde os resíduos são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = l^a - Af + Ep \\ r_2 = l^b - Tf \\ r_3 = q - Bp \\ r_4 = d - h + Cp \\ r_5 = f^{max} - f - s_1 \\ r_6 = p^{max} - p - s_2 \\ r_7 = 2d - h - s_3 \\ r_8 = -\alpha c_f - A^t y_1 - T^t y_2 - w_1 + z_1 - \alpha Rf \\ r_9 = -\beta c_p + E^t y_1 - B^t y_3 + C^t y_4 - w_2 + z_2 - \beta Qp \\ r_{10} = -y_4 - w_3 + z_3 \\ r_{11} = \mu e - FZ_1 e \\ r_{12} = \mu e - PZ_2 e \\ r_{13} = \mu e - HZ_3 e \\ r_{14} = \mu e - S_1 W_1 e \\ r_{15} = \mu e - S_2 W_2 e \\ r_{16} = \mu e - S_3 W_3 e. \end{array} \right.$$

4.3 Método Preditor-Corretor

Neste método dois sistemas lineares com a mesma matriz determinam a direção, conforme a Seção 3.6. Primeiro a direção afim $(\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{v}, \Delta\tilde{y})$ é calculada resolvendo o sistema com $\mu = 0$. A direção desejada é então obtida resolvendo o sistema linear com os novos resíduos

dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11} = \mu e - FZ_1e - \Delta\tilde{F}\Delta\tilde{Z}_1e \\ r_{12} = \mu e - PZ_2e - \Delta\tilde{P}\Delta\tilde{Z}_2e \\ r_{13} = \mu e - HZ_3e - \Delta\tilde{H}\Delta\tilde{Z}_3e \\ r_{14} = \mu e - S_1W_1e - \Delta\tilde{S}_1\Delta\tilde{W}_1e \\ r_{15} = \mu e - S_2W_2e - \Delta\tilde{S}_2\Delta\tilde{W}_2e \\ r_{16} = \mu e - S_3W_3e - \Delta\tilde{S}_3\Delta\tilde{W}_3e. \end{array} \right.$$

4.4 Detalhes de Implementação

Nesta seção são apresentados os parâmetros de implementação. Os seguintes parâmetros tem valor fixo: $\tau = 0,99995$ e $\sigma = u^{-1}$, onde $u = \dim(x)$.

O seguinte ponto inicial foi adotado [38]:

$$\begin{aligned} f^0 &= s_1^0 = \frac{f^{max}}{2} \\ p^0 &= s_2^0 = \frac{p^{max}}{2} \\ h^0 &= s_3^0 = d \\ z_1^0 &= w_1^0 = (R + I)e \\ z_2^0 &= w_2^0 = e \\ z_3^0 &= w_3^0 = e \\ y_1^0 &= y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0. \end{aligned}$$

4.5 Redução do Sistema Linear

A matriz do sistema do método primal-dual pode ter sua dimensão significativamente reduzida através da eliminação de variáveis sem modificar sua estrutura esparsa. Primei-

ramente substituímos as variáveis de folga primais e duais:

$$\begin{aligned}
\Delta s_1 &= r_5 - \Delta f \\
\Delta s_2 &= r_6 - \Delta p \\
\Delta s_3 &= r_7 - \Delta h \\
\Delta z_1 &= F^{-1}(r_{11} - Z_1 \Delta f) \\
\Delta z_2 &= P^{-1}(r_{12} - Z_2 \Delta p) \\
\Delta z_3 &= H^{-1}(r_{13} - Z_3 \Delta h) \\
\Delta w_1 &= S_1^{-1}(r_{14} - W_1 \Delta s_1) \\
\Delta w_2 &= S_2^{-1}(r_{15} - W_2 \Delta s_2) \\
\Delta w_3 &= S_3^{-1}(r_{16} - W_3 \Delta s_3).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Com estas substituições, o sistema se reduz a

$$\left\{ \begin{array}{l}
A\Delta f - E\Delta p = r_1 \\
T\Delta f = r_2 \\
B\Delta p = r_3 \\
\Delta h - C\Delta p = r_4 \\
A^t \Delta y_1 + T^t \Delta y_2 + D_1 \Delta f = \tilde{r}_5 \\
-E^t \Delta y_1 + B^t \Delta y_3 - C^t \Delta y_4 + D_2 \Delta p = \tilde{r}_6 \\
\Delta y_4 + D_3 \Delta h = \tilde{r}_7
\end{array} \right. \tag{4.2}$$

onde:

$$\begin{aligned}
D_1 &= S_1^{-1}W_1 + F^{-1}Z_1 + \alpha R \\
D_2 &= S_2^{-1}W_2 + P^{-1}Z_2 + \beta Q \\
D_3 &= S_3^{-1}W_3 + H^{-1}Z_3 \\
\tilde{r}_5 &= r_8 - S_1^{-1}r_{14} + S_1^{-1}W_1r_5 + F^{-1}r_{11} \\
\tilde{r}_6 &= r_9 - S_2^{-1}r_{15} + S_2^{-1}W_2r_6 + P^{-1}r_{12} \\
\tilde{r}_7 &= r_{10} - S_3^{-1}r_{16} + S_3^{-1}W_3r_7 + H^{-1}r_{13}.
\end{aligned}$$

Somente inversas de matrizes diagonais são envolvidas. Agora as variáveis primais podem ser eliminadas:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= D_1^{-1}(\tilde{r}_5 - A^t\Delta y_1 - T^t\Delta y_2) \\
\Delta p &= D_2^{-1}(\tilde{r}_6 + E^t\Delta y_1 - B^t\Delta y_3 + C^t\Delta y_4) \\
\Delta h &= D_3^{-1}(\tilde{r}_7 - \Delta y_4)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

reduzindo o sistema para

$$\left\{ \begin{aligned}
(AD_1^{-1}A^t + ED_2^{-1}E^t)\Delta y_1 + AD_1^{-1}T^t\Delta y_2 - ED_2^{-1}B^t\Delta y_3 + ED_2^{-1}C^t\Delta y_4 &= \tilde{r}_1 \\
TD_1^{-1}A^t\Delta y_1 + TD_1^{-1}T^t\Delta y_2 &= \tilde{r}_2 \\
-BD_2^{-1}E^t\Delta y_1 + BD_2^{-1}B^t\Delta y_3 - BD_2^{-1}C^t\Delta y_4 &= \tilde{r}_3 \\
CD_2^{-1}E^t\Delta y_1 - CD_2^{-1}B^t\Delta y_3 + (CD_2^{-1}C^t + D_3^{-1})\Delta y_4 &= \tilde{r}_4
\end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_1 &= AD_1^{-1}\tilde{r}_5 - ED_2^{-1}\tilde{r}_6 - r_1 \\
\tilde{r}_2 &= TD_1^{-1}\tilde{r}_5 - r_2 \\
\tilde{r}_3 &= BD_2^{-1}\tilde{r}_6 - r_3 \\
\tilde{r}_4 &= D_3^{-1}\tilde{r}_7 - CD_2^{-1}\tilde{r}_6 - r_4.
\end{aligned}$$

Novamente, somente inversas de matrizes diagonais são envolvidas. Este sistema poderia ser obtido seguindo os mesmos passos da dedução feita na Seção 3.7. A ordem do sistema é $t(n + g + 1)$.

A partir de agora será feita uma análise matricial para explorar a estrutura esparsa particular deste problema, diminuindo a dimensão do sistema a ser resolvido sem perder a estrutura definida positiva do sistema. É importante que o sistema a ser resolvido continue sendo simétrico definido positivo, pois a perda desta estrutura levaria à um aumento no custo computacional da resolução do sistema. A contagem do número de operações para realizar a decomposição LU é de $\frac{2}{3}n^3$, enquanto que a da decomposição de Cholesky é de $\frac{1}{3}n^3$, onde n é a ordem do sistema [41].

Uma análise na estrutura de $BD_2^{-1}B^t$ mostra que esta matriz é diagonal com entradas positivas, logo Δy_3 pode ser isolado no terceiro bloco de equações:

$$\Delta y_3 = (BD_2^{-1}B^t)^{-1}(\tilde{r}_3 + BD_2^{-1}E^t\Delta y_1 + BD_2^{-1}C^t\Delta y_4) \quad (4.5)$$

reduzindo o sistema para

$$\begin{cases} (AD_1^{-1}A^t + EM_1E^t)\Delta y_1 + AD_1^{-1}T^t\Delta y_2 + EM_1C^t\Delta y_4 = \bar{r}_1 \\ TD_1^{-1}A^t\Delta y_1 + TD_1^{-1}T^t\Delta y_2 = \tilde{r}_2 \\ CM_1E^t\Delta y_1 + (CM_1C^t + D_3^{-1})\Delta y_4 = \bar{r}_4 \end{cases} \quad (4.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_1 &= D_2^{-1} - D_2^{-1}B^t(BD_2^{-1}B^t)^{-1}BD_2^{-1} \\ \bar{r}_1 &= \tilde{r}_1 + ED_2^{-1}B^t(BD_2^{-1}B^t)^{-1}\tilde{r}_3 \\ \bar{r}_4 &= \tilde{r}_4 + CD_2^{-1}B^t(BD_2^{-1}B^t)^{-1}\tilde{r}_3. \end{aligned}$$

Este sistema pode ser reescrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A & E & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^t & T^t & 0 \\ E^t & 0 & C^t \\ 0 & 0 & I^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \tilde{r}_2 \\ \bar{r}_4 \end{bmatrix},$$

ou seja, o sistema continua a ser simétrico definido positivo. Este foi o sistema utilizado nas implementações e sua ordem é de $t(n + g + 1) - g$.

Até este momento somente inversas de matrizes diagonais foram utilizadas. Para tentar reduzir ainda mais a dimensão do sistema a ser resolvido, será necessário calcular a inversa de matrizes não diagonais. Embora estas matrizes tenham a estrutura bastante esparsa, o aumento no esforço computacional causado pelo cálculo destas inversas pode ser maior do que o benefício causado pela diminuição na dimensão do sistema a ser resolvido.

Para isolar Δy_2 no segundo bloco de equações de (4.6) é necessário inverter a matriz $TD_1^{-1}T^t$. Assim:

$$\Delta y_2 = (TD_1^{-1}T^t)^{-1}(\tilde{r}_2 - TD_1^{-1}A^t\Delta y_1) \quad (4.7)$$

reduzindo o sistema para

$$\begin{cases} (AM_2A^t + EM_1E^t)\Delta y_1 + EM_1C^t\Delta y_4 = \hat{r}_1 \\ CM_1E^t\Delta y_1 + (CM_1C^t + D_3^{-1})\Delta y_4 = \bar{r}_4 \end{cases} \quad (4.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_2 &= D_1^{-1} - D_1^{-1}T^t(TD_1^{-1}T^t)^{-1}TD_1^{-1} \\ \hat{r}_1 &= \bar{r}_1 - AD_1^{-1}T^t(TD_1^{-1}T^t)^{-1}\tilde{r}_2 \end{aligned}$$

Novamente o sistema pode ser reescrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A & E & 0 \\ 0 & C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ E^t & C^t \\ 0 & I^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \bar{r}_4 \end{bmatrix}.$$

Este sistema é simétrico definido positivo de ordem $t(m + g) - g$.

Para isolar Δy_4 no segundo bloco de equações de (4.8) é necessário inverter a matriz $(CM_1C^t + D_3^{-1})$. Assim:

$$\Delta y_4 = (CM_1C^t + D_3^{-1})^{-1}(\tilde{r}_4 - CM_1E^t\Delta y_1) \quad (4.9)$$

reduzindo o sistema para

$$(AM_2A^t + EM_3E^t)\Delta y_1 = r'_1 \quad (4.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_3 &= M_1 - M_1C^t(CM_1C^t + D_3^{-1})^{-1}CM_1 \\ r'_1 &= \hat{r}_1 - EM_1C^t(CM_1C^t + D_3^{-1})^{-1}\tilde{r}_4 \end{aligned}$$

Este é o sistema a ser resolvido. Ele é simétrico definido positivo e possui ordem tm .

Outras formas de dedução podem ser escolhidas para que o sistema final a ser resolvido fique em função de Δy_2 ou Δy_4 , embora isto não evite o trabalho de inverter duas matrizes não diagonais.

4.6 Modelo sem Restrições de Rampa

No próximo capítulo, serão comparadas as implementações dos métodos apresentados neste trabalho com os métodos implementados para o modelo que não leva em consideração as restrições de rampa. Este modelo pode ser descrito conforme a Seção 2.2, desconsiderando a restrição (2.11):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha \left(\frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right) \\
 \text{s.a} \quad & A f - E p = l^a \\
 & T f = l^b \\
 & B p = q \\
 & f + s_1 = f^{max} \\
 & p + s_2 = p^{max} \\
 & (f, p, s_1, s_2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Adicionando uma função de barreira logarítmica para as restrições de não negatividade, o Lagrangeano deste problema é:

$$\begin{aligned}
 L = \quad & \alpha \left(\frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right) \\
 & + y_1^t (A f - E p - l^a) + y_2^t (T f - l^b) + y_3^t (B p - q) \\
 & + w_1^t (f + s_1 - f^{max}) + w_2^t (p + s_2 - p^{max}) \\
 & - \mu \left[\sum_{i=1}^{tg} (\ln p_i + \ln s_{1_i}) + \sum_{i=1}^{tn} (\ln f_i + \ln s_{2_i}) \right].
 \end{aligned}$$

As derivadas parciais do Lagrangeano se anulam na solução ótima:

$$\begin{aligned}
 L_f = \quad & \alpha (R f + c_f) + A^t y_1 + T^t y_2 + w_1 - \mu F^{-1} e = 0 \\
 L_p = \quad & \beta (Q p + c_p) - E^t y_1 + B^t y_3 + w_2 - \mu P^{-1} e = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{y_1} &= Af - Ep - l^a = 0 \\
L_{y_2} &= Tf - l^b = 0 \\
L_{y_3} &= Bp - q = 0 \\
L_{w_1} &= f + s_1 - f^{max} = 0 \\
L_{w_2} &= p + s_2 - p^{max} = 0 \\
L_{s_1} &= w_1 - \mu S_1^{-1}e = 0 \\
L_{s_2} &= w_2 - \mu S_2^{-1}e = 0.
\end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis $z_1 = \mu F^{-1}e$ e $z_2 = \mu P^{-1}e$, obtemos as condições de otimalidade do problema perturbado:

$$\text{Factibilidade primal} \quad \left\{ \begin{array}{l} Af - Ep = l^a \\ Tf = l^b \\ Bp = q \\ f + s_1 = f^{max} \\ p + s_2 = p^{max} \\ (f, p, s_1, s_2) \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\text{Factibilidade dual} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^t y_1 + T^t y_2 + w_1 - z_1 + \alpha Rf = -\alpha c_f \\ -E^t y_1 + B^t y_3 + w_2 - z_2 + \beta Qp = -\beta c_p \\ (z_1, z_2, w_1, w_2) \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\text{Complementaridade} \quad \left\{ \begin{array}{l} FZ_1e = \mu e \\ PZ_2e = \mu e \\ S_1W_1e = \mu e \\ S_2W_2e = \mu e. \end{array} \right.$$

A direção de Newton para o método de trajetória central é definido pelo sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Delta f - E\Delta p = r_1 \\ T\Delta f = r_2 \\ B\Delta p = r_3 \\ \Delta f + \Delta s_1 = r_4 \\ \Delta p + \Delta s_2 = r_5 \\ A^t\Delta y_1 + T^t\Delta y_2 + \Delta w_1 - \Delta z_1 + \alpha R\Delta f = r_6 \\ -E^t\Delta y_1 + B^t\Delta y_3 + \Delta w_2 - \Delta z_2 + \beta Q\Delta p = r_7 \\ F\Delta z_1 + Z_1\Delta f = r_8 \\ P\Delta z_2 + Z_2\Delta p = r_9 \\ S_1\Delta w_1 + W_1\Delta s_1 = r_{10} \\ S_2\Delta w_2 + W_2\Delta s_2 = r_{11} \end{array} \right.$$

onde os resíduos são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = l^a - Af + Ep \\ r_2 = l^b - Tf \\ r_3 = q - Bp \\ r_4 = f^{max} - f - s_1 \\ r_5 = p^{max} - p - s_2 \\ r_6 = -\alpha c_f - A^t y_1 - T^t y_2 - w_1 + z_1 - \alpha Rf \\ r_7 = -\beta c_p + E^t y_1 - B^t y_3 - w_2 + z_2 - \beta Qp \\ r_8 = \mu e - FZ_1 e \\ r_9 = \mu e - PZ_2 e \\ r_{10} = \mu e - S_1 W_1 e \\ r_{11} = \mu e - S_2 W_2 e. \end{array} \right.$$

Este sistema pode ter sua dimensão significativamente reduzida através da eliminação de variáveis sem modificar sua estrutura esparsa. Substituindo as variáveis de folga primais e duais:

$$\begin{aligned}
\Delta s_1 &= r_4 - \Delta f \\
\Delta s_2 &= r_5 - \Delta p \\
\Delta z_1 &= F^{-1}(r_8 - Z_1 \Delta f) \\
\Delta z_2 &= P^{-1}(r_9 - Z_2 \Delta p) \\
\Delta w_1 &= S_1^{-1}(r_{10} - W_1 \Delta s_1) \\
\Delta w_2 &= S_2^{-1}(r_{11} - W_2 \Delta s_2).
\end{aligned}$$

reduzimos o sistema a

$$\left\{ \begin{array}{l}
A\Delta f - E\Delta p = r_1 \\
T\Delta f = r_2 \\
B\Delta p = r_3 \\
A^t \Delta y_1 + T^t \Delta y_2 + D_1 \Delta f = \tilde{r}_4 \\
-E^t \Delta y_1 + B^t \Delta y_3 + D_2 \Delta p = \tilde{r}_5
\end{array} \right.$$

onde:

$$\begin{aligned}
D_1 &= S_1^{-1}W_1 + F^{-1}Z_1 + \alpha R \\
D_2 &= S_2^{-1}W_2 + P^{-1}Z_2 + \beta Q \\
\tilde{r}_4 &= r_6 - S_1^{-1}r_{10} + S_1^{-1}W_1 r_4 + F^{-1}r_8 \\
\tilde{r}_5 &= r_7 - S_2^{-1}r_{11} + S_2^{-1}W_2 r_5 + P^{-1}r_9.
\end{aligned}$$

Eliminando as variáveis primais:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= D_1^{-1}(\tilde{r}_4 - A^t \Delta y_1 - T^t \Delta y_2) \\
\Delta p &= D_2^{-1}(\tilde{r}_5 + E^t \Delta y_1 - B^t \Delta y_3)
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{cases} (AD_1^{-1}A^t + ED_2^{-1}E^t)\Delta y_1 + AD_1^{-1}T^t\Delta y_2 - ED_2^{-1}B^t\Delta y_3 = \tilde{r}_1 \\ TD_1^{-1}A^t\Delta y_1 + TD_1^{-1}T^t\Delta y_2 = \tilde{r}_2 \\ -BD_2^{-1}E^t\Delta y_1 + BD_2^{-1}B^t\Delta y_3 = \tilde{r}_3 \end{cases}$$

onde:

$$\tilde{r}_1 = AD_1^{-1}\tilde{r}_4 - ED_2^{-1}\tilde{r}_5 - r_1$$

$$\tilde{r}_2 = TD_1^{-1}\tilde{r}_4 - r_2$$

$$\tilde{r}_3 = BD_2^{-1}\tilde{r}_5 - r_3.$$

A ordem deste sistema é $t(n+1) + g$. Demais detalhes da implementação dos métodos para este modelo podem ser encontrados em [38].

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Todos os testes realizados utilizaram a linguagem de programação MATLAB 7.0 em um sistema operacional Linux, processador Intel Pentium 3.4 GHz. A precisão adotada é de 10^{-3} .

Em todos os experimentos foram adotados os valores $f_i^{min} = -f_i^{max}$ para as linhas de transmissão e $p_i^{min} = 0$ para os geradores. Somente funções quadráticas puras foram utilizadas, ou seja, $c_i = 0$, e os coeficientes quadráticos são os mesmos para todos os geradores. Os sistemas de teste utilizados foram o IEEE30 (Figura 5.1) e o IEEE118 e o horizonte em questão é de 24 horas ($t = 24$). Para todos os geradores foram estabelecidas metas (embora na prática estas restrições se apliquem apenas às usinas hidroelétricas) e rampas (embora estas restrições sejam mais importantes para as usinas termoeletricas).

A Tabela 5.1 mostra a variação da demanda ao longo do dia. Estes fatores correspondem a um dia típico de semana fornecidos pela CESP [11]. A Tabela 5.2 resume os resultados obtidos pelos métodos nos vários casos para o sistema IEEE30, quanto ao número de iterações e esforço computacional. Este sistema possui $m = 30$ barras, $n = 41$ linhas, $g = 6$ geradores. Este problema possui 6216 variáveis e a matriz do sistema linear a ser resolvido pelos métodos é de ordem 1146. Nos primeiros casos, os limites foram escolhidos de forma que na otimalidade não existam restrições de capacidade ativas. O

Caso 1 considera apenas as perdas de transmissão ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$). No Caso 2 são considerados apenas os custos de geração ($\alpha = 0$ e $\beta = 1$). No Caso 3 são considerados ambos os objetivos. As perdas de transmissão são dadas em MW e os custos de geração em unidades monetárias, logo as ponderações α e β devem levar em consideração esta diferença de unidades entre os objetivos. Se fixarmos $\beta = 1$, então α deve ser o custo marginal de uma unidade de perda de transmissão por unidade monetária. Para validação da implementação consideramos $\alpha = \beta = 1$ neste trabalho. Os próximos testes buscam analisar o desempenho dos métodos em situações mais restritas. No Caso 4 a capacidade de geração das usinas é limitada em 72 MW. No Caso 5 a capacidade de transmissão das linhas é limitada em 62 MW. No Caso 6 a variação de geração permitida (rampa) é de 10 MW. No Caso 7 os três limites citados anteriormente são considerados em conjunto.

A Figura 5.2 mostra o gráfico do despacho para o Caso 1, em que são consideradas apenas as perdas de transmissão. No Caso 2 (Figura 5.3), o despacho de cada gerador acompanha a curva da demanda, pois os custos de geração considerados são todos iguais. O Caso 3 (Figura 5.4) mostra uma situação intermediária entre os casos 1 e 2, pois são considerados tanto as perdas de transmissão como os custos de geração. No Caso 4 (Figura 5.5), a capacidade de geração da barra 8 está no limite às 19h. Para os Casos 5–6 não é possível visualizar as restrições ativas no gráfico do despacho. No Caso 7 (Figura 5.6), novamente a capacidade de geração da barra 8 está no limite às 19h, além de outras restrições de capacidades ativas.

A Tabela 5.3 se refere aos testes realizados com o sistema IEEE118. Este sistema possui $m = 118$ barras, $n = 179$ linhas, $g = 53$ geradores. O problema possui 32740 variáveis e a matriz utilizada pelos métodos é de ordem 5539. Os Casos 8–12 reproduzem situações semelhantes aos Casos 3–7, mas para o sistema IEEE118. No Caso 8 os limites são escolhidos para que na otimalidade não existam restrições de capacidade ativas. No Caso 9 a capacidade de geração é limitada em 220 MW. No Caso 10 a capacidade de transmissão é limitada em 140 MW. No Caso 11 a variação de geração permitida é de 18

Hora	Fator	Hora	Fator
1:00	0,7948	13:00	1,0557
2:00	0,7425	14:00	1,0823
3:00	0,7255	15:00	1,0814
4:00	0,7222	16:00	1,0846
5:00	0,7345	17:00	1,1134
6:00	0,7816	18:00	1,1714
7:00	0,9012	19:00	1,2998
8:00	0,9832	20:00	1,2393
9:00	1,0535	21:00	1,1658
10:00	1,0896	22:00	1,1089
11:00	1,0976	23:00	1,0000
12:00	1,0888	24:00	0,8828

Tabela 5.1: Fatores de Carga

Caso	Trajetória Central		Preditor-Corretor	
	Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
1	6	0,80	4	0,72
2	6	0,81	4	0,72
3	6	0,81	3	0,56
4	7	0,93	4	0,72
5	8	1,06	5	0,88
6	7	0,93	5	0,89
7	11	1,45	6	1,05

Tabela 5.2: Sistema IEEE30 - Iterações e Tempo de CPU (s)

MW. No Caso 12 os três limites anteriores são considerados em conjunto.

A Tabela 5.4 compara os resultados obtidos com um modelo que não considera as restrições de rampa [38], utilizando o método preditor-corretor. Os Casos 3–5 foram escolhidos pois há restrição de rampa ativa. A Tabela 5.5 compara o valor das funções objetivo nos casos onde a restrição de rampa está ativa. Esta diferença mostra a natureza diferente das soluções.

Caso	Trajetória Central		Preditor-Corretor	
	Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
8	6	35,86	4	27,04
9	8	47,73	4	27,09
10	7	41,76	4	27,03
11	9	54,08	5	33,85
12	11	66,21	7	48,36

Tabela 5.3: Sistema IEEE118 - Iterações e Tempo de CPU (s)

Caso	Com Rampa		Sem Rampa	
	Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
3	3	0,56	3	0,46
4	4	0,72	7	0,51
5	5	0,88	3	0,37

Tabela 5.4: Modelos - Iterações e Tempo de CPU (s)

Caso	Valor com Rampa	Diferença sem Rampa
6	$1,15 \times 10^6$	4,94
7	$1,15 \times 10^6$	19,10
11	$1,32 \times 10^7$	34,96
12	$1,32 \times 10^7$	20,24

Tabela 5.5: Diferença na Função Objetivo

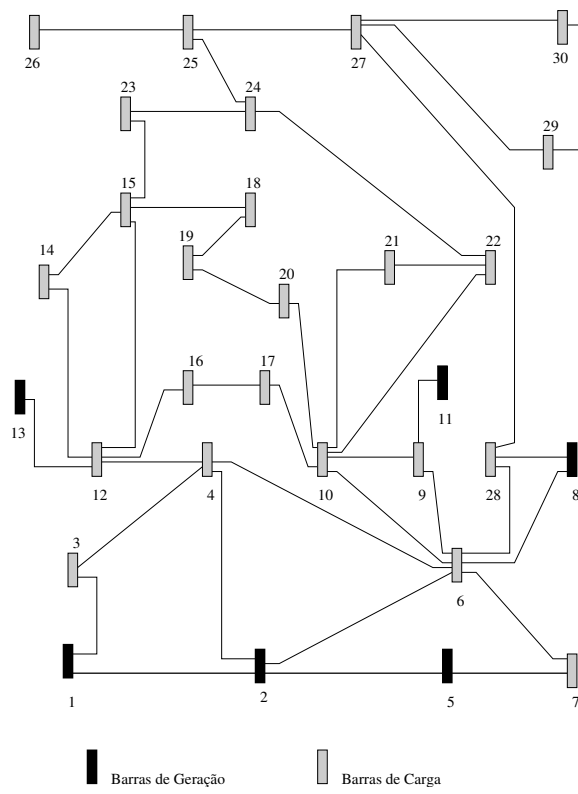


Figura 5.1: Sistema IEEE30

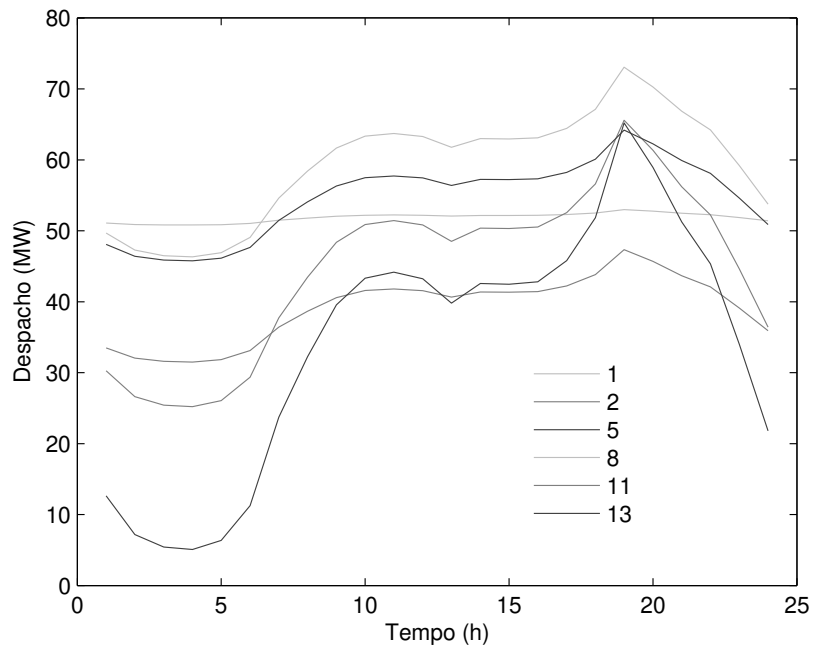


Figura 5.2: Caso 1 - Apenas perdas de transmissão

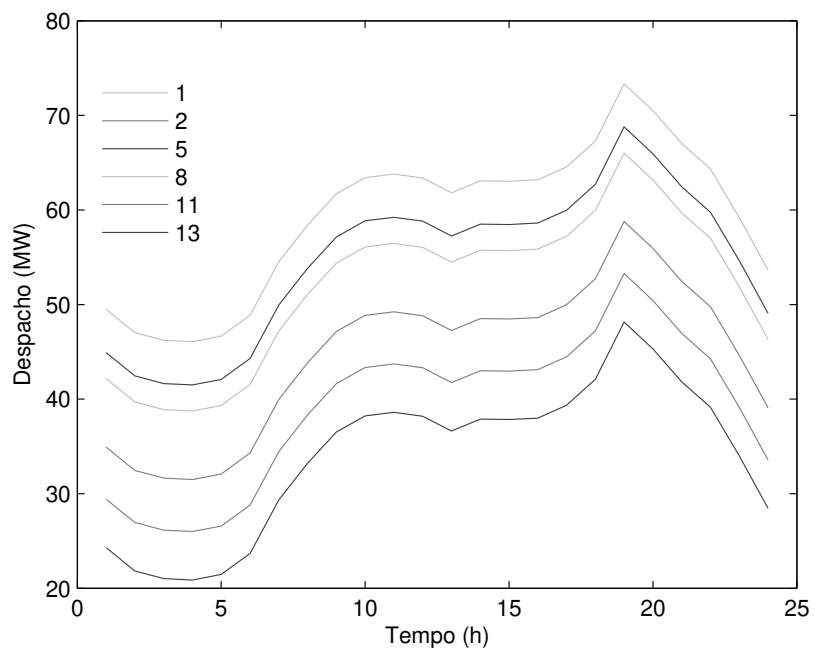


Figura 5.3: Caso 2 - Apenas custos de geração

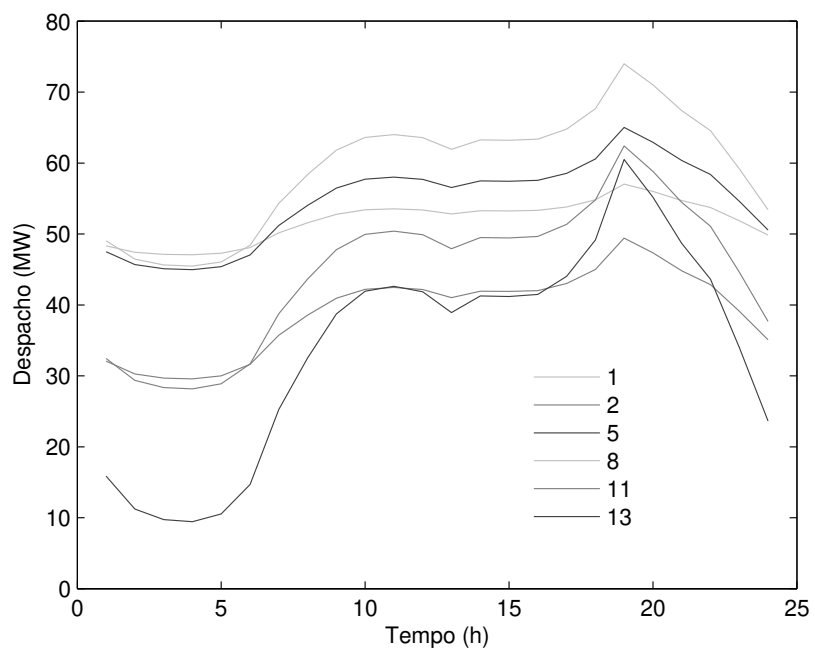


Figura 5.4: Caso 3 - Perdas de transmissão e custos de geração

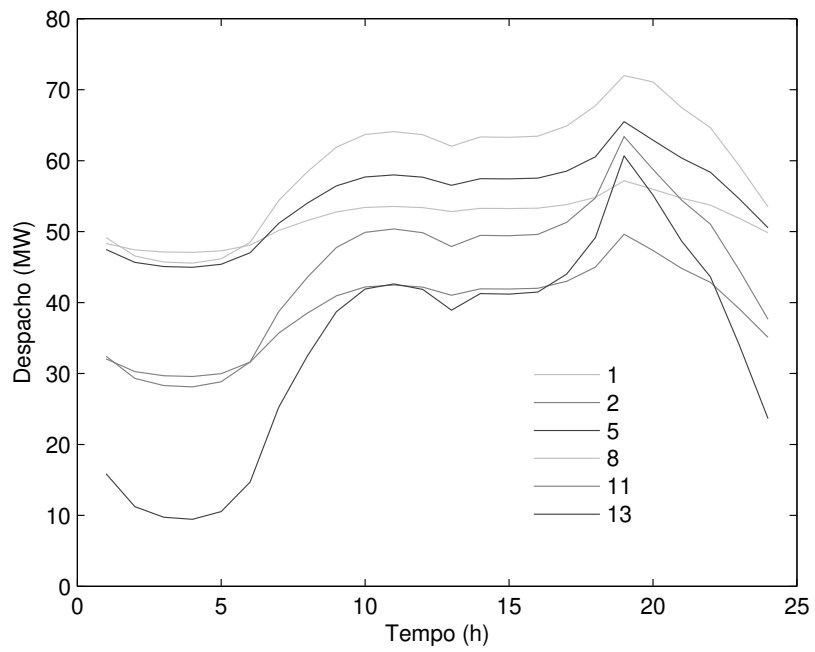


Figura 5.5: Caso 4 - Capacidade de geração no limite

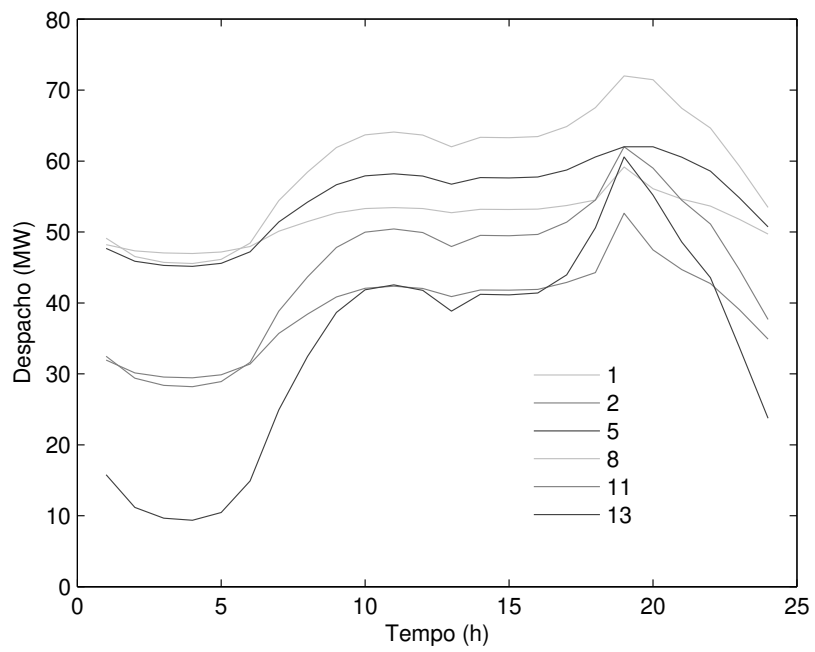


Figura 5.6: Caso 7 - Três tipos de restrições ativas

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho o problema de pré-despacho de um sistema de potência hidrotérmico é formulado como um problema de fluxo em redes e o modelo resultante é resolvido por métodos de pontos interiores.

Uma característica a ser destacada pelo método de pontos interiores é a robustez. Mesmo para problemas bastante sobrecarregados, o método converge bem, sem apresentar instabilidade numérica com uma precisão maior que a necessária em uma aplicação prática. Outra característica é a velocidade. O maior número de iterações para os sistemas IEEE30 e IEEE118 foi 7 para o método preditor-corretor e 11 para o método de trajetória central, mesmo para sistemas muito sobrecarregados. Além disso, as iterações são rápidas, permitindo a solução de problemas de grande porte. Comparando os dois métodos, o preditor-corretor obteve desempenho superior em todos os casos testados, conseguindo um tempo computacional menor mesmo considerando o maior esforço computacional por iteração.

Comparando o modelo apresentado neste trabalho com os modelos que não levam em consideração as restrições de rampa, a implementação se mostrou eficiente e competitiva.

Nos métodos de pontos interiores o ponto inicial utilizado é crucial, pois ajuda a reduzir o número de iterações. Como sugestão de melhoria, outro ponto inicial pode ser obtido a

partir do modelo estático [36, 38]. Para cada intervalo de tempo, um problema de fluxo de potência ótimo é resolvido com uma tolerância relaxada, e esta solução é usada como ponto inicial para este intervalo de tempo no problema de pré-despacho. Nesta abordagem, apenas as restrições de metas e rampas não são satisfeitas.

Outra sugestão é explorar ainda mais a estrutura matricial particular do problema, reduzindo a dimensão do sistema a ser resolvido. Em todos os testes implementados foi utilizado o sistema (4.6), que não envolve a inversão de nenhuma matriz não diagonal. Para eliminar Δy_2 ou Δy_4 do sistema resultante, seria necessário inverter matrizes não diagonais. A implementação destas eliminações em MATLAB mostrou-se ineficiente em comparação. Se for possível criar um método eficiente para inverter estas matrizes explorando suas estruturas matriciais esparsas, o esforço computacional pode diminuir. Além disso, seria conveniente fazer a implementação dos métodos em outras linguagem (C ou FORTRAN, por exemplo), a fim de reduzir o tempo computacional e explorar a estrutura matricial.

Referências Bibliográficas

- [1] J. ABADIE AND J. CARPENTIER, *Generalization of the Wolfe gradient method to the case of nonlinear constraints*, Optimization Academic Press, London, (1969), pp. 37–47.
- [2] I. ADLER, M. G. C. RESENDE, G. VEIGA, AND N. KARMARKAR, *An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming*, Mathematical Programming, 44 (1989), pp. 297–335.
- [3] O. ALSAC, J. BRIGHT, M. PRAIS, AND B. SCOTT, *Further developments in LP-based optimal power flow*, IEEE Transaction on PAS, 5 (1990), pp. 697–711.
- [4] M. S. BAZARAA, J. JARVIS, AND H. D. SHERALI, *Linear Programming and Network Flows*, John Willey & Sons, Inc., 1990.
- [5] M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI, AND C. M. SHETTY, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Willey & Sons, Inc., 1979.
- [6] M. C. BIGGS AND M. A. LAUGHTON, *Optimal electric power scheduling: a large nonlinear programming test problem solved by recursive quadratic programming*, Mathematical Programming, 13 (1977), pp. 167–182.
- [7] R. C. BURCHETT, H. H. HAPP, AND D. R. VIERATH, *Quadratically convergent optimal power flow*, IEEE Transaction on PAS, 103 (1984), pp. 3267–3275.

- [8] J. CARPENTIER, *Contribution a l'etude du dispatching economique*, Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens, 3 (1962), pp. 431–447.
- [9] —, *Differential injection methods: a general method for secure and optimal load flows*, Proc. of IEEE PICA Conference, Minneapolis, (1973), pp. 225–262.
- [10] M. F. CARVALHO, S. SOARES, AND T. OHISHI, *Optimal active power dispatch by network flow approach*, IEEE Transactions on Power Systems, 3 (1988), pp. 1640–1647.
- [11] F. G. CHIAVEGATO, A. R. L. OLIVEIRA, AND S. SOARES, *Pré-despacho de sistemas de energia elétrica via relaxação Lagrangeana e métodos de pontos interiores*, Anais do 22nd. Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, Campinas SP, CIL110, (2001), pp. 1–24.
- [12] K. A. CLEMENTS, P. W. DAVIS, AND K. D. FREY, *An interior point algorithm for weighted least absolute value power system state estimation*, IEEE/PES Winter Meeting, New York, Paper n° 235-2 (1991).
- [13] G. B. DANTZIG, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [14] I. I. DIKIN, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming*, Soviets Math. Doklady, 8 (1967), pp. 674–675.
- [15] H. W. DOMMEL AND W. F. TINNEY, *Optimal power flow solution*, IEEE Transactions on PAS, 87 (1968), pp. 1866–1876.
- [16] A. S. EL-BAKRY, R. A. TAPIA, T. TSUCHIYA, AND Y. ZHANG, *On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming*, Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (1996), pp. 507–541.

- [17] A. V. Fiacco and G. P. McCormick, *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- [18] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [19] K. R. Frisch, *The logarithmic potential method of convex programming*, Technical report, University Institute of Economics, Oslo, (1955).
- [20] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations 2nd Edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1989.
- [21] S. Granville, *Optimal reactive power dispatch through interior point methods*, IEEE Transactions on Power Systems, 9 (1994), pp. 136–146.
- [22] S. Granville, M. C. Lima, L. C. Lima, and S. Prado, *Planvar - an optimization software for VAR sources planning*, Symposium in Mathematical Programming – Amsterdam, (1991).
- [23] G. Irissari, L. M. Kimball, K. A. Clements, A. Bagchi, and P. W. Davis, *Economic dispatch with network and ramping constraints via interior point methods*, IEEE Transactions on Power Systems, 13 (1998), pp. 236–242.
- [24] N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica, 4 (1984), pp. 373–395.
- [25] N. Karmarkar, J. C. Lagarias, L. Slutsman, and P. Wang, *A parallel formulation of interior-point algorithms*, AT&T Technical Journal, 68 (1989), pp. 20–36.
- [26] L. G. Khachiyan, *A polynomial algorithm in linear programming*, Soviet Mathematics Doklady, 20 (1979), pp. 191–194.

- [27] M. KOJIMA, S. MIZUNO, AND A. YOSHISE, *A primal-dual interior point algorithm for linear programming. Progress in Mathematical Programming: Interior Point and related Methods*, Springer Verlag, New York, 1989.
- [28] D. G. LUENBERGER, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, 1984.
- [29] I. J. LUSTIG, R. E. MARSTEN, AND D. F. SHANNO, *Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming*, *Linear Algebra Appl.*, 152 (1991), pp. 191–222.
- [30] ———, *On implementing Mehrotra’s predictor-corrector interior point method for linear programming*, *SIAM Journal on Optimization*, 2 (1992), pp. 435–449.
- [31] N. MEGIDDO, *Pathways to the optimal set in linear programming*, *Mathematical Programming*, (1986), pp. 131–158.
- [32] S. MEHROTRA, *On the implementation of a primal-dual interior point method*, *SIAM Journal on Optimization*, 2 (1992), pp. 575–601.
- [33] J. A. MOMOH, M. E. EL-HAWARY, AND R. ADAPA, *A review of selected optimal power flow literature to 1993, part I Nonlinear and quadratic programming approaches*, *IEEE Transactions on Power Systems*, 14 (1999), pp. 96–104.
- [34] R. D. C. MONTEIRO, I. ADLER, AND M. G. C. RESENDE, *A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension*, *Mathematics of Operations Research*, 15 (1990), pp. 191–214.
- [35] B. A. MURTAGH AND M. A. SAUNDERS, *A projected lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints*, *Mathematical Programming Study*, 16 (1982), pp. 84–117.

- [36] A. R. L. OLIVEIRA AND S. SOARES, *Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC*, SBA: Controle & Automação, 14 (2003), pp. 278–285.
- [37] A. R. L. OLIVEIRA, S. SOARES, AND L. NEPOMUCENO, *Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches*, IEEE Transactions on Power Systems, 18 (2003), pp. 1235–1240.
- [38] ———, *Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches*, Electrical Power & Energy Systems, 27 (2005), pp. 91–99.
- [39] V. H. QUINTANA, G. L. TORRES, AND J. MEDINA-PALOMO, *Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes*, IEEE Transactions on Power Systems, 15 (2000), pp. 170–176.
- [40] D. J. SUN, B. ASHLEY, B. BREWER, A. HUGHES, AND W. F. TINNEY, *Optimal power flow by Newton approach*, IEEE Transaction on PAS, 103 (1984), pp. 2864–2880.
- [41] L. N. TREFETHEN AND D. BAU, III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [42] R. J. VANDERBEI, *Linear Programming – Foundations and Extensions*, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1996.
- [43] L. VARGAS, V. QUINTANA, AND A. VANNELLI, *A tutorial description of an interior point method and its application to security constrained economic dispatch*, IEEE Transactions on Power Systems, 11 (1993), pp. 1315–1324.
- [44] S. J. WRIGHT, *Primal–Dual Interior–Point Methods*, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1996.