

**Ferramentas elementares para geometrias
clássicas e hiperbólica complexa**

Carlos Henrique Grossi Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ananin

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Ferramentas elementares para geometrias clássicas e hiperbólica complexa

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Carlos Henrique Grossi Ferreira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de setembro de 2006



Prof. Dr. Alexandre Ananin

Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alexandre Ananin
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
Prof. Dr. Israel Vainsencher
Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii
Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Ferreira, Carlos Henrique Grossi

F413f Ferramentas elementares para geometrias clássicas e hiperbólica complexa / Carlos Henrique Grossi Ferreira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Alexandre Ananin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos discretos (Matemática). 2. Geometria. 3. Topologia. 4. Álgebra. I. Ananin, Alexandre. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Elementary tools for classic and complex hyperbolic geometries.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Discrete groups (Mathematics). 2. Geometry. 3. Topology. 4. Álgebra.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Doutorado em Matemática

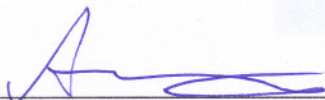
Banca examinadora: Prof. Dr. Alexandre Ananin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Israel Vainsencher (ICEX-UFMG)
Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii (ICEX-UFMG)
Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 15/09/2006

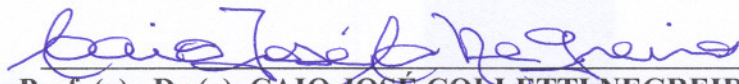
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de setembro de 2006 e aprovada

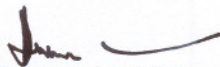
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). ALEXANDRE ANANIN



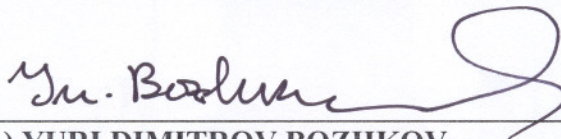
Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



Prof. (a). Dr (a). ISRAEL VAINSENER



Prof. (a). Dr (a). NIKOLAI ALEXANDROVITCH GOUSSEUSKI



Prof. (a) Dr. (a) YURI DIMITROV BOZHKOV

Ferramentas elementares para geometrias clássicas e hiperbólica complexa

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Carlos Henrique Grossi Ferreira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de setembro de 2006

.....
Prof. Dr. Alexandre Ananin

Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alexandre Ananin
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
Prof. Dr. Israel Vainsencher
Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii
Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

À minha família

Resumo

Esta tese possui quatro partes.

A primeira parte apresenta uma construção que permite abordar todas as geometrias clássicas sob um mesmo ponto de vista. Utilizando tal abordagem, expressamos e caracterizamos, de modo simples e isento de coordenadas, vários aspectos destas geometrias, tais como geodésicas, distâncias, transporte paralelo, tensores de curvatura e curvaturas seccionais. Esperamos, assim, unificar e facilitar o estudo das geometrias clássicas, evitando a introdução de vários “modelos” para uma mesma geometria (como é o caso dos modelos de Poincaré, de Siegel e de Klein para as geometrias hiperbólicas) bem como evitando a descrição de métricas através de sistemas de coordenadas específicos.

A segunda parte consiste em aplicar as ferramentas desenvolvidas anteriormente para o caso específico da geometria hiperbólica complexa. O foco central é o estudo de configurações de um número pequeno de pontos. Deste modo estudamos propriedades básicas de objetos elementares tais como linhas projetivas, geodésicas e bissetores. Estas propriedades provaram-se essenciais com relação ao nosso principal objetivo, o estudo de grupos discretos de isometrias do plano hiperbólico complexo.

A terceira parte consiste em uma versão do Teorema Poliedral de Poincaré em que as exigências sobre a tesselação são suficientemente locais. Além disso, buscamos para o referido Teorema condições simples e verificáveis na prática. A versão apresentada pode ser aplicada em geometrias de curvatura não-constante, nas quais não podemos explorar, por exemplo, os conceitos de convexidade.

Por fim, a quarta parte é um artigo produzido em colaboração com os professores Alexandre Ananin e Nikolai Goussevskii. Neste artigo, novos exemplo de variedades com estrutura hiperbólica complexa são apresentados, resolvendo alguns problemas da área.

Abstract

This thesis consists of four parts.

The first part consists of a construction interpreting all classic geometries in the same way. With this construction, we express and characterize various aspects of these geometries, such as geodesics, distances, parallel displacement, curvature tensors, and sectional curvatures, in a simple coordinate-free way. We believe that this approach can unify and simplify the study of classic geometries escaping the use of several “models” for the same geometry (as Poincaré’s, Siegel’s, and Klein’s models of hyperbolic geometry) as well as avoiding descriptions of metrics in specific coordinates.

In the second part we apply the previously developed tools to the case of complex hyperbolic geometry. The guideline is the study of finite configurations of points. From this point of view, we study basic properties of elementary geometric objects such as projective lines, geodesics, and bisectors. These properties turned out to be crucial for our central purpose, the study of discrete groups of isometries of the complex hyperbolic plane.

The third part consists of a version of Poincaré’s Polyhedron Theorem where the conditions concerning the tessellation are sufficiently local. Also, we consider conditions that are simple and verifiable in practice. The proposed theorem can be applied in the case of geometries of non-constant curvature when some concepts, as those of convexity, are not applicable.

Finally, the fourth part is an article written in collaboration with professor Alexandre Ananin and professor Nikolai Goussevskii. In this article, new series of examples of complex hyperbolic manifolds are constructed, solving some problems in the area.

Sumário

0.	Introdução	4
1.	Uma abordagem para as geometrias clássicas	9
1.1.	Introdução	9
1.2.	Espaço tangente	9
1.3.	Forma e métrica	10
1.4.	Subespaços reais e projetivos. Geodésicas	12
1.5.	Comprimento de geodésica. Tância	15
1.6.	Conexão de Levi-Civita	16
1.7.	Transporte paralelo	20
1.8.	Tensor de curvatura	23
1.9.	Curvaturas seccionais	24
1.10.	Alguns exemplos. Resumo	27
2.	Geometria hiperbólica complexa elementar	29
2.1.	Introdução	29
2.2.	Configurações de um número pequeno de pontos	29
2.3.	Planos reais	50
2.4.	Bissetores	53
2.5.	Apêndice: Estrutura CR e calibrações	67
3.	Teorema Poliedral de Poincaré	69
3.1.	Introdução	69
3.2.	Tesselação local	70
3.3.	Um teorema de Poincaré “plano”	73
4.	Artigo “Complex Hyperbolic Structures on Disc Bundles over Surfaces I. General Settings. A Series of Examples”	85

Introdução

... to verify harmony through algebra.

— A. S. Pushkin, *Mozart and Salieri*

Apesar do nosso hábito de dividi-la em muitas áreas, a matemática é uma ciência inteira. Consideremos a típica “contraposição” entre geometria e álgebra. Normalmente, os fatos vislumbrados através da geometria obtêm a forma mais geral quando expressados em termos algébricos. Assim, ganhamos interpretações geométricas mais ricas e adequadas dos fatos originais. A geometria algébrica, da qual não trataremos neste texto, é um exemplo comum de tal fenômeno.

Esta tese ilustra a mencionada interação entre geometria e álgebra no que diz respeito às geometrias clássicas e, mais detalhadamente, à geometria hiperbólica complexa. (Esperamos que o leitor não interprete o termo “clássicas” muito seriamente: por definição, geometrias clássicas são aquelas tratadas no Capítulo 1.)

Grosso modo, a geometria (Riemanniana) lida com variedades recobertas por um espaço modelo cuja estrutura é, por si, importante. Nas últimas décadas, esta área alcançou grande êxito com relação às geometrias hiperbólicas de curvatura constante, essencialmente em dimensão três (vide trabalhos de Thurston, Hamilton, Perelman, etc.). Em dimensão quatro, destaca-se entre as geometrias hiperbólicas a geometria hiperbólica complexa: por um lado, esta constitui o exemplo mais simples possível de variedade hiperbólica Kähleriana com curvatura holomorfa constante mas com curvatura seccional não-constante; por outro, a geometria hiperbólica complexa lança luz para as geometrias hiperbólicas de curvatura constante. Vale a pena mencionar que, dentre as \mathbb{C} -superfícies completas, as menos estudadas são exatamente aquelas que admitem estrutura hiperbólica complexa.

Atualmente, a geometria hiperbólica complexa está em sua infância. Há poucos exemplos conhecidos de variedades com tal estrutura, inexistindo assim uma base que sustente hipóteses razoáveis e que permita a formulação de questões adequadas. Logo, é importante buscar métodos que ampliem a diversidade dos exemplos. Para isto, alguma cautela é necessária: a maioria das ferramentas utilizadas nos casos de curvatura constante ou não se aplicam ou produzem cálculos enormes, não realizáveis na prática.

Assim, nosso primeiro passo será utilizar definições livres de coordenadas. Tipicamente, em geometria hiperbólica complexa, ou mesmo na geometria de Lobatchevskii, são comuns fórmulas complicadas expressando determinados fatos geométricos. Com um estudo livre de coordenadas, temos maiores chances de obter expressões mais simples, sem a complexidade relacionada à escolha arbitrária de coordenadas. Além disso, a abordagem introduzida busca estudar os objetos e conceitos geométricos *per se*; a adequação de tais objetos e conceitos às definições gerais das geometrias diferencial e Riemanniana, embora obviamente presente, tem papel secundário. Neste sentido, poderíamos dizer que tratamos as geometrias clássicas de modo elementar (como a geometria do segundo grau), na medida do possível.

Partindo disso, é importante realizar-se um estudo sistemático da geometria hiperbólica complexa, começando pelos fatos mais básicos. Assim procuramos estudar alguns objetos geométricos naturais (tais como linhas projetivas, geodésicas, planos reais e bissetores). À parte os novos resultados obtidos,

acreditamos que as técnicas introduzidas criam um método geral para se lidar com inúmeras situações geométricas. Aplicando-se este método, é comum que configurações à primeira vista distintas tenham sua análise reduzida aos mesmos raciocínios, como ocorre frequentemente na geometria algébrica. Além disso, é possível utilizar o método para provar boa parte dos resultados presentes no atualmente único livro da área, [Gol].

Salientemos, mais especificamente, alguns aspectos da abordagem em questão.

O espaço hiperbólico complexo (ou o seu “modelo” projetivo) é usualmente considerado como uma bola aberta, que denotaremos BV , em \mathbb{CP}^2 . Seu bordo, que denotaremos SV , é uma esfera tridimensional — o *absoluto*. Claramente, a geometria de pontos em $AV = \mathbb{CP}^2 \setminus (BV \cup SV)$ não é nada mais do que a geometria de linhas projetivas em BV . De modo semelhante, a geometria de geodésicas em AV (que são extensões naturais das geodésicas em BV) reflete a geometria de bissetores em BV . Portanto, a discutida interação entre álgebra e geometria mostra que não devemos descartar o espaço pseudo-Riemanniano AV .

Utilizando-se as dualidades acima, bem como outras de natureza semelhante, é muitas vezes possível reduzir o estudo de configurações geométricas relativamente simples à análise de arranjos finitos de pontos em \mathbb{CP}^2 . Tal redução normalmente leva à uma descrição da configuração geométrica original em sistemas de coordenadas naturais (e, portanto, adequados), nos quais os esforços de cálculo diminuem ao mínimo. As interpretações geométricas das características algébricas de tais arranjos são de grande valor para a construção de variedades hiperbólicas complexas.

Destaque-se o importante papel do estudo de *triângulos*, isto é, de configurações de três pontos em \mathbb{CP}^2 . Em geral, triângulos podem ser considerados tanto como triângulos geodésicos quanto como triângulos de bissetores, obtidos pela mencionada dualidade entre geodésicas e bissetores. Assim, por exemplo, certas triplas de pontos em AV determinam triângulos de bissetores em BV cujos vértices são linhas projetivas. A geometria de triângulos de bissetores é rica: eles são naturalmente munidos de uma isometria de seus vértices (vide [AGG]). Ainda mais, os triângulos de bissetores são essenciais para a descoberta de variedades com estrutura hiperbólica complexa, servindo como tijolos para poliedros fundamentais.

A construção de variedades com geometria modelada em um determinado espaço é, essencialmente, equivalente à construção de grupos discretos de isometrias do espaço em questão. Uma ferramenta usual nesta atividade é o Teorema Poliedral de Poincaré. No entanto, boa parte das formulações de tal teorema aplica-se somente às geometrias de curvatura constante.

No caso hiperbólico complexo, bem como em outros de curvatura não-constante, as faces do poliedro fundamental não são totalmente geodésicas e, em geral, não se interceptam com ângulo constante. Além disso, uma condição típica em versões conhecidas do Teorema de Poincaré é a de que as faces de poliedros adjacentes interceptem-se adequadamente. Tal condição é muito difícil de se verificar no caso hiperbólico complexo, pois não podemos explorar os conceitos de convexidade. Frente a estas dificuldades, surge a necessidade de uma nova versão do Teorema de Poincaré na qual as condições sobre a tesselação sejam, por um lado, as mais locais possíveis e, por outro, bem verificáveis na prática.

No estudo de grupos discretos, os bissetores aparecem naturalmente como faces dos poliedros de Dirichlet. Isto os destaca como candidatos para a construção de poliedros fundamentais de outras naturezas. Em quaisquer destes casos, são necessários métodos que permitam analisar diversos aspectos do comportamento de dois bissetores, tais como aqueles relacionados ao cálculo de ângulos de interseção (vide, por exemplo, [AGG, Teorema 4.2]), à transversalidade da interseção (vide, por exemplo, [AGG, Corolário 4.3]) e ao “afastamento relativo” (vide, por exemplo, a Condição (P9) do Capítulo 3 e [AGG, Lema 5.4]).

Em conjunto com uma coleção de ferramentas elementares para a geometria hiperbólica complexa, a nova versão do Teorema de Poincaré que apresentamos pode ser aplicada diretamente nas construções de variedades presentes em [AGG] e em [AGu].

Nas Seções 1.2 e 1.3, introduzimos a “geometria clássica”: um espaço vetorial V , munido de uma forma hermitiana, sobre um corpo \mathbb{K} (que pode ser o dos reais, dos complexos ou dos quatérnios). Esta definição ganha aspectos geométricos através da descrição de espaço tangente na Proposição 1.2.1 e com a introdução da métrica (1.3.3). As seções em questão contêm ainda fatos que gostaríamos de destacar. Um é a ação do grupo multiplicativo dos quatérnios sobre o fibrado tangente de espaços quaterniônicos discutida no Exemplo 1.3.4 (vide também o Exemplo 1.4.7). Outro, presente na Proposição 1.2.3, é a descrição simples do espaço tangente aos objetos geométricos básicos induzidos por \mathbb{R} -subespaços lineares de V .

Exemplos importantes de tais objetos, as geodésicas são estudadas nas Seções 1.4 e 1.5. Em particular, as geodésicas e seus espaços tangentes são descritos por equações algébricas no Lema 1.4.5. A conexão de Levi-Civita, introduzida na Seção 1.6, e as expressões explícitas para o transporte paralelo, presentes na Proposição 1.7.3, permitem caracterizar as geodésicas do ponto de vista usual da geometria diferencial. Nas Seções 1.8 e 1.9, expressamos tensores de curvatura e curvaturas seccionais em termos algébricos.

Por fim, na Seção 1.10, mostramos como obter diversas geometrias usuais através da escolha do corpo \mathbb{K} e da assinatura da forma hermitiana.

O Capítulo 2 é dedicado à aplicação e ao desenvolvimento sistemático da abordagem anterior, especificamente para a geometria hiperbólica complexa. Aqui, o fio de Ariadne é o estudo de configurações de um número finito de pontos em \mathbb{CP}^2 e de seus invariantes geométricos em alguns casos envolvendo poucos pontos.

A Proposição 2.2.5 contém a classificação geométrica de m -uplas genéricas de pontos em \mathbb{CP}^2 . Utilizando a correspondência entre pontos e linhas projetivas, a correspondência entre certos pares de pontos e geodésicas (Observações 2.2.16 e 2.2.19) e a classificação de duplas e triplas de pontos (Classificação 2.2.7), apresentamos nas Proposições 2.2.13 e 2.2.21 várias interpretações geométricas para invariantes de dois e de três pontos. Tais interpretações são obtidas, geralmente, com o auxílio das bases naturais em Bases 2.2.24.

Na Seção 2.3 estudamos os planos reais. Através da Proposição 2.3.3, introduzimos o conceito de linha projetiva ortogonal a um plano real passando por um ponto dado (não pertencente ao plano em questão). Este conceito reduz o estudo de configurações contendo um plano real e um ponto ao estudo daquelas contendo uma geodésica e um ponto. Em particular, algumas questões relativas ao cálculo de distâncias envolvendo planos reais podem ser reduzidas àquelas envolvendo geodésicas (Observação 2.3.4).

Um breve estudo de bissetores compõe a Seção 2.4. Na Definição-Lema 2.4.1, bissetores são apresentados através de quatro definições equivalentes, incluindo uma definição projetiva. Dependendo do contexto, a utilização de uma particular definição pode ser mais adequada do que a de outra. Assim como ocorre com geodésicas, os bissetores e seus espaços tangentes caracterizam-se através de equações algébricas simples (Lemas 2.4.5 e 2.4.6). Algumas propriedades básicas e interessantes dos bissetores aparecem na Proposição 2.4.7. (A demonstração desta proposição exemplifica a utilização dos invariantes de quatro pontos obtida na parcial Classificação 2.2.28.) Para ilustrar as ferramentas introduzidas, utilizamos tais propriedades em uma demonstração sintética da classificação de conjuntos totalmente geodésicos no espaço hiperbólico complexo, presente nas Proposições 2.4.10 e 2.4.11.

Finalmente, um breve apêndice ao capítulo estuda, de um ponto de vista livre de coordenadas, calibrações para a estrutura de contato no absoluto $\mathbb{S}^3 \simeq SV$.

No Capítulo 3, apresentamos uma versão do Teorema Poliedral de Poincaré adequada a situações sutis nas quais não se pode explorar o conceito de convexidade. A Condição 3.2.5 (tesselação local do poliedro) e o Corolário 3.3.19 (tesselação de uma vizinhança métrica do poliedro) contêm exigências bastante locais sobre a tesselação, mas que ainda permitem demonstrar que um poliedro é fundamental.

Dentre as hipóteses suficientes para que um poliedro satisfaça as exigências locais em questão, destacam-se a Condição (P7), garantindo a tesselação local em torno das faces de codimensão 2 (Lema 3.3.15), e a Condição (P9), que permite passar da tesselação local à tesselação de uma vizinhança

métrica (Lema 3.3.18). O Teorema (de Poincaré) 3.3.21 resume os resultados obtidos.

Ao se desenvolver uma abordagem elementar de modo sistemático, é muito difícil determinar onde termina o folclore e onde começam os fatos originais. Isto se aplica ao início do Capítulo 1, a uma parte do Capítulo 2 e ao início do Capítulo 3. Cabe aqui dizer que prováveis ausências de referências devidas refletem apenas as prováveis lacunas em nossos conhecimentos da literatura.

As relações que conseguimos encontrar entre fatos presentes na tese e fatos da literatura são listadas no final de cada capítulo, sob o título “Referências”.

1. Uma abordagem para as geometrias clássicas

*“You see, the earth takes twenty-four hours
to turn round on its axis—”
“Talking of axes,” said the Duchess, “chop off her head!”*
— LEWIS CARROLL, *Alice’s Adventures in Wonderland*

1.1. Introdução

Neste capítulo, apresentaremos uma construção que permite abordar todas as geometrias clássicas sob um mesmo ponto de vista. Utilizando tal abordagem, expressaremos e caracterizaremos, de modo simples e isento de coordenadas, vários aspectos destas geometrias, tais como geodésicas, distâncias, transporte paralelo, tensores de curvatura e curvaturas seccionais. Esperamos, assim, unificar e facilitar o estudo das geometrias clássicas, evitando a introdução de vários “modelos” para uma mesma geometria (como é o caso dos modelos de Poincaré, de Siegel e de Klein para as geometrias hiperbólicas) bem como evitando a descrição de métricas através de sistemas de coordenadas específicos.

Denotaremos por \mathbb{K} um dos corpos¹ \mathbb{R} (reais), \mathbb{C} (complexos) ou \mathbb{H} (quatérnios). Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial à esquerda cuja dimensão $\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1$, $n \geq 0$. Dependendo do contexto, utilizaremos elementos de V para denotar pontos do espaço projetivo (à esquerda) $\mathbb{K}P^V$. Se f é uma função definida em uma vizinhança de $p \in \mathbb{K}P^V$, denotaremos por \hat{f} o levantamento de f para a correspondente vizinhança de $\mathbb{K}p \setminus \{0\}$. Claramente, temos $\hat{f}(k \cdot v) = \hat{f}(v)$ para todo $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

1.2. Espaço tangente

Podemos utilizar a estrutura linear de V para descrever o espaço tangente em um ponto de $\mathbb{K}P^V$. De fato, fixando $p \in V$, seja $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$ uma aplicação \mathbb{K} -linear e seja $\hat{\varphi} : \mathbb{K}p \rightarrow V$ um levantamento de φ . Consideramos φ como um vetor tangente $t_{\varphi} \in T_p \mathbb{K}P^V$ através da fórmula²

$$t_{\varphi} f \rightleftharpoons \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \varepsilon \hat{\varphi}(p)),$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e f é uma função suave com valores reais (ou com valores em \mathbb{K}) definida em uma vizinhança de p . A fórmula acima independe da escolha do levantamento $\hat{\varphi}$ uma vez que, para todo $k \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \varepsilon(\hat{\varphi}(p) + kp)) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}((1 + \varepsilon k)p + \varepsilon \hat{\varphi}(p)) = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}\left(p + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon k} \cdot \hat{\varphi}(p)\right) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \varepsilon \hat{\varphi}(p)). \end{aligned}$$

¹Por um abuso de linguagem, iremos nos referir à álgebra de divisão não-comutativa dos quatérnios como um corpo.

²Aqui, e no que se segue, o símbolo \rightleftharpoons significa “igual por definição”.

Além disso, é imediato verificar que t_φ é \mathbb{R} -linear e satisfaz a regra de Leibniz. Em outras palavras, $t_\varphi \in T_p \mathbb{K}PV$. Considerando em V a reta $\hat{c}(\varepsilon) \doteq (1 - \varepsilon)p + \varepsilon\hat{\varphi}(p)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, que passa por p e $\hat{\varphi}(p)$, temos $t_\varphi f = \hat{c}'(0)\hat{f} \doteq \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}(\hat{c}(\varepsilon))$. Se $t_\varphi = 0$, então $\hat{c}(\varepsilon) \subset \mathbb{K}p$, isto é, $\hat{\varphi}(p) \in \mathbb{K}p$. Portanto, a aplicação $\varphi \mapsto t_\varphi$ é injetiva. É fácil ver que a aplicação $\varphi \mapsto t_\varphi$ é \mathbb{R} -linear. Como $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p) = \dim_{\mathbb{R}} T_p \mathbb{K}PV$, obtemos a

1.2.1. Proposição. *Seja $p \in V$. Seja $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$. A aplicação $\varphi \mapsto t_\varphi$ é uma identificação natural entre os \mathbb{R} -espaços vetoriais $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$ e $T_p \mathbb{K}PV$ ■*

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o espaço tangente $T_p \mathbb{C}PV$ possui a estrutura complexa de $\text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}p, V/\mathbb{C}p)$ dada por $\varphi \mapsto c\varphi$, $c \in \mathbb{C}$. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, **não** podemos munir $\text{Lin}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}p, V/\mathbb{H}p)$ da estrutura de espaço vetorial quaterniônico, seja à esquerda ou à direita. No entanto, fixando em V uma estrutura de (\mathbb{H}, \mathbb{H}) -bimódulo, obtemos uma ação do grupo $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ no fibrado tangente de $\mathbb{H}PV$, não-idêntica na base (vide Exemplo 1.3.4).

Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial, $\dim_{\mathbb{R}} W = m$. No que se segue, apresentaremos uma condição suficiente para que um ponto em $\mathbb{K}PW$ seja liso. Em seguida, aplicaremos a Proposição 1.2.1 para descrever o espaço tangente a $\mathbb{K}PW$ em pontos que satisfazem tal condição.

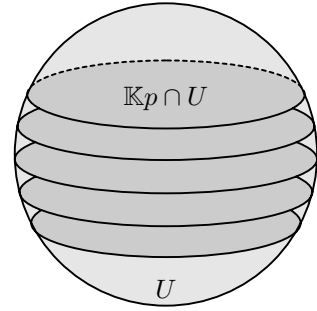
Seja $p \in W$ um ponto que satisfaz a *condição de interseção mínima*

$$(1.2.2) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}p \cap W) = \min_{0 \neq x \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}x \cap W).$$

Denotaremos $r \doteq \min_{0 \neq x \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}x \cap W)$. Claramente, $1 \leq r \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. É fácil verificar³ que existe em W uma vizinhança aberta U de p cujos pontos também satisfazem a condição de interseção mínima. Podemos assumir que o aberto U é convexo. Tal aberto não contém a origem e, em particular, $(\mathbb{K}x_1 \cap U) \cap (\mathbb{K}x_2 \cap U) = \emptyset$ se $x_1, x_2 \in U$ são \mathbb{K} -linearmente independentes. Daí segue que $\mathbb{K}PU \simeq \mathbb{R}^{m-r}$. Concluímos que p é um ponto liso em $\mathbb{K}PW$ e que $\dim_{\mathbb{R}} T_p \mathbb{K}PW = m - r$.

Seja $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p) \simeq T_p \mathbb{K}PV$ e seja $\hat{\varphi} : \mathbb{K}p \rightarrow V$ um levantamento de φ . É fácil ver que, se $\hat{\varphi}(p) \in W + \mathbb{K}p$, então φ define um vetor tangente a $\mathbb{K}PW$ em p . Reciprocamente, se φ define um vetor tangente a $\mathbb{K}PW$ em p , então $\hat{\varphi}(p) \in W + \mathbb{K}p$, pois $\dim_{\mathbb{R}} W/(\mathbb{K}p \cap W) = m - r$. Resumindo, obtemos a seguinte

1.2.3. Proposição. *Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial. Seja $p \in W$ um ponto que satisfaz a condição de interseção mínima (1.2.2). Então p é um ponto liso em $\mathbb{K}PW$. Um vetor $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p) \simeq T_p \mathbb{K}PV$ é tangente a $\mathbb{K}PW$ em p se e somente se $\hat{\varphi}(p) \in W + \mathbb{K}p$, onde $\hat{\varphi} : \mathbb{K}p \rightarrow V$ é um levantamento de φ ■*



1.3. Forma e métrica

Munimos V de uma forma hermitiana $\langle -, - \rangle$ à qual iremos nos referir como *forma*.⁴

Dois pontos $p_1, p_2 \in \mathbb{K}PV$ serão chamados *ortogonais* caso $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$. Dado um subconjunto $E \subset V$, denotaremos por $E^\perp \doteq \{v \in V \mid \langle v, x \rangle = 0 \forall x \in E\}$ o seu ortogonal. Em particular,

³De fato, variando x em uma vizinhança aberta suficientemente pequena de p em W , a dimensão da interseção $\mathbb{K}x \cap W$ não aumenta.

⁴O conceito de forma hermitiana estende-se naturalmente para o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ (vide [Lan, Cap. XIII, Ex. 7]). A forma toma valores em \mathbb{K} , é biaditiva e satisfaz $\langle kv_1, v_2 \rangle = k\langle v_1, v_2 \rangle$, $\langle v_1, kv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \bar{k}$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$, $v_1, v_2 \in V$, $k \in \mathbb{K}$.

$p^\perp = \{v \in V \mid \langle v, p \rangle = 0\}$, $p \in V$. Se p é *não-isotrópico* (isto é, se $\langle p, p \rangle \neq 0$), temos a decomposição ortogonal $V = \mathbb{K}p + p^\perp$, $v = v^p + {}^p v$, onde

$$v^p \doteq \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in \mathbb{K}p \quad \text{e} \quad {}^p v \doteq v - \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in p^\perp$$

são projeções ortogonais. Como $v^{k \cdot p} = v^p$ e ${}^{k \cdot p} v = {}^p v$ para $0 \neq k \in \mathbb{K}$, as expressões v^p e ${}^p v$ estão bem definidas para $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico.

1.3.1. Critério (de Sylvester). *Sejam $p, q \in V$ distintos e tais que a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é não-nula. Seja $D(p, q) \doteq \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle - \langle p, q \rangle \langle q, p \rangle$. Se p, q são \mathbb{K} -linearmente dependentes, então $D(p, q) = 0$. Caso contrário, a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é definida (não-degenerada indefinida, degenerada não-nula) se e só se $D(p, q) > 0$ ($D(p, q) < 0$, $D(p, q) = 0$).*

Demonstração. É claro que $D(p, q) = 0$ se p, q são \mathbb{K} -linearmente dependentes. Vamos supor que p, q são \mathbb{K} -linearmente independentes. Se um destes dois pontos, digamos p , é não-isotrópico, o resultado segue diretamente das relações ${}^p p \neq 0$, $\langle p, {}^p p \rangle = 0$ e

$$\langle p, p \rangle \cdot \langle {}^p p, {}^p p \rangle = \langle p, p \rangle \cdot \langle {}^p p, q \rangle = \langle p, p \rangle \left(\langle q, q \rangle - \frac{\langle q, p \rangle \langle p, q \rangle}{\langle p, p \rangle} \right) = D(p, q).$$

Se p, q são isotrópicos, utilizando que a forma sobre $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é não-nula, encontramos $u \in \mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ não-isotrópico. Podemos supor que $u = kp + q$, $k \neq 0$. Claramente, ${}^u q \neq 0$, $\langle u, {}^u q \rangle = 0$ e $D(u, q) = \langle u, u \rangle \langle {}^u q, {}^u q \rangle$. Resta observar que

$$D(u, q) = \langle kp + q, kp + q \rangle \langle q, q \rangle - \langle kp + q, q \rangle \langle q, kp + q \rangle = -k \langle p, q \rangle \langle q, p \rangle \bar{k} = |k|^2 D(p, q) \blacksquare$$

Para $p \in V$, o dual $(\mathbb{K}p)^* \doteq \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, \mathbb{K})$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial à direita, o que permite identificar $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$ e $(\mathbb{K}p)^* \otimes_{\mathbb{K}} V/\mathbb{K}p$.

Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Temos o isomorfismo natural $T_p \mathbb{K}PV \simeq \langle -, p \rangle \otimes_{\mathbb{K}} p^\perp$. Assim, todo vetor em $T_p \mathbb{K}PV$ tem a forma

$$(1.3.2) \quad v_p \doteq \langle -, p \rangle \otimes {}^p v \in (\mathbb{K}p)^* \otimes p^\perp$$

para algum $v \in V$. (Note-se que v_p **depende** da escolha de representante para p .) Utilizando esta identificação, vemos que $\hat{\varphi} \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V)$ corresponde a ${}^p \hat{\varphi}$. Sejam $v_p, v'_p \in T_p \mathbb{K}PV$ dois vetores tangentes arbitrários. Definindo

$$(1.3.3) \quad \langle v_p, v'_p \rangle = \langle \langle -, p \rangle \otimes {}^p v, \langle -, p \rangle \otimes {}^p v' \rangle \doteq \pm \langle p, p \rangle \cdot \langle {}^p v, {}^p v' \rangle,$$

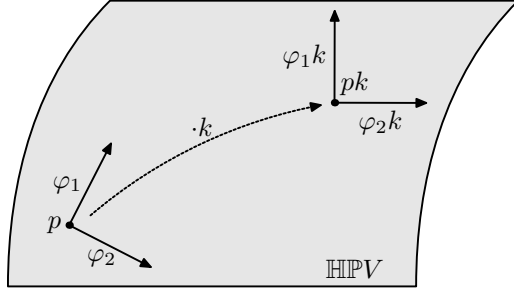
obtemos em $T_p \mathbb{K}PV$ uma forma biaditiva que varia suavemente com p não-isotrópico e que será denominada *métrica*.⁵

1.3.4. Exemplo. Vamos supor $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. Seja $p \in V$. Como dito na Seção 1.2, o \mathbb{R} -espaço $\text{Lin}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}p, V/\mathbb{H}p)$ não possui estrutura de espaço vetorial quaterniônico. Fixemos em V uma estrutura de (\mathbb{H}, \mathbb{H}) -bimódulo.

Seja $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}p, V/\mathbb{H}p) \simeq T_p \mathbb{H}PV$. Seja $k \in \mathbb{H}$, $k \neq 0$. Obtemos uma aplicação \mathbb{H} -linear (à esquerda) $\varphi k \in \text{Lin}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}(pk), V/\mathbb{H}(pk)) \simeq T_{pk} \mathbb{H}PV$ definindo $\varphi k(xpk) \doteq \varphi(xp) \cdot k$, $x \in \mathbb{H}$. (É

⁵Dependendo do contexto, fixaremos de modo conveniente um sinal uniforme para a métrica em $\mathbb{K}PV$. A única exceção ocorre na Seção 1.5, quando estudaremos a geometria em linhas projetivas.

claro que a multiplicação à direita por k leva $V/\mathbb{H}p$ em $V/\mathbb{H}(pk)$. Em outras palavras, temos a ação $(p, \varphi) \mapsto (pk, \varphi k)$ do grupo $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ sobre o fibrado tangente THPV .



Seja $\cdot k : \text{HPV} \rightarrow \text{HPV}$ a aplicação induzida por $\cdot k : v \mapsto vk, v \in V$. É fácil verificar que $\varphi k = (d(\cdot k))_p \varphi$. De fato, fixemos um levantamento $\hat{\varphi} : \mathbb{H}p \rightarrow V$ de φ . Seja $\widehat{\varphi k}$ um levantamento de φk definido através de $\widehat{\varphi k}(xpk) \equiv \hat{\varphi}(xp) \cdot k, x \in \mathbb{H}$. Pelas considerações presentes na Seção 1.2, a reta $\hat{c}(\varepsilon) \equiv p + \varepsilon \hat{\varphi}(p)$ é um levantamento de uma curva $c(\varepsilon)$ definida em uma vizinhança de p e que satisfaz $c(0) = p$ e $c'(0) = \varphi$. Temos

$$\hat{c}k(\varepsilon) \equiv \cdot k(\hat{c}(\varepsilon)) = pk + \varepsilon \widehat{\varphi k}(pk).$$

Claramente, $\hat{c}k(\varepsilon)$ é um levantamento da curva $ck(\varepsilon) = \cdot k(c(\varepsilon))$, que está definida em uma vizinhança de $ck(0) = pk$ e satisfaz $(ck)'(0) = \varphi k$. Segue-se, assim, o resultado desejado.

Suponhamos que a estrutura de (\mathbb{H}, \mathbb{H}) -bimódulo em V é *compatível com a forma*, isto é, que $\langle v_1 k, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \bar{k} \rangle$, para quaisquer $v_1, v_2 \in V$ e $k \in \mathbb{H}$. Seja $p \in V$ não-isotrópico, seja $v \in p^\perp$ e seja $k \in \mathbb{H}, k \neq 0$. Claramente, $vk \in (pk)^\perp$. Neste caso, a ação $(p, \varphi) \mapsto (pk, \varphi k)$ pode ser escrita na forma

$$(p, v_p) = \left(p, \langle -, p \rangle \otimes v \right) \mapsto \left(pk, \langle -, pk \rangle \otimes \frac{1}{|k|^2} \cdot vk \right) = \left(pk, \frac{1}{|k|^2} \cdot (vk)_{pk} \right).$$

Em particular, $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ age por isometrias, pois, dados $v_1, v_2 \in p^\perp$, temos

$$\langle v_{1p}, v_{2p} \rangle = \left\langle \frac{1}{|k|^2} (v_1 k)_{pk}, \frac{1}{|k|^2} (v_2 k)_{pk} \right\rangle.$$

Obviamente, a ação de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ no fibrado tangente de HPV depende da escolha da estrutura de bimódulo em V . É um fato conhecido (vide [Jac]) que todo (\mathbb{H}, \mathbb{H}) -bimódulo é completamente redutível. Além disso, todo (\mathbb{H}, \mathbb{H}) -bimódulo irredutível é isomorfo ao próprio \mathbb{H} considerado como (\mathbb{H}, \mathbb{H}) -bimódulo. Daí segue que a escolha de uma estrutura de bimódulo em V é equivalente à escolha de um \mathbb{R} -subespaço $W \subset V, \dim_{\mathbb{R}} W = n + 1$, que gera V como \mathbb{H} -módulo à esquerda: a ação de \mathbb{H} à esquerda identifica $V \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} W$ e a estrutura de bimódulo de \mathbb{H} induz uma estrutura de bimódulo em V . É fácil verificar que W é o centralizador de \mathbb{H} em V , isto é, $W = \{v \in V \mid kv = vk \text{ para todo } k \in \mathbb{H}\}$. Além disso, a estrutura de bimódulo é compatível com a métrica se e só se a forma restrita a W é real. De fato, se a forma restrita a W é real, temos, para todo $k \in \mathbb{H}$ e para quaisquer $w_1, w_2 \in W$,

$$\langle w_1 k, w_2 \rangle = \langle kw_1, w_2 \rangle = k \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle k = \langle w_1, \bar{k} w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \bar{k} \rangle,$$

de onde segue, por linearidade, que a forma e a estrutura de bimódulo são compatíveis. Por outro lado, se $\langle -, - \rangle$ é compatível a estrutura de bimódulo de V , então, para todo $k \in \mathbb{H}$, temos $k \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1 k, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \bar{k} \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle k$, onde $w_1, w_2 \in W$. Em outras palavras, $\langle w_1, w_2 \rangle$ pertence ao centro de \mathbb{H} , ou seja, $\langle w_1, w_2 \rangle \in \mathbb{R}$. (Vide a continuação deste exemplo no Exemplo 1.4.7.) ■

1.4. Subespaços reais e projetivos. Geodésicas

Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial tal que $\mathbb{K}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$. Obviamente, $\mathbb{K}PW = \mathbb{R}PW$. Suponhamos ainda que a forma restrita a W é real. Denominaremos $\mathbb{K}PW$ um *subespaço totalmente real* de $\mathbb{K}PV$. Em particular, para $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ e com a forma sobre W não-nula, a curva $\mathbb{K}PW \simeq \mathbb{G}W \simeq \mathbb{S}^1$ será denominada *geodésica*.⁶ Para um \mathbb{K} -subespaço $E \subset V$, temos o *subespaço*

⁶O uso do termo possui o mesmo sentido que o habitual (vide Corolário 1.7.5).

projetivo $\mathbb{K}PE \subset \mathbb{K}PV$; em particular, temos a *linha projetiva* $L\langle p_1, p_2 \rangle$ passando por $p_1, p_2 \in \mathbb{K}PV$ distintos. É óbvio que todos os pontos de um subespaço totalmente real e de um subespaço projetivo satisfazem a condição de interseção mínima (1.2.2).

1.4.1. Lema. *Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial, $\dim_{\mathbb{R}} W = m$.*

Se a forma restrita a W é real e não-degenerada, então

- (1) $\mathbb{K}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$ e
- (2) $\mathbb{K}W \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W$.

Temos $\mathbb{K}W \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W$ se

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$, ou
- (b) $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, $\mathbb{H}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$ e $m = 1, 2$, ou
- (c) $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, $\mathbb{H}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$, $m = 3$ e a forma sobre W é real e não-nula.

Demonstração. (1) Seja $p \in W \setminus \{0\}$. Vamos supor que $kp \in W$ para algum $k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Então, para todo $q \in W$, temos $\langle p, q \rangle, \langle kp, q \rangle \in \mathbb{R}$, isto é, $\langle p, q \rangle = 0$ (absurdo, pois a forma em W é não-degenerada).

A demonstração dos demais itens utiliza as bem-conhecidas considerações que se seguem. Qualquer elemento $\sum_j k_j \otimes w_j \in \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W$ tal que os $\mathbb{K} \ni k_j$'s são \mathbb{R} -linearmente independentes e os $W \ni w_j$'s são \mathbb{R} -linearmente independentes é não-nulo. Reciprocamente, todo elemento não-nulo em $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W$ admite esta forma. Temos $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W \simeq \mathbb{K}W$ exatamente quando a aplicação linear definida através de $k \otimes w \mapsto k \cdot w$ é injetiva.

(2) Suponhamos $\sum_j k_j w_j = 0$ para alguns $\mathbb{K} \ni k_j$'s \mathbb{R} -linearmente independentes e alguns $W \ni w_j$'s \mathbb{R} -linearmente independentes. Para todo $q \in W$, temos $0 = \langle \sum_j k_j w_j, q \rangle = \sum_j k_j \langle w_j, q \rangle$. Segue que $\langle w_j, q \rangle = 0$, contrariando o fato de a forma sobre W ser não-degenerada.

(a) Vamos supor $\sum_j c_j w_j = 0$ para alguns $W \ni w_j$'s \mathbb{R} -linearmente independentes. Escrevendo $c_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, obtemos $\sum_j \alpha_j w_j = -i \sum_j \beta_j w_j$. Segue de $\mathbb{C}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$ que $\sum_j \beta_j w_j = \sum_j \alpha_j w_j = 0$, ou seja, $c_j = 0$.

(b) É trivial. De fato, se $m = 1$, não há nada para provar. Se $m = 2$, segue diretamente do fato $\mathbb{H}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$ que qualquer coleção de vetores \mathbb{R} -linearmente independentes em W é também \mathbb{H} -linearmente independente.

(c) Vamos supor $\sum_{j=1}^l h_j w_j = 0$ para alguns $W \ni w_j$'s \mathbb{R} -linearmente independentes, $h_j \in \mathbb{H}$ e $l \leq m$. Se $l = 1, 2$ é fácil verificar, utilizando o fato $\mathbb{H}p \cap W = \mathbb{R}p$ para todo $p \in W$, que $h_j = 0$, $j = 1, \dots, l$. Suponhamos que também os h_j 's sejam \mathbb{R} -linearmente independentes e que $l = 3$. Neste caso, temos $0 = \langle \sum_{j=1}^3 h_j w_j, q \rangle = \sum_{j=1}^3 h_j \langle w_j, q \rangle$ para qualquer $q \in W$. Segue que $\langle w_j, q \rangle = 0$, $j = 1, 2, 3$, contrariando o fato de a forma sobre W ser não-nula ■

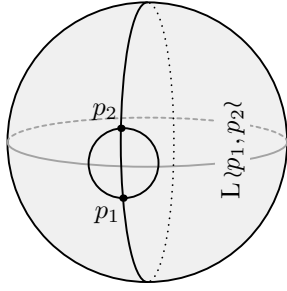
1.4.2. Corolário. *Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial tal que a forma restrita a W é real e não-degenerada. Então $\mathbb{K}PW$ é um subespaço totalmente real de $\mathbb{K}PV$ ■*

1.4.3. Observação. (1) Para $p_1, p_2 \in \mathbb{K}PV$ distintos e não-ortogonais, existe uma única geodésica, a qual denotaremos $G\langle p_1, p_2 \rangle$, contendo p_1 e p_2 . Claramente, $G\langle p_1, p_2 \rangle \subset L\langle p_1, p_2 \rangle$.

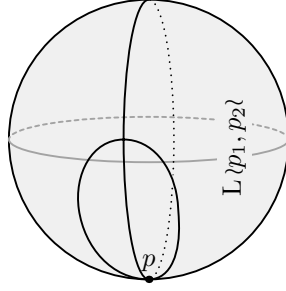
(2) Os subespaços totalmente reais, bem como os subespaços projetivos, são *totalmente geodésicos*, isto é, contêm a geodésica ligando quaisquer de seus pontos distintos, se for única ■

Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{K}PV$ distintos. Qualquer geodésica contida em $L\langle p_1, p_2 \rangle$ que passa por p_1 é da forma $\mathbb{K}P(\mathbb{R}q + \mathbb{R}p_1)$ para $q \in L\langle p_1, p_2 \rangle$, $q \neq p_1$ e $\langle q, p_1 \rangle \in \mathbb{R}$.

Vamos supor que a forma restrita a $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ é não-degenerada e que $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$. (Em particular, p_1



Forma em $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$
indefinida, $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$



Forma em $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$
degenerada, $\langle p, p \rangle = 0$

é não-isotrópico e p_2 é o único ponto em $L(p_1, p_2)$ ortogonal a p_1 .) Então, qualquer geodésica contida em $L(p_1, p_2)$ passando por p_1 necessariamente passa por p_2 . De fato, seja $q \in L(p_1, p_2)$ distinto de p_1 . Suponhamos $\langle q, p_1 \rangle \in \mathbb{R}$. Temos $\mathbb{K}P(\mathbb{R}q + \mathbb{R}p_1) \ni {}^{p_1}q = q - \frac{\langle q, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1 = p_2$.

Vamos supor que a forma restrita a $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ é degenerada. Seja $p \in L(p_1, p_2)$ tal que $(\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2) \subset p^\perp$. É fácil ver que qualquer geodésica contida em $L(p_1, p_2)$ passa por p .

1.4.4. Lema. *Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Seja $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p) \simeq T_p \mathbb{K}PV$ um vetor tangente não-nulo. Então, existe uma única geodésica passando por p com vetor tangente φ .*

Demonstração. Seja $\hat{\varphi} : \mathbb{K}p \rightarrow V$ um levantamento de φ . Podemos supor que $0 \neq \langle \hat{\varphi}(p), p \rangle \in \mathbb{R}$, pois, caso contrário, consideramos para φ o levantamento ${}^p\hat{\varphi} + p$ ao invés de $\hat{\varphi}$. Como φ é não-nulo, temos $\hat{\varphi}(p) \notin \mathbb{K}p$. Logo, $p \neq \hat{\varphi}(p)$ em $\mathbb{K}PV$. Denotaremos $q = \hat{\varphi}(p)$. Segue da Observação 1.4.3 que existe uma única geodésica $G(p, q) = \mathbb{K}P(\mathbb{R}p + \mathbb{R}q)$ passando por p e q . Pela Proposição 1.2.3, φ é tangente a $G(p, q)$ em p .

Seja G uma geodésica passando por p com vetor tangente φ . Podemos encontrar $u \in G$ distinto de p e tal que $\langle p, u \rangle \neq 0$. Vamos supor que $\langle p, u \rangle \in \mathbb{R}$. Temos $G = \mathbb{K}P(\mathbb{R}p + \mathbb{R}u)$. Definimos uma aplicação $\varphi' \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$ através da expressão $\varphi'(p) = u + \mathbb{K}p$. Pela Proposição 1.2.3, φ' é tangente a G em p . Portanto, $\varphi' = r \cdot \varphi$, $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Segue que ${}^p u = r \cdot {}^p q$, isto é, $u \in \mathbb{R}p + \mathbb{R}q$, ou seja, $G = G(p, q)$ ■

Para $p \in \mathbb{K}PV$ isotrópico existem, em geral, várias geodésicas distintas passando por p com um dado vetor tangente $\varphi_p \in T_p \mathbb{K}PV$.

1.4.5. Lema. *Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{K}PV$ distintos e não-ortogonais. (Em particular, a forma em $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ é não-nula.)*

Se $x \in G(p_1, p_2)$, então

$$b(x, p_1, p_2) = \langle x, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, x \rangle - \langle x, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle \langle p_1, x \rangle = 0.$$

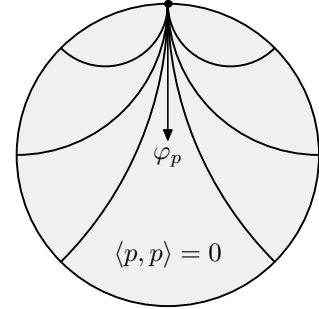
Se um vetor $\varphi \in T_g \mathbb{K}PV$, com $\hat{\varphi} : \mathbb{K}g \rightarrow V$, é tangente à geodésica $G(p_1, p_2) \ni g$, então

$$\begin{aligned} t(\varphi, g, p_1, p_2) &= t(\hat{\varphi}(g), g, p_1, p_2) = \langle \hat{\varphi}(g), p_1 \rangle \cdot \langle p_1, p_2 \rangle \cdot \langle p_2, g \rangle + \langle g, p_1 \rangle \cdot \langle p_1, p_2 \rangle \cdot \langle p_2, \hat{\varphi}(g) \rangle - \\ &\quad - \langle \hat{\varphi}(g), p_2 \rangle \cdot \langle p_2, p_1 \rangle \cdot \langle p_1, g \rangle - \langle g, p_2 \rangle \cdot \langle p_2, p_1 \rangle \cdot \langle p_1, \hat{\varphi}(g) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Vamos supor que a forma em $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ é não-degenerada. Então, reciprocamente, se $x \in L(p_1, p_2)$ satisfaz $b(x, p_1, p_2) = 0$, temos $x \in G(p_1, p_2)$. Além disso, se $\varphi \in T_g L(p_1, p_2)$ satisfaz $t(\varphi, g, p_1, p_2) = 0$, então φ é tangente a $G(p_1, p_2) \ni g$.

Demonstração. Vamos supor $\langle p_i, p_i \rangle = \sigma_i$ e $\langle p_1, p_2 \rangle = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, onde $\sigma_i \in \{-1, 0, +1\}$.

Para $x \in G(p_1, p_2)$, podemos supor que $\langle x, p_1 \rangle, \langle p_2, x \rangle \in \mathbb{R}$, e a equação $b(x, p_1, p_2) = 0$ é satisfeita. Por outro lado, qualquer $x \in L(p_1, p_2)$ distinto de p_1 admite uma forma $x = kp_1 + p_2$, $k \in \mathbb{K}$. Deste modo, a condição $b(x, p_1, p_2) = 0$ se resume em $\langle kp_1 + p_2, p_1 \rangle \cdot \langle p_2, kp_1 + p_2 \rangle = \langle kp_1 + p_2, p_2 \rangle \cdot \langle p_1, kp_1 + p_2 \rangle$, isto é, $(k\sigma_1 + a) \cdot (a\bar{k} + \sigma_2) = (ka + \sigma_2) \cdot (\sigma_1\bar{k} + a)$, ou seja, $(a^2 - \sigma_1\sigma_2) \cdot (\bar{k} - k) = 0$. Se a forma sobre $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ é não-degenerada temos, pelo Critério de Sylvester 1.3.1, que $a^2 \neq \sigma_1\sigma_2$. Daí segue que $k \in \mathbb{R}$ e, portanto, $x \in G(p_1, p_2)$.



É fácil verificar que $t(\varphi, g, p_1, p_2)$ está bem definido, pois

$$(1.4.6) \quad t(\hat{\varphi}(g) + kg, g, p_1, p_2) = t(\hat{\varphi}(g), g, p_1, p_2) + k \cdot b(g, p_1, p_2) + b(g, p_1, p_2) \cdot \bar{k} = t(\hat{\varphi}(g), g, p_1, p_2)$$

para $k \in \mathbb{K}$. Pela Proposição 1.2.3, o fato de $\varphi \in T_g L \langle p_1, p_2 \rangle$ ser tangente a $G \langle p_1, p_2 \rangle$ significa que $\hat{\varphi}(g) \in \mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}p_2 + \mathbb{K}g$. Neste caso, a equação $t(\varphi, g, p_1, p_2) = 0$ é satisfeita. Por outro lado, escrevemos (trocando, se necessário, os papéis de p_1 e p_2) $g = rp_1 + p_2$, com $r \in \mathbb{R}$. Dado $\varphi \in T_g L \langle p_1, p_2 \rangle$, temos (novamente utilizando a Proposição 1.2.3) $\hat{\varphi}(g) = k_1p_1 + k_2p_2$. Por (1.4.6), podemos corrigir $\hat{\varphi}(g)$ por $-k_2g$ preservando $t(\hat{\varphi}(g), g, p_1, p_2)$. Assim, podemos supor que $\hat{\varphi}(g) = kp_1$. A condição $t(\hat{\varphi}(g), g, p_1, p_2) = 0$ significa que $(a^2 - \sigma_1\sigma_2) \cdot (k - \bar{k}) = 0$. Se a forma em $\mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ é não-degenerada, temos $a^2 \neq \sigma_1\sigma_2$, ou seja, $k \in \mathbb{R}$. Segue que φ é tangente a $G \langle p_1, p_2 \rangle$ em g ■

1.4.7. Exemplo. Este Exemplo é uma continuação do Exemplo 1.3.4. Suponhamos $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ e $\dim_{\mathbb{H}} V = 2$. Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço, $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$, tal que $\mathbb{H}p \cap W = \mathbb{R}p$ e tal que a forma restrita a W é real. Temos em $\mathbb{H}PV$ a geodésica $G \rightleftharpoons \mathbb{H}PW$. Segue do item (b) do Lema 1.4.1 que W gera V como \mathbb{H} -módulo. Logo, obtemos em V uma estrutura de bimódulo compatível com a forma através da identificação $V \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} W$.

Assim, a escolha da geodésica $G \rightleftharpoons \mathbb{H}PW$ dá origem a uma curiosa ação de \mathbb{S}^3 (quatérnios unitários) por isometrias em $\mathbb{H}PV$, induzida pela estrutura de bimódulo em questão. Seu conjunto de pontos fixos é a geodésica G (pois W é o centralizador de \mathbb{H} em V), e é fácil ver que a órbita de qualquer ponto em $\mathbb{H}PV \setminus G$ é uma esfera \mathbb{S}^2 . Portanto, temos uma folheação de $\mathbb{H}PV \setminus G$ por esferas ■

1.5. Comprimento de geodésica. Tância

Vamos supor que a forma é não-degenerada e tem assinatura (p, q) , $p + q = n + 1$, onde p e q se referem respectivamente às componentes positiva e negativa da assinatura. Dado $x \in \mathbb{K}PV$, podemos tomar um representante em V tal que $\langle x, x \rangle = \sigma \in \{-1, 0, +1\}$. Denominaremos σ a *assinatura* de x .

A forma sobre uma linha projetiva L pode ser nula, definida, não-degenerada indefinida, degenerada não-nula. A linha L será respectivamente dita *nula*, *esférica*, *hiperbólica*, *euclidiana*. Se L é não-nula, possui um ponto não-isotrópico p_1 que, por sua vez, possui um único ortogonal $p_2 \in L$. No caso em que $\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle > 0$, a linha L é esférica e não possui pontos isotrópicos. No caso em que $\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle < 0$, a linha L é hiperbólica e seus pontos isotrópicos formam uma esfera $S \simeq \mathbb{S}^{m-1}$, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, que divide L em duas *componentes conexas*, positiva e negativa. Finalmente, no caso em que $\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle = 0$, a linha L é euclidiana e possui um único ponto isotrópico.

Seja L uma linha esférica. Sejam $p_1, p_2 \in L$ distintos e não-ortogonais. Vamos calcular o comprimento de um segmento de geodésica que liga p_1 e p_2 em L . Podemos assumir $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle = \sigma \in \{-1, +1\}$ e $\langle p_1, p_2 \rangle = \sigma a$, onde $0 < a < 1$. Assim, a curva $c(s) \rightleftharpoons (1 - s)p_1 + sp_2$, $s \in [0, 1]$, parametriza em L um segmento de geodésica ligando p_1 e p_2 que denotaremos $G[p_1, p_2]$. É imediato verificar que este segmento não contém o ponto em $G \langle p_1, p_2 \rangle$ ortogonal a p_1 . Como $c(s_0 + \varepsilon) = c(s_0) + \varepsilon \cdot (p_2 - p_1)$, temos $c'(s_0)f = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}(c(s_0) + \varepsilon(p_2 - p_1))$. Logo,

$$(1.5.1) \quad c'(s_0) \rightleftharpoons \langle -, c(s_0) \rangle \otimes \frac{c(s_0)(p_2 - p_1)}{\langle c(s_0), c(s_0) \rangle}$$

é um vetor tangente a $G[p_1, p_2]$ em $c(s_0)$. Utilizando na métrica (1.3.3) o sinal (+), obtemos

$$|c'(s)|^2 = \frac{\langle c^{(s)}(p_2 - p_1), c^{(s)}(p_2 - p_1) \rangle}{\langle c(s), c(s) \rangle} = \frac{1 - a^2}{(1 - 2(1 - a) \cdot s \cdot (1 - s))^2}.$$

Assim, o comprimento de $G[p_1, p_2]$ é

$$(1.5.2) \quad \ell(c) = \int_0^1 |c'(s)| ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-a^2} \cdot ds}{1-2(1-a) \cdot s \cdot (1-s)} = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = \arccos a.$$

Consideremos agora o caso em que L é uma linha hiperbólica. Sejam $p_1, p_2 \in L$ não-isotrópicos, distintos e de mesma assinatura. Podemos supor $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle = \sigma \in \{-1, +1\}$ e $\langle p_1, p_2 \rangle = \sigma a$, onde $a > 1$. É fácil verificar que, nestas condições, o segmento de geodésica $G[p_1, p_2]$ definido por $c(s) \Rightarrow (1-s)p_1 + sp_2$, $s \in [0, 1]$, está contido em uma componente conexa de L . Além disso, a expressão (1.5.1) fornece um vetor tangente a $G[p_1, p_2]$ em $c(s_0)$. Utilizando na métrica (1.3.3) o sinal

(-) obtemos $|c'(s)| = \frac{\sqrt{a^2-1}}{1+2(a-1) \cdot s \cdot (1-s)}$. Portanto,

$$(1.5.3) \quad \ell(c) = \int_0^1 |c'(s)| ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2-1} \cdot ds}{1+2(a-1) \cdot s \cdot (1-s)} = \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) = \operatorname{arccosh} a.$$

Em ambas as situações, a distância é uma função monótona (decrecente no primeiro caso, crescente no segundo) da *tância*

$$\operatorname{ta}(p_1, p_2) \Rightarrow \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle} = a^2.$$

Deste modo, é conveniente utilizar a tância ao invés da distância. Se p_1 ou p_2 é isotrópico e $\langle p_1, p_2 \rangle \neq 0$, então definimos $\operatorname{ta}(p_1, p_2) \Rightarrow \infty$. Se p_1 ou p_2 é isotrópico e $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$, a tância é *indefinida*.

1.5.4. Observação. Seja L uma linha projetiva. Sejam $p_1, p_2 \in L$ pontos distintos de mesma assinatura. Pelo Critério de Sylvester 1.3.1, a linha projetiva L é respectivamente esférica, hiperbólica, euclidiana, se e só se $0 \leq \operatorname{ta}(p_1, p_2) < 1$, $\operatorname{ta}(p_1, p_2) > 1$, $\operatorname{ta}(p_1, p_2) = 1$. Para L esférica ou hiperbólica e $q_1, q_2 \in L$, $\operatorname{ta}(q_1, q_2) = 1$ significa que $q_1 = q_2$ ■

A métrica em uma linha euclidiana L é nula. No entanto, as geodésicas desta linha se comportam de maneira euclidiana. De fato, seja $u_1 \in L$ o ponto isotrópico. Fixamos $u_2 \in L$ não-isotrópico. Cada $x \in L \setminus \{u_1\}$ admite um único representante da forma $x = ku_1 + u_2$, $k \in \mathbb{K}$. A aplicação $x \mapsto k$ estabelece uma identificação $L \setminus \{u_1\} \simeq \mathbb{K}$. Sejam $p_1 = k_1u_1 + u_2$ e $p_2 = k_2u_1 + u_2$. Temos $\langle p_1, p_2 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle \in \mathbb{R}$. Através da identificação, o segmento de geodésica

$$G[p_1, p_2] = \left\{ (1-s)(k_1u_1 + u_2) + s(k_2u_1 + u_2) = ((1-s)k_1 + sk_2) \cdot u_1 + u_2 \mid s \in [0, 1] \right\}$$

é o segmento de reta ligando k_1, k_2 em \mathbb{K} . É possível estender as considerações acima para o caso de subespaços projetivos de dimensão arbitrária.

1.6. Conexão de Levi-Civita

Utilizando a forma (1.3.2) para vetores tangentes, é fácil descrever campos vetoriais suaves em abertos de $\mathbb{K}P^V$ que não contêm pontos isotrópicos. De fato, temos a seguinte

1.6.1. Observação. Seja $U \subset V$ um aberto que não contém pontos isotrópicos. Seja $x : U \rightarrow V$ uma função suave tal que $x(p) \in p^\perp$. Consideremos em U a aplicação definida por $X(p) = \langle -, p \rangle \otimes_{\mathbb{K}} x(p)$. É claro que, se $x(k \cdot p) = (1/\bar{k}) \cdot x(p)$, então X define em $\mathbb{K}PU$ um campo vetorial suave. Reciprocamente, todo campo vetorial suave em $\mathbb{K}PU$ admite um levantamento deste tipo ■

Sejam $v \in V$ e $p \in U$. Definimos

$$(1.6.2) \quad \nabla_{v_p} X \equiv \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \right)_p.$$

No caso de um campo levantado, a definição acima, para um v_p fixo, **independe** da escolha de representante para p .⁷ É fácil ver que ∇ define uma conexão no fibrado tangente $T\mathbb{K}PU$.

O lema seguinte estabelece as regras de derivação que serão utilizadas com frequência.

1.6.3. Lema. *Seja $p \in V$ não-isotrópico e sejam $x, y \in V$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ uma função suave, onde U é uma vizinhança aberta de p . (Vamos assumir, se necessário, que $f(p) \neq 0$.) Então*

$$\begin{aligned} \nabla_{x_p}(f \cdot y)_* &= (x_p(f) \cdot y - f(p) \cdot \langle y, p \rangle \cdot x)_p, & x_p \langle y, * \rangle &= \langle y, {}^p x \rangle \langle p, p \rangle, \\ x_p \langle *, y \rangle &= \langle p, p \rangle \langle {}^p x, y \rangle, & x_p \left(\frac{1}{f} \right) &= -\frac{1}{f(p)} \cdot x_p(f) \cdot \frac{1}{f(p)}, & x_p(\langle *, * \rangle) &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração. É um cálculo direto. Inicialmente, provemos a primeira igualdade. Sendo $(f \cdot y)_* = \langle -, * \rangle \otimes f(*) \left(y - \frac{\langle y, * \rangle}{\langle *, * \rangle} * \right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{x_p}(f \cdot y)_* &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \cdot \left(y - \frac{\langle y, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x \rangle}{\langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) \right)_p = \\ &= \left(-f(p) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\langle y, p \rangle + \varepsilon \langle p, p \rangle \langle y, {}^p x \rangle}{\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \langle p, p \rangle^2 \langle {}^p x, {}^p x \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) + \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \cdot y \right)_p = \\ &= \left(-f(p) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\langle y, p \rangle + \varepsilon \langle p, p \rangle \langle y, {}^p x \rangle}{\langle p, p \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) + x_p(f) \cdot y \right)_p = \\ &= \left(-f(p) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\left(\frac{\langle y, p \rangle}{\langle p, p \rangle} + \varepsilon \langle y, {}^p x \rangle \right) (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) + x_p(f) \cdot y \right)_p = \\ &= \left(-f(p) \cdot (\langle y, p \rangle^p x + \langle y, {}^p x \rangle p) + x_p(f) \cdot y \right)_p = \\ &= (-f(p) \cdot \langle y, p \rangle^p x + x_p(f) \cdot y)_p = (x_p(f) \cdot y - f(p) \cdot \langle y, p \rangle \cdot x)_p. \end{aligned}$$

Quanto à segunda igualdade, temos $x_p \langle y, * \rangle = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \langle y, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x \rangle = \langle y, {}^p x \rangle \langle p, p \rangle$. (A terceira igualdade pode ser provada de modo análogo.) Para provar a penúltima igualdade basta observar que

$$0 = x_p \left(f \cdot \frac{1}{f} \right) = x_p(f) \cdot \frac{1}{f(p)} + f(p) \cdot x_p \left(\frac{1}{f} \right).$$

Finalmente,

$$v_p \langle *, * \rangle = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \langle p + \varepsilon \cdot \langle p, p \rangle \cdot {}^p v, p + \varepsilon \cdot \langle p, p \rangle \cdot {}^p v \rangle = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \cdot \langle p, p \rangle^2 \cdot \langle {}^p v, {}^p v \rangle) = 0 \blacksquare$$

⁷Para verificar este fato, deve-se levar em conta que, com v_p fixo, o v **depende** da escolha de representante para p .

Sejam $x, y \in V$, $x \neq 0$. Em um aberto disjunto de $\mathbb{K}\mathbb{P}x^\perp$ que não contém pontos isotrópicos, definimos o campo vetorial

$$(1.6.4) \quad \text{Tn}(x, y)(*) \equiv (\langle x, * \rangle^{-1} \cdot y)_* .$$

Pela Observação 1.6.1, a expressão acima define corretamente um campo vetorial no domínio especificado. Note-se que, dados $p \in V$ não-isotrópico e $v_p \in \mathbb{T}_p \mathbb{K}\mathbb{P}V$, temos $\text{Tn}(p, \langle p, p \rangle v)(p) = v_p$.

1.6.5. Lema. *Seja $p \in V$ não-isotrópico. Sejam $x, y \in p^\perp$. Para qualquer q não-isotrópico e não-ortogonal a p , temos*

$$\nabla_{\text{Tn}(p,x)} \text{Tn}(p, y)(q) = - \left(\langle p, q \rangle^{-1} \left(\frac{\langle q, q \rangle}{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle} \cdot \langle p, {}^q x \rangle y + \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x \right) \right)_q .$$

Demonstração. Definindo $t \equiv \langle p, q \rangle^{-1} x$ temos, pela expressão (1.6.4), $t_q = \text{Tn}(p, x)(q)$. Utilizando repetidas vezes o Lema 1.6.3, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{Tn}(p,x)} \text{Tn}(p, y)(q) &= \nabla_{t_q} (\langle p, * \rangle^{-1} y)_* = \left(t_q (\langle p, * \rangle^{-1} y - \langle p, q \rangle^{-1} \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x) \right)_q = \\ &= - \left(\langle p, q \rangle^{-1} t_q (\langle p, * \rangle) \langle p, q \rangle^{-1} y + \langle p, q \rangle^{-1} \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x \right)_q = \\ &= - \left(\langle p, q \rangle^{-1} \langle p, \langle p, q \rangle^{-1} {}^q x \rangle \langle q, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} y + \langle p, q \rangle^{-1} \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x \right)_q = \\ &= - \left(\langle p, q \rangle^{-1} \langle p, {}^q x \rangle \langle q, q \rangle \langle q, p \rangle^{-1} \langle p, q \rangle^{-1} y + \langle p, q \rangle^{-1} \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x \right)_q = \\ &= - \left(\langle p, q \rangle^{-1} \left(\frac{\langle q, q \rangle}{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle} \cdot \langle p, {}^q x \rangle y + \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x \right) \right)_q \blacksquare \end{aligned}$$

Fixemos um aberto conexo $U \subset V$ que não contém pontos isotrópicos. Sejam $X(q) \equiv \langle -, q \rangle \otimes x(q)$ e $Y(q) \equiv \langle -, q \rangle \otimes y(q)$, $x(q), y(q) \in q^\perp$, $q \in U$, campos vetoriais suaves em $\mathbb{K}\mathbb{P}U$.

Vamos provar, inicialmente, que a conexão ∇ é *simétrica*, isto é, que o tensor de torção $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ é nulo. Seja $p \in U$. Denotamos $x(p) \equiv x$ e $y(p) \equiv y$. Segue do Lema 1.6.5 que

$$\nabla_{\text{Tn}(p,x)} \text{Tn}(p, y)(p) = \nabla_{\text{Tn}(p,y)} \text{Tn}(p, x)(p) = 0.$$

Assim, para obter a simetria de ∇ , resta mostrar que $[\text{Tn}(p, x), \text{Tn}(p, y)](p) = 0$. Por definição,

$$\text{Tn}(p, y)f(q) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}\left(q + \varepsilon \langle q, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} \cdot {}^q y\right),$$

onde f é uma função suave definida em uma vizinhança de p . Com o auxílio de identidades do tipo

$$\left. \frac{d}{d\delta} \right|_{\delta=0} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}\left(\dots + \frac{\varepsilon}{1 + k\varepsilon\delta} q + \dots\right) \right) = \left. \frac{d}{d\delta} \right|_{\delta=0} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}\left(\dots + \varepsilon q + \dots\right) \right),$$

calculamos

$$\text{Tn}(p, x)(\text{Tn}(p, y)f)(p) = \left. \frac{d}{d\delta} \right|_{\delta=0} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}\left(p + \delta x + \varepsilon \langle p + \delta x, p + \delta x \rangle \langle p, p + \delta x \rangle^{-1} p + \delta x y\right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(p + \delta x + \varepsilon \left(1 + \delta^2 \frac{\langle x, x \rangle}{\langle p, p \rangle} \right)^{p+\delta x} y \right) \right) = \\
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} (p + \delta x + \varepsilon^{p+\delta x} y) \right) = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(p + \delta x + \varepsilon \left(y - \frac{\langle y, \delta x \rangle}{\langle p, p \rangle} (p + \delta x) \right) \right) \right) = \\
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(p + \delta x + \varepsilon y - \varepsilon \delta \frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle} p \right) \right) = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(\left(1 - \varepsilon \delta \frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle} \right) p + \delta x + \varepsilon y \right) \right).
\end{aligned}$$

Como $\hat{f}(k \cdot p) = \hat{f}(p)$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Tn}(p, x)(\text{Tn}(p, y)f)(p) &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(p + \frac{\delta}{1 - \varepsilon \delta \langle y, x \rangle / \langle p, p \rangle} x + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon \delta \langle y, x \rangle / \langle p, p \rangle} y \right) \right) = \\
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(p + \delta x + \varepsilon y) \right).
\end{aligned}$$

Segue que $\text{Tn}(p, x)(\text{Tn}(p, y)f)(p) = \text{Tn}(p, y)(\text{Tn}(p, x)f)(p)$. Em outras palavras,

$$(1.6.6) \quad [\text{Tn}(p, x), \text{Tn}(p, y)](p) = 0.$$

A conexão ∇ é *compatível com a métrica*, isto é,

$$v_p \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_{v_p} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{v_p} Y \rangle.$$

De fato, como $\langle X, Y \rangle(q) = \pm \langle q, q \rangle \cdot \langle x(q), y(q) \rangle$, $q \in U$, temos

$$\begin{aligned}
v_p \langle X, Y \rangle &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\langle X, Y \rangle(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \right) = \pm \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v \rangle \cdot \right. \\
&\quad \left. \langle x(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v), y(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \rangle \right) = \pm \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\left(\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \langle p, p \rangle^2 \langle v, v \rangle \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \langle x(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v), y(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \rangle \right) = \pm \langle p, p \rangle \cdot \left\langle \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v), y(p) \right\rangle \pm \\
&\quad \pm \langle p, p \rangle \cdot \left\langle x(p), \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} y(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \right\rangle = \pm \langle p, p \rangle \cdot \left\langle \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \right), y(p) \right\rangle \pm \\
&\quad \pm \langle p, p \rangle \cdot \left\langle x(p), \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} y(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \right) \right\rangle = \langle \nabla_{v_p} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{v_p} Y \rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, é fácil ver que existe um aberto maximal $C \supset U$ não contendo pontos isotrópicos que é uma componente conexa de $\mathbb{K}PV \setminus SV$, onde $SV = \{x \in \mathbb{K}PV \mid \langle x, x \rangle = 0\}$. Seja $p \in C$. Sejam $x_{1p}, x_{2p} \in T_p C$. É claro que $(x_{1p}, x_{2p}) \mapsto \text{Re} \langle x_{1p}, x_{2p} \rangle$ define uma métrica pseudo-Riemanniana em C . Temos, portanto, a

1.6.7. Proposição. *A conexão ∇ é de Levi-Civita para a métrica pseudo-Riemanniana em qualquer componente conexa de $\mathbb{K}PV \setminus SV$ ■*

1.7. Transporte paralelo

Para estudar o transporte paralelo de vetores ao longo de uma geodésica em $\mathbb{K}PV$ utilizaremos o seguinte

1.7.1. Lema. *Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Seja $q \in \mathbb{K}PV$ distinto de p e não-ortogonal a p . O campo vetorial*

$$\text{Tn}(q^p, {}^p q)(*) = (\langle q^p, * \rangle^{-1} {}^p q)_*$$

é não-nulo e é tangente à geodésica $G \wr p, q \wr$ nos pontos não-isotrópicos e não-ortogonais a p da geodésica em questão.

Demonstração. Seja $g \in G \wr p, q \wr$ um ponto não-isotrópico e não-ortogonal a p . Como $\text{Tn}(q^p, {}^p q)(g)$ independe da escolha de representantes para p e q , podemos supor $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$, de onde segue que $g \in \mathbb{K}P(\mathbb{R}p + \mathbb{R}q)$. É claro que podemos supor $g \in \mathbb{R}p + \mathbb{R}q$, uma vez que $\text{Tn}(q^p, {}^p q)(g)$ também independe da escolha de representante para g . A aplicação linear

$$\hat{\varphi} \Rightarrow \text{Tn}(q^p, {}^p q)(g) = (\langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q)_g = \langle -, g \rangle \otimes \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}g, g^\perp)$$

é tal que $\hat{\varphi}(g) = \langle g, g \rangle \cdot \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \in \mathbb{R}p + \mathbb{R}q$. Além disso, temos $\hat{\varphi}(g) \neq 0$ (pois, se ${}^p q = 0$, então $\langle g, p \rangle = 0$). É óbvio que $\hat{\varphi}(g) \notin \mathbb{K}g$. Em outras palavras, pela Proposição 1.2.3, $\text{Tn}(q^p, {}^p q)(g)$ é um vetor não-nulo tangente a $G \wr p, q \wr$ em g ■

Sejam $x, y \in V$, $x \neq 0$. Em um aberto disjunto de $\mathbb{K}P x^\perp$ que não contém pontos isotrópicos definimos o campo vetorial

$$(1.7.2) \quad \text{Ct}(x, y)(*) \Rightarrow \left(\frac{\langle *, x \rangle y}{\langle *, * \rangle \sqrt{\text{ta}(x, *)}} \right)_*$$

(Para x isotrópico, definimos $\text{Ct}(x, y)(*) \Rightarrow 0$.) Segue da Observação 1.6.1 que a expressão acima define corretamente um campo vetorial no domínio especificado.

1.7.3. Proposição. *Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Seja $q \in \mathbb{K}PV$ distinto de p e não-ortogonal a p . Sejam $h, v \in p^\perp$ tais que $h \in \mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ e $v \in (\mathbb{K}p + \mathbb{K}q)^\perp$. Então*

$$\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h) = \nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Ct}(p, v) = 0$$

nos pontos não-isotrópicos e não-ortogonais a p da geodésica $G \wr p, q \wr$.

Demonstração. Seja $g \in G \wr p, q \wr$ não-isotrópico e não-ortogonal a p . Definimos $t \Rightarrow \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q$. Pela expressão (1.6.4), temos $t_g = \text{Tn}(q^p, {}^p q)(g)$. Utilizando repetidamente o Lema 1.6.3, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{t_g} \text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h) &= \langle p, p \rangle \nabla_{t_g} (\langle p, * \rangle^{-1} h)_* = \langle p, p \rangle \left(t_g (\langle p, * \rangle^{-1} h) - \langle p, g \rangle^{-1} \langle h, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \right)_g = \\ &= \langle p, p \rangle \left(- \langle p, g \rangle^{-1} t_g (\langle p, * \rangle) \langle p, g \rangle^{-1} h - \langle p, g \rangle^{-1} \langle h, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \right)_g = \\ &= \langle p, p \rangle \left(- \langle p, g \rangle^{-1} \langle p, {}^p t \rangle \langle g, g \rangle \langle p, g \rangle^{-1} h - \langle p, g \rangle^{-1} \langle h, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \right)_g = \\ &= \langle p, p \rangle \left(- \langle p, g \rangle^{-1} \langle p, \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \rangle \langle g, g \rangle \langle p, g \rangle^{-1} h - \langle p, g \rangle^{-1} \langle h, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \right)_g = \\ &= \langle p, p \rangle \left(\langle p, g \rangle^{-1} \langle p, \langle {}^p q, g \rangle g \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} \langle p, g \rangle^{-1} h - \langle p, g \rangle^{-1} \langle h, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \right)_g = \end{aligned}$$

$$(1.7.4) \quad = \langle p, p \rangle \left(\langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} \langle p, g \rangle^{-1} h - \langle p, g \rangle^{-1} \langle h, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} {}^p q \right)_g.$$

Pelo Lema 1.4.5, temos $\langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} = \langle g, q - q^p \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} = \langle g, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} \langle g, p \rangle^{-1} \langle p, p \rangle - 1 \in \mathbb{R}$. De $p^\perp \ni h \in \mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ segue que $h \in \mathbb{K}^p q$. Substituindo h por $k \cdot {}^p q$ em (1.7.4), $\mathbb{K} \ni k \neq 0$, obtemos

$$\nabla_{t_g} \text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h) = \langle p, p \rangle \langle p, g \rangle^{-1} \left((\langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} - \langle {}^p q, g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1}) k {}^p q \right)_g = 0.$$

Pelo Lema 1.6.3,

$$\nabla_{t_g} \text{Ct}(p, v) = \nabla_{t_g} \left(\frac{\langle *, p \rangle v}{\langle *, * \rangle \sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right)_* = \left(t_g \left(\frac{\langle *, p \rangle}{\langle *, * \rangle \sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right) v \right)_g.$$

Como $t_g(\langle *, * \rangle) = 0$, é suficiente verificar que $t_g \left(\frac{\langle *, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right) = 0$ para obter $\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Ct}(p, v) = 0$.

Temos

$$\begin{aligned} t_g \left(\frac{\langle *, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right) &= \frac{\langle g, g \rangle \langle {}^g t, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, g)}} - \frac{\langle g, p \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \text{ta}(p, g)} t_g \left(\frac{\langle p, * \rangle \langle *, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle *, * \rangle} \right) = \\ &= \frac{\langle g, g \rangle \langle {}^g t, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, g)}} - \frac{\langle g, p \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \text{ta}(p, g)} \cdot \frac{t_g(\langle p, * \rangle \langle *, p \rangle)}{\langle p, p \rangle \langle g, g \rangle} = \\ &= \frac{\langle g, g \rangle \langle {}^g t, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, g)}} - \frac{\langle p, g \rangle^{-1}}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)}} \cdot (\langle p, {}^g t \rangle \langle g, g \rangle \langle g, p \rangle + \langle p, g \rangle \langle g, g \rangle \langle {}^g t, p \rangle). \end{aligned}$$

Utilizando que $\langle p, {}^g t \rangle \langle g, g \rangle = -\langle p, g \rangle \langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1}$ e que $\langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\begin{aligned} t_g \left(\frac{\langle *, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right) &= -\frac{\langle q^p, g \rangle^{-1} \langle {}^p q, g \rangle \langle g, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, q)}} + \frac{(\langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} + \langle q^p, g \rangle^{-1} \langle {}^p q, g \rangle) \langle g, p \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)}} \cdot (\langle g, {}^p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} - \langle q^p, g \rangle^{-1} \langle {}^p q, g \rangle) \cdot \langle g, p \rangle = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

1.7.5. Corolário. *Seja G uma geodésica. Então G é geodésica da conexão ∇ em qualquer componente conexa de $\mathbb{K}PV \setminus SV$.*

Demonstração. Seja $p \in G$ não-isotrópico. Seja U uma vizinhança aberta de p em G que não contém pontos isotrópicos e que não contém pontos ortogonais a p . Seja $q \in G \cap U$ distinto de p . Pelo Lema 1.7.1, o campo $\text{Tn}(q^p, {}^p q)(*)$ definido em U é tangente a G . Para $h = \langle q, p \rangle^{-1} {}^p q$ temos $\text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h) = \text{Tn}(q^p, {}^p q)$. Segue da proposição anterior que

$$\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Tn}(q^p, {}^p q)(p) = 0 \blacksquare$$

É um fato conhecido (vide, por exemplo, [KNo]) que, dados $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico e $x_p \in T_p \mathbb{K}PV$, existe uma única geodésica da conexão ∇ passando por p com vetor tangente x_p . Segue do corolário acima que esta é a mesma geodésica construída na demonstração do Lema 1.4.4.

Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Seja $q \in \mathbb{K}PV$ distinto de p . Vamos supor que a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é não-degenerada. É fácil verificar que um vetor tangente $x_p \in T_p \mathbb{K}PV$, $x \in p^\perp$, admite a decomposição

$x_p = h_p + v_p$, onde $h, v \in p^\perp$, $h \in \mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ e $v \in (\mathbb{K}p + \mathbb{K}q)^\perp$. Pela Proposição 1.2.3, as componentes h_p e v_p são, respectivamente, tangente e ortogonal a $L \wr p, q$.

1.7.6. Corolário. *Sejam $p, q \in \mathbb{K}PV$ distintos, não-isotrópicos e não-ortogonais. Vamos supor que a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é não-degenerada. Seja $x_p \in T_p \mathbb{K}PV$, onde $x \rightleftharpoons h + v$, $h, v \in p^\perp$, $h \in \mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ e $v \in (\mathbb{K}p + \mathbb{K}q)^\perp$. O transporte paralelo⁸ de x_p ao longo da geodésica $G \wr p, q$ é dado em $T_q \mathbb{K}PV$ pelo vetor $Tn(p, \langle p, p \rangle h)(q) + Ct(p, v)(q)$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que $x_p = Tn(p, \langle p, p \rangle h)(p) + Ct(p, v)(p)$. Pelo Corolário 1.7.5, temos $\nabla_{Tn(q^p, p^q)} Tn(q^p, p^q)(g) = 0$ para $g \in G$ não-isotrópico. Resta notar que, pela Proposição 1.7.3, $\nabla_{Tn(q^p, p^q)} (Tn(p, \langle p, p \rangle h) + Ct(p, v))(g) = 0$ para $g \in G$ não-isotrópico ■

Logo, podemos distinguir duas componentes do transporte paralelo ao longo de uma geodésica contida em uma linha projetiva não-euclidiana: a *horizontal* (tangente à linha projetiva) e a *vertical* (ortogonal à linha projetiva).

Para realizar o transporte paralelo de vetores ao longo de uma geodésica contida em uma linha projetiva euclidiana, **não** contamos, em geral, com a decomposição de tais vetores em componentes tangente e ortogonal à linha em questão. Assim, será necessário introduzir o campo vetorial

$$Eu(x, y)(*) \rightleftharpoons \left(- \langle *, * \rangle^{-1} \langle *, x \rangle \langle y, * \rangle \langle x, * \rangle^{-1} x \right)_*$$

$x, y \in V$, definido em um aberto disjunto de $\mathbb{K}P^1$ que não contém pontos isotrópicos. É fácil verificar, utilizando a Observação 1.6.1, que a expressão acima define corretamente um campo vetorial no domínio especificado.

1.7.7. Proposição. *Sejam $p, q \in \mathbb{K}PV$ distintos e não-isotrópicos. Vamos supor que a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é degenerada (em particular, $\langle p, q \rangle \neq 0$). Seja $x \in p^\perp$. Temos*

$$\nabla_{Tn(q^p, p^q)} \left(\frac{1}{2} Eu(p, x) + Ct(p, x) \right) = 0$$

nos pontos não-isotrópicos da geodésica $G \wr p, q$.

Demonstração. Seja $g \in G \wr p, q$ não-isotrópico (em particular, $\langle g, p \rangle \neq 0$). Definimos $t \rightleftharpoons \langle q^p, g \rangle^{-1} p^q$. Como a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é degenerada, t (e, portanto, ${}^g t$) é ortogonal a todo ponto em $L \wr p, q$. Por (1.6.4) temos $t_g = Tn(q^p, p^q)(g)$. Utilizando o Lema 1.6.3 obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{t_g} Eu(p, x) &= \nabla_{t_g} \left(- \langle *, * \rangle^{-1} \langle *, p \rangle \langle x, * \rangle \langle p, * \rangle^{-1} p \right)_* = \\ &= \left(t_g \left(- \langle *, * \rangle^{-1} \langle *, p \rangle \langle x, * \rangle \langle p, * \rangle^{-1} \right) p + \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, g \rangle \langle p, g \rangle^{-1} \langle p, g \rangle t \right)_g = \\ &= \left(- \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle t_g \langle x, * \rangle \langle p, g \rangle^{-1} p + \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, g \rangle t \right)_g = \\ &= \left(- \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, {}^g t \rangle \langle g, g \rangle \langle p, g \rangle^{-1} {}^g p + \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, g \rangle {}^g t \right)_g = \\ &= \left(\langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, {}^g t \rangle p + \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, p^g \rangle {}^g t \right)_g = \left(\langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle (\langle x, {}^g t \rangle p + \langle x, p^g \rangle {}^g t) \right)_g, \end{aligned}$$

⁸Definimos o transporte paralelo de x_p ao longo de $G \wr p, q$ em $T_q \mathbb{K}PV$ mesmo quando p e q não possuem a mesma assinatura. Note-se que, neste caso, o campo $Tn(q^p, p^q)(*)$ não está definido em todos os pontos de um segmento de geodésica ligando p e q .

uma vez que $\text{ta}(p, g) = 1$ (a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é degenerada) implica em $\langle g, g \rangle \langle p, g \rangle^{-1} = \langle p, p \rangle^{-1} \langle g, p \rangle$, de onde segue que $\langle g, g \rangle \langle p, g \rangle^{-1} g p = -p g$. Utilizando novamente o Lema 1.6.3, temos

$$\nabla_{t_g} \text{Ct}(p, x) = \nabla_{t_g} (\langle *, * \rangle^{-1} \langle *, p \rangle x)_* = (-\langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, g \rangle t)_g = (-\langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, p g \rangle^g t)_g.$$

Logo,

$$(1.7.8) \quad \nabla_{t_g} \left(\frac{1}{2} \text{Eu}(p, x) + \text{Ct}(p, x) \right) = \left(\frac{1}{2} \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \left(\langle x, g t \rangle^p g - \langle x, p g \rangle^g t \right) \right)_g = \left(\frac{1}{2} \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \left(\langle x, p q \rangle \langle g, q^p \rangle^{-1} p g - \langle x, p g \rangle \langle q^p, g \rangle^{-1} p q \right) \right)_g.$$

A expressão acima independe da escolha de representante para q . Logo, podemos supor que $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$. Agora, o fato $g \in G \wr p, q$ significa $g \in \mathbb{K}P(\mathbb{R}p + \mathbb{R}q)$. É claro que podemos tomar $g \in \mathbb{R}p + \mathbb{R}q$, pois (1.7.8) também independe da escolha de representante para g . Daí segue que ${}^p g \in \mathbb{R}^p q$. Substituindo ${}^p g$ por $r \cdot {}^p q$, $\mathbb{R} \ni r \neq 0$, em (1.7.8), obtemos

$$\nabla_{t_g} \left(\frac{1}{2} \text{Eu}(p, x) + \text{Ct}(p, x) \right) = \left(\frac{1}{2} \langle g, g \rangle^{-1} \langle g, p \rangle \langle x, p q \rangle r \left(\langle g, q^p \rangle^{-1} - \langle q^p, g \rangle^{-1} \right) p q \right)_g = 0 \blacksquare$$

1.7.9. Corolário. *Sejam $p, q \in \mathbb{K}PV$ distintos e não-isotrópicos. Vamos supor que a forma em $\mathbb{K}p + \mathbb{K}q$ é degenerada (em particular, $\langle p, q \rangle \neq 0$). Seja $x_p \in T_p \mathbb{K}PV$, $x \in p^\perp$. O transporte paralelo de x_p ao longo da geodésica $G \wr p, q$ é dado em $T_q \mathbb{K}PV$ pelo vetor $\frac{1}{2} \text{Eu}(p, x)(q) + \text{Ct}(p, x)(q)$.*

Demonstração. Observemos que $\frac{1}{2} \text{Eu}(p, x)(p) + \text{Ct}(p, x)(p) = \text{Ct}(p, x)(p) = x_p$. O resultado segue imediatamente da demonstração do Corolário 1.7.5 e da proposição acima \blacksquare

1.8. Tensor de curvatura

Seja $p \in V$ não-isotrópico e sejam $x_1, x_2, y \in p^\perp$. Em uma vizinhança U de p disjunta de $\mathbb{K}Pp^\perp$ e que não contém pontos isotrópicos definimos $X_i \Leftarrow \text{Tn}(p, x_i)$, $i = 1, 2$, e $Y \Leftarrow \text{Tn}(p, y)$. Calculemos o tensor de curvatura

$$R(X_1, X_2)Y(p) \Leftarrow (\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} Y - \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y + \nabla_{[X_1, X_2]} Y)(p).$$

Para $q \in U$ temos, pelo Lema 1.6.5,

$$\nabla_{X_2} Y(q) = - \left(\langle p, q \rangle^{-1} \left(\frac{\langle q, q \rangle}{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle} \langle p, q x_2 \rangle y + \langle y, q \rangle \langle p, q \rangle^{-1} x_2 \right) \right)_q,$$

e, portanto,

$$\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y(p) = - \frac{1}{\langle p, p \rangle} \nabla_{x_{1p}} \left(\left(\frac{\langle p, * \rangle^2 \cdot \langle *, p \rangle}{\langle *, * \rangle} \right)^{-1} \langle p, * x_2 \rangle y + \langle p, * \rangle^{-1} \langle y, * \rangle \langle p, * \rangle^{-1} x_2 \right)_*.$$

Utilizando o Lema 1.6.3, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{x_{1p}} (\langle p, * \rangle^{-1} \langle y, * \rangle \langle p, * \rangle^{-1} x_2)_* &= \left(x_{1p} (\langle p, * \rangle^{-1} \langle y, * \rangle \langle p, * \rangle^{-1} x_2) \right)_p = \\ &= \frac{1}{\langle p, p \rangle^2} \left(x_{1p} (\langle y, * \rangle x_2) \right)_p = \frac{1}{\langle p, p \rangle} (\langle y, x_1 \rangle x_2)_p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_{x_{1p}} \left(\left(\frac{\langle p, * \rangle^2 \cdot \langle *, p \rangle}{\langle *, * \rangle} \right)^{-1} \langle p, * x_2 \rangle y \right)_* &= \left(x_{1p} \left(\left(\frac{\langle p, * \rangle^2 \cdot \langle *, p \rangle}{\langle *, * \rangle} \right)^{-1} \langle p, * x_2 \rangle \right) y \right)_p = \\ &= \frac{1}{\langle p, p \rangle^2} \cdot \left(x_{1p} (\langle p, * x_2 \rangle) y \right)_p = -\frac{1}{\langle p, p \rangle} (\langle x_1, x_2 \rangle y)_p, \end{aligned}$$

uma vez que

$$x_{1p} \langle p, * x_2 \rangle = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left\langle p, x_2 - \frac{\langle x_2, p + \varepsilon \langle p, p \rangle x_1 \rangle}{\langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle x_1, p + \varepsilon \langle p, p \rangle x_1 \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle x_1) \right\rangle = -\langle p, p \rangle \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Finalmente,

$$\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y(p) = -\frac{1}{\langle p, p \rangle^2} (\langle y, x_1 \rangle x_2 - \langle x_1, x_2 \rangle y)_p.$$

De modo análogo,

$$\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} Y(p) = -\frac{1}{\langle p, p \rangle^2} (\langle y, x_2 \rangle x_1 - \langle x_2, x_1 \rangle y)_p.$$

Portanto, como $[X_1, X_2](p) = 0$ (vide (1.6.6)), temos

$$R(X_1, X_2)Y(p) = \frac{1}{\langle p, p \rangle^2} (\langle y, x_1 \rangle x_2 - \langle y, x_2 \rangle x_1 + (\langle x_2, x_1 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle) y)_p.$$

Multiplicando por $\langle p, p \rangle^3$, obtemos

$$(1.8.1) \quad R(x_{1p}, x_{2p})y_p = \langle p, p \rangle \left(\langle y, x_1 \rangle x_2 - \langle y, x_2 \rangle x_1 + (\langle x_2, x_1 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle) y \right)_p.$$

1.9. Curvaturas seccionais

Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Consideremos em $T_p \mathbb{K}PV$ a forma real $(-, -) \Rightarrow \operatorname{Re} \langle -, - \rangle$. Para um \mathbb{R} -subespaço bidimensional $W \subset T_p \mathbb{K}PV$ tal que a forma real restrita a W é não-degenerada, a *curvatura seccional* é definida por

$$S(W) \Rightarrow S(x_{1p}, x_{2p}) \Rightarrow \frac{(R(x_{1p}, x_{2p})x_{1p}, x_{2p})}{(x_{1p}, x_{1p})(x_{2p}, x_{2p}) - (x_{1p}, x_{2p})^2},$$

onde $x_{1p}, x_{2p} \in W$ são \mathbb{R} -linearmente independentes, $x_1, x_2 \in p^\perp$. A curvatura seccional está bem definida uma vez que $(-, -)$ é não-degenerada e a expressão para $S(W)$ independe da base escolhida para W .

Vamos supor que $\langle x_i, x_i \rangle = \sigma_i \in \{-1, 0, +1\}$ e que $\langle x_1, x_2 \rangle = k \in \mathbb{K}$. O fato de $(-, -)$ ser não-degenerada significa $\sigma_1 \sigma_2 \neq (\operatorname{Re} k)^2$. Utilizando a expressão 1.8.1 temos

$$(1.9.1) \quad \begin{aligned} S(W) &= \frac{\left(\langle p, p \rangle \left(\langle x_1, x_1 \rangle x_2 - \langle x_1, x_2 \rangle x_1 + (\langle x_2, x_1 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle) x_1 \right)_p, x_{2p} \right)}{(x_{1p}, x_{1p})(x_{2p}, x_{2p}) - (x_{1p}, x_{2p})^2} = \\ &= \frac{\pm \langle p, p \rangle^2 (\sigma_1 \sigma_2 - 2 \operatorname{Re}(k^2) + |k|^2)}{(\pm \langle p, p \rangle \cdot \sigma_1)(\pm \langle p, p \rangle \cdot \sigma_2) - (\pm \langle p, p \rangle \cdot \operatorname{Re} k)^2} = \pm \left(1 + \frac{3|k - \bar{k}|^2}{4(\sigma_1 \sigma_2 - (\operatorname{Re} k)^2)} \right), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida através da identidade $|k|^2 - 2 \operatorname{Re}(k^2) = \frac{3}{4}|k - \bar{k}|^2 - (\operatorname{Re} k)^2$.

É claro que, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então $S(W) = \pm 1$. Vamos supor $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$. Se x_1, x_2 são \mathbb{K} -linearmente dependentes temos, pelo Critério de Sylvester 1.3.1, que $\sigma_1 \sigma_2 = |k|^2$. Portanto, $|k| = \sigma_1 \sigma_2 = 1$. Neste caso, segue diretamente da identidade $|k|^2 = |k - \bar{k}|^2/4 + (\operatorname{Re} k)^2$ que $S(W) = \pm 4$. É fácil ver que $x_1, x_2 \in p^\perp$ são sempre \mathbb{K} -linearmente dependentes quando $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$. Obtemos a seguinte

1.9.2. Observação. A métrica em uma componente conexa de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus SV$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus SV$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 \setminus SV$ possui curvaturas seccionais constantes (quando definidas) ■

Vamos supor que x_1, x_2 são \mathbb{K} -linearmente independentes, $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$. Fixemos um $k' \in \mathbb{K}$ tal que $\operatorname{Re} k' = 0$ e $|k'| = 1$. No que se segue, utilizaremos repetidamente o Critério de Sylvester 1.3.1.

Inicialmente, suponhamos que a forma sobre $\mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ seja definida. Temos $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ e $|k|^2 < 1$. Daí segue que $(\operatorname{Re} k)^2 < 1$, ou seja, a forma real sobre W é definida. Portanto, para o cálculo da curvatura seccional, podemos supor que $\operatorname{Re} k = 0$, isto é, $k = -\bar{k}$. Logo, pela expressão (1.9.1), $S(W) = \pm(1 + 3|k|^2)$. Assim, $S(W)$ varia no intervalo $\pm[1, 4)$. Provemos que $S(W)$ assume qualquer valor neste intervalo. Sejam $u, w \in \mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ tais que $\langle u, u \rangle = \langle w, w \rangle = \sigma_1 (= \sigma_2)$ e $\langle u, w \rangle = 0$. Definimos $x = k'(\sqrt{1 - r^2}u + rw)$, $0 \leq r < 1$. É fácil verificar que x e w são \mathbb{K} -linearmente independentes. Temos $\langle x, x \rangle = \langle w, w \rangle = \sigma_1$ e $\langle x, w \rangle = k'r\sigma_1$. Segue que $\operatorname{Re}\langle x, w \rangle = 0$. Finalmente, $|\langle x, w \rangle|^2 = r^2$ assume qualquer valor em $[0, 1)$.

Vamos supor que a forma sobre $\mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ é indefinida. Temos $|k|^2 > \sigma_1 \sigma_2$. A forma real sobre W será definida caso $(\operatorname{Re} k)^2 < \sigma_1 \sigma_2$ e indefinida caso $(\operatorname{Re} k)^2 > \sigma_1 \sigma_2$.

Se ocorre o primeiro caso, temos necessariamente $\sigma_1 \sigma_2 = 1$. Podemos supor $\operatorname{Re} k = 0$. Segue de (1.9.1) que $S(W) = \pm(1 + 3|k|^2)$. Portanto, $S(W)$ varia no intervalo $\pm(4, \infty)$. Para provar que $S(W)$ assume qualquer valor neste intervalo, sejam $u, w \in \mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ tais que $\langle u, u \rangle = \sigma_1 (= \sigma_2)$, $\langle w, w \rangle = -\sigma_1$ e $\langle u, w \rangle = 0$. Definimos $x = k'(\sqrt{1 + r^2}u + rw)$, $r > 0$. É fácil verificar que x e u são \mathbb{K} -linearmente independentes. Temos $\langle x, x \rangle = \langle u, u \rangle = \sigma_1$ e $\langle x, u \rangle = k'\sqrt{1 + r^2}\sigma_1$. Segue que $\operatorname{Re}\langle x, u \rangle = 0$. Por fim, $|\langle x, u \rangle|^2 = 1 + r^2$ assume qualquer valor em $(1, \infty)$.

Se ocorre o segundo caso, podemos supor $\sigma_1 \sigma_2 = -1$ e $\operatorname{Re} k = 0$. De (1.9.1) obtemos $S(W) = \pm(1 - 3|k|^2)$. Logo, $S(W)$ varia no intervalo $\pm(-\infty, 1]$. Novamente, $S(W)$ pode assumir qualquer valor neste intervalo. De fato, sejam $u, w \in \mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ tais que $\langle u, u \rangle = \sigma_1$, $\langle w, w \rangle = -\sigma_1$ e $\langle u, w \rangle = 0$. Definimos $x = k'(\sqrt{1 + r^2}u + rw)$, $r \geq 0$. É fácil verificar que x e w são \mathbb{K} -linearmente independentes. Temos $\langle x, x \rangle = \sigma_1$, $\langle w, w \rangle = -\sigma_1$ e $\langle x, w \rangle = -k'r\sigma_1$. Segue que $\operatorname{Re}\langle x, w \rangle = 0$. Por fim, $|\langle x, w \rangle|^2 = r^2$ assume qualquer valor em $[0, \infty)$.

Finalmente, suponhamos que a forma sobre $\mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ é degenerada não-nula. Temos $|k|^2 = \sigma_1 \sigma_2 = 1$. Daí segue que a forma real em W é definida se $(\operatorname{Re} k)^2 < 1$. Novamente, podemos supor que $\operatorname{Re} k = 0$. Por (1.9.1), temos $S(W) = \pm 4$. Para provar que esta situação se realiza, sejam $u, w \in \mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ tais que $\langle u, u \rangle = 0$, $\langle w, w \rangle = \sigma_1$ e $\langle u, w \rangle = 0$. Temos $\langle k'(u + w), k'(u + w) \rangle = \sigma_1$, $\langle w, w \rangle = \sigma_1$ e $\operatorname{Re}\langle k'(u + w), w \rangle = 0$.

A tabela abaixo resume os resultados obtidos, para x_1, x_2 \mathbb{K} -linearmente independentes:

Forma em $\mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$	Forma real em W	Curvatura Seccional
Indefinida	Indefinida	$\pm(-\infty, 1]$
Definida	Definida	$\pm[1, 4)$
Degenerada	Definida	± 4
Indefinida	Definida	$\pm(4, \infty)$

1.9.3. Lema. *Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Seja $W \subset T_p \mathbb{K}PV$ um \mathbb{R} -subespaço bidimensional.*

Se a forma real sobre W é não-degenerada e $S(W) = \pm 1$, então a coleção das geodésicas passando por p com vetores tangentes em W constitui um subespaço totalmente real bidimensional em $\mathbb{K}PV$.

Se W é tangente a um subespaço totalmente real⁹ $\mathbb{K}PS$ bidimensional de $\mathbb{K}PV$ tal que a forma restrita a S é não-degenerada, então $S(W) = \pm 1$.

Demonstração. Sejam $x_{1p}, x_{2p} \in W$, $x_1, x_2 \in p^\perp$, vetores não-nulos \mathbb{R} -linearmente independentes. Pelo Lema 1.4.4, existem únicas geodésicas G_1, G_2 passando por p com respectivos vetores tangentes x_{1p}, x_{2p} . Em uma vizinhança suficientemente pequena de p , podemos encontrar $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$, tais que g_i e p possuem a mesma assinatura e tais que $\langle g_i, p \rangle \neq 0$, $\langle g_1, g_2 \rangle \neq 0$. Pelo Lema 1.7.1, os vetores x_{ip} são \mathbb{R} -proporcionais aos vetores $\text{Tn}(g_i^p, {}^p g_i)(p) = (\langle g_i, p \rangle^{-1} {}^p g_i)_p$. Assim, podemos tomar $x_i = \langle g_i, p \rangle^{-1} {}^p g_i$. Além disto, podemos supor $\langle p, p \rangle = \langle g_i, g_i \rangle = \sigma \in \{-1, +1\}$ e $0 \neq \langle g_i, p \rangle = \alpha_i \in \mathbb{R}$.

Vamos supor que, realizada a escolha acima de representantes para p, g_1, g_2 , obtivemos

$$(1.9.4) \quad 0 \neq \langle g_1, g_2 \rangle = \sigma \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a forma restrita a $\mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2$ é real. Temos $x_i = \alpha_i^{-1} g_i - \sigma p$, $\langle x_i, x_i \rangle = \sigma(\alpha_i^{-2} - 1)$ e $\langle x_1, x_2 \rangle = \sigma((\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \alpha - 1)$. Logo, a forma real sobre W é não-degenerada se e só se $(\alpha_1^{-2} - 1)(\alpha_2^{-2} - 1) - ((\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \alpha - 1)^2 \neq 0$, isto é, se e só se $1 + 2\alpha \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \neq 0$. A matriz de Gram para p, g_1, g_2 é

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \sigma & \sigma \alpha \\ \alpha_2 & \sigma \alpha & \sigma \end{pmatrix}.$$

Temos $\det M = \sigma(1 + 2\alpha \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2))$. Em outras palavras, a forma real sobre W é não-degenerada se e só se a forma sobre $\mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2$ é não-degenerada.

Suponhamos $S(W) = \pm 1$ (em particular, a forma real sobre W é não-degenerada). Segue de (1.9.1) que $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}$. Isto significa $\langle \langle g_1, p \rangle^{-1} {}^p g_1, \langle g_2, p \rangle^{-1} {}^p g_2 \rangle \in \mathbb{R}$, ou seja, $\langle g_1, p \rangle^{-1} \langle g_1, g_2 \rangle \langle p, g_2 \rangle^{-1} \in \mathbb{R}$, isto é, $0 \neq \langle p, g_1 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle \langle g_2, p \rangle \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, ocorre (1.9.4). Daí segue que a forma sobre $\mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2$ é real e não-degenerada. Pelo Corolário 1.4.2, $\mathbb{K}P(\mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2)$ é um subespaço totalmente real bidimensional de $\mathbb{K}PV$ contendo G_1, G_2 . É fácil ver que W é o espaço tangente em p a tal subespaço totalmente real.

Reciprocamente, vamos supor que W é tangente em p a um subespaço totalmente real $\mathbb{K}PS$ bidimensional de $\mathbb{K}PV$ tal que a forma restrita a S é não-degenerada. Isto significa que $G_i \subset \mathbb{K}PS$. É claro que ocorre (1.9.4). Tomando $S = \mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2$, segue de a forma sobre S ser não-degenerada que a forma real sobre W é não-degenerada. Resta utilizar a identidade (1.9.1) ■

1.9.5. Lema. *Seja $p \in \mathbb{K}PV$ não-isotrópico. Seja $W \subset T_p \mathbb{K}PV$ um \mathbb{R} -subespaço bidimensional. Sejam $x_{1p}, x_{2p} \in W$ vetores \mathbb{R} -linearmente independentes, $x_1, x_2 \in p^\perp$.*

Se x_1, x_2 são \mathbb{K} -linearmente dependentes, então as geodésicas passando por p com vetores tangentes em W estão contidas em uma linha projetiva de $\mathbb{K}PV$.

Se $W \subset T_p L$, onde $L \subset \mathbb{K}PV$ é uma linha projetiva, então x_1, x_2 são \mathbb{K} -linearmente dependentes.

Além disso, se a forma real sobre W é não-degenerada temos, em ambos os casos acima, $S(W) = \pm 4$.

Demonstração. Sejam G_1, G_2 as geodésicas passando por p com respectivos vetores tangentes x_{1p}, x_{2p} . Tomamos $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$, tais que $\langle g_i, p \rangle \neq 0$. Como na demonstração do lema anterior, podemos supor $x_i = \langle g_i, p \rangle^{-1} {}^p g_i$.

⁹Onde $S \subset V$ é um \mathbb{R} -subespaço, $\dim_{\mathbb{R}} S = 3$, satisfazendo as condições descritas no início da Seção 1.4.

Assim, se x_1, x_2 são \mathbb{K} -linearmente dependentes, é claro que $g_2 \in L\langle p, g_1 \rangle$. Seja $x_p \in W$, $x \in p^\perp$. Existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(x)_p = (r_1 x_1 + r_2 x_2)_p$. Segue que x e x_1 são \mathbb{K} -linearmente dependentes. Portanto, se G é a geodésica passando por p com vetor tangente x , então $G \subset L\langle p, g_1 \rangle$.

Vamos supor $W \subset T_p L$. Isto significa que $G_1, G_2 \subset L$. Logo, g_1, g_2, p são \mathbb{K} -linearmente dependentes. Segue que ${}^p g_1$ e ${}^p g_2$ são \mathbb{K} -linearmente dependentes

Por fim, a última afirmação deste lema segue das considerações que precedem a Observação 1.9.2 ■

1.10. Alguns exemplos. Resumo

Consideremos a forma positivo-definida em V e o sinal positivo para a métrica (1.3.3). Neste caso, a métrica em $\mathbb{K}PV$ será denominada *métrica de Fubini-Study*. Tomando, nos casos complexo e quaterniônico, apenas a parte real da métrica, vamos obter as respectivas métricas de Fubini-Study usuais (vide [Arn]).

Consideremos a forma de assinatura $(n, 1)$ em V e o sinal negativo para a métrica (1.3.3). Munido desta métrica (em seus pontos não-isotrópicos), o espaço projetivo $\mathbb{K}PV$ será denominado *\mathbb{K} -espaço hiperbólico estendido*. É fácil verificar que $BV \Rightarrow \{p \in \mathbb{K}PV \mid \langle p, p \rangle < 0\} \simeq \mathbb{B}^n$, onde \mathbb{B}^n é a bola aberta de dimensão n sobre \mathbb{K} . A decomposição ortogonal $V = \mathbb{K}p + p^\perp$ implica que a métrica restrita a $T_p BV$ é positivo-definida. Denominaremos BV o *\mathbb{K} -espaço hiperbólico*. Nos casos real e complexo, tais espaços coincidem com os respectivos espaços hiperbólicos usuais, a menos de um fator de escala para a métrica (vide [Gol]). O espaço hiperbólico quaterniônico usual pode ser obtido (também a menos de um fator de escala para a métrica) tomando-se a parte real da métrica em BV .

Tomemos a forma de assinatura $(n-1, 2)$ em V e o sinal negativo para a métrica (1.3.3). Neste caso, $\mathbb{K}PV$ será denominado o *\mathbb{K} -espaço de anti-de Sitter estendido*. Restrita a $BV \Rightarrow \{p \in \mathbb{K}PV \mid \langle p, p \rangle < 0\}$, a métrica é *Lorentziana* (isto é, possui a assinatura $(n-1, 1)$). O conjunto BV , neste caso, é denominado o *\mathbb{K} -espaço de anti-de Sitter*. Nos casos complexo e quaterniônico, considerando apenas a parte real da métrica (1.3.2), obtemos os respectivos \mathbb{K} -espaços de anti-de Sitter usuais (vide [CMA] e [Wol]). Tais espaços têm papel importante na Teoria da Relatividade Geral e na teoria de cordas.

Deste modo, podemos dizer que uma geometria clássica nada mais é do que um \mathbb{K} -espaço vetorial munido de uma forma hermitiana. De fato, a identificação do espaço tangente $T_p \mathbb{K}PV$, para $p \in \mathbb{K}PV$, com o \mathbb{R} -espaço vetorial $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$ permite a introdução de uma métrica natural em $\mathbb{K}PV \setminus SV$. Como vimos acima, para diferentes escolhas de \mathbb{K} e da assinatura da forma hermitiana, obtemos várias geometrias importantes.

Nesta abordagem, os objetos de grande interesse geométrico podem ser tratados de modo bastante elementar. Por exemplo, geodésicas nada mais são do que projetivizações de determinados \mathbb{R} -subespaços lineares bidimensionais. Além disso, o comprimento das geodésicas é uma função monótona da tância. Isto significa que podemos substituir, em muitos casos, fórmulas complicadas que expressam distâncias por uma função algébrica simples.

Em várias abordagens para as geometrias clássicas, a descrição explícita do transporte paralelo ao longo de geodésicas é muito complicada ou inexistente. Nos termos algébricos, ele se descreve facilmente. Vale a pena ressaltar que expressões explícitas para o transporte paralelo são ferramentas fortes, cuja aplicação pode ser encontrada, por exemplo, na construção de variedades hiperbólicas complexas em [AGG] e em [AGu].

Em suma, podemos lidar com várias questões importantes de uma dada geometria clássica em termos da álgebra da forma hermitiana. No próximo capítulo, aplicaremos e desenvolveremos tal ponto de vista para o caso particular da geometria hiperbólica complexa.

Referências

Em [Man] está presente a descrição do espaço tangente apresentada na Seção 1.2.

Uma descrição semelhante a (1.3.2) para vetores tangentes pode ser encontrada em [Pet1], mas com o fator $\langle -, p \rangle \otimes$ esquecido.

Em [Arn], a descrição do espaço tangente e da métrica Riemanniana no caso das geometrias elíticas tem relação com o que apresentamos nas Seções 1.2 e 1.3.

O Lema 1.4.1 tem relação com [Gol, Subseção 2.1.2].

A fórmula (1.9.1) e o tensor de curvatura (1.8.1) têm relação com [Gol, Subseção 2.4.2].

2. Geometria hiperbólica complexa elementar

Elementary, my dear Watson!

— SHERLOCK HOLMES

2.1. Introdução

O estudo de configurações de um número pequeno de pontos em $\mathbb{C}P^V$, bem como o de seus invariantes geométricos, permite elaborar várias ferramentas e métodos adequados à análise de situações comuns em geometria hiperbólica complexa. De fato, muitos arranjos de objetos essenciais tais como linhas projetivas, geodésicas, planos reais e bissetores envolvem ou consistem de configurações finitas de pontos. Em última análise, as propriedades dos invariantes básicos de tais arranjos provaram-se essenciais ao nosso principal objetivo, o estudo de subgrupos discretos do grupo $PU(V)$ de isometrias holomorfas do plano hiperbólico complexo.

A classificação de m -uplas (suficientemente genéricas) de pontos em $\mathbb{C}P^V$, módulo a ação de $PU(V)$, se reduz à classificação de matrizes de Gram de m -uplas de elementos em V , módulo uma ação semi-algébrica do m -toro algébrico \mathbb{C}^{*m} , onde \mathbb{C}^* é o grupo multiplicativo de \mathbb{C} . Neste caso, seria bom imitar a teoria geométrica de invariantes (GIT), a qual se aplicaria de maneira razoavelmente simples dado que o grupo reductivo envolvido é um toro. A análise do problema nestas linhas constitui uma questão bastante interessante, que pretendemos abordar em outro texto. No entanto, para o estudo de grupos discretos, as respostas fornecidas pela GIT são muito gerais, enquanto necessitamos de invariantes simples e de suas propriedades básicas, o que não podemos extrair da GIT.

No que se segue, abordaremos alguns casos da classificação em questão, os quais aplicaremos à análise de propriedades de objetos elementares e de suas combinações no espaço hiperbólico complexo estendido. Se, por um lado, algumas das demonstrações que apresentaremos são simples e diretas, por outro, elas ilustram a força do método (compare, por exemplo, algumas destas demonstrações com as equivalentes em [Gol]). Além disso, invariantes importantes e usuais tais como os de Cartan [Car] e de Korányi-Reimann [KRe] são introduzidos de maneira sistemática em um contexto adequado.

2.2. Configurações de um número pequeno de pontos

Nos termos da Seção 1.1, fixemos $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vamos supor que a forma em V tem a assinatura $(2, 1)$. Fixemos o sinal negativo para a métrica (1.3.3). Munido de tal métrica (em seus pontos não-isotrópicos), $\mathbb{C}P^V$ é denominado o *plano hiperbólico complexo estendido*.

Utilizando coordenadas projetivas, é fácil verificar que $BV \equiv \{p \in \mathbb{C}P^V \mid \langle p, p \rangle < 0\} \simeq \mathbb{B}^4$ e que $SV \equiv \{p \in \mathbb{C}P^V \mid \langle p, p \rangle = 0\} = \partial BV \simeq \mathbb{S}^3$, onde \mathbb{B}^4 é a bola aberta de dimensão real quatro e \mathbb{S}^3 é a esfera de dimensão real três. Seja $p \in BV$. A decomposição ortogonal $V = \mathbb{C}p + p^\perp$ implica que a métrica em $T_p BV$ é positivo-definida. Munido desta métrica hermitiana, BV é denominado o *plano hiperbólico complexo*. Denotaremos $\overline{BV} \equiv BV \cup SV$. O conjunto $AV \equiv \mathbb{C}P^V \setminus \overline{BV}$ será denominado *alhures*.¹⁰ Denotaremos $\overline{AV} \equiv AV \cup SV$.

¹⁰Emprestamos este termo da Teoria da Relatividade Restrita.

Uma aplicação $I : W \rightarrow W'$ entre subconjuntos $W, W' \subset V$ é dita *métrica* se $\langle Iw_1, Iw_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ para quaisquer $w_1, w_2 \in W$. Denotemos GLV o grupo de automorfismos lineares de V e UV o subgrupo formado pelos elementos métricos de GLV . O grupo projetivo $PGLV \cong GLV/\mathbb{C}^*$ age naturalmente em $\mathbb{C}PV$, onde \mathbb{C}^* é o centro de GLV , isomorfo ao grupo multiplicativo de \mathbb{C} . Denotaremos PUV a imagem de UV em $PGLV$.

2.2.1. Lema. PUV age em $\mathbb{C}PV \setminus SV$ por isometrias.

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{C}PV \setminus SV$ e $v_p = \langle -, p \rangle \otimes v \in T_p \mathbb{C}PV$, $v \in p^\perp$. Seja $I \in PUV$. Temos que $\hat{c}(t) \cong p + t\langle p, p \rangle v$ é um levantamento de uma curva $c(t)$ definida em uma vizinhança de p e tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v_p$. Tomando um levantamento $\hat{I} \in UV$ de I , temos $\hat{I}(\hat{c}(t)) = \hat{I}p + t\langle p, p \rangle \hat{I}v = \hat{I}p + t\langle \hat{I}p, \hat{I}p \rangle \hat{I}v$. Segue que¹¹ $dI(v_p) = \langle -, \hat{I}p \rangle \otimes \hat{I}v$. Resta aplicar a definição da métrica em (1.3.3) ■

É conhecido que as isometrias de BV são holomorfas ou anti-holomorfas e que o grupo PUV consiste de todas as isometrias holomorfas de BV (não é difícil provar estes fatos utilizando a Proposição 2.4.10).

2.2.2. Lema. Sejam (v_1, \dots, v_m) e (v'_1, \dots, v'_m) duas m -uplas ordenadas de vetores em V . Sejam $W \cong [v_1, \dots, v_m]$ e $W' \cong [v'_1, \dots, v'_m]$ os subespaços gerados por v_1, \dots, v_m e v'_1, \dots, v'_m , respectivamente. Vamos supor que a forma restrita a W e a W' é não-degenerada. Então, (v_1, \dots, v_m) e (v'_1, \dots, v'_m) possuem a mesma matriz de Gram se e só se existe $I \in UV$ tal que $Iv_i = v'_i$, $i = 1, \dots, m$. Em outras palavras, as m -uplas em questão classificam-se geometricamente em V através de suas matrizes de Gram.

Demonstração. Sejam M e M' as respectivas matrizes de Gram de (v_1, \dots, v_m) e (v'_1, \dots, v'_m) . É óbvio que $M = M'$ se existe $I \in UV$ tal que $Iv_i = v'_i$. Reciprocamente, suponhamos $M = M'$. Consideremos a aplicação linear $h : \mathbb{C}^m \rightarrow W$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \sum_i \alpha_i v_i$. Definimos $h' : \mathbb{C}^m \rightarrow W'$ de modo análogo.

Suponhamos $\ker h \neq \ker h'$. Logo, sem perda de generalidade, podemos tomar $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ tal que $\sum_i \alpha_i v_i = 0$ e tal que $v' \cong \sum_i \alpha_i v'_i \neq 0$. Como $M = M'$, temos $\langle v', v'_j \rangle = 0$ para todo j . Em outras palavras, a forma restrita a W' é degenerada, uma contradição. Segue que $\ker h = \ker h'$. Agora, é fácil verificar que a aplicação linear $J : W \rightarrow W'$ dada através de $v_i \mapsto v'_i$ para todo $i = 1, \dots, m$ está bem definida e é um isomorfismo métrico. Pelo Teorema de Witt (vide, por exemplo, [KMa]), J se estende a um automorfismo métrico $I \in UV$, $I|_W = J$ ■

2.2.3. Observação. Utilizando o Teorema de Witt, é fácil ver que as matrizes de Gram também classificam geometricamente em V um único vetor isotrópico e um par ordenado de vetores que geram um subespaço bidimensional em que a forma hermitiana restrita é degenerada ■

Concluimos do lema e da observação anteriores que a classificação de m -uplas ordenadas suficientemente genéricas de pontos em $\mathbb{C}PV$, módulo a ação de PUV , é equivalente à classificação de matrizes de Gram de m -uplas ordenadas suficientemente genéricas de vetores em V módulo a ação do toro \mathbb{C}^{*m} dada por $(T, M) \mapsto TMT\bar{T}$, onde $T \in \mathbb{C}^{*m}$ é uma matriz diagonal com entradas em \mathbb{C}^* , \bar{T} é a matriz diagonal cujas entradas são conjugadas às de T e M é uma matriz de Gram de elementos em V .

Em termos de GIT simples, seja $\mathbb{C}[g_{ij}]$ a álgebra polinomial nas variáveis formais $g_{ij} \cong \langle p_i, p_j \rangle$, onde $1 \leq i, j \leq m$ e $p_1, \dots, p_m \in V$. Seja $P \in \mathbb{C}[g_{ij}]$ um monômio. Claramente, para cada $1 \leq k \leq m$, existe um *peso* (l_k, l'_k) , $0 \leq l_k, l'_k \in \mathbb{Z}$, tal que, considerando P como função de p_1, \dots, p_m , temos

$$P(p_1, \dots, cp_k, \dots, p_m) = c^{l_k} \bar{c}^{l'_k} \cdot P(p_1, \dots, p_k, \dots, p_m)$$

para todo $c \in \mathbb{C}$. Diremos que dois monômios $P, P' \in \mathbb{C}[g_{ij}]$ possuem o *mesmo peso* se e só se possuem o mesmo peso para todo $1 \leq k \leq m$.

¹¹É fácil ver que a expressão para $dI(v_p)$ independe da escolha do levantamento \hat{I} .

Sejam $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{C}[g_{ij}]$ monômios de mesmo peso. Seja $U \subset \mathbb{C}\mathbb{P}V \times \dots \times \mathbb{C}\mathbb{P}V$ (m vezes) tal que, para toda m -upla $(p_1, \dots, p_m) \in U$, existe $1 \leq k \leq N$ satisfazendo $P_k(p_1, \dots, p_m) \neq 0$. Portanto, P_1, \dots, P_N determinam, como coordenadas projetivas, uma aplicação $U \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$. Assumindo um análogo do Teorema de Nagata [New] nesta situação simples, podemos tomar um peso apropriado e N suficientemente grande (e U o maximal) de modo que esta aplicação produza todos os invariantes algébricos da m -upla em questão. A função racional $\frac{P_k(p_1, \dots, p_m)}{P_{k'}(p_1, \dots, p_m)}$, definida em todos os pontos de U que não anulam simultaneamente P_k e $P_{k'}$, toma valores em $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A tância, com valores em $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, é um exemplo de invariante desta natureza. No que se segue, introduziremos outros invariantes deste tipo e os utilizaremos, juntamente com o Lema 2.2.2, para classificar determinadas m -uplas genéricas de pontos em $\mathbb{C}\mathbb{P}V$.

Definimos o η -invariante [Gol], a k -tância, o μ -invariante e o \mathbb{X} -invariante [KRe] respectivamente através das expressões

$$(2.2.4) \quad \eta(p_1, p_2, p_3) = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle}, \quad \text{ta}(p_1, \dots, p_k) = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \cdots \langle p_{k-1}, p_k \rangle \langle p_k, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \cdots \langle p_k, p_k \rangle},$$

$$\mu(p_1, p_2, p_3) = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle \langle p_3, p_3 \rangle}{\langle p_1, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle} \quad \text{e} \quad \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_3, p_4 \rangle}{\langle p_1, p_4 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle}.$$

Claramente, consideramos estas funções no sentido projetivo discutido acima: o η -invariante, a k -tância e o \mathbb{X} -invariante tomam valores em $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ e o μ -invariante toma valores em $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$.

2.2.5. Proposição. *Seja (p_1, \dots, p_m) uma m -upla de pontos em $\mathbb{C}\mathbb{P}V$, $m \geq 3$, nem todos pertencentes a uma mesma linha projetiva euclidiana.*

(1) *Se ao menos um dos pontos p_1, \dots, p_m é não-ortogonal aos demais (em particular, tal ponto é não-isotrópico), então a m -upla em questão classifica-se através das assinaturas dos pontos e dos η -invariantes.*

(2) *Se p_1, \dots, p_m são todos não-isotrópicos e, além disso, quaisquer dois pontos consecutivos são não-ortogonais, então a m -upla em questão classifica-se através das assinaturas dos pontos e das k -tâncias, $k = 2, \dots, m$.*

Demonstração. (1) Seja $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que o ponto p_i é não-ortogonal a p_1, \dots, p_m . Podemos supor que $\langle p_j, p_j \rangle = \sigma_j \in \{-1, 0, +1\}$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e que $\langle p_i, p_j \rangle = r_j > 0$ para todo $j \neq i$. Além disso, se p_j é isotrópico, podemos reescolher o representante $p_j \in V$ de modo a obter $r_j = 1$ sem alterar as demais igualdades já estabelecidas. Caso contrário, se p_j é não-isotrópico e $j \neq i$, então r_j calcula-se através do η -invariante $\eta(p_i, p_j, p_j) = \text{ta}(p_i, p_j) = \frac{r_j^2}{\sigma_i \sigma_j}$. Seja $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$. Então, $\langle p_k, p_j \rangle$ se calcula através do η -invariante $\eta(p_i, p_j, p_k) = \frac{r_j r_k}{\sigma_i \langle p_k, p_j \rangle}$ para todo $j \neq i, k$. Resta aplicar o Lema 2.2.2.

(2) Podemos supor que $\langle p_j, p_j \rangle = \sigma_j \in \{-1, +1\}$ para $j = 1, \dots, m$ e que $\langle p_j, p_{j+1} \rangle = r_j > 0$ para $j = 1, \dots, m-1$. Assim, r_j se determina através da 2-tância $\text{ta}(p_j, p_{j+1}) = \frac{r_j^2}{\sigma_j \sigma_{j+1}}$, onde $j = 1, \dots, m-1$. Além disso, $\langle p_{j+k}, p_j \rangle$ se determina através da k -tância

$$\text{ta}(p_j, \dots, p_{j+k}) = \frac{\langle p_j, p_{j+1} \rangle \langle p_{j+1}, p_{j+2} \rangle \cdots \langle p_{j+k-1}, p_{j+k} \rangle \langle p_{j+k}, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle \cdots \langle p_{j+k}, p_{j+k} \rangle} = \frac{r_j r_{j+1} \cdots r_{j+k-1} \langle p_{j+k}, p_j \rangle}{\sigma_j \cdots \sigma_{j+k}}$$

para $j = 1, \dots, m-2$, $k = 2, \dots, m-j$. Resta aplicar o Lema 2.2.2 ■

Nos termos da GIT, as classes de matrizes de Gram correspondendo às m -uplas classificadas na proposição anterior não contêm pontos não semi-estáveis com relação à ação de \mathbb{C}^{*m} . (É possível, em nossos casos, desenvolver um critério análogo ao de Hilbert-Mumford que permita caracterizar pontos estáveis e semi-estáveis de maneira simples.) No entanto, algumas configurações geométricas importantes envolvem pontos não semi-estáveis daquela ação, como ilustrado no item (3) da classificação a seguir. Para classificá-las, é necessário introduzir invariantes que não se expressam em termos algébricos, como o *invariante angular de Cartan*¹² [Car]

$$(2.2.6) \quad \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) \equiv \arg \left(- \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle \right),$$

onde $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}P^1$ são dois a dois não-ortogonais.

2.2.7. Classificação. (1) *Um ponto em $\mathbb{C}P^1$ classifica-se através de sua assinatura.*

(2) *Um par ordenado de pontos em $\mathbb{C}P^1$ classifica-se através das assinaturas dos pontos e da tância entre si.*

(3) *Uma tripla ordenada de pontos em $\mathbb{C}P^1$, nem todos pertencentes a uma mesma linha projetiva euclidiana, classifica-se através das assinaturas dos pontos, das tâncias, da 3-tância, dos μ e η -invariantes e do invariante de Cartan.¹³*

Demonstração. (1) Segue diretamente do Lema 2.2.2 e da Observação 2.2.3.

(2) Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{C}P^1$. Podemos supor que $\langle p_i, p_i \rangle = \sigma_i \in \{-1, 0, +1\}$ para $i = 1, 2$ e que $\langle p_1, p_2 \rangle = \frac{r^2}{\sigma_1 \sigma_2}$. $r \geq 0$. Se p_1, p_2 são ambos não-isotrópicos, então r está determinado através da tância $\text{ta}(p_1, p_2) = \frac{r^2}{\sigma_1 \sigma_2}$. Assim, vamos supor que um dos p_i 's é isotrópico. Logo, $\text{ta}(p_1, p_2) = \infty$ ou a tância $\text{ta}(p_1, p_2)$ não é definida. No primeiro caso, reescolhendo o representante para o ponto isotrópico, podemos supor $r = 1$ sem perder as igualdades $\langle p_i, p_i \rangle = \sigma_i$. No segundo caso, $r = 0$. Resta aplicar o Lema 2.2.2 e a Observação 2.2.3.

(3) Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}P^1$. Seja $\sigma_i \in \{-1, 0, +1\}$ a assinatura de p_i , $i = 1, 2, 3$. Podemos supor

$$(2.2.8) \quad \langle p_i, p_i \rangle = \sigma_i, \quad \langle p_1, p_2 \rangle = r \geq 0, \quad \langle p_2, p_3 \rangle = r' \geq 0, \quad \langle p_3, p_1 \rangle = z \in \mathbb{C},$$

para $i = 1, 2, 3$. Analisemos, separadamente, os vários casos possíveis.

Nenhum ponto isotrópico. Suponhamos que nenhum dos p_i 's seja isotrópico. Claramente, r, r' estão determinados pelas tâncias $\text{ta}(p_1, p_2) = \frac{r^2}{\sigma_1 \sigma_2}$ e $\text{ta}(p_2, p_3) = \frac{r'^2}{\sigma_2 \sigma_3}$. Se $r = 0$ ou $r' = 0$, é fácil ver que (reescolhendo adequadamente o representante $p_1 \in V$ ou o representante $p_3 \in V$) podemos ainda supor $z \geq 0$ sem perder as igualdades estabelecidas anteriormente. Neste caso, z se determina através de $\text{ta}(p_1, p_3) = \frac{z^2}{\sigma_1 \sigma_3}$. Caso contrário, isto é, para $r, r' \neq 0$, z se calcula através da 3-tância $\text{ta}(p_1, p_2, p_3) = \frac{rr'z}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$.

¹²Consideramos a função \arg com valores em $[-\pi, \pi]$.

¹³Mais especificamente, a classificação da tripla em questão envolve, dentre os invariantes contínuos citados: tâncias e k -tâncias, se a tripla não contém pontos isotrópicos; o invariante de Cartan, se a tripla contém apenas pontos isotrópicos distintos; tâncias, μ e η -invariantes se a tripla contém exatamente um ponto isotrópico; η -invariante, se a tripla contém exatamente dois pontos isotrópicos distintos.

Todos os pontos isotrópicos. Vamos supor que todos os p_i 's são isotrópicos. Utilizando o item (2), podemos nos restringir ao caso em que tais pontos são distintos. Portanto, $r, r', z \neq 0$. Reescolhendo os representantes $p_1, p_2, p_3 \in V$, podemos supor $r = r' = 1$ e $|z| = 1$. De fato, reescolhendo adequadamente $p_1, p_3 \in V$, obtemos $r = \langle p_1, p_2 \rangle = 1$ e $r' = \langle p_2, p_3 \rangle = 1$. Agora basta notar que, multiplicando p_1 e p_3 por um complexo não-nulo $c \in \mathbb{C}$ e dividindo p_2 pelo conjugado \bar{c} , não alteramos as igualdades $r = r' = 1$ e multiplicamos $z = \langle p_3, p_1 \rangle$ por $|c|^2$.

Então, z se determina através do invariante de Cartan $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-z)$.

Deste momento até o fim da demonstração, fixemos $i \in \{1, 2, 3\}$. Considerando os índices módulo 3, seja $\sigma_{i+k} \in \{-1, 0, +1\}$ a assinatura de p_{i+k} , onde $k = 0, 1, 2$. Reescolhendo representantes, vamos supor

$$\langle p_{i+k}, p_{i+k} \rangle = \sigma_{i+k}, \quad \langle p_i, p_{i+1} \rangle = r_i \geq 0, \quad \langle p_{i+1}, p_{i+2} \rangle = r_{i+1} \geq 0, \quad \langle p_{i+2}, p_i \rangle = z_i \in \mathbb{C}.$$

Um ponto isotrópico. Suponhamos que exatamente um dos pontos da tripla em questão, digamos p_i , seja isotrópico. Então, r_{i+1} se determina através da tância $\text{ta}(p_{i+1}, p_{i+2}) = \frac{r_{i+1}^2}{\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}}$. Além disso, como na demonstração do item (2), podemos utilizar a tância $\text{ta}(p_i, p_{i+1})$ para determinar se $r_i \neq 0$ e utilizar a tância $\text{ta}(p_{i+2}, p_i)$ para determinar se $z_i \neq 0$.

Se $r_i \neq 0$, podemos supor $r_i = 1$. Assim, por um lado, se $r_{i+1} = 0$, podemos tomar $z_i \geq 0$ e calcular z_i através do μ -invariante $\mu(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) = \frac{\sigma_{i+2}}{z_i^2 \sigma_{i+1}}$. Por outro lado, se $r_{i+1} \neq 0$, então z_i é determinado pelo η -invariante $\eta(p_{i+2}, p_i, p_{i+1}) = \frac{z_i r_{i+1}}{\sigma_{i+2}}$.

Finalmente, se $r_i = 0$ e $z_i \neq 0$, podemos supor $z_i = 1$.

Um ponto não-isotrópico. Suponhamos que exatamente um dos pontos em questão, digamos p_i , seja não-isotrópico. Através da tância $\text{ta}(p_i, p_{i+1})$ (respectivamente, $\text{ta}(p_{i+1}, p_{i+2})$ e $\text{ta}(p_{i+2}, p_i)$), podemos determinar se $r_i \neq 0$ (respectivamente, $r_{i+1} \neq 0$, $z_i \neq 0$). Se exatamente dois dentre os números r_i , r_{i+1} e z_i são nulos, então podemos supor que o terceiro iguala 1. Da mesma forma, se apenas um dentre tais números é nulo, podemos supor que os outros dois igualam 1. Finalmente, se os três números são não-nulos, então podemos supor $r_i = r_{i+1} = 1$ e calcular z_i através do η -invariante $\eta(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) = \frac{z_i}{\sigma_i}$. ■

2.2.9. Corolário. (1) PUV age transitivamente em BV , SV e AV .

(2) PUV age transitivamente no fibrado tangente unitário de BV .

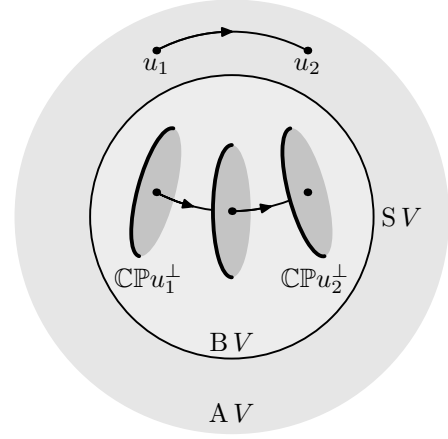
Demonstração. (1) Segue diretamente do item (1) da Classificação 2.2.7.

(2) Sejam $p, p' \in BV$. Podemos supor $\langle p, p \rangle = \langle p', p' \rangle = -1$. Todo vetor unitário tangente a BV em p admite a forma $v_p \rightleftharpoons \langle -, p \rangle \otimes v$, onde $v \in p^\perp$ é tal que $\langle v, v \rangle = 1$ (a métrica em $T_p BV$ é positivo-definida). Analogamente, qualquer vetor unitário tangente a BV em p' admite a forma $v_{p'} \rightleftharpoons \langle -, p' \rangle \otimes v'$, onde $v' \in p'^\perp$ é tal que $\langle v', v' \rangle = 1$. Os pares (p, v) e (p', v') possuem a mesma matriz de Gram. Segue do Lema 2.2.2 que existe $\hat{I} \in UV$ tal que $\hat{I}(p) = p'$ e $\hat{I}(v) = v'$. Pela demonstração do Lema 2.2.1, isto significa que $dI(v_p) = v_{p'}$, onde I é a imagem de \hat{I} em PUV . ■

Interpretações geométricas para invariantes de configurações finitas de pontos são muito úteis no estudo de subgrupos discretos de PUV . A tância é o mais simples dentre os invariantes (contínuos) que consideramos. Com o objetivo de estudar suas interpretações geométricas nas diversas configurações de dois pontos (Proposição 2.2.13), apresentaremos no que se segue uma breve discussão sobre linhas projetivas em $\mathbb{C}P^V$.

Há uma correspondência biunívoca entre pontos e linhas projetivas em $\mathbb{C}P^V$: ao ponto $u \in \mathbb{C}P^V$ associamos a linha projetiva $\mathbb{C}P^u^\perp$. Diremos que u é o *ponto polar*¹⁴ de $\mathbb{C}P^u^\perp$. A natureza de uma linha projetiva é, obviamente, determinada pela assinatura do seu ponto polar:

2.2.10. Observação. Seja $u \in \mathbb{C}P^V$. A linha projetiva $\mathbb{C}P^u^\perp$ é respectivamente esférica, euclidiana, hiperbólica se e só se $u \in BV$, $u \in SV$, $u \in AV$. Assim, BV , SV , AV são respectivamente os *espaços de linhas projetivas* esféricas, euclidianas, hiperbólicas de $\mathbb{C}P^V$ ■



Uma linha projetiva não-euclidiana L possui curvatura seccional (curvatura gaussiana) constante¹⁵ (-4) em seus pontos não-isotrópicos. Este fato segue diretamente da discussão anterior à Observação 1.9.2 (levando-se em conta que escolhemos para a métrica (1.3.3) o sinal negativo). Se L é hiperbólica, a métrica restrita aos discos $L \cap BV$ e $L \cap AV$ é $1/4$ da métrica de Poincaré usual (vide [Bea]). Por esta razão, iremos nos referir a tais discos como *discos de Poincaré*. Por outro lado, a métrica restrita a uma linha projetiva esférica é $-1/4$ da métrica usual da esfera. Como vimos na discussão após a Observação 1.5.4, a métrica restrita a uma linha projetiva euclidiana é nula, mas a geometria das geodésicas em tais linhas é a geometria euclidiana plana usual.

Ao lidar com linhas projetivas, necessitamos apenas da mencionada correspondência entre tais objetos e pontos em $\mathbb{C}P^V$, além do fato de que duas linhas projetivas distintas possuem um (único) ponto de interseção. Conforme veremos no item (1) do lema a seguir, estas propriedades permitem realizar a *projeção* em uma linha projetiva não-euclidiana $\mathbb{C}P^u^\perp$, $u \notin SV$, definida através da aplicação $u(\cdot) : \mathbb{C}P^V \setminus \{u\} \rightarrow \mathbb{C}P^u^\perp$, $p \mapsto {}^u p$.

2.2.11. Lema. (1) *Seja $u \notin SV$. Seja $p \in \mathbb{C}P^V$, $p \neq u$. Temos $\{{}^u p\} = \mathbb{C}P^u^\perp \cap L \setminus \{p, u\}$.*

Sejam $L_1 \ni \mathbb{C}P^{u_1}^\perp$ e $L_2 \ni \mathbb{C}P^{u_2}^\perp$ linhas projetivas distintas. Seja $\{q\} \ni L_1 \cap L_2$.

(2) $\mathbb{C}P^q^\perp = L \setminus \{u_1, u_2\}$.

(3) *Se $L \setminus \{u_1, u_2\}$ é não-euclidiana e $u_1, u_2 \notin SV$, então $\mathbb{C}P^q^\perp \cap L_1 = \{{}^{u_1} u_2\}$ e $\mathbb{C}P^q^\perp \cap L_2 = \{{}^{u_2} u_1\}$.*

(4) $u_1 \in L_2$ se e só se $u_2 \in L_1$. Vamos supor $u_1 \in L_2$, $u_2 \in L_1$ e $u_1, u_2 \notin SV$. Então, $q \notin SV$ e L_1, L_2 são ortogonais em q (no sentido da métrica hermitiana).

Demonstração. (1) e (2) são imediatos.

(3) Basta notar que temos $q \neq u_i$ para $i = 1, 2$: caso contrário, segue do item (2) e da Observação 2.2.10 que $L \setminus \{u_1, u_2\}$ é euclidiana, uma contradição. Logo, $\mathbb{C}P^q^\perp \neq L_i$. Assim, as linhas projetivas $\mathbb{C}P^q^\perp$ e L_i são distintas e, portanto, se interceptam em um único ponto. Agora, o resultado segue facilmente do item (2).

(4) Obviamente, $u_1 \in L_2$ é equivalente a $u_2 \in L_1$. Vamos supor $u_1 \in L_2$, $u_2 \in L_1$ e $u_1, u_2 \notin SV$. Aplicando o critério de Sylvester, é fácil ver que a linha projetiva $L \setminus \{u_1, u_2\}$ é não-euclidiana: u_1, u_2 são ortogonais e não-isotrópicos. Portanto, pelo item (2) e pela Observação 2.2.10, temos $q \notin SV$. Seja $v_{i,q} \ni \langle -, q \rangle \otimes v_i$, $v_i \in q^\perp$, um vetor tangente a L_i em q , $i = 1, 2$. Segue da Proposição 1.2.3 que

¹⁴Segue desta correspondência que, ao classificar geometricamente configurações que contêm linhas projetivas, podemos substituir as linhas projetivas por seus pontos polares. Por exemplo, obtemos diretamente da Classificação 2.2.7 a classificação em $\mathbb{C}P^V$ de uma linha projetiva, de um ponto e uma linha projetiva, de um par e de uma tripla de linhas projetivas, etc.

¹⁵Não há problema algum no fato de a curvatura gaussiana ser negativa quando L é esférica: neste caso, a métrica restrita a L é negativo-definida.

$v_i \in u_i^\perp + \mathbb{C}q$. Utilizando o item (2) e o fato $v_i \in q^\perp$, é fácil ver que temos $v_i \in q^\perp \cap u_i^\perp$. Segue de (3) que $\mathbb{C}Pq^\perp \cap L_1 = \{u_2\}$ e $\mathbb{C}Pq^\perp \cap L_2 = \{u_1\}$, pois u_1, u_2 são ortogonais. Em outras palavras, $q^\perp \cap u_1^\perp = \mathbb{C}u_2$ e $q^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{C}u_1$. Portanto, $\langle v_{1q}, v_{2q} \rangle = -\langle q, q \rangle \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ■

Sejam L_1, L_2 linhas projetivas hiperbólicas distintas. Seja $\{q\} \rightleftharpoons L_1 \cap L_2$. Diremos que L_1, L_2 são respectivamente *concorrentes*, *tangentes*, *ultraparalelas* exatamente quando $q \in BV$, $q \in SV$, $q \in AV$.

2.2.12. Observação. Sejam $u_1, u_2 \in AV$. Seja $L_i \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu_i^\perp$, $i = 1, 2$. Utilizando o item (2) do Lema 2.2.11, a Observação 2.2.10 e a Observação 1.5.4, é fácil verificar que L_1, L_2 são respectivamente concorrentes, tangentes, ultraparalelas exatamente quando $0 \leq \text{ta}(u_1, u_2) < 1$, $\text{ta}(u_1, u_2) = 1$, $\text{ta}(u_1, u_2) > 1$ ■

Finalmente, para obter algumas interpretações geométricas naturais para a tância em alhures, introduzimos a *distância pseudo-Riemanniana* como se segue.

Sejam $p_1, p_2 \in AV$. O comprimento¹⁶ do(s) segmento(s) de geodésica mais curto(s) em $L(p_1, p_2)$ ligando p_1 e p_2 é dado respectivamente pela expressão (1.5.2) se $L(p_1, p_2)$ é esférica e pela expressão (1.5.3) se $L(p_1, p_2)$ é hiperbólica. Para quaisquer $p_1, p_2 \in AV$, definimos a *distância pseudo-Riemanniana* $d_p : AV \times AV \rightarrow [0, \infty)$ entre p_1 e p_2 :

$$d_p(p_1, p_2) \rightleftharpoons \begin{cases} \arccos \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2)}, & \text{se } 0 \leq \text{ta}(p_1, p_2) < 1 \\ \text{arccosh} \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2)}, & \text{se } \text{ta}(p_1, p_2) \geq 1. \end{cases}$$

Observe-se que a distância pseudo-Riemanniana entre pontos contidos em uma linha projetiva euclidiana é nula. Além disso, a distância pseudo-Riemanniana é claramente uma função contínua em seu domínio de definição.¹⁷

Para tratar de modo homogêneo a demonstração de alguns itens da proposição abaixo, denotaremos $\Sigma^+V \rightleftharpoons AV$ e $\Sigma^-V \rightleftharpoons BV$.

2.2.13. Proposição. (1) A tância $\text{ta}(p_1, p_2)$ é uma função monótona crescente da distância Riemanniana para (p_1, p_2) variando em $BV \times BV$ e é uma função monótona crescente (respectivamente, decrescente) da distância pseudo-Riemanniana para (p_1, p_2) variando na região de $AV \times AV$ determinada por $\text{ta}(p_1, p_2) \geq 1$ (respectivamente, $0 \leq \text{ta}(p_1, p_2) \leq 1$).

(2) Sejam $u \in AV$ e $p \in \Sigma^\sigma V$, onde $\sigma \in \{-1, +1\}$. Seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu^\perp$. Se $\sigma = +1$, suponhamos $\text{ta}(p, u) < 1$. Então, $\text{ta}(p, L \cap \Sigma^\sigma V) \rightleftharpoons 1 - \text{ta}(p, u)$ é o mínimo das tâncias entre p e os pontos do disco $L \cap \Sigma^\sigma V$. A projeção ${}^u p$ é o único ponto em $L \cap \Sigma^\sigma V$ que realiza tal mínimo. Além disso, se $p \neq {}^u p$, a geodésica $G(p, {}^u p)$ é ortogonal a L em ${}^u p$, no sentido hermitiano.

(3) Sejam $u_1, u_2 \in AV$. Seja $L_i \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu_i^\perp$, $i = 1, 2$. Suponhamos $\text{ta}(u_1, u_2) > 1$. Então, $\text{ta}(L_1 \cap BV, L_2 \cap BV) \rightleftharpoons \text{ta}(u_1, u_2)$ é o mínimo das tâncias entre os pontos do disco $L_1 \cap BV$ e do disco $L_2 \cap BV$. As projeções ${}^{u_1} u_2 \in L_1 \cap BV$ e ${}^{u_2} u_1 \in L_2 \cap BV$ são os únicos pontos em L_1 e L_2 que realizam tal mínimo. A geodésica $G({}^{u_1} u_2, {}^{u_2} u_1)$ é ortogonal às linhas projetivas L_1, L_2 , no sentido hermitiano.

(4) Sejam $u_1, u_2 \in AV$ tais que $u_1 \neq u_2$. Sejam $L_i \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu_i^\perp$ e $\{q\} \rightleftharpoons L_1 \cap L_2$. Suponhamos $\text{ta}(u_1, u_2) < 1$. Então, o mínimo dos ângulos Riemannianos¹⁸ entre os vetores não-nulos em $T_q L_1$ e em

¹⁶A métrica em pontos não-isotrópicos de uma linha projetiva esférica (hiperbólica) é negativo-definida (positivo-definida). Portanto, para uma linha projetiva esférica, a expressão (1.5.2) fornece, na realidade, o módulo do comprimento do(s) segmento(s) de geodésica mais curto(s) em $L(p_1, p_2)$ ligando p_1 e p_2 .

¹⁷No entanto, não é uma função diferenciável nos pontos de $AV \times AV$ que satisfazem a equação $\text{ta}(p_1, p_2) = 1$.

¹⁸O ângulo Riemanniano $\angle(v_{1q}, v_{2q})$ entre os vetores tangentes não-nulos $v_{1q}, v_{2q} \in T_q BV$, não-orientado e com valores em $[0, \pi]$, é definido através da expressão $\cos \angle(v_{1q}, v_{2q}) = \frac{\text{Re}\langle v_{1q}, v_{2q} \rangle}{\sqrt{\langle v_{1q}, v_{1q} \rangle} \cdot \sqrt{\langle v_{2q}, v_{2q} \rangle}}$.

$T_q L_2$, o qual denotaremos $\angle(L_1, L_2)$, determina-se através da tância pela expressão $\cos^2 \angle(L_1, L_2) = \text{ta}(u_1, u_2)$.

(5) Sejam $u \in BV$ e $p \in AV$. Seja $L \ni \mathbb{C}P u^\perp$. Então, $\text{ta}(p, L) \ni 1 - \text{ta}(p, u)$ é o máximo das tâncias entre p e os pontos da esfera L . A projeção ${}^u p$ é o único ponto que realiza tal máximo. Se $p \neq {}^u p$, a geodésica $G\{p, {}^u p\}$ é ortogonal a L , no sentido hermitiano.

(6) Sejam $u_1, u_2 \in BV$ distintos. Seja $L_i \ni \mathbb{C}P u_i^\perp$, $i = 1, 2$. Então, $\text{ta}(L_1, L_2) \ni \text{ta}(u_1, u_2)$ é o máximo das tâncias entre os pontos da esfera L_1 e da esfera L_2 . As projeções ${}^{u_1} u_2 \in L_1$ e ${}^{u_2} u_1 \in L_2$ são os únicos pontos em L_1 e em L_2 que realizam tal tância. A geodésica $G\{{}^{u_1} u_2, {}^{u_2} u_1\}$ é ortogonal às linhas projetivas L_1, L_2 , no sentido hermitiano.

Demonstração. (1) Segue diretamente da discussão presente na Seção 1.5.

(2) Denotemos $v \ni {}^u p$. Temos

$$(2.2.14) \quad \langle v, v \rangle = \langle p, {}^u p \rangle = \langle p, p \rangle - \frac{\langle p, u \rangle \langle u, p \rangle}{\langle u, u \rangle} = \langle p, p \rangle (1 - \text{ta}(p, u)).$$

Como $\langle p, p \rangle > 0$ e $\text{ta}(p, u) < 1$ se $\sigma = +1$ e $\langle p, p \rangle < 0$ e $\text{ta}(p, u) < 0$ se $\sigma = -1$, obtemos $v \in \Sigma^\sigma V$. Seja w o ponto ortogonal a v em L . Podemos supor $\langle u, u \rangle = 1$, $\langle v, v \rangle = \sigma' \in \{-1, +1\}$ e $\langle w, w \rangle = -\sigma'$. É fácil ver que, na base ortonormal $u, v, w \in V$, o ponto p admite um representante $p = cu + v$, onde $c \in \mathbb{C}$, e qualquer ponto $x \in L \cap \Sigma^\sigma V$ pode ser escrito na forma $x = zw + v$, onde $z \in \mathbb{C}$ e $\langle x, x \rangle = \sigma'(1 - |z|^2)$ tem o mesmo sinal de σ' , isto é, $1 - |z|^2 > 0$. Observando que $\langle p, x \rangle = \sigma'$, obtemos $\text{ta}(p, x) = \frac{1}{\langle p, p \rangle \cdot \sigma'(1 - |z|^2)} > 0$. Esta expressão possui um único mínimo, atingido quando $z = 0$. Em outras palavras, o mínimo das tâncias entre p e os pontos em $L \cap \Sigma^\sigma V$ é dado por $\text{ta}(p, L \cap \Sigma^\sigma V) = \text{ta}(p, {}^u p) = 1 - \text{ta}(p, u)$. Se $p \neq {}^u p$, o fato que a geodésica $G\{p, {}^u p\}$ é ortogonal a L em ${}^u p$ segue dos itens (1) e (4) do Lema 2.2.11.

(3) Denotemos $v_1 \ni {}^{u_1} u_2$ e $v_2 \ni {}^{u_2} u_1$. Utilizando expressões análogas àquela em (2.2.14) e o fato $\text{ta}(u_1, u_2) > 1$, é fácil ver que $v_1, v_2 \in BV$. Seja $\{q\} \ni L_1 \cap L_2$. Pela Observação 2.2.12, temos $q \in AV$. Assim, podemos supor $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = -1$ e $\langle q, q \rangle = 1$. Todo ponto $x \in L_1 \cap BV$ pode ser escrito na forma $x = zq + v_1$, onde $z \in \mathbb{C}$ e $\langle x, x \rangle = |z|^2 - 1 < 0$. Do item (2) desta proposição segue que o mínimo das tâncias entre x e os pontos de $L_2 \cap BV$ é dado por

$$1 - \text{ta}(x, u_2) = 1 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle \langle u_2, v_1 \rangle}{(|z|^2 - 1) \langle u_2, u_2 \rangle} = 1 - \frac{|\langle v_1, u_2 \rangle|^2}{(|z|^2 - 1) \langle u_2, u_2 \rangle} > 0.$$

Claramente, a expressão anterior possui um único mínimo, atingido quando $z = 0$. Agora é fácil ver que $v_1 = {}^{u_1} u_2$ e $v_2 = {}^{u_2} u_1$ realizam o mínimo das tâncias entre os pontos de $L_1 \cap BV$ e de $L_2 \cap BV$. Temos

$$(2.2.15) \quad \text{ta}(v_1, v_2) = \frac{\langle {}^{u_1} u_2, {}^{u_2} u_1 \rangle \langle {}^{u_2} u_1, {}^{u_1} u_2 \rangle}{\langle {}^{u_1} u_2, {}^{u_1} u_2 \rangle \langle {}^{u_2} u_1, {}^{u_2} u_1 \rangle} = \frac{\left\langle \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1, {}^{u_2} u_1 \right\rangle \left\langle \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2, {}^{u_1} u_2 \right\rangle}{\langle u_2, {}^{u_1} u_2 \rangle \langle u_1, {}^{u_2} u_1 \rangle} = \text{ta}(u_1, u_2).$$

Por fim, o fato que a geodésica $G\{{}^{u_1} u_2, {}^{u_2} u_1\}$ é ortogonal às linhas projetivas L_1, L_2 segue dos itens (3) e (4) do Lema 2.2.11.

(4) Denotemos $v_1 \ni {}^{u_1} u_2$ e $v_2 \ni {}^{u_2} u_1$. Segue de $0 \leq \text{ta}(u_1, u_2) < 1$ e de expressões análogas àquela em (2.2.14) que $v_1, v_2 \in AV$. Por (2.2.15), temos $\text{ta}(v_1, v_2) = \text{ta}(u_1, u_2)$. Pela Observação 2.2.12, temos $q \in BV$. Logo, podemos supor $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = a \geq 0$ e $\langle q, q \rangle = -1$. Claramente,

$a^2 = \text{ta}(u_1, u_2)$. Pela Proposição 1.2.3, todo vetor unitário tangente a L_i em q é da forma $t_{iq} \rightleftharpoons \langle -, q \rangle \otimes c_i v_i$, onde $c_i \in \mathbb{C}$ e $|c_i| = 1$ (note-se que, pelo item (3) do Lema 2.2.11, $v_i \in q^\perp$). Obtemos

$$\cos \angle(t_{1q}, t_{2q}) = \text{Re} \langle t_{1q}, t_{2q} \rangle = \text{Re} \langle \langle -, q \rangle \otimes c_1 v_1, \langle -, q \rangle \otimes c_2 v_2 \rangle = a \text{Re} c_1 \bar{c}_2.$$

Portanto, o ângulo Riemanniano entre L_1 e L_2 varia no intervalo $[\arccos(-a), \arccos a]$. O ângulo mínimo é atingido exatamente quando $\text{Re} c_1 \bar{c}_2 = 1$. Temos $\cos^2 \angle(L_1, L_2) = a^2 = \text{ta}(u_1, u_2)$.

(5) Denotemos $v \rightleftharpoons {}^u p$. Seja $w \in L$ o ponto ortogonal a v . Podemos supor $\langle u, u \rangle = -1$ e $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$. É claro que, na base ortonormal $u, v, w \in V$, o ponto p admite um representante $p = cu + v$, onde $c \in \mathbb{C}$ (e $|c| < 1$), e qualquer ponto $x \in L \setminus \{w\}$ pode ser escrito na forma $x = zw + v$, onde $z \in \mathbb{C}$. Temos $\text{ta}(p, x) = \frac{1}{\langle p, p \rangle (|z|^2 + 1)}$. Esta expressão possui um único máximo, atingido quando $z = 0$. Como $\text{ta}(p, w) = 0$, obtemos que o máximo das tâncias entre p e os pontos em L é dado por $\text{ta}(p, L) = \text{ta}(p, {}^u p) = 1 - \text{ta}(p, u)$. Se $p \neq {}^u p$, o fato que a geodésica $G \wr p, {}^u p \wr$ é ortogonal a L em ${}^u p$ segue dos itens (1) e (4) do Lema 2.2.11.

(6) Denotemos $v_1 \rightleftharpoons {}^{u_1} u_2$ e $v_2 \rightleftharpoons {}^{u_2} u_1$. Seja $\{q\} \rightleftharpoons L_1 \cap L_2$. Claramente, podemos supor $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle q, q \rangle = 1$. Todo ponto $x \in L_1 \setminus \{q\}$ pode ser escrito na forma $x = zq + v_1$, onde $z \in \mathbb{C}$. Do item (5) desta proposição segue que o máximo das tâncias entre x e os pontos de L_2 é dado por $1 - \text{ta}(x, u_2) = 1 - \frac{|\langle v_1, u_2 \rangle|^2}{(|z|^2 + 1) \langle u_2, u_2 \rangle} > 1$. Claramente, a expressão anterior possui um único máximo, atingido quando $z = 0$. Além disso, $\text{ta}(q, L_2) = 1 - \text{ta}(q, u_2) = 1$. Agora é fácil ver que $v_1 = {}^{u_1} u_2$ e $v_2 = {}^{u_2} u_1$ realizam o máximo das tâncias entre os pontos de L_1 e de L_2 . Resta aplicar os itens (3) e (4) do Lema 2.2.11. ■

A proposição anterior ilustra alguns fenômenos curiosos, recorrentes quando buscamos interpretações geométricas para invariantes algébricos. Note-se, primeiramente, que a tância não tem um sentido geométrico bem definido. Na proposição, ela indica distâncias (envolvendo tanto pontos quanto linhas projetivas) ou ângulos entre linhas projetivas concorrentes. Além disso, consideremos dois pontos $p_1, p_2 \in BV$. A tância $\text{ta}(p_1, p_2)$ mede a distância entre p_1 e p_2 . Variando um destes pontos até o absoluto, perdemos instantaneamente o conceito de distância. Perfurando o absoluto, a tância em questão começa a medir a distância entre p_1 e a linha projetiva $\mathbb{C}Pp_2^\perp$, mas agora através da expressão $1 - \text{ta}(p_1, p_2)$.

Assim como linhas projetivas, as geodésicas não-euclidianas¹⁹ estão em correspondência biunívoca com determinadas configurações de dois pontos em $\mathbb{C}PV$. Vamos, inicialmente, descrever esta correspondência para o caso hiperbólico.

Seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu^\perp$ uma linha projetiva hiperbólica. Seja $G \rightleftharpoons \mathbb{C}PW \subset L$ uma geodésica, onde $W \subset u^\perp$ é um \mathbb{R} -subespaço, $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$, satisfazendo as condições descritas no início da Seção 1.4. Pelo Lema 1.4.1, temos $u^\perp \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$. Logo, a forma restrita a $W \simeq 1 \otimes W \subset \mathbb{C} \otimes W$ é indefinida não-degenerada. Portanto, G intercepta SV em dois pontos distintos, chamados os *vértices* dessa geodésica. Reciprocamente, dois pontos isotrópicos distintos determinam uma única geodésica que os contém como vértices. Sejam $v_1, v_2 \in SV$ distintos. Por definição, orientamos a geodésica $G \wr v_1, v_2 \wr$ de v_1 para v_2 , passando por BV . Obtemos, deste modo, a bem conhecida

2.2.16. Observação. Geodésicas hiperbólicas orientadas correspondem a pares ordenados de pontos isotrópicos distintos ■

Para descrever a correspondência entre geodésicas esféricas e pares de pontos, necessitaremos do próximo lema.

¹⁹Uma geodésica será dita *hiperbólica* (*esférica*, *euclidiana*) de acordo com a natureza da linha projetiva que a contém.

Seja $D \subset \mathbb{C}PV$. Se D não contém pontos isotrópicos, diremos que D *equiita de um ponto* $p \in \mathbb{C}PV \setminus SV$ caso a tância $\text{ta}(x, p)$ independa de $x \in D$. Por outro lado, diremos que D (mesmo contendo pontos isotrópicos) *equiita de dois pontos* $p_1, p_2 \in \mathbb{C}PV \setminus SV$ se $\vartheta(x, p_1) = \vartheta(x, p_2)$ para todo $x \in D$, onde

$$(2.2.17) \quad \vartheta(q_1, q_2) \rightleftharpoons \frac{\langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle}$$

para $q_1 \in \mathbb{C}PV$ e $q_2 \notin SV$. Note-se que, se $x \notin SV$, então $\vartheta(x, p_1) = \vartheta(x, p_2)$ é equivalente a $\text{ta}(x, p_1) = \text{ta}(x, p_2)$.

2.2.18. Lema. (1) *Sejam $v_1, v_2 \in V$ distintos, de mesma assinatura e tais que a forma restrita a $\mathbb{C}v_1 + \mathbb{C}v_2$ é não-degenerada. Vamos supor que $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle$ e que $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$. Então, $\{\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$ determina uma geodésica em $L \setminus \{v_1, v_2\}$. Se v_1, v_2 são não-isotrópicos, esta geodésica equiita de v_1, v_2 .*

(2) *Seja L uma linha projetiva esférica. Para uma geodésica $G \subset L$, existem exatamente dois pontos distintos $v_1, v_2 \in L$ tais que G equiita de v_i para $i = 1, 2$. Além disso, os pontos v_1, v_2 são ortogonais e a geodésica G equiita de v_1, v_2 . Reciprocamente, dados $v_1, v_2 \in L$ ortogonais, existe uma única geodésica $G \subset L$ que equiita de v_1, v_2 . Esta geodésica é o lugar equitante de v_1, v_2 em L e também equiita de v_i para $i = 1, 2$.*

Demonstração. (1) Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \sigma \in \{-1, 0, +1\}$ e que $\langle v_1, v_2 \rangle = a \in \mathbb{R}$. Assim, o fato de a forma restrita a $\mathbb{C}v_1 + \mathbb{C}v_2$ ser não-degenerada significa, pelo critério de Sylvester, que $a^2 \neq \sigma^2$. Logo, temos $\langle (1-i)v_1 + (1+i)v_2, v_1 + v_2 \rangle = 2(\sigma + a) \neq 0$. Além disso, para $\varepsilon \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2, (1-i)v_1 + (1+i)v_2 \rangle \langle (1-i)v_1 + (1+i)v_2, v_1 + v_2 \rangle \langle v_1 + v_2, \bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \rangle = \\ & = \left(2\sigma \operatorname{Re}(\varepsilon(1-i)) + 2a \operatorname{Re}(\varepsilon(1+i)) \right) (2(\sigma + a)) (2(\sigma + a) \operatorname{Re} \varepsilon) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Segue do Lema 1.4.5 que $\{\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$ determina uma geodésica em $L \setminus \{v_1, v_2\}$. Através de um cálculo direto, obtemos $\vartheta(\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2, v_1) = \vartheta(\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2, v_2)$.

(2) Seja $w_1 \in G$. Pelos argumentos após a Observação 1.4.3, o ponto w_2 ortogonal a w_1 em L pertence a G . Podemos escolher representantes $w_1, w_2 \in V$ tais que $\langle w_i, w_i \rangle = 1$ para $i = 1, 2$, e tais que $\mathbb{C}P(\mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2) = G$ (note-se que existem infinitas geodésicas em L passando por w_1, w_2). É fácil ver que qualquer ponto em G se expressa, não-univocamente,²⁰ na forma $g(\alpha, \beta) = \alpha w_1 + \beta w_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Temos $\langle g(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta) \rangle = 1$.

Qualquer ponto $q \in L \setminus \{w_1, w_2\}$ admite uma forma $q = z^{-1}w_1 + zw_2$, $0 \neq z \in \mathbb{C}$ (podemos obter esta forma para q sem alterar os representantes $w_1, w_2 \in V$). Por um cálculo direto, temos

$$\text{ta}(q, g(\alpha, \beta)) = \frac{1}{\langle q, q \rangle} \left(\frac{\alpha}{z} + z\beta \right) \left(\frac{\alpha}{\bar{z}} + \bar{z}\beta \right) = \frac{1}{\langle q, q \rangle} \left(\frac{\alpha^2}{|z|^2} + \beta^2 |z|^2 + 2\alpha\beta \operatorname{Re} \frac{z}{\bar{z}} \right).$$

A expressão acima independe de α, β exatamente quando $|z| = 1$ e $\operatorname{Re} z/\bar{z} = 0$, isto é, exatamente quando $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ou $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Em outras palavras, G equiita do ponto $v_1 = (1-i)w_1 + (1+i)w_2$ e equiita do ponto $v_2 = (1+i)w_1 + (1-i)w_2$. É claro que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ e que G equiita de v_1, v_2 .

Reciprocamente, sejam $v_1, v_2 \in L$ ortogonais. Podemos supor $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 1$. Pelo item (1) deste lema, a geodésica $\{\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$ equiita de v_1, v_2 . Seja $q \in L$ um ponto que equiita de

²⁰A circunferência $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ recobre G com grau 2.

v_1, v_2 . Claramente, $q \neq v_1, v_2$. Logo, podemos supor $q = z^{-1}v_1 + zv_2$, $0 \neq z \in \mathbb{C}$. É fácil verificar que $\vartheta(q, v_1) = \vartheta(q, v_2)$ significa $|z| = 1$. Em outras palavras, $q \in \{\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$. Finalmente, através de um cálculo direto, obtemos $\text{ta}(\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2, v_1) = \text{ta}(\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2, v_2) = \frac{1}{2}$ ■

Segue do item (2) do lema anterior que uma geodésica esférica G determina univocamente em sua linha projetiva L dois pontos distintos e ortogonais de cada um dos quais ela eqüita. Denominaremos tais pontos os *vértices* de G . Reciprocamente, dois pontos ortogonais $v_1, v_2 \in L$ determinam uma única geodésica $G \rightleftharpoons \{\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$ que os contém como vértices. Orientamos G orientando a circunferência unitária em \mathbb{C} no sentido anti-horário. Obtemos, deste modo, a

2.2.19. Observação. Geodésicas esféricas orientadas correspondem a pares ordenados de pontos ortogonais em alhures.

Segue das Observações 2.2.16 e 2.2.19 que, ao classificar configurações geométricas com relação à ação de PUV , podemos substituir geodésicas hiperbólicas e esféricas pelos seus vértices. Por exemplo, obtemos diretamente da Classificação 2.2.7 a classificação em $\mathbb{C}PV$ de uma geodésica não-euclidiana (isto é, geodésicas hiperbólicas e esféricas são geometricamente únicas), de uma geodésica não-euclidiana e um ponto, de uma geodésica não-euclidiana e uma linha projetiva, etc.

O Lema 2.2.18 permite reescrever, no caso de uma geodésica esférica, as equações da geodésica e dos seus espaços tangentes presentes no Lema 1.4.5. Enquanto o invariante de Cartan participa da equação da geodésica envolvendo dois de seus pontos não-ortogonais, o μ -invariante permite descrever uma geodésica esférica em termos dos seus vértices (ortogonais):

2.2.20. Lema. *Seja G uma geodésica esférica com vértices $v_1, v_2 \in AV$. Seja L a linha projetiva de G .*

(1) G é dada em L pela equação $b'(x, v_1, v_2) \rightleftharpoons \frac{\langle x, v_1 \rangle \langle v_1, x \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} - \frac{\langle x, v_2 \rangle \langle v_2, x \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = 0$. Em outras palavras, $x \in L$ pertence a G se e só se $\mu(x, v_1, v_2) = \frac{\langle x, v_1 \rangle \langle v_1, x \rangle \langle v_2, v_2 \rangle}{\langle x, v_2 \rangle \langle v_2, x \rangle \langle v_1, v_1 \rangle} = 1$.

(2) Um vetor $\varphi \in T_g L$, com $\hat{\varphi} : \mathbb{C}g \rightarrow V$, é tangente a $G \ni g$ se e só se

$$t'(\varphi, g, v_1, v_2) \rightleftharpoons t'(\hat{\varphi}(g), g, v_1, v_2) \rightleftharpoons \frac{\langle \hat{\varphi}(g), v_1 \rangle \langle v_1, g \rangle + \langle g, v_1 \rangle \langle v_1, \hat{\varphi}(g) \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} - \frac{\langle \hat{\varphi}(g), v_2 \rangle \langle v_2, g \rangle + \langle g, v_2 \rangle \langle v_2, \hat{\varphi}(g) \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = 0.$$

Demonstração. (1) Vamos supor $\langle v_i, v_i \rangle = \frac{1}{2}$. Pelo item (1) do Lema 2.2.18, temos $G = \{\bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$. Assim, tomemos em G os pontos $p_1 \rightleftharpoons v_1 + v_2$ e $p_2 \rightleftharpoons (1 - i)v_1 + (1 + i)v_2$. Temos $\langle p_1, p_2 \rangle = 1$. Seja $x \in L$. Pelo Lema 1.4.5, $x \in G$ se e só se $\text{Im} \langle x, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, x \rangle = 0$. Por um cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle x, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, x \rangle &= \text{Im} \langle x, v_1 + v_2 \rangle \langle (1 - i)v_1 + (1 + i)v_2, x \rangle = \\ &= \text{Im} \left(\langle x, v_1 \rangle + \langle x, v_2 \rangle \right) \left(\langle v_1, x \rangle + \langle v_2, x \rangle + i(\langle v_2, x \rangle - \langle v_1, x \rangle) \right) = \\ &= \text{Im} i \left(\langle x, v_1 \rangle \langle v_2, x \rangle - \langle x, v_2 \rangle \langle v_1, x \rangle + \langle x, v_2 \rangle \langle v_2, x \rangle - \langle x, v_1 \rangle \langle v_1, x \rangle \right) = \langle x, v_2 \rangle \langle v_2, x \rangle - \langle x, v_1 \rangle \langle v_1, x \rangle. \end{aligned}$$

(2) A demonstração deste item é análoga à do item anterior ■

Geodésicas euclidianas não correspondem a uma configuração finita de pontos. No entanto, um par ordenado de pontos não-isotrópicos distintos cuja tância é 1 determina uma única geodésica euclidiana

orientada. Pelo item (2) da Classificação 2.2.7, pares desta natureza são geometricamente únicos. Segue que, assim como nos casos hiperbólico e esférico, PUV age transitivamente no espaço de geodésicas euclidianas.

Apresentaremos, no que se segue, interpretações geométricas para invariantes de três pontos em alguns casos interessantes. (Um outro caso importante pode ser encontrado em [AGG], Seção 4, Teorema 4.2, onde o η -invariante de uma tripla contendo dois pontos isotrópicos distintos e um ponto em AV não-ortogonal aos demais caracteriza um par de bissetores (vide Seção 2.3) com uma fatia em comum: neste caso, o invariante η mede a distância entre as espinhas complexas dos bissetores envolvidos e também um determinado ângulo entre as espinhas reais dos mesmos.)

Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \overline{BV}$. (Como definido na Introdução, $\overline{BV} = BV \cup SV$.) Por *triângulo geodésico orientado* com vértices p_1, p_2, p_3 entenderemos o conjunto $\Delta(p_1, p_2, p_3) \rightleftharpoons \bigcup_{i=1}^3 G[p_i, p_{i+1}]$, onde $G[p_i, p_{i+1}]$

denota o segmento de geodésica contido em BV ligando p_i e p_{i+1} e orientado de p_i para p_{i+1} (consideramos o índice i módulo 3). Diremos que um triângulo geodésico é (*complexo*) *plano* se os seus vértices pertencem a uma mesma linha projetiva.

Seja L uma linha projetiva hiperbólica (respectivamente, esférica). Para $p \in L \setminus SV$, o espaço tangente $T_p L$ é complexo unidimensional e está munido de uma forma hermitiana positivo-definida (respectivamente, negativo-definida). Logo, podemos medir o ângulo orientado de $v_{1p} \in T_p L$ para $v_{2p} \in T_p L$, no sentido anti-horário, através da expressão²¹ $\angle(v_{1p}, v_{2p}) = \text{Arg}\langle v_{2p}, v_{1p} \rangle$. (Algumas vezes, utilizaremos também o ângulo orientado de v_{1p} para v_{2p} definido através da expressão $\angle(v_{1p}, v_{2p}) = \arg\langle v_{2p}, v_{1p} \rangle$.)

Como anteriormente, denotaremos $\Sigma^+ V \rightleftharpoons AV$ e $\Sigma^- V \rightleftharpoons BV$.

2.2.21. Proposição. (1) *Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{CPV}$ distintos dois a dois. Então, p_1, p_2, p_3 pertencem a uma mesma linha projetiva se e só se (consideramos os índices i módulo 3)*

(a) $p_1, p_2, p_3 \notin SV$ e $\sum_{i=1}^3 \text{ta}(p_i, p_{i+1}) = 1 + 2 \text{Re ta}(p_1, p_2, p_3)$ ou

(b) $p_1, p_2, p_3 \in SV$ e $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \pm \frac{\pi}{2}$ ou

(c) $p_i \in SV$ para exatamente um $i \in \{1, 2, 3\}$, $\langle p_i, p_{i+2} \rangle \neq 0$ e $\mu(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) + 1 = 2 \text{Re } \eta(p_i, p_{i+1}, p_{i+2})$ ou

(d) $p_i \in SV$ para exatamente um $i \in \{1, 2, 3\}$ e $\langle p_i, p_{i+1} \rangle = \langle p_i, p_{i+2} \rangle = 0$ ou

(e) $p_i \notin SV$ para exatamente um $i \in \{1, 2, 3\}$ e $\text{Re } \eta(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) = \frac{1}{2}$.

(2) *Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \overline{BV}$ distintos e pertencentes a uma mesma linha projetiva L . Então, a área orientada do triângulo plano $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ é dada por $\text{Área } \Delta(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$.*

(3) *Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \overline{BV}$ distintos. Seja u_i o ponto polar da linha projetiva $L \setminus \{u_i, u_{i+1}\}$. Então, os triângulos planos $\Delta({}^{u_2}p_1, p_2, p_3)$, $\Delta(p_1, {}^{u_3}p_2, p_3)$ e $\Delta(p_1, p_2, {}^{u_1}p_3)$ possuem a mesma área orientada. Além disso, se $p_1, p_2, p_3 \in BV$ ou se $p_1, p_2, p_3 \in SV$, então esta área e a tância entre os vértices determinam geometricamente o triângulo orientado $\Delta(p_1, p_2, p_3)$.*

(4) *Sejam $p_1, p_2 \in \overline{BV}$ distintos. Seja $q \in BV$, $q \neq p_i$. O ângulo Riemanniano (não-orientado) $\angle p_1 q p_2$ entre $G[q, p_1]$ e $G[q, p_2]$ em q é dado através da expressão*

$$\cos \angle p_1 q p_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_1, q)}} \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_2, q)}}} \text{Re} \left(1 - \frac{1}{\eta(q, p_1, p_2)} \right).$$

²¹ Consideramos a função Arg com valores em $[0, 2\pi]$.

Se p_1, q, p_2 pertencem a uma mesma linha projetiva, então o ângulo em q , orientado de $G[q, p_1]$ para $G[q, p_2]$ no sentido anti-horário, é dado por $\angle p_1 q p_2 = \text{Arg} \left(1 - \frac{1}{\eta(q, p_1, p_2)} \right)$.

(5) Seja $p \in \mathbb{C}P^V \setminus SV$ um ponto cuja assinatura é σ_1 . Seja G uma geodésica hiperbólica cujos vértices são $v_1, v_2 \in SV$ e cuja linha projetiva é $\mathbb{C}P^u^\perp$. Suponhamos ${}^u p \neq v_i, i = 1, 2$. Seja $\sigma_2 \in \{-1, +1\}$. Definimos

$$\text{ta}(p, G \cap \Sigma^{\sigma_2} V) \Rightarrow \text{Re} \eta(p, v_1, v_2) + \sigma_1 \sigma_2 |\eta(p, v_1, v_2)|.$$

Então, $\text{ta}(p, G \cap \Sigma^{\sigma_2} V)$ é o mínimo (respectivamente, máximo) das tâncias entre p e os pontos de $G \cap \Sigma^{\sigma_2} V$ se $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ (respectivamente, $\sigma_1 \sigma_2 = -1$). Existe um único ponto $g \in G \cap \Sigma^{\sigma_2} V$ que realiza tal mínimo (respectivamente, máximo). Se $p \notin G$ e $\langle p, g \rangle \neq 0$, então a geodésica $G \setminus p, g$ é ortogonal a G em g , no sentido (pseudo-)Riemanniano.

(6) Seja $p \in \mathbb{C}P^V \setminus SV$. Seja G uma geodésica esférica cujos vértices são $v_1, v_2 \in AV$ e cuja linha projetiva é $L \Rightarrow \mathbb{C}P^u^\perp$. Se ${}^u p = v_i$ para algum $i = 1, 2$, então G equiita de p . Vamos supor ${}^u p \neq v_i$. Neste caso,

$$\text{ta}_{\min}^{\max}(p, G) \Rightarrow \frac{1}{2} (\text{ta}(p, v_1) + \text{ta}(p, v_2)) \pm \sqrt{\text{ta}(p, v_1) \cdot \text{ta}(p, v_2)}$$

fornece o máximo e o mínimo das tâncias entre p e os pontos de G . Existem únicos pontos $g_1, g_2 \in G$ que realizam, respectivamente, tal máximo e tal mínimo. Se $p \notin G$ e $\langle p, g_i \rangle \neq 0, i = 1, 2$, então a geodésica $G \setminus p, g_i$ é ortogonal a G em g_i , no sentido pseudo-Riemanniano.

Demonstração. (1) É uma aplicação direta do critério de Sylvester. Considerando a matriz de Gram M para representantes $p_1, p_2, p_3 \in V$ quaisquer, temos $\det M = \langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle \langle p_3, p_3 \rangle + 2 \text{Re} \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle - \sum_{i=1}^3 \langle p_i, p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1}, p_i \rangle \langle p_{i+2}, p_{i+2} \rangle$. O fato que p_1, p_2, p_3 pertencem a uma mesma linha projetiva significa que $\det M = 0$. Resta verificar, por um cálculo direto, que esta última condição se reduz àquelas indicadas em (a), (b), (c), (d) e (e).

(2) Suponhamos, inicialmente, que $p_i \notin SV$. Seja $v_{p_1} \in T_{p_1} BV$ um vetor não-nulo ortogonal a L em p_1 . Transportamos paralelamente v_{p_1} ao longo do segmento de geodésica $G[p_1, p_2]$, depois ao longo do segmento $G[p_2, p_3]$ e, finalmente, ao longo de $G[p_3, p_1]$, obtendo um vetor (ortogonal a L em p_1) $v'_{p_1} \in T_{p_1} BV$. Utilizando repetidas vezes o Corolário 1.7.6, é fácil verificar que

$$v'_{p_1} = \frac{\langle p_1, p_3 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle \langle p_3, p_3 \rangle \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2) \text{ta}(p_2, p_3) \text{ta}(p_3, p_1)}} v_{p_1}.$$

O ângulo orientado de v_{p_1} para v'_{p_1} , tomado no intervalo $[-\pi, \pi]$, é uma medida aditiva de triângulos. Portanto, é proporcional à área orientada do triângulo $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. O ângulo em questão é $\angle(v_{p_1}, v'_{p_1}) = \arg \langle v'_{p_1}, v_{p_1} \rangle = \arg \left(- \langle p_1, p_3 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle \right)$. Esta fórmula se estende para pontos isotrópicos. Assim, para determinar a constante de proporcionalidade entre o ângulo calculado e a área do triângulo $\Delta(p_1, p_2, p_3)$, podemos supor $p_i \in SV$ (isto é, podemos supor que o triângulo em questão é *ideal*). Neste caso, é um fato bem conhecido²² em geometria hiperbólica plana que, para $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ orientado no sentido anti-horário, temos $\text{Área} \Delta(p_1, p_2, p_3) = \frac{\pi}{4}$ (lembramos que a métrica em uma linha

²²O fato pode ser demonstrado diretamente, por integração. Segue-se uma demonstração utilizando o Teorema de Gauss-Bonnet (vide [Che]): temos $2\pi\chi(\Delta) = \sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial\Delta} \kappa_g ds + \int_{\Delta} K dA$, onde $\chi(\Delta) = 1$ é a característica de Euler do triângulo $\Delta = \Delta(p_1, p_2, p_3)$, $\alpha_i = 0$ são os ângulos de Δ , $\kappa_g = 0$ é a curvatura geodésica dos segmentos de geodésica que compõem o bordo $\partial\Delta$ e $K = -4$ é a curvatura gaussiana. Portanto, $2\pi = 3\pi - 4 \text{Área} \Delta$, de onde segue que $\text{Área} \Delta = \frac{\pi}{4}$.

projetiva hiperbólica tem curvatura constante -4). Identifiquemos o disco $L \cap \overline{BV}$ com o disco unitário em \mathbb{C} utilizando as coordenadas projetivas $[1 : z]$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$. Considerando o triângulo ideal orientado no sentido anti-horário cujos vértices são $p_1 \rightleftharpoons [1 : 1]$, $p_2 \rightleftharpoons [1 : i]$ e $p_3 \rightleftharpoons [1 : -1]$, temos $\arg(-\langle p_1, p_3 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle) = -\frac{\pi}{2}$. Portanto, o fator de proporcionalidade procurado é $-\frac{1}{2}$, e o resultado segue.

(3) O fato que os triângulos planos $\Delta({}^{u_2}p_1, p_2, p_3)$, $\Delta(p_1, {}^{u_3}p_2, p_3)$ e $\Delta(p_1, p_2, {}^{u_1}p_3)$ possuem a mesma área segue diretamente do item anterior e da seguinte simples observação: $\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle = \langle {}^{u_2}p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, {}^{u_2}p_1 \rangle = \langle p_1, {}^{u_3}p_2 \rangle \langle {}^{u_3}p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, {}^{u_1}p_3 \rangle \langle {}^{u_1}p_3, p_1 \rangle$.

Para demonstrar o restante do item, suponhamos inicialmente que nenhum dos p_i 's é isotrópico. Neste caso, podemos supor que (p_1, p_2, p_3) tem a matriz de Gram indicada em (2.2.8), com $\sigma_i = -1$ e $r, r' > 0$. É claro que r, r' se determinam através das tâncias $\text{ta}(p_1, p_2)$ e $\text{ta}(p_2, p_3)$. Além disso, z se determina pela área $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-z)$ e pela tância $\text{ta}(p_1, p_3) = |z|^2$. Por outro lado, se todos os p_i 's são isotrópicos, basta aplicar o parágrafo correspondente da demonstração da Classificação 2.2.7.

(4) É um cálculo direto. Pelo Lema 1.7.1, o vetor $t_{i,q} \rightleftharpoons \text{Tn}(p_1^q, {}^q p_1)(q) = \langle -, q \rangle \otimes \frac{{}^q p_i}{\langle p_i, q \rangle}$ é tangente à geodésica $G[q, p_i]$ em q . Temos

$$\langle t_{i,q}, t_{i,q} \rangle = -\frac{\langle q, q \rangle}{\langle p_i, q \rangle \langle q, p_i \rangle} \langle {}^q p_i, {}^q p_i \rangle = -\frac{\langle q, q \rangle \langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_i, q \rangle \langle q, p_i \rangle} (1 - \text{ta}(p_i, q)) = 1 - \frac{1}{\text{ta}(p_i, q)}$$

e

$$\langle t_{2,q}, t_{1,q} \rangle = -\frac{\langle q, q \rangle}{\langle p_2, q \rangle \langle q, p_1 \rangle} \langle {}^q p_2, p_1 \rangle = -\frac{\langle q, q \rangle}{\langle p_2, q \rangle \langle q, p_1 \rangle} \left(\langle p_2, p_1 \rangle - \frac{\langle p_2, q \rangle \langle q, p_1 \rangle}{\langle q, q \rangle} \right) = 1 - \frac{1}{\eta(q, p_1, p_2)}.$$

Os resultados seguem diretamente das fórmulas acima.

(5) Podemos supor $\langle u, u \rangle = 1$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$. Como ${}^u p \neq v_i$, é fácil ver que na base $u, v_1, v_2 \in V$ o ponto p admite um representante $p = c_1^{-1}v_1 + \sigma_1 c_1 v_2 + c_2 u$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0$. Reescolhendo os representantes $u, v_1, v_2 \in V$ (por exemplo, multiplicamos v_1 por $|c_1|$, dividimos v_2 por $|c_1|$ e multiplicamos u por um complexo unitário δ tal que $\delta c_2 \geq 0$) podemos obter $p = \bar{\varepsilon} v_1 + \sigma_1 \varepsilon v_2 + r u$, onde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$ e $r \geq 0$, sem alterar as igualdades já estabelecidas. Além disso, todo ponto em $G \cap \Sigma^{\sigma_2} V$ se expressa univocamente na forma $g(\alpha) \rightleftharpoons \alpha^{-1}v_1 + \sigma_2 \alpha v_2$ com $\alpha > 0$ e $\langle g(\alpha), g(\alpha) \rangle = \sigma_2$. Observando que $\langle p, g(\alpha) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1 \varepsilon}{\alpha} + \sigma_2 \bar{\varepsilon} \alpha \right)$ e que $\langle p, p \rangle = \sigma_1 |\langle p, p \rangle|$, obtemos

$$(2.2.22) \quad \text{ta}(p, g(\alpha)) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4 |\langle p, p \rangle|} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \text{Re} \varepsilon^2 \right).$$

Logo, se $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ (respectivamente, $\sigma_1 \sigma_2 = -1$), a função $\text{ta}(p, g(\alpha))$ possui um único mínimo (respectivamente, máximo), atingido quando $\alpha = 1$. Em outras palavras, $g \rightleftharpoons v_1 + \sigma_2 v_2$ realiza o valor mínimo (respectivamente, máximo) das tâncias entre p e os pontos de $G \cap \Sigma^{\sigma_2} V$. Segue de $\eta(p, v_1, v_2) = \frac{\varepsilon^2}{2 |\langle p, p \rangle|}$ que $\text{ta}(p, G \cap \Sigma^{\sigma_2} V) = \text{Re} \eta(v_1, v_2, p) + \sigma_1 \sigma_2 |\eta(v_1, v_2, p)|$.

Para provar a última afirmação do item, suponhamos $p \neq g$ e $\langle p, g \rangle \neq 0$. Seja $w_g \rightleftharpoons \langle -, g \rangle \otimes w$, $w \in g^\perp$, um vetor tangente a $G \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$ em g . Como $\langle v_1, g \rangle = \langle v_1, v_1 + \sigma_2 v_2 \rangle = \frac{1}{2} \sigma_2$, temos $G \setminus \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{CP}(\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}g)$. Logo, segue da Proposição 1.2.3 que $w \in \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}g + \mathbb{C}g$. Portanto, $w \in \mathbb{R}^g v_1$. Por outro lado, seja $w'_g \rightleftharpoons \langle -, g \rangle \otimes w'$, $w' \in g^\perp$, um vetor tangente a $G \setminus \langle p, g \rangle$ em g .

Suponhamos $\sigma_1\sigma_2 = 1$, isto é, $\sigma_1 = \sigma_2$. Neste caso,

$$0 \neq \langle p, g \rangle = \langle \bar{\varepsilon}v_1 + \sigma_1\varepsilon v_2 + ru, v_1 + \sigma_2v_2 \rangle = \frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_1 + \bar{\varepsilon}\sigma_2) = \sigma_1 \operatorname{Re} \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Logo, $G \wr p, g \wr = \mathbb{CP}(\mathbb{R}p + \mathbb{R}g)$. Daí segue que $w' \in \mathbb{R}p + \mathbb{R}g + \mathbb{C}g$, isto é, $w' \in \mathbb{R}^g p$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle w_g, w'_g \rangle &= -\langle g, g \rangle \langle w, w' \rangle = -\sigma_2 \langle w, w' \rangle \sim \langle {}^g v_1, p \rangle \sim \\ &\sim \langle v_1 - \sigma_2 v_2, \bar{\varepsilon}v_1 + \sigma_1\varepsilon v_2 + ru \rangle = \frac{1}{2}(\sigma_1\bar{\varepsilon} - \sigma_2\varepsilon) = -\sigma_1 i \operatorname{Im} \varepsilon, \end{aligned}$$

onde \sim significa \mathbb{R} -proporcionalidade. Portanto, $\operatorname{Re} \langle w_g, w'_g \rangle = 0$.

Suponhamos $\sigma_1\sigma_2 = -1$, isto é, $\sigma_1 = -\sigma_2$. Neste caso, $0 \neq \langle ip, g \rangle = \frac{i}{2}(\varepsilon\sigma_1 + \bar{\varepsilon}\sigma_2) = -\sigma_1 \operatorname{Im} \varepsilon \in \mathbb{R}$. Portanto, $G \wr p, g \wr = \mathbb{CP}(\mathbb{R}ip + \mathbb{R}g)$. Segue que $w' \in \mathbb{R}ip + \mathbb{R}g + \mathbb{C}g$, isto é, $w' \in \mathbb{R}^g(ip)$. Temos $\langle w_g, w'_g \rangle \sim \langle {}^g v_1, ip \rangle \sim -\frac{i}{2}(\sigma_1\bar{\varepsilon} - \sigma_2\varepsilon) = -\sigma_1 i \operatorname{Re} \varepsilon$. Obviamente, $\operatorname{Re} \langle w_g, w'_g \rangle = 0$.

(6) Seja σ a assinatura de p . Podemos supor $\langle u, u \rangle = -1$ e $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$. Pelo Lema 2.2.18, temos que $g(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2$, onde $\varepsilon \in \mathbb{C}$ e $|\varepsilon| = 1$, lista todos os pontos da geodésica G . Claramente, $\langle g(\varepsilon), g(\varepsilon) \rangle = 1$.

Se ${}^u p = v_i$, então a tância $\operatorname{ta}(p, g(\varepsilon)) = \operatorname{ta}({}^u p, g(\varepsilon)) = \operatorname{ta}(v_i, g(\varepsilon))$. Logo, segue do Lema 2.2.18 que a geodésica G equiita de p .

Vamos supor ${}^u p \neq v_i$, $i = 1, 2$. Neste caso, p admite um representante da forma $p = c_1^{-1}v_1 + c_1v_2 + c_2u$, para $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $c_1 \neq 0$. Reescolhendo os representantes $v_1, v_2, u \in V$ (por exemplo, multiplicamos v_1 por um complexo unitário δ tal que $\delta \frac{1}{c_1} > 0$, dividimos v_2 por δ e multiplicamos u por um complexo unitário δ' tal que $\delta'c_2 \geq 0$), podemos obter $p = \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2 + ru$, onde $\alpha > 0$ e $r \geq 0$, sem alterar as igualdades já estabelecidas. É fácil verificar, por um cálculo direto, que $\operatorname{ta}(p, g(\varepsilon)) = \frac{\sigma}{4|\langle p, p \rangle|} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2 + 2 \operatorname{Re} \varepsilon^2 \right)$.

Portanto, $\operatorname{ta}(p, g(\varepsilon))$ possui dois valores extremos, atingidos quando $\varepsilon = \pm 1$ e $\varepsilon = \pm i$. Em outras palavras, se $\sigma = +1$ (respectivamente, $\sigma = -1$), o ponto $g_1 = v_1 + v_2$ realiza o máximo (respectivamente, mínimo) das tâncias entre p e os pontos de G e o ponto $g_2 = i(v_2 - v_1)$ realiza o mínimo (respectivamente, máximo) de tais tâncias. Segue das igualdades $\operatorname{ta}(p, v_1) = \frac{\sigma}{2|\langle p, p \rangle|} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$ e $\operatorname{ta}(p, v_2) = \frac{\sigma}{2|\langle p, p \rangle|} \cdot \alpha^2$ que

$$\operatorname{ta}_{\min}^{\max}(p, G) = \frac{\operatorname{ta}(p, v_1) + \operatorname{ta}(p, v_2)}{2} \pm \sqrt{\operatorname{ta}(p, v_1) \cdot \operatorname{ta}(p, v_2)}.$$

Provemos a última afirmação do item. É fácil ver que $\frac{1}{\sqrt{2}}(g_1 + g_2) \in G$. Disto, e do fato $\langle g_1 + g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_1 \rangle \in \mathbb{R}$ segue que $G = \mathbb{CP}(\mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}(g_1 + g_2)) = \mathbb{CP}(\mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2)$. Seja $w_{g_j} = \langle -, g_j \rangle \otimes w$, $w \in g_j^\perp$, um vetor tangente a G em g_j . Pela Proposição 1.2.3, temos $w \in \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}g_2 + \mathbb{C}g_j$, isto é, $w \in \mathbb{R}^{g_1}g_2 = \mathbb{R}g_2$ para $j = 1$ e $w \in \mathbb{R}^{g_2}g_1 = \mathbb{R}g_1$ para $j = 2$. Além disso, temos $0 \neq \langle p, g_1 \rangle \in \mathbb{R}$ e $0 \neq \langle ip, g_2 \rangle \in \mathbb{R}$, ou seja, $G \wr p, g_1 \wr = \mathbb{CP}(\mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1)$ e $G \wr p, g_2 \wr = \mathbb{CP}(\mathbb{R}ip + \mathbb{R}g_2)$. Seja $w'_{g_j} = \langle -, g_j \rangle \otimes w'$, $w' \in g_j^\perp$, um vetor tangente a $G \wr p, g_j \wr$ em g_j . Temos $w' \in \mathbb{R}p + \mathbb{R}g_1 + \mathbb{C}g_1$, isto é, $w' \in \mathbb{R}^{g_1}p$ se $j = 1$ e $w' \in \mathbb{R}ip + \mathbb{R}g_2 + \mathbb{C}g_2$, ou seja, $w' \in \mathbb{R}^{g_2}(ip)$ se $j = 2$. Como $\langle g_2, {}^{g_1}p \rangle = \langle g_2, p \rangle \in i\mathbb{R}$ e $\langle g_1, {}^{g_2}(ip) \rangle = \langle g_1, ip \rangle \in i\mathbb{R}$, obtemos $\operatorname{Re} \langle w_j, w'_j \rangle = 0$ ■

2.2.23. Observação. Podemos aplicar a correspondência entre pontos e linhas projetivas aos itens (5) e (6) da proposição anterior para calcular tâncias entre geodésicas e linhas projetivas (este ponto de vista foi utilizado, por exemplo, em [San]). Para ilustrar, seja G uma geodésica hiperbólica com vértices $v_1, v_2 \in SV$ e seja $u \in AV$. Então, a tância mínima entre um ponto $g \in G \cap BV$ e os pontos de $\mathbb{C}P u^\perp \cap BV$ é $1 - \operatorname{ta}(g, u)$, pelo item (2) da Proposição 2.2.13. (Note-se que $\operatorname{ta}(g, u) \leq 0$.) Pelo

item (5) da Proposição 2.2.21, a tância máxima entre u e os pontos de $G \cap BV$ é dada por $\operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2) - |\eta(p, v_1, v_2)|$. Segue que

$$\operatorname{ta}(\mathbb{C}P u^\perp \cap BV, G \cap BV) \Leftrightarrow 1 - \operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2) + |\eta(p, v_1, v_2)|$$

é a tância mínima entre (as partes negativas) da geodésica e da linha projetiva em questão. Claramente, um raciocínio semelhante pode ser aplicado para os demais casos, envolvendo geodésicas e linhas projetivas de outras naturezas ■

Como vimos, as demonstrações do Lema 2.2.18 e da Proposição 2.2.21 baseiam-se simplesmente na escolha de bases para o espaço vetorial V que sejam adequadas à descrição de várias situações envolvendo geodésicas e combinações de pontos e geodésicas em $\mathbb{C}PV$. Para referências futuras, colecionamos abaixo todas as bases utilizadas nas referidas demonstrações, bem como apresentamos outras que abragem os demais casos, ainda não utilizados.

2.2.24. Bases. *Seja $p \in \mathbb{C}PV$. Seja $G \subset \mathbb{C}PV$ uma geodésica. Seja $L \Leftrightarrow \mathbb{C}P u^\perp$ a linha projetiva de G .*

(1) *Vamos supor $u \in AV$ e $u \neq p$. Sejam v_1, v_2 os vértices da geodésica hiperbólica G . Suponhamos, inicialmente, que ${}^u p \neq v_1, v_2$. Então, existem representantes $u, v_1, v_2, p \in V$ tais que a matriz de Gram da base $u, v_1, v_2 \in V$ e as expressões para p e $G \setminus \{v_1, v_2\}$ nesta base são dadas, respectivamente, por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \bar{\varepsilon}v_1 \pm \varepsilon v_2 + ru, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1, r \geq 0,$$

$$g_\pm(\alpha) = \alpha^{-1}v_1 \pm \alpha v_2, \quad \alpha > 0, \quad \langle g_\pm(\alpha), g_\pm(\alpha) \rangle = \pm 1, \quad g_+(\alpha) \in AV, \quad g_-(\alpha) \in BV.$$

Os números ε^2 e r têm significado geométrico. De fato, por um lado, se p é não-isotrópico e σ é a assinatura de p , então

$$(2.2.25) \quad \varepsilon^2 = \pm \sigma \cdot \frac{\eta(p, v_1, v_2)}{|\eta(p, v_1, v_2)|} \quad e \quad r^2 = \sigma \cdot \frac{\operatorname{ta}(p, u)}{2|\eta(p, v_1, v_2)|} = \sigma \cdot \frac{1 - 2\operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2)}{2|\eta(p, v_1, v_2)|}.$$

Por outro lado, se p é isotrópico, então $\arg(\mp \varepsilon^2) = \mathbb{A}(p, v_1, v_2)$ e $r^2 = \operatorname{Re}(\mp \varepsilon^2)$.

Se ${}^u p = v_i$ para $i = 1$ ou $i = 2$, então existem representantes $p, u, v_1, v_2 \in V$ para os quais são válidas todas as expressões acima, exceto aquela para p , que deve ser substituída por $p = v_i$ ou por $p = v_i + u$.

(2) *Vamos supor $u \in BV$ e $u \neq p$. Sejam v_1, v_2 os vértices da geodésica esférica G . Suponhamos, inicialmente, que ${}^u p \neq v_1, v_2$. Então, existem representantes $u, v_1, v_2, p \in V$ tais que a matriz de Gram da base $u, v_1, v_2 \in V$ e as expressões para p e G nesta base são dadas, respectivamente, por*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad p = \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2 + ru, \quad \alpha > 0, r \geq 0$$

$$g(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1, \quad \langle g(\varepsilon), g(\varepsilon) \rangle = 1.$$

Os números α e r têm significado geométrico. De fato, por um lado, se p é não-isotrópico e σ é a assinatura de p , então

$$(2.2.26) \quad \alpha^4 = \frac{\operatorname{ta}(p, v_2)}{\operatorname{ta}(p, v_1)} \quad e \quad r^2 = \sigma \cdot \frac{-\operatorname{ta}(p, u)}{2\sqrt{\operatorname{ta}(p, v_1) \operatorname{ta}(p, v_2)}} = \sigma \cdot \frac{\operatorname{ta}(p, v_1) + \operatorname{ta}(p, v_2) - 1}{2\sqrt{\operatorname{ta}(p, v_1) \operatorname{ta}(p, v_2)}}.$$

Por outro lado, se p é isotrópico, então $\alpha^4 = \mu(p, v_2, v_1)$ e $r^2 = \frac{\mu(p, v_2, v_1) + 1}{2\sqrt{\mu(p, v_2, v_1)}}$.

Se ${}^u p = v_i$ para $i = 1$ ou $i = 2$, então existem representantes $p, u, v_1, v_2 \in V$ para os quais são válidas todas as expressões acima, exceto aquela para p , que deve ser substituída por $p = v_i + ru$, $r \geq 0$. Neste caso, temos $r^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\text{ta}(p, v_i)} \right)$ se p é não-isotrópico ou $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se p é isotrópico.

(3) Vamos supor $u \in BV$, $u \neq p$. Sejam $w_1, w_2 \in G$ pontos distintos, ortogonais e tais que ${}^u p \neq w_1, w_2$. Então, existem representantes $u, w_1, w_2, p \in V$ tais que $\mathbb{C}\mathbb{P}(\mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2) = G$ e tais que a matriz de Gram da base $u, w_1, w_2 \in V$ e as expressões para $p \in G$ nesta base são dadas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = c^{-1}w_1 + cw_2 + ru, \quad 0 \neq c \in \mathbb{C}, \quad r \geq 0$$

$$g(\alpha, \beta) = \alpha w_1 + \beta w_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \langle g(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta) \rangle = 1.$$

(4) Vamos supor $u \in SV$, $u \neq p$. Seja $v \in G$, $v \neq p, u$. Seja $w \in \mathbb{C}\mathbb{P}v^\perp$, $w \neq {}^v p, u$. Suponhamos, inicialmente, que ${}^v p \neq u$. Então, existem representantes $u, v, w, p \in V$ tais que $\mathbb{C}\mathbb{P}(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) = G$ e tais que a matriz de Gram da base $u, v, w \in V$ e as expressões para $p \in G \setminus \{u\}$ nesta base são dadas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = c_1^{-1}u + c_1w + c_2v, \quad 0 \neq c_1 \in \mathbb{C}, \quad c_2 \in \mathbb{C}$$

$$g(t) = tu + v, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \langle g(t), g(t) \rangle = 1.$$

Se ${}^v p = u$, então existem representantes $u, v, w, p \in V$ para os quais são válidas todas as expressões acima, exceto aquela para p , que deve ser substituída por $p = c^{-1}v + cu$, $0 \neq c \in \mathbb{C}$.

(5) Vamos supor $p = u$. Se $u \in AV$, então temos para V a base $p, v_1, v_2 \in V$ como em (1), com a matriz de Gram e as expressões para $G \setminus \{v_1, v_2\}$ indicadas naquele item. Se $u \in BV$, então temos para V as bases p, v_1, v_2 e p, w_1, w_2 indicadas em (2) e (3), com as respectivas matrizes de Gram e expressões para G indicadas naqueles itens. Finalmente, se $u \in SV$, temos para V a base p, v, w como em (4), com a matriz de Gram e expressão para $G \setminus \{u\}$ indicadas naquele item.

Demonstração. (1) Fixemos $\langle u, u \rangle = 1$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$.

Vamos supor $u \neq p$ e ${}^u p \neq v_1, v_2$. Neste caso, podemos tomar $p = c_1^{-1}v_1 \pm c_1v_2 + c_2u$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $c_1 \neq 0$. Reescolhendo os representantes $v_1, v_2, u \in V$ (por exemplo, multiplicando v_1 por $|c_1|$, dividindo v_2 por $|c_1|$ e multiplicando u por um complexo unitário δ tal que $\delta c_2 \geq 0$) podemos ainda obter, sem alterar as igualdades já estabelecidas, $p = \bar{\varepsilon}v_1 \pm \varepsilon v_2 + ru$, onde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$ e $r \geq 0$.

Suponhamos, por um lado, que p é não-isotrópico. É claro que $\langle p, v_i \rangle \neq 0$ para $i = 1, 2$: caso contrário, segue de $0 = \langle p, v_i \rangle = \langle {}^u p, v_i \rangle$ e de ${}^u p \in \mathbb{C}\mathbb{P}u^\perp$ que ${}^u p = v_i$ (em $\mathbb{C}\mathbb{P}V$), absurdo. Logo, pela parte correspondente da demonstração da Classificação 2.2.7, o único invariante de três pontos envolvido é $\eta(p, v_1, v_2)$. Através de um cálculo direto, obtemos $\eta(p, v_1, v_2) = \pm \frac{\varepsilon^2}{2\langle p, p \rangle}$ e $\text{ta}(p, u) = \frac{r^2}{\langle p, p \rangle}$, de onde seguem facilmente as duas primeiras igualdades em (2.2.25). Quanto à última igualdade, observe-se que

$$\text{ta}(p, u) = \frac{r^2}{\pm \text{Re } \varepsilon^2 + r^2} = \frac{\text{ta}(p, u)\langle p, p \rangle}{2\langle p, p \rangle \text{Re } \eta(p, v_1, v_2) + \text{ta}(p, u)\langle p, p \rangle}.$$

Utilizando este fato e o item (1e) da Proposição 2.2.21, obtemos $2 \operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2) + \operatorname{ta}(p, u) = 1$.

Por outro lado, vamos supor que p é isotrópico. Claramente, $\langle p, v_i \rangle \neq 0$, $i = 1, 2$. Pela parte correspondente da demonstração da Classificação 2.2.7, o único invariante envolvido é o de Cartan. Temos $\mathbb{A}(p, v_1, v_2) = \arg(\mp \varepsilon^2)$. Segue de $\langle p, p \rangle = 0$ que $r^2 = \operatorname{Re}(\mp \varepsilon^2)$.

Finalmente, suponhamos $u \neq p$, ${}^u p = v_i$ e $p \neq v_i$. Neste caso, temos $p \in L \setminus v_i, u \setminus = \mathbb{C} \mathbb{P} v_i^\perp$. Portanto, podemos tomar $p = cv_i + u$, onde $0 \neq c \in \mathbb{C}$. Sem alterar as igualdades já obtidas, reescolhemos os representantes $v_1, v_2 \in V$ de modo a obter $p = v_i + u$.

(2) Fixemos $\langle u, u \rangle = -1$ e $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$.

Vamos supor $u \neq p$ e ${}^u p \neq v_1, v_2$. Neste caso, podemos tomar $p = c_1^{-1}v_1 + c_1v_2 + c_2u$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0$. Reescolhendo os representantes $v_1, v_2, u \in V$ (por exemplo, multiplicando v_1 por um complexo unitário δ tal que $\delta \frac{1}{c} > 0$, dividindo v_2 por este mesmo δ e multiplicando u por um complexo unitário δ' tal que $\delta'c_2 \geq 0$), podemos ainda obter $p = \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2 + ru$, onde $\alpha > 0$ e $r \geq 0$, sem alterar as igualdades já estabelecidas. O fato que $g(\varepsilon)$ lista todos os pontos de G segue do item (2) do Lema 2.2.18.

Suponhamos, por um lado, que p é não-isotrópico. É claro que $\langle p, v_i \rangle \neq 0$ para $i = 1, 2$: caso contrário, segue de $0 = \langle p, v_i \rangle = \langle {}^u p, v_i \rangle$ e de ${}^u p \in \mathbb{C} \mathbb{P} u^\perp$ que ${}^u p = v_{i+1}$ (em $\mathbb{C} \mathbb{P} V$, tomando o índice módulo 2), absurdo. Assim, pela parte correspondente da Classificação 2.2.7, as tâncias são os únicos invariantes contínuos a se considerar neste caso. Por um cálculo direto, obtemos $\operatorname{ta}(p, v_1) = \frac{1}{2\langle p, p \rangle} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$, $\operatorname{ta}(p, v_2) = \frac{\alpha^2}{2\langle p, p \rangle}$ e $\operatorname{ta}(p, u) = \frac{-r^2}{\langle p, p \rangle}$, de onde seguem facilmente as duas primeiras igualdades em (2.2.26). Quanto à última igualdade, basta observar que

$$\operatorname{ta}(p, u) = \frac{-r^2}{\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} - r^2} = \frac{\operatorname{ta}(p, u)}{\operatorname{ta}(p, v_1) + \operatorname{ta}(p, v_2) + \operatorname{ta}(p, u)}.$$

Assim, utilizando o item (1a) da Proposição 2.2.21, é fácil ver que $\operatorname{ta}(p, v_1) + \operatorname{ta}(p, v_2) + \operatorname{ta}(p, u) = 1$.

Por outro lado, vamos supor que p é isotrópico. Claramente, $\langle p, v_i \rangle \neq 0$ para $i = 1, 2$. Logo, o μ -invariante é o único a se considerar neste caso. Temos $\mu(p, v_2, v_1) = \alpha^4$ e $0 = \langle p, p \rangle = \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} - r^2$, de onde segue o desejado.

Finalmente, suponhamos $u \neq p$ e ${}^u p = v_i$. Neste caso, temos $p \in L \setminus u, v_i \setminus$. Logo, podemos tomar $p = v_i + cu$, onde $c \in \mathbb{C}$. Reescolhendo o representante $u \in V$, podemos obter $p = v_i + ru$, sem alterar as igualdades anteriores. Se p é não-isotrópico, então segue de $\operatorname{ta}(p, v_i) = \frac{1}{2\langle p, p \rangle} = \frac{1}{1 - 2r^2}$ a igualdade desejada. Caso contrário, $0 = \langle p, p \rangle = \frac{1}{2} - r^2$ implica que $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A demonstração dos demais itens é análoga ■

2.2.27. Corolário. (1) Seja $p \in \mathbb{C} \mathbb{P} V \setminus SV$. Sejam $v_1, v_2 \in SV$ pontos distintos e seja u o ponto polar da linha projetiva $L \setminus v_1, v_2 \setminus$. Vamos supor que ${}^u p \neq v_1, v_2$. Então, temos a identidade $2 \operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2) + \operatorname{ta}(p, u) = 1$. Além disso, valem as desigualdades $\operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2) \leq \frac{1}{2}$ para $p \in AV$ e $\operatorname{Re} \eta(p, v_1, v_2) \geq \frac{1}{2}$ para $p \in BV$. Em ambos os casos, a igualdade ocorre exatamente quando $p \in L \setminus v_1, v_2 \setminus$.

(2) Sejam $p_1, p_2, p_3 \in SV$ pontos distintos. Então, $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Os valores extremos são assumidos exatamente quando p_1, p_2, p_3 pertencem a uma mesma linha projetiva.

(3) Seja $p \in \mathbb{C} \mathbb{P} V \setminus SV$. Sejam $v_1, v_2 \in AV$ pontos distintos e ortogonais. Seja u o ponto polar da linha projetiva $L \setminus v_1, v_2 \setminus$. Vamos supor que ${}^u p \neq v_1, v_2$. Neste caso, temos a identidade $\operatorname{ta}(p, v_1) + \operatorname{ta}(p, v_2) + \operatorname{ta}(p, u) = 1$. Além disso, vale a desigualdade $\operatorname{ta}(p, v_1) + \operatorname{ta}(p, v_2) \geq 1$ para $p \in AV$. A igualdade ocorre exatamente quando $p \in L \setminus v_1, v_2 \setminus$.

Demonstração. É uma aplicação direta das fórmulas em (2.2.25), em (2.2.26) e do item (1) da Proposição 2.2.21 ■

A Classificação 2.2.7 não permite o estudo, em geral, de configurações geométricas contendo duas geodésicas. É fácil ver, no entanto, que a classificação de 4 pontos em \mathbb{CPV} (e, em princípio, de n pontos), pode ser realizada utilizando as mesmas técnicas presente na demonstração daquela classificação. Embora não realizemos, neste texto, um estudo detalhado da interpretação geométrica dos invariantes de quatro pontos, apresentaremos no que se segue a classificação geométrica de um par de geodésicas orientadas em \mathbb{CPV} , que será útil na demonstração da Proposição 2.4.7. Como vimos nas Proposições 2.2.13 e 2.2.21, é sob o ponto de vista dos invariantes envolvidos nesta situação e de suas interpretações geométricas, que problemas muito importantes como o da interseção de bissetores (vide, por exemplo, [San]) devem ser abordados.

A demonstração da classificação seguinte é semelhante à da Classificação 2.2.7.

2.2.28. Classificação. *Seja (p_1, p_2, p_3, p_4) uma 4-upla ordenada de pontos em \mathbb{CPV} .*

(1) *Se todos os pontos em questão são isotrópicos, a 4-upla classifica-se através das tâncias, dos invariantes de Cartan e dos invariantes de Korányi-Reimann.*

(2) *Vamos supor que p_1, p_2 são distintos e isotrópicos e que p_3, p_4 são positivos e ortogonais. Então, a 4-upla em questão classifica-se através das tâncias, dos η -invariantes e dos μ -invariantes.*

(3) *Vamos supor que p_1, p_2 são positivos e ortogonais e que p_3, p_4 são positivos e ortogonais. Então, a 4-upla em questão classifica-se através das tâncias e dos invariantes de Korányi-Reimann.*

Demonstração. (1) Utilizando a Classificação 2.2.7, vamos supor que os pontos da 4-upla em questão são todos distintos. Assim, podemos tomar

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \langle p_2, p_3 \rangle = \langle p_3, p_4 \rangle = 1, \quad \langle p_1, p_3 \rangle \rightleftharpoons z_1, \quad \langle p_2, p_4 \rangle \rightleftharpoons z_2, \quad \langle p_1, p_4 \rangle \rightleftharpoons z_3,$$

onde $0 \neq z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$. É fácil ver que ainda podemos fazer $|z_1| = 1$: de fato, multiplicando p_1, p_3 por um complexo não-nulo $c \in \mathbb{C}$ e dividindo p_2, p_4 pelo conjugado \bar{c} , não alteramos as igualdades acima, enquanto multiplicamos z_1 por $|c|^2$. Agora, z_1 se calcula através do invariante de Cartan $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-\bar{z}_1)$. Por outro lado, z_3 e z_2 se calculam através dos invariantes $\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{z_3}$ e $\mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4) = \frac{z_1 z_2}{z_3}$.

(2) Vamos supor

$$\langle p_3, p_3 \rangle = \langle p_4, p_4 \rangle = 1, \quad \langle p_1, p_2 \rangle = 1, \quad \langle p_2, p_3 \rangle \rightleftharpoons z_1, \quad \langle p_1, p_3 \rangle \rightleftharpoons z_2, \quad \langle p_2, p_4 \rangle \rightleftharpoons z_3, \quad \langle p_1, p_4 \rangle \rightleftharpoons z_4,$$

onde $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$.

Inicialmente, consideremos $z_1 \neq 0$. Neste caso, podemos tomar $z_1 = 1$. Agora, z_2 se calcula pelo invariante $\eta(p_3, p_2, p_1) = z_2$. Além disso, reescolhendo o representante $p_4 \in V$, é possível supor que $z_3 \geq 0$. Deste modo, z_3 se calcula através do μ -invariante $\mu(p_2, p_4, p_3) = z_3^2$. Se $z_3 \neq 0$, determinamos z_4 através de $\eta(p_4, p_2, p_1) = z_3 z_4$. Por outro lado, se $z_3 = 0$, então podemos supor $z_4 \geq 0$. Neste caso, há duas alternativas: $z_2 \neq 0$ e z_4 se determina através de $\mu(p_1, p_4, p_3) = \frac{z_4^2}{|z_2|^2}$, ou $z_2 = 0$ e, pelo critério de Sylvester, obtemos $z_4 = 1$ automaticamente. (De fato, neste último caso, a matriz de Gram

de (p_1, p_2, p_3, p_4) é $M \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & z_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ z_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Temos $0 = \det M = z_4^2 - 1$.)

Por fim, vamos supor $z_1 = 0$. Note-se que não é possível que $z_3 = 0$: neste caso, teríamos p_2, p_3, p_4 pertencentes à mesma linha projetiva euclidiana $\mathbb{C}\mathbb{P}p_2^\perp$, absurdo. Logo, podemos supor $z_3 = 1$. Agora, z_4 se determina através de $\eta(p_4, p_2, p_1) = z_4$. Claramente, podemos supor $z_2 \geq 0$. Assim, se $z_4 \neq 0$, calculamos z_2 por $\mu(p_1, p_3, p_4) = \frac{z_2^2}{|z_4|^2}$; caso contrário, se $z_4 = 0$, obtemos automaticamente $z_2 = 1$ através do critério de Sylvester. (De fato, neste último caso, a matriz de Gram de (p_1, p_2, p_3, p_4) é

$$M \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 0 & 1 & z_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ z_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Temos } 0 = \det M = z_2^2 - 1.)$$

(3) Vamos supor

$$\langle p_i, p_i \rangle = 1, \quad \langle p_2, p_3 \rangle \rightleftharpoons z_1, \quad \langle p_1, p_3 \rangle \rightleftharpoons z_2, \quad \langle p_2, p_4 \rangle \rightleftharpoons z_3, \quad \langle p_1, p_4 \rangle \rightleftharpoons z_4,$$

onde $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, 4$.

Suponhamos, inicialmente, que $z_i \neq 0$ para todo i . É fácil ver que podemos tomar $z_1, z_2, z_3 > 0$. Logo, z_1, z_2, z_3 se calculam através das tâncias $\text{ta}(p_2, p_3) = z_1^2$, $\text{ta}(p_1, p_3) = z_2^2$ e $\text{ta}(p_2, p_4) = z_3^2$. O complexo z_4 se calcula através de $\mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4) = \frac{z_2 z_3}{z_4 z_1}$.

Finalmente, vamos supor que pelo menos um dos z_i 's é nulo. Por simplicidade, tomemos $z_1 = 0$. Podemos supor $z_2, z_3, z_4 \geq 0$ e utilizar as tâncias adequadas para determinar estes três últimos números reais ■

Concluindo esta seção, apresentaremos algumas caracterizações e propriedades básicas de geodésicas úteis para a discussão dos objetos elementares que encontraremos em seguida (planos reais e bissetores).

Seja L uma linha projetiva hiperbólica. Sejam $G_1, G_2 \subset L$ duas geodésicas distintas. Diremos que G_1, G_2 são *concorrentes* (*tangentes, ultraparalelas*) se e só se a interseção $G_1 \cap G_2$ consiste de exatamente dois pontos distintos (de um único ponto, é vazia).

2.2.29. Lema. (1) *Seja L uma linha projetiva. Seja $G \subset L$ uma geodésica. Então, existem $p_1, p_2 \in L$ distintos, não-isotrópicos e de mesma assinatura tais que G eqüita de p_1, p_2 . Suponhamos L não-euclidiana. Neste caso, reciprocamente, dados $p_1, p_2 \in L$ distintos, não-isotrópicos e de mesma assinatura, o lugar geométrico dos pontos em $L \setminus SV$ que eqüitam de p_1, p_2 está contido em uma geodésica.*

(2) *Uma geodésica divide a linha projetiva à qual pertence em duas componentes conexas distintas.*

(3) *Seja L uma linha projetiva não-euclidiana. Seja $G \subset L$ uma geodésica. Sejam $q_1, q_2 \in G$ pontos distintos e não-ortogonais. Então, as componentes conexas nas quais G divide L são dadas pelos conjuntos $\{x \in L \mid \text{Im}(\langle x, q_1 \rangle \langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, x \rangle) > 0\}$ e $\{x \in L \mid \text{Im}(\langle x, q_1 \rangle \langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, x \rangle) < 0\}$.*

(4) *Dois geodésicas distintas contidas em uma mesma linha projetiva hiperbólica se interceptam, no máximo, em dois pontos distintos.*

(5) *Seja L uma linha projetiva hiperbólica. Sejam $G_1 \rightleftharpoons G \setminus p_1, p_2 \setminus$ e $G_2 \rightleftharpoons G \setminus v_1, v_2 \setminus$ geodésicas distintas em L , com p_1, p_2 não-ortogonais e $v_1, v_2 \in SV$. Então, G_1, G_2 são concorrentes (*tangentes, ultraparalelas*) se e só se*

$$\text{Im}(\langle v_1, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_1 \rangle) \cdot \text{Im}(\langle v_2, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_2 \rangle) < 0 \quad (= 0, > 0).$$

(6) *Seja $G \rightleftharpoons G \setminus v_1, v_2 \setminus$, $v_1, v_2 \in SV$, uma geodésica hiperbólica cuja linha projetiva é $\mathbb{C}\mathbb{P}u^\perp$. Seja $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}V$, ${}^u p \neq v_i$. Então, dentre os pontos em $G \cap BV$ não-ortogonais a p , existe no máximo um ponto g tal que a geodésica $G \setminus p, g \setminus$ é ortogonal a G em g , no sentido Riemanniano.*

(7) *Dois geodésicas distintas contidas em uma mesma linha projetiva esférica L sempre se interceptam em dois pontos distintos e ortogonais.*

(8) *Duas geodésicas distintas contidas em uma mesma linha projetiva euclidiana L sempre se interceptam no ponto isotrópico de L. Existe, no máximo, mais um ponto de interseção das geodésicas em questão.*

Demonstração. (1) Começemos pela recíproca. Assim, suponhamos L não-euclidiana e sejam $p_1, p_2 \in L$ distintos, não-isotrópicos e de mesma assinatura. Podemos supor $\langle p_i, p_i \rangle = \sigma \in \{-1, +1\}$ e $\langle p_1, p_2 \rangle = a \geq 0$. Temos $\sigma^2 \neq a^2$. Todo ponto $p \in L \setminus \{p_1, p_2\}$ admite um representante da forma $p(z) \doteq z^{-1}p_1 + zp_2$. É fácil ver que $\vartheta(p(z), p_1) = \vartheta(p(z), p_2)$ significa $|z| = 1$. Resta aplicar o item (2) do Lema 2.2.18.

Reciprocamente, suponhamos que a linha projetiva L é esférica. Pelo item (1) do Lema 2.2.18, G eqüita de seus vértices em L. Por outro lado, suponhamos L hiperbólica. Sejam $v_1, v_2 \in SV$ os vértices de G. Podemos supor $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$. Fixemos $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, $\operatorname{Re} \varepsilon^2 > 0$ (ou $\operatorname{Re} \varepsilon^2 < 0$) e $\operatorname{Im} \varepsilon^2 \neq 0$. Definimos²³ $p_1 \doteq \bar{\varepsilon}v_1 - \varepsilon v_2$ e $p_2 \doteq \varepsilon v_1 - \bar{\varepsilon}v_2$. As restrições sobre ε garantem que $p_1, p_2 \in L \cap BV$ (ou $p_1, p_2 \in L \cap AV$), que $p_1, p_2 \notin G$ e que $p_1 \neq p_2$. É fácil verificar que G eqüita de p_1, p_2 . Finalmente, se L é euclidiana, não há nada a fazer: neste caso, G eqüita de quaisquer $p_1, p_2 \in L$ não-isotrópicos.

(2) É imediato.

(3) É uma consequência direta do Lema 1.4.5.

(4) Dados três pontos distintos em L, dois são necessariamente não-ortogonais. Estes, pela Observação 1.4.3, determinam uma única geodésica.

(5) Sejam $G_1, G_2 \subset L$ geodésicas hiperbólicas distintas.

Se G_1 e G_2 não possuem um vértice em comum e se os vértices de G_2 não pertencem a uma mesma das componentes conexas nas quais G_1 divide L,²⁴ então é fácil ver que G_1, G_2 possuem um ponto de interseção $q \in BV$. Neste caso, pelos argumentos após a Observação 1.4.3, as geodésicas em questão também se interceptam no ponto positivo ortogonal a q em G_1 . Segue que G_1, G_2 são concorrentes. Reciprocamente, suponhamos G_1, G_2 concorrentes nos pontos q_1, q_2 . Claramente, q_1, q_2 são ortogonais e, em particular, não-isotrópicos de assinaturas diferentes. Pelo Lema 1.4.4, G_1, G_2 são transversais (como subvariedades de L) em q_1 e em q_2 . Segue que os vértices de G_2 não pertencem a uma mesma das componentes conexas nas quais G_1 divide L. Em outras palavras, pelo item (3), G_1, G_2 são concorrentes se e só se $\operatorname{Im}(\langle v_1, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_1 \rangle) \cdot \operatorname{Im}(\langle v_2, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_2 \rangle) < 0$.

Por outro lado, é fácil ver que, se G_1, G_2 possuem um vértice em comum, então este é o único ponto de interseção de tais geodésicas, que são tangentes. Reciprocamente, se as geodésicas possuem apenas um ponto de interseção, então, pelos argumentos após a Observação 1.4.3, este ponto é isotrópico e, portanto, um vértice comum. Em outras palavras, pelo Lema 1.4.5, G_1, G_2 são tangentes se e só se $\operatorname{Im}(\langle v_1, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_1 \rangle) \cdot \operatorname{Im}(\langle v_2, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_2 \rangle) = 0$.

Por fim, G_1, G_2 são ultraparalelas exatamente quando os vértices de G_2 pertencem a uma mesma das componentes conexas nas quais G_1 divide L. Pelo item (3), isto significa $\operatorname{Im}(\langle v_1, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_1 \rangle) \cdot \operatorname{Im}(\langle v_2, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, v_2 \rangle) > 0$.

(6) Como na primeira das Bases 2.2.24, vamos supor $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$ e $p = \bar{\varepsilon}v_1 - \varepsilon v_2 + ru$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, $r \geq 0$. Todo ponto em $G \cap BV$ se expressa univocamente na forma $g(\alpha) \doteq \alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2$, $\alpha > 0$, $\langle g(\alpha), g(\alpha) \rangle = -1$. Supondo $\langle p, g(\alpha) \rangle \neq 0$ temos, pelo Lema 1.7.1, que $\langle -, g(\alpha) \rangle \otimes \frac{g(\alpha)p}{\langle p, g(\alpha) \rangle}$ é um vetor tangente a $G \setminus \langle p, g(\alpha) \rangle$ em $g(\alpha)$. Além disso, pela Proposição 1.2.3, $\langle -, g(\alpha) \rangle \otimes (\alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2)$ é um vetor

²³Do ponto de vista do disco de Poincaré $L \cap BV$, o que fazemos é claro: pela demonstração do item (5) da Proposição 2.2.21, $v_1 - v_2$ é o ponto mais próximo de p_1 em G e p_2 é a reflexão de p_1 em $v_1 - v_2$.

²⁴Equivalentemente, neste caso, os vértices de G_1 não pertencem a uma mesma das componentes conexas nas quais G_2 divide L.

tangente a $G \langle v_1, v_2 \rangle$ em $g(\alpha)$ (note-se que $\langle g(\alpha), \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2 \rangle = 0$). Assim, $G \langle p, g(\alpha) \rangle$ e $G \langle v_1, v_2 \rangle$ são ortogonais em $g(\alpha)$, no sentido Riemanniano, exatamente quando

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle \langle -, g(\alpha) \rangle \otimes \frac{g(\alpha)p}{\langle p, g(\alpha) \rangle}, \langle -, g(\alpha) \rangle \otimes (\alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2) \right\rangle &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{g(\alpha)p}{\langle p, g(\alpha) \rangle}, \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2 \right\rangle = \\ &= \operatorname{Re} \frac{\langle \bar{\varepsilon}v_1 - \varepsilon v_2, \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2 \rangle}{\langle \bar{\varepsilon}v_1 - \varepsilon v_2, \alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2 \rangle} = \operatorname{Re} \frac{\bar{\varepsilon}\alpha - \varepsilon\alpha^{-1}}{-\bar{\varepsilon}\alpha - \varepsilon\alpha^{-1}} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, esta condição significa $\frac{\bar{\varepsilon}\alpha - \varepsilon\alpha^{-1}}{-\bar{\varepsilon}\alpha - \varepsilon\alpha^{-1}} = \frac{\varepsilon\alpha - \bar{\varepsilon}\alpha^{-1}}{\varepsilon\alpha + \bar{\varepsilon}\alpha^{-1}}$, isto é, $\alpha^2 - \alpha^{-2} = \alpha^{-2} - \alpha^2$, ou seja, $\alpha = 1$.

(7) Sejam $G_1, G_2 \in L$ geodésicas distintas. Seja $p \in G_1 \setminus G_2$. É fácil verificar que p e o seu ponto ortogonal em L não pertencem a uma mesma das componentes conexas nas quais G_1 divide L . De fato, sejam $p_1, p_2 \in G_1$ distintos e não-ortogonais. Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} (\langle {}^p p_1, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, {}^p p_1 \rangle) &= \langle {}^p p_1, {}^p p_1 \rangle \operatorname{Im} \left(\langle p_1, p_2 \rangle \left(\langle p_2, p_1 \rangle - \frac{\langle p_2, p \rangle \langle p, p_1 \rangle}{\langle p, p \rangle} \right) \right) = \\ &= - \frac{\langle {}^p p_1, {}^p p_1 \rangle}{\langle p, p \rangle} \operatorname{Im} (\langle p, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p \rangle). \end{aligned}$$

Resta aplicar os itens (3) e a discussão após a Observação 1.4.3.

(8) Segue diretamente da discussão após a Observação 1.4.3 e da identificação $L \setminus \{p\} \simeq \mathbb{C}$ estabelecida após a Observação 1.5.4 ■

2.3. Planos reais

Os objetos geométricos mais simples e naturais em $\mathbb{C}PV$ provêm de \mathbb{R} -subespaços lineares em V . Na seção anterior, abordamos algumas características de dois objetos desta natureza, as linhas projetivas e as geodésicas. Nesta seção, estudaremos subespaços totalmente reais de dimensão máxima em $\mathbb{C}PV$, os *planos reais*. Embora planos reais não estejam em correspondência com arranjos finitos de pontos, muitas configurações geométricas que os contém envolvem o estudo de invariantes de arranjos deste tipo (vide, por exemplo, a Observação 2.3.4).

Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial, $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$, tal que W satisfaz as condições descritas no início da Seção 1.4. Nos termos daquela seção, $R \doteq \mathbb{C}PW \simeq \mathbb{R}P^2$ é um subespaço totalmente real de $\mathbb{C}PV$. Denominaremos R um *plano real*.²⁵ Pelo Lema 1.4.1, temos a identificação $V \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$. Segue que a forma restrita a W tem a assinatura $(2, 1)$ (em particular, é não-degenerada). Portanto, as interseções de R com BV e AV são, respectivamente, um disco e uma fita de Möbius, colados pela circunferência de pontos isotrópicos $R \cap SV$. Pelo Lema 1.9.3, R possui curvatura seccional (curvatura gaussiana) constante -1 em seus pontos não-isotrópicos. Restrita ao disco $R \cap BV$, a métrica hermitiana é a métrica de Klein usual (vide [Bea]). Por esta razão, tal disco será denominado *disco de Klein*.

Seja $R \doteq \mathbb{C}PW = \mathbb{R}PW$ um plano real. Existe uma correspondência biunívoca entre pontos e geodésicas em R . De fato, ao ponto $p \in R$ associamos a geodésica²⁶ $\mathbb{C}Pp^{\perp W} \subset R$, onde $p^{\perp W} = p^{\perp} \cap W$

²⁵Deste momento em diante, ao definir um plano real R através da expressão $R \doteq \mathbb{C}PW$, estaremos assumindo implicitamente que $W \subset V$ é um \mathbb{R} -subespaço vetorial, $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$, satisfazendo as condições descritas no início da Seção 1.4.

²⁶Note-se que, como a forma restrita a W é real não-nula, temos $\dim_{\mathbb{R}} p^{\perp W} = 2$. É claro que $p^{\perp W}$ satisfaz as condições descritas no início da Seção 1.4.

é o complementar ortogonal de p em W . Diremos que p é o *ponto polar* em R da geodésica $\mathbb{C}\mathbb{P}p^{\perp w}$. Obviamente, a natureza de uma geodésica contida em um plano real depende da assinatura de seu ponto polar, como no lema abaixo.

2.3.1. Lema. *Seja $R \rightleftharpoons \mathbb{C}\mathbb{P}W \subset \mathbb{C}\mathbb{P}V$ um plano real.*

(1) *Seja $p \in R$. A geodésica $\mathbb{C}\mathbb{P}p^{\perp w} \subset R$ é respectivamente esférica, euclidiana, hiperbólica exatamente quando $p \in BV$, $p \in SV$, $p \in AV$. Em particular, a fita de Möbius $R \cap AV$ é o espaço de geodésicas do disco de Klein $R \cap BV$.*

(2) *Seja $G \subset R$ uma geodésica. Então, o ponto polar de G em R é o ponto polar da linha projetiva de G .*

(3) *Existe uma única geodésica em R ligando quaisquer dois pontos distintos deste plano real. Além disso, duas geodésicas distintas em R sempre se interceptam em um único ponto.*

Demonstração. (1) A forma restrita a W tem assinatura (2, 1).

(2) É imediato.

(3) No sentido da projetivização real $\mathbb{R}\mathbb{P}W = \mathbb{C}\mathbb{P}W = R$, as geodésicas são as linhas projetivas de R . ■

Assim, embora os discos de Klein e de Poincaré “modelem” uma mesma geometria (hiperbólica plana), há uma diferença essencial a se observar: o tipo de objeto geométrico que desejamos enfatizar. De fato, trabalhando com o “modelo” real para a geometria hiperbólica plana, estamos lidando com um espaço de geodésicas. Por outro lado, o “modelo” complexo é um espaço de pontos.

2.3.2. Lema. (1) *Sejam $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}\mathbb{P}V$ pontos distintos, não-ortogonais dois a dois e não pertencentes a uma mesma linha projetiva. Então, p_1, p_2, p_3 determinam um plano real se e só se $\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle \in \mathbb{R}$. Se existir, o plano real contendo p_1, p_2, p_3 é único.*

(2) *Seja G uma geodésica não-euclidiana e seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}\mathbb{P}u^{\perp}$ a linha projetiva de G . Seja $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}V$, $p \notin G$, $p \neq u$. Então, existe um (único) plano real contendo a geodésica G e o ponto p se e só se a projeção ${}^u p \in G$.*

Demonstração. (1) Se p_1, p_2, p_3 pertencem a um plano real $\mathbb{C}\mathbb{P}W$, então $\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle \in \mathbb{R}$ uma vez que a forma restrita a W é real. Provemos a recíproca. Podemos supor $\langle p_1, p_2 \rangle, \langle p_2, p_3 \rangle \in \mathbb{R}$. Segue de $\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que $\langle p_3, p_1 \rangle \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, a forma restrita a $\mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}p_2 + \mathbb{R}p_3$ é real. Finalmente, por não pertencerem a uma mesma linha projetiva, p_1, p_2, p_3 são \mathbb{C} -linearmente independentes, de onde segue que a forma restrita a $\mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}p_2 + \mathbb{R}p_3$ é não-degenerada. Resta aplicar o Corolário 1.4.2.

(2) Suponhamos ${}^u p \in G$. Neste caso, é claro que p e G não pertencem à mesma linha projetiva. Além disso, podemos tomar $p_1, p_2 \in G$ tais que ${}^u p, p_1, p_2$ são dois a dois não-ortogonais. Temos $\langle p, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p \rangle = \langle {}^u p, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, {}^u p \rangle \in \mathbb{R}$. Pelo item (1) deste lema, p, p_1, p_2 determinam um plano real. Reciprocamente, vamos supor p e G contidos em um plano real R . Então, G possui um ponto polar em R ; pelo item (2) do Lema 2.3.1, tal ponto polar é u . Agora, utilizando o fato $u \in R$, é fácil ver que ${}^u p \in G$. ■

A proposição a seguir estuda a interseção entre linhas projetivas e planos reais.

2.3.3. Proposição. *Seja $R \rightleftharpoons \mathbb{C}\mathbb{P}W \subset \mathbb{C}\mathbb{P}V$ um plano real.*

(1) *Sejam $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}V$ e $L \rightleftharpoons \mathbb{C}\mathbb{P}p^{\perp}$. A interseção $L \cap R$ consiste de uma geodésica se (e só se) $p \in R$ e de um único ponto se (e só se) $p \notin R$.*

(2) *Seja $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}V$, $p \notin R$. Então, existe uma única linha projetiva que contém p e que intercepta R em uma geodésica.*

(3) Seja $p \in R \setminus SV$. Seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}Pp^\perp$. Então, L e R são ortogonais,²⁷ no sentido pseudo-Riemanniano, nos pontos não-isotrópicos da geodésica $G \rightleftharpoons R \cap L$.

Demonstração. (1) Temos $1 \leq \dim_{\mathbb{R}} p^{\perp w} \leq 2$. De fato, por um lado, $\dim_{\mathbb{R}} W + \dim_{\mathbb{R}} p^\perp = 7$; por outro, $V \simeq \mathbb{C} \otimes W$. É fácil ver que $L \cap R$ é uma geodésica se e só se $\dim_{\mathbb{R}} p^{\perp w} = 2$. Este fato, por sua vez, é equivalente a $p \in R$.

(2) Se uma linha projetiva contém p , então seu ponto polar pertence a $\mathbb{C}Pp^\perp$. Por outro lado, pelo item anterior, se uma linha projetiva intercepta R em uma geodésica, então seu ponto polar pertence a R . Resta observar, também pelo item anterior, que $\mathbb{C}Pp^\perp \cap R$ consiste de um único ponto.

(3) Seja $g \in G$ um ponto não-isotrópico. Seja $G \ni q$ distinto de g e não-ortogonal a g . Seja $R \setminus G \ni u$ não-ortogonal a g, q . Fixemos representantes para g, u tais que $\langle g, q \rangle, \langle q, u \rangle \in \mathbb{R}$. Segue do item (1) do Lema 2.3.2 que $\langle u, g \rangle \in \mathbb{R}$. Temos $R = \mathbb{C}P(\mathbb{R}g + \mathbb{R}q + \mathbb{R}u)$. Seja $v_{1g} \rightleftharpoons \langle -, g \rangle \otimes v_1$, $v_1 \in g^\perp$, um vetor tangente a L e perpendicular a G em g . O fato de v_{1g} ser tangente a L em g significa, pela Proposição 1.2.3, que $v_1 \in \mathbb{C}g + \mathbb{C}q$, isto é, que $v_1 \in \mathbb{C}^g q$. O fato de v_{1g} ser perpendicular a G em g significa que $\text{Re} \langle v_1, \langle q^g, g \rangle^{-1} g \rangle = 0$, pois, pelo Lema 1.7.1, o vetor $\text{Tn}(q^g, g)(g) = (\langle q^g, g \rangle^{-1} g)_g$ é tangente a G em g . Segue que $v_1 \in i\mathbb{R}^g q$ (note que $\langle g^g, g \rangle \neq 0$, uma vez que L é não-euclidiana). Seja $v_{2g}, v_2 \in g^\perp$, um vetor tangente a $R \setminus \langle g, q, u \rangle$ em g . Temos $v_2 \in \mathbb{R}g + \mathbb{R}q + \mathbb{R}u + \mathbb{C}g$, isto é, $v_2 \in \mathbb{R}^g q + \mathbb{R}^g u$. Portanto, $\text{Re} \langle v_{1g}, v_{2g} \rangle = 0$ ■

Seja R um plano real. Seja $p \in \mathbb{C}PV$, $p \notin R$. Pelo item (2) da proposição anterior, existe uma única linha projetiva L contendo p que intercepta R em uma geodésica. Pelo item (3), tal interseção é ortogonal. Denominaremos L a *linha projetiva ortogonal a R por p* .

Dada uma linha projetiva $L \subset \mathbb{C}PV$ e $p \in \mathbb{C}PV$, $p \notin L$, existem infinitos planos reais que contêm p e interceptam L em uma geodésica.

2.3.4. Observação. Utilizando a linha projetiva ortogonal a um plano real passando por um ponto dado, podemos estudar a configuração geométrica envolvendo um plano real e um ponto não pertencente a este plano em termos das bases descritas em Bases 2.2.24. Como um exemplo interessante, consideremos o caso a seguir.

Seja $R \subset \mathbb{C}PV$ um plano real e seja $p \in \mathbb{C}PV \setminus R$. Seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu^\perp$ a linha projetiva perpendicular a R por p . Seja $G \rightleftharpoons R \cap L$. Suponhamos $u \in AV$. Sejam v_1, v_2 os vértices da geodésica hiperbólica G .

Vamos supor que $\langle u, u \rangle = 1$ e que $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$. Sem alterar estas igualdades, podemos reescolher os representantes $u, v_1, v_2 \in V$ de modo que $\mathbb{C}P(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2) = R$. Assim, qualquer ponto $q \in R \setminus (G_1 \cup G_2)$, onde $G_1 \rightleftharpoons \mathbb{C}P(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v_1)$ e $G_2 \rightleftharpoons \mathbb{C}P(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v_2)$, admite um representante da forma $q(\alpha, r) = \alpha^{-1}v_1 \pm \alpha v_2 + ru$ com $\alpha > 0$ e $r \in \mathbb{R}$. Temos $\langle q(\alpha, r), q(\alpha, r) \rangle = \pm 1 + r^2$. Além disso, $p \in L$ admite um representante $p = c^{-1}v_1 + cv_2$, onde $0 \neq c \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, obtivemos para a base $u, v_1, v_2 \in V$, para os pontos em $R \setminus (G_1 \cup G_2)$ e para p , respectivamente, a matriz de Gram e as expressões (vide a primeira das Bases 2.2.24)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad q(\alpha, r) = \alpha^{-1}v_1 \pm \alpha v_2 + ru, \quad \alpha > 0, r \in \mathbb{R},$$

$$\langle q(\alpha, r), q(\alpha, r) \rangle = \pm 1 + r^2, \quad p = c^{-1}v_1 + cv_2, \quad 0 \neq c \in \mathbb{C}.$$

Utilizando a base acima e supondo, por exemplo, $p \in BV$, calculemos a tância extrema entre p e o disco de Klein $R \cap BV$. Todo ponto em $R \cap BV$ pode ser escrito na forma $q(\alpha, r) = \alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2 + ru$,

²⁷Isto significa que os vetores tangentes a L e ortogonais a G em um ponto $g \in R \cap L \setminus SV$ são ortogonais ao plano tangente a R em g (ou, equivalentemente, que os vetores tangentes a R e ortogonais a G em g são ortogonais ao plano tangente a L em g).

com $\alpha > 0$ e $|r| < 1$. Observando que $\langle q(\alpha, r), p \rangle = \langle \alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2 + ru, c^{-1}v_1 + cv_2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{c}}{\alpha} - \frac{\alpha}{c} \right)$, obtemos

$$\text{ta}(p, q(\alpha, r)) = \frac{1}{4\langle p, p \rangle (r^2 - 1)} \left(\frac{\alpha^2}{|c|^2} + \frac{|c|^2}{\alpha^2} - 2 \text{Re} \frac{\bar{c}}{c} \right).$$

Se

$$\frac{\partial}{\partial r} \text{ta}(p, q(\alpha, r)) = -\frac{r}{2\langle p, p \rangle (r^2 - 1)^2} \left(\frac{\alpha^2}{|c|^2} + \frac{|c|^2}{\alpha^2} - 2 \text{Re} \frac{\bar{c}}{c} \right) = 0,$$

então $r = 0$ (temos $\langle q(\alpha, r), p \rangle \neq 0$ para todo $\alpha > 0$, $|r| < 1$). Isto significa que os valores extremos das tâncias entre p e os pontos de $R \cap BV$ são atingidos ao longo da geodésica $G = G \wr v_1, v_2 \wr$. Pelo item (5) da Proposição 2.2.21 e por sua demonstração, o ponto $g = v_1 - v_2 \in G$ é o único em $G \cap BV$ que realiza o mínimo, dado por $\text{Re} \eta(p, v_1, v_2) + |\eta(p, v_1, v_2)|$. Além disso, a geodésica $G \wr p, g \wr$ é ortogonal a R em g , no sentido hermitiano.

Claramente, os demais casos podem ser tratados de modo análogo ■

Como vimos, o espaço hiperbólico complexo contém imersas cópias dos espaços de curvatura constante que correspondem às linhas projetivas e aos planos reais. Tais espaços são (quase) os únicos conjuntos totalmente geodésicos em $\mathbb{C}PV$ (vide as Proposições 2.4.10 e 2.4.11). Além disso, são também aqueles em que se realizam as curvaturas seccionais extremas de $\mathbb{C}PV$. De fato, utilizando a Seção 1.9, é fácil realizar uma análise dos valores possíveis para as curvaturas seccionais em $\mathbb{C}PV$:

2.3.5. Lema. (1) *As curvaturas seccionais em BV assumem todos os valores em $[-4, -1]$. Os valores extremos -4 e -1 correspondem, respectivamente, aos planos tangentes a uma linha projetiva hiperbólica e a um plano real.*

(2) *As curvaturas seccionais em AV assumem todos os valores em $(-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$. Os valores extremos -4 e -1 correspondem, respectivamente, aos planos tangentes a uma linha projetiva esférica e a um plano real.*

Demonstração. (1) Seja $p \in BV$. Seja $W \subset T_p BV$ um \mathbb{R} -subespaço bidimensional. Se W é complexo então, pelos argumentos anteriores à Observação 1.9.2, temos $S(W) = -4$. Caso contrário, sejam $W \ni x_{1p}, x_{2p}$ \mathbb{C} -linearmente independentes, $x_1, x_2 \in p^\perp$. A forma restrita a $\mathbb{C}x_1 + \mathbb{C}x_2$ é definida. Pela tabela da Seção 1.9, $S(W)$ assume qualquer valor no intervalo $(-4, -1]$. Portanto, as curvaturas seccionais de BV assumem todos os valores em $[-4, -1]$. Pelos Lemas 1.9.3 e 1.9.5, temos $S(W) = -4$ ($S(W) = -1$) exatamente quando W é tangente a uma linha projetiva hiperbólica (plano real).

(2) Seja $p \in AV$. Seja $W \subset T_p BV$ um \mathbb{R} -subespaço bidimensional tal que a forma real restrita a W é não-degenerada. Novamente, se W é complexo, temos $S(W) = -4$. Caso contrário, sejam $W \ni x_{1p}, x_{2p}$ \mathbb{C} -linearmente independentes, $x_1, x_2 \in p^\perp$. A forma restrita a $\mathbb{C}x_1 + \mathbb{C}x_2$ é indefinida. É fácil ver que a forma real sobre W poderá ser tanto definida quanto indefinida. Utilizando a tabela da Seção 1.9, temos que as curvaturas seccionais de AV assumem todos os valores em $(-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$. Obtemos $S(W) = -4$ ($S(W) = -1$) exatamente quando W é tangente a uma linha projetiva esférica (plano real) ■

2.4. Bissetores

Os bissetores são objetos geométricos de grande importância nas geometrias clássicas. Bem como linhas projetivas, geodésicas e planos reais, bissetores provêm da projetivação de subespaços lineares de V . Uma de suas várias aplicações frutíferas é a participação, como faces, na construção de poliedros fundamentais (para o conceito de poliedro fundamental, vide Capítulo 3). Em geometria hiperbólica complexa, bem como em outras geometrias de curvatura não-constante, os bissetores não são totalmente geodésicos. Isto torna ainda mais necessário o estudo de propriedades elementares destes objetos, das

quais surgem ferramentas úteis para a descoberta de variedades com estrutura hiperbólica complexa (vide, por exemplo, [AGG] e [AGu]).

No que se segue, introduziremos bissetores em $\mathbb{C}PV$ através de quatro definições equivalentes. Ao abordar os aspectos básicos da geometria e da topologia dos bissetores, utilizaremos a definição mais adequada de acordo com o contexto.

2.4.1. Definição-Lema. *Seja $G \subset \mathbb{C}PV$ uma geodésica não-euclidiana. Seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu^\perp$, $u \notin SV$, a linha projetiva de G . São equivalentes as seguintes definições para o bissetor B com espinha real G , espinha complexa L e foco u :*

(1) $B \rightleftharpoons \mathbb{C}P(\mathbb{C}u + S)$, onde S é um \mathbb{R} -subespaço de V , $\dim_{\mathbb{R}} S = 2$, tal que a forma restrita a S real, tal que $\mathbb{C}x \cap S = \mathbb{R}x$ para todo $x \in S$ e tal que $G = \mathbb{C}PS = \mathbb{R}PS$.

(2) $B \rightleftharpoons \bigcup_{s \in G} L\lambda u, s\lambda$. Cada uma das linhas projetivas $L\lambda u, s\lambda$ é dita uma fatia de B .

(3) $B \rightleftharpoons \{x \in \mathbb{C}PV \mid x \text{ eqüita de } p_1, p_2\}$, onde $p_1, p_2 \in L$ são distintos, de mesma assinatura e tais que G eqüita de p_1, p_2 (vide Lema 2.2.29, item (1)).

(4) B é a união de todos os planos reais que contêm a geodésica G .

Demonstração. (1) \iff (2). É imediato.

(2) \iff (3). Seja $x \in \mathbb{C}PV$, $x \neq u$. Observe-se, inicialmente, que as igualdades $\vartheta(x, p_1) = \vartheta(x, p_2)$ e $\vartheta({}^u x, p_1) = \vartheta({}^u x, p_2)$ são equivalentes. Em outras palavras, x eqüita de p_1, p_2 se e só se a projeção ${}^u x \in L$ eqüita de p_1, p_2 , isto é, se e só se ${}^u x \in G$ (vide o item (1) do Lema 2.2.29). Assim, por um lado, se $x \in L\lambda u, s\lambda$ para algum $s \in G$, temos ${}^u x = s$, de onde segue que x eqüita de p_1, p_2 . Por outro lado, se x eqüita de p_1, p_2 , então ${}^u x \in G$, e x pertence à fatia $L\lambda u, {}^u x\lambda$. Resta observar que $u \in B$ em ambas as definições em questão.

(2) \iff (4) Seja $R \supset G$ um plano real. Seja $x \in R \setminus G$, $x \neq u$. Pelo item (2) do Lema 2.3.2, temos ${}^u x \in G$; em outras palavras, x pertence à fatia $L\lambda u, {}^u x\lambda$. Por outro lado, seja $x \in L\lambda u, s\lambda \setminus G$ para algum $s \in G$. Assim, temos ${}^u x = s$. Novamente, pelo item (2) do Lema 2.3.2, a geodésica G e x determinam um plano real. Resta observar que $G \subset B$ e $u \in B$ em ambas as definições em questão ■

Para um bissetor com espinha real G , denotaremos F_g a fatia determinada pelo ponto $g \in G$. Os bissetores serão denominados *hiperbólicos (esféricos)* de acordo com a natureza de sua espinha real. Os vértices da espinha real de um bissetor serão denominados *vértices do bissetor*. Dados $p_1, p_2 \in \mathbb{C}PV$ distintos, não-ortogonais e tais que a forma restrita a $\mathbb{C}p_1 + \mathbb{C}p_2$ é não-degenerada, denotaremos $B\lambda p_1, p_2\lambda$ o bissetor cuja espinha real é $G\lambda p_1, p_2\lambda$.

2.4.2. Lema. (1) *Os pontos polares das fatias de um bissetor pertencem à sua espinha real.*

(2) *Sejam L_1, L_2 linhas projetivas distintas. Seja $\{q\} \rightleftharpoons L_1 \cap L_2$. Vamos supor que $q \notin SV$. Então, L_1 e L_2 estão contidas como fatias em um único bissetor. Tal bissetor possui $\mathbb{C}Pq^\perp$ como espinha complexa e $G\lambda p_1, p_2\lambda$ como espinha real, onde $p_i = L_i \cap \mathbb{C}Pq^\perp$, $i = 1, 2$.*

Demonstração. (1) Sejam G e L as espinhas real e complexa de um bissetor B . Seja $F_g \rightleftharpoons \mathbb{C}Pu^\perp$ uma fatia de B , $g \in G$. Como F_g contém o foco de B , temos que $u \in L$. Além disso, u é ortogonal a $g \in G$. Daí, segue dos argumentos após a Observação 1.4.3 que $u \in G$.

(2) É imediato ■

2.4.3. Observação. Para exemplificar a dualidade estabelecida entre as partes negativas dos bissetores hiperbólicos e as partes positivas das geodésicas hiperbólicas, podemos aplicar o Lema 2.4.2, os itens (5) e (6) da Proposição 2.2.21 e a Proposição 2.2.13 ao cálculo de tâncias extremas envolvendo um ponto e um bissetor ou uma linha projetiva e um bissetor.

A título de ilustração, seja B um bissetor hiperbólico cujos vértices são $v_1, v_2 \in SV$. Seja G a espinha real de B . Seja $p \in BV$. Pelo item (1) do Lema 2.4.2, a parte positiva $G \cap AV$ da espinha real de B contém os pontos polares das fatias hiperbólicas de B . Pelo item (5) da Proposição 2.2.21, a expressão $\text{ta}(p, G \cap AV) = \text{Re } \eta(p, v_1, v_2) - |\eta(p, v_1, v_2)|$ fornece o máximo das tâncias entre p e os pontos de $G \cap AV$. Por outro lado, para cada $g \in G \cap AV$, a expressão $\text{ta}(p, \mathbb{C}P g^\perp \cap BV) = 1 - \text{ta}(p, g)$ fornece o mínimo das tâncias entre p e os pontos da fatia $\mathbb{C}P g^\perp \cap BV$. Segue que

$$\text{ta}(p, B \cap BV) \rightleftharpoons 1 - \text{Re } \eta(p, v_1, v_2) + |\eta(p, v_1, v_2)|$$

é o mínimo das tâncias entre p os pontos em B . Claramente, existe uma única fatia $F_g \subset B$ tal que $\text{ta}(p, B \cap BV) = \text{ta}(p, F_g \cap BV)$.

Os demais casos podem ser tratados de modo análogo ■

Utilizando o item (1) da Definição-Lema 2.4.1, é fácil verificar que os pontos de um bissetor que são distintos do foco satisfazem a condição de interseção mínima (1.2.2). Logo, pela Proposição 1.2.3, tais pontos são lisos. A proposição seguinte estuda a topologia de um bissetor em torno do seu foco, bem como a interseção de bissetores com o absoluto.

2.4.4. Lema. (1) *Seja B um bissetor hiperbólico. Então, $B \cap SV \simeq \mathbb{S}^2$.*

(2) *Seja B um bissetor esférico. Então, $B \cap SV \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

(3) *Seja B um bissetor com foco u . Se B é esférico, então $B \cap \bar{B}V$ é cone geodésico com vértice u sobre o toro $B \cap SV$. Se B é hiperbólico, então B é cone com vértice u sobre um toro em uma vizinhança de u . Em ambos os casos, u é o único ponto topologicamente singular de B .*

Demonstração. (1) Seja $u \in AV$ o foco de B , seja G sua espinha real e sejam $v_1, v_2 \in G \cap SV$ os seus vértices. É fácil ver que uma fatia F_g contém pontos isotrópicos somente se $g \in BV$. Vamos supor $\langle u, u \rangle = 1$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = -\frac{1}{2}$. Então, $g(\alpha) \rightleftharpoons (1 - \alpha)v_1 + (1 + \alpha)v_2$, onde $\alpha \in [-1, 1]$, lista todos os pontos da geodésica $G \setminus \{v_1, v_2\} \cap BV$. Temos $\langle g(\alpha), g(\alpha) \rangle = \alpha^2 - 1$. Portanto, os pontos em $B \cap SV$ são da forma $u(\alpha, c) = (1 - \alpha)v_1 + (1 + \alpha)v_2 + cu$, com $c \in \mathbb{C}$ e $\langle u(\alpha, c), u(\alpha, c) \rangle = 0$. Esta última igualdade significa $\alpha^2 + |c|^2 = 1$.

(2) Sejam $u \in BV$ o foco de B e seja G sua espinha real. Sejam $w_1, w_2 \in G$ distintos e ortogonais. Fixamos representantes tais que $\langle u, u \rangle = -1$, $\langle w_i, w_i \rangle = 1$ e tais que $\mathbb{C}P(\mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2) = G$. Então, $g(\alpha, \beta) \rightleftharpoons \alpha w_1 + \beta w_2$, onde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, lista todos os pontos de G . Temos $\langle g(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta) \rangle = 1$. Definimos $c_1 \rightleftharpoons \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $|c_1| = 1$. É claro que toda fatia $F_g \subset B$, $g \in G$, é hiperbólica. Portanto, os pontos isotrópicos de B são dados por $u(c_1, c_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 + c_2 u$, com $\langle u(c_1, c_2), u(c_1, c_2) \rangle = 0$. Esta última igualdade significa $|c_1| = |c_2| = 1$.

(3) No caso esférico, o fato segue do item (2) e das seguintes considerações. Denotando o cone em questão por C , temos $C \setminus \{u\}$ homotópico ao toro. Logo, $\pi_1(C \setminus \{u\}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, enquanto o grupo fundamental de \mathbb{R}^3 menos um ponto é trivial. Argumentos semelhantes podem ser aplicados no caso hiperbólico, tomando-se uma esfera suficientemente pequena em torno do foco ■

A interseção de um bissetor hiperbólico (respectivamente, esférico) com SV é dita a *esfera espinal* (respectivamente, o *toro espinal*) do bissetor.

Um bissetor é determinado por sua espinha real. Além disso, pelo item (3) do lema acima, dado um bissetor B existe um foco $u \in B$ distinguido (topologicamente). Agora, a espinha real de B se determina por $\mathbb{C}P u^\perp \cap B$. Portanto, segue das Observações 2.2.16 e 2.2.19 que há uma correspondência biunívoca entre pares ordenados de pontos distintos em SV e bissetores hiperbólicos orientados e entre pares de pontos ortogonais em AV e bissetores esféricos orientados.²⁸

²⁸Orientamos um bissetor orientando sua espinha real e considerando a orientação padrão (complexa) em suas fatias.

Seja B um bissetor com espinha real G e com espinha complexa L . Uma das conseqüências do item (2) da Definição-Lema 2.4.1 é a de que a equação para G em L presente no Lema 1.4.5 é a mesma equação para B em $\mathbb{C}PV$. Analogamente, a equação para $T_g G$ em $T_g L$, onde $g \in G$, é a mesma para $T_x B$ em $T_x \mathbb{C}PV$, onde $x \in B$ é um ponto distinto do foco de B :

2.4.5. Lema. *Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{C}PV$ distintos, não-ortogonais e tais que a forma restrita a $\mathbb{C}p_1 + \mathbb{C}p_2$ é não-degenerada.*

(1) *O bissetor $B\langle p_1, p_2 \rangle$ é dado em $\mathbb{C}PV$ pela equação*

$$b(x, p_1, p_2) \Leftrightarrow \langle x, p_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, x \rangle - \langle x, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle \langle p_1, x \rangle = 0.$$

(2) *Seja $p \in B\langle p_1, p_2 \rangle$ um ponto distinto do foco de B . Um vetor $\varphi \in T_p \mathbb{C}PV$, $\hat{\varphi} : \mathbb{C}p \rightarrow V$, é tangente a $B\langle p_1, p_2 \rangle$ em p se e só se*

$$\begin{aligned} t(\varphi, p, p_1, p_2) \Leftrightarrow t(\hat{\varphi}(p), p, p_1, p_2) \Leftrightarrow & \langle \hat{\varphi}(p), p_1 \rangle \cdot \langle p_1, p_2 \rangle \cdot \langle p_2, p \rangle + \langle p, p_1 \rangle \cdot \langle p_1, p_2 \rangle \cdot \langle p_2, \hat{\varphi}(p) \rangle - \\ & - \langle \hat{\varphi}(p), p_2 \rangle \cdot \langle p_2, p_1 \rangle \cdot \langle p_1, p \rangle - \langle p, p_2 \rangle \cdot \langle p_2, p_1 \rangle \cdot \langle p_1, \hat{\varphi}(p) \rangle = 0. \end{aligned}$$

(3) *Seja $p \in B\langle p_1, p_2 \rangle \setminus SV$ um ponto distinto do foco de $B\langle p_1, p_2 \rangle$. Então*

$$n(p, p_1, p_2) \Leftrightarrow \langle -, p \rangle \otimes i \cdot \left(\frac{\langle p, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} p_2 - \frac{\langle p, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} p_1 \right) \neq 0$$

é um vetor normal a $B\langle p_1, p_2 \rangle$ em p .

Demonstração. (1) Seja u o foco de $B\langle p_1, p_2 \rangle$. Seja $x \in \mathbb{C}PV$, $x \neq u$. Pelo item (2) da Definição-Lema 2.4.1, o fato que $x \in B\langle p_1, p_2 \rangle$ significa que ${}^u x \in G\langle p_1, p_2 \rangle$. Agora, basta notar que as igualdades $b(x, p_1, p_2) = 0$ e $b({}^u x, p_1, p_2) = 0$ são equivalentes e aplicar o Lema 1.4.5. (Note-se que $b(u, p_1, p_2) = 0$ automaticamente.)

(2) Seja u o foco de $B\langle p_1, p_2 \rangle$. Um vetor tangente $T_p \mathbb{C}PV \ni \varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}p, V/\mathbb{C}p)$ determina um vetor tangente $T_{{}^u p} \mathbb{C}PV \ni {}^u \varphi \in \text{Lin}(\mathbb{C}{}^u p, V/\mathbb{C}{}^u p)$ através da definição ${}^u \varphi({}^u p) \Leftrightarrow {}^u(\hat{\varphi}(p)) + \mathbb{C}{}^u p$. Vamos supor $\langle p_i, p_i \rangle = \sigma_i \in \{-1, 0, +1\}$ e $\langle p_1, p_2 \rangle = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Utilizando o item (1) da Definição-Lema 2.4.1 e a Proposição 1.2.3, temos que o fato de φ ser tangente a $B\langle p_1, p_2 \rangle$ em p significa $\hat{\varphi}(p) \in \mathbb{C}u + \mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}p_2 + \mathbb{C}p$. Em outras palavras, significa que ${}^u \hat{\varphi}({}^u p) \in \mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}p_2 + \mathbb{C}{}^u p$. Resta observar que ${}^u p \in G\langle p_1, p_2 \rangle$, que as expressões $t(\hat{\varphi}(p), p, p_1, p_2) = 0$ e $t({}^u \hat{\varphi}({}^u p), {}^u p, p_1, p_2) = 0$ são equivalentes e aplicar o Lema 1.4.5.

(3) Basta notar que, para $x \in p^\perp$, a expressão $t(x, p, p_1, p_2) = 0$ significa

$$\left\langle \frac{\langle p, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} p_1 - \frac{\langle p, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} p_2, x \right\rangle = \left\langle x, \frac{\langle p, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} p_1 - \frac{\langle p, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} p_2 \right\rangle,$$

ou seja, $\left\langle \frac{\langle p, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} p_1 - \frac{\langle p, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} p_2, x \right\rangle \in \mathbb{R}$, isto é, $\text{Re} \langle n(p, p_1, p_2), x_p \rangle = 0$ ■

Claramente, para um bissetor esférico, podemos reformular o lema anterior em termos dos vértices ortogonais de sua espinha real esférica:

2.4.6. Lema. *Seja B um bissetor esférico cujos vértices são $v_1, v_2 \in AV$.*

(1) *B é dado em $\mathbb{C}PV$ pela equação $b'(x, v_1, v_2) \Leftrightarrow \frac{\langle x, v_1 \rangle \langle v_1, x \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} - \frac{\langle x, v_2 \rangle \langle v_2, x \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = 0$, que é equivalente a $\mu(x, v_1, v_2) = 1$.*

(2) Seja $p \in B$ um ponto distinto do foco de B . Um vetor $\varphi \in T_p \mathbb{C}P^1$, $\hat{\varphi} : \mathbb{C}p \rightarrow V$, é tangente a B em p se e só se

$$t'(\varphi, p, v_1, v_2) \Rightarrow t'(\hat{\varphi}(p), p, v_1, v_2) \Rightarrow \frac{\langle \hat{\varphi}(p), v_1 \rangle \langle v_1, p \rangle + \langle p, v_1 \rangle \langle v_1, \hat{\varphi}(p) \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} - \frac{\langle \hat{\varphi}(p), v_2 \rangle \langle v_2, p \rangle + \langle p, v_2 \rangle \langle v_2, \hat{\varphi}(p) \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = 0.$$

(3) Seja $p \in B \setminus SV$ um ponto distinto do foco de B . Então

$$n'(p, v_1, v_2) \Rightarrow \langle -, p \rangle \otimes -i \cdot \left(\frac{\langle p, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle p, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \right) \neq 0$$

é um vetor normal a B em p .

Demonstração. Basta tomar, nas expressões correspondentes do Lema 2.4.5, $p_1 \Rightarrow w_1 + w_2$ e $p_2 \Rightarrow (1 - i)w_1 + (1 + i)w_2$ (vide a demonstração do Lema 2.2.20) ■

A proposição que se segue apresenta algumas propriedades básicas de bissetores. Além de importantes por si, tais propriedades serão aplicadas na demonstração das classificações de conjuntos totalmente geodésicos (vide Proposições 2.4.16 e 2.4.17). Ainda mais, a demonstração dos fatos que se seguem ilustram várias técnicas úteis para se lidar com bissetores, bem como a utilização dos invariantes de quatro pontos obtida na Classificação 2.2.28.

2.4.7. Proposição. (1) Seja B um bissetor cuja espinha real é G . Sejam $q_1, q_2 \in G$ pontos distintos e não-ortogonais. Então, B divide $\mathbb{C}P^1$ em duas componentes conexas, dadas pelos conjuntos $\{x \in \mathbb{C}P^1 \mid \text{Im}(\langle x, q_1 \rangle \langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, x \rangle) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{C}P^1 \mid \text{Im}(\langle x, q_1 \rangle \langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, x \rangle) < 0\}$.

(2) Seja B um bissetor. Então, toda geodésica contida em B está contida em uma fatia ou em um plano real de B .

(3) Seja B um bissetor hiperbólico com espinha real G . Seja $p \in \mathbb{C}P^1 \setminus B$ e seja $g \in G \setminus SV$. Então, se $\langle p, g \rangle \neq 0$, a geodésica $G \setminus p, g$ é transversal a B em g .

(4) Seja B um bissetor hiperbólico. Seja G uma geodésica hiperbólica tal que $G \not\subset B$. Então, $G \cap \bar{B}V$ intercepta $B \cap \bar{B}V$ no máximo duas vezes. Se G intercepta B não-transversalmente, então há um único ponto de interseção. Além disso, neste caso, $G \cap \bar{B}V$ está toda em uma mesma componente conexa de $\bar{B}V$ dentre aquelas determinadas por $B \cap \bar{B}V$.

(5) Seja R um plano real e seja $p \in \mathbb{C}P^1 \setminus R$. Vamos supor que o ponto $\{q\} \Rightarrow R \cap \mathbb{C}P^1$ (vide Proposição 2.3.3, item (1)) é não-isotrópico. Então, existe um bissetor que contém p e cuja espinha real pertence a R . Se $q \in AV$, então existe um bissetor hiperbólico com estas propriedades.

Demonstração. (1) É uma consequência direta do item (1) do Lema 2.4.5.

(2) Vamos supor que o bissetor B é hiperbólico. Sejam $v_1, v_2 \in SV$ os vértices de B . Seja $G \subset B$ uma geodésica. Analisemos separadamente os diversos casos possíveis.

Geodésica hiperbólica. Suponhamos que $G \subset B$ seja hiperbólica. Sejam $w_1, w_2 \in SV$ os vértices de G . Claramente, podemos supor que B e G possuem, no máximo, um vértice em comum. Caso isto ocorra, trocando se necessário os papéis de v_1 e v_2 e de w_1 e w_2 , podemos ainda supor que $v_2 = w_2$. Como na demonstração do item (1) da Classificação 2.2.28, vamos supor e definir, para a 4-upla (w_1, w_2, v_1, v_2) ,

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_2, v_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = 1, \quad \langle w_1, v_1 \rangle \Rightarrow z_1, \quad \langle w_2, v_2 \rangle \Rightarrow z_2, \quad \langle w_1, v_2 \rangle \Rightarrow z_3,$$

onde $|z_1| = 1$ e $z_3 \neq 0$. Como $G \subset B$, temos $w_1, w_2 \in B$. Daí segue, pelo item (1) do Lema 2.4.5, que

$$\langle w_1, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle = z_1 \bar{z}_3 \in \mathbb{R}, \quad \langle w_2, v_2 \rangle \langle v_2, v_1 \rangle \langle v_1, w_2 \rangle = z_2 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como na primeira das Bases 2.2.24, as expressões $g_{\pm}(\alpha) \rightleftharpoons \alpha^{-1}w_1 \pm \alpha w_2$, com $\alpha > 0$, listam todos os pontos de $G \setminus \{w_1, w_2\}$. Logo, $G \subset B$ implica que, para todo $\alpha > 0$,

$$\langle g_{\pm}(\alpha), v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, g_{\pm}(\alpha) \rangle = (\alpha^{-1}z_1 \pm \alpha)(\alpha^{-1}\bar{z}_3 \pm \alpha z_2) = \alpha^{-2}z_1\bar{z}_3 + \alpha^2 z_2 \pm (z_1 z_2 + \bar{z}_3) \in \mathbb{R},$$

isto é, que $z_1 z_2 + \bar{z}_3 \in \mathbb{R}$. Definimos $r \rightleftharpoons z_1 \bar{z}_3$. Portanto, $\bar{z}_3 = \frac{r}{z_1} = r \bar{z}_1$, de onde obtemos que $z_1 z_2 + r \bar{z}_1 \in \mathbb{R}$, isto é, $z_1 z_2 + r \bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + r z_1$, ou seja, $(z_1 - \bar{z}_1)(z_2 - r) = 0$. Provemos que $z_1 = \bar{z}_1$ significa que G está contida em um plano real de B e que $z_2 = r$ significa que G está contida em uma fatia de B .

De fato, G está contida em um plano real de B se e só se a espinha real de B está contida no bissetor $B \setminus \{w_1, w_2\}$. Em outras palavras, G está contida em um plano real de B exatamente quando $\langle v_1, w_1 \rangle \langle w_1, w_2 \rangle \langle w_2, v_1 \rangle = \bar{z}_1 \in \mathbb{R}$ e $\langle v_2, w_1 \rangle \langle w_1, w_2 \rangle \langle w_2, v_2 \rangle = \bar{z}_3 z_2 = r \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}$, isto é, se e só se $z_1 \in \mathbb{R}$.

Quanto à condição $z_2 = r$, note-se que não podemos ter $z_2 = r = 0$, pois isto implicaria em $z_3 = 0$, impossível. Logo, é imediato verificar que $z_2 = r$ é equivalente a

$$\mathbb{X}(w_1, v_1, w_2, v_2) = \frac{\langle w_1, v_1 \rangle \langle w_2, v_2 \rangle}{\langle w_1, v_2 \rangle \langle w_2, v_1 \rangle} = \frac{z_1 z_2}{z_3} = \frac{z_2}{\bar{z}_1 z_3} = 1.$$

Seja u o foco de B . Reescolhendo representantes (tais que ainda tenhamos $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$) podemos supor $w_1 = \alpha^{-1}v_1 \pm \alpha v_2 + c_1 u$ e $w_2 = \beta^{-1}v_1 \pm \beta v_2 + c_2 u$, para alguns $\alpha, \beta > 0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ (note-se que $w_2 \neq v_2$ uma vez que $z_2 \neq 0$). Neste caso, $\mathbb{X}(w_1, v_1, w_2, v_2) = 1$ significa $\frac{\pm \alpha \langle v_2, v_1 \rangle \cdot \beta^{-1} \langle v_1, v_2 \rangle}{\alpha^{-1} \langle v_1, v_2 \rangle \cdot \pm \beta \langle v_2, v_1 \rangle} = 1$, isto é, $\alpha = \beta$. Em outras palavras, w_1, w_2 pertencem a uma mesma fatia de B . Reciprocamente, se w_1, w_2 pertencem a uma mesma fatia de B , então temos ${}^u w_1 = {}^u w_2$ (em $\mathbb{C}P^V$), de onde segue que $\mathbb{X}(w_1, v_1, w_2, v_2) = \frac{\langle {}^u w_1, v_1 \rangle \langle {}^u w_2, v_2 \rangle}{\langle {}^u w_1, v_2 \rangle \langle {}^u w_2, v_1 \rangle} = 1$.

Geodésica euclidiana. Suponhamos que a geodésica $G \subset B$ seja euclidiana. Podemos supor que o ponto isotrópico de G não é nenhum dos vértices v_i de B , pois isto implicaria automaticamente que G está contida na fatia $\mathbb{C}P^V_i^\perp$. Sejam $p_1, p_2 \in G$ pontos distintos e não-ortogonais. É claro que podemos supor $\langle p_i, v_j \rangle \neq 0$, $i, j = 1, 2$. Para a 4-upla (p_1, p_2, v_1, v_2) , vamos supor

$$\langle p_i, p_i \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle p_2, v_1 \rangle = 1, \quad \langle p_1, v_1 \rangle \rightleftharpoons r, \quad \langle p_2, v_2 \rangle \rightleftharpoons z_1, \quad \langle p_1, v_2 \rangle \rightleftharpoons z_2,$$

onde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Assim, segue de $G \subset B$ que $\langle p_1, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, p_1 \rangle = r \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$, isto é, $z_2 \in \mathbb{R}$, e que $\langle p_2, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, p_2 \rangle = \bar{z}_1 \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, G está contida em um plano real de B .

Geodésica esférica. Vamos supor que a geodésica $G \subset B$ é esférica. Seja L a linha projetiva de G e sejam $w_1, w_2 \in L$ os vértices de G em L . Como na demonstração do item (2) da Classificação 2.2.28, podemos supor e definir

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 1, \quad \langle v_2, w_1 \rangle \rightleftharpoons z_1,$$

$$\langle v_1, w_1 \rangle \rightleftharpoons z_2, \quad \langle v_2, w_2 \rangle \rightleftharpoons z_3, \quad \langle v_1, w_2 \rangle \rightleftharpoons z_4,$$

onde $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$. Não podemos ter $\langle v_2, w_1 \rangle = \langle v_2, w_2 \rangle = 0$ pois, neste caso, w_1, w_2 são distintos, não-isotrópicos e ortogonais na linha projetiva euclidiana $\mathbb{C}\mathbb{P}v_2^\perp$, absurdo. Portanto, trocando se necessário os papéis de w_1 e w_2 , podemos supor $z_1 \neq 0$. Neste caso, podemos ainda tomar $z_1 = 1$ e $z_3 \in \mathbb{R}$. Agora, pelo Lema 2.2.18, a geodésica G é dada por $\{\bar{\varepsilon}w_1 + \varepsilon w_2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$. Logo, o fato $G \subset B$ significa que

$$(2.4.8) \quad \langle \bar{\varepsilon}w_1 + \varepsilon w_2, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, \bar{\varepsilon}w_1 + \varepsilon w_2 \rangle = (\bar{\varepsilon}\bar{z}_2 + \varepsilon\bar{z}_4)(\varepsilon + \bar{\varepsilon}z_3) \in \mathbb{R}$$

para todo $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$.

Vamos supor que $z_3 \neq \pm 1$. Neste caso, substituindo $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = i$ em (2.4.8) vamos obter $(\bar{z}_2 + \bar{z}_4)(1 + z_3) \in \mathbb{R}$ e $(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)(1 - z_3) \in \mathbb{R}$. Segue que $(\bar{z}_2 + \bar{z}_4), (\bar{z}_2 - \bar{z}_4) \in \mathbb{R}$ e, portanto, $z_2, z_4 \in \mathbb{R}$. Logo, $(\bar{\varepsilon}z_2 + \varepsilon z_4)(\varepsilon + \bar{\varepsilon}z_3) \in \mathbb{R}$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, isto é, $z_2 + z_3 z_4 + z_2 z_3 \bar{\varepsilon}^2 + z_4 \varepsilon^2 \in \mathbb{R}$, ou seja, $z_2 z_3 = z_4 \in \mathbb{R}$. Assim, se $z_4 \neq 0$, temos

$$\mathbb{X}(w_1, v_1, w_2, v_2) = \frac{z_2 z_3}{z_4} = 1.$$

Observando-se que G está contida em uma fatia de B se e só se os seus vértices w_1, w_2 também estão e procedendo-se como no caso anterior (geodésica hiperbólica), é fácil ver que a igualdade acima significa que G está contida em uma fatia de B . Se $z_4 = 0$, então $z_2 \neq 0$ (pois, caso contrário, w_1, w_2 estariam contidos na linha projetiva euclidiana $\mathbb{C}\mathbb{P}v_1^\perp$) e, portanto, $z_3 = 0$. Isto significa que w_2 é o foco de B . Segue de $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ que w_1 pertence à espinha real de B . Em outras palavras, G está novamente contida em uma fatia de B .

Finalmente, suponhamos $z_3 = \pm 1$. Neste caso, por (2.4.8), é fácil ver que $z_2 = \pm z_4 \neq 0$. Temos G contida em um plano real de B exatamente quando a espinha real $G \setminus \{v_1, v_2\}$ de B está contida no bissetor cuja espinha real é G . Pelo Lema 2.4.6, isto significa que $\mu(v_1, w_1, w_2) = \mu(v_2, w_1, w_2) = 1$. Temos $\mu(v_1, w_1, w_2) = \frac{z_2^2}{z_4^2} = 1$ e $\mu(v_2, w_1, w_2) = \frac{1}{z_3^2} = 1$.

A demonstração do item no caso de um bissetor esférico é, claramente, análoga.

(3) Sejam $v_1, v_2 \in SV$ os vértices de B e seja u o foco de B . Utilizado a primeira das Bases 2.2.24, temos $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle u, u \rangle = 1$, $g = \alpha^{-1}v_1 \pm \alpha v_2$ e $p = \bar{\varepsilon}v_1 + \varepsilon v_2 + ru$ para determinados $\alpha, r > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$. Utilizando o item (1) do Lema 2.4.5, temos que a condição $p \notin B$ significa $\langle p, v_1 \rangle \langle v_2, p \rangle \notin \mathbb{R}$, isto é, $\varepsilon^2 \notin \mathbb{R}$.

Pelo Lema 1.7.1, o vetor $t_g \Rightarrow \langle -, g \rangle \otimes \frac{{}^g p}{\langle p, g \rangle}$ é tangente a $G \setminus \{p, g\}$ em g . Pelo Lema 2.4.5, t_g é tangente a B em g se e só se

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{{}^g p}{\langle p, g \rangle}, v_1 \right\rangle \langle v_2, g \rangle + \langle g, v_1 \rangle \left\langle v_2, \frac{{}^g p}{\langle p, g \rangle} \right\rangle = \frac{\langle p, v_1 \rangle + \langle p, g \rangle \langle g, v_1 \rangle}{\langle p, g \rangle} \langle v_2, g \rangle + \\ & + \langle g, v_1 \rangle \frac{\langle v_2, p \rangle + \langle g, p \rangle \langle v_2, g \rangle}{\langle g, p \rangle} = \frac{\langle p, v_1 \rangle \langle v_2, g \rangle}{\langle p, g \rangle} + \frac{\langle g, v_1 \rangle \langle v_2, p \rangle}{\langle g, p \rangle} + 2 \langle g, v_1 \rangle \langle v_2, g \rangle \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

isto é, se e só se $\frac{\langle p, v_1 \rangle \langle v_2, g \rangle}{\langle p, g \rangle} + \frac{\langle g, v_1 \rangle \langle v_2, p \rangle}{\langle g, p \rangle} \in \mathbb{R}$. Temos

$$\frac{\langle p, v_1 \rangle \langle v_2, g \rangle}{\langle p, g \rangle} + \frac{\langle g, v_1 \rangle \langle v_2, p \rangle}{\langle g, p \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \alpha^{-1}}{\pm \bar{\varepsilon} \alpha + \varepsilon \alpha^{-1}} \pm \frac{1}{2} \frac{\alpha \varepsilon}{\pm \varepsilon \alpha + \bar{\varepsilon} \alpha^{-1}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{-2} + \alpha^2 \pm 2\varepsilon^2}{\alpha^2 + \alpha^{-2} + 2\operatorname{Re} \varepsilon^2} \notin \mathbb{R},$$

dado que $\varepsilon^2 \notin \mathbb{R}$.

(4) Note-se que, para b e t definidos no Lema 2.4.5, temos formalmente $t(x, x, v_1, v_2) = 2b(x, v_1, v_2)$. Sejam $v_1, v_2 \in SV$ os vértices de B e sejam w_1, w_2 os vértices de G . Definimos $t_{ij} \doteq t(w_i, w_j, v_1, v_2)$. É fácil ver que $t_{12} = t_{21}$. Suponhamos $\langle w_1, w_2 \rangle = -\frac{1}{2}$.

Todo ponto da geodésica se expressa univocamente na forma $g(s) \doteq (1-s)w_1 + (1+s)w_2$, $s \in [-1, 1]$. Logo, o fato $g(s) \in B$ significa

$$(2.4.9) \quad \begin{aligned} & t((1-s)w_1 + (1+s)w_2, (1-s)w_1 + (1+s)w_2, v_1, v_2) = \\ & = (1-s)^2 t_{11} + 2(1-s)(1+s)t_{12} + (1+s)^2 t_{22} = 0. \end{aligned}$$

Segue da expressão acima que $G \cap \overline{BV}$ intercepta $B \cap \overline{BV}$ no máximo duas vezes.

Quanto à segunda afirmação do item, vamos supor inicialmente que G intercepta B de modo não transversal em um dos vértices — digamos, w_1 . Neste caso, segue de $w_1 \in B$ que $t_{11} = 0$. Pela Proposição 1.2.3, o vetor $\varphi : \mathbb{C}w_1 \rightarrow V/\mathbb{C}w_1$ definido através de $\varphi(w_1) = w_2 + \mathbb{C}w_1$ é tangente a $G = \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$ em w_1 . A não-transversalidade da interseção de G e B em w_1 implica, portanto, que $t_{12} = 0$. Como $G \not\subset B$, é fácil ver que devemos ter $t_{22} \neq 0$. Logo, $t(g(s), g(s), v_1, v_2) = 0$ significa $(1+s)^2 t_{22} = 0$, isto é, $s = -1$, ou seja, w_1 é o único ponto de interseção entre a geodésica e o bissetor em questão. Além disso, temos $\text{Im}(g(s), v_1, v_2) = \frac{1}{2} \text{Im} t(g(s), g(s), v_1, v_2) = \frac{1}{2}(1+s)^2 \text{Im} t_{22}$, $s \in [-1, 1]$ de onde segue que $G \cap \overline{BV}$ está toda de um mesmo lado com relação a $B \cap \overline{BV}$.

Finalmente, vamos supor que G intercepta B de modo não transversal em um ponto $g(s_0) \in G$, $g(s_0) \neq w_i$. Neste caso, reescolhendo os representantes $w_1, w_2 \in V$ (e mantendo $\langle w_1, w_2 \rangle = -\frac{1}{2}$), podemos supor $g(s_0) = g(0) = w_1 + w_2$. Temos $t(w_1 + w_2, w_1 + w_2, v_1, v_2) = 0$, isto é, $t_{11} + 2t_{12} + t_{22} = 0$. Além disso, o vetor $\varphi : \mathbb{C}(w_1 + w_2) \rightarrow V/\mathbb{C}(w_1 + w_2)$ definido através de $\varphi(w_1 + w_2) = w_1 + w_2 + \mathbb{C}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) + \mathbb{C}(w_1 + w_2)$ é tangente a G em $w_1 + w_2$. Logo, a não-transversalidade da interseção de G e B em $w_1 + w_2$ implica que $t(w_1 - w_2, w_1 + w_2, v_1, v_2) = 0$, isto é, que $t_{11} = t_{22}$. Portanto, temos $t_{11} = t_{22} = -t_{12}$. Como $G \not\subset B$, $t_{11} \neq 0$. A equação (2.4.9) lê-se, neste caso, como $(1-s)^2 - 2(1-s)(1+s) + (1+s)^2 = 0$, isto é, $((1-s) - (1+s))^2 = 0$, ou seja $s = 0$. Em outras palavras, $g(0) = w_1 + w_2$ é o único ponto de interseção de G e B . Finalmente, $\text{Im}(g(s), v_1, v_2) = \frac{1}{2}((1-s) - (1+s))^2 \text{Im} t_{11}$, de onde segue que $G \cap \overline{BV}$ está toda de um mesmo lado com relação a $B \cap \overline{BV}$.

(5) Seja $G' \subset \mathbb{R}$ a geodésica cujo polar em \mathbb{R} é q . Como $q \notin SV$, existe $g \in G'$ tal que a geodésica G em \mathbb{R} ligando q e g (vide item (3) do Lema 2.3.1) é não-euclidiana. Provemos que p pertence ao bissetor B cuja espinha real é G . Realmente, é fácil ver que $L\eta q, g\eta \cap \mathbb{C}Pq^\perp = \{g\}$. Além disso, pelo item (2) do Lema 2.3.1, temos que $p \in \mathbb{C}Pq^\perp$ e que o foco u de B , $\mathbb{C}Pu^\perp = L\eta q, g\eta$, sendo ortogonal a q , também pertence a $\mathbb{C}Pq^\perp$. Se $p = u$, não há nada a fazer. Caso contrário, $\{^u p\} = \mathbb{C}Pu^\perp \cap L\eta p, u\eta = L\eta q, g\eta \cap \mathbb{C}Pq^\perp = \{g\} \in G$. Finalmente, se $q \in AV$, então a geodésica G' é hiperbólica. É claro que podemos tomar $g \in G'$ de modo que G é hiperbólica. ■

Um conjunto $C \subset \mathbb{C}PV$ será dito *totalmente geodésico* se é não-vazio e contém a geodésica ligando quaisquer de seus pontos distintos, se for única. É claro que linhas projetivas e planos reais são totalmente geodésicos (vide Observação 1.4.3). Para ilustrar as ferramentas desenvolvidas, classificaremos os conjuntos totalmente geodésicos de BV e de $\mathbb{C}PV$. Provavelmente ainda mais importante é que o roteiro desta classificação sugere um caminho para tratar envelopes convexos de um número finito de pontos, que se aplicam no estudo da finitude de grupos discretos.

Vamos assumir, por um momento, que um conjunto totalmente geodésico $C \subset BV$ é fechado. Seja $p \in BV$. É fácil verificar que a reflexão de p em C está bem definida. De fato, existe um ponto $q \in C$ mais próximo de p . Se existe $q' \in C$ distinto de q e também mais próximo de p , então $p \notin C$ e os pontos q, q' são mais próximos de p na geodésica $G\eta q, q'\eta \subset C$. Isto contradiz o item (5) da Proposição 2.2.21. Logo, a reflexão $R(p)$ de p em C é a reflexão de p em q . Provemos que a reflexão em C é uma isometria.

Sejam $p_1, p_2 \in BV$ e sejam $q_1, q_2 \in C$ os respectivos pontos mais próximos de p_1, p_2 em C . As reflexões de p_1 e p_2 em C são reflexões em um mesmo ponto, se $q_1 = q_2$, ou reflexões na geodésica $G \setminus \{q_1, q_2\} \subset C$, se $q_1 \neq q_2$. É fácil ver, em ambos os casos, que $\text{ta}(p_1, p_2) = \text{ta}(R(p_1), R(p_2))$, o que prova o afirmado. Portanto, existe uma isometria que fixa C pontualmente. Sabendo que as isometrias (holomorfas) de BV estão em PUV , é fácil listar todos os C 's possíveis. No entanto, o caminho mais adequado para provar que as isometrias de BV estão em PUV exige a classificação de conjuntos totalmente geodésicos, realizada no que se segue.

As Proposições seguintes descrevem todos os conjuntos totalmente geodésicos em BV e em $\mathbb{C}PV$. Por simplicidade, entenderemos por *geodésica (linha projetiva, plano real) em BV* a restrição para BV de uma geodésica (linha projetiva, plano real).

2.4.10. Proposição. *Seja $C \subset BV$ um conjunto totalmente geodésico. Então C está descrito em um dos itens abaixo:*

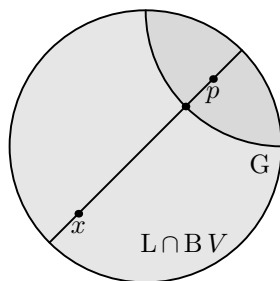
- (1) um único ponto.
- (2) uma geodésica em BV .
- (3) uma linha projetiva em BV .
- (4) um plano real em BV .
- (5) BV .

2.4.11. Proposição. *Seja $C \subset \mathbb{C}PV$ um conjunto totalmente geodésico. Então C está descrito em um dos itens abaixo:*

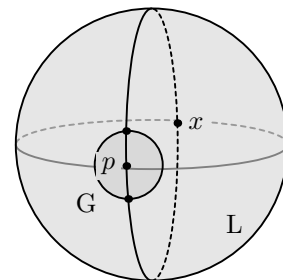
- (1) um único ponto.
- (2) uma coleção de (dois ou três) pontos distintos dois a dois ortogonais.
- (3) uma geodésica.
- (4) uma geodésica não-euclidiana e o ponto polar da linha projetiva que contém tal geodésica.
- (5) uma linha projetiva.
- (6) uma linha projetiva não-euclidiana e seu ponto polar.
- (7) um plano real.
- (8) $\mathbb{C}PV$.

Dividiremos a demonstração da proposição acima em uma série de lemas, que se segue. Por simplicidade, denominaremos *geodésica (plano real, linha projetiva, bissetor) em BV* a restrição para BV de uma geodésica (plano real, linha projetiva, bissetor).

2.4.12. Lema. *Seja $C \subset BV$ ($\mathbb{C}PV$) um conjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica G em BV ($\mathbb{C}PV$) e contendo um ponto $p \notin G$. Se $p \in L$, onde L é linha projetiva de G , então $L \cap BV \subset C$ (respectivamente, $L \subset C$).*

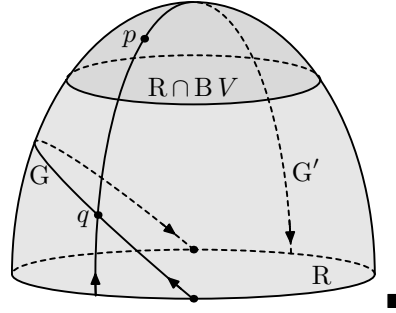


Demonstração. É uma aplicação dos itens (2), (4), (7) e (8) do Lema 2.2.29. A geodésica G em BV ($\mathbb{C}PV$) divide $L \cap BV$ (respectivamente, L) em duas componentes conexas. Seja $x \in L \cap BV$ (respectivamente, $x \in L$) tal que x e p pertencem a componentes conexas distintas. A (uma) geodésica em BV ($\mathbb{C}PV$) passando por p e x intercepta G em um único ponto (dois pontos distintos). Este (um destes) é não-ortogonal a p . Segue que $x \in C$ ■



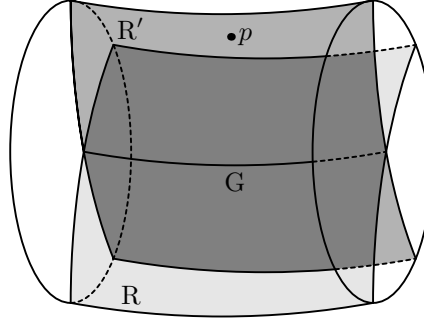
2.4.13. Lema. *Seja $C \subset BV$ ($\mathbb{C}PV$) um conjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica G em BV ($\mathbb{C}PV$) e contendo um ponto $p \notin G$. Se G e p determinam um (único) plano real R , então $R \cap BV \subset C$ (respectivamente, $R \subset C$).*

Demonstração. Vamos supor, inicialmente, que $C \subset BV$. Neste caso, G divide o disco $R \cap BV$ em duas componentes conexas e temos $R \cap BV \subset C$ por argumentos análogos aos apresentados no lema anterior. Suponhamos $C \subset \mathbb{C}PV$. Como R é único, temos que p não é o polar de G em R . Assim, existe em G um único ponto q ortogonal a p (dado pela interseção de G com a geodésica cujo polar é p — vide Lema 2.3.1, item(3)). Seja G' a geodésica em R contendo p e q . É fácil ver que $R \setminus G' \subset C$, de onde segue diretamente que $R \subset C$.



2.4.14. Lema. *Seja $C \subset BV$ ($\mathbb{C}PV$) um conjunto totalmente geodésico contendo um plano real R em BV ($\mathbb{C}PV$) e contendo um ponto $p \notin R$. Então $C = BV$ ($\mathbb{C}PV$).*

Demonstração. Vamos supor, inicialmente, que $C \subset BV$. Pelo item (5) da Proposição 2.4.7, existe uma geodésica $G \subset R$ em BV tal que p pertence ao bissetor B em BV cuja espinha real é G . Pelo item (4) da Definição-Lema 2.4.1, $R \subset B$. Seja $R' \subset B$ o plano real em BV determinado por G e p . Pelo Lema 2.4.13, $R' \subset C$. Considerando as interseções de R, R' com cada fatia de B em BV e utilizando o Lema 2.4.12, é fácil ver que $B \subset C$. Observando que, pelo item (2) da Proposição 2.4.7, B não é um conjunto totalmente geodésico em BV e que B divide BV em duas componentes conexas distintas, obtemos $C = BV$. Por fim, suponhamos $C \subset \mathbb{C}PV$. É claro que podemos supor $p \in BV$, pois $R \cap BV \neq \emptyset$. Pelos argumentos acima, $BV \subset C$. Portanto, $C = \mathbb{C}PV$.

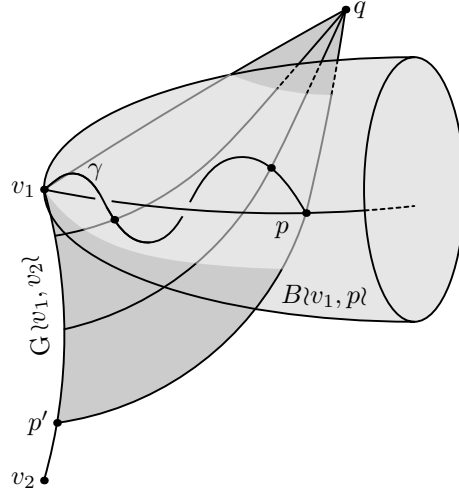


Seja p um ponto em $\mathbb{C}PV$. Seja D um subconjunto qualquer de $\mathbb{C}PV$. Denotaremos por *cone geodésico com vértice p sobre D* o subespaço $C[p, D] \equiv \bigcup_{x \in D \setminus \mathbb{C}Pp^\perp} G[p, x]$ (definimos $G[p, p] \equiv p$).

2.4.15. Lema. *Seja $C \subset BV$ um conjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica G em BV cujos vértices são $v_1, v_2 \in SV$ e contendo um ponto $p \in BV$. Então, $G \setminus v_i, p \cap BV \subset C$, $i = 1, 2$.*

Demonstração. É claro que podemos supor $p \notin G$. Pelo Lema 2.4.13, podemos supor ainda que G e p não determinam um plano real. Seja $p' \in G$. Pelo item (3) da Proposição 2.4.7, a geodésica $G \setminus p', p$

é transversal ao bissetor $B\ell_{v_1, p\ell}$ em p (note-se que $p' \notin B\ell_{v_1, p\ell}$ uma vez que p, v_1, v_2 não determinam um plano real). Pelo item (4) da Proposição 2.4.7, a geodésica $G\ell_{v_1, v_2\ell} \cap BV$ está toda de um mesmo lado de BV relativamente a $B\ell_{v_1, p\ell} \cap BV$. Seja $q \in G\ell_{v_1, v_2\ell} \cap BV$ tal que $G\ell_{v_1, v_2\ell} \cap BV$ e q pertencem a lados distintos de BV com relação a $B\ell_{v_1, p\ell} \cap BV$. O cone geodésico $C[q, G\ell_{v_1, v_2\ell} \cap BV]$ intercepta $B\ell_{v_1, p\ell} \cap BV$ em uma curva $\gamma \subset C$ que passa por p e que, por continuidade, passa por v_1 .



É claro que o cone geodésico $C[p, \gamma] \subset B\ell_{v_1, p\ell}$. Seja $F_g, g \in G\ell_{v_1, p\ell} \cap BV$, uma fatia de $B\ell_{v_1, p\ell}$ em BV tal que p e v_1 pertencem a lados distintos de $B\ell_{v_1, p\ell} \cap BV$ relativamente a F_g . Podemos supor que $g \notin C[p, \gamma] \subset C$ (pois, caso contrário, já temos $G\ell_{v_1, p\ell} \cap BV \subset C$). Assim, $C[p, \gamma] \cap F_g$ é uma curva que, por continuidade, passa por g . Daí segue que $g \in C$ (pois $C[p, \gamma] \cap F_g$ é uma geodésica passando por g ou, caso contrário, temos $F_g \cap BV \subset C$ pelo Lema 2.4.12) ■

2.4.16. Lema. *Seja $C \subset BV$ um conjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica G em BV e contendo um ponto $p \notin G$. Se p e G não determinam um plano real e p não pertence à linha projetiva de G , então $C = BV$.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2 \in SV$ os vértices de G e seja $L \cong \mathbb{C}P^1$ a linha projetiva de G . Seja $v_3 \in SV$ o vértice de $G\ell_{v_2, p\ell}$ distinto de v_2 . Pelo lema anterior, $G\ell_{v_2, v_3\ell} \cap BV \subset C$. Pelo item (6) do Lema 2.2.29 e sua demonstração, existe (um único) $p' \in G\ell_{v_1, v_2\ell} \cap BV$ tal que $G\ell_{v_1, v_2\ell}$ e $G\ell_{v_3, p'\ell}$ são perpendiculares em p' . Utilizando a primeira das Bases 2.2.24, podemos supor $\langle u, u \rangle = 1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$, $v_3 = \bar{\varepsilon}v_1 - \varepsilon v_2 + ru$, $p' = v_1 - v_2$, onde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$ e $r > 0$ (uma vez que $p \notin L$, portanto, $v_3 \notin L$). Temos $\langle v_3, v_3 \rangle = -\operatorname{Re} \varepsilon^2 + r^2 = 0$, de onde segue que $\operatorname{Re} \varepsilon^2 > 0$ e, portanto, $\operatorname{Re} \varepsilon \neq 0$. Agora, é fácil verificar que $v_4 \equiv 2\operatorname{Re} \varepsilon p' - v_3 \in SV$ é o vértice de $G\ell_{v_3, p'\ell}$ distinto de v_3 : de fato, temos $\langle p', v_3 \rangle = \langle v_1 - v_2, \bar{\varepsilon}v_1 - \varepsilon v_2 \rangle = -\operatorname{Re} \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\langle v_4, v_4 \rangle = 4(\operatorname{Re} \varepsilon)^2 \langle p', p' \rangle - 4\operatorname{Re} \varepsilon \langle p', v_3 \rangle = 0$. Segue do fato que v_3 e $G\ell_{v_1, v_2\ell}$ não determinam um plano real que

$$\operatorname{Im} \langle v_3, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle = -\frac{1}{8} \operatorname{Im} \varepsilon^2 \neq 0.$$

Em particular, $\operatorname{Im} \varepsilon \neq 0$.

Os pontos v_3 e v_4 pertencem a lados distintos de BV com relação ao bissetor $B\ell_{v_1, v_2\ell}$. De fato, temos

$$\operatorname{Im} \langle v_4, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle = \operatorname{Im} \frac{1}{2} \langle 2\operatorname{Re} \varepsilon (v_1 - v_2) - v_3, v_1 \rangle \langle v_2, 2\operatorname{Re} \varepsilon (v_1 - v_2) - v_3 \rangle =$$

$$= \operatorname{Im} \frac{1}{2} (-\operatorname{Re} \varepsilon - \langle \bar{\varepsilon} v_1 - \varepsilon v_2, v_1 \rangle) (\operatorname{Re} \varepsilon - \langle v_2, \bar{\varepsilon} v_1 - \varepsilon v_2 \rangle) = \operatorname{Im} \frac{1}{2} \left(-\operatorname{Re} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(\operatorname{Re} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \right) = -\frac{1}{8} \operatorname{Im} \bar{\varepsilon}^2.$$

Além disso, pelo item (4) da Proposição 2.4.7, a geodésica $G \setminus v_2, v_3 \setminus \cap \bar{B}V$ está toda de um mesmo lado de $B \setminus v_1, v_2 \setminus \cap \bar{B}V$. Pelo Lema 2.4.15, o cone geodésico $C \setminus [v_4, G \setminus v_2, v_3 \setminus \cap BV] \subset C$.

Suponhamos $C \setminus [v_4, G \setminus v_2, v_3 \setminus \cap BV] \cap B \setminus v_1, v_2 \setminus \subset G \setminus v_1, v_2 \setminus$. Observando-se que $\langle \bar{\varepsilon} v_2, v_3 \rangle = \bar{\varepsilon} \langle v_2, \bar{\varepsilon} v_1 - \varepsilon v_2 \rangle = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, é fácil ver que todos os pontos em $G \setminus v_2, v_3 \setminus \cap BV$ se expressam na forma $\gamma(\alpha) \rightleftharpoons \alpha^{-1} \bar{\varepsilon} v_2 - \alpha v_3$, onde $\alpha > 0$. Além disso, para cada $\alpha > 0$, os pontos pertencentes a $L \setminus v_4, \gamma(\alpha) \setminus \setminus \{v_4\}$ têm a forma

$$c v_4 + \gamma(\alpha) = c(2 \operatorname{Re} \varepsilon (v_1 - v_2) - v_3) + \alpha^{-1} \bar{\varepsilon} v_2 - \alpha v_3,$$

onde $c \in \mathbb{C}$. Como $v_4 \notin L \setminus v_1, v_2 \setminus$, temos $L \setminus v_4, \gamma(\alpha) \setminus \neq L \setminus v_1, v_2 \setminus$. Portanto,

$$L \setminus v_4, \gamma(\alpha) \setminus \cap L \setminus v_1, v_2 \setminus = (-2\alpha \operatorname{Re} \varepsilon) (v_1 - v_2) + (\alpha^{-1} \bar{\varepsilon}) v_2 \subset G \setminus v_1, v_2 \setminus.$$

Logo devemos ter, para todo $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \langle (-2\alpha \operatorname{Re} \varepsilon) (v_1 - v_2) + (\alpha^{-1} \bar{\varepsilon}) v_2, v_1 \rangle \langle v_2, (-2\alpha \operatorname{Re} \varepsilon) (v_1 - v_2) + (\alpha^{-1} \bar{\varepsilon}) v_2 \rangle = \\ = -\alpha \operatorname{Re} \varepsilon \left(\alpha \operatorname{Re} \varepsilon + \frac{\alpha^{-1} \bar{\varepsilon}}{2} \right) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que é absurdo, dado que $\operatorname{Re} \varepsilon \neq 0$ e $\varepsilon \notin \mathbb{R}$. Segue que $C \setminus [v_4, G \setminus v_2, v_3 \setminus \cap BV] \cap B \setminus v_1, v_2 \setminus \not\subset G \setminus v_1, v_2 \setminus$. Resta aplicar os Lemas 2.4.13 e 2.4.14 ■

2.4.17. Lema. *Seja $C \subset \mathbb{C}PV$ um conjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica G e um ponto $p \notin G$. Se p e G não determinam um plano real, p não pertence à linha projetiva de G e p não é o polar de tal linha projetiva, então $C = \mathbb{C}PV$.*

Demonstração. Seja $L \rightleftharpoons \mathbb{C}P u^\perp$ a linha projetiva de G .

Se L for hiperbólica, seja $g \in G \cap BV$ um ponto não-ortogonal a p e seja $g' \in G \cap BV$, $g' \neq g$. Então, é fácil ver que a geodésica $G \setminus [p, g] \setminus \cap BV \subset C$ e o ponto $g' \in C$ não determinam um plano real (pois p e G não determinam um plano real) e que g' não pertence à linha projetiva de $G \setminus [p, g] \setminus$ (pois p não pertence à linha projetiva de G). Logo, pelo lema anterior, $BV \subset C$, de onde segue diretamente que $C = \mathbb{C}PV$.

Se L for euclidiana, temos $\langle p, u \rangle \neq 0$ uma vez que $p \notin \mathbb{C}P u^\perp$. A geodésica $G \setminus [p, u] \setminus$ é hiperbólica. Seja $g \in G \setminus [p, u] \setminus \cap BV$ e sejam $g'_1, g'_2 \in G$ distintos, não-ortogonais e não-ortogonais a g . Então, as geodésicas hiperbólicas $G \setminus [g, g'_1] \setminus$ e $G \setminus [g, g'_2] \setminus$ não pertencem a um mesmo plano real (caso contrário, g'_1, g'_2 pertenceriam a tal plano, de onde segue que o mesmo pode ser dito com relação a G e p). Logo, aplicando o lema anterior, obtemos $C = \mathbb{C}PV$.

Argumentos análogos ao do parágrafo acima permitem lidar com o caso em que L é esférica e $p \in \bar{B}V$.

Portanto, resta considerar que L é esférica e que $p \in AV$. Tomando a terceira das Bases 2.2.24, sejam $w_1, w_2 \in G$ ortogonais e tais que ${}^u p \neq w_i$. Podemos supor $\langle u, u \rangle = -1$, $\langle w_i, w_i \rangle = 1$, $\mathbb{C}P(\mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2) = G$ e $p = c^{-1}w_1 + cw_2 + ru$, onde $0 \neq c \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. O fato que G e p não determinam um plano real significa

$$\operatorname{Im} \langle p, w_1 + w_2 \rangle \langle w_1 + w_2, w_1 \rangle \langle w_1, p \rangle = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{|c|^2} + \frac{c}{\bar{c}} \right) = \operatorname{Im} \frac{c}{\bar{c}} \neq 0.$$

Temos $\langle w_1, cp \rangle = 1$. Logo, $q \rightleftharpoons 2w_1 - cp \in G \setminus [p, w_1] \setminus$. Segue da expressão acima e de

$$\operatorname{Im} \langle 2w_1 - cp, w_1 + w_2 \rangle \langle w_1 + w_2, w_1 \rangle \langle w_1, 2w_1 - cp \rangle = \operatorname{Im}(1 - c^2) = -\operatorname{Im} c^2 = -|c|^2 \operatorname{Im} \frac{c}{\bar{c}}$$

que os pontos p e q pertencem a lados distintos de $\mathbb{C}PV$ com relação ao bissetor $B\langle w_1, w_2 \rangle$. Além disso, temos $\langle q, w_2 \rangle = \langle 2w_1 - cp, w_2 \rangle = -c\langle p, w_2 \rangle \neq 0$. Portanto, $\mathbb{C}Pq^\perp \neq L\langle p, w_2 \rangle$. Daí segue que existe um segmento de geodésica $\gamma = \gamma(t) \rightleftharpoons (1-t)p + tcw_2 \subset G\langle p, w_2 \rangle$, $t \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, contido em um mesmo lado de $\mathbb{C}PV$ com relação a $B\langle w_1, w_2 \rangle$ e que não contém pontos ortogonais a q . Temos $C[q, \gamma] \subset C$. Vamos supor que $C[q, \gamma] \cap B\langle w_1, w_2 \rangle \subset G\langle w_1, w_2 \rangle$. Para cada $t \in (0, \delta)$, os pontos pertencentes a $L\langle q, \gamma(t) \rangle \setminus \{q\}$ têm a forma

$$zq + \gamma(t) = z(2w_1 - cp) + (1-t)p + tcw_2,$$

onde $z \in \mathbb{C}$. Temos

$$L\langle q, \gamma(t) \rangle \cap L\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{2(1-t)}{c}w_1 + tcw_2 \subset G\langle w_1, w_2 \rangle.$$

Logo, para todo $t \in (0, \delta)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\langle \frac{2(1-t)}{c}w_1 + tcw_2, w_1 + w_2 \right\rangle \left\langle w_1, \frac{2(1-t)}{c}w_1 + tcw_2 \right\rangle &= \\ = \operatorname{Im} \left(\left(\frac{2(1-t)}{c} + tc \right) \cdot \frac{2(1-t)}{\bar{c}} \right) &= 2t(1-t) \operatorname{Im} \frac{c}{\bar{c}} = 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo. Segue que $C[q, \gamma] \cap B\langle w_1, w_2 \rangle \not\subset G\langle w_1, w_2 \rangle$. Resta aplicar os Lemas 2.4.13 e 2.4.14 ■

Finalmente, temos a

Demonstração da Proposição 2.4.10. É óbvio que um único ponto em BV constitui um conjunto totalmente geodésico C . Vamos supor que C contém dois pontos distintos. Neste caso, C contém a geodésica G em BV que os liga. Suponhamos que C contém um terceiro ponto $p \notin G$. Seja L a linha projetiva de G .

Se $p \in L$, então, pelo Lema 2.4.12, $C \supset L$. Se, além disto, C contém um ponto fora de L , tomamos em L uma geodésica G' tal que p e G' não determinam um plano real (basta tomar uma geodésica que não passa pela projeção de p em L) e, pelo Lema 2.4.16, obtemos $C = BV$.

Se $p \notin L$ e G e p determinam um plano real R então, pelo Lema 2.4.13, $C \supset R$. Se, além disso, C contém um ponto fora de R , então, pelo Lema 2.4.14, $C = BV$.

Se $p \notin L$ e G e p não determinam um plano real, então, pelo Lema 2.4.16, $C = BV$ ■

A demonstração da Proposição 2.4.11 é análoga. Além disto pode-se provar, por argumentos semelhantes, que não há em AV conjuntos totalmente geodésicos além daqueles esperados.

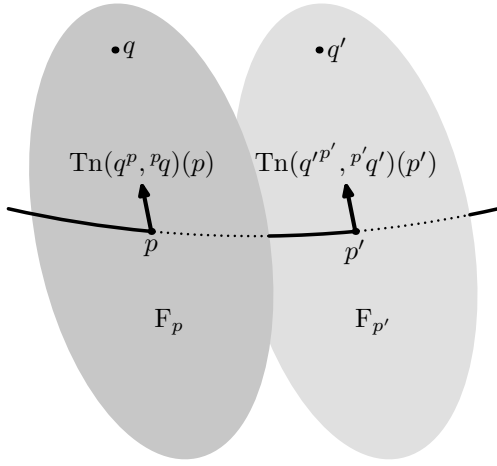
Por fim, introduziremos o conceito de transporte meridional com o objetivo de provar a curiosa dualidade entre transporte meridional e transporte paralelo observada após o Lema 3.6 em [AGG].

Seja B um bissetor cuja espinha real é G . Sejam $p, p' \in G \setminus SV$ pontos distintos e não-ortogonais. Seja q um ponto distinto do foco de B e pertencente à fatia F_p . O vetor $v_p \rightleftharpoons \operatorname{Tn}(q^p, {}^p q)(p) = \frac{q_p}{\langle q, p \rangle} \in T_p G\langle p, q \rangle \subset T_p F_p$ (vide Lema 1.7.1) é ortogonal à espinha complexa $L\langle p, p' \rangle$ em p . Logo, pela Proposição 1.7.6, o transporte paralelo de v_p ao longo da geodésica $G\langle p, p' \rangle$ é dado por

$$v_{p'} \rightleftharpoons \operatorname{Ct} \left(p, \frac{{}^p q}{\langle q, p \rangle} \right) (p') = \frac{\langle p', p \rangle ({}^p q)_{p'}}{\langle p', p' \rangle \langle q, p \rangle \sqrt{\operatorname{ta}(p, p')}} \in T_{p'} F_{p'}.$$

Na fatia $F_{p'}$, existe um único ponto q' para um valor especificado de $\frac{{}^{p'} q'}{\langle q', p' \rangle}$ (de fato, p' e o foco de B formam uma base ortogonal para a fatia em questão). Portanto, existe um único $q' \in F_{p'}$ tal que $v_{p'} = \operatorname{Tn}(q'^{p'}, {}^{p'} q')(p') = \frac{{}^{p'} q'}{\langle q', p' \rangle}$. Através de um cálculo direto, é fácil verificar que

$$(2.4.18) \quad q' = \langle p', p \rangle {}^p q + \langle q, p \rangle \sqrt{\operatorname{ta}(p, p')} p'.$$



O ponto q' é dito o *transporte meridional* de q ao longo da geodésica $G(p, p')$. O transporte meridional identifica quase todas as fatias de um bissetor, excetuando-se aquelas tangentes a SV , se existirem. Tal identificação será chamada *identificação meridional*. Através da identificação meridional, cada ponto do bissetor gera uma curva denominada seu ℓ -meridiano. Em particular, o ℓ -meridiano de um ponto na espinha real é a própria espinha real. É fácil ver, utilizando a equação (2.4.18), que todo ℓ -meridiano passa pelos vértices do bissetor, caso existam.

2.4.19. Proposição. *Seja B um bissetor cuja espinha real é G . Para $q \in G \setminus SV$, associamos a um vetor tangente $x_q = \langle -, q \rangle \otimes x \in T_q \mathbb{C}P^V$, $x \in q^\perp$, o ponto x pertencente à fatia $\mathbb{C}P^q^\perp$ de B . Sejam $p, p' \in G \setminus SV$ pontos distintos, não-ortogonais e de mesma assinatura. Sejam $g, g' \in G \setminus SV$ os respectivos pontos polares das fatias $F_p, F_{p'}$. Seja $x_g \in T_g \mathbb{C}P^V$, $x \in g^\perp$, um vetor tangente. Então, o transporte paralelo de x_g ao longo de $G(p, p')$ produz o transporte meridional dos pontos associados.*

Demonstração. É claro que g, g' são distintos, não-ortogonais e de mesma assinatura. Como no Corolário 1.7.6, tomemos $x = h + v$, onde $h, v \in g^\perp$, $h \in \mathbb{C}g + \mathbb{C}g'$ e $v \in (\mathbb{C}g + \mathbb{C}g')^\perp$. De $h \in \mathbb{C}^g g'$ segue que $h \in \mathbb{C}p$, isto é, $h = cp$ para $0 \neq c \in \mathbb{C}$ (pois ${}^g g' \in G$ e p é o único ponto ortogonal a g em G). Transportando paralelamente x_g ao longo de $G(p, p')$ obtemos

$$\begin{aligned} x'_{g'} &= \text{Tn}(g, \langle g, g \rangle h)(g') + \text{Ct}(g, v)(g') = \\ &= \left(\frac{\langle g, g \rangle}{\langle g, g' \rangle} h + \frac{\langle g', g \rangle}{\langle g', g' \rangle \sqrt{\text{ta}(g, g')}} v \right)_{g'} \in T_{g'} \mathbb{C}P^V. \end{aligned}$$

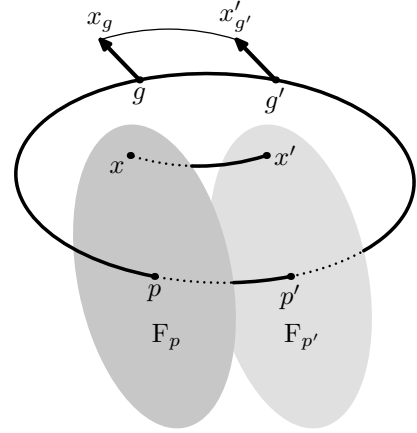
Logo, $x' = \frac{\langle g, g \rangle}{\langle g, g' \rangle} g' h + \frac{\langle g', g \rangle}{\langle g', g' \rangle \sqrt{\text{ta}(g, g')}} v$ é o ponto associado a $x'_{g'}$. É fácil ver que podemos tomar $x' = g' h + \sqrt{\text{ta}(g, g')} v$. Temos

$$g' h = h - \frac{\langle h, g' \rangle}{\langle g', g' \rangle} g' = h - \frac{\langle h, p' \rangle}{\langle p' p, p' p \rangle} p' p = cp - c p' p = \frac{\langle h, p' \rangle}{\langle p', p' \rangle} p'.$$

Portanto, observando-se que $\text{ta}(g, g') = \text{ta}(p, p')$,

$$\begin{aligned} x' &= g' h + \sqrt{\text{ta}(g, g')} v = \frac{\langle h, p' \rangle}{\langle p', p' \rangle} p' + \sqrt{\text{ta}(p, p')} v \simeq \langle h, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} p' + \frac{\langle p', p' \rangle \langle h, p \rangle}{\langle h, p' \rangle} \text{ta}(p, p') v = \\ &= \langle h, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} p' + \frac{\langle p', p' \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p, p' \rangle} \text{ta}(p, p') v = \langle h, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} p' + \langle p', p \rangle v, \end{aligned}$$

onde \simeq significa \mathbb{C} -proporcionalidade. Pela equação (2.4.18) o transporte meridional de $x = h + v$ ao longo de $G(p, p')$ é dado por $\langle p', p \rangle^p (h + v) + \langle h + v, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} p' = \langle p', p \rangle v + \langle h, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} p'$ ■



2.5. Apêndice: Estrutura CR e calibrações

Utilizando um ponto de vista livre de coordenadas, estudamos brevemente neste Apêndice calibrações para a estrutura de contato no absoluto.

Seja $u \in V$, $\langle u, u \rangle \leq 0$. Seja $p \in SV$, $p \neq u$ (em particular, $\langle p, u \rangle \neq 0$). Em uma vizinhança de p disjunta de $\mathbb{C}P u^\perp$, definimos a função

$$f_u(x) \doteq \frac{\langle x, x \rangle}{\langle x, u \rangle \langle u, x \rangle}.$$

Nesta vizinhança, temos $SV = f_u^{-1}(0)$. O fato de um vetor $\varphi \in T_p \mathbb{C}P V \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}p, V/\mathbb{C}p)$ ser tangente a SV significa $\varphi(f_u)(p) = 0$. Através de um cálculo direto, obtemos

$$(2.5.1) \quad \varphi(f_u)(p) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f}_u(p + \varepsilon \hat{\varphi}(p)) = 2 \text{Re} \frac{\langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle}{\langle p, u \rangle \langle u, p \rangle},$$

Assim, é fácil descrever o espaço tangente a SV em p :

$$(2.5.2) \quad T_p SV = \{ \varphi \in \text{Lin}(\mathbb{C}p, V/\mathbb{C}p) \mid \langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle \in i\mathbb{R} \}.$$

(É claro que a descrição acima independe da escolha do levantamento $\hat{\varphi} : \mathbb{C}p \rightarrow V$ para φ , uma vez que p é isotrópico.)

A linha projetiva euclidiana $L \doteq \mathbb{C}P p^\perp \ni p$ é tal que $T_p L \subset T_p SV$. De fato, seja $\varphi \in T_p L$. Pela Proposição 1.2.3, temos que $\hat{\varphi}(p) \in p^\perp + \mathbb{C}p$. Portanto, $\langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle = 0$, de onde segue o afirmado. Obtemos, assim, uma decomposição $T_p SV = T_p L \oplus N_p$, onde $N_p \doteq \{ \varphi \in T_p \mathbb{C}P V \mid \langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle \in i\mathbb{R} \setminus \{0\} \}$. A distribuição

$$\text{CR} \doteq \{ (p, T_p L) \mid p \in SV, L \doteq \mathbb{C}P p^\perp \} \subset TSV$$

dos subespaços complexos maximais dos espaços tangentes a $SV \simeq \mathbb{S}^3$ é denominada *estrutura CR* (Cauchy-Riemann) de SV . Uma *calibração* para a estrutura CR é uma 1-forma $\xi \in \Gamma(T^*SV)$ tal que $\text{CR} = \text{Ker } \xi$.

2.5.3. Lema. *Seja $u \in V$, $\langle u, u \rangle \leq 0$. A 1-forma*

$$\xi_u(\varphi)(p) \doteq \text{Im} \frac{\langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle}{\langle p, u \rangle \langle u, p \rangle},$$

onde $(p, \varphi) \in TSV$, é uma calibração para a estrutura CR de SV .

Demonstração. Seja $(p, \varphi) \in TSV$ tal que $\varphi \in T_p L$, onde $L \doteq \mathbb{C}P p^\perp$. Pela Proposição 1.2.3, temos $\langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle = 0$, ou seja, $\xi_u(\varphi)(p) = 0$. Reciprocamente, seja $(p, \varphi) \in TSV$ tal que $\xi_u(\varphi)(p) = 0$. Isto significa que $\text{Im} \langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle = 0$. De (2.5.2) segue que $\langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle = 0$, ou seja, $\varphi \in T_p L$ (novamente, pela Proposição 1.2.3) ■

2.5.4. Corolário. *Seja $u \in V$, $\langle u, u \rangle < 0$. Seja $U \subset \mathbb{C}P V$ uma vizinhança de \overline{BV} tal que $U \cap \mathbb{C}P u^\perp = \emptyset$. A 1-forma*

$$\Omega_u(\varphi)(p) \doteq \text{Im} \frac{1}{\langle p, u \rangle \langle u, p \rangle} \left(\langle p, \hat{\varphi}(p) \rangle - \frac{\langle u, \hat{\varphi}(p) \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p, u \rangle} \right),$$

onde $(p, \varphi) \in TU$, quando restrita a TSV , é uma calibração para a estrutura CR de SV .

Demonstração. A definição de Ω_u independe do levantamento $\hat{\varphi}$ escolhido para φ . Resta aplicar o lema anterior ■

Referências

O item (3) da Classificação 2.2.7 tem uma forma rudimentar em [Gol, Teorema 7.1.1] e em [BEt]. Além disso, está relacionado com fatos em [Pra].

O item (1) do Corolário 2.2.9 estende [Gol, Lemas 3.1.3 e 3.1.6] para alhures. O item (2) deste corolário é demonstrado em [Gol, Corolário 3.1.5].

A Observação 2.2.12 é análoga a fatos em [Gol, Subseção 3.3.2].

Os itens (1) e (2) da Proposição 2.2.13 estendem para alhures alguns fatos semelhantes em [Gol, Subseção 3.1.7] e em [Gol, Teorema 6.1.1]. Os itens (3) e (4) de tal proposição são demonstrados em [Gol, Subseção 3.3.2].

O item (1b) da Proposição 2.2.21 é demonstrado em [Gol, Corolário 7.1.3] e o item (2) em [Gol, Subseção 1.4.3]. O item (1e) é análogo a [Gol, Teorema 7.3.1, item (6)]. O item (5) estende para alhures fatos em [San].

A Observação 2.2.23 é demonstrada, no mesmo estilo, em [San].

O item (1) do Corolário 2.2.27 estende [Gol, Teorema 7.3.1, itens (5) e (6)]. O item (2) é demonstrado em [Gol, Subseção 7.1.1].

Os itens (1) e (2) do Lema 2.3.2 têm relação com [Gol, Lema 2.2.5] e com [Gol, Teorema 3.2.12].

O item (3) da Proposição 2.3.3 estende [Gol, Lema 3.1.12] para alhures.

Os itens (2), (3) e (4) da Definição-Lema 2.4.1 estendem para alhures [Gol, Teorema 5.1.1], fatos em [Gol, Seção 5.1.1] e [Gol, Teorema 5.1.10].

Os itens (1) e (2) do Lema 2.4.2 estendem para alhures fatos em [Gol, Seção 5.1.5] e [Gol, Teorema 5.2.4].

A Observação 2.4.3 é demonstrada, no mesmo estilo, em [San].

O item (1) do Lema 2.4.4 é notado em [Gol, Seção 5.1.1]. O item (3) tem relação com [Gol, Teorema 8.2.1].

A observação que bissetores determinam seus vértices, presente após o Lema 2.4.4, estende [Gol, Subseção 5.2.1] e [Gol, Teorema 5.1.6] para alhures.

O item (2) da Proposição 2.4.7 estende para alhures [Gol, Teorema 5.5.1]. O item (4) é semelhante a [Gol, Subseção 5.5.5].

A Proposição 2.4.10 é demonstrada em [Gol, Seção 3.1.11] (com base em fatos gerais da teoria de espaços simétricos). Possivelmente, a demonstração que apresentamos completa, neste caso, a intenção de Goldman: "... explicit calculations are more valuable than quoting general theorems." [Gol, pg. (ix), linha 10]

3. Teorema Poliedral de Poincaré

*Point set topology is a disease from which
the human race will soon recover.*

— HENRI POINCARÉ

3.1. Introdução

O Teorema Poliedral de Poincaré é uma ferramenta usual no estudo de grupos discretos de isometrias de uma variedade Riemanniana. Dentre suas aplicações, residem provar a discretude de um dado grupo de isometrias e, principalmente, construir grupos discretos de isometrias. A história do Teorema é longa; uma análise de diversas versões pode ser encontrada em [Pet].

Boa parte das formulações do Teorema de Poincaré aplica-se somente às geometrias clássicas de curvatura constante. Nestes casos, é comum utilizar-se um poliedro convexo, cujas faces são hiperfícies totalmente geodésicas que se interceptam com ângulo constante. Ainda mais, há muitas vezes a exigência de que o poliedro e suas cópias, criadas a partir de isometrias que lhe identificam as faces, interceptem-se adequadamente.

Entretanto, quando lidamos com geometrias de curvatura não constante, como no caso hiperbólico complexo, a escolha de um poliedro com faces totalmente geodésicas que se interceptam com ângulo constante é, em geral, impossível (vide as Proposições 2.4.10, 2.4.11 e o Teorema 4.2 em [AGG]). Além disso, nestes casos, não podemos explorar conceitos de convexidade, o que torna difícil a verificação de que faces interceptam-se adequadamente (vide, como ilustração, a Seção 6.3 em [AGG]). Surge assim a necessidade de um Teorema Poliedral que, dentre outras características, estabeleça exigências suficientemente locais sobre a tesselação, de modo que, por exemplo, a interseção adequada de poliedros vizinhos seja um resultado válido *a posteriori*.

A versão do Teorema de Poincaré apresentada neste capítulo propõe exigências desta natureza. Com efeito, a *tesselação de uma vizinhança métrica* do poliedro, presente no Corolário 3.3.19, é o resultado local essencial utilizado na demonstração do Teorema (de Poincaré) 3.3.21. Enfatizamos que, embora a tesselação de uma vizinhança métrica do poliedro não seja condição necessária em um Teorema Poliedral, ela é garantida pelas hipóteses de praticamente todas as formulações do Teorema.

Vale a pena destacar ainda que buscamos um Teorema de Poincaré em que as condições sobre o poliedro e suas identificações de faces sejam **verificáveis na prática** e em termos simples, tais como somas de ângulos. Por esta razão, utilizaremos poliedros cujo bordo constitui-se apenas de elementos de codimensões 1 (*faces*) e 2 (*arestas*). Pelas mesmas razões, não permitimos um número infinito de faces ou de arestas.

Neste sentido, poderíamos dizer que a versão do Teorema Poliedral que apresentamos é “plana”: há tesselação apenas em torno de elementos de codimensões 1 e 2, sendo que esta última expressa-se em termos de determinada soma de ângulos. Ainda assim, existe a necessidade de obter alguma estimativa uniforme relativa ao comportamento das faces ao longo de arestas comuns. Em nosso caso, tal estimativa é fornecida pela propriedade (P9).

O Teorema de Poincaré clássico para o disco hiperbólico permite poliedros (polígonos) contendo faces (geodésicas) tangentes no absoluto. (Há uma condição simples que garante a tesselação de uma vizinhança métrica para polígonos desta natureza.) Infelizmente, as hipóteses do Teorema 3.3.21 excluem tais casos, bem como seus análogos em outras geometrias e em maiores dimensões.

Qualquer grupo (*a posteriori*) discreto possui um poliedro fundamental cujas faces são bissetores, o poliedro de Dirichlet. Isto sugere, como primeira aplicação da presente versão do Teorema de Poincaré, a utilização de bissetores como faces dos poliedros.²⁹

Deste modo, o Teorema 3.3.21 pode ser aplicado diretamente nas construções dos subgrupos discretos do grupo de isometrias do plano hiperbólico complexo presentes em [AGG] e em [AGu], onde as faces dos poliedros são bissetores com fatias em comum.

3.2. Tesselação Local

Seja (X, d) um espaço métrico. Para $Y \subset X$, denotaremos respectivamente por $\overset{\circ}{Y}$ e por \overline{Y} o interior e o fecho de Y em X .

Diremos que um subespaço $P \subset X$ é um *poliedro* se $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$, se $P = \overline{\overset{\circ}{P}}$ e se ao bordo $\partial P = P \setminus \overset{\circ}{P}$ está associada uma decomposição não-vazia $\partial P = \bigcup_{s \in S} s$ em subconjuntos não-vazios $s \in S$ chamados *faces* de P . Uma *identificação de faces* para P é uma involução $\sigma : S \rightarrow S$ tal que a cada par de faces da forma $(s, \sigma s)$ está associada uma isometria $I_s : X \rightarrow X$ satisfazendo $I_s s = \sigma s$ e $I_{\sigma s} = I_s^{-1}$.

Seja P um poliedro em X e seja S o seu conjunto de faces. Seja σ uma identificação de faces para P . Denotaremos por G o grupo gerado pelas isometrias da forma I_s , $s \in S$. Introduzimos em $G \times P$ uma relação definindo $(g, x) \sim (h, y)$ se e só se

$$(g = h \text{ e } x = y) \text{ ou} \\ x \in s \text{ para algum } s \in S, I_s x = y \text{ e } h^{-1}g = I_s.$$

Esta relação é, obviamente, reflexiva. Provemos que é simétrica. De fato, se $(g, x) \sim (h, y)$, então podemos supor que $x \in s$ para algum $s \in S$, $I_s x = y$ e $h^{-1}g = I_s$. Neste caso, temos $y \in I_s s = \sigma s$, $I_{\sigma s} y = I_s^{-1} y = x$ e $g^{-1}h = (h^{-1}g)^{-1} = I_s^{-1} = I_{\sigma s}$. Em outras palavras, $(h, y) \sim (g, x)$. Uma vez que \sim não é necessariamente transitiva, geramos uma relação de equivalência em $G \times P$ definindo $(g, x) \approx (h, y)$ exatamente quando existem $(g_j, x_j) \in G \times P$, $j = 1, \dots, n$, tais que

$$(g, x) = (g_1, x_1) \sim (g_2, x_2) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y).$$

Seja $J \doteq G \times P / \approx$. Denotaremos por $[g, x]$ a classe de equivalência de (g, x) em J .

3.2.1. Lema. (1) Se $[g, x] = [h, y]$ e $x \in \overset{\circ}{P}$, então $g = h$ e $x = y$.

(2) Se $[g, x] = [h, y]$, então $g(x) = h(y)$ e $[fg, x] = [fh, y]$ para todo $f \in G$.

Demonstração. (1) É imediata.

(2) Sejam $(g_1, x_1), (g_2, x_2) \in G \times P$ tais que $(g_1, x_1) \sim (g_2, x_2)$. É claro que podemos supor $x_1 \in s$ para algum $s \in S$, $I_s x_1 = x_2$ e $g_2^{-1}g_1 = I_s$. Neste caso, temos $g_1(x_1) = g_2(I_s(x_1)) = g_2(x_2)$. Além disso, para $f \in G$, temos $x_1 \in s$, $I_s(x_1) = x_2$ e $(fg_2)^{-1}fg_1 = g_2^{-1}g_1 = I_s$. Em outras palavras, $(fg_1, x_1) \sim (fg_2, x_2)$ ■

²⁹Por esta razão, seria importante entender em quais circunstâncias a interseção de bissetores no caso genérico satisfaz a Condição (P9).

Munamos G , P , $G \times P$ e J de suas respectivas topologias naturais: discreta, induzida, produto e quociente. Consideremos as aplicações $\psi : G \times P \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g(x)$, $\pi : G \times P \rightarrow J$, $(g, x) \mapsto [g, x]$ e $\varphi : J \rightarrow X$, $[g, x] \mapsto g(x)$ (a aplicação φ está bem definida pelo item (2) do lema anterior):

$$\begin{array}{ccc} G \times P & \xrightarrow{\pi} & J \\ \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

Claramente, $\psi = \varphi \circ \pi$. É fácil verificar que ψ , π e φ são aplicações contínuas. Além disso, G age naturalmente em $G \times P$ e em J : para $f \in G$ definimos, respectivamente, $f(g, x) = (fg, x)$ e $f[g, x] = [fg, x]$ (a ação em J está bem definida pelo item (2) do lema anterior).

3.2.2. Lema. (1) ψ , π e φ são G -aplicações. Seja $f \in G$. Temos $\pi^{-1}(fp) = f\pi^{-1}(p)$ e $\pi^{-1}(fU) = f\pi^{-1}(U)$ para quaisquer $p \in J$ e $U \subset J$.

(2) G age em $G \times P$ e em J por homeomorfismos.

Demonstração. (1) Segue diretamente das definições de ψ , π e φ que estas são G -aplicações. Provemos que $\pi^{-1}(fp) = f\pi^{-1}(p)$. Seja $u \in \pi^{-1}(fp)$. Então, $\pi(u) = fp$, isto é, $\pi(f^{-1}u) = f^{-1}\pi(u) = p$, ou seja, $f^{-1}u \in \pi^{-1}(p)$. Assim, segue de $u = f(f^{-1}u)$ que $u \in f\pi^{-1}(p)$. Por outro lado, seja $u \in f\pi^{-1}(p)$. Então $u = fv$, com $\pi(v) = p$. Temos $\pi(u) = \pi(fv) = f\pi(v) = fp$. Em outras palavras, $u \in \pi^{-1}(fp)$.

(2) É imediato verificar que G age em $G \times P$ por homeomorfismos. Consideremos a ação de G em J . Seja $f \in G$. Claramente, temos uma bijeção entre J e fJ . Seja $U \subset J$ um aberto. Então, pelo item anterior, $\pi^{-1}(fU) = f\pi^{-1}(U)$. Segue que $\pi^{-1}(fU)$ é aberto em $G \times P$, ou seja, fU é aberto em J ■

Definimos $[P] = \{[1, x] \mid x \in P\} \subset J$ e $[\mathring{P}] = \{[1, x] \mid x \in \mathring{P}\} \subset J$.

3.2.3. Lema. Temos $J = \bigcup_{g \in G} g[P]$. Além disso, se $g_1[\mathring{P}] \cap g_2[\mathring{P}] \neq \emptyset$, então $g_1 = g_2$.

Demonstração. Para provar a primeira afirmação, basta notar que $[g, x] = g[1, x] \in g[P]$. A segunda afirmação é uma consequência direta do item (1) do Lema 3.2.1 ■

No que se segue, vamos supor que a pré-imagem $\pi^{-1}(p)$ é finita para todo $p \in [P]$. Note-se que, neste caso, segue do fato $[g, x] = g[1, x]$ e do item (1) do Lema 3.2.2 que $\pi^{-1}(p)$ é finito para todo $p \in J$.

Seja $x \in P$. Seja $\varepsilon > 0$. Tomando $\pi^{-1}([1, x]) = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$, definimos

$$(3.2.4) \quad V_{x,j} = V(x_j, \varepsilon) = \{y \in P \mid d(y, x_j) < \varepsilon\} \subset P, \quad V_x = \bigcup_{j=1}^n (g_j, V_{x,j}) \subset G \times P,$$

$$W_x = \pi(V_x) \subset J, \quad B(x, \varepsilon) = \{p \in X \mid d(p, x) < \varepsilon\} \subset X.$$

Diremos que o poliedro $g_j P$, para $j = 1, \dots, n$, é um *vizinho formal* de P no ponto $x \in P$.

3.2.5. Condição (de tesselação local). Seja P um poliedro em X . Seja σ uma identificação de faces para P . Utilizando a notação acima, diremos que P e σ satisfazem a condição de tesselação local se, e só se, para todo $x \in P$ e para todo $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ arbitrariamente pequeno,

(1) a pré-imagem $\pi^{-1}([1, x])$ é finita,³⁰

³⁰Obviamente, é suficiente verificar que a pré-imagem $\pi^{-1}([1, x])$ é finita para $x \in \partial P$.

$$(2) \pi^{-1}(W_x) = V_x,$$

$$(3) \psi(V_x) = \bigcup_j g_j V_{x,j} = B(x, \varepsilon) \text{ e}$$

$$(4) \varphi \text{ estabelece uma bijeção entre } W_x \text{ e } B(x, \varepsilon).$$

3.2.6. Lema. *Seja P um poliedro em X . Seja σ uma identificação de faces para P .*

(1) *Se P e σ satisfazem os itens (1) e (2) da Condição 3.2.5, então os conjuntos fW_x , para $f \in G$, $x \in P$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, formam uma base para a topologia de J .*

(2) *Se P e σ satisfazem os itens (1) e (2) da Condição 3.2.5, então J é Hausdorff.*

(3) *Se P e σ satisfazem os itens (1), (2) e (3) da Condição 3.2.5, então φ é uma aplicação aberta.*

Demonstração. (1) Note-se, inicialmente, que os conjuntos fW_x são abertos em J pelo item (2) da Condição 3.2.5 e pelo item (2) do Lema 3.2.2. Seja $[f, x] \in J$. Seja $U \subset J$ um aberto que contém $[f, x]$. Como π é contínua, temos

$$\pi^{-1}(U) \ni \bigcup_{h \in G} (h, U_h),$$

onde U_h é aberto em P . Utilizando o item (1) da Condição 3.2.5, podemos tomar $\pi^{-1}([1, x]) \ni \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$. Logo, $\pi^{-1}([f, x]) = \pi^{-1}(f[1, x]) = \{(fg_1, x_1), \dots, (fg_n, x_n)\}$. Segue que, para $h = fg_j$, $j = 1, \dots, n$, temos $x_j \in U_h$. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que seja válido o item (2) da Condição 3.2.5 e de modo que $V_{x,j} \subset U_h$ para $h = fg_j$, $j = 1, \dots, n$. Portanto,

$$fV_x = \bigcup_j (fg_j, V_{x,j}) \subset \pi^{-1}(U).$$

Daí segue que $fW_x = f\pi(V_x) = \pi(fV_x) \subset \pi(\pi^{-1}(U)) \subset U$. Resta observar que $[f, x] = f[1, x] \in fW_x$.

(2) Sejam $[f, x], [h, y] \in J$ distintos. Pelo item (1) da Condição 3.2.5, podemos tomar $\pi^{-1}(f[1, x]) \ni \{(fg_1, x_1), \dots, (fg_n, x_n)\}$ e $\pi^{-1}(h[1, y]) \ni \{(hg'_1, y_1), \dots, (hg'_m, y_m)\}$. É imediato que $\pi^{-1}([f, x]) \cap \pi^{-1}([h, y]) = \emptyset$. Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\bigcup_{j=1}^n (fg_j, V_{x,j}) \cap \bigcup_{j=1}^m (hg'_j, V_{y,j}) = \emptyset,$$

isto é, $fV_x \cap hV_y = \emptyset$. Do item (2) da Condição 3.2.5 e do item (1) deste lema segue, respectivamente, que $fW_x \cap hW_y = \emptyset$ e que fW_x, hW_y são abertos em J .

(3) Utilizando o item (1) deste lema e o item (3) da Condição 3.2.5, basta observar-se que, para $f \in G$, $x \in P$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $\varphi(fW_x) = f\varphi(\pi(V_x)) = f\psi(V_x) = fB(x, \varepsilon) = B(fx, \varepsilon)$ aberto em X ■

3.2.7. Proposição. *Seja P um poliedro em X . Seja σ uma identificação de faces para P . Se P e σ satisfazem a condição de tesselação local, então a aplicação $\varphi : J \rightarrow X$ é um homeomorfismo local.*

Demonstração. Seja $[f, x] \in J$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, consideremos a vizinhança fW_x de $[f, x]$. Segue diretamente do item (3) do lema anterior e do item (4) da condição de tesselação local que $\varphi|_{fW_x}$ estabelece um homeomorfismo entre fW_x e $B(fx, \varepsilon)$ ■

3.3. Um teorema de Poincaré “plano”

Seja X uma variedade Riemanniana conexa e simplesmente conexa. No que se segue, utilizaremos as notações introduzidas na seção anterior.

Seja P um poliedro em X cujo conjunto de faces é S . Seja σ uma identificação de faces para P . Nosso objetivo é encontrar condições sobre P e σ de modo que P seja uma *região fundamental* para a ação de G , isto é, de modo que

$$(3.3.1) \quad X = \bigcup_{g \in G} gP \quad \text{e} \quad g_1\mathring{P} \cap g_2\mathring{P} \neq \emptyset \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Vamos supor que a cada face $s \in S$ está associada uma coleção A_s (possivelmente vazia) de subconjuntos não-vazios de s tais que, se $a \in A_s$, então $I_s a \in A_{\sigma s}$. Os elementos de A_s serão ditos *arestas* de s (ou, em geral, de P).

Suponhamos que P satisfaz as propriedades (P1) e (P2) descritas abaixo.

(P1) P possui um número finito de faces. Toda face de P possui um número finito de arestas.

(P2) Uma aresta de P é aresta de exatamente duas faces distintas.

Consideremos o par (a, s_1) , onde $s_1 \in S$ e $a \in A_{s_1}$. Aplicando a cada elemento deste par a isometria I_{s_1} , obtemos a aresta $I_{s_1}a$ e a face σs_1 . Temos $I_{s_1}a \in A_{\sigma s_1}$. Pela propriedade (P2), existe uma única face s_2 distinta de σs_1 que contém $I_{s_1}a$ como aresta. Consideremos, assim, o novo par $(I_{s_1}a, s_2)$. De modo análogo, podemos aplicar aos elementos deste par a isometria I_{s_2} , obtendo $(I_{s_2}I_{s_1}a, s_3)$ (isto é, σs_2 e s_3 possuem a aresta $I_{s_2}I_{s_1}a$ em comum). Repetindo este processo, chegamos à seqüência de pares

$$(3.3.2) \quad (a, s_1) \xrightarrow{I_{s_1}} (I_{s_1}a, s_2) \xrightarrow{I_{s_2}} (I_{s_2}I_{s_1}a, s_3) \xrightarrow{I_{s_3}} \dots$$

(Ressalte-se que **não** temos $s_{i+1} = I_{s_i}s_i = \sigma s_i$.) Claramente, pela propriedade (P1), esta seqüência contém finitos termos distintos. Ainda mais, temos o

3.3.3. Lema. *A seqüência (3.3.2) é cíclica.*

Demonstração. É claro que basta considerar o caso

$$(a, s_1) \xrightarrow{I_{s_1}} (I_{s_1}a, s_2) \xrightarrow{I_{s_2}} \dots \xrightarrow{I_{s_{n-1}}} (I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}a, s_n) \xrightarrow{I_{s_n}} (I_{s_1}a, s_2).$$

Então, $(I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}a, s_n) \xrightarrow{I_{s_n}} (I_{s_1}a, s_2)$ significa que $I_{s_n}(I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}a) = I_{s_1}a$ e que s_2 e σs_n são faces distintas que possuem a aresta $I_{s_1}a$ em comum. Por outro lado, $(a, s_1) \xrightarrow{I_{s_1}} (I_{s_1}a, s_2)$ significa que s_2 e σs_1 são faces distintas que possuem a aresta $I_{s_1}a$ em comum. Segue de (P2) que $\sigma s_n = \sigma s_1$, isto é, $s_n = s_1$. Portanto, $I_{s_n} = I_{s_1}$. Finalmente, de $I_{s_n}(I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}a) = I_{s_1}a$ obtemos $I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}a = a$ ■

Diremos que a seqüência cíclica da forma (3.3.2) é o *ciclo de arestas* de (a, s_1) . Consideremos o ciclo de arestas

$$(3.3.4) \quad (a, s_1) \xrightarrow{I_{s_1}} (I_{s_1}a, s_2) \xrightarrow{I_{s_2}} \dots \xrightarrow{I_{s_{n-1}}} (I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}a, s_n) \xrightarrow{I_{s_n}} (a, s_1).$$

É fácil ver que a *isometria do ciclo* $I \equiv I_{s_n}I_{s_{n-1}} \cdots I_{s_1}$ preserva a aresta a , isto é, $Ia = a$. Seja $s'_1 \neq s_1$ tal que $a \in A_{s'_1}$. Temos $s'_1 = \sigma s_n$. Portanto, o ciclo de arestas de (a, s'_1) é

$$(a, \sigma s_n) \xrightarrow{I_{s_n}^{-1}} (I_{s_n}^{-1}a, \sigma s_{n-1}) \xrightarrow{I_{s_{n-1}}^{-1}} \dots \xrightarrow{I_{s_2}^{-1}} (I_{s_2}^{-1} \cdots I_{s_n}^{-1}a, \sigma s_1) \xrightarrow{I_{s_1}^{-1}} (a, \sigma s_n).$$

Vamos supor válidas para P e σ as propriedades que se seguem.

(P2 $\frac{1}{2}$) P é simples. (Em outras palavras, se duas faces distintas de P se interceptam, então o fazem em arestas comuns.) Arestas distintas de P são disjuntas.³¹

(P3) Sejam $s \in S$ e $a \in A_s$. A isometria I do ciclo de arestas de (a, s) satisfaz $I|_a = 1$ e $I^k = 1$ para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3.3.5. Lema. *Seja $p \in \partial P$. Vamos supor que p não pertence a nenhuma aresta de P . Pela propriedade (P2 $\frac{1}{2}$), existe uma única face $s \in S$ tal que $p \in s$. Temos $\pi^{-1}([1, p]) = \{(1, p), (I_{\sigma s}, I_s p)\}$. Portanto, os únicos vizinhos formais de P em $p \in s$ são P e $I_{\sigma s}P$.*

Demonstração. É imediata. Vamos supor $(g, x) \sim (1, p)$ para $(g, x) \neq (1, p)$. Então, existe $t \in S$ tal que $x \in t$, $I_t x = p$ e $g = I_t$. Além disso, por (P2 $\frac{1}{2}$), t é a única face tal que $x \in t$ (de fato, x não pertence a nenhuma aresta de t pois, caso contrário, $p = I_t x$ deveria pertencer a uma aresta de s). Como $p \in I_t t = \sigma t$, temos $s = \sigma t$. Logo,

$$x = I_t^{-1} p = I_{\sigma s}^{-1} p = I_s p \quad \text{e} \quad g = I_t = I_{\sigma s}.$$

Por outro lado, suponhamos $(h, y) \sim (g, x) = (I_{\sigma s}, I_s p)$ para $(h, y) \neq (g, x)$. Então, existe uma face $t' \in S$ tal que $y \in t'$, $I_{t'} y = I_s p$ e $I_{\sigma s}^{-1} h = I_{t'}$. Como $\sigma s = t \ni x = I_s p \in I_{t'} t' = \sigma t'$, obtemos $t' = s$. Segue que $h = I_{\sigma s} I_{t'} = 1$ e que $y = I_{t'}^{-1} I_s p = p$, ou seja, $(h, y) = (1, p)$ ■

Na observação que se segue, fixaremos algumas das notações que serão utilizadas sistematicamente até o final deste capítulo.

3.3.6. Observação. *Seja $p \in \partial P$. Vamos supor que p pertence a uma aresta a de P . Seja s_1 uma das faces satisfazendo $a \in A_{s_1}$. Consideremos para (a, s_1) o ciclo de arestas em (3.3.4). Logo, a outra face que contém a como aresta é σs_n .*

Definimos $p_l \Leftarrow p$ e $p_l \Leftarrow I_{s_{l-1}} \cdots I_{s_1} p$ para $l = 2, \dots, n+1$. Pela propriedade (P3), temos $p_{n+1} = I_{s_n} \cdots I_{s_1} p_1 = I p_1 = p_1$. Assim, utilizaremos módulo n os índices para p_l 's e para s_l 's. Claramente, $p_l \in s_l, \sigma s_{l-1}$.

Definimos $I_{j,l} \Leftarrow I^j I_{s_n} \cdots I_{s_l}$, onde $j = 0, \dots, k-1$ e $l = n, n-1, \dots, 1$. Para $l = 1$, temos $I_{j,l-1} \Leftarrow I^j I_{s_n} \cdots I_{s_1} I_{s_0} = I^j I_{s_n} \cdots I_{s_1} I_{s_n}$. Para $l = n$, temos $I_{j,l+1} \Leftarrow I^j$.

Os seguintes poliedros contêm a como aresta:

$$(3.3.7) \quad \begin{aligned} &P, I_{s_n} P, I_{s_n} I_{s_{n-1}} P, \dots, I_{s_n} \cdots I_{s_2} P, IP, \\ &II_{s_n} P, II_{s_n} I_{s_{n-1}} P, \dots, I_{j,l} P, \dots, I_{k-1,2} P, P. \end{aligned}$$

As faces $I_{j,l} s_l$ e $I_{j,l} \sigma s_{l-1}$ do poliedro $I_{j,l} P$ contêm a como aresta. Os poliedros $I_{j,l} P$ e $I_{j,l-1} P$ têm em comum a face $I_{j,l} \sigma s_{l-1} = I_{j,l-1} s_{l-1}$. Os poliedros $I_{j,l} P$ e $I_{j,l+1} P$ têm em comum a face $I_{j,l+1} \sigma s_l = I_{j,l} s_l$.

Diremos que dois poliedros $I_{j,l} P$ e $I_{j',l'} P$ (respectivamente, duas faces $I_{j,l} s_l$ e $I_{j',l'} s_{l'}$) são *formalmente diferentes* se $(j, l) \neq (j', l')$, $0 \leq j, j' < k$, $n \geq l, l' \geq 1$. Neste caso, escreveremos $I_{j,l} P \neq_f I_{j',l'} P$ (respectivamente, $I_{j,l} s_l \neq_f I_{j',l'} s_{l'}$), onde \neq_f abrevia “formalmente diferentes”. Note-se que podemos ter dois poliedros (respectivamente, faces) formalmente diferentes iguais como subconjuntos de X ■

3.3.8. Lema. *Seja $p \in \partial P$. Vamos supor que p pertence a uma aresta a de P . Nos termos da Observação 3.3.6, temos $\pi^{-1}([1, p]) = \{(I_{j,l}, p_l) \mid 0 \leq j < k, n \geq l \geq 1\}$. Portanto, a lista em (3.3.7) contém todos os vizinhos formais de P em $p \in a$.*

³¹A exigência (P2 $\frac{1}{2}$) segue das propriedades mais fortes (P4) e (P8). Portanto, ao aplicar-se o Teorema 3.3.21, não há necessidade de verificá-la.

Demonstração. É imediata. Verifiquemos, inicialmente, que $(I_{j,l}, p_l) \sim (I_{j,l-1}, p_{l-1})$. De fato,

$$p_l \in \sigma s_{l-1}, \quad I_{\sigma s_{l-1}} p_l = I_{s_{l-1}}^{-1} p_l = p_{l-1} \quad \text{e} \quad (I^j I_{s_n} \cdots I_{s_l} I_{s_{l-1}})^{-1} \cdot (I^j I_{s_n} \cdots I_{s_l}) = I_{\sigma s_{l-1}}.$$

Passemos à verificação de que não há outros vizinhos formais de P em p além dos indicados. Assim, suponhamos $(g, x) \sim (I_{j,l}, p_l)$ para $(g, x) \neq (I_{j,l}, p_l)$. Então, $x \in s$ para algum $s \in S$, $I_s x = p_l$ e $I_{j,l}^{-1} g = I_s$. Pela propriedade (P 2 $\frac{1}{2}$), a face $I_s s = \sigma s \ni p_l$ é uma das duas às quais p_l pertence. Logo, $\sigma s = s_l$ ou $\sigma s = \sigma s_{l-1}$. No primeiro caso,

$$x = I_s^{-1} p_l = I_{s_l} p_l = p_{l+1} \quad \text{e} \quad g = I^j I_{s_n} \cdots I_{s_l} \cdot I_s = I^j I_{s_n} \cdots I_{s_l} \cdot I_{s_l}^{-1} = I^j I_{s_n} \cdots I_{s_{l+1}} = I_{j,l+1}.$$

Em outras palavras, $(g, x) = (I_{j,l+1}, p_{l+1}) \in \pi^{-1}([1, p])$. Por outro lado, se $\sigma s = \sigma s_{l-1}$, então

$$x = I_s^{-1} p_l = I_{s_{l-1}}^{-1} p_l = p_{l-1} \quad \text{e} \quad g = I^j I_{s_n} \cdots I_{s_l} \cdot I_{s_{l-1}} = I_{j,l-1},$$

ou seja, $(g, x) = (I_{j,l-1}, p_{l-1}) \in \pi^{-1}([1, p])$ ■

Em particular, segue dos Lemas 3.3.5 e 3.3.8 que P e σ satisfazem o item (1) da Condição de tesselação local 3.2.5.

Sob o ponto de vista topológico diferencial, exigimos que P satisfaça a propriedade

(P4) As faces de P são variedades diferenciáveis fechadas, orientadas, de codimensão (real) 1 em X e com bordo (possivelmente vazio). Seja $s \in S$. Toda aresta em A_s é fechada, conexa e $\partial s = \bigsqcup_{a \in A_s} a$.

Além disso, s está orientada de modo que, em um ponto não pertencente ao seu bordo, um vetor normal aponta para o interior de P .

Em particular, toda aresta é uma variedade diferenciável de codimensão 2, conexa por caminhos e sem bordo. É claro que, se $a \in A_s$, então $I_s a \in A_{\sigma s}$, uma vez que I_s é uma isometria.

Seja $p \in P$. No que se segue, utilizaremos as notações estabelecidas em (3.2.4). Além disso, para um subconjunto $Y \subset X$, denotaremos $\check{Y} \doteq Y \cap P$.

Fixemos $\epsilon = \epsilon(p)$ como abaixo.

Vamos supor, inicialmente, que $p \in P \setminus \partial P$. Neste caso, escolhemos ϵ de modo que $B(p, \epsilon) \subset \mathring{P}$. Temos

$$(3.3.9) \quad V_p = \left\{ (1, B(p, \epsilon)) \right\} \subset G \times P.$$

Suponhamos $p \in s \setminus \partial s$ para algum $s \in S$. Neste caso, escolhemos ϵ_1 de modo que $B(p, \epsilon_1)$ não intercepte nenhuma aresta de s (esta escolha é possível dado que s é variedade com bordo $\partial s = \bigsqcup_{a \in A_s} a$)

e de modo que $B(p, \epsilon_1) \cap \partial P = B(p, \epsilon_1) \cap s$ (esta última escolha utiliza (P 2 $\frac{1}{2}$) e o fato que as faces de P são fechadas). Analogamente, escolhemos ϵ_2 de modo que $B(I_s p, \epsilon_2)$ não intercepte nenhuma aresta de σs e de modo que $B(I_s p, \epsilon_2) \cap \partial P = B(I_s p, \epsilon_2) \cap \sigma s$. Tomamos $\epsilon \doteq \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Temos

$$(3.3.10) \quad V_p = \left\{ (1, \check{B}(p, \epsilon)), (I_{\sigma s}, \check{B}(I_s p, \epsilon)) \right\} \subset G \times P.$$

Finalmente, vamos supor que $p \in a$ para alguma aresta a de P . Seja s_1 uma das faces tais que $a \in A_{s_1}$. Nos termos da Observação 3.3.6, escolhemos ϵ_l de modo que $B(p_l, \epsilon_l)$ não intercepte outras arestas de s_l e de σs_{l-1} além de $I_{s_{l-1}} \cdots I_{s_1} a$ (o que é possível uma vez que arestas são fechadas e

disjuntas) e de modo que $B(p_l, \varepsilon_l) \cap \partial P = (B(p_l, \varepsilon_l) \cap s_l) \cup (B(p_l, \varepsilon_l) \cap \sigma_{s_{l-1}})$. Tomamos $\epsilon \doteq \min_{l=1, \dots, n} \varepsilon_l$.
Temos

$$(3.3.11) \quad V_p = \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 (I_{j,l}, \check{B}(p_l, \epsilon)) \subset G \times P.$$

É claro que, para as considerações anteriores, podemos tomar qualquer $0 < \varepsilon(p) \leq \epsilon(p)$.

3.3.12. Lema. *P e σ satisfazem o item (2) da Condição de tesselação local 3.2.5.*

Demonstração. É imediata. Vamos verificar que cada vizinhança V_p definida acima é fechada com relação a tomar-se a classe de equivalência de seus pontos.

Claramente, não há nada para provar no caso em que $p \in P \setminus \partial P$.

Vamos supor que $p \in s \setminus \partial s$ para algum $s \in S$. Seja $(g, x) \in V_p$ para V_p definido em (3.3.10). Podemos supor $x \in \partial P$. Segue da escolha de ϵ que x pertence a uma única face de P : s ou σs . Utilizando o Lema 3.3.5 temos que, se $s \ni x \in \check{B}(p, \epsilon)$ e $g = 1$, então $\pi^{-1}([1, x]) = \{(1, x), (I_{\sigma s}, I_s x)\} \subset V_p$. Por outro lado, se $\sigma s \ni x \in \check{B}(I_s p, \epsilon)$ e $g = I_{\sigma s}$, então

$$\pi^{-1}([I_{\sigma s}, x]) = \{(I_{\sigma s}, x), (I_{\sigma s} I_{\sigma(\sigma s)}, I_{\sigma s} x)\} = \{(I_{\sigma s}, x), (1, I_{\sigma s} x)\} \subset V_p.$$

Finalmente, suponhamos $p \in a$ para alguma aresta a de P . Seja $(g, x) \in V_p$ para V_p definido em (3.3.11). Novamente, podemos supor $x \in \partial P$. Se $I_{s_{l_0-1}} \cdots I_{s_1} a \ni x \in \check{B}(p_{l_0}, \epsilon)$ e $g = I_{j_0, l_0}$ para alguns l_0 e j_0 , consideremos o ciclo de arestas para o par (a', t_1) , onde $a' \doteq I_{s_{l_0-1}} \cdots I_{s_1} a$ e $t_1 \doteq s_{l_0}$. Definimos $x_l \doteq I_{t_{l-1}} \cdots I_{t_1} x$, onde $l = 1, \dots, n$ e $x_1 \doteq x$. Definimos $B \doteq I_{t_n} \cdots I_{t_1}$. Agora, utilizando o Lema 3.3.8 e os fatos $t_1 = s_{l_0}$ e $t_n = s_{l_0-1}$, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}([I_{j_0, l_0}, x]) &= I_{j_0, l_0} \cdot \pi^{-1}([1, x]) = \{(I_{j_0, l_0} \cdot B^j I_{t_n} \cdots I_{t_l}, x_l) \mid 0 \leq j < k, n \geq l \geq 1\} = \\ &= \{(I_{j_0}^{j_0} I_{s_n} \cdots I_{s_{l_0}} B^j I_{t_n} \cdots I_{t_l}, x_l) \mid 0 \leq j < k, n \geq l \geq 1\} \subset V_p. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $s \ni x \in \check{B}(p_{l_0}, \epsilon)$ para alguma face $s \in S$ e se $g = I_{j_0, l_0}$ para alguns l_0 e j_0 , então, pela escolha de ϵ , temos $x \in s_{l_0} \setminus \partial s_{l_0}$ ou $x \in \sigma s_{l_0-1} \setminus \partial(\sigma s_{l_0-1})$. No primeiro caso, utilizando o Lema 3.3.5, obtemos

$$\pi^{-1}([I_{j_0, l_0}, x]) = \{(I_{j_0, l_0}, x), (I_{j_0, l_0} \cdot I_{\sigma s_{l_0}}, I_{s_{l_0}} x)\} = \{(I_{j_0, l_0}, x), (I_{j_0, l_0+1}, I_{s_{l_0}} x)\} \subset V_p.$$

O segundo caso é análogo:

$$\pi^{-1}([I_{j_0, l_0}, x]) = \{(I_{j_0, l_0}, x), (I_{j_0, l_0} \cdot I_{\sigma(\sigma s_{l_0-1})}, I_{\sigma s_{l_0-1}} x)\} = \{(I_{j_0, l_0}, x), (I_{j_0, l_0-1}, I_{s_{l_0-1}}^{-1} x)\} \subset V_p \blacksquare$$

Exigimos a propriedade

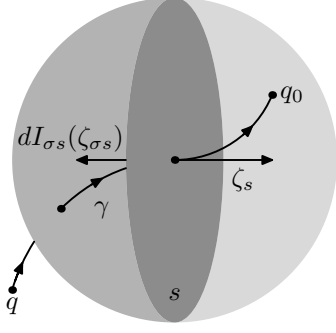
(P5) Seja $s \in S$. Seja $x \in s \setminus \partial s$. Então, $dI_s(\zeta_s) = -\zeta_{\sigma s}$, onde ζ_s (respectivamente, $\zeta_{\sigma s}$) é o vetor unitário normal a s (respectivamente, a σs) em x .

3.3.13. Lema. *P e σ satisfazem o item (3) da Condição de tesselação local 3.2.5.*

Demonstração. Inicialmente, note-se que para os conjuntos V_p definidos em (3.3.9), (3.3.10) e (3.3.11), as inclusões $\psi(V_p) \subset B(p, \epsilon)$ são imediatas. Provemos, pois, as inclusões opostas.

O caso $p \in P \setminus \partial P$ é óbvio.

Vamos supor $p \in s \setminus \partial s$ para algum $s \in S$. Temos os subconjuntos $\check{B}(p, \epsilon) \subset P$ e $I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon) \subset I_{\sigma s} P$ colados ao longo de $s \cap B(p, \epsilon)$, isto é, $\check{B}(p, \epsilon) \cap I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon) \supset s \cap B(p, \epsilon)$.



Seja $q \in B(p, \epsilon)$. Pela inclusão acima, podemos supor $q \notin s$. Seja $q_0 \in \check{B}(p, \epsilon) \setminus s$, $q_0 \neq q$. Ligamos q_0 e q por uma curva suave orientada $\gamma \subset B(p, \epsilon)$. Pela escolha de ϵ , a curva γ pode interceptar em ∂P e em $\partial(I_{\sigma s} P) = I_{\sigma s} \partial P$ apenas $(s \setminus \partial s) \cap B(p, \epsilon)$. Ainda mais, podemos supor que γ intercepta $s \setminus \partial s$ transversalmente. Agora, utilizando as propriedades (P4) e (P5), é fácil ver que a cada interseção com s a curva γ sai de $\check{B}(p, \epsilon)$ e entra em $I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon)$, ou vice-versa. Em particular, $q \in \check{B}(p, \epsilon) \cup I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon)$. Segue que $B(p, \epsilon) \subset \psi(V_p)$, como desejado.

Note-se que ainda mais pode ser dito neste caso. É óbvio que $\check{B}(p, \epsilon) \neq I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon)$ (caso contrário teríamos, por exemplo, $\check{B}(p, \epsilon) = B(p, \epsilon)$, isto é, $B(p, \epsilon) \subset P$, o que é impossível uma vez que $p \in \partial P$). Assim, podemos supor $q_0 \in (\check{B}(p, \epsilon) \setminus I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon)) \setminus s$. Portanto, pelos argumentos anteriores, q pertence a *apenas um* dos conjuntos $\check{B}(p, \epsilon)$, $I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon)$. Temos $\check{B}(p, \epsilon) \cap I_{\sigma s} \check{B}(I_s p, \epsilon) = s \cap B(p, \epsilon)$. Agora, é fácil ver que $\varphi|_{W_p}$ é injetiva, onde $W_p = \pi V_p$. Portanto, neste caso, vale também o item (4) da condição de tesselação local.

Por fim, suponhamos $p \in a$ para alguma aresta a de P . Seja s_1 uma das faces tais que $a \in A_{s_1}$. Utilizando a notação e os resultados estabelecidos na Observação 3.3.6, é fácil ver que

$$I_{j,l+1} \check{B}(p_{l+1}, \epsilon) \cap I_{j,l} \check{B}(p_l, \epsilon) \supset I_{j,l} s_l \cap B(p, \epsilon).$$

Seja $q \in B(p, \epsilon)$. Seja $F = \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 I_{j,l} s_l \right) \cap B(p, \epsilon)$. Pela inclusão acima, podemos supor que $q \notin F$.

Seja $q_0 \in I_{k-1,1} \check{B}(p_1, \epsilon) \setminus F = \check{B}(p, \epsilon) \setminus F$, $q_0 \neq q$. Ligamos q_0 e q por uma curva suave orientada $\gamma \subset B(p, \epsilon)$. Pela escolha de ϵ , a curva γ pode interceptar em $\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 \partial I_{j,l} P$ (note-se que $\partial I_{j,l} P = I_{j,l} \partial P$)

apenas $(a \cup (F \setminus \partial F)) \cap B(p, \epsilon)$. É claro que podemos supor que γ não intercepta a (pois $\text{codim}_X a = 2$) e também que γ intercepta $F \setminus \partial F$ transversalmente. Agora, é fácil concluir das propriedades (P4) e (P5) que a cada interseção com $I_{j,l} s_l$ a curva γ entra em $I_{j,l+1} \check{B}(p_{l+1}, \epsilon)$ e sai de $I_{j,l} \check{B}(p_l, \epsilon)$, ou vice-versa (vide demonstração anterior, para o caso em que $p \in s \setminus \partial s$, tomando $s = I_{j,l} s_l$). Segue que

$$q \in \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 I_{j,l} \check{B}(p_l, \epsilon) = \psi(V_p) \blacksquare$$

Sejam $s \in S$ e $a \in A_s$. Seja $p \in a$. Denotaremos $N_p a = (T_p a)^\perp$ o espaço normal a $T_p a$. Claramente, $\dim_{\mathbb{R}} N_p a = 2$. Consideremos para $N_p a$ a base ortogonal composta pelo vetor η_s normal a a em p que aponta para o interior de s e pelo vetor ζ_s normal a s em p . Tomada na ordem indicada, esta base orienta $N_p a$. Iremos nos referir a tal orientação como *relativa a s* . Seja $s \neq s' \in S$ tal que $a \in A_{s'}$. É fácil ver que as orientações de $N_p a$ relativas a s e a s' são opostas. Assim, utilizando a orientação de $N_p a$ relativa a s (respectivamente, s'), podemos medir o ângulo orientado de s para s' (respectivamente, de s' para s) em p , com valores no intervalo $[0, 2\pi]$: este é o ângulo orientado, em $N_p a$, de η_s para $\eta_{s'}$ (respectivamente, de $\eta_{s'}$ para η_s). Denominaremos tal ângulo o *ângulo interno* entre as faces s, s' em $p \in a$.

Utilizando a notação introduzida na Observação 3.3.6, consideremos o ciclo de arestas para o par (a, s_1) . Seja $p \in a$. Como $p_l \in I_{s_{l-1}} \cdots I_{s_1} a$, podemos calcular o ângulo interno α_l entre as faces s_l e

$\sigma_{s_{l-1}}$ em p_l . Denominaremos $\sum_{l=1}^n \alpha_l$ a *soma dos ângulos* ao longo do ciclo de arestas de (a, s_1) no ponto $p \in a$.

Com relação à lista (3.3.7) de vizinhos formais de P em $p \in a$, denotemos $\beta_{j,l}$ o ângulo interno entre as faces $I_{j,l}s_l$ e $I_{j,l}(\sigma_{s_{l-1}})$ do poliedro $I_{j,l}P$ no ponto $I_{j,l}p_l = p$. É claro que $\beta_{j,l} = \alpha_l$. Assim, utilizando as propriedades (P3) e (P5), obtemos

$$k \sum_{l=1}^n \alpha_l = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=1}^n \alpha_l = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=1}^n \beta_{j,l} \equiv_{2\pi} 0.$$

Em outras palavras, a soma dos ângulos ao longo do ciclo de arestas de (a, s_1) em $p \in a$ é um múltiplo inteiro de $2\pi/k$.

Para obter a condição de tesselação local para P e σ , resta exigir as propriedades³² a seguir.

(P6) O ângulo interno entre duas faces em qualquer ponto de uma aresta comum é distinto de 0 e de 2π .

(P7) Sejam $s \in S$ e $a \in A_s$. Em algum ponto $p \in a$, a soma dos ângulos internos ao longo do ciclo de arestas de (a, s) vale $\frac{2\pi}{k}$.

3.3.14. Lema. *Sejam $s \in S$ e $a \in A_s$. Então, a soma de ângulos internos ao longo do ciclo de arestas de (a, s) vale $2\pi/k$ em qualquer ponto $p \in a$.*

Demonstração. A aresta a é conexa por caminhos. Pela propriedade (P6), a soma dos ângulos ao longo do ciclo de arestas de (a, s) é uma função contínua de $p \in a$. Ainda mais, tal soma é um múltiplo inteiro de $2\pi/k$ em qualquer $p \in a$. Concluimos que a soma de ângulos ao longo do ciclo de arestas de (a, s) é constante e, por (P7), vale $2\pi/k$ ■

3.3.15. Lema. *P e σ satisfazem o item (4) da Condição de tesselação local 3.2.5.*

Demonstração. Segue do Lema 3.3.13 e de $\psi = \varphi \circ \pi$ que, para cada um dos conjuntos V_p definidos em (3.3.9), (3.3.10) e (3.3.11), a aplicação φ estabelece uma sobrejeção entre $W_p = \pi V_p$ e a bola $B(p, \epsilon)$. Assim, resta provar que $\varphi|_{W_p}$ é injetiva.

Caso $p \in P \setminus \partial P$, não há nada para fazer.

Se $p \in s \setminus \partial s$ para algum $s \in S$, então o fato já foi demonstrado, na parte correspondente da demonstração do Lema 3.3.13.

Assim, suponhamos $p \in a$ para alguma aresta a de P . Seja $s_1 \in S$ tal que $a \in A_{s_1}$. Utilizando as notações introduzidas na Observação 3.3.6 e na discussão após o Lema 3.3.13, temos em $N_p a$ a coleção $\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 \eta_{I_{j,l}s_l}$ de vetores normais a a em p tais que $\eta_{I_{j,l}s_l}$ aponta para o interior da face $I_{j,l}s_l$. Para as faces $I_{j,l}s_l$ e $I_{j,l}\sigma_{s_{l-1}}$ do poliedro $I_{j,l}P$, consideremos em $N_p a$ o setor (fechado) $T_{j,l}$ determinado pelas semi-retas $\mathbb{R}^+ \eta_{I_{j,l}s_l}$ e $\mathbb{R}^+ \eta_{I_{j,l}\sigma_{s_{l-1}}}$ que contém o ângulo interno $\beta_{j,l}$ entre as faces em questão (\mathbb{R}^+ denota os reais não-negativos). As condições (P3), (P5), (P7) e o Lema 3.3.14 implicam que, para $(j, l) \neq (j', l')$, $0 \leq j, j' < k$ e $n \geq l, l' \geq 1$, temos

$$(3.3.16) \quad \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 T_{j,l} = N_p a \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{T}_{j,l} \cap \overset{\circ}{T}_{j',l'} = \emptyset.$$

³²Embora utilizada para simplificar a abordagem, é possível verificar que a propriedade (P6) não é necessária para os resultados que se seguem.

Seja $F = \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 I_{j,l} s_l \right) \cap B(p, \epsilon)$. Tomemos um vetor v no interior de um determinado setor $T_{j,l}$,

digamos, $v \in T_{k-1,1}$. Seja $\ell : [0, 1] \rightarrow X$ uma curva suave tal que $\ell(0) = p$ e $\ell'(0) = v$. É fácil ver que, se para t arbitrariamente pequeno, $\ell(t)$ pertence a mais de um dentre os conjuntos $I_{j,l} \overset{\circ}{B}(p_l, \epsilon) \subset I_{j,l} P$, então violamos a segunda condição em (3.3.16). Logo, para $t = t_0 > 0$ suficientemente pequeno,

temos $\ell(t_0) \in \overset{\circ}{B}(p_1, \epsilon) \setminus F \subset P$ e $\ell(t_0) \notin \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^2 I_{j,l} \overset{\circ}{B}(p_l, \epsilon)$. Denotaremos $q_0 = \ell(t_0)$. (Observe-se

que, aplicando a mesma argumentação a outros setores $T_{j,l}$, obtemos que quaisquer dois poliedros da forma $I_{j,l} P$ formalmente distintos são distintos).

Seja $q \in B(p, \epsilon)$. Vamos supor $q \notin F$. Ligamos q_0 e q por uma curva suave $\gamma \subset B(p, \epsilon)$, orientada de q_0 para q . Pela escolha de ϵ , a curva γ pode interceptar em $\bigcup_{j,l} \partial I_{j,l} P$ apenas $(a \cup (F \setminus \partial F)) \cap B(p, \epsilon)$.

Claramente, podemos supor que γ não intercepta a e que intercepta F transversalmente. Seja q' o primeiro ponto de interseção de γ e F . Vamos supor que $q' \in I_{j,l} s_l$, onde $I_{j,l} s_l \neq_f I_{k-1,1} s_1 = s_1$ e $I_{j,l} s_l \neq_f I_{0,n} s_n = \sigma s_n$. A face $I_{j,l} s_l$ é comum aos poliedros $I_{j,l+1} P$ e $I_{j,l} P$. Claramente, temos $I_{j,l+1} P, I_{j,l} P \neq P$. É fácil ver, utilizando a parte correspondente da demonstração do Lema 3.3.13, que

$$B(q', \epsilon) = (B(q', \epsilon) \cap I_{j,l+1} P) \cup (B(q', \epsilon) \cap I_{j,l} P)$$

para ϵ suficientemente pequeno. Isto significa que γ entra em $I_{j,l+1} P$ ou em $I_{j,l} P$ antes de interceptar F , absurdo. Segue que q' pertence apenas a s_1 ou a σs_n dentre as faces em F . Como, por (P 2 $\frac{1}{2}$), $(s_1 \cap \sigma s_n) \cap B(p, \epsilon) = a$, obtemos que q' pertence exclusivamente a uma destas duas faces. Agora é fácil ver que, ao passar por q' , a curva γ sai de $\overset{\circ}{B}(p, \epsilon)$ e entra unicamente em $I_{0,n} P$ ou em $I_{k-1,2} P$. Aplicando novamente os mesmos argumentos, obtemos enfim que o ponto q pertence a exatamente um dos conjuntos $I_{j,l} \overset{\circ}{B}(p_l, \epsilon)$. Em outras palavras, provamos que φ é injetiva quando restrita a $\pi(\overset{\circ}{V}_p) =$

$$\pi \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 (I_{j,l}, \overset{\circ}{B}(p_l, \epsilon)) \right).$$

Seja $q \in F \setminus a$. Vamos supor, inicialmente, que $q \in I_{j_0, l_0} \overset{\circ}{B}(p_{l_0}, \epsilon)$ para alguns j_0, l_0 . Então, é claro que uma face f em F à qual q pertence não é face do poliedro $I_{j_0, l_0} P$. Portanto, sejam $P_1, P_2 \neq I_{j_0, l_0} P$ os poliedros da forma $I_{j,l} P$ para os quais f é uma face comum. Para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$(B(q, \epsilon) \cap P_1) \cup (B(q, \epsilon) \cap P_2) = B(q, \epsilon) \subset I_{j_0, l_0} \overset{\circ}{B}(p_{l_0}, \epsilon),$$

o que claramente contradiz a injetividade de φ restrita a $\pi(\overset{\circ}{V}_p)$.

Finalmente, vamos supor que q pertence simultaneamente a duas faces formalmente distintas $f_0 = I_{j_0, l_0} s_{l_0}$ e $f_1 = I_{j_1, l_1} s_{l_1}$. Claramente, f_0 e f_1 não são faces de um mesmo poliedro $I_{j,l} P$, pois vale (P 2 $\frac{1}{2}$). Assim, temos os poliedros distintos $P_1 = I_{j_0, l_0} P$ e $P_2 = I_{j_0, l_0+1} P$, para os quais f_0 é uma face em comum, e $P'_1 = I_{j_1, l_1} P$ e $P'_2 = I_{j_1, l_1+1} P$, para os quais f_1 é uma face em comum. Para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$B(p, \epsilon) \supset B(q, \epsilon) = (B(q, \epsilon) \cap P_1) \cup (B(q, \epsilon) \cap P_2) = (B(q, \epsilon) \cap P'_1) \cup (B(q, \epsilon) \cap P'_2),$$

o que, novamente, contradiz a injetividade de φ restrita a $\pi(\overset{\circ}{V}_p)$ ■

Em suma, temos a

3.3.17. Proposição. *Se valem as propriedades (P1) a (P7) e a propriedade (P 2 $\frac{1}{2}$), então J e X são localmente homeomorfos.*

Demonstração. Pelos Lemas 3.3.5, 3.3.8, 3.3.12, 3.3.13 e 3.3.15, temos que P e σ satisfazem a Condição 3.2.5. Resta aplicar a Proposição 3.2.7 ■

Seja $Y \subset X$. Denotaremos por $V(Y, \varepsilon) = \{x \in X \mid \text{dist}(x, Y) < \varepsilon\}$ a ε -vizinhança de Y em X .

Exigimos as condições (P8) e (P9) que se seguem.

(P8) Existe $d > 0$ tal que, para arestas distintas a, a' de P , a distância $\text{dist}(a, a') > d$. Para faces distintas $s, s' \in S$ que não possuem aresta(s) em comum, temos $\text{dist}(s, s') > d$. Para uma face $s \in S$ e uma aresta $a \notin A_s$, a distância $\text{dist}(s, a) > d$.

(P9) Sejam s e s' duas faces de P que possuem aresta(s) em comum. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(s, s', \varepsilon) > 0$ tal que, se $p \in s' \cap V(s, \delta)$, então $p \in V(a, \varepsilon)$, onde a é uma aresta comum de s e s' .

Fixemos $\varepsilon < d$ de modo que as ε -vizinhanças das arestas de P sejam duas a duas disjuntas. Em outras palavras, para quaisquer arestas a, a' de P distintas, $V(a, \varepsilon) \cap V(a', \varepsilon) = \emptyset$.

Fixemos $\delta < \varepsilon/2$, onde $\delta = \min_{s \cap s' \neq \emptyset} \delta(s, s', \varepsilon/2)$ é o mínimo, tomado sobre os pares de faces $s, s' \in S$ que possuem aresta em comum, dos $\delta(s, s', \varepsilon/2)$ cuja existência é garantida pela propriedade (P9).

Seja $s \in S$. Para cada $a \in A_s$, consideramos o ciclo de arestas de (a, s_1) , onde $s_1 = s$, e definimos $a_l = I_{s_{l-1}} \cdots I_{s_1} a$. (Como de costume, utilizaremos para a_l 's os índices módulo n .) Definimos

$$V_{a,r} = \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 (I_{j,l}, \check{V}(a_l, r)) \quad \text{e} \quad V_{s,r} = \left\{ (1, \check{V}(s, r)), (I_{\sigma s}, \check{V}(\sigma s, r)) \cup \bigcup_{a \in A_s} V_{a,r} \right\}.$$

Seja $W = \pi \left(V_{s,\delta} \cup \bigcup_{a \in A_s} V_{a,\varepsilon} \right)$. É fácil verificar que W é aberto em J : de fato, segue de argumentos análogos àqueles presentes na demonstração do Lema 3.3.12 que $\pi^{-1}(W) = V$.

3.3.18. Lema. φ estabelece uma bijeção entre W e $V(s, \delta) \cup \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$.

Demonstração. É semelhante à do Lema 3.3.15. Note-se, inicialmente, que $\varphi(\pi(V_{s,\delta})) = \psi(V_{s,\delta}) \subset V(s, \delta)$ e que, para uma aresta $a \in A_s$, $\varphi(\pi(V_{a,\varepsilon})) = \psi(V_{a,\varepsilon}) \subset V(a, \varepsilon)$. Seja $q \in V(s, \delta) \cup \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$.

Suponhamos $q \in V(a, \varepsilon)$ para uma (e, pela escolha de ε , apenas uma) aresta $a \in A_s$. Consideremos o ciclo de arestas de (a, s_1) , onde $s_1 = s$, e a notação introduzida na Observação 3.3.6. Definimos

$F = \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 I_{j,l} s_l \right) \cap V(a, \varepsilon)$. Seja $p \in a$. Pelo Lema 3.3.15, existe uma bola aberta $B(p, \varepsilon') \subset V(a, \varepsilon)$ tal que φ estabelece uma bijeção

$$\pi \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 (I_{j,l}, \check{B}(p_l, \varepsilon')) \right) \simeq B(p, \varepsilon').$$

Deste modo, podemos tomar $q_0 \in \check{B}(p, \varepsilon') \setminus F$ tal que $q_0 \notin \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^2 I_{j,l} \check{B}(p_l, \varepsilon')$. Portanto, $q_0 \in$

$\check{V}(a, \varepsilon) \setminus F$ e $q_0 \notin \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^2 I_{j,l} \check{V}(a_l, \varepsilon)$. Vamos supor $q \notin F$. Neste caso, ligamos q_0 e q por uma

curva $\gamma \subset V(a, \varepsilon)$ suave e orientada. Pela escolha $\varepsilon < d$, a curva γ pode interceptar em $\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{l=n}^1 \partial I_{j,l}P$ apenas $(a \cup (F \setminus \partial F)) \cap V(a, \varepsilon)$. Podemos supor que γ não intercepta a e que intercepta F transversalmente. Utilizando argumentos análogos àqueles presentes na parte correspondente da demonstração do Lema 3.3.15, obtemos q pertencente a um, e apenas um, dos conjuntos $I_{j,l}\check{V}(a_l, \varepsilon)$. Ainda mais, argumentos análogos aos do Lema 3.3.15 também aplicam-se para o caso $q \in F$. Deste modo, obtemos que φ estabelece uma bijeção $\pi\left(\bigcup_{a \in A_s} V_{a,\varepsilon}\right) \simeq \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$.

Por outro lado, suponhamos $q \in V(s, \delta) \setminus \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$. Então, existem $p \in s$ e uma curva γ suave, orientada, que liga p e q e cujo comprimento $\ell(\gamma) < \delta$. Obviamente, $\gamma \subset V(s, \delta)$. Afirmamos que γ pode interceptar em ∂P e em $\partial I_{\sigma s}P$ apenas $s \setminus \partial s$. De fato, segue de $q \notin \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$ e de $\ell(\gamma) < \delta < \varepsilon$ que γ não intercepta arestas de s . (Em particular, $p \in s \setminus \partial s$.) Além disso, γ não intercepta uma face $f \in S$ que não possui aresta em comum com s , pois $\delta < d$ e, portanto, $V(s, \delta) \cap f = \emptyset$ pela propriedade (P8). Finalmente, γ não intercepta uma face $s' \in S$ que possui aresta em comum com s : temos $\ell(\gamma) < \delta < \varepsilon/2$ e, por (P9), a interseção $s' \cap V(s, \delta) \subset \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon/2)$.

Segue de $p \in s \setminus \partial s$ e do Lema 3.3.15 que, para uma bola $B(p, \varepsilon') \subset V(s, \delta)$ com ε' suficientemente pequeno, φ estabelece uma bijeção

$$\pi\left(\left(1, \check{B}(p, \varepsilon')\right) \cup \left(I_{\sigma s}, \check{B}(I_s p, \varepsilon')\right)\right) \simeq B(p, \varepsilon').$$

Portanto, utilizando nossos já usuais argumentos, é fácil ver que se $q \notin s$, então q pertence a exatamente um dos conjuntos $\check{V}(s, \delta) \setminus \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$ ou $I_{\sigma s}\check{V}(s, \delta) \setminus \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$. Em outras palavras, φ estabelece uma bijeção $\pi\left(V_{s,\delta} \setminus \bigcup_{a \in A_s} V_{a,\varepsilon}\right) \simeq V(s, \delta) \setminus \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$ ■

Sejam

$$V_P = (1, \mathring{P}) \cup \bigcup_{s \in S} V_{s,\delta/2} \quad \text{e} \quad W_P = \pi V_P = [\mathring{P}] \cup \bigcup_{s \in S} \pi(V_{s,\delta/2}).$$

É claro que, como união de abertos, W_P é aberto em J . Temos para o lema anterior o seguinte

3.3.19. Corolário. φ estabelece uma bijeção (e, portanto, um homeomorfismo) entre W_P e a vizinhança métrica $V(P, \delta/2)$.

Demonstração. Pelo lema anterior, φ estabelece uma bijeção $\pi(V_{s,\delta/2}) \simeq V(s, \delta/2)$. Assim, é fácil ver que $\varphi(W_P) = V(P, \delta/2)$. Passemos à injetividade de $\varphi|_{W_P}$.

Sejam $s, f \in S$ faces que não possuem aresta em comum. Neste caso, $V(s, \delta/2) \cap V(f, \delta/2) = \emptyset$, pois $\delta < d$. Por outro lado, sejam $s, s' \in S$ faces que possuem aresta em comum. Suponhamos $p \in V(s, \delta/2) \cap V(s', \delta/2)$ para algum $p \notin \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$. Isto significa que existem $p_1 \in s$ e uma curva γ_1 ligando p_1 e p cujo comprimento $\ell(\gamma_1) < \delta/2$. Do mesmo modo, existem $p_2 \in s'$ e uma curva γ_2 ligando p_2 e p cujo comprimento $\ell(\gamma_2) < \delta/2$. Segue que $d(p_1, p_2) < \delta$, isto é, $s' \ni p_2 \in B(p_1, \delta) \subset V(s, \delta)$. Pela escolha de δ , temos $p_2 \in V(a, \varepsilon/2)$ para alguma aresta $a \in A_s$. Isto é impossível dado que $\delta < \varepsilon/2$. Em outras palavras, $V(s, \delta/2) \cap V(s', \delta/2) \subset \bigcup_{a \in A_s} V(a, \varepsilon)$.

Resta observar, pelo lema anterior, que φ estabelece as bijeções $\pi(V_{s,\delta/2}) \simeq V(s,\delta/2)$ e $\pi(V_{a,\varepsilon}) \simeq V(a,\varepsilon)$ para cada $s \in S$ e para cada aresta a de P ■

O corolário acima mostra que as condições (P1) a (P9) garantem a *tesselação de uma vizinhança métrica* de P . Deste fato segue a

3.3.20. Proposição. φ é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração. Pelo item (3) do Lema 3.2.6, a aplicação φ é aberta. Em particular, $\varphi(J) \subset X$ é aberto. Seja $q \in \overline{\varphi(J)}$. Então, para algum $g \in G$, temos $B(q,\delta/2) \cap gP \neq \emptyset$. Daí segue que $q \in V(gP,\delta/2) = gV(P,\delta/2)$. Pelo Corolário 3.3.19, $q \in \varphi(gW_P) \subset \varphi(J)$. Portanto, $\varphi(J)$ é fechado em X . Assim, $X = \varphi(J)$ uma vez que X é conexo.

Seja $q \in X$. Definimos $G_q = \{g \in G \mid B(q,\delta/4) \cap gP \neq \emptyset\}$. Para cada $g \in G_q$, seja

$$W_g = \varphi^{-1}(B(q,\delta/4)) \cap gW_P.$$

Pelo corolário anterior, $\varphi : W_g \rightarrow B(q,\delta/4)$ é um homeomorfismo. De fato, $B(q,\delta/4) \cap gP \neq \emptyset$ implica que $B(q,\delta/4) \subset gV(P,r)$. Seja $p \in \varphi^{-1}(B(q,\delta/4))$. Se $g \in G$ é tal que $p \in g[P]$ (vide Lema 3.2.3), então $\varphi(p) \in B(q,\delta/4) \cap gP$, de onde segue que $g \in G_q$ e que $p \in W_g$. Em outras palavras, $\varphi^{-1}(B(q,\delta/4)) = \bigcup_{g \in G_q} W_g$. Resta mostrar que a união anterior é disjunta.

Assim, suponhamos $W_{g_1} \cap W_{g_2} \neq \emptyset$ para $g_1, g_2 \in G_q$. Obviamente, $W_{g_1} \cap W_{g_2}$ é aberto em W_{g_1} . Provemos que $W_{g_1} \cap W_{g_2}$ é fechado em W_{g_1} . A projeção $W_{g_1} \times W_{g_2} \rightarrow W_{g_1}$ induz um homeomorfismo entre $M = \{(x_1, x_2) \in W_{g_1} \times W_{g_2} \mid \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\}$ e W_{g_1} . A diagonal $\Delta_{W_{g_1} \cap W_{g_2}} = \Delta_J \cap (W_{g_1} \times W_{g_2}) \subset M$ é fechada em M uma vez que J é Hausdorff (vide item (2) do Lema 3.2.6). Portanto, a imagem $W_{g_1} \cap W_{g_2}$ de $\Delta_{W_{g_1} \cap W_{g_2}}$ é fechada em W_{g_1} . Como W_{g_1} é conexo, segue que $W_{g_1} = W_{g_2}$ ■

Finalmente, exigimos a propriedade

(P10) J é conexo por caminhos.

É fácil ver que (P10) é automaticamente satisfeita se o poliedro P é conexo.

Portanto, J é conexo por caminhos, X é simplesmente conexo e $\varphi : J \rightarrow X$ é um recobrimento. Segue que φ é um homeomorfismo. Em particular, φ é uma bijeção. Aplicando o Lema 3.2.3, obtemos que P é uma região fundamental (3.3.1) para a ação de G . Em resumo,

3.3.21. Teorema (poliedral de Poincaré). *Seja X uma variedade Riemanniana conexa e simplesmente conexa.*

Seja $P \subset X$ um subespaço (poliedro). Vamos supor que

- $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$ e $P = \overline{\overset{\circ}{P}}$.
- Temos uma decomposição não-vazia $\partial P = \bigcup_{s \in S} s$ em finitos subconjuntos não-vazios $s \in S$ (faces).

As faces de P são variedades diferenciáveis fechadas, orientadas, de codimensão 1 e com bordo (possivelmente vazio). Toda face $s \in S$ está orientada de modo que, em um ponto não pertencente ao bordo ∂s , o vetor normal unitário aponta para o interior de P .

- Para cada face $s \in S$ temos uma coleção finita A_s (possivelmente vazia) de subconjuntos não-vazios de s (arestas). Toda aresta em A_s é fechada, conexa e $\partial s = \bigsqcup_{a \in A_s} a$. Toda aresta é aresta de exatamente duas faces distintas.

• Existe $d > 0$ tal que, para arestas distintas a, a' de P , a distância $\text{dist}(a, a') > d$. Para faces distintas $s, s' \in S$ que não possuem aresta(s) em comum, a distância $\text{dist}(s, s') > d$. Para uma face $s \in S$ e uma aresta $a \notin A_s$, a distância $\text{dist}(s, a) > d$.

• Sejam $s, s' \in S$ faces que possuem aresta(s) em comum. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(s, s', \varepsilon) > 0$ tal que, se $p \in s \cap V(s', \delta)$, então $p \in V(a, \varepsilon)$, onde a é uma aresta comum de s e s' .

Seja $\sigma : S \rightarrow S$ uma involução (identificação de faces) tal que a cada par de faces da forma $(s, \sigma s)$ está associada uma isometria $I_s : X \rightarrow X$ satisfazendo $I_s s = \sigma s$ e $I_{\sigma s} = I_s^{-1}$. Dado um par (a, s) , para $s \in S$ e $a \in A_s$, obtemos o ciclo de arestas

$$(a, s_1) \xrightarrow{I_{s_1}} (I_{s_1} a, s_2) \xrightarrow{I_{s_2}} \dots \xrightarrow{I_{s_{n-1}}} (I_{s_{n-1}} \dots I_{s_1} a, s_n) \xrightarrow{I_{s_n}} (a, s_1),$$

onde $s_1 \ni s$ e s_i e σs_{i-1} têm em comum a aresta $I_{s_{i-1}} \dots I_{s_1} a$. Suponhamos válidas as exigências abaixo.

• O ângulo interno entre duas faces em qualquer ponto de uma aresta comum é distinto de 0 e de 2π . Sejam $s \in S$ e $a \in A_s$. Para algum $p \in a$, a soma dos ângulos internos ao longo do ciclo de arestas de (a, s) vale $\frac{2\pi}{k}$ para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

• Seja $s \in S$. Seja $x \in s \setminus \partial s$. Então, $dI_s(\zeta_s) = -\zeta_{\sigma s}$, onde ζ_s (respectivamente, $\zeta_{\sigma s}$) é o vetor unitário normal a s (respectivamente, a σs) em x . Seja $a \in A_s$. Com relação ao ciclo de arestas de (a, s) , temos $(I_{s_n} \dots I_{s_1})|_a = 1$ e $(I_{s_n} \dots I_{s_1})^k = 1$.

Seja G o grupo gerado pelas isometrias I_s , $s \in S$. Seja J o quociente da união disjunta $G \times P$ obtido através das identificações de faces determinadas pelas isometrias I_s , $s \in S$. Vamos supor que

- J é conexo por caminhos.³³

Então, o poliedro P é uma região fundamental para a ação de G ■

Munimos da topologia compacto-aberta o grupo $\text{Isom}(X)$ das isometrias de X . (Em outras palavras, uma sub-base para o topologia de $\text{Isom}(X)$ é dada por abertos da forma $U(K, W) \ni \{g \in \text{Isom}(X) \mid g(K) \subset W\}$, onde $K \subset X$ é compacto e $W \subset X$ é aberto.) Diremos que um subgrupo do grupo $\text{Isom}(X)$ é *discreto* se o último induz no primeiro a topologia discreta.

3.3.22. Corolário. Nas condições do Teorema 3.3.21, G é discreto.

Demonstração. Como P é uma região fundamental para a ação de G , temos $g\mathring{P} \cap \mathring{P} = \emptyset$ para todo $G \ni g \neq 1$. Seja $p \in \mathring{P}$. Então, $U(p, \mathring{P}) \cap G = \{1\}$ ■

Diremos que a ação de um subgrupo H de isometrias é *descontínua* se, para cada compacto $K \subset X$, o conjunto $\{h \in H \mid hK \cap K \neq \emptyset\}$ é finito. É fácil verificar que, se H age de modo descontínuo, então é discreto. A recíproca, em geral, não é verdadeira, mas vale se X é uma variedade Riemanniana completa (vide [Sco]).

3.3.23. Corolário. Vamos supor que a variedade Riemanniana X é completa. Então, nas condições do Teorema 3.3.21, a ação de G é descontínua. Além disso, se G age livremente,³⁴ então X/G é uma variedade diferenciável, a aplicação $\Pi : X \rightarrow X/G$ é um recobrimento e G é o grupo de transformações de recobrimento de Π .

Demonstração. Vide, por exemplo, [Rat, Teorema 8.1.3] ■

³³Note-se que esta condição é automaticamente satisfeita se o poliedro P é conexo.

³⁴Isto é, o estabilizador de qualquer ponto em X é trivial.

Referências

As considerações da Seção 3.2 estão, essencialmente, presentes em [Bea].

**COMPLEX HYPERBOLIC STRUCTURES
ON DISC BUNDLES OVER SURFACES
I. GENERAL SETTINGS. A SERIES OF EXAMPLES**

SASHA ANAN'IN, CARLOS H. GROSSI, NIKOLAY GUSEVSKII

ABSTRACT. We study oriented disc bundles M over a closed orientable surface Σ that arise from certain discrete subgroups in $\mathrm{PU}(2, 1)$ generated by reflections in ultraparallel complex geodesics in the complex hyperbolic plane $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. The results obtained allow us to construct the first examples of

- Disc bundles M over Σ that satisfy the equality $2(\chi + e) = 3\tau$,
- Disc bundles M over Σ that satisfy the inequality $\frac{1}{2}\chi < e$,
- Disc bundles M over Σ that admit both real hyperbolic and complex hyperbolic structures,
- Discrete and faithful representations $\varrho : \pi_1\Sigma \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$ with fractional Toledo invariant, and
- Nonhomeomorphic disc bundles M over the same Σ and with the same τ ,

where χ stands for the Euler characteristic $\chi(\Sigma)$ of Σ , e , for the Euler number $e(M)$ of M , and τ , for the Toledo invariant of M . To get a satisfactory explanation of the equality $2(\chi + e) = 3\tau$, we conjecture that there exists a holomorphic section in all our examples.

Constructing examples is based on a new version of Poincaré's Polyhedron Theorem where requirements concerning the tessellation have a form which is as local as possible. This version can be easily adapted to be applied in subtle situations lacking the concept of convexity.

A more important feature of the examples is that, in [Ana], we will distinguish some examples having the same e , χ , and τ with new discrete invariants, which will lead to a detailed knowledge about the corresponding Teichmüller space.

In [AGu], we apply the introduced methods to construct a trivial bundle carrying complex hyperbolic structure.

CONTENTS

1. Introduction		86
2. Preliminaries		88
2.1. Tangent Bundle, Hermitian Structure, Levi-Civita Connection, Curvature		88
2.2. Kähler Potential		91
2.3. Bisectors		92
3. Displacements along Geodesics.		93
4. Angle between Bisectors with Common Slice. Transversality		97
5. More about Bisectors		101
6. General Construction		103
6.1. Cycle of Bisectors		103
6.2. Poincaré's Polyhedron Theorem		106
6.3. Simplicity and Transversality		110
6.4. Fibred Polyhedra, Euler Number		112
6.5. Transversal Triangles		114
7. Examples		119
7.1. Basic Examples		119
7.2. Some Interesting Examples		126
8. References		129
9. Index		130

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57S30 (30F35, 51M10, 57M50).

Partially supported by CNPq

Supported by CNPq

Supported by CNPq

1. Introduction

Dealing with geometry and topology of 4-manifolds, it is natural to study whether a topological 4-manifold M admits a classic geometric structure: real hyperbolic, complex hyperbolic, quaternionic, etc. Henceforth, M is an oriented disc bundle over a closed orientable surface Σ , χ denotes the Euler characteristic $\chi(\Sigma)$ of Σ , and e , the Euler number $e(M)$ of M .

Gromov, Lawson, Thurston [GLT] and Kuiper [Kui] (see also Kapovich [Kap] and Luo Feng [Luo]) found various sufficient conditions in terms of χ and e that provide the existence of a real hyperbolic structure on the bundle M . Our article studies the case of complex hyperbolic geometry. In this case, there is one more discrete invariant — the Toledo invariant of a representation $\varrho : \pi_1 \Sigma \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$ defined by M — related to the complex (= Riemannian) structure on M . It is shown in [Tol] that the Toledo invariant τ takes values in $\frac{2}{3}\mathbb{Z}$ and satisfies the inequality $|\tau| \leq |\chi|$. There are not so many known disc bundles M carrying a complex hyperbolic structure. For a trivial one, \mathbb{R} -Fuchsian, M is homeomorphic to the tangent bundle $T\Sigma$ of Σ which results in $e = \chi$ and $\tau = 0$. For the other trivial one, \mathbb{C} -Fuchsian, that can be characterized by $\chi = \tau$ [Tol], M is homeomorphic to the square root of $T\Sigma$, and $e = \frac{1}{2}\chi$. The first nontrivial examples of complex hyperbolic disc bundles were constructed by Goldman, Kapovich, and Leeb [GKL]. Their examples satisfy the relations $e = \chi + |\tau/2|$ and $\chi \leq e \leq \frac{1}{2}\chi$. Thus, \mathbb{R} -Fuchsian and \mathbb{C} -Fuchsian bundles provide the extreme values for e in all known examples.

The main purpose of the present article is to study discrete subgroups H in $\mathrm{PU}(2, 1)$ generated by the reflections R_1, \dots, R_n in ultraparallel complex geodesics M_1, \dots, M_n in $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ with the defining relations $R_n \dots R_1 = 1$, $R_i^2 = 1$ such that a suitable torsion-free subgroup of index 2 or 4 in H produces a bundle M in question. A fundamental domain for H is bounded by a cycle of bisectors B_i 's such that the neighbouring bisectors have a common slice and M_i is the middle slice of B_i . The results obtained allow us to construct a large variety of new manifolds. It is worthwhile mentioning that our construction has some features of the construction described in [GLT]. Also, it has some common features with Kuiper's construction [Kui] since both mimic well-known plane examples. However, the complex hyperbolic situation is more subtle: to check that bisectors intersect properly is not an easy task, bisectors have nonconstant angle along their common slice, to prove the fact that the fundamental domain is fibred and to calculate the Euler number of M requires additional efforts.

At the end of this article, we apply our methods to construct some series of explicit examples of complex hyperbolic disc bundles. Clearly, we simultaneously obtain a family of compact 3-manifolds (circle bundles over closed orientable surfaces) admitting a spherical CR-structure. All the examples of the series satisfy the inequality $\frac{1}{2}\chi < e$ and the equality $2(\chi + e) = 3\tau$ (with negative χ, e, τ). The inequality was never valid for previously known examples, whereas the equality was valid only in the \mathbb{C} -Fuchsian case. It easily follows from the adjunction formula that the equality is a necessary condition for the existence of a holomorphic section of the bundle M . It is intriguing to conjecture that there exists a holomorphic section in *all our examples*. Such a section would produce a holomorphic disc D in $\mathbb{B}^4 \subset \mathbb{C}^2$ whose boundary $\partial D \subset \mathbb{S}^3$ is a fractal curve, ∂D is the limit set of the corresponding group. Also, in this case, M is not Stein. The only known non-Stein complex hyperbolic disc bundle is \mathbb{C} -Fuchsian. The fact that the \mathbb{R} -Fuchsian bundles are Stein manifolds is proven in [BSh].

Combining our results with some known facts, we arrive at the following.

As was shown in [Kui], the inequality $|e| \leq \frac{1}{3}|\chi|$ is sufficient for the existence of a real hyperbolic structure on a bundle. Since some of our examples satisfy this inequality, we obtain the first disc bundles admitting both structures: real hyperbolic and complex hyperbolic. Passing on to the corresponding circle bundles, we see that there exist circle bundles over closed orientable surfaces admitting simultaneously conformally flat and spherical CR-structures. Compare our examples with those constructed by Schwartz in [Sch1] and [Sch2].

In a preliminary version [GKL1] of [GKL], it was conjectured that τ is always an even integer for any discrete and faithful representation $\pi_1 \Sigma \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$. For many of our examples, τ is not integer,

implying, in particular, that the corresponding representation $\pi_1\Sigma \rightarrow \mathrm{PU}(2,1)$ cannot be lifted to $\mathrm{SU}(2,1)$.

In [GKL], for any Σ with $\chi(\Sigma) < 0$ and for any even integer τ subject to the Toledo necessary condition $|\tau| \leq |\chi|$, a complex hyperbolic disc bundle M over Σ was constructed with the Toledo invariant τ . Therefore, each of our examples with τ integer provides a couple of nonhomeomorphic complex hyperbolic disc bundles over the same Σ and with the same τ . This implies that there exist discrete and faithful representations $\rho : \pi_1\Sigma \rightarrow \mathrm{PU}(2,1)$ lying in the same connected component of the space of representations but in different connected components of the Teichmüller space, the space of discrete, faithful, and type-preserving representations.

In order to prove that H is discrete, we need a new version of Poincaré's Polyhedron Theorem. In the case of nonconstant curvature, the 3-faces of a fundamental polyhedron, bisectors in our case, are not totally geodesic, and the angle between them along a common 2-face is not usually constant. A typical condition in known versions of Poincaré's Polyhedron Theorem is that the faces of adjacent polyhedra intersect properly. Since we cannot explore the concept of convexity, this condition is rather difficult to verify in the complex hyperbolic case. Our basic strategy to overcome the difficulties is to find requirements concerning the tessellation in a form which is as local as possible. Although Poincaré's Polyhedron Theorem in the presented form looks very particular, it is easy to adapt the proof to a suitable generalized version (see [AGr]).

Whenever reasonable, we work without coordinates. In fact, we rewrite a number of well-known facts and formulae using this approach (some of them can be found in Goldman [Gol] or in Sandler [San]), so, to a certain extent, our exposition is self-contained. Nevertheless, direct references would not simplify the exposition, since, in most cases, we need something developed in the proof. Some proofs contain straightforward and boring verifications. In such cases, we point out what the reader can omit without loss of anything useful.

Sections 2, 3, and 4 establish our conventions regarding complex hyperbolic geometry and provide technical tools. We believe that other classic geometries such as real hyperbolic, quaternionic, etc., can be treated in a similar way [AGr]. Those sections also contain some crucial facts and concepts: the meridional displacement, Proposition 3.9, Theorem 4.2, and Corollary 4.3. We should warn the reader that our definitions — such as those of geodesics, bisectors, complex geodesics, etc. — are frequently more general than the common ones. This is mostly due to the use of geometry of positive points in subsequent articles.

Section 5 deals with the properties of bisectors that we need in the proof of Theorem 6.2.7. From the lemmas of this section and from Lemma 6.2.4, one can extract those properties of 3-faces that allow to compose an abstract version of Poincaré's Polyhedron Theorem provable in the same way.

The geometrical core of the article begins in Section 6. We exhibit the general construction of fundamental polyhedra and prove our version of Poincaré's Polyhedron Theorem (Theorem 6.2.7). Exploring the concept of transversality of bisectors and planning further applications, we find a criterion (Criterion 6.3.2) which reduces the problem of intersection of bisectors to the question of transversality. In order to obtain a disc bundle, we require that fundamental polyhedra can be cut into transversal triangles of bisectors and prove that each transversal triangle can be properly fibred into discs (Theorem 6.5.1). Having in mind the examples that we are going to construct in Section 7, we establish Criterion 6.5.3 which decides whether a triangle of bisectors is transversal. The transversal triangles turn out to be important geometrical objects. They can serve as building blocks for constructing fundamental polyhedra, and not only in the way used in this article. Also, they are naturally equipped with an isometry of its vertices (complex geodesics). Lemmas 6.5.4 and 6.5.5 used in the proof of Theorem 6.5.1 are also applied in Section 7: with the help of the isometry mentioned above, they permit us to control the 'fractional Euler number' of triangles.

Section 7 is an application of the previous sections: we construct a series of explicit examples. Each

of them is given by a torsion-free subgroup of finite index in the discrete group F_n generated by two rotations U and V , being $U^n = V^n = (V^{-1}U)^2 = 1$ the defining relations ($V^{-1}U$ is the reflection in a complex geodesic). The fundamental domain for F_n is a quadrangle of bisectors glued from two transversal triangles. Applying the numerical criteria of the previous sections, we reduce the verification of discreteness to some explicit inequalities (see Theorem 7.1.2). Finally, in Subsection 7.2, we list some of the most interesting examples.

The introduced methods are unexpectedly powerful. For instance, in [Ana], they will be applied to a detailed study of the Teichmüller space of the complex hyperbolic manifolds in question, that is, the moduli space of faithful and discrete representations included in $\text{Hom}(\pi_1\Sigma, \text{PU}(2, 1))/\text{PU}(2, 1)$. Some of the examples found in the present work having the same χ , e , and τ will be distinguished by a series of new discrete invariants of the complex hyperbolic structure on the bundle, and will give rise to open locus on the corresponding connected components of the Teichmüller space. The meridional displacement will turn out to be a particular aspect of a new rich structure related to a classic geometry.

Also, these methods allow to construct a trivial complex hyperbolic bundle [AGu].

Acknowledgements. The authors are grateful to Victor Gerasimov for the discussions in the beginning of this work. We dedicate this article to the memory of Igor' Vladimirovich L'vov.

2. Preliminaries

2.1. Tangent Bundle, Hermitian Structure, Levi-Civita Connection, Curvature. Let V be a \mathbb{C} -vector space, $\dim_{\mathbb{C}} V = 3$, equipped with a hermitian form of signature $++-$. The form identifies $V^* \simeq \overline{V}$, where \overline{V} stands for the \mathbb{C} -vector space defined³⁵ by $c \cdot \overline{v} \simeq \overline{c} \cdot v$ for $\overline{v} \in \overline{V}$, $v \in V$, $c \in \mathbb{C}$. Thus, we can equip $\text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V) \simeq V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq \overline{V} \otimes_{\mathbb{C}} V$ with the hermitian form defined as $\langle \overline{v}_1 \otimes v_2, \overline{v}_3 \otimes v_4 \rangle \simeq -\langle v_3, v_1 \rangle \cdot \langle v_2, v_4 \rangle$. For a nonisotropic $p \in V$, we have the orthogonal decomposition $V = \mathbb{C}p \dot{+} p^{\perp}$, $v = v^p + {}^p v$, where $v^p \simeq \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in \mathbb{C}p$ and ${}^p v \simeq v - \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in p^{\perp}$. Clearly, $v^{c \cdot p} = v^p$ and $c \cdot {}^p v = {}^p v$ for $0 \neq c \in \mathbb{C}$. For a nonisotropic $p \in V$ and for $v \in V$, denote $v_p \simeq \langle -, p \rangle \otimes {}^p v \in V^* \otimes_{\mathbb{C}} p^{\perp}$. Obviously, $v_p(p^{\perp}) = 0$.

Depending on the context, we will use elements of V to denote points in $\mathbb{C}PV$. We regard any $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V)$ as a tangent vector $t_{\varphi} \in T_p \mathbb{C}PV$ by defining $t_{\varphi} f \simeq \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \varepsilon \varphi(p))$ for a local smooth function f on $\mathbb{C}PV$ and its lift \hat{f} to V . In this well-known way, we identify $T_p \mathbb{C}PV \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}p, V/\mathbb{C}p)$ [Man]. Hence, for a nonisotropic p , $T_p \mathbb{C}PV \simeq \langle -, p \rangle \otimes p^{\perp}$ is equipped with a hermitian form defined by $\langle t_1, t_2 \rangle = -\langle p, p \rangle \langle v_1, v_2 \rangle$ for $t_1 = \langle -, p \rangle \otimes v_1 \in T_p \mathbb{C}PV \ni t_2 = \langle -, p \rangle \otimes v_2$, where $v_1, v_2 \in p^{\perp}$.

We will denote $BV \simeq \{p \in \mathbb{C}PV \mid \langle p, p \rangle < 0\}$, $\partial BV \simeq \{p \in \mathbb{C}PV \mid \langle p, p \rangle = 0\}$, and $\overline{BV} \simeq BV \cup \partial BV$. As we will shortly show, the hermitian metric over the complex hyperbolic space $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \simeq BV$ coincides, up to the scale factor of 4, with the one introduced in [Gol].

For $p_1, p_2 \in BV$, let us calculate the length of the curve (which turns out to be a geodesic) $c(s) \simeq (1-s)p_1 + sp_2$, $s \in [0, 1]$, assuming $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle = -1$ and $\langle p_1, p_2 \rangle = -a \leq 0$ (which implies $a \geq 1$). It is easy to verify that $c'(s) \simeq \langle -, c(s) \rangle \otimes \frac{c^{(s)}(p_2 - p_1)}{\langle c(s), c(s) \rangle}$ is the tangent vector to the curve.

Then $\langle c'(s), c'(s) \rangle = \frac{a^2 - 1}{(1 + 2(a-1)s(1-s))^2}$ and the length is $\ell(c) = \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2 - 1} ds}{1 + 2(a-1)s(1-s)} = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$. Using projective coordinates $p_1 = [z_1, 1]$ and $p_2 = [z_2, 1]$ on the projective line containing p_1

³⁵Here and in what follows, the symbol \simeq stands for 'equals by definition.'

and p_2 , we have $2 \operatorname{dist}(z_1, z_2) = \ln \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$ which is the usual distance formula for the disc model of the hyperbolic plane. Being the distance a monotonic function of the *tance*

$$\operatorname{ta}(p_1, p_2) \Leftrightarrow \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle} = a^2,$$

it is frequently convenient to use $\operatorname{tance}^{36}$ instead of distance.

Let $X(p) = \langle -, p \rangle \otimes x(p)$, where $x(p) \in p^\perp$, be a smooth tangent vector field defined out of $\partial B V$ (normally, dealing with vector fields or functions, we will locally lift their argument, ‘living’ in $\mathbb{C}P V$, to that in V) and let $v \in V$. It is easy to verify that

$$\nabla_{v_p} X \Leftrightarrow \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x(p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p v) \right)_p$$

defines a connection such that $v_p \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_{v_p} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{v_p} Y \rangle$.

2.1.1. Lemma. *Let $p \in V$ be nonisotropic and let $x, y \in V$. Then*

$$\nabla_{x_p} y_* = -\langle y, p \rangle x_p, \quad x_p \langle y, * \rangle = \langle y, {}^p x \rangle \langle p, p \rangle, \quad x_p \langle *, y \rangle = \langle {}^p x, y \rangle \langle p, p \rangle, \quad x_p \langle *, * \rangle = 0.$$

Proof is straightforward. As examples, we prove the first and the last. For the first, we have $y_* = \langle -, * \rangle \otimes \left(y - \frac{\langle y, * \rangle}{\langle *, * \rangle} * \right)$, therefore,

$$\begin{aligned} \nabla_{x_p} y_* &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(y - \frac{\langle y, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x \rangle}{\langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) \right)_p = \\ &= - \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\langle y, p \rangle + \varepsilon \langle p, p \rangle \langle y, {}^p x \rangle}{\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \langle p, p \rangle^2 \langle {}^p x, {}^p x \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) \right)_p = \\ &= - \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\langle y, p \rangle + \varepsilon \langle p, p \rangle \langle y, {}^p x \rangle}{\langle p, p \rangle} (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) \right)_p = \\ &= - \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\left(\frac{\langle y, p \rangle}{\langle p, p \rangle} + \varepsilon \langle y, {}^p x \rangle \right) (p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x) \right) \right)_p = -(\langle y, {}^p x \rangle p + \langle y, p \rangle^p x)_p = \\ &= -\langle -, p \rangle \otimes ({}^p \langle y, {}^p x \rangle p + \langle y, p \rangle^p x) = -\langle -, p \rangle \otimes (\langle y, p \rangle^p x) = -\langle y, p \rangle x_p. \end{aligned}$$

For the last,

$$x_p \langle *, * \rangle = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x, p + \varepsilon \langle p, p \rangle^p x \rangle = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \langle p, p \rangle^2 \langle {}^p x, {}^p x \rangle) = 0 \blacksquare$$

Let $x, y \in V$, $x \neq 0$. The vector field

$$\operatorname{Tn}(x, y)(*) \Leftrightarrow \frac{y_*}{\langle x, * \rangle}$$

is defined out of $\mathbb{C}P x^\perp \cup \partial B V$. Clearly, $\operatorname{Tn}(p, -y)(p) = y_p$ if $\langle p, p \rangle = -1$.

2.1.2. Lemma. *For a nonisotropic $p \in V$, $x, y \in p^\perp$, and any nonisotropic $q \notin p^\perp$,*

$$\nabla_{\operatorname{Tn}(p, x)} \operatorname{Tn}(p, y)(q) = -\frac{\langle y, q \rangle x_q}{\langle p, q \rangle^2} - \frac{\langle p, {}^q x \rangle \langle q, q \rangle y_q}{\langle q, p \rangle \langle p, q \rangle^2}$$

(in particular, $\nabla_{\operatorname{Tn}(p, x)} \operatorname{Tn}(p, y)(p) = \nabla_{\operatorname{Tn}(p, y)} \operatorname{Tn}(p, x)(p) = 0$) and $[\operatorname{Tn}(p, x), \operatorname{Tn}(p, y)](p) = 0$.

Proof is routine. By the first two equalities of Lemma 2.1.1,

³⁶If one of p_1, p_2 is isotropic, we define conventionally $\operatorname{ta}(p_1, p_2)$ as being ∞ or 1 when $\langle p_1, p_2 \rangle \neq 0$ or $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$, respectively.

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{Tn}(p,x)} \text{Tn}(p,y)(q) &= \nabla_{\text{Tn}(p,x)(q)} \left(\frac{y_*}{\langle p, * \rangle} \right) = \frac{\nabla_{\text{Tn}(p,x)(q)} y_*}{\langle p, q \rangle} - \frac{\text{Tn}(p,x)(q) \langle \langle p, * \rangle \rangle y_q}{\langle p, q \rangle^2} = \\ &= -\frac{\langle y, q \rangle \text{Tn}(p,x)(q)}{\langle p, q \rangle} - \frac{\left\langle p, \frac{q x}{\langle p, q \rangle} \right\rangle \langle q, q \rangle y_q}{\langle p, q \rangle^2} = -\frac{\langle y, q \rangle x_q}{\langle p, q \rangle^2} - \frac{\langle p, q x \rangle \langle q, q \rangle y_q}{\langle q, p \rangle \langle p, q \rangle^2}. \end{aligned}$$

Let f be the lift to V of an (analytic) function defined in some neighbourhood of p (thus, $f(cq) = f(q)$ for any $0 \neq c \in \mathbb{C}$). By definition,

$$\text{Tn}(p,y)f(q) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(q + \varepsilon \langle q, q \rangle \frac{q y}{\langle p, q \rangle}\right).$$

In the sequel, we will repeatedly apply identities of a kind as follows:

$$\frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(\dots + \frac{\varepsilon}{1 + c\varepsilon\delta} q + \dots\right) \right) = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(\dots + \varepsilon q + \dots) \right).$$

In this way,

$$\begin{aligned} \text{Tn}(p,x)(\text{Tn}(p,y)f)(p) &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p + \delta x + \varepsilon \langle p + \delta x, p + \delta x \rangle \frac{p + \delta x y}{\langle p, p + \delta x \rangle}\right) \right) = \\ &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p + \delta x + \varepsilon \left(1 + \delta^2 \frac{\langle x, x \rangle}{\langle p, p \rangle}\right) p + \delta x y\right) \right) = \\ &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p + \delta x + \varepsilon p - \delta x y\right) \right) = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p + \delta x + \varepsilon \left(y - \frac{\langle y, \delta x \rangle}{\langle p, p \rangle} (p + \delta x)\right)\right) \right) = \\ &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p + \delta x + \varepsilon y - \varepsilon \delta \frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle} p\right) \right) = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p \left(1 - \varepsilon \delta \frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle}\right) + \delta x + \varepsilon y\right) \right). \end{aligned}$$

From $f(cp) = f(p)$, we derive

$$\begin{aligned} \text{Tn}(p,x)(\text{Tn}(p,y)f)(p) &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f\left(p + \frac{\delta}{1 - \varepsilon \delta \langle y, x \rangle / \langle p, p \rangle} x + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon \delta \langle y, x \rangle / \langle p, p \rangle} y\right) \right) = \\ &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(p + \delta x + \varepsilon y) \right). \end{aligned}$$

Therefore, $\text{Tn}(p,x)(\text{Tn}(p,y)f)(p) = \text{Tn}(p,y)(\text{Tn}(p,x)f)(p)$ ■

2.1.3. Corollary. ∇ is a Levi-Civita connection ■

2.1.4. Proposition (compare with [Gol, p. 54]). For a nonisotropic $p \in V$ and $x_1, x_2, y \in p^\perp$, the curvature tensor

$$R(x_{1p}, x_{2p})y_p = \langle p, p \rangle \left(\langle y, x_1 \rangle x_2 - \langle y, x_2 \rangle x_1 + (\langle x_2, x_1 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle) y \right)_p.$$

Furthermore, assuming $p \in \text{BV}$, $\langle x_1, x_1 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle = 1$, $\langle x_1, x_2 \rangle = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \leq 1$, the sectional curvature $S(x_{1p}, x_{2p}) = -\left(1 + \frac{3b^2}{1 - a^2}\right)$. It varies in $[-4, -1]$, being³⁷ (-4) exactly if $x_2 \in \mathbb{C}x_1$, and (-1) , exactly if $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}$.

Proof is immediate. As above, we consider the fields $X_i \Leftarrow \text{Tn}(p, x_i)$, $i = 1, 2$, and $Y \Leftarrow \text{Tn}(p, y)$. By Lemma 2.1.2, $\nabla_{X_2} Y(q) = -\frac{\langle y, q \rangle x_{2q}}{\langle p, q \rangle^2} - \frac{\langle p, q x_2 \rangle \langle q, q \rangle y_q}{\langle q, p \rangle \langle p, q \rangle^2}$. Hence,

$$\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y(p) = \frac{1}{\langle p, p \rangle} \nabla_{x_{1p}} \left(-\frac{\langle y, * \rangle x_{2*}}{\langle p, * \rangle^2} - \frac{\langle p, * x_2 \rangle \langle *, * \rangle y_*}{\langle *, p \rangle \langle p, * \rangle^2} \right) =$$

³⁷with respect to the well-known totally geodesic surfaces: projective line and real plane [Gol].

$$= -\frac{x_{1p}(\langle y, * \rangle)}{\langle p, p \rangle^3} x_{2p} - \frac{x_{1p}(\langle p, * x_2 \rangle)}{\langle p, p \rangle^3} y_p = -\frac{\langle y, x_1 \rangle}{\langle p, p \rangle^2} x_{2p} - \frac{x_{1p}(\langle p, * x_2 \rangle)}{\langle p, p \rangle^3} y_p.$$

Since

$$x_{1p}(\langle p, * x_2 \rangle) = x_{1p} \left(\left\langle p, -\frac{\langle x_2, * \rangle *}{\langle *, * \rangle} \right\rangle \right) = -x_{1p} \left(\frac{\langle *, x_2 \rangle \langle p, * \rangle}{\langle *, * \rangle} \right) = -x_{1p}(\langle *, x_2 \rangle) = -\langle x_1, x_2 \rangle \langle p, p \rangle,$$

we obtain

$$\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y(p) = \frac{1}{\langle p, p \rangle^2} (\langle x_1, x_2 \rangle y_p - \langle y, x_1 \rangle x_{2p}).$$

Analogously,

$$\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} Y(p) = \frac{1}{\langle p, p \rangle^2} (\langle x_2, x_1 \rangle y_p - \langle y, x_2 \rangle x_{1p}).$$

By Lemma 2.1.2,

$$\begin{aligned} R \left(\frac{x_{1p}}{\langle p, p \rangle}, \frac{x_{2p}}{\langle p, p \rangle} \right) \frac{y_p}{\langle p, p \rangle} &= R(X_1, X_2)Y(p) = (\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} Y - \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y + \nabla_{[X_1, X_2]} Y)(p) = \\ &= \frac{1}{\langle p, p \rangle^2} (\langle y, x_1 \rangle x_2 - \langle y, x_2 \rangle x_1 + (\langle x_2, x_1 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle) y)_p, \end{aligned}$$

implying the desired fact. Now, $S(x_{1p}, x_{2p}) = \frac{(R(x_{1p}, x_{2p})x_{1p}, x_{2p})}{(x_{1p}, x_{1p})(x_{2p}, x_{2p}) - (x_{1p}, x_{2p})^2} = -\left(1 + \frac{3b^2}{1-a^2}\right) \blacksquare$

2.2. Kähler Potential

2.2.1. Lemma. *Let $u \in V$. We define a 1-form $P_u(x_p) \Leftarrow -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\langle p, p \rangle \langle p x, u \rangle}{\langle p, u \rangle} \right)$ for $p \notin \mathbb{C}P u^\perp \cup \partial B V$. Let $u_1, u_2 \in V$, $\langle u_1, u_2 \rangle \neq 0$. For $p \notin \mathbb{C}P u_1^\perp \cup \mathbb{C}P u_2^\perp$, we define³⁸ $f_{u_1, u_2}(p) \Leftarrow \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \left(\frac{\langle u_1, p \rangle \langle p, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_2 \rangle} \right)$. Then the form $dP_u = \omega$ is a Kähler form and $P_{u_1} - P_{u_2} = df_{u_1, u_2}$.*

Proof is a routine use of Lemmas 2.1.1 and 2.1.2 and involves the identity of Maurer-Cartan. Let $p \in V$ be nonisotropic and let $x, y \in p^\perp$. For $X \Leftarrow \operatorname{Tn}(p, x)$ and $Y \Leftarrow \operatorname{Tn}(p, y)$, we have

$$\begin{aligned} X(P_u(Y))(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\langle p, p \rangle} x_p \left(\frac{\langle *, * \rangle \langle * y, u \rangle}{\langle p, * \rangle \langle *, u \rangle} \right) \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(x_p \left(\frac{\langle * y, u \rangle}{\langle p, * \rangle \langle *, u \rangle} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\langle p, p \rangle \langle p, u \rangle} x_p(\langle * y, u \rangle) - \frac{\langle y, u \rangle}{\langle p, p \rangle^2 \langle p, u \rangle^2} x_p(\langle p, * \rangle \langle *, u \rangle) \right). \end{aligned}$$

From $x_p(\langle * y, u \rangle) = -x_p \left(\frac{\langle y, * \rangle \langle *, u \rangle}{\langle *, * \rangle} \right) = -x_p(\langle y, * \rangle) \frac{\langle p, u \rangle}{\langle p, p \rangle} = -\langle y, x \rangle \langle p, u \rangle$ and from $x_p(\langle p, * \rangle \langle *, u \rangle) = \langle p, p \rangle^2 \langle x, u \rangle$, we obtain $X(P_u(Y))(p) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle} + \frac{\langle y, u \rangle \langle x, u \rangle}{\langle p, u \rangle^2} \right)$. By Lemma 2.1.2,

$$\begin{aligned} dP_u \left(\frac{x_p}{\langle p, p \rangle}, \frac{y_p}{\langle p, p \rangle} \right) &= dP_u(X, Y)(p) = X(P_u(Y))(p) - Y(P_u(X))(p) - P_u([X, Y])(p) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle} + \frac{\langle y, u \rangle \langle x, u \rangle}{\langle p, u \rangle^2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\langle p, p \rangle} + \frac{\langle x, u \rangle \langle y, u \rangle}{\langle p, u \rangle^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\langle y, x \rangle}{\langle p, p \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle p, p \rangle} \right) \end{aligned}$$

implying that $dP_u(x_p, y_p) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\langle x_p, y_p \rangle - \langle y_p, x_p \rangle) = \operatorname{Im} \langle x_p, y_p \rangle$.

For $x \in p^\perp$,

³⁸In what follows, we understand by Arg a function taking values in $[0, 2\pi]$. However, in this Lemma, it is better to read Arg as a multi-valued and, hence, smooth function defined in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
df_{u_1, u_2}(x_p) &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f_{u_1, u_2}(p + \varepsilon \langle p, p \rangle x) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \operatorname{Arg} \left(\langle u_1, p + \varepsilon \langle p, p \rangle x \rangle \langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle x, u_2 \rangle \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\ln \langle u_1, p + \varepsilon \langle p, p \rangle x \rangle + \ln \langle p + \varepsilon \langle p, p \rangle x, u_2 \rangle \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\langle p, p \rangle \langle u_1, x \rangle}{\langle u_1, p \rangle} + \frac{\langle p, p \rangle \langle x, u_2 \rangle}{\langle p, u_2 \rangle} \right) = (P_{u_1} - P_{u_2})(x_p) \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3. Bisectors. For any projective line $S \subset \mathbb{C}P^1$, there is a unique $p \in \mathbb{C}P^1$ such that $S = \mathbb{C}P^1 \setminus p$. We call p the *polar point* to S . We will denote by $S(p_1, p_2) \doteq \mathbb{C}P^1 \setminus (p_1 + p_2)$ the projective line passing through two different points $p_1, p_2 \in \mathbb{C}P^1$.

Let $S \subset V$ be an \mathbb{R} -vector subspace, $\dim_{\mathbb{R}} S = 2$, such that the hermitian form is real and nondegenerated (of signature $++$ or $+ -$) over S . We call $GS \doteq \mathbb{C}P^1 \setminus S \doteq \mathbb{R}P^1 S$ *extended geodesic* (or simply *geodesic*). For $p_1, p_2 \in \mathbb{C}P^1$, $0 \neq \operatorname{ta}(p_1, p_2) \neq 1$, there exists a unique extended geodesic $G(p_1, p_2)$ containing p_1, p_2 . It is easy to verify that $G(p_1, p_2)$ is given in $S(p_1, p_2)$ by the equation $b(x, p_1, p_2) \doteq \frac{\langle p_1, x \rangle \langle x, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} - \frac{\langle p_2, x \rangle \langle x, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} = 0$.

In $\mathbb{C}P^1$, this equation describes³⁹ the (*extended*) *bisector* $B(p_1, p_2)$ whose *complex spine* is $S(p_1, p_2)$, whose *focus* $p \notin \partial BV$ is the polar point to $S(p_1, p_2)$, and whose *real spine* is $G(p_1, p_2)$. Let $q \in G(p_1, p_2)$. The projective line $S_q \doteq S(p, q)$ that connects q with the focus p is a *slice* of the bisector. Obviously, the polar point to any slice belongs to the real spine. These definitions differ slightly from common ones: for instance, what we call a bisector is an extor in [Gol].

Out of ∂BV , the bisector is given by zeroes of the function $f(x) \doteq \frac{b(x, p_1, p_2)}{\langle x, x \rangle}$. This implies that v_q is tangent to $B(p_1, p_2)$, where $q \in B(p_1, p_2) \setminus \partial BV$ and $v \in q^\perp$, if and only if $v_q(f) = 0$. By Lemma 2.1.1, this is equivalent to $t(v, q, p_1, p_2) \doteq \frac{\langle p_1, v \rangle \langle q, p_2 \rangle + \langle p_1, q \rangle \langle v, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} - \frac{\langle p_2, v \rangle \langle q, p_1 \rangle + \langle p_2, q \rangle \langle v, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} = 0$.

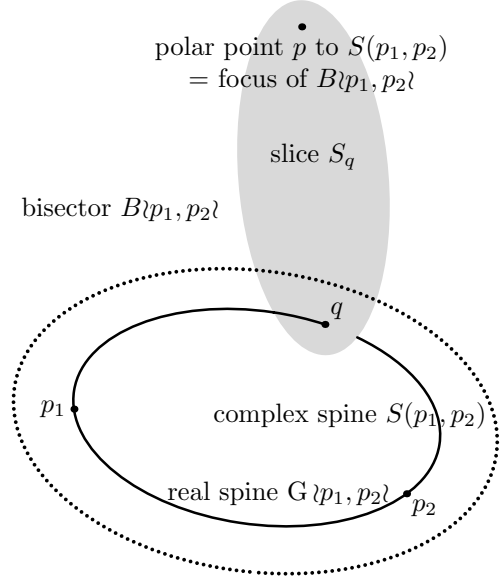
2.3.1. Lemma. Let $p_1, p_2 \in \mathbb{C}P^1$, $0 \neq \operatorname{ta}(p_1, p_2) \neq 1$, and let $q \in B(p_1, p_2) \setminus \partial BV$. Then $n(q, p_1, p_2) \doteq \langle -, q \rangle \otimes i \cdot \left(\frac{\langle q, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} p_1 - \frac{\langle q, p_1 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle} p_2 \right) \neq 0$ (unless $\langle q, p_1 \rangle = \langle q, p_2 \rangle = 0$) is a vector normal⁴⁰ to $B(p_1, p_2)$ at q .

Proof. The equation $t(v, q, p_1, p_2) = 0$ is equivalent to $\operatorname{Re} \langle n(q, p_1, p_2), v_q \rangle = 0 \blacksquare$

2.3.2. Remark. Every geodesic G of signature $+ -$ possesses exactly two isotropic points v_1, v_2 called *vertices*. For a given $g \in G \cap BV$, we can choose representatives $v_1, v_2, g \in V$ such that $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ is the Gram matrix for v_1, v_2 and such that $g = v_1 + v_2$. The formula $g(\alpha) = \alpha^{-1} v_1 + \alpha v_2$, $\alpha > 0$, lists

³⁹Also, it is possible to define a bisector as the hypersurface equidistant (equitant) from two different points.

⁴⁰with the orientation of $B(p_1, p_2)$ taken into account: the region given by $\operatorname{Im} \frac{\langle p_1, x \rangle \langle x, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} \geq 0$ is on the side of the indicated normal vector.



all negative points in G and $\langle g(\alpha), g(\alpha) \rangle = -1$. For arbitrary $p_1, p_2, g \in G \cap BV$, we can assume that $g = v_1 + v_2$, $p_i = \alpha_i^{-1}v_1 + \alpha_i v_2$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$. Then $\frac{\langle p_1, g \rangle \langle g, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} = -\frac{(\alpha_1^{-1} + \alpha_1)(\alpha_2^{-1} + \alpha_2)}{2(\alpha_1^{-1}\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^{-1})} < 0$.

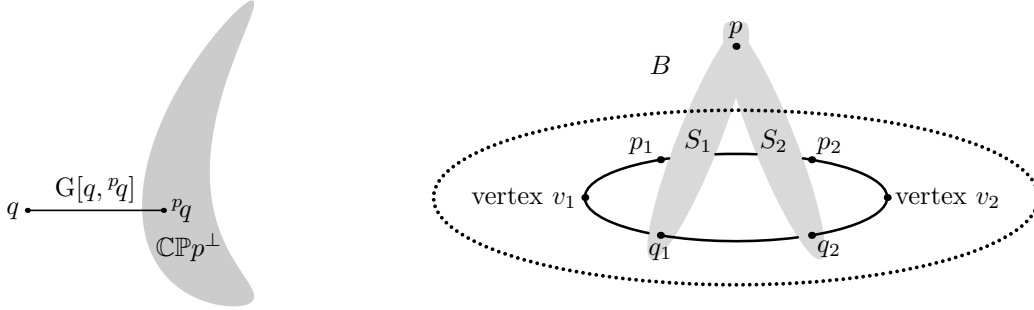
It follows that, for any $x \in B \setminus p_1, p_2 \setminus \cap BV$, we have $\frac{\langle p_1, x \rangle \langle x, p_2 \rangle}{\langle p_1, p_2 \rangle} < 0$ since we can write $x = g + cp$ for some $g \in G \setminus p_1, p_2 \setminus \cap BV$ and $c \in \mathbb{C}$, where p stands for the focus of $B \setminus p_1, p_2 \setminus$.

Similar considerations are applicable to the positive part of G .

Let $p_1, p_2 \in \overline{BV}$. We will denote by $G[p_1, p_2]$ (or by $G[p_1, p_2]$) a definite geodesic segment connecting p_1 and p_2 (usually the one included in BV). A similar notation, $B[p_1, p_2]$, will be used for bisector 'segments' corresponding to geodesic segments.

2.3.3. Remark. Let $p \notin \overline{BV}$ and $q \in BV$. Then $G[q, {}^p q]$ is the shortest geodesic from q to $\mathbb{C}Pp^\perp \cap BV$.

Let $S_1 \equiv \mathbb{C}Pp_1^\perp$ and $S_2 \equiv \mathbb{C}Pp_2^\perp$ be different projective lines with a nonisotropic intersection p . We assume S_1 and S_2 to be *nonorthogonal*, i.e., $\langle p_1, p_2 \rangle \neq 0$. Then, there exists a unique bisector B such that S_1 and S_2 are among its slices; p is the focus of B . We define $\text{ta}(S_1, S_2) \equiv \text{ta}(p_1, p_2)$. If $p \notin \overline{BV}$ and S_i 's are of signature $+ -$ (i.e., S_1 and S_2 are *ultraparallel*), then $\text{ta}(S_1, S_2)$ is the minimum of the tance between the points in $S_1 \cap BV$ and the points in $S_2 \cap BV$. Indeed, let q_i denote the intersection of the complex spine $S(p_1, p_2) = \mathbb{C}Pp^\perp$ with S_i , $i = 1, 2$. Then, the minimum in question equals $\text{ta}(q_1, q_2)$. Since $q_1, q_2 \in G \setminus p_1, p_2 \setminus$ are respectively orthogonal to $p_1, p_2 \in G \setminus p_1, p_2 \setminus$, we have $\text{ta}(q_1, q_2) = \text{ta}(p_1, p_2)$. In particular, S_1 and S_2 are ultraparallel if and only if $\text{ta}(p_1, p_2) > 1$.



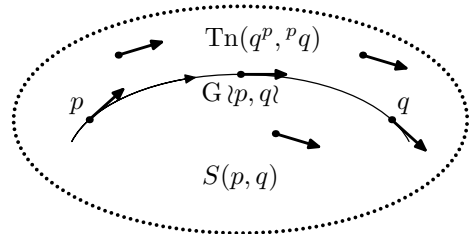
3. Displacements along Geodesics

3.1. Lemma. Let $p \in \mathbb{C}PV \setminus \partial BV$ and let $p \neq q \in \mathbb{C}PV \setminus \mathbb{C}Pp^\perp$. The vector field $\text{Tn}(q^p, {}^p q)$, defined out of $\mathbb{C}Pp^\perp \cup \partial BV$, has constant length over $S(p, q)$, that is, $\langle \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x), \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x) \rangle = 1 - \frac{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle}{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}$ for $S(p, q) \ni x \notin \mathbb{C}Pp^\perp \cup \partial BV$, and it is tangent to $G \setminus p, q \setminus$ if $\text{ta}(p, q) \neq 1$.

Proof is a routine use of Lemma 2.1.1. From $\langle p, q \rangle \neq 0$, it follows that $q^p \neq 0$, and $p \neq q$ implies ${}^p q \neq 0$.

Let $S(p, q) \ni x \notin \mathbb{C}Pp^\perp \cup \partial BV$. Then $x^p \neq 0$ and

$$\begin{aligned} & \langle \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x), \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x) \rangle = \\ & = -\langle x, x \rangle \left\langle {}^p q - \frac{\langle {}^p q, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x, {}^p q - \frac{\langle {}^p q, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x \right\rangle \frac{1}{\langle x, q^p \rangle \langle q^p, x \rangle} = \\ & = \frac{\langle {}^p q, x \rangle x - \langle x, x \rangle {}^p q, {}^p q}{\langle x, q^p \rangle \langle q^p, x \rangle} = \end{aligned}$$



$$= \frac{\langle \langle {}^p q, {}^p x \rangle {}^p x - \langle x^p, x^p \rangle {}^p q - \langle {}^p x, {}^p x \rangle {}^p q, {}^p q \rangle}{\langle x^p, q^p \rangle \langle q^p, x^p \rangle} = \frac{\langle {}^p q, {}^p x \rangle \langle {}^p x, {}^p q \rangle - \langle {}^p x, {}^p x \rangle \langle {}^p q, {}^p q \rangle}{\langle x^p, q^p \rangle \langle q^p, x^p \rangle} - \frac{\langle x^p, x^p \rangle \langle {}^p q, {}^p q \rangle}{\langle x^p, q^p \rangle \langle q^p, x^p \rangle} = - \frac{\langle x^p, x^p \rangle \langle {}^p q, {}^p q \rangle}{\langle x^p, q^p \rangle \langle q^p, x^p \rangle},$$

since ${}^p x \in \mathbb{C}^p q$ implies that $\langle {}^p q, {}^p x \rangle \langle {}^p x, {}^p q \rangle - \langle {}^p x, {}^p x \rangle \langle {}^p q, {}^p q \rangle = 0$. Using the fact that $0 \neq x^p \in \mathbb{C} q^p$, we can substitute x^p by q^p in the expression for $\langle \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x), \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x) \rangle$. Consequently,

$$\langle \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x), \text{Tn}(q^p, {}^p q)(x) \rangle = - \frac{\langle {}^p q, {}^p q \rangle}{\langle q^p, q^p \rangle} = 1 - \frac{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle}{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}.$$

The fact that $g \in \mathbb{G} \wr p, q \wr$ means that $b(g, p, q) = 0$, that is, $\frac{\langle p, g \rangle \langle g, q \rangle}{\langle p, q \rangle} \in \mathbb{R}$. We need to verify that $t\left(\frac{g({}^p q)}{\langle q^p, g \rangle}, g, p, q\right) = 0$. It follows from $\langle p, {}^p q \rangle = 0$ that $\langle p, g({}^p q) \rangle = - \frac{\langle g, {}^p q \rangle \langle p, g \rangle}{\langle g, g \rangle}$. Hence,

$$\begin{aligned} & \frac{\langle p, \frac{g({}^p q)}{\langle q^p, g \rangle} \rangle \langle g, q \rangle + \langle p, g \rangle \langle \frac{g({}^p q)}{\langle q^p, g \rangle}, q \rangle}{\langle p, q \rangle} = - \frac{\langle g, {}^p q \rangle \langle p, g \rangle}{\langle g, q^p \rangle \langle g, g \rangle \langle p, q \rangle} \langle g, q \rangle + \langle p, g \rangle \frac{\langle g({}^p q), q \rangle}{\langle q^p, g \rangle \langle p, q \rangle} = \\ & = - \frac{\langle g, {}^p q \rangle \langle p, g \rangle}{\langle g, q^p \rangle \langle g, g \rangle \langle p, q \rangle} \langle g, q \rangle - \langle p, g \rangle \frac{\langle {}^p q, g \rangle \langle g, q \rangle}{\langle q^p, g \rangle \langle p, q \rangle \langle g, g \rangle} + \langle p, g \rangle \frac{\langle {}^p q, q \rangle}{\langle q^p, g \rangle \langle p, q \rangle} = \\ & = - \frac{\langle p, g \rangle \langle g, q \rangle}{\langle p, q \rangle \langle g, g \rangle} \left(\frac{\langle g, {}^p q \rangle}{\langle g, q^p \rangle} + \frac{\langle {}^p q, g \rangle}{\langle q^p, g \rangle} \right) + \langle p, g \rangle \frac{\langle {}^p q, q \rangle \langle p, p \rangle}{\langle q, p \rangle \langle p, g \rangle \langle p, q \rangle} \equiv \frac{\langle q, q \rangle \langle p, p \rangle}{\langle q, p \rangle \langle p, q \rangle} - 1 \equiv 0, \quad \text{mod } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

This implies that $t\left(\frac{g({}^p q)}{\langle q^p, g \rangle}, g, p, q\right) = 0$ ■

3.2. Corollary. *Let R be a real plane and let $p, u \in R$, $p \notin \mathbb{C} p u^\perp \cap \partial B V$. Then $P_u(x_p) = 0$ for any $x_p \in \mathbb{T}_p R$.*

Proof. There exists $q \in R$ such that x_p is proportional to the tangent vector $\text{Tn}(q^p, {}^p q)(p)$ to $\mathbb{G} \wr p, q \wr$ at p . Now, $P_u(\text{Tn}(q^p, {}^p q)(p)) = - \frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{\langle p, p \rangle \langle {}^p q, u \rangle}{\langle q^p, p \rangle \langle p, u \rangle} \right) = 0$, since $p, u, q \in R$ ■

Let $x, y \in V$, $x \neq 0$. The vector field

$$\text{Ct}(x, y)(*) = \frac{\langle *, x \rangle y_*}{\langle *, * \rangle \sqrt{\text{ta}(x, *)}}$$

is defined out of $\mathbb{C} p x^\perp \cup \partial B V$ (for x isotropic, it vanishes).

3.3. Lemma. *Let $p \in \mathbb{C} p V \setminus \partial B V$ and let $0 \neq \text{ta}(p, q) \neq 1$. Let $h, v \in p^\perp$ be such that $h \in \mathbb{C} p + \mathbb{C} q$ and $v \in (\mathbb{C} p + \mathbb{C} q)^\perp$. Then $\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h) = 0$ and $\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Ct}(p, v) = 0$ over $\mathbb{G} \wr p, q \wr \setminus (\mathbb{C} p p^\perp \cup \partial B V)$.*

Proof is basically a direct verification. Let $g \in \mathbb{G} \wr p, q \wr \setminus (\mathbb{C} p p^\perp \cup \partial B V)$. Then $b(g, p, q) = 0$, i.e., $\langle g, p \rangle \langle p, q \rangle \langle q, g \rangle = \langle g, q \rangle \langle q, p \rangle \langle p, g \rangle$, implying

$$\langle g, p \rangle \langle p, q^p \rangle \langle q^p, g \rangle + \langle g, p \rangle \langle p, q^p \rangle \langle {}^p q, g \rangle = \langle g, q^p \rangle \langle q^p, p \rangle \langle p, g \rangle + \langle g, {}^p q \rangle \langle q^p, p \rangle \langle p, g \rangle$$

which can be rewritten as

$$\langle g^p, p \rangle \langle p, q^p \rangle \langle q^p, g^p \rangle + \langle g, p \rangle \langle p, q^p \rangle \langle {}^p q, g \rangle = \langle g^p, q^p \rangle \langle q^p, p \rangle \langle p, g^p \rangle + \langle g, {}^p q \rangle \langle q^p, p \rangle \langle p, g \rangle.$$

It follows from $g^p \in \mathbb{C} q^p$ that $\langle g^p, p \rangle \langle p, q^p \rangle \langle q^p, g^p \rangle = \langle g^p, q^p \rangle \langle q^p, p \rangle \langle p, g^p \rangle$. Therefore, $\langle g, p \rangle \langle p, q^p \rangle \langle {}^p q, g \rangle = \langle g, {}^p q \rangle \langle q^p, p \rangle \langle p, g \rangle$. Since $p \in \mathbb{C} q^p$, we can substitute p by q^p in the last equality, getting

$$\langle g, q^p \rangle \langle {}^p q, g \rangle = \langle g, {}^p q \rangle \langle q^p, g \rangle.$$

$$\begin{aligned}
\text{For } t \Leftarrow \frac{{}^p q}{\langle q^p, g \rangle}, \text{ we have } \text{Tn}(q^p, {}^p q)(g) = t_g. \text{ Being } \text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h)(*) = \frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, * \rangle} h_*, \text{ by Lemma 2.1.1,} \\
\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)(g)} \text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h) = \nabla_{t_g} \left(\frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, * \rangle} h_* \right) = t_g \left(\frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, * \rangle} \right) h_g - \frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle} \langle h, g \rangle t_g = \\
= -\frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle^2} \langle p, {}^g t \rangle \langle g, g \rangle h_g - \frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle} \langle h, g \rangle t_g = -\frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle} \left(\frac{\langle p, {}^g t \rangle \langle g, g \rangle}{\langle p, g \rangle} h_g + \langle h, g \rangle t_g \right) = \\
= -\frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle} \left(\frac{\langle p, {}^g(pq) \rangle \langle g, g \rangle}{\langle g, q^p \rangle \langle p, g \rangle} h_g + \frac{\langle h, g \rangle}{\langle q^p, g \rangle} ({}^p q)_g \right) = -\frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle} \left(\frac{\langle p, \langle g, g \rangle {}^p q - \langle {}^p q, g \rangle g \rangle}{\langle g, q^p \rangle \langle p, g \rangle} h_g + \frac{\langle h, g \rangle}{\langle q^p, g \rangle} ({}^p q)_g \right) = \\
= \frac{\langle p, p \rangle}{\langle p, g \rangle} \left(\frac{\langle g, {}^p q \rangle}{\langle g, q^p \rangle} h_g - \frac{\langle h, g \rangle}{\langle q^p, g \rangle} ({}^p q)_g \right) = 0,
\end{aligned}$$

since $h \in \mathbb{C}^p q$ and $\langle g, q^p \rangle \langle p, g \rangle = \langle g, {}^p q \rangle \langle q^p, g \rangle$.

By Lemma 2.1.1, $\nabla_{t_g} v_* = -\langle v, g \rangle t_g = 0$ and $t_g \left(\frac{1}{\langle *, * \rangle} \right) = 0$. Since $\text{Ct}(p, v)(*) = \frac{\langle *, p \rangle v_*}{\langle *, * \rangle \sqrt{\text{ta}(p, *)}}$, in order to prove that $\nabla_{\text{Tn}(q^p, {}^p q)} \text{Ct}(p, v) = 0$, it suffices to verify that $t_g \left(\frac{\langle *, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right) = 0$:

$$\begin{aligned}
t_g \left(\frac{\langle *, p \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, *)}} \right) &= \frac{\langle {}^g t, p \rangle \langle g, g \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, g)}} - \frac{\langle g, p \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \text{ta}(p, g)} t_g \left(\frac{\langle p, * \rangle \langle *, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle *, * \rangle} \right) = \\
&= \frac{\langle {}^g t, p \rangle \langle g, g \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, g)}} - \frac{\langle g, p \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \text{ta}(p, g)} \cdot \frac{t_g(\langle p, * \rangle \langle *, p \rangle)}{\langle p, p \rangle \langle g, g \rangle} = \\
&= \frac{\langle {}^g t, p \rangle \langle g, g \rangle}{\sqrt{\text{ta}(p, g)}} - \frac{\langle g, p \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \text{ta}(p, g)} \cdot \frac{\langle p, {}^g t \rangle \langle g, g \rangle \langle g, p \rangle + \langle p, g \rangle \langle {}^g t, p \rangle \langle g, g \rangle}{\langle p, p \rangle \langle g, g \rangle} = \\
&= \frac{\langle g, g \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \langle p, g \rangle} (2\langle {}^g t, p \rangle \langle p, g \rangle - \langle p, {}^g t \rangle \langle g, p \rangle - \langle p, g \rangle \langle {}^g t, p \rangle) = \\
&= \frac{\langle g, g \rangle}{2\sqrt{\text{ta}(p, g)} \cdot \langle p, g \rangle} (\langle {}^g t, p \rangle \langle p, g \rangle - \langle p, {}^g t \rangle \langle g, p \rangle) = 0,
\end{aligned}$$

since

$$\begin{aligned}
\langle {}^g t, p \rangle \langle p, g \rangle - \langle p, {}^g t \rangle \langle g, p \rangle &= \frac{\langle {}^g(pq), p \rangle \langle p, g \rangle}{\langle q^p, g \rangle} - \frac{\langle p, {}^g(pq) \rangle \langle g, p \rangle}{\langle g, q^p \rangle} = \\
&= -\frac{\langle {}^p q, g \rangle \langle g, p \rangle \langle p, g \rangle}{\langle g, g \rangle \langle q^p, g \rangle} + \frac{\langle g, {}^p q \rangle \langle p, g \rangle \langle g, p \rangle}{\langle g, g \rangle \langle g, q^p \rangle} = 0
\end{aligned}$$

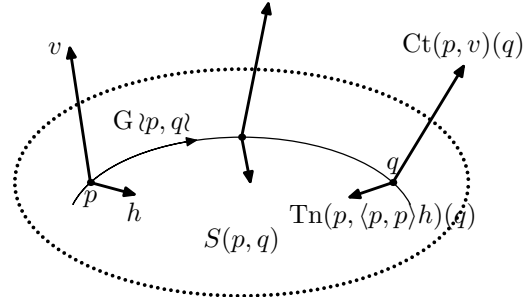
by the equality $\langle g, q^p \rangle \langle p, g \rangle = \langle g, {}^p q \rangle \langle q^p, g \rangle$ ■

3.4. Corollary. *The parallel displacement of any $x_p \in \text{T}_p \mathbb{C}P^V$, where $x \Leftarrow h + v$, along the geodesic $G(p, q)$ yields $\text{Tn}(p, \langle p, p \rangle h)(q) + \text{Ct}(p, v)(q)$ ■*

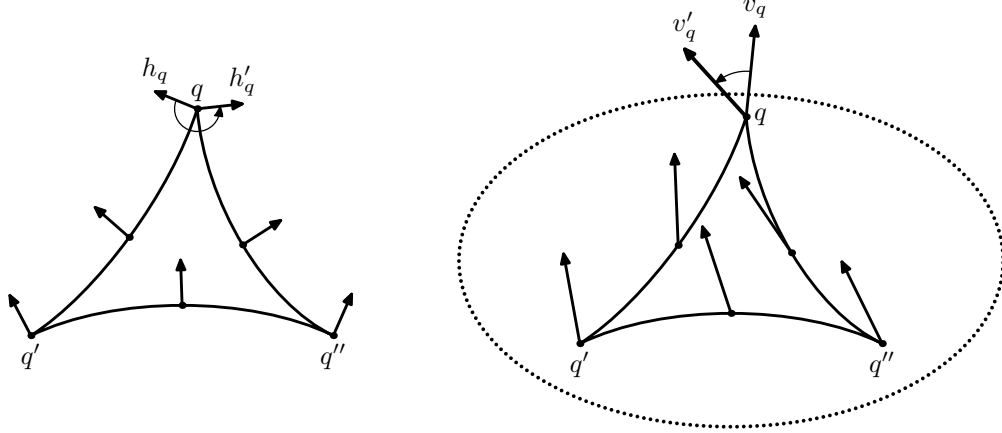
Thus, making the parallel displacement along a geodesic, we can distinguish its *horizontal* (tangent to the projective line of the geodesic) and *vertical* (orthogonal to the projective line of the geodesic) components.

Let S be a projective line and let $q, q', q'' \in S \cap BV$.

For any $h_q \in \text{T}_q S$, we parallelly displace h_q along $G[q, q']$, then along $G[q', q'']$, and finally, along $G[q'', q]$, resulting in $h'_q \in \text{T}_q S$. The angle from h_q to h'_q taken in the interval $(-\pi, \pi)$ is an additive measure of triangles and, therefore, it is proportional to the oriented area of the triangle $\Delta(q, q', q'')$. As



is easy to see, the angle in question is equal to $\mp(\pi - \alpha - \alpha' - \alpha'')$ in the case of a triangle oriented in counterclockwise/clockwise sense, where $\alpha, \alpha', \alpha''$ stand for the angles of the triangle. So, the coefficient of proportionality is $-\frac{1}{4}$, since $\text{Area } \Delta(q, q', q'') = \pm \frac{1}{4}(\pi - \alpha - \alpha' - \alpha'')$ (we remember that our metric in a complex geodesic is $\frac{1}{4}$ of the usual one). The same arguments are applicable to a vertical vector. A straightforward calculation yields $v'_q = \frac{\langle q, q'' \rangle \langle q'', q' \rangle \langle q', q \rangle v_q}{\langle q, q \rangle \langle q'', q'' \rangle \langle q', q' \rangle \sqrt{\text{ta}(q, q') \text{ta}(q', q'') \text{ta}(q'', q)}}$, implying that⁴¹ $\angle(v_q, v'_q) = \arg \langle v'_q, v_q \rangle = \arg(-\langle q, q'' \rangle \langle q'', q' \rangle \langle q', q \rangle)$. By considering a suitable ideal triangle (the formula is extendable to the case of isotropic q, q', q''), we obtain



3.5. Remark. (see [Gol], for instance). Let S be a projective line and let $q, q', q'' \in S \cap \bar{B}V$. Then $\arg(-\langle q, q' \rangle \langle q', q'' \rangle \langle q'', q \rangle) = 2 \text{Area } \Delta(q, q', q'')$.

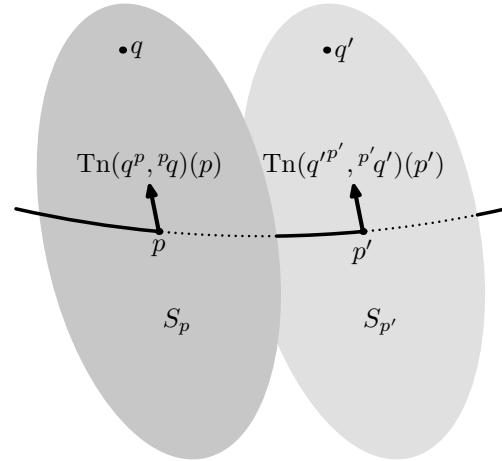
3.6. Lemma. Let $p, p' \in \mathbb{C}PV \setminus \partial BV$ be such that $0 \neq \text{ta}(p, p') \neq 1$. We denote by S_p and $S_{p'}$ the slices of the bisector $B\langle p, p' \rangle$ passing through p and p' , respectively. For $q \in S_p$ different from the focus of $B\langle p, p' \rangle$, let $t_p(q) \equiv \text{Tn}(q^p, {}^p q)(p)$ denote a tangent vector to the geodesic $G\langle p, q \rangle$ at p . We will use a similar notation $t_{p'}(q') \equiv \text{Tn}(q'^{p'}, {}^{p'} q')(p')$ related to $q' \in S_{p'}$.

For any $q \in S_p$, there exists a unique $q' \in S_{p'}$, given explicitly by $q' = \langle p', p \rangle^p q + \langle q, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} \cdot p'$, such that the parallel displacement of $t_p(q)$ along the geodesic $G\langle p, p' \rangle$ is exactly $t_{p'} q'$.

Proof. By Corollary 3.4, the parallel displacement of $\text{Tn}(q^p, {}^p q)(p) = \frac{q_p}{\langle q, p \rangle} = \text{Ct}\left(p, \frac{{}^p q}{\langle q, p \rangle}\right)(p)$ along the

geodesic $G\langle p, p' \rangle$ yields $\text{Ct}\left(p, \frac{{}^p q}{\langle q, p \rangle}\right)(p') = \frac{\langle p', p \rangle ({}^p q)_{p'}}{\langle p', p' \rangle \langle q, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')}}$. We are looking for $q' \in S_{p'}$ such

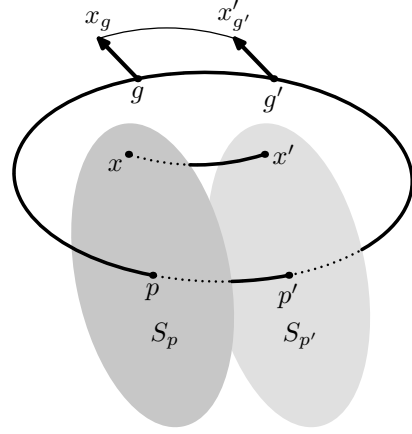
that $\frac{q'_{p'}}{\langle q', p' \rangle} = \frac{\langle p', p \rangle ({}^p q)_{p'}}{\langle p', p' \rangle \langle q, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')}}$. In $S_{p'}$, there exists a unique point q' with a given value of $\frac{{}^{p'} q'}{\langle q', p' \rangle}$ (the slice possesses a linear orthogonal basis formed by the focus of $B\langle p, p' \rangle$ and p'). Explicitly,



⁴¹Here and in the sequel, we use the function \arg taking values in $[-\pi, \pi]$.

$$q' = \langle p', p \rangle^p q + \langle q, p \rangle \sqrt{\text{ta}(p, p')} \cdot p' \blacksquare$$

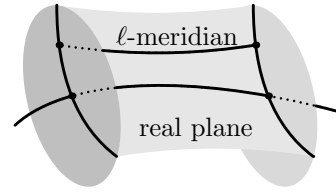
We call q' the *meridional displacement* of q . This meridional displacement identifies almost all slices of $B \setminus \{p, p'\}$, except those tangent to ∂BV if they exist. In this way, we obtain *meridional identification* of the slices that follow a given segment in the real spine. Thus, every point of the bisector (except of the vertices) generates a curve, called ℓ -*meridian*, over a segment of the real spine. ⁴² The real spine is one of the ℓ -meridians. By Lemma 3.6, every full ℓ -meridian passes through the vertices of the bisector (if they exist). Probably, an easier way to describe the meridional displacement is as follows. Let $g \in G[p, p']$ be the polar point to S_p . To each tangent vector $x_g \in T_g \mathbb{C}P^V$, we can associate the point $x \in S_p$. The parallel displacement of x_g along $G[p, p']$ produces the ℓ -meridian of the associated points.



3.7. Corollary. *The ℓ -meridian $c(q, B)$ generated by $q \in B$ depends continuously on q and B ■*

3.8. Remark. Any real plane of a bisector can be obtained by the meridional displacement of a geodesic included into some slice and intersecting the real spine. Any ℓ -meridian is included into some real plane of the bisector.

Let $m \in \mathbb{C}P^V \setminus \partial BV$. The reflection in $\mathbb{C}P^{m^\perp}$ is an isometry given by $R(m) : x \mapsto 2 \frac{\langle x, m \rangle}{\langle m, m \rangle} m - x$. As is easy to see, $R(m) \in \text{SU}(2, 1)$.



For given slices S_p and $S_{p'}$ of the bisector B , we call the slice $S_{m'}$ $\mathbb{C}P^{m^\perp}$ *middle* if $R(m)S_p = S_{p'}$.

3.9. Proposition. *For different slices S_p and $S_{p'}$ of the same signature, there are exactly two middle slices $S_m = \mathbb{C}P^{m^\perp}$ and $S_{m'} = \mathbb{C}P^{m'^\perp}$, where $\langle m, m' \rangle = 0$. The meridional identification of S_p and $S_{p'}$ given by a segment $G[p, p']$ of the real spine is induced by the reflection in S_m , where $m \in G[p, p']$.*

Proof. We can assume that $\langle p, p' \rangle = \sigma r$ and $\langle p, p \rangle = \langle p', p' \rangle = \sigma$, where $\sigma = \pm 1$ and $1 \neq r > 0$. Let $m = \alpha p + \alpha' p'$, where $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. The fact that $R(m)p = p'$ means that $2(\alpha + \alpha' r)(\alpha p + \alpha' p') = (\alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' r)(p + \alpha p')$ for some $x \in \mathbb{C}$. This implies $\alpha^2 = \alpha'^2$. Hence, we obtain $m = p + p'$ and $m' = p - p'$.

Let q be the focus of the bisector $B \setminus \{p, p'\}$ and let $x \neq q$ be a point in the slice S_p passing through p . For some $c \in \mathbb{C}$, we can write $x = cq + p$. So, $\langle x, p \rangle = \sigma$ and $\langle x, p' \rangle = \sigma r$. By Lemma 3.6, $x' = \sigma r^p x + \sigma r p' = \sigma r((x - p) + p') = \sigma r(cq + p')$. It is easy to see that $p - p'$ is the polar point to the middle slice $S_{p+p'}$ and that $p + p' \in G[p, p']$. Now, $2 \frac{\langle x, p - p' \rangle}{\langle p - p', p - p' \rangle} (p - p') - x = -(p' + cq)$ ■

3.10. Corollary. *The meridional identification is an isometry between slices of the same signature ■*

4. Angle between Bisectors with Common Slice. Transversality

4.1. Lemma. *Let $p \notin \overline{BV}$ and $p_1, p_2 \in \mathbb{C}P^V$ be such that $\text{ta}(p_1, p), \text{ta}(p_2, p) > 1$ (in particular, $p_1, p_2 \notin \overline{BV}$ and $p_1, p_2 \neq p$). Then $v_i \Leftarrow \left(\text{ta}(p_i, p) + \sqrt{\text{ta}(p_i, p)(\text{ta}(p_i, p) - 1)} \right) p_i - \frac{\langle p_i, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$ is the vertex of $B \setminus \{p_i, p\}$ that is closer to the slice $\mathbb{C}P^{p_i^\perp}$ than to the slice $\mathbb{C}P^{p^\perp}$ and*

⁴²We believe that our ℓ -meridians will not lead to any confusion, since we will not use the term ‘meridian’ in a generally accepted sense.

$$1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_1, p)}} \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_2, p)}}} \left(1 - \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle} \right).$$

For any $q \in \mathbb{C}Pp^\perp \setminus \partial BV$,

$$\frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle \langle q, q \rangle} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_1, p)}} \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_2, p)}}} \frac{\langle p_1, q \rangle \langle q, p_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle \langle q, q \rangle}.$$

Proof is a direct verification. The fact that the projective lines $\mathbb{C}Pp^\perp$ and $\mathbb{C}Pp_i^\perp$ are ultraparallel and are slices of the bisector $B(p, p_i)$ follows from Remark 2.3.3.

We can assume that $\langle p_i, p_i \rangle = \langle p, p \rangle = 1$ and denote $t_i = \sqrt{\text{ta}(p_i, p)}$. Now, $v_i = t_i(t_i + \sqrt{t_i^2 - 1})p_i - \langle p_i, p \rangle p$ and $t_i^2 = \langle p_i, \langle p_i, p \rangle p \rangle$. Hence, $\langle v_i, v_i \rangle = t_i^2(t_i + \sqrt{t_i^2 - 1})^2 - 2t_i(t_i + \sqrt{t_i^2 - 1})t_i^2 + t_i^2 = 0$. Since $\langle v_i, \langle p_i, p \rangle p \rangle = t_i(t_i + \sqrt{t_i^2 - 1})t_i^2 - t_i^2 = t_i^2(t_i - 1 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1}) > 0$, therefore, for $\alpha \in [0, 1]$, the point $p(\alpha) = (1 - \alpha)v_i + \alpha\langle p_i, p \rangle p$ is the polar point to some slice of $B(p, p_i) \cap BV$, being $p(0) = v_i$, $p(\frac{1}{2}) \simeq p_i$, and $p(1) \simeq p$ (where \simeq means \mathbb{C} -proportionality). This implies that v_i is the vertex of $B(p, p_i)$ that is closer to the slice $\mathbb{C}Pp_i^\perp$ than to the slice $\mathbb{C}Pp^\perp$. We have

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle} = \\ &= 1 - \frac{(t_1^2 + t_1\sqrt{t_1^2 - 1})(t_2^2 + t_2\sqrt{t_2^2 - 1})\langle p_1, p_2 \rangle + (1 - t_1^2 - t_1\sqrt{t_1^2 - 1} - t_2^2 - t_2\sqrt{t_2^2 - 1})\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle}{(t_1^2 + t_1\sqrt{t_1^2 - 1} - 1)(t_2^2 + t_2\sqrt{t_2^2 - 1} - 1)\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle} = \\ & 1 - \frac{(t_1^2 + t_1\sqrt{t_1^2 - 1})(t_2^2 + t_2\sqrt{t_2^2 - 1})\left(\frac{\langle p_1, p_2 \rangle}{\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle} - 1\right) + (t_1^2 + t_1\sqrt{t_1^2 - 1} - 1)(t_2^2 + t_2\sqrt{t_2^2 - 1} - 1)}{(t_1^2 + t_1\sqrt{t_1^2 - 1} - 1)(t_2^2 + t_2\sqrt{t_2^2 - 1} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t_1^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{t_2^2}}} \left(1 - \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle} \right), \end{aligned}$$

since $\frac{1}{t_i + \sqrt{t_i^2 - 1}} = t_i - \sqrt{t_i^2 - 1}$ and $\frac{t_i^2 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1}}{t_i^2 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{t_i - \sqrt{t_i^2 - 1}}{t_i}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t_i^2}}}$. For the same reasons,

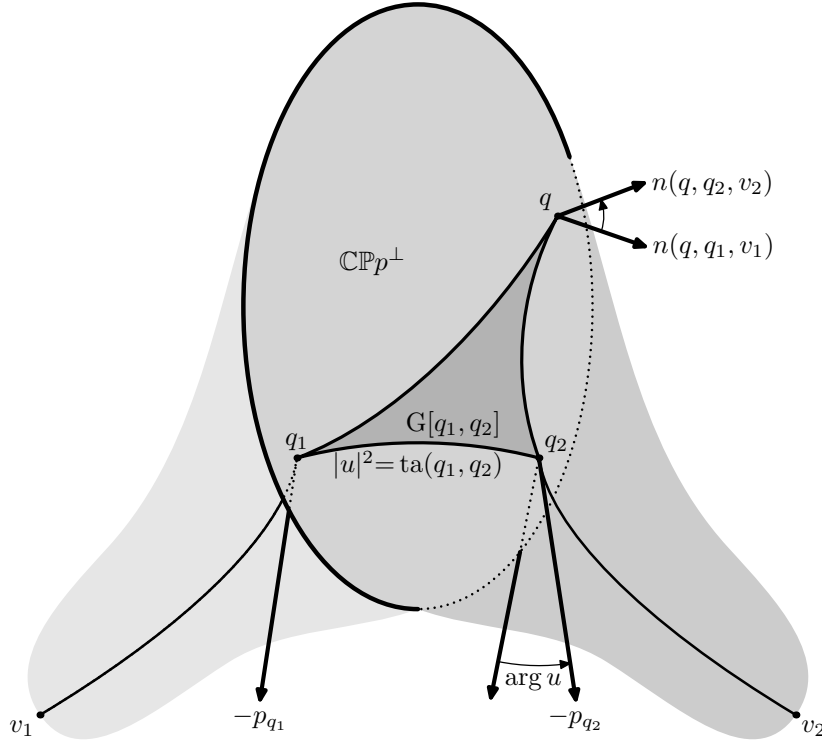
$$\begin{aligned} \frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle \langle q, q \rangle} &= \frac{(t_i^2 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1})(t_i^2 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1})\langle p_1, q \rangle \langle q, p_2 \rangle \langle p, p \rangle}{(t_i^2 - 1 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1})(t_i^2 - 1 + t_i\sqrt{t_i^2 - 1})\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle \langle q, q \rangle} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t_1^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{t_2^2}}} \frac{\langle p_1, q \rangle \langle q, p_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle \langle q, q \rangle} \blacksquare \end{aligned}$$

4.2. Theorem. Let $p \notin \bar{BV}$ and let $v_1, v_2 \in \partial BV \setminus \mathbb{C}Pp^\perp$. We put $u = 1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle}$. The bisectors $B(p, v_1)$ and $B(p, v_2)$ possess a common slice $S = \mathbb{C}Pp^\perp$. We denote by $q_i \in S \cap BV$ the point in the real spine of $B(p, v_i)$. Let $q \in S \cap BV$. Then the angle $\angle(q, B[q_1, v_1], B[q_2, v_2])$ from $B[q_1, v_1]$ to $B[q_2, v_2]$ at q can be calculated as follows:

$$\begin{aligned} \angle(q, B[q_1, v_1], B[q_2, v_2]) &= \text{Arg} \frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle} = \text{Arg} (-u \langle q, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle \langle q_1, q \rangle) \equiv \\ &\equiv \text{Arg } u - 2 \text{Area } \Delta(q, q_1, q_2) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

The number u completely characterizes the geometrical configuration of $B[q_1, v_1]$ and $B[q_2, v_2]$: $\text{Arg } u$ is the angle from $G[q_1, v_1]$ to $G[q_2, v_2]$ measured with the parallel displacement along $G[q_1, q_2]$

and $|u|^2 = \text{ta}(q_1, q_2)$ is the tance between the complex spines of the bisectors. Any $u \in \mathbb{C}$ with $|u| \geq 1$ is possible.



Proof. Clearly, we can take $q_i \equiv {}^p v_i$. We can assume that $\langle p, p \rangle = \langle v_i, p \rangle = 1$. Hence, $q_i = v_i - p$, $\langle v_i, q_i \rangle = -1$, $\langle q, q_i \rangle = \langle q, v_i \rangle$, $\langle q_i, q_i \rangle = -1$, ${}^q v_i = p$, $\langle q_1, q_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - 1 = -u$, and $\text{ta}(q_1, q_2) = |u|^2$. By Remark 2.3.3, $\text{ta}(q_1, q_2)$ is the tance between the complex spines of the bisectors. By Lemma 2.3.1, $n(q, q_i, v_i) = \langle -, q \rangle \otimes i \cdot \left(\frac{\langle q, v_i \rangle}{\langle q_i, v_i \rangle} q_i - \frac{\langle q, q_i \rangle}{\langle v_i, q_i \rangle} v_i \right) = \langle -, q \rangle \otimes i \cdot \langle q, v_i \rangle p$ is a normal vector to $B[q_i, v_i]$ at q . Both such vectors are orthogonal to S and, therefore, are tangent to the projective line orthogonal to S at q . Thus, $\angle(q, B[q_1, v_1], B[q_2, v_2]) = \text{Arg} \langle n(q, q_2, v_2), n(q, q_1, v_1) \rangle = \text{Arg}(-\langle q, q \rangle \langle q, v_2 \rangle \langle v_1, q \rangle) = \text{Arg} \left(\frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle} \right)$. Since $-u \langle q, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle \langle q_1, q \rangle = |u|^2 \langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle$, it follows that $\text{Arg} \left(\frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle}{\langle v_1, p \rangle \langle p, v_2 \rangle} \right) = \text{Arg}(-u \langle q, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle \langle q_1, q \rangle) \equiv \text{Arg } u - 2 \text{Area } \Delta(q, q_1, q_2) \pmod{2\pi}$ by Remark 3.5.

By Corollary 3.4, the parallel displacement along $G[q_1, q_2]$ of the vector $\frac{v_1 q_1}{\langle v_1, q_1 \rangle} = -v_1 q_1 = -p_{q_1}$ tangent to $G[q_1, v_1]$ (by Lemma 3.1) is equal to $-\frac{\langle q_2, q_1 \rangle p_{q_2}}{\langle q_2, q_2 \rangle \sqrt{\text{ta}(q_1, q_2)}} = -\frac{\bar{u}}{|u|} p_{q_2}$, whereas $-p_{q_2}$ is a tangent vector to $G[q_2, v_2]$ by Lemma 3.1.

The determinant of the Gram matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-u \\ 1 & 1-\bar{u} & 0 \end{pmatrix}$ for p, v_1 , and v_2 is equal to $1 - |u|^2$, implying the rest ■

Since $\text{Arg } u$ is independent of the choice of $q \in S \cap BV$, we call it the *constant angle* between the bisectors: in fact, it is the angle between the bisectors at the points of $G[q_1, q_2] \cap BV$. The angle $\text{arg}(-\langle q, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle \langle q_1, q \rangle) = 2 \text{Area } \Delta(q_1, q, q_2)$ depends only on the position of q in $S \cap BV$. We call

it the *nonconstant angle* between the bisectors.

4.3. Corollary (compare with [Gol, Corollary 9.1.3, p. 273] and with [Hsi]). *Let $p \notin \overline{BV}$ and $p_1, p_2 \in \mathbb{CPV}$ be such that $\text{ta}(p, p_1), \text{ta}(p, p_2) > 1$. The bisectors $B\wp, p_1\wr$ and $B\wp, p_2\wr$ are transversal along their common slice $\mathbb{CP}p^\perp \cap \overline{BV}$ if and only if*

$$\left| \text{Re} \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p, p \rangle}{\langle p_1, p \rangle \langle p, p_2 \rangle} - 1 \right| < \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_1, p)}} \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ta}(p_2, p)}}.$$

In this case, $B\wp, p_1\wr \cap B\wp, p_2\wr \cap \overline{BV} = \mathbb{CP}p^\perp \cap \overline{BV}$.

Proof. Due to Lemma 4.1, in terms of Theorem 4.2, the inequality means that $|\text{Re } u| < 1$. As in the proof of Theorem 4.2, we can assume that $\langle p, p \rangle = \langle v_i, p \rangle = 1$, $q_i = v_i - p$, $\langle q_i, q_i \rangle = -1$, $\langle q_1, q_2 \rangle = -u$, and $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 - u$.

Let us verify the fact that, for $q \in \mathbb{CP}p^\perp \cap \overline{BV}$, the nonconstant angle $\arg(-\langle q, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle \langle q_1, q \rangle)$ varies in $[-\alpha, \alpha]$, where $\cos \alpha = \frac{1}{|u|}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$. Indeed, assuming $q_1 \neq q_2$, each point in $\mathbb{CP}p^\perp$, except of q_2 and $q_1 - uq_2$ (the point orthogonal to q_2), can be written as $q(z) = q_1 + \left(\frac{1}{z} - u\right)q_2$, $0 \neq z \in \mathbb{C}$, being $q(z) \in \overline{BV}$ if $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{|u|^2 - 1}}$. For such $q(z)$, we obtain $\arg\left(-\langle q(z), q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle \langle q_1, q(z) \rangle\right) = \arg \frac{\bar{u}u}{z\bar{z}} \left(1 - \frac{|u|^2 - 1}{u}z\right)$, implying the fact.

The bisectors $B\wp, p_1\wr$ and $B\wp, p_2\wr$ are transversal along $\mathbb{CP}p^\perp \cap BV$ exactly when the angle between $B[q_1, v_1]$ and $B[q_2, v_2]$ along $\mathbb{CP}p^\perp \cap BV$ is never 0 nor π , that is, if $\text{Arg } u \in (\alpha, \pi - \alpha) \cup (\pi + \alpha, 2\pi - \alpha)$. In other words, for the transversality, we require $|\cos \text{Arg } u| < \cos \alpha$, i.e., $|\text{Re } u| < 1$. This inequality implies the transversality of the bisectors along $\mathbb{CP}p^\perp \cap \partial BV$: let $v \in \mathbb{CP}p^\perp \cap \partial BV$, let $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}v, V/\mathbb{C}v) \simeq T_v \mathbb{CPV}$ be a tangent vector to both bisectors, and let $\hat{\varphi} \in \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}v, V)$ be any lifting of φ . The fact that φ is tangent to $B\wp, p_i\wr = B\wp, v_i\wr$ means that $\frac{\langle p, \hat{\varphi}(v) \rangle \langle v, v_i \rangle + \langle p, v \rangle \langle \hat{\varphi}(v), v_i \rangle}{\langle p, v_i \rangle} - \frac{\langle v_i, \hat{\varphi}(v) \rangle \langle v, p \rangle + \langle v_i, v \rangle \langle \hat{\varphi}(v), p \rangle}{\langle v_i, p \rangle} = 0$, that is, $\langle p, \hat{\varphi}(v) \rangle \langle v, v_i \rangle \in \mathbb{R}$. This is equivalent to $\langle p, \hat{\varphi}(v) \rangle \langle v, q_i \rangle \in \mathbb{R}$. If $\langle p, \hat{\varphi}(v) \rangle \neq 0$, then $\langle v, q_1 \rangle$ and $\langle v, q_2 \rangle$ are \mathbb{R} -linearly dependent. Since v is a unique point in $\mathbb{CP}p^\perp$ orthogonal to v , we can take $v = q_1 + \alpha q_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Now, $\langle v, v \rangle = 0$ implies $1 + \alpha^2 + 2\alpha \text{Re } u = 0$. It follows that $1 + (\alpha + \text{Re } u)^2 = (\text{Re } u)^2$. A contradiction with $|\text{Re } u| < 1$. Thus, $\langle p, \hat{\varphi}(v) \rangle = 0$, i.e., φ is tangent to $\mathbb{CP}p^\perp$.

Interchanging, if needed, the vertices of one of the bisectors, we can assume that $0 \leq \text{Re } u < 1$. Every point in $G\wp, v_1\wr$ but v_1 has the form $g_1(\alpha_1) = \frac{\alpha_1 - 1}{2}v_1 + p$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, and $\langle g_1(\alpha_1), g_1(\alpha_1) \rangle = \left\langle \frac{\alpha_1 - 1}{2}v_1 + p, \frac{\alpha_1 - 1}{2}v_1 + p \right\rangle = \alpha_1$. Therefore, $g_1(\alpha_1)$, $\alpha_1 > 0$, runs over all the polar points to the slices of $B\wp, v_1\wr \cap BV$. The points $g_2(\alpha_2) = \frac{\alpha_2 - 1}{2}v_2 + p$, $\alpha_2 > 0$, play the same role for $B\wp, v_2\wr \cap BV$. Now, $\langle g_1(\alpha_1), g_2(\alpha_2) \rangle = \frac{1}{4}((\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(1 - u) + 2(\alpha_1 + \alpha_2))$ and $\text{ta}(g_1(\alpha_1), g_2(\alpha_2)) = \frac{|u|^2(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_2 - 1)^2 + (\alpha_1 + 1)^2(\alpha_2 + 1)^2 - 2\text{Re } u(\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1)}{16\alpha_1\alpha_2}$. By Remark 2.3.3, we need to verify the condition $\text{ta}(g_1(\alpha_1), g_2(\alpha_2)) > 1$, which is equivalent to the inequality

$$(|u|^2 - 1)(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_2 - 1)^2 + 4(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 2(1 - \text{Re } u)(\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1) > 0.$$

Since $|u| > 1$ and $\text{Re } u \in [0, 1)$, the inequality is valid if $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ or if $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$. Therefore, excluding the case of $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (the case of the slice $\mathbb{CP}p^\perp$ for both bisectors), we can assume that $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$. In this case, we can take the minimum value of $\text{Re } u$, verifying that $(|u|^2 - 1)(1 -$

$\alpha_1)^2(\alpha_2-1)^2+4(\alpha_2-\alpha_1)^2-2(1-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-1) = (|u|^2-1)(1-\alpha_1)^2(\alpha_2-1)^2+2(\alpha_2-\alpha_1)^2+2(\alpha_1\alpha_2-1)^2 > 0$, which follows from $|u| > 1$. The bisectors cannot have a common vertex v : otherwise, they would coincide, having the same real spine $G(v, p)$ ■

5. More about Bisectors

5.1. Lemma (compare with [Gol, Theorem 5.5.1, p.193]). *Let B be a bisector and let $v_1, v_2 \in \partial BV$, $v_1 \neq v_2$, $G(v_1, v_2) \not\subset B$. Then $G(v_1, v_2)$ intersects $B \cap BV$ at most twice. If $G(v_1, v_2)$ is not transversal to $B \cap BV$, they intersect only once and $G(v_1, v_2)$ is all on the same side from $B \cap BV$.*

Proof. We can assume that $\langle v_1, v_2 \rangle = -\frac{1}{2}$ so that every point in $G(v_1, v_2)$ has the form $g(\alpha) = \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2$, $\alpha > 0$, with $\langle g(\alpha), g(\alpha) \rangle = -1$. By Lemma 3.1, $\frac{\langle g(\alpha)v_2, g(\alpha) \rangle}{\langle v_2^{g(\alpha)}, g(\alpha) \rangle} = (\alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2)_{g(\alpha)}$ is a tangent vector to $G(v_1, v_2)$ at $g(\alpha)$, where $\alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2 \in g(\alpha)^\perp$. Let $b(x, p_1, p_2) = 0$ be an equation for B . Obviously, $t(x, p_1, p_2) = 2b(x, p_1, p_2)$, therefore, $g(\alpha) \in B$ is equivalent to $t_{11} + 2t_{12}\alpha^2 + t_{22}\alpha^4 = 0$, where t_{ij} stands for $t(v_i, v_j, p_1, p_2)$. If $g(\alpha) \in B$, the nontransversality of this intersection means that $t(\alpha^{-1}v_1 - \alpha v_2, g(\alpha), p_1, p_2) = 0$, i.e., $t_{11} - t_{22}\alpha^4 = 0$. The condition $G(v_1, v_2) \not\subset B$ implies that one of the t_{ij} 's does not vanish. Now, from $t_{11} + 2t_{12}\alpha^2 + t_{22}\alpha^4 = 0$ and $t_{11} - t_{22}\alpha^4 = 0$, it follows that $t_{11}t_{22} = t_{12}^2$. Thus, $t_{11} + 2t_{12}\beta + t_{22}\beta^2 = 0$ has a unique solution in β . Furthermore, for $p \in \overline{BV}$, the inequality $\text{Im } b(p, p_1, p_2) > 0$ determines if p is on the side of the normal vector to B (see Lemma 2.3.1). Since $t_{11}, t_{12}, t_{22} \in i\mathbb{R}$, from $t_{11}t_{22} = t_{12}^2$, we conclude that $\text{Im } b(v_1, p_1, p_2) \cdot \text{Im } b(v_2, p_1, p_2) > 0$ ■

5.2. Lemma. *Let $p \notin \overline{BV}$ and $q \in BV$. Then $\text{ta}(\mathbb{C}Pp^\perp \cap BV, q) = 1 - \text{ta}(p, q)$. Let B be a bisector with positive focus, let \hat{S} be some slice of $B \cap BV$, and let $q \in \hat{S} \cap BV$. Then the function $\text{ta}(S \cap BV, q)$ is increasing while S runs over the slices of $B \cap BV$ on the same side from \hat{S} .*

Proof is straightforward. We can assume that $\langle p, p \rangle = 1$, $\langle q, q \rangle = -1$, and $\langle q, p \rangle = a \in \mathbb{R}$. By Remark 2.3.3, $\text{ta}(\mathbb{C}Pp^\perp, q) = \text{ta}({}^p q, q) = \text{ta}(q - ap, q) = 1 + a^2 = 1 - \text{ta}(p, q)$.

Let $v_1, v_2 \in \partial BV$ be the vertices of B , $B = B(v_1, v_2)$. We assume that $\langle q, q \rangle = -1$, that $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$, and that $v_1 + v_2$ is the polar point to \hat{S} , hence, $z = \langle v_1, q \rangle = -\langle v_2, q \rangle \neq 0$. The polar point to any slice of $B \cap BV$ has the form $p(\alpha) = \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2$, $\alpha > 0$, with $\langle p(\alpha), p(\alpha) \rangle = 1$. By the above assertion, $\text{ta}(\mathbb{C}Pp(\alpha)^\perp \cap BV, q) = 1 - \text{ta}(p(\alpha), q) = 1 + (\alpha^{-2} + \alpha^2 - 2)|z|^2$ ■

For $v_1, v_2 \in \partial BV$ and $q \notin \partial BV$ we denote $\eta(v_1, v_2, q) = \frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_2 \rangle \langle q, q \rangle}$ (see [Gol]).

5.3. Lemma (compare with [San]). *Let B be a bisector with positive focus and let $q \in BV \setminus B$. Then there exists a unique slice \hat{S} of $B \cap BV$ such that $\text{ta}(\hat{S} \cap BV, q) = \text{ta}(B \cap BV, q)$. The function $\text{ta}(S \cap BV, q)$ is increasing while S runs over the slices of $B \cap BV$ on the same side from $\hat{S} \cap BV$. The shortest geodesic from q to $B \cap BV$ is transversal to $B \cap BV$. Let $v_1, v_2 \in \partial BV$ be the vertices of B . Then $\text{ta}(B \cap BV, q) = 1 - \text{Re } \eta(v_1, v_2, q) + |\eta(v_1, v_2, q)|$.*

Proof is routine. We assume that $\langle q, q \rangle = -1$ and $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$. The polar point to any slice of $B \cap BV$ has the form $p(\alpha) = \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2$, $\alpha > 0$, with $\langle p(\alpha), p(\alpha) \rangle = 1$. We put $z_i = \langle q, v_i \rangle$. By Lemma 5.2, $\text{ta}(\mathbb{C}Pp(\alpha)^\perp, q) = 1 - \text{ta}(p(\alpha), q) = 1 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + \alpha^{-2}|z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2$. For $\alpha > 0$, this function has a unique minimum, exactly when $\alpha = \sqrt{\frac{|z_1|}{|z_2|}}$. Hence, $\text{ta}(B \cap BV, q) = 1 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + 2|z_1| \cdot |z_2| = 1 + 2\text{Re}(\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle) + 2|\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle| = 1 - \text{Re} \frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_2 \rangle \langle q, q \rangle} + \left| \frac{\langle v_1, q \rangle \langle q, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_2 \rangle \langle q, q \rangle} \right| = 1 - \text{Re } \eta(v_1, v_2, q) + |\eta(v_1, v_2, q)|$.

With this α , let $p \Leftarrow \alpha^{-1}v_1 + \alpha v_2$. We can choose new representatives for v_1 and v_2 so that $p = v_1 + v_2$ and $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}$. Now, for $z_i \Leftarrow \langle q, v_i \rangle$, we obtain $|z_1| = |z_2|$.

We have ${}^p q = q - (z_1 + z_2)(v_1 + v_2)$. By Lemma 3.1, $\frac{({}^p q)({}^p q)}{\langle q({}^p q), {}^p q \rangle} = \left(\frac{q}{\langle q, {}^p q \rangle} - \frac{{}^p q}{\langle {}^p q, {}^p q \rangle} \right)_{({}^p q)} = \left(\frac{\langle q, p \rangle p}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle - \langle p, q \rangle \langle q, p \rangle} \right)_{({}^p q)} = \left(\frac{(z_1 + z_2)(v_1 + v_2)}{1 + |z_1 + z_2|^2} \right)_{q - (z_1 + z_2)(v_1 + v_2)}$ is a tangent vector to $G[{}^p q, q]$ at ${}^p q$. When verifying the transversality, we can take $\left((z_1 + z_2)(v_1 + v_2) \right)_{q - (z_1 + z_2)(v_1 + v_2)}$ instead. Now, $t((z_1 + z_2)(v_1 + v_2), q - (z_1 + z_2)(v_1 + v_2), v_1, v_2) = i \cdot \text{Im}((\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_2 - z_1) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 + z_2)) = 4i \cdot \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = b(q, v_1, v_2)$ ■

5.4. Lemma. *Let B_1 and B_2 be bisectors with positive foci. Suppose that they possess a common slice S of signature $+ -$ and that they are transversal along $S \cap BV$. Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists some $\delta > 0$ such that, for every $q \in B_2 \cap BV$, the inequality $\text{ta}(B_1 \cap BV, q) < 1 + \delta^2$ implies the inequality $\text{ta}(S \cap BV, q) < 1 + \varepsilon^2$.*

Proof. Let p be the polar point to S and let $v_1, v'_1 \in \partial BV$ and $v_2, v'_2 \in \partial BV$ be the vertices of B_1 and B_2 , respectively. As in the proof of Theorem 4.2, we assume that $\langle p, p \rangle = \langle v_i, p \rangle = 1$ and that $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 - u$, where u stands for the invariant of B_1 and B_2 (see Theorem 4.2). By Theorem 4.2 and by Corollary 4.3, we know that $|u| > 1$ and $|\text{Re } u| < 1$. Writing $u = u_0 + iu_1$, $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, and denoting $k \Leftarrow \sqrt{|u|^2 - 1}$, we obtain $|u_1| > k > 0$. As is easy to see, $v'_i \Leftarrow 2p - v_i$ serves as the other vertex of B_i , $\langle v'_i, p \rangle = 1$, and $\langle v_i, v'_i \rangle = 2$. Also, $\langle v_1, v'_2 \rangle = \langle v'_1, v_2 \rangle = 1 + u$ and $\langle v'_1, v'_2 \rangle = 1 - u$. Furthermore, $d \Leftarrow v_1 - uv_2 + (u - 1)p$ is the focus of B_2 , $\langle d, v_2 \rangle = \langle d, p \rangle = 0$, $\langle d, d \rangle = \langle v_1, d \rangle = |u|^2 - 1 = k^2$, and $\langle d, v'_1 \rangle = 1 - |u|^2 = -k^2$. Every point in $G(v_2, v'_2)$, the real spine of B_2 , has the form $g(\alpha) \Leftarrow \frac{\alpha^{-1}v_2 - \alpha v'_2}{2}$, $\langle g(\alpha), g(\alpha) \rangle = -1$, where $\alpha > 0$. It follows that $\langle g(\alpha), p \rangle = \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2}$, $\langle v_1, g(\alpha) \rangle = \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} - \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2}u$, and $\langle g(\alpha), v'_1 \rangle = \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} + \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2}\bar{u}$. Every point but d in the slice $S_{g(\alpha)}$ of B_2 passing through $g(\alpha)$ has the form

$$q(\alpha, z) \Leftarrow g(\alpha) + \frac{z}{k}d, \quad z \in \mathbb{C},$$

$\langle q(\alpha, z), q(\alpha, z) \rangle = -(1 - |z|^2)$, being $q(\alpha, z) \in BV$ exactly if $|z| < 1$. We derive that $\langle v_1, q(\alpha, z) \rangle = \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} - \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2}u + k\bar{z}$ and $\langle q(\alpha, z), v'_1 \rangle = \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} + \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2}\bar{u} - kz$, which straightforwardly implies that $\frac{\langle v_1, q(\alpha, z) \rangle \langle q(\alpha, z), v'_1 \rangle}{\langle v_1, v'_1 \rangle \langle q(\alpha, z), q(\alpha, z) \rangle} = a + ib$, where

$$a \Leftarrow \frac{1 + \frac{(\alpha^{-1} + \alpha)^2}{4}k^2 + k^2|z|^2 - (\alpha^{-1} + \alpha)k(u_0z_0 - u_1z_1)}{2(1 - |z|^2)}, \quad b \Leftarrow \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} \cdot \frac{\frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2}u_1 + kz_1}{1 - |z|^2},$$

and $z = z_0 + iz_1$, $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$. By Lemma 5.3, $\text{ta}(B_1 \cap BV, q(\alpha, z)) = 1 - a + |a + ib|$. Thus, for any $\delta > 0$, the inequality $\text{ta}(B_1 \cap BV, q(\alpha, z)) < 1 + \delta^2$ is equivalent to the inequality $b^2 < \delta^4 + 2a\delta^2$.

On the other hand, by Lemma 5.2, $\text{ta}(S \cap BV, q(\alpha, z)) = 1 - \text{ta}(p, q(\alpha, z)) = 1 + \frac{(\alpha^{-1} - \alpha)^2}{4(1 - |z|^2)} = 1 + h^2$, where $h \Leftarrow \frac{|\alpha^{-1} - \alpha|}{2\sqrt{1 - |z|^2}}$ varies in $[0, \infty)$. Denoting $f \Leftarrow \sqrt{1 - |z|^2} \in (0, 1]$, we have $b = \pm h \frac{u_1\sqrt{h^2f^2 + 1} + kz_1}{f}$ and $a = \frac{1 + 2k^2 - k^2f^2 + k^2h^2f^2 - 2k\sqrt{h^2f^2 + 1}(u_0z_0 - u_1z_1)}{2f^2}$, since $\frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2} = \sqrt{(hf)^2 + 1}$. Therefore, the inequality $b^2 < \delta^4 + 2a\delta^2$ has the form

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & (u_1 h \sqrt{h^2 f^2 + 1} + k h z_1)^2 - (k \delta \sqrt{h^2 f^2 + 1} + (u_1 z_1 - u_0 z_0) \delta)^2 < \\ & < \delta^2 (1 + k^2 + \delta^2 f^2 - k^2 f^2 - (u_0 z_0 - u_1 z_1)^2). \end{aligned}$$

The inequalities $|z_0|, |z_1| < 1$ imply that $|u_1 z_1 - u_0 z_0| \leq |u_1| + |u_0| = c$. Using an inequality of the type $(|A| - |B|)^2 - (|C| + |D|)^2 \leq (A - B)^2 - (C + D)^2$ and the fact that $f^2 \leq 1$, we deduce from (5.5) that

$$(|u_1| h \sqrt{h^2 f^2 + 1} - k h |z_1|)^2 - (k \delta \sqrt{h^2 f^2 + 1} + c \delta)^2 < \delta^2 (1 + k^2 + \delta^2).$$

The last inequality (in view of $\sqrt{h^2 f^2 + 1} > 1$, $|u_1| > k$, and $|z_1| < 1$) implies that $(|u_1| h \sqrt{h^2 f^2 + 1} - k h)^2 - (k \delta \sqrt{h^2 f^2 + 1} + c \delta)^2 < \delta^2 (1 + k^2 + \delta^2)$ which can be converted into

$$(5.6) \quad \left((|u_1| h - k \delta) \sqrt{h^2 f^2 + 1} - (k h + c \delta) \right) \left((|u_1| h + k \delta) \sqrt{h^2 f^2 + 1} - (k h - c \delta) \right) < \delta^2 (1 + k^2 + \delta^2).$$

Given $\varepsilon > 0$, we have to find some $\delta > 0$ such that the inequality $\text{ta}(B_1 \cap B V, q) < 1 + \delta^2$ implies $h < \varepsilon$. First, we require that $\delta < \varepsilon$ and $\delta < \frac{k}{c} \varepsilon$. We can assume now that $|u_1| h - k \delta > 0$ and $k h - c \delta > 0$, for otherwise the inequality $h < \varepsilon$ follows in view of $|u_1| > k$. Next, we will require that $\delta < \frac{|u_1| - k}{c + k} \varepsilon$. Now, we can assume that $|u_1| h - k \delta > k h + c \delta$ (otherwise, the inequality $h < \varepsilon$ follows). Since $\sqrt{h^2 f^2 + 1} > 1$, this implies that $(|u_1| h - k \delta) \sqrt{h^2 f^2 + 1} - (k h + c \delta) > 0$. Assuming that $\delta < 1$, we can deduce from the inequality (5.6) that $\left((|u_1| h - k \delta) \sqrt{h^2 f^2 + 1} - (k h + c \delta) \right)^2 < \delta^2 (2 + k^2)$, which, in its turn, implies $|u_1| h - k \delta - k h - c \delta < \delta \sqrt{2 + k^2}$ due to $\sqrt{h^2 f^2 + 1} > 1$ and $|u_1| h - k \delta > k h + c \delta$. We obtain $(|u_1| - k) h < \delta (\sqrt{2 + k^2} + k + c)$ and, therefore, $h < \frac{\sqrt{2 + k^2} + k + c}{|u_1| - k} \delta$. Finally, we require that $\delta < \frac{|u_1| - k}{\sqrt{2 + k^2} + k + c} \varepsilon$ ■

6. General Construction

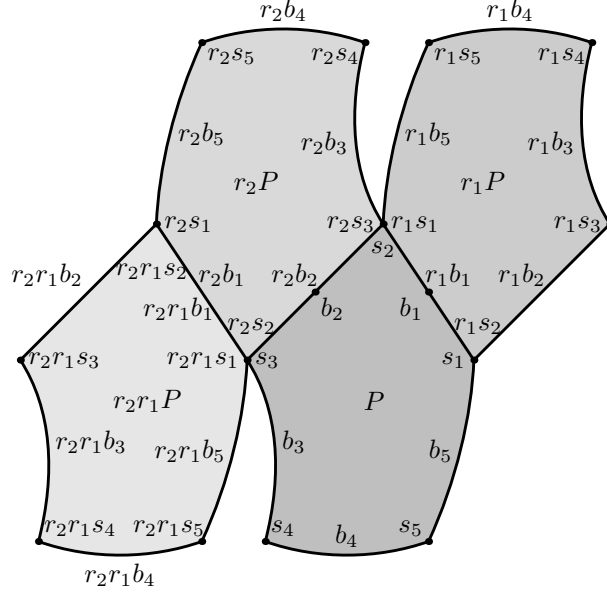
6.1. Cycle of Bisectors. Our general construction in $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ mimics the following plane example.

Let us fix an integer $n \geq 5$. Let P be a simply connected geodesic n -polygon in $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ with the vertices s_1, \dots, s_n and the angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ such that $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi$. It is convenient to treat indices modulo n . We denote the edges by b_1, \dots, b_n , where b_i connects s_i and s_{i+1} . Let r_i denote the reflection in the middle point of b_i . By Poincaré's Polyhedron Theorem, P is a fundamental domain for the group H_n generated by r_i 's and the defining relations are $r_n \dots r_1 = 1$ and $r_i^2 = 1$. For even n , by the same theorem, $P \cup r_1 P$ is a fundamental domain for the subgroup G_n generated by $r_1 r_i$, $2 \leq i \leq n$, implying that G_n is the fundamental group of a closed orientable surface of genus $\frac{n}{2} - 1$ (the polygon $P \cup r_1 P$ has two cycles of vertices and $n - 1$ pairs of edges to identify).

For odd n , we will observe that the polygon $Q = P \cup r_1 P \cup r_2 P \cup r_2 r_1 P$ is a fundamental domain for the group T_n generated by $a = r_2 r_1 r_2 r_1$, $u = r_2 r_1 r_n$, $v = r_2 r_n r_1$, $x_i = r_1 r_i$, and $y_i = r_2 r_1 r_i r_2$, where $3 \leq i \leq n - 1$, implying that T_n is the fundamental group of a closed orientable surface of genus $n - 3$. The polygon Q has the following vertices, angles, and edges:

- the vertex s_3 , whose angle is $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, connected by b_3 with s_4
- the vertex s_{i+1} , whose angle is α_{i+1} , connected by b_{i+1} with s_{i+2} , for $3 \leq i \leq n - 1$
- the vertex $s_1 = r_1 s_2$, whose angle is $\alpha_1 + \alpha_2$, connected by $r_1 b_2$ with $r_1 s_3$
- the vertex $r_1 s_i$, whose angle is α_i , connected by $r_1 b_i$ with $r_1 s_{i+1}$, for $3 \leq i \leq n$

- the vertex $r_1s_1 = r_2s_3$, whose angle is $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, connected by r_2b_3 with r_2s_4
- the vertex r_2s_{i+1} , whose angle is α_{i+1} , connected by r_2b_{i+1} with r_2s_{i+2} , for $3 \leq i \leq n-1$
- the vertex $r_2s_1 = r_2r_1s_2$, whose angle is $\alpha_1 + \alpha_2$, connected by $r_2r_1b_2$ with $r_2r_1s_3$
- the vertex $r_2r_1s_i$, whose angle is α_i , connected by $r_2r_1b_i$ with $r_2r_1s_{i+1}$, for $3 \leq i \leq n$, with $r_2r_1s_1 = s_3$



The edges and the vertices are identified as follows:

- x_i identifies b_i and r_1b_i so that $x_i s_i = r_1 s_{i+1}$ and $x_i s_{i+1} = r_1 s_i$, for $3 \leq i \leq n-1$
- u identifies b_n and $r_2r_1b_n$ so that $u s_n = r_2r_1s_1$ and $u s_1 = r_2r_1s_n$
- a identifies r_1b_2 and $r_2r_1b_2$ so that $a r_1s_2 = r_2r_1s_3$ and $a r_1s_3 = r_2r_1s_2$
- v identifies r_1b_n and r_2b_n so that $v r_1s_n = r_2s_1$ and $v r_1s_1 = r_2s_n$
- y_i identifies r_2b_i and $r_2r_1b_i$ so that $y_i r_2s_i = r_2r_1s_{i+1}$ and $y_i r_2s_{i+1} = r_2r_1s_i$, for $3 \leq i \leq n-1$

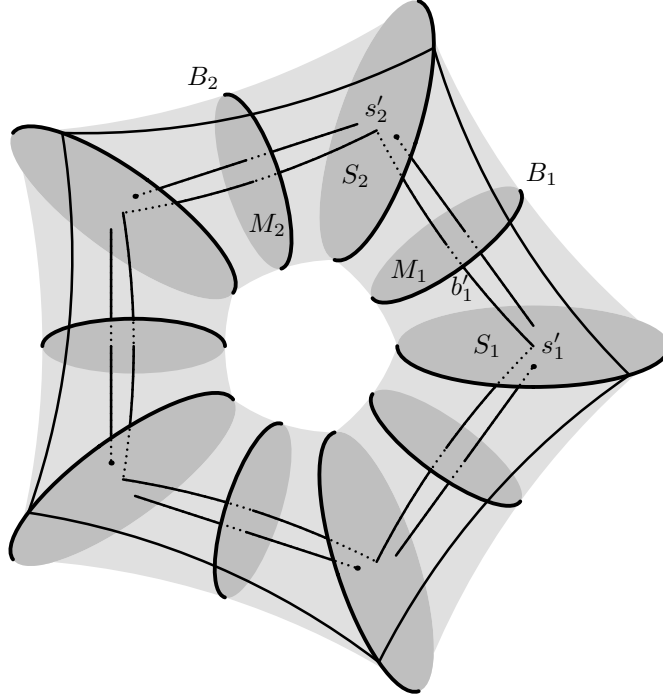
The following are four cycles of vertices:

$$\begin{aligned}
s_3 &\xrightarrow{x_3} r_1s_4 \xleftarrow{x_4} s_5 \xrightarrow{x_5} r_1s_6 \xleftarrow{x_6} \dots \xrightarrow{x_{n-2}} r_1s_{n-1} \xleftarrow{x_{n-1}} s_n \xrightarrow{u} r_2r_1s_1 = s_3 \\
s_4 &\xrightarrow{x_3} r_1s_3 \xrightarrow{a} r_2r_1s_2 = r_2s_1 \xleftarrow{v} r_1s_n \xleftarrow{x_{n-1}} s_{n-1} \xrightarrow{x_{n-2}} r_1s_{n-2} \xleftarrow{x_{n-3}} s_{n-3} \xrightarrow{x_{n-4}} \dots \xrightarrow{x_5} r_1s_5 \xleftarrow{x_4} s_4 \\
s_1 &\xrightarrow{u} r_2r_1s_n \xleftarrow{y_{n-1}} r_2s_{n-1} \xrightarrow{y_{n-2}} r_2r_1s_{n-2} \xleftarrow{y_{n-3}} r_2s_{n-3} \xrightarrow{y_{n-4}} \dots \xleftarrow{y_4} r_2s_4 \xrightarrow{y_3} r_2r_1s_3 \xleftarrow{a} r_1s_2 = s_1 \\
r_2s_3 &\xrightarrow{y_3} r_2r_1s_4 \xleftarrow{y_4} r_2s_5 \xrightarrow{y_5} r_2r_1s_6 \xleftarrow{y_6} \dots \xrightarrow{y_{n-2}} r_2r_1s_{n-1} \xleftarrow{y_{n-1}} r_2s_n \xleftarrow{v} r_1s_1 = r_2s_3
\end{aligned}$$

It is easy to see that total angle of each cycle is $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi$. (Notice that each generator x_i , u , a , y_i , and v appears twice and involves its both vertex identifications.)

Now, let R_1, \dots, R_n be reflections in projective lines M_1, \dots, M_n of signature $+-$ such that $R_n \dots R_1 = 1$ (in $\text{PU}(2,1)$). Let S_1 be a projective line of signature $+-$. We define $S_{i+1} \Leftarrow R_i S_i$. Requiring that M_i and S_i are distinct, not orthogonal, and $M_i \cap S_i \not\subset \partial BV$, there exists, by Remark 2.3.3, a unique bisector with slices M_i and S_i . Denote by B_i the closed oriented segment of this bisector starting at S_i , including M_i , and ending with S_{i+1} . We call (B_1, \dots, B_n) a *cycle* of bisectors. We claim that almost any choice of S_1 meets the above requirements. Indeed, we have $M_i \Leftarrow \mathbb{C}P m_i^\perp$ and $S_1 \Leftarrow \mathbb{C}P p_1^\perp$ for some $m_i, p_1 \notin \bar{BV}$. We can think of R_i as being $R(m_i) \in \text{SU}(2,1)$. In this way, the relation $R_n \dots R_1 = 1$ in $\text{PU}(2,1)$ takes the form $R_n \dots R_1 = \delta$, where $\delta \in \mathbb{C}$, $\delta^3 = 1$. In fact, we defined $S_i \Leftarrow \mathbb{C}P p_i^\perp$, where $p_{i+1} \Leftarrow R(m_i) p_i$. (Notice that $p_{i+n} = \delta p_i$.) In these terms, the above requirements

are $0 \neq \text{ta}(m_i, p_i) \neq 1$, $i = 1, \dots, n$. Equivalently, $0 \neq \text{ta}(R(m_1) \dots R(m_{i-2})R(m_{i-1})m_i, p_1) \neq 1$, $i = 1, \dots, n$, implying the claim.



Let $s'_1 \in S_1 \cap BV$. This point generates an ℓ -meridian $b'_1 \subset BV$ of B_1 which ends with some $s'_2 \in S_2 \cap BV$. By Proposition 3.9, $R_1 b'_1 = b'_1$ and R_1 exchanges s'_1 and s'_2 . In the same way, we obtain ℓ -meridians b'_2, \dots, b'_n such that $R_i b'_i = b'_i$, $R_i s'_i = s'_{i+1}$, $R_i s'_{i+1} = s'_i$. From $R_n \dots R_1 = 1$, it follows that b'_n ends with s'_1 . We call the closed curve $b' \equiv b'_1 \cup \dots \cup b'_n$ a *meridian* of the cycle (B_1, \dots, B_n) . The arcs b'_1, \dots, b'_n are *edges* and the points s'_1, \dots, s'_n are *vertices* of the meridian. Also, we can start with $s'_1 \in S_1 \cap \partial BV$, obtaining an *ideal meridian* $b' \equiv b'_1 \cup \dots \cup b'_n \subset \partial BV$. By Remark 3.8, the edges of any ideal meridian are segments of some \mathbb{R} -circles.

6.1.1. Proposition. *Let (B_1, \dots, B_n) be a cycle of bisectors and let $R_i \in \text{SU}(2, 1)$ denote the reflection in the middle slice of B_i . We have $R_n \dots R_1 = \delta$, $\delta \in \mathbb{C}$, $\delta^3 = 1$. Let $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU}(2, 1)$, $r_i \mapsto R_i$, be the induced representation. For odd n , the Toledo invariant of $\varrho|_{T_n}$ satisfies $\tau \equiv 4n - \frac{4 \text{Arg } \delta}{\pi} \pmod{8}$. For even n , the Toledo invariant of $\varrho|_{G_n}$ satisfies $\tau \equiv -\frac{2 \text{Arg } \delta}{\pi} \pmod{4}$.*

Proof. Let $b' = b'_1 \cup \dots \cup b'_n$ be a meridian of the cycle (B_1, \dots, B_n) with vertices s'_1, \dots, s'_n . We can assume that $R_i = R(m_i) : x \mapsto 2\langle x, m_i \rangle m_i - x$ with $\langle m_i, m_i \rangle = 1$. Taking $s'_1 \in V$, we define representatives as $s'_{i+1} = R_i s'_i \in V$, implying that $s'_{n+1} = \delta s'_1$. Since $\langle R_i x, x \rangle = 2\langle x, m_i \rangle \langle m_i, x \rangle - \langle x, x \rangle > 0$ for any $x \in BV$, we obtain $\langle s'_{i+1}, s'_i \rangle > 0$.

Let $P' \subset BV$ be any disc with $\partial P' = b'$. It is easy to define a ϱ -equivariant continuous map $\varphi : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ such that $\varphi(P) = P'$, $\varphi(s_i) = s'_i$, and $\varphi(b_i) = b'_i$. The Toledo invariant of $\varrho|_{T_n}$ is defined as $\tau \equiv 4 \frac{1}{2\pi} \int_Q \varphi^* \omega$ [Tol]. Taking $u \in BV$, we obtain (see Lemma 2.2.1) $\tau = \frac{8}{\pi} \int_{P'} \omega = \frac{8}{\pi} \int_{\partial P'} P_u = \frac{8}{\pi} \sum_i \int_{b'_i} P_u$ (for even n and $\varrho|_{G_n}$, $\tau \equiv \frac{4}{\pi} \sum_i \int_{b'_i} P_u$). By Corollary 3.2 and by Lemma 2.2.1, $\int_{b'_i} P_u = \int_{b'_i} (P_u - P_{s'_i}) = \int_{b'_i} df_{u, s'_i}$. This number is the total variation of $\frac{1}{2} \text{Arg} \frac{\langle u, p \rangle \langle p, s'_i \rangle}{\langle u, s'_i \rangle}$, while p runs

over $b'_i \subset BV$ from s'_i to s'_{i+1} . By Remark 2.3.2, $\frac{\langle u, p \rangle \langle p, s'_i \rangle}{\langle u, s'_i \rangle}$ is never real nonnegative. It follows that $\int_{b'_i} df_{u, s'_i} = \frac{1}{2} \text{Arg} \frac{\langle u, s'_{i+1} \rangle \langle s'_{i+1}, s'_i \rangle}{\langle u, s'_i \rangle} - \frac{1}{2} \text{Arg} \frac{\langle u, s'_i \rangle \langle s'_i, s'_i \rangle}{\langle u, s'_i \rangle} = \frac{1}{2} \text{Arg} \frac{\langle u, s'_{i+1} \rangle}{\langle u, s'_i \rangle} - \frac{\pi}{2}$, since $\langle s'_{i+1}, s'_i \rangle > 0$ and $\langle s'_i, s'_i \rangle < 0$.

For odd n (similarly for even n), calculating $\text{mod } 8$, we obtain

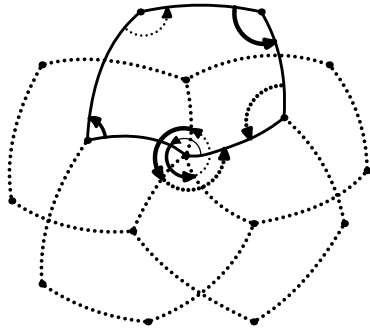
$$\begin{aligned} \tau &\equiv \frac{4}{\pi} \sum_i (\text{Arg} \langle u, s'_{i+1} \rangle - \text{Arg} \langle u, s'_i \rangle - \pi) \equiv \\ &\equiv \frac{4}{\pi} (-n\pi + \text{Arg} \langle u, s'_{n+1} \rangle - \text{Arg} \langle u, s'_1 \rangle) \equiv 4n - \frac{4 \text{Arg} \delta}{\pi} \pmod{8} \blacksquare \end{aligned}$$

6.2. Poincaré's Polyhedron Theorem. Henceforth, we will assume that the focus of each bisector in our cycle is positive. As default, we will mean by B_i , S_i , etc. the former $B_i \cap \bar{BV}$, $S_i \cap \bar{BV}$, etc. and denote $\tilde{B}_i \equiv B_i \cap BV$, $\tilde{S}_i \equiv S_i \cap BV$, etc. We treat bisectors as oriented: B_i begins with S_i and ends with S_{i+1} , that is, $B_i = B[q_i, q'_{i+1}]$, where $q_i \in S_i$ and $q'_{i+1} \in S_{i+1}$ are in the real spine of B_i . By \bar{B}_i , we denote B_i with the opposite orientation, $\bar{B}_i \equiv B[q'_{i+1}, q_i]$. We denote $B_i^- \equiv B[u_i, q_i]$, $B_i^+ \equiv B[q'_{i+1}, v_i]$, $B_i \succ \equiv B[q_i, v_i]$, $\bar{B}_i \succ \equiv B[q'_{i+1}, u_i]$, and $\prec B_i \succ \equiv B[u_i, v_i]$, where u_i and v_i stand for the vertices of B_i which are closer to S_i and to S_{i+1} , respectively. So, $B_i \succ = B_i \cup B_i^+$, $\bar{B}_i \succ = B_i \cup B_i^-$, and $\prec B_i \succ = B_i^- \cup B_i \cup B_i^+$. We also denote by B_i^0 and B_i^1 the bisectors from S_i to M_i and from M_i to S_{i+1} , respectively, $B_i = B_i^0 \cup B_i^1$.

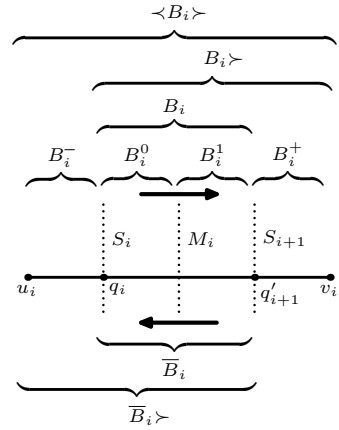
Unless otherwise stated, we consider all isometries as 'living' in $\text{PU}(2, 1)$.

We put $A_{ik} \equiv R_i R_{i+1} \dots R_{k-1}$, where R_i denotes the reflection in M_i . For instance, $A_{i(i-1)} = R_i R_{i+1} \dots R_n R_1 R_2 \dots R_{i-3} R_{i-2} = R_{i-1}$ and $A_{ii} = 1$.

Let us fix some i . Since $A_{ik} S_k = S_i$, the bisectors $A_{ik} B_k$ (in particular, $A_{ii} B_i = B_i$ and $A_{i(i-1)} B_{i-1} = R_i R_{i+1} \dots R_{i-2} B_{i-1} = R_{i-1} B_{i-1} = \bar{B}_{i-1}$) have the common slice S_i : they all begin with S_i . Let $b = b_1 \cup \dots \cup b_n$ be a meridian of the cycle (B_1, \dots, B_n) with vertices s_1, \dots, s_n .



Denoting by α_k the angle from B_k to \bar{B}_{k-1} at the point $s_k \in \tilde{S}_k$, we call $\alpha \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ the *total angle* of the cycle at the meridian b . For any k , $A_{ik} s_k = s_i$. Hence, the angle α_k is equal to the angle at s_i from $A_{ik} B_k$ to $A_{i(k-1)} B_{k-1}$. Now, it is easy to see that the total angle at the meridian is a multiple of 2π . Varying the meridian, we arrive at



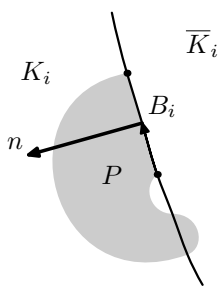
6.2.1. Remark. Modulo 2π , the total angle of any cycle of bisectors is zero. If, for any k , the bisectors $\prec B_{k-1} \succ$ and $\prec B_k \succ$ are transversal along their common slice S_k , then the total angle does not

depend on the choice of a meridian and is an integer multiple of 2π .

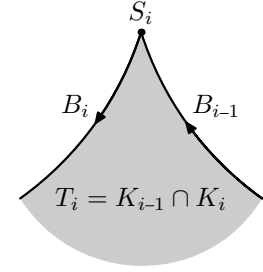
We call a cycle of bisectors *transversal* if, for any k , $\prec B_{k-1} \succ$ and $\prec B_k \succ$ are transversal along S_k . Our intention is to study the discreteness of the group H generated by the R_i 's. We will take as a fundamental domain the polyhedron bounded by a cycle of bisectors. It seems reasonable to require the transversality of the cycle, otherwise, we will not have a good tessellation around any S_i (see Corollary 4.3 and its proof). Clearly, the transversality of the cycle is equivalent to the transversality of $A_{i(k-1)} \prec B_{k-1} \succ$ and $A_{ik} \prec B_k \succ$ along S_i for all k (an arbitrary i is fixed).

For a transversal cycle of bisectors, we can change the cyclic order of the bisectors and their orientation so that the total angle of the new cycle will be $2n\pi - \alpha$. Therefore, without loss of generality, we can assume that $0 \leq \alpha \leq n\pi$ (meaning that we deal with the ‘inside angles’). Since we are going to prove the discreteness by showing that some transversal cycle of bisectors bounds a fundamental domain for H , we do not have hope, if the total angle is different from 2π .

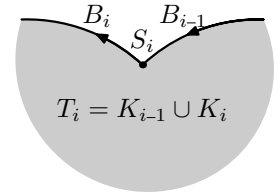
We call a cycle *simple* if $B_i \cap B_k \neq \emptyset$ implies that $k = i - 1$ or $k = i$ or $k = i + 1$.



Let (B_1, \dots, B_n) be a simple transversal cycle of bisectors. The solid torus $\partial_0 P \cong B_1 \cup \dots \cup B_n$ is fibred in two ways: the fibres are the meridians (including ideal ones) and the slices, $\partial_0 P \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$. The torus $T \cong \partial_0 P \cap \partial BV = \partial \partial_0 P$ divides $\partial BV \simeq \mathbb{S}^3$ into two closed connected pieces. Let F be either of them. Since $\partial_0 P$ is transversal to ∂BV , the orientable connected closed 3-manifold $\partial_0 P \cup F$ divides the 4-ball \bar{BV} into two closed connected polyhedra. We denote by P the closed polyhedron on the side of the normal vector to each B_i .



Every $\langle B_i \rangle$ divides \bar{BV} into two closed 4-balls K_i and \bar{K}_i , being K_i on the side of the normal vector to $\langle B_i \rangle$. (Notice that, in general, $P \not\subset K_i$.) By Corollary 4.3, the bisectors $\langle B_{i-1} \rangle$ and $\langle B_i \rangle$ divide \bar{BV} into four 4-balls. To every S_i , we associate the *inside sector* T_i from $B_i \rangle$ to $\bar{B}_{i-1} \rangle$: if $\alpha_i < \pi$ (it does not matter at which point in \check{S}_i we measure α_i), then we put $T_i \cong K_{i-1} \cap K_i$; otherwise, we put $T_i \cong K_{i-1} \cup K_i$. We define $\partial_0 T_i \cong B_i \rangle \cup \bar{B}_{i-1} \rangle$.



The polyhedron P ‘includes’ the inside sectors, i.e., for any $p \in S_i$, we can find a point $p' \in \mathring{P} \cap \mathring{T}_i$ arbitrarily close to p , where \mathring{P} and \mathring{T}_i stand for the interior of P and for the interior of T_i , respectively.

Clearly, $B_i^0 \cap B_i^+ = B_i^1 \cap B_i^- = \emptyset$. Since $\langle B_{i-1} \rangle$ and $\langle B_i \rangle$ intersect only in S_i , we obtain $S_i \cap B_{i-1}^- = S_i \cap B_i^+ = \emptyset$. The cycle is simple, hence, $B_i \cap B_k = \emptyset$ for $k \neq i - 1, i, i + 1$. Since $\langle B_i \rangle$ and $\langle B_{i+1} \rangle$ intersect only in S_{i+1} and the cycle is simple, $B_i^0 \cap B_k = \emptyset$ for $k \neq i - 1, i$. For similar reasons, $B_i^1 \cap B_k = \emptyset$ for $k \neq i, i + 1$. Consequently, there exists $d > 0$ such that

$$\text{dist}(\check{B}_i^0, \check{B}_i^+), \text{dist}(\check{B}_i^1, \check{B}_i^-), \text{dist}(\check{S}_i, \check{B}_{i-1}^-), \text{dist}(\check{S}_i, \check{B}_i^+) \geq d,$$

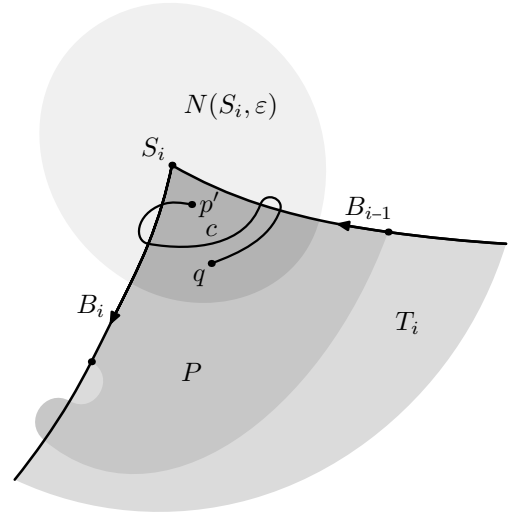
$\text{dist}(\check{B}_i, \check{B}_k) \geq d$ for $k \neq i - 1, i, i + 1$, $\text{dist}(\check{B}_i^0, \check{B}_k) \geq d$ for $k \neq i - 1, i$, and $\text{dist}(\check{B}_i^1, \check{B}_k) \geq d$ for $k \neq i, i + 1$.

For $p \in BV$ and $\varepsilon > 0$, we denote by $N(p, \varepsilon)$ the open ball of radius ε centred in p . For $X \subset BV$, we denote by $N(X, \varepsilon) \cong \bigcup_{p \in X} N(p, \varepsilon)$ the ε -neighborhood of X .

Let $0 < \varepsilon \leq d/3$ be fixed.

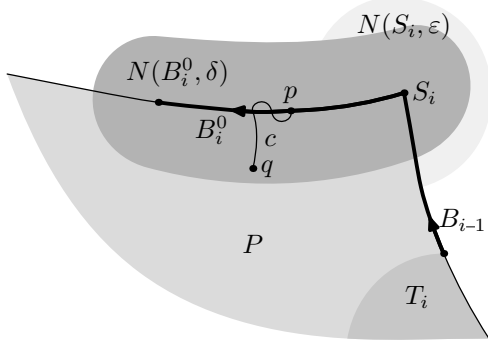
6.2.2. Lemma. $\mathring{P} \cap N(\check{S}_i, \varepsilon) = \mathring{T}_i \cap N(\check{S}_i, \varepsilon)$.

Proof. Let $q \in N(\check{S}_i, \varepsilon) \setminus \partial_0 T_i$. There is a geodesic of length $< d/3$ connecting q with some $p \in \check{S}_i$. We can find a point $p' \in N(p, d/3) \cap \mathring{P} \cap \mathring{T}_i$ and connect q and p' with a curve $c \subset BV$ of length $< 2d/3$ transversal to $\langle \check{B}_{i-1} \rangle$ and to $\langle \check{B}_i \rangle$ and not passing through \check{S}_i . So, $\ell(c) + \text{dist}(p', p) < d$. If $k \neq j - 1, j, j + 1$, then $\text{dist}(\check{B}_j, \check{B}_k) \geq d$ by the choice of d . Hence, in $\partial_0 P$, c



can meet only $(\check{B}_{i-1} \setminus \check{S}_{i-1}) \cup (\check{B}_i \setminus \check{S}_{i+1})$. The parity of the number of such intersections indicates if $q \in \check{P}$. Also, $\text{dist}(\check{S}_i, \check{B}_{i-1}^-) \geq d$ and $\text{dist}(\check{S}_i, \check{B}_i^+) \geq d$ by the choice of d . Therefore, in $\partial_0 T_i$, c can meet only $(\check{B}_{i-1} \setminus \check{S}_{i-1}) \cup (\check{B}_i \setminus \check{S}_{i+1})$. Consequently, the same parity verifies if $q \in \check{T}_i$. For $q \in N(\check{S}_i, \varepsilon) \cap \check{B}_i$, it follows from $\text{dist}(\check{S}_i, \check{B}_i^+) \geq d$ that $q \in \check{B}_i$. The same reason works for $q \in N(\check{S}_i, \varepsilon) \cap \check{B}_{i-1}$ ■

By Lemma 5.4, there exists some δ , $0 < \delta \leq \varepsilon/2$, such that $\langle \check{B}_{i-1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_i, \varepsilon/2)$ and $\langle \check{B}_{i+1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon/2)$ for all i . In what follows, we will refer to these inclusions as related to the choice of δ . We fix δ and put $D_i^0 \Rightarrow \check{P} \cap N(\check{B}_i^0, \delta)$, $D_i^1 \Rightarrow \check{P} \cap N(\check{B}_i^1, \delta)$, and $D_i \Rightarrow \check{P} \cap N(\check{B}_i, \delta)$. So, $D_i = D_i^0 \cup D_i^1$.

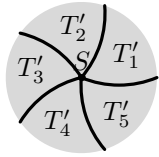


6.2.3. Lemma. $D_i^0 \subset \check{T}_i$ and $D_i^1 \subset \check{T}_{i+1}$.

Proof. By symmetry, it suffices to show that $D_i^0 \subset \check{T}_i$. Let $q \in D_i^0$. We can assume that $q \notin N(\check{S}_i, \varepsilon)$, otherwise, the result follows from Lemma 6.2.2. Let $p \in \check{B}_i^0$ be a point closest to q . Since $\delta \leq \varepsilon$, we obtain $p \notin \check{S}_i$. We can connect q and p with a curve $c \subset BV$ of length $< \delta$ transversal to $\langle \check{B}_{i-1} \rangle$ and to $\langle \check{B}_i \rangle$ and not passing through \check{S}_i . Since $\langle \check{B}_{i-1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_i, \varepsilon/2)$, $\delta \leq \varepsilon/2$, and $q \notin N(\check{S}_i, \varepsilon)$, the curve c cannot meet $\langle \check{B}_{i-1} \rangle$. Now, the inequalities $\text{dist}(\check{B}_i^0, \check{B}_k) \geq d > \delta$, $k \neq i-1, i$, imply that, in $\partial_0 P$, c can meet only $\check{B}_i \setminus \check{S}_{i+1}$ and the

inequalities $\text{dist}(\check{B}_i^0, \check{B}_i^+) \geq d > \delta$ imply that, in $\partial_0 T_i$, c can meet only $\check{B}_i \setminus \check{S}_{i+1}$. Since $q \in \check{P}$, we conclude that $q \in \check{T}_i$ ■

6.2.4. Lemma. Let B'_k , $1 \leq k \leq n$, be bisectors with positive foci. Suppose that they all have a common slice S of signature $+-$ (they all begin with S) such that $\langle B'_{k-1} \rangle$ and $\langle B'_k \rangle$ are transversal along S for all k and that the sum of the angles from B'_k to B'_{k-1} at some and the same point in \check{S} equals 2π . Then B'_k 's divide $\bar{B}V$ into n sectors T'_k (from B'_k to B'_{k-1}) such that $T'_k \cap T'_j = S$ if $j \neq k-1, k, k+1$ and $T'_k \cap T'_{k+1} = B'_k$.⁴³



Proof easily follows by viewing the projective line orthogonal to S and passing through the 'extra' point of the intersection in question (see also the Corollary 4.3 and its proof)⁴⁴ ■

6.2.5. Lemma. Suppose that the total angle of the cycle equals 2π . Then $N(\check{S}_i, \varepsilon) \cup N(\check{B}_i, \delta) \cup N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon) = N(\check{S}_i, \varepsilon) \cup D_i \cup R_i D_i \cup N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon)$ and $D_i \cap R_i D_i = \check{B}_i$.

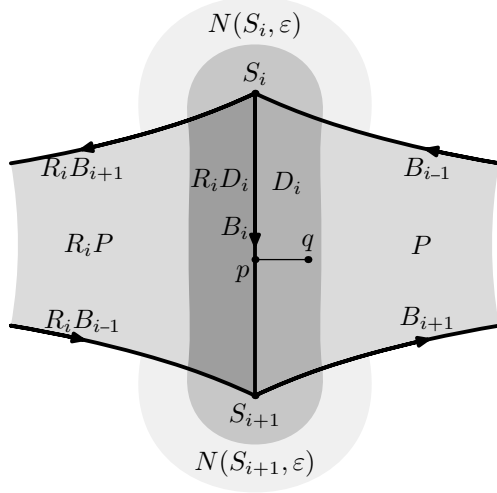
Proof. Let $q \in N(\check{B}_i, \delta)$. We have two tasks: to prove that $q \in N(\check{S}_i, \varepsilon) \cup \check{P} \cup R_i \check{P} \cup N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon)$ and that $q \in \check{P} \cap R_i \check{P}$ implies $q \in \check{B}_i$.

For the first task, we can obviously assume that $q \notin N(\check{S}_i, \varepsilon) \cup N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon)$. So can we do for the second one by applying twice Lemmas 6.2.4 and 6.2.2 to the bisectors $A_{ik} B_k$'s and to the bisectors $A_{(i+1)k} B_k$'s. Also, we assume that $q \notin \check{B}_i$. Let $G[q, p]$ be the shortest geodesic (of length $< \delta$) connecting q with some point $p \in \check{B}_i$. By Lemma 5.2 and by the inequality $\delta < \varepsilon$, we obtain $q \notin \langle \check{B}_i \rangle$. Now, by Lemma 5.3, p is the point in $\langle \check{B}_i \rangle$ closest to q . By the choice of δ , we have $\langle \check{B}_{i-1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_i, \varepsilon/2)$, $\langle \check{B}_{i+1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon/2)$, $R_i \langle \check{B}_{i-1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_i, \varepsilon/2)$, and $R_i \langle \check{B}_{i+1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_i, \varepsilon/2)$, since $R_i \check{B}_i = \check{B}_i$, $R_i \check{S}_i = \check{S}_{i+1}$, and $R_i \check{S}_{i+1} = \check{S}_i$.

⁴³In other words, the intersections of the sectors are 'prescribed.'

⁴⁴Nevertheless, notice that the bisectors are not necessarily all transversal, some pair of them can even form a full bisector.

Let us show that $G[q, p]$ cannot meet $\prec \check{B}_{i-1} \succ \cup \prec \check{B}_{i+1} \succ$. Indeed, if $x \in G[q, p] \cap (\prec \check{B}_{i-1} \succ \cup \prec \check{B}_{i+1} \succ)$ then $x \in N(\check{S}_i, \varepsilon/2) \cup N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon/2)$ by the choice of δ . Now, it follows from $\delta \leq \varepsilon/2$ that $q \in N(S_i, \varepsilon) \cup N(S_{i+1}, \varepsilon)$. By symmetry, $G[q, p]$ does not meet $R_i \prec \check{B}_{i-1} \succ \cup R_i \prec \check{B}_{i+1} \succ$.



By the inequalities $\text{dist}(\check{B}_i, \check{B}_k) \geq d > \delta$ and $\text{dist}(\check{B}_i, \check{R}_i B_k) \geq d > \delta$ for $k \neq i-1, i, i+1$, in $\partial_0 P$ and in $\partial_0 R_i P$, the geodesic $G[q, p]$ can meet only B_i . Since $G[q, p]$ meets B_i only in $p \in \check{P} \cap R_i \check{P}$, we conclude that $q \in \check{P} \cup R_i \check{P}$. Suppose that $q \in \check{P} \cap R_i \check{P}$ and $q \notin B_i$, that is, $q \notin \partial_0 P \cup \partial_0 R_i P$. Then we slightly extend $G[q, p]$ to $G[q, p']$. By Lemma 5.3, $G[q, p']$ is transversal to B_i . Hence, by Lemma 5.1, $p' \notin \check{P} \cup R_i \check{P}$. A contradiction ■

We put $N_k \equiv \check{P} \cap N(\check{S}_k, \varepsilon)$, $E_i \equiv N_i \cup D_i \cup N_{i+1}$, and $U_i \equiv \check{B}_i \cap N(\check{S}_i, \varepsilon)$.

6.2.6. Lemma. *Suppose that the total angle of the cycle equals 2π . Then the set $N \equiv \check{P} \cup \bigcup_{i=1}^n R_i E_i \cup$*

$\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{k \neq i, \\ k \neq i \pm 1}} A_{ik} N_k = \check{P} \cup \bigcup_{i=1}^n N(\check{B}_i, \delta) \cup \bigcup_{i=1}^n N(\check{S}_i, \varepsilon)$ is open

and $N \supset N(\check{P}, \delta)$. The following are the only nonempty intersections between \check{P} , $R_i E_i$, and $A_{ik} N_k$, $k \neq i-1, i, i+1$:

- $\check{P} \cap R_i E_i = \check{B}_i$
- $\check{P} \cap A_{ik} N_k = \check{S}_i$
- $R_{i-1} E_{i-1} \cap R_i E_i = \check{S}_i$
- $R_{i-1} E_{i-1} \cap A_{i(i-2)} N_{i-2} = A_{i(i-2)} U_{i-2}$
- $R_i E_i \cap A_{i(i+2)} N_{i+2} = A_{i(i+2)} U_{i+1}$
- $R_{i-1} E_{i-1} \cap A_{ik} N_k = \check{S}_i$ for $k \neq i-2$
- $R_i E_i \cap A_{ik} N_k = \check{S}_i$ for $k \neq i+2$
- $A_{ik} N_k \cap A_{i(k+1)} N_{k+1} = A_{ik} U_k$
- $A_{ik} N_k \cap A_{ij} N_j = \check{S}_i$ for $k \neq j-1, j+1$

In other words, all these intersections are ‘prescribed.’

Proof is routine and straightforward. The inclusion $N \supset N(\check{S}_i, \varepsilon)$ follows from Lemmas 6.2.4 and 6.2.2. Now, by Lemma 6.2.5, we obtain $N \supset N(\check{B}_i, \delta)$. By Lemmas 6.2.4, 6.2.2, and 6.2.5, $\check{P} \cap R_i E_i = \check{B}_i$. By Lemmas 6.2.4 and 6.2.2, $\check{P} \cap A_{ik} N_k = \check{S}_i$. By the choice of d , we have $\text{dist}(\check{B}_k, \check{B}_l) \geq \delta$, hence, due to $2\varepsilon < d$, $N(\check{S}_i, \varepsilon) \cap N(\check{S}_j, \varepsilon) = \emptyset$ for $i \neq j$. Therefore, $A_{ik} N_k \cap A_{jl} N_l = \emptyset$ for $i \neq j$. By Lemmas 6.2.4 and 6.2.2, $A_{ik} N_k \cap A_{i(k+1)} N_{k+1} = A_{ik} U_k$ and $A_{ik} N_k \cap A_{ij} N_j = \check{S}_i$ for $k \neq j-1, j+1$. By the choice of d and due to $2\delta < d$, we obtain $N(\check{B}_i, \delta) \cap N(\check{B}_j, \delta) = \emptyset$ for $j \neq i-1, i, i+1$. With the use of $N(\check{S}_l, \varepsilon) \cap N(\check{S}_m, \varepsilon) = \emptyset$ for $l \neq m$, this implies that $R_i E_i \cap R_j E_j = \emptyset$ for $j \neq i-1, i, i+1$. By the choice of d , $d \leq \text{dist}(\check{B}_i^0, \check{B}_j) \leq \text{dist}(\check{S}_i, \check{B}_j)$ for $j \neq i-i, i$. Since $d > \varepsilon + \delta$, $N(\check{S}_i, \varepsilon) \cap N(\check{B}_j, \delta) = \emptyset$ for $j \neq i-1, i$. Hence, $R_j E_j \cap A_{ik} N_k = \emptyset$ for $j \neq i-1, i$.

By the choice of d , $N(\check{B}_{i-1}^0, \delta) \cap N(\check{S}_i, \varepsilon) = \emptyset$, $N(\check{B}_{i-1}^0, \delta) \cap N(\check{B}_i, \delta) = \emptyset$, $N(\check{B}_{i-1}, \delta) \cap N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon) = \emptyset$, $N(\check{B}_i^1, \delta) \cap N(\check{S}_i, \varepsilon) = \emptyset$, $N(\check{B}_i^1, \delta) \cap N(\check{B}_{i-1}, \delta) = \emptyset$, and $N(\check{B}_i, \delta) \cap N(\check{S}_{i-1}, \varepsilon) = \emptyset$. Since $N(\check{S}_l, \varepsilon) \cap N(\check{S}_m, \varepsilon) = \emptyset$ for $l \neq m$, we obtain $R_{i-1} E_{i-1} \cap R_i E_i = R_{i-1} (D_{i-1}^0 \cup N_{i-1}) \cap R_i (D_i^1 \cup N_{i+1})$ and $R_i E_i \cap A_{ik} N_k = R_i (D_i^1 \cup N_{i+1}) \cap A_{ik} N_k$. By Lemma 6.2.3, $D_{i-1}^0 \cup N_{i-1} \subset T_{i-1}$ and $D_i^1 \cup N_{i+1} \subset \check{T}_{i+1}$. Now, from $R_i = A_{i(i+1)}$ and $R_{i-1} = A_{i(i-1)}$, it follows that $R_{i-1} E_{i-1} \cap R_i E_i = \check{S}_i$, $R_i E_i \cap A_{i(i+2)} N_{i+2} \subset A_{i(i+1)} \check{B}_{i+1} \succ$, and $R_i E_i \cap A_{ik} N_k = \check{S}_i$ for $k \neq i+2$ by Lemma 6.2.4. By the

choice of δ , $\langle \check{B}_{i+1} \rangle \cap N(\check{B}_i, \delta) \subset N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon)$. Therefore, $(D_i^1 \cup N_{i+1}) \cap \check{B}_{i+1} \supset U_{i+1}$, which implies that $R_i E_i \cap A_{i(i+2)} N_{i+2} = A_{i(i+1)} U_{i+1}$. If we change the orientation of the cycle, the conditions related to the choice of d and δ will remain valid. By this symmetry, $R_{i-1} E_{i-1} \cap A_{i(i-2)} N_{i-2} = A_{i(i-2)} U_{i-2}$ and $R_{i-1} E_{i-1} \cap A_{ik} N_k = \check{S}_i$ for $k \neq i-2$ ■

In literature, we have found no convenient version of Poincaré's Polyhedron Theorem. Some versions require that \check{P} and $A_{ik} \check{P}$ have no extra intersection (which leads to a difficult problem of proving that two bisectors have no intersection), other ones have gaps in the proof. Probably, [Bea, p. 246] could be applied in our case. Unfortunately, there is a mistake in the description of condition (A6) there. Our proof essentially uses some specific properties of bisectors (see Lemmas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, and 6.2.4).

6.2.7. Theorem (Poincaré's Polyhedron Theorem). *Let (B_1, \dots, B_n) be a simple transversal cycle of bisectors with the total angle 2π . Then H is discrete and \check{P} is a fundamental domain for $H \simeq H_n$.*

Proof is standard. The group H_n naturally acts on $H_n \times \check{P}$, the disjoint union of H_n -copies of \check{P} . There are a homomorphism $h : H_n \rightarrow H$, $r_i \mapsto R_i$, and a continuous H_n -equivariant map $\psi : H_n \times \check{P} \rightarrow BV$, $(g, p) \mapsto h(g)(p)$. For all $g \in H_n$ and i , we identify $(g, \check{B}_i) \subset (g, \check{P})$ and $(gr_i, \check{B}_i) \subset (gr_i, \check{P})$ with the help of R_i . We obtain a topological quotient space J and continuous H_n -equivariant maps $\pi : H_n \times \check{P} \rightarrow J$ and $\varphi : J \rightarrow BV$ such that $\psi = \varphi \circ \pi$. We put $\pi(g, p) = gp \in J$, $a_{ik} = r_i r_{i+1} \dots r_{k-1}$, and $\tilde{N} = \check{P} \cup \bigcup_{i=1}^n r_i E_i \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{k \neq i, \\ k \neq i \pm 1}} a_{ik} N_k \subset J$. It follows from the choice of δ that $D_i \cap \check{B}_{i-1} \subset N(\check{S}_i, \varepsilon)$ and

$D_i \cap \check{B}_{i+1} \subset N(\check{S}_{i+1}, \varepsilon)$. Now, it is easy to see that \tilde{N} is an open neighborhood of \check{P} in J . Lemma 6.2.6 can be read as follows: $\varphi|_{\tilde{N}}$ is a bijection between \tilde{N} and N . Taking into account that bisectors are smooth hypersurfaces and that $A_{ik} \langle B_k \rangle$'s are transversal along S_i , we conclude that $\varphi|_{\tilde{N}}$ is open. Hence, φ is open. In particular, $\varphi(J)$ is open in BV . Let $q \in BV$ be in the closure of $\varphi(J)$. Then $h(g)\check{P} \cap N(q, \delta) \neq \emptyset$ for some $g \in H_n$. Hence, $q \in N(h(g)\check{P}, \delta) \subset h(g)N = \varphi(g\tilde{N}) \subset \varphi(J)$. Thus, φ is surjective.

Let $q \in BV$. We define $W_q = \{g \in H_n \mid N(q, \delta/2) \cap h(g)\check{P} \neq \emptyset\}$ and, for every $g \in W_q$, we put $N_g = \varphi^{-1}(N(q, \delta/2)) \cap g\tilde{N}$. Since $N(q, \delta/2) \cap h(g)\check{P} \neq \emptyset$ implies $N(q, \delta/2) \subset h(g)N$, we conclude that $\varphi : N_g \rightarrow N(q, \delta/2)$ is a homeomorphism. Let $p \in \varphi^{-1}(N(q, \delta/2))$. Then $p \in g\check{P} \subset J$ for some $g \in H_n$. Hence, $\varphi(p) \in N(q, \delta/2) \cap h(g)\check{P}$, $g \in W_q$, and $p \in N_g$. In other words, $\varphi^{-1}(N(q, \delta/2)) = \bigcup_{g \in W_q} N_g$. If $N_{g_1} \cap N_{g_2} \neq \emptyset$ for some $g_1, g_2 \in W_q$, then $N_{g_1} = N_{g_2}$. Indeed, N_{g_1} is connected and $N_{g_1} \cap N_{g_2}$ is open and closed⁴⁵ in N_{g_1} . We proved that φ is a covering and, therefore, a homeomorphism ■

6.3. Simplicity and Transversality. We remember that the initial projective line S_1 was chosen almost arbitrarily. In H , there are many collections of reflections with product 1. For instance, let us fix an arbitrary i . We denote by $R'_k = R_k^{A_{ik}}$ (where X^Y stands for YXY^{-1}) the reflection in the projective line $M'_k = A_{ik}M_k$. It is easy to verify that $R'_1 R'_2 \dots R'_n = 1$. We can view a cycle of bisectors in a simpler way as being given by some projective line S ($= S_i$) of signature $+ -$ and by a collection of projective lines M'_1, M'_2, \dots, M'_n ($M'_k = A_{ik}M_k$) of signature $+ -$, each ultraparallel to S and different from S , such that $R'_1 R'_2 \dots R'_n = 1$, where R'_k stands for the reflection in M'_k . These data suffice to reconstitute the cycle: we define $A'_{ik} = R'_i R'_{i+1} \dots R'_{k-1}$ and $R_k = R'_k A'_{ik}$.

Let $S'_k = R'_k S$ and let B'_k ($= A_{ik} B_k$ in the terms of the first description of the cycle) denote the bisector starting at S , including M'_k , and ending with S'_k . Then $S_k = A'_{ik} S$, $M_k = A'_{ik} M'_k$, and $B_k = A'_{ik} B'_k$. As was noticed below Remark 6.2.1, the transversality of the cycle is equivalent to the

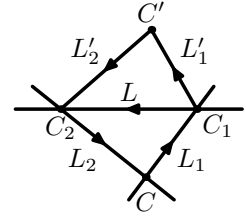
⁴⁵The projection $N_{g_1} \times N_{g_2} \rightarrow N_{g_1}$ induces a homeomorphism between $M = \{(x_1, x_2) \in N_{g_1} \times N_{g_2} \mid \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\}$ and N_{g_1} . The diagonal $\Delta_{N_{g_1} \cap N_{g_2}} = \Delta_J \cap (N_{g_1} \times N_{g_2}) \subset M$ is closed in M since J is Hausdorff. Therefore, the image $N_{g_1} \cap N_{g_2}$ of $\Delta_{N_{g_1} \cap N_{g_2}}$ is closed in N_{g_1} .

transversality of $\langle B'_{k-1} \rangle$ and $\langle B'_k \rangle$ along S for all k . As was observed above Remark 6.2.1, the total angle of the cycle at a meridian is equal to the sum of the angles from B'_{k-1} to B'_k , $1 \leq k \leq n$, at the respective point in \check{S} .

Let (B_1, \dots, B_n) be a cycle of bisectors and let C be a projective line of signature $+-$ different from all M_k 's and ultraparallel to each M_k . We call C a *centre* of the cycle. By the above considerations, the condition that the cycle possesses a centre does not seem too restrictive. By Remark 2.3.3, we can connect C and M_k with some bisector B'_k (oriented from C to M_k). Let $c \in \check{C}$. Denoting by β_k the angle from B'_{k-1} to B'_k at c , it is easy to see that $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_n$, the *central angle* of the cycle at C , is zero modulo 2π . If, for any k , the bisectors $\langle B'_{k-1} \rangle$ and $\langle B'_k \rangle$ are transversal along their common slice C , then the total angle does not depend on the choice of $c \in \check{C}$ and is an integer multiple of 2π .

Let C, C_1, C_2 be pairwise ultraparallel different projective lines of signature $+-$. By Remark 2.3.3, we can connect them with three oriented segments of bisectors which form the *oriented triangle* $\Delta(C, C_1, C_2)$ of bisectors. We call the triangle *transversal* if these bisectors are transversal along their common slices. We denote by L the bisector from C_1 to C_2 , by L_1 the bisector from C to C_1 , and by L_2 the bisector from C_2 to C . Since $\langle L_1 \rangle$ and $\langle L_2 \rangle$ are transversal along C , either the angle from L_1 to \bar{L}_2 is less than π or the angle from \bar{L}_2 to L_1 is less than π . We denote by T the sector including the smaller angle. So, $T = K_1 \cap K_2$ or $T = \bar{K}_1 \cap \bar{K}_2$, respectively (we denote by K_i or by K the part of $\bar{B}V$ on the side of the normal vector to $\langle L_i \rangle$ or to $\langle L \rangle$). We call T the *angle* at C and L, L_1 , and L_2 , the *sides*. Similarly, we define the angle T_i between L and L_i . By changing the orientation of the triangle, if needed, we can always assume that $T = K_1 \cap K_2$. Let C' be one more projective line of signature $+-$ ultraparallel to C_1 and to C_2 such that the triangle $\Delta(C', C_2, C_1)$ is also transversal. We denote by L'_1 the bisector from C_1 to C' and by L'_2 , the bisector from C' to C_2 . We say that the triangle $\Delta(C', C_2, C_1)$ *suits* the triangle $\Delta(C, C_1, C_2)$ if some point in C' belongs to T and the bisectors $\langle L_i \rangle$ and $\langle L'_i \rangle$ are transversal along C_i for $i = 1, 2$.

6.3.1. Lemma. *Let $\Delta(C, C_1, C_2)$ be a transversal triangle oriented so that $T = K_1 \cap K_2$, where T stands for the angle at C . Then the side L from C_1 to C_2 is included into T . Moreover, for the angle T_i at C_i , we have $T_i = K \cap K_i$. Suppose that some transversal triangle $\Delta(C', C_2, C_1)$ suits $\Delta(C, C_1, C_2)$. Then⁴⁶ $\Delta(C', C_2, C_1) \subset T$.*



Proof. Since L is connected and intersects $\langle L_i \rangle$'s only in the C_i 's, the side L is included into one of the four sectors formed by the $\langle L_i \rangle$'s. The only sector that includes both C_i 's is T .

Suppose that $T_1 = \bar{K} \cap \bar{K}_1$. Then, by the above statement, we have $L_2 \subset T_1$ which implies $L_2 \subset \bar{K}_1$. On the other hand, $L_2 \subset T \subset K_1$, a contradiction. The same works for T_2 .

The bisector $\langle L'_1 \rangle$ intersects $\langle L_1 \rangle$ only in C_1 . Hence, either $L'_1 \subset K_1$ or $L'_1 \subset \bar{K}_1$. Since some point of C' belongs to $T \subset K_1$ and $C' \subset L'_1$, we conclude that $L'_1 \subset K_1$. By the same arguments, $\bar{L}'_2 \subset K_2$. From $L \subset T$, we conclude that $L \subset K_1$ and $\bar{L} \subset K_2$. Consequently, $T'_1 \subset K_1$ and $T'_2 \subset K_2$, where T'_i stands for the angle of $\Delta(C', C_2, C_1)$ at C_i . Since $L'_2 \subset T'_1$ and $L'_1 \subset T'_2$, we obtain $L'_2 \subset K_1$ and $L'_1 \subset K_2$. Now, from $L'_1 \subset K_1$ and $\bar{L}'_2 \subset K_2$, we deduce that $L'_i \subset T$ ■

If the cycle is transversal, then M_{k-1} and M_k are ultraparallel. In this case, assuming that the cycle possesses a centre C , we can form two triangles $\Delta_k = \Delta(C, M_{k-1}, M_k)$ and $\Delta'_k = \Delta(S_k, M_k, M_{k-1})$.

It is difficult to decide whether two bisectors intersect (see, for instance, [San]). So, there is no good numerical criterion verifying the simplicity of a cycle. To a certain extent, transversality implies simplicity:

⁴⁶Notice that $\Delta(C', C_2, C_1)$ can be 'inside' or 'outside' of $\Delta(C, C_1, C_2)$.

6.3.2. Criterion. Let (B_1, \dots, B_n) be a transversal cycle of bisectors possessing a centre C . For every k , we suppose that the triangles Δ_k and Δ'_k are transversal and that Δ'_k suits Δ_k . If the central angle is 2π and the angle from $B'_{k-1}\succ$ to $B'_k\succ$ is less than π for every k , then the cycle is simple.⁴⁷

Proof. By Lemma 6.2.4, the bisectors $B'_k\succ$ divide \overline{BV} into n sectors T'_k 's. Clearly, $B_{k-1} \cap B'_{k-1}\succ = M_{k-1}$ and $B_k \cap B'_k\succ = M_k$. By Lemma 6.3.1, $B^1_{k-1} \cup B^0_k \subset T'_k$ ■

6.4. Fibred Polyhedra, Euler Number

We can weaken the condition $R_n \dots R_1 = 1$ to $R_n \dots R_1 S_1 = S_1$, obtaining the notion of a *configuration* of bisectors instead of the notion of a cycle of bisectors. A (transversal) triangle is an important example of a configuration. We can also define meridians for a configuration, however, they can be nonclosed. A configuration (B_1, \dots, B_n) is said to be *simple* if $B_i \cap B_k = \emptyset$ for $k \neq i-1, i, i+1$ and $B_{i-1} \cap B_i = S_i$. (Notice that the latter requirement is weaker than the transversality of $\prec B_{i-1}\succ$ and $\prec B_i\succ$ along S_i .) Henceforth, we will also apply this notion of simplicity (which differs from the first one) to cycles. As above, if the configuration is simple, it divides BV into two closed connected polyhedra. We denote by P the polyhedron on the side of the normal vector to B_i 's and introduce the solid torus $\partial_0 P$ fibred into slices and the torus T in the above way. We put $\partial_1 P \doteq P \cap \partial BV$ and $\partial P \doteq \partial_0 P \cup \partial_1 P$. Clearly, $T = \partial_0 P \cap \partial_1 P$.

6.4.1. Lemma. Suppose that the polyhedron P related to a simple configuration of bisectors is a 4-ball, $P \simeq \mathbb{B}^4$. Then P is a disc bundle over a disc with $\partial_0 P$ being a union of entire fibres, i.e., $P \simeq \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$ with $\partial_0 P \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, if and only if $\partial_1 P$ is a solid torus. In this case, the slice bundle of $\partial_0 P$ is extendable to a disc bundle of P over a disc.

Proof is standard. If $P \simeq \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$, then $P \simeq \mathbb{B}^4$ and ∂P is a sphere \mathbb{S}^3 decomposed into two solid tori $\partial \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$ and $\mathbb{B}^2 \times \partial \mathbb{B}^2$ glued along the torus $\partial \mathbb{B}^2 \times \partial \mathbb{B}^2$. Hence, $\partial_0 P \simeq \partial \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$ implies that $\partial_1 P \simeq \mathbb{B}^2 \times \partial \mathbb{B}^2$.

Conversely, if $\partial_1 P$ is a solid torus, then $\partial P \simeq \mathbb{S}^3$ is decomposed into two solid tori glued along the torus T . As is well known, such a decomposition of \mathbb{S}^3 is topologically unique and, arbitrarily fibering one of the solid tori into discs and extending the fibration for the other one, we obtain compatible decompositions $T \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $\partial_0 P \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, and $\partial_1 P \simeq \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$. Since $P \simeq \mathbb{B}^4$ is a cone over $\partial P \simeq \mathbb{S}^3$, we can readily extend these decompositions to a compatible decomposition $P \simeq \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$ ■

In the situation described in Lemma 6.4.1, we will say that the polyhedron P is *fibred*. The Dehn Lemma immediately implies

6.4.2. Remark. Let P be a polyhedron related to some simple configuration of bisectors. Then P is fibred if and only if there exists some simple closed curve $c \subset T$ contractible in $\partial_1 P$ such that c intersects each slice of $\partial_0 P$ exactly once.

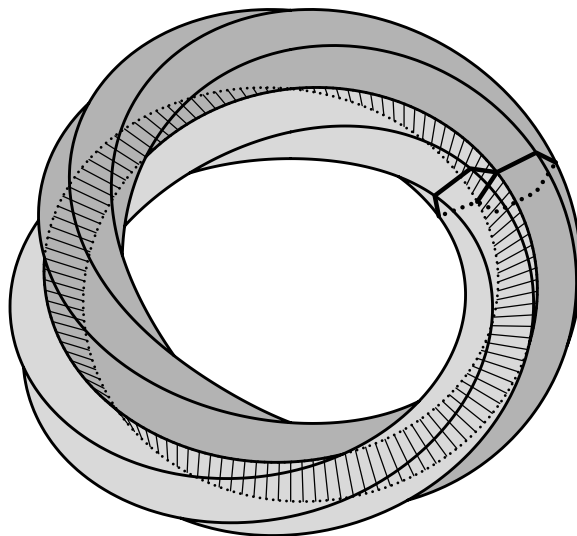
We call such a curve c *trivializing*.

Let $(B_1, \dots, B_l, B_{l+1}, \dots, B_n)$, $1 \leq l < n$, and $(B'_m, \dots, B'_{l+1} \overline{B}_l, \dots, \overline{B}_1)$, $1 \leq l < m$, be simple configurations of bisectors with a common sequence of bisectors (oriented in the opposite way in the other configuration) such that the polyhedra P_1 and P_2 related to the configurations intersect only in $B_1 \cup \dots \cup B_l$. Then we can glue P_1 and P_2 along $B_1 \cup \dots \cup B_l$, obtaining a *gluing* $P \doteq P_1 \cup P_2$, the polyhedron related to the simple configuration $(B_{l+1}, \dots, B_n, B'_m, \dots, B'_{l+1})$. The polyhedra P and $R_i P$ in Theorem 6.2.7 yield an example of such a gluing: they are glued along B_i . Suppose that P_1 and P_2 are fibred. Then the solid tori $\partial_1 P_1$ and $\partial_1 P_2$ intersect in the annulus $A \doteq \partial B_1 \cup \dots \cup \partial B_l$ which is an annular neighbourhood of a simple curve generating the fundamental group of each solid torus. Hence,

⁴⁷This condition is not too restrictive, since only one of these angles can be more than π .

we can choose a trivializing curve c_i contractible in $\partial_1 P_i$ so that c_1 and c_2 coincide along A . Thus, we arrive at

6.4.3. Remark. Let P_1 and P_2 be fibred and let $P = P_1 \cup P_2$ be their gluing. Then P is fibred and a trivializing curve for P can be obtained by gluing (and removing the common part) some trivializing curves c_1 and c_2 for P_1 and for P_2 which coincide over the common sequence of bisectors.



Let P be a fibred polyhedron related to a simple cycle and let b be a meridian of the cycle. Clearly, there exists a simple disc $D \subset P$ which intersects each fibre in P exactly once and such that $b = \partial D$ and $\mathring{D} \subset \mathring{P}$. We assume that meridians and trivializing curves are oriented with respect to the orientation of the cycle and we also equip T with the following orientation: the first coordinate is the standardly oriented boundary of a slice and the second is an ideal meridian already oriented. The orientation of b orients D . We call D an *equivariant section* of the fibred polyhedron P . For another meridian b' , $b \cap b' = \emptyset$, we can find an equivariant section D' with $\partial D' = b'$ and choose D and D' to be transversal. We call the number $eP = \#D \cap D'$ (the signs are taken into account) the *Euler number*⁴⁸ of the fibred polyhedron P . In fact, eP measures the difference between two decompositions of the slice bundle $\partial_0 P$ into the product $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$: the meridian decomposition and the decomposition induced by the trivialization $P \simeq \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$. Obviously, the difference can be measured in terms of T :

6.4.4. Remark. Let P be a fibred polyhedron related to a simple cycle. Then $eP = \#b \cap c$, where b stands for an ideal meridian and c , for a trivializing curve. In other words, $[b] = eP[s]$ in $\pi_1 \partial_1 P$ equipped with the generator $[s]$ represented by the boundary of a slice oriented naturally.

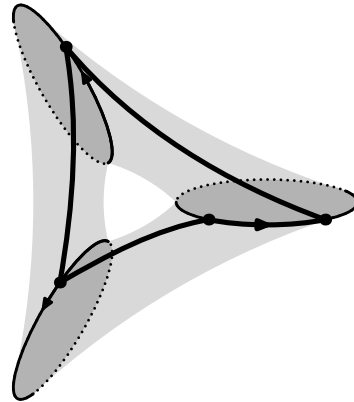
Summarizing, we obtain

6.4.5. Proposition. Let P be a fibred polyhedron related to a simple transversal cycle of bisectors (B_1, \dots, B_n) whose total angle equals 2π . Then BV/T_n for odd n (BV/G_n for even n) is a complex hyperbolic manifold homeomorphic to a disc bundle over a closed orientable surface of genus $n - 3$ (for even n and for BV/G_n , the genus equals $\frac{n}{2} - 1$). The Euler number of the bundle equals $4eP$ (for even n and for BV/G_n , the Euler number equals $2eP$).

Proof summarizes previous results. We assume n to be odd. (The same arguments work for even n .) By Theorem 6.2.7, P is a fundamental domain for the discrete group $H \simeq H_n$ generated by R_i 's. Using the arguments similar to those in the beginning of this section, we can see that $Q = P \cup R_1 P \cup R_2 P \cup R_2 R_1 P$ is a fundamental domain for T_n . By Remark 6.4.3, Q is a fibred polyhedron related to a suitable simple cycle \mathcal{C} of bisectors. By Proposition 3.9, the meridians in P , $R_1 P$, $R_2 P$, and $R_2 R_1 P$ are glued along the ℓ -meridians of B_1 , B_2 , and $R_2 B_1$ forming (the common parts removed after gluing) the meridians of \mathcal{C} . Since T_n identifies the bisectors in \mathcal{C} according to their slice fibration, by Lemma 6.4.1, BV/T_n is a disc bundle over a surface. These identifications glue any meridian with itself, hence, any equivariant section of Q generates some section of the bundle. Clearly, for an equivariant section D of P , the simple disc $D \cup R_1 D \cup R_2 D \cup R_2 R_1 D$ is an equivariant section of Q ■

⁴⁸Standard arguments show that this number does not depend on the choice of the meridians b and b' and the equivariant sections D and D' .

6.5. Transversal Triangles. Let (B_1, B_2, B_3) be a transversal triangle of bisectors. By Lemma 6.3.1, we can assume that the triangle is oriented so that its angles are of the form $T_i = K_{i-1} \cap K_i$. We call such an orientation *counterclockwise*. By Corollary 3.10, the meridional identifications, first, along B_1 , then along B_2 , and, finally, along B_3 , induce some isometry I_1 in S_1 . We say that the triangle is *elliptic*, *parabolic*, *hyperbolic*, or *trivial* if I_1 is elliptic, parabolic, hyperbolic, or $I_1 = 1$. In the elliptic case, for any $s_1 \in S_1$, following the counterclockwise orientation of the triangle, we can draw a meridian b beginning with s_1 and ending with some $s'_1 \in S_1$. So, $I_1 s_1 = s'_1$. Let $s_1 \in \partial S_1$. Then $s'_1 \in \partial S_1$. Since ∂S_1 is a naturally oriented circle, following this orientation, from s'_1 to s_1 , we can draw in ∂S_1 an arc a , obtaining a closed oriented curve $c \doteq b \cup a \subset T$. We call this curve



standard. In the case of a hyperbolic triangle, there are two fixed points for I_1 in ∂S_1 . They divide ∂S_1 into two I_1 -invariant parts: the *R-part* where I_1 moves the points in counterclockwise sense and the *L-part* where I_1 moves the points in the clockwise sense. Let $s_1 \in \partial S_1$ be a point in the interior of the L-part. As above, we can draw a meridian b beginning with s_1 and ending with $s'_1 = I_1 s_1 \in \partial S_1$ which is also in the L-part. We can draw an arc c from s'_1 to s_1 in the counterclockwise sense. Clearly, $c \subset \partial S_1$ is included in the L-part. We call the closed oriented curve $c \doteq b \cup a \subset T$ *standard* as well. We notice that there are two closed meridians in T , both isotopic to a standard curve. For a parabolic I_1 , we distinguish *R-parabolic* and *L-parabolic* cases. Exactly one point in ∂S_1 is fixed for I_1 . The isometry I_1 moves all the other points in ∂S_1 in the same sense, counterclockwise for I_1 R-parabolic and clockwise for I_1 L-parabolic. As above, for an L-parabolic triangle, we define a *standard* curve. In T , this curve is isotopic to a closed meridian. In the case of an R-parabolic or trivial triangle, there is no standard curve.

We will also define *L-part* of ∂S_1 for the cases of I_1 elliptic, parabolic, or trivial. For elliptic I_1 , it is all the ∂S_1 . For L-parabolic I_1 , it is ∂S_1 minus the fixed point. For the other two cases, it is empty.

In order to be able to prove that some polyhedron P is fibred and to calculate the Euler number eP , we need the following

6.5.1. Theorem. *Let (B_1, B_2, B_3) be a transversal triangle of bisectors oriented in counterclockwise sense. Then the triangle cannot be trivial nor R-parabolic. The polyhedron P is fibred and its standard curve is trivializing. In particular, any closed meridian in T is trivializing if it exists.*

6.5.2. Lemma. *Theorem 6.5.1 holds for any triangle of bisectors with common complex spine.*

Proof. In fact, any triangle of bisectors with common complex spine S is generated by a usual triangle $\Delta_0 \doteq \Delta(c_1, c_2, c_3) \subset \check{S} \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. By our convention, Δ_0 is oriented in counterclockwise sense, therefore, $\text{Area } \Delta_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ (we remind that our metric in a complex geodesic is $\frac{1}{4}$ of the usual one). By Remark 3.5, by the considerations above Remark 3.5, and by Proposition 3.9, I_1 is a rotation about c_1 by the angle $-2 \text{Area } \Delta_0$. Hence, the angular measure of the arc a (with respect to the centre c_1) is $\ell(a) = 2 \text{Area } \Delta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. We can contract Δ_0 inside of Δ_0 . For instance, we can choose a point p in the interior of Δ_0 and define a triangle $\Delta_t \doteq \Delta(c_1(t), c_2(t), c_3(t))$, $t \in [0, 1]$, where $c_i(t) \in G[c_i, p]$, $c_i(0) = c_i$, and $c_i(1) = p$. We define $s_1(t)$ as obtained by the meridional displacement of s_1 along $B(c_1, c_1(t))$ and generate with $s_1(t)$ a curve $c_t \doteq b_t \cup a_t \subset T_t$. Considering the polyhedron P_t built over Δ_t , it is easy to see that $P_t \subset P_0$ and, hence, $\partial_1 P_t \subset \partial_1 P_0$. Since, by Corollary 3.7, the meridional displacement continuously depends on the choice of geodesics and $\ell(a_t) \rightarrow 0$, the result follows ■

6.5.3. Criterion. *Let $p_i \notin \bar{B}V$, $i = 1, 2, 3$, be such that $\langle p_i, p_j \rangle \neq 0$. We put $C_i \doteq \mathbb{C}P_{p_i}^\perp$, $t_{ij}^2 \doteq \text{ta}(p_i, p_j)$, $t_{ij} > 0$, $k \doteq \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle \langle p_3, p_3 \rangle}$, $\varepsilon \doteq \frac{k}{|k|}$, $\varepsilon_0 \doteq \text{Re } \varepsilon$, $\varepsilon_1 \doteq \text{Im } \varepsilon$, and $d \doteq$*

$t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 - 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0 - 1$. Suppose⁴⁹ that $1 < t_{12} \leq t_{23}, t_{31}$. Then $d \geq 0$, where the equality means that p_i 's are in the same projective line. The triangle $\Delta(C_1, C_2, C_3)$ is transversal if and only if $t_{12}^2\varepsilon_0^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 < 1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0$. The transversal triangle is oriented in counterclockwise sense if and only if $\varepsilon_1 < 0$.

Proof is a straightforward verification. We can assume that $\langle p_i, p_i \rangle = 1$, $\langle p_1, p_2 \rangle = t_{12}$, $\langle p_2, p_3 \rangle = t_{23}$, and $\langle p_3, p_1 \rangle = t_{31}\varepsilon$. Now, $G = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{31}\bar{\varepsilon} \\ t_{12} & 1 & t_{23} \\ t_{31}\varepsilon & t_{23} & 1 \end{pmatrix}$ is the Gram matrix for p_1, p_2, p_3 . The first assertion follows from $\det G = -d$ by the Sylvester Criterion.

By Corollary 4.3, the transversality of the bisectors along C_3 can be written as $\left| \operatorname{Re} \frac{t_{12}}{t_{31}\bar{\varepsilon}t_{23}} - 1 \right| < \frac{\sqrt{t_{23}^2 - 1}\sqrt{t_{31}^2 - 1}}{t_{23}t_{31}}$ which is equivalent to $t_{12}^2\varepsilon_0^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 < 1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0$. Similarly, the other two transversalities can be written as $t_{12}^2 + t_{23}^2\varepsilon_0^2 + t_{31}^2 < 1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0$ and as $t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2\varepsilon_0^2 < 1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0$. The last two inequalities follow from $t_{12}^2\varepsilon_0^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 < 1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0$, since $t_{12}^2 \leq t_{23}^2, t_{31}^2$ and $0 \leq 1 - \varepsilon_0^2$.

By Lemma 6.3.1 and by Corollary 4.3 (and its proof), it suffices to measure the constant angle from $B[q_1, v_1]$ to $B[q_2, v_2]$, where v_i stands for the vertex of $B[p_3, p_i]$ which is closer to C_i than to C_3 and $q_i \in C_3$ stands for the point in the real spine of $B[p_3, p_i]$, $i = 1, 2$. By Theorem 4.2 and by Lemma 4.1, the angle in question equals $\operatorname{Arg} \left(1 - \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_3, p_3 \rangle}{\langle p_1, p_3 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle} \right) = \operatorname{Arg} \left(1 - \frac{t_{12}\varepsilon}{t_{23}t_{31}} \right)$ with $\frac{t_{12}}{t_{23}t_{31}} > 0$ ■

6.5.4. Lemma. Let $p_i \notin \bar{B}V$, $i = 1, 2, 3$, be such that $\operatorname{ta}(p_i, p_j) > 1$ for $i \neq j$. Let $C_i, t_{ij}, k, \varepsilon, \varepsilon_0$, and d be defined as in Criterion 6.5.3. Denoting by $R_i \in \operatorname{SU}(2, 1)$ the reflection in the middle slice of the respective side of the triangle $\Delta(C_1, C_2, C_3)$, we obtain $\operatorname{tr}(R_3R_2R_1) = \varepsilon - (1 + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{d}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} \right)$ and $R_3R_2R_1p_1 = \varepsilon p_1$. For the isometry $I_1 \in \operatorname{SU}(1, 1)$ of the slice C_1 induced by $R_3R_2R_1$, we have $|\operatorname{tr} I_1| = \sqrt{2(1 + \varepsilon_0)} \left(1 + \frac{d}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} \right)$.

Proof is straightforward. In terms of the proof of Criterion 6.5.3, we put $m_1 \rightleftharpoons \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2(t_{12} + 1)}}$, $m_2 \rightleftharpoons \frac{p_2 + p_3}{\sqrt{2(t_{23} + 1)}}$, and $m_3 \rightleftharpoons \frac{\varepsilon p_1 + p_3}{\sqrt{2(t_{31} + 1)}}$. It is easy to verify that m_i is the polar point to the middle slice of the respective side of $\Delta(C_1, C_2, C_3)$ and that $\langle m_i, m_i \rangle = 1$. Hence, $R_i = \varphi_i - 1$, where $\varphi_i x \rightleftharpoons 2\langle x, m_i \rangle m_i$. Clearly, $R_1p_1 = p_2$, $R_2p_2 = p_3$, and $R_3p_3 = \varepsilon p_1$. Since $\varphi_j \varphi_i x = 4\langle x, m_i \rangle \langle m_i, m_j \rangle m_j$ and $\varphi_k \varphi_j \varphi_i x = 8\langle x, m_i \rangle \langle m_i, m_j \rangle \langle m_j, m_k \rangle m_k$, by considering the orthogonal decomposition $V = \mathbb{C}m_i + m_i^\perp$, we obtain $\operatorname{tr} \varphi_i = 2$, $\operatorname{tr}(\varphi_j \varphi_i) = 4\langle m_i, m_j \rangle \langle m_j, m_i \rangle$, and $\operatorname{tr}(\varphi_k \varphi_j \varphi_i) = 8\langle m_i, m_j \rangle \langle m_j, m_k \rangle \langle m_k, m_i \rangle$. It follows from $R_3R_2R_1 = \varphi_3\varphi_2\varphi_1 - \varphi_3\varphi_2 - \varphi_3\varphi_1 - \varphi_2\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 - 1$ that $\operatorname{tr}(R_3R_2R_1) = 8\langle m_1, m_2 \rangle \langle m_2, m_3 \rangle \langle m_3, m_1 \rangle - 4\langle m_2, m_3 \rangle \langle m_3, m_2 \rangle - 4\langle m_1, m_3 \rangle \langle m_3, m_1 \rangle - 4\langle m_1, m_2 \rangle \langle m_2, m_1 \rangle + 3$. With a straightforward calculation, we derive

$$\begin{aligned} \langle m_1, m_2 \rangle &= \frac{1 + t_{12} + t_{23} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{2\sqrt{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)}}, \quad \langle m_2, m_3 \rangle = \frac{1 + t_{23} + t_{31} + t_{12}\bar{\varepsilon}}{2\sqrt{(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}}, \quad \langle m_3, m_1 \rangle = \frac{\varepsilon + t_{31}\varepsilon + t_{12}\varepsilon + t_{23}}{2\sqrt{(t_{31} + 1)(t_{12} + 1)}}, \\ 8\langle m_1, m_2 \rangle \langle m_2, m_3 \rangle \langle m_3, m_1 \rangle &= \frac{(1 + t_{12} + t_{23} + t_{31}\bar{\varepsilon})(1 + t_{23} + t_{31} + t_{12}\bar{\varepsilon})(\varepsilon + t_{31}\varepsilon + t_{12}\varepsilon + t_{23})}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} = \\ &= 2 + \frac{(t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 - 1)(2 + t_{12} + t_{23} + t_{31}) + t_{12}t_{23}t_{31}(1 + \bar{\varepsilon}^2)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} + \end{aligned}$$

⁴⁹By Remark 2.3.3, this means that the C_i 's are pairwise ultraparallel.

$$\begin{aligned}
& + \frac{(t_{12}t_{23} + t_{23}t_{31} + t_{31}t_{12} + t_{12}^2t_{23} + t_{12}t_{23}^2 + t_{23}^2t_{31} + t_{23}t_{31}^2 + t_{31}^2t_{12} + t_{31}t_{12}^2)\bar{\varepsilon}}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} + \\
& + \frac{(1 + t_{12} + t_{23})(1 + t_{23} + t_{31})(1 + t_{31} + t_{12})\varepsilon}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} = \\
= 2 + & \frac{d(2 + t_{12} + t_{23} + t_{31}) + t_{12}t_{23}t_{31}(2 + t_{12} + t_{23} + t_{31})(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + t_{12}t_{23}t_{31}(1 + \bar{\varepsilon}^2)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} + \\
& + (t_{12} + t_{23} + t_{31})(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + \frac{(1 - t_{12}^2 - t_{23}^2 - t_{31}^2)\bar{\varepsilon} - t_{12}t_{23}t_{31}(2 + t_{12} + t_{23} + t_{31})(\varepsilon + \bar{\varepsilon})}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} = \\
& = 2 + 2(t_{12} + t_{23} + t_{31})\varepsilon_0 + \frac{d(t_{12} + t_{23} + t_{31} + 3)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} + \\
& + \frac{-d + t_{12}t_{23}t_{31}(1 + \bar{\varepsilon}^2) + (1 - t_{12}^2 - t_{23}^2 - t_{31}^2)\bar{\varepsilon}}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} = \\
= 2 + 2(t_{12} + t_{23} + t_{31})\varepsilon_0 + & \frac{d(t_{12} + t_{23} + t_{31} + 3)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} - \frac{d(1 + \bar{\varepsilon})}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}, \\
4\langle m_2, m_3 \rangle \langle m_3, m_2 \rangle - 1 = & \frac{(t_{12} + 1)((1 + t_{23} + t_{31})^2 + t_{12}^2 + 2t_{12}(1 + t_{23} + t_{31})\varepsilon_0)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} - 1 = \\
= & \frac{(t_{12} + 1)(t_{23} + t_{31} + t_{23}t_{31} + t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 + 2t_{12}(1 + t_{23} + t_{31})\varepsilon_0)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} = \\
= 1 + & \frac{(t_{12} + 1)(d + 2t_{12}(1 + t_{23} + t_{31} + t_{23}t_{31})\varepsilon_0)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} = 1 + 2t_{12}\varepsilon_0 + \frac{d(t_{12} + 1)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}, \\
4\langle m_1, m_3 \rangle \langle m_3, m_1 \rangle = 1 + 2t_{23}\varepsilon_0 + & \frac{d(t_{23} + 1)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}, \\
4\langle m_1, m_2 \rangle \langle m_2, m_1 \rangle = 1 + 2t_{31}\varepsilon_0 + & \frac{d(t_{31} + 1)}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}.
\end{aligned}$$

This implies that $\text{tr}(R_3R_2R_1) = \varepsilon - (1 + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{d}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}\right)$. Since $\det R_3R_2R_1 = 1$, $R_3R_2R_1p_1 = \varepsilon p_1$, and $C_1 = \mathbb{C}Pp_1^\perp$, we arrive at $\text{tr } I_1 = \pm(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\bar{\varepsilon}})\left(1 + \frac{d}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)}\right)$ ■

6.5.5. Lemma. *In terms of Lemma 6.5.4, let I_1 be parabolic or trivial, let $\varepsilon_1 < 0$, and let $t_{12}\varepsilon_0 > 1$. Then the triangle is L-parabolic.*

Proof. Let $q \in \partial C_1$ be a fixed point of $\varphi \doteq R_3R_2R_1$ and let $p \doteq p_1p_2$. It follows from $t_{12} > 1$ that $p \in BV \cap C_1$. We can assume that $\langle p, q \rangle = 1$. Since φ is parabolic or trivial on $\mathbb{C}p + \mathbb{C}q$, we have $\varphi(p) = up + uivq$ and $\varphi(q) = uq$ for some $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$. Since $\varphi \in \text{SU}(2, 1)$, $\langle p, q \rangle = 1$, and $\langle q, q \rangle = 0$, we obtain $1 = \langle p, q \rangle = \langle \varphi(p), \varphi(q) \rangle = |u|^2$ and $\langle p, p \rangle = \langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle = |u|^2(\langle p, p \rangle - i\bar{v} + iv) = \langle p, p \rangle - 2\text{Im } v$. Hence, $v \in \mathbb{R}$.

For $p' \doteq \langle p, p \rangle q - p$, we have $\langle p', p' \rangle = -\langle p, p \rangle$ and $\langle p, p' \rangle = 0$. Therefore, $p(z) \doteq zp' + p \in \overline{BV}$, $z \in \mathbb{C}$, if and only if $|z| \leq 1$. Clearly, $p(1) \simeq q$ (where \simeq means \mathbb{C} -proportionality). In terms of z ,

$$\varphi(p(z)) \simeq z\langle p, p \rangle q + (1 - z)(p + ivq) = \frac{z\langle p, p \rangle + (1 - z)iv}{\langle p, p \rangle} (\langle p, p \rangle q - p) + \frac{\langle p, p \rangle + (1 - z)iv}{\langle p, p \rangle} p \simeq p(z'),$$

where $z' \doteq \frac{z\langle p, p \rangle + (1 - z)iv}{\langle p, p \rangle + (1 - z)iv}$. (Since $|z| \leq 1$, we have $\langle p, p \rangle + (1 - z)iv \neq 0$.) In particular, $\varphi(p(-1)) \simeq p(z_0)$, where $z_0 \doteq \frac{2iv - \langle p, p \rangle}{2iv + \langle p, p \rangle}$ and $\text{Im } z_0 = \frac{4v\langle p, p \rangle}{|2iv + \langle p, p \rangle|^2}$. Thus, the triangle is L-parabolic (trivial) if and only if $v < 0$ ($v = 0$).

As is easy to see, $v = \frac{1}{i} \left(u^{-1} \langle \varphi(p), p \rangle - \langle p, p \rangle \right)$. So, we have $v = \text{Im} \left(u^{-1} \langle \varphi(p), p \rangle \right)$. By Lemma 6.5.4, $\varepsilon + 2u = \varepsilon - (1 + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{d}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} \right)$. Since $d \geq 0$, the triangle is L-parabolic (trivial) if and only if $\text{Im} \left((1 + \varepsilon) \langle \varphi(p), p \rangle \right) > 0$ ($= 0$).

Using the expressions for m_i 's obtained in the proof of Lemma 6.5.4, we have

$$R_1(x) = \langle x, p_1 + p_2 \rangle \frac{p_1 + p_2}{t_{12} + 1} - x, \quad R_2(x) = \langle x, p_2 + p_3 \rangle \frac{p_2 + p_3}{t_{23} + 1} - x, \quad R_3(x) = \langle x, \varepsilon p_1 + p_3 \rangle \frac{\varepsilon p_1 + p_3}{t_{31} + 1} - x.$$

Hence, $R_1(p_2) = p_1$, $R_2(p_1) = \frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (p_2 + p_3) - p_1$, and

$$\begin{aligned} \varphi(p_2) &= \left\langle \frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (p_2 + p_3) - p_1, \varepsilon p_1 + p_3 \right\rangle \frac{\varepsilon p_1 + p_3}{t_{31} + 1} - \frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (p_2 + p_3) + p_1 = \\ &= \left(\frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (t_{12}\bar{\varepsilon} + t_{23} + t_{31} + 1) - \bar{\varepsilon} - t_{31}\bar{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon p_1 + p_3}{t_{31} + 1} - \frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (p_2 + p_3) + p_1 = \\ &= \frac{(t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon})(t_{12}\bar{\varepsilon} + t_{31}) + (t_{23} + 1)(t_{12} - \bar{\varepsilon})}{(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} (\varepsilon p_1 + p_3) - \frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (p_2 + p_3) + p_1. \end{aligned}$$

Since $p = p_2 - t_{12}p_1 \in p_1^\perp$ and $\varphi(p_1) = \varepsilon p_1$, we obtain

$$\begin{aligned} (t_{23} + 1)(t_{31} + 1) \langle \varphi(p), p \rangle &= (t_{23} + 1)(t_{31} + 1) \langle \varphi(p_2), p_2 - t_{12}p_1 \rangle = \\ &= (t_{23} + 1)(t_{31} + 1) \left\langle \frac{(t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon})(t_{12}\bar{\varepsilon} + t_{31}) + (t_{23} + 1)(t_{12} - \bar{\varepsilon})}{(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} p_3 - \frac{t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon}}{t_{23} + 1} (p_2 + p_3), p_2 - t_{12}p_1 \right\rangle = \\ &= (t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon})(t_{12}\bar{\varepsilon} + t_{31})(t_{23} - t_{12}t_{31}\varepsilon) + (t_{23} + 1)(t_{12} - \bar{\varepsilon})(t_{23} - t_{12}t_{31}\varepsilon) - \\ &\quad - (t_{12} + t_{31}\bar{\varepsilon})(t_{31} + 1)(1 - t_{12}^2 + t_{23} - t_{12}t_{31}\varepsilon) = \\ &= t_{12}t_{23}t_{31}\bar{\varepsilon}^2 + (t_{12}^2t_{23} + t_{12}^2t_{31} - t_{23}^2 - t_{23}t_{31} - t_{31}^2 - t_{23} - t_{31})\bar{\varepsilon} + \\ &\quad + t_{12}^3 + t_{12}t_{23}^2 + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{12}t_{31}^2 - t_{12} - t_{12}^2t_{23}t_{31}\varepsilon. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} (t_{23} + 1)(t_{31} + 1)(1 + \varepsilon) \langle \varphi(p), p \rangle &= t_{12}t_{23}t_{31}\bar{\varepsilon}^2 + (t_{12}^2t_{23} + t_{12}^2t_{31} + t_{12}t_{23}t_{31} - t_{23}^2 - t_{23}t_{31} - t_{31}^2 - \\ &\quad - t_{23} - t_{31})\bar{\varepsilon} + t_{12}^3 + t_{12}^2t_{23} + t_{12}^2t_{31} + t_{12}t_{23}^2 + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{12}t_{31}^2 - t_{23}^2 - t_{23}t_{31} - t_{31}^2 - t_{12} - t_{23} - t_{31} + \\ &\quad + (t_{12}^3 + t_{12}t_{23}^2 + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{12}t_{31}^2 - t_{12} - t_{12}^2t_{23}t_{31})\varepsilon - t_{12}^2t_{23}t_{31}\varepsilon^2 \end{aligned}$$

and, since $\text{Im} \varepsilon^2 = 2\varepsilon_0\varepsilon_1$,

$$\begin{aligned} &\text{Im} \left((t_{23} + 1)(t_{31} + 1)(1 + \varepsilon) \langle \varphi(p), p \rangle \right) = \\ &= (t_{12} + 1)\varepsilon_1 (t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 - 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0 - 1 - (t_{12} - 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)) = \\ &= (t_{12} + 1)\varepsilon_1 (d - (t_{12} - 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)). \end{aligned}$$

By Lemma 6.5.4, $\sqrt{2(1 + \varepsilon_0)} \left(1 + \frac{d}{(t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1)} \right) = 2$, implying that

$$d = \left(\frac{2}{\sqrt{2(1 + \varepsilon_0)}} - 1 \right) (t_{12} + 1)(t_{23} + 1)(t_{31} + 1).$$

We conclude that the triangle is L-parabolic (trivial) if and only if $\varepsilon_1 \left(\frac{t_{12} + 1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon_0)}} - t_{12} \right) > 0$ ($= 0$).

This follows from $\varepsilon_1 < 0$, $t_{12}\varepsilon_0 > 1$, and $t_{12} > 1$ ■

6.5.6. Lemma. *The inequalities*

$$(6.5.7) \quad 1 < t_1 \leq t_2 \leq t_3, \quad t_1^2 e^2 + t_2^2 + t_3^2 < 2t_1 t_2 t_3 e + 1 \leq t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

imply the inequalities $t_1e > 1 > e > 0$. Every point in the region Z of \mathbb{R}^4 given by the inequalities (6.5.7) is path-connected with the part of Z given by the equality $2t_1t_2t_3e + 1 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

Proof. Clearly, the inequalities (6.5.7) imply $e^2 < 1$ and, hence, $t_1e < t_2t_3$. Now, the inequality $t_1^2e^2 + t_2^2 + t_3^2 < 2t_1t_2t_3e + 1$ can be rewritten as $(t_1e - t_2t_3)^2 < (t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1)$ and thus is equivalent to the inequalities $t_2t_3 - \sqrt{(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1)} < t_1e \leq t_2t_3$. It follows from $t_2t_3 > 1$ that $1 \leq t_2t_3 - \sqrt{(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1)}$ which implies that $t_1e > 1$ and, hence, $1 > e > 0$.

Dealing with the inequalities

$$(6.5.8) \quad 1 < t_1 \leq t_2 \leq t_3, \quad t_2t_3 - \sqrt{(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1)} < t_1e \leq t_2t_3, \quad 2t_1t_2t_3e + 1 \leq t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

equivalent to (6.5.7), we will increase t_1 . Our inequalities imply that $t_1e > 1$. Consequently, $t_2 < t_2t_3e$, which means that the function $f(x) = x^2 + t_2^2 + t_3^2 - 2xt_2t_3e - 1$ is decreasing for $x \in [t_1, t_2]$. Increasing t_1 and preserving the inequalities (6.5.8), we can reach a position where either $t_1 = t_2$ or $f(t_1) = 0$. The latter means that $2t_1t_2t_3e + 1 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

In the first case, our inequalities are $1 < t_1 = t_2 \leq t_3$ and $2t_1^2(t_3e - 1) \leq t_3^2 - 1 < t_1^2(2t_3e - e^2 - 1)$. As we know, they imply that $t_1e > 1 > e > 0$. It follows that $t_3e - 1 > 0$ and $2t_3e - e^2 - 1 > 0$. Now, we will increase $t_1 = t_2$ preserving our inequalities. We will come to a position where either $t_1 = t_2 = t_3$ or $2t_1^2(t_3e - 1) = t_3^2 - 1$. The latter means that $2t_1t_2t_3e + 1 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

For the case $t_1 = t_2 = t_3$, our inequalities are $1 < t_1 = t_2 = t_3$, $(t_1^2 - t_1e)^2 < (t_1^2 - 1)^2$, and $e \leq \frac{3t_1^2 - 1}{2t_1^3}$ and they imply $t_1 > e > 0$. Therefore, they are equivalent to $1 < t_1 = t_2 = t_3 > e > 0$ and $1 < t_1e \leq \frac{3t_1^2 - 1}{2t_1^2}$. It follows from $\frac{3t_1^2 - 1}{2t_1^3} < t_1$ that, preserving our inequalities, we can increase e until $e = \frac{3t_1^2 - 1}{2t_1^3}$. Again, $2t_1t_2t_3e + 1 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ ■

Proof of Theorem 6.5.1. For given numbers $t_{12}, t_{23}, t_{31}, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ satisfying the inequalities $1 < t_{12} \leq t_{23}, t_{31}$ and $t_{12}^2\varepsilon_0^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 < 1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0 \leq t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2$, by the Sylvester Criterion, by Criterion 6.5.3, and by Lemma 6.5.6, there always exists a transversal triangle of bisectors oriented in counterclockwise sense with the invariants $t_{12}, t_{23}, t_{31}, \varepsilon = \varepsilon_0 - i\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}$ (this triangle is geometrically unique) and vice versa: these invariants of an arbitrary transversal triangle of bisectors oriented in counterclockwise sense (with a suitable choice of t_{12}) satisfy the above inequalities. Moreover, the equality $1 + 2t_{12}t_{23}t_{31}\varepsilon_0 = t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2$ means that the triangle is one of those we dealt with in Lemma 6.5.2. By Lemmas 6.5.6 and 6.5.5, the triangle cannot be trivial nor R-parabolic. Therefore, it possesses a standard curve.

It is easy to see that, when continuously varying the parameters $t_{12}, t_{23}, t_{31}, \varepsilon_0$ and preserving the above inequalities, we can continuously change the corresponding triangle. Moreover, by Lemmas 6.5.5 and 6.5.6, we can supply each triangle with some standard curve that will vary continuously during the deformation. In other words, we obtain a continuous deformation of a simple torus $T \subset \partial BV$ equipped with a simple curve. By Lemmas 6.5.6 and 6.5.2, we can assume that, for the final torus, its standard curve is contractible in $\partial_1 P$. By standard topological arguments, the initial polyhedron $\partial_1 P$ is a solid torus and its standard curve is contractible.

One can detail the above deformation in more explicit terms. For p_1, p_2 , and p_3 of an initially given triangle, we will assume that $\langle p_i, p_i \rangle = 1$, $\langle p_1, p_2 \rangle = t_{12}$, $\langle p_2, p_3 \rangle = t_{23}$, and $\langle p_3, p_1 \rangle = t_{31}\varepsilon$. We put $u = \frac{(\sqrt{t_{12}^2 - 1} - t_{12})p_1 + p_2}{\sqrt{t_{12}^2 - 1}}$. It is easy to see that $\langle u, u \rangle = 0$, $\langle p_1, u \rangle = 1$, and $p_2 = (\sqrt{t_{12}^2 - 1})p_1 + \sqrt{t_{12}^2 - 1}u$. We choose $p \in V$ such that $\langle p, p_1 \rangle = 0$, $\langle p, u \rangle = 0$, and $\langle p, p \rangle = 1$. It follows

from $\langle p_2, p_3 \rangle = t_{23}$ and $\langle p_3, p_1 \rangle = t_{31}\varepsilon$ that $p_3 = \left(t_{31}\varepsilon + \frac{t_{23} - t_{12}t_{31}\varepsilon}{\sqrt{t_{12}^2 - 1}} \right) p_1 + \frac{t_{12}t_{31}\varepsilon - t_{23}}{\sqrt{t_{12}^2 - 1}} u + rp$ for some $r \in \mathbb{C}$. We can take a representative for p so that $r \geq 0$ and $\langle p, p \rangle = 1$. During the deformation, p_1 , u , and p will be fixed.

For given parameters e, t_1, t_2, t_3 satisfying inequalities (6.5.7), we define $\varepsilon' \doteq e - i\sqrt{1 - e^2}$, $p'_1 \doteq p_1$, $p'_2 \doteq (t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1})p_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}u$, and $p'_3 \doteq \left(t_3\varepsilon + \frac{t_2 - t_1t_3\varepsilon'}{\sqrt{t_1^2 - 1}} \right) p_1 + \frac{t_1t_3\varepsilon' - t_2}{\sqrt{t_1^2 - 1}} u + r'p$, where $r' \geq 0$ can be determined from the equality $\langle p'_3, p'_3 \rangle = 1$. The existence of such an r' is guaranteed by the inequality $2t_1t_2t_3e + 1 \leq t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$. While varying t_1, t_2, t_3, e subject to inequalities (6.5.7), the triangle determined by p'_1, p'_2 , and p'_3 changes continuously. So do the isometry I_1 of C_1 , the nonordered pair of its fixed points, and the L-part of ∂C_1 (nonempty by Lemmas 6.5.5 and 6.5.6). In order to define a standard curve continuously varying during the deformation, due to Corollary 3.7, we only need to choose the initial point $s_1 \in \partial C_1$ of a standard curve varying continuously during the deformation. In the initial triangle, we choose s_1 in the interior of the L-part. All we need to be careful with is to avoid s_1 being a fixed point of I_1 during the deformation. Then it will automatically be in the interior of the L-part during all the deformation ■

7. Examples

7.1. Basic Examples. In this section, we will construct an explicit series of discrete groups with defining relations $U^n = V^n = (V^{-1}U)^2 = 1$. Taking a subgroup of index $4n$ (or of index $2n$ if n is even), we will arrive at a disc bundle over a closed orientable surface of genus $n - 3$ ($\frac{n}{2} - 1$, respectively).

From now on, all isometries will ‘live’ in $SU(2, 1)$. We will look for two rotations $U, V \in SU(2, 1)$ such that $V^{-1}U = R$ is a reflection in a projective line of signature $+-$, assuming that each rotation has pairwise different eigenvalues. In order to diminish the number of conditions, we will explore the symmetry of interchanging U and V .

In some orthonormal basis, $V = \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^2 \end{pmatrix}$, where $|v_i| = 1$ and $v_1v_2v_3 = 1$. We denote by u_1^2, u_2^2, u_3^2 the eigenvalues of U subject to $|u_i| = 1$ and $u_1u_2u_3 = 1$. Let q_i denote the eigenvector of V corresponding to v_i^2 and s_i , the eigenvector of U corresponding to u_i^2 . We will assume that $q_1 \in BV$. So, we require

$$q_1 \in BV, \quad |u_i| = |v_i| = u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3 = 1, \quad u_1^2 \neq u_2^2 \neq u_3^2 \neq u_1^2, \quad v_1^2 \neq v_2^2 \neq v_3^2 \neq v_1^2. \quad (1)$$

The reflection $R(m) = V^{-1}U$ is given by some $m \notin \overline{BV}$, $\langle m, m \rangle = 1$. Multiplying, if needed, the elements of the orthonormal basis for V by unitary complex numbers, we can assume that the coordinates of m are real nonnegative: $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$, $m_i \geq 0$, and $m_1^2 = m_2^2 + m_3^2 - 1$. As is easy to see, $R(m) = \begin{pmatrix} -2m_1^2 - 1 & 2m_1m_2 & 2m_1m_3 \\ -2m_1m_2 & 2m_2^2 - 1 & 2m_2m_3 \\ -2m_1m_3 & 2m_2m_3 & 2m_3^2 - 1 \end{pmatrix}$ in the basis $q_1, q_2, q_3 \in V$. By [Gol, Theorem 6.2.4, p. 204],⁵⁰ the condition that $VR(m)$ is a rotation with eigenvalues u_1^2, u_2^2, u_3^2 is equivalent to the equality $\text{tr}(VR(m)) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, i.e., to the equality $(v_2^2 - v_1^2)m_2^2 + (v_3^2 - v_1^2)m_3^2 = w - v_1^2$, where $w \doteq \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2}$.

Since the v_i^2 's are pairwise distinct, the equation $(v_2^2 - v_1^2)y_2 + (v_3^2 - v_1^2)y_3 = w - v_1^2$ in y_2 and y_3 has a unique real solution (y_2 or y_3 can however be negative). Let us verify that $y_2 \doteq \frac{\text{Re}(v_2(v_1^2 - w))}{\text{Re}(v_2(v_1^2 - v_2^2))}$ and

$$y_3 \doteq \frac{\text{Re}(v_3(v_1^2 - w))}{\text{Re}(v_3(v_1^2 - v_3^2))}$$

⁵⁰The curve in [Gol, p. 205] is a deltoid.

$$y_2 = \frac{v_2(w - v_1^2) + \bar{v}_2(\bar{w} - \bar{v}_1^2)}{v_2(v_2^2 - v_1^2) + \bar{v}_2(\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2)} = \frac{(v_2^2(w - v_1^2) + (\bar{w} - \bar{v}_1^2)v_1^2v_2^2)}{v_1^2v_2^4(v_2^2 - v_1^2) + (v_1^2 - v_2^2)} = \frac{v_1^2v_2^4(w - v_1^2) + v_1^2v_2^2(\bar{w} - \bar{v}_1^2)}{(v_1^2v_2^4 - 1)(v_2^2 - v_1^2)}.$$

Similarly, $y_3 = \frac{v_1^2v_3^4(w - v_1^2) + v_1^2v_3^2(\bar{w} - \bar{v}_1^2)}{(v_1^2v_3^4 - 1)(v_3^2 - v_1^2)}$. Since $v_1v_2v_3 = 1$ implies $\frac{v_1^2v_2^2}{v_1^2v_2^4 - 1} + \frac{v_1^2v_3^2}{v_1^2v_3^4 - 1} = 0$ and $\frac{v_1^2v_2^4}{v_1^2v_2^4 - 1} + \frac{v_1^2v_3^4}{v_1^2v_3^4 - 1} = 1$, we obtain $(v_2^2 - v_1^2)y_2 + (v_3^2 - v_1^2)y_3 = w - v_1^2$.

We require

$$\operatorname{Re}(v_2w) < \operatorname{Re}v_2^3 < \operatorname{Re}(v_2v_1^2), \quad \operatorname{Re}v_3^3 < \operatorname{Re}(v_3v_1^2) \geq \operatorname{Re}(v_3w). \quad (2)$$

It follows from (2) that $y_2 > 1$ and $y_3 \geq 0$. Hence, conditions (1–2) guarantee the existence and the uniqueness of $m \notin \bar{B}V$ and U such that $VR(m) = U$. Moreover, by (2), $\operatorname{ta}(m, q_2) > 1$ and $\langle m, m \rangle = 1$ for $m_1, m_2, m_3 \geq 0$ given by

$$m_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(v_2(v_1^2 - w))}{\operatorname{Re}(v_2(v_1^2 - v_2^2))}}, \quad m_3 = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(v_3(v_1^2 - w))}{\operatorname{Re}(v_3(v_1^2 - v_3^2))}}, \quad m_1 = \sqrt{m_2^2 + m_3^2 - 1}.$$

For the reason of symmetry between U and V , we will also require

$$\operatorname{Re}(u_2w) < \operatorname{Re}u_2^3 < \operatorname{Re}(u_2u_1^2), \quad \operatorname{Re}u_3^3 < \operatorname{Re}(u_3u_1^2). \quad (3)$$

Since $V^{-1}U = R(m)$ implies $U^{-1}V = R(m)$, assuming that $s_1 \in BV$, we deduce from (1–3) that $\operatorname{ta}(m, s_2) > 1$ and that $\operatorname{Re}(u_3u_1^2) \geq \operatorname{Re}(u_3w)$. Consequently, conditions (1–3) are symmetric under the assumption that $s_1 \in BV$.

We require the conditions

$$u_1^2 + v_3^2 \neq 0, \quad m_2^2 \frac{\operatorname{Re}(u_1^{-2}(v_2^2 - v_1^2))}{1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2}v_2^2)} + m_3^2 \frac{\operatorname{Re}(u_1^{-2}(v_3^2 - v_1^2))}{1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2}v_3^2)} \geq 1. \quad (4)$$

7.1.1. Lemma. *If $u_i^2 + v_j^2 \neq 0$ for some i and for all j , then $s_i = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{u_i^2 v_1^{-2} + 1} \\ \frac{m_2}{u_i^2 v_2^{-2} + 1} \\ \frac{m_3}{u_i^2 v_3^{-2} + 1} \end{pmatrix}$. The point s_1 belongs*

to BV . If $u_i^2 + v_j^2 = 0$ for some i and j , then either $i = j = 1$, $m_1 = 0$, and $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or $i = j = 3$, $m_3 = 0$, and $s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proof. Until some moment, we will not use conditions (4). Let $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0$. We fix some $i = 1, 2, 3$. The condition that x is the eigenvector of $VR(m)$ corresponding to u_i^2 is given by the equalities $2v_j^2m_jf(x) = (u_i^2 + v_j^2)x_j$, $j = 1, 2, 3$, where $f(x) = -m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$. Thus, if $u_i^2 + v_j^2 \neq 0$ for all j , then $f(x) \neq 0$ and we can take $x_j = \frac{m_j}{u_i^2 v_j^{-2} + 1}$, $j = 1, 2, 3$.

If $u_i^2 + v_j^2 = 0$ for some j and $f(x) \neq 0$, then $m_j = 0$, $f(x)$ does not depend on x_j , and we can arbitrarily choose x_j , keeping x an eigenvector of U . Would x_k be different from 0 for some $k \neq j$, we could obtain too many eigenvectors corresponding to u_i^2 . The eigenvalues of U are pairwise different. Hence, $x_k = 0$ for any $k \neq j$, implying $f(x) = 0$, a contradiction. Therefore, $u_i^2 + v_j^2 = 0$ implies $f(x) = 0$. In this case, $u_i^2 + v_k^2 \neq 0$ for any $k \neq j$. Also, we have $x_k = 0$ for any $k \neq j$ and $x_j \neq 0$. Now, $f(x) = 0$ implies $m_j = 0$. In other words, $u_i^2 + v_j^2 = 0$ implies $s_i = q_j$ and $m_j = 0$. Since, by (2), $m_2 > 1$, this can only happen for $j = 1, 3$.

Now, with the use of conditions (4), we will prove that $s_1 \in BV$. Suppose that $u_1^2 + v_j^2 = 0$ for some j . It follows from (4) that $j \neq 3$. Hence, $j = 1$ and $s_1 = q_1 \in BV$. So, we can assume that

$u_1^2 + v_j^2 \neq 0$ for all j and take $s_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{m_1}{u_1^2 v_1^{-2} + 1} \\ \frac{m_2}{u_1^2 v_2^{-2} + 1} \\ \frac{m_3}{u_1^2 v_3^{-2} + 1} \end{array} \right)$. The condition that $s_1 \in BV$ (it suffices to prove only

that $s_1 \in \overline{BV}$) has the form $-\frac{m_1^2}{|u_1^2 v_1^{-2} + 1|^2} + \frac{m_2^2}{|u_1^2 v_2^{-2} + 1|^2} + \frac{m_3^2}{|u_1^2 v_3^{-2} + 1|^2} \leq 0$. In view of the equalities $m_1^2 = m_2^2 + m_3^2 - 1$ and $|u_1^2 v_k^{-2} + 1|^2 = 2(1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2} v_k^2))$ for $k = 1, 2, 3$, the last inequality is equivalent to $m_2^2 \frac{\operatorname{Re}(u_1^{-2}(v_2^2 - v_1^2))}{1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2} v_2^2)} + m_3^2 \frac{\operatorname{Re}(u_1^{-2}(v_3^2 - v_1^2))}{1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2} v_3^2)} \geq 1$.

The conditions symmetric to (1–3) follows from (1–4), since the latter imply $s_1 \in BV$. We derived from (1–3) that the equality $u_i^2 + v_j^2 = 0$ implies $s_i = q_j$ and $j \neq 2$. By symmetry, it implies $i \neq 2$. Since q_k or s_k belong to BV only for $k = 1$, the proof is complete ■

We claim that conditions (1–4) are symmetric (in particular, they imply that $u_2^2 + v_j^2 \neq 0$ for $j = 1, 2, 3$). Indeed, by Lemma 7.1.1, $v_1^2 + u_3^2 \neq 0$. In the proof of Lemma 7.1.1, we deduced the conditions symmetric to (1–3). The second inequality in (4) expresses the fact that $s_1 \in BV$ in the case of $u_1^2 + v_j^2 \neq 0$ for all j . By Lemma 7.1.1, the symmetric inequality is valid unless $u_1^2 + v_1^2 = 0$. If $u_1^2 + v_1^2 = 0$, then $m_1 = 0$, i.e., $m_2^2 + m_3^2 = 1$, and the last inequality in (4) is automatically valid.

By (2–3) and by Remark 2.3.3, $M_1 \rightleftharpoons \mathbb{C}Pm^\perp$ is ultraparallel to $C \rightleftharpoons \mathbb{C}Pq_2^\perp$ and M_1 is ultraparallel to $S_2 \rightleftharpoons \mathbb{C}Ps_2^\perp$. It follows from $R(m)M_1 = M_1$, $VC = C$, and $US_2 = S_2$ that

$$M_2 \rightleftharpoons VM_1 = UM_1$$

is ultraparallel to C and to S_2 . Clearly, $\operatorname{ta}(C, M_1) = \operatorname{ta}(C, M_2) = m_2^2$ and $\operatorname{ta}(S_2, M_1) = \operatorname{ta}(S_2, M_2)$.

We require

$$\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}) > 1, \quad \operatorname{Re}(u_2^2 \bar{w}) > 1. \quad (5)$$

Since $\langle Vm, m \rangle = -v_1^2 m_1^2 + v_2^2 m_2^2 + v_3^2 m_3^2 = v_1^2 + (v_2^2 - v_1^2)m_2^2 + (v_3^2 - v_1^2)m_3^2 = w$, the inequality $|w| > 1$, implied by (5), means that M_1 and M_2 are ultraparallel. We have $\langle q_2, m \rangle \langle m, Vm \rangle \langle Vm, q_2 \rangle = m_2 \bar{w} v_2^2 m_2$, hence, $\varepsilon = \frac{v_2^2 \bar{w}}{|w|}$. By Criterion 6.5.3 and its proof, the triangle $\Delta(C, M_1, M_2)$ is transversal

if $(\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}))^2 + 2m_2^2 < 1 + 2m_2^2 \operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w})$ and $\frac{m_2^2 (\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}))^2}{|w|^2} + m_2^2 + |w|^2 < 1 + 2m_2^2 \operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w})$. We will show that the second inequality implies the first one. Indeed, the first inequality is equivalent to $(\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}) + 1)(\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}) - 1) < 2m_2^2(\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}) - 1)$, i.e., to $\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}) + 1 < 2m_2^2$. The function $\frac{m_2^2 x^2}{|w|^2} + m_2^2 + |w|^2 - 1 - 2m_2^2 x$ is decreasing in x while $x < |w|^2$. Hence, substituting $\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w})$ by $|w|$ in the second inequality, we obtain $(|w| + 1)(|w| - 1) < 2m_2^2(|w| - 1)$. Therefore, $|w| + 1 < 2m_2^2$, which implies $\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w}) + 1 < 2m_2^2$.

The second inequality can be written as $\left(|w| - \frac{\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w})}{|w|}\right)^2 m_2^2 < (|w|^2 - 1)(m_2^2 - 1)$. We require

$$\left(|w| - \frac{\operatorname{Re}(v_2^2 \bar{w})}{|w|}\right)^2 \operatorname{Re}(v_2(v_1^2 - w)) < (|w|^2 - 1) \operatorname{Re}(v_2(v_2^2 - w)), \quad (6)$$

$$\left(|w| - \frac{\operatorname{Re}(u_2^2 \bar{w})}{|w|}\right)^2 \operatorname{Re}(u_2(u_1^2 - w)) < (|w|^2 - 1) \operatorname{Re}(u_2(u_2^2 - w)), \quad (7)$$

which imply that the triangles $\Delta(C, M_1, M_2)$ and $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ are transversal.

We will prove that the bisectors $B\langle m, s_2 \rangle$ and $B\langle m, q_2 \rangle$ are transversal along their common slice M_1 . By Lemma 7.1.1, we obtain

$$\frac{\langle s_2, q_2 \rangle \langle m, m \rangle}{\langle s_2, m \rangle \langle m, q_2 \rangle} = \frac{m_2}{(u_2^2 v_2^{-2} + 1) \left(-\frac{m_1^2}{u_2^2 v_1^{-2} + 1} + \frac{m_2^2}{u_2^2 v_2^{-2} + 1} + \frac{m_3^2}{u_2^2 v_3^{-2} + 1} \right) m_2} =$$

[since $m_1^2 = m_2^2 + m_3^2 - 1$]

$$= \frac{(u_2^2 v_1^{-2} + 1)(u_2^2 v_3^{-2} + 1)}{(u_2^2 v_2^{-2} + 1)(u_2^2 v_3^{-2} + 1) + m_2^2 u_2^2 (v_1^{-2} - v_2^{-2})(u_2^2 v_3^{-2} + 1) + m_3^2 u_2^2 (v_1^{-2} - v_3^{-2})(u_2^2 v_2^{-2} + 1)} =$$

[since $m_2^2(v_1^{-2} - v_2^{-2})v_3^{-2} + m_3^2(v_1^{-2} - v_3^{-2})v_2^{-2} = m_2^2(v_2^2 - v_1^2)v_1^{-2}v_2^{-2}v_3^{-2} + m_3^2(v_3^2 - v_1^2)v_1^{-2}v_3^{-2}v_2^{-2}$,
 $m_2^2(v_1^{-2} - v_2^{-2}) + m_3^2(v_1^{-2} - v_3^{-2}) = m_2^2(\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2) + m_3^2(\bar{v}_1^2 - \bar{v}_3^2)$, $v_1 v_2 v_3 = u_1 u_2 u_3 = 1$, and
 $m_2^2(v_2^2 - v_1^2) + m_3^2(v_3^2 - v_1^2) = w - v_1^2$]

$$= \frac{u_2^2(\bar{u}_2^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_3^2) + u_2^4 v_2^2}{u_2^2(\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2) + u_2^4 v_1^2 + u_2^4(w - v_1^2) - u_2^2(\bar{w} - \bar{v}_1^2)} = \frac{\bar{u}_2(\bar{u}_2^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_3^2) + u_2 v_2^2}{u_2 w + \bar{u}_2(\bar{u}_2^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2 - \bar{w})} =$$

[since $\bar{u}_2^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2 - \bar{w} = \bar{w} - \bar{u}_1^2 - \bar{u}_3^2$]

$$= \frac{\bar{u}_2(\bar{u}_2^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_3^2) + u_2 v_2^2}{u_2 w + \bar{u}_2 \bar{w} - (\bar{u}_1^2 \bar{u}_2 + \bar{u}_2 \bar{u}_3^2)} = \frac{\bar{u}_2(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_3^2 - \bar{w}) + u_2(v_2^2 - w)}{u_2 w + \bar{u}_2 \bar{w} - (u_2 u_3^2 + \bar{u}_2 \bar{u}_3^2)} + 1 =$$

[since $\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{v}_3^2 - \bar{w} = \bar{w} - \bar{v}_2^2$]

$$= \frac{u_2(v_2^2 - w) - \bar{u}_2(\bar{v}_2^2 - \bar{w})}{u_2 w + \bar{u}_2 \bar{w} - (u_2 u_3^2 + \bar{u}_2 \bar{u}_3^2)} + 1 \in 1 + i\mathbb{R}.$$

By Corollary 4.3, $B\langle m, s_2 \rangle$ and $B\langle m, q_2 \rangle$ are transversal along M_1 . This implies that $B\langle Um, s_2 \rangle = B\langle Vm, s_2 \rangle$ and $B\langle Vm, q_2 \rangle$ are transversal along M_2 .

Let $n \geq 3$. By Theorem 4.2 and Lemma 4.1, the angle of the triangle $\Delta(C, M_1, M_2)$ at $q_1 \in C$ equals $\text{Arg} \frac{\langle m, q_1 \rangle \langle q_1, Vm \rangle}{\langle m, q_2 \rangle \langle q_2, Vm \rangle} = \text{Arg} \frac{(-m_1)(-\bar{v}_1^2 m_1)}{m_2 \bar{v}_2^2 m_2} = \text{Arg}(v_2^2 v_1^{-2})$. By symmetry, the angle of the triangle $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ at $s_1 \in S_2$ equals $\text{Arg}(u_1^2 u_2^{-2})$. We require

$$u_1^2 u_2^{-2} = v_2^2 v_1^{-2} = \exp \frac{2\pi i}{n}, \quad u_1^{6n} = v_1^{6n} = 1. \quad (8)$$

Conditions (1) and (8) imply that both the angle of $\Delta(C, M_1, M_2)$ at $q_1 \in C$ and the angle of $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ at $s_1 \in S_2$ equal $\frac{2\pi}{n}$ and that $U^n = V^n = 1$ in $\text{PU}(2, 1)$. By Lemma 6.3.1, the triangles $\Delta(C, M_1, M_2)$ and $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ are oriented in counterclockwise sense.

We require

$$\text{Re}(u_1^{-1} v_1) \cdot \text{Re}(u_1^{-1} v_2) \cdot \text{Re}(u_1^{-1} v_3) \cdot \text{Im} \left(u_1^{-1} v_2^2 ((2m_2^2 - 1)(u_1^2 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) + u_2^2 + u_3^2) \right) \geq 0. \quad (9)$$

Let us verify that $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ suits $\Delta(C, M_1, M_2)$. We have already proven that $B\langle m, s_2 \rangle$ and $B\langle m, q_2 \rangle$ are transversal along M_1 and that $B\langle Vm, s_2 \rangle$ and $B\langle Vm, q_2 \rangle$ are transversal along M_2 . So, by Lemma 2.3.1, it suffices to verify the inequalities $\text{Im} \frac{\langle q_2, s_1 \rangle \langle s_1, m \rangle}{\langle q_2, m \rangle} \geq 0$ and $\text{Im} \frac{\langle Vm, s_1 \rangle \langle s_1, q_2 \rangle}{\langle Vm, q_2 \rangle} \geq 0$.

Since the case of $u_1^2 + v_1^2 = 0$ is trivial, we can assume that $s_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{u_1^2 v_1^{-2} + 1} \\ \frac{m_2}{u_1^2 v_2^{-2} + 1} \\ \frac{m_3}{u_1^2 v_3^{-2} + 1} \end{pmatrix}$. As is easy to see, each inequality is equivalent to the inequality

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{u_1^2 + v_2^2} \left(-\frac{m_1^2}{u_1^{-2} + v_1^{-2}} + \frac{m_2^2}{u_1^{-2} + v_2^{-2}} + \frac{m_3^2}{u_1^{-2} + v_3^{-2}} \right) \right) \geq 0,$$

i.e., to the inequality $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{u_1^2 + v_2^2} \left(\frac{1 - m_2^2}{u_1^{-2} + v_1^{-2}} + \frac{m_3^2(v_1^{-2} - v_3^{-2})}{(u_1^{-2} + v_1^{-2})(u_1^{-2} + v_3^{-2})} \right) \right) \geq 0$. This inequality can be rewritten as $\operatorname{Im} \frac{u_1^{-1}v_2^{-1}u_1v_1u_1v_3((1 - m_2^2)(u_1^{-2} + v_3^{-2}) + m_3^2(v_1^{-2} - v_3^{-2}))}{(u_1v_2^{-1} + u_1^{-1}v_2)(u_1^{-1}v_1 + u_1v_1^{-1})(u_1^{-1}v_3 + u_1v_3^{-1})} \geq 0$ which is equivalent to $\operatorname{Re}(u_1^{-1}v_1) \cdot \operatorname{Re}(u_1^{-1}v_2) \cdot \operatorname{Re}(u_1^{-1}v_3) \cdot \operatorname{Im} \left(u_1v_2^{-2}((1 - m_2^2)(u_1^{-2} + v_3^{-2}) + m_2^2(v_2^{-2} - v_1^{-2}) - \bar{w} + v_1^{-2}) \right) \geq 0$ due to $m_3^2(v_1^{-2} - v_3^{-2}) = m_2^2(v_2^{-2} - v_1^{-2}) - \bar{w} + v_1^{-2}$. All we need to arrive at (9) is to conjugate the terms inside of Im .

7.1.2. Theorem. *Let $n \geq 3$, $0 \leq k \leq l \leq n - 3$, and $p = 1, 2$ be such that $4np + 3n - 2k + 4l + 6 \not\equiv 0 \pmod{6n}$. We put*

$$\begin{aligned} u_1 &\Leftarrow \exp \frac{(2np - k)\pi i}{3n}, & u_2 &\Leftarrow \exp \frac{(2np - k - 3)\pi i}{3n}, & u_3 &\Leftarrow \exp \frac{(2np + 2k + 3)\pi i}{3n}, \\ v_1 &\Leftarrow \exp \frac{l\pi i}{3n}, & v_2 &\Leftarrow \exp \frac{(l + 3)\pi i}{3n}, & v_3 &\Leftarrow \exp \frac{-(2l + 3)\pi i}{3n}, & w &\Leftarrow \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2}, \\ m_2 &\Leftarrow \sqrt{\frac{\operatorname{Re}((v_1^2 - w)v_2)}{\operatorname{Re}((v_1^2 - v_2^2)v_2)}}, & m_3 &\Leftarrow \sqrt{\frac{\operatorname{Re}((v_1^2 - w)v_3)}{\operatorname{Re}((v_1^2 - v_3^2)v_3)}}, & m_1 &\Leftarrow \sqrt{m_2^2 + m_3^2 - 1}, \\ V &\Leftarrow \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^2 \end{pmatrix}, & R &\Leftarrow \begin{pmatrix} -2m_1^2 - 1 & 2m_1m_2 & 2m_1m_3 \\ -2m_1m_2 & 2m_2^2 - 1 & 2m_2m_3 \\ -2m_1m_3 & 2m_2m_3 & 2m_3^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

with V and R written in some orthonormal basis of signature $-++$.

We require that

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u_2w) < \operatorname{Re}u_2^3, & \quad \operatorname{Re}(v_2w) < \operatorname{Re}v_2^3, & \quad \operatorname{Re}(v_3v_1^2) \geq \operatorname{Re}(v_3w), & \quad \operatorname{Re}(u_2^2\bar{w}) > 1, & \quad \operatorname{Re}(v_2^2\bar{w}) > 1, \\ m_2^2 \frac{\operatorname{Re}(u_1^{-2}(v_2^2 - v_1^2))}{1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2}v_2^2)} + m_3^2 \frac{\operatorname{Re}(u_1^{-2}(v_3^2 - v_1^2))}{1 + \operatorname{Re}(u_1^{-2}v_3^2)} &\geq 1, \\ \left(|w| - \frac{\operatorname{Re}(u_2^2\bar{w})}{|w|} \right)^2 \operatorname{Re}((u_1^2 - w)u_2) &< (|w|^2 - 1) \operatorname{Re}((u_2^2 - w)u_2), \\ \left(|w| - \frac{\operatorname{Re}(v_2^2\bar{w})}{|w|} \right)^2 \operatorname{Re}((v_1^2 - w)v_2) &< (|w|^2 - 1) \operatorname{Re}((v_2^2 - w)v_2), \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(u_1^{-1}v_1) \cdot \operatorname{Re}(u_1^{-1}v_2) \cdot \operatorname{Re}(u_1^{-1}v_3) \cdot \operatorname{Im} \left(u_1^{-1}v_2^2((2m_2^2 - 1)(u_1^2 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) + u_2^2 + u_3^2) \right) \geq 0.$$

Then the group F_n generated by V and R is discrete in $\operatorname{PU}(2, 1)$ and has the defining relations $V^n = R^2 = (VR)^n = 1$. For odd n , a suitable subgroup $T_n \subset F_n$ of index $4n$ (for even n , a suitable subgroup $G_n \subset F_n$ of index $2n$) defines a complex hyperbolic manifold $M(n, l, k, p) \Leftarrow \operatorname{BV}/T_n$ (for even n , $N(n, l, k, p) \Leftarrow \operatorname{BV}/G_n$) which is homeomorphic to a disc bundle over a closed orientable surface of Euler characteristic $\chi = 8 - 2n$ (for even n and for $N(n, l, k, p)$, $\chi = 4 - n$). For this bundle, the relation $2(\chi + e) = 3\tau \pmod{8n}$ holds (for even n , $2(\chi + e) = 3\tau \pmod{4n}$ holds), where e and τ stand for the Euler number of the bundle and for the Toledo invariant of the representation defined by the manifold. Moreover, $\tau = \frac{8}{3}t - 4n$ (for even n and for $N(n, l, k, p)$, we have $\tau = \frac{4}{3}t - 2n$), where $0 \leq t < 3n$ is defined by $t \equiv 2np - k - l \pmod{3n}$.

Proof. The inequalities $n \geq 3$ and $0 \leq k, l \leq n - 3$ imply both (1) and the inequalities $\operatorname{Re}u_2^3 < \operatorname{Re}(u_2u_1^2)$, $\operatorname{Re}u_3^3 < \operatorname{Re}(u_3u_1^2)$, $\operatorname{Re}v_2^3 < \operatorname{Re}(v_2v_1^2)$, and $\operatorname{Re}v_3^3 < \operatorname{Re}(v_3v_1^2)$. Since $4np + 3n - 2k + 4l + 6 \not\equiv 0 \pmod{6n}$, we obtain $u_1^2 + v_3^2 \neq 0$. It is easy to see that (8) holds. So, all conditions (1–9) are valid.

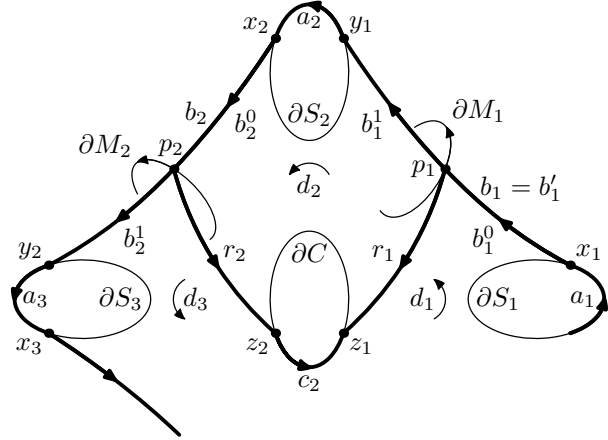
By the above considerations, $R_1 = R$ is the reflection in the projective line M_1 of signature $+-$ such that the rotations $U \rightleftharpoons VR$ and V satisfy $U^n = V^n = 1$ in $\text{PU}(2, 1)$. There are a U -invariant projective line S_2 and a V -invariant projective line C , both of signature $+-$. Denoting by $s' \in S_2$ and $q \in C$ the fixed points of U and of V , respectively, the transversal triangle $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ oriented in counterclockwise sense suits the transversal triangle $\Delta(C, M_1, M_2)$ oriented in counterclockwise sense and both the angle of $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ at $s' \in S_2$ and the angle of $\Delta(C, M_1, M_2)$ at $q \in C$ equal $\frac{2\pi}{n}$, where $M_2 \rightleftharpoons VM_1$.

For $j = 1, 2, \dots, n$, we put $R_j \rightleftharpoons R^{V^{j-1}}$, $M_j \rightleftharpoons V^{j-1}M_1$, and $S_j \rightleftharpoons V^{j-2}S_2$ (we remember that indices are considered modulo n). Since $RV^{-1} = U^{-1}$ and $U^{-1}S_2 = S_2$, we obtain $R_j S_j = R^{V^{j-1}}V^{j-2}S_2 = V^{j-1}RV^{-1}S_2 = V^{j-1}S_2 = S_{j+1}$ and $R_n \dots R_1 = V^n(V^{-1}R)^n = 1$ in $\text{PU}(2, 1)$ (in $\text{SU}(2, 1)$, we have $R_n \dots R_1 = \delta$, where $\delta \rightleftharpoons \exp \frac{2(k+l+np)\pi i}{3}$). Clearly, R_j is the reflection in the projective line M_j of signature $+-$. Since S_2 and M_2 are ultraparallel, S_j and M_j are ultraparallel. Thus, we have a cycle of bisectors with positive foci. Applying V^{j-2} , we see that the triangle $V^{j-2}\Delta(S_2, M_2, M_1) = \Delta(S_j, M_j, M_{j-1})$ suits the triangle $V^{j-2}\Delta(C, M_1, M_2) = \Delta(C, M_{j-1}, M_j)$ for all j and that C is a centre of the cycle with central angle 2π . Hence, the cycle is transversal and simple by Criterion 6.3.2. We put $s'_1 \rightleftharpoons Rs' \in \check{S}_1$ and $s'_{j+1} \rightleftharpoons R_j s'_j \in \check{S}_{j+1}$ for $j = 1, 2, \dots, n$ (so, $s'_2 = s'$ and $s'_{n+1} = \delta s'_1$). Obviously, s'_j 's are the vertices of some meridian of the cycle. Therefore, the total angle of the cycle is 2π . By Remark 6.4.3, the polyhedron related to the cycle is fibred. By Proposition 6.4.5, we arrive at the desired manifold $M(n, l, k, p)$ for odd n and at $N(n, l, k, p)$ for even n .

In order to calculate the Toledo invariant, we apply the formula $\tau = \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \text{Arg} \frac{\langle u, s'_{i+1} \rangle}{\langle u, s'_i \rangle} - \frac{\pi}{2} \right)$ obtained in the proof of Proposition 6.1.1, taking $u \rightleftharpoons q$. Since $RV^{-1} = U^{-1}$, $Us' = u_1^2 s'$, and $Vq = v_1^2 q$, for $j = 1, \dots, n+1$, we have $s'_j = V^{j-2}(RV^{-1})^{j-2} s' = V^{j-2}U^{2-j} s' = u_1^{4-2j} V^{j-2} s'$, $\langle q, s'_j \rangle = u_1^{2j-4} \langle q, V^{j-2} s' \rangle = u_1^{2j-4} \langle V^{2-j} q, s' \rangle = u_1^{2j-4} v_1^{4-2j} \langle q, s' \rangle = (u_1^2 v_1^{-2})^{j-2} \langle q, s' \rangle$, and $\frac{\langle q, s'_{j+1} \rangle}{\langle q, s'_j \rangle} = u_1^2 v_1^{-2}$. It follows that $\tau = 4n \left(\frac{\text{Arg}(u_1^2 v_1^{-2})}{\pi} - 1 \right) = \frac{4n \text{Arg} \exp \frac{2(2np-k-l)\pi i}{3n}}{\pi} - 4n = \frac{8}{3}t - 4n$ for odd n and $\tau = \frac{4}{3}t - 2n$ for even n .

Until the end of the article, all points will 'live' and 'die' in \overline{BV} and all isometries, in $\text{PU}(2, 1)$.

Let $p_1 \in \partial M_1$. We draw an ideal ℓ -meridian r_1 of the bisector $B(C, M_1)$ that begins with $p_1 \in \partial M_1$ and ends with $z_1 \in \partial C$. We put $z_j \rightleftharpoons V^{j-1}z_1 \in \partial C$, $p_j \rightleftharpoons V^{j-1}p_1 \in \partial M_j$, and $r_j \rightleftharpoons V^{j-1}r_1$. Clearly, r_j is the ideal ℓ -meridian of the bisector $B(C, M_j)$ that begins with p_j and ends with z_j . Since $p_j \in \partial M_j$ and M_j is the middle slice of the bisector $B_j \rightleftharpoons B(S_j, S_{j+1})$, we can draw an ideal meridian $b_j = b_j^0 \cup b_j^1$ of B_j passing through p_j so that b_j^0 begins with $x_j \in \partial S_j$ and ends with $p_j \in \partial M_j$, b_j^1 begins with $p_j \in \partial M_j$ and ends with $y_j \in \partial S_{j+1}$, and b_j begins with $x_j \in \partial S_j$ and ends with $y_j \in \partial S_{j+1}$. Since $B_j = V^{j-1}B_1$ and $p_j = V^{j-1}p_1$, we obtain $b_j^0 = V^{j-1}b_1^0$, $b_j^1 = V^{j-1}b_1^1$, $b_j = V^{j-1}b_1$, $x_j =$



$V^{j-1}x_1$, and $y_j = V^{j-1}y_1$. Following the natural orientation of ∂C , we draw an arc $c_j \subset \partial C$ that begins with z_j and ends with z_{j-1} . Following the natural orientation of ∂S_j , we draw an arc $a_j \subset \partial S_j$ that begins with y_{j-1} and ends with x_j . We put $b \equiv b_1 \cup a_2 \cup b_2 \cup \dots \cup a_n \cup b_n \cup a_1$, $d_j \equiv r_{j-1}^{-1} \cup b_{j-1}^1 \cup a_j \cup b_j^0 \cup r_j \cup c_j$, and $U_j \equiv U^{V^{j-2}}$ and denote by $b' = b'_1 \cup b'_2 \cup \dots \cup b'_n \subset T \equiv \partial \partial_1 P$ the closed meridian that begins with x_1 and whose edges are b'_j 's (so, $U_2 = U$ and $b'_1 = b_1$). It is obvious that $b, b' \subset T$ are closed curves that begin with x_1 , that $d_j \subset \partial_1 P$ is a closed curve that begins with z_{j-1} , that $d_j = V^{j-1}d_1$, and that $R_j U_j^i = U_{j+1}^i R_j$ (since $RV^{-1} = U^{-1}$). Identifying \check{C} with the unitary disc of complex numbers so that q corresponds to 0, we can easily see that $V|_C : z \mapsto \beta^{-1}z$, where $\beta \equiv v_1^2 v_3^{-2} = \exp \frac{2(l+1)\pi i}{n}$. The same is valid for $U_2|_{S_2} = U|_{S_2}$: when identifying \check{S}_2 with the unitary disc so that $s'_2 = s'$ corresponds to 0, we obtain $U|_{S_2} : y \mapsto \alpha y$, where $\alpha \equiv u_3^2 u_1^{-2} = \exp \frac{2(k+1)\pi i}{n}$. By induction on j , we show that s'_j is a fixed point for $U_j : s'_{j+1} = R_j s'_j = R_j U_j s'_j = (VRV^{-1}U)^{V^{j-2}} s'_j = V s'_j$ and $U_{j+1} = U_j^V$. So, $U_j|_{S_j} : y \mapsto \alpha y$, when we identify \check{S}_j with the unitary disc with s'_j corresponding to 0. Since $Up_1 = VRp_1 = Vp_1 = p_2$, $UM_1 = VRM_1 = VM_1 = M_2$, $US_2 = S_2$, and $UB(S_2, M_1) = B(S_2, M_2)$, we obtain $Ub_1^1 = (b_2^0)^{-1}$. In particular, $Uy_1 = x_2$. Thus, we conclude that $U_j y_{j-1} = x_j$.

We know that $\partial_1 P$ is a solid torus and that $\pi_1 \partial_1 P$ is generated by $[c]$, $\pi_1 \partial_1 P = \mathbb{Z}[c]$, where c stands for ∂C naturally oriented. Hence, $[d_2] = f[c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$ for some $f \in \mathbb{Z}$. Since $d_{j+1} = Vd_j$ and $c = Vc$, we obtain $[d_j] = f[c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$. Consequently, $[d_1] + \dots + [d_n] = nf[c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$. It is easy to verify that $[d_2 \cup c_2^{-1} \cup d_3 \cup c_3^{-1} \cup \dots \cup d_{n+1} \cup c_{n+1}^{-1}] = [b]$. Hence, $[d_1] + \dots + [d_n] = [b] + [c_{n+1} \cup c_n \cup \dots \cup c_2]$. Since $z_{j+1} = Vz_j$ and, when identifying \check{C} with the unitary disc of complex numbers, $Vz_j = \beta^{-1}z_j$ for $\beta = \exp \frac{2(l+1)\pi i}{n}$, we arrive at $[c_{n+1} \cup c_n \cup \dots \cup c_2] = (l+1)[c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$. Therefore, $[b] = (nf - (l+1))[c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$.

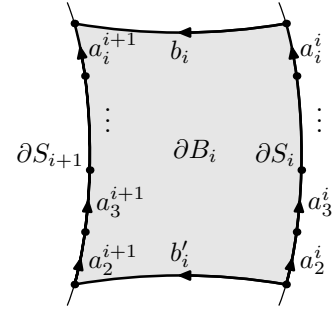
Let us prove that $[b] = [b'] + (k+1)[c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$. We denote $a_j^i \equiv a_j \subset \partial S_j$ and put $a_j^{i+1} \equiv R_i a_j^i$. Clearly, $a_j^i \subset \partial S_i$ is an arc following the natural orientation of ∂S_i and a_j^i ends with the same point as a_{j+1}^i begins with. Moreover, it follows from the relations $R_j U_j = U_{j+1} R_j$ and $U_j y_{j-1} = x_j$ that, when identifying \check{S}_i with the unitary disc of complex numbers, we have $x = \alpha y$, where y and x stand respectively for the initial point and for the final point of a_j^i . It is easy to see that $a_2^i \cup a_3^i \cup \dots \cup a_i^i \cup b_i \sim b'_i \cup a_2^{i+1} \cup a_3^{i+1} \cup \dots \cup a_i^{i+1}$, where \sim stands for 'is homotopic to' in T . This implies that $b = b_1 \cup a_2^2 \cup b_2 \cup a_3^3 \cup b_3 \cup a_4^4 \cup \dots \cup a_n^n \cup b_n \cup a_1^1 \sim b'_1 \cup a_2^2 \cup b_2 \cup a_3^3 \cup b_3 \cup a_4^4 \cup \dots \cup a_n^n \cup b_n \cup a_1^1 \sim b'_1 \cup b'_2 \cup a_3^3 \cup b_3 \cup a_4^4 \cup \dots \cup a_n^n \cup b_n \cup a_1^1 \sim \dots \sim b'_1 \cup b'_2 \cup \dots \cup b'_n \cup a_2^{n+1} \cup \dots \cup a_n^{n+1} \cup a_1^1 = b'_1 \cup b'_2 \cup \dots \cup b'_n \cup a_2^1 \cup \dots \cup a_n^1 \cup a_1^1$.

It follows from $\alpha = \exp \frac{2(k+1)\pi i}{n}$ that $[a_2^1 \cup \dots \cup a_n^1 \cup a_1^1] = (k+1)[\partial S_1]$. Since $[\partial S_1] = [c]$ in $\pi_1 \partial_1 P$, the result follows.

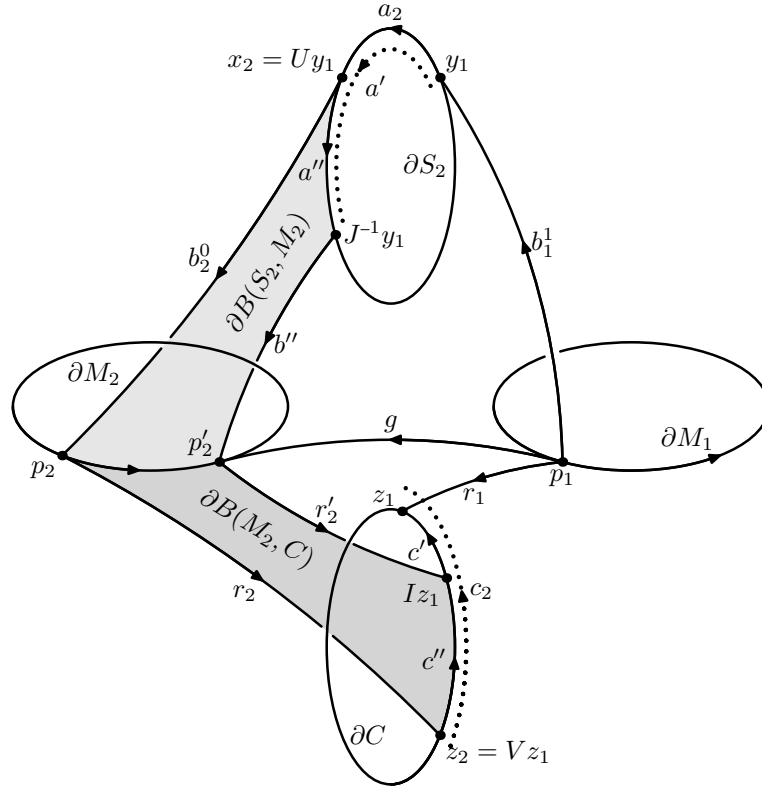
Finally, by Remark 6.4.4, $eP = nf - (k+l+2)$ and $e = 4(nf - (k+l+2))$ (for even n and $N(n, l, k, p)$, $e = 2(nf - (k+l+2))$) ■

In order to explicitly find f , we need to study the mutual position of triangles $\Delta(C, M_1, M_2)$ and $\Delta(S_2, M_2, M_1)$. For $t_1, t_2, t_3 \in S$, where S is some oriented circle, we put $o(t_1, t_2, t_3) = 0$ if t_1, t_2, t_3 are in the cyclic order of the circle and $o(t_1, t_2, t_3) = 1$, otherwise. For an isometry K of a slice D of a transversal triangle and for $d \in \partial D$, we define $\lambda(d, K) = 0$ if p belongs to the L-part of K and $\lambda(d, K) = 1$, otherwise. We denote by I the isometry of C in the triangle $\Delta(C, M_1, M_2)$ and by J , the isometry of S_2 in the triangle $\Delta(S_2, M_2, M_1)$.

We draw, in the bisector $B(S_2, M_2)$, an ideal ℓ -meridian b'' that begins with $J^{-1}y_1 \in \partial S_2$. Let $p_2' \in \partial M_2$ denote its final point. There exists an ideal ℓ -meridian g of $B(M_1, M_2)$ that begins with p_1



and ends with p'_2 . Following the natural orientation of ∂S_2 , we draw an arc a' from y_1 to $J^{-1}y_1$. By Theorem 6.5.1, the closed curve $\gamma \Leftarrow b'' \cup g^{-1} \cup b_1^1 \cup a'$ is trivializing for the triangle $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ if $J^{-1}y_1$ belongs to the L-part of ∂S_2 , and $[\gamma] = [\partial S_2]$, otherwise. This fact can be written as $[\gamma] = \lambda(y_1, J)[c]$ since $[\partial S_2] = [c]$.



Let r'_2 be an ideal ℓ -meridian of $B(M_2, C)$ that begins with $p'_2 \in \partial M_2$. Clearly, $Iz_1 \in \partial C$ is the final point of r'_2 . Following the natural orientation of ∂C , we draw an arc c' from Iz_1 to z_1 . As above, by Theorem 6.5.1, $[\vartheta] = \lambda(z_1, I)[c]$, where $\vartheta \Leftarrow r_1^{-1} \cup g \cup r'_2 \cup c'$.

Following the natural orientation of ∂S_2 and of ∂C , we draw arcs $a'' \subset \partial S_2$ from $x_2 = Uy_1$ to $J^{-1}y_1$ and $c'' \subset \partial C$ from $z_2 = Vz_1$ to Iz_1 . It is easy to see that $b_2^0 \cup r_2 \sim a'' \cup b'' \cup r'_2 \cup c''^{-1}$, that $[a_2 \cup a'' \cup a'^{-1}] = o(J^{-1}y_1, y_1, Uy_1)[\partial S_2] = o(J^{-1}y_1, y_1, Uy_1)[c]$, and that $[c_2 \cup c'^{-1} \cup c''^{-1}] = -o(Iz_1, z_1, Vz_1)[c]$. In terms of $H_1(\partial_1 P, \mathbb{Z}) = \pi_1 \partial_1 P$, we have $[d_2] = [-r_1 + b_1^1 + a_2 + b_2^0 + r_2 + c_2] = [-r_1 + b_1^1 + a_2 + a'' + b'' + r'_2 - c'' + c_2] = [-r_1 + g + r'_2 + c'] + [-g + b_1^1 + a' + b''] + [a_2 + a'' - a'] + [c_2 - c' - c''] = \lambda(z_1, I)[c] + \lambda(y_1, J)[c] + o(J^{-1}y_1, y_1, Uy_1)[c] - o(Iz_1, z_1, Vz_1)[c]$. We arrive at $f = \lambda(y_1, J) + o(J^{-1}y_1, y_1, Uy_1) + \lambda(z_1, I) - o(Iz_1, z_1, Vz_1)$. Clearly, the terms $\lambda(y_1, J)$ and $\lambda(z_1, I)$ vanish if both triangles $\Delta(C, M_1, M_2)$ and $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ are elliptic.

7.2. Some Interesting Examples. In this subsection, we present some explicit examples of complex hyperbolic bundles obtained with straightforward computer calculations (a simple program that verifies our computational claims is available upon request: all we need is to find parameters satisfying the conditions in Theorem 7.1.2).

We have tested all $n \leq 1001$ and obtained the following. For any n satisfying the inequalities $9 \leq n \leq 1001$ and $n \neq 11, 12$, there is at least one example of the type described in Theorem 7.1.2. The total number of such examples is 308359, and only 89546 of them have the Toledo invariant integer. Each example satisfies the equality $2(\chi + e) = 3\tau$ and the inequalities $\tau < 0$ and $\frac{1}{2}\chi < e < 0$. For every such

example, both triangles $\Delta(C, M_1, M_2)$ and $\Delta(S_2, M_2, M_1)$ are elliptic and $o(Iz_1, z_1, Vz_1) = 0$. For $p = 1$, we have $f = 1$ with $o(J^{-1}y_1, y_1, Uy_1) = 1$, and, for $p = 2$, we have $f = 0$ with $o(J^{-1}y_1, y_1, Uy_1) = 0$.

The following table contain all the examples with extreme values of g , e , and e/χ :

Manifold	g	χ	e	τ	Comment
$N(10, 6, 3, 1)$	4	-6	-2	$-5\frac{1}{3}$	minimal g , maximal e
$M(9, 4, 4, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$M(9, 5, 3, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$M(9, 6, 2, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(14, 7, 7, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(14, 8, 6, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(14, 9, 5, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(14, 10, 4, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(14, 11, 3, 1)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(14, 0, 0, 2)$	6	-10	-4	$-9\frac{1}{3}$	next to minimal g , next to maximal e
$N(16, 0, 0, 2)$	7	-12	-4	$-10\frac{2}{3}$	next to maximal e
$N(18, 0, 0, 2)$	8	-14	-4	-12	next to maximal e
$N(20, 0, 0, 2)$	9	-16	-4	$-13\frac{1}{3}$	next to maximal e
$N(22, 0, 0, 2)$	10	-18	-4	$-14\frac{2}{3}$	next to maximal e
$N(24, 0, 0, 2)$	11	-20	-4	-16	next to maximal e
$N(26, 0, 0, 2)$	12	-22	-4	$-17\frac{1}{3}$	next to maximal e
$N(28, 0, 0, 2)$	13	-24	-4	$-18\frac{2}{3}$	minimal $e/\chi = \frac{1}{6}$, next to maximal e

The four tables below expose all 55 examples that satisfy the inequality $\frac{1}{3}\chi \leq e$ and, therefore, due to [Kui], admit a real hyperbolic structure:

Manifold	g	χ	e	τ
$N(10, 6, 3, 1)$	4	-6	-2	$-5\frac{1}{3}$
$N(16, 0, 0, 2)$	7	-12	-4	$-10\frac{2}{3}$
$N(18, 0, 0, 2)$	8	-14	-4	-12
$N(20, 0, 0, 2)$	9	-16	-4	$-13\frac{1}{3}$
$N(22, 0, 0, 2)$	10	-18	-4	$-14\frac{2}{3}$
$N(22, 1, 0, 2)$	10	-18	-6	-16
$N(24, 0, 0, 2)$	11	-20	-4	-16
$N(24, 1, 0, 2)$	11	-20	-6	$-17\frac{1}{3}$
$N(26, 0, 0, 2)$	12	-22	-4	$-17\frac{1}{3}$
$N(26, 1, 0, 2)$	12	-22	-6	$-18\frac{2}{3}$
$N(28, 0, 0, 2)$	13	-24	-4	$-18\frac{2}{3}$
$N(28, 1, 0, 2)$	13	-24	-6	-20
$N(28, 1, 1, 2)$	13	-24	-8	$-21\frac{1}{3}$
$N(28, 2, 0, 2)$	13	-24	-8	$-21\frac{1}{3}$
$M(17, 0, 0, 2)$	14	-26	-8	$-22\frac{2}{3}$
$N(30, 1, 1, 2)$	14	-26	-8	$-22\frac{2}{3}$

Manifold	g	χ	e	τ
$N(30, 2, 0, 2)$	14	-26	-8	$-22\frac{2}{3}$
$N(32, 1, 1, 2)$	15	-28	-8	-24
$N(32, 2, 0, 2)$	15	-28	-8	-24
$M(19, 0, 0, 2)$	16	-30	-8	$-25\frac{1}{3}$
$N(34, 1, 1, 2)$	16	-30	-8	$-25\frac{1}{3}$
$N(34, 2, 1, 2)$	16	-30	-10	$-26\frac{2}{3}$
$N(34, 3, 0, 2)$	16	-30	-10	$-26\frac{2}{3}$
$N(36, 1, 1, 2)$	17	-32	-8	$-26\frac{2}{3}$
$N(36, 2, 1, 2)$	17	-32	-10	-28
$M(21, 0, 0, 2)$	18	-34	-8	-28
$N(38, 2, 1, 2)$	18	-34	-10	$-29\frac{1}{3}$
$N(40, 2, 2, 2)$	19	-36	-12	-32
$N(40, 3, 1, 2)$	19	-36	-12	-32
$M(23, 0, 0, 2)$	20	-38	-8	$-30\frac{2}{3}$
$M(23, 1, 0, 2)$	20	-38	-12	$-33\frac{1}{3}$
$N(42, 2, 2, 2)$	20	-38	-12	$-33\frac{1}{3}$

Manifold	g	χ	e	τ
$N(44, 2, 2, 2)$	21	-40	-12	$-34\frac{2}{3}$
$M(25, 0, 0, 2)$	22	-42	-8	$-33\frac{1}{3}$
$M(25, 1, 0, 2)$	22	-42	-12	-36
$N(46, 3, 2, 2)$	22	-42	-14	$-37\frac{1}{3}$
$M(27, 0, 0, 2)$	24	-46	-8	-36
$M(27, 1, 0, 2)$	24	-46	-12	$-38\frac{2}{3}$
$N(52, 3, 3, 2)$	25	-48	-16	$-42\frac{2}{3}$
$M(29, 1, 0, 2)$	26	-50	-12	$-41\frac{1}{3}$
$M(29, 1, 1, 2)$	26	-50	-16	-44
$M(29, 2, 0, 2)$	26	-50	-16	-44
$M(31, 1, 1, 2)$	28	-54	-16	$-46\frac{2}{3}$
$M(31, 2, 0, 2)$	28	-54	-16	$-46\frac{2}{3}$

Manifold	g	χ	e	τ
$M(33, 1, 1, 2)$	30	-58	-16	$-49\frac{1}{3}$
$M(35, 1, 1, 2)$	32	-62	-16	-52
$M(35, 2, 1, 2)$	32	-62	-20	$-54\frac{2}{3}$
$M(37, 1, 1, 2)$	34	-66	-16	$-54\frac{2}{3}$
$M(37, 2, 1, 2)$	34	-66	-20	$-57\frac{1}{3}$
$M(41, 2, 2, 2)$	38	-74	-24	$-65\frac{1}{3}$
$M(41, 3, 1, 2)$	38	-74	-24	$-65\frac{1}{3}$
$M(43, 2, 2, 2)$	40	-78	-24	-68
$M(45, 2, 2, 2)$	42	-82	-24	$-70\frac{2}{3}$
$M(47, 3, 2, 2)$	44	-86	-28	-76
$M(53, 3, 3, 2)$	50	-98	-32	$-86\frac{2}{3}$

The following tables show all the examples for $n = 101$ ($g = 98$, $\chi = -194$). This illustrates a typical behaviour of l , k , p , and the Euler number for some fixed parameter n :

$e = -96, \tau = -193\frac{1}{3}$
$M(101, 62, 61, 1)$
$M(101, 63, 60, 1)$
$M(101, 64, 59, 1)$
$M(101, 65, 58, 1)$
$M(101, 66, 57, 1)$
$M(101, 67, 56, 1)$
$M(101, 68, 55, 1)$
$M(101, 69, 54, 1)$
$M(101, 70, 53, 1)$
$M(101, 71, 52, 1)$
$M(101, 72, 51, 1)$
$M(101, 73, 50, 1)$
$M(101, 74, 49, 1)$
$M(101, 75, 48, 1)$
$M(101, 76, 47, 1)$
$M(101, 77, 46, 1)$
$M(101, 78, 45, 1)$

$e = -96, \tau = -193\frac{1}{3}$
$M(101, 79, 44, 1)$
$M(101, 80, 43, 1)$
$M(101, 81, 42, 1)$
$M(101, 82, 41, 1)$
$M(101, 83, 40, 1)$
$M(101, 84, 39, 1)$
$M(101, 85, 38, 1)$
$M(101, 86, 37, 1)$
$M(101, 87, 36, 1)$
$M(101, 88, 35, 1)$
$M(101, 89, 34, 1)$
$M(101, 90, 33, 1)$
$M(101, 91, 32, 1)$
$M(101, 92, 31, 1)$
$M(101, 93, 30, 1)$
$M(101, 94, 29, 1)$
$M(101, 95, 28, 1)$

$e = -96, \tau = -193\frac{1}{3}$
$M(101, 96, 27, 1)$
$M(101, 97, 26, 1)$
$M(101, 98, 25, 1)$
$M(101, 11, 11, 2)$
$M(101, 12, 10, 2)$
$M(101, 13, 9, 2)$
$M(101, 14, 8, 2)$
$M(101, 15, 7, 2)$
$M(101, 16, 6, 2)$
$M(101, 17, 5, 2)$
$M(101, 18, 4, 2)$
$M(101, 19, 3, 2)$
$M(101, 20, 2, 2)$
$M(101, 21, 1, 2)$
$M(101, 22, 0, 2)$

$e = -92, \tau = -190\frac{2}{3}$
$M(101, 96, 26, 1)$
$M(101, 97, 25, 1)$
$M(101, 98, 24, 1)$
$M(101, 11, 10, 2)$
$M(101, 12, 9, 2)$
$M(101, 13, 8, 2)$
$M(101, 14, 7, 2)$
$M(101, 15, 6, 2)$
$M(101, 16, 5, 2)$
$M(101, 17, 4, 2)$
$M(101, 18, 3, 2)$
$M(101, 19, 2, 2)$
$M(101, 20, 1, 2)$
$M(101, 21, 0, 2)$

$e = -88, \tau = -188$
$M(101, 10, 10, 2)$
$M(101, 11, 9, 2)$
$M(101, 12, 8, 2)$
$M(101, 13, 7, 2)$
$M(101, 14, 6, 2)$
$M(101, 15, 5, 2)$
$M(101, 16, 4, 2)$

$e = -84, \tau = -185\frac{1}{3}$
$M(101, 10, 9, 2)$
$M(101, 11, 8, 2)$
$M(101, 12, 7, 2)$

$e = -80, \tau = -182\frac{2}{3}$
$M(101, 9, 9, 2)$

Some of the examples in the above tables could represent the same complex hyperbolic bundle, that is, the corresponding groups would be conjugated in $\mathrm{PU}(2, 1)$. For instance, examples 2–10 in the first table. (In general, it makes sense to treat as representing the ‘same example’ two discrete groups of isometries having some subgroups of finite index conjugated in the group of all isometries.) Nevertheless, it can be proven that these complex hyperbolic bundles define different points in the space of representations.

In subsequent articles (for instance, in [Ana]), we will study the connected components of the Teichmüller space (the space of discrete, faithful, and type-preserving representations $\rho : \pi_1 \Sigma \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$) and will distinguish some of our examples having the same g , e , and τ with new discrete invariants of complex hyperbolic structure on the bundles in question.

8. References

- [AGr] S. Anan’in, Carlos H. Grossi, *One elementary view on Classic Geometries*, (in preparation).
- [AGu] S. Anan’in, N. Gusevskii, *Complex Hyperbolic Structures on Disc Bundles over Surfaces*. II. *Example of a Trivial Bundle*, (in preparation).
- [Ana] S. Anan’in, *Complex Hyperbolic Structures on Disc Bundles over Surfaces*. III. *Earthquakes, Discrete Invariants, and Teichmüller Space*, (in preparation).
- [Bea] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, GTM **91**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [BSh] D. Burns, S. Shnider, *Spherical Hypersurfaces in Complex Manifolds*, Invent. Math. **33** (1976), 223–246.
- [GKL] W. M. Goldman, M. Kapovich, B. Leeb, *Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), No. 1, 61–95.
- [GKL1] W. M. Goldman, M. Kapovich, B. Leeb, *Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface*, preprint, 1995.
- [GLT] M. Gromov, H. B. Lawson Jr., W. Thurston, *Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 68 (1988), 27–45.
- [Gol] W. M. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. xx+316 pp.
- [Hsi] Hsieh, Po-Hsun, *Cotranchal Bisectors in Complex Hyperbolic Space*, Geometriae Dedicata **97** (2003), 93–98.
- [Kap] M. Kapovich, *Flat conformal structures on 3-manifolds*. I. *Uniformization of closed Seifert manifolds*, J. Differential Geom. **38** (1993), No. 1, 191–215.
- [Kui] N. H. Kuiper, *Hyperbolic 4-manifolds and tessellations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 68 (1988), 47–76.
- [Luo] F. Luo, *Constructing conformally flat structures on some Seifert fibred 3-manifolds*, Math. Ann. **294** (1992), No. 3, 449–458.
- [Man] Yuri I. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics **289**
- [San] H. Sandler, *Distance formulas in complex hyperbolic space*, Forum Math. **8** (1996), No. 1, 93–106.
- [Sch1] R. E. Schwartz, *Real hyperbolic on the outside, complex hyperbolic on the inside*, Invent. Math. **151** (2003), No. 2, 221–295.
- [Sch2] R. E. Schwartz, *Spherical CR Geometry and Dehn Surgery*, Research Monograph, 2004.
- [Tol] D. Toledo, *Representations of surface groups in complex hyperbolic space*, J. Differential Geom. **29** (1989), No. 1, 125–133.
- [Xia] E. Z. Xia, *The moduli of flat $\mathrm{PU}(2, 1)$ structures on Riemann surfaces*, Pacific J. Math. **195** (2000), No. 1, 231–256.

9. Index

- \checkmark **6.2** 106
 a' **7.1** 126
 a'' **7.1** 126
 a_j **7.1** 125
 a_j^i **7.1** 125
 a_j^j **7.1** 125
 A_{ik} **6.2** 106
 A'_{ik} **6.3** 110
 Area $\Delta(q, q', q'')$ **3** 96
 arg **3** 96
 Arg **2.2** 91
 α **7.1** 125
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ **6.2** 106
 b **7.1** 125
 $[b]$ **6.4** 113
 b' **7.1** 125
 $b' \equiv b'_1 \cup \dots \cup b'_n$ **6.1** 105
 b'' **7.1** 125
 b_1, \dots, b_n **6.1** 103
 b'_1, \dots, b'_n **6.1** 105
 $\#b \cap c$ **6.4** 113
 b'_j **7.1** 125
 b_j **7.1** 124
 b_j^0 **7.1** 124
 b_j^1 **7.1** 124
 $b(x, p_1, p_2)$ **2.3** 92
 B_1, \dots, B_n **6.1** 104
 (B_1, \dots, B_n) **6.1** 104
 B_i^+ **6.2** 106
 B_i^- **6.2** 106
 B_i^0 **6.2** 106
 B_i^1 **6.2** 106
 \overline{B}_i **6.2** 106
 \check{B}_i **6.2** 106
 $B_i \succ$ **6.2** 106
 $\overline{B}_i \succ$ **6.2** 106
 $\prec B_i \succ$ **6.2** 106
 B_j **7.1** 124
 B'_k **6.3** 111
 $B'_k \succ$ **6.2** 108, **6.3** 110
 $\prec B'_k \succ$ **6.2** 108, **6.3** 111
 BV **2.1** 88
 \overline{BV} **2.1** 88
 β **6.3** 111, **7.1** 125
 β_1, \dots, β_n **6.3** 111
 c **7.1** 125
 $[c]$ **7.1** 125
 c' **7.1** 126
 c'' **7.1** 126
 c_j **7.1** 125
 C **6.3** 111, **7.1** 121
 $\mathbb{C}P^{\perp}$ **2.3** 92
 $\text{Ct}(x, y)(*)$ **3** 94
 d **6.2** 107, **6.5** 114
 d_j **7.1** 125
 D_i **6.2** 108
 D_i^0 **6.2** 108
 D_i^1 **6.2** 108
 δ **6.1** 104, **6.2** 108
 $\Delta(C, C_1, C_2)$ **6.3** 111
 Δ_k **6.3** 111
 Δ'_k **6.3** 111
 ∂BV **2.1** 88
 $\partial\partial_0 P$ **6.2** 107
 ∂P **6.4** 112
 $\partial_0 P$ **6.2** 107, **6.4** 112
 $\partial_1 P$ **6.4** 112
 $\partial_0 T_i$ **6.2** 107
 $eP \equiv \#D \cap D'$ **6.4** 113
 E_i **6.2** 109
 ε **6.2** 107, **6.5** 114
 ε_0 **6.5** 114
 ε_1 **6.5** 114
 η **5** 101
 f **7.1** 125
 $f_{u_1, u_2}(p)$ **2.2** 91
 F_n **7.1** 123
 g **7.1** 125
 G_n **6.1** 103, **7.1** 123
 γ **7.1** 126
 H **6.2** 106
 $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ **2.1** 88
 H_n **6.1** 103
 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ **6.1** 103
 I **7.1** 125
 I_1 **6.5** 115
 J **7.1** 125
 k **6.5** 114, **7.1** 123
 K_i **6.2** 107
 \overline{K}_i **6.2** 107
 l **7.1** 123
 $\lambda(d, K)$ **7.1** 125
 m **7.1** 119
 m_1 **7.1** 123
 m_1, m_2, m_3 **6.5** 115
 m_2 **7.1** 123
 m_3 **7.1** 123
 m_i **7.1** 119
 $M(n, l, k, p)$ **7.1** 123
 M_1 **7.1** 121
 M_1, \dots, M_n **6.1** 104
 M_2 **7.1** 121, **7.1** 124
 M_j **7.1** 124
 M'_k **6.3** 110
 n **7.1** 123
 $n(q, p_1, p_2)$ **2.3** 92
 N **6.2** 109
 N_k **6.2** 109
 $N(n, l, k, p)$ **7.1** 123
 $N(p, \varepsilon)$ **6.2** 107
 $N(X, \varepsilon)$ **6.2** 107
 $\nabla_{v_p} X$ **2.1** 89
 $o(t_1, t_2, t_3)$ **7.1** 125
 p **7.1** 123
 p^{\perp} **2.1** 88
 p_1 **7.1** 124
 p'_2 **7.1** 125
 p_i **6.1** 104
 p_j **7.1** 124
 $\langle -, p \rangle \otimes p^{\perp}$ **2.1** 88
 $\langle -, p \rangle \otimes v$ **2.1** 88
 P **6.1** 103, **6.2** 107, **6.4** 112
 \mathring{P} **6.2** 107
 $\pi_1 \partial_1 P$ **6.4** 113
 q **7.1** 124
 q_i **6.2** 106, **7.1** 119
 q'_i **6.2** 106
 Q **6.1** 103
 r_1 **7.1** 124
 r_1, \dots, r_n **6.1** 103
 r'_2 **7.1** 126
 r_j **7.1** 124
 R **7.1** 119, **7.1** 123
 R_1 **7.1** 124
 R_1, \dots, R_n **6.1** 104
 R_j **7.1** 124
 R'_k **6.3** 110
 $R(m_1), \dots, R(m_n)$ **6.1** 104
 ρ **6.1** 105

- $[s]$ **6.4** 113
 s' **7.1** 124
 s_1, \dots, s_n **6.1** 103
 s'_1, \dots, s'_n **6.1** 105
 s_i **7.1** 119
 s'_j **7.1** 124
 \tilde{S} **6.2** 108
 S_1, \dots, S_n **6.1** 104
 S_2 **7.1** 121
 \tilde{S}_i **6.2** 106
 S_j **7.1** 124
 S'_k **6.3** 110
 $S(p_1, p_2)$ **2.3** 92
 S_q **2.3** 92
 t **7.1** 123
 $\text{ta}(S_1, S_2)$ **2.3** 93
 t_{ij} **6.5** 114
 $t(v, q, p_1, p_2)$ **2.3** 92
 T **6.4** 112, **7.1** 125
 T_i **6.2** 107
 \tilde{T}_i **6.2** 107
 T'_k **6.2** 108
 T_n **6.1** 103, **7.1** 123
 $\text{Tn}(x, y)(*)$ **2.1** 89
 ϑ **7.1** 126
 τ **6.1** 105
 u_1 **7.1** 123
 u_2 **7.1** 123
 u_3 **7.1** 123
 u_i **6.2** 106, **7.1** 119
 U **7.1** 119, **7.1** 124
 U_i **6.2** 109
 U_j **7.1** 125
 v_1 **7.1** 123
 v_2 **7.1** 123
 v_3 **7.1** 123
 v_i **6.2** 106, **7.1** 119
 v_p **2.1** 88
 v^p **2.1** 88
 p_v **2.1** 88
 V **2.1** 88, **7.1** 119
 w **7.1** 119, **7.1** 123
 x_j **7.1** 124
 X^Y **6.3** 110
 y_j **7.1** 124
 z_1 **7.1** 124
 z_j **7.1** 124
 \sim **7.1** 125
- $\langle -, - \rangle$ **2.1** 88
angle of a triangle of
 bisectors **6.3** 111
bisectors transversal along
 their common slice **4** 100
central angle of a cycle of
 bisectors **6.3** 111
centre of a cycle of bisectors **6.3** 111
choice of δ **6.2** 108
choice of d **6.2** 107
complex spine of a bisector **2.3** 92
configuration of bisectors **6.4** 112
constant angle between bisectors
 with common slice **4** 99
counterclockwise orientation of
 a transversal triangle **6.5** 114
cycle of bisectors **6.1** 104
edges of a meridian **6.1** 105
elliptic triangle of bisectors **6.5** 114
equivariant section of
 a fibred polyhedron **6.4** 113
Euler number eP of
 a fibred polyhedron **6.4** 113
(extended) bisector $B(p_1, p_2)$ **2.3** 92
(extended) geodesic $G(p_1, p_2)$ **2.3** 92
fibred polyhedron **6.4** 112
focus of a bisector **2.3** 92
gluing fibred polyhedra **6.4** 112
gluing polyhedra **6.4** 112
Hermitian metric **2.1** 88
horizontal parallel
 displacement **3** 95
hyperbolic triangle of
 bisectors **6.5** 114
ideal meridian of
 a cycle of bisectors **6.1** 105
inside angle **6.2** 107
inside sector **6.2** 107
isometry of a slice of
 a transversal triangle **6.5** 114
Kähler form ω **2.2** 91
Kähler potential $P_u(x_p)$ **2.2** 91
L-parabolic triangle of
 bisectors **6.5** 114
L-part of the boundary of a slice of
 a hyperbolic triangle **6.5** 114
 ℓ -meridian **3** 97
meridian of a cycle of
 bisectors **6.1** 105
meridional displacement **3** 97
meridional fibering **6.2** 107
meridional identification **3** 97
middle slice of a bisector
 segment **3** 97
nonclosed meridian of a
 configuration of bisectors **6.4** 112
nonconstant angle between
 bisectors with common slice **4** 100
normal vector to an oriented
 bisector **2.3** 92
one triangle of bisectors suits the
 other triangle of bisectors **6.3** 111
orientation of a bisector **2.3** 92
orientation of a configuration of
 bisectors **6.4** 112
orientation of a cycle of
 bisectors **6.4** 112
orientation of a meridian of a cycle
 of bisectors **6.4** 113
orientation of a triangle of
 bisectors **6.3** 111
orientation of a trivializing curve of
 a cycle of bisectors **6.4** 113
orientation of a trivializing curve of
 a fibred configuration of
 bisectors **6.4** 113
orientation of the torus T **6.4** 113
oriented bisector **6.2** 106
oriented triangle of bisectors **6.3** 111
orthogonal points **2.3** 93
parabolic triangle of
 bisectors **6.5** 114
polar point p to a projective
 line **2.3** 92
real spine of a bisector **2.3** 92
reflection $R(m)$ **3** 97
R-parabolic triangle of
 bisectors **6.5** 114
R-part of the boundary of a slice of
 a hyperbolic triangle **6.5** 114
segment of a bisector
 $B[p_1, p_2]$ **2.3** 93
segment of a geodesic
 $G[p_1, p_2)$ **2.3** 93
segment of a geodesic
 $G[p_1, p_2]$ **2.3** 93
simple configuration of
 bisectors **6.4** 112

simple cycle of bisectors **6.2** 107
slice fibering **6.2** 107
slice fibering **6.4** 112
slice of a bisector **2.3** 92
standard curve of a triangle **6.5** 114
tance $\text{ta}(p_1, p_2)$ **2.1** 89
tangent space $T_p \mathbb{C}P^V$ **2.1** 88
to 'include' a inside sector **6.2** 107
Toledo invariant **6.1** 105
total angle of a cycle at a meridian **6.2** 106
transversal cycle of bisectors **6.2** 106
transversal triangle of bisectors **6.3** 111
trivial triangle of bisectors **6.5** 114
trivializing curve **6.4** 112
vertical parallel displacement **3** 95
vertices of a bisector **2.3** 93
vertices of a geodesic **2.3** 92
vertices of a meridian **6.1** 105

Bibliografia

- [AGG] S. Anan'in, C. H. Grossi, N. Gusevskii, *Complex Hyperbolic Structures on Disc Bundles over Surfaces. I. General Settings. A Series of Examples*, preprint. <http://arxiv.org/abs/math/0511741> (**anexado à tese**).
- [AGu] S. Anan'in, N. Gusevskii, *Complex Hyperbolic Structures on Disc Bundles over Surfaces. II. Example of a Trivial Bundle*, preprint. <http://arxiv.org/abs/math/0512406>
- [Arn] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, GTM 60, Springer-Verlag, New York, 1997. xx+509 pp.
- [Bea] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, GTM 91, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [BEt] U. Brehm, B. Et-Taoui, *Congruence criteria for finite subsets of complex projective and complex hyperbolic spaces*, Manuscripta mathematica **96** (1998), 81–95.
- [Car] E. Cartan, *Sur le groupe de la géométrie hypersphérique*, Comm. Math. Helv. **4** (1932), 158–171.
- [Che] S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, Universitext, Springer-Verlag, 1995. xx+160 pp.
- [CMa] E. Calabi, L. Markus, *Relativistic Space Forms*, Ann. of Math. **75** (1962), 63–76.
- [Gol] W. M. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. xx+316 pp.
- [Jac] N. Jacobson, *Structure of rings*, Colloquium Publications Volume 37, American Mathematical Society, 1956. +299 pp.
- [KMa] A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Algebra, Logic and Applications, Volume 1. Gordon and Breach Science Publishers, 1988. +309 pp.
- [KNo] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry Volumes I and II*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Interscience Publishers. John Wiley & Sons, 1969. +344 pp. +470 pp.
- [KRe] A. Korányi, H. M. Reimann, *The complex cross-ratio on the Heisenberg group*, L'Enseign. Math. **33** (1987), 291–300.
- [Lan] S. Lang, *Algebra*, Advanced Book Program. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., California, 1984. xx+714pp
- [Man] Yu. I. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics **289**
- [New] P. E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Lectures on Mathematics and Physics **51**, Bombay, 1978.
- [Pet] C. Petronio, D. B. A. Epstein, *An exposition of Poincaré's polyhedron theorem*, Enseign. Math. **40** (1994), 113–170.
- [Pet1] C. Petronio, R. Benedetti, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1992. +332 pp.
- [Pra] A. Pratoussevitch, *Traces in Complex Hyperbolic Triangle Groups*, Geometriae Dedicata **111** (2005), 159–185.
- [Rat] J. Ratcliff, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, GTM 149, Springer-Verlag, New York, 1994. +183 pp.
- [San] H. Sandler, *Distance formulas in complex hyperbolic space*, Forum Math. **8** (1996), No. 1, 93–106.
- [Sco] P. Scott, *The Geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. (1983), 401–487.

[Wol] J. A. Wolf, *The Clifford-Klein Space Forms of Indefinite Metric*, Ann. of Math. **75** (1962), 77-80.