PRODUTO SUBDIRETO DE ESTRUTURAS E ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS6

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. PEDRO JOSÉ CATUOGNO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de dezembro de 1992

Prof. Dr. WALTER ALEXANDRE CARNIELLI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

PRODUTO SUBDIRETO DE ESTRUTURAS E ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS

ALUNO: PEDRO JOSÉ CATUOGNO

ORIENTADOR: PROF. DR. WALTER A. CARNIELLI

IMECC - UNICAMP

1992

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

À Walter pelo apoio e confiança, á Sette, Itala e Caicedo pelas sugestões e correções, aos amigos da pós-graduação pelo companherismo, á Fátima pela inestimável ajuda na datilografia e paciência, e ao CNPq pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

GLOSSÁRIO

τ	tipo de estruturas
$\Vert\tau\Vert$	cardinal associado às relações de τ
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$	τ-estruturas
$\vert\mathfrak{A}\vert$	universo de $\mathfrak{A}$
$\Vert\mathfrak{A}\Vert$	cardinal do universo de $\mathfrak{A}$
$\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$	homomorfismo entre as τ-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$
φ, ψ	homomorfismos de τ-estruturas
$\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i$	τ-estrutura produto direto da família de τ-estruturas $\left\{\mathfrak{B}_i / i \in I\right\}$
Π_i	i-ésima projeção da τ-estrutura produto direto
$K(\tau)$	a classe de todas as τ-estruturas
$\left\{p_i: \mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}_i / i \in I\right\}$	família de homomorfismos sobrejetores
K	uma classe de τ-estruturas
$\left(\left\{\mathfrak{B}_i / i \in \Sigma\right\}, \left\{F_{ij} / i \leq j\right\}\right)$	diagrama dirigido da família de τ-estruturas $\left\{\mathfrak{B}_i / i \in \Sigma\right\}$ sobre $(\Sigma,\leq)$

$\varinjlim D$	τ-estrutura limite direto do diagrama dirigido de τ-estruturas D
G	grafo
L	álgebra de Lie
Z(L)	centro da álgebra de Lie L
gL(V)	álgebra de todos os endomorfismos de V
ad_L	representação adjunta de L
M	multigrafo
$F_i^M(F_f^M)$	função inicial (final) do multigrafo orientado M
$Ext_M(a)$	extremos da aresta a do multigrafo não orientado M
$L(\tau)$	linguagem de primeira ordem associada ao tipo de estruturas τ.

INTRODUÇÃO

PRODUTO SUBDIRETO DE ESTRUTURAS E ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS:

Este trabalho pretende dar uma exposição da noção de produto subdireto de estruturas, dos principais teoremas de decomposição e de suas aplicações para classes de estruturas fechadas por certas propriedades específicas

A noção de *estrutura* inclui quase todas as estruturas matemáticas elementares (isto é, definíveis segundo a lógica de primeira ordem) como por exemplo grupos, anéis, corpos, álgebras de Boole, etc. Se a estendermos à noção de estruturas polisortidas, tal noção permite subsumir por exemplo os espaços vetoriais, espaços topológicos e todas as classes algébricas estudadas na Álgebra Universal.

O *produto subdireto de estruturas* é uma generalização do conceito de produto direto. É particularmente importante o conceito de *estrutura subdiretamente irredutível*, definido no capítulo I. Apresentamos uma caracterização do produto subdireto por meio de uma propriedade universal (uma contribuição original deste trabalho).

Do ponto de vista histórico, um teorema clássico de G. Birkhoff (ver [Bi]) foi o primeiro resultado a respeito da decomposição subdireta de álgebras (de uma classe equacional) em fatores subdiretamente irredutíveis. O Teorema de Birkhoff foi generalizado para classes mais gerais de estruturas por diversos autores, alguns independentemente: por Malcev (em [M]), para classes de estruturas axiomatizadas por axiomas universais em primeira ordem; por Burris ([B]), Pickett ([P]) e Sabbidusi ([S]), para outras classes especiais de estruturas.

Uma generalização particularmente interessante foi obtida por Caicedo ([C]), para classes arbitrárias de estruturas fechadas sob limites diretos de famílias de epimorfismos. O interesse do teorema de Caicedo reside na generalidade, que permite aplicá-lo aos grafos planares, por exemplo, e na noção mais estrita de (subdireta-) irredutibilidade, que permite obter elementos subdiretamente irredutíveis mais simples.

Nos capítulos I e II expomos os fundamentos da teoria seguindo o trabalho de X. Caicedo [C]. O capítulo III é consagrado às aplicações da teoria; destacamos nossos resultados originais, que são os seguintes : caracterizamos as álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis subdiretamente irredutíveis; estudamos e caracterizamos os multigrafos subdiretamente irredutíveis em quatro classes distintas, e também provamos teoremas de representação para os multigrafos.

E, para finalizar, no apêndice apresentamos o resultado de R. Lyndon [Ly 2] a respeito da caracterização de sentenças preservadas por produto subdireto.

CAPÍTULO I

PRODUTO SUBDIRETO DE ESTRUTURAS E ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS

I.0 - INTRODUÇÃO:

O objetivo deste capítulo é apresentar as noções básicas de produto subdireto de τ-estruturas e τ-estruturas subdiretamente irredutíveis em relação a uma classe de τ-estruturas. Na primeira parte expomos (sem pretensão de originalidade) estas noções e algumas equivalencias, todos os resultados sendo conhecidos (ver [C], [M], [G], [P], [Pi] e [Bu]). Neste trabalho escolhemos o enfoque de [C], já adaptado para τ-estruturas. A única contribuição original ocorre em 1.17, onde se apresenta uma caracterização do produto subdireto por uma propriedade universal.

A história do produto subdireto e dos elementos subdiretamente irredutíveis começa com o artigo de Birkhoff de 1944 [Bi] no contexto da álgebra universal. O enfoque do ponto de vista da teoria de modelos aparece no artigo de Malcev de 1959 [M].

I.1 - GENERALIDADES

As principais definições que utilizaremos são as seguintes:

Definição 1.1: Um *tipo de estruturas* τ é um par:

$$((n_0, \dots, n_\gamma, \dots)_{\gamma<\alpha}, (m_0, \dots, m_\gamma, \dots)_{\gamma<\beta})$$

onde α, β são números ordinais e n_γ, $m_\gamma \in \mathbb{N}$, tais que:

(i) Para cada $\gamma < \alpha$ temos associado um símbolo de função F_γ n_γ-ário.

(ii) Para cada $\gamma < \beta$ temos associado um símbolo de relação R_γ m_γ-ário.

Definição 1.2: Uma *estrutura* $\mathfrak{U}$ de tipo τ é uma tripla $(|\mathfrak{U}|, F, R)$ onde:

i - $|\mathfrak{U}|$ é um conjunto não vazio (universo de $\mathfrak{U}$)

ii - Para cada $\gamma < \alpha$, F_γ realiza-se como uma função

$$n_\gamma\text{-ária } F_\gamma^{\mathfrak{U}}: |\mathfrak{U}|^{n_\gamma} \longrightarrow |\mathfrak{U}|$$

iii - Para cada $\gamma < \beta$, R_γ realiza-se como uma relação

$$m_\gamma\text{-ária } R_\gamma^{\mathfrak{U}} \subset |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$$

e $F = \left\{ F_\gamma^{\mathfrak{U}} \;/\; \gamma < \alpha \right\}$, $R = \left\{ R_\gamma^{\mathfrak{U}} \;/\; \gamma < \beta \right\}$.

No que segue assumimos que a igualdade standard é uma relação de R.

Notação: $K(\tau)$ denota a classe de todas as estruturas de tipo τ.

Definição 1.3: Sejam $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ estruturas de tipo τ. Uma função $\varphi: |\mathfrak{U}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ é um *homomorfismo de estruturas* se:

i - Para cada $\gamma < \alpha$ e qualquer $(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{n_\gamma}$

$$\varphi(F_\gamma^{\mathfrak{U}}(a_1, \ldots, a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \ldots \varphi(a_{n_\gamma}))$$

ii - Para cada $\gamma < \beta$ e qualquer $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$

$$(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}} \text{ então } (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$$

Definição 1.4: Sejam $\mathfrak{U}, \mathfrak{B} \in K(\tau)$; $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo de estruturas, φ é dito uma *imersão* se verifica a seguinte propriedade:

- Para cada $\gamma < \beta$ e qualquer $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$

$$(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}} \text{ see } (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$$

Observação: Toda imersão é injetora.

Definição 1.5: Sejam $\mathfrak{U}, \mathfrak{B} \in K(\tau)$. $\mathfrak{U}$ é uma *subestrutura* de $\mathfrak{B}$ se $|\mathfrak{U}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ e a inclusão $i : |\mathfrak{U}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ é uma imersão.

Definição 1.6: Sejam $\mathfrak{U}, \mathfrak{B} \in K(\tau)$ $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$, φ é um *isomorfismo* se existe $\psi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\varphi \circ \psi = 1_{|\mathfrak{B}|}$ e $\psi \circ \varphi = 1_{|\mathfrak{U}|}$.

Proposição 1.7: Sejam $\mathfrak{U}, \mathfrak{B} \in K(\tau)$; $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é um isomorfismo see φ é uma imersão sobrejetora.

Prova: $[\longrightarrow]$ Seja $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$ um isomorfismo; trivialmente, $\varphi : |\mathfrak{U}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ é bijetora, e em particular sobrejetora.

Provemos que φ é imersão. Sejam $\gamma < \beta$ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ tais que: $(\varphi(a_1), \dots \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$; por hipótese existe $\psi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{U}$ homomorfismo inverso de φ e como $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) = (\psi \circ \varphi(a_1), \dots, \psi \circ \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$ resulta que φ é imersão. Logo, $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é uma imersão sobrejetora.

$[\longleftarrow]$ Seja $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$ imersão sobrejetora, então $\varphi : |\mathfrak{U}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ é bijetora, logo existe $\psi : |\mathfrak{B}| \longrightarrow |\mathfrak{U}|$ inversa de φ.

Provaremos que ψ é homomorfismo.

Sejam $\gamma < \alpha$ e $(a_1, \dots a_{n_\gamma}) \in |\mathfrak{B}|^{n_\gamma}$. Como φ é bijetora existem $b_1, \dots b_{n_\gamma} \in |\mathfrak{U}|$ tais que: $a_i = \varphi(b_i)$, $b_i = \psi(a_i)$ e por ser φ homomorfismo:

$$\varphi(F_\gamma^{\mathfrak{U}}(b_1, \dots b_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{B}}(\varphi(b_1), \dots \varphi(b_{n_\gamma}))$$

Aplicamos ψ na igualdade anterior e obtemos:

$$F_\gamma^{\mathfrak{U}}(\psi(a_1), \dots \psi(a_{n_\gamma})) = \psi(F_\gamma^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots a_{n_\gamma}))$$

Sejam agora $\gamma < \beta$ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{B}|^{m_\gamma}$ tais que: $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$. Como φ é bijetora existem $b_1, \dots b_{m_\gamma} \in |\mathfrak{U}|$ tais que: $a_i = \varphi(b_i)$ $b_i = \psi(a_i)$.

Como φ é uma imersão, temos que: $(\varphi(b_1), \dots \varphi(b_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$ então $(b_1, \dots b_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$, ou seja, $(\psi(a_1), \dots \psi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$. Assim ψ é um homomorfismo de $\mathfrak{B}$ em $\mathfrak{U}$ que satisfaz $\varphi\circ\psi = 1_{|\mathfrak{B}|}$ e $\psi\circ\varphi = 1_{|\mathfrak{U}|}$. Logo φ é isomorfismo ∎

I.2 PRODUTO DIRETO E SUBDIRETO DE τ-ESTRUTURAS

Definição 1.8: Seja $\left\{\mathfrak{B}_i \,/\, i \in I\right\}$ uma família de τ-estruturas.

O *produto direto* da família $\left\{\mathfrak{B}_i / \, i \in I\right\}$ é a τ-estrutura $\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i = (|\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i|, F, R)$ definida por:

i. $|\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i| = \prod_{i\in I}|\mathfrak{B}_i|$

ii. Se $\gamma < \alpha$ F_γ realiza-se pela função n_γ-ária $F_\gamma^{\Pi\mathfrak{B}_i}: |\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i|^{n_\gamma} \longrightarrow |\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i|$ definida por:

$$F_\gamma^{\Pi\mathfrak{B}_i}(a_1, \dots a_{n_\gamma})\,[j] = F_\gamma^{\mathfrak{B}_j}(a_1[j], \dots a_{n_\gamma}[j])$$

para cada $j \in I$.

iii. Se $\gamma < \beta$ R_γ realiza-se pela relação m_γ-ária, $R_\gamma \subset |\prod_{i\in I}\mathfrak{B}_i|^{m_\gamma}$ definida por:

$$(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\Pi\mathfrak{B}_i} \text{ se } (a_1[j], \dots a_{m_\gamma}[j]) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_j},$$

para cada $j \in I$.

iv. $F = \left\{F_\gamma^{\prod \mathfrak{B}_i} \; / \; \gamma < \alpha\right\}$, $R = \left\{R_\gamma^{\prod \mathfrak{B}_i} \; / \; \gamma < \beta\right\}$.

Corolário 1.9: As projeções Π_j: $\left|\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i\right| \longrightarrow |\mathfrak{B}_j|$, $\Pi_j(a) = a[j]$, são homomorfismo sobrejetores.

Prova: Trivial a partir das definições ∎

Podemos provar agora a seguinte *propriedade universal do produto direto*:

Proposição 1.10: Sejam $\left\{\mathfrak{B}_i \; / \; i \in I\right\}$ e $\mathfrak{U}$ uma família de τ-estruturas e uma τ-estrutura, respectivamente. Seja $\left\{h_i\colon \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \; / \; i \in I\right\}$ uma família de homomorfismos; então existe um único homomorfismo g: $\mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ tal que: $h_i = \Pi_i \circ g$ para cada $i \in I$.

Prova: (a) Primeiramente, provamos a *existência*: Definimos g: $\mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ por $g(a)\,[i] = h_i(a)$. Observemos que g: $|\mathfrak{U}| \longrightarrow \left|\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i\right|$ é uma função bem definida; provemos que é um homomorfismo.

Para isto sejam $\gamma < \alpha$ $(a_1, \ldots a_{n_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{n_\gamma}$ então para cada $j \in I$

$$g\left(F_\gamma^{\mathfrak{U}}\,(a_1, \ldots a_{n_\gamma})\right)\,[j] = h_j\left(F_\gamma^{\mathfrak{U}}(a_1, \ldots a_{n_\gamma})\right) =$$

$$= F_\gamma^{\mathfrak{B}_j}(h_j(a) \ldots h_j(a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\prod \mathfrak{B}_i}(g(a), \ldots g(a_{n_\gamma}))\,[j]\,.$$

Assim $g(F_\gamma^{\mathfrak{U}}(a_1, \ldots a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\prod \mathfrak{B}_i}(g(a_1), \ldots g(a_{n_\gamma}))$.

Sejam então $\gamma < \beta$, $(a \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ tais que:

$(a \ldots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$. Como $(g(a) \ldots g(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\prod \mathfrak{B}_i}$ see

Para cada $j \in I$ $(g(a_1)[j], \ldots g(a_{m_\gamma})[j]) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_j}$ see

Para cada $j \in I$ $(h_j(a_1), \ldots, h_j(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_j}$, o que é verdadeiro pois os $h_j\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_j$ são homomorfismos.

Assim g é homomorfismo, e trivialmente $h_i = \Pi_i \circ g$ para cada $i \in I$.

(b) *Unicidade*: Sejam $g, g'\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_i \mathfrak{B}_i$ tais que para cada $i \in I$ $h_i = \Pi_i \circ g = \Pi_i \circ g'$. Seja $a \in |\mathfrak{A}|$ então para cada $i \in I$ $g(a)[i] = \Pi_i \circ g(a) = \Pi_i \circ g'(a) = g'(a)[i]$ logo $g(a) = g'(a)$, ou seja, $g = g'$ ■

A caracterização do produto direto pode ser obtida pela propriedade universal, como mostramos a seguir.

Proposição 1.11: Sejam $\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ uma família de τ-estruturas, $\mathfrak{B}$ uma τ-estrutura e $\left\{p_i\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ uma família de homomorfismos. Se para cada τ-estrutura $\mathfrak{A}$ e família de homomorfismos $\left\{t_i\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ existe um único homomorfismo $g\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que para cada $i \in I$ $t_i = p_i \circ g$, então existe um isomorfismo $h\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ tal que: para cada $i \in I$, $p_i = \Pi_i \circ h$.

Prova: Seja $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ e $\left\{t_i = \Pi_i\colon \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$; então existe, por hipótese, um homomorfismo $g\colon \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que

(1) Para cada $i \in I$ $\Pi_i = p_i \circ g$

Seja $h\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ (como na proposição 1.10) para a família $\left\{p_i\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$. Então h satifaz:

(2) Para cada $i \in I$ $p_i = \Pi_i \circ h$

Logo de (1) e (2) temos que para cada $i \in I$ $\Pi_i = \Pi_i \circ (h \circ g)$ e $p_i = p_i \circ (g \circ h)$.

Dado que $h \circ g: \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ e $\Pi_i \circ 1_{|\Pi_i \mathfrak{B}_i|} = \Pi_i = \Pi_i \circ (h \circ g)$, pela unicidade em 1.10 temos que $h \circ g = 1_{|\Pi_i \mathfrak{B}_i|}$. Como $g \circ h: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ e $p_i \circ 1_{|\mathfrak{B}|} = p_i = p_i \circ (g \circ h)$, pela unicidade da hipótese temos que: $g \circ h = 1_{|\mathfrak{B}|}$. Logo há isomorfismo, e para cada $i \in I$, $p_i = \Pi_i \circ h$ ∎

Passamos a estudar o *produto subdireto de* τ-estruturas, ao qual também caracterizaremos de maneira universal.

Definição 1.12: Seja $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ uma família de τ-estruturas e uma τ-estrutura $\mathfrak{U}$, tal que existe uma imersão $\varphi: \mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ com $\Pi_i \circ \varphi$ sobrejetor para cada $i \in I$. Dizemos então que $\mathfrak{U}$ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ via φ.

Observação: Se identificamos $\mathfrak{U}$ com $\varphi(\mathfrak{U})$ podemos dizer que $\mathfrak{U}$ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ se $\mathfrak{U}$ é uma sub-estrutura do produto direto $\prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$, tal que, para cada $j \in I$, $\Pi_j \circ i$ é sobrejetor onde $i: \mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ é a inclusão.

Definição 1.13: Sejam $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ uma família de τ-estruturas, $\mathfrak{U}$ τ-estrutura e $\left\{p_i: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ uma família de homomorfismos sobrejetores. Dizemos que esta família de homomorfismos é $\mathfrak{U}$-*separadora* se satisfaz às seguintes condições equivalentes:

(i) Se $\gamma < \beta$ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{U}}$ então existe $i \in I$ tal que

$$(p_i(a_1), \dots, p_i(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}_i},$$

ou equivalente:

(ii) Se $\gamma < \beta$ $(a_1 \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ e para cada $i \in I$

$$(p_i(a_1, \dots, p_i(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i} \text{ então } (a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}.$$

Mostramos agora como é possível obter a *caracterização do produto subdireto via família de homomorfismos $\mathfrak{U}$-separadoras.*

Proposição 1.14: Seja $\mathfrak{U}$ produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ via φ. Então a família de homomorfismos $\left\{\Pi_i \circ \varphi\colon \ \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ é $\mathfrak{U}$-separadora.

Prova: Sejam $\gamma < \beta$ e $(a_1 \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ tais que $(a_1 \ldots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{U}}$. Como φ é imersão, $(\varphi(a_1), \ldots \varphi(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\Pi\mathfrak{B}_i}$ logo existe $j \in I$ tal que: $(\Pi_j \circ \varphi(a_1), \ldots, \Pi_j \circ \varphi(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}_j}$, ou seja $\left\{\Pi_i \circ \varphi\colon \ \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ é $\mathfrak{U}$-separadora ∎

Proposição 1.15: Sejam $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ família de τ-estruturas, $\mathfrak{U}$ τ-estrutura e $\left\{p_i\colon \ \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ família de homomorfismos sobrejetores $\mathfrak{U}$-separadora. Então $\mathfrak{U}$ é um produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i / i \in I\right\}$ via φ, onde φ é único, determinado pela propriedade: Para cada $i \in I$ $p_i = \Pi_i \circ \varphi$.

Prova: Pela proposição 1.10 existe um único $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ determinado pela família $\left\{p_i\colon \ \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ tal que: $p_i = \Pi_i \circ \varphi$ logo, por hipótese, para cada $i \in I$, $\Pi_i \circ \varphi$ é sobrejetor.

Provaremos que φ é uma imersão.

Sejam $\gamma < \beta$ e $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ tais que: $(\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\prod_i \mathfrak{B}_i}$. Isto ocorre see para cada $j \in I$ $(p_j(a_1) \ldots p_j(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_j}$ e como por hipótese $\left\{p_i\colon \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ é $\mathfrak{U}$-separadora temos que $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$.

Assim, φ é uma imersão tal que, para cada $i \in I$, $\Pi_i \circ \varphi$ é sobrejetor, ou seja, $\mathfrak{A}$ é um produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ via φ ∎

De forma análoga ao caso do produto direto, mostramos agora uma *propriedade universal do produto subdireto.*

Proposição 1.16: Seja $\mathfrak{A}$ produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ via φ.

Se $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é um homomorfismo sobrejetor e $\left\{p_i : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ é uma família de homomorfismos sobrejetores tais que: para cada $i \in I$, $\Pi_i \circ \varphi = p_i \circ \psi$, então ψ é isomorfismo.

Prova: Como ψ é sobrejetora por hipótese provaremos que é uma imersão, e portanto o resultado segue de 1.7.

Suponha que existem $\gamma < \beta$, $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{A}|^{m_\gamma}$ tais que:

$$(\psi(a_1), \dots \psi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}} \text{ e } (a_1 \dots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{A}}.$$

Como os $p_i : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i$ são homomorfismos, temos que: para cada $i \in I$, $(p_i \circ \psi(a_1), \dots p_i \circ \psi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i}$, ou seja, para cada $i \in I$ $(\Pi_i \circ \varphi(a_1), \dots, \Pi_i \circ \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i}$. Agora, por 1.14, $\left\{\Pi_i \circ \varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i / i \in I\right\}$ é $\mathfrak{A}$-separadora, então $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$, contradição. Logo ψ é uma imersão. ∎

Esta propriedade universal permite obter a *Caracterização do produto subdireto*, da maneira seguinte:

Proposição 1.17: Sejam $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ uma família de τ-estruturas, $\mathfrak{A}$ uma τ-estrutura e $\left\{p_i\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ uma família de homomorfismos sobrejetores.

Então $\mathfrak{A}$ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ via φ, onde $p_i = \Pi_i \circ \varphi$, see para quaisquer $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo sobrejetor e $\left\{p'_i : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ família de homomorfismos sobrejetores se os diagramas comutam, para cada $i \in I$,

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
\mathfrak{B} \arrow[r, "p'_i"'] & \mathfrak{B}_i
\end{tikzcd}$$

então ψ é isomorfismo.

Prova: $[\longrightarrow]$ proposição 1.16

$[\longleftarrow]$ Provaremos que $\left\{p_i\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ é $\mathfrak{A}$-separadora e concluímos o resultado por 1.15.

Sejam $\gamma' < \beta$, $(a_1 \ldots a_{m_{\gamma'}}) \in |\mathfrak{A}|^{m_{\gamma'}}$ tais que para cada $j \in I$ $(p_j(a_1), \ldots, p_j(a_{m_{\gamma'}})) \in R_{\gamma'}^{\mathfrak{B}_j}$ e $(a_1, \ldots a_{m_{\gamma'}}) \notin R_{\gamma'}^{\mathfrak{A}}$.

Estamos supondo que $\left\{p_i\colon\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ não é $\mathfrak{A}$-separadora.

Definimos a τ-estrutura $\mathfrak{B}$ como segue:

i - $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|$

ii - Se $\gamma < \alpha$, $F_\gamma^{\mathfrak{B}} = F_\gamma^{\mathfrak{A}}$

iii - Se $\gamma < \beta$, então se $\gamma \neq \gamma'$ $R_\gamma^{\mathfrak{B}} = R_\gamma^{\mathfrak{A}}$ e $R_{\gamma'}^{\mathfrak{B}} = R_{\gamma'}^{\mathfrak{A}} \cup \left\{(a_1, \text{—} a_{m_{\gamma'}})\right\}$.

Seja $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ definida por $\psi = \mathrm{id} : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$; trivialmente ψ é um homomorfismo sobrejetor.

Seja, para cada $i \in I$, $p'_i : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i$ o homomorfismo sobrejetor
induzido por $p_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i$.

Então os diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
\mathfrak{B} \arrow[r, "p'_i"'] & \mathfrak{B}_i
\end{tikzcd}$$

comutam, para cada $i \in I$,

Logo, por hipótese, $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é um isomorfismo. Assim, $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$, absurdo. Então $\left\{p_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \;/\; i \in I\right\}$ é $\mathfrak{A}$-separadora ∎

I.3 EXEMPLOS DE PRODUTOS DIRETO E SUBDIRETO

Exemplo 1.18: Sejam $\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ família de τ-estruturas, $\mathfrak{A}$ τ-estrutura e $\left\{p_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ família de homomorfismos sobrejetores tais que existe $j \in I$ com $p_j : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_j$ isomorfismo. Então $\mathfrak{A}$ é um produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ via φ, onde $p_i = \Pi_i \circ \gamma$.

Isto é trivial, pois sendo $p_j : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_j$ isomorfismo, a família $\left\{p_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ é $\mathfrak{A}$-separadora, aplicando 1.15 ∎

Exemplo 1.19 Todo produto direto é um produto subdireto.

Uma prova trivial resulta do fato que a família de homomorfismos sobrejetores $\left\{\Pi_i : \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$ é $\prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$-separadora da estrutura produto direto.

Outra prova possível utiliza as caracterizações universais do produto direto e do produto subdireto. Sejam $\mathfrak{B} = \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$, $\varphi = 1_{\mathfrak{B}}$ $\{p_i =$

$\Pi_i : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\big\}$, $\psi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ homomorfismo sobrejetor e $\big\{ p'_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \ / \ i \in I \big\}$ família de homomorfismos sobrejetores tal que para cada $i \in I$ comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
\mathfrak{A} \arrow[r, "p'_i"'] & \mathfrak{B}_i
\end{tikzcd}$$

Pela propriedade universal do produto direto, existe um único homomorfismo $g : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que: para cada $i \in I$, $p'_i = p_i \circ g$.

Como $p_i = p'_i \circ \psi = p_i \circ g \circ \psi$ temos que: para cada $i \in I$ $p_i \circ 1_{\mathfrak{B}} = p_i \circ (g \circ \psi)$. Logo $1_{\mathfrak{B}} = g \circ \psi$ de onde ψ resulta uma imersão e como é sobrejetora, temos que ψ é isomorfismo. Assim pela caracterização universal do produto subdireto $\mathfrak{B}$ é produto subdireto de $\big\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\big\}$ ■

Exemplo 1.20: Nem todo produto subdireto é trivial no sentido de 1.18 e 1.19. Por exemplo, na classe dos reticulados distribuitivos com elementos mínimo e máximo toda cadeia com três elementos é produto subdireto de duas cadeias de dois elementos.

Exemplo 1.21: Sejam $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}$ τ-estruturas, $\varphi_i : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{B}$ $i = 1, 2$ homomorfismos sobrejetores, e seja $C = \big\{(a_1, a_2) \ / \ \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)\big\}$.

Seja $\xi = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2\big|_C$; provaremos que ξ é uma subestrutura de $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ que é produto subdireto de $\big\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\big\}$.

Para provar que é subestrutura só temos que demonstrar o fechamento com respeito às operações. Seja $\gamma < \alpha$ $((a_1,b_1), \ldots (a_{n_\gamma}, b_{n_\gamma})) \in C^{n_\gamma}$, ou seja, $\varphi_1(a_i) = \gamma_2(b_i)$ para $1 \le i \le n_\gamma$.

Como $F_\gamma^{\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2}((a_1,b_1), \ldots, (a_{n_\gamma}, b_{n_\gamma})) = ((F_\gamma^{\mathfrak{U}_1}(a_1, \ldots a_{n_\gamma}), F_\gamma^{\mathfrak{U}_2}(b_1, \ldots b_{n_\gamma}))$ e $\varphi_1(F_\gamma^{\mathfrak{U}_1}(a_1, \ldots, a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{B}}(\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{B}}(\varphi_2(b_1), \ldots, \varphi_2(b_{n_\gamma})) = \varphi_2(F_\gamma^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots b_{n_\gamma}))$, resulta que:

$$(F_\gamma^{\mathfrak{U}_1}(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}), F_\gamma^{\mathfrak{U}_2}(b_1, \ldots, b_{n_\gamma})) \in C.$$

Assim, ξ é uma τ-subestrutura de $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$. ξ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2\right\}$: seja $a \in |\mathfrak{U}_1|$, então existe $b \in |\mathfrak{U}_2|$ tal que $\varphi_1(a) = \varphi_2(b)$, pois φ_2 é sobrejetor; então $(a, b) \in C$, logo $\Pi_1 \circ i(a,b) = a$ [$i : \xi \longrightarrow \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$ inclusão natural], ou seja, $\Pi_1 \circ i$ é sobrejetor. Analogamente prova-se que $\Pi_2 \circ i$ é sobrejetor, logo ξ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2\right\}$ ∎

Observamos que este método permite representar de muitas maneiras uma τ-estrutura como produto subdireto em forma não trivial.

I.4 - ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS.

Definição I.22: Sejam $\mathfrak{U}$ τ-estrutura e K uma classe de τ-estruturas $\mathfrak{U}$ é dita subdiretamente irredutível em K, se para qualquer decomposição subdireta $\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$, $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\} \subset K$ temos que existe $j \in I$ tal que $\Pi_j \circ \varphi$ é um isomorfismo.

Demonstramos agora o seguinte *Teorema de Caracterização de Estruturas subdiretamente irredutíveis* de X. Caicedo [C]:

Lembramos que uma classe de τ-estruturas K é fechada por isomorfismos se qualquer τ-estrutura isomorfa a uma de K está em K.

Teorema 1.23: Sejam K uma classe de τ-estruturas fechada por isomorfismos e $\mathfrak{A}$ uma τ-estrutura. Então $\mathfrak{A}$ é subdiretamente irredutível em K see existem um símbolo de relação R_γ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{A}|^{m_\gamma}$ tais que:

i - $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{A}}$

ii - Para quaisquer $\mathfrak{B} \in K$ e $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo sobrejetor que não é isomorfismo $(F(a_1), \dots F(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$.

Prova: $[\longleftarrow]$ Sejam R_γ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{A}|^{m_\gamma}$ como no enunciado do teorema e $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ produto subdireto. Como φ é uma imersão e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{A}}$ então $(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i}$ logo, para algum $j \in I$, $(\Pi_j \circ \varphi(a_1), \dots, \Pi_j \circ \varphi(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}_j}$. Assim $\Pi_j \circ \varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_j$ é um homomorfismo sobrejetor para o qual $(\Pi_j \circ \varphi(a_1), \dots, \Pi_j \circ \varphi(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}_j}$. Então, por hipótese, $\Pi_j \circ \varphi$ é isomorfismo. Logo $\mathfrak{A}$ é subdiretamente irredutível em K.

$[\longrightarrow]$ Seja $\xi = \left\{(F, \mathfrak{B}) \;/\; F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \text{ homomorfismo sobrejetor, não isomorfismo, } \mathfrak{B} \in K\right\}$. ξ é uma classe própria. Define-se $(F, \mathfrak{B}) \sim (F', \mathfrak{B}')$ see existe um isomorfismo $g: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ tal que $F' = g \circ F$. $\sim$ é uma relação de equivalência em ξ que tem um conjunto de representantes, pois existe só um conjunto de τ-estruturas não isomorfas de cardinal menor ou igual ao cardinal de $|\mathfrak{A}|$ e unicamente um conjunto de homomorfismos de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ para cada $\mathfrak{B}$.

Sejam $\mathbb{F} = \left\{(F_i, \mathfrak{B}_i) \;/\; i \in I\right\}$ uma família de representantes, e $g : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ homomorfismo induzido por $\left\{F_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i \;/\; i \in I\right\}$. Como $\mathfrak{A}$ é subdiretamente irredutível em K e para cada $i \in I$ $\Pi_i \circ g = F_i$ é homomorfismo sobrejetor não isomorfismo, temos que g não pode ser uma imersão, logo existem R_γ e $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ tais que $(g(a_1), \ldots g(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i}$ e $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{U}}$.

Sejam $\mathfrak{B} \in K$ e $F : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo sobrejetor que não é isomorfismo; $(F, \mathfrak{B})$ tem um representante em $\mathbb{F}$ $(F_j, \mathfrak{B}_j)$, logo $F = h \circ F_j$ onde $h : \mathfrak{B}_j \longrightarrow \mathfrak{B}$ é isomorfismo. Então $F = h \circ \Pi_j \circ g$. Como $(g(a_1), \ldots g(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i}$ segue-se que:

$$(F(a_1), \ldots, F(a_{m_\gamma})) = (h \circ \Pi_j \circ g(a_1), \ldots h \circ \Pi_j \circ g(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}} .$$

Assim, R_γ e $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ satisfazem o requerido no enunciado do teorema ■

Corolário [*Birkhoff*] **1.24:** Uma álgebra de uma classe K equacionalmente definida é subdiretamente irredutível em K see a interseção de todas as relações de congruência não triviais é não trivial.

Prova: Seja Q uma álgebra de K, o único predicado básico de Q sendo "="; pelo teorema 1.23 Q é subdiretamente irredutível em K see existem $a, b \in |Q|$ tais que $a \neq b$ e para qualquer $\mathfrak{B} \in K$ se $F: Q \longrightarrow \mathfrak{B}$ é um homomorfismo sobrejetor que não é isomorfismo temos que $F(a) = F(b)$, ou seja, $(a, b) \in Cong(F)$. Da correpondência entre relações de congruência e homomorfismos sobrejetores nas álgebras [G] segue-se que (a, b) pertence a todas as relações de congruência não triviais de Q, equivalentemente a interseção de todas as relações de congruência não triviais de Q é não trivial. ■

CAPÍTULO II

EXISTÊNCIA DE ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS

II.0. INTRODUÇÃO:

Apresentamos aqui os teoremas de existência e decomposição subdireta para classes de τ-estruturas fechadas por limite direto de homomorfismos sobrejetores de Caicedo [C].

Como as álgebras equacionalmente definíveis são fechadas por limite direto de homomorfismos sobrejetores, obtém-se como corolário dos teoremas anteriores um conhecido teorema de Birkhoff da área de álgebra universal [Bi].

Na primeira parte do presente Capítulo expomos as noções básicas de limite direto de τ-estruturas.

II.1 - GENERALIDADES SOBRE O LIMITE DIRETO DE τ-ESTRUTURAS.

Definição 2.1: Um conjunto parcialmente ordenado $(\sum, \leq)$ é *dirigido* se para quaisquer $i, j \in \sum$ existe $k \in \sum$ tal que: $i \leq k$, $j \leq k$.

Definição 2.2: Um *diagrama dirigido* de τ-estruturas sobre $(\sum, \leq)$ é uma família de τ-estruturas $\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in \sum\right\}$ e uma família de homomorfismos $\left\{F_{ij} : \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}_j \;/\; i \leq j\right\}$ que satisfaz:

a) Para cada $i \in \sum$ $F_{ii} = 1_{\mathfrak{B}_i}$

b) Se $i \leq j \leq k$ então $F_{ik} = F_{jk} \circ F_{ij}$.

Denotamos o diagrama dirigido por $\left(\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in \sum\right\}, \left\{F_{ij} \;/\; i \leq j\right\}\right)$.

Definição 2.3: Seja $D = \left(\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in \sum\right\}, \left\{F_{ij} \ / \ i \leq j\right\}\right)$ um diagrama dirigido de τ-estruturas. O *limite direto* de D é a τ-estrutura

$$\underrightarrow{\lim}\, D = \left(\underrightarrow{D}, \left\{\underrightarrow{F\gamma} \ / \ \gamma < \alpha\right\}, \left\{\underrightarrow{R\gamma} \ / \ \gamma < \beta\right\}\right)$$

onde:

I - $\underrightarrow{D} = \bigsqcup\limits_{i \in \sum}^{\circ} |\mathfrak{B}_i| \Big/ \sim$ ($\bigsqcup^{\circ}$ união disjunta)

e a relação $\sim$ é dada por:

$a \sim a'$ see $a \in |\mathfrak{B}_i|$, $a' \in |\mathfrak{B}_j|$ e existe $k \in \sum$, $k \geq i, j$

tal que: $F_{ik}(a) = F_{jk}(a')$.

Afirmação: $\sim$ é uma relação de equivalência.

Prova: A reflexividade é trivial pois $F_{ii} = 1_{\mathfrak{B}_i}$. A simetria é também trivial a partir da definição de $\sim$. Provaremos a transitividade.
Suponha $a \sim a'$ e $a' \sim a''$ então se $a \in |\mathfrak{B}_i|$, $a' \in |\mathfrak{B}_j|$, $a'' \in |\mathfrak{B}_r|$,
existem $k \geq i, j$ e $q \geq j, r$ tais que $F_{ik}(a) = F_{jk}(a')$, $F_{jq}(a') = F_{rq}(a'')$. Como $\sum$ é dirigido existe $s \geq k, q$ então: $s \geq k \geq i$ $F_{is} = F_{ks} \cdot F_{ik}$ e $s \geq q \geq j$ $F_{js} = F_{qs} \circ F_{jq}$. Logo $F_{is}(a) = F_{ks} \circ F_{ik}(a) = F_{ks} \circ F_{jk}(a') = F_{js}(a') = F_{qs} \circ F_{jq}(a') = F_{qs} \circ F_{rq}(a'') = F_{rs}(a'')$. Assim a $\sim a''$. Logo $\sim$ é uma relação de equivalência. ■

II - Se $[a]$ denota a classe de equivalência de a em $\bigsqcup^{\circ} |\mathfrak{B}_i|$ por $\sim$ então:

a) Para $\gamma < \alpha$, $\underrightarrow{F\gamma}([a_1], \ldots, [a_{n_\gamma}]) := [F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \ldots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma}))]$ onde $a_j \in [a_j]$, $a_j \in \mathfrak{B}_{i_j}$, $k \geq i_1, \ldots i_{n_\gamma}$.

b) Para $\gamma < \beta$ $([a_1], \ldots, [a_{m_\gamma}]) \in \underrightarrow{R}\gamma$ see existem $k \geq i_1, \ldots i_{m_\gamma}$ e

$a_j \in [a_j]$ tais que: $(F_{i_1 k}(a_1), \dots F_{i_{m_\gamma} k}(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_k}$.

Temos que mostrar ainda que o limite direto está bem definido, no sentido em que independe dos representantes de classe.

a) Temos que provar: Se $a_1 \sim a'_1, \dots, a_{n_\gamma} \sim a'_{n_\gamma}$, onde $a_j \in |\mathfrak{B}_{i_j}|$ $a'_j \in |\mathfrak{B}_{i'_j}|$ e $k \geq i_1, \dots i_{n_\gamma}$, $k' \geq i'_1, \dots i'_{n_\gamma}$ então: $F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \dots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma})) \sim F_\gamma^{\mathfrak{B}_{k'}}(F_{i'_1 k'}(a'_1), \dots, F_{i'_{n_\gamma} k'}(a'_{n\gamma})$.

Sejam $s_r \geq i_r, i_{r'}$ tais que: $F_{i_r s_r}(a_r) = F_{i'_r s_r}(a'_r)$ e $q \geq k$, k', $s_1, \dots s_{n_\gamma}$ então:

$$F_{kq}(F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \dots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma}))) =$$

$$= F_\gamma^{\mathfrak{B}_q}(F_{kq} \circ F_{i_1 k}(a_1), \dots, F_{kq} \circ F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma})) =$$

$$= F_\gamma^{\mathfrak{B}_q}(F_{i_1 q}(a_1), \dots, F_{i_{n_\gamma} q}(a_{n_\gamma})).$$

Analogamente: $F_{k'q}(F_\gamma^{\mathfrak{B}_{k'}}(F_{i'_1 k'}(a'_1), \dots, F_{i'_{n_\gamma} k'}(a'_{n_\gamma}))) = F_\gamma^{\mathfrak{B}_q}(F_{i'_1 q}(a'_1), \dots, F_{i'_{n_\gamma} q}(a'_{n_\gamma}))$.

Como $F_{i_r q}(a_r) = F_{i'_r q}(a'_r)$ pois $q \geq s_1, \dots s_{n_\gamma}$, k, k' temos que:

$$F_{kq}(F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \dots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma}))) =$$

$$= F_{k'q}(F_\gamma^{\mathfrak{B}_{k'}}(F_{i'_1 k'}(a_1), \dots, F_{i'_{n_\gamma} k'}(a'_{n_\gamma}))).$$

Logo:

$$F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \dots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma})) \sim$$

$F_\gamma^{\mathfrak{B}_{k'}}(F_{i'_1k'}(a'_1), \ldots, F_{i'_{n_\gamma}k'}(a'_{n_\gamma})).$

■

b) Temos que provar: Se $a_1 \sim a'_1, \ldots, a_{n_\gamma} \sim a'_{n_\gamma}$ onde $a_j \in |\mathfrak{B}_{i_j}|$, $a'_j \in |\mathfrak{B}_{i'_j}|$ e existe $k \geq i_1, \ldots i_{n_\gamma}$ tal que: $(F_{i_1k}(a_1), \ldots, F_{i_{n_\gamma}k}(a_{n_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_k}$ então:

Existe $k' \geq i'_1, \ldots i'_{n_\gamma}$ tal que: $(F_{i'_1k'}(a'_1), \ldots, F_{i'_{n_\gamma}k'}(a'_{n_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_{k'}}$.

Como $a_r \sim a'_r$ existe $s_r \geq i_r, i'_r$ tal que: $F_{i_rs_r}(a_r) = F_{i'_rs_r}(a'_r)$. Seja $q \geq k, s_1, \ldots s_{m_\gamma}$ então por ser F_{kq} homomorfismo: $(F_{i'_1q}(a'_1), \ldots, F_{i'_{n_\gamma}q}(a'_{n_\gamma})) = (F_{i_1q}(a_1), \ldots, F_{i_{n_\gamma}q}(a_{n_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_q}$ tomar $k' = q$. ■

Proposição 2.4: Para cada $i \in \sum$ a aplicação g_i: $|\mathfrak{B}_i| \longrightarrow \underrightarrow{D}$, $g_i(a) = [a]$ é um homomorfismo.

Prova: Seja $\gamma < \alpha$ $(a_1, \ldots a_{n_\gamma}) \in |\mathfrak{B}_i|^{n_\gamma}$ então:

$\underrightarrow{F\gamma}(g_i(a_1), \ldots g_i(a_{n_\gamma})) = \underrightarrow{F\gamma}([a_1], \ldots,[a_{n_\gamma}]) = [F_\gamma^{\mathfrak{B}_i}(a_1, \ldots a_{n_\gamma})] = g_i(F_\gamma^{\mathfrak{B}_i}(a_i, \ldots a_{n_\gamma}))$.

Seja $\gamma < \beta$ $(a_1, \ldots a_{n_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i}$

como:

$$(a_1, \ldots a_{n_\gamma}) = (F_{ii}(a_1), \ldots F_{ii}(a_{n_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i} \text{ e } a_i \in [a_i],\ i \geq i$$

então: $(g_i(a_1), \ldots g_i(a_{n_\gamma})) = ([a_1], \ldots [a_{n_\gamma}]) \in \underrightarrow{R\gamma}$.

■

Proposição 2.5: i - Para quaisquer $i, j \in \sum$, $i \leq j$, $g_j \circ F_{ij} = g_i$

(propriedade universal)

ii - Se $\left\{h_i : \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{C}\right\}$ é uma família de homomorfismos tal que para quaisquer $i \leq j$, $h_j \circ F_{ij} = h_i$. Então existe um único homomorfismo δ: $\underrightarrow{\lim}\, D \longrightarrow \mathfrak{C}$ tal que: $h_i = \delta \circ g_i$ para todo $i \in \sum$.

Prova: i) - Seja $a \in |\mathfrak{B}_i|$ então $F_{ij}(a) \in |\mathfrak{B}_j|$ logo:

$$g_j(F_{ij}(a)) = [F_{ij}(a)] = [a] = g_i(a).$$

■

ii) - Definimos $\delta([a]) = h_i(a)$. Se $a \in |\mathfrak{B}_i|$ provaremos que á definição é boa, ou seja se $a \sim a'$, $a \in |\mathfrak{B}_i|$, $a' \in |\mathfrak{B}_{i'}|$ então $h_i(a) = h_{i'}(a')$.

Como $a \sim a'$ então existe $k \geq i, i$ tal que: $F_{ik}(a) = F_{i'k}(a')$ ainda mais $h_k \circ F_{ik} = h_i$ e $h_k \circ F_{i'k} = h_{i'}$ então: $h_i(a) = h_k \circ F_{ik}(a) = h_k \circ F_{i'k}(a') = h_{i'}(a')$. Assim δ é bem definida.

Agora provaremos que δ é homomorfismo.

$$\delta(\underrightarrow{F\gamma}([a_1], \ldots, [a_{n_\gamma}])) = \delta([F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \ldots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma}))]) =$$

$$= h_k(F_\gamma^{\mathfrak{B}_k}(F_{i_1 k}(a_1), \ldots, F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma}))) = F_\gamma^{\mathfrak{C}}(h_k \circ F_{i_1 k}(a_1), \ldots,$$
$$h_k \circ F_{i_{n_\gamma} k}(a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{C}}(h_{i_1}(a_1), \ldots, h_{i_{n_\gamma}}(a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{C}}(\delta([a_1], \ldots,$$
$$\delta([a_{n_\gamma}])).$$

Se $([a_1], \ldots [a_{m_\gamma}]) \in \underrightarrow{R\gamma}$ então existe $k \geq i_1, \ldots i_{m_\gamma}$ tal que: $(F_{i_1 k}(a_1), \ldots, F_{i_{m_\gamma} k}(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_k}$. Logo $\delta([a_j]) = h_k \circ F_{i_j k}(a_j)$ e como $h_k: \mathfrak{B}_k \longrightarrow \mathfrak{C}$ é homomorfismo, temos que: $(\delta([a_1]), \ldots, \delta([a_{m_\gamma}])) \in R_\gamma^{\mathfrak{C}}$. Assim $\delta : \varinjlim D \longrightarrow \mathfrak{C}$ é homomorfismo. Trivialmente da definição de δ, para todo $i \in \sum$ temos que: $h_i = \delta \circ g_i$.

Unicidade de δ: Seja δ': $\varinjlim D \longrightarrow \mathfrak{C}$ homomorfismo tal que: $h_i = \delta \circ g_i$ para todo $i \in \sum$.

Seja $a \in |\varinjlim D|$ então existem $i \in \sum$ e $a_i \in |\mathfrak{B}_i|$ tais que: $g_i(a_i) = a$ logo $\delta'(a) = \delta' \circ g_i(a_i) = h_i(a_i) = \delta \circ g_i(a_i) = \delta(a)$ ou seja $\delta = \delta'$. ∎

Podemos agora obter o seguinte resultado de caracterização do limite direto pela propriedade universal:

Proposição 2.6: Seja $D = \left(\left\{\mathfrak{B}_i \;/\; i \in \sum\right\}, \left\{F_{ij}: \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}_j \;/\; i \le j\right\}\right)$ um diagrama dirigido de τ-estruturas, $\mathfrak{B}$ uma τ-estrutura e $\left\{h_i: \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B} \;/\; i \in \sum\right\}$ uma família de homomorfismos que satisfazem:

i - Se $i, j \in \sum$ $i \le j$ então: $h_i = h_j \circ F_{ij}$

ii - Se $\mathfrak{C}$ é uma τ-estrutura e $\left\{t_i: \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{C} \;/\; i \in \sum\right\}$ uma família de homomorfismos tal que se $i \le j$ $t_i = t_j \circ F_{ij}$ então existe um único homomorfismo δ: $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ que satisfaz para qualquer $i \in \sum$ $\delta \circ h_i = t_i$.

Então $\mathfrak{B}$ é isomorfa á $\varinjlim D$.

Prova: Da proposição 2.5.i temos que $\varinjlim D$ e $\left\{g_i: \mathfrak{B}_i \longrightarrow \varinjlim D \;/ i \in \sum\right\}$ estão nas hipóteses de ii logo existe um único homomorfismo δ: $\mathfrak{B} \longrightarrow \varinjlim D$ tal que $\delta \circ h_i = g_i$ para todo $i \in \sum$.

Pela hipótese i, $\mathfrak{B}$ e $\left\{h_i:\mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B} \ / \ i \in \Sigma\right\}$ cumprem a condição de 2.5. ii logo existe um único homomorfismo $\delta': \varinjlim D \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $h_i = \delta' \circ g_i$ para todo $i \in \Sigma$.

Então $g_i = \delta \circ h_i = \delta \circ \delta' \circ g_i$ para todo $i \in \Sigma$.

Sejam $a \in |\varinjlim D|$ e $i \in \Sigma$ tal que: $a_i \in |\mathfrak{B}_i|$ e $[a_i] = a$ logo

$a = g_i(a_i) = \delta \circ \delta' \circ g_i(a_i) = \delta \circ \delta'(a)$ então: $\delta \circ \delta' = 1_{\varinjlim D}$.

Consideramos $\mathfrak{B}$ e á família $\left\{h_i:\mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B} \ / \ i \in \Sigma\right\}$ que verificam á hipótese de ii então existe um único homomorfismo $\delta'':\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que: $h_i = \delta'' \circ h_i$ para todo $i \in \Sigma$. Como $1_{\mathfrak{B}}$ e $\delta' \circ \delta$ também verificam esta condição temos que $1_{\mathfrak{B}} = \delta' \circ \delta = \delta''$. Assim $\delta:\mathfrak{B} \longrightarrow \varinjlim D$ é isomorfismo. ∎

Proposição 2.7: Seja $D = \left(\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in \Sigma\right\}, \left\{F_{ij} \ / \ i \leq j\right\}\right)$ um diagrama dirigido de τ-estruturas. Fixamos $i \in \Sigma$; se F_{ik} é sobrejetor para todo $k \geq i$ então o homomorfismo canônico g_i: $\mathfrak{B}_i \longrightarrow \varinjlim D$ é sobrejetor.

Prova: Seja $a \in |\varinjlim D|$, então existem $j \in \Sigma$ e $a_j \in |\mathfrak{B}_j|$ tal que $a = [a_j]$. Seja $k \geq i, j$ então $a = g_j(a_j) = g_k(F_{jk}(a_j))$ por 2.5.i.

Como F_{ik} é sobrejetora, então existe $b \in |\mathfrak{B}_i|$ tal que: $F_{jk}(a_j) = F_{ik}(b)$; logo: $a = g_k \circ F_{jk}(a_j) = g_k \circ F_{ik}(b) = g_i(b)$. Assim g_i é sobrejetora. ∎

II.2 - EXISTÊNCIA DE ESTRUTURAS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS PARA CLASSES DE τ-ESTRUTURAS FECHADAS POR LIMITE DIRETO DE HOMOMORFISMOS SOBREJETORES

Lembramos que uma classe de τ-estruturas K é fechada por limite direto de homomorfismos sobrejetores se para qualquer diagrama D $= \left(\left\{\mathfrak{B}_i / \ i \in \Sigma\right\}, \left\{F_{ij} / \ i \leq j\right\}\right)$ com $\left\{\mathfrak{B}_i / \ i \in \Sigma\right\} \subset K$ e todos os F_{ij} sobrejetores temos que o limite direto de D está em K.

Propriedade 2.8: Se K é uma classe de τ-estruturas finitas [Se $\mathfrak{U} \in K$ então $||\mathfrak{U}|| < \chi_0$] com um número finito de símbolos de relação então K e fechada por limites diretos de homomorfismos sobrejetores.

Prova: Sejam $\left\{R_{\gamma_1}, \dots, R_{\gamma_n}\right\}$ os símbolos de relação de τ, e $D = \left(\left\{\mathfrak{B}_i / i \in I\right\}, \left\{F_{ij} / i \le j\right\}\right)$ um diagrama dirigido de τ-estruturas de K com os homomorfismos F_{ij} sobrejetores. Seja $r = \min \left\{||\mathfrak{B}_i|| / i \in I\right\}$.

Afirmação: Existe $q \in I$ tal que $||\mathfrak{B}_q|| = r$ e se $||\mathfrak{B}_j|| = r$ então: $|R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_j}| \le |R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_q}|$ $1 \le i \le n$.

Prova: Sejam $q_i \in I$ tais que $||\mathfrak{B}_{q_i}|| = r$ e $|R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_{q_i}}|$ é máximo $(1 \le i \le n)$. Seja $q \in I$ tal que $q_i \le q$ $(1 \le i \le n)$. Como os $F_{q_i q}: \mathfrak{B}_{q_i} \longrightarrow \mathfrak{B}_q$ são homomorfismos bijetores (pois são sobrejetores por hipótese e não podem diminuir cardinalidade pela minimalidade de r), temos que $||\mathfrak{B}_q|| = r$ e $|R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_{q_i}}| \le |R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_q}|$ $(1 \le i \le n)$. Assim q satisfaz a afirmação.

Seja $q \in I$ da afirmação e $k \ge q$ então F_{qk} é um isomorfismo, pois raciocinando como na afirmação F_{qk} é um homomorfismo bijetor, logo $||\mathfrak{B}_k|| = r$ e $|R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_q}| \le |R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_k}|$ $(1 \le i \le n)$ pela afirmação $|R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_k}| \le |R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_q}|$ $(1 \le i \le n)$, resulta que F_{qk} é uma imersão e concluímos que F_{qk} é isomorfismo por 1.7.

Seja q da afirmação então $g_q : \mathfrak{B}_q \longrightarrow \underrightarrow{D}$ é um isomorfismo por 2.7 temos que g_q é sobrejetor provemos que é uma imersão, se $(g_q(a_1), \dots, g_q(a_{n_{\gamma_i}})) \in \underrightarrow{R}\gamma_i$ então existe $k \ge q$ tal que $(F_{qk}(a_1), \dots F_{qk}(a_{n_{\gamma_i}})) \in R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_k}$ como F_{qk} é isomorfismo $(a_1, \dots a_{n_\gamma}) \in R_{\gamma_i}^{\mathfrak{B}_q}$. Assim $g_q : \mathfrak{B}_q \longrightarrow \underrightarrow{D}$ é uma imersão sobrejetora logo por 1.7 um isomorfismo. ∎

Provamos agora o seguinte resultado de X. Caicedo [C]:

Lema 2.9: Seja K uma classe de τ-estruturas fechada por limite direto de famílias de homomorfismos sobrejetores.

Sejam $\mathfrak{A} \in K$, $\gamma < \beta$ e $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{A}|^{m_\gamma}$ tal que $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{A}}$. Então existem $\mathfrak{B} \in K$ subdiretamente irredutível em K e um homomorfismo sobrejetor $F:\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que: $(F(a_1), \ldots, F(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}}$.

Prova: Seja $\mathfrak{C} = \left\{(F,\mathfrak{B}) \ / \ F: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \text{ homomorfismo sobrejetor, } \mathfrak{B} \in K\right\}$.

$\mathfrak{C}$ é uma classe própria.

Define-se $(F,\mathfrak{B}) \sim (F',\mathfrak{B}')$ see existe um isomorfismo $g: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ tal que $F' = g \circ F$. Como em 1.23, $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathfrak{C}$ que tem um conjunto de representantes R. Definimos $\mathbb{F} = \left\{(F,\mathfrak{B}) \in R / (F(a_1), \ldots, F(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}}\right\}$. $\mathbb{F}$ é não vazio pois $(1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}) \in \mathbb{F}$.

Introduzimos em $\mathbb{F}$ uma ordem parcial $\leq$. $(F,\mathfrak{B}) \leq (F',\mathfrak{B}')$ see existe $g:\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ homomorfismo tal que: $F' = g \circ F$.

Afirmação: $\leq$ é uma ordem parcial.

A reflexividade e transitividade são triviais, provaremos a antisimetria. Se $(F,\mathfrak{B}) \leq (F',\mathfrak{B}')$ e $(F',\mathfrak{B}') \leq (F,\mathfrak{B})$ então existem $g:\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$, $h:\mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismos tais que $F' = g \circ F$ e $F = h \circ F'$ então $F' = (g \circ h) \circ F'$ e $F = (h \circ g) \circ F$ como F e F' são sobrejetores temos que: $g \circ h = 1_{\mathfrak{B}}$ e $h \circ g = 1_{\mathfrak{B}'}$. Pois se $b' \in |\mathfrak{B}'|$ existe $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $F'(a) = b$ logo $b = F'(a) = (g \circ h)\ (F'(a)) = g \circ h(b)$ então $g \circ h = 1_{\mathfrak{B}'}$ analogamente $h \circ g = 1_{\mathfrak{B}'}$. Assim g é isomorfismo logo: $(F,\mathfrak{B}) \sim (F',\mathfrak{B})$ então $(F,\mathfrak{B}) = (F'\mathfrak{B})$.

Afirmação: $\mathbb{F}$ tem elementos máximais.

Aplicaremos o lema de **Zorn**. Seja $\left\{(F_i, \mathfrak{B}_i) \,/\, i \in I\right\} \subset \mathbb{F}$ com I totalmente ordenado.

Se $i \leq j$ então $(F_i,\mathfrak{B}_i) \leq (F_j,\mathfrak{B}_j)$ logo existe um homomorfismo $F_{ij}: \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}_j$ tal que: $F_j = F_{ij} \circ F_i$, observamos que F_{ij} é sobrejetor pois F_i e F_j são sobrejetores e pelas mesmas razões e único.

Se $i \leq j \leq k$ temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathfrak{B}_i \arrow[r, "F_{ij}"] & \mathfrak{B}_j \arrow[r, "F_{jk}"] & \mathfrak{B}_k \arrow[r] & \cdots \\
 & \mathfrak{U} \arrow[u, "F_i"] \arrow[ur, "F_j"] \arrow[urr, "F_k"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Da unicidade de F_{ik} segue-se que: $F_{jk} \circ F_{ij} = F_{ik}$ para $i \leq j \leq k$ e $F_{ii} = 1_{\mathfrak{B}_i}$.

Logo consideramos o diagrama dirigido sobre $\{\ 0\ \} \cup I$ onde $0 \leq i$ para todo $i \in I$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{U}$ e $F_{0i} = F_i$.

Seja D o limite direto do diagrama, como os elementos do diagrama estão em K e os homomorfismos F_{ij} são sobrejetores se $i \leq j$, temos por hipótese que $D \in K$.

Sejam $g_i:\mathfrak{B}_i \longrightarrow D$ os homomorfismos canônicos como as F_{0i} são sobrejetores por 2.7 temos que: $g_0:\mathfrak{B}_0 \longrightarrow D$ é sobrejetor. Notaremos $g_0 = F:\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{U} \longrightarrow D$.

Logo podemos assumir que $(F,D) \in R$. Para concluir que $(F,D) \in \mathbb{F}$ temos que provar: $(F(a_1), \dots F(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^D$.

Suponha que $(F(a_1), \dots, F(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^D$ então por definição existe k tal que $(F_k(a_1), \dots F_k(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_k}$ o que contradiz a escolha de $(F_k, \mathfrak{B}_k)$.

* (F, D) limita superiormente a cadeia $\left\{(F_i, \mathfrak{B}_i) \;/\; i \in I\right\}$.

Pois para todo $i \in I$

$$g_i \circ F_i = g_i \circ F_{0i} = g_0 = F$$

ou seja

$$(F_i, \mathfrak{B}_i) \leq (F, D) \text{ para todo } i \in I.$$

Agora pelo lema de **Zorn**, existem elementos máximais em $\mathbb{F}$.

Afirmação: Se $(F, \mathfrak{B})$ é um elemento maximal de $\mathbb{F}$ então $\mathfrak{B}$ é subdiretamente irredutível em K e $F\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é um homomorfismo sobrejetor tal que: $(F(a_1), \ldots F(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}}$.

Seja $(F, \mathfrak{B})$ um elemento maximal de $\mathbb{F}$ então trivialmente:

$$(F(a_1), \ldots, F(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}} .$$

Seja $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ homomorfismo sobrejetor com $\mathfrak{B}' \in K$ e $(g \circ F(a_1), \ldots, g \circ F(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}'}$. Temos que $(g \circ F, \mathfrak{B}')$ tem um representante em $\mathbb{F}$, $(F'', \mathfrak{B}'')$ logo o seguinte diagrama onde h é isomorfismo comuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B} \arrow[dr, "g"] & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F''"'] & & \mathfrak{B}' \\ & \mathfrak{B}'' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Como $F'' = (h^{-1} \circ g) \circ F$ temos que: $(F, \mathfrak{B}) \leq (F'', \mathfrak{B}'')$ agora pela maximalidade de $(F, \mathfrak{B})$ temos que: $(F'', \mathfrak{B}'') = (F, \mathfrak{B})$ então $h \circ F = h \circ F'' = g \circ F$ e como F é sobrejetor resulta que $g = h$ então g é isomorfismo.

Assim para qualquer homomorfismo sobrejetor $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ que não é isomorfismo temos que:

$$(g(F(a_1)), \ldots, g(F(a_{m\gamma}))) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}'} .$$

Então pelo teorema 1.23 temos que $\mathfrak{B}$ é subdiretamente irredutível em K. ∎

II.3 TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO SUBDIRETA PARA CLASSES DE τ-ESTRUTURAS FECHADAS POR LIMITE DIRETO DE HOMOMORFISMOS SOBREJETORES.

Teorema 2.10 [C]: Seja K uma classe de τ-estruturas fechada por limite direto de homomorfismos sobrejetores. Então, toda estrutura $\mathfrak{U} \in$ K é produto subdireto de no máximo $\chi_0 + \|\mathfrak{U}\| + \|\tau\|$ estruturas subdiretamente irredutíveis em K.

Prova: Seja $\mathfrak{U} \in$ K define-se $\mathbb{F} = \left\{(F_i, \mathfrak{B}_i) \ / \ i \in I\right\}$ tal que satisfaz:

a) - Para cada $i \in I$ $F_i : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{B}_i$ é homomorfismo sobrejetor.

b) - Para cada $i \in I$ $\mathfrak{B}_i \in$ K.

c) - $\mathfrak{B}_i$ é subdiretamente irredutível para todo $i \in I$.

d) - Se $\gamma < \beta$ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|^{m_\gamma}$ tal que: $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \notin R_\gamma^{\mathfrak{U}}$ então existe $i \in I$ tal que: $(F_i(a_1), \dots, F_i(a_{m_\gamma})) \notin R_\gamma^{\mathfrak{B}_i}$.

Pelo lema 2.9 existe tal família e

$$|\mathbb{F}| \leq \sum_m \|\mathfrak{U}\|^m \cdot \|\tau\| \leq \chi_0 + \|\mathfrak{U}\| + \|\tau\|.$$

A família F induz um homomorfismo g: $\mathfrak{U} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ tal que: Para todo $j \in I$ $\Pi_j \circ g = F_j$.

Afirmação: g é uma imersão.

Seja $\gamma < \beta$ então: $(g(a_1), \dots g(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\Pi\mathfrak{B}_i}$ see Para todo $i \in I$ $(\Pi_i \circ g(a_1), \dots, \Pi_i \circ g(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i}$ see Para todo $i \in I$ $(F_i(a_1), \dots,$

$F_i(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}_i}$ see $(a_1, \ldots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$.

Então $\mathfrak{A}$ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$. ∎

Corolário 2.11: Seja K uma classe de τ-estruturas finitas com um número finito de símbolos de relação, então toda estrutura $\mathfrak{A} \in K$ é produto subdireto de um número finito de estruturas subdiretamente irredutíveis em K.

Prova: Por 2.8 K é fechada por limite direto de homomorfismos sobrejetores, observamos que a família $\mathbb{F}$ do teorema 2.10 é finita pois $\|\mathfrak{A}\|$ é finito e temos só um número finito de símbolos de relação, conclui-se como no teorema 2.10. ∎

Apresentamos a seguir um teorema de **Caicedo**, que resulta como corolário do teorema 2.10.

Corolário 2.12 [C]: Seja K uma classe de τ-estruturas axiomatizada por sentenças da forma: $\forall x_1 \ldots \forall x_n (\phi \longrightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_m \ \Theta)$ onde ϕ e Θ são fórmulas positivas. livres de quantificadores. Então toda estrutura em K é um produto subdireto de estruturas subdiretamente irredutíveis de K.

Prova: Pelo teorema 2.10 só temos que provar que as sentenças do tipo descrito no enunciado são preservadas por limite direto de homomorfismos sobrejetores.

Seja $D = \left(\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in \Sigma\right\}, \left\{F_{ij}: \mathfrak{B}_i \longrightarrow \mathfrak{B}_j\right\}\right)$ um diagrama dirigido sobre $(\Sigma, \leq)$; com limite direto $\underset{\longrightarrow}{D}$.

Afirmação: Se $\phi(x_1, \ldots x_n)$ é uma fórmula positiva sem quantificadores e variáveis $x_1, \ldots x_n$, e $a_l \in |\mathfrak{B}_{i_j}|$ temos que $\mathfrak{D} \models \phi([a_1], \ldots [a_n])$ see existe $k \in \sum$ tal que: $\mathfrak{B}_k \models \phi(F_{i_1 k}(a_1), \ldots F_{i_n k}(a_n))$. Provamos isto por indução sobre a complexidade da fórmula para fórmulas atômicas isto é a definição. De direita a esquerda o passo indutivo para $\wedge$ e $\vee$ é trivial. No sentido contrário segue-se do fato que $g_k:\mathfrak{B}_k \longrightarrow \underset{\longrightarrow}{D}$ é homomorfismo $g_k(a) = [a]$ e que $\phi(C_{F_{i_1 k}(a_1)}, \ldots, C_{F_{i_n k}(a_n)})$ é uma sentença positiva e então é preservada por homomorfismos logo se existe $k \in \sum$ tal que $\mathfrak{B}_k \models \phi(F_{i_1 k}(a_1), \ldots F_{i_n k}(a_n))$ temos que $\underset{\longrightarrow}{D} \models \phi(g_k(F_{i_1 k}(a_1)), \ldots g_k(F_{i_n k}(a_n)))$ ou seja $\underset{\longrightarrow}{D} \models \phi([a_1], \ldots [a_n])$.

Agora suponha que ϕ e Θ são positivas sem quantificadores, $\mathfrak{B}_i \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\phi \longrightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_m \Theta)$ para todo $i \in \sum$ e $\underset{\longrightarrow}{D} \models \phi([a_1], \ldots [a_n])$ com $a_r \in |\mathfrak{B}_{i_r}|$ então existe $k \in \sum$ tal que:

$$\mathfrak{B}_k \models \phi(F_{i_1 k}(a_1), \ldots, F_{i_n k}(a_n))$$

logo existem $b_1, \ldots b_m \in |\mathfrak{B}_k|$ tal que:

$$\mathfrak{B}_k \models \Theta\,(F_{i_1 k}(a_1), \ldots F_{i_n k}(a_n), b_1, \ldots b_m)$$

como $F_{kk}(b_r) = b_r$ temos que:

$$\mathfrak{B}_k \models \Theta\,(F_{i_1 k}(a_1), \ldots F_{i_n k}(a_n), F_{kk}(b_1), \ldots F_{kk}(b_m)$$

Logo pela afirmação:

$$\underset{\longrightarrow}{D} \models \Theta([a_1], \ldots, [a_n], [b_1], \ldots [b_m])$$

Assim $\underset{\longrightarrow}{D} \models \forall x_1, \ldots \forall x_n[\phi \longrightarrow \exists y_1, \ldots y_n \Theta]$. ■

Lembramos que uma sentença φ de uma linguagem L de primeira ordem é uma sentença de Horn universal se é da forma: $\forall x_1 \ldots \forall x_n [\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_m]$ onde $\theta_i (1 \le i \le m-1)$ são negações de fórmulas atômicas e θ_m é uma fórmula atômica. Uma classe de álgebras é dita uma quasi-variedade se é axiomatizada por sentenças de Horn universais. Uma classe de álgebras é dita uma variedade (equacionalmente definida) se é axiomatizada por sentenças da forma $\forall x_1 \ldots \forall x_m\ \theta$ onde θ é atômica. Observamos que as variedades são quasi-variedades. Como corolário de 2.12 obtém-se:

Corolário 2.13: O teorema de decomposição subdireta vale para quasi-variedades.

Corolário (Birkhoff) [Bi]: O teorema de decomposição subdireta vale para variedades.

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES: CALCULANDO SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS

III.0 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos diversas aplicações dos teoremas do capítulo I e II, especialmente do teorema 1.23, que se revela como uma ferramenta muito útil no cálculo de subdiretamente irredutíveis, e do teorema de decomposição subdireta 2.10 que o complementa. As contribuições originais deste capítulo ocorrem em III.3 e III.4, que são aplicações da teoria geral ao caso de álgebras de Lie nilpotentes e solúveis, e aos multigrafos.

III.1 - ÁLGEBRAS DE BOOLE SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS E TEOREMA DE STONE.

O resultados deste parágrafo são clássicos, ver por exemplo [P]. Vamos procurar as álgebras de Boole subdiretamente irredutíveis na classe das álgebras de Boole. Lembramos que uma álgebra de Boole é um reticulado distributivo complementado com elementos máximo 1 e mínimo 0, e que a classe das álgebras de Boole é equacionalmente definida.

Se B é uma álgebra de Boole e $a \in B$ seja $\Gamma_a = \left\{(x, y) \;/\; x \vee a = y \vee a\right\}$. Resulta que Γ_a é uma congruência em B associada ao homomorfismo $F_a : B \longrightarrow \tilde{B}_a$, $F_a(x) = x \vee a$, onde $\tilde{B}_a = \left\{y \;/\; y \geq a\right\}$ é uma álgebra de Boole com elemento mínimo a, máximo 1, $\wedge, \vee$ relativizados e se $y \in \tilde{B}_a$, $y'^{a} = y' \vee a$.

Agora provaremos a seguinte:

Proposição 3.1: A única álgebra de Boole subdiretamente irredutível é a álgebra de Boole de dois elementos $\{0, 1\}$.

Prova: Seja B uma álgebra de Boole subdiretamente irredutível, como a classe das álgebras de Boole é equacionalmente definida temos pelo corolário 1.24 que a interseção das relações de congruência não triviais é não trivial; seja $a \in B$ provaremos que $a = 0$ ou $a = 1$.

Suponhamos $a \neq 0$ e $a \neq 1$ então $a' \neq 0$ e $a' \neq 1$ como $(0, a) \in \Gamma_{a'}$, $(0, a') \in \Gamma_{a'}$ temos que Γ_a e $\Gamma_{a'}$ são relações de congruência não triviais logo sua interseção é não trivial. Seja $(x,y) \in \Gamma_a \cap \Gamma_{a'}, x \neq y$, então temos que:

$$x \vee a = y \vee a \quad \text{e} \quad x \vee a' = y \vee a' \text{ logo: } x = x \vee 0 = x \vee$$

$$(a \wedge a') = (x \vee a) \wedge (x \vee a') = (y \vee a) \wedge (y \vee a') = y \vee (a \wedge a') = y.$$

Assim $x = y$ contradição. Logo $B = \{0, 1\}$.

Também pelo corolário 1.24 temos vacuamente que B é subdiretamente irredutível pois a única congruência em B é a trivial ■

É um fato trivial que se $\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\}$ é uma família de álgebras de Boole com dois elementos, $\prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ é isomorfo a álgebra de Boole de conjuntos P(I).

Como a classe das álgebras de Boole é equacionalmente definida, vale o teorema de decomposição subdireta (Ver 2.13). Logo, toda álgebra de Boole é isomorfa a uma subálgebra de um produto de álgebras de Boole de dois elementos, e pelo observado no começo toda álgebra de Boole é isomorfa a uma subálgebra de uma álgebra de Boole de conjuntos. Provamos assim o seguinte:

Teorema [*Stone*] **3.2:** Toda álgebra de Boole é isomorfa a uma sub-álgebra de uma álgebra de Boole de conjuntos.

III.2 - GRÁFOS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS E TEOREMAS DE REPRESENTAÇÃO.

Pedraza, em sua tese, [Pe] caracterizou os subdiretamente irredutíveis nas categorias dos grafos não dirigidos (dirigidos) com laços e sem laços. Estes exemplos são importantes pois dão uma genuína aplicação Matemática do teorema 1.23 que não provém do teorema de Birkhoff (o qual utilizamos no exemplo anterior), ou seja, esta aplicação foge à álgebra universal. Para as definições básicas de teoria dos grafos ver [Ha]. As caracterizações são:

1 - Na classe dos grafos sem laços, os elementos subdiretamente irredutíveis são os grafos completos.

2 - Na classe dos grafos com laços, os elementos subdiretamente irredutíveis são os grafos de um vértice, o grafo completo de dois vértices, os grafos de dois vértices completos menos um arco ou um laço, e os grafos de três vértices completos menos um arco.

3 - Na classe dos grafos dirigidos sem laços, os elementos subdiretamente irredutíveis são os grafos completos e os grafos completos menos um arco.

4 - Na classe dos grafos dirigidos com laços, os elementos subdiretamente irredutíveis são os grafos de um vértice, os grafos de dois vértices completos menos um arco ou menos um laço, grafo de dois vértices completo e os grafos de três vértices completos menos um arco.

Observamos que as classes de Grafos consideradas em 1, 2, 3, 4 são fechadas por isomorfismos. Os grafos são estruturas nas quais temos só duas relações binárias =, e R, e não temos funções , [para a igualdade utilizamos a notação habitual (a, b) $\in$ = é denotado a = b etc] A interpretação de = é sempre a igualdade standard. Estas caracterizações são provadas via a reformulação do teorema 1.23 no caso dos grafos:

* "Seja K uma classe de grafos fechada por isomorfismos, G é um grafo subdiretamente irredutível em K see acontece algumas das seguintes possibilidades:

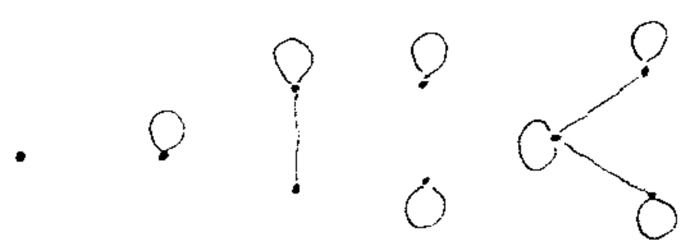
a) - Existem a, b $\in |G|$, $a \neq b$, tais que para qualquer $G' \in K$ e $F : G \longrightarrow G'$ homomorfismo sobrejetor que não é isomorfismo, $F(a) = F(b)$.

b) - Existem a, b $\in |G|$, $a \cancel{R^G} b$, tais que para qualquer $G' \in K$ e $F: G \longrightarrow G'$ homomorfismo sobrejetor que não é isomorfismo, $F(a)\ R^{G'} F(b)$".

Como corolário destas caracterizações dos grafos subdiretamente irredutíveis das classes de grafos consideradas em 1, 2, 3 e 4 e o corolário 2.11, obtém-se os seguintes resultados de representação para grafos finitos.

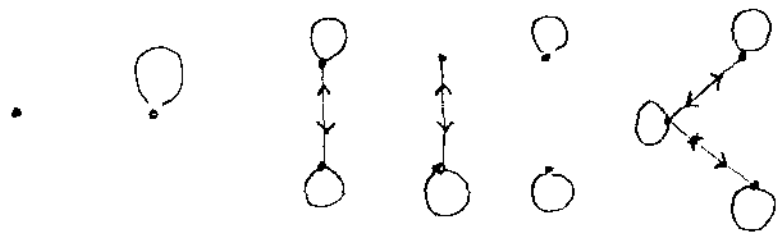
1 - Se G é um grafo sem laços finito então G é um produto subdireto finito de grafos completos.

2 - Se G é um grafo finito então G é um produto subdireto finito de grafos da forma:



3 - Se G é um grafo dirigido sem laços finito então G é um produto subdireto finito de grafos completos e grafos completos menos uma aresta.

4 - Se G é um grafo dirigido finito então G é um produto subdireto finito de grafos da forma:



III.3 - ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES E SOLÚVEIS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS

Calcularemos os subdiretamente irredutíveis nas Álgebras de Lie nilpotentes e solúveis; para definições básicas e propriedades das álgebras de Lie básicas que serão usadas a seguir ver [J], [H].

Uma álgebra de Lie num corpo de característica zero é nilpotente se ad(x) é nilpotente como endomorfismo de L. As álgebras nilpotentes são fechadas por subálgebras e imagens homomorfas. Logo temos o seguinte resultado "trivial". Se L é uma álgebra de Lie nilpotente, L é subdiretamente irredutível na classe das álgebras de Lie nilpotentes sob o mesmo corpo see $\cap\left\{ I/I \text{ ideal não zero de } L \right\} \neq 0$.

A demonstração disto é trivial, pois se $\cap\left\{ I/I \text{ ideal de } L \right\} = 0$. Sejam φ_I: $L \longrightarrow \Pi L|I$ definida por, $\varphi(x)_I = \varphi_I(x)$, trivialmente é homomorfismo, e é injetora pois, se $x \in \operatorname{Ker} \varphi$, então $x \in \cap I = 0$. Logo $x = 0$, ainda mais, para cada I $\Pi_I \circ \varphi = \varphi_I$ é homomorfismo sobrejetor não isomorfismo. Logo L é um produto subdireto de $\left\{ L|I \;/\; I \text{ ideal de } L \text{ não zero} \right\}$, assim L não é subdiretamente irredutível na classe das álgebras de Lie Nilpotentes.

Reciprocamente, se $\cap\left\{I \ / \ I \text{ ideal de } L \text{ não zero}\right\} \neq 0$, seja φ : $L \longrightarrow \Pi L_i$, decomposição subdireta de L com $\Pi_i \circ \varphi$ homomorfismo sobrejetor não isomorfismo para cada $i \in I$. Sejam $I_i = Ker(\Pi_i \circ \varphi)$, que são ideais de L, logo $\cap I_i \neq 0$. Por hipótese, seja $x \in \prod I_i$, $x \neq 0$, então $\varphi(x) = 0$, logo φ não é imersão. Assim L é subdiretamente irredutível na classe das álgebras de Lie Nilpotentes.

∎

Introduzimos algumas notações da teoria de Álgebras de Lie e enunciamos alguns teoremas sem prova (ver as referências anteriores). Se L é uma álgebra de Lie, seu centro é $Z(L) = \left\{x \in L / \forall y \in L, [x,y] = 0\right\}$. É um corolário do teorema de Engel, que se L é uma álgebra de Lie nilpotente e I um ideal de L não zero, então $I \cap Z(L) \neq 0$.

Temos a seguinte caracterização das álgebras de Lie subdiretamente irredutíveis na classe das álgebras de Lie nilpotentes.

Proposição 3.3: L álgebra de Lie nilpotente é subdiretamente irredutível see $\dim Z(L) = 1$.

Prova: $\longrightarrow|$ Se L é subdiretamente irredutível, temos que $\cap\left\{I/I \text{ ideal de } L \text{ não zero}\right\} \neq 0$. Suponha que $\dim Z(L) \geq 2$, então existem x, y $\in Z(L)$ linearmente independentes, logo (x) e (y) são ideais de dimensão 1, assim $\cap\left\{I/I \text{ ideal de } L \text{ não zero}\right\} \subset (x) \cap (y) = 0$, absurdo.

$\longleftarrow|$ Se $\dim Z(L) = 1$, como todo ideal I de L não zero tem interseção não trivial com I, resulta que $Z(L) \subseteq I$ então: $0 \neq Z(L) = \cap\left\{I \ / \ I \text{ ideal de } L \text{ não zero}\right\}$.

∎

Uma álgebra de Lie L é solúvel se a série derivada $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L, L]$, $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$, ..., $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$, ... satisfaz que, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que: $L^{(n)} = 0$. A classe das álgebras solúveis é fechada por subalgebras e imagens homomorfas. Temos o seguinte resultado: Seja L, uma álgebra de Lie solúvel, L é subdiretamente irredutível na classe das álgebras de Lie solúveis sob o mesmo corpo see $\cap \left\{ I \,/\, I \text{ ideal de } L \text{ não zero} \right\} \neq 0$.

A demonstração é análoga ao caso nilpotente.

O teorema de Lie para álgebras solúveis, nos diz que "Se L é uma subalgebra de Lie solúvel de gl(V), V espaço vetorial sob o corpo K algebricamente fechado de característica zero, então V contém um autovetor comum a todos os endomorfismos de L".

Seja K à classe das álgebras de Lie solúveis sob um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero.

Proposição 3.4: Seja L álgebra de Lie solúvel (corpo $\mathbb{K}$), L é subdiretamente irredutível em K see ad_L tem um único autovetor comum.

Prova: Como $ad_L : L \longrightarrow End(L)$, $ad_L(a)\, x = [a, x]$, é um homomorfismo de álgebras de Lie, se $x \in L$ é autovetor comum de $ad_L(a)$ para todos os $a \in L$, temos que: $[a, x] = d_a x$ para todo $a \in L$, logo (x) é um ideal de dimensão 1 de L.

$\longrightarrow|$ Suponha: que L é subdiretamente irredutível e que ad_L tem dois autovetores linearmente independentes comuns x e y, então (x) e (y) são ideais de L não zero, tais que $(x) \cap (y) = 0$. Logo $\cap \left\{ I \,/\, I \text{ ideal de } L \text{ não zero} \right\} = 0$, absurdo.

$\longleftarrow\!|$ Se $\cap\left\{I \;/\; I \text{ ideal de } L \text{ não zero}\right\} = 0$ e x autovetor comum de $ad_L(a)$ para todo $a \in L$, então existe I ideal de L não zero tal que $(x) \cap I = 0$, como I é ideal, definimos $ad_I: L \longrightarrow End(I)$, $a \longmapsto [a, \circ]$, pelo teorema de Lie existe $y \in I$ tal que $[a, y] = d_a y$ para todo $a \in L$, então y é autovetor comum de ad_L linearmente independente de x, absurdo. ∎

Proposição 3.5: L álgebra de Lie solúvel L é subdiretamente irredutível em K see existe um único ideal de L de dimensão 1.

Prova: $\longrightarrow\!|$ Se L é solúvel subdiretamente irredutível então os autovetores comuns de ad_L são linearmente dependentes. Se x é autovetor comum de ad_L, então (x) é ideal de L de dimensão 1, agora se $I = (y)$ é ideal de L de dimensão 1, temos que, y é autovetor de ad_L. Logo $(x) = (y) = I$.

$\longleftarrow\!|$ Se existe um único ideal $I = (x)$ de L de dimensão 1, então x é autovetor comum de ad_L e todos os autovetores comuns de ad_L são da forma $y = \lambda x$ $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo L é subdiretamente irredutível em K. ∎

III.4 - MULTIGRAFOS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS E TEOREMAS DE REPRESENTAÇÃO.

Como é observado em [C] os resultados dos capítulos I e II valem para estruturas polissortidas. Os multigrafos são naturalmente estruturas bissortidas e não podem ser descritos como estruturas monossortidas. Isto em particular mostra que o conceito estruturas polissortidas não é vácuo.

O Professor Xavier Caicedo nos propôs o seguinte problema: caracterizar os multigrafos subdiretamente irredutíveis nas classes dos multigrafos orientados (não orientados) com laços (sem laços). Apresentamos aqui a solução do problema proposto, e como corolário os teoremas de representação para multigrafos.

Começamos por expor as noções e as definições básicas de estruturas polissortidas, para poder expressar no caso dos multigrafos o teorema 1.23.

Definição 3.6: Um *tipo de estruturas* τ para uma ε-sorte é um par (τ,ε) onde:

i - ε é um número ordinal.

ii - τ é um par: $(n_0, \text{—}, n_\gamma, \ldots)$ $\gamma < \alpha$, $(m_0, \text{—}, m_\gamma, \ldots)$ $\gamma < \beta$, onde α, β são números ordinais e n_γ, $m_\gamma \in \mathbb{N}$.

iii - A cada $\gamma < \alpha$ associamos uma $(n_\gamma + 1)$ - upla de ordinais $\leq \varepsilon$, isto é: $\gamma \longmapsto (s(\gamma)_1, \text{—}, s(\gamma)_{n_{\gamma+1}})$.

iv - A cada $\gamma < \beta$ associamos uma m_γ - upla de ordinais $\leq \varepsilon$, isto é: $\gamma \longmapsto (s(\gamma)_1, \text{—}, s(\gamma)_{m_\gamma})$.

v - Para cada $\gamma < \alpha$ temos associado um símbolo de função n_γ-ário F_γ.

vi - Para cada $\gamma < \beta$ temos associado um símbolo de relação m_γ - ário R_γ.

Definição 3.7: Uma estrutura $\mathfrak{U}$ de tipo τ para uma ε-sorte é uma tripla $\left(\left\{|\mathfrak{U}|_\alpha \,/\, \alpha < \varepsilon\right\}, F, R\right)$.

i - Os $|\mathfrak{U}|_\alpha$ são conjuntos, disjuntos dois a dois, e $|\mathfrak{U}| = \bigcup |\mathfrak{U}|_\alpha \neq \emptyset$.

ii - Para cada $\gamma < \alpha$, F_γ realiza-se como uma função n_γ-ária $F_\gamma^{\mathfrak{U}} : |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_1} \times \ldots \times |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_{n_\gamma}} \longrightarrow |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_{n_\gamma + 1}}$.

iii - Para cada $\gamma < \beta$, R_γ realiza-se como uma relação m_γ-ária $R_\gamma^{\mathfrak{U}} \subset |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_1} \times \ldots \times |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_{m_\gamma}}$

$$F = \left\{F_\gamma^{\mathfrak{U}} \ / \ \gamma < \alpha\right\},\ R = \left\{R_\gamma^{\mathfrak{U}} \ / \ \gamma < \beta\right\}.$$

Assumimos que a igualdade standard é uma relação de R.

Notação: dizemos que $\mathfrak{U}$ é uma (τ, ε) estrutura.

Definição 3.8: Sejam $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ (τ, ε) estruturas; uma função φ: $|\mathfrak{U}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ é um *homomorfismo de (τ, ε) estruturas* se:

i - $\varphi|\,|\mathfrak{U}|_\alpha : |\mathfrak{U}|_\alpha \longrightarrow |\mathfrak{B}|_\alpha$

ii - Para cada $\gamma < \alpha$ e $(a_1, \dots a_{n_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_1} \times \dots \times |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_{n_\gamma}}$, $\varphi(F_\gamma^{\mathfrak{U}}(a_1, \dots a_{n_\gamma})) = F_\gamma^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \dots \varphi(a_{n_\gamma}))$

iii - Para cada $\gamma < \beta$ e $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_1} \times \dots \times |\mathfrak{U}|_{s(\gamma)_{m_\gamma}}$, se $(a_1, \dots a_{m_\gamma}) \in R_\gamma^{\mathfrak{U}}$ então $(\varphi(a_1), \dots \varphi(a_{m_\gamma})) \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$.

Notação: $\varphi_\alpha := \varphi|\,|\mathfrak{U}|_\alpha : |\mathfrak{U}|_\alpha \longrightarrow |\mathfrak{B}|_\alpha$.

Observação: Para estrutura polissortidas o produto de uma família de (τ,ε) - estruturas $\left\{\mathfrak{B}_i \ / \ i \in I\right\}$ é definido de maneira óbvia, onde $|\prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i|_\alpha = \prod_{i \in I} |\mathfrak{B}_i|_\alpha$. Com esta definição são válidos os resultados dos capítulos 1 e 2.

Definição 3.9: Um *multigrafo orientado* M é e uma 4-tupla (V, A, F_i, F_F) onde:

i - V, A são conjuntos disjuntos, $V \neq \emptyset$.

ii - $F_i, F_F : A \longrightarrow V$ são funções .

V chama-se o *conjunto dos vértices*, A o *conjunto das arestas*. Se $a \in A$, dizemos que $F_i(a)$ $[F_F(a)]$ é o vértice inicial [final] de a.

Observamos, que, os multigrafos orientados são estruturas de tipo ((1, 1), (2, 2)) bissortidas. Temos duas funções F_i e F_F, e duas relações $=_V$ e $=_A$ que são a igualdade standard restrita a V e A. As sorted são V e A respectivamente.

Um multigrafo orientado é *sem laços* se para todo $a \in A$, $F_1(a) \neq F_F(a)$.

Um multigrafo não orientado é uma terna (V, A, R) onde:

i - V e A são conjuntos disjuntos, $V \neq \emptyset$.

ii - $R \subset A \times V \times V$ é tal que:

a - $\forall a \in A\ \exists\ v, w \in V\ (a, v, w) \in R$

b - Se $(a, v,w) \in R \longrightarrow (a, w, v) \in R$

c - Se $(a, v, w) \in R$ e $(a, v',w') \in R \Rightarrow \{v, w\} = \{v',w'\}$

Observamos, que, os multigrafos não orientados são estruturas do tipo (0,(2,2,3)) bissortidas.

Um multigrafo não orientado e dito ser *sem laços* se para todo $a \in A\ (a, v, w) \in R \longrightarrow \#\ \{v,w\} = 2$.

Reescrevemos a seguir, no contexto de multigrafos, o teorema de caracterização de estruturas subdiretamente irredutíveis.

Um multigrafo orientado M é *subdiretamente irredutível* na classe K de multigrafos orientados see ocorre uma das seguintes posibilidades

i - Existem $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$, tais que para qualquer multigrafo orientado $M' \in K$ e qualquer homomorfismo sobrejetor não isomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M'$, $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

ii - Existem $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, tais que para qualquer multigrafo orientado $M' \in K$ e qualquer homomorfismo sobrejetor não isomorfismo $\varphi: M \longrightarrow M'$, $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$.

Analisamos agora o caso dos multigrafos não orientados.

Abreviação: Abreviamos por $S(\varphi, M')$ a sentença: "Para qualquer multigrafo não orientado, $M' \in K$ é qualquer homomorfismo sobrejetor não isomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M'$".

Um multigrafo não orientado M é subdiretamente irredutível na classe K de multigrafos não orientados see ocorre uma das seguintes possibilidades:

i - Existem $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$, tais que $S(\varphi, M')$, $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

ii - Existem $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, tais que $S(\varphi, M')$, $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$.

iii - Existem $a \in A$, $v, w \in V$, $(a, v, w) \notin R^M$, tais que $S(\varphi, M')$, $(\varphi(a), \varphi(v), \varphi(w)) \in R^{M'}$.

Notação: O par de vértices v_1, v_2 dos casos i é chamado de par crítico de vértices.

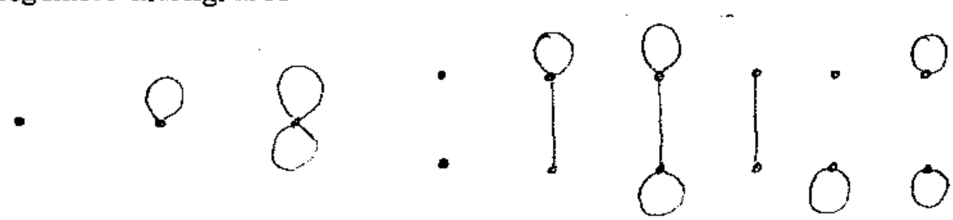
O par de arestas a_1, a_2 dos casos ii é chamado de par crítico de arestas.

A tripla (a, v, w) do caso iii é chamada de tripla crítica.

Calculando multigrafos subdiretamente irredutíveis:

Nos próximos teoremas exibimos os multigrafos subdiretamente irredutíveis na classe dos multigrafos orientados (não orientados) com laços.

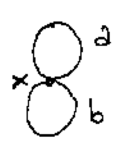
Teorema 3.10: Os únicos multigrafos não orientados subdiretamente irredutíveis na classe dos multigrafos não orientados são os seguintes multigrafos:



Prova: Obviamente os multigrafos de um só vértice listados são subdiretamente irredutíveis. Isto também é trivial para os multigrafos de 2 vértices listados, pois seus vértices formam um par crítico.

Sejam M um multigrafo não orientado subdiretamente irredutível que não é um dos multigrafos listados.

Se M tem só um vértice x, só pode ser subdiretamente irredutível por ii ou iii da caracterização anterior, se o caso ii ocorrer, então existe (a, b) um par crítico de arestas, como M tem necessariamente mais de 2 arestas, existe $c \in A$, $c \neq a$ e $c \neq b$; seja M' o multigrafo não orientado M' = ({x}, {a,b}, R)



definimos $\varphi : M \longrightarrow M'$ por, $\varphi(x) = x$, $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ se $d \neq a, b$ então $\varphi(d) = a$. Obviamente φ é um homomorfismo sobrejetor não isomorfismo e $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, absurdo.

Então só pode ocorrer o caso iii, mas $(a, x, x) \notin R$ é impossível. Logo os únicos multigrafos não orientados subdiretamente irredutíveis de um só vértice são os listados.

Se M tem somente 2 vértices {x, y} tal que não aparece na lista e é subdiretamente irredutível, isto pode acontecer por i, ii ou iii, analizemos os respectivos casos:

i - Se (x, y) é um par crítico, temos que M tem ao menos duas arestas ligando x e y ou tem algum laço duplo (por exemplo em x).

No primeiro caso, sejam a e b arestas ligando x e y $(a \neq b)$, $M' = M - \{a\}$ e $\varphi : M \longrightarrow M'$ definido por $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(c) = b$ se os extremos de c são distintos e $\varphi_A(c) = c$ no outro caso, trivialmente φ é homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, absurdo.

No segundo caso, sejam a e b laços de x $(a \neq b)$, $M' = M - \{a\}$ e $\varphi : M \longrightarrow M'$ definido por, $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(c) = b$ se c laço em x, $\varphi_A(c) = c$ no outro caso, trivialmente φ é homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, absurdo.

ii - Se (a, b) é par crítico, $M' = (\{z\}, \{a' \,/\, a \in A\}, R)$ onde $a \neq b$ então $a' \neq b'$. Logo $\varphi : M \longrightarrow M'$ definido por $\varphi_V(x) = \varphi_V(y) = z$, $\varphi_A(a) = a'$, é um homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, absurdo.

iii - Sejam $(a, v, w) \notin R^M$ como no teorema de caracterização. Observamos que, existem vértices v' e w' de M tais que, tem ao menos duas arestas que os ligam. Seja M' o multigrafo obtido de M por identificar todas as arestas de extremos v', w' em uma aresta d. Trivialmente, temos um homomorfismo sobrejetor não iso $\varphi : M \longrightarrow M'$ definido por, $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(c) = d$ se c é uma aresta de extremos v e w, $\varphi_A(c) = c$ no caso contrário. Observamos que $(\varphi(a), \varphi(v), \varphi(w)) \notin R^{M'}$, absurdo.

Logo, os únicos multigrafos não orientados subdiretamente irredutíveis de dois vértices são os listados.

Agora provaremos que não existem multigrafos não orientados com mais de 2 vértices subdiretamente irredutíveis.

Seja M um multigrafo não orientado com mais de 2 vértices. Utilizaremos o teorema de caracterização para provar que ele não é subdiretamente irredutível.

i - Não existe um par de vértices críticos (v, w).

Suponha que (v, w) seja um par de vértices críticos de M, como M tem mais de dois vértices, existe t vértice, $v \neq t$, $w \neq t$. Definimos o multigrafo não orientado M', da seguinte maneira: seu conjunto de vértices é $V' = V - \{t\}$, e o conjunto de arestas é $A' = A$, e se $\{v', w'\}$ são extremos de a em M então: $\{v'; w'\}$ são extremos de a em M' se $v' \neq t$ e $w' \neq t$.

No caso $v' = t$, $w' \neq t$, $\{v, w'\}$ são os extremos de a em M'. Se, $v' \neq t$, $w' = t$, $\{v', v\}$ são os extremos de a em M'. Se $v' = t$, $w' = t$ $\{v,v\}$ são os extremos de a em M'. Definimos $\varphi: M \longrightarrow M'$ por, $\varphi_v(v') =$

v' se $v' \neq t$, $\varphi_v(t) = v$, $\varphi_A = 1_A$. Trivialmente φ é um homomorfismo sobrejetor não isomorfismo e $\varphi(v) \neq \varphi(w)$, logo (v, w) não é um par de vértices crítico.

ii - Não existe um par de arestas críticas (a, b).

Suponha que (a, b) seja um par de arestas críticas de M, consideramos M' o multigrafo dado por um único vértice z e conjunto de arestas igual ao conjunto de arestas de M. Seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo dado por: $\varphi_V(x) = z$ e $\varphi_A(a) = a$, então $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, absurdo.

iii - Não existe terna crítica (a, x, y).

Sejam $Ext(a) = \left\{u, v\right\}$ e $(a, x, y) \notin R^M$ uma terma crítica, temos que $\left\{u, v\right\} \neq \left\{x, y\right\}$.

Se $u \neq v$ e $x \neq y$ consideramos o multigrafo M' de i para u e v, φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não iso de i, então $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$, absurdo.

Se $u \neq v$ e $x = y$, temos dois casos:

1 - Se $u \neq x$ e $v \neq x$. Trata-se, como antes, de considerar M' de i para u e v, e φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não iso de i, então $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$.

2 - $u = x = y$ ou $v = x = y$. Se $u = x = y$, como por hipótese M tem mais de dois vértices, existe um vértice w tal que: $w \neq u$, $w \neq v$ construímos M' como em i, para v e w, e φ: $M \longrightarrow M'$ como em i, então: $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$, absurdo.

Se $u = v$ e $x = y$. Por hipótese existe um vértice w de M, tal que $w \neq u$ e $w \neq x$ consideramos M' e φ: $M \longrightarrow M'$ como em i anterior, então $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M''}$, absurdo.

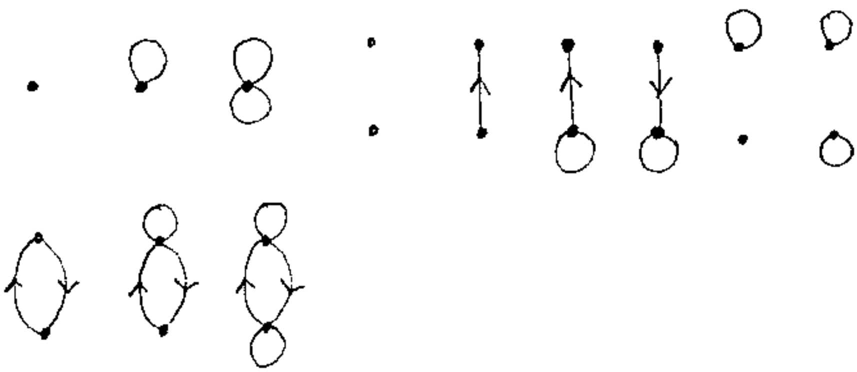
Se $u = v$, $x \neq y$, $\left\{u, v\right\} \cap \left\{x, y\right\} = x$ (análogo $\left\{u, v\right\} \cap \left\{x, y\right\} = y$).

Seja, w vértice de M tal que: $x \neq w$, $y \neq w$; Considerando M' e φ no caso anterior, chegamos a um absurdo.

Se $u = v$, $x \neq y$ e $\left\{u, v\right\} \cap \left\{x, y\right\} = \emptyset$. Consideramos M' e φ: $M \longrightarrow M'$ como em i para u e x, então: $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$, absurdo.

∎

Teorema 3.11: Os únicos multigrafos orientados subdiretamente irredutíveis na classe dos multigrafos orientados são os multigrafos:



Prova: Obviamente os multigrafos de um só vértice listados são subdiretamente irredutíveis. Isto também é trivial para os multigrafos de 2 vértices listados, pois seus vértices formam um par crítico.

Seja M um multigrafo orientado subdiretamente irredutível que não é um dos multigrafos listados.

Se M tem só um vértice, a prova que ele, é um dos multigrafos de 1 vértice listados é como no teorema anterior. Provemos agora, que se M é um multigrafo orientado com dois vértices x, y então ele, não é um multigrafo subdiretamente irredutível. Como M não é um multigrafo dos listados, temos que:

Existem duas arestas a e b, $a \neq b$, tais que: $F^M_I(a) = F^M_I(b)$ e $F^M_F(a) = F^M_F(b)$.

Seja M' o multigrafo orientado dado por: $V' = V$, $A' = A - \{a\}$, $F^{M'}_I = F^M_I|A'$, $F^{M'}_F = F^M_F|A'$. Se $\varphi : M \longrightarrow M'$, é definido da seguinte maneira $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(c) = c$ se $c \in A'$, $\varphi_A(a) = b$. Temos que φ é um homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, assim (x, y) não é um par de vértices crítico.

Seja M'' o multigrafo orientado definido da seguinte maneira $V' = \{x\}$, $A' = \{a' \ / \ a \in A\}$, $F_I^{M'}(a') = F_F^{M'}(a') = x$. Então $\varphi : M \longrightarrow M''$ definido por $\varphi(x) = \varphi(y) = x$, $\varphi(a) = a'$ se $a \in A$, e trivialmente um homomorfismo sobrejetor não iso, e se a e b são arestas, $a \neq b$, então $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Logo M não tem pares de arestas críticas.

Logo, os únicos multigrafos orientados de 1 e 2 vértices subdiretamente irredutíveis são os listados.

Provaremos agora que se M um multigrafo orientado com mais de dois vértices então ele não é subdiretamente irredutível.

Suponha que M tem um par de vértices crítico (v, w). Por hipótese, existe outro vértice t tal que $v \neq t$ e $w \neq t$.

Construímos o multigrafo orientado M' com conjunto de vértices $V' = V - \{t\}$, conjunto de arestas $A' = A$, função inicial $F_I^{M'}$, $F_I^{M'}(a) = F_I(a)$ se $F_I^M(a) \neq t$ e $F_I^{M'}(a) = v$ se $F_I^M(a) = t$, e função final $F_f^{M'}$ definida por: $F_F^{M'}(a) = F_F^M(a)$ se $F_F(a) \neq t$ e $F_F^{M'}(a) = v$ se $F_F(a) = t$.
Seja φ: $M \longrightarrow M'$, definido por: $\varphi_V(s) = s$ se $s \neq t$, $\varphi_V(t) = v$, $\varphi_A(a) = a$. Trivialmente φ é um homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(v) \neq \varphi(w)$, absurdo.

Suponha que (a, b) seja um par de arestas críticas de M. Seja $x \in V$, e M'' o multigrafo orientado com conjunto de vértices, $V' = \{x\}$, e conjunto de arestas $A' = A$, e funções inicial e final $F_I(a) = F_F(a) = x$. Seja $\varphi : M \longrightarrow M'$ definido por, $\varphi_V(s) = x$, $\varphi_A(a) = a'$. Trivialmente φ é homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, absurdo. ∎

Teorema 3.12: Os únicos multigrafos não orientados sem laços subdiretamente irredutíveis na classe dos multigrafos não orientados sem laços são os grafos completos, os grafos completos menos uma aresta e os grafos completos com uma aresta dupla.

Prova: Os grafos completos são subdiretamente irredutíveis vacuamente, pois todo homomorfismo sobrejetor é isomorfismo.

Os grafos completos menos uma aresta são subdiretamente irredutíveis, pois o par de vértices não ligados formam um par crítico de vértices.

Os grafos completos com uma aresta dupla são subdiretamente irredutíveis, pois o par de arestas com os mesmos extremos, formam um par crítico de arestas.

Seja M um multigrafo não orientado que não está em nenhuma das classes de multigrafos do enunciado.

Suponhamos que M é subdiretamente irredutível. Isto só pode acontecer por i, ii ou iii do teorema de caracterização; analizemos cada caso:

i - Existe um par crítico de vértices (v, w). Neste caso v e w não estão ligados, se o multigrafo M tem alguma aresta dupla ou seja, existem arestas a e b, $a \neq b$, tais que $Ext(a) = Ext(b)$, consideramos o multigrafo M', com o conjunto de vértices $V' = V$, e conjunto de arestas $A' = A - \{b\}$ e $R^{M'} = R \ / \ A' x \ VxV$.

Seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não isomorfismo dado por $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(c) = c$ se $c \neq b$ e $\varphi_A(b) = a$. Temos que $\varphi(v) \neq \varphi(w)$, absurdo. Logo M não tem arestas multiplas.

Como M não é um dos multigrafos do enunciado, temos que, existe outro par de vértices x e y, tais que, $x \neq y$, e x não esta ligado a y, com $\{x,y\} \neq \{v,w\}$, podemos supor sem perda de generalidade que, $v \neq x$, $v \neq y$ e $w \neq y$. Seja **M'** o multigrafo dado por $V' = V - \{y\}$ e $A' = \{a' \ / \ a \in A\}$ onde $Ext(a') = Ext(a)$ se $y \notin Ext(a)$ e $Ext(a') = \{x,v\}$ se $Ext(a) = \{y,v\}$. Observamos que M' é um multigrafo orientado sem laços. Seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não isomorfismo dado por $\varphi_V(t) = t$ se $t \neq y$, $\varphi_V(y) = x$ e $\varphi_A(a) = a'$. Resulta que $\varphi(v) \neq \varphi(w)$, absurdo.

ii - Existe um par crítico de arestas (a,b).

Se existem dois vértices v e w tais que, $v \neq w$ e v e w não estão ligados, consideramos o multigrafo M' dado por $V' = V - \{w\}$, $A' = \{c' / c \in A\}$, $Ext(c') = Ext(c)$ se $w \notin Ext(c)$, e $Ext(c') = \{v,x\}$ se $Ext(c) = \{w,x\}$. Observamos que M' é um multigrafo sem laços. Seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não isomorfismo dado por $\varphi_V(x) = x$ se $x \neq w$, $\varphi_V(w) = v$, $\varphi_A(a) = a'$. Resulta que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, o que é absurdo, logo, todos os vértices distintos de M estão ligados, e como M não é um multigrafo dos que aparece no enunciado, temos que M tem um par de diferentes arestas múltiplas ou uma aresta tripla.

Se $Ext(a) \neq Ext(b)$, sejam c e d arestas diferentes com os mesmos extremos e M' o multigrafo dado por $V' = V$, $A' = A - \{d\}$ e $R^{M'} = R / A'x\ VxV$ seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não iso por, $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(e) = e$ se $e \neq d$, $\varphi_A(d) = c$ observamos que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, absurdo. Logo se (a,b) é um par crítico de arestas, temos que, $Ext(a) = Ext(b)$. Como M é um multigrafo que não aparece no enunciado, temos que existem c e d arestas, $c \neq d$, $b \neq c$ tais que, $Ext(c) = Ext(d)$.

Seja M' o multigrafo dado por $V' = V$, $A' = A - \{c\}$, e $R^{M'} = R / A'x\ VxV$, e seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não isomorfismo dado por $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(e) = e$ se $e \neq c$, $\varphi_A(c) = d$, logo $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, absurdo.

iii - Existe uma terna crítica (a, x, y).

Se este for o caso, provaremos primeiro que M não pode ter arestas multiplas. Raciocinamos pelo absurdo, sejam c e d arestas de M, $c \neq d$ e $Ext(c) = Ext(d)$, podemos supor sem perda de generalidade, que $a \neq c$, consideramos o multigrafo orientado sem laços M' dado por $V' = V$, $A' = A - \{c\}$, $R^{M'} := R^M|A'xVxV$. Seja φ: $M \longrightarrow M'$ o homomorfismo sobrejetor não iso dado por $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(e) = e$ se $e \neq c$ e $\varphi_A(c) = d$. Trivialmente temos que: $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$, absurdo.

Logo M não tem arestas múltiplas, como M não é um multigrafo dos que aparece no enunciado temos que existem vértices r, s, v, w tais que: $r \neq s$. $s \neq v$, $v \neq w$, $r \neq v$, r e s(v e w) não estão ligados.

Se Ext(a) = {m, n} por hipótese $\{m, n\} \neq \{x, y\}$, logo $\{m, n\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, consideramos o multigrafo M', e o homomorfismo sobrejetor não iso, $\varphi: M \longrightarrow M'$ para o par de vértices não ligados (v, w), como no começo de ii, logo, temos que: $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$, absurdo.
Então só resta analizar o caso, $\{m, n\} \cap \{x, y\} = \{x = m\}$, como algum dos pares {r, s}, {v, w} é distinto de {y, n}, por exemplo, o par {v, w} consideramos o multigrafo M', e o homomorfismo sobrejetor não iso, $\varphi: M \longrightarrow M'$ como antes, e obtemos que $(\varphi(a), \varphi(x), \varphi(y)) \notin R^{M'}$, absurdo. ∎

Passamos agora ao caso dos multigrafos orientados:

Teorema 3.13: Os únicos multigrafos orientados sem laços subdiretamente irredutíveis na classe dos multigrafos orientados sem laços são:

(i) os grafos dirigidos completos, com um ou nenhum par de arestas duplas do mesmo sentido e um número arbitrário de arestas duplas de diferente sentido;

(ii) os grafos dirigidos completos menos uma aresta, com um número arbitrário de arestas duplas de diferente sentido.

Prova: Trivialmente, os grafos dirigidos completos sem nenhum par de arestas do mesmo sentido e um número arbitrário de arestas duplas de diferente sentido são subdiretamente irredutíveis, pois todo homomorfismo sobrejetor é isomorfismo.

Os grafos dirigidos completos com um par de arestas duplas do mesmo sentido e um número arbitrário de arestas duplas de diferente sentido são subdiretamente irredutíveis, pois o par de arestas duplas do mesmo sentido é um par crítico de arestas.

Os grafos dirigidos completos menos uma aresta com um número arbitrário de arestas duplas de diferente sentido são subdiretamente irredutíveis, pois o par de vértices não ligados é um par de vértices crítico.

Seja M um multigrafo orientado sem laços que não aparece no enunciado do teorema: provemos que M não é subdiretamente irredutível.

Suponha que, M seja subdiretamente irredutível temos dois casos:

i - M tem um par crítico de vértices (v, w);

ii - M tem um par crítico de arestas (x, y).

Como M é um multigrafo que não ocorre no enunciado do teorema temos duas possibilidades para M.

1 - Existem quatro arestas a, b, c, d tais que $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, $c \neq d$ e $F_1(a) = F_1(b)$, $F_F(a) = F_F(b)$, $F_1(c) = F_1(d)$, $F_F(c) = F_F(d)$.

2 - Existem três vértices u, s, t distintos tais que u não é ligado a s e s não é ligado a t.

Analizemos o caso i:

No caso 1 seja M' o multigrafo orientado sem laços dado por $V' = V$, $A' = A - \{b\}$, $F_1^{M'} = F_1^M|A'$, $F_F^{M'} = F_F^M|A'$ e $\varphi: M \longrightarrow M'$ dado por $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(c) = c$ se $c \in A'$ e $\varphi_A(b) = a$; então φ é um homomorfismo sobrejetor não iso, para o qual $\varphi(v) \neq \varphi(w)$, absurdo.

No caso 2 podemos supor sem perda de generalidade que $u = v$, $s = w$, neste caso seja M' o multigrafo orientado dado por $V' = V - \{t\}$, $A' = \{a' \ / \ a \in A\}$, $F_i^{M'}(a') = F_i^M(a)$ se $F_i^M(a) \neq t$ e $F_i^{M'}(a') := w$ se $F_i^M(a') = t$, analogamente se define $F_F^{M'}$. Observamos que M' é um multigrafo orientado sem laços. Seja φ: $M \longrightarrow M'$ dado por $\varphi_V(r) = r$ se $r \neq t$, $\varphi_V(t) = w$, $\varphi_A(x) = x'$ $\forall x \in A$, então φ é um homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(v) \neq \varphi(w)$, absurdo.

Analizemos agora o caso ii:

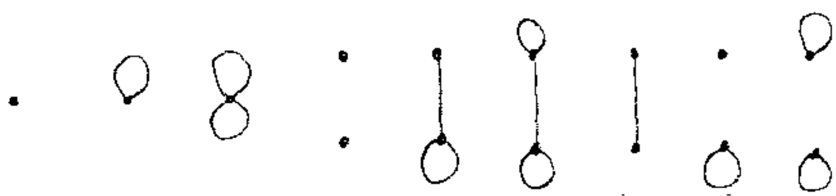
No caso 1 podemos considerar sem perda de generalidade $x = a$ e $y = b$. Seja M' o multigrafo orientado sem laços dado por $V' = V$, $A' = A - \{c\}$, $F_F^{M'}(z) := F_F^{M}(z)$ $\forall z \in A'$, $F_1^{M'}(z) = F_1^{M}(z)$ $\forall z \in A'$, e seja φ: $M \longrightarrow M'$ definido por $\varphi_V = 1_V$, $\varphi_A(z) = z$ se $z \neq c$, $\varphi_A(c) = d$. Então φ é um homomorfismo sobrejetor não isomorfismo, tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, absurdo.

No caso 2 seja M' o multigrafo orientado sem laços dado por $V' = V - \{u\}$, $A' = \{a' \ / \ a \in A\}$, $F_1^{M'}(a') = F_1^{M}(a)$ se $F_1^{M}(a) \neq u$, $F_1^{M'}(a') = s$ se $F_1^{M}(a) = u$, $F_F^{M'}$ e definida da mesma maneira. Seja φ: $M \longrightarrow M'$ dado por $\varphi_V(z) = z$ se $z \neq u$, $\varphi_V(u) = s$, $\varphi_A(a) = a'$ $\forall a \in A'$, logo φ é um homomorfismo sobrejetor não iso e $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, absurdo.

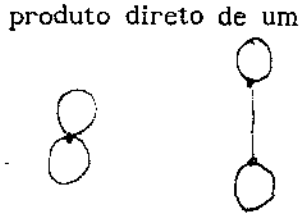
Então os únicos multigrafos orientados subdiretamente irredutíveis são os que aparecem no enunciado do teorema. ∎

Como corolário dos teoremas 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 e o corolário 2.11, temos os seguintes teoremas de representação para multigrafos.

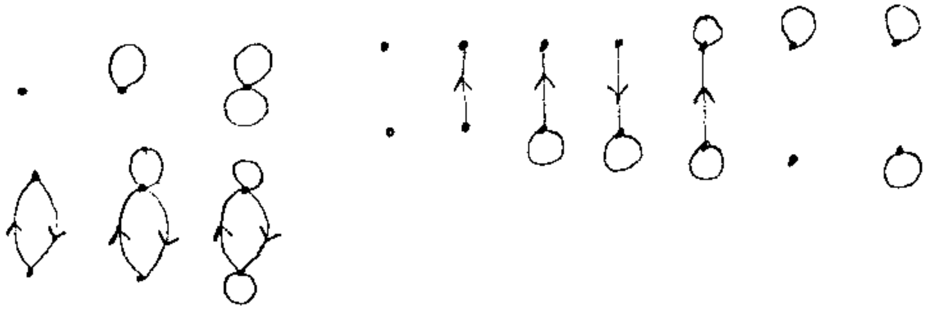
Teorema 3.14: Todo multigrafo não orientado finito é produto subdireto de um número finito dos multigrafos



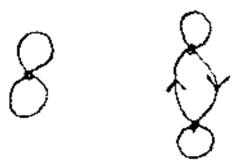
Corolário 3.15: Todo multigrafo não orientado finito é um sub multigrafo de um produto direto de um número finito dos multigrafos



Teorema 3.16: Todo multigrafo orientado finito é produto subdireto um número finito dos multigrafos



Corolário 3.17: Todo multigrafo orientado finito é um sub multigrafo de um produto direto de um número finito dos multigrafos



Teorema 3.18: Todo multigrafo sem laços finito é um produto subdireto dos multigrafos do teorema 3.12.

Teorema 3.19: Todo multigrafo orientado sem laços finito é um produto subdireto dos multigrafos do teorema 3.13.

III.5 - OS SUBDIRETAMENTE IRREDUTÍVEIS NA CLASSE DOS GRAFOS PLANARES E O TEOREMA DAS QUATRO CORES.

O teorema das quatro cores é um velho quebra-cabeças formulado por F. Guthrie em 1880, da seguinte forma: dado qualquer mapa plano, é possível colori-lo com quatro cores de maneira que quaisquer países vizinhos tenham cores diferentes. Numa linguagem moderna, todo grafo planar sem laços é 4-corolável. Este resultado foi provado por K. Appel e W. Haken em 1976 [A-H]. A prova oferecida por estes autores porém é de uma longitude fantástica; na verdade eles reduzem o problema a uma série de subproblemas empregando para sua resolução um programa de computador.

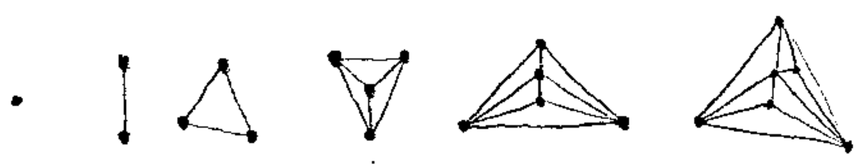
Naturalmente, fica a questão: existe uma prova razoável do teorema das quatro cores?, ou seja, uma prova curta que seja humanamente verificável?.

Nesta linha de pensamento, apresentamos aqui o seguinte resultado de M^c^Allister - Caicedo [M^c^A], [CI]: o teorema das quatro cores é equivalente à existência de somente seis grafos subdiretamente irredutíveis na classe do grafos planares. É simples observar que este resultado permite uma nova abordagem ao teorema das quatro cores, traduzindo o problema a busca de subdiretamente irredutíveis na classe dos grafos planares.

Teorema: São equivalentes:

i - Teorema das quatro cores;

ii - Os únicos grafos planares subdiretamente irredutíveis são K_1, K_2, K_3, K_4 H_5, H_6.



A prova deste resultado é praticamente um corolário da seguinte generalização:

Teorema: Os grafos subdiretamente irredutíveis n - coloráveis são os grafos completos com no máximo n - vértices e os grafos seguintes:

$$H_{m+1} = (H_{m+1}, R) \text{ onde } H_{m+1} = \left\{Y_1, —, Y_m, Z\right\} \text{ e}$$

$$Y_i \; R \; Y_j \text{ se } i \neq j \text{ e } Z \; R \; Y_i \text{ se } i \neq 1.$$

$$H_{m+2} = (H_{m+2}, R) \text{ onde } H_{m+2} = \left\{V_1, —, V_m, Y, W\right\} \text{ e}$$

$$V_i \; R \; V_j \text{ se } i \neq j, \; Y \; R \; V_i \text{ se } i \neq 1 \text{ e } W \; R \; V_i \text{ se } i \neq 2.$$

Para as provas destes resultados e novas aplicações à teoria dos grafos n - coloráveis, Ver [C1].

APÊNDICE

PROPRIEDADES PRESERVADAS POR PRODUTO SUBDIRETO

0. 1 INTRODUÇÃO:

Neste Apêndice expomos, sem pretensão de originalidade, os resultados de R.C. Lyndon sobre propriedades preservadas por produtos subdiretos [Ly 2]. O resultado central é o seguinte *"Uma sentença tem a propriedade que vale num produto subdireto de τ-estruturas se vale em cada τ-estrutura componente do produto subdireto see, a sentença é equivalente a uma sentença de Horn especial"*. Apresentamos também as noções da teoria de Modelos necessárias para o entendimento da prova deste resultado.

Assumimos que o leitor tem um conhecimento de lógica de primeira ordem a nível de [Sh].

Definição 0.1: Seja τ um tipo de estruturas. Associado a τ temos a linguagem de primeira ordem $L(\tau)$ com símbolos de função F_γ e símbolos de relação R_γ de aridade n_γ e m_γ, respectivamente.

Definição 0.2: Seja K uma classe de estruturas de tipo τ então $K^* = \left\{\phi \in L(\tau) \ / \ \phi \text{ é uma sentença e se } \mathfrak{U} \in K \text{ então } \mathfrak{U} \models \phi\right\}$. Se $\sum$ é um conjunto de sentenças de $L(\tau)$ então $\sum^* = \left\{\mathfrak{U} \ \tau\text{-estruturas} \ / \ \mathfrak{U} \models \phi \text{ para toda } \phi \in \sum\right\}$.

Definição 0.3: Uma classe K de τ-estruturas é dita *axiomática* se $K = \sum^*$ para algum conjunto de sentenças $\sum$ de $L(\tau)$. Se $K = \{ \phi \}^*$, para alguma sentença ϕ, então K é dita elementar.

Proposição 0.4: Sejam K, K' classes de τ-estruturas e $\sum$, $\sum'$ conjuntos de sentenças de $L(\tau)$ então:

a) - $K \subset K^{**}$

b) - $\sum \subset \sum^{**}$

c) - Se $K \subset K'$ então $K'^{*} \subset K^{*}$

d) - Se $\sum \subset \sum'$ então $\sum'^{*} \subset \sum^{*}$

e) - K é uma classe axiomática see $K = K^{**}$.

Prova: Trivial, a partir das definições.

Definição 0.5: Duas τ-estruturas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ são ditas elementarmente equivalentes se: Para qualquer sentença ϕ de $L(\tau)$ temos que $\mathfrak{A} \models \phi$ see $\mathfrak{B} \models \phi$.

Corolário 0.6: Duas τ-estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes.

Definição 0.7: Se $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ são τ-estruturas, $\mathfrak{B}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}$ se:

i - $|\mathfrak{A}| \subset |\mathfrak{B}|$

ii - Para qualquer ϕ fórmula de $L(\tau)$ e v valorização de $\mathfrak{A}$ temos que: $\phi^{\mathfrak{B},v} = 1$ see $\phi^{\mathfrak{A},v} = 1$.

Corolário 0.8: Se $\mathfrak{B}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}$ então $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes.

Teorema 0.9: Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ τ-estruturas. Então $\mathfrak{B}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{A}$ see

i - $\mathfrak{B}$ é uma extensão de $\mathfrak{A}$.

ii - Se ϕ é uma fórmula de $L(\tau)$ e v valorização de $\mathfrak{A}$ tais que: $(\exists x\ \phi)^{\mathfrak{B},v} = 1$ então existe $b \in |\mathfrak{A}|$ tal que: $\phi^{\mathfrak{B},v(x|b)} = 1$.

Prova: $\longrightarrow|$ Seja $\mathfrak{B}$ extensão elementar de $\mathfrak{U}$, então $\mathfrak{B}$ é uma extensão de $\mathfrak{U}$. (trivial aplicando a definição de extensão elementar as fórmulas

$$R_\gamma(X_1, \ldots X_{m_\gamma}),\ F_\gamma(X_1, \ldots X_{n_\gamma}) = X_{n_{\gamma+1}}.$$

Se $\phi \in L(\tau)$ e v é uma valorização de $\mathfrak{U}$ tal que: $(\exists x\ \phi)^{\mathfrak{B},v} = 1$ então pela definição de extensão elementar temos que: $(\exists x\ \phi)^{\mathfrak{U},v} = 1$. Assim, existe $b \in |\mathfrak{U}|$ tal que: $\phi^{\mathfrak{B},v(x|b)} = 1$ novamente pela definição de extensão elementar $\phi^{\mathfrak{B},v(x|b)} = 1$.

$\longleftarrow|$ Sejam $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ τ-estruturas que satisfazem i e ii.

Seja $\Gamma = \left\{\phi \in L(\tau) / \text{ para qualquer valorização v de } \mathfrak{U},\ \phi^{\mathfrak{B},v} = 1 \text{ see } \phi^{\mathfrak{U},v} = 1\right\}$ provaremos por indução sobre a complexidade das fórmulas que Γ é o conjunto de fórmulas de $L(\tau)$ obtendo que $\mathfrak{B}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{U}$.

i - As fórmulas atômicas de $L(\tau)$ estão em Γ.

Seja $\phi \equiv R_\gamma(t_1, \ldots t_{n\gamma})$ atômica v valorização de $\mathfrak{U}$ tal que: $\phi^{\mathfrak{U},v} = 1$ como $\mathfrak{B}$ é extensão de $\mathfrak{U}$, $\phi^{\mathfrak{B},v} = 1$.

Se $\phi^{\mathfrak{B},v} = 1$, v valorização de $\mathfrak{U}$ como $\mathfrak{B}$ é extensão de $\mathfrak{U}$ $\phi^{\mathfrak{U},v} = 1$.

ii - Se ϕ, $\psi \in \Gamma$ então $\phi \vee \psi \in \Gamma$.

Seja v valorização de $\mathfrak{U}$, então: $(\phi \vee \psi)^{\mathfrak{U},v} = 1$ see $\phi^{\mathfrak{U},v} = 1$ ou $\psi^{\mathfrak{U},v} = 1$ see $\phi^{\mathfrak{B},v} = 1$ ou $\psi^{\mathfrak{B},v} = 1$ see $(\phi \vee \psi)^{\mathfrak{B},v} = 1$.

iii - Se $\phi \in \Gamma$ então $\neg\phi \in \Gamma$.

Seja v valorização de $\mathfrak{U}$, $(\neg\phi)^{\mathfrak{U},v} = 1$ see $\phi^{\mathfrak{U},v} = 0$ see $\phi^{\mathfrak{B},v} = 0$ see $\phi^{\mathfrak{B},v} = 0$ see $(\neg\phi)^{\mathfrak{B},v} = 1$.

iv - Se $\phi \in \Gamma$ então $\exists x\, \phi \in \Gamma$.

Seja v valorização de $\mathfrak{U}$, se $(\exists x\, \phi)^{\mathfrak{B},v} = 1$ então por hipótese existe $b \in |\mathfrak{U}|$ tal que: $\phi^{\mathfrak{B},v(x|b)} = 1$ como $\phi \in \Gamma$ e $v(x|b)$ éuma valorização de $\mathfrak{U}$ temos que:

$$\phi^{\mathfrak{U},v(x|b)} = 1 \text{ logo } (\exists x\, \phi)^{\mathfrak{U},v} = 1.$$

Reciprocamente, se $(\exists x\, \phi)^{\mathfrak{U},v} = 1$ então para algum $b \in |\mathfrak{U}|$ temos que: $\phi^{\mathfrak{U},v(x|b)} = 1$ como $\phi \in \Gamma$, $\phi^{\mathfrak{B},v(x|b)} = 1$ logo $(\exists x\, \phi)^{\mathfrak{B},v} = 1.$ ∎

Teorema 0.10: Sejam $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ τ-estruturas $\mathfrak{B}$ é uma extensão elementar de $\mathfrak{U}$ see

i - $\mathfrak{B}$ é uma extensão de $\mathfrak{U}$.

ii - Se ϕ é uma fórmula de $L(\tau)$ e v uma valorização de $\mathfrak{U}$ tal que $\phi^{\mathfrak{U},v} = 1$ então $\phi^{\mathfrak{B},v} = 1$.

Prova: $\longrightarrow|$ trivial.

$\longleftarrow|$ Sejam $\phi \in L(\tau)$ é v valorização de $\mathfrak{U}$ tais que $\phi^{\mathfrak{B},v} = 1$ argumentar por indução sobre a complexidade das fórmulas. ∎

Teorema de Compacidade 0.11: Se $\sum$ é um conjunto de sentenças inconsistente de $L(\tau)$ então existe um subconjunto finito F de $\sum$ tal que F é inconsistente.

0.2 - Definições e Resultados Preliminares para o Teorema de Caracterização das Sentenças Preservadas por Produtos Subdiretos.

Definição 0.12: Uma fórmula ϕ de $L(\tau)$ é dita *positiva* se os únicos conectivos que ocorrem nela são $\wedge, \vee$.

Definição 0.13: Uma fórmula de Horn *especial* em $L(\tau)$ é uma fórmula obtida pelas seguintes regras:

i - Se P é positiva e F atômica então $P \longrightarrow F$ é uma fórmula de Horn especial.

ii - Se R, S são fórmulas de Horn especiais então: $R \wedge S$ é uma fórmula de Horn especial.

iii - Se R é uma fórmula de Horn especial então:

$\forall x\, R$ é uma fórmula de Horn especial.

Teorema de Caracterização [parte facil] 0.14: Sejam K uma classe axiomática de $L(\tau)$ estruturas e $\mathfrak{U}$ τ-estrutura. Então: Se $\mathfrak{U}$ tem uma extensão elementar que é produto subdireto de elementos de K, então $\mathfrak{U}$ satisfaz todas as sentenças especiais de Horn que valem em K.

Prova: Seja S uma sentença de Horn especial ou seja $S = \forall x_1, \ldots, x_n$ $(P \longrightarrow F)$ e $\mathfrak{U}$ é produto subdireto de $\left\{\mathfrak{U}_i \ / \ i \in I\right\} \subset K$ tais que: para cada $i \in I$ $\mathfrak{U}_i \models S$ provaremos que $\mathfrak{U} \models S$.

Suponhamos que: para cada $i \in I$ $\mathfrak{U}_i \models S$ e $\mathfrak{U} \not\models S$ então existe uma valorização v de $\mathfrak{U}$ tal que:

$$P^{\mathfrak{U},v} = 1 \quad \text{e} \quad F^{\mathfrak{U},v} = 0.$$

Agora definimos para cada $i \in I$ uma valorização v_i de $\mathfrak{U}_i$ por $v_i(x) = \Pi_i(v(x))$ onde $\Pi_i : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}_i$ é o homomorfismo canônico do produto restrito a $\mathfrak{U}$.

Como $P^{\mathfrak{U},v} = 1$ temos que para cada $i \in I$, $P^{\mathfrak{U}_i,v_i} = 1$, como S vale em cada $\mathfrak{U}_i$ e $P^{\mathfrak{U}_i,v_i} = 1$ temos que $F^{\mathfrak{U}_i,v_i} = 1$ para todo $i \in I$ logo $F^{\mathfrak{U},v} = 1$ contradição. Assim $\mathfrak{U} \models S$. ∎

0. 3 Recíproca do Teorema de Caracterização:O restante deste Apêndice está dedicado a provar a recíproca do teorema 0.14.

Apresentamos agora algumas definições e resultados especiais da teoria necessários para a prova deste resultado.

Definição 0.15: Seja $\mathfrak{U}$ uma τ-estrutura. Denotaremos por $L(\mathfrak{U})$ a linguagem obtida da linguagem L por adjunção de novos e distintos símbolos de constante $\left\{c_a \ / \ a \in |\mathfrak{U}|\right\}$.

Denotaremos por $\bar{\mathfrak{U}}$ a extensão de $\mathfrak{U}$ a $L(\mathfrak{U})$ obtida por definir $c_a^{\bar{\mathfrak{U}}} := a$ para todo $a \in |\mathfrak{U}|$.

Definição 0.16: Seja μ um número ordinal, $L_\mu(\mathfrak{U})$ é a linguagem obtida de $L(\mathfrak{U})$ por adjunção de novos e distintos símbolos de relação $\left\{R_\gamma \ /\gamma < \mu,\ R \text{ símbolo de relação de } L(\tau), \text{ aridade de } R_\gamma \text{ a mesma que } R\right\}$.

Se $\mathfrak{U}_\mu$ é uma estrutura para $L_\mu(\mathfrak{U})$ e $\gamma < \mu$ então: $\mathfrak{U}_{\mu,\gamma}$ é a estrutura para $L(\mathfrak{U})$ definida por:

$$R^{\mathfrak{U}_{\mu,\gamma}} = R_\gamma^{\mathfrak{U}_\mu} \quad F^{\mathfrak{U}_{\mu,\gamma}} = F^{\mathfrak{U}_\mu}.$$

Definição 0.17: Seja K uma classe axiomática de τ-estrutras e $\mathfrak{U}$ uma τ-estrutura. A estrutura $\mathfrak{U}_\mu$ para $L_\mu(\mathfrak{U})$ tem a propriedade (*) se:

1 - A restrição de $\mathfrak{U}_\mu$ a $L(\mathfrak{U})$ é uma extensão elementar de $\bar{\mathfrak{U}}$.

2 - $\mathfrak{U}_{\mu,\gamma} \in K$ para todo $\gamma < \mu$.

3 - $R^{\mathfrak{U}_\mu} \leq R^{\mathfrak{U}_{\mu,\gamma}} = R_\gamma^{\mathfrak{U}_\mu}$ para todo R em $\bar{L}$ e $\gamma < \mu$.

Agora enunciaremos um lema que permite provar a recíproca de 3.14.

Lema 0.18: Seja $\sum$ a classe de todas as sentenças de Horn especiais que são verdadeiras em K. Se $\mathfrak{A} \in \sum^*$, então existe um número ordinal μ e uma estrutura $\mathfrak{A}_\mu$ para $L_\mu(\mathfrak{A})$ tal que:

1 - $\mathfrak{A}_\mu$ verifica (*)

2 - Se F é uma sentença atômica de $L(\mathfrak{A})$ tal que $\bar{\mathfrak{A}} \models F$ então existe $\gamma < \mu$ tal que: $\mathfrak{A}_{\mu,\gamma} \not\models F$.

Prova: Ver [Ly 2].

Teorema 0.19: (Recíproca de 0.14) Sejam K uma classe axiomática de $L(\tau)$-estruturas e $\mathfrak{A}$ τ-estrutura. Então: Se $\mathfrak{A}$ satisfaz todas as sentenças especiais de Horn que valem em K então $\mathfrak{A}$ tem uma extensão elementar que é produto subdireto de elementos de K.

Prova: Por hipótese $\mathfrak{A} \in \sum^*$ pelo lema 0.18 existe um ordinal μ tal que: $\mathfrak{A}_\mu$ verifica 1 e 2 do lema.

Por 1 da propriedade (*) $\mathfrak{A}'$ a restrição de $\mathfrak{A}_\mu$ a $L(\mathfrak{A})$ é uma extensão elementar de $\bar{\mathfrak{A}}$ ou seja de $\mathfrak{A}$.

Para cada $\gamma < \mu$ seja $\mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{A}_{\mu,\gamma}$ por 2 de (*) temos que $\mathfrak{B}_\gamma \in K$. Agora por 3 de (*) temos que se R é um símbolo de relação de $L(\tau)$:

$$R^{\mathfrak{A}'} \subseteq R^{\mathfrak{A}_\mu} \subseteq R^{\mathfrak{A}_{\mu,\gamma}} = R_\gamma^{\mathfrak{A}_\mu}.$$

Assim a aplicação $\Theta_\gamma\colon \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{B}_\gamma$ $\quad \Theta_\gamma(x) = x$ é um homomorfismo sobrejetor. Provaremos que $\left\{\Theta_\gamma\colon \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{B}_\gamma \;/\; \gamma < \mu\right\}$ é uma família $\mathfrak{A}'$-separadora e logo por 1.15 resulta que $\mathfrak{A}'$ é um produto subdireto de $\left\{\mathfrak{B}_\gamma \;/\; \gamma < \mu\right\}$.

Seja então R um símbolo de relação em $L(\tau)$ de aridade n. Suponhamos que existem $(a_1, \dots a_n) \in |\mathfrak{A}'|^n$ tal que: para todo $\gamma < \mu$ $(\Theta_\gamma(a_1), \dots, \Theta_\gamma(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}_\gamma}$ e $(a_1, \dots a_n) \notin R^{\mathfrak{A}'}$. Então a sentença F =

$R(c_{a_0}, \ldots, c_{a_n})$ é falsa em $\bar{\mathfrak{U}}$ logo por 0.18 existe $\gamma < \mu$ tal que $\mathfrak{U}_{\mu,\gamma} \not\models$ F para algum $\gamma < \mu$.

Como $c_{a_i}^{\mathfrak{B}_\gamma} = c_{a_i}^{\mathfrak{U}_\mu} = c_{a_i}^{\bar{\mathfrak{U}}} = a_i$ temos que:

$$(a_1, \ldots a_n) = (\Theta(a_1), \ldots, \Theta(a_n)) \notin R^{\mathfrak{B}_\gamma} \text{ absurdo.}$$

Então $(a_1, \ldots a_n) \in R^{\mathfrak{U}'}$. Assim $\left\{\Theta_\gamma : \mathfrak{U}' \longrightarrow \mathfrak{B}_\gamma \ / \ \gamma < \mu\right\}$ é $\mathfrak{U}'$-separadora. ∎

Corolário 0.20: Uma sentença ϕ tem a propriedade que vale num produto subdireto de τ-estruturas se vale em cada componente do produto see ϕ é equivalente a uma sentença de Horn especial.

Prova: $\longleftarrow|$ trivial de 0.14.

$\longrightarrow|$ Seja $K = \{ \phi \}^*$ e $\sum$ o conjunto das sentenças de Horn especiais que valem em K então $\{\neg\phi\} \cup \sum$ é inconsistente pois se $\mathfrak{U} \models \{\neg\phi\} \cup \sum$; então $\mathfrak{U}$ satisfaz todas as sentenças de Horn especiais que valem em K, pelo teorema anterior $\mathfrak{U}$ tem uma extensão elementar $\mathfrak{B}$ que é produto subdireto da família $\left\{\mathfrak{U}_i \ / \ i \in I\right\}$ de K como $\mathfrak{U}_i \models \phi \ \forall \ i \in I$ temos que $\mathfrak{B} \models \phi$ ou seja $\mathfrak{U} \models \phi$ absurdo pois $\mathfrak{U} \models \neg \phi$. Logo $\{\neg\phi\} \cup \sum$ é inconsistente então existe pelo teorema de compacidade um subconjunto finito $\left\{\psi_1, \ldots, \psi_n\right\}$ de $\sum$ tal que $\left\{\neg\phi, \psi_1, \ldots \psi_n\right\}$ é inconsistente então $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \models \phi$, e como sempre $\phi \models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ e $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ é uma sentença de Horn especial temos que ϕ é equivalente a uma sentença de Horn especial. ∎

BIBLIOGRAFIA

[A-H] **Appel, K., Haken, W.** - *"Every planar map is four colourable"*, Illinois J. Math. 21 (1977), 429-490.

[Bi] **Birkhoff, G.** - *"Subdirect unions in universal Algebra"*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 764-768.

[Bu] **Burris, S.** - *"Subdirect representations in axiomatics classes"*, Colloquium Mathematicum, XXXIV (1976), 191-197.

[C] **Caicedo, X.** - *"The subdirect decomposition theorem for classes of structures closed under limits"*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 30 (1980), 171-178.

[C1] **Caicedo, X.** - *"Subdirect decomposition of n-colourable graphs"*, Preprint (1992).

[G] **Gratzer, G.** - *"Universal Algebra"*, Van Nostrand, New York (1968).

[H] **Humphreis, J.E.** - *"Introdution to Lie Algebras and representation Theory"*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[Ha] **Harary, F.** - *"Graph theory"*, Addison-Wesley, New York, 1969.

[J] **Jacobson, N.** - *"Lie Algebras"*, Interscience, New York, 1962.

[Ly 1] **Lyndon, R.C.** - *"An interpolation theorem in the predicate calculus"*, Pacific J. Math. 9 (1959), 129-142.

[Ly 2] **Lyndon, R.C.** - *"Properties preserved in subdirect products"*, Pacific J. Math. 9 (1959), 154-155.

[M] Malcev, A.I. - *"The mathemathematics of algebraic systems"*, North Holland, Amsterdam, 1971.

[M^cA] M^cAllister - *"Grafos n-colorables subdiretamente irreducibles"*, Master's dissertation, Univ. Los Andes, 1989.

[P] Pierce, R.S. - *"Introduction to the theory of abstract algebras"*, Holt Rinehart Van Winston, New York, 1968.

[Pe] Pedraza, M.C. de - *"Grafos subdiretamente irreducibles"*, Tesis de Magister, Universidad de Los Andes, Colombia, 1981.

[Pi] Pickett, H.E. - *"Subdirect representations of relational systems"*, Fund. Math. 56 (1964), 223-240.

[S] Sabbidusi, G. - *"Subdirect representation of graphs"*, Infinite and Finite sets (Hasnal, Radó and Lós, Editors) Vol. 3, (1199-1226). Colloq. Math. Janos Bolyai, Vol. 10, North Holland, Amsterdam, 1975.

[Sh] Shoenfield, J.R. - *"Mathematical Logic"*, Addison Wesley, New York, 1967.