ÁLGEBRAS DE KAC-MOODY E A CORRESPONDÊNCIA BOSON-FERMION

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Jamil Ferreira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 04 de dezembro de 1987

Richard Pfister

Prof. Dr. Richard José Pfister
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Este trabalho é dedicado àqueles que, como eu, trabalham a matemática com fascinação, mas sabem que não lhe são imprescindíveis.

AGRADECIMENTOS

Tão difícil quanto a elaboração deste trabalho é ser justo e preciso nos agradecimentos às inúmeras pessoas e entidades que o viabilizaram. Por isso vou ser explícito apenas em relação às que mais diretamente nele interferiram . São elas, de um lado:

Meu orientador, professor Richard José Pfister que, durante todo o tempo em que trabalhamos juntos, exerceu sobre mim uma única forma de pressão: exatamente sua dedicação, incentivo e disponibilidade constantes. Do nosso contato, ganhei um mestre e um amigo;

Os professores, os colegas de pós-graduação, os funcionários do IMECC, responsáveis por um clima agradável e sadio de trabalho, o que me propiciou um bom aproveitamento nos estudos;

Meu colega e amigo Antônio Geloneze Neto, que reforçou minha intenção de vir para o IMECC e com quem tive e quero ter o prazer de estudar;

A colega Iara Rehder, pela dedicação na digitação e impressão deste trabalho;

O CNPq, CAPES e UNICAMP pelo apoio financeiro;

De outro lado:

Meu irmão e amigo José A. F. Ferreira, cuja presença nunca me faltou, principalmente nos meus momentos mais difíceis;

Meus familiares, particularmente Emilinha, Antero e Alcina, pelo apoio, atenção e presença, muito mal retribuídos;

A Renata, pela companhia amiga e incentivo, nos bons momentos em que estivemos juntos;

Os meus pais, pela inspiração e força que me dão, mesmo tão distantes.

ÍNDICE

PREFÁCIO

Por comodidade, o corpo de escalares em todo este trabalho é o dos complexos , embora muito do que se fará seja válido sem tal restrição. Além disso, odos os ideais considerados serão bilaterais).

O objeto em destaque neste trabalho é a mais simples das álgebras de ac-Moody afins, denotada por $A_1^{(1)}$ (cf. capítulo II).

Construiremos dois $A_1^{(1)}$ - módulos graduados irredutíveis: um é obtido través da representação de uma álgebra de Weyl em uma álgebra simétrica, e o utro se obtém via a representação de uma álgebra de Clifford em uma álgebra xterior.

Provaremos que esses $A_1^{(1)}$ - módulos são isomorfos e que ambos podem er obtidos a partir de uma sub-álgebra notável de $A_1^{(1)}$, a álgebra de leisenberg principal. É nestes dois fatos que reside o significado que estamos lando à expressão "correspondência Boson-Fermion". Tal terminologia é própria la Física e a estamos utilizando devido ao papel desempenhado por tais módulos a mecânica quântica e estatística (cf [FF]).

O roteiro para tanto é basicamente o seguinte:

No capítulo I trataremos das noções fundamentais acerca das álgebras ssociativas que permeiam todo o trabalho: Clifford e exterior, Weyl e simétrica. Daremos destaque para as provas dos teoremas de estrutura das lgebras de Clifford e de Weyl sobre um espaço vetorial de base indexada por m conjunto totalmente ordenado. Tais provas são adaptações feitas da lemonstração do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) para o caso presente.

Finalizamos estudando certas representações: de uma álgebra de Clifford C em uma álgebra exterior Λ e de uma álgebra de Weyl W em uma álgebra simétrica S. Dessas representações obteremos, nos capítulos seguintes, $A_1^{(1)}$.

O capítulo II inicia com considerações gerais sobre as álgebras de Kac-Moody, das quais $A_1^{(1)}$ é um caso particular. Entretanto, o principal interesse neste capítulo é apresentar uma realização concreta particular de $A_1^{(1)}$ (cf. [L] (essa referência foi o suporte básico do capítulo II e da seção (II-1)).

Estudaremos a estrutura de colchetes de $A_1^{(1)}$ na sua graduação principal fazendo uso das propriedades básicas sobre séries formais em variáveis que comutam. Aliás, tais séries serão utilizadas em parte significativa deste trabalho, sem comentários teóricos. Estes podem ser encontrados por exemplo em [Fi] ou [LW1]. Terminamos com o estudo de uma representação da sub-álgebra de Heisenberg principal H de $A_1^{(1)}$ na álgebra simétrica S.

No capítulo III, introduziremos os "operadores vértice" que terão por função obter $A_1^{(1)}$ a partir de H em certas álgebras de endomorfismos. Vamos provar que S e Λ são H-módulos irredutíveis, logo (via operadores vértice) $A_1^{(1)}$ - módulos irredutíveis. O capítulo finaliza com a prova de que esses $A_1^{(1)}$ - módulos são isomorfos e que ambos podem se obter a partir de H. Reservamos um apêndice para alguns comentários acerca dos importantes operadores vértice.

Finalmente, uma observação com respeito à organização do texto: as referências do tipo "cf. proposição I-3.2" dizem repeito à 2ª proposição da seção 3 do capítulo I, e as do tipo "cf. proposição 3.2" dizem respeito à 2ª proposição da seção 3 do capítulo em que se fez a referência.

CAPÍTULO I

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E ÁLGEBRAS DE WEYL

As álgebras consideradas neste capítulo serão álgebras associativas com unidade e os homomorfismos de álgebras serão unitários)

1. Álgebra tensorial

DEFINIÇÃO 1.1 - Seja V um espaço vetorial. Uma álgebra T é chamada uma <u>álgebra tensorial sobre V</u> se ela satisfizer as seguintes propriedades:

AT1-) T contém V como sub-espaço vetorial e T é gerada por V como $\mathbb{C}$-álgebra;

AT2-) Para cada aplicação linear λ de V em uma $\mathbb{C}$-álgebra A, existe um homomorfismo θ: T $\longrightarrow$ A que estende λ, conforme o diagrama comutativo seguinte (onde i é a inclusão):

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\theta"] & \\ V \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\lambda"'] & A \end{tikzcd}$$

Denotamos uma álgebra tensorial sobre V por $T(V)$

Os resultados seguintes serão enunciados sem demonstração. Estas podem ser encontradas por exemplo nas referências [C1], [C2] ou [G].

PROPOSIÇÃO 1.1 — As condições (AT1) e (AT2) da definição 1.1 equivalem à seguinte:

AT-) Para cada aplicação linear λ de V em uma $\mathbb{C}$-álgebra A, existe um único homomorfismo $\theta: T \longrightarrow A$ que torna comutativo

o diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\theta"] & \\ V \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\lambda"'] & A \end{tikzcd}$$

Da proposição acima, é óbvio que uma tal álgebra é única a menos de isomorfismos.

Consideremos agora a p-ésima potência tensorial de V:

$$\overset{p}{\otimes} V = V \otimes \ldots \otimes V,$$

definida para $p \geq 0$,

onde $\overset{0}{\otimes} V = \mathbb{C}$ e $\overset{1}{\otimes} V = V$.

Do cálculo tensorial, temos que a soma direta $\bigoplus_{p \geq 0} (\overset{p}{\otimes} V)$ pode ser munida de uma multiplicação associativa do seguinte modo:

se $$u = \sum_p u_p \text{ com } u_p \in \overset{p}{\otimes} V$$

e $$v = \sum_q v_q \text{ com } v_q \in \overset{q}{\otimes} V$$

então $$uv = \sum_{p,q} u_p \otimes v_q .$$

Essa multiplicação faz de $\bigoplus_{p \geq 0} (\overset{p}{\otimes} V)$ uma álgebra associativa cujo elemento unidade é $(1,0,0,\dots)$.

TEOREMA 1.2 - Dado um espaço vetorial V, a álgebra $\bigoplus_{p \geq 0} (\overset{p}{\otimes} V)$ é uma álgebra tensorial sobre V.

Devido à unicidade da álgebra tensorial, escrevemos

$$T(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T_p ,$$

onde $$T_p = \overset{p}{\otimes} V .$$

Ainda: $$T_p . T_q \subset T_{p+q} .$$

Logo, se atribuirmos grau p aos elementos de T_p, teremos que $T(V)$ é uma álgebra $\mathbb{Z}$-graduada (positivamente).

Exemplo - Se V tem base $X = \{x_i\}_{i \in I}$, onde I é um conjunto de índices, então T é isomorfa à álgebra livre gerada por X.

Em particular, se V tem base $\{x\}$, então T é a álgebra livre gerada por $\{x\}$, que é isomorfa à álgebra polinomial $\mathbb{C}[x]$.

2. Álgebras de Clifford e Álgebras Exteriores

DEFINIÇÃO 2.1 - Seja V um espaço vetorial. Uma forma quadrática Q sobre V é uma aplicação $Q: V \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que:

1-) $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall\ x \in V$;

2-) $\beta(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ é bilinear.

$\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ chama-se forma bilinear associada a Q. Evidentemente β é simétrica ($\beta(x,y) = \beta(y,x)$) e $\beta(x,x) = 2Q(x)$.

Usaremos Q para definir uma álgebra, do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 2.2 - Seja V um espaço vetorial e Q uma forma quadrática sobre V. Um par (C,θ), onde C é uma álgebra e $\theta: V \longrightarrow C$ é uma aplicação linear tal que $\theta(x)^2 = Q(x).1$, $\forall x \in V$, é chamado uma álgebra de Clifford sobre V associada a Q se satisfizer à seguinte propriedade universal:

Se f é uma aplicação linear de V em uma álgebra A tal que $f(x)^2 = Q(x).1$, $\forall\ x \in V$, então existe um único homomorfismo de álgebras $g: C \longrightarrow A$ tal que o iagrama seguinte seja comutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "g"] & \\ & A \\ V \arrow[uu, "\theta"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

enotamos uma tal álgebra por $C(V,Q)$.

EOREMA 2.1 - Dados V e Q como acima; existe sempre uma álgebra de Clifford $C(V,Q)$, única a menos de isomorfismos.

Demonstração: Sejam $T(V)$ a álgebra tensorial sobre V, e K o ideal em $T(V)$ gerado pelos elementos da forma

$$x \otimes x - Q(x).1, \ \forall x \in V.$$

Consideremos ainda a álgebra quociente

$$T(V)/K \text{ e } \pi : T(V) \longrightarrow T(V)/K$$

a projeção canônica.

Mostraremos que o par $(T(V)/K, \pi \circ i)$,

onde

$$i : V \longrightarrow T(V)$$

é a inclusão, é uma álgebra de Clifford sobre V associada a Q. Denotamos $T(V)/K$ por C. Observemos em primeiro lugar que

$$((\pi \circ i)(x))^2 = Q(x).1, \ \forall x \in V.$$

Seja agora

$$f: V \longrightarrow A \quad \text{linear, tal que}$$
$$f(x)^2 = Q(x).1.$$

Pela propriedade universal de $T(V)$ (cf. prop. 1.1), f admite extensão única a um homomorfismo

$$f': T(V) \longrightarrow A,$$

conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} & \\
T(V) \arrow[u, "\pi"] \arrow[dr, "f'"] & \\
V \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Agora, se

$$x \in V,\ f'(x \otimes x - Q(x).1) = f'(x)\, f'(x) - Q(x) f'(1)$$
$$= f(x)^2 - Q(x).1 = 0,$$

isto é,

$$(x \otimes x - Q(x).1) \in \operatorname{Ker} f', \forall\, x \in V,$$

o que acarreta $K \subset \operatorname{Ker} f'$ e então

$$f': T(V) \longrightarrow A$$

induz à um homomorfismo

$$g: \mathcal{C} \longrightarrow A,$$

tal que

$$g(\pi(w)) = f'(w), \forall\, w \in T(V).$$

m particular, se $x \in V$, temos

$$g((\pi \circ i)(x)) = g(\pi(x)) = f'(x) = f(x),$$

que expressa a comutatividade do diagrama.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rrd, "g"] & & \\ V \arrow[u, "\pi \circ i"] \arrow[rr, "f"'] & & A \end{tikzcd}$$

omo V gera $T(V)$, $(\pi \circ i)(V)$ gera C, de onde decorre a unicidade de g.

Quanto à unicidade de C, suponhamos (C,θ), (C',θ') duas álgebras de lifford sobre V associadas a Q. Então existem dois homomorfismos de álgebras

$$u: C \longrightarrow C' \quad e \quad v: C' \longrightarrow C$$

om

$$\theta' = u\theta \text{ e } \theta = v\theta',$$

onforme o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, shift right, "u"'] \\ V \arrow[ru, "\theta"] \arrow[rd, "\theta'"'] & \\ & C' \arrow[uu, phantom] \arrow[u, shift right, "v"'] \end{tikzcd}$$

sso implica $\theta = vu\theta$ e $\theta' = uv\theta'$. Da unicidade da fatoração das aplicações θ θ', $Id_C = vou$ e $Id_{C'} = uov$ de modo que u é isomorfismo. ∎

OBSERVAÇÃO 2.1 - Sejam V, Q e β como na definição 2.1. Denotemos por K_Q o ideal gerado por $x \otimes x - Q(x).1$, para todo $x \in V$ (que é o ideal considerado no teorema acima), e por K_β o ideal gerado por $x \otimes y + y \otimes x - \beta(x,y).1$, para todos x,y em V. É simples verificar, da relação entre Q e β, que $K_Q = K_\beta$ (cf[J]). Além disso, dada uma forma bilinear simétrica sobre V, podemos associá-la uma única forma quadrática de modo que elas se relacionem como Q e β da definição 2.1. Assim, podemos nos referir à álgebra de Clifford sobre V associada a uma forma bilinear simétrica dada β:

$$B(V,\beta) \cong T(V)/K_\beta \text{ (}\cong\text{ simboliza isomorfismo).}$$

DEFINIÇÃO 2.3 - Quando a forma quadrática Q (ou a forma bilinear simétrica associada β) é identicamente nula, a álgebra de Clifford $C(V,0)$ é chamada <u>álgebra exterior ou álgebra de Grassman sobre V</u> e será denotada por $\Lambda(V)$. A multiplicação em $\Lambda(V)$ é denotada por $x \wedge y$ (ao invés da usual justaposição xy ou de $x.y$). Em $\Lambda(V)$, temos

$$x \wedge x = 0 \text{ e, portanto, } x \wedge y = -y \wedge x,\ x,y \in V.$$

Os geradores de K_Q reduzem-se a $x \otimes x$, $x \in V$, de modo que $\Lambda(V)$ é $\mathbb{Z}$-graduada como quociente de $T(V)$ por um ideal homogênio.

PROPOSIÇÃO 2.2 - A projeção canônica π: $T(V) \longrightarrow \Lambda(V)$ é injetora em V, de modo que V pode ser identificado com sua imagem $\pi(V)$ em $\Lambda(V)$.

Demonstração: Os elementos de $K_Q = K_0$ são combinações lineares de elementos da forma

$$u \otimes (x \otimes x) \otimes v, \text{ onde } x \in V$$

e u,v são homogêneos em $T(V)$.

e

$$0 \neq u \in \overset{p}{\otimes} V, \quad 0 \neq v \in \overset{q}{\otimes} V,$$

ntão
$$u \otimes (x \otimes x) \otimes v \in T_{p+q+2}$$

daí seu grau ser no mínimo 2.

ssim, as componentes homogêneas não nulas de um elemento de K_0 têm grau, no ínimo, 2.

Como os elementos de V têm grau 1, concluímos que $K_0 \cap V = (0)$, e onde π é um isomorfismo em V. ∎

O próximo teorema fornece a estrutura da álgebra de Clifford obre um espaço vetorial de base indexada por um conjunto totalmente ordenado. le é análogo, para álgebras de Clifford, do Teorema de Poincaré - Birkhoff - itt (PBW). Esse último caracteriza a base da álgebra envolvente universal de ma álgebra de Lie a partir da base da álgebra de Lie original (cf. [H] ou J]). Na seção 3 deste capítulo estudaremos outro teorema também análogo ao BW para álgebras de Weyl. As provas desses dois teoremas são longas e arecidas com a do PBW. Por essas razões reservaremos a seção 4 para ambas as emonstrações.

EOREMA 2.3 (PBW - CASO CLIFFORD) - *Sejam* V *um espaço vetorial*, $(x_i,\ i \in J)$ *uma* *ase de* V, *onde* J *é um conjunto totalmente ordenado, e* β *uma forma bilinear* *imétrica sobre* V. *Então*

$$C(V,\beta)\ (\cong T(V)/K_\beta)$$

tem base 1 *e todos os produtos da forma*

$$\pi(x_{i_1}) \ldots\ldots \pi(x_{i_s}),\ s \geq 1,\ i_1 < \ldots < i_s,\ i_k \in J.$$

Em particular, $\pi: T(V) \longrightarrow C(V,\beta)$ é uma injeção em V (o que generaliza a proposição 2.2)

O teorema acima permite, a partir de agora, denotar um elemento $\pi(x_i) \in (V,\beta)$ simplesmente por x_i.

Obviamente o teorema 2.3 é válido para o caso particular das álgebras exteriores sobre V.

3. *Álgebras de Weyl e álgebras simétricas*

DEFINIÇÃO 3.1 - Seja V um espaço vetorial e

$$\beta: V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma forma bilinear alternada sobre V

isto é, $\beta(x,y) = -\beta(y,x)$, $\forall\ x,y \in V$). Um par (W,γ),

onde W é uma álgebra e $\gamma: V \longrightarrow W$ é uma aplicação linear tal que

$$\gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x) = \beta(x,y).1,$$

para todos x,y em V, é chamado uma álgebra de Weyl sobre V associada a β se satisfizer à seguinte propriedade universal:

Seja A uma álgebra e $f: V \longrightarrow A$ linear com

$$f(x)f(y) - f(y)f(x) = \beta(x,y).1,\ x,y \in V.$$

Então existe um único homomorfismo de álgebras

$$g: W \longrightarrow A$$

tal que o diagrama seguinte seja comutativo:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "g"] & \\ V \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Denotamos uma tal álgebra por $W(V,\beta)$.

TEOREMA 3.1 – Dados V e β como acima, existe sempre uma álgebra de Weyl $W(V,\beta)$, única a menos de isomorfismos.

Demonstração: Seja $T(V)$ a álgebra tensorial sobre V. Seja L o ideal bilateral em $T(V)$ gerado pelos elementos da forma

$$x \otimes y - y \otimes x - \beta(x,y).1, \ \forall\, x,y \in V.$$

Consideremos ainda a álgebra quociente $T(V)/L$ e

$$\pi\colon T(V) \longrightarrow T(V)/L$$

a aplicação quociente. Mostraremos que o par

$$(T(V)/L,\ \pi \circ i), \text{ onde } i\colon V \longrightarrow T(V) \text{ é a inclusão},$$

é uma álgebra de Weyl sobre V associada a β.

Denotemos $T(V)/L$ por W. Claramente, temos:

$$(\pi \circ i)(x)(\pi \circ i)(y) - (\pi \circ i)(y)(\pi \circ i)(x)$$

$$= \beta(x,y).1, \ x,y \in V.$$

Seja agora $f\colon V \longrightarrow A$ linear satisfazendo

$$f(x)f(y) - f(y)f(x) = \beta(x,y).1, \ \forall\, x,y \in V.$$

ela propriedade universal de $T(V)$ (cf. proposição 1.1), f admite extensão
nica a um homomorfismo

$$f': T(V) \longrightarrow A,$$

onforme o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
W \\
T(V) \arrow[u] \arrow[dr, "f'"] & \\
V \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

gora, para $x, y \in V$ temos:

$$f'(x \otimes y - y \otimes x - \beta(x,y).1)$$
$$= f'(x)f'(y) - f'(y)f'(x) - \beta(x,y)f'(1)$$
$$= f(x)f(y) - f(y)f(x) - \beta(x,y).1 = 0,$$

que acarreta $L \subset \operatorname{Ker} f'$. Consequentemente, f' induz um homomorfismo

$$g: W \longrightarrow A, \quad \text{tal que} \quad g(\pi(w)) = f'(w) \ \forall \ w \in T(V).$$

n particular, se $x \in V$, temos

$$g((\pi \circ i)(x)) = g(\pi(x)) = f'(x) = f(x),$$

que expressa a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "g"] & \\
V \arrow[u, "\pi \circ i"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

mo V gera $T(V)$, $(\pi \circ i)(V)$ gera W, do que decorre a unicidade de g.

A prova da unicidade de W é a usual para objetos universais
omo no teorema 2.1). ∎

DEFINIÇÃO 3.2 - Quando a forma bilinear β é identicamente nula, a álgebra de Weyl $W(V,0)$ é chamada <u>álgebra simétrica sobre V</u> e será denotada por $S(V)$.

Os geradores de L, neste caso, reduzem-se a

$$x \otimes y - y \otimes x, \; x,y \in V,$$

de modo que em $W(V,0)$, $xy = yx$, $\forall\, x,y \in V$, ou seja, $S(V)$ é comutativa. Além disso, $S(V)$ é $\mathbb{Z}$-graduada como quociente de $T(V)$ por um ideal homogêneo.

PROPOSIÇÃO 3.2 - A projeção canônica $\pi: T(V) \longrightarrow S(V)$ é um isomorfismo em V, de modo que V pode ser identificado com sua imagem $\pi(V)$.

Demonstração: Análoga à da proposição 2.2 ∎

TEOREMA 3.3 (PBW - CASO WEYL) - Sejam V um espaço vetorial, J um conjunto totalmente ordenado, $\{x_i,\ i \in J\}$ uma base de V e β uma forma bilinear alternada sobre V. Então $W(V,\beta)$ $(\cong T(V)/L)$ tem base 1 e todos os produtos da forma

$$\pi(x_{i_1})\ldots\pi(x_{i_n}), \quad n \geq 1, \quad i_1 \leq \ldots \leq i_n, \quad i_k \in J.$$

Em particular, $\pi: T(V) \longrightarrow W(V,\beta)$ é uma injeção em V (o que generaliza a proposição 3.2).

O teorema acima permite denotar, a partir de agora $\pi(x_i) \in W(V,\beta)$ simplesmente por x_i.

Obviamente o teorema 3.3 é válido para o caso particular das álgebras simétricas sobre V.

. *Demonstração dos teoremas de estrutura das álgebras de Clifford e de Weyl*

Antes de demonstrarmos esses teoremas (2.3 e 3.3), precisamos ıtroduzir alguma terminologia.

Sejam V um espaço vetorial de base $\{x_i, i \in J\}$, onde J é um conjunto ›talmente ordenado,

$$\beta: V\times V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ e } \gamma: V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

›rmas bilineares simétrica e alternada, respectivamente, sobre V. Sejam ainda $V)$ a álgebra tensorial sobre V, L_β o ideal em $T(V)$ gerado pelos elementos da ›rma

$$x \otimes y+y \otimes x - \beta(x,y).1,$$

›ara todos x e y em V e L_γ o ideal em $T(V)$ gerado por

$$x \otimes y - y \otimes x - \gamma(x,y).1, \ \forall\, x,y \in V.$$

›nsideremos as álgebras

$$C = C(V,\beta) \cong T(V)/L_\beta,$$

$$W = W(V,\gamma) \cong T(V)/L_\gamma,$$

›espectivamente de Clifford e de Weyl sobre V (cf. seções 2 e 3).

Por um <u>monômio</u> em $T(V)$ entenderemos um tensor que é o 1 ou é da forma $_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_p}$, $p\geq 1$, $i_1, \ldots, i_p \in J$. Um <u>monômio padrão</u> é um tensor que é o 1 ou a forma $x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_p}$, $p\geq 1$, $i_1\leq\ldots\leq i_p$. <u>Um monômio padrão estrito</u> é um ›onômio padrão que é o 1 ou da forma $x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_p}$, $p\geq 1$, $i_1 < \ldots < i_p$.

Se $p\geq 2$ e $t = x_{j_1}\otimes\ldots\otimes x_{j_p}$, efinimos, para $0\leq i<k\leq p$,

$$n_{i,k} = \begin{cases} 0, & \text{se } j_i \leq j_k \\ 1, & \text{se } j_i > j_k \end{cases}$$

efinimos então o <u>índice de t</u> por $\text{ind}(t) = \sum_{1\leq i<k\leq p} n_{i,k}$.

BSERVAÇÃO 4.1 - Seja $t = x_{j_1}\otimes\ldots\otimes x_{j_p}$. Temos:

) O índice de t é o número de pares (i,k), $1\leq i,k\leq p$ para os
uais $i<k$ mas $j_i>j_k$, ou seja, o índice de t mede o quanto t deixa de ser
onômio padrão.

) Se $j_k>j_{k+1}$ e se $t' = x_{j_1}\otimes\ldots\otimes x_{j_{k+1}}\otimes x_{j_k}\otimes\ldots\otimes x_{j_p}$, então
verifica-se facilmente que $\text{índ}(t) = \text{índ}(t')+1$.

) $\text{Ind}(t)=0 \Longleftrightarrow$ t é um monômio padrão.

Para $p,d\geq 0$, seja T_p^d o sub-espaço gerado pelos monômios de grau p e
ndice d. Claro que $T_0^0=T_0$, $T_1^0=T_1$ e $T_p=\bigoplus_{d\geq 0} T_p^d$. Escrevemos também: $T^d=\bigoplus_{p\geq 0} T_p^d$.

Finalmente, denotemos por T_p^{00} o espaço dos monômios padrões estritos
e grau p e por $T = \bigoplus_{p\geq 0} T^{00}$ o espaço dos monômios padrões estritos.

Nas proposições desta seção, as letras *C* e W fazem referência aos
asos Clifford e Weyl.

EMA 4.1 - W - Todo elemento de T(V) é côngruo módulo L_γ a uma combinação
inear de monômios padrões.

Demonstração: Basta provar para monômios, o que faremos por indução sobre o grau e o índice. Para T_0 e T_1 a afirmação do lema é claramente verdadeira, portanto o é em $T_0 \oplus T_1$. Fixemos $p \geq 1$ e suponhamos a afirmação válida para $\bigoplus_{k=1}^{p-1} T_k$.

Seja $t = x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} \in T_p$. Se t for padrão, nada há a mostrar. Seja $d \geq 1$ e suponhamos válida a afirmação para todo monômio em $\bigoplus_{j=1}^{d-1} T_p^j$. Suponhamos então t em T_p^d. Assim, existe $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ tal que $j_k > j_{k+1}$. Temos:

$$x_{j_k} \otimes x_{j_{k+1}} - x_{j_{k+1}} \otimes x_{j_k} - \gamma(x_{j_k}, x_{j_{k+1}}).1 = \ell \in L_\gamma \Longrightarrow$$

$$x_{j_k} \otimes x_{j_{k+1}} = x_{j_{k+1}} \otimes x_{j_k} + \gamma(x_{j_k}, x_{k_{k+1}}).1 + \ell \Longrightarrow$$

$$t = x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} = \ldots \otimes x_{j_{k+1}} \otimes x_{j_k} \otimes \ldots$$

$$+ \gamma(x_{j_k}, x_{j_{k+1}})\, x_{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{x_{j_k} \otimes x_{j_{k+1}}} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} + \ell', \text{ onde}$$

$\ell' \in L_\gamma$ (o símbolo $\widehat{x_{j_k} \otimes x_{k+1}}$ significa que o termo $x_{j_k} \otimes x_{j_{k+1}}$ não ocorre em $x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}$). Como o primeiro somando acima está em T_p^{d-1} e o segundo em T_{p-2}, o lema segue por indução sobre p e d. ∎

LEMA 4.1 - C - Todo elemento de T(V) é côngruo módulo L_β a uma combinação linear de monômios padrões estritos.

Demonstração: Primeiramente provamos, de modo quase idêntico à prova do lema 4.1-W, que todo elemento de T(V) é côngruo módulo L_β a uma combinação linear de 1 e de monômios padrões. Dessa forma, basta demonstrar a afirmação do lema para monômios padrões, o que faremos por indução sobre o grau.

viamente a afirmação é verdadeira para o sub-espaço $T_0^0 \oplus T_1^0$. Fixemos $p \geq 1$ e ponhamos o lema válido para o sub-espaço $\bigoplus_{k=1}^{p-1} T_K^0$.

ja $t = x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} \in T_p^0$. Se t não é estrito, existe k, $1 \leq k \leq p-1$ tal que $_{k} = x_{j_{k+1}} = x$. Temos:

$$x \otimes x + x \otimes x - \beta(x,x).1 = \ell \in L_\beta \Longrightarrow$$

$$x \otimes x = 1/2\ \beta(x,x).1 + \ell \Longrightarrow$$

$$t = 1/2\ \beta(x,x)\ x_{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{x \otimes x} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} + \ell', \text{ com } \ell' \in L_\beta.$$

mo a 1ª parcela está em T_{p-2}^0, o lema segue por indução. ■

OREMA 4.2 - W.(PBW - TEOREMA 3.3) - Com a notação acima, temos que o njunto $\{1, x_{j_1} \ldots x_{j_n} :\ j_k \in J,\ j_1 \leq \ldots \leq j_n,\ n \geq 1\}$ é uma base de $W(V,\gamma)$.

Demonstração: Sejam B_n o espaço vetorial de base $\{x_{j_1} \ldots x_{j_n} :\ j_1 \leq \ldots \leq j_n,$ $n \geq 1\}$, $B_0 = \mathbb{C}$ e $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$. Suponhamos construir uma aplicação linear

$$\sigma:\ T(V) \longrightarrow B$$

tisfazendo as seguintes condições:

$$)\ \begin{cases} \text{(i)} & \sigma(1)=1; \\ \text{(ii)} & \sigma(x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}) = x_{j_1} \ldots x_{j_p},\ \text{se } j_1 \leq \ldots \leq j_p; \\ \text{(iii)} & \sigma(\ldots \otimes x_{j_s} \otimes x_{j_{s+1}} \otimes \ldots) = \sigma(\ldots \otimes x_{j_{s+1}} \otimes x_{j_s} \otimes \ldots) \\ & \quad + \gamma(x_{j_s}, x_{j_{s+1}})\sigma(\ldots \widehat{\otimes x_{j_s} \otimes x_{j_{s+1}}} \otimes \ldots) \end{cases}$$

ssas condições, teríamos, de (i) e (ii), que a imagem por σ dos monômios drões são vetores linearmente independentes de B e, de (iii), que σ anula . Conseqüentemente, $L_\gamma \cap T^0 = (0)$. Mas pelo lema 4.1-W temos que

$$T(V) = T^0 + L_\gamma.$$

rtanto

$$T(V)=L_{\gamma}\oplus T^{0} \qquad (I)$$

nsiderando agora a sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow L_{\gamma} \longrightarrow T(V) \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

mos. $T(V) \cong L_{\gamma} \oplus W$ (II).

nalmente, concluiríamos de (I) e (II) que $T^{0}\cong W$, via projeção canônica, o que monstraria o teorema.

Tudo o que temos a fazer é, então, construir uma tal aplicação σ. finimos $\sigma(1)=1$, $\sigma(x_j)=x_j$, $\forall\ j\in J$. Supanhamos $p\geq 2$ e que σ esteja definida em $\bigoplus_{q=1}^{p-1} T_q$ satisfazendo (*) para todo monômio de grau $\leq p-1$.

ja

$$t = x_{j_1}\otimes\ldots\otimes x_{j_p}.$$

e $t\in T_p^{0}$, pomos

$$\sigma(t) = x_{j_1}\ldots x_{j_p}.$$

ponhamos $\operatorname{ind}(t) = d\geq 1$ e que σ tenha sido definida de modo a satisfazer (*) ra todos os monômios de $\bigoplus_{k=1}^{d-1} T_p^{k}$. De $d\geq 1$,

iste $k \in \{1,\ldots, p-1\}$ tal que $j_k > j_{k+1}$.

finimos

$$\sigma(t) = \sigma(\ldots\otimes x_{j_{k+1}} \otimes x_{j_k} \otimes\ldots)$$

$$+\ \gamma(x_{j_k}, x_{j_{k+1}})\ \sigma(\ldots\otimes \widehat{x_{j_k} \otimes x_{j_{k+1}}} \otimes\ldots).$$

a 1ª parcela desta soma, σ está calculada em um elemento de T_p^{d-1} e, na 2ª, σ stá calculada em um elemento de T_{p-2}. Logo, pela hipótese de indução, eríamos construído σ satisfazendo (*). Só precisamos então verificar que σ stá bem definida, isto é, que independe da escolha do par $j_k > j_{k+1}$. Seja então um outro inteiro nas condições de k:

$$L \in (1,\ldots,p-1) \text{ com } j_L > j_{L+1}.$$

omemos

$$v = \sigma(\ldots \otimes x_{j_{k+1}} \otimes x_{j_k} \otimes \ldots) + \gamma(x_{j_k}, x_{j_{k+1}})\sigma(\ldots \otimes x_{j_k} \otimes x_{j_{k+1}} \otimes \ldots) \text{ e}$$

$$v = \sigma(\ldots \otimes x_{j_{L+1}} \otimes x_{j_L} \otimes \ldots) + \gamma(x_{j_L}, x_{j_{L+1}})\sigma(\ldots \otimes x_{j_L} \otimes x_{j_{L+1}} \otimes \ldots) \quad \text{e,}$$

or simplificação de notação , $Y_t = x_{j_t}$.

emos dois casos:

) <u>caso</u>: $k-L \geq 2$:

emos:

$$\begin{aligned}
u &= \sigma(\ldots \otimes Y_L \otimes Y_{L+1} \otimes \ldots \otimes Y_{k+1} \otimes Y_k \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_k, Y_{k+1})\sigma(\ldots \otimes Y_L \otimes Y_{L+1} \otimes \ldots \otimes \widehat{Y_k \otimes Y_{k+1}} \otimes \ldots) \\
&= \sigma(\ldots \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L \otimes \ldots \otimes Y_{k+1} \otimes Y_k \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_L, Y_{L+1})\sigma(\ldots \otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+1}} \otimes \ldots \otimes Y_{k+1} \otimes Y_k \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_k, Y_{k+1})\sigma(\ldots \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L \otimes \ldots \otimes \widehat{Y_k \otimes Y_{k+1}} \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_L, Y_{L+1})\gamma(Y_r, Y_{r+1})\sigma(\ldots \otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+1}} \otimes \ldots \otimes \widehat{Y_k \otimes Y_{k+1}} \otimes \ldots);
\end{aligned}$$

por outro lado ,

$$\begin{aligned}
v &= \sigma(\ldots \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L \otimes \ldots \otimes Y_k \otimes Y_{k+1} \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_L, Y_{L+1})\sigma(\ldots \otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+1}} \otimes \ldots . Y_k \otimes Y_{k+1} \otimes \ldots) \\
&= \sigma(\ldots \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L \otimes \ldots . \otimes Y_{k+1} \otimes Y_k \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_k, Y_{k+1})\sigma(\ldots \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L \otimes \ldots \otimes \widehat{Y_k \otimes Y_{k+1}} \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_L, Y_{L+1})\sigma(\ldots \otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+1}} \otimes \ldots \otimes Y_{k+1} \otimes Y_k \otimes \ldots) \\
&\quad + \gamma(Y_L, Y_{L+1})\gamma(Y_k, Y_{k+1})\sigma(\ldots \otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+1}} \otimes \ldots \otimes \widehat{Y_k \otimes Y_{k+1}} \otimes \ldots)
\end{aligned}$$

go, $u=v$.

) caso: k=L+1:

emos:

$$
\begin{aligned}
u &= \sigma(\ldots\otimes Y_L \otimes Y_{L+2} \otimes Y_{L+1}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_{L+1},Y_{L+2})\sigma(\ldots\otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+1}} \otimes Y_{L+2}\otimes\ldots)\\
&= \sigma(\ldots\otimes Y_{L+2}\otimes Y_L\otimes Y_{L+1}\otimes\ldots)\\
&\quad +\gamma(Y_L,Y_{L+2})\sigma(\ldots\otimes \widehat{Y_L \otimes Y_{L+2}} \otimes Y_{L+1}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_{L+1},Y_{L+2})\sigma(\ldots\otimes Y_L \otimes\widehat{Y_{L+1}\otimes Y_{L+2}}\otimes\ldots)\\
&= \sigma(\ldots\otimes Y_{L+2} \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+1})\sigma(\ldots\otimes Y_{L+2} \otimes\widehat{Y_L\otimes Y_{L+1}}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+2})\sigma(\ldots\widehat{\otimes Y_L\otimes Y_{L+2}} \otimes Y_{L+1}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_{L+1},Y_{L+2})\sigma(\ldots\otimes Y_L \otimes\widehat{Y_{L+1}\otimes Y_{L+2}}\otimes\ldots);\\
v &= \sigma(\ldots\otimes Y_{L+1} \otimes Y_L \otimes Y_{L+2}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+1})\sigma(\ldots\widehat{\otimes Y_L\otimes Y_{L+1}} \otimes Y_{L+2}\otimes\ldots)\\
&= \sigma(\ldots\otimes Y_{L+1} \otimes Y_{L+2} \otimes Y_L\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+2})\sigma(\ldots\otimes Y_{L+1} \otimes\widehat{Y_L\otimes Y_{L+2}}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+1})\sigma(\ldots\widehat{\otimes Y_L\otimes Y_{L+1}} \otimes Y_{L+2}\otimes\ldots)\\
&= \sigma(\ldots\otimes Y_{L+2} \otimes Y_{L+1} \otimes Y_L\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_{L+1},Y_{L+2})\sigma(\ldots\widehat{\otimes Y_{L+1}\otimes Y_{L+2}} \otimes Y_L\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+2})\sigma(\ldots\otimes Y_{L+1} \otimes\widehat{Y_L\otimes Y_{L+2}}\otimes\ldots)\\
&\quad + \gamma(Y_L,Y_{L+1})\sigma(\ldots\widehat{\otimes Y_L\otimes Y_{L+1}} \otimes Y_{L+2}\otimes\ldots)
\end{aligned}
$$

ovamente, $u=v$ e o teorema está demonstrado. ∎

EOREMA 4.2 - C (PBW-TEOREMA 2.3) - Com a notação anterior, temos que o onjunto $\{1, x_{j_1}\ldots x_{j_n} : j_K \in J,\ j_1<\ldots<j_n,\ n\geq 1\}$ é uma base de $C(V,\beta)$.

Demonstração: Sejam C_n um espaço vetorial de base $\{x_{j_1}\ldots x_{j_n}$: $<\ldots<j_n,\ n\geq 1\}$, $C_0=\mathbb{C}$ e $C=\bigoplus_{n\geq 0} C_n$

ponhamos construída umma aplicação linear

$T(V)\longrightarrow C$ satisfazendo as seguintes condições:

$$
)\begin{cases}
(i) & \tau(1)=1\\
(ii) & \tau(x_{j_1}\otimes\ldots\otimes x_{j_p})=x_{j_1}\ldots x_{j_p},\ \text{se } j_1<\ldots<j_p;\\
(iii) & \tau(\ldots\otimes x_{i_s}\otimes x_{i_{s+1}}\otimes\ldots)=-\tau(\ldots\ldots x_{i_{s+1}}\otimes x_{i_s}\ldots\ldots)\\
& \quad +\beta(x_{i_s},x_{i_{s+1}})\tau(\ldots\widehat{\otimes x_{i_s}\otimes x_{i_{s+1}}}\otimes\ \ )
\end{cases}
$$

Nessas condições, teríamos, de (i) e (ii), que a imagem por τ dos nômios padrões estritos são vetores linearmente independentes de C e, de ii), que τ anula L_β.

Consequentemente, $L_\beta\cap T^{00}=(0)$. Mas o lema 4.1 - C diz que $T(V)=T^{00}+L_\beta$. tão $T(V)=L_\beta\oplus T^{00}$ (I).

nsiderando agora a sequência exata de espaços vetoriais

$$0\longrightarrow L_\beta\longrightarrow T(V)\longrightarrow C\longrightarrow 0,\ \text{temos}$$

$$T(V)\cong L_\beta\oplus C \qquad\qquad (II)$$

nalmente, concluiríamos de (I) e (II) que $T^{00}\cong C$, via projeção canônica, o e demonstraria o teorema.

Tudo o que temos a fazer então é construir uma tal aplicação τ.

finimos

$$\tau(1)=1,\ \tau(x_j)=x_j,\ \forall\ j\in J.$$

ponhamos $p \geq 2$ e que τ esteja bem definida em $\bigoplus_{q=1}^{p-1} T_q$ satisfazendo (*) para

do monômio de grau $\leq p-1$.

ja $\qquad t = x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}$. $\quad$ Se $t \in T_p^{00}$, pomos

$$\tau(t) = x_{j_1} \ldots x_{j_p}.$$

uponhamos então $t \in T_p^0$ não estrito, isto é, existe $L \in \{1,\ldots,p\}$ tal que

$= j_{L+1}$. Denotamos $x_{j_L} = x_{j_{L+1}}$ por x.

efinimos

$$\tau(t) = (\beta(x,x)/2)\tau(x_{j_1} \otimes \ldots \widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}).$$

oservamos que $\qquad x_{j_1} \otimes \ldots \widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} \in T_{p-2}$,

nde já temos τ definida. Resta mostrar que a definição acima independe da scolha do "termo em repetição". Suponhamos então em t dois termos x e y em epetição, isto é, que t seja do tipo

$$x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x \otimes x \otimes \ldots \otimes y \otimes y \otimes \ldots \otimes x_{j_p}.$$

emos, por um lado que

$$\tau(t) = \frac{\beta(x,x)}{2}\tau(\ldots\widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \otimes y \otimes y \otimes \ldots)$$

$$= \frac{\beta(x,x)}{2}\left(\frac{\beta(y,y)}{2}\,\tau(\ldots\widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \widehat{\otimes y \otimes y} \otimes \ldots)\right)$$

(hipótese de indução sobre p)

$$= \frac{\beta(x,x)\,\beta(y,y)}{4}\,\tau(\ldots\widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \widehat{\otimes y \otimes y} \otimes \ldots);$$

por outro lado,

$$\tau(t) = \frac{\beta(y,y)}{2}\,\tau(\ldots \otimes x \otimes x \otimes \ldots \widehat{\otimes y \otimes y} \otimes \ldots)$$

$$= \frac{\beta(y,y)}{2}\,\frac{\beta(x,x)}{2}\,\tau(\ldots\widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \widehat{\otimes y \otimes y} \ldots)$$

$$= \frac{\beta(y,y)\,\beta(x,x)}{4}\,\tau(\ldots\widehat{\otimes x \otimes x} \otimes \ldots \widehat{\otimes y \otimes y} \otimes \ldots).$$

a igualdade dos dois resultados encontrados, τ está bem definida em

$$(\bigoplus_{q=1}^{p-1} T_q) \oplus T_p^0.$$

Seja agora $t = x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}$ tal que $\text{índ}(t) = d \geq 1$ e suponhamos que tenha sido definida de modo a satisfazer às condições (*) para todos os onômios de $\bigoplus_{k=1}^{d-1} T_p^k$. De $d \geq 1$, existe $k \in \{1,\ldots,p\}$ al que

$$j_k > j_{k+1}.$$

efinimos

$$\tau(t) = \tau(\ldots \otimes x_{j_{k+1}} \otimes x_{j_k} \otimes \ldots)$$

$$+ \beta(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})\, \tau(\ldots \otimes \widehat{x_{i_k} \otimes x_{i_{k+1}}} \otimes \ldots).$$

1ª parcela desta soma está em T_p^{d-1} e a 2ª em T_{p-2}, onde τ já está definida ela hipótese indutiva. Assim, se τ estiver também bem definida neste caso, eríamos construído a aplicação desejada.

prova deste fato é quase idêntica à da parte correspondente do teorema 4.2 - e será omitida aqui. ∎

. *Representação de uma álgebra de Clifford em uma álgebra exterior*

Seja $\mathcal{Z}$ o espaço vetorial de base

$$\{z_j;\ j \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \beta: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

forma bilinear simétrica definida por

$$\beta(z_i, z_j) = 2\delta_{i+j,0}, \quad \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$$

razão para tomarmos uma base indexada por $\mathbb{Z}$ e a forma β como acima é com stas ao que se fará no capítulo III). Denotemos por $C(Z)$ a álgebra de lifford $C(Z,\beta)$. Pelo teorema 2.3, $C(Z)$ tem base 1 e todos os monômios do ipo

$$z_{j_1}\ldots z_{j_n};\ j_1<\ldots<j_n,\ j\ \in \mathbb{Z}.$$

omo álgebra, $C(Z)$ é gerada por

$$\{z_j:\ j\in\mathbb{Z}\},$$

om os z_j's sujeitos às relações $z_iz_j + z_jz_i = 2\,\delta_{i+j,0}.1$

Consideremos agora o sub-espaço vetorial de Z, Z_-, de base

$$\{z_{-j}:\ j\geq 1\}.$$

laramente, a restrição de β a $Z_-\times Z_-$ é a forma nula, de modo que $C(Z_-,\beta) = $ $Z_-)$. Obtemos uma $\mathbb{Z}$-graduação de $\Lambda(Z_-)$ atribuindo-se grau $(-j)$ ao elemento $_{-j}$, e grau $(1) = 0$.

ssim,

$$\Lambda(Z_-) = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda_{-n} \text{ onde } \Lambda_0 = \mathbb{C}.1$$

para cada $n\geq 1$, o sub-espaço homogêneo Λ_{-n} tem como base os produtos.

$$z_{-j_1}\wedge\ldots\wedge z_{-j_r},\ -j_1<\ldots<-j_r \text{ e } \sum_{k=1}^{r} j_r = n.$$

Observemos finalmente que a dimensão de Λ_{-n} é o número de partições de n em nteiros positivos sem repetição, por exemplo:

$$\Lambda_{-5} = \mathbb{C}.(z_{-5})\oplus \mathbb{C}(z_{-4}\wedge z_{-1}) \oplus \mathbb{C}(z_{-3}\wedge z_{-2})$$

EOREMA 5.1 – Seja $\varphi: C(Z) \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda(Z_-))$ homomorfismo de álgebras al que

$$\varphi(z_j)(1) = 0$$

$$\varphi(z_{-j})(w) = z_{-j}\wedge w, \text{ para } j>0 \text{ e } w\in\Lambda(Z_-)$$

$$\varphi(z_0)(1) = -1,$$

$$\varphi(1)(w) = w, \text{ para } w\in\Lambda(Z_-).$$

Então φ é uma representação irredutível de $C(Z)$ em $\Lambda(Z_-)$, segundo a qual o operador $\varphi(z_j)$ tem grau j, $\forall\ j \in \mathbb{Z}$.

Utilizaremos a notação de módulo, isto é, para $x \in C(Z)$ e $w \in \Lambda(Z_-)$ escrevemos $x.w$ ao invés de $\varphi(x)(w)$).

Demonstração: Considerando as relações $z_i z_j + z_j z_i = 2\delta_{i+j,0}.1$ em $C(Z)$ e as ações definidas no enunciado, prova-se por indução sobre o comprimento de $z_{-k_1} \dots z_{-k_n}$ que:

i) Para $j>1$, $z_j(z_{-k_1} \dots a_{-k_n})$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\delta_{j-k_i,0}(-1)^{i+1} z_{-k_1} \wedge \dots \wedge z_{-k_i} \wedge \dots \wedge z_{-k_n}$$

ii) $z_0(z_{-k_1} \wedge \dots \wedge z_{-k_n}) = (-1)^{n+1}(z_{-k_1} \wedge \dots \wedge z_{-k_n})$

(Para ilustrar o método utilizado na prova de (i) e (ii), faremos o 1º passo da indução de (i): queremos a expressão de $z_j . z_{-k}$, $j,k \geq 1$. Temos: $z_j z_{-k} + z_{-k} z_j = 2\delta_{j-k,0}.1$. Fazendo agir em $1 \in \Lambda(Z_-)$, obtemos:

$$(z_j z_{-k} + z_{-k} z_j).1 = (2\delta_{j-k,0}.1).1 \implies$$

$$(z_j z_{-k}).1 + (z_{-k} z_j).1 = \delta_{j-k,0}.1 \in \Lambda(Z_-) \implies$$

$$z_j(z_{-k}.1) + z_{-k}(z_j.1) = 2\delta_{j-k,0}.1$$

$$- z_j(z_{-k}.1) + z_{-k}.0 = \delta_{j-k,0}.1 \implies$$

$$z_j . z_{-k} + 0 = \delta_{j-k,0}.1 \implies$$

$$z_j . z_{-k} = \delta_{j-k}.1 \in \Lambda(Z_-))$$

Estendendo as ações por linearidade, obtemos em $\Lambda(Z_-)$ uma estrutura de $C(Z)$-módulo. Observemos que, enquanto $z_j.1=0$, $\forall\ j>0$, o 1 gera o $C(Z)$-módulo $\Lambda(Z_-)$ pois:

$$z_{-j}.1 = z_{-j} \wedge 1 = z_{-j},\ \forall\ j>0 \implies z_{-k}.z_{-j} = z_{-k} \wedge z_{-j},\ \forall\ j,k>0.$$

Analogamente, obtemos qualque elemento básico $z_{-j_1}\wedge\ldots\wedge z_{-j_r}$ de $\Lambda(Z_-)$ pela ação sucessiva de operadores do tipo z_{-j}, $j>0$, em 1.

Para mostrar a irredutibilidade, verificaremos que se V é um sub-módulo não nulo de $\Lambda(Z_-)$, então $V = \Lambda(Z_-)$.
Seja $w\in V$, $w\neq 0$. Então w é soma de elementos do tipo

$$z_{-k_1}\wedge\ldots\wedge z_{-k_r},\ r\geq 1,$$

a menos de escalares.
Consideremos, entre as componentes homogêneas de w, um monômio u de comprimento máximo:

$$u = z_{k_1}\wedge\ldots\wedge z_{-k_r}.$$

Estudemos a ação do operador $z_{k_r}\ldots z_{k_1}$ em w.

$$z_{k_r}\ldots z_{k_1}.u = z_{k_r}.(z_{k_{r-1}}.(\ldots(z_{k_1}.(z_{-k_1}\wedge\ldots\wedge z_{-k_r}))\ldots))$$

$$\overset{(i)}{=} z_{k_r}.(z_{k_{r-1}}.(\ldots(z_{k_2}(2z_{-k_2}\wedge\ldots\wedge z_{-k_r}))\ldots)) \overset{(i)}{=} \ldots \overset{(i)}{=} 2^n.1 \in \mathbb{C}.1\ ;$$

Seja v um outro somando de w:

$$v = z_{-j}\wedge\ldots\wedge z_{-j_s},\quad s\geq 1.$$

Se $(j_1,\ldots,j_s) \neq (k_1,\ldots,k_r)$, então, usando (i), é fácil ver que $z_{k_r}\ldots z_{k_1}$ anula v.
Em conclusão, $z_{k_r}\ldots z_{k_1}.w = 2^n.1\in V$. Consequentemente, $1\in V$. Como 1 gera $\Lambda(Z_-)$, concluímos que $V = \Lambda(Z_-)$.

Para demonstrar a afirmação com respeito ao grau, fixemos arbitrariamente um monômio $z_{-j_1}\wedge\ldots\wedge z_{-j_r}$ da base de Λ_{-n} (isto é,

$$-j_1<\ldots<-j_r \text{ e } \sum_{i=1}^{r} j_i = n).$$

Temos:

$$z_0.(z_{-j_1}\wedge\dots\wedge z_{-j_r}) = (-1)^{r+1}(z_{-j_1}\wedge\dots\wedge z_{-j_r}) \in \Lambda_{-n}\ ;$$

para $i\geq 1$, $$z_{-i}.(z_{-j_1}\wedge\dots\wedge z_{-j_r}) = z_{-i}\wedge z_{-j_1}\wedge\dots\wedge z_{-j_r} \in \Lambda_{n-i},$$

e $$z_i.(z_{-j_1}\wedge\dots\wedge z_{-j_r}) = \sum_{k=1}^{r} 2\delta_{i-j_k,0}\,(-1)^{k+1} z_{-j_1}\wedge z_{-j_k}\wedge\dots\wedge z_{-j_r}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{k+1}\, z_{-j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{z_{-j_k}}\wedge\dots\wedge z_{-j_r}, & \text{se } i=j_k \text{ para algum} \\ & k\in\{1,2,\dots,r\}\ ; \\ 0, & \text{se } i\notin\{j_1,\dots,j_r\}. \end{cases}$$

Em ambos os casos, o elemento encontrado pertence a Λ_{i-n}.

5 - *Representação de uma álgebra de Weyl em uma álgebra simétrica*

Seja Z^1 um espaço vetorial de base

$$\{z_j:\ j\in 2\mathbb{Z}+1\} \text{ e } \gamma:\ Z^1\times Z^1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

a forma bilinear alternada definida por

$$\gamma(z_i,z_j) = 2i\delta_{i+j,0},\ \text{para } i,j\in 2\mathbb{Z}+1$$

(A indexação por $2\mathbb{Z}+1$ e a consideração da forma γ como acima é com vista ao que se fará no capítulo III).

Denotemos por $W(Z^1)$ a álgebra de Weyl $W(Z^1,\gamma)$.

Pelo teorema 3.3, $W(Z^1)$ tem base 1 e todos os monômios do tipo

$$z_{j_1}^{r_1} z_{j_2}^{r_2}\dots z_{j_n}^{r_n},\quad j_1<j_2<\dots<j_n,\quad j_k\in 2\mathbb{Z}+1,\quad r_k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Como álgebra, $W(Z^1)$ é gerada por $\{z_j:\ j\in 2\mathbb{Z}+1\}$, com os z_j's sujeitos às relações $z_iz_j - z_jz_i = 2i\delta_{i+j,0}.1$.

Consideremos agora o sub-espaço vetorial de Z^1, Z^1_-, de base $\{z_{-j}:$ $2\mathbb{N}+1\}$.

laramente, a restrição de γ a $Z^1_- \times Z^1_-$ é a forma nula, de modo que $W(Z^1_-,\gamma) =$ $S(Z^1_-)$ (isto é, a álgebra simétrica sobre Z^1_-).

Obtemos uma $\mathbb{Z}$-graduação de $S(Z^1_-)$ atribuindo-se grau $-j$ ao elemento z_{-j}, $j\in 2\mathbb{N}+1$, e grau$(1)=0$.

ssim,

$$S(Z^1_-) = \bigoplus_{n\geq 0} S_{-n}$$

nde

$$S_0 = \mathbb{C}.1 \text{ e, para cada } n\geq 1,$$

sub-espaço homogêneo S_{-n} tem como base os produtos

$$z_{-j_1}^{k_1} \dots z_{-j_r}^{k_r},\ -j_1 < \dots < -j_r \text{ e } \sum_{i=1}^{r} j_i k_i = n.$$

oservemos finalmente que a dimensão de S_{-n} é o número de partições de n em iteiros positivos ímpares, por exemplo:

$$S_{-5} = \mathbb{C}.(z_{-5})\ \mathbb{C}.(z_{-3}z_{-1}^2)\ \mathbb{C}.(z_{-1}^5).$$

OREMA 6.*1* - Seja $\Psi: W(Z') \longrightarrow \mathrm{End}(S(Z^1_-))$ homomorfismo de álgebras tal e

$$\Psi(z_j)(1) = 0,\ \Psi(z_{-j})(f) = z_{-j}f, \text{ para } j\in 2\mathbb{N}+1,$$

$$\Psi(1)(f) = f, \text{ para todo } f\in S(Z^1_-).$$

tão Ψ é uma representação irredutível de $W(Z^1)$ em $S(Z^1_-)$, segundo o qual o erador $\Psi(z_j)$ tem grau j, $\forall\ j\in 2\mathbb{Z}+1$.

tilizaremos a notação de módulo, isto é, para $x\in W(Z^1)$ e $f\in S(Z^1_-)$, escrevemos f ao invés de $\Psi(x)(f)$).

Demonstração: Como na demonstração do teorema 5.1, considerando as [re]lações $z_i z_j - z_j z_i = 2i\delta_{i+j,0}.1$ em $W(Z_-^1)$ e as ações definidas no enunciado, [pr]ova-se, por indução, que para $j \in 2\mathbb{N}+1$,

$$z_j.(z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_r}^{n_r}) = \sum_{i=1}^{r} 2n_i j\delta_{j-k_i,0}(z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_i}^{n_i-1} \dots z_{-k_r}^{n_r})$$

[Es]tendendo as ações por linearidade, obtemos em $S(Z_-^1)$ a estrutura de [W(]Z^1)-módulo.

[Ob]servemos, como no caso Clifford, que $z_j.1 = 0$, $\forall\, j>0$ e que o 1 gera o [W(]Z^1)-módulo $S(Z_-^1)$.

Para provar a irredutibilidade do $W(Z^1)$-módulo $S(Z_-^1)$, verificaremos [qu]e se V é um sub-módulo não nulo de $S(Z_-^1)$, então $V = S(Z_-^1)$.

[Se]ja f não nulo em V. Então f é soma de monômios do tipo $z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_r}^{n_r}$, a menos [de] escalares. Consideremos, entre as componentes homogêneas de f, um monômio g [on]de aparece o maior expoente presente em f, digamos n_j em

$$g = z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_j}^{n_j} \dots z_{-k_r}^{n_r}.$$

[Co]nsideramos em seguida a família de todos os monômios que compõem f onde [ap]arece o termo $z_{-k_j}^{n_j}$.

[Ap]licando a f o operador $z_{k_j}^{n_j}$, resulta um polinômio f_1 obtido de f anulando-se [to]dos os membros fora da família acima considerada, e os membros da família, [qu]e eram do tipo

$$z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_j}^{n_j} \dots z_{-k_r}^{n_r},$$

[tr]ansformaram-se, pela ação de $z_{-k_j}^{n_j}$, em

$$2^{n_j}(n_j!).j^{n_j}\, z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_j}^{n_j} \dots z_{-k_r}^{n_r}.$$

epetindo em f_1 o que se fez em f, o resultado será um monômio f_2 com, no áximo, tantos monômios quanto os de f_1, mas com, no mínimo, uma variável a enos que as dos monômios de f_1.

rosseguindo esse processo, após um número finito de passos, chega-se a um olinômio constante $f_n = k \neq 0$ em V. Conseqüentemente, $1 \in V$. Como 1 gera $S(Z_-^1)$, oncluímos que $V = S(Z_-^1)$.

Para mostrarmos que o operador z_j, tem grau j $\forall\, j \in 2\mathbb{Z}+1$, fixemos, bitrariamente, um monômio $z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_r}^{n_r}$ da base de S_{-n} (isto é, $-k_1 < \dots < -k_r$ $\sum_{i=1}^{r} j_i k_i = n$).

emos, para $j \in 2\mathbb{N}+1$:

$$z_{-j}.(z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_r}^{n_r}) = z_{-j} z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_1}^{n_r}$$

ujo grau é obviamente $-n-j$, e $z_j.(z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_r}^{n_r})$

$$\begin{cases} 2j\, n_j\, z_{-k_1}^{n_1} \dots z_{-k_i}^{n_i-1} \dots z_{-k_r}^{n_r}, & \text{se } j = k_i, \text{ para algum } i \in \{1,2,\dots,r\}; \\ 0, & \text{se } j \notin \{k_1,\dots,k_r\} \end{cases}$$

o 1º caso, esse monômio resultante está no sub-espaço homogêneo S_{-m}, onde

$$m = \Big(\sum_{\substack{L=1 \\ L\neq i}}^{r} k_L n_L\Big) + k_i(n_i - 1) = \Big(\sum_{L=1}^{r} k_L n_L\Big) - k_i = \sum_{L=1}^{r} k_L n_L - j = n - j.$$

o 2º caso, claro que o resultado também está em S_{-n+j}.

CAPÍTULO II

A ÁLGEBRA DE LIE AFIM $A_1^{(1)}$

. Álgebras de Kac-Moody

O objeto central deste trabalho, a álgebra de Lie afim $A_1^{(1)}$, é uma das chamadas álgebras de Kac-Moody. Não pretendemos abordar a teoria geral de tais álgebras, uma vez que estaremos preocupados com certas realizações concretas particulares de $A_1^{(1)}$. No entanto, alguns comentários sobre a teoria geral se fazem necessários com o intuito de localizar mais precisamente $A_1^{(1)}$ como uma álgebra de Kac-Moody. As considerações que faremos são aprofundadas por exemplo nas referências [Ma] ou [PFM].

Basicamente, a teoria das álgebras de Kac-Moody é uma extensão da teoria das álgebras de Lie simples (ou semi-simples) de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, desenvolvida por Killing e Cartan há mais ou menos 100 anos.

A cada álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita $\underline{g}$ sobre $\mathbb{C}$ podemos associar canonicamente uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de inteiros, conhecida pelo nome de matriz de Cartan. Essas matrizes determinam $\underline{g}$ a menos de isomorfismos e se caracterizam pelas seguintes propriedades:

(c) $a_{ii} = 2$; $a_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$; $a_{ij} = 0 \Longrightarrow a_{ij} = 0$;

(p) todo menor principal de A é positivo.

Reciprocamente, qualquer matriz de inteiros satisfazendo (c) e (p) é matriz de Cartan de alguma álgebra de Lie semi-simples $\underline{g}$, obtida via geradores e relações que envolvem apenas os inteiros a_{ij}, através do teorema de Serre (cf. [S]).

No final da década de 60, V. Kac e R. Moody simultânea e ndependentemente, construíram álgebras de Lie a partir das matrizes de Cartan eneralizadas, isto é, matrizes que satisfazem a condição (c) acima mas não ecessariamente (p). Tais álgebras são hoje chamadas álgebras de Kac-Moody.

E. B. Vinberg classifica as matrizes de Cartan eneralizadas encontrando três famílias: as de tipo finito, as de tipo afim e s de tipo indefinido. Através do teorema de Serre, as de tipo finito fornecem s álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita; as de tipo afim fornecem s álgebras de Lie afins (ou de Kac-Moody afins), das quais $A_1^{(1)}$ é o caso articular que corresponde à matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$; e as de tipo indefinido fornecem s álgebras de Kac-Moody hiperbólicas, ainda pouco conhecidas.

A teoria das álgebras de Kac-Moody inclui a teoria clássica omo caso especial, juntamente com os análogos às noções fundamentais desta ltima, tais como sistema de raízes, grupo de Weyl, representações , etc. Além isso, têm sido crescentes as aplicações das álgebras de Kac-Moody afins em ́rias áreas tanto da matemática como da física . Aliás, as construções osônicas e fermiônicas que faremos no capítulo seguinte têm seus nomes igados a conceitos físicos, conforme mencionamos na introdução deste abalho.

. A Álgebra de Lie Afim $A_1^{(1)}$

Seja $\underline{g}$ a álgebra de Lie simples 3-dimensional $sl(2,\mathbb{C})$ que nsiste das 2x2 - matrizes complexas de traço 0. O colchete de Lie em $\underline{g}$ é o mutador de matrizes. Se tomarmos a base $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ra $\underline{g}$, teremos:

$$[h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f,\ [e,f] = h.$$

Consideremos também a álgebra associativa comutativa de [di]mensão infinita dos polinômios de Laurent $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ na indeterminada t, que [co]nsiste dos polinômios em t e t^{-1} a coeficientes complexos $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j.t^j$, $a_j\in\mathbb{C}$, [a_j]$=0$ a menos de um número finito de índices j.

Seja agora $\hat{\underline{g}}$ o espaço vetorial complexo de dimensão [in]finita

$$\hat{\underline{g}} = \underline{g} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}.c,$$

[on]de $\mathbb{C}.c$ denota o espaço vetorial complexo unidimensional de base $\{c\}$. Tomemos [em] $\hat{\underline{g}}$ a base

$$\{h \otimes t^j,\ e \otimes t^j,\ f \otimes t^j,\ c;\ j\in\mathbb{Z}\}$$

[e] definamos em $\hat{\underline{g}}$ uma multiplicação dada pelas condições:

$$[c,\hat{\underline{g}}] = 0,\ [x \otimes t^i,\ y \otimes t^j] = [x,y] \otimes t^{i+j} + i\delta_{i+j,0}(tr(x,y))c,$$

[pa]ra todo $x,y\in\underline{g}$, $i,j\in\mathbb{Z}$, onde $tr(xy)$ é o traço do produto das 2x2-matrizes x e [y].

[LE]MA 2.1 - A multiplicação acima definida é alternada, e satisfaz a identidade [de] Jacobi. Consequentemente, $\hat{\underline{g}}$ é álgebra de Lie.

Demonstração: Que ela é alternada (isto é, $[a,a]=0$, $\forall\ a\in\hat{\underline{g}}$) é imediato do [fa]to de ser c central em $\hat{\underline{g}}$ e do fato do colchete de $\underline{g}$ ser alternado.

Para demonstrar a identidade de Jacobi, observemos que um [el]emento qualquer $d\in\hat{\underline{g}}$ é soma de elementos do tipo $w \otimes t^m + \lambda c$, $w\in\underline{g}$, $m\in\mathbb{Z}$ e $\lambda\in\mathbb{C}$.

Sejam então

$$a=x \otimes t^i + \alpha c,\ b=y \otimes t^j + \beta c \text{ e } c=z \otimes t^k + \gamma c$$

[e] provemos que

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0.$$

mos:

$$[a,[b,c]] = [x \otimes t^i + \alpha c, [y \otimes t^j + \beta c, z \otimes t^k + \gamma c]]$$

$$= [x \otimes t^i + \alpha c, [y,z] \otimes t^{j+k} + j\delta_{j+k,0}(tr(yz)).c]$$

$$= [x,[y,z]] \otimes t^{i+j+k} + i\delta_{i+j+k,0}(tr(x[y,z]))c.$$

alogamente, obtemos:

$$[b,[c,a]] = [y,[z,x]] \otimes t^{i+j+k} + j\delta_{i+j+k,0}(tr(y[z,x]))c;$$

$$[c,[a,b]] = [z,[x,y]] \otimes t^{i+j+k} + k\delta_{i+j+k,0}(tr(z[x,y]))c$$

mando as três expressões obtidas, resulta:

$$([x,[y,z] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]) \otimes t^{i+j+k}$$

$$+ \delta_{i+j+k,0}(i\ tr(x,[y,z]) + j\ tr(y,[z,x]) + k\ tr(z,[x,y]))c$$

A 1^a parcela acima é nula, devido à identidade de Jacobi em

A 2^a, por sua vez, é igual a

$$\delta_{i+j+k,0}(i\ tr(xyz) - i\ tr(xzy) + j\ tr(yzx) -$$

$$- j\ tr(yxz) + k\ tr(zxy) - k\ tr(zyx))c$$

$$\overset{(1)}{=} \delta_{i+j+k,0}\ (i+j+k)(\ tr(xyz) - tr(xzy)) \overset{(2)}{=} 0$$

1) se deve ao fato de que $tr(mn) = tr(nm)$ e (2) é obtida analisando os casos $j+k = 0$ ou $i+j+k \neq 0$).

<u>tação</u>: A álgebra de Lie de dimensão infinita $\hat{\underline{g}}$. ($= \hat{sl}(2,\mathbb{C})$) é também notada na teoria geral das álgebras de Kac-Moody por $A_1^{(1)}$. Ela é a mais mples das álgebras de Kac-Moody afins e, certamente, a mais importante.

BSERVAÇÃO 2.1 – Utilizando a base dada, verifica-se facilmente que a strutura de $\hat{\underline{g}}$ pode ser descrita através das relações seguintes:

(1) $[c,h \otimes t^j] = [c,e \otimes t^j] = [c,f \otimes t^j] = 0$;

(2) $[h \otimes t^i, h \otimes t^j] = 2i\delta_{i+j,0}c$;

(3) $[h \otimes t^i, e \otimes t^j] = 2e \otimes t^{i+j}$;

(4) $[h \otimes t^i, f \otimes t^j] = -2f \otimes t^{i+j}$;

$$(5)\ [e \otimes t^i, e \otimes t^j] = [f \otimes t^i, f \otimes t^j] = 0;$$

$$(6)\ [e \otimes t^i, f \otimes t^j] = h \otimes t^{i+j} + i\delta_{i+j,0}c,$$

ara todos $i,j \in \mathbf{Z}$

Essas relações podem ser reformuladas com a utilização de éries formais, que passamos agora a descrever (A teoria de séries formais que tilizaremos aqui sem maiores comentários pode ser encontrada por exemplo nas eferências [Fi] ou [LW1], conforme já mencionado no Prefácio).

EFINIÇÃO 2.1 - Sejam ζ, ζ_1 e ζ_2 variáveis formais que comutam e consideremos s seguintes séries de Laurent formais em ζ, com coeficientes em $\hat{\underline{g}}$:

$$h(\zeta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} (h \otimes t^j)\zeta^j,$$

$$e(\zeta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} (e \otimes t^j)\zeta^j,$$

$$f(\zeta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} (f \otimes t^j)\zeta^j.$$

efinimos também a série $\delta(\zeta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \zeta^j$ e o operador diferencial formal $= \zeta(d/d\zeta)$, de modo que $(D\delta)(\zeta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} j\ \zeta^j$.

ROPOSIÇÃO 2.2 - As relações de colchete (1) a (6) da observação 2.1 podem er descritas respectivamente pelas relações (1') a (6') seguintes:

$$(1')\ [c,h(\zeta_1)] = [c,e(\zeta_1)] = [c,f(\zeta_1)] = 0;$$

$$(2')\ [h(\zeta_1),h(\zeta_2)] = 2\ (D\delta)(\zeta_1/\zeta_2)c;$$

$$(3')\ [h(\zeta_1),e(\zeta_2)] = 2e(\zeta_2)\delta(\zeta_1/\zeta_2);$$

$$(4')\ [h(\zeta_1),f(\zeta_2)] = -2f(\zeta_2)\delta(\zeta_1/\zeta_2);$$

$$(5')\ [e(\zeta_1),e(\zeta_2)] = [f(\zeta_1),f(\zeta_2)] = 0;$$

$$(6')\ [e(\zeta_1),f(\zeta_2)] = h(\zeta_2)\delta(\zeta_1/\zeta_2) + (D\delta)(\zeta_1/\zeta_2)c$$

Em outras palavras, as relações acima determinam completamente a estrutura de colchetes de $\hat{\underline{g}}$, no seguinte sentido: calculando e comparando os coeficientes de $\zeta_1^i\zeta_2^j$. $i,j\in Z$, nos dois lados de cada equação, obtemos as formulas correspondentes da observação 2.1.

Demonstração: Em (1′), temos:

$$[c,h(\zeta_1)] = 0 \iff [c, \sum_{j\in\mathbb{Z}} (h \otimes t^j)\zeta_1^j] = 0$$
$$\iff \sum_{j\in\mathbb{Z}} [c,(h \otimes t^j)]\zeta_1^j = 0$$
$$\iff [c,(h \otimes t^j)] = 0, \ \forall\ j\in\mathbb{Z},$$

que são as fórmulas de (1).

(Dessa forma, (1′) expressa numa única igualdade as infinitas fórmulas contidas em (1). Essa observação naturalmente se aplica para as fórmulas de (2′) a (6′) em relação às de (2) a (6)).

Das demais verificações, a última é a menos trivial e a faremos a seguir:

$$[e(\zeta_1),f(\zeta_2)] = [\sum_{i\in\mathbb{Z}} (e \otimes t^i)\zeta_1^i, \sum_{j\in\mathbb{Z}} (f \otimes t^j)\zeta_2^j]$$
$$= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [e \otimes t^i,f \otimes t^j]\zeta_1^i\zeta_2^j$$

Por outro lado,

$$h(\zeta_2)\delta(\zeta_1/\zeta_2) + (D\delta)(\zeta_1/\zeta_2)c$$
$$=(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (h \otimes t^i)\zeta_2^i)(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (\zeta_1/\zeta_2)^j) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k(\zeta_1/\zeta_2)^k c$$
$$=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(h \otimes t^i)\ \zeta_2^i\zeta_1^j/\zeta_2^j + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\ \zeta_1^k/\zeta_2^k\ c \qquad (l=i-j)$$
$$=\sum_{j,l\in\mathbb{Z}}(h \otimes t^{j+l})\ \zeta_1^j/\zeta_2^{-l} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\ \zeta_1^k/\zeta_2^k\ c.$$

Para esta soma de séries, temos a série

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}\zeta_1^m\zeta_2^n$$

tal que

$$a_{m,n} = \begin{cases} (h \otimes t^{0}) + mc, & \text{se } m=-n \\ (h \otimes t^{m+n}, & \text{se } m\neq -n \end{cases}$$

Igualando os coeficientes das séries obtidas nos dois desenvolvimentos acima, encontramos:

$$[e \otimes t^{m}, f \otimes t^{n}] = h \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0}\, c, \ \forall\, m,n\in\mathbb{Z},$$

que é a expressão de (6).

3. $A_1^{(1)}$ *na graduação principal*

Sejam $\mathfrak{h}$ o sub-espaço vetorial de $\underline{\hat{g}}$ de base

$$\{h \otimes t^{2j},\ e \otimes t^{2j+1},\ f \otimes t^{2j+1},\ c\colon\ j\in\mathbb{Z}\}.$$

Temos:

LEMA 3.1 - $\mathfrak{h}$ e sub-álgebra de Lie própria de $\underline{\hat{g}}$ isomorfa a $\underline{\hat{g}}$.

Demonstração: Verifiquemos primeiramente que $\mathfrak{h}$ e sub-álgebra. Para isso, basta verificar que o colchete de dois elementos da base de $\mathfrak{h}$ está em $\mathfrak{h}$.

Exemplo:

$$[h \otimes t^{2i}, e \otimes t^{2j+1}] = 2e \otimes t^{2i+2j+1} + 2i\delta_{2i+2j+1,0}\,(tr(he))c$$

$$= 2e \otimes t^{2i+2j+1} + 2i\delta_{2i+2j+1,0}\, 0\, c = 2e \otimes t^{2i+2j+1} \in \mathfrak{h}.$$

As demais verificações são igualmente simples.

Consideremos agora a aplicação linear $\varphi\colon \underline{\hat{g}} \longrightarrow \mathfrak{h}$

definida por:

$$h \otimes t^j \longrightarrow h \otimes t^{2j} + \delta_{j,0}c;$$
$$e \otimes t^j \longrightarrow e \otimes t^{2j+1};$$
$$f \otimes t^j \longrightarrow f \otimes t^{2j-1};$$
$$c \longrightarrow 2c$$

Verifiquemos que φ é isomorfismo de Lie (que é bijeção, é óbvio). Temos, por exemplo que

$\varphi[e \otimes t^i, f \otimes t^j] = \varphi(h \otimes t^{i+j} + i\delta_{i+j,0}\, c) = \varphi(h \otimes t^{i+j}) + i\delta_{i+j,0}\varphi(c)$
$= h \otimes t^{2i+2j} + \delta_{i+j,0}\, c + 2ci\delta_{i+j,0} = h \otimes t^{2i+2j} + (1 + 2i)\, \delta_{i+j,0}$,

ao passo que,

$[\varphi(e \otimes t^i), \varphi(f \otimes t^j)] = [e \otimes t^{2i+1}, f \otimes t^{2j-1}]$
$= h \otimes t^{2i+2j} + (2i + 1)\, \delta_{2i+2j,0}\, c$.

Portanto,

$$\varphi[e \otimes t^i, f \otimes t^j] = [\varphi(e \otimes t^i), \varphi(f \otimes t^j)].$$

De modo igualmente simples, mostramos que

$$\varphi[a,b] = [\varphi(a),\varphi(b)], \text{ para quaisquer } a \text{ e } b \text{ na base de } \mathfrak{h} .$$

Logo φ e isomorfismo de Lie.

Passaremos agora a estudar uma outra base de $\mathfrak{h}$, através da qual obteremos a graduação principal de $A_1^{(1)}$.

Sejam:

$$B_{2j+1} = (e+f) \otimes t^{2j+1},$$
$$X_{2j+1} = (-e+f) \otimes t^{2j+1},$$
$$X_{2j} = h \otimes t^{2j}, \text{ para todo } j\in\mathbb{Z} .$$

Obviamente o conjunto $\{B_{2j+1}, X_j, c : j\in\mathbb{Z}\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$.

Temos:

TEOREMA 5.2 - A correspondente estrutura de colchetes de $\mathfrak{b}$ é:

(1) $[c,B_i] = [c,X_k] = 0$;

(2) $[B_i,B_j] = 2i\delta_{i+j,0}\, c$;

(3) $[B_i,X_k] = 2X_{i+k}$;

(4) $[X_k,X_L] = \begin{cases} 2(-1)^{k+1} B_{k+L}, & \text{se } k+L \in 2\mathbb{Z}+1\ , \\ 2(-1)^k k\delta_{k+L,0}\, c\ , & \text{se } k+L \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$

Além disso, $\mathfrak{b}$ é uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada, isto é, $\mathfrak{b} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{b}_j$, onde $[\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}_j] \subset \mathfrak{b}_{i+j}$ e os sub-espaços homogêneos são os seguintes (onde $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ denota o sub-espaço gerado pelo conjunto $\{a_1, \dots ,a_n\}$):

$$\mathfrak{b}_0 = \langle c,X_0\rangle,$$

$$\mathfrak{b}_j = \langle B_j,X_j\rangle, \text{ se } j \text{ é ímpar},$$

$$\mathfrak{b}_j = \langle X_j\rangle, \text{ se } j \text{ é par não nulo}$$

Observemos que o grau de cada elemento básico B_j, X_j é igual ao seu índice).

Demonstração: Para as relações de colchete temos novamente temos vários casos a verificar de maneira semelhante. Escolhemos aqueles que contêm a técnica de demonstração a ser aplicada nos demais.

1): Imediato, desde que c é central em $\underline{\hat{g}}$;

3): <u>1º caso</u>: k ímpar:

$$\begin{aligned}[B_i,X_k] &= [(e+f)\otimes t^i,(-e+f)\otimes t^k] \\ &= [e\otimes t^i + f\otimes t^i, -e\otimes t^k + f\otimes t^k] \\ &= [e\otimes t^i, -e\otimes t^i] + [e\otimes t^i, f\otimes t^k] \\ &\quad + [f\otimes t^i, -e\otimes t^k] + [f\otimes t^i, f\otimes t^k]\end{aligned}$$

$$= h \otimes t^{i+k} + i\delta_{i+k,0}c + h \otimes t^{i+k} + k\delta_{k+i,0}c$$
$$= 2h \otimes t^{i+k} + (i+k)\delta_{i+k,0}c = 2h \otimes t^{i+k} \quad (i+k \text{ par})$$
$$= 2X_{i+k}.$$

Mostremos agora que $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$:

1^o caso: $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] \subset \mathfrak{h}_0$:

Um elemento típico de $\mathfrak{h}_0$ é $\alpha h \otimes 1 + \beta c$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então,

$$[\alpha_1 h \otimes 1 + \beta_1 c, \alpha_2 h \otimes 1 + \beta_2 c] = \alpha_1\alpha_2 [h \otimes 1, h \otimes 1]$$
$$= \alpha_1\alpha_2 . 2 . 0 . \delta_{0+0,0} . c = 0 \in \mathfrak{h}_0.$$

2^o caso: $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_i$, i ímpar:

Um elemento típico de $\mathfrak{h}_i$, i ímpar é

$$\alpha(e + f) \otimes t^i + \beta(-e + f) \otimes t^i \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$
$$= \alpha e \otimes t^i + \alpha f \otimes t^i - \beta e \otimes t^i + \beta f \otimes t^i$$
$$= (\alpha - \beta) e \otimes t^i + (\alpha + \beta) f \otimes t^i.$$

Assim, um tal elemento pode ser escrito como

$$\gamma e \otimes t^i + \lambda f \otimes t^i.$$

Para $\alpha h \otimes 1 + \beta c$ em $\mathfrak{h}_0$, temos:

$$[\alpha h \otimes 1 + \beta c, \gamma e \otimes t^i + \lambda f \otimes t^i] = \alpha\gamma [h \otimes 1, e \otimes t^i]$$
$$+ \alpha\lambda [h \otimes 1, f \otimes t^i] = 2\alpha\gamma\, e \otimes t^i - \alpha\lambda 2 f \otimes t^i \in \mathfrak{h}_i.$$

A verificação para os demais casos também é simples.

Descreveremos agora a estrutura de colchetes de $\mathfrak{h}$ usando variáveis formais, conforme a proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO 3.3 - Sejam $B(\zeta) = \sum_{j\in 2\mathbf{Z}+1} B_j \zeta^j$, $X(\zeta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} X_k\zeta^k$.
Então, as relações de colchete (1) a (4) do teorema 3.2 podem ser descritas respectivamente pelas relações (1′) a (4′) seguintes:

(1′) $[c,B(\zeta_1)] = [c,X(\zeta_1)] = 0$;

(2′) $[B(\zeta_1),B(\zeta_2)] = ((D\delta)(\zeta_1/\zeta_2) - (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2))c$;

(3′) $[B(\zeta_1),X(\zeta_2)] = X(\zeta_2)(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2))$;

(4′) $[X(\zeta_1),X(\zeta_2)] = -2B(\zeta_2)\delta(-\zeta_1/\zeta_2) + 2(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)c$.

Demonstração: Verifiquemos apenas a equivalência (4′) $\Longleftrightarrow$ (4):

Por um lado,

$$[X(\zeta_1),X(\zeta_2)] = \sum_{k,l\in\mathbf{Z}} [X_k,X_l]\zeta_1^k\zeta_2^l \qquad \text{(I)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&-2B(\zeta_2)\delta(-\zeta_1/\zeta_2) + 2(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)c \\
&= (-2\sum_{j\in 2\mathbf{Z}+1} B_j\zeta_2^j)(\sum_{i\in\mathbf{Z}} (-\zeta_1/\zeta_2)^i) + 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} k(-\zeta_1/\zeta_2)^k c \\
&= \sum_{\substack{j\in 2\mathbf{Z}+1\\ i\in\mathbf{Z}}} -2B_j\,\zeta_2^{j-i}(-1)^i\zeta_1^i + \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2kc(-1)^k\zeta_1^k\zeta_2^{-k} \qquad (j-i=h) \\
&= \sum_{\substack{i,h\in\mathbf{Z}\\ h+i\in 2\mathbf{Z}+1}} -2B_{h+i}\zeta_2^h(-1)^i\zeta_1^i + \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2kc(-1)^k\zeta_1^k\zeta_2^{-k}.
\end{aligned}$$

Para a soma dessas duas últimas séries, teremos:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases}
\text{coeficiente de } \zeta_1^k\zeta_2^{-k} = 2kc(-1)^k,\ \forall\, k\in\mathbf{Z} \\
\text{coeficiente de } \zeta_1^i\zeta_2^h = -2(-1)^i B_{h+i},\ \forall\, h,i\in\mathbf{Z} \text{ com } i+h \in 2\mathbf{Z}+1 \\
\text{coeficiente de } \zeta_1^m\zeta_2^n = 0 \text{ , se } m,n \text{ não satisfazem nenhuma das condições acima.}
\end{cases}$$

Comparando (I) e (II), obtemos:

$$[X_k, X_{-k}] = 2k(-1)^k c \ ;$$

$$[X_i, X_h] = -2(-1)^i B_{i+h} = 2(-1)^{i+1} B_{i+h}, \quad \forall\, i,h \in \mathbb{Z} \text{ com } i+h \in 2\mathbb{Z}+1 \ ;$$

$$[X_m, X_n] = 0 \ , \text{ se } m \neq -n \text{ ou se } m+n \in 2\mathbb{Z}$$

Essas últimas relações se resumem em:

$$[X_k, X_L] = \begin{cases} 2(-1)^{k+1} B_{k+L} \ , & \text{se } k+L \in 2\mathbb{Z}+1 \ , \\ 2(-1)^k k \delta_{k+L,0} \ , & \text{se } k+L \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

que é exatamente a igualdade de (4) do teorema 3.2.

4. A álgebra de Heisenberg principal e uma sub-álgebra abeliana

Lembremos da última seção que uma base de $\mathfrak{h}$ é

$$\{B_{2j+1}, X_j, c : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Sejam H e H_ as sub-álgebras de Lie de $\mathfrak{h}$ com bases

$\{B_j, c : j \in 2\mathbb{Z}+1\}$ e $\{B_j : j \in -(2\mathbb{N}+1)\}$ respectivamente.

Sendo geradas por elementos homogêneos, H e H_ são, como $\mathfrak{h}$, $\mathbb{Z}$-graduadas. H é uma álgebra de Heisenberg de dimensão infinita (isto é, centro(H) = $\mathbb{C}$.c = [H,H]) e H_ é sub-álbebra abeliana de H.

OBSERVAÇÃO 4.1 - Seja L uma álgebra de Lie. Consideremos T(L) a álgebra tensorial sobre o espaço vetorial L. Seja I o ideal de L gerado por

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x,y] : x,y \in L\}.$$

Sabemos que a <u>álgebra envolvente universal de L,</u> U(L), é, a menos de isomorfismos, T(L)/I.

Se L for abeliana, o ideal I passa a ser gerado por

$$\{x \otimes y - y \otimes x : x,y \in L\}.$$

Isso significa que U(L) é isomorfa à álgebra simétrica S(L) (cf. definição I-3.2). Além disso, se considerarmos uma base B de L, temos que S(L) é isomorfa à álgebra polinomial sobre B(cf.[C2]).

Dessa forma, se tomarmos L=H_, teremos:

$$U(H\_) \cong S(H\_) \cong \mathbb{C}[B_{-1},B_{-3},B_{-5},...] \cong \mathbb{C}[x_1,x_3,x_5,...]$$

Demonstraremos agora um fato importante na teoria geral:

PROPOSIÇÃO 4.1 - $\mathbb{C}[x_1,x_3,x_5,...]$ ($\cong U(H\_)$) é um H-módulo irredutível.

Demonstração: Adotemos a seguinte notação: se A é uma álgebra associativa, A_L denota a álgebra de Lie cujo colchete é o comutador $[a,b] = ab - ba$, $\forall\ a,b \in A$.

Consideremos a aplicação linear

$$\varphi: H \longrightarrow (End(S(H\_))_L \cong (End(\mathbb{C}[x_1,x_3,...]))_L$$

definida por

$c \longrightarrow 1/2$ (<u>operador de multiplicação escalar</u>),

$B_j \longrightarrow j(\partial/\partial x_j)$ (<u>operador de destruição</u>),

$B_{-j} \longrightarrow x_j$ (<u>operador de criacao</u>),

para todo $j \in 2\mathbb{N}+1$.

Mostremos primeiramente que φ é homomorfismo de Lie.

Sejam $i,j \in 2\mathbb{N}+1$. Temos alguns casos a considerar:

1o caso: $\varphi[B_i, B_j] = \varphi(2i\delta_{i+j,0}c) = i\delta_{i+j,0} = 0 \in (End(S(H\_)))_L$

Por outro lado,

$$[\varphi B_i, \varphi B_j] = [i\partial/\partial x_i\ ,\ j\partial/\partial x_j]$$
$$= i\partial/\partial x_i . j\partial/\partial x_j - j\partial/\partial x_j . i\partial/\partial x_i$$
$$= ij.\partial/\partial x_i . \partial/\partial x_j - ij.\partial/\partial x_j . \partial/\partial x_i = 0 \in (End(S(H\_)))_L.$$

1o caso: $\varphi[B_{-i}, B_{-j}] = [\varphi B_{-i}, \varphi B_{-j}]$: análogo ao 1o caso.

3o caso: $\varphi[B_i, B_{-j}] = \varphi(2i\delta_{i-j,0}c) = i\delta_{i-j,0} \in (End(S(H\_)))_L$.

Por outro lado, para $f \in S(H\_)$ qualquer, temos:

$$[\varphi B_i, \varphi B_{-j}](f) = [i\partial/\partial x_i, x_j](f) = (i\partial/\partial x_i . x_j$$
$$- x_j . i\partial/\partial x_i)(f) = i\partial/\partial x_i(x_j f) - x_j\ i.\partial f/\partial x_i$$
$$= ix_j.\partial f/\partial x_i + if.\partial x_j/\partial x_i - ix_j.\partial f/\partial x_i$$
$$= if.\partial x_j/\partial x_i = i\delta_{i-j,0}(f)$$
$$\Longrightarrow [\varphi B_i, \varphi B_j] = i\delta_{i-j,0} \in (End(S(H\_)))_L.$$

(Em geral, usaremos a notação de módulo, isto é, para $w \in H$, $f \in H\_$, escrevemos $w.f$ ao invés de $\varphi(w)(f)$.)

A demonstração da irredutibilidade é praticamente a mesma daquela feita para o $w(Z^1)$-módulo $S(Z^1\_)$ no teorema I-6.1.

PROPOSIÇÃO 4.2 - A representação de $w(Z^1)$ em $S(Z^1\_)$ estudada no teorema I-6.1 é tal que a família de operadores $\{1, z_j, z_{-j}: j \in 2\mathbb{N}+1\}$ geram em $(End(S(Z^1\_)))_L$ uma álgebra de Heisenberg isomorfa a H.

Demonstração: Basta notar que os elementos 1, z_j, $j \in 2\mathbb{Z}+1$ satisfazem em $(\mathrm{End}(S(Z^1_-)))_L$ relações de colchete análogas respectivamente às dos elementos 1, B_j, $j \in 2\mathbb{Z}+1$. ■

OBSERVAÇÃO 4.2 - A importância do corolário acima reside no fato seguinte: a partir da álgebra de Heisenberg H pode-se recuperar $\hat{b}$ (ou seja, $A_1^{(1)}$), conforme demonstraremos no capítulo seguinte. Com isso, obteremos $A_1^{(1)}$ como sub-álgebra de Lie de $(\mathrm{End}(S(Z^1_-)))_L$, e teremos, portanto, que $S(Z^1_-)$ é um $A_1^{(1)}$-módulo irredutível.

■ ■ ■

CAPÍTULO III

A CORRESPONDÊNCIA BOSON-FERMION

1. Construção Bosônica de $A_1^{(1)}$

Consideremos o $W(Z^1)$-módulo irredutível $S(Z^1\_)$ estudado no teorema II-6.1. Vimos na proposição II-4.2 que a família de operadores $\{1, z_j, z_{-j} : j \in 2N+1\}$ geram em $(End(S(Z^1\_)))_L$ uma álgebra de Heisenberg isomorfa a H. Mais especificamente, temos, em $(End(S(Z^1\_)))_L$:

$$1 = 2c ;$$

$$z_j = 2j(\partial/\partial z_{-j}) = 2B_j \quad e$$

$$z_{-j} = B_{-j}, \text{ para } j \in 2N+1.$$

Aqui o conjunto $\{c, B_j : j \in 2N+1\}$ é a base de H em $(End(S(Z^1\_)))_L$ dada pelo H-módulo $U(H\_) \cong S(Z^1\_)$ $(\cong \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \ldots])$ (cf. proposição II-4.1).

Queremos descrever a ação dos demais elementos da base de $\mathfrak{h}$, isto é, e X_j, $j \in \mathbb{Z}$ (cf. teorema II-3.2) como operadores de grau j sobre $S(Z^1\_)$.
Para isso, introduziremos os <u>operadores vértice</u>, conforme [L] (Uma referência para um estudo aprofundado desses operadores é, por exemplo, [LMS]).
Sejam:

$$E_1^+(\zeta) = \exp\Big(\sum_{j \in 2N+1} 2\, \zeta^j . B_j / j \Big),$$

$$E_1^-(\zeta) = \exp\Big(\sum_{j \in 2N+1} 2 \zeta^{-j} . B_{-j} / -j \Big),$$

$X'(\zeta) = -1/2 \; E_1^-(-\zeta) \; E_1^+(-\zeta)$, onde exp denota a série exponencial formal.

SERVAÇÃO 1.1 - Quando $E_1^+(\zeta)$, $E_1^-(\zeta)$ ou $X'(\zeta)$ se expande como uma série de urent formal em ζ, o coeficiente de ζ^j, $j\in\mathbb{Z}$, é um operador formal <u>bem finido</u> de grau j em $\mathrm{End}(S(Z_-^1))$. Não provaremos esse fato aqui mas servaremos um apêndice neste capítulo para, através de alguns cálculos, nos ercebermos de sua validade. Entretanto, adiantemos o que, em essência, orre: cada coeficiente de ζ^L em $X'(\zeta)$, que passamos a denotar por X'_L (de do que $X'(\zeta) = \sum_{L\in\mathbb{Z}} X'_L\zeta^L$), é uma soma infinita de operadores de grau L do po

$$\lambda B_{-i_1}\cdots B_{-i_n}B_{j_1}\cdots B_{j_m},\ \lambda\in\mathbb{C},\ i_1,\ldots,i_n,\ j_1,\ldots,j_m \text{ em } 2\mathbb{N}+1, \text{ e}$$

$$-i_1-\cdots-i_n+j_1+\cdots+j_m = L.$$

rém, apenas um número finito de tais somandos deixa de anular cada elemento mando arbitrariamente em $S(Z_-^1)$. Basicamente, isso se deve ao fato dos eradores de destruição ocorrerem à direita nos somandos (como consequência $E_1^+(-\zeta)$ estar à direita na expressão de $X'(\zeta)$).

Antes de abordarmos o principal teorema desta seção, demonstraremos is lemas.

MA 1.1 - $[X'(\zeta_1),X'(\zeta_2)]$

$$= E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_1)\langle(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)\rangle.$$

Demonstração: Temos:

$$4\,X'(\zeta_1)X'(\zeta_2)$$

$$= E_1^-(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_2)$$

$$= E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2).\exp\left[-\sum_{j\in2\mathbb{N}+1} 2\zeta_1^j\frac{B_j}{j},\ \sum_{k\in2\mathbb{N}+1} 2\zeta_2^{-k}\frac{B_{-k}}{k}\right]$$

r (a) abaixo

$$= E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2).\exp\,(-\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1} 4(\zeta_1/\zeta_2)^j/j)$$

$$= E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2).\exp(\log(1-\frac{\zeta_1}{\zeta_2})^2(1+\frac{\zeta_1}{\zeta_2})^{-2})$$

por (b) abaixo

$$= E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2).(1-\frac{\zeta_1}{\zeta_2})^2(1+\frac{\zeta_1}{\zeta_2})^{-2}$$

As propriedades que justificam certas passagens acima são as seguintes:

a) $\exp A \exp B = \exp B \exp A \exp [A,B]$, sempre que A e B comutam com $[A,B]$

b) log denota a série logarítimica formal que satisfaz

$$\log(1-\zeta) = -\sum_{i>0}\frac{1}{i}\zeta^i,\quad \log(1+\zeta) = -\sum_{i>0}\frac{1}{i}(-\zeta)^i \quad \text{e}$$

$$\exp\log f(\zeta) = f(\zeta)$$

nvertendo a ordem de ζ_1 e ζ_2, obtemos:

$$4\,X'(\zeta_2)X'(\zeta_1) = E_1^-(-\zeta_2)E_1^-(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1).(1-\frac{\zeta_2}{\zeta_1})^{-2}$$

omo os pares $E^-(-\zeta_1),E^-(-\zeta_2)$ e $E^+(-\zeta_1),E^+(-\zeta_2)$ comutam, obtemos, finalmente, ue

$$4[X'(\zeta_1),X'(\zeta_2)] = E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2)(4(D\delta)(\frac{-\zeta_1}{\zeta_2})),$$

omo queríamos

EMA 1.2 - Seja $f(\zeta_1,\zeta_2) = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}} v_{ij}\zeta_1^i\zeta_2^j$ uma série de Laurent formal em ζ_1, ζ_2 om coeficientes v_{ij} num espaço vetorial tal que existe $n\in\mathbf{Z}$ com $v_{ij} = 0$ sempre ue $i>n$ ou $j>n$ (essa condição é necessária para estarem bem definidas as xpressões que se seguem).

eja $(D_i f)(\zeta_1,\zeta_2) = \zeta_i(\partial f/\partial\zeta_i)(\zeta_1,\zeta_2)$, para $i=1,2$;

eja $a\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Então:

(i) $\delta(a\zeta_1/\zeta_2)f(\zeta_1,\zeta_2) = \delta(a\zeta_1/\zeta_2)f(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2)$;

(ii) $(D\delta)(a\zeta_1/\zeta_2)f(\zeta_1,\zeta_2) = (D\delta)(a\zeta_1/\zeta_2)f(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2)$

$- \delta(a\zeta_1/\zeta_2)D_1(f)(\zeta_1,\zeta_2)$.

Demonstração: (i) temos, por um lado, que:

$$\begin{aligned}
&\delta(a\zeta_1/\zeta_2)\ f(\zeta_1,\zeta_2) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a\zeta_1/\zeta_2)^k \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} v_{ij}\ \zeta_1^i\zeta_2^j \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^k\zeta_1^k\zeta_2^{-k} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} v_{ij}\zeta_1^i\zeta_2^j \\
&= \sum_{k,i,j\in\mathbb{Z}} a^k\ v_{ij}\ \zeta_1^{i+k}\ \zeta_2^{j-k}\ ; \qquad\qquad (I)
\end{aligned}$$

or outro lado, o segundo membro de (i) é:

$$\begin{aligned}
&\delta(a\zeta_1/\zeta_2)\ f(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2) \\
&= \sum_{L\in\mathbb{Z}} (a\zeta_1/\zeta_2)^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} v_{mn}a^{-m}\zeta_2^m\zeta_2^n \\
&= \sum_{L\in\mathbb{Z}} a^L\zeta_1^L\zeta_2^{-L} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} v_{mn}a^{-m}\zeta_2^m\zeta_2^n \\
&= \sum_{L,m,n\in\mathbb{Z}} a^{L-n}v_{mn}\zeta_1^L\zeta_2^{m+n-L} \qquad\qquad (II)
\end{aligned}$$

omparando as séries formais (I) e (II), vemos que elas são idênticas.

ii) Aplicando em ambos os membros de (i) o operador $\zeta_1(d/d\zeta_1)$ obtemos, tilizando regras de derivação:

$$\zeta_1 \frac{d\delta(a\zeta_1/\zeta_2)}{d\zeta_1} f(\zeta_1,\zeta_2) + \delta(a\zeta_1/\zeta_2)\ \zeta_1 \frac{df(\zeta_1,\zeta_2)}{d\zeta_1}$$

$$= \zeta_1 \frac{d\delta(a\zeta_1/\zeta_2)}{d\zeta_1} f(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2) + \delta(a\zeta_1/\zeta_2)\ \zeta_1 \frac{df(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2)}{d\zeta_1}$$

$$\Longleftrightarrow (D\delta)(a\zeta_1/\zeta_2)f(\zeta_1,\zeta_2) + \delta(a\zeta_1/\zeta_2)(D_1f)(\zeta_1,\zeta_2)$$

$$= D\delta(a\zeta_1/\zeta_2)f(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2) + 0$$

$$\Longleftrightarrow (D\delta)(a\zeta_1/\zeta_2)f(\zeta_1,\zeta_2)$$

$$= D\delta(a\zeta_1/\zeta_2)f(a^{-1}\zeta_2,\zeta_2) - \delta(a\zeta_1/\zeta_2)(D_1f)(\zeta_1,\zeta_2),$$

ue é a igualdade desejada.

TEOREMA 1.3 - Os operadores c, B_j $(j \in 2\mathbb{Z}+1)$ e X'_j $(j \in \mathbb{Z})$ em $(\mathrm{End}(S(Z^1_-)))_L$ satisfazem as relações de colchete do teorema II-3.2, isto é:

$$(1)\ [c,B_i] = [c,X'_k] = 0\ ;$$

$$(2)\ [B_i,B_j] = 2i\delta_{i+j,0}c\ ;$$

$$(3)\ [B_i,X'_k] = 2X'_{i+k}\ ;$$

$$(4)\ [X'_k,X'_L] = \begin{cases} 2(-1)^{k+L}B_{k+L}, & \text{se } k+L \in 2\mathbb{Z}+1 \\ 2(-1)^k k\delta_{k+L,0}\ c, & \text{se } k+L \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Conseqüentemente, esses operadores geram em $(\mathrm{End}S(Z^1_-))_L$ uma álgebra de Lie isomorfa a $A_1^{(1)}$.

Demonstração: As relações $[c,B_i] = 0$ e $[B_i,B_j] = 2i\delta_{i+j,0}\ c$ fazem parte do teorema II-3.2.

A relação $[c,X'_k] = 0$ segue do fato de c agir como operador de multiplicação escalar.

Para demonstrar (3), fazemos como segue: para $i \in 2\mathbb{N}+1$,

$$[B_i,E_1^-(-\zeta)] = [B_i,\ \exp \sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} 2\zeta^j.B_{-j}/j]$$

$$= [B_i,\ \sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} 2\zeta^{-j}.B_{-j}/j]\ E_1^-(-\zeta)$$ (vide (a) abaixo, após a demonstração).

$$= 2\zeta^{-i}(2ic/i)\ E_1^-(-\zeta) = 2\zeta^{-i}E_1^-(-\zeta) \quad (2c=1).$$

Analogamente podemos mostrar que

$$[B_{-i},\ E_1^+(-\zeta)] = 2\zeta^{-i}\ E_1^+(-\zeta),$$

$$[B_i,\ E_1^+(-\zeta)] = [B_{-i},\ E_1^-(-\zeta)] = 0.$$

Então,

$$[B_i,X'(\zeta)] = -1/2[B_i,\ E_1^-(-\zeta)\ E_1^+(-\zeta)]$$

$$= -1/2[B_i,\ E_1^-(-\zeta)]\ E_1^+(-\zeta) - 1/2\ E_1^-(-\zeta)[B_i,\ E_1^+(-\zeta)]$$

(vide (b) abaixo)

$$= (-1/2)2\zeta^{-i}\, E_1^-(-\zeta)\, E_1^+(-\zeta) - 1/2\, E_1^-(-\zeta).0$$
$$= 2\zeta^{-i} X'(\zeta) \qquad (*)$$

Similarmente,

$$[B_{-i}, X'(\zeta)] = 2\zeta^{i} X'(\zeta) \qquad (**)$$

Por outro lado,

$$[B_i, X'(\zeta)] = \sum_{k\in\mathbf{Z}} [B_i, X'_k]\zeta^k = 2\zeta^{-i} X'(\zeta) \text{ (por } (*))$$
$$= 2\zeta^{-i} \sum_{k\in\mathbf{Z}} X'_k\, \zeta^k = \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2X'_k\, \zeta^{k-i} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2X'_{k+i}\, \zeta^k$$
$$\Longrightarrow [B_i, X'_k] = 2X'_{k+i},\ \forall\ k\in\mathbf{Z}.$$

Do mesmo modo, usando $(**)$, obtemos

$$[B_{-i}, X'_k] = 2X'_{k-i},\ \forall\ k\in\mathbf{Z}.$$

Assim, está provada a relação (3).

Ao invés de provarmos (4), demonstraremos sua equivalente (4') da proposição II-3.3. Temos:

$$[X'(\zeta_1), X'(\zeta_2)]$$
$$= E_1^-(-\zeta_1)\, E_1^-(-\zeta_2)\, E_1^+(-\zeta_1)\, E_1^+(-\zeta_2)\, D\delta(-\zeta_1/\zeta_2) \quad \text{(pelo lema 1.1)}$$
$$= E_1^-(\zeta_2)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(\zeta_2)E_1^+(-\zeta_2)(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)$$
$$-\delta(-\zeta_1/\zeta_2)\zeta_1(\partial f/\partial\zeta_1)(\zeta_1,\zeta_2)$$

(pelo lema 1.2.(ii) aplicado a

$$f(\zeta_1,\zeta_2) = E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2))$$
$$= E_1^-(\zeta_2)\, E_1^-(-\zeta_2)\, E_1^+(\zeta_2)\, E_1^+(-\zeta_2)(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)$$
$$-\Big(((\zeta_1 d/d\zeta_1)E_1^-(-\zeta_1)\Big)\, E_1^-(-\zeta_2)\, E_1^+(-\zeta_1)\, E_1^+(-\zeta_2)$$
$$+\, E_1^-(-\zeta_1)\, E_1^-(-\zeta_2)\Big((\zeta_1 d/d\zeta_1)\, E_1^+(-\zeta_1)\Big)E_1^+(-\zeta_2)\Big)\,\delta(-\zeta_1/\zeta_2)$$

(devido a regras de derivação)

$$= (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)$$
$$-\Big(((\zeta_1 d/d\zeta_1)E_1^-(-\zeta_1)\Big)\, E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2)$$
$$+\, E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)\,\Big((\zeta_1 d/d\zeta_1)E_1^+(-\zeta_1)\Big)E_1^+(-\zeta_2)\Big)\,\delta(-\zeta_1/\zeta_2) \quad (*1)$$

(esta última igualdade se deve à observação (c) abaixo)

Agora,

$$(\zeta_1 d/d\zeta_1)\, E_1^-(-\zeta_1) = \zeta_1 d/d\zeta_1 . \exp\Big(-\sum_{j\in 2N+1} 2(-\zeta_1)^{-j}B_{-j}/j\Big)$$

$$= (-1)\,\zeta_1 \exp\Big(-\sum_{j\in 2N+1} 2(-\zeta_1)^{-j}B_{-j}/j\Big)\Big(-\sum_{j\in 2N+1} -j2(-\zeta_1)^{-j-1}B_{-j}/j\Big)$$

(devido a regras de derivação)

$$= -E_1^-(-\zeta_1)\sum_{j\in 2N+1} 2\zeta_1^{-j}B_{-j} .$$

Analogamente,

$$(\zeta_1 d/d\zeta_1)\, E_1^+(-\zeta_1) = -E_1^+(-\zeta_1)\sum_{j\in 2N+1} 2\zeta_1^{j}B_j$$

Substituindo esses dois últimos resultados em (*1), obtemos:

$$(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) + \Big(\Big(\sum_{j\in 2N+1} 2\zeta_1^{-j}B_{-j}\Big)E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2)$$

$$+ E_1^-(-\zeta_1)\, E_1^-(-\zeta_2)\, E_1^+(-\zeta_1)\, E_1^+(-\zeta_2)\Big(\sum_{j\in 2N+1} 2\zeta_1^{j}B_j\Big)\Big)\,\delta(-\zeta_1/\zeta_2) \quad (*2)$$

Sejam: $g(\zeta_1,\zeta_2) = \Big(\sum_{j\in 2N+1} 2\zeta_1^{-j}B_{-j}\Big)E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2)$

e $h(\zeta_1,\zeta_2) = E_1^-(-\zeta_1)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(-\zeta_1)E_1^+(-\zeta_2)\Big(\sum_{j\in 2N+1} 2\zeta_1 B_j\Big)$

Assim, (*2) fica:

$$(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)g(\zeta_1,\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)h(\zeta_1,\zeta_2)$$

$$= (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)g(-\zeta_2,\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)h(-\zeta_2,\zeta_2)$$

(pelo lema 1.2.(1))

$$= (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)$$
$$+ \Big(\Big(\sum_{j\in 2N+1} 2(-\zeta_2)^{-j}B_{-j}\Big)\, E_1^-(\zeta_2)\, E_1^-(-\zeta_2)\, E_1^+(\zeta_2)\, E_1^+(-\zeta_2)$$

$$+ E_1^-(\zeta_2)E_1^-(-\zeta_2)E_1^+(\zeta_2)E_1^+(-\zeta_2)\Big(\sum_{j\in 2N+1} 2(-\zeta_2)^{j}B_j\Big)\Big)\,\delta(-\zeta_1/\zeta_2)$$

$$= (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) + \Big(-\sum_{j\in 2\mathbb{Z}+1} 2\zeta_2^{j}B_j\Big)\,\delta(-\zeta_1/\zeta_2) \quad \text{(vide (c) abaixo)}$$

$$= 2(D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)c - 2B(\zeta_2)\delta(-\zeta_1/\zeta_2)$$

que é exatamente o 2º membro de (4'), como queríamos. ∎

As propriedades (a), (b) e (c), que justificam certas passagens assinaladas na demonstração acima, são as seguintes:

a) Se $[[B,Y],Y] = 0$, então $[B,\exp Y] = [B,Y] \exp Y$;

b) Se $[A,B]$ representa o comutador de dois elementos A e B numa álgebra associativa, então $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$;

c) Se $AB = BA$, então $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.

OBSERVAÇÃO 1.2 - O fato de $S(Z^1_-)$ ser um H-módulo irredutível (cf. proposição II-4.2) juntamente com o teorema 1.3 têm por conseqüência ser $S(Z^1_-)$ um $A_1^{(1)}$-módulo irredutível.

DEFINIÇÃO 1.1 - Os operadores $\{c, B_{2j+1}, X'_j : j\in\mathbb{Z}\}$ de $(\mathrm{End}(S(Z^1_-)))_L$ serão chamados de <u>operadores bosons</u> e a representação de $A_1^{(1)}$ em $S(Z^1_-)$ de <u>representação bosônica</u> .

2. *Construção Fermiônica de $A_1^{(1)}$*

Consideremos o $C(Z)$-módulo irredutível $\Lambda(Z_-)$ estudado no teorema I-5.1.

Estamos interessados em construir uma representação irredutível da Heisenberg principal H (portanto de $A_1^{(1)}$, via operadores vértice) em $\Lambda(Z_-)$, da mesma forma que o fizemos na seção anterior para o caso do $W(Z^1)$-módulo $S(Z^1_-)$. Entretanto, no presente caso, para obtermos os geradores de H, precisamos de uma preparação, que passamos agora a descrever.

DEFINIÇÃO 2.1 - Sejam $Z_i(\zeta) = \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+i} z_j\zeta^j$, para $i=0,1$, séries formais, onde os z_j da base de Z são vistos como elementos de $End(\Lambda(Z\_))$ (cf. teorema I-5.1).

Consideremos o produto $Z_1(\zeta)Z_0(\zeta)$.

Definimos P_m, para $m\in 2\mathbb{Z}+1$, como sendo o coeficiente de ζ^m no produto acima, isto é,

$$Z_1(\zeta)Z_0(\zeta) = \sum_{m\in 2\mathbb{Z}+1} P_m\zeta^m.$$

LEMA 2.1 - Para cada $m\in 2\mathbb{Z}+1$, P_m é um operador bem definido em $End(\Lambda(Z\_))$, de grau m.

Demonstração: Temos:

$$P_m = \sum_{k\in 2\mathbb{Z}} z_{m-k}z_k, \text{ para cada } m\in 2\mathbb{Z}+1.$$

Seja $w\in\Lambda(Z\_)$. Mostremos que $P_m.w$ faz sentido. Podemos, naturalmente, supor w um monômio da base de $\Lambda(Z\_)$:

$$w = z_{-j_1}\wedge\ldots\wedge z_{-j_p},\ -j_1<\ldots<-j_p$$

Para $k > \max(j_1,\ldots,j_p)$, temos:

$$z_{m-k}z_k.w = z_{m-k}.\left(\sum_{i=1}^{p} 2\ \delta_{k-j_i,0}(-1)^{k+1} z_{-j_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{z_{-j_i}}\wedge\ldots\wedge z_{-j_p}\right)$$

$$= z_{m-k}.0 = 0.$$

Por outro lado, se $k<0$ é tal que $m-k>0$ e $m-k\neq j_1,\ldots,j_p$, temos:

$$z_{m-k}z_k.w = z_{m-k}.(z_k\wedge z_{-j_1}\wedge\ldots\wedge z_{-j_p}) = 0.$$

Dessa forma, apenas um número finito de somandos de P_m age não trivialmente sobre w.

Como cada somando $z_{m-k}z_k$ de P_m tem grau m (cf. teorema I-5.1), então P_m tem grau m. ∎

OBSERVAÇÃO 2.1 - O nosso objetivo é demonstrar que a família de operadores $\{1,\ iP_m:\ m\in 2\mathbb{Z}+1,\ i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}\}$, satisfaz as relações de colchete análogas às satisfeitas pela família $\{c,\ B_m:\ m\in 2\mathbb{Z}+1\}$ da álgebra de Heisenberg H, isto é,

$$[iP_m, iP_n] = 2m\delta_{m+n,0}\cdot 1,\quad m,n\in 2\mathbb{Z}+1,$$

ou, equivalentemente (cf. proposição II-3.3),

$$[\sum_{m\in 2\mathbb{Z}+1} iP_m\zeta_1^m, \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} iP_n\zeta_2^n] = \big((D\delta)(\zeta_1/\zeta_2) - (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)\big)\, 1,$$

ou ainda,

$$[\sum_{m\in 2\mathbb{Z}+1} P_m\zeta_1^m, \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} P_n\zeta_2^n] = \big((D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) - (D\delta)(\zeta_1/\zeta_2)\big)\, 1,$$

ou finalmente, pela definição 2.1,

$$[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1), Z_1(\zeta_2)Z_0(Z_2)] = \big((D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2)-(D\delta)(\zeta_1/\zeta_2)\big)\, 1.$$

Essa última igualdade é a versão que provaremos.

Precisamos, ainda, de alguns lemas.

Denotaremos por $\{A,B\}$ o anti-comutador de dois elementos A e B de uma álgebra associativa, isto é, $\{A,B\} = AB + BA$. Definimos também:

$$\{Z_i(\zeta_1), Z_2(\zeta_2)\} = \sum_{k,j\in 2\mathbb{Z}+i} (\{z_k, z_j\}\zeta_1^k\zeta_2^j).$$

LEMA 2.2 - Valem as seguintes igualdades:

(i) $\{Z_i(\zeta_1), Z_i(\zeta_2)\} = \delta(\zeta_1/\zeta_2) + (-1)^i\delta(-\zeta_1/\zeta_2)$, para $i=0,1$;

(ii) $$[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1), Z_1(\zeta_2)\zeta_0(\zeta_2)]$$
$$= \big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)\, Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_1)$$
$$- Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2)\big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big).$$

Demonstração: (i): $(Z_i(\zeta_1),Z_i(\zeta_2))$

$$= \sum_{k,j\in 2\mathbb{Z}+i} (z_k,z_j)\, \zeta_1^k\zeta_2^j$$

$$= \sum_{k,j\in 2\mathbb{Z}+i} 2\, \delta_{k+j,0}\cdot 1\zeta_1^k\zeta_2^j$$

$$= \sum_{k\in 2\mathbb{Z}+i} 2.1(\zeta_1/\zeta_2)^k$$

$$= \big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + (-1)^i\delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big).1,$$

onde 1 é o homomorfismo identidade em End($\Lambda(Z\_)$) (que foi omitido no enunciado deste lema e o será no que segue).

(ii) $[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1),Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]$

$$= [Z_1(\zeta_1),Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]Z_0(\zeta_1) + Z_1(\zeta_1)[Z_0(\zeta_1),Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]$$

(vide (a) abaixo)

$$= \big((Z_1(\zeta_1),Z_1(\zeta_2))Z_0(\zeta_2) - Z_1(\zeta_2)(Z_1(\zeta_1),Z_0(Z_2))\big)\, Z_0(\zeta_1)$$
$$+ Z_1(\zeta_1)\big((Z_0(\zeta_1),Z_1(\zeta_2))Z_0(\zeta_2) - Z_1(\zeta_2)(Z_0(\zeta_1),Z_0(\zeta_2))\big)$$

(vide (b) abaixo)

$$= \big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)\, Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_1)$$
$$- Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2)\big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)$$

(por (i) e por (c) abaixo).

As justificativas para as passagens assinaladas nessa demonstração são as seguintes:

Para A, B, C e D elementos duma álgebra associativa, temos:

(a) $[AB,CD] = [A,CD]B + A[B,CD]$ e

(b) $[A,CD] = (A,C)D - C(A,D)$. Temos ainda:

(c) $(Z_0(\zeta_1),Z_1(\zeta_2)) = 0$, pois $(z_k,z_j) = 0$,

$\forall\ k\in 2\mathbb{Z},\ j\in 2\mathbb{Z}+1$

LEMA 2.3 - Os produtos $Z_0(\zeta)Z_0(\zeta)$ e $Z_1(\zeta)Z_1(\zeta)$ não estão definidos.

Demonstração: Verificaremos apenas para o 1º caso. Temos:

$$Z_0(\zeta)Z_0(\zeta) = \sum_{n\in 2\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in 2\mathbb{Z}} z_k z_{m-k} \Big) \zeta^m .$$

Sejam:

$$A_m = \sum_{k\in 2\mathbb{Z}} z_k z_{m-k} \quad \text{e} \quad a_m = \begin{cases} z_{m/2} z_{m/2} = \delta_{m,0}, \text{ se } m \text{ é múltiplo de } 4 \\ 0, \text{ se } m \text{ não é múltiplo de } 4 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned} A_m &= a_m + \sum_{k<m/2} z_k z_{m-k} + \sum_{k>m/2} z_k z_{m-k} \\ &= a_m + \sum_{j>m/2} z_{m-j} z_j + \sum_{k>m/2} z_k z_{m-k} \\ &\quad (\text{fazendo } j=m-k \text{ na } 1^a \text{ soma}) \\ &= a_m + \sum_{k>m/2} (a_{m-k}, z_k) = a_m + \sum_{k>m/2} 2\delta_{m,0} \end{aligned}$$

Assim,

$$A_m = 0, \quad \text{se } m \neq 0 \text{ e}$$

$$A_0 = 1 + \sum_{k>m/2} 2 \text{ , que não está definida.}$$

Devido ao último lema, precisamos introduzir agora a noção de produto normal ordenado. Na proposição 2.6 ficará clara a razão dessa nova definição.

DEFINIÇÃO 2.2 - Para $z_j, z_k \in C(Z)$, definimos o <u>produto normal ordenado</u> por:

$$:z_j z_k: = \begin{cases} z_j z_k; \text{ se } j \leq k \\ -z_k z_j; \text{ se } j > k \end{cases}$$

As propriedades abaixo são de verificação imediata:

(PNO1) $:z_j z_k: = z_j z_k$, se $j+k \neq 0$;

(PNO2) $:z_j z_{-j}: = \begin{cases} z_j z_{-j}, & \text{se } j \leq 0 \\ z_j z_{-j} - 2, & \text{se } j > 0 \end{cases}$;

(PNO3) $:z_j z_k: = -:z_k z_j:$, para todos $j, k \in \mathbf{Z}$ não simultaneamente nulos.

Assim, o produto normal ordenado $:z_j z_k:$ só difere do produto usual $z_j z_k$ quando $0 < j = -k$.

Definimos também:

$$:Z_0(\zeta)Z_0(\zeta): = \sum_{m \in 2\mathbf{Z}} \left(\sum_{k \in 2\mathbf{Z}} :z_k z_{m-k}: \right) \zeta^m;$$

$$:Z_1(\zeta)Z_1(\zeta): = \sum_{m \in 2\mathbf{Z}} \left(\sum_{k \in 2\mathbf{Z}+1} :z_k z_{m-k}: \right) \zeta^m.$$

LEMA 2.4 - Valem as identidades:

(i) $:Z_0(\zeta)Z_0(\zeta): = 1$,

(ii) $:Z_1(\zeta)Z_1(\zeta): = 0$.

Demonstração: (i) $:Z_0(\zeta)Z_0(\zeta): = \sum_{m \in 2\mathbf{Z}} \left(\sum_{k \in 2\mathbf{Z}} :z_k z_{m-k}: \right) \zeta^m$.

Sejam:

$$B_m = \sum_{k \in 2\mathbf{Z}} :z_k z_{m-k}: \quad \text{e}$$

$$b_m = \begin{cases} :z_{m/2} z_{m/2}: = z_{m/2} z_{m/2} = \delta_{m,0}, & \text{se } m \text{ é múltiplo de } 4 \\ 0, & \text{se } m \text{ não é múltiplo de } 4 \end{cases}$$

Então:

$$B_m = b_m + \sum_{k < m/2} :z_k z_{m-k}: + \sum_{k > m/2} :z_k z_{m-k}:$$

Como $:z_j z_k: = z_j z_k$ se $j+k\neq 0$,

temos $B_m=0$, $\forall\, m \in 2\mathbb{Z}$, $m\neq 0$ (cf. prova do lema 2.3).

Agora,

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0 + \sum_{k<0} :z_k z_{-k}: + \sum_{k>0} :z_k z_{-k}: \\ &= 1 + \sum_{k<0} z_k z_{-k} + \sum_{k>0} (z_k z_{-k} - 2) \\ &= 1 + \sum_{k>0} ((z_{-k}, z_k) - 2) \\ &= 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Logo $:Z_0(\zeta)Z_0(\zeta): = \sum_{m\in 2\mathbb{Z}} B_m \zeta^m = 1$.

A prova de (ii) é análoga.

LEMA 2.5 – Valem as identidades:

$$\text{(i)} \quad :Z_0(\zeta_1)Z_0(\zeta_2): = Z_0(\zeta_1)Z_0(\zeta_2) - \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)^2}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2};$$

$$\text{(ii)} \quad :Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2): = Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2) - \frac{(2\zeta_1/\zeta_2)}{(1-(\zeta_1/\zeta_2)^2)}.$$

Demonstração: Apenas de (i):

$$:Z_0(\zeta_1)Z_0(\zeta_2): = \sum_{k,j\in 2\mathbb{Z}} :z_k z_j: \zeta_1^k \zeta_2^j$$

$$= \sum_{\substack{k,j\in 2\mathbb{Z} \\ k+j\neq 0}} z_k z_j \zeta_1^k \zeta_2^j + \sum_{k\in 2\mathbb{Z}} :z_k z_{-k}: \zeta_1^k \zeta_2^{-k}$$

$$= \sum_{\substack{k,j\in 2\mathbf{Z}\\ k+j\neq 0}} z_k z_j \zeta_1^k \zeta_2^j + \sum_{\substack{k\in 2\mathbf{Z}\\ k\leq 0}} z_k z_{-k} \zeta_1^k \zeta_2^{-k} + \sum_{\substack{k\in 2\mathbf{Z}\\ k>0}} (z_k z_{-k} - 2) \zeta_1^k \zeta_2^{-k}$$

$$= \sum_{\substack{k,j\in 2\mathbf{Z}\\ k+j\neq 0}} z_k z_j \zeta_1^k \zeta_2^j + \sum_{\substack{k\in 2\mathbf{Z}\\ k\leq 0}} z_k z_{-k} \zeta_1^k \zeta_2^{-k} + \sum_{\substack{k\in 2\mathbf{Z}\\ k>0}} z_k z_{-k} - \sum_{\substack{k\in 2\mathbf{Z}\\ k>0}} 2\zeta_1^k \zeta_2^{-k}$$

Os três primeiros somandos são a expressão de $Z_0(\zeta_1)Z_0(\zeta_2)$, enquanto o último é a expressão da série geométrica formal

$$\sum_{\substack{k\in 2\mathbf{Z}\\ k>0}} 2(\zeta_1/\zeta_2)^k = \sum_{\substack{j\in\mathbf{Z}\\ j>0}} 2[(\zeta_1/\zeta_2)^2]^j = \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}.$$

PROPOSIÇÃO 2.6 — $[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1), Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]$

$$= (\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2))\Big(1 + \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \Big)$$

$$- \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + (-\zeta_1/\zeta_2)\big)$$

Demonstração: $[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1)Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]$

$$= \big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)\, Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_1)$$

$$- Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2)\,\big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)$$

(pelo lema 2.2.(i))

$$= \big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - (-\zeta_1/\zeta_2)\big)\Big(:Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_1): + \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \Big)$$

$$- \Big(:Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2): + \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \Big)\big(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)$$

(pelo lema 2.5)

$$
\begin{aligned}
&= \delta(\zeta_1/\zeta_2)\ {:}Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_1){:} + \delta(\zeta_1/\zeta_2)\ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \\
&\quad - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\ {:}Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_1){:} - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \\
&\quad - {:}Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2){:}\ \delta(\zeta_1/\zeta_2) - \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\delta(\zeta_1/\zeta_2) \\
&\quad - {:}Z_1(\zeta_1)Z_1(\zeta_2){:}\ \delta(-\zeta_1/\zeta_2) - \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\delta(-\zeta_1/\zeta_2) \\
&= \delta(\zeta_1/\zeta_2)\ {:}Z_0(\zeta_2)Z_0(\zeta_2){:} + \delta(\zeta_1/\zeta_2)\ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \\
&\quad - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\ {:}Z_0(\zeta_2)Z_0(-\zeta_2){:} - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \\
&\quad - {:}Z_1(\zeta_2)Z_1(\zeta_2){:}\ \delta(\zeta_1/\zeta_2) - \frac{2\zeta_1/\zeta_2}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\delta(\zeta_1/\zeta_2) \\
&\quad - {:}Z_1(-\zeta_2)Z_1(\zeta_2){:}\ \delta(-\zeta_1/\zeta_2) - \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\delta(-\zeta_1/\zeta_2)
\end{aligned}
$$

(pelo lema 1.2.(i))

$$
\begin{aligned}
&= \delta(\zeta_1/\zeta_2).1 + \delta(\zeta_1/\zeta_2)\ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \\
&\quad - \delta(-\zeta_1/\zeta_2).1 - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2} \\
&\quad - 0.\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\delta(\zeta_1/\zeta_2) \\
&\quad - 0.\delta(-\zeta_1/\zeta_2) - \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\delta(-\zeta_1/\zeta_2) \text{ (pelo lema 2.4)}
\end{aligned}
$$

$$= \delta(\zeta_1/\zeta_2)\left(1 + \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2}\right)$$

$$- \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\left(1 + \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2}\right)$$

$$- \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\left(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\right)$$

$$= \left(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\right)\left(1+ \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2}\right)$$

$$- \frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\left(\delta(\zeta_1/\zeta_2) + \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\right)$$

Observemos, na demonstração acima , que a igualdade devida à aplicação do lema 1.2.(i) só foi possível porque estamos lidando com produto normal ordenado.

LEMA 2.7 - São válidas as identidades seguintes:

(i) $\zeta^{-1}\delta(\zeta) = \delta(\zeta)$ e $\zeta^{-1}\delta(-\zeta) = -\delta(-\zeta)$;

(ii) $$\delta(\zeta) = \frac{\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-1}} + \frac{1}{1-\zeta} \quad \text{e}$$

$$\delta(-\zeta) = \frac{-\zeta^{-1}}{1+\zeta^{-1}} + \frac{1}{1+\zeta} \quad ;$$

(iii) $(D\delta)(\zeta) = (d/d\zeta)\delta(\zeta) - \delta(\zeta)$ e

$(D\delta)(-\zeta) = (-d/d\zeta)\delta(-\zeta) - \delta(-\zeta)$;

(iv) $(-d/d\zeta)\delta(\zeta) = -1/(1-\zeta)^2 + \zeta^{-2}/(1-\zeta^{-1})^2$ e

$$(-d/d\zeta)\delta(-\zeta) = \frac{1}{(1+\zeta)^2} - \frac{\zeta^{-2}}{(1+\zeta^{-1})^2} .$$

Demonstração: É simples: utiliza regras de derivação e séries geométricas formais.

PROPOSIÇÃO 2.8

$$\left(\delta(\zeta) - \delta(-\zeta) \right)\left(1 + \frac{2\zeta^{-2}}{1-\zeta^{-2}}\right) - \frac{2\zeta}{1-\zeta^{2}}(\delta(\zeta)+\delta(-\zeta))$$

$$= (D\delta)(-\zeta) - (D\delta)(\zeta).$$

Demonstração:

$$(\delta(\zeta) - \delta(-\zeta))\left(1 + \frac{2\zeta^{-2}}{1-\zeta^{-2}}\right) - \left(\frac{2\zeta}{1-\zeta^{2}}\right)(\delta(\zeta) + \delta(-\zeta))$$

$$= \delta(\zeta) - \delta(-\zeta) + \left(\frac{2\zeta^{-1}\delta(\zeta)}{1-\zeta^{-2}}\right)$$

$$+ \delta(-\zeta)\left(\frac{2\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-2}}\right) - \left(\frac{2\zeta}{1-\zeta^{2}}\right)(\delta(\zeta) + \delta(-\zeta))$$

(pelo lema 2.7(i))

$$= \delta(\zeta) - \delta(-\zeta) + (\delta(\zeta) + \delta(-\zeta))\left(\frac{2\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-2}} - \frac{2\zeta}{1-\zeta^{2}}\right)$$

$$= \delta(\zeta) - \delta(-\zeta) + \left(\frac{1}{1-\zeta} + \frac{\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-1}} + \frac{1}{1+\zeta} - \frac{\zeta^{-1}}{1+\zeta^{-1}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1-\zeta^{-1}} - \frac{1}{1+\zeta^{-1}} - \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{1+\zeta}\right).$$

Distribuindo o produto acima e aplicando o lema anterior obtemos

$$(D\delta)(-\zeta) - D(\delta)(\zeta)$$

TEOREMA 2.9 – $[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1), Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]$

$$= (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) - (D\delta)(\zeta_1/\zeta_2).$$

Demonstração: $[Z_1(\zeta_1)Z_0(\zeta_1), Z_1(\zeta_2)Z_0(\zeta_2)]$

$$= \left(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\right)\left(1 + \frac{2(\zeta_2/\zeta_1)^2}{1-(\zeta_2/\zeta_1)^2}\right)$$

$$-\left(\frac{2(\zeta_1/\zeta_2)}{1-(\zeta_1/\zeta_2)^2}\right)\left(\delta(\zeta_1/\zeta_2) - \delta(-\zeta_1/\zeta_2)\right)$$

(pela proposição 2.6)

$= (D\delta)(-\zeta_1/\zeta_2) - (D\delta)(\zeta_1/\zeta_2)$ (pela proposição 2.8). ∎

BSERVAÇÃO 2.2 — Acabamos então de demonstrar, conforme anunciamos na bservação 2.1, que a família de operadores $\{1, iP_m:\ m\in 2\mathbb{Z}+1,\ i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}\}$ atisfaz as relações de colchete da família de operadores $\{c, B_m:\ m\in 2\mathbb{Z}+1\}$ da lgebra de Heisenberg H em $(End(\Lambda(Z_-)))_L$.

Através de operadores vértice análogos aos da seção 1, obtemos $A_1^{(1)}$ omo sub-álgebra de $(End(\Lambda(Z_-^1)))_L$.

Na realidade, para utilizar os mesmos operadores vértice da seção 1, asta observar que a correspondência

$$c \longrightarrow 1/2$$

$$B_m \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, P_m$$

também uma representação de H em $\Lambda(Z_-)$. Mais precisamente, o que ocorre é o eguinte: a família de operadores $\{1/2, \frac{\sqrt{2}}{2} iP_m:\ m\in 2\mathbb{Z}+1,\ i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}\}$ obviamente itisfaz as mesmas relações de colchete da família $\{c, B_m:\ m\in 2\mathbb{Z}+1\}$ de H em $nd(\Lambda(Z_-)))_L$. Além disso, se considerarmos tal família ao invés de $\{1, iP_m:$ $2\mathbb{Z}+1\}$ e os mesmos operadores vértice da seção 1, obtemos $A_1^{(1)}$ em $nd(\Lambda(Z_-)))_L$ exatamente como no teorema 1.3.

prova da irredutibilidade do $A_1^{(1)}$-modulo $\Lambda(Z_-)$ será deixada para a seção guinte (cf. corolário 3.2).

DEFINIÇÃO 2.3 - Os operadores $\{c, B_{2j+1}, X_j^{\epsilon} : j \in Z\}$ de $(End(\Lambda(Z\_)))_L$ serão chamados de operadores fermions e a representação de A_1 em $\Lambda(Z\_)$ de representação fermiônica.

3. *A correspondência Boson-Fermion*

O significado desta correspondência no presente contexto se dá em dois aspectos. O primeiro (cf. [F]) é o conteúdo do próximo teorema.

TEOREMA 3.1 - Os $A_1^{(1)}$-módulos graduados (em particular, os H-módulos graduados) $S(Z_-^1)$ e $\Lambda(Z\_)$ são isomorfos.

Demonstração: Foi observado nas introduções às seções I-5 e I-6 respectivamente que $\dim(\Lambda_{-n})(=\alpha_n)$ é o número de partições de n em inteiros positivos sem repetição e $\dim(S_{-n})(=\beta_n)$ é o número de partições de n em inteiros positivos ímparares.

É um fato conhecido (cf. [A]) que tais números coincidem, isto é, $\alpha_n=\beta_n$, para todo $n\geq 1$.

Além disso (na mesma referência acima) temos, para as séries de Poincaré dos espaços graduados $\Lambda(Z\_)$ e $S(Z_-^1)$:

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_n q^n = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-q^{n-1})} = \prod_{n\geq 1} (1+q^n) = \sum_{n\geq 0} \beta_n q^n$$

Esta igualdade, aliada ao fato de serem ambos módulos básicos de nível 1 (cf.[FLM]), implica no isomorfismo entre eles. ■

Ressaltemos uma consequência imediata do teorema acima e da irredutibilidade do H-módulo $S(Z_-^1)$ contida na proposição II-4.1:

COROLÁRIO 3.2 - O H-módulo (logo o $A_1^{(1)}$-módulo) $\Lambda(Z_-)$ é irredutível.

Passamos agora a estudar o segundo aspecto que queremos dar ao significado da correspondência Boson-Fermion.
Trata-se de, a partir da Heisenberg principal H, podermos recuperar seus dois módulos: $S(Z_-^1)$ e $\Lambda(Z_-)$. Obter $S(Z_-^1)$ a partir de H se faz via álgebra envolvente universal da sub-álgebra abeliana de H, H_-, conforme observação II-4.1.
Para obter $\Lambda(Z_-)$ a partir de H, precisamos introduzir os seguintes operadores vértice:

$$E^+(\zeta) = \exp\Big(\sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} \zeta^j B_j/j\Big),$$

$$E^-(\zeta) = \exp\Big(\sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} \zeta^{-j} B_{-j}/-j\Big) \text{ e}$$

$$Z'(\zeta) = E^-(-\zeta)\, E^+(-\zeta), \text{ onde } B_j,\ j\in 2\mathbb{Z}+1$$

são elementos básicos de H em $(\mathrm{End}(S(Z_-^1)))_L$. (cf. proposicao II-4.1.).
Do mesmo modo que na observação 1.1, quando cada uma das séries acima se expande como série de Laurent formal em ζ, o coeficiente de ζ^j, para $j\in\mathbb{Z}$, é um operador formal bem definido sobre $S(Z_-^1)$.

TEOREMA 3.3 - Seja $Z'(\zeta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_j'\zeta^j$. Então os operadores z_j', $j\in\mathbb{Z}$, satisfazem a relação de anti-comutação seguinte:

$$(z_j', z_k') = 2(-1)^j\delta_{j+k,0}\cdot 1, \ \forall j,k\in\mathbb{Z}.$$

Em particular, os z_j', $j < 0$, geram uma álgebra exterior isomorfa a $\Lambda(Z_-)$.

Demonstração: Utilizamos inicialmente a regra formal exp A exp B = exp B exp A exp [A,B], sempre que A e B comutam com [A,B] (cf. propriedade (a) enunciada na demonstração do lema 1.1)

Temos portanto:

$$E^-(-\zeta_1)\, E^+(-\zeta_1)\, E^-(-\zeta_2)\, E^+(-\zeta_2)$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\exp\left[-\sum_{k\in 2\mathbb{N}+1} B_k\zeta_1^k/k,\ \sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} B_{-j}\zeta_2^{-j}/j\right]$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\ \exp\left(\sum_{k,j\in 2\mathbb{N}+1}\frac{-[B_k,B_j]}{kj}\zeta_1^k\zeta_2^{-j}\right)$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\ \exp\left(\sum_{k,j\in 2\mathbb{N}+1}\frac{-2k\delta_{k-j,0}}{kj}\zeta_1^k\zeta_2^{-j}\right)$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\ \exp\left(-2\sum_{k\in 2\mathbb{N}+1}(1/k)(\zeta_1/\zeta_2)^k\right)$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\ \exp\left(\log\frac{1-(\zeta_1/\zeta_2)}{1+(\zeta_1/\zeta_2)}\right)$$

(pela propriedade (b) na demonstração do Lema 1.1)

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\ \frac{1-(\zeta_1/\zeta_2)}{1+(\zeta_1/\zeta_2)}. \qquad (I)$$

Analogamente, obtemos:

$$E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_2)E^-(-\zeta_1)E^+(-\zeta_1)$$

$$= E^-(-\zeta_2)E^-(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)\ \frac{1-(\zeta_2/\zeta_1)}{1+(\zeta_2/\zeta_1)}$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\ \frac{1-(\zeta_2/\zeta_1)}{1+(\zeta_2/\zeta_1)}$$ (pois os pares $E^-(-\zeta_1)$, $E^-(-\zeta_2)$ e $E^+(-\zeta_1)$, $E^+(-\zeta_2)$ comutam) (II).

Assim, de (I) e (II) obtemos:

$$\langle Z'(\zeta_1), Z'(\zeta_2)\rangle$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\left(\frac{1-(\zeta_1/\zeta_2)}{1+(\zeta_1/\zeta_2} + \frac{1-(\zeta_2/\zeta_1)}{1+(\zeta_2/\zeta_1)} \right)$$

$$= E^-(-\zeta_1)E^-(-\zeta_2)E^+(-\zeta_1)E^+(-\zeta_2)\big(2\delta(-\zeta_1/\zeta_2)\big)$$

(pelo lema 2.7(i) e (ii))

$= 2\delta(-\zeta_1/\zeta_2)E^-(+\zeta_2)E^-(-\zeta_2)E^+(+\zeta_2)E^+(-\zeta_2)$ (pelo lema 1.2(i))

$= 2\delta(-\zeta_1/\zeta_2)$ (pois $E^{\pm}(+\zeta_2)E^{\pm}(-\zeta_2) = 1$,

pela propriedade (c) após a prova do teorema 1.3).

Se igualarmos os coeficientes de $\zeta_1^j\zeta_2^k$ na igualdade de séries formais que acabamos de provar

$$(\langle Z'(\zeta_1), Z'(\zeta_2)\rangle = 2\delta(-\zeta_1/\zeta_2).1) \quad ,$$

obtemos

$$\langle z'_j, z'_k\rangle = 2(-1)^j\delta_{j+k,0}.1, \ \forall\ j,k\in\mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Apêndice ao Capítulo III

Sobre os Coeficientes dos Operadores Vértice

Conforme observação 1.1, faremos aqui alguns cálculos no sentido de encontrar os coeficientes de $X'(\zeta)$.

Seja $\quad A = \sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} 2\zeta^{-j} B_{-j}/j.\quad$ Temos:

$$
{}_1(-\zeta) = \exp\Big(\sum_{j\in 2\mathbb{N}+1} 2(-\zeta)^{-j} B_{-j}/-j\Big) = \exp A = \sum_{n\geq 0} A^n/n!
$$

$$
\begin{aligned}
&= [1] + \left[2B_{-1}\zeta^{-1} + \frac{2}{3}B_{-3}\zeta^{-3} + \frac{2}{5}B_{-5}\zeta^{-5} + \frac{2}{7}B_{-7}\zeta^{-7} + \dots\right] \\
&\quad + \frac{1}{2!}\Big[\Big(2^2 B_{-1}^2\zeta^{-2} + \frac{2^2}{3}B_{-1}B_{-3}\zeta^{-4} + \frac{2^2}{5}B_{-1}B_{-5}\zeta^{-6} + \dots \\
&\quad + \frac{2^2}{2k+1}B_{-1}B_{-2k-1}\zeta^{-2k-2} + \dots\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{2^2}{3}B_{-3}B_{-1}\zeta^{-4} + \frac{2^2}{3^2}B_{-3}^2\zeta^{-6} \\
&\quad + \frac{2^2}{3.5}B_{-3}B_{-5}\zeta^{-8} + \dots + \frac{2^2}{3(2k+1)}B_{-3}B_{-2k-1}\zeta^{-2k-4} + \dots\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{2^2}{5}B_{-5}B_{-1}\zeta^{-6} + \frac{2^2}{5.3}B_{-5}B_{-3}\zeta^{-8} + \dots \\
&\quad + \frac{2^2}{5(2k+1)}B_{-5}B_{-2k-1}\zeta^{-2k-6} + \dots\Big) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \frac{2^2}{2n+1}B_{-2n-1}B_{-1}\zeta^{-2n-2} + \frac{2^2}{(2n+1)3}B_{-2n-1}B_{-3}\zeta^{-2n-4} + \dots
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{2^2}{(2n+1)(2k+1)} B_{-2n-1}B_{-2k-1}\zeta^{-2n-2k-2} + \dots) + \dots \Big]$$

$$+ \frac{1}{3!} \Big[(2^3 B_{-1}^3 \zeta^{-3} + 2^2 \frac{2}{3} B_{-1}^2 B_{-3}\zeta^{-5} + 2^2 \frac{2}{5} B_{-1}^2 B_{-5}\zeta^{-7}$$

$$+ \dots + 2^2 \frac{2}{2k+1} B_{-1}^2 B_{-2k-1}\zeta^{-2k-2} + \dots)$$

$$+ (2 . \frac{2}{3} 2B_{-1}B_{-3}B_{-1}\zeta^{-5} + 2 . \frac{2}{3}\frac{2}{3} B_{-1}B_{-3}^2\zeta^{-7}$$

$$+ 2 . \frac{2}{3} \frac{2}{5} B_{-1}B_{-3}B_{-5}\zeta^{-9} + \dots$$

$$+ 2 . \frac{2}{3}\frac{2}{2k+1} B_{-1}B_{-3}B_{-2k-1}\zeta^{2k-5} + \dots) + \dots$$

$$+ (2 . \frac{2}{2n+1} . 2B_{-1}B_{-2n-1}B_{-1}\zeta^{-2n-3} + 2 . \frac{2}{2n+1}\frac{2}{3} B_{-1}B_{-2n-1}B_{-3}\zeta^{-2n-5}$$

$$+ \dots$$

$$+ 2 . \frac{2}{2n+1} . \frac{2}{2k+1} B_{-1}B_{-2n-1}B_{-2k-1}\zeta^{-2n-2k-3} + \dots) + \dots$$

$$+ (\frac{2}{3} 2^2 B_{-3}B_{-1}^2\zeta^{-5} + \frac{2}{3} 2 \frac{2}{5} B_{-3}B_{-1}B_{-5}\zeta^{-7} + \dots$$

$$+ \frac{2}{3} 2 \frac{2}{2k+1} B_{-3}B_{-1}B_{-2k-1}\zeta^{-2k-5} + \dots) + \dots$$

$$+ (\frac{2}{3} \frac{2}{2n+1} 2 B_{-3}B_{-2n-1}B_{-1}\zeta^{-2n-5} + \frac{2}{3}\frac{2}{2n+1}\frac{2}{3} B_{-3}B_{-2n-1}B_{-3}\zeta^{-2n-7}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{2}{3}\frac{2}{2n+1}\frac{2}{2k+1} B_{-3}B_{-2n-1}B_{-2k-1}\zeta^{-2n-2k-5} + \dots) + \dots$$

$$+ (\frac{2}{2n+1} 2^2 B_{-2n-1}B_{-1}^2\zeta^{-2n-3} + \frac{2}{2n+1} 2 \frac{2}{3} B_{-2n-1}B_{-1}B_{-3}\zeta^{-2n-5} \dots$$

$$+ \frac{2}{2n+1} 2 \frac{2}{2k+1} B_{-2n-1}B_{-1}B_{-2k-1}\zeta^{-2n-2k-3} + \dots)$$

$$+ (\frac{2}{2n+1}\frac{2}{3} 2 B_{-2n-1}B_{-3}B_{-1}\zeta^{-2n-5} + \frac{2}{2n+1}(2/3)^2 B_{-2n-1}B_{-3}^2\zeta^{-2n-7} + \dots$$

$$+ \frac{2}{2n+1}\frac{2}{3}\frac{2}{2k+1} B_{-2n-1}B_{-3}B_{-2k-1}\zeta^{-2n-2k-5} + \dots) + \dots$$

$$+ \left(\frac{2}{2n+1} \frac{2}{2k+1} 2 B_{-2n-1} B_{-2k-1} B_{-1} \zeta^{-2n-2k-3} \right.$$

$$+ \frac{2}{2n+1} \frac{2}{2k+1} \frac{2}{3} B_{-2n-1} B_{-2k-1} B_{-3} \zeta^{-2n-2k-5} + \dots$$

$$\left. + \frac{2}{2n+1} \frac{2}{2k+1} \frac{2}{2L+1} B_{-2n-1} B_{-2k-1} B_{-2L-1} \zeta^{-2n-2k-2L-3} + \dots \right) + \dots \Big]$$

$$+ \frac{1}{4!} A^4 + \dots$$

'odemos resumir as expressões encontradas acima em:

$$+ \sum_{i_1 \in 2N+1} 2 B_{-i_1} \zeta^{-i_1} + \frac{1}{2!} \sum_{(i_1,i_2) \in (2N+1)^2} \frac{2^2}{i_1 i_2} B_{-i_2} B_{-i_2} \zeta^{-i_1-i_2}$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{(i_1,i_2,i_3) \in (2N+1)^3} \frac{2^3}{i_1 i_2 i_3} B_{-i_1} B_{-i_2} B_{-i_3} \zeta^{-i_1-i_2-i_3} + \dots$$

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n!} \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in (2N+1)^n} \frac{2^n}{i_1 \dots i_n} B_{-i_1} \dots B_{-i_n} \zeta^{-i_1 \dots -i_n} \right),$$

nde $(2N+1)^n$ é o produto cartesiano de n cópias de 2N+1 e o somando orrespondente a n=0 se define como 1 (em End($S(Z^1_-)$) ou em End($\Lambda(Z_-)$), onforme o caso).

embrando que grau $(B_j) = j$, $\forall j \in 2\mathbb{Z}+1$, vemos que o coeficiente de ζ^{-m} na ltima série acima é um operador de grau -m, a saber: uma soma de operadores o tipo $\frac{1}{n!} \frac{2^n}{i_1 \dots i_n} B_{-i_1} \dots B_{-i_n}$, onde $(i_1,\dots,i_n)$ percorre todas as eqüências finitas possíveis de ímpares positivos com repetição cuja soma é m. ssa soma de operadores tem um número finito de somandos.

or exemplo: o coeficiente de ζ^{-4} é

$$\frac{1}{2!} \frac{2^2}{1.3} B_{-1} B_{-3} + \frac{1}{2!} \frac{2^2}{3.1} B_{-3} B_{-1} + \frac{1}{4!} \frac{2^4}{1.1.1.1} B_{-1}^4$$

Com cálculos análogos aos feitos acima, verificamos que

$$E_1^+(-\zeta) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in(2\mathbb{N}+1)^n} \frac{(-2)^n}{i_1 \ldots i_n} B_{i_1} \ldots B_{i_n} \zeta^{i_1+\ldots+i_n} \Big)$$

Quanto aos operadores X'_L, $L\in\mathbb{Z}$, temos:

$$X'(\zeta) = -1/2\, E_1^-(-\zeta)\, E_1^+(-\zeta)$$

$$= (-1/2)\Big(\sum_{n\geq 0} \Big(\frac{1}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in(2\mathbb{N}+1)^n} \frac{2^n}{i_1\ldots i_n} B_{-i_1}\ldots B_{-i_n} \zeta^{-i_1-\ldots-i_n} \Big)\Big)$$

$$\Big(\sum_{m\geq 0} \Big(\frac{1}{m!} \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in(2\mathbb{N}+1)^m} \frac{(-2)}{j_1\ldots j_m} B_{j_1}\ldots B_{j_m} \zeta^{j_1+\ldots+j_m} \Big)\Big)$$

$$= \sum_{L\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in(2\mathbb{N}+1)^n \\ (j_1,\ldots,j_m)\in(2\mathbb{N}+1)^m \\ -i_1-\ldots-i_n+j_1+\ldots+j_m = L}} (-1/2) \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \frac{2^n(-2)^m}{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_m} . B_{-i_1}\ldots B_{-i_n} B_{j_1}\ldots B_{j_m} \Big)\zeta^L$$

Dessa forma, obtemos

$$X'_L = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in(2\mathbb{N}+1)^n \\ (j_1,\ldots,j_m)\in(2\mathbb{N}+1)^m \\ -i_1-\ldots-i_n+j_1+\ldots+j_m = L}} (-1/2) \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \frac{2^n(-2)^m}{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_m} . B_{-i_1}\ldots B_{-i_n} B_{j_1}\ldots B_{j_m}, \quad \text{para cada } L\in\mathbb{Z}.$$

Observamos, da fórmula acima, o seguinte:

(i) X_L' é soma infinita de operadores de grau L (em $\mathrm{End}(S(Z_-^1))$ ou $\mathrm{End}(\Lambda(Z_-))$, conforme o caso);

(ii) X_L' é um operador bem definido pois, dado qualquer polinômio f (por exemplo em $S(Z_-^-))$, apenas um número finito de somandos que compõem X_L' age não trivialmente em f.

Para demonstrar essa afirmação, consideremos um monômio $x_{r_1}^{m_1} \ldots x_{r_t}^{m_t} = p \in S(Z_-^1)$ que compõe f.

Os somandos de X_L' que contêm os operadores $B_{r_1}^{m_1+1}, B_{r_2}^{m_2+1}, \ldots, B_{r_t}^{m_t+1}$ anulam p (lembremos que $B_k . f = \dfrac{k\partial f}{\partial x_k}$).

Os somandos que contêm B_s, com $s \notin \{r_1, \ldots, r_t\}$, anulam p.

Então os somandos que não anulam p são os do tipo (a menos de escalares)

$$B_{-s_1}^{L_1} \ldots B_{-s_k}^{L_k} B_{r_1}^{n_1} \ldots B_{r_t}^{n_t}, \text{ com } 0 \leq n_i \leq m_i+1, \ \forall \ i \in \{1, \ldots, t\}$$

e tais que

$$-s_1L_1 - \ldots - s_kL_k + r_1n_1 + \ldots + r_tn_t = L \ (*).$$

Nesta expressão, os r_i's estão fixados, os n_i's são em número finito. Então o conjunto de valores possíveis para

$$r_1n_1 + \ldots + r_tn_t$$

é finito. Para cada um desses valores, as possibilidades para

$$-s_1L_1 - \ldots - s_kL_k$$

satisfazendo (*) são em número finito.

Dessa forma os somandos de X_L' que não anulam o monômio p são em número finito, portanto o mesmo vale para o polinômio f.

▨ ▨ ▨

BIBLIOGRAFIA

[AR] Andrews, G.E.; Rota, G.
The theory of partitions
Encyclopedia of Mathematics and its Applications
- 2 - Addison - Wesley (1976)

[C1] Chevalley, C.
The construction and study of certain important algebras
The mathematical society of Japan (1955)

[C2] Chevalley, C.
Fundamental Concepts of Algebra
Academic Press Inc. (1963)

[Fi] Figueiredo, L.
Calculus of principally twisted vertex operators
Memoirs of the American Mathematical Society - 69 - nº 371(1987).

[Fr] Frenkel, I.B.
Two constructions of Affine Lie Algebra Representations and
Boson-Fermion Correspondence in Quantum Field Theory
Journal of Functional Analysis - 44, 259-327 (1981)

[FF] Feingold, A. J.; Frenkel, I.B.
Classical Affine Algebras
Advances in Mathematics - 56, 117-171 (1985)

[FLM] Frenkel, I.B.; Lepowsky, J.; Meurman, A.
A moonshine module for the monster
Vertex operators in Mathematics and Physics
Proceedings of a Conference - November 10-17 / 1983
Springer - Verlag (1984)

[G] Greub, W.H.
Multilinear Algebra
Springer - Verlag (1967)

[H] Humphreys, J.E.
Introduction to Lie Algebras and Representation Theory
Springer - Verlag (1970)

[J] Jacobson, N.
Basic Algebra II
W.H. Freeman and Company (1980)

[L] Lepowsky, J.
Some Constructions of the Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$
Lectures in Applied Mathematics - 21, 375-397 (1985)

[LMS] Lepowsky, J.; Mandelstan, S.; Singer, I.M.
Vertex operators in Mathematics and Phisics
Proceedings of a Conference - November 10-17 / 1983
Springer - Verlag (1984)

[LW1] Lepowsky, J.; Wilson R.L.
The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers - Ramanujan identities
Inventiones mathematical - Springer - Verlag (1984)

[LW2] Lepowsky, J.; Wilson R.L.
Construction of the Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$
Commun math. phys - 62, 43/53 (1978)

[Ma] Macdonald, I.G.
Kac-Moody Algébras
Conference on Lie Algebras and Related Topics (CMS Conference Procedings) (1984)

[Mo] Moody, R.V.
A New Class of Lie Algebras
Journal of Algebra - 10, 211/230 (1968)

[PFM] Pfister, R.; Figueiredo, L.; Mandia M.
Álgebras de Kac-Moody e Aplicações
Atas da 9ª escola de álgebra - Brasília (1987)

[S] Serre, J.P.
Algèbres de Lie semi-simples complexes
Benjamin, N.Y. (1966)

[V] Varadarayan, V.S.
Lie Groups, Lie Algebras, and their representations
Prentice - Hall (1974)