EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS NÃO HOMOGÊNEOS: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES, REGULARIDADE E APROXIMAÇÕES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 09 de agosto de 1991

Prof.Dr. José Luiz Boldrini

José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

EQUAÇOES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS ÑAO HOMOGÊNEOS: EXISTÊNCIA DE SOLUÇOES, REGULARIDADE E APROXIMAÇOES

MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

AGOSTO - 1991

Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. José Luiz Boldrini, pela sua valiosa contribuição para que este trabalho fosse realizado e seu constante apoio tanto no profissional como no pessoal, faço extensivo também estes agradecimentos a sua família.

Aos Profs. Orlando F. Lopes, Djairo G. de Figueiredo, Luiz A. Medeiros, Gustavo Perla Menzala, Manuel Milla Miranda e Aloisio José F. Neves, pelo interesse mostrado por este trabalho, e por sua gentileza ao aceitar fazer parte da banca examinadora.

Ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi pelo apoio e pela amizade com que me distingüiu.

As Sras. Angles de Fátima T. Espindola e Benedita Izildina V. Silva, pela sua paciência e dedicação ao "traduzir" e digitar o manuscrito desta tese.

Aos colegas de Pós-Graduação pelo seu constante incentivo.

Aos meus Pais e Irmãos pelo seu apoio incondicional.

Devo também, agradecer o apoio econômico prestado pela CAPES e FAPESP.

Finalmente agradeço de maneira muito especial a minha esposa Mitza pela paciência e compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

O presente trabalho o dedico a minha e querida mãe Dina in Memoriem.

Campinas, 09 de agosto de 1991

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Consideraremos neste trabalho as equações que descrevem o comportamento dinâmico da mistura de dois fluidos incompressíveis e miscíveis, formando um fluido único não homogêneo (isto é, com densidade variável). As equações que governam o movimento desta mistura em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) com fronteira $\partial\Omega$, durante um intervalo de tempo $[0, \tilde{T}]$, $\tilde{T} > 0$, são:

$$(0.1) \quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho u \nabla u - \Delta u + \operatorname{grad} p = \rho f \,, \\[2em] \operatorname{div} u = 0, \\[2em] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla \rho = 0, \end{cases}$$

acoplada com as condições de bordo e iniciais

$$(0.2) \quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, \tilde{T}] \\[2em] \rho|_{t=0}(x) = \rho_o(x) \\[2em] u|_{t=0}(x) = u_o(x) \quad \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde, por simplicidade e sem perda de generalidade, supusemos que a viscosidade é unitária; $u(t,x) \in \mathbb{R}^n$ denota a velocidade da mistura dos fluidos num ponto $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (região de escoamento) do espaço e instante t do tempo; ρ é a densidade da mistura, f é a densidade das forças externas por unidade de massa; grad, Δ e div , representam os operadores gradientes, Laplaciano e divergência, respectivamente (também denotaremos o operador grad por ∇ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ por u_t), $u\nabla u$ indica o operador de convecção, cuja componente i-ésima em coordenadas cartesianas é dada por $(u\nabla u)_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (na notação de Einstein, onde índices repetidos se somam e u_k indica a k-ésima componente da velocidade u em coordenadas cartesianas); $p(t,x)$ é a pressão hidrostática.

A equação div u = 0 indica que o fluido é incompressível e a última equação é uma equação de transporte para a densidade. Nesta última equação $u\nabla\rho = u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$ (notação de Einstein) é o operador de advecção. As incógnitas são u, ρ, p.

As equações clássicas de Navier-Stokes, correspondem ao caso particular em que a densidade ρ é constante e têm sido muito estudadas (veja Ladyzhenskaya [16], Lions [18], Tenam [29], Fujita, Kato [8]).

As equações (0.1), (0.2) tem sido bastante menos estudadas que as de Navier-Stokes usuais, talvez pelo seu caráter não totalmente parabólico devido ao acoplamento com a equação de transporte de massa. Na literatura matemática resultados de existência de soluções (local ou global, fracas ou fortes dependendo do autor) são apresentados em Kazhikov [14], Antonzev e Kazhikov [2], Lions [19], [20], Ladyshenskaya e Solonnikov [17], Simon [27], [28], Padula [22], Okamoto [21], Kim [15] e Salvi [26].

Os trabalhos de Kazhikov [14], Kazhikov e Antonzev [2] utilizam métodos de energia e aproximações do tipo semi-Galerkin junto com o teorema de ponto fixo de Schauder e fornecem soluções locais e globais, fracas no tempo e no espaço, com densidade inicial satisfazendo $0 < \alpha \le \rho_0(x) \le \beta < +\infty$. O trabalho de Lions [19], é uma apresentação detalhada dos trabalhos anteriores. Simon [27], resolve o mesmo problema, mas com densidade inicial podendo se anular; os argumentos utilizados são similares aos de [14] usando, porém, um novo resultado de compacidade. Em [20], Lions considera um modelo penalizado similar ao (0.1), (0.2), com densidades podendo se anular; ele resolve este novo problema via métodos de compacidade compensada.

O trabalho de Padula [22], nos apresenta ainda soluções fracas, porém em domínios ilimitados, com densidade $0 \le \rho_0(x) \le \beta < +\infty$ e força externa nula. O trabalho de Kim [15], também lida com densidades iniciais que podem se anular. Ele obtem soluções um pouco mais regulares do que as obtidas anteriormente (supondo mais regularidade nos dados iniciais e na força externa), mas ainda fracas. Este artigo contém uma estimativa que será essencial para o nosso trabalho, a qual foi obtida utilizando argumentos devidos a H.B. da Veiga [4]. No trabalho [28], Simon faz um estudo bem detalhado das soluções fracas e analisa, em particular, em que sentidos tais soluções satisfazem as equações.

Todos estes artigos citados obtem soluções fracas tanto no espaço quanto no tempo.

A seguir descreveremos os trabalhos que nos apresentam soluções mais fortes. Ladyzhenskaya e Solonnikov [17], fazendo uso de linearização e teoremas de ponto fixo, obtem um resultado de existência e unicidade local no tempo; além disso obtem teoremas de existência global para o caso bidimensional, com condições de não crescimento na força externa, e, no caso tridimensional, quando velocidade inicial e a força externa forem suficientemente pequenas. Alguns lemas deste trabalho serão importantes para os nossos argumentos. Okamoto [21], obtem, via teoria de operadores de evolução, linearização e teoremas de ponto fixo, resultados de existência e unicidade local ou globais no tempo; ele trabalha com força externa nula. Seus teoremas de existência global, no caso bidimensional, é semelhante ao de [17]; no caso tridimensional ele exige tanto a pequenez na velocidade quanto a da densidade inicial. Para que seus argumentos continuem válidos para força externa não nula, deve ser imposto certo decaimento nela. Para finalizar, o artigo de Salvi [26], também apresenta resultados de existência e unicidade local. Maiores comentários sobre estes trabalhos poderão ser vistos nas introduções dos capitulos I e II.

A questão da regularidade da solução obtida nos teoremas de existência local não é discutido em nenhum dos artigos anteriores, salvo o artigo [26] que discute só a regularidade da solução no tempo inicial $t = 0$.

Convém fazer notar que os únicos artigos que apresentam um método "construtivo", baseados na chamada formulação semi-Galerkin espectral são [15] (no caso das soluções fracas) e [26] (no caso de soluções mais regulares).

Estudo de estimativas de erro local (análogas às de Rautmann [23]) são feitos por Salvi em [25]; porém, ele não obtem estimativas com taxas otimais. O caso de estimativas de erro uniformes no tempo (análogas à de Heywood [12]) também são discutidas em [25]; não obstante, seu argumento contém um erro essencial (mais comentários sobre isto são feitos nos capitulos IV e V).

O nosso trabalho aborda todas as questões mencionadas anteriormente. As técnicas por nós utilizadas serão "construtivas", uma vez que estaremos interessados na obtenção de estimativas de erro. Uma breve descrição dos capitulos é feita a seguir.

No primeiro capitulo fixaremos a nomenclatura e os espaços a serem utilizados; daremos uma formulação forte no tempo e fraca no espaço no sentido de $L^2(\Omega)$) do sistema (0.1), (0.2); apresentaremos um teorema de existência local. Ele será provado via as aproximações de semi-Galerkin, obtendo-se estimativas independentes de aproximação, passando logo por métodos de compacidade à solução do problema; obtem-se também unicidade e convergências, bastante melhores que a obtida no trabalho [26].

No capitulo II, a partir do teorema de existência local, deduziremos alguns teoremas de existência global; no caso bidimensional sem hipóteses suplementares e, no caso tridimensional impondo algumas hipóteses suplementares. Obtemos assim resultados análogos aos conhecidos para as equações de Navier-Stokes usuais. Em certo sentido os nossos resultados são melhores do que os citados anteriormente; uma comparação mais detalhada com tais resultados será feita na introdução do capítulo 2.

O terceiro capítulo será dedicado ao assunto da regularidade da solução e, pelo que sabemos, apresenta o único resultado desta natureza existente na literatura para fluidos não homogêneos incompressíveis.

No quarto capítulo estudaremos o erro local das aproximações, obtendo-se estimativas de erro com taxas otimais.

No último capítulo, discutiremos a questão da possibilidade de obtenção de estimativas de erro uniformes no tempo. Uma estimativa deste tipo pode ser obtida para soluções estáveis em um certo sentido (a ser precisada no capítulo V), e, como no caso local, obteremos uma estimativa com taxa otimal.

Finalmente, gostaríamos de fazer a seguinte observação: poderíamos tentar melhorar os resultados dos capítulos I, II e III no sentido de relaxar as hipóteses sobre o borde e a velocidade inicial; porém isto exigiria utilizar potências fracionárias de certos operadores e teoria do potencial, por simplicidade, preferimos não fazê-lo neste trabalho.

CAPÍTULO I

TEOREMA DE EXISTÊNCIA LOCAL, UNICIDADE E CONVERGÊNCIA DAS APROXIMAÇÕES

Nosso propósito neste capítulo é a apresentação de um teorema de existência local no tempo, via a técnica de aproximação Semi-Galerkin Espectral, a qual nos fornece soluções fortes no tempo e fracas no espaço (no sentido de $L^2(\Omega)$).

Provaremos também a unicidade local, assim como a convergência das aproximações em sentidos bastante satisfatórios.

Gostaríamos inicialmente de comentar o artigo de Salvi [26]. Neste artigo ele utiliza a mesma técnica de aproximação (Semi-Galerkin) por nós utilizada e, além disso, apresenta um teorema de existência local similar, porém mais fraco, do que o nosso. Várias das estimativas preliminares foram obtidas por ele de forma independente (e anteriormente).

Um reparo, porém, deve ser feito no seu enunciado do Teorema de existência local: ao acrescentar a força externa é necessário acrescentar a hipótese $f \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$, para que seu argumento continue válido.

Apesar desta coincidência parcial, queremos ressaltar que os nossos argumentos divergem do dele a partir de certo ponto e são mais adequados em vários sentidos: exploramos mais adequadamente o fato de que a base de funções utilizada é a base espectral associada ao operador de Stokes (fato que Salvi não explora). Dessa forma conseguimos mostrar, sob as mesmas hipóteses, uma regularidade maior da solução, conseguimos verificar os dados iniciais nas mesmas normas dos dados iniciais e, além disso, obtemos, a convergência das aproximações em sentidos, bastante mais fortes do que ele. Também, as nossas técnicas são adequadas à análise de estimativas de erro, como também para provar resultados de regularidade. Isto será feito em capitulos que se seguem. Por estas razões, também por clareza de exposição e por seu uso futuro apresentamos, a nossa demonstração de forma completa neste capitulo.

Recordamos em primeiro lugar alguns espaços funcionais clássicos que serão utilizados através deste trabalho. Os mesmos simbolos serão utilizados para denotar os espaços de campos vetoriais reais definidos sobre Ω. A norma em $L^2(\Omega)$ será denotada por $\|\|$, e as normas nos $L^p(\Omega)$, $\|\|_{L^p}$, quando não houver confusão, simplesmente denotaremos $L^p(\Omega)$, por L^p, para qualquer $p \in [1,\infty]$. O produto interno em L^2, se denotará por $(.,.)$.

Quando E é um espaço de Banach $L^p(0,T;\ E)$ denotará o espaço de funções g, fortemente mensuráveis sobre $[0,\ T]$ com valores em E tal que

$$\|g\|_{L^p(0,\ T;\ E)} \equiv \left(\int^T \|g(t)\|_E^p dt \right)^{1/2} < +\infty,\ 1 \le p < \infty$$

e

$$\|g\|_{L^\infty(0,\ T;\ E)} \equiv \operatorname*{ess\ sup}_{t \in [0,T]} \|g(t)\|_E < \infty,\ p = \infty\ ;$$

no caso que $E = L^p(\Omega)$, tem-se

$$L^p(0,T;\ L^p(\Omega)) = L^p([0,\ T] \times \Omega)$$

para $p \in [\ 1,\ \infty\ ]$.

$C^k([0,T]);\ E)$ é o espaço de funções as quais são k-vezes contiuamente diferenciáveis sobre $[0,T]$ com valores em E e quando $k = 0$, omitiremos o indice. A norma é definida de maneira óbvia. Se $E = \mathbb{R}$, denotaremos por $C^k([0,T])$.

$L^p_{Loc}(\Omega)$ denotará o espaço das funções $g \in L^p(D)$ para qualquer subconjunto compacto D de Ω, analogamente define-se $L^p_{Loc}(0, T; E)$.

$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ denotará o espaço das funções m - vezes diferenciáveis, com derivadas de ordem α, $0 < \alpha < 1$.

$W^{m,p}(\Omega)$ denotará o espaço de Sobolev usual, no caso $p = 2$ usaremos a notação standar: $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

$H^1_o(\Omega)$ é o subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ que tem o valor na fronteira igual a zero (no sentido do traço).

$C^\infty_{o,\sigma}(\Omega)$ denotará o espaço das funções $g \in C^\infty_o(\Omega)$ com divergente nulo, o fecho deste espaço com respeito a $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, serão denotados H e V respectivamente.

Pode-se provar que

$$V = \{v \in H^1_o(\Omega) \ / \ \operatorname{div} v = 0 \}.$$

Além disso pode-se mostrar que

$$L^2(\Omega) = H \oplus G(\Omega)$$

onde $G(\Omega) = H^1 = \{\phi \ / \ \phi = \nabla\rho$ para algum $p \in H^1(\Omega)$, $\nabla p \in L^2(\Omega)\}$.

Denotando por P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre H e $A = - P\Delta$ com $D\ (A) = H^2(\Omega) \cap V$(o chamado operador de Stokes), tem-se que a equação (0.1) , transforma-se em :

$$P(\rho(u_t + u\nabla u - f)) + A\ u = 0.$$

Agora multiplicando por $v \in H$ e integrando sobre Ω, obtém-se

$$(\rho u_t,\ v) + (\rho u\nabla u,\ v) + (Au,\ v) = (\rho f,\ v).$$

Assim o problema (0,1),(0.2) transforma-se em achar $u \in H$ e $\rho \in W^{1,\infty}(\Omega \times [0,\ T])$ soluções de

$$(\rho u_t,\ v) + (\rho(u\nabla)u,\ v) + (Au,\ v) = (\rho f,\ v)\ \forall v \in H$$

$$\frac{\partial\rho}{} + u\nabla\rho = 0$$

$$\partial t$$

$$u(x,0) = u_o(x) \qquad ; \ \rho(x,0) = \rho_o(x)$$

$$u|_{\Sigma} = 0 \qquad , \qquad \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[.$$

Observamos que esta formulação do problema é uma formulação fraca no espaço e forte no tempo.

Antes de apresentar a formulação de Semi-Galerkin do problema (0.1),(0.2), baseada na formulação anterior recordemos alguns fatos associados ao operador de Stokes A.

É conhecido que o operador de Stokes A: $H^2(\Omega) \cap V \to H$ define sobre $V \subseteq H$ um operador definido positivo simétrico que possui uma inversa compacta (Teman [29], Ladyzhenskaya [16], Rautmann [23]), logo ele possui uma sequência $\{\lambda_k\}$ de autovalores positivos $\lambda_k > 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots$, com $\lambda_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$ e as correspondentes autofunções $\{w^k(x)\}$ formam um sistema completo ortonormal em H . Além disso, as autofunções $\left\{ w^k(x) \ /(\lambda_k)^{1/2}\right\}$ e $\left\{ w^k(x) \ / \ \lambda_k \right\}$ formam um sistema completo ortonormal em V (dotado do produto interno $(\nabla u, \nabla v)$, $u, v \in V$) e $H^2(\Omega) \cap V$ (dotado do produto interno (Au, Av), $u, v \in H(\Omega)$), respectivamente.

Também temos que se $\partial\Omega$ é uma C^m subvariedade de $\mathbb{R}^n$($n = 2$ ou 3, $m \geq 2$), então as autofunções $w^k(x)$ pertencem a $H^m(\Omega)$.

Seja P_k o operador de projeção de $L^2(\Omega)$ nos k-ésimas autofunções $\{ w^1(x),\dots, w^k(x) \}$ de A. Então as soluções do problema (0.1) e (0.2) pode ser obtidas utilizando a aproximação de Semi-Galerkin, isto é, aproximação de Galerkin

$$U^k = \sum_{i=1}^{k} C_i^k(t) w^i(x)$$

Sobre a velocidade e uma aproximação infinita dimensional ρ^k sobre a densidade, solução de equação de continuidade

$$\rho_t^k + u^k \nabla\rho^k = 0$$

com
$$\rho^k(0) = \rho_o(x).$$

Para os k - coeficientes desconhecidos $C_i^k(t) = (u^k, w^i) = \int_\Omega u^k(t,x)w^i(x)\, d\, x$ temos o sistema de k equações diferenciais e k condições iniciais

$$P_k(\rho^k(u^k{}_t + u^k \nabla u - f) + A\, u^k = 0$$

$$P_k u(0) = P_k u =.$$

Assim o problema aproximado é

(1.1)
$$P_k(\rho^k(u_t^k + u^k\nabla u^k - f)) + A\, u^k = 0$$

(1.2)
$$\rho_t^k + u^k\nabla\rho^k = 0$$

(1.3)
$$P_k u(0) = P_k u_o \quad , \rho^k(0) = \rho_o(x).$$

As equações acima constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias para o qual vale o teorema de existência local e unicidade de soluções. Assim, para cada $k \in N$ existe $T_k > 0$ tal que

(u^k, ρ^k) é a única solução do sistema no intervalo $[0, T_k]$. Isto será detalhado a seguir, além disso, as estimativas a serem provadas nos lemas que se seguem, mostram que podemos tomar $T > 0$ tal que (u^k, ρ^k) é a única solução no intervalo $[0,T]$.

Teorema 1.1. Suponha que Ω é domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ com borda $\partial\Omega$ de classe C^3, $u_o \in V \cap H^2(\Omega)$, $\rho_o \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\alpha \le \rho_o(x) \le \beta$ com α e β constantes positivas, $0 < \tilde{T} < +\infty$ e $f \in L^2(0,\tilde{T};\ H^1(\Omega))$, $f_t \in L^2(0,\tilde{T};\ L^2(\Omega))$. Então existe $0 < T \le \tilde{T}$ tal que o problema possui uma única solução forte (ρ, u) satisfazendo

$$\rho \in W^{1,\infty}([0,T] \times \Omega),$$

$$u \in C([0,T];\ H^2(\Omega) \cap V) \cap L^2(0,T;\ H^3(\Omega))$$

$$\cap\, L^2([0,T];\ L^\infty(\Omega)) \cap L^\rho(0,T;\ H^{3-\epsilon}(\Omega))$$

$$\cap\, L^\infty_{Loc}(0,T;\ H^3(\Omega)),$$

$$u_t \in C([0,T];\ L^2(\Omega) \cap V) \cap L^2(0,T;\ H^{2-\epsilon}(\Omega))$$

$$\cap\, L^2_{Loc}(0,T;\ H^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;\ H^{1-\epsilon}(\Omega))$$

$$\cap\, L^\infty_{Loc}(0,T;\ H^1(\Omega))$$

$$u_{tt} \in L^2_{Loc}(0,T;\ L^2(\Omega) \cap V),$$

para o qual $\epsilon > 0$ e $1 < p < \infty$.

Além disso, as aproximações $(u^k,\ \rho^k)$ de Semi-Galerkin espectral convergem para a solução $(u,\ \rho)$ nos seguintes sentidos:

$$u^k \to u \text{ forte em } L^p(0,T;\ H^{3-\epsilon}(\Omega))$$

$u^k \to u$ fraco em $L^{\infty}_{Loc}(0,T;\ H^3(\Omega))$

$u^k_t \to u_t$ fraco em $L^2(0,T;\ H^{2-\epsilon}(\Omega))$

$u^k_t \to u_t$ fraco em $L^{\infty}_{Loc}(0,T;\ H^1(\Omega))$

$u^k_t \to u_t$ fraco em $L^p(0,T;\ H^{1-\epsilon}(\Omega))$

$u^k_t \to u_t$ fraco em $L^2_{Loc}(0,T;\ H^2(\Omega))$

$u^k_{tt} \to u_{tt}$ fraco em $L^2_{Loc}(0,T;\ L^2(\Omega))$

$\rho^k \to \rho$ em $L^p(0,T;\ C^{0,\gamma}(\Omega))$ $\qquad 0 \le \gamma < 1$

$\nabla\rho^k \to \nabla\rho$ fraco - * em $L^{\infty}(\Omega \times [0,T])$

$\rho^k_t \to \rho_t$ fraco - * $L^{\infty}(\Omega \times [0,T])$

A demosntração será feita em várias etapas.

Lema 1.2. Sob as hipóteses feitas, existe um $T_1 > 0$, $T_1 \le \tilde{T}$, tal que as aproximações ρ^k, u^k satisfazem em $[0,T_1]$:

(1.4) $\alpha \le \rho^k \le \beta$;

(1.5) $\|(\rho^k)^{1/2}u^k\|^2(t) + \int_0^t \|\nabla u^k\|^2 d\tau \le C_0$;

(1.6) $\|\nabla u^k(t)\|^2 + c_1 \int_0^t \|\rho^k)^{1/2}u^k_t\|^2 d\tau + C_2 \int_0^t \|P\Delta u^k\|^2 d\tau \le \tilde{F}(t)$

(1.7) $\|u_t^k\|^2 + \int_o^t \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau \le G(t)$;

(1.8) $\|P\Delta u^k(t)\|^2 \le H(t)$

(1.9) $\|u^k(t)\|_\infty \le K(t)$.

onde as funções $\tilde{F}(t)$, $G(t)$ são funções contínuamente diferenciáveis com respeito a $t \in [0,T_1]$, $H(t)$ e $K(t)$ são funções contínuamente diferenciáveis com respeito a $t \in [0,T_1]$ e contínuas em $t = 0$. C_1, C_2 são constantes positivas independentes dos dados iniciais,

$$C_o = C_\beta \int_o^{\tilde{T}} \|f\|^2 d\tau + \|\rho_o u_o\|^2$$

Prova. (i) Podemos expressar a solução de (1.2) (supondo u^k conhecida) como segue: (Métodos das características), consideramos as trajetórias da partícula

(1.10) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\, u^k(t,y) \\ y\ (0) = x \end{cases}$$

Se $y_x^k(t)$ denota a solução de (1.10), então

(1.11) $$\rho^k(t,x) = \rho_o(y_x^k(t))$$

usando (1.11) em (1.1) nos dá um sistema de equações diferenciais não lineares que possui existência local; é dizer existe $T_1 > 0$ tal que o problema (1.1) possui solução única. De (1.11) é obvia a estimativa (1.4).

(ii) Se multiplicamos (1.1) por $v \in V_k = < w^1, \dots, w^k >$, temos

$$(1.12) \qquad (\rho^k u_t^k, v) + (\rho^k u^k \nabla u^k, v) + (Au^k, v) = (\rho^k f, v).$$

Colocando $v = u^k$ na expresão acima, multiplicando (1.2) por $|u^k|^2$ e somando as expresões obtidas, chegamos a:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho^k \frac{(u^k)^2}{2} dx + \int_\Omega \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^k u_j^k \frac{(u^k)^2}{2})dx + \int_\Omega \sum_j \left[\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right]^2 dx = \int_\Omega \rho^k f u^k,$$

é dizer,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho^k \frac{(u^k)^2}{2} dx + \int_\Omega \sum_j \left[\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right]^2 dx = \int_\Omega \rho^k f u^k,$$

tendo em conta que $\operatorname{div} u^k = 0$. Assim

$$\int_\Omega \rho^k \frac{(u^k)^2}{2} dx + \int_0^t \int_\Omega \sum_j \left[\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right]^2 dxds = \int_0^t \int_\Omega \rho^k f u^k dxds + \int_\Omega \rho_0 \frac{u_0^2}{2} dx.$$

Usando esta identidade e (1.4) obtemos a existência global (em t) e

$$u^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H).$$

(iii) Vejamos a seguir a estimativa (1.6). Fazendo uso da desigualdade (2.24) do Kim [15], temos

$$(1.13) \qquad \frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 + C_1\|(\rho^k)^{1/2} u_t^k\|^2 + C_2\|p\Delta u^k\|^2$$

$$\leq C_3\|f\|^2 + C_4\|\nabla u^k\|^{10}$$

onde C_3, C_4 são constantes positivas que só dependem de Ω e β, C_1, C_2

são constantes positivas independentes dos dados iniciais. Desta desigualdade se deduz em particular que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 \le C_4\|\nabla u^k\|^{10} + C_3\|f\|^2. \tag{1.14}$$

Claramente se tem que

$$\|\nabla u^k\|(0) \le \|\nabla u_o\| \tag{1.15}$$

pois $\{w^n\}$ são ortogonais em V e $u^k(0) = \sum_{n=1}^{k} C_{nk}(0)w^n$, onde $C_{nk}(0) = (u_o, w^n) = \frac{(\nabla w^n, \nabla u_o)}{\|\nabla w^n\|^2}$.

Agora ocupando o lema 3 de Heywood [10] com $\phi(t) = \|\nabla u^k\|$, $\phi(0) = \|\nabla u_o\|^2$, $\Psi(t) = 0$, $g(s) = s^5$, $\mathfrak{f}(s) = C_3\|f\|^2$, obtemos

$$\|\nabla u^k\|^2(t) \le F(t, \|\nabla u_o\|^2)$$

para $t \in [0, T(\|\nabla u_o\|^2))$, onde $F(., \|\nabla u_o\|^2)$ é a solução do problema de valores iniciais

$$F'(t) = g(F(t)) + \mathfrak{f}(t)$$

$$F(0) = \phi_o,$$

e $[0, T(\|\nabla u_o\|^2))$ é o maior intervalo no qual a solução pode-ser continuada. Para simplificar a notação de agora em diante colocamos

$$T_1 = T(\|\nabla u_o\|^2).$$

Voltando a (1.13), obtém-se:

$$\|\nabla u^k\|^2(t) + C_1\int^t \|(\rho^k)^{1/2}u_t^k\|^2 d\tau + C_2\int^t \|P\Delta u^k\|^2 d\tau$$

$$\leq \|\nabla u^k\|^2(0) + \int_o^t F(\tau,\ \|{}^2 u_o\|^2)^5 d\tau$$

$$\leq \|\nabla u_o\|^2(0) + \int_o^t F(\tau,\ \|{}^2 u_o\|^2)^5 d\tau$$

em vista de (1.15), a estimativa acima valendo para qualquer $t \in [0,\ T_1]$, assim obtem-se (1.6) com

$$\tilde{F}(t) = \|\nabla u_o\|^2 + \int_o^t F(\tau\ , \|\Delta u_o\|^2)^5 d\tau .$$

iv) Derivando a formulação fraca da equação (1.1) com respeito a t obtém-se:

$$((\rho^k u_t^k)_t,\ v) + ((\rho^k u^k \nabla u^k)_t,\ v) - (\Delta u_t^k,\ v) = ((\rho^k f)_t,\ v)$$

$\forall\ v \in \langle\ w^1, \ldots,\ w^k\ \rangle$.

Colocando $v = u_t^k$, temos

$$\|\nabla u_t^k\|^2 + ((\rho^k u_t^k)_t,\ u_t^k) = ((\rho^k f)_t,\ u_t^k) - ((\rho^k u^k \nabla u^k)_t,\ u_t^k).$$

Observe-se que

$$|((\rho^k f)_t,\ u_t^k)| \leq |(\rho_t^k f,\ u_t^k)| + |(\rho^k f_t,\ u_t^k)|.$$

Por outro lado,

$$|(\rho_t^k f,\ u_t^k)| = |-\int_\Omega \operatorname{div}(\rho^k u^k) f u_t^k|$$

$$\leq |\int_\Omega \rho^k u^k \nabla f u_t^k| + |\int_\Omega \rho^k u^k f \nabla u_t^k|$$

$$\leq \|\rho^k\|_{L^\infty}\|u^k\|_{L^4}\|\nabla f\|\|u_t^k\|_{L^4} + \|\rho^k\|_{L^\infty}\|u^k\|_{L^4}\|f\|_{L^4}\|\nabla u_t^k\|$$

$$\leq C_\epsilon (2C\beta)^2\|\nabla u^k\|^2\|\nabla f\|^2 + \epsilon\,\|\nabla u_t^k\|^2,$$

onde C só depende de Ω . Assim

$$|((\rho^k f)_t,\ u_t^k)| \leq \tilde{C}_1\|\nabla u^k\|^2\|\nabla f\|^2 + \tilde{C}_2\|f_t\|^2 + \epsilon\|\nabla u_t^k\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t^k\|^2$$

onde $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(C,\ \beta,\ C_\epsilon)$ e $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(\beta)$.

Também

$$((\rho^k u_t^k)_t,\ u_t^k) = \int_\Omega (\rho^k u_t^k)_t\ u_t^k = \int_\Omega \rho_t^k u_t^k u_t^k + \int_\Omega \rho^k u_{tt}^k u_t^k$$

$$= -\int_\Omega \operatorname{div}\ (\rho^k u^k) u_t^k u_t^k + \int_\Omega \rho^k\ \frac{1}{2}\ \frac{\partial |u_t^k|^2}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^k u^k \nabla\ (u_t^k u_t^k) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ \int_\Omega |(\rho^k)^{1/2} u_t^k|^2.$$

e

$$\frac{1}{2}\int \rho^k u^k \nabla (u_t^k u_t^k) = \int \rho^k u^k \nabla u_t^k u_t^k$$

$\Omega \qquad\qquad\qquad \Omega$

$$\le \|\rho^k\|_{L^\infty}\|u^k\|_{L^4}\|u_t^k\|_{L^4}\|\nabla u_t^k\|$$

$$\le C\|\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla u^k\|\|\nabla u_t^k\| \left\{ \|u_t^k\|^{1/4}\|\nabla u_t^k\|^{3/4} \right\}$$

$$\le C\beta\|\nabla u^k\|\|u_t^k\|^{1/4}\|\nabla u_t^k\|^{7/4}$$

$$\le C_\epsilon(C\beta)^8\|\nabla u^k\|^8\|u_t^k\|^2 + \epsilon\,\|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\le \tilde{C}_3\|\nabla u^k\|^8\|u_t^k\|^2 + \epsilon\,\|\nabla u_t^k\|^2$$

onde $\qquad \tilde{C}_3 = \tilde{C}_3(\beta,\ C(\Omega),\ C_\epsilon) > 0.$

Também temos,

$$(\rho^k u^k \nabla u^k)_t = \rho_t^k u^k \nabla u^k + \rho^k u_t^k \nabla u^k + \rho^k u^k \nabla u_t^k$$

e

$$|(\rho_t^k u^k \nabla u^k,\ u_t^k)| = \left| -\int_\Omega \operatorname{div}(\rho^k u^k) u^k \nabla u^k u_t^k \right|$$

$$= \left| \int_\Omega \rho^k u^k \nabla(u^k \nabla u^k u_t^k) \right|$$

$$\le \left| \int_\Omega \rho^k u^k \nabla u^k u_t^k \right| + \left| \int_\Omega \rho^k u^k u^k \nabla^2 u^k u_t^k \right| + \left| \int_\Omega \rho^k u^k u^k \nabla u^k \nabla u_t^k \right|$$

$$\le \tilde{C}_4 \|\nabla u^k\|^4 \|P\Delta u^k\|^2 + 3\,\epsilon\, \|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\left| (\rho^k u_t^k \nabla u^k,\ u_t^k) \right| \le \|\rho^k\|_\infty \|\nabla u^k\| \|u_t^k\|_4^2$$

$$\le C\beta \|\nabla u^k\| \|u_t^k\|^{1/2} \|\nabla u_t^k\|^{3/2}$$

$$\le (C\beta)^4 \|\nabla u^k\|^4 \|u_t^k\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\left| (\rho^k u^k \nabla u_t^k,\ u_t^k) \right| \le \|\rho^k\|_{L^\infty} \|u^k\|_{L^4} \|\nabla u_t^k\| \|u_t^k\|_{L^4}$$

$$\le C\beta \|\nabla u^k\| \|\nabla u_t^k\| \|u_t^k\|^{1/4} \|\nabla u_t^k\|^{3/4}$$

$$\le C_\epsilon (C\beta)^8 \|\nabla u^k\|^8 \|u_t^k\|^2 + \epsilon\, \|\nabla u_t^k\|^2$$

onde $\tilde{C}_5$, $\tilde{C}_4$ só dependem de Ω e β.

Logo escolhendo $\epsilon < 1/12$, obtem-se:

$$\frac{d}{dt} \|(\rho^k)^{1/2} u_t^k\|^2 + C_1 \|\nabla u_t^k\|^2 \le \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 \|u_t^k\|^2 + \tilde{C}_4 \|P\Delta u^k\|^2$$

onde $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$, $\tilde{C}_4$ são constantes positivas que dependem só de Ω, β, $\|\nabla f_t\|$ $\|f_t\|$ e $\sup_{0 \le t \le T_1} \|\nabla u^k\|$, e $\tilde{C}_1$ é uma constante que não depende dos dados iniciais. Agora integrando a desigualdade anterior de 0 a t obtemos:

$$(1.16)\quad \|(\rho^k)^{1/2}u_t^k\|^2 + \tilde{C}_1\int_0^t \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau$$

$$\le \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3\int_0^t \|u_t^k\|^2 d\tau + \tilde{C}_4\int_0^t \|P\Delta u^k\|^2 d\tau + \|(\rho^k)^{1/2}u_t^k\|^2(0)$$

$$\le \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3\tilde{F}(t) + \tilde{C}_4\tilde{F}(t) + \beta\|u_t^k(0)\|^2.$$

Por outro lado,

$$\|(\rho^k)^{1/2}u_t^k\|^2(0) \le \left\{ \|(\rho^k)^{1/2}u^k\nabla u^k\|(0) + \|P\Delta u^k\|(0) + \|\rho^k f\|(0)\right\} \|u_t^k\|(0).$$

Consequentemente,

$$(1.17)\quad \|u_t^k\|(0) \le \frac{1}{\alpha}\ \{C\beta\|P\Delta u^k\|(0)\|\nabla u^k\|(0) + \|P\Delta u^k\|(0) + \beta\|f(0)\|\}$$

$$\le \frac{1}{\alpha}\ \{C\beta\|\nabla u_o\|\| + \|P\Delta u^k\|(0) + \|P\Delta u^k\|(0) + \beta\|f\|(0)\|\}$$

Logo, para ter uma estimativa uniforme em k do valor inicial $\|u_t^k\|(0)$, precissamos em vista da desigualdade acima, uma estimativa uniforme em k para $\|P\Delta u^k\|(0)$. Recorde-se que $u_o \in H^2(\Omega) \cap V$, e que as autofunções $(w^n(x)$ formam um sistema ortogonal neste produto interno, pelo qual fazendo uso da desigualdade de Bessel conclui-se que

$$(1.18)\qquad \|P\Delta u^k\|(0) \le \|P\Delta u_o\|$$

já que $u^k(0) = \sum_{n=1}^{k} C_n^k(0) w^n$, onde

$$C_n^k(0) = (u_o,\ w^n) = \frac{(P\Delta u_o, P\Delta w^n)}{\|P\Delta w^n\|^2}$$

Logo voltando a (1.17), tem-se, fazendo uso de (1.18) que

$$\|u_t^k\|(0) \le \frac{1}{\alpha} \left\{ \beta C \|\nabla u_o\| \|P\Delta u_o\| + \|P\Delta u_o + \beta \|f\|(0) \right\}$$

$$\equiv a$$

Consequentemente, voltando a (1.16), vem que

$$\|(\rho^k)^{1/2} u_t^k\|^2 + C_1 \int_o^t \|\nabla u_t^k\|^2 dt \le G(t)$$

onde $G(t) = \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3 \tilde{F}(t) + \tilde{C}_4 \tilde{F}(t) + \beta\ a$. Claramente $G(t)$ satisfaz o afirmado no lema.

v)Agora vejamos (1.7). Colocando $v = -\ P\Delta u^k$ na formulação fraca de (1.1) obtém-se:

$$\|P\Delta u^k\|^2 \le \left\{ \|\rho^k u_t^k\| + \|\rho^k u^k \nabla u^k\| + \|\rho^k f\| \right\} \|P\Delta u^k\|,$$

de onde

$$\|P\Delta u^k\| \le \|\rho^k\|_{L^\infty} \|u_t^k\| + \|\rho^k\|_{L^\infty} \|u^k \nabla u^k\| + \|\rho^k\|_{L^\infty} \|f\|$$

Por outro lado,

$$\beta\|u^k\nabla u^k\| \leq \beta\|u^k\|_{L^6}\|\nabla u^k\|_{L^3}$$

$$\leq \beta C\|\nabla u^k\| \left\{ \|P\Delta u^k\|^{1/2}\|\nabla u^k\|^{1/2} + \|\nabla u^k\| \right\}$$

$$\leq C\beta\|\nabla u^k\|^{3/2}\|P\Delta u^k\|^{3/2} + C\beta\|\nabla u^k\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \|P\Delta u^k\| + \frac{(C\ \beta)^2}{2} \|\nabla u^k\| + C\beta\|\nabla u^k\|^2$$

Logo

$$(1.17) \quad \|P\Delta u^k\| \leq 2\ \beta\|\nabla u^k\|^2 + (C\beta)^2\|\nabla u^k\|^3 + 2\ \beta\|f\| + 2\ \beta\|u_t^k\|$$

$$\leq 2\ \beta\tilde{F}(t) + (C\beta)^2\tilde{F}(t)^{3/2} + 2\ \beta\|f\| + 2\ \beta G(t)^{1/2}$$

$$\equiv H(t).$$

pelas estimativas (1.4), (1.6), (1.7), $C > 0$ constante que depende só de Ω.
(vi) Por uma desigualdade devida inicialmente a Niremberg [Veja [1]], temos

$$\|u^k\|_{L^\infty} \leq C(\|u^k\|_{L^6}^{1/2}\|\nabla u^k\|_{L^6} + \|u^k\|_{L^6})$$

$$\leq C(\|\nabla u^k\|^{1/2}\|P\Delta u^k\|^{1/2} + \|\nabla u^k\|)$$

$$\leq C\ \tilde{F}(t)^{1/4}H(t)^{1/4} + C\ \tilde{F}(t)^{1/2}$$

$\equiv K(t)$

em virtude da desigualdade de Sobolev e as estimativas (1.6),(1.8). As afirmações feitas sobre $\tilde{F}(t)$, $G(t)$, $H(t)$ e $K(t)$ são claramente satisfeitas. ∎

Lema 1.3. Sob as hipóteses feitas as aproximações u^k, ρ^k satisfazem em $[0,T')$, $T' \le T_1$, as seguintes estimativas

(1.19) $$\|\nabla\rho^k\|_{L^r} \le U(t) \qquad (2 \le r \le 6)$$

(1.20) $$\int_0^t \|P\Delta\nabla u^k\| d\tau \le V(t)$$

(1.21) $$\int_0^t \|\nabla u^k\|_{L^\infty} d\tau \le \tilde{V}(t)$$

para todo $t \in [0,T']$, onde as funções $U(t)$, $V(t)$, $\tilde{V}(t)$ são funções contínuas em $[0,T']$ e diferenciáveis em $(0,T')$.

Prova. Derivando a equação (1.2) com respeito a x_i, $i = 1, 2, 3$, obtém-se:

(1.22) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\rho^k}{\partial x_i}\right] = -\sum_{j=1}^{3} u_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\rho^k}{\partial x_i}\right) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\frac{\partial\rho^k}{\partial x_j}$$

para cada $i=1,2,3$. Agora considerando $r > 1$, e multiplicando (1.22) por

$\left(\frac{\partial\rho^k}{\partial x_i}\right)^{r-1}$ e integrando sobre Ω ,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r-1} = -\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} u_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r-1}$$

$$-\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\frac{\partial \rho^k}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r-1}$$

ou equivalente

$$\frac{1}{r}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r} = -\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} u_j^k \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r}$$

$$-\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_j}\right]\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r-1}$$

para cada $i = 1,2,3$, ou equivalente

$$\frac{1}{r}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r} = \frac{1}{r}\int_\Omega \operatorname{div} u^k \left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r} - \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\frac{\partial \rho^k}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r-1}$$

$$= -\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j}\frac{\partial \rho^k}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \rho^k}{\partial x_i}\right]^{r-1}$$

Somando em $i = 1, 2, 3$, obtém-se:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\|\nabla\rho^k\|_{L^r}^{r} \le C\|\nabla u^k\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^k\|_{L^r}^{r}$$

$$\leq C\|P\Delta\nabla u^k\|\|\nabla\rho^k\|^r_{L^r},$$

com notação óbvia, ou equivalente

$$(1.23)\quad \frac{d}{dt}\|\nabla\rho^k\|_{L^r} \leq \tilde{C}\|P\Delta\nabla u^k\|\|\nabla\rho^k\|_{L^r}$$

Por outro lado, observe-se que

$$P_k(\rho^k u^k_t + \rho^k u^k \nabla u^k - \Delta u^k + \rho^k f) = 0$$

é equivalente à existência de $\phi^k \in C^\infty(0, T; V)$, $p^k \in C^\infty(0,T; H^2(\Omega))$ com:

$$\phi^k(t) \in \langle w^1, \dots, w^k \rangle^\perp,\ \nabla p^k \in V^\perp$$

para cada $t \in [0,T)$, onde $A^\perp$ indica o ortogonal de A em $L^2(\Omega)$; tais que

$$\rho^k u^k_t + \rho^k u^k \nabla u^k - \Delta u^k + \phi^k + \nabla p^k f.$$

Agora derivando esta expressão com respeito a x_i, obtemos:

$$\frac{\partial\rho^k}{\partial x_i} u^k_t + \rho^k \frac{\partial u^k_t}{\partial x_i} + \frac{\partial\rho^k}{\partial x_i} u^k \nabla u^k + \rho^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \nabla u^k$$

$$+ \rho^k u^k \nabla \frac{\partial u^k}{\partial x_i} - \Delta \frac{\partial u^k}{\partial x_i} + \frac{\partial\phi^k}{\partial x_i} + \nabla \frac{\partial\rho^k}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial\rho^k}{\partial x_i} f + \rho^k \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

k

Fazendo o produto da equação acima com $- P\Delta \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2, 3$, e somando em i vem que

$$(1.24)\quad \|P\Delta\nabla u^k\|^2 = -(\nabla\rho^k f,\ P\Delta\nabla u^k) - (\rho^k\nabla f,\ P\Delta\nabla u^k) + (\rho^k\nabla u^k\nabla u^k,\ P\Delta\nabla u^k)$$

$$+ (\rho^k u^k\nabla^2 u^k,\ P\Delta\nabla u^k) + (\nabla\rho^k u^k\nabla u^k,\ P\Delta\nabla u^k)$$

$$+ (\rho^k\nabla u_t^k,\ P\Delta\nabla u^k) + (\nabla\rho^k u_t^k,\ P\Delta\nabla u^k) + (\nabla\phi^k,\ P\Delta\nabla u^k)$$

$$+ (\nabla(\nabla\rho^k),\ P\Delta\nabla u^k) + (\nabla(\nabla\rho^k),\ P\Delta\nabla u^k)$$

$$\le \Big\{ \|\nabla\rho^k\|_{L^r}\|u_t^k\|_{L^s} + \|\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla u_t^k\| + \|\nabla\rho^k\|_{L^r}\|u^k\nabla u^k\|_{L^s}$$

$$+ \|\rho^k\|_{L^\infty} u^k\nabla^2 u^k\| + \|\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla u^k\nabla u^k\| + \|\nabla\rho^k\|_{L^r}\|f\|_{L^s}$$

$$+ \|\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla f\| \Big\} \|P\Delta\nabla u^k\|$$

onde $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$ $(3 \le r \le 6)$, já que

$$(\nabla\phi^k,\ -P\Delta\nabla u^k) = \int_{\partial\Omega} \phi^k(P\Delta\nabla u^k) + \int \phi^k \operatorname{div} P\Delta\nabla u^k = 0$$

$$(\nabla(\nabla p^k),\ P\Delta\nabla u^k) = (P(\nabla(\nabla p^k)),\ \Delta\nabla u^k) = (0,\ \Delta\nabla u^k) = 0.$$

Consequentemente:

$$(1.25)\qquad \|P\Delta\nabla u^k\| \le C\|\nabla\rho^k\|_{L^r} \Big\{ \|\nabla u_t^k\| + K(t)\sqrt{H(t)} + \|\nabla f\| \Big\}$$

$$+ \beta \left\{ \|\nabla u_t^k\| + K(t) \quad \sqrt{H(t)} + \|\nabla f\| \right\}.$$

tendo em conta o lema 1.2, C só depende de Ω .

Agora, substituindo esta última expressão em (1.23), temos

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \rho^k\|_{L^r} \leq \tilde{C}\|\nabla \rho^k\|_{L^r}^2 \left\{ \|\nabla u_t^k\| + K(t) \sqrt{H(t)} + \|\nabla f\| \right\}$$

$$+ \tilde{C}\beta\|\nabla \rho^k\|_{L^r} \left\{ \|\nabla u_t^k\| + K(t) \sqrt{H(t)} + H(t) + \|\nabla f\| \right\}.$$

onde $\tilde{C}$ só depende de Ω .

Logo temos:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \rho^k\|_{L^r} \leq \left\{ \|\nabla \rho^k\|_{L^r}^2 + \|\nabla \rho^k\|_{L^r} \right\} \phi(t)$$

onde $\phi (t) = \max \left\{ \tilde{C} \left\{ \|\nabla u_t^k\| + \tilde{K}(t) \sqrt{H(t)} + \|\nabla f\| \right\}, C\tilde{\beta} \left\{ \|\nabla u_t^k\| \right.\right.$

$$\left.\left. + K(t) \sqrt{H(t)} + H(t) + \|\nabla f\| \right\}\right\}$$

Colocando $Z(t) = \|\nabla \rho^k\|_{L^r}(t)$,a expressão anterior transforma-se em:

$$\frac{dZ(t)}{dt} \leq \{Z(t)^2 + Z(t)\} \phi(t)$$

$$\leq 2 Z(t)^2\phi(t).$$

Se consideramos a equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2\, y(t)\phi(t)^2$$

$$y(0) = \|\nabla\rho_o\|_{L^r},$$

vemos que $Z(t) \le y(t)$ em $(0, T')$, onde T' é o maior intervalo de existência de $y(t)$.

Observe-se que a equação (1.26) pode-se resolver em forma exata, sua solução é:

$$y(t) = \frac{y(0)}{1-2y(0)\int_o^t \phi(\tau)d\tau} = \frac{\|\nabla\rho_o\|_{L^r}}{1-2\|\ \nabla\rho_o\|_{L^r}\ \int_o^t \phi(\tau)d\tau}.$$

Também notemos que $0 < T' \le T$. Tomando $U(t) = y(t)$ obtém-se (1.19). Para o caso $2 \le r \le 3$, basta observar que sendo Ω limitado tem-se $L^3(\Omega) \subseteq L^r(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ com inclusões contínuas.

Voltando a (1.25), temos

$$\|P\Delta\nabla u^k\| \le CU(t)\left\{\|\nabla u_t^k\| + K(t)\ \sqrt{H(t)} + \|\nabla f\|\right\}$$

$$+ \beta\ \left\{\|\nabla u_t^k\| + K(t)\sqrt{H(t)} + H(t) + \|\nabla f\|\right\}.$$

Assim, pata $t \le T'$,

$$\int_o^t\|P\Delta\nabla u^k\|d\tau \le C\int_o^t U(\tau)\left\{\|\nabla u_t^k\| + K(\tau)\sqrt{H(\tau)} + \|\nabla f\|\right\}d\tau$$

$$+ \beta\left\{\int_o^t\|\nabla u_t^k\|d\tau + \int_o^t(K(\tau)\sqrt{H(\tau)} + H(\tau) + \|\nabla f\|)d\tau\right\}$$

$$\le C\left[\int^t U(\tau)^2 d\tau\right]^{1/2}\left[\int^t\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau\right]^{1/2} + C\int_o^t\left\{K(\tau)\sqrt{H(\tau)} + \|\nabla f\|\right\}d\tau$$

$$+ \beta\left[\int_0^t \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau\right]^{1/2} t^{1/2} + \int_0^t (K(\tau)\sqrt{H(\tau)} + H(\tau) + \|\nabla f\|) d\tau$$

$$\leq C\left[\int_0^t U(\tau)^2 d\tau\right]^{1/2} \sqrt{G(t)} + C\int_0^t \left[K(\tau)\sqrt{H(\tau)} + \|\nabla f\|\right] d\tau$$

$$+ \beta\sqrt{G(t)}\, t^{1/2} + \int_0^t \left[K(\tau)\sqrt{H(\tau)} + H(\tau) + \|\nabla f\|\right] d\tau$$

$$\equiv V(t).$$

Disto conclui-se que

$$\int_0^t \|\nabla u^k\|_{L^\infty} d\tau \leq C \int_0^t \|P\Delta\nabla u^k\| d\tau$$

$$\leq CV(t)$$

$$= \tilde{V}(t),$$

para todo $t \in [0, T')$. O que completa a prova do lema. ∎

Observação. 1.4. Da desigualdade (1.25), pode-se concluir que:

$$\|P\Delta\nabla u^k\|^2 \leq 3CU(t)^2 \left\{\|\nabla u_t^k\|^2 + K(t)^2 H(t) + \|\nabla f\|^2\right\}$$

$$+ 4\beta^2 \left\{\|\nabla u_t^k\|^2 + K(t)^2 H(t) + H(t)^2 + \|\nabla f\|^2\right\}.$$

Assim para $t \leq T'$;

$$\int_0^t \|P\Delta\nabla u^k\|^2 d\tau \leq 3C\int_0^t U(\tau)^2 \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau + 3C\int_0^t U(\tau)^2 (K(\tau)^2 H(\tau) + \|\nabla f\|^2) d\tau$$

$$+ 4\beta^2\int_o^t \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau + 4\beta^2\int_o^t (K(\tau)^2 H(\tau) + H(\tau)^2 + \|\nabla f\|^2)d\tau$$

$$\le (3C \sup_{0 \le \tau \le T'} U(\tau)^2 + 4\beta^2)G(t)$$

$$+ (3C\int_o^t U(\tau)^2(K(\tau)^2 H(\tau) + \|\nabla f\|^2)d\tau$$

$$+ 4\beta^2\int_o^t U(\tau)^2 K(\tau)^2 H(\tau) + \|\nabla f\|^2)d\tau$$

$$= V_1(t),$$

para todo $t \in [0, T')$. Consequentemente

$$\int_o^t \|\nabla u^k\|^2_{L^\infty} d\tau \le CV_1(t) = \tilde{V}_1(t)$$

para todo $t \in (0,T')$. Assim se $t_2 > t_1$, obtém-se:

$$\int_o^{t_2} \|\nabla u^k\|_{L^\infty} d\tau - \int_o^{t_1} \|\nabla u^k\|_{L^\infty} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u^k\|_{L^\infty} d\tau$$

$$\le (t_2 - t_1)^{1/2}\left(\int_o^t \|\nabla u^k\|^2_{L^\infty} d\tau\right)^{1/2}$$

$$\le (t_2 - t_1)^{1/2} \sqrt{\tilde{V}_1(t)}$$

$$\le K(t_2 - t_1)^{1/2}$$

onde K =

onde $K = \sup_{0 \le \tau \le T^1} \tilde{V}_1(t)$ ■

De agora em diante consideraremos $0 < T \le T' \le T_1$

Lema.1.5. Sob as hipóteses feitas, as aproximações ρ^k satisfazem:

$$(1.27) \quad \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} \le C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} \exp\left\{\int_o^t \|\nabla u^k(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right\}$$

$$\le C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} h(t)$$

$$(1.28) \quad \|\rho_t^k\|_{L^\infty} \le C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}\|u^k\|_{L^\infty} \exp\left\{\int_o^t \|\nabla u^k(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right\}$$

$$\le C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} j(t)$$

onde C só depende de Ω e

$h(t) = \exp \tilde{V}(t)$

$j(t) = K(t) \exp \tilde{V}(t)$

onde $\tilde{V}(t)$ e $K(t)$ são as mesmas funções dos lemas 1.3 e 1.2 respectivamente.

Prova. As estimativas (1.27) e (1.28) são feitas do mesmo modo que em Ladyzhenskaya e Solonnikov [17, Lema 1.3], com as modificações correspendentes. ■

A seguinte observação será necessária nas próximas estimativas:

Observação 1.6. Suponha que $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$ e

$$\int_0^t f(s)ds = g(t)$$

onde $g(t)$ é finita. Então existe uma sequência $\epsilon_n \to a^+$ tal que $\epsilon_n f(\epsilon_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, suponha o contrário, é dizer que exista $\delta > 0$ e $C > 0$ tal que para todo $\zeta \in [a,\delta]$: $\zeta f(\zeta) \geq C$. Então

$$+\infty = c \log n\, (\zeta - a)\Big/_{\zeta=a}^{\zeta=a+\zeta} =$$

$$\int_a^{a+\delta} \frac{c}{\zeta - a} \leq d\tau \int_a^{a+\delta} f(s)ds \leq g(\delta) < +\infty, \text{ o que é absurdo.} \quad \blacksquare$$

Lema 1.7. Sob as hipóteses feitas, as aproximações u^k satisfazem:

$$\int_0^t \sigma(\tau) \| u_{tt}^k \|^2 d\tau + \sigma(t) \| \nabla u_t^k \|^2 \leq N(t) \tag{1.29}$$

$$\sigma(t) \| P\Delta\nabla u^k \|^2(t) \leq \tilde{N}(t). \tag{1.30}$$

onde $\sigma(t) = \min\{t,1\}\, e^{\gamma t}$, sendo $\gamma > 0$, $N(t)$ e $\tilde{N}(t)$ funções contínuas em $[0,T]$ e diferenciáveis quase sempre em $[0,T]$.

Prova. Derivando a equação (1.1) com respeito t e colocando $v = u_{tt}^k$, obtém-se:

$$\| (\rho^k)^{1/2} u_{tt}^k \|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u_t^k \|^2$$

$$= (\rho_t^k f + \rho^k f_t - \rho_t^k u^k \nabla u^k - \rho^k u_t^k \nabla u^k - \rho^k u^k \nabla u_t^k - \rho_t^k u_t^k,\ u_{tt}^k)$$

$$\le C_3 \Big\{ \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 \|f\|^2 + \|\rho^k\|_{L^\infty}^2 \|f_t\|^2 + \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 \|u^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u^k\|^2$$

$$+ \|\rho^k\|^2 \|u_t^k\|_{L^\infty}^2 3 \|\nabla u^k\|_{L^6} + \|\rho^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u_t^k\|^2 + \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 \|u_t^k\|^2 \Big\} + 6\,\epsilon\, \|u_{tt}^k\|^2$$

Com o qual

$$C_1 \|u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\le C\Big\{ \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 f\|^2 + \|\rho^k\|_{L^\infty} \|f_t\|^2 + \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 \|P\Delta u^k\|^2 \|\nabla u^k\|^2 \|\nabla u^k\|^2$$

$$+ \|\rho_t^u\|_{L^\infty}^2 \|u_t^k\|^2 \Big\} + C \|\rho^k\|_{L^\infty}^2 \|P\Delta u^k\|^2 \|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\le C\Big\{ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}^2 J^2(t) \|f\|^2 + C\beta^2 \|f_t\|^2 + \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}^2 J^2(t) H(t) \tilde{F}(t)$$

$$+ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}^2 J^2(t) G(t) \Big\} + C\beta^2 H(t) \|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\equiv C\psi(t) + C\beta^2 H(t) \|\nabla u_t^k\|^2$$

em virtude dos lemas 1.2, 1.3 e C_1 é uma constante positiva que só depende de $\alpha > 0$.

Agora multiplicando por $\sigma(t)$ e integrado de ϵ a t ($\epsilon > 0$), obtem-se:

$$C_1 \int_\epsilon^t \sigma(\tau) \|u_{tt}^k\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_\epsilon^t \sigma(\tau) \frac{d}{dt} \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau$$

$$\leq C\int_\epsilon^t \psi(\tau)d\tau + C\beta^2\int_\epsilon^t H(\tau)\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau$$

$$\equiv \mathcal{f}(t,\epsilon)$$

Por outro lado, $\sigma'(t)$ existe em quase todo ponto, pelo qual

$$\int_\epsilon^t \sigma(\tau) \frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau = \sigma(t)\|\nabla u_t^k\|^2 - \sigma(\epsilon)\|\nabla u_t^k\|^2(\epsilon) + \int_\epsilon^t \sigma'(t)\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau$$

Consequentemente:

$$C_1\int_\epsilon^t \sigma(\tau)\|u_{tt}^k\|^2 d\tau + + \sigma(\tau) \frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\leq \sigma(\epsilon)\|\nabla u_t^k\|^2(\epsilon) + \int_\epsilon^t \sigma'(\tau)\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau + \mathcal{f}(t,\epsilon).$$

Claramente quando $\epsilon \to 0^+$, temos que

$$\int_\epsilon^t \sigma(\tau)\|u_{tt}^k\|^2 d\tau \to \int_0^t \sigma(\tau)\|u_{tt}^k\|^2 d\tau$$

$$\int_\epsilon^t \sigma'(\tau)\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau \to \int_0^t \sigma'(\tau)\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau$$

e

$$\mathcal{f}(t,\epsilon) \to \mathcal{f}(t,0) ;$$

já que $\mathcal{f}$ é contínua em ϵ. Também temos pela nota 1.6 que

$\sigma(\epsilon)\|\nabla u_t^k\|^2(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0^+$.

Assim:

$$C_1\int_0^t \sigma(\tau)\|u_{tt}^k\|^2 d\tau + \sigma(\tau)\|\nabla u_t^k\|^2$$

$$\leq \int_0^t \sigma'(t)\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau + \mathcal{F}(t,0)$$

$$\leq \sup_{0\leq\tau\leq t} \sigma'(\tau)\int_0^t \|\nabla u_t^k\| + \mathcal{F}(t,0)$$

$$\leq (\sup_{0\leq\tau\leq t} \sigma'(\tau))G(t) + \|\nabla\rho_0\|_{L^\infty}^2 \int_0^t \sigma(\tau)j^2(\tau)\|f\|^2 d\tau$$

$$+ C\beta^2\int_0^t \sigma(\tau)\|f_\tau\|^2 d\tau + C\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty}^2\int_0^t \sigma(\tau)j^2(\tau)H(\tau)\tilde{F}(\tau)d\tau$$

$$+ C\|\nabla\rho_0\|^2\int_0^t \sigma(\tau)j^2(\tau)G(\tau)d\tau + C\beta^2(\sup_{0\leq\tau\leq t} \sigma(\tau)H(\tau))G(t)$$

$$\equiv N(t).$$

Claramente $N(t)$ satisfaz os requerimentos do lema.

Para a segunda parte do lema, observe-se que

$$\|P\Delta\nabla u^k\|^2 \leq C\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}^2\|f\|^2 + C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla f\|^2 + C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla u^k\|_{L^3}^2\|\nabla u^k\|_{L^6}^2$$

$$+ C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|u^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla^2 u^k\|^2 + C\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}^2\|u^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla u^k\|^2 + C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla u_t^k\|^2$$

$$+ C\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}^2\|u_t^k\|^2$$

para cada $k = 1,2,\ldots.$. Assim

$$\|u^k(t,x) - u^k(0,x)\| \leq \int_o^t \|u_t^k\| dt \leq Ct$$

de acordo com o lema1.2. Agora passando ao limite quando k converge para ∞, obtemos

$$\|u(t,x) - u(0,x)\| \leq Ct$$

de onde fazendo t conergir a 0^+, obtem-se (1.36).

Para fazer (1.37), observemos que é suficiente mostrar que para cada autofunção $w^k(x)$, têm-se:

$$\int_\Omega (\nabla u(t,x) - \nabla u(0,x))\nabla w^k \to 0$$

quando $t \to 0^+$.

Temos

$$\left|\int_\Omega (\nabla u(t,x) - \nabla u(0,x))\ \nabla w^k\ dx\right| = \left|\int_o^t \frac{d}{dt}(\nabla u,\ \nabla w^k)\right|$$

$$= \left|\int_o^t (u_t,\ P\Delta w^k) dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_o^t \|u_t\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_o^t \|P\Delta w^k\|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{Ct}{2} + \frac{1}{2}\|P\Delta w^k\|^2 t$$

logo, quando $t \to 0^+$, obtém-se o pedido. ∎

Na realidade a convergência anterior pode ser provada em

$H^2(\Omega)$, adaptando-se um argumento de Heywood e Rannacher [13] para o caso da equação de Navier-Stokes usual.

De fato, temos:

Proposição 1.12. Sob as hipóteses feitas,

$$\lim_{t\to 0^+} \| P\Delta u(t,x) - P\Delta u(0,x) \| = 0 \tag{1.38}$$

e consequentemente

$$\lim_{t\to 0^+} \| u_t(t,x) - u_t(0,x) \| = 0. \tag{1.39}$$

Prova. A formulação fraca da equação (1.1) é

$$(\rho^k u^k_t, v) + (\nabla u^k, \nabla v) + (\rho^k u^k \nabla u^k, v) = (\rho^k f, v)$$

para qualquer $v \in \langle w^1, \ldots, w^k \rangle$.

Colocando $v = P\Delta u^k_t$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|P\Delta u^k\|^2 + \|(\rho^k)^{1/2}\nabla u^k_t\|^2 &= (\rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f,\ P\Delta u^k_t) - \int_\Omega u^k_t \nabla\rho^k \nabla u^k_t \\
&= \frac{d}{dt}(\rho^k u^k \nabla u^k,\ - \rho^k f,\ P\Delta u^k) \\
&\quad - (\rho^k_t u^k \nabla u^k + \rho^u u^k_t \nabla u^k + \rho^k u^k \nabla u^k_t \\
&\quad - \rho^k_t f - \rho^k f_t,\ P\Delta u^k) - \int_\Omega u^k_t \nabla\rho^k \nabla u^k_t .
\end{aligned}$$

Integrando a expressão anterior de 0 a t obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\|P\Delta u^k\|^2 + \int_o^t \|(\rho^k)^{1/2}\nabla u_t^k\|^2 d\tau &= (\rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f,\ P\Delta u^k) \\
&\quad - (\rho^k(0) u_o^k \nabla u_o^k - \rho^k(0) f(0),\ P\Delta u_o^k) \\
&\quad + \|P\Delta u_o^k\|^2 - \int_o^t \Big\{ (\rho_t^k u^k \nabla u^k + \rho^k u_t^k \nabla u^k \\
&\quad + \rho^k u^k \nabla u_t^k - \rho_t^k f - \rho^k f_t,\ P\Delta u^k) \Big\} d\tau \\
&\quad - \int_o^t \int_\Omega u_t^k \nabla \rho^k \nabla u_t^k d\tau \\
&\le \|P\Delta u_o^k\|^2 + 2\Big\{ (\rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f,\ P\Delta u^k) \\
&\quad - (\rho_o u_o^k \nabla u_o^k - \rho_o f(0),\ P\Delta u_o^k) \Big\} + Nt \\
&\quad + C_\epsilon \int_o^t \|\nabla \rho^k\|_{L^\infty}^2 \|u_t^k\|^2 d\tau + \epsilon \int_o^t \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Como $\|(\rho^k)^{1/2}\nabla u_t^k\|^2 \ge \alpha \|\nabla u_t^k\|^2$, temos:

$$
\begin{aligned}
\|P\Delta u^k\|^2 + (\alpha - \epsilon)\int_o^t \|\nabla u_t^k\|^2 d\tau &\le \|P\Delta u_o^k\|^2 + 2\Big\{ (\rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f, P\Delta u^k) \\
&\quad - (\rho_o u_o^k \nabla u_o^k - \rho_o f(0),\ P\Delta u_o^k) \Big\} + Nt \\
&\quad + bC_\epsilon \int_o^t \|u_t^k\|^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Tomando $\epsilon < \alpha$, obtemos em particular

$$
\|P\Delta u^k\|^2(t) \le \|P\Delta u_o^k\|^2 + 2\Big\{ (\rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f,\ P\Delta u^k)
$$

$$- (\rho_o u_o^k \nabla u_o^k - \rho_o f(0),\ P\Delta u_o^k)\Big\} + Lt$$

uniformemente em k. Disto concluímos que

$$\|P\Delta u\|^2(t) \leq \|P\Delta u_o\|^2 + 2\Big\{(u\nabla u - \rho f,\ P\Delta u) - (\rho_o u_o \nabla u_o - \rho_o f(0), P\Delta u_o)\Big\} + Lt$$

Como $\rho u.\nabla u(t) \to \rho_o u_o \nabla u_o$ em $L^2(\Omega)$ e $P\Delta u \to P\Delta u_o$ fracamente em $L^2(\Omega)$ quando $t \to 0^+$, obtemos (1.38). Disto é fácil concluir que

$$u_t^k(0) \to u_t(0)$$

forte na norma de $L^2(\Omega)$, com o qual u_t é contínua em $t = 0$. ∎

Observação 1.13. O argumento usado nas proposições 1.11, 1.12, na verdade podem ser feitos para qualquer $t = t_o > 0$ ao invés de $t = 0$. Isto fornecerá a continuidade à direita nos espaços adequados. O mesmo tipo de análise fornece a continuidade à esquerda para $t = t_o$ >,0. Portanto obtem-se as continuidades indicadas no enunciado do teorema1.1....

Consideramos agora a questão da unicidade da solução. Por simplicidade denotemos por

$$\sum\nolimits_1 = \Big\{v/v \in L^2(0,T_2;\ H^3(\Omega) \cap V),\ v_t \in L^2(0,T_2;\ H^1(\Omega) \cap V)\Big\}$$

$$\sum\nolimits_2 = \Big\{v/v \in C([0,T];\ H^2(\Omega) \cap V) \cap L^2(0,T;\ H^3(\Omega)) \cap\ L^2(0,T;\ L^\infty(\Omega))$$

$\cap\ L^{p}(0,T;\ H^{3-\epsilon}(\Omega)) \cap L^{\infty}_{Loc}(0,T;\ H^{3}(\Omega))$,

$v_t \in C\ ([0,T];\ L^{2}(\Omega) \cap V) \cap L^{2}(0,T;\ H^{2-\epsilon}(\Omega)) \cap L^{P}(0,T;\ H^{1-\epsilon}(\Omega))$

$\cap\ L^{\infty}_{Loc}(0,T;\ H^{1}(\Omega)) \cap L^{2}_{Loc}(0,T;\ H^{2}(\Omega))$

$v_{tt} \in L^{2}_{Loc}(0,T;\ L^{2}(\Omega) \cap V)\Big\}$.

Então temos:

Proposição 1.14. Suponha que (σ, v) é qualquer outra solução em $W^{1,\infty}(\Omega \times]0,T_2[) \times \Sigma_1$ do problema (0.1)(0.2).

Então, considerando $T_3 = \min\ \{T,\ T_2\}$, onde T é o tempo obtido no teorema 1.1 temos

$$\rho \equiv \sigma \quad e \quad u \equiv v$$

em $[0,\ T_3]$, onde (ρ,u) é a solução obtida em $W^{1,\infty}(\Omega \times]0,\ T[) \times \Sigma_2$.

Prova. Coloquemos $w = u - v$ e $\pi = \rho - \sigma$. Então temos

(1.41) $$\frac{\partial \pi_t}{\partial t} + u\nabla\pi = -\ w\nabla\sigma$$

(1.42) $$\pi(0,x) = 0$$

(1.43) $$P\rho(t)w_t + Aw(t) = -\ P(\rho(t)u\nabla u) + P(\sigma(t)v\nabla v)$$
$$+\ P(\sigma(t) - \rho(t))v_t + P(\sigma(t) - \rho(t))f$$

(1.44) $$w(0) = 0.$$

Multiplicando a segunda equação por w e integrando sobre Ω, obtém-se:

$$(1.45)\quad (\rho(t)w_t,\ w) + (Aw(t),\ w) = -\ (\rho(t)u\nabla u,\ w) + (\sigma v\nabla v,\ w)$$

$$+\ (\pi\ v_t,\ w) + (\pi f,\ w).$$

Por outro lado, multiplicando a equação (1.41) por π e integrando em $Q_T = \Omega \times]0,\ T_3[$, utilizando-se as estimativas dos lemas anteriores obtém-se:

$$(1.46)\qquad \|\pi\|^2 \le \int_0^t \|w\|\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}\|\pi\|dt$$

$$\le C \int_0^t \|w\|\|\pi\|dt$$

$$\le \frac{C}{2} \left\{ \int_0^t \|w\|^2 + \int_0^t \|\pi\|^2 dt \right\}.$$

Também temos que a equação (1.45) é equivalente a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{1/2}w\|^2 + \|\nabla w\|^2 = -\ (\rho(t)u\nabla u,\ w) + (\sigma(t)v\nabla v,\ w) + (\pi v_t,\ w)$$

$$+\ (\pi f,\ w) + \frac{1}{2}(w,\ \rho_t w)$$

$$= (\pi f,\ w) + (\pi v_t,\ w) + (\rho u\nabla w,\ w) - (\rho u\nabla w,\ w)$$

$$-\ (\pi u\nabla v,\ w) - (\sigma w\nabla v,\ w)$$

$$= (\pi f,\ w) + (\pi v_t,\ w) - (\pi u\nabla v,\ w) - (\sigma w\nabla v,\ w).$$

Observe-se que;

$$\left|(\pi f,\ w)\right| \le \|\pi\|\|f\|_{L^4}\|w\|_{L^4}$$

$$\le C_\epsilon\|f\|^2_{L^4}\|\pi\|^2 + \epsilon\ \|\nabla w\|^2$$

$$\left|(\pi v_t,\ w)\right| \le C_\epsilon\|\nabla v_t\|^2\|\pi\|^2 + \epsilon\ \|\nabla w\|^2$$

$$\left|(\pi u\nabla v,\ w)\right| \le C_\epsilon\|u\|^2_{L^\infty}\|P\Delta v\|^2\|\pi\|^2 + \epsilon\ \|\nabla w\|^2$$

$$|(\sigma w.\nabla v, w)| \le \|\sigma\|_{L^\infty}\ \|w\|\ \ \|\nabla . v\|_{L^\infty}\ \|w\|$$

logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{1/2}w\|^2 + \|\nabla w\|^2 \le (3\epsilon + \epsilon\ \beta^2)\ \|\nabla w\|^2 + C_\epsilon\ \|\nabla v\|^2_{L^\infty}\|w\|^2$$

$$+ C_\epsilon\left\{\|P\Delta v\|^2\|u\|^2_{L^\infty} + \|\nabla v_t\|^2 + \|f\|^2_{L^4}\right\}\|\pi\|^2.$$

Tomando $\epsilon < 1/(3+\beta^2)$, obtém-se:

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\|\rho^{1/2}w\|^2 + C_1\|\nabla w\|^2 \le C\ \|\nabla v\|^2_{L^\infty}\|w\|^2 + C\left\{\|P\Delta v\|^2\|u\|^2_{L^\infty}\right.$$

$$\left. + \|\nabla v_t\|^2 + \|f\|^2_{L^4}\right\}\|\pi\|^2$$

Integrando de 0 a t obtem-se:

$$\frac{1}{2}\|\rho^{1/2}w\|^2 + C_1\int^t\|\nabla w\|^2 d\tau \le C\int_0^t\|\nabla v\|^2_{L^\infty}\|w\|^2 d\tau + C\int_0^t h(\tau)\|\pi\|^2 d\tau$$

onde $h(\tau) = \|u\|^2_{L^\infty}\|P\Delta v\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 + \|f\|^2_{L^4}$.

Agora somando esta desigualdade e a desigualdade (1.46), recordando que $\|\rho^{1/2}w\|^2 \geq \alpha\|w\|^2$ e $\int_0^t \|\nabla w\|^2 \geq 0$, obtém-se:

$$\|w\|^2 + \|\pi\|^2 \leq \frac{2}{\alpha} C\int_0^t \|\nabla v\|^2_{L^\infty}\|w\|^2 d\tau + C\int_0^t \|w\|^2 d\tau + \frac{2C}{\alpha}\int_0^t h(\tau)\|\pi\|^2 d\tau$$

$$+ \int_0^t \|\pi\|^2 d\tau,$$

isto é,

$$\|w\|^2 + \|\pi\|^2 \leq \int_0^t \left[\frac{2C}{\alpha}\|\nabla v\|^2_{L^\infty} + C\right]\|w\|^2 d\tau + \int_0^t \left[\frac{2C}{\alpha} h(\tau) + 1\right]\|\pi\|^2 d\tau$$

$$\leq \int_0^t h_1(\tau)(\|\pi\|^2 + \|w\|^2)d\tau,$$

onde $h_1(\tau) = \max\left\{\frac{2C}{\alpha}\|\nabla v\|^2_{L^\infty} + C,\ \frac{2C}{\alpha} h(\tau)+1\right\}$ que é integral e ≥ 0,

logo pelo lema de Gronwall, obtém-se

$$\|\pi\|^2 + \|w\|^2 = 0$$

o que implica $w = 0$ e $\pi = 0$. ∎

Uma vez obtido este resultado de unicidade, um argumento padrão fornece imediatamente que a seqüência $\{(\rho^k, u^k)\}$ completa converge para à solução (ρ, u) nos espaços indicados no teorema1.1. Isto finaliza a sua prova. ∎

Observação 1.15. Se impusermos a condição de que Ω é uniformemente de classe C^3, podemos obter as constantes envolvidas nas estimativas de forma independentes tanto do diâmetro do conjunto quanto da medida adequada do bordo. Isto pode ser feito usando os mesmos argumentos do Heywood [10]. Este tipo de estimativas é importante para domínios ilimitados.

Podemos obter agora informações sobre a pressão.

Proposição 1.16. Sob as hipóteses do teorema 1.1, existe $p \in C^{0}(\epsilon,T;\ H^{1}(\Omega)/\mathbb{R})$, $\forall\ \epsilon > 0$ tal que junto com as soluções u, ρ dadas pelo teorema 1.1, satisfazem:

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\, u\nabla u - \Delta u + \nabla p = \rho f,\ \forall\ t > 0,$$

$$\operatorname{div} u = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\nabla\rho = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0\ ;\ u(0) = u_{o};\ \rho(0) = \rho_{o};\ \alpha \le \rho \le \beta\ .$$

Prova. Temos que

$$-\ \Delta u + \nabla p = g$$

onde $g = \rho(f - u_{t} - u\nabla u) \in L^{\infty}(0,T;\ L^{2}(\Omega)) \cap L^{2}(0,T;\ H^{1}(\Omega))$, de onde utilizando os resultados de Cattabriga [7], deduzimos que

$$p \in L^{\infty}(0,T;\ H^{1}(\Omega)/\mathbb{R}) \cap L^{2}(0,T;\ H^{2}(\Omega)/\mathbb{R}).$$

Também temos

$$-\ \Delta u_{t} + \nabla\ p_{t} = g_{t}\quad ,$$

onde $g_{t} = \rho_{t}(f - u_{t} - u\nabla u) + \rho(f_{t} - u_{tt} - u_{t}\nabla u - u\nabla u_{t}) \in L^{\infty}(\epsilon,T;\ L^{2}(\Omega))$,

de onde novamente utilizando os resultados de Cattabriga, obtém-se:

$$p_t \in L^\infty(\epsilon,T;\ H^1(\Omega)/\mathbb{R})),\ \forall\ \epsilon > 0.$$

Assim deduzimos que

$$p \in C^o(\epsilon,T;\ H^1(\Omega)/\mathbb{R}),\ \forall\ \epsilon > 0. \qquad \blacksquare$$

Observação 1.17. Para obter informações em $t = 0$, na proposição anterior, são necessárias certas condições de compatibilidade sobre os dados. Isto é feito do mesmo modo que no caso das equações de Navier-Stokes usuais e para isto é muito instrutiva a discussão feita no artigo de Heywood e Rannacher [13] pag. 280-282.

■

CAPÍTULO II

TEOREMA DE EXISTÊNCIA GLOBAL E CONVERGÊNCIA GLOBAL DAS APROXIMAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos teoremas da existência global correspondentes às soluções obtidas no capítulo anterior. Os argumentos usados serão uma modificação daqueles apresentados por Heywood e Rannacher [13].

Gostaríamos de fazer as seguintes observações: os únicos resultados de existência global de soluções fortes parecem ser aqueles devidos a Ladyzhenskaya, Solonnikov [17] e Okamoto [21]. O nosso teorema difere destes nos seguintes aspectos: neles a velocidade inicial pode ser um pouco menos regular do que aquela por nós exigida (embora utilizando multiplicadores envolvendo potências fraccionárias do operador de Stokes, estas exigências poderiam ser relaxadas). Entretanto, o resultado de [17], para dimensão n=3, necessita que haja decaimento exponencial da força externa e, além disso, como no caso das equações de Navier-Stokes usuais, exige-se a pequenez da velocidade inicial na norma $L^2(\Omega)$, a qual depende da norma $L^\infty(\Omega)$ do gradiente da densidade inicial, no sentido de que quanto maior tal gradiente menor deve ser a velocidade inicial. Também para dimensão n=3, o resultado de Okamoto [21], necessita da pequenez tanto na velocidade (na norma $L^2(\Omega)$) como no gradiente da densidade inicial (na norma $L^\infty(\Omega)$) e, além disso, ele trabalha o caso $f \equiv 0$. Para que seus argumentos continuem válidos para f não nula é necessário um decaimento bastante forte da força externa.

O nosso teorema para n = 3 também exige um decaimento da força externa; porém mais fraco do que os anteriores (exigimos $f \in L^\infty(0,\infty;\ L^2(\Omega))$. Além disso, não há exigência de pequenez no gradiente da densidade inicial (como em Okamoto), nem o vínculo existente entre a pequenez da velocidade inicial e o gradiente da densidade inicial (como em Ladyzhenskaya e Solonnikov [17]).

Para o caso bidimensional, Ladyzhenskaya e Solonnikov [17] não exigem pequenez da velocidade inicial, porém, para que a solução exista no intervalo de tempo $[0,\infty)$, os seus argumentos exigem que exista $\zeta>0$ e $C>0$ independentes de $t \in [0,\infty)$ tal que a força externa f satisfaça $\int_t^{t+\zeta} \|f\|_{L^q}(s)\, ds < C$ para algum $q>2$. Isto não permite forças externas que cresçam arbitrariamente no tempo. Os argumentos de Okamoto [21] para o caso $n = 2$, se feitos com força externa não nula, exigiriam a força externa com um certo decaimento.

Enunciamos agora o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Se a dimensão do espaço for $n=3$, $u_o \in V \cap H^2(\Omega)$, $\rho_o \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in L^2_{Loc}([0,\infty);H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$, $f_t \in L^2_{Loc}([0,\infty);L^2(\Omega))$ forem tais que $\|u_o\|$ e $\|f\|_{L^2([0,\infty)\times\Omega)}$ sejam suficientemente pequenas, então a solução (ρ,u) do problema (0.1),(0.2) obtida no Teorema 1.1 existe globalmente. Além disso, as soluções aproximadas (ρ^k,u^k) lá construídas convergem para (ρ,u), nos sentidos indicados no Teorema 1.1 localmente no tempo.

Prova. Consideremos um $\bar{u}_o \in V \cap H^2(\Omega)$ qualquer e a solução local (ρ,u) do problema (0.1),(0.2) com dados iniciais $(\rho_o,\bar{u}_o)$. Tal solução existe num intervalo $[0,T]$; anâlogamente ao feito para demonstrar (1.5), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^{1/2}u\|^2 + \|\nabla u\|^2 = (\rho f,u)$$

Integrando a expressão de 0 a S, vem,

$$\frac{1}{2}\|\rho^{1/2}u\|^2(S) + \int_0^S \|\nabla u\|^2(t)dt = \frac{1}{2}\|\rho_o^{1/2}u_o\|^2 + \int_0^S (\rho f,u)dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\rho_o^{1/2}u_o\|^2 + \int_0^S \|\rho\|_{L^\infty}\|f\|\|u\|dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\rho_o^{1/2}u_o\|^2 + \frac{C\beta}{2}\int_o^s \|f\|^2 dt$$

$$+ \frac{1}{2}\int_o^s \|\nabla u\|^2(t)dt.$$

Assim,

$$\|\rho^{1/2}u\|^2(s) + \int_o^s \|\nabla u\|^2(t)dt \leq \|\rho_o^{1/2}u_o\|^2 + C\beta\int_o^s \|f\|^2 dt. \tag{2.1}$$

Por outro lado, da mesma forma que o Kim [16] (Proposição 2.4, pág.93) obtem-se a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \leq C\|\nabla u\|^{10} + C\|f\|^2. \tag{2.2}$$

Vamos mostrar que para $\lambda \in [0,1]$ suficientemente pequeno, a solução $(u_\lambda, \rho_\lambda)$ do problema (0.1),(0.2) com dados iniciais $(\lambda u_o, \rho_o)$ e força externa λf existe globalmente no tempo.

Seja $\psi_\lambda(t) = \|\nabla u_\lambda\|^2(t)$. Então (2.2) transforma-se em

$$\psi'_\lambda \leq C\psi_\lambda^5 + \lambda^2 C\|f\|^2(t).$$

Suponhamos o contrário, isto é, que para qualquer $\lambda \in [0,1]$, $\psi_\lambda(t) = \|\nabla u_\lambda\|^2(t)$ tenha "blow-up" em $t^*(\lambda)$, finito, que é necessariamente maior ou igual a T.

Observamos agora que

$$C\psi_\lambda^5 + C_1\lambda^2 \leq 2C\psi_\lambda^5$$

onde $C_1 = C\|f\|^2$, para $\psi_\lambda \geq (C_1/C)^{1/5}\lambda^{2/5} = \ell(\lambda)$.

Portanto

$$0 \leq \psi_\lambda(t) \leq \ell(\lambda)$$

ou $$\frac{d\psi_\lambda}{dt} \le 2C\psi_\lambda^5$$

Consideremos a solução $\Phi_\lambda(t)$ da equação

$$\frac{d\Phi_\lambda}{dt} = 2C\Phi_\lambda^5$$

que explode exatamente em $t^*(\lambda)$.

Vamos provar agora que $\Phi_\lambda(t)$ está abaixo de $\psi_\lambda(t)$ para tempos t tais que $\psi_\lambda(t) \ge \ell(\lambda)$.

De fato, tomemos $\bar{t}_n > t^*(\lambda)$ e tal que $\bar{t}_n$ converge para $t^*(\lambda)$ quando $n \to \infty$, e consideremos as soluções $\varphi_{\bar{t}_n}(t)$ do problema

$$\varphi' = 2C\varphi^5$$

que explodem exatamente em $\bar{t}_n$, notemos que $\psi_\lambda(t) \to +\infty$ quando $t \to t^*(\lambda)^-$ e que $\varphi_{\bar{t}_n}$ é finita, assim: $\varphi_{\bar{t}_n}(t) < \psi_\lambda(t)$, para $t < t^*(\lambda)$, suficientemente próximos de $t^*(\lambda)$.

Por outro lado, as definições de $\psi_\lambda(t)$ e $\varphi_{\bar{t}_n}(t)$ impedem que haja pontos τ tais que

$$\psi_\lambda(\tau) = \varphi_{\bar{t}_n}(\tau)$$

no conjunto dos t tais que $\psi_\lambda(t) \ge \ell(\lambda)$ e, portanto, neste conjunto

$$\varphi_{\bar{t}_n}(t) < \varphi_\lambda(t).$$

Além disso, para $0 \le t \le t^*(\lambda)$, $\varphi_{\bar{t}_n}(t) \to \Phi_\lambda(t)$ quando n converge $+\infty$. Portanto, conclui-se que $\Phi_\lambda(t) \le \psi_\lambda(t)$ para $t \in [0,t^*(\lambda)]$ tais que $\psi_\lambda(t) \ge \ell(\lambda)$.

Agora, calculando explìcitamente, obtemos

$$\Phi_\lambda(t) = \left[\frac{1}{8C(t^*(\lambda) - t)} \right]^{1/4}$$

e observamos que $\Phi_\lambda(t) > \ell(\lambda)$ para $t > t_1(\lambda)$, para $t > t_1(\lambda)$, onde $t_1(\lambda) = t^*(\lambda) - (8C\ell^4(\lambda))^{-1}$.

Já que $\ell(\lambda) \to 0$ e $t^*(\lambda)$ cresce quando $\lambda \to 0^+$, podemos escolher λ suficientemente pequeno tal que $(8C\ell^4(\lambda))^{-1} > T$, e assim temos:

$$\frac{4T^{3/4}}{3(8C)^{1/4}} = \int_{t^*(\lambda)-T}^{t^*(\lambda)} \Phi_\lambda(\tau)d\tau \le \int_{t^*(\lambda)-T}^{t^*(\lambda)} \psi_\lambda(\tau)d\tau.$$

Por outro lado, a conservação da energia (estimativa (2.1)) correspondente à solução $(\rho_\lambda, u_\lambda)$, para λ suficientemente pequeno e tal que

$$\lambda^2\left[\frac{\beta}{2} \|u_o\|^2 + \beta\int_o^\infty \|f\|^2(\tau)d\tau \right] < \frac{4T^{3/4}}{3(8C)^{1/4}},$$

$0 \le t < t^*(\lambda)$, transforma-se em :

$$\alpha\|u_\lambda(t)\|^2 + \int_o^t \|\nabla u_\lambda(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{\beta}{2}\ \lambda^2\|u_o\|^2 + \int_o^t \beta\lambda^2\|f\|^2 d\tau$$

$$\le \lambda^2\left[\ \frac{\beta}{2}\|u_o\|^2 + \beta\int_o^\infty \|f\|^2(\tau)d\tau\right]$$

$$< \frac{4T^{3/4}}{3(8C)^{1/4}}$$

$$\le \int_{t^*(\lambda)-T}^{t^*(\lambda)} \psi_\lambda(\tau)d\tau$$

$$= \int_{t^*(\lambda)-T}^{t^*(\lambda)} \|\nabla u_\lambda(s)\|^2 ds,$$

isto é, concluimos que para $0 \le t < t^*(\lambda)$

$$\int_o^t \|\nabla u_\lambda(s)\|^2 ds < \int_{t^*(\lambda)-T}^{t^*(\lambda)} \|\nabla u_\lambda(s)\|^2 ds.$$

Fazendo $t \to t^*(\lambda)^-$, obtemos uma contradição. Portanto, para λ suficientemente pequeno $\|\nabla u_\lambda\|(t)$ existe globalmente.

Por outro lado,

$$(\Delta u_\lambda, \phi) = (P(\rho_\lambda(u_{\lambda,t} + u_\lambda.\nabla u_\lambda - \lambda f), \phi)$$

é satisfeito para qualquer $\phi \in C^\infty_{o,\sigma}(\Omega)$.

Como $\rho_\lambda \in L^\infty([0,\infty);\ L^\infty(\Omega))$, $u_{\lambda,t} \in L^2_{Loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$ obtêm-se

$$P(\rho_\lambda(u_{\lambda,t} + u_\lambda.\nabla u_\lambda - \lambda f) \in L^2_{Loc}(0,\infty;L^{3+\epsilon}(\Omega)),$$

para qualquer $\epsilon > 0$, logo pelos resultados de Cattabriga [7], conclui-se que

$$u_\lambda \in L^2_{Loc}(0,\infty;W^{2,3+\epsilon}(\Omega)),$$

agora pelas imersões de Sobolev,

$$\nabla u \in L^1_{Loc}(0,\infty;L^\infty(\Omega)),$$

com o qual

$$\nabla\rho \in L^\infty_{Loc}(0,\infty,L^\infty(\Omega)),$$

e consequentemente

$$\rho_t \in L^\infty_{Loc}(0,\infty;L^\infty(\Omega)).$$

Agora, podemos raciocinar similarmente ao Teorema 1.1, o que conclui a primeira parte do Teorema.

Vamos mostrar agora que $\|\nabla u^k_\lambda\|$ pode ser estimado de forma independente de k.

De fato, temos

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^k_\lambda\|^2 \le C(\|\nabla u^k_\lambda\|^2)^5 + C\lambda^2\|f\|^2$$

e

$$\alpha\|u^k_\lambda\|^2 + \int_0^S \|\nabla u^k_\lambda\|^2 dt \le \beta\lambda^2\|u_0\|^2 + \beta\lambda^2\int_0^S \|f(t)\|^2 d.$$

Se tomamos o mesmo $\ell(\lambda)$ que antes, temos as seguintes possibilidades:

Se para um certo $t > 0$ $\|\nabla u^k_\lambda\|^2(t) \le \ell(\lambda)$ já temos uma estimativa independente de k.

Por outro lado, se existe $t_1 > 0$ tal que $\|\nabla u^k_\lambda\|^2(t_1) = \ell(\lambda)$ e, em algum intervalo $[t_1,t_2)$, vale $\|\nabla u^k_\lambda\|^2(t) \ge \ell(\lambda)$, então, neste intervalo e devido à escolha de $\ell(\lambda)$, vale

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_\lambda^k\|^2 \leq 2C(\|\nabla u_\lambda^k\|^2)^5 ,$$

consequentemente,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(\|\nabla u_\lambda^k\|^2)^4} \quad \frac{d}{dt}\|\nabla u_\lambda^k\|^2 \leq 2C\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_\lambda^k\|^2 \, dt$$

$$\leq 2\left[C\beta\lambda^2\|u_o\|^2 + \beta C\lambda^2\int_o^t \|f\|^2 ds\right]$$

$$= H_\lambda(t),$$

observe-se que $H_\lambda(t)$ é da ordem $O(\lambda^2)$. Assim,

$$- \frac{1}{3\|\nabla u_\lambda^k\|^6(t_2)} + \frac{1}{3\|\nabla u_\lambda^k\|^6(t_1)} = - \frac{1}{3\|\nabla u_\lambda^k\|^6(t_2)} + \frac{1}{3\ell(\lambda)^3}$$

$$\leq H_\lambda(t) ,$$

logo,

$$\|\nabla u_\lambda^k\|^2(t_2) \leq \left(\frac{\ell(\lambda)^3}{\ell(\lambda)^3 - 3H_\lambda(t_2)} \right)^{1/3}$$

que é independente de k, assim podemos concluir que para λ suficientemente pequeno

$$\|\nabla u_\lambda^k\|^2(t) \leq \max \left\{ \ell(\lambda) , \left(\frac{\ell(\lambda)^3}{\ell(\lambda)^3 - 3H_\lambda(t)} \right)^{1/3} \right\}$$

Uma vez obtida esta estimativa, analogamente ao feito anteriormente, obtém-se as outras estimativas necessárias, também de forma independente de k.

Isto é suficiente para garantir a convergência nos mesmos espaços indicados no teorema de existência local (localmente no tempo). Isto finaliza a prova do teorema. ■

No caso bidimensional o teorema anterior pode ser melhorado de maneira substancial. Isto depende basicamente da forma como é estimado o termo não linear. Para isto, recordemos inicialmente alguns fatos.

A seguir Ω denotará um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$. Enunciaremos as coisas necessárias como o

Lema 2.2. A inclusão de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ é compacta para qualquer $q \in [1,\infty[$, consequentemente, para $v \in H^2(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^4} \le C\|v\|^{1/2}\|v\|^{1/2}_{H^1}$$

$$\|\nabla v\|_{L^4} \le C\|v\|^{1/2}_{H^2}\|v\|^{1/2}_{H^2}$$

$$\le C\|v\|^{1/4}\|v\|^{3/4}_{H^2} \qquad ■$$

Teorema 2.3. Se a dimensão do espaço for $n = 2$, $u_o \in V \cap H^2(\Omega)$, $\rho_o \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in L^2_{Loc}([0,\infty);H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty;\ L^2(\Omega))$, $f_t \in L^2_{Loc}([0,\infty);$ $L^2(\Omega))$ então a solução (ρ,u) do problema, obtida no teorema 1.1 existe globalmente. Além disso, as soluções aproximadas (ρ^k,u^k) lá construída convergem para (ρ,u) nos sentidos indicados no teorema 1.1, localmente no tempo.

Prova. Colocando $v = 2u^k_t$ na formulação fraca,

$$(\rho u_t, v) + (\rho u.\nabla u, v) + (\nabla u, \nabla v) = (\rho f, v) \tag{2.3}$$

para qualquer $v \in V$, obtemos,

$$2\|\rho^{1/2}u_t\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 = 2(\rho(f-u\nabla u), u_t)$$

$$\leq \|\rho^{1/2}u_t\|^2 + \|\rho^{1/2}(u\nabla u-f)\|^2$$

consequentemente,

$$(2.4) \qquad \|\rho^{1/2}u_t\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \leq \beta\|u\nabla u - f\|^2.$$

Agora colocando $v = \varepsilon P\Delta u$ na formulação fraca (2.3), vem que

$$(2.5) \qquad \varepsilon\|P\Delta u\|^2 = \varepsilon(\rho(u_t + u\nabla u - f), P\Delta u)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|P\Delta u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega 2|\rho|^2 \left\{|u_t|^2 + |u\nabla u - f|^2\right\} dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|P\Delta u\|^2 + \varepsilon\beta\|\rho^{1/2}u_t\|^2 + \varepsilon\beta^2\|u\nabla u - f\|^2.$$

Somando as desigualdades (2.4) e (2.5), nos dá

$$(1-\varepsilon\beta)\|\rho^{1/2}u_t\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|P\Delta u\|^2$$

$$\leq (\beta + \varepsilon\beta^2)\|u\nabla u - f\|)^2.$$

Escolhendo $\varepsilon = 1/2\beta$, obtem-se na desigualdade acima

$$(2.6) \qquad \frac{1}{2}\|\rho^{1/2}u_t\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + 2\epsilon\|P\Delta u\|^2 \leq 3\beta\left\{\|u\nabla u\|^2 + \|f\|^2\right\}.$$

O feito anteriormente também é válido no caso tridimensional, a diferença acontece a continuação,

$$(2.7) \qquad \|u\nabla u\|^2_{L^4} \le \|u\|^2 \, \|\nabla u\|^2_{L^4}$$

$$\le \|u\| \, {}^2\|u\|_{H^1} \|u\|_{H^2}$$

$$\le \frac{\epsilon}{3\beta} \|P\Delta u\|^2 + \delta\|\nabla u\|^4 .$$

Observe-se que na estimativa acima é essencial o lema 2.2, daqui a restrição sobre a dimensão de Ω.

A seguir usa-se a estimativa (2.7) na desigualdade (2.6) e vem,

$$\frac{1}{2} \|\rho^{1/2} u_t\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \epsilon\|P\Delta u\|^2 \le 3\beta\delta\|\nabla u\|^4 + 3\beta\|f\|^2.$$

Em particular, obtêm-se:

$$(2.8) \qquad \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \le C\|\nabla u\|^4 + C\|f\|^2$$

onde C é uma constante positiva que só depende de β e Ω.

Coloquemos $\psi(t) = \|\nabla u\|^2(t)$, com esta notação (2.8) transforma-se em:

$$\psi'(t) \le C\psi^2(t) + C\|f\|^2.$$

Novamente,

$$C\psi^2 + C\|f\|^2 \le C\psi^2 + C_1 \le 2C\psi^2,$$

onde $C_1 = C\|f\|^2$, para $\psi \le (C_1/C)^{1/2} = \ell$, logo $0 \le \psi \le \ell$ ou $\psi \le 2C\psi^2$. A seguir, fazendo os mesmo argumentos que no caso tridimensional, chegamos a considerar a solução da equação

$$\frac{d\phi}{dt} = 2C\phi^2$$

que explode exatamente em t^*. Podemos calcular explicitamente $\phi(t)$, de fato:

$$\phi(t) = (2C(t^* - t))^{-1}.$$

Observe-se que

$$\int_{t^*-T}^{t^*} \phi(\tau)d\tau = \int_{t^*-T}^{t^*} \frac{1}{2C(t^* - \tau)} d\tau = +\infty.$$

Por outro lado, trabalhando com a estimativa da energia vem que

$$\alpha\|u\|^2(t^*) + \int_0^{t^*} \|\nabla u(t)\|^2 dt \le \frac{\beta}{2} \|u_o\|^2 + \int_0^{t^*} \beta\|f\|^2 dt < +\infty.$$

Assim,

$$\int_{t^*-T}^{t^*} \phi(\tau)d\tau \le \int_{t^*-T}^{t^*} \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau \le \int_0^{t^*} \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau < +\infty$$

o que é uma contradição.

Assim $\|\nabla u\|(t)$ existe globalmente. O argumento restante é o mesmo que no caso tridimensional.

Para mostrar a convergência das aproximações, notemos que se consideramos o mesmo ℓ que antes, temos as seguintes possibilidades.

Se para um certo $t > 0$ $\|\nabla u^k\|^2(t) \le \ell$, já temos uma estimativa independente de k.

Por outro lado, se existe $t_1 > 0$ tal que $\|\nabla u^k\|^2(t_1) = \ell$ e, em algum intervalo $[t_1, t_2)$, vale $\|\nabla u^k\|^2(t) \ge \ell$, então neste intervalo e devido à escolha de ℓ, vale

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 \le 2C(\|\nabla u^k\|^2)^2$$

consequentemente,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\|\nabla u^k\|^2} \frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 \leq 2C\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u^k\|^2 dt$$

$$\leq 2\left[C\|u_o\|^2 + C\int_o^t \|f\|^2 dt\right]$$

$$= H(t)$$

que é independente de k. Consequentemente

$$\log \frac{\|\nabla u^k\|^2(t_2)}{\|\nabla u^k\|^2(t_1)} \leq H(t),$$

logo

$$\|\nabla u^k\|^2(t_2) \leq \ell\exp(H(t))$$

estimativa que é independente de k logo.

$$\|\nabla u^k\|^2(t) \leq \max\{\ell, \ell\exp H(t)\}$$

o argumento agora continua da mesma forma que antes. ∎

Temos também o resultado

Teorema 2.4. Nas condições do Teorema 2.1 ou 2.3, com a condição suplementar de que $f \in L^2([0,\infty); L^{n+\epsilon}(\Omega)$ para algum $\epsilon > 0$, além dos resultados obtidos nos teoremas 2.1 ou 2.3, vale que:

$$\nabla\rho, \rho_t \in L^\infty(0,\infty;\ L^\infty(\Omega)).$$

A demonstração é imediata observando o final das demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2. ∎

Observação 2.5. O argumento dado nos teoremas 2.1 ou 2.3 é bastante geral no sentido que, se temos uma desigualdade do tipo

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \leq C\|\nabla u\|^{\gamma}, \text{ com } \gamma \leq 4,$$

o argumento anterior continua valendo. Se $\gamma = 4$, obtemos a existência global sem impor condições de limitações sobre a velocidade. Porém, o caso $\gamma > 4$ requer tais limitações. ∎

Observação 2.6. O mesmo argumento dados nos teoremas 2.1 e 2.3 podem ser aplicados às soluções obtidas por Kim [15], para obter existência global. ∎

CAPÍTULO III

TEOREMA DE REGULARIDADE

Neste capítulo mostraremos que a solução obtida no Teorema de existência local, na verdade é mais regular para $t > 0$, se os dados iniciais forem correspondentes mais regulares.

Por facilidade de exposição o teorema será enunciado em termos de regularidade C^{∞}, porém, como poderá ser visto facilmente da demonstração, enunciados similares com regularidade C^{k} poderíam ser escritos.

Gostaríamos de ressaltar que um resultado que fornece condições de compatibilidade para garantir a regularidade em $t = 0$ é enunciado em Salvi [26], pág. 4. Tal resultado é similar aos de Temam [30], Rautmann [24], Heywood e Rannacher [13] no caso das equações de Navier-Stokes usual. Porém, as técnicas de [26] não foram suficientes para que Salvi obtivesse um teorema de regularidade em $t > 0$. As técnicas por nos usadas no capítulo I, II serão utilizadas para se obter estimativas de derivadas de ordem mais altas da solução. Isto, juntamente com adaptações de argumentos devidos a Heywood [10], [11], permite que obtenhamos um resultado de regularidade para $t > 0$ similar aquele válido para as equações de Navier-Stokes usual (Heywood [11], pág.660).

O seguinte lema, de fácil demonstração, será muito útil nos argumentos envolvidos no teorema de regularidade.

Lema 3.1. Suponha que

$$0 \le \int_a^t \ell(s)ds \le g(t)$$

com $g(t)$ finito para os $t \in [a,T)$. Então para todo $\delta > 0$ existe $\bar{t} \in [a, a+\epsilon]$ tal que

$$\ell(\bar{t}) \le \frac{g(\ a+\delta\ )}{\delta}.$$

Prova. Por absurdo suponha que existe $\delta > 0$ tal que

$$\ell(t) > \frac{g(a+\delta)}{\delta} \ .$$

Então

$$\frac{g(a+\delta)\delta}{\delta} = \int_a^{a+\delta} \frac{g(a+\delta)}{\delta} d\tau < \int_a^{a+\delta} \ell(\tau) d\tau \le g(a+\delta)$$

o qual é um absurdo. ■

Enunciamos agora o:

Teorema 3.2. Seja $f \in C^\infty(Q_T)$, $u_o \in V \cap H^2, \rho_o \in C^\infty(\Omega)$, verificando as hipóteses do Teorema 1.1..Então, as soluções correspondentes (ρ, u, p) são de classe $C^\infty(\Omega \times (0,T])$.

A demonstração será baseada em um argumento do tipo "bootstrap" no qual estimativas a priori de derivadas de ordem cada vez mais altas das aproximações da solução construídas no teorema 1.1, serão obtidas de forma cíclica.

Prova. Vamos provar que para todo $\delta > 0$, (ρ, u) está em $C^\infty(\Omega\times[\delta,T])$.Consideremos uma sequência $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$, $\delta_n \in \mathbb{R}^+$, estritamente crescente, tal que $\delta_n \le \frac{\delta}{2}$. Passemos à obtenção de estimativas de derivadas de ordem mais alta.

Para isto, começamos derivando a formulação fraca das aproximações de Galerkin com respeito a t; obtêm-se:

$$(3.1)\quad (\rho_t^k u_t^k, v) + (\rho^k u_{tt}^k, v) + ((\rho^k u^k \nabla u^k)_t, v) - (\Delta u_t^k, v) = ((\rho^k f)_t, v)$$

Colocando $v = u_{tt}^k$ na expressão acima, obtêm-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2 + \|(\rho^k)^{1/2}u_{tt}^k\|^2$$

$$= (\rho_t^k u_t^k, u_{tt}^k) + (\rho_t^k f, u_{tt}^k) + (\rho^k f_t, u_{tt}^k) + (\rho_t^k u^k \nabla u^k, u_{tt}^k)$$

$$+ (\rho^k u_t^k \nabla u^k, u_{tt}^k) + (\rho^k u^k \nabla u_t^k, u_{tt}^k)$$

$$\le 6\epsilon\|u_{tt}^k\|^2 + C_\epsilon \|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|f_t\|^2 + C_\epsilon \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2\|f\|^2 + C_\epsilon \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2\|u_t^k\|^2$$

$$+ C_\epsilon \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2\|u^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla u^k\|^2 + C_\epsilon\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|u^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla u_t^k\|^2$$

$$+ C_\epsilon\|\rho^k\|_{L^\infty}^2 \|u_t^k\|_{L^3}^2 \|\nabla u^k\|_{L^6}^2.$$

Agora tomando $\epsilon < \frac{1}{6}$, obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2 + C_1\|u_{tt}^k\|^2 \le C_2^k(t) + C_3^k(t)\|\nabla u_t^k\|^2$$

onde $C_1 = C_1(\alpha) > 0$; $C_2^k(t) = C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|f_t\|^2 + C\|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2\|u^k\|_{L^\infty}^2\|\nabla u^k\|^2$

$+ C\|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2\|f\|^2 + C\|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2\|u_t^k\|^2$; $C_3^k(t) = C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|u^k\|_{L^\infty}^2 + C\|\rho^k\|_{L^\infty}^2\|P\Delta u^k\|^2.$

Tendo em conta os lemas do capítulo I, temos que

$$C_2^k(t) \le C_2(t) \le \sup_{0 \le t \le T} C_2(t) = C_2;$$

$$C_3^k(t) \le C_3(t) \le \sup_{0 \le t \le T} C_3(t) = C_3.$$

Assim obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2 + C_1\|u_{tt}^k\|^2 \le C_2 + C_3\|\nabla u_t^k\|^2. \tag{3.2}$$

Por outro lado, considerando $\epsilon = \delta_o$, $\ell(\delta) = \|\nabla u_t^k\|^2(\delta_o)$ no lema 3.1, existe $t(\delta_o) \in [0,\delta_o]$ tal que

$$\|\nabla u_t^k\|^2(t(\delta_o)) \le \frac{G(\delta_o)}{\delta_o} \tag{3.3}$$

onde $G(t)$ é a função dada no lema 1.2.

Agora integrando a desigualdade (3.2) de $t(\delta_o) > 0$ a t, obtém-se:

$$\|\nabla u_t^k\|^2(t) + C_1\int_{t(\delta_o)}^{t}\|u_{tt}^k\|^2 d\tau \le C_2 t + C_3\int_{t(\delta_o)}^{\tau}\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau + \|\nabla u_t^k\|(t(\delta_o))$$

$$\le C_2 t + C_3\int_{o}^{t}\|\nabla u_t^k\|^2 d\tau + \|\nabla u_t^k\|^2(t(\delta_o))$$

$$\le C_2 t + C_3(t)G(t) + \frac{G(\delta_o)}{\delta}$$

$$\equiv \tilde{F}(t,\delta_o),$$

de onde

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \|\nabla u_t^k\|^2(t) \le \tilde{F}(t,\delta_o), \ t \ge \delta_o \\ \displaystyle\int_{\delta_o}^{t} \|u_{tt}^k\|^2 dt \le \frac{1}{C_1}\tilde{F}(t,\delta_o), \ t \ge \delta_o. \end{cases}$$

Agora colocando $v = -P\Delta u_t^k$ em (3.1), obtém-se:

$$\|P\Delta u_t^k\|^2 = (\rho_t^k u_t^k,\ P\Delta u_t^k) + (\rho^k u_{tt}^k,\ P\Delta u_t^k) + ((\rho^k u^k \nabla u^k)_t,\ P\Delta u_t^k)$$

$$- ((\rho^k f)_t, P\Delta u_t^k).$$

Agora novamente apelando aos lemas do capítulo I e o provado acima, obtém-se

$$|(\rho^k f)_t,\ P\Delta u_t^k)| \le C_\epsilon A_1 + \epsilon\ \|P\Delta u_t^k\|^2$$

$$|(\rho_t^k u_t^k, P\Delta u_t^k)| \le C_\epsilon A_2 + \epsilon\ \|P\Delta u_t^k\|^2$$

$$|(\rho^k u_{tt}^k,\ P\Delta u_t^k)| \le C_\epsilon \beta^2 \|u_{tt}^k\|^2 + \epsilon\ \|P\Delta u_t^k\|^2$$

$$|(\rho_t^k u^k \nabla u^k,\ P\Delta u_t^k)| \le C_\epsilon A_3 + \epsilon\ \|P\Delta u_t^k\|^2$$

$$|(\rho^k u_t^k \nabla u^k,\ P\Delta u_t^k)| \le C_\epsilon A_4 \|\nabla u_t^k\|^2 \ + \epsilon \|P\Delta u_t^k\|^2$$

$$|(\rho^k u^k \nabla u_t^k,\ P\Delta u_t^k)| \le C_\epsilon A_5 \|\nabla u_t^k\|^2 + \epsilon\|P\Delta u_t^k\|^2$$

logo

$$(1 - 6\ \epsilon)\ \|P\Delta u_t^k\|^2 \le AC_\epsilon + BC_\epsilon \|\nabla u_t^k\|^2 + \beta^2 C_\epsilon \|u_{tt}^k\|^2.$$

Tomando $\epsilon < \frac{1}{6}$ e integrando de $\delta_o > 0$ a t, obtém-se:

$$(3.6) \qquad \int_{\delta_o}^{t} \|P\Delta u_t^k\|^2 dt \le C\ A + B\ C\ \tilde{F}(t,\delta_o) + B\int_{\delta}^{t} \|u_{tt}^k\|^2 d\tau$$

$$\le A + \frac{B}{\overline{C}_1}\ \tilde{F}(t,\delta_o) + C\ B\ \tilde{F}(t,\delta_o),$$

no intervalo $[\delta_o, T]$.

Agora voltando à equação (1.24), obtém-se:

$$\|P\Delta\nabla u^k\|^2 \le C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|f\|^2 + C_\epsilon \|\rho^k\|_{L^\infty} \|\nabla f\|^2 + C_\epsilon \|\rho^k\|_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2_{L^3} \|\nabla u^k\|^2_{L^6}$$

$$+ C_\epsilon \|\rho^k\|_{L^\infty} \|u^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla^2 u^k\|^2 + C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|u^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2$$

$$+ C_\epsilon \|\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla u_t^k\|^2 + C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|u_t^k\|^2 + 7\ \epsilon\ \|P\Delta\nabla u^k\|^2,$$

agora tomando $\epsilon < \frac{1}{7}$, temos, em vista das estimativas dos lemas do capítulo I e (3.5) que

$$(3.7) \qquad \|P\Delta\nabla u^k\|^2 \le A_1 + C\beta^2\, \tilde{F}(t,\delta_o)t \in [\delta_o,T].$$

Para obter uma estimativa uniforme de $\|u^k_{tt}\|^2$ precisamos de uma estimativa do $\|\nabla\rho^k\|_{L^r}$ com $3 \le r \le 6$. Para isto, tomando o gradiente na equação da continuidade obtemos:

$$\nabla\rho^k_t + (u^k\nabla)\nabla\rho^k + (\nabla\rho^k\nabla)u^k + \nabla\rho^k \times \text{rot } u^k = 0,$$

logo para obter uma estimativa do $\nabla\rho^k_t$, precisamos de uma estimativa de $\nabla\rho^k \times$ rot u^k e $D^2\rho^k$. O primeiro termo é facilmente estimado pois

$$(3.8) \qquad \|\nabla\rho^k \times \text{rot } u^k\|_{L^r} \le C\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\|\text{rot } u^k\|_{L^r} \le \tilde{C}\|\nabla u^k\|_{L^r}$$

Para estimar o segundo termo devemos trabalhar mais.

Recorde-se a, equação (1.11)

$$(3.9) \qquad \rho^k,(t,\ x) = \rho_o(y^k(0,\ t,\ x))$$

de onde

$$\frac{\partial\rho^k}{\partial x_j}(t,\ x) = \sum_{\ell=1}^{3}\frac{\partial\rho_o}{\partial y^k_\ell}(y^k(0,\ t,\ x))\frac{\partial y^k_\ell}{\partial x_j}(0,\ t,\ x).$$

Assim

$$\frac{\partial^2 \rho^k}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) = \sum_{\ell,m=1}^{3} \frac{\partial^2 \rho_o}{\partial y_m^k\, \partial y_\ell^k} (y^k(0,\ t,\ x)) \frac{\partial y_m^k}{\partial x_i} \frac{\partial y_\ell^k}{\partial x_j}$$

(3.10)

$$+ \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial \rho_o}{\partial y_\ell^k} (y^k(0,t,x)) \frac{\partial^2 y_\ell^k}{\partial x_i \partial x_j} .$$

Por outro lado, (veja Ladyzhenskaya e Solonnikov [17], pág.702), temos

$$\frac{\partial y_\ell^k}{\partial x_j} = \delta_{\ell j} - \sum_{p=1}^{3} \int_\tau^t \frac{\partial u_\ell^k}{\partial y_p^k} (y^k(\xi,t,x),\xi) \frac{\partial y_p^k}{\partial x_j} (\xi,t,x)d\xi$$

de onde,

$$\frac{\partial^2 y_\ell^k}{\partial x_i \partial x_j} = - \sum_{p,q=1}^{3} \int_\tau^t \frac{\partial^2 u_\ell^k}{\partial y_p^k\, \partial y_q^k} (y^k(\xi,t,x),\xi) \frac{\partial y_q^k}{\partial x_i} (\xi,t,x) \frac{\partial y_p^k}{\partial x_j} (\xi,t,x)d\xi$$

$$- \sum_{p=1}^{3} \int_\tau^t \frac{\partial u_\ell^k}{\partial y_p^k} (y^k(\xi,t,x),\xi) \frac{\partial^2 y_p^k}{\partial x_i\, \partial x_j} (\xi,t,x)d\xi,$$

portanto:

$$(3.21) \qquad \left\| \frac{\partial^2 y_\ell^k}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|_{L^r} \le \sum_{p,q=1} \int_\tau^t \left\| \frac{\partial^2 u_\ell^k}{\partial y^k_p \partial y^k_q} \right\|_{L^r} \left\| \frac{\partial y_q^k}{\partial x_i} \right\|_{L^r} \left\| \frac{\partial y_p^k}{\partial x_j} \right\|_{L^\infty}$$

$$+\sum_{p=1}^{3}\int_\tau^t \left\| \frac{\partial u_\ell^k}{\partial y_p^k}\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^2 y_p^k}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|_{L^r}$$

Somando em i, j obtemos:

$$\|D^2y_\ell^k\|_{L^r} \le \int_\tau^t \|D^2u_\ell^k\|_{L^r}\sum_{q=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial y_q^k}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty}^2 + \int_\tau^t \|Du_\ell^k\|_{L^\infty}\|D^2y_\ell^k\|_{L^r}$$

$$\le C + C_1\int_\tau^t \|Du_\ell^k\|_{L^\infty}\|D^2y_\ell^k\|_{L^r}.$$

Fazendo uso de Gronwall obtém-se:

$$\|D^2y_\ell^k\|_{L^r} \le C\exp\left(C_1\int_\tau^t \|Du_\ell^k\|_{L^\infty}ds\right)$$

$$\le C\exp(C_1\tilde{V}(t)).$$

Agora voltando a (3.9), temos:

$$\|D^2\rho^k\|_{L^r} \le \|D^2\rho_o\|_{L^r}\|Dy^k\|_{L^\infty}^2 + \|D\rho_o\|\|D^2y^k\|_{L^r} \tag{3.12}$$

$$\le C_2 + C_3\exp(C_1\tilde{V}(t).$$

Assim, temos em virtude dos lemas 1.2, 1.5 e (3.12)

$$(3.13)\qquad \|\nabla\rho^k_t\|_{L^r} \le \|(u^k\nabla)\nabla\rho^k\|_{L^r} + \|(\nabla\rho^k\nabla)u^k\|_{L^r} + \|\nabla\rho^k \times \operatorname{rot} u^k\|_{L^r}$$

$$\le C\ \|u^k\|_{L^\infty}\|D^2\rho^k\|_{L^r} + 2C\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla u^k\|_{L^r}$$

$$\le C\ K(t)(C_2 + C_3\ \exp(C_1\tilde{V}(t)) + 2C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}J(t)H(t)$$

$$\equiv \Psi_1(t).$$

Agora estamos em condições de obter uma estimativa de $\|u^k_{tt}\|^2$. De fato, derivando (3.1) com respeito a t e colocando $v = u^k_{tt}$, temos

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \|(\rho^k)^{1/2}u^k_{tt}\|^2 + \|\nabla u^k_{tt}\|^2 = -\ (\rho^k_t u^k_{tt},\ u^k_{tt}) + (\rho^k_{tt}f,\ u^k_{tt})$$

$$+\ 2(\rho^k_t f_t,\ u^k_{tt}) + (\rho^k\ f_{tt},\ u^k_{tt}) - (\rho^k_{tt}u^k_t,\ u^k_{tt}) + ((\rho^k u^k\nabla u^k)_{tt},\ u^k_{tt}).$$

Mais,

$$\rho^k_{tt} = -\ u^k_t\nabla\rho^k - u^k\nabla\rho^k_t.$$

Então, para $3 \le r \le 6$

$$\|\rho^k_{tt}\|_{L^r} \le \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\|u^k_t\|_{L^r} + \|u^k\|_{L^\infty}\ \|\nabla\rho^k_t\|_{L^r}$$

$$\le \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla u^k_t\| + \|u^k\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^k_t\|_{L^r}$$

$$\le \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}h(t)F(\tilde{t},\ \delta_o)^{1/2} + K(t)\psi_1(t)$$

$$\equiv \psi_1(t,\ \delta_o)$$

tendo em conta os lemas do capítulo I, (3.5) e (3.11).

Portanto,

$$|(\rho^k_{tt}f,\ u^k_{tt})| \le C_\epsilon \|\rho^k_{tt}\|^2_{L^3}\|f\|^2_{L^6} + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$\le C_\epsilon\ \psi_1^2(t,\ \delta_o)\|\nabla f\|^2 + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$|(\rho^k_{tt}u^k_t\ ,\ u^k_{tt})| \le C_\epsilon \|\rho^k_{tt}\|_{L^3}\|u^k_t\|^2_{L^6} + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$\le C_\epsilon\ \psi_1^2(t,\ \delta_o)\tilde{F}(t,\ \delta_o) + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$|(\rho^k_t u^k_{tt},\ u^k_{tt})| \le \|\rho^k_t\|_{L^\infty}\|u^k_{tt}\|^2$$

$$\le C\ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}J(t)\|u^k_{tt}\|^2$$

$$\left|(\rho^k f_{tt}, u^k_{tt})\right| \le C_\epsilon\ \|\rho^k\|^2_{L^\infty}\|f_{tt}\|^2 + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$\le C_\epsilon\ \beta^2\|f_{tt}\|^2 + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$\left|(2\ \rho^k_t f_t,\ u^k_{tt})\right| \le 4\ C_\epsilon\|\rho^k_t\|^2_{L^\infty}\|f_t\|^2 + \epsilon \|u^k_{tt}\|^2$$

$$\le C_\epsilon\ \|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty}J(t)^2\|f_t\|^2 + \epsilon\ \ \|u^k_{tt}\|^2.$$

Também temos:

$$(\rho^k u^k \nabla u^k)_{tt} = \rho^k_{tt} u^k \nabla u^k + 2\rho^k u^k_t \nabla u^k + 2\,\rho^k_t u^k \nabla u^k_t + 2\rho^k u^k_t \nabla u^k_t$$

$$+ \rho^k u^k_{tt} \nabla u^k + \rho^k u^k \nabla u^k_{tt}.$$

Assim,

$$|(\rho^k u^k_{tt} \nabla u^k,\ u^k_{tt})| \le \|\rho^k\|_{L^\infty} \|\nabla u^k\| \|u^k_{tt}\|^2_{L^4}$$

$$\le \|\rho^k\|_{L^\infty} \|\nabla u^k\| \|u^k_{tt}\|^{1/2} \|\nabla u^k_{tt}\|^{3/2}$$

$$\le \|\rho^k\|^4_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^4 \|u^k_{tt}\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u^k_{tt}\|^2$$

$$\le \beta^4 \tilde{F}(t)^2 \|u^k_{tt}\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u^k_{tt}\|^2$$

$$|(\rho^k u^k \nabla u^k_{tt},\ u^k_{tt}) \le \|\rho^k\|_{L^\infty} \|u^k\|_{L^\infty} \|u^k_{tt}\| \|\nabla u^k_{tt}\|$$

$$\le C_\epsilon \|\rho^k\|^2_{L^\infty} \|u^k\|^2_{L^\infty} \|u^k_{tt}\| + \epsilon \|\nabla u^k_{tt}\|^2$$

$$\le C_\epsilon \beta^2 K(t) \|u^k_{tt}\|^2 + \epsilon \|\nabla u^k_{tt}\|^2$$

$$|(2\,\rho^k_t u^k_t \nabla u^k, u^k)| \le 2\,\|\rho^k_t\|_{L^\infty} \|u^k_t\|_{L^4} \|\nabla u^k\|_{L^4} \|u^k_{tt}\|$$

$$\leq 4\ C_\epsilon \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 \|P\Delta u^k\|^2 \|\nabla u_t^k\| + \epsilon \|u_{tt}^k\|^2$$

$$\leq C_\epsilon \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} J(t)H(t)F(t,\delta_o) + \epsilon \|u_{tt}^k\|^2$$

$$|(2\ \rho^k u_t^k \nabla u_t^k,\ u_{tt}^k)| \leq 2\|\rho^k\|_{L^\infty} \|u_t^k\|_{L^4} \|\nabla u_t^k\| \|u_{tt}^k\|_{L^4}$$

$$\leq 4\ C_\epsilon \|\rho^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u_t^k\|^4 + \epsilon \|\nabla u_{tt}^k\|^2$$

$$\leq C_\epsilon\ \beta^2 F(t,\delta_o)^2 + \epsilon \|\nabla u_{tt}^k\|^2$$

$$|(2\rho_t^k u^k \nabla u_t^k,\ u_{tt}^k)| \leq 2\ \|\rho_t^k\|_{L^\infty} \|u^k\|_{L^\infty} \|\nabla u_t^k\| \|u_{tt}^k\|$$

$$\leq 2\ C_\epsilon \|\rho_t^k\|_{L^\infty}^2 \|u^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u_t^k\|^2 + \epsilon \|u_{tt}^k\|^2$$

$$\leq\ C_\epsilon \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}^2 J(t)^2 K(t)F(t,\delta_o) + \epsilon \|u_{tt}^k\|^2$$

$$|(\rho_{tt}^k u^k \nabla u^k,\ u_{tt}^k)| \leq C_\epsilon\ \|\rho_{tt}^k\|_{L^3}^2 \|u^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u^k\|_{L^6}^2 + \epsilon \|u_{tt}^k\|^2$$

$$\leq C_\epsilon\ K(t)H(t)\Psi_1(t,\delta_o)^2 + \epsilon \|u_{tt}^k\|^2.$$

Chegamos finalmente a:

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \|(\rho^k)^{1/2} u_{tt}^k\|^2 + (\ \frac{1}{2} - 2\ \epsilon\ )\|\nabla u_{tt}^k\|^2$$

$$\leq \left\{5\ \epsilon + C\ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} J(t) + \beta^4 \tilde{F}(t)^2 + C_\epsilon \beta^2 K(t)\right\} \|u_{tt}^k\|^2 + \phi_\epsilon(t,\ \delta_o),$$

onde

$$\phi_\epsilon(t,\delta_o) = C_\epsilon \Psi_1^2(t,\ \delta_o)\|\nabla f\|^2 + C_3\Psi_1^2(t,\ \delta_o)\tilde{F}(t,\ \delta_o) + C_\epsilon \beta^2\|f_{tt}\|^2$$

$$+ C_3\|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty} J(t)^2\|f_t\|^2 + C_\epsilon\|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty} J(t)^2 H(t)F(t,\ \delta_o)$$

$$+ C_\epsilon\ \beta^2 F(t,\ \delta_o)^2.$$

Tomando $\epsilon = \epsilon_o < 1/4$, obtém-se:

$$\text{(3.14)} \qquad \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\|(\rho^k)^{1/2}u^k_{tt}\|^2 + C\|\nabla u^k_{tt}\|^2 \le \varphi(t)\|u^k_{tt}\|^2 + \phi(t,\ \delta_o)$$

onde $\phi(t,\delta_o) = \phi_o(t,\delta_o)$ e $\varphi(t) = 5\ \epsilon_o + \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} J(t) + \beta^4\tilde{F}(t)^2$

$+ C_\epsilon\ \beta^2 K(t).$

Por outro lado, usando o lema 3.1 com $\epsilon = \delta_1$, $a = \delta_o$, $\ell(s) = \|u^k_{tt}\|^2(s)$, existe $t(\delta_1) \in [\delta_o,\ \delta_1]$ tal que

$$\|u^k_{tt}\|^2(t(\delta_1)) \le \frac{1\ \tilde{F}(\delta_1,\ \delta_o)}{C_1\ \delta_1}$$

De onde se deduz, integrando a desigualdade (3.14) de $t(\delta_1)$ a t

$$\text{(3.15)} \qquad \|(\rho^k)^{1/2}u^k_{tt}\|(t) + C\int_{t(\delta_1)}^{t}\|\nabla u^k_{tt}\|^2 dt$$

$$\leq \beta \|u^k_{tt}\|(t(\delta_1)) + \int_{t(\delta_1)}^{t} \phi(\tau,\ \delta_o)d\tau$$

$$+ \sup_{t(\delta_1) \leq \tau \leq t} \varphi(t) \int_{t(\delta_1)}^{t} \|u^k_{tt}\|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{\beta}{C_1} \quad \frac{\tilde{F}(\delta_1, \delta)}{\delta_1} + \int_{\delta}^{t} \phi(\tau, \delta)d\tau$$

$$+ \sup_{t(\delta_1) \leq \tau \leq t} \varphi(\tau) \int_{\delta}^{t} \|u^k_{tt}\|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{\beta}{C_1} \quad \frac{\tilde{F}(\delta_1, \delta)}{\delta_1} + \sup_{t(\delta_1) \leq \tau \leq t} \varphi(\tau) \ \frac{1}{C}\ \tilde{F}(\tau, \delta) + \frac{1}{C_1}\ \tilde{F}(t,\ \delta_o)$$

$$= \tilde{F}(t, \delta_o,\ \delta_1).$$

A partir desta estimativa é fácil concluir que

(3.16) $$\|P\Delta u^k_t\|^2(t) \leq H(t, \delta_o,\ \delta_1).$$

Para fechar o primeiro ciclo de estimativas devemos obter uma estimativa de $\|\nabla\rho^k_t\|_{L^\infty}$ e $\|\rho^k_{tt}\|_{L^\infty}$.

Para isto precisamos inicialmente ter uma estimativa das aproximações u^k na norma $H^4(\Omega)$. Antes disso, observemos os seguintes fatos:

a) $P: H^{\ell}(\Omega) \to H^{\ell}(\Omega) \ \forall \ \ell \geq 0$.

De fato, pois se $g \in H^{\ell}(\Omega)$, então considerando o problema de Stokes:

$$- \Delta v + \nabla q = g$$

$$\operatorname{div} v = 0$$

concluimos, $v \in H^{\ell+2}(\Omega)$ e $q \in H^{\ell+1}(\Omega)/\mathbb{R}$. Em particular $\Delta v \in H^{\ell}(\Omega)$, de onde

$$Pg = - \Delta v \in H^{\ell}(\Omega).$$

Agora fazendo uso dos teoremas de imersão de Sobolev, temos

b) $P: C^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$.

Também temos:

c) $P_k: C^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$.

De fato $P_k(g) = \sum_{i=1}^{k} d_i w^i$, logo como os $w^i \in C^{\infty}(\Omega)$ e a soma é finita, obtém-se: $P_k(g) \in C^{\infty}(\Omega)$.

Assim de b) e c) conclui-se que

d) $P - P_k : C^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$.

Assim, da equação

$$\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \Delta u^k + (\varphi^k + \nabla p^k) = \rho^k f \tag{3.17}$$

que é equivalente a formulação fraca, concluimos que

$$(P - P_k)(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \Delta u^k - \rho^k f) \equiv \varphi^k$$

pertence a $C^\infty(\Omega)$ e $\nabla p^k \in C^\infty(\Omega)$.

Logo, tomando o Laplaciano na equação (3.17), tem-se

$$\Delta(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k) - \Delta^2 u^k + \Delta\varphi^k + \Delta\nabla p^k = \Delta(\rho^k f)$$

é no sentido de funções, aplicando P_k na equação anterior temos:

$$P_k\Delta(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k) - P\Delta^2 u^k = P_k(\Delta(\rho^k f))$$

Já que $P_k\Delta = P_k P\Delta = P\Delta$, pois $< w^1, \dots, w^k >^\perp$ (ortogonal) é invariante por $P\Delta$.

Agora multiplicamos a equação anterior por $\Delta^2 u^k$ e integramos sobre Ω ;

$$\|\Delta^2 u^k\|^2 = (\Delta\rho^k u_t^k, \Delta^2 u^k) + 2\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\rho^k}{\partial x_i} \frac{\partial u_t^k}{\partial x_i}, \Delta^2 u^k\right)$$

$$+ (\Delta\rho^k (u^k\nabla)u^k, \Delta^2 u^k) + 2\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\rho^k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\nabla\right) u^k, \Delta^2 u^k\right)$$

$$+ 2\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\rho^k}{\partial x_i} (u^k\nabla) \frac{\partial u^k}{\partial x_i} u^k, \Delta^2 u^k\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{3} \rho^k \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\nabla\right) \frac{\partial u^k}{\partial x_i}, \Delta^2 u^k\right) +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \rho^k \left[\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_i^2} \quad \nabla \right] u^k, \nabla^2 u^k \right) + \left(\rho^k (u^k \nabla) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u^k}{\partial x_i^2}, \Delta^2 u^k \right)$$

$$+ (\Delta\rho^k f, \Delta^2 u^k) + 2 \left(\sum_{i=1} \frac{\partial \rho^k}{\partial x_i} \; \frac{\partial f}{\partial x_i}, \Delta^2 u^k \right) + (\rho^k \Delta f, \Delta^2 u^k).$$

De onde,

$$\|\Delta^2 u^k\|^2 \le C_\epsilon \|\Delta\rho^k\|^2_{L^3} \|f\|^2_{L^6} + C_\epsilon \|\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\Delta f\|^2 + C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla f\|^2$$

$$+ C_\epsilon \|u^k\|^2_{L^\infty} \|\Delta\rho^k\|^2_{L^3} \|\nabla u^k\|^2_{L^6} + C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2_{L^6} \nabla u^k\|^2_{L^3}$$

$$+ C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|u^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2 + C_\epsilon \|\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2_{L^6} \|\nabla^2 u^k\|^2_{L^3}$$

$$+ C_\epsilon \|\nabla u^k\|^2_{L^6} \|\Delta u^k\|^2_{L^3} \|\rho^k\|^2_{L^\infty} + C_\epsilon \|\rho^k\|^2_{L^\infty} \|u^k\|^2_{L^\infty} \|\Delta u^k\|$$

$$+ C_\epsilon \|\Delta\rho^k\|^2_{L^6} \|u^k_t\|^2_{L^3} + C_\epsilon \|\nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\nabla u^k_t\|^2 + C_\epsilon \|\rho^k\|^2_{L^\infty} \|\Delta u^k_t\|^2 + 12\epsilon \|\Delta^2 u^k\|^2$$

Agora tomando $\epsilon < 1/12$ e fazendo uso dos lemas do capítulo I e as estimativas (3.5), (3.7), (3.12), (3.16), obtemos:

$$(3.18) \quad \|\Delta^2 u^k\|^2 \le C_1 + C\left\{ H(t,\delta_o,\delta_1) + \tilde{F}(t,\delta_o) + C\beta^2 \tilde{F}(t,\delta_o) \right\} = G(t,\delta_o,\delta_1)$$

Agora estamos em condições de provas as estimativas $\|\nabla\rho_t^k\|_{L^\infty}$ e $\|\rho_{tt}^k\|_{L^\infty}$. Voltando à desigualdade (3.11), temos

$$\left\| \frac{\partial^2 y^k}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|_{L^\infty} \leq \sum \int_\tau^t \left\| \frac{\partial^2 u_\ell^k}{\partial y_q^k\, \partial y_p^k} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial y_q^k}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial y_p^k}{\partial x_j} \right\|_{L^\infty}$$

$$+ \sum \int_\tau^t \left\| \frac{\partial u_\ell^k}{\partial y_p^k} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial^2 y_p^k}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|_{L^\infty} .$$

Consequentemente,

$$\|D^2 y_\ell^k\|_{L^\infty} \leq \int_\tau^t \|D^2 u_\ell^k\|_{L^\infty} \|D y_p^k\|_{L^\infty}^2 + \int_\tau^t \|D u_\ell^k\|_{L^\infty} \|D^2 y_\ell^k\|_{L^\infty}$$

$$\leq C + C_1 \int_\tau^t \|D^2 y_\ell^k\|_{L^\infty}.$$

Usando o lema de Gronwall:

$$\|D^2 y_\ell^k\|_{L^\infty} \leq C \exp C_1 (t - \tau).$$

Assim

$$\|D^2 \rho^k\|_{L^\infty} \leq 2 \|D^2 \rho_o\|_{L^\infty} \|D^2 y_\ell^k\|_{L^\infty}$$

$$\leq 2\, C \exp C_1 (t - \tau).$$

Com o qual,

(3.19) $$\|\nabla\rho_t^k\|_{L^\infty} \le \|u^k\|_{L^\infty}\|D^2\rho^k\|_{L^\infty} + C\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\|\nabla u^k\|_{L^\infty}$$

$$\le 2K(t)C \exp C_1(t - \tau) + C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}J(t)\|P\Delta\nabla u^k\|$$

$$\le 2K(t)\ C \exp C_1(t - \tau) + C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}J(t)(A_1 + \tilde{F}(t,\ \delta_o))$$

$$=\Psi_1(t,\ \delta_o).$$

Agora, derivando a equação da continuidade com respeito a t e tomando a norma L^∞, obtemos:

(3.20) $$\|\rho_{tt}^k\|_{L^\infty} \le \|u_t^k\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} + \|u^k\|_{L^\infty}\|\nabla\rho_t^k\|_{L^\infty}$$

$$\le \|P\Delta u_t^k\|\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}J(t) + K(t)\Psi_1(t,\ \delta_o)$$

$$\le (H(t,\delta_o,\delta_1))^{1/2}\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}J(t) + K(t)\Psi_1(t,\ \delta_o).$$

As estimativas anteriores constituem um ciclo. Faremos o seguir um esboço das estimativas do próximo ciclo e que podem ser obtidas similarmente.

Derivando novamente a equação (3.1) com respeito a t e colocando $v = u_{ttt}^k$, obtém-se; fazendo um integração por partes e usando as estimativas já obtidas conclule-se que em um intervalo $[\delta_2,T]$ $\delta_2 > \delta_1 > \delta_o$, as seguintes estimativas

$$(3.21) \qquad \|\nabla u^k_{tt}\|^2, \int_{\delta_2}^{t} \|u^k_{ttt}\|^2 d\tau \le F_1(t, \delta_o, \delta_1, \delta_2)$$

o valor inicial $\|\nabla u^k_{tt}\|^2$, obtém-se apelando ao lema 3.1 e a estimativa (3.15). Em continuação obtém-se

$$(3.22) \qquad \int_{\delta_2}^{t} \|P\Delta u^k_{tt}\|^2 d\tau \le CF_1(t, \delta_o, \delta_1, \delta_2).$$

Para continuar é preciso obter uma estimativa de $\|\nabla \rho^k_{tt}\|_{L^r}$, $3 \le r \le 6$, a qual obtém-se derivando convenientemente novamente a equação (3.9), e utiliza-se as estimativas já obtidas. A seguir deriva-se a equação (3.1) novamente com respeito a t, e coloca-se $v = u^k_{ttt}$, isto nos dá uma estimativa de

$$(3.23) \qquad \|u^k_{ttt}\|^2, \int_{\delta_3}^{t} \|\nabla u^k_{ttt}\|^2 d\tau \le \tilde{F}_1(t, \delta_o, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

onde $\delta_3 > \delta_2 > \delta_1 > \delta_o$. Para obter uma estimativa uniforme em k do valor inicial de $\|u^k_{ttt}\|^2$ em $t = \delta_3$, usa-se novamente o lema 3.1 junto com (3.21). A partir de (3.23) e fácil concluir que

$$\|P\Delta u^k_{tt}\|^2 \le H(t, \delta_o, \delta_1, \delta_2).$$

Em continuação é necessária uma estimativa $\| u^k\|_{H^4}$. Daí finalmente, outra vez a partir da equação (3.9), derivada convenientemente, tomando a norma L^∞, conclui-se uma estimativa de $\|\nabla \rho^k_{tt}\|_{L^\infty}$ e consequentemente de $\|\rho^k_{ttt}\|_{L^\infty}$, e fecha-se o ciclo novamente.

Esta sequência de ciclos de estimativas pode ser prosseguido com argumentos anâlogos. Pictóricamente, os ciclos de estimativas são como seguem:

$$\int_{\delta_3}^{t} \|\partial^4 u_t^k\|^2 dt, \|\nabla\partial_t^3 u^k\|^2 \leq F_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \quad \text{em } [\delta_3,T]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\delta_3}^{t} \|P\Delta\partial^3 u_t^k\|^2 dt \leq C\, F_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \quad \text{em } [\delta_3,T]$$

$$\Downarrow$$

$$\|\nabla\partial^3 \rho_t^k\|_{L^r}^2 \leq \Psi(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2) \qquad 3 \leq r \leq 6$$

$$\Downarrow$$

$$\|\partial_t^4 \rho^k\|_{L^r}^2 \leq \tilde{\Psi}(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \qquad 3 \leq r \leq 6$$

$$\Downarrow$$

$$\|\partial_t^4 u^k\|^2, \int_{\delta_4}^{t} \|\nabla\partial_t^4 u^k\|^2 dt \leq \tilde{F}_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\Downarrow$$

$$\|P\Delta\partial_t^3 u^k\|^2 \leq H(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\Downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\|u^k\|_{H^8} \le K(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\downarrow$$

$$\|\nabla\partial_t^3\rho^k\|_{L^\infty} \le \Psi_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\downarrow$$

$$\|\nabla\partial_t^4\rho^k\|_{L^\infty} \le \tilde{\Psi}_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\delta_4}^{t} \|\partial_t^5 u^k\|^2 dt,\ \|\nabla\partial_t^4 u^k\|^2 \le F_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\delta_4}^{t} \|P\Delta\partial_t^4 u^k\|^2 dt \le C\ F_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\downarrow$$

$$\|\nabla\partial_t^4\rho^k\|_{L^r} \le \Psi(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3) \qquad 3 \le r \le 6$$

$$\downarrow$$

$$\|\partial_t^5\rho^k\|_{L^r} \le \tilde{\Psi}_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$$

$$\downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|\partial_t^5 u^k\|^2,\ \int_{\delta_5}^{t} \|\nabla\partial_t^5 u^k\|^2 dt \le \tilde{F}_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|P\Delta\partial_t^4 u^k\|^2 \le H(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|u^k\|_{H^7} \le K(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|\nabla\partial_t^4 \rho^k\|_{L^\infty} \le \Psi_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|\partial_t^5 \rho^k\|_{L^\infty} \le \tilde{\Psi}_1(t,\delta_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)}$$

e assim por diante.

A seguir os teoremas de imersão de Sobolev permite-nos, concluir que u^k, $\rho^k \in C^\infty(\Omega \times [\delta, T])$. Um argumento padrão fornece então que u, $\rho \in C^\infty(\Omega \times [\delta, T])$.

Agora, usando a mesma argumentação da proposição 11, Capítulo I, conclui-se que a pressão $p \in C^\infty(\Omega \times [\delta,T])$ ∎

Observação 3.3. a) Gostaríamos de resaltar que as estimativas obtidas a partir da equação (3.17) poderiam ser obtidas diretamente da equação (3. 1) colocando $v = \Delta u^k$. Porém, isto exigiria que a força externa f fosse nula no bordo; o que excluiria forças externas realistas (forças gravitacionais, por exemplo).

b) Se $\partial\Omega$ for regular (classe C^∞) e $f \in C^\infty(\bar{\Omega} \times (0, T])$ então, por um argumento padrão, pode-se concluir que $u, \rho \in C^\infty(\bar{\Omega} \times (0, T])$. Para obter a regularidade em $t = 0$, são necessárias condições de compatibilidade sobre os dados, as quais parecem ser muito difícies de vereficar na prática, como foi observado por J. Heywood e R. Ranacher [13]para o caso das equações de Navier-Stokes usuais, isto também se verifica no caso das equações de Navier-Stokes não homogeneas.

c) Os argumentos usados neste capítulo, juntamente com aqueles do Teorema 1.1, fornecem um teorema de regularidade para soluções fracas com dados iniciais $u_o \in V$. Isto vale para soluções construidas a partir das aproximações Semi-Galerkin como por exemplo aquela dada por Kim [15] (Teorema 2.1, pág. 21).

d) No caso em que $\rho_o \in W^{2,\infty}(\Omega)$, das estimativas (3.18) e (3.19) conclule-se que $\rho_t^k \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ e $\nabla\rho^k \in L^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ com normas uniformemente limitadas em k. Neste caso usando argumentos de compacidade (Lema de Aubin), conclule-se que $\rho^k \to \rho$ forte em $L^p(0, T; W^{1,q}(\Omega))$ para todo $p, q \in (1,\infty)$. ■

CAPITULO IV

ESTIMATIVAS DE ERRO LOCAIS NO TEMPO

Neste capitulo vamos apresentar algumas estimativas do erro cometido ao aproximar a solução do problema pelo método de Semi-Galerkin espectral. Para isto basear-nos-emos no teorema de existência local; assim, os resultados serão locais no tempo e veremos que o erro aumenta exponencialmente com o tempo. A questão da possibilidade de estimativas de erro uniforme no tempo será tema do próximo capítulo.

A seguir enunciaremos alguns fatos básicos que poderão ser encontrados no artigo de R. Rautmann [23].

Se $f \in V$, então a estimativa de erro

$$\|f - P_k f\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|\nabla f\|^2 \tag{4.1}$$

é satisfeita. Se ademais $f \in V \cap H^2(\Omega)$, então

$$\|f - P_k f\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}^2} \|P\Delta f\|^2 \tag{4.2}$$

e

$$\|\nabla f - \nabla P_k f\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|P\Delta f\|^2 \tag{4.3}$$

Outro fato conhecido é:

$$\int_\Omega ((P_n - P_k)f)w = \int_\Omega f(I - P_k)u^n \tag{4.4}$$

que é satisfeito para qualquer $f \in L^2(\Omega)$, sendo $n > k$ e $w = u^n - u^k$. O resultado anterior também é válido se w é trocado por w_t ou ∇w.

Também será necessária a seguinte variante do lema de Gronwall.

Seja $a(t) \geq 0$ uma função absolutamente contínua com $a'(t) \geq 0$ e $b(t) \geq 0$ somável em $[0,T]$. Suponha que a desigualdade integral

$$\varphi(t) + \int_o^t \varphi^*(\tau)d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_o^t b(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

é satisfeita para as funções contínuas positivas φ e φ^* sobre $[0,T]$, com uma constante $\lambda > 0$. Então

$$\varphi(t) + \int_o^t \varphi^*(\tau)d\tau \leq \left\{1 + \int_o^t b(\tau)d\tau\right\} \frac{a(t)}{\lambda} \exp\left\{\int_o^t b(\tau)d\tau\right\} .$$

Outros resultados importantes são:

$$(4.5) \quad \begin{cases} (P_k f, g) = (f, P_k g) \\ ((P_n - P_k)f, g) = (f, (P_n - P_k)g) \\ (Pf, g) = (f, Pg) \\ ((P - P_k)f, g) = (f, (P - P_k)g) \end{cases}$$

que são satisfeitos para qualquer f, $g \in L^2(\Omega)$, já $P, P_k, P_n - P_k, P - P_k$ são projeções ortogonais e

$$P_k(L^2(\Omega)) = < w^1 , \dots, w^k > \quad ,$$

$$P_n(L^2(\Omega)) = \langle w^1, \ldots, w^n \rangle \quad ,$$

$$P(L^2(\Omega)) = H(\Omega) \quad ,$$

sendo $\langle w^i \rangle$ ortogonais e completas em $H(\Omega)$.

Para finalizar, temos as seguintes observações

$$\|(I-P_k)Pg\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|\nabla Pg\|^2 \tag{4.6}$$

e

$$\|\nabla Pg\|^2 \le C\|g\|^2_{H^1(\Omega)} \quad , \tag{4.7}$$

(4.6) é direta de (4.1). Para (4.7), observe-se que $P:H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ é um operador contínuo, logo existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla Pg\|^2 \le C\|g\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Assim, para qualquer $g \in H^1(\Omega)$ temos:

$$\|(I-P_k)Pg\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{k+1}} \|g\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{4.8}$$

ou, equivalentemente, já que $PP_k = P_kP = P_k$, obtém-se:

$$\|Pg - P_kg\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{k+1}} \|g\|^2_{H^1(\Omega)} . \tag{4.9}$$

Observe-se ainda que (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) permanecem válidas se P é trocado por P_n com $n > k$.

Também temos a dizer que:

$$(4.10)\qquad \|(I-P_k)Pg\|^2 \le \frac{1}{(\lambda_{k+1})^2}\|g\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Antes de enunciar os resultados, gostaríamos de ressaltar que o teorema 4.1 é um teorema provado por Salvi [25] (pag.202, Teorema 2). Fazemos aqui a sua demonstração mais detalhada por uma questão de clareza de exposição. Porém, a estimativa (4.29) do Teorema 4.3, embora também enunciada por Salvi [25] (pag. 203, teorema 3), na verdade não corresponde à prova feita por ele, já que da demonstração foi obtida na verdade uma taxa de convergência não otimal $(\lambda_{n+1}^{-1/2})$. Para obter a taxa de convergência otimal (λ_{n+1}^{-1}) temos que fazer uma análise distinta na qual o resultado do Lema 4.2 joga um papel decisivo. Além disso, as nossas técnicas, incluindo as do capítulo I, permitem que obtenhamos estimativas de erro de ordem mais alta sob as mesmas hipóteses de Salvi (Teorema 4.4, 4.5 e observação 4.6).

Enunciaremos agora o seguinte

Teorema 4.1. Sob as hipóteses do Teorema 1.1, as aproximações u^k, p^k satisfazem:

$$(4.11)\qquad \|u(t) - u^k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\tau) - \nabla u^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{\phi(t)}{\lambda_{k+1}},$$

$$(4.12)\qquad \|\rho(t) - \rho^k(t)\|^2 \le \frac{\tilde{\phi}(t)}{\lambda_{k+1}},$$

para qualquer $t \in [0,T]$. As funções $\phi(t)$ e $\tilde{\phi}(t)$ dependem das estimativas dadas nos lemas do Capítulo I. Elas são continuamente diferenciáveis com respeito a $t \in (0,T]$, contínuas em $t = 0$ e, além disso, elas crescem exponencialmente com t. (4.11) e (4.12) se satisfazem também com qualquer u^n e ρ^n no lugar de u e ρ respectivamente, $n > k$.

Prova.

(i) Consideremos as seguintes equações ($n > k$):

(4.13) $$P_n(\rho^n u_t^n + \rho^n u^n \nabla u^n - \rho^n f) - P\Delta u^n = 0$$

(4.14) $$P_k(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f) - P\Delta u^k = 0$$

(ρ^n, ρ^k satisfazendo a equação da continuidade com u^n e u^k respectivamente).

Subtraindo (4.14) de (4.13), a diferença $w = u^n - u^k$ satisfaz.

(4.15) $$P_n(\rho^n u_t^n + \rho^n u^n \nabla u^n - \rho^n f) - P_k(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f) - P\Delta w = 0$$

$$w(0) = (P_n - P_k)u_o.$$

Fazendo o produto interno em $L^2(\Omega)$ de (4.15) com w, obtemos

$$(P_n(\rho^n u_t^n + \rho^n u^n \nabla u^n - \rho^n f), w) - (P_k(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f), w) - (\Delta w, w) = 0$$

Observe-se que

(4.16) $$-(P_k \rho^k u^k \nabla u^k, w) = (P_k(\rho^k - \rho^n) u^k \nabla u^k, w) + (P_k \rho^n w \nabla u^k, w) - (P_k \rho^n u^n \nabla u^k, w)$$

e

(4.17) $$(P_n \rho^n u_t^n, w) = (\rho^n u_t^n, w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho^n)^{1/2} w\|^2 + (\rho^n u_t^k, w) - \frac{1}{2}(w\rho_t^n, w)$$

Também temos

(4.18) $$(P_k(\rho^k u_t^k), w) = -(P_k((\rho^n - \rho^k) u_t^k), w)) + (P_k(\rho^n u_t^k), w)$$

e

$$(4.19)\quad (P_k(\rho^n u^n \nabla u^k), w = (P_n(\rho^n u^n \nabla u^k), w) - ((P_n - P_k)(\rho^n u^n \nabla u^k), w),$$

logo:

$$(4.20)\ ((P_n(\rho^n u_t^n) - P_k(\rho^k u_t^k)), w)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\rho^n)^{1/2}w\|^2 + ((P_n - P_k)(\rho^n u_t^k), w) - \frac{1}{2}(w\,\rho_t^n, w)$$

$$+ (P_k((\rho^n - \rho^k)u_t^k), w)$$

e

$$(P_n(\rho^n f) - P_k(\rho^k f), w) = (P_n((\rho^n - \rho^k)f), w) + ((P_n - P_k)(\rho^k f), w).$$

Por outro lado,

$$\rho_t^n = - \operatorname{div}(\rho^n u^n),$$

com o qual

$$(4.21)\quad \frac{1}{2}(w\rho_t^n, w) = -\frac{1}{2}(w\operatorname{div}(\rho^n u^n), w)$$

$$= (\rho^n u^n \nabla u^n, w) - (\rho^n u^n \nabla u^k, w).$$

Agora, substituindo as identidades (4.16) ... (4.21) em (4.15), obtém-se:

$$(4.22)\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\rho^n)^{1/2}w\|^2 + \|\nabla w\|^2 = (P_k(\rho^n w \nabla u^k), w)$$

$$- ((P_n - P_k)(\rho^n u_t^k + \rho^n u^n \nabla u^k - \rho^k f), w)$$

$$- (P_k((\rho^n - \rho^k)(u_t^k + u^k \nabla u^k - f), w) .$$

Vamos estimar agora os termos do lado direito da equação acima

$$(4.23) \qquad (P_k(\rho^n w \nabla u^k), w) \le \|\rho^n\|_{L^\infty} \|w\|_{L^4} \|\nabla u^k\|_{L^4} \|w\|$$

$$\le \|\rho^n\|_{L^\infty} \|P\Delta u^k\| \, \|w\| \, \|\nabla w\|$$

$$\le C_\epsilon \|\rho^n\|^2_{L^\infty} \|P\Delta u^k\|^2 \|w\|^2 + \epsilon \|\nabla w\|^2 .$$

Tendo em conta (4.4), obtemos:

$$(4.24) \qquad |(P_n - P_k)(\rho^n u_t^k + \rho^n u^n \nabla u^k - \rho^k f), w|$$

$$= \left| \int_\Omega (\rho^n u_t^k + \rho^n u^n \nabla u^k - \rho^k f)(I - P_k) u^n \right|$$

$$\le \left\{ \|\rho^n u_t^k\| + \|\rho^n u^n \nabla u^k\| + \|\rho^k f\| \right\} \frac{\|P\Delta u^n\|}{\lambda_{k+1}}$$

em vista de (4.10).

O último termo de (4.22) tem que ser tratado de forma um pouco diferente. Notemos que $\rho^n - \rho^k$ com $n > k$ satisfaz

$$(\rho^n - \rho^k)_t + u^n \nabla(\rho^n - \rho^k) = - w \nabla \rho^k$$

e

$$\rho^n(0) - \rho^k(0) = 0.$$

Seja $y^n(t,\tau,x)$ a solução do problema de Cauchy

$$y^n_t = u^n(y^n,\tau)$$

$$y^n = x \qquad \text{para } t = \tau.$$

Então, usando o método das características, tem-se que a seguinte relação se satisfaz

$$(4.25) \qquad \rho^n(x,t) - \rho^k(x,t) = -\int_0^t \varphi_{n,k}(y^n(\tau,t,x),\tau)d\tau,$$

onde $\varphi_{n,k}(y^n,t) = (u^n(y^n,t) - u^k(y^n,t))\,\nabla\rho^k(y^n,t)$.

Agora vem que

$$\|\rho^n - \rho^k\| \le C \int_0^t \|u^n - u^k\| \; \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} \, d\tau \quad ,$$

tendo em conta as propriedades de y^n.

Assim, para o último termo temos:

$$(4.26) \qquad |(P_k((\rho^n - \rho^k)(u^k_t + u^k\nabla u^k - f),w)|$$

$$= |\left[\int^t (w\nabla\rho^k)d\tau(u^k_t + u^k\nabla u^k - f),w\right]|$$

$$\leq \left\| \int_0^t (w\nabla\rho^k)d\tau \right\| \left\| \left\{u_t^k + u^k\nabla u^k - f\right\} \right\|_{L^4} \|w\|_{L^4}$$

$$\leq \left[\int_0^t \|w\| \, \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} d\tau\right] \left\{\|\nabla u_t^k\| + \|\nabla(u^k\nabla u^k)\| + \|\nabla f\|\right\} \|\nabla w\|$$

Consequentemente, fazendo uso da desigualdade de Young, obtemos:

$$|(P_k((\rho^n - \rho^k)(u_t^k + u^k\nabla u^k - f),w)|$$

$$\leq C_\epsilon\left[\int_0^t \|w\| \, \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} d\tau\right]^2 \left\{\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla(u^k\nabla u^k)\|^2 + \|\nabla f\|^2\right\} + \epsilon\|\nabla w\|^2.$$

Assim, de (4.23) ... (4.26) vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\rho^n)^{1/2}w\|^2 + (1-2\epsilon)\|\nabla w\|^2$$

$$\leq C_\epsilon\|\rho^n\|_{L^\infty}^2\|P\Delta u^k\|^2\|w\|^2 + \left\{\|\rho^n u_t^k\| + \|\rho^n u^n\nabla u^k\| + \|\rho^k f\|\right\} \frac{\|P\Delta u^n\|}{\lambda_{k+1}} +$$

$$C_\epsilon\left[\int_0^t \|w\|\|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} d\tau\right]^2\left\{\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla(u^k\nabla u^k)\|^2 + \|\nabla f\|^2\right\}.$$

Considerando $\epsilon = 1/4$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\|(\rho^n)^{1/2}w\|^2 + \|\nabla w\|^2$$

$$\leq C\,\|\rho^n\|_{L^\infty}^2\|P\Delta u^k\|^2\|w\|^2 + C\left[\int_0^t \|w\| \, \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} d\tau\right]^2$$

$$\left\{\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla(u^k\nabla u^k)\|^2 + \|\nabla f\|^2\right\} + \left\{\|\rho^n u_t^k\| + \|\rho^n u^n \nabla u^n\| + \|\rho^k f\|\right\} \frac{\|P\Delta u^n\|}{\lambda_{k+1}}$$

$$\leq C\beta^2 H(t)\|w\|^2 + C\left[\int_0^t \|w\| h(\tau)d\tau\right]^2 \left\{\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla f\|^2 + \|\nabla(u^k\nabla u^k)\|^2\right\}$$

$$+ \left\{\beta\sqrt{G(t)} + \beta\sqrt{H(t)}\ \sqrt{\tilde{F}(t)} + \beta\|f\|\right\} \frac{H(t)}{\lambda_{k+1}} .$$

Por outro lado, fazendo uso da desigualdade de Schwarz temos:

$$\left[\int_0^t \|w\| h(\tau)d\tau\right]^2 \leq \left[\int_0^t \|w\|^2 d\tau\right]\left[\int_0^t h^2(\tau)d\tau\right]$$

e

$$\|\nabla(u^k\nabla u^k)\|^2 \leq C(\|\nabla u^k\nabla u^k\|^2 + \|u^k\nabla^2 u^k\|^2)$$

$$\leq C(\|P\Delta u^k\|^4 + \|P\Delta u^k\|^4)$$

$$\leq C\ H(t)^2.$$

Consequentemente:

$$\frac{d}{dt}\|(\rho^n)^{1/2} w\|^2 + \|\nabla w\|^2 \leq \frac{\varphi_1(t)}{\lambda_{k+1}} + \varphi_2(t)\|w\|^2 + \varphi_3(t)\int_0^t \|w\|^2 d\tau,$$

onde $\varphi_1(t) = \left\{\beta\sqrt{G(t)} + \beta\sqrt{H(t)\tilde{F}(t)} + \beta\|f\|\right\} H(t)$

$\varphi_2(t) = C\ \beta^2\ H(t)$

$$\varphi_3(t) = \left[C\,\|\nabla u_t^k\|^2 + C\,\|\nabla f\|^2 + CH(t)^2\right]\left[\int_0^t h^2(\tau)d\tau\right].$$

Agora, integrando de 0 a t, obtém-se:

$$\|w\|^2 + \int_0^t \|\nabla w\|^2 d\tau \le \frac{\tilde{\varphi}_1(t)}{\lambda_{k+1}} + \int_0^t \varphi_2(\tau)\|w\|^2 d\tau + \int_0^t \varphi_3(\tau)d\tau \int_0^t \|w\|^2 d\tau ,$$

onde, utilizamos os fatos:

$$\|(\rho^n)^{1/2} w\|^2 \ge \alpha\|w\|^2 \qquad (\alpha>0)$$

e

$$\|(\rho^n)^{1/2}(0)w(0)\|^2 \le \|\rho_0\|_{L^\infty} \frac{\|\nabla u^n(0)\|^2}{\lambda_{k+1}} \le \frac{\|\rho_0\|^2_{L^\infty}\,\tilde{F}(0)}{\lambda_{k+1}} ,$$

tendo em conta (4.3) e o Lema 1.2 e sendo

$$\tilde{\varphi}_1(t) = C\|\rho_0\|^2_{L^\infty} + \int_0^t \varphi_1(\tau)d\tau .$$

Agora, como $t < T < +\infty$, temos:

$$\int_0^t \varphi_2(\tau)\|w\|^2 d\tau + \int_0^t \varphi_3(\tau)d\tau \int_0^t \|w\|^2 d\tau$$

$$\le \int_0^t \varphi_2(\tau)\|w\|^2 + \left(\sup_{0<t<T} \int_0^t \varphi_3(\tau)d\tau\right) \int_0^t \|w\|^2 d\tau$$

$$\equiv \int_0^t \varphi_4(\tau)\|w\|^2 d\tau ,$$

onde $\varphi_4(\tau) = \varphi_2(\tau) + \sup_{0<t<T} \int_0^t \varphi_3(\tau)d\tau$.

Logo, voltando a (4.27), temos:

$$\|w\|^2 + \int_0^t \|\nabla w\|^2 d\tau \le \frac{\varphi_1}{\lambda_{k+1}} + \int_0^t \varphi_4(\tau)\|w\|^2 d\tau .$$

Agora, aplicando o lema de Gronwall, obtemos:

$$\|w\|^2 + \int_0^t \|\nabla w\|^2 d\tau \le \left[1 + \int_0^t \varphi_4(\tau)d\tau\right] \frac{\tilde{\varphi}_1(t)}{\lambda_{k+1}} \exp\left\{ \int_0^t \varphi_4(\tau)d\tau\right\} .$$

Fazendo n tender a infinito, vem

$$\|u - u^k\|^2 + \int_0^t \|\nabla u - \nabla u^k\|^2 d\tau \le \frac{\phi(t)}{\lambda_{k+1}}$$

para todo $t \in [0,T]$. A função $\phi(t)$ satisfaz os requerimentos dados no teorema.

ii) De (15), obtem-se

$$\|\rho^n - \rho^k\| \le C \int_0^t \|u^n - u^k\| \, \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} d\tau$$

$$\le C\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty} \int_0^t \|u^n - u^k\| \, h(\tau)d\tau$$

$$\le C\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty}\left[\int_0^t h^2(\tau)d\tau\right]^{1/2}\left[\int_0^t \|u^n - u^k\|^2 d\tau\right]^{1/2}$$

Fazendo n tender a infinito, obtém-se:

$$\|\rho - \rho^k\| \le C\,\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}\left(\int_o^t h^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}\left(\int_o^t \|u - u^k\|^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Em vista de (i), conclui-se que:

$$\|\rho - \rho^k\| \le \frac{C\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}\left(\int_o^t h^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}\left(\int_o^t \phi(\tau)\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\tilde{\phi}(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}$$

para qualquer $t \in [0,T]$ e claramente $\tilde{\phi}(t)$ satisfaz os requerimentos do Teorema e assim ele está provado. ∎

Lema 4.2. Sob as hipóteses do Teorema 1.1, temos que as aproximações ρ^k satisfazem:

$$\|\rho(t) - \rho^k(t)\|^2_{L^r} \le \frac{\tilde{\phi}_2(t)}{\lambda_{k+1}}\ , \text{ com } 2 \le r \le 6 \tag{4.28}$$

para qualquer $t \in [0,T]$. A função $\tilde{\phi}_2(t)$ é continuamente diferenciável em $(0,T]$, contínua em $t = 0$ e cresce exponencialmente com o tempo. (4.28) se satisfaz também com qualquer ρ^n em vez de ρ, $n > k$.

Prova. Comecemos considerando $3 \le r \le 6$. Agora, tomando $n > k$, temos:

$$\rho^n_t + u^n\nabla\rho^n = 0$$

$$\rho^k_t + u^k\nabla\rho^k = 0$$

$$\rho^n(0) = \rho^k(0) = \rho_o .$$

Subtraindo estas equações e colocando $\pi = \rho^n - \rho^k$ e $w = u^n - u^k$, obtemos

$$\pi = -w\nabla\rho^n - u^k\nabla\pi$$

multiplicando por $|\pi|^{r-1}$ e integrando sobre Ω, obtemos:

$$\frac{1}{r}\ \frac{d}{dt}\ \|\pi\|^r_{L^r} = -\int_\Omega w\nabla\rho^n|\pi|^{r-1}dx$$

$$\le \|\nabla\rho^n\|_{L^\infty}\ \|w\|_{L^r}\ \|\pi\|^{r-1}_{L^r} .$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\ \|\pi\|_{L^r} \le C\ \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\ \|\nabla w\| ,$$

já que $3 \le r \le 6$, $C = C(\Omega)$. Consequentemente,

$$\|\pi\|_{L^r} \le C\int_o^t \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty}\ \|\nabla w\|\ (\tau)d\tau$$

$$\le C\ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} \int_o h(\tau)\|\nabla w\|(\tau)d\tau$$

$$\le C\ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} \left(\int_o^t h(\tau)^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_o^t \|\nabla w\|^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}.$$

Fazendo n tender ao infinito, vem que

$$\|\rho(t) - \rho^k(t)\|_{L^r} \le C\ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty} \left(\int_o^t h(\tau)^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_o^t \|\nabla u - \nabla u^k\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq C\ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}\left[\int_o^t h(\tau)^2 d\tau\right]^{1/2}\ \frac{(\phi(t))^{1/2}}{\lambda_{k+1}}\ ,$$

onde temos utilizado o Teorema 4.1.

Assim

$$\|\rho(t) - \rho^k(t)\|^2_{L^r} \leq \frac{\tilde{\phi}_2(t)}{\lambda_{k+1}}\ ,$$

onde $\tilde{\phi}_2(t) = C^2\|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty}\int_o^t h(\tau)^2 d\tau\ \phi(t)$, função que cumpre as condições estabelecidas no lema.

Para o caso $2 \leq r \leq 3$, basta lembrar que Ω é limitado e consequentemente $L^3 \subseteq L^r \subseteq L^2$, com inclusão contínua, isto é:

$$\|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^2} \leq C\ \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^r} \leq C\ \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3}$$

e ocupar o provado anteriormente. Isto finaliza a demonstração do lema. ∎

Teorema 4.3. Sob as hipóteses do Teorema 1.1, as aproximações u^k satisfazem:

$$(4.29)\qquad \|\nabla u - \nabla u^k\|^2 + \int_o^t \|u_t - u_t^k\|^2 d\tau \leq \frac{\phi_2(t)}{\lambda_{k+1}}$$

para qualquer $t \in [0,T)$. Onde a função $\phi_2(t)$ e continuamente diferenciável em $(0,T]$, contínua em $t = 0$, e cresce exponencialmente com o tempo. Além disso (4.29) é satisfeita para qualquer u^n em vez de u, $n > k$.

Prova. Tomamos o produto interno de (4.15) com w_t em $L^2(\Omega)^3$, para obter:

$$(P_n\rho^n w_t, w_t) + (P_n\rho^n u^n\nabla w, w_t) + (P_k\rho^n w\nabla u^k, w_t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2$$

$$= -((P_n - P_k)\rho^n u_t^k, w_t) - (P_k(\rho^n - \rho^k)u_t^k, w_t) - ((P_n - P_k)\rho^n u^n\nabla u^k, w_t)$$

$$- (P_n(\rho^n - \rho^k)u^k\nabla u^k, w_t) + (P_n\rho^n f - P_k\rho^k f, w_t)$$

$$w(0) = (P_n - P_k)u_o \quad .$$

Por outro lado,

$$|(P_k\rho^n w\nabla u^k, w_t)| \le C_\epsilon \|\rho^n\|_{L^\infty}\|\nabla w\|^2\|P\Delta u^k\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2$$

$$\le C_\epsilon\beta^2 H(t)\|\nabla w\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2 \;;$$

$$|(P_n\rho^n u^n\nabla w, w_t)| \le C_\epsilon\|\rho^n\|^2_{L^\infty}\|P\Delta u^n\|^2\|\nabla w\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2$$

$$\le C_\epsilon\beta^2 H(t)\|\nabla w\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2 \;.$$

Os outros termos são mais difícies.

$$|(P_n - P_k)(\rho^n u^n\nabla u^k), w_t)| \le C_\epsilon\|(P_n - P_k)(\rho^n u^n\nabla u^k)\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2$$

$$\le \frac{C_\epsilon}{\lambda_{k+1}}\|\rho^n u^n\nabla u^k\|^2_{H^1(\Omega)^3} + \epsilon\|w_t\|^2 \;;$$

$$|(P_n - P_k)(\rho^n u_t^k), w_t)| \le \frac{C_\epsilon}{\lambda_{k+1}}\|\rho^n u_t^k\|_{H^1(\Omega)^3} + \epsilon\|w_t\|^2 \;,$$

onde fizemos uso de (4.8), e a da desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
|(P_k(\rho^n - \rho^k)u_t^k \,,\ w_t)| &\le C_\epsilon \|(\rho^n - \rho^k)u_t^k\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2 \\
&\le C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \|u_t^k\|^2_{L^6} + \epsilon\|w_t\|^2 \\
&\le C_\epsilon \|\nabla u_t^k\|^2 \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} + \epsilon\|w_t\|^2
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$
\begin{aligned}
|(P_n(\rho^n - \rho^k)(u^k\nabla u^k),\ w_t)| &\le C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \|u^k\nabla u^k\|^2_{L^6} + \epsilon\|w_t\|^2 \\
&\le C_\epsilon \|P\Delta u^k\|^2 \|P\Delta u^k\|^2 \|\rho^n - \rho^k\|^2_3 + \epsilon\|w_t\|^2 \\
&\le C_\epsilon H(t)^2 \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} + \epsilon\|w_t\|^2 \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|(P_n\rho^n f - P_k\rho^k f,\ w_t)| &\le C_\epsilon \|P_n\rho^n f - P_n\rho^k f\|^2 + C_\epsilon \|P_n\rho^k f - P_k\rho^k f\|^2 + \epsilon\|w_t\|^2 \\
&\le C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \|f\|^2_{L^6} + \frac{C_\epsilon}{\lambda_{k+1}} \|\rho^k f\|^2_{H^1(\Omega)} + \epsilon\|w_t\|^2 \ .
\end{aligned}
$$

Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 + \|(\rho^n)^{1/2} w_t\|^2 \\
&\le C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \|f\|^2_{L^6} + \frac{C_\epsilon}{\lambda_{k+1}} \|\rho^k f\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{C_\epsilon}{\lambda_{k+1}} \|\rho^n u^n \nabla u^k\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + \frac{C_\epsilon}{\lambda_{k+1}} \|\rho^n u^k{}_t\|^2_{H^1(\Omega)} + C_\epsilon \|\nabla u_t^k\|^2 \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} + C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} H(t) \\
&\quad + 2C_\epsilon \beta^2 H(t) \|\nabla w\|^2 + 7\epsilon \|w_t\|^2 \quad ,
\end{aligned}
$$

logo, integrando de 0 a t, e recordando que

$$\|\rho^{1/2} w_t\|^2 \geq \alpha \|w_t\|^2$$

e considerando ϵ pertencendo a $(0, \frac{\alpha}{7})$, obtemos:

$$\|\nabla w\|^2 + \int_0^t \|w_t\|^2 d\tau \leq \int_0^t \Big[C\Big\{\|\nabla f\|^2 + \|\nabla u_t^k\|^2 + H(t)\Big\} \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3}$$

$$(4.30) \qquad + \frac{C}{\lambda_{k+1}} \Big\{\|\rho^k f\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\rho^n u^n \nabla u^k\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\rho_t^n u^k\|^2_{H^1(\Omega)}\Big\}$$

$$+ C\beta^2 H(t) \|\nabla w\|^2 \Big] d\tau + \|\nabla w(0)\|^2 .$$

Por outro lado, valem

$$\|\rho^n u^n \nabla u^k\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla(\rho^n u^n \nabla u^k)\|^2$$

$$\leq C \|\nabla \rho_0\|^2_{L^\infty} h(t)^2 H(t) \tilde{F}(t) + C\beta^2 H(t)^2 ,$$

$$\|\rho^n u_t^k\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla(\rho^n u_t^k)\|^2$$

$$\leq C \|\nabla \rho_0\|^2_{L^\infty} h(t)^2 G(t) + C\beta^2 \|\nabla u_t^k\|^2 ,$$

$$\|\rho^k f\|^2_{H^1} \leq C(\|\nabla(\rho^k f)\|^2 + \|\rho^k f\|^2)$$

$$\leq C(\beta^2 \|f\|^2 + \|\nabla \rho\|_{L^\infty} h(t)^2 + \beta^2 \|\nabla f\|^2) ,$$

logo em (4.30),

$$\|\nabla w\|^2 + \int_0^t \|w_t\|^2 d\tau \le \frac{\psi(t)}{\lambda_{k+1}} + C\int_0^t H(\tau)\|\nabla w\|^2 d\tau + \|\nabla w(0)\|^2$$

onde $\psi(t) = \int_0^t \Big\{ C\|\nabla f\|^2 + H(\tau) + \|\nabla\rho_0\|^2_{L^\infty} h(\tau)\ H(\tau)\ \tilde{F}(\tau)\beta^2 H(\tau)^2$

$+\|\nabla\rho_0\|^2_{L^\infty} h(\tau)^2 G(\tau) + \|f\|^2 + \|\nabla\rho_0\|^2_{L^\infty} h(\tau)^2\|f\|^2 + \beta^2\|\nabla f\|^2 \Big\} d\tau + C(\beta^2 + 1)G(t)$.

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

(4.31) $$\|\nabla u - \nabla u^k\|^2 + \int_0^t \|u_t - u_t^k\|^2 d\tau$$

$$\le \frac{\psi(t)}{\lambda_{k+1}} + C\int_0^t H(\tau)\|\nabla u - \nabla u^k\|^2 d\tau + \|(\nabla u - \nabla u^k)(0)\|^2 .$$

Também,

(4.32) $$\|\nabla u - \nabla u^k(0)\|^2 \le \frac{H(0)}{\lambda_{k+1}} ,$$

em vista de (4.3) e o lema 1.2. Substituindo (4.32) em (4.31) e usando Gronwall obtém-se:

$$\|\nabla u - \nabla u^k\|^2 + \int_0^t \|u_t - u_t^k\|^2 d\tau$$

$$\le \left\{1 + \int_0^t H(\tau)d\tau \right\} \frac{(\psi(t) + H(0)}{\lambda_{k+1}} \quad \exp\left\{\int_0^t H(\tau)d\tau\right\}$$

$$\equiv \frac{\phi_2(t)}{\lambda_{k+1}}$$

e $\phi_2(t)$ satisfaz os requisitos do teorema. ■

Provemos agora o seguinte resultado:

Teorema 4.4. Sob as hipóteses do Teorema 1.1, temos que as aproximações u^k, ρ^k satisfazem:

$$\int_0^t \|P\Delta u - P\Delta u^k\|^2 d\tau \le \frac{M(t)}{\lambda_{k+1}} \tag{4.33}$$

$$\|\rho(t) - \rho^k(t)\|_{L^\infty} \le \frac{\tilde{M}(t)}{\lambda_{k+1}} \tag{4.34}$$

para qualquer $t \in [0,T]$. As funções $M(t)$ e $\tilde{M}(t)$ são continuamente diferenciáveis em $(0,T]$, contínuas em $t = 0$, e crescem exponencialmente com o tempo. Além disso (4.33) e (4.34) são satisfeitas para qualquer u^n e ρ^n em vez de u e ρ respectivamente, $n > k$.

Prova. Tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$de (4.15) com $-P\Delta w$, obtemos:

$$\begin{aligned}\|P\Delta w\|^2 = &- (P_k\rho^k u_t^k, P\Delta w) + (P_n\rho^n u_t^n, P\Delta w) - (P_k\rho^k u^k \nabla u^k, P\Delta w) \\ &+ (P_n\rho^n u^n \nabla u^n, P\Delta w) + (P_n\rho^n f, P\Delta w) - (P_k\rho^k f, P\Delta w).\end{aligned} \tag{4.35}$$

Por outro lado temos:

$$(P_n\rho^n u_t^n - P_k\rho^k u_t^k, P\Delta w) = (P_n\rho^n w_t, P\Delta w) + (P_n(\rho^n - \rho^k)u_t^k, P\Delta w) \tag{4.36}$$

$$+ ((P_n - P_k)\rho^k u_t^k,\ P\Delta w)\ ;$$

$$(4.37) \qquad (P_n\rho^n u^n \nabla u^n - P_k \rho^k u^k \nabla u^k,\ P\Delta w)$$

$$= (P_n(\rho^n u^n \nabla w),\ P\Delta w) + (P_n(\rho^n w \nabla u^k),\ P\Delta w)$$

$$+ (P_n((\rho^n - \rho^k)u^k\ \nabla u^k),\ P\Delta w) + ((P_n - P_k)(\rho^k u^k \nabla u^k),\ P\Delta w);$$

e

$$(4.38) \qquad (P_n(\rho^n f) - P_k(\rho^k f),\ P\Delta w) = (P_n((\rho^n - \rho^k)f),\ P\Delta w)$$

$$+ ((P_n - P_k)(\rho^k f),\ P\Delta w).$$

Substituindo (4.36), (4.37) e (4.38) em (4.35) obtemos:

$$\|P\Delta w\|^2 = (P_n\rho^n w_t,\ P\Delta w) + (P_n(\rho^n - \rho^k)u_t^k,\ P\Delta w) + ((P_n(\rho^n - \rho^k)u^k \nabla u^k,\ P\Delta w)$$

$$+ ((P_n - P_k)(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k),\ P\Delta w) + (P_n(\rho^n u^n \nabla w),\ P\Delta w)$$

$$+ (P_n(\rho^n w\ \nabla u^k),\ P\Delta w) + (P_n((\rho^n - \rho^k)f),\ P\Delta w)$$

$$+ ((P_n - P_k)(\rho^k f),\ P\Delta w)$$

$$\le C_\epsilon \|\rho^n\|^2_{L^\infty} \|w_t\|^2 + C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|_{L^3} \|u_t^k\|^2_{L^6} + C_\epsilon \|\rho^n\|_{L^\infty} \|u^n\|_{L^\infty} \|\nabla w\|^2$$

$$+ C_\epsilon \|\rho^n\|_{L^\infty} \|w\|^2_{L^3} \|\nabla u^k\|_{L^6} + C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \|u^k\|_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2_{L^6}$$

$$+ C_\epsilon \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \|\nabla f\|^2 + \|(P_n - P_k)(\rho^k f + \rho^k u^k_t + \rho^k u^k \nabla u^k)\|^2$$

$$+ 6\epsilon \|P\Delta w\|^2.$$

Por outro lado,

$$\|(P_n - P_k)(\rho^k f + \rho^k u^k_t + \rho^k u^k \nabla u^k)\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{k+1}} \|\rho^k f + \rho^k u^k_t + \rho^k u^k \nabla u^k\|^2_{H^1}$$

$$\le \frac{C}{\lambda_{k+1}} \Big\{\beta^2 \|f\|^2_{H^1} + \|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty} h(t)^2 \|f\|^2 + C\beta^2 \|\nabla u^k_t\|^2 + C\|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty} h(t)^2 G(t)$$

$$+ C\|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty} h(t)^2 H(t)\tilde{F}(t) + C\beta^2 H(t)^2\Big\}$$

$$\equiv \frac{\ell(t)}{\lambda_{k+1}} .$$

Assim:

$$\|P\Delta w\|^2 \le \frac{\ell(t)}{\lambda_{k+1}} + C \Big\{\|\nabla f\|^2 + H(t)^2 + \|\nabla u^k_t\|^2\Big\} \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} \tag{4.39}$$

$$+ C\beta^2 \|w_t\|^2 + C\beta^2 H(t)^2 \|\nabla w\|^2.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t obtém-se:

$$\int_o^t \|P\Delta w(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{\int_o^t \ell(\tau)d\tau}{\lambda_{k+1}} + C \int_o^t \Big\{\|\nabla f\|^2 + H(t)^2 + \|\nabla u^k_t\|^2\Big\} \|\rho^n - \rho^k\|^2_{L^3} d\tau$$

$$+ C\beta^2 \int_o^t \|w_t\|^2 d\tau + C\beta^2 \int_o^t H(\tau)^2 \|\nabla w\|^2 d\tau \ ;$$

consequentemente, fazendo $n \to \infty$

$$\int_0^t \|P\Delta u - P\Delta u^k\|^2 d\tau \le \frac{C\ M(t)}{\lambda_{k+1}}$$

onde,

$$M(t) = \int_0^t \ell(\tau) + C\left\{\|\nabla f\|^2 + H(\tau)^2\right\} \tilde{\phi}_2\ (\tau)d\tau + C\beta^2 \int_0^t \phi_2(\tau)d\tau$$

$$+ C\beta^2 \sup_{0\le\tau\le t} H(\tau)^2 \int_0^t \phi(\tau)d\tau + G(t),$$

que satisfaz os requerimentos do teorema.

ii) Da equação (4.25) temos:

$$\|\rho^n - \rho^k\|_{L^\infty} \le C \int_0^t \|u^n - u^k\|_{L^\infty} \|\nabla\rho^n\|_{L^\infty}\ d\tau$$

$$\le C\ \|\nabla\rho_0\|_{L^\infty} \int_0^t \|P\Delta u^n - P\Delta u^k\|\ h(\tau)d\tau$$

$$\le C\ \|\nabla\rho_0\|_{L^\infty} \left(\int_0^t h(\tau)^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_0^t \|P\Delta u^n - P\Delta u^k\|^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Fazendo $n \to \infty$, e usando a parte (i) conclui-se que:

$$\|\rho - \rho^k\|_{L^\infty} \le C\ \|\nabla\rho_0\|_{L^\infty} \left(\int_0^t h(\tau)^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\frac{M(t)}{\lambda_{k+1}}\right)^{1/2}.$$

Consequentemente,

$$\|\rho - \rho^k\|^2_{L^\infty} \le \frac{C^2\|\nabla\rho_o\|^2_{L^\infty}}{\lambda_{k+1}} \left(\int_o^t h(\tau)^2 d\tau\right) M(t)$$

$$\equiv \frac{\tilde{M}(t)}{\lambda_{k+1}} \quad ,$$

claramente $\tilde{M}(t)$ satisfaz os requerimentos do teorema. ■

Finalmente temos:

Teorema 4.5. Sob as hipóteses do Teorema 1.1, as aproximações u^k satisfazem:

(4.40) $$\sigma(t)\|(\rho^k)^{1/2}(u_t - u_t^k)\|^2 + \int_o^t \sigma(\tau)\|\nabla u_t - \nabla u_t^k\|^2 d\tau \le \frac{R(t)}{\lambda_{k+1}} \quad ,$$

(4.41) $$\sigma(t)\|u_t - u_t^k\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\ \frac{R(t)}{\lambda_{k+1}} \ ,$$

(4.42) $$\sigma(t)\|P\Delta u - P\Delta u^k\|^2 \le \frac{L(t)}{\lambda_{k+1}} \quad ,$$

(4.43) $$\sigma(t)\|u - u^k\|^2_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{C\ L(t)}{\lambda_{k+1}} \quad ,$$

(4.44) $$\int_o^t \sigma(\tau)\|\nabla u - \nabla u^k\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\ d\tau \le \frac{\tilde{C}\ \tilde{L}(t)}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \ ,$$

onde, $0 \le \alpha < \frac{1}{4}$.

Se a dimensão for dois, temos que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$:

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla u - \nabla u^k\|^2_{L^\infty}\, d\tau \le \frac{\tilde{C}\tilde{\tilde{L}}(t)}{\lambda_{k+1}^{1-\epsilon}} , \tag{4.45}$$

para qualquer $t \in [0,T]$. Onde as funções $R(t)$, $L(t)$, $\tilde{L}(t)$, $\tilde{\tilde{L}}(t)$ são funções contínuas e diferenciáveis quase sempre em $[0,T]$, e elas crescem exponencialmente com o tempo. A função $\sigma(t)$ é a mesma que no lema 1.7. As estimativas anteriores permanecem válidas se u é trocada por u^n, $n > k$.

Prova. Derivando com respeito a t as equações (4.13), (4.14) somando e fazendo o produto interno em $L^2(\Omega)$ com w_t, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\nabla w_t\|^2 + (P_n\rho^n u^n_{tt} - P_k\rho^k u^k_{tt}, w_t) &\\ = (P_k(\rho^k_t u^k_t + (\rho^k u^k\nabla u^k)_t - (\rho^k f)_t, w_t) &\\ - (P_n(\rho^n_t u^n_t + (\rho^n u^n \nabla u^n)_t - (\rho^n f)_t), w_t) . &\end{aligned} \tag{4.46}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(P_n\rho^n u^n_{tt} - P_k\rho^k u^k_{tt}, w_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\rho^k)^{1/2}w_t\|^2 - \frac{1}{2}(w_t, \rho^k_t w_t) &\\ + (P_n(\rho^n - \rho^k)u^n_{tt}, w_t) + ((P_n - P_k)\rho^k u^k_{tt}, w_t). &\end{aligned}$$

Assim em (4.46), temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\rho^k)^{1/2} w_t\|^2 + \|\nabla w_t\|^2 \tag{4.47}$$

$$\leq \|\rho^n - \rho^k\|_{L^\infty}\|u^n_{tt}\| \; \|w_t\| + \frac{1}{2}\|\rho^k_t\|_{L^\infty}\|w_t\|^2 + |((P_n - P_k)\rho^k u^k_{tt}, w_t)|$$

$$+ |(Z(t), w_t)|$$

onde,

$$Z(t) = P_k(\rho^k_t\, u^k_t + (\rho^k u^k \nabla u^k)_t - (\rho^k f)_t)$$

$$- P_n(\rho^n_t\, u^n_t) + (\rho^n u^n \nabla u^n)_t - (\rho^n f)_t) .$$

Agora, multiplicando (4.47) por $\sigma(t)$ e integrando de 0 a t, obtém-se:

$$(4.48) \qquad \frac{1}{2}\sigma(t)\,\|(\rho^k)^{1/2}w_t\|^2 + \int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla w_t\|^2 d\tau$$

$$\leq \sigma(0)\|(\rho^k)^{1/2}w_t\|^2(0) + \int_0^t \sigma(\tau)\|\rho^n - \rho^k\|_{L^\infty}\|u^n_{tt}\| \; \|w_t\| \, d\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \|\rho^k_t\|\sigma(\tau)\|w_t\|^2 d\tau + \int_0^t \sigma(\tau)|(Z(\tau), w_t)|d\tau$$

$$+ \int_0^t \sigma(\tau)\; |(P_n - P_k)\rho^k u^k_{tt}, w_t)|d\tau .$$

Por outro lado,

$$(4.49) \qquad \int_0^t \sigma(\tau)\|\rho^n - \rho^k\|_{L^\infty} \|u^n_{tt}\| \; \|w_t\| d\tau$$

$$\leq \sup_{0\leq\tau\leq t} \sqrt{\widetilde{M}(\tau)} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \int_o^t \sigma(\tau)^{1/2} \| u_{tt}^n \| \ \sigma(\tau)^{1/2} \| w_t \| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \sup_{0\leq\tau\leq t} \sqrt{\widetilde{M}(\tau)} \left[\int_o^t \sigma(\tau) \| u_{tt}^n \|^2 d\tau\right]^{1/2} \left[\int_o^t \sigma(\tau) \| w_t \|^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \sup_{0\leq\tau\leq t} \sqrt{\widetilde{M}(\tau)} \quad \sqrt{N(t)} \quad \exp\left[\gamma \ t/2\right] \quad \frac{\sqrt{\phi_2(t)}}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \quad \sqrt{\phi_2(\tau) N(t)} \sup_{0\leq\tau\leq t} \sqrt{\widetilde{M}(\tau)} \ \exp(\gamma \ t/2) \quad ,$$

tendo em conta os teoremas 4.3 e 4.4.

$$(4.50) \qquad \frac{1}{2} \int_o^t \sigma(\tau) \ \| \rho_t^k \|_{L^\infty} \ \| w_t \|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{C}{2} \exp(\gamma \ t) \ \| \nabla \rho_o \|_{L^\infty} \sup_{0\leq\tau\leq t} J(\tau) \ \frac{\psi_2(t)}{\lambda_{k+1}}$$

$$(4.51) \qquad \int_o^t \sigma(\tau) \ |((P_n - P_k)\rho^k u_{tt}^k \ , \ w_t) d\tau$$

$$\leq \int_o^t \sigma(\tau) \ \left| \int_\Omega \rho^k u_{tt}^k \ (P_n - P_k) \ u_t^n \ \right| d\tau$$

$$\leq \beta \left[\int_o^t \sigma(\tau) \| u_{tt}^k \|^2 d\tau\right]^{1/2} \left[\int_o^t \sigma(\tau) \ \| (P_n - P_k) u_t^n \|^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{\beta}{\lambda_{k+1}} \sqrt{N(t)} \left[\int_o^t \sigma(\tau) \| (P_n - P_k) u_t^n \|^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$$(4,52) \qquad \sigma(0)\|(\rho^k)^{1/2}w_t\|^2(0) = \sigma(0)\|\rho(0)(u^k(0) - u^n(0))\| = 0$$

pois $\sigma(0) = 0$.

Agora vamos estimar

$$(4.53) \qquad \int_o^t |(Z(\tau),\ w_t)|\sigma(\tau)d\tau$$

$$\le \int_o^t \sigma(\tau)\ |(P_k\rho_t^k u_t^k - P_n\rho_t^n\ u_t^n,\ w_t)|d\tau$$

$$+ \int_o^t \sigma(\tau)|(P_k\rho_t^k f - P_n\rho_t^n f,\ w_t)|d\tau + \int_o^t \sigma(\tau)|(P_k\rho^k f_t - P_n\rho^n f_t,\ w_t)|d\tau$$

$$+ \int_o^t \sigma(\tau)|(P_k\rho^k u_t^k\ \nabla u^k - P_n\rho^n u_t^n\ \nabla u^n\ ,\ w_t)|$$

$$+ \int_o^t \sigma(\tau)|(P_k\rho^k u^k\ \nabla u_t^k - P_n\rho^n u^n\ \nabla u_t^n,\ w_t)|.$$

Por outro lado observe-se que:

$$\int_o^t \sigma(\tau)|(\phi(\tau),\ w_t)|d\tau \le \int_o^t \sigma(\tau)\ \|\phi\|\ \|w_t\|d\tau$$

$$\le \left[\int_o^t \sigma(\tau)\ \|\phi\|^2 d\tau\right]^{1/2} \left[\int_o^t \sigma(\tau)\ \|w_t\|^2 d\tau\right]$$

$$\le \left[\int_o^t \sigma(\tau)\ \|\phi\|^2 d\tau\right]^{1/2} \left[\int_o^t \frac{\sigma(\tau)}{(\lambda_{k+1})^2}\ \|P\Delta u_t^n\|^2 d\tau\right]^{1/2}.$$

onde $\phi(t)$ é qualquer dos termos que aparecem em (4.6), e utilizamos (4.4), junto com (4.10).

Tendo em conta os lemas do capitulo I, obtém-se

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|\phi\|^2 d\tau \le \Lambda(t)$$

onde $\Lambda(t)$ depende das funções correspondentes a cada termo.

Consequentemente,

$$\int_0^t \sigma(\tau)|(Z(\tau),\ w_t)|d\tau \le \frac{\theta(t)}{\lambda_{k+1}}\ . \tag{4.54}$$

Voltando a (4.48) e fazendo uso das estimativas (4.49)...(4.54), temos:

$$\frac{1}{2}\ \sigma(\tau)\|(\rho^k)^{1/2}w_t\|^2 + \int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla w_t\|^2 d\tau \le \frac{R(t)}{\lambda_{k+1}}\ .$$

Disto claramente obtem-se (4.41).

Passemos agora à prova de (4.42). Multiplicando por $\sigma(\tau)$ a desigualdade (4.39), obtemos:

$$\sigma(t)\|P\Delta w\|^2 \le \frac{\ell(t)\sigma(t)}{\lambda_{k+1}} + C\left\{\sigma(t)\|\nabla f\|^2 + \sigma(t)H(t)^2 + \sigma(t)\|\nabla u_t^k\|^2\right\}\frac{1}{\lambda_{k+1}}$$

$$+ C\beta^2\sigma(t)\|w_t\|^2 + C\beta^2 H(t)^2\sigma(t)\|\nabla w\|^2\ .$$

De onde fazendo uso do lema 1.7, e o teorema 4.3, obtém-se:

$$\sigma(t)\|P\Delta w\|^2 \le \frac{L(t)}{\lambda_{k+1}} .$$

Fazendo $n \to \infty$,

$$\sigma(t)\|P\Delta u - P\Delta u^k\|^2 \le \frac{L(t)}{\lambda_{k+1}} .$$

(4.43) é direta da anterior.

Vejamos a última estimativa. Temos de (4.15) que

$$(\nabla w, \nabla\varphi) = (P_n(\rho^n u_t^n + \rho^n u^n \nabla u^n - \rho^n f),\varphi) - (P_k(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f),\varphi).$$

Por outro lado,

(4.55) $$\|(P_n(\rho^n u_t^n + \rho^n u^n \nabla u^n - \rho^n f), - P_k(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f\|_{L^4}$$

$$\le \|(P_n - P_k)(\rho^n u_t^n)\|_{L^4} + \|P_k(\rho^n - \rho^k)u_t^n\|_{L^4} + \|P_k(\rho^k w_t)\|_{L^4}$$

$$+ \|P_k(\rho^n - \rho^k)u_t^n\|_{L^4} + \|P_k(\rho^k w_t)\|_{L^4} + \|P_k(\rho^n - \rho^k)f\|_{L^4}$$

$$+ \|(P_n - P_k)\rho^n f\|_{L^4} + \|P_n(\rho^n - \rho^k)u^n \nabla u^n\|_{L^4} + \|P_n \rho^k w \nabla u\|_{L^4}$$

$$+ \|(P_n - P_k)\rho^k u^k \nabla u^k\|_{L^4} + \|P_n \rho^k u^k \nabla w\|_{L^4} .$$

Também observe que: sendo $T_k = P_n - P_k$; temos

$$T_k\colon H^1 \quad L^2 \quad \text{com} \quad \|T_k\|_{H^1,L^2} \leq \frac{C_1}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}$$

e como a inclusão de H^1 em L^6 é contínua e $T_k : L^6 \quad L^6$ é contínua com norma $\|T_k\|_{L^6,L^6} \leq C$ (independente de n e k), então $T_k : H^1 \quad L^6$ é contínua com $\|T_k\|_{H^1,L^6} \leq C_2$. Consequentemente, usando a teoria de interpolação $T_k : H^1 \quad L^4$ é contínua e

$$\|T_k\|_{H^1,L^4} \leq \left[\frac{C_1}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \right]^{1/2} (C_2)^{1/2} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{(\lambda_{k+1})^{1/4}}$$

Consequentemente,

$$\|(P_n - P_k)\varphi\|^2_{L^4} \leq \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \|\varphi\|^2_{H^1}$$

Assim,

$$(4.56) \qquad \|P_n(\rho^n u^n_t + \rho^n u^n \nabla u^n - \rho^n f) - P_k(\rho^k u^k_t + \rho^k u^k \nabla u^k - \rho^k f)\|_{L^4}$$

$$\leq \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/4}} \Big\{ \|\nabla\rho^n\|_{L^\infty} \|u^n_t\| + \|\rho^n\|_{L^\infty} \|\nabla u^n_t\| + \|\rho^n\|_{L^\infty} \|\nabla f\| + \|\nabla\rho^n\|_{L^\infty} \|f\|$$

$$+ \|\nabla\rho^k\|_{L^\infty} \|u^k\|_{L^\infty} \|\nabla u^k\| + 2\|\rho^k\|_{L^\infty} \|\nabla u^k\|^2 + \|\rho^k\|_{L^\infty} \|u^k\|_{L^\infty} \|\nabla^2 u^k\| \Big\}$$

$$+ C\beta\|\nabla w_t\| + C\beta\|\nabla u^n\|_{L^\infty}\|\nabla w\| + \|\rho^k\|_{L^\infty}\|u^k\|_{L^\infty}\|P\Delta w\| + \|\rho^n - \rho^k\|_{L^\infty}\Big\{\|\nabla f\|$$

$$+ \|\nabla u_t^n\| + \|u^n\|_{L^\infty}\|P\Delta u^n\|\Big\}$$

$$\leq \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/4}}\Big\{\|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}\, h(t)\sqrt{G(t)} + \beta\|\nabla f\| + \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}\, h(t)\|f\|$$

$$+ \|\nabla\rho_o\|_{L^\infty}\, h(t)K(t)\sqrt{\tilde{F}(t)} + 2\,\beta\, H(t) + \beta\, K(t)\tilde{F}(t) + \beta\|\nabla u_t^n\|\Big\}$$

$$+ \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}\,\tilde{M}(t)\,\Big\{\|\nabla f\| + K(t)\sqrt{H(t)} + \|\nabla u_t^n\|\Big\} + C\beta\|\nabla w_t\|$$

$$+ \beta K(t)\|P\Delta w\| + C\beta\|\nabla u^n\|_{L^\infty}\,\frac{(\phi_2(t))^{1/2}}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \quad .$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $\sigma(t)$ e integrando de 0 a t, obtém-se:

$$\int_o^t \sigma(\tau)\,\|P_n(\rho^n u_t^n + \rho^n u^n\nabla u^n - \rho^n f) - P_k(\rho^k u_t^k + \rho^k u^k\nabla u^k - \rho^k f)\,\|_{L^4}\, d\tau$$

$$\leq \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/4}}\int_o^t \sigma(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + C\beta\int_o^t \sigma(\tau)\|\nabla w_t\| d\tau$$

$$+ \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}\int_o^t\Big\{\sigma(\tau)\|\nabla u_t^n\| + \sigma(\tau)\|f\| + \sigma(\tau)K(\tau)\sqrt{H(\tau)}\Big\}\tilde{M}(\tau)d\tau$$

$$+ \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}\int_o^t\Big\{C\beta K(\tau)\sigma(\tau) + C\beta\sigma(\tau)\|\nabla u^n\|_{L^\infty}\Big\}\,\varphi_2(\tau)d\tau$$

$$\leq \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/4}} \int_0^t \sigma(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \int_0^t C\beta K(\tau)\sigma(\tau)\sqrt{\varphi_2(\tau)}\, d\tau + \tilde{C}N(t)\Big\}$$

$$+ \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \int_0^t \Big\{\sigma(\tau)\|\nabla f\| + \sigma(\tau)K(\tau)\sqrt{H(\tau)}\Big\}\tilde{M}(\tau)d\tau + \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} N(t)$$

$$\leq \frac{L_1(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} + \frac{L_2(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/4}} .$$

Assim:

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|u^n - u^k\|_{W^{2,4}} d\tau \leq \frac{L_1(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} + \frac{L_2(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/4}}$$

em virtude dos resultados de Cattabriga [7]. Consequentemente, usando os teoremas de imersão de Sobolev, conclui-se

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla u^n - \nabla u^k\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{\tilde{\tilde{C}}\,\tilde{\tilde{L}}\,(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} .$$

Com o argumento acima, a estimativa obtida é a melhor possível em termos da taxa de convergência. Isto é porque quando $n = 3$ o maior p para o qual $H^1 \to L^6$ é $p = 6$.

A estimativa (4.46) é obtida similarmente usando o fato de que, em dimensão $n = 2$, H^1 pode ser imerso continuamente em L^q para qualquer q finito. Assim finalizamos a prova do Teorema. ∎

Observação 4.6. Utilizando os resultados de regularidade, as estimativas para a velocidade e a densidade podem ser melhoradas. Por exemplo, vale o seguinte resultado

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla u - \nabla u^k\|^2_{L^\infty} \le \frac{C_1(t)}{\lambda_{k+1}} .$$

De fato, tendo em conta (4.56) os termos onde a taxa de convergência obtida não é otimal, podem ser tratados de maneira melhor; mostremos isto tomando, por exemplo, o termo a seguir

$$\|(P_n - P_k)(\rho^n u_t^n)\|_{L^4} \le \frac{C_1}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \|\rho^n u_t^n\|_{H^2}$$

$$\le \frac{C_1}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \Big\{\|\rho^n\|_{L^\infty}\|u_t^n\| + \|\nabla\rho^n\|_{L^\infty}\|u_t^n\| + \|\rho^n\|_{L^\infty}\|\nabla u_t^n\|$$

$$+ \|D^2\rho^n\|_{L^\infty}\|u_t^n\| + \|\rho^n\|_{L^\infty}\|P\Delta u_t^n\|\Big\} .$$

Com o qual,

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|(P_n - P_k)(\rho^n u_t^n)\|_{L^4} \le \frac{C_1(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}$$

tendo em conta a regularidade. Disto, em forma análoga à anterior, conclui-se:

$$\int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla u - \nabla u\|_{L^\infty} d\tau \le \frac{C_2(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}}$$

e consequentemente,

$$\sigma(\tau)\|\nabla\rho - \nabla\rho^k\|^2_{L^\infty} \le \frac{C_3(t)}{\lambda_{k+1}} .$$

De fato, tomando as duas equações

$$\rho^k_t + u^k\nabla\rho^k = 0$$

$$\rho^n_t + u^n\nabla\rho^n = 0$$

fazendo a diferença utilizando o método das características, obtém-se

$$\sigma(\tau)\|\nabla\rho^n - \nabla\rho^k\|_{L^\infty} \le \int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla w\nabla\rho\|_{L^\infty}d\tau + \int_0^t \sigma(\tau)\|wD^2\rho\|_{L^\infty}$$

$$+ \int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla u^n\nabla(\rho^n - \rho^k)\|_{L^\infty}d\tau$$

$$\le \frac{C(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} + \int_0^t \sigma(\tau)\|\nabla u^n\|_{L^\infty}\|\nabla(\rho^n - \rho^k)\|_{L^\infty}d\tau$$

logo, fazendo uso de Gronwall:

$$\sigma(t)\|\nabla\rho^n - \nabla\rho^k\|_{L^\infty} \le \frac{C(t)}{(\lambda_{k+1})^{1/2}} \exp\left[\int_0^t \|\nabla u^n\|_{L^\infty}d\tau\right] .$$

Consequentemente,

$$\sigma(t)\|\rho^n_t - \rho^k_t\|^2_{L^\infty} \le \frac{C_4(t)}{\lambda_{k+1}} . \qquad \blacksquare$$

CAPÍTULO V

ESTIMATIVAS DE ERRO UNIFORME NO TEMPO

No capítulo IV obtivemos estimativas de erro que dependem exponencialmente do tempo. Em geral, sem condições adicionais, isto é, o melhor que se pode obter; entretanto, se a solução a ser aproximada for assintoticamente estável, em algum sentido adequado, espera-se que seja possível obter estimativas de erro uniforme no tempo.

Isto foi provado por Heywood [12], para o caso das equações de Navier-Stokes usuais (densidade constante) e, neste capítulo provaremos que um resultado exatamente similar àquele de Heywood vale para as equações de Navier-Stokes para fluidos não homogêneos.

Para descrever em detalhes a noção de estabilidade e hipóteses suplementares que estaremos considerando, recordamos mais uma vez que as equações que governam o movimento de um fluido viscoso incompressível não homogêneo são:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \rho\, u_t + \rho\, u\nabla u - \nabla u = -\,\nabla p + \rho f, \\ \\ \rho_t + u\nabla\rho = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

com condições de contorno $u|_{\partial\Omega} = 0$ e iniciais $u(x,0) = u_o(x)$, $\rho(x,0) = \rho_o(x)$ e $0 < \alpha \leq \rho_o(x) \leq \rho$ com α, β constantes positivas.

Suporemos que os dados do problema (5.1) satisfazem

(A1) $\qquad u_o \in V \cap H^2(\Omega)$

(A2) $\quad \sup_{t\geq 0} \|f\|_{H^1} < +\infty \; ; \; \sup_{t\geq 0} \|f_t\| < +\infty$

e que a solução (u,ρ) satisfaz

(A3) $\quad \|\nabla u(t)\| \leq M \quad , \quad \forall t \geq 0.$

Gostaríamos de observar que sob as condições (A1) e (A2) o Teorema 2.4, implica que (A3) é necessariamente verdadeira nos seguintes casos: para $n = 2$ sem nenhuma restrição suplementar; para dimensão $n = 3$, se f é a velocidade inicial forem suficientemente pequenas.

Além disso, assumiremos que (u, ρ) é "parcialmente assintoticamente estável" no sentido da condição (A4) a seguir.

As questões relativas à estabilidade de (u, ρ), para serem respondidas, necessitam do estudo do comportamento de "soluções perturbadas". Para isto, consideramos uma solução $(\hat{u}, \hat{\rho})$ do problema de Navier-Stokes não homogêneo.

$$\hat{\rho}\hat{u}_t + \hat{\rho}\hat{u}\nabla\hat{u} - \Delta\hat{u} + \nabla q = \hat{\rho}f$$

$$\operatorname{div} \hat{u} = 0 \quad \text{para } (t,x) \in (t_o, \infty)\times\Omega$$

$$\hat{u}|_{t=t_o} = \hat{u}_o \qquad \hat{u}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\hat{\rho}_t + \hat{u}\nabla\hat{\rho} = 0$$

$$\hat{\rho}|_{t=t_o} = \hat{\rho}(t_o).$$

Começando no tempo inicial $t_o \geq 0$, com um valor inicial $\hat{u}_o \in H$ na vizinhança de $u(t_o)$ (em um sentido a ser precisado posteriormente).

Referir-nos-emos às variáveis $\zeta = \hat{u} - u$, $\eta = \hat{\rho} - \rho$ como perturbações de u e ρ, respectivamente, e t_o, e $\zeta_o = \hat{u}_o - u(t_o)$ e $\eta_o = \hat{\rho}(t_o) - \rho(t_o)$ como o "tempo inicial" e "valor inicial da perturbação na velocidade e "valor inicial da perturbação na densidade". Assim a equação satisfeita por ζ é:

$$
(5.2) \quad \begin{cases} \hat{\rho}\zeta_t + \hat{\rho}u\nabla\zeta + \hat{\rho}\zeta\nabla u + \hat{\rho}\zeta\nabla\zeta - \Delta\zeta + \nabla\tilde{p} = (\rho - \hat{\rho})(u_t + u\nabla u - f) \\ \hat{\rho}_t + (u + \zeta)\nabla\hat{\rho} = 0 \\ \operatorname{div}\zeta = 0 \\ \zeta(t_o) = \zeta_o \\ \hat{\rho}(t_o) = \rho(t_o) + \eta(t_o) . \end{cases}
$$

A hipótese suplementar da estabilidade que consideraremos é a seguinte:

(A4) (u,ρ) diz-se "parcialmente assintóticamente estável" se para todo $A, B \geq 0$ existe $L_1 = L_1(A,B)$, $L_2 = L_2(A,B)$, $F(A,B)$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ contínua não crescente, com $F(0) = 1$ e $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$ e existe $\delta = \delta(A,B) > 0$ tal que para todo $t_o \geq 0$ e todo $\zeta_o \in V \cap H^2(\Omega)$ e $\eta_o \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}$ com $\|\nabla\zeta_o\| < \delta$, $\|\Delta\zeta_o\| \leq A$, $\|\eta_o\|_{L^\infty} \leq B$ e $\int \eta_o = 0$ então o problema perturbado (5.2) é solúvel de forma única com

$$\zeta \in L^2_{Loc}([t_o, \infty); V \cap H^2(\Omega)),$$

$$\zeta_t \in L^2_{Loc}([t_o, \infty); H^1(\Omega)),$$

$$\eta \in L^{\infty}([t_o, \infty); L^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)),$$

e tal que

i) $\quad \|\nabla\eta\|_{L^p}(t) \le L_1 , \qquad 3 \le p \le 6,$

ii) $\quad \|\nabla\zeta\|(t) \le L_2\|\nabla\zeta_o\|F(t - t_o) .$

Observação 5.1. A condição i) acima é automaticamente satisfeita com $p = \infty$ nas condições do teorema 2.4; a condição ii) pode ser provada em certos casos para as equações de Navier-Stokes usuais, obtendo-se $F(t) = e^{-\gamma t}$,com $\gamma > 0$. Para as equações não homogêneas espera-se o mesmo tipo de comportamento em casos similares. ∎

A seguir, damos o enunciado do resultado principal deste capítulo:

Teorema 5.2. Existem constantes C, N e K que dependem só do domínio Ω, as normas dos dados referidos em (A1), (A2) e as constantes introduzidas em (A3), (A4), tal que:

$$\|\nabla u - \nabla u^n\|^2(t) \le \frac{K}{\lambda_{n+1}}$$

e

$$\|\rho - \rho^n\|_{L^r}(t) \le \frac{Ct}{\lambda_{n+1}} \qquad 2 \le r \le 6$$

para todo $n \ge N$, e todo $t \ge 0$.

Antes de iniciar a demonstração deste resultado precisaremos de uma série de estimativas a priori que serão derivadas nos lemas que se seguem. Um ponto importante é que, diferentemente do caso das equações de Navier-Stokes para fluidos homogêneos várias estimativas não podem ser obtidas de forma uniforme com respeito ao tempo. Assim, oo andamento da análise de Heywood [12] não pode ser usada diretamente. Porém, seremos capazes de mostrar uma série de estimativas integrais, as quais dependerão apenas da diferença dos extremos de integração. Isto será suficiente para completar a demonstração do Teorema.

Recordemos mais uma vez que a n-ésima aproximação espectral de Galerkin

$$u^n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t)w^k(x)$$

da solução do problema (5.1) está determinada de forma única pelas condições

$$(5.3) \qquad (\rho^n u_t^n,\ \phi^n) + (\rho^n u^n \nabla u^n,\ \phi^n) + (\nabla u^n,\ \phi^n) = (\rho^n f,\ \phi^n)$$

para $t \geq 0$ e $(u^n(0) - u_o,\ \phi^n) = 0$ para toda ϕ^n da forma: $\phi^n(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k w^k(x)$ e a densidade por uma aproximação infinita dimensional ρ^n, solução da equação de continuidade

$$(5.4) \qquad \rho_t^n + u^n \nabla \rho^n = 0$$

com $\rho^n(0) = \rho_o$.

Passemos agora, à comparação do erro com as perturbações. Seja $u = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)w^k(x)$ e a expressão nas autofunções da solução u do problema (5.1). Seja $v^n = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)w^k(x)$ a n-ésima soma parcial da série de u. Seja $e^n = u^n - v^n$ e $\psi^n = u^n - v^n$, donde u^n é a n-ésima aproximação de Galerkin. Então $u - u^n = e^n - \psi^n$.

A seguir, temos

Lema 5.3. Sob as hipóteses feitas obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{8}\epsilon\|P\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}\|\rho^{1/2}u_t\|^2 \le C\|f\|^2 + C\|\nabla u\|^{10} . \tag{5.5}$$

Prova. É análoga à feita por Kim [15]. ∎

Corolário 5.4.

$$\int_{t_o}^{t}\|P\Delta u\|^2 d\tau \le \int_{t_o}^{t}\left\{C_1\|f\|^2 + C_2\|\nabla u\|^{10}\right\} d\tau + C_3\|\nabla u(t_o)\|^2$$

$$\int_{t_o}^{t}\|\rho^{1/2}u_t\|^2 d\tau \le \int_{t_o}^{t}\left\{C_1\|f\|^2 + C_2\|\nabla u\|^{2}\right\} d\tau + C_3\|\nabla u(t_o)\|^2 .$$

Consequentemente sob as hipóteses feitas:

$$\begin{aligned}\int_{t_o}^{t}\|P\Delta u\|^2 d\tau &\le C(t - t_o) + C_3\|\nabla u(t_o)\|^2\\ &\le \tilde{M}_1(t - t_o) + \tilde{M}_2 \quad ;\end{aligned}$$

$$\int_{t_o}^{t}\|u_t\|^2 d\tau \le \frac{1}{\alpha}\int_{t_o}^{t}\|\rho^{1/2}u_t\|^2 d\tau$$

$$\leq C(t - t_o) + C_3 \|\nabla u(t_o)\|^2$$

$$\leq M_1(t - t_o) + M_2 .$$

Prova. Basta integrar (5.5) de t a t_o. ■

Corolário 5.5.

$$(5.6) \quad \int_{t_o}^{t} \|\nabla e^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} (t - t_o)$$

e

$$\int_{t_o}^{t} \|e^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{C(t - t_o)}{(\lambda_{n+1})^2} .$$

Prova. Temos que,

$$\|\nabla e^n(\tau)\|^2 = \|\nabla(u - v^n)\|^2 = \|\nabla \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k w^k\|^2$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|P\Delta \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k w^k\|^2$$

$$\leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} \|P\Delta u(\tau)\|^2,$$

logo,

$$\int_{t_o}^{t} \|\nabla e^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} \int_{t_o}^{t} \|P\Delta u(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{C}{\lambda_{n+1}} (t - t_o).$$

Para a outra estimativa, tem-se:

$$\|e^n(\tau)\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k w^k \|^2$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\nabla \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k w^k\|^2$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\nabla e^n(\tau)\|^2 ,$$

consequentemente,

$$\int_{t_o}^{t} \|e^n(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \int_{t_o}^{t} \|\nabla e^n(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{C}{\lambda_{n+1}^{\;2}} (t - t_o)$$

em vista de (5.6). ■

O seguinte lema também será necessário:

Lema 5.6.

(5.7) $$a\|\zeta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla\zeta\|^2 + \frac{1}{42} \epsilon \|P\Delta\zeta\|^2$$

$$\leq C_1 \|\nabla\zeta\|^2 \|P\Delta u\|^2 + C_2 \|\nabla\zeta\|^{10} + C_3 \left\{ \|u_t\|^2 \|P\Delta u\|^2 \right\}$$

onde ϵ, a, C_1, C_2, C_3 são constantes positivas.

Prova. É análoga à feita por Kim [15]. ■

Corolário 5.7.

$$\int_{t_o}^{t} \|\zeta_t\|^2 d\tau \le C_o\|\nabla\zeta_o\|^2 + C_1(t - t_o)$$

$$\le N_1(t - t_o) + N_2$$

$$\int_{t_o}^{t} \|P\Delta\zeta\|^2 d\tau \le \tilde{C}_o\|\nabla\zeta_o\|^2 + \tilde{C}_1(t - t_o)$$

$$\le N_1(t - t_o) + N_2 \ .$$

Prova. Temos que $\|\nabla u\| \le M$, $\|\nabla\zeta\| \le L\|\zeta_o\|$, logo integrando de t_o a t (5.7), obtém-se:

$$a \int_{t_o}^{t} \|\zeta_t\|^2 d\tau + \|\nabla\zeta\| + \frac{1}{42} \ \epsilon \int_{t_o}^{t} \|P\Delta\zeta\|^2 d\tau$$

$$\le C_1\|\nabla\zeta_o\|^2 \int_{t_o}^{t} \|P\Delta u\|^2 d\tau + C_2\|\nabla\zeta_o\|^{10} \int_{t_o}^{t} d\tau$$

$$+ C_3\left\{\int_{t_o}^{t} \|u_t\|^2 d\tau + M^2 \int_{t_o}^{t} \|P\Delta u\|^2 d\tau\right\} + \|\nabla\zeta(t_o)\|^2$$

$$\int_{t_o}^{t} \|\zeta_t\|^2 d\tau \le C_o\|\nabla\zeta(t_o)\|^2 + C_1(t - t_o) + C_2(t - t_o) + C_3(t - t_o)$$

e em forma análoga para $\int_{t_o}^{t} \|P\Delta\zeta\|^2 d\tau$, em vista do lema correspondente para u. ■

O seguinte lema será utilizado muito frequentemente

Lema 5.8. Suponha $h(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e que

$$\int_{t_o}^{t} h(\tau)d\tau \leq a(t - t_o) + a_1 \tag{5.8}$$

para algumas constantes a, a_1 positivas ou nulas.

Então

$$e^{-t} \int_{o}^{t} e^{\tau} h(\tau)d\tau \tag{5.9}$$

é uniformemente limitado em t, o que quer dizer

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t} \int_{o}^{t} e^{\tau} h(\tau)d\tau$$

é finito.

Prova. Suponha inicialmente que $0 \leq t \leq 1$, então

$$e^{-t} \int_{o}^{t} e^{\tau} h(\tau)d\tau \leq e^{-t} \int_{o}^{t} e^{\tau} h(\tau)d\tau \leq \int_{o}^{t} h(\tau)d\tau \leq \int_{o}^{1} h(\tau)d\tau \leq a + a_1$$

tendo em conta (5.8).

Agora suponha $t > 1$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n + r$ com $0 \leq r < 1$. Logo

$$\int_0^t e^{\tau}h(\tau)d\tau = \int_0^1 e^{\tau}h(\tau)d\tau + \int_1^2 e^{\tau}h(\tau)d\tau +\ldots+ \int_{n-1}^{n} e^{\tau}h(\tau)d\tau + \int_n^t e^{\tau}h(\tau)d\tau$$

$$\leq e\int_0^1 h(\tau)d\tau + e^2\int_1^2 h(\tau)d\tau +\ldots+ e^n\int_{n-1}^{n} h(\tau)d\tau + e^t\int_n^t h(\tau)d\tau,$$

fazendo uso de (5.8) deduzimos que

$$\int_0^1 h(\tau)d\tau \leq a + a_1$$

$$\int_1^2 h(\tau)d\tau \leq a(2-1) + a_1 = a + a_1$$

$$\int_{n-1}^{n} h(\tau)d\tau \leq a(n - n+1) + a_1 = a + a_1$$

$$e^t\int_n^t h(\tau)d\tau \leq e^{n+1}\int_n^{n+1} h(\tau)d\tau$$

$$\leq e^{n+1}\,(a(n+1-n) + a_1)$$

$$\leq e^{n+1}\,(a + a_1)\;.$$

Consequentemente,

$$\int_0^t e^{\tau}h(\tau)d\tau \leq e(a + a_1) + e^2(a + a_1) +\ldots+ e^n(a + a_1) + e^{n+1}(a + a_1)$$

$$\leq (a + a_1)\,\frac{e^{n+1}\,e - e}{e - 1}\;,$$

o qual implica que

$$e^{-t}\int_o^t e^{\tau}h(\tau)d\tau \le e^{-(n+r)}\left[\frac{e^{n+2}-e}{e-1}\right](a+a_1)$$

$$\le \frac{e^{2-r}-e^{1-n-r}}{e-1}(a+a_1)$$

$$\le \frac{e^2}{e-1}(a+a_1)$$

$$< +\infty \ \forall\ t \ge 0 . \qquad ▪$$

Corolário 5.9.

(5.9) $$e^{-t}\int_o^t e^{\tau}\|u_t\|^2 d\tau < +\infty$$

(5.10) $$e^{-t}\int_o^t e^{\tau}\|P\Delta u(\tau)\|^2 d\tau < +\infty$$

para qualquer $t \ge 0$. ▪

A seguir vamos mostrar um lema fundamental em nosso trabalho posterior.

Lema 5.10

(5.11) $$\sup_{t\ge0}\|u_t\| < +\infty$$

(5.12) $$\sup_{t\ge0}\|P\Delta u(t)\| < +\infty$$

(5.13) $$\sup_{t\ge0} e^{-t}\int_o^t e^{\tau}\|\nabla u_t\|^2 d\tau < +\infty$$

Prova. Vejamos primeiro (5.12) supondo (5.11).

Colocando $v = -P\Delta u$ na formulação fraca de (5.1), obtém,

$$-(\rho u_t, P\Delta u) - (\rho u\nabla u, P\Delta u) + \|P\Delta u\|^2 = -(\rho f, P\Delta u),$$

assim

$$\|P\Delta u\|^2 \le (\|\rho u_t\| + \|\rho u\nabla u\| + \|\rho f\|)\,\|P\Delta u\| .$$

Consequentemente,

$$\|P\Delta u\| \le \beta\,\|u_t\| + \beta\,\|u\|_{L^6}\,\|\nabla u\|_{L^3} + \beta\|f\|$$

$$\le \beta\,\|u_t\| + C\beta\,\|\nabla u\|\left\{\|P\Delta u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2} + \|\nabla u\|\right\} + \beta\|f\|$$

$$\le \beta(\|u_t\| + \|f\|) + \frac{(C\beta)^2}{2}\,\|\nabla u\|^3 + C\beta\,\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\,\|P\Delta u\|$$

o qual implica,

$$\|P\Delta u\| \le 2\beta\|u_t\| + 2\beta\|f\| + (C\beta)^2M^3 + C\beta M^2$$

de onde

$$\sup_{t\ge 0}\|P\Delta u\| \le 2\beta\sup\|u_t\| + 2\beta\sup_{t\ge 0}\|f\| + (C\beta)^2M^3 + C\beta M^2$$

$$< +\infty$$

se é satisfeito (5.11).

Vejamos a seguir (5.11) e (5.13). Derivando a formulação fraca de (5.1) com respeito a t e colocando $v = u_t$, obtém-se:

$$\|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\rho^{1/2} u_t\|^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \rho u\nabla(u_t u_t)dx + (\rho_t f,\ u_t) + (\rho f_t,\ u_t) - ((\rho u\nabla u)_t, u_t),$$

Mas, por outro lado

$$\left| -\frac{1}{2}\int_\Omega \rho u\nabla(u_t u_t)\right| \le \|\rho\|_{L^\infty}\ \|u\|_{L^4}\ \|u_t\|_{L^4}\ \|\nabla u_t\|$$

$$\le C\beta\ \|\nabla u\|\ \|\nabla u_t\|\ \left\{\|u_t\|^{1/4}\ \|\nabla u_t\|^{3/4}\right\}$$

$$\le C\beta\ \|\nabla u\|\ \|u_t\|^{1/4}\ \|\nabla u_t\|^{7/4}$$

$$\le C_\epsilon\ (C\beta\|\nabla u\|)^8\ \|u_t\|^2 + \epsilon\ \|\nabla u_t\|^2$$

$$\le C_\epsilon\ (C\beta\ M)^8\ \|u_t\|^2 + \epsilon\|\nabla u_t\|^2\ .$$

$$|(\rho f_t,\ u_t)| \le \frac{\beta^2}{2}\|f_t\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|^2$$

$$|(\rho_t f,\ u_t)| = \left|\int_\Omega \rho_t f u_t\right| = \left|-\int_\Omega \mathrm{div}(\rho u) f u_t\right| = \left|\int_\Omega \rho u\nabla(f u_t)\right|$$

$$\le \left|\int_\Omega \rho\ u\ \nabla\ f\ u_t\right| + \left|\int_\Omega \rho u f\nabla u_t\right|$$

$$\le C_\epsilon\ (2C\beta\ \|\nabla u\|\|\nabla f\|)^2 + \epsilon\ \|\nabla u_t\|^2$$

$$\le C_\epsilon\ (2C\beta\ M\|\nabla f\|)^2 + \epsilon\|\nabla u_t\|^2 .$$

Para o último termo, observe-se que

$$(\rho u\nabla u)_t = \rho_t u\nabla u + \rho u_t \nabla u + \rho u\nabla u_t .$$

Consequentemente

$$|(\rho u_t \nabla u,\ u_t)| \le \beta^4 M^4 \|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2$$

$$|(\rho u \nabla u_t,\ u_t)| \le C_\epsilon\ (C\beta\|\nabla u\|)^8\ \|u_t\|^2 + \epsilon\|\nabla u_t\|^2$$

e

$$|(\rho_t u\nabla u,\ u_t)| = |\int \rho_t\ u\nabla u\ u_t| = |-\int_\Omega \mathrm{div}(\rho u)(u\nabla u\ u_t)|$$

$$\le (C\beta)^2\ M^6 + \frac{1}{2}\|P\Delta u\|^2$$

$$+ 2C_\epsilon (C\beta)^2\ M^4\ \|P\Delta u\|^2 + 2\epsilon\|\nabla u_t\|^2 .$$

Voltando a (5.14) e utilizando as estimativas anteriores, temos

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\|\rho^{1/2}\ u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2$$

$$\le \frac{(C\beta)}{2} M^6 + \frac{1}{2}\|P\Delta u\|^2 + 2C_\epsilon\ (C\beta)^2 M^4\ \|P\Delta u\|^2$$

$$+ \beta^4 M^4 \|u_t\|^2 + C_\epsilon (C\beta M)^8 \|u_t\|^2 + C_\epsilon (2C\beta M \|\nabla f\|^2$$

$$+ C_\epsilon (C\beta M)^8 \|u_t\|^2 + (5\epsilon + \frac{1}{2})\|\nabla u_t\|^2$$

o qual implica tomando $\epsilon < \dfrac{1}{10}$,

$$(5.15) \qquad \frac{d}{dt} \|\rho^{1/2} u_t\|^2 + C_1 \|\nabla u_t\|^2 \le C_2 + C_3 \|P\Delta u\|^2 + C_4 \|u_t\|^2$$

onde as constantes C_2, C_3, C_4 só dependem de Ω, $\sup\limits_{t\ge 0}\|\nabla u\|$, $\|\rho\|_{L^\infty}$ e $\|\nabla f\|^2$, C_1 é uma constante positiva.

Multiplicando a desigualdade anterior por e^t e integrando de 0 a t obtém-se

$$e^t \|\rho^{1/2} u_t\|^2 + C_1 \int_0^t e^\tau \|\nabla u_t\|^2 d\tau$$

$$\le \|\rho^{1/2} u_t\|^2(0) + C_2 \int_0^t e^\tau d\tau + C_3 \int_0^t e^\tau \|P\Delta\|^2 d\tau + C_4 \int_0^t e^\tau \|u_t\|^2 d\tau$$

$$+ \int_0^t e^\tau \|\rho^{1/2} u_t\|^2 d\tau$$

$$\le \beta \|u_t\|^2(0) + C_2 \int_0^t e^\tau d\tau + C_3 \int_0^t e^\tau \|P\Delta u\|^2 d\tau + (C_4 + \beta) \int e^\tau \|u_t\|^2 d\tau ,$$

Consequentemente

$$\|\rho^{1/2} u_t\| + e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\nabla u_t\|^2 d\tau$$

$$\leq e^{-t}\beta^2\|u_t\|^2(0) + C_2 e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau + C_3 e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|P\Delta u\|^2 d\tau$$

$$+ (C_4 + \beta)e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|u_t\|^2 d\tau \;,$$

de onde, tendo em conta o corolario 5.9, deduz-se o estabelecido no lema. ∎

Corolario 5.11

$$\|\nabla e^n\|^2 (t) \leq \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|e^n\|^2(t) \leq \frac{C}{(\lambda_{n+1})^2}$$

para qualquer $t \geq 0$. ∎

Corolario 5.12

$$\int_{t_o}^t \|\nabla u_t\|^2 d\tau \leq C(t-t_o) + C_1 \tag{5.16}$$

Prova. De (5.15), integrando de t_o a t, tem-se :

$$C_1\int_0^t \|\nabla u_t\|^2 dt + \|\rho^{1/2}u_t\|^2$$

$$\leq \|\rho^{1/2}u_t\|^2(0) + C_2\,(t-t_o) + C_3\sup_{t\geq 0}\|\Delta u\|^2\,(t-t_o)$$

$$+ C_4\sup_{t\geq 0}\|u_t\|^2\,(t-t_o)$$

o que implica (5.16). ∎

Uma estimativa a priori, similar ao lema será necessária para as soluções ζ de (5.2) se $\|\nabla\zeta(t_o)\| < \delta$, (A4) assegura que $\|\nabla\zeta\| < L_2\delta$ para todo $t \geq t_o$. De modo que $\hat{u} = u + \zeta$ é uma solução da equação de Navier-Stokes não homogênea com $\|\nabla\hat{u}\|(t) \leq \|\nabla u\|(t) + \|\nabla\zeta\|(t) < M + L_2\delta$, para $t \geq t_o$. Tendo em vista o lema 5.10, $\|P\Delta\hat{u}\|(t_o) \leq \|P\Delta u\|(t_o) + \|P\Delta\zeta\|(t_o)$ é limitado se $\|P\Delta\zeta\|(t_o)$ o for. Assim as estimativas a priori para as soluções $(\hat{u},\hat{p})$ das equações de Navier-Stokes não homogêneas, logo apelando para o lema 5.10, temos que $\|P\Delta\zeta\|$ é limitado, para todo $t \geq t_o$, em termos de $\|P\Delta\zeta\|(t_o)$ e as constantes e normas das suposições (A1), (A2), (A3) e (A4). Em resumo:

Lema 5.13. Para perturbações ζ (isto é soluções de (5.2)) as quais inicialmente satisfazem $\|P\Delta\zeta\|(t_o) \leq \delta$ e $\|P\Delta\zeta\|(t_o) \leq a$, se satisfaz $\|P\Delta\zeta\|(t) < C$ para todo $t \geq t_o$, onde C é uma constante que depende só de δ, Ω e as estimativas assumidas para as várias normas das condições (A1), (A2), (A3), (A4). ∎

Lema 5.14.

$$(5.17) \qquad \int_{t_o}^{t} \|\nabla\zeta_t\|^2 d\tau \leq C\,(t-t_o) + C_1$$

onde C, C_1 são constantes positivas.

Prova. Observe-se que

$$\int_{t_o}^{t} \|\nabla\zeta_t\|^2 d\tau \leq C\left[\int_{t_o}^{t} \|\nabla\hat{u}_t\|^2 d\tau + \int_{t_o}^{t} \|\nabla u_t\|^2 d\tau\right],$$

logo, tendo em conta o corolário 5.12, nos basta estimar

$\int_{t_o}^{t} \|\nabla \hat{u}\|^2 d\tau$. Mas isto é feito da mesma forma que para u, de onde o resultado. ■

Lema 5.15. Se $\|\nabla\psi^n\|^2(t) \le \dfrac{C_1}{\lambda_{n+1}}$ se satisfaz em algum intervalo $(0,t^*)$, para alguma constante $C_1 > 0$. Então existem A_i e $\tilde{A}_i$ $(i = 1,2)$ constantes positivas independentes de n tal que

$$(5.18)\qquad \int_{t_o}^{t} \|\psi_t^n\|^2\, d\tau \le \|\nabla\psi^n\|^2(t_o) + A_2(t-t_o) + \frac{A_1(t-t_o)}{\lambda_{n+1}}$$

$$(5.19)\qquad \int_{t_o}^{t} \|P\Delta\psi^n\|^2 d\tau \le \|\nabla\psi^n\|^2(t_o) + \tilde{A}_2(t-t_o) + \frac{\tilde{A}_1(t-t_o)}{\lambda_{n+1}}$$

Prova. Temos que ψ^n satisfaz a equação

$$\begin{aligned}(\rho^n\psi_t^n,\ \phi^n) + (\nabla\psi^n,\nabla\phi^n) = {} & (\rho^n e_t^n,\ \phi^n) - (\rho^n\psi^n\nabla u,\ \phi^n) - (\rho^n u\ \nabla\psi^n,\phi^n)\\ & - (\rho^n\psi^n\ \nabla\psi^n,\ \phi^n) + (\rho^n\psi^n\nabla e^n,\ \phi^n)\\ & + (\rho^n e^n\nabla\psi^n,\ \phi^n) + (\rho^n u\ \nabla e^n,\ \psi^n)\\ & + (\rho^n e^n\ \nabla v^n,\ \phi^n) + ((\rho-\rho^n)(u_t + u\nabla u - f),\phi^n),\end{aligned}$$

para toda ϕ^n da forma: $\phi^n(x) = \Sigma\, d_k w^k(x)$.

Colocando $\phi^n = 2\psi_t^n$ em (5.20) obtém-se

$$(5.21)\quad 2\|(\rho^n)^{1/2}\psi_t^n\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla\psi^n\|^2$$

$$\le \|(\rho^n)^{1/2}\psi_t^n\|^2 + 8\int_\Omega |\rho^n| \left\{|e_t^n|^2 + |\psi^n\nabla u|^2\right.$$

$$+ |u\nabla\psi^n|^2 + |\psi^n\nabla e^n|^2 + |e^n\nabla\psi^n|^2 + |u\nabla e^n|^2$$

$$+ |e^n\nabla v^n|^2 + |\psi^n\nabla\psi^n|^2)dx + \gamma\|\psi^n\|^2$$

$$+ C_\gamma |\int_\Omega |(\rho-\rho^n)(u \quad + u\nabla u - f)|^2 dx$$

Agora colocando $\phi^n = P\Delta\psi^n$ em (5.20), obtemos

$$(5.22)\quad \|P\Delta\psi^n\|^2 \le \frac{1}{2}\|P\Delta\psi^n\|^2 + \frac{9}{2}\int_\Omega |\rho^n|^2 (|e_t^n|^2 + |\psi_t^n|^2$$

$$+ |\psi^n \nabla u|^2 + |u \nabla\psi^n|^2 + |\psi^n \nabla e^n|^2 + |e^n\nabla\psi^n|^2$$

$$+ |e^n \nabla v^n|^2 + |u\nabla e^n|^2 + |\psi^n \nabla\psi^n|^2)dx$$

$$+ \frac{9}{2}\int |(\rho-\rho^n)(u_t + u\nabla u - f)|^2 dx \quad .$$

Multiplicando (5.22) por $d > 0$ e somando o resultado com (5.21), obtém-se:

$$(1 - \frac{9}{2}d\beta)\|(\rho^n)^{1/2}\psi_t^n\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla\psi^n\|^2 + \frac{d}{2}\|P\Delta\psi^n\|^2$$

$$\leq (8\beta + \frac{9}{2}\beta^2 d) \int_\Omega \Big\{ |e_t^n|^2 + |\psi^n \nabla u|^2 + |u \nabla \psi^n|^2$$

$$+ |\psi^n \nabla e^n|^2 + |e^n \nabla \psi^n|^2 + |u \nabla e^n|^2 + |e^n \nabla v^n|^2 + |\psi^n \nabla \psi^n|^2 \Big\} dx$$

$$+ (C_\gamma + \frac{9d}{2}) \int_\Omega |(\rho - \rho^n)(u_t + u \nabla u - f)|^2 dx + \gamma \|\psi_t^n\|^2.$$

Tomando $d = \dfrac{1}{9\beta}$, temos:

$$\frac{1}{2} \|(\rho^n)^{1/2} \psi_t^n\|^2 + \frac{d}{dt} \|\nabla \psi^n\|^2 + \frac{1}{18\beta} \|P\Delta \psi^n\|^2$$

$$\leq 17\beta \int_n (|e_t^n|^2 + |\psi^n \nabla u|^2 + |u \nabla \psi^n|^2$$

$$+ |\psi^n \nabla e^n|^2 + |e^n \nabla \psi^n|^2 + |u \nabla e^n|^2 + |e^n \nabla v^n|^2 + |\psi^n \nabla \psi^n|^2) dx +$$

$$(C_\gamma + \frac{1}{2\beta}) \int_\Omega |(\rho - \rho^n)(u_t + u \nabla u - f)|^2 dx + \gamma \|\psi_t^n\|^2 \quad .$$

Por outro lado, lembrando que

$$\|(\rho^n)^{1/2} \psi_t^n\|^2 \geq \alpha \|\psi_t^n\|^2$$

e considerando a seguir $\gamma < \alpha/2$, obtemos

$$C_1\|\psi_t^n\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla\psi^n\|^2 + \frac{1}{18\beta}\|P\Delta\psi^n\|^2$$

$$\leq 17\beta \int_\Omega (|e_t^n|^2 + |\psi^n\nabla u|^2 + |u\nabla\psi^n|^2$$

$$+ |\psi^n\nabla e^n|^2 + |e^n\nabla\psi^n|^2 + |u\nabla e^n|^2$$

$$+ |e^n\nabla v^n|^2 + |\psi^n\nabla\psi^n|^2)dx + C_3 \int_n |(\rho-\rho^n)(u_t + u\nabla u - f)|^2 dx$$

Observemos também que:

$$\int_\Omega |\psi^n \nabla\psi^n|^2 dx \leq \|\psi^n\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla\psi^n|^2 dx$$

$$\leq C \left(\int_n |P\Delta\psi^n|^2 dx\right)^{5/4} \left(\int_n |\nabla\psi^n|^2 dx\right)^{5/4}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{17\beta} \|P\Delta\psi^n\|^2 + \delta\|\nabla\psi^n\|^{10}$$

consequentemente, temos, considerando $\epsilon < \frac{1}{18\beta}$,

$$C_1\|\psi_t^n\|^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla\psi^n\|^2 + C_2\|P\Delta\psi^n\|^2$$

$$\leq 17\beta \left\{\|e_t^n\|^2 + \|\psi^n\nabla u\|^2 + \|u\nabla\psi^n\|^2\right.$$

$$+ \|\psi^n \nabla e^n\|^2 + \|e^n \nabla \psi^n\|^2 + \|u \nabla e^n\|^2 + \|e^n \nabla v^n\|^2 \Big\} + 17\beta\delta \|\nabla \psi^n\|^{10}$$

$$+ C_3 \|(\rho-\rho^n)(u_t + u\nabla u - f)\|^2.$$

Por outro lado, em virtude do lema 5.10, corolário 5.11 e as hipóteses, obtém-se:

$$\|e_t^n\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{n+1}} \|\nabla u_t\|^2$$

$$\|\psi^n \nabla u\|^2 \le \|\psi^n\|^2_{L^4} \|\nabla u\|^2_{L^4} \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|u \nabla \psi^n\|^2 \le \|u\|^2_{L^\infty} \|\nabla \psi^n\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|\psi^n \nabla e^n\|^2 \le \|\psi^n\|_{L^4} \|\nabla e^n\|_{L^4} \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|e^n \nabla \psi^n\|^2 \le \|e^n\|^2_{L^\infty} \|\nabla \psi^n\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|u \nabla e^n\|^2 \le \|u\|^2_{L^\infty} \|\nabla e^n\|^2 \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|e^n \nabla v^n\|^2 \le \|e^n\|_{L^4} \|\nabla v^n\|^2_{L^4} \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}$$

$$\|(\rho-\rho^n)(u_t + u \nabla u - f)\|^2 \le C\|\rho-\rho^n\|_{L^\infty} \|u_t + u \nabla u - f\|^2$$

$$\le C.$$

Fazendo uso das estimativas anteriores, e integrando de 0 a t, e apelando ao corolário 5.12, obtém-se o lema. ■

Lema 5.16. Se $\|\nabla\psi^n\|^2(t) \le \dfrac{C_1}{\lambda_{n+1}}$ é satisfeito em algum intervalo $(0,t^*)$, então existe C_2 independente de n tal que

$$\|P\Delta\psi^n\|^2(t) \le C_2$$

para todo $t \in (0,t^*)$.

Prova. Observe-se que $\psi^n = u^n - v^n$, como $\|P\Delta v^n\| \le \|P\Delta u\|$ e ele é limitado tendo em conta o lema 5.10. Portanto, nos bastaria estimar $\|P\Delta u^n\|$ para ter a conclusão.

Pelas hipóteses, no intervalo $(0,t^*)$ temos:

$$\|\nabla\psi^n\| = \|\nabla u^n - \nabla v^n\| \le (C_1/\lambda_{n+1})^{1/2}$$

de onde

$$\|\nabla u^n\| \le (C_1/\lambda_{n+1})^{1/2} + \|\nabla v^n\| \le (C_1/\lambda_{n+1})^{1/2} + M \le (C_1/\lambda_1)^{1/2} + M.$$

Fazendo os mesmos argumentos dados para u obtemos

$$\int_{t_o}^{t} \|P\Delta u^n\|^2 d\tau \le \bar{M}_1 (t-t_o) + \bar{M}_2$$

$$\int_{t_o}^{t} \|u_t^n\|^2 d\tau \le \bar{N}_1 (t-t_o) + \bar{N}_2.$$

com o qual, apelando ao lema 5.8, tem-se:

$$\sup_{t\ge 0} \; e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|u_t^n\|^2\, d\tau$$

e

$$\sup_{t\ge 0} \; e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\, \|P\Delta u^n\|^2\, d\tau$$

são limitados.

Agora derivando a formulação fraca da equação de u^n, obtém-se:

$$(\rho^n u_t^n)_t,\ \phi) + ((\rho^n u^n \nabla u^n)_t,\ \phi) - (\Delta u_t^n,\ \phi) = ((\rho^n f)_t, \phi).$$

Colocando-se $\phi = u_t^n$ e estimando os termos correspondentes vem que:

$$\|\nabla u_t^n\|^2 + \frac{d}{dt}\|(\rho^n)^{1/2} u_t^n\|^2 \le C_1\|u_t^n\|^2 + C_2\|P\Delta u^n\|^2 + C_3,$$

onde C_1, C_2, C_3 são constantes que só dependem de Ω, β, $\sup_{t\ge 0}\|\nabla u^n\|$, $\sup_{t\ge 0}\|f_t\|$, $\sup_{t\ge 0}\|\nabla f\|$.

Multiplicando a desigualdade anterior por e^t e integrando de 0 a t, vem que:

$$\int_0^t e^{\tau}\,\|\nabla u_t^n\|^2 d\tau + e^t\,\|(\rho^n)^{1/2}u_t^n\|^2$$

$$\leq \|(\rho^n)^{1/2}u_t^n\|^2(0) + C_3\int_0^t e^{\tau}\,d\tau + C_2\int_0^t e^{\tau}\|P\Delta u^n\|^2 d\tau + (C_1 + \beta)\int_0^t e^{\tau}\|u_t^n\|^2 d\tau.$$

Consequentemente

$$e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,\|\nabla u_t^n\|^2\,d\tau + \|(\rho^n)^{1/2}u_t^n\|^2$$

$$\leq e^{-t}\,\|(\rho)^{1/2}u_t^n\|^2(0) + C_3\,e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,d\tau$$

$$+ C_2\,e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,\|P\Delta u^n\|^2 d\tau + (C_1 + \beta)e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\|u_t^n\|^2 d\tau$$

$$\leq K$$

para todo $t \geq 0$. Em particular

(5.24) $$\|u_t^n\|^2 \leq \frac{K}{\alpha}$$

para todo $t \geq 0$. Disto conclui-se que

$$\|P\Delta u^n\| \leq (\|\rho^n u^n\,\nabla u^n\| + \|\rho^n u_t^n\| + \|\rho^n f\|)$$

$$\leq \beta \, \|u_t^n\| + \beta \, \|f\| + \frac{1}{2} \, \|P\Delta u^n\| + \frac{\beta C}{2} \, \|\nabla u^n\|^3 + \beta \, \|\nabla u^n\|^2.$$

Consequentemente

$$\|P\Delta u^n\| \leq 2\beta\|u_t^n\| + 2\beta\|f\| + \beta C\|\nabla u^n\|^3 + \beta\|\nabla u^n\|^2$$

$$\leq \tilde{K} \quad ,$$

tendo em conta (5.23) e (5.24). ■

Para uso futuro, queremos agora fazer uma estimativa de $\nabla P_n(\psi^n - \zeta) = \nabla\psi^n - \nabla P_n\zeta$. Para isto, observe que v^n satisfaz a equação

$$(5.25) \qquad (\rho u_t, \phi^n) + (\nabla v^n, \nabla\phi^n) + (\rho u \nabla u, \phi^n) = (\rho f, \phi^n)$$

para toda ϕ^n do tipo $\phi^n(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k w^k(x)$.

Subtraindo (5.3) de (5.25) obtemos

$$(5.26) \qquad (\rho^n \psi_t^n, \phi^n) + (\nabla\psi^n, \nabla\phi^n)$$

$$= (\rho\psi_t^n, \phi^n) - (\rho^n v_t^n, \phi^n) + (\rho u \nabla u, \phi^n) - (\rho^n u^n \nabla u^n, \phi^n)$$

$$= (\rho^n e_t^n, \phi^n) + ((\rho - \rho^n)(u_t + u\nabla u - f, \phi^n)$$

$$+ (\rho^n u \nabla u, \phi^n) - (\rho^n u^n \, \nabla u^n, \phi^n) \quad .$$

Por outro lado, multiplicando a equação da perturbação por ϕ^n e integrando sobre Ω, temos:

$$(5.27)\quad (\hat{\rho}\zeta_t,\ \phi^n) + (\hat{\rho}u\nabla\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla u,\ \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla\zeta, \phi^n) + (\nabla\zeta, \partial\phi^n)$$

$$= ((\rho - \rho^n)(u_t + u\nabla u - f, \phi^n).$$

Subtraindo (5.26) de (5.27) obtém-se; colocando $\theta = \psi^n - \zeta$,

$$(\rho^n\theta_t, \phi^n) + (\nabla\theta, \nabla\phi^n)$$

$$= ((\hat{\rho}-\rho^n)(u_t+u\nabla u-f, \phi^n) - (\rho^n\zeta_t, \phi^n) + (\rho^n e^n_t,\ \phi^n) + (\rho^n u\nabla u,\ \phi^n)$$

$$- (\rho^n u^n\nabla u^n, \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta_t,\ \phi^n) + (\hat{\rho}u\nabla\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla u,\ \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n).$$

Note-se que

$$(5.28)\qquad (\rho^n u\nabla u,\ \phi^n) - (\rho^n u^n\nabla u^n,\ \phi^n) = -(\rho^n\psi^n\nabla u,\ \phi^n) - (\rho^n u\nabla\psi^n,\ \phi^n)$$

$$- (\rho^n\psi^n\nabla\psi^n,\ \phi^n) + (\rho^n\psi^n\nabla e^n,\ \phi^n) + (\rho^n e^n\ \nabla\psi^n,\ \phi^n)$$

$$+ (\rho^n e\ \nabla v^n,\ \phi^n) + (\rho^n u\ \nabla e^n,\ \phi^n).$$

Observe também que, já que $P_n\theta = P_n(\psi^n-\zeta) = \psi^n - P_n\zeta$

$$(5.29)\qquad (\rho^n u\nabla\psi^n,\ \phi^n) = (\rho^n u\ \nabla P_n\theta,\ \phi^n) + (\rho^n u\nabla P_n\zeta,\ \phi^n)$$

$$(5.30)\qquad (\rho^n\psi^n\nabla u,\ \phi^n) = (\rho^n P_n\theta\nabla u,\ \phi^n) + (\rho^n P_n\zeta\nabla u,\ \phi^n)$$

$$(5.31)\qquad (\rho^n\psi^n\nabla\psi^n,\ \phi^n) = (\rho^n\psi^n\nabla P_n\theta,\ \phi^n) + (\rho^n\psi^n\nabla P_n\zeta,\ \phi^n)$$

Temos assim que:

$$(\rho^n u\nabla u,\ \phi^n) - (\rho^n u^n\nabla u^n,\ \phi^n)$$

$$= - (\rho^n u\nabla P_n\theta,\ \phi^n) + (\rho^n\psi^n\nabla e^n,\ \phi^n)$$

$$+ (\rho^n e^n\nabla\psi^n, \phi^n) + (\rho^n u\nabla e^n,\ \phi^n) + (\rho^n e^n\nabla v^n,\ \phi^n) - (\rho^n u\nabla P_n\zeta\ ,\ \phi^n)$$

$$- (\rho^n P_n\theta\nabla u, \phi^n) - (\rho^n P_n\zeta\nabla u, \phi^n) - (\rho^n\psi^n\nabla P_n\theta, \rho^n) - (\rho^n\psi^n\nabla P_n\zeta, \phi^n).$$

Em vista de (5.29), (5.30), (5.31).

Por outro lado, tendo em conta que

$$\zeta = P_n\zeta + Q_n\zeta\quad ,$$

tem-se

$$(\hat{\rho}u\nabla\zeta,\ \phi^n) = (\hat{\rho}u\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho}u\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n)$$

$$(\hat{\rho}\zeta\nabla u,\ \phi^n) = (\hat{\rho}P_n\zeta\nabla u,\ \phi^n) + (\hat{\rho}uQ_n\zeta\nabla u,\ \phi^n).$$

Também,

$$(\rho^n\psi^n\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) = (\rho^n P_n\theta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n P_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n)$$

$$(\rho^n\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n) = (\rho^n P_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n Q_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n)$$

$$+ (\rho^n P_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n Q_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n).$$

Consequentemente

$$(\rho^n P_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) = (\rho^n\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n) - (\rho^n Q_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n)$$

$$- (\rho^n P_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) - (\rho^n Q_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n).$$

Logo

$$- (\rho^n\psi^n\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n)$$

$$= - (\rho^n P_n\theta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n P_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n)$$

$$+ (\rho^n Q_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n Q_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) + ((\hat{\rho}-\rho^n)\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n)$$

Assim

$$(\rho^n u\nabla u,\ \phi^n) - (\rho^n u^n\nabla u^n,\ \phi^n) + (\hat{\rho}u\nabla\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla u,\ \rho^n) + (\hat{\rho}\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n)$$

$$= - (\rho^n u\nabla P_n\theta,\ \phi^n) + ((\hat{\rho}-\rho^n)\ u\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho}u\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) - (\rho^n P_n\theta\nabla u,\phi^n)$$

$$((\hat{\rho}-\rho^n)P_n\zeta\nabla u,\ \phi^n) + (\hat{\rho}Q_n\zeta\nabla u,\ \phi^n) - (\rho^n\psi^n\nabla P_n\theta,\ \phi^n) + (\rho^n\psi^n\nabla e^n,\ \phi^n)$$

$$+ (\rho^n e^n\nabla v^n,\ \phi^n) - (\rho^n P_n\theta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n P_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n Q_n\zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n)$$

$+ (\rho^n Q_n \zeta \nabla Q_n \zeta,\ \phi^n) + ((\hat{\rho}-\rho^n)\zeta\nabla\zeta,\ \phi^n).$

Finalmente do feito anteriormente, obtém-se

(5.32) $$(\rho^n \theta_t,\ \phi^n) + (\nabla\theta,\ \nabla\phi^n)$$

$$= ((\hat{\rho}-\rho^n)(u_t + u\nabla u + \zeta_t + u\nabla P_n\zeta + P_n\zeta\nabla u + \zeta\nabla\zeta),\ \phi^n)$$

$$+ (\rho^n e^n_t,\ \phi^n) - (\rho^n\ u\nabla P_n\theta,\ \phi^n) - (\rho^n P_n\theta\nabla u,\ \phi^n)$$

$$- (\rho^n \psi^n \nabla P_n\theta,\ \phi^n) +$$

$$(\rho^n \psi^n \nabla e^n,\ \phi^n) + (\rho^n e^n \nabla v^n,\ \phi^n) -$$

$$(\rho^n P_n\theta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\hat{\rho} u\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) +$$

$$(\hat{\rho}_n Q\ \zeta\nabla u,\ \phi^n) + (\rho^n_n P\ \zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n) +$$

$$(\rho^n Q_n \zeta\nabla P_n\zeta,\ \phi^n) + (\rho^n Q_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ \phi^n).$$

Colocando $\phi^n = P_n\theta_t$, temos

(5.33) $$(\rho^n \theta^n_t,\ P_n\theta_t) = (\rho^n\theta_t,\ \theta_t) + (\rho^n\theta_t,\ Q(\zeta_t))$$

$$= \|(\rho^n)^{1/2}\ \theta_t\|^2 + (\rho^n\theta_t,\ Q_n\zeta_t)\ ,$$

já que $\theta_t = \psi^n_t - \zeta_t$, implica $P_n\theta_t = \psi^n_t - P_n\zeta_t$, e $- P_n\zeta_t = Q_n\zeta - \zeta_t$, logo:

$$P_n\theta_t = \psi_t^n - \zeta_t + Q_n\zeta = \theta_t + Q_n\zeta$$

e

(5.34) $$(\nabla\theta,\ \nabla P_n\theta_t) = (\nabla\theta,\ P_n(\nabla\theta_t))$$

$$= (P_n(\nabla\theta) + Q_n(\nabla\theta),\ P_n(\nabla\theta_t))$$

$$= (P_n\nabla\theta,\ P_n\nabla\theta_t) + (Q_n\nabla\theta,\ P_n\nabla\theta_t)$$

$$= (\nabla P_n\theta,\ \nabla(P_n\theta)_t)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \|P_n\nabla\theta\|^2$$

já que P_n e Q_n são projeções ortogonais.

Logo, substituindo (5.33), (5.34) em (5.32), temos

$$\|(\rho^n)^{1/2}\ \theta_t\|^2 + \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \|P_n\nabla\theta\|^2$$

(5.35) $$= ((\hat{\rho}-\rho^n)(u_t + u\nabla u + \zeta_t + u\nabla P_n\zeta + P_n\zeta\nabla u + \zeta\nabla\zeta),\ P_n\theta_t)$$

$$+ (\rho^n e_t^n,\ P_n\theta_t) - (\rho^n u\nabla P_n\theta,\ P_n\theta_t) - (\rho^n P_n\theta\nabla u,\ P_n\theta_t) -$$

$$(\rho^n\psi^n\nabla P_n\theta,\ P_n\theta_t) + (\rho^n\psi^n\nabla e^n,\ P_n\theta_t) + (\rho^n e^n\nabla v^n,\ P_n\theta_t) -$$

$$(\rho^n P_n\theta\nabla P_n\zeta,\ P_n\theta_t) + (\hat{\rho}u\nabla Q_n\zeta,\ P_n\theta_t) + (\hat{\rho}Q_n\zeta\ \nabla u, P_n\theta_t) +$$

$$(\rho^n P_n\zeta\nabla Q_n\zeta,\ P_n\theta_t) + (\rho^n Q_n\zeta\ \nabla P_n\zeta, P_n\theta_t) + (\rho^n Q_n\zeta,\ P_n\theta_t).$$

Observe-se que

$$\|P_n\theta_t\| \le \|P_n\|\|\theta_t\| = \|\theta_t\|$$

de onde

$$|(\rho^n\theta_t,\ Q_n\zeta_t| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_1(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\ \|\nabla\zeta_t\|^2$$

$$|(\rho^n e^n_t,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\ \|\theta_t\|^2 + \frac{C_2(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\ \|\nabla u_t\|^2$$

$$|(\rho^n u\nabla P_n\theta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + C_3(\epsilon)\|\nabla P_n\theta\|^2$$

$$|(\rho^n P_n\theta\nabla u,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + C_4(\epsilon)\|\nabla P_n\theta\|^2$$

$$|(\rho^n\psi^n\nabla P_n\theta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + C_5(\epsilon)\|P\Delta\psi^n\|^2\|\nabla P_n\theta\|^2$$

$$|(\rho^n\psi^n\nabla e^n,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_6(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\ \|P\Delta\psi^n\|^2$$

$$|(\rho^n e^n\nabla v^n,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_7(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}$$

$$|(\rho^n P_n \theta \nabla P_n \zeta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + C_8(\epsilon)\|P\Delta\zeta\|^2\|\nabla P_n\theta\|^2$$

$$|(\hat{\rho} u \nabla Q_n \zeta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_9(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta\zeta\|^2$$

$$|(\hat{\rho} Q_n \zeta \nabla u,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_{10}(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta\zeta\|^2$$

$$|(\rho^n P_n \zeta \nabla Q_n \zeta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_{11}(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta\zeta\|^4$$

$$|(\rho^n Q_n \zeta \nabla P_n \zeta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_{12}(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta\zeta\|^4$$

$$|(\rho^n Q_n \zeta \nabla Q_n \zeta,\ P_n\theta_t)| \le \epsilon\|\theta_t\|^2 + \frac{C_{13}(\epsilon)}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta\zeta\|^4$$

onde as constantes C_i dependem possivelmente só de β, Ω e $\sup_{t\ge 0}\|P\Delta u\|$, que é finito em virtude do lema 5.10.

Seja $\pi = \hat{\rho}-\rho^n$ e $g^n = u_t + u\nabla u - f + \zeta_t + u\nabla P_n\zeta + P_n\zeta\nabla u + \zeta\nabla\zeta$. Para ter todos os termos de (5.35) nos resta estimar $|(\pi g^n,\ P_n\theta_t)|$, isto precisará de alguns lemas.

Lema 5.17. Seja $p \le 6$. Então

$$\|g^n\|^2_{L^p} \le a_1 + a_2\|P\Delta\zeta\|^2 + a_3\|P\Delta\zeta\|^4 + a_4\|\nabla u_t\|^2 + a_5\|\nabla\zeta_t\|^2$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4 são constantes positivas que só depende de Ω, e a_1,

a_2, a_3 também depende do $\sup_{t\geq 0} \|P\Delta u\|$.

Prova.

$$\|g^n\|^2_{L^p} \leq C \left\{ \|u_t\|^2_{L^p} + \|u\nabla u\|^2_{L^p} + \|\zeta_t\|^2_{L^p} + \|u\nabla P_n\zeta\|_{L^p} + \|P_n\zeta\nabla u\|_{L^p} + \|\zeta\nabla\zeta\|^2_{L^p} \right\}.$$

Por outro lado, já que $p \leq 6$, obtém-se

$$\|u_t\|^2_{L^p} \leq C\|\nabla u_t\|^2$$

$$\|\zeta_t\|^2_{L^p} \leq C\|\nabla\zeta_t\|^2$$

$$\|u\nabla u\|^2_{L^p} \leq C\|P\Delta u\|^2 \|P\Delta u\|^2 \leq a_1$$

$$\|u\nabla P_n\zeta\|^2_{L^p} \leq C\|P\Delta u\|^2\|P\Delta\zeta\|^2 \leq \tilde{C}\|P\Delta\zeta\|^2$$

$$\|P_n\zeta\nabla u\|^2_{L^p} \leq C\|P\Delta u\|^2\|P\Delta\zeta\|^2 \leq \tilde{C}\|P\Delta\zeta\|^2$$

$$\|\zeta\nabla\zeta\|^2_{L^p} \leq C\|P\Delta\zeta\|^2\|P\Delta\zeta\|^2 \leq a_3\|P\Delta\zeta\|^4$$

de onde o resultado. ∎

Lema 5.18. Se $q \leq 6$, $r \geq 3$, $s \geq 6$ com $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$,

então

$$(5.36)\qquad \|\pi\|^2_{L^r} \le 8\,\|\pi\|^2_{L^r}(t_o) + a_1(t - t_o)\int_{t_o}^{t}\|\nabla P_n\theta\|^2 d\tau$$

$$+\frac{\bar{a}_2}{\lambda_{n+1}}\,(t - t_o)^2 + \frac{\bar{a}_3}{\lambda_{n+1}}\,(t - t_o)\int_{t_o}^{t}\|P\Delta\zeta\|^2 d\tau$$

onde as $\bar{a}_i$ dependem possivelmente só de Ω, $\|\nabla\hat{\rho}\|_{L^s}$; $\sup\limits_{t\ge0}\|\Delta u\|$.

Prova. Observe-se que

$$\hat{\rho}_t + u^n\nabla\hat{\rho} = (u^n - \hat{u})\,\nabla\hat{\rho}$$

$$\rho^n_t + u^n\nabla\rho^n = 0.$$

Subtraindo as duas equações anteriores obtém-se:

$$(5.37)\qquad \pi_t + u^n\nabla\pi = (u^n - \hat{u})\,\nabla\hat{\rho}.$$

Por outro lado, lembrando que $\hat{u} = u + \zeta$, tem-se

$$u^n - \hat{u} = u^n - u - \zeta = P_n\theta - Q_n\zeta - e^n.$$

Consequentemente em (5.37) temos:

$$\pi_t + u^n\nabla\pi = (P_n\theta - Q_n\zeta - e^n)\nabla\hat{\rho}.$$

Multiplicando por $|\pi|^{r-1}$ e integrando sobre Ω, obtém-se

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,\|\pi\|^r_{L^r} \le \int_\Omega (P_n\theta - Q_n\zeta - e^n)\nabla\hat{\rho}\,\,|\pi|^{r-1}$$

$$\leq \left(\int_{\Omega} |P_n\theta - Q_n\zeta - e^n)\nabla\hat{\rho}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega} |\pi|^r\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$\leq \|(P_n\theta - Q_n\zeta - e^n)\nabla\hat{\rho}\|_{L^r} \|\pi\|_{L^r}^{r-1},$$

conclui-se disto que

$$\frac{d}{dt} \|\pi\|_{L^r} \leq \|(P_n\theta - Q_n\zeta - e^n)\nabla\hat{\rho}\|_{L^r}.$$

Por outro lado

$$\|(P_n\theta - Q_n\zeta - e^n)\ \nabla\hat{\rho}\|_{L^r} \leq \|P_n\theta - Q_n\zeta - e^n\|_{L^q}\|\nabla\hat{\rho}\|_{L^s} \tag{5.38}$$

$$\leq \|\nabla\hat{\rho}\|_{L^s} \left\{\|\nabla P_n\theta\| + \|\nabla Q_n\zeta\| + \|\nabla e^n\|\right\}$$

$$\leq \|\nabla\hat{\rho}\|_{L^s}\left\{\|\nabla\ P_n\theta\| + \frac{C}{(\lambda_{n+1})^{1/2}} + \frac{C\|P\Delta\zeta\|}{(\lambda_{n+1})^{1/2}}\right\}$$

tendo em conta as estimativas anteriores.

Agora integrando de t_0 a t (5.37) e fazendo uso de (5.38) conclui-se:

$$\|\pi\|_{L^r}^2\ (t) \leq 8\left[\|\pi\|_{L^r}^2\ (t_0) + C_1\left(\int_{t_0}^{t} \|\nabla P_n\theta\| d\tau\right)^2\right.$$

$$+\left[\int_{t_0}^{t}\frac{C}{(\lambda_{n+1})^{1/2}}\,d\tau\right]^2+\left[\int_{t_0}^{t}\frac{C\|P\Delta\zeta\|}{(\lambda_{n+1})^{1/2}}\right]^2\Bigg].$$

Mais,

$$\left[\int_{t}^{t}\|\nabla P_n\theta\|d\tau\right] \le (t-t_0)\int_{t}^{t}\|\nabla P_n\theta\|^2 d\tau$$

$$\left[\int_{t_0}^{t}\frac{C}{(\lambda_{n+1})^{1/2}}d\tau\right]^2 \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}(t-t_0)^2$$

$$\left[\int_{t_0}^{t}\frac{C}{(\lambda_{n+1})^{1/2}}\|P\Delta\zeta\|d\tau\right]^2 \le \frac{C}{\lambda_{n+1}}(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\|P\Delta\zeta\|^2 d\tau$$

de onde o resultado. ∎

Voltando a (5.35) obtemos

$$\alpha\|\theta_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla P_n\theta\|^2$$

$$\le 14\epsilon\|\theta_t\|^2+\frac{C_\epsilon\beta^2}{\lambda_{n+1}}\|\nabla\zeta_t\|^2+\frac{C_\epsilon\beta^2}{\lambda_{n+1}}\|\nabla u_t\|^2+\frac{C_\epsilon\beta^2}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta u\|^2\|P\Delta\psi^n\|^2$$

$$+\frac{C_\epsilon\beta^2}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta u\|^4+\frac{2C_\epsilon\hat{\beta}^2}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta u\|^2\|P\Delta\zeta\|^2+\frac{3C_\epsilon\beta^2}{\lambda_{n+1}}\|P\Delta\zeta\|^4$$

$$+C_\epsilon\|\pi\|^2_{L^r}\|g^n\|^2_{L^p}+\|\nabla P_n\theta\|^2\left\{2C_\epsilon\beta^2\|P\Delta u\|^2+C_\epsilon\beta^2\|P\Delta\psi^n\|^2+C_\epsilon\beta^2\|P\Delta\zeta\|^2\right\}.$$

Logo tomando $\epsilon=\frac{1}{14}\left[\alpha-\frac{1}{2}\right]$ e integrando de t_o a t obtém-se

$$(5.39) \qquad \int_{t_o}^{t} \|\theta_t\|^2 \, d\tau + \|\nabla P_n\theta\|^2(t) \le \|\nabla P_n\theta\|^2(t_o) + \frac{C_3}{\lambda_{n+1}} (t - t_o)$$

$$+ \frac{C_1}{\lambda_{n+1}} \int_{t_o}^{t} \|\nabla\zeta_t\|^2 d\tau + \frac{C_2}{\lambda_{n+1}} \int_{t_o}^{t} \|\nabla u_t\|^2 d\tau$$

$$+ C_4 \int_{t_o}^{t} \|\pi\|^2_{L^r} \|g^n\|_{L^p} \, d\tau + C_5 \int_{t_o}^{t} \|\nabla P_n\theta\|^2 d\tau.$$

Somando (5.36) e (5.39), temos

$$(5.40) \qquad \int_{t_o}^{t} \|\theta_t\|^2 d\tau + \|\nabla P_n\theta\|^2(t) + \|\pi\|^2_{L^r} (t)$$

$$\le \|\nabla P_n\theta\|^2(t_o) + C \|\pi\|^2_{L^r} (t_o) + \frac{C}{\lambda_{n+1}} (t - t_o)^2$$

$$+ \frac{C_3}{\lambda_{n+1}} (t - t_o) + \frac{C_1}{\lambda_{n+1}} \int_{t_o}^{t} \|\nabla\zeta_t\|^2 d\tau$$

$$+ \frac{C_2}{\lambda_{n+1}} \int_{t_o}^{t} \|\nabla u_t\|^2 d\tau + C_4 \int_{t_o}^{t} \|\pi\|^2_{L^r} \|g^n\|_{L^p}$$

$$+ C_5 \int_{t_o}^{t} \|\nabla P_n\theta\|^2 d\tau + C(t - t_o) \int_{t_o}^{t} \|\nabla P_n\theta\|^2 d\tau.$$

Fixando $\bar{t} > t_o$, conclui-se de (5.40) que no intervalo $[t_o, \bar{t}]$

$$\int_{t_o}^{t} \|\theta_t\|^2 d\tau + (\|\nabla P_n\theta\|^2 + \|\pi\|^2_{L^r})(t)$$

$$\leq C_1(\|\nabla P_n\theta\|^2 + \|\pi\|^2_{L^r})(t_o) + \frac{C_2}{\lambda_{n+1}} + \frac{C_3}{\lambda_{n+1}}(t - t_o) + \frac{C_4}{\lambda_{n+1}}(t - t_o)^2$$

$$+ C_5 \int_{t_o}^{t} \|\pi\|^2_{L^r} \|g^n\|_{L^p} d\tau + \int_{t_o}^{t} \left\{C_6 + C_7 (\bar{t} - t_o)\right\} \|\nabla P_n\theta\|^2 d\tau.$$

Seja,

$$\Lambda(t) = \|\nabla P_n\theta\|^2(t) + \|\pi\|_{L^r}(t),$$

com esta notação desigualdade anterior transforma-se em:

$$\Lambda(t) \leq C_1 \Lambda(t_o) + \frac{C_2}{\lambda_{n+1}} + \frac{C_3}{\lambda_{n+1}}(t-t_o) + \frac{C_4}{\lambda_{n+1}}(t-t_o) + \frac{C_4}{\lambda_{n+1}}(t-t_o)^2$$

$$+ C_8 \int_{t_o}^{t} \left\{C_5\|g^n\|_{L^p} + C_6 + C_7(\bar{t}-t_o)\right\} \Lambda(t)d\tau.$$

Aplicando uns dos corolarios do lema de Gronwall (veja J.Hale [9], pag. 36) obtém-se para $t \in [0, \bar{t}]$:

$$\Lambda(t) \leq \left\{C_1\Lambda(t_o) + \frac{C_2}{\lambda_{n+1}} + \frac{C_3}{\lambda_{n+1}}(t - t_o) + \frac{C_4}{\lambda_{n+1}}(t - t_o)^2\right\}$$

$$\exp\left\{\int_{t_o}^{t} a(t)d\tau\right\}$$

onde $a(t) = C_8\left\{C_5\|g^n\|_{L^p} + C_6 + C_7\,(\bar{t} - t_o)\right\}.$

Assim temos provado o

Lema 5.19. Seja $t_o \geq 0$ e ζ como no problema (5.2). Então, para π, θ, g^n, $\Lambda(t)$ defiridos como antes, se satisfaz:

$$\|\nabla P_n\theta\|^2(t) + \|\pi\|_{L^r}(t) \tag{5.41}$$

$$\leq C_1\left\{\|\nabla P_n\theta\|^2(t_o) + \|\pi\|^2_{L^r}(t_o)\right\} + \left\{\frac{C_2}{\lambda_{n+1}}\right.$$

$$\left. + \frac{C_3}{\lambda_{n+1}}(t-t_o) + \frac{C_4}{\lambda_{n+1}}(t-t_o)^2\right\} \exp\left\{\int_{t_o}^{t} a(\tau)d\tau\right\}$$

para qualquer $t \in [0, \bar{t}]$. ∎

Agora estamos em condições de provar o Teorema.

Observe-se em primeiro lugar que

$$\int_{t_o}^{t} a(\tau)d\tau \leq \tilde{C}_5 + \tilde{C}_6(t - t_o) + \tilde{C}_7(\bar{t} - t_o)(t - t_o)$$

em vista do lema 5.17, com o qual

$$\exp\left\{\int_{t_o}^{t} a(\tau)d\tau\right\} \le \exp\left\{\tilde{C}_5 + \tilde{C}_6(t-t_o) + \tilde{C}_7(\bar{t}-t_o)(t-t_o)\right\}.$$

Escolhendo T de modo que $L^2F^2(T) \le \frac{1}{5}$ e tomando $K_1 = 10(C_2 + C_3T + C_4T) \exp\left\{\bar{C}_5 + \bar{C}_6T + \bar{C}_7T^2\right\}$ e $N > 0$ natural tal que para $n \ge N$: $\frac{K_1}{\lambda_{n+1}} < \delta$, afirmamos que:

$$\|\nabla\psi^n\|(t) < \frac{\tilde{K}_1}{(\lambda_{n+1})^{1/2}} \tag{5.42}$$

onde $\tilde{K}_1 = (K_1)^{1/2}$. De fato, se (5.42) for falso, isto é, (5.42) é falso para algum n, seja t^* o primeiro valor de t para o qual

$$\|\nabla\psi^n\| \ (t^*) = \frac{\tilde{K}_1}{\lambda_{n+1}} . \tag{5.43}$$

Para mostrar que é impossível ter $t^* \le T$, considere o lema 5.19 com $t_o = 0$, $\zeta = 0$, $\eta = 0$ e $\bar{t} = t^*$, obtemos, lembrando que neste caso $\|\nabla P_n\theta\| = \|\nabla\psi^n\|$,

$$\|\nabla\psi^n\|^2(t^*) + \|\pi\|^2_{L^r} (t^*)$$

$$\le \left[\frac{C_2}{\lambda_{n+1}} + \frac{C_3T}{\lambda_{n+1}} + \frac{C_4T^2}{\lambda_{n+1}} \right] \exp\left\{ \tilde{C}_5 + \tilde{C}_6T + \tilde{C}_7T^2\right\}$$

$$= \frac{K_1}{10\ \lambda_{n+1}}$$

$$< \frac{K_1}{\lambda_{n+1}}$$

o qual contradiz (5.43).

Por outro lado, se $t^* > T$, então usando o lema 5.19 com $\bar{t} = t^*$, $t_o = t^* - T$, $\zeta(t)$ e $\eta(t)$ perturbações tais que

$$\zeta(t_o) = \psi^n(t_o), \quad \eta(t_o) = \rho^n(t_o) - \rho(t_o)$$

temos,

$$\|\nabla\psi^n - \nabla P_n\zeta\|^2(t_o) + \|\rho(t) - \rho^n(t_o) + \eta(t_o)\|^2_{L^r} = 0.$$

Consequentemente, temos

$$\|\nabla\psi^n(t^*) - \nabla P_n\zeta(t^*)\|^2 + \|\rho(t^*) - \rho^n(t^*) + \eta(t^*)\|^2_{L^r} \leq \frac{K_1}{10\,\lambda_{n+1}}$$

e assim

$$\|\nabla\psi^n\|^2(t^*) \leq 2\left[\|\nabla\psi^n(t^*) - \nabla P_n\zeta(t^*)\|^2 + \|\nabla P_n\zeta(t^*)\|^2\right]$$

$$\leq 2\left[\frac{K_1}{10\,\lambda_{n+1}} + L^2\|\nabla\zeta\|^2(t_o)F^2(T)\right]$$

$$\leq \frac{K_1}{\lambda_{n+1}}\left[\frac{1}{5} + L^2F^2(T)\right]$$

$$\le \frac{2}{5} \quad \frac{K_1}{\lambda_{n+1}}$$

$$< \frac{K_1}{\lambda_{n+1}}$$

o qual novamente contradiz nossa escolha de t^*.

Assim deve satisfazer-se:

$$\|\nabla\psi^n\|^2(t) < \frac{K_1}{\lambda_{n+1}}$$

Agora bem, tomando $K = 2K_1 + 2\hat{C}_1$, temos

$$\|\nabla(u - u^n)\|^2(t) \le 2\left[\|\nabla\psi^n\|^2(t) + \|\nabla(u - v^n)\|^2(t)\right]$$

$$\le \frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}$$

$$= \frac{K}{\lambda_{n+1}}$$

que é a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte do teorema, notemos que

$$\rho_t + u\,\nabla\rho = 0$$

$$\rho^n_t + u^n\,\nabla\rho^n = 0$$

fazendo a diferença das duas equações anteriores obtemos

$$(\rho - \rho^n)_t + u^n \nabla(\rho - \rho^n) = (u^n - u)\, \nabla\rho.$$

Agora multiplicando a equação anterior por $|\rho - \rho^n|^{r-1}$ e integrando sobre Ω obtem-se:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\|\rho - \rho^n\|^r_{L^r} = \int_\Omega (u^n - u)\, \nabla\rho\, |\rho - \rho^n|^{r-1}$$

$$\le \|\nabla\rho\|_{L^s}\|u^n - u\|_{L^q}\|\rho - \rho^n\|^{r-1}_{L^r}.$$

De onde

$$\frac{d}{dt}\|\rho - \rho^n\|_{L^r} \le C\|u^n - u\|_{L^s} \le \tilde{C}\|\nabla u^n - \nabla u\|_{L^s}$$

integrando de 0 a t a expressão anterior, obtém-se

$$\|\rho - \rho^n\|_{L^r} \le \frac{\tilde{C}\, K_1}{(\lambda_{n+1})^{1/2}} t + \|\rho - \rho^n\|_{L^r}(0) \le \frac{\tilde{C}\, K_1}{(\lambda_{n+1})^{1/2}} t$$

já que $\rho^n(0) = \rho_0$. ■

Observações 5.20.

a) As demonstrações de vários dos lemas preparatórios poderiam ser simplificados um pouco se tivessemos trabalhado com estimativas em $L^\infty(\Omega)$ para as derivadas das densidades (elas são fornecidas pelo Teorema 2.4). Porém, preferimos estas variantes das demonstrações porque elas evitam estas estimativas e podem ser úteis para soluções menos regulares.

b) Salvi [25] (Teorema 4, p.210) enuncia um resultado sobre estimativa de erro uniforme no tempo na norma $L^2(\Omega)$ sob a hipótese de estabilidade assintótica exponencial também em $L^2(\Omega)$. Entretanto, existem várias dificuldades com este resultado:

i) as hipóteses de regularidade por ele exigidas sobre a solução são excessivas e provavelmente irrealistas: u deve estar em $L^\infty(0, \infty, H^3(\Omega) \cap V)$, o que, mesmo no caso das equações de Navier-Stokes usuais, implica a necessidade de condições de compatibilidade não locais, Heywood e Rannacher [13] (Corolario 2.1, pag. 281).

ii) A demonstração foi feita inicialmente para o caso das equações de Navier-Stokes usuais (densidade constante). Então para o caso não homogêneo, Salvi faz uma série de computações, e afirma que os mesmos argumentos usados anteriormente também podem ser utilizados concluindo então o resultado. Porém, uma dificuldade na demonstração é que na série de computações há enganos e alguns termos que seriam problemáticos desaparecem. Outra dificuldade mais essencial é que, mesmo que as computações tivessem sido feitas corretamente o argumento para as equações de Navier-Stokes usuais não poderia ser aplicado, devido a termos onde a diferença de densidades ocorre (ela somente dispõe de estimativas exponenciais para tais termos). Dessa forma, a estimativa de erro em $L^2(\Omega)$, com noção de estabilidade em $L^2(\Omega)$ continua aberta para o caso de fluidos não homogêneos.

iii) A demonstração de Salvi da estimativa de erro em $L^2(\Omega)$, com establidade está correta no caso das equações de Navier-Stokes usuais. Porém, as hipóteses de regularidade sobre a solução por ele exigidas podem ser relaxadas substancialmente e a prova do resultado simplificada (veja Boldrini e Rojas-Medar [6]). ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] R.A.Adams, J.Fournier, Cone Conditions and Properties of Sobolev Spaces, J. Math. Anal. and Appl., 61 (1977), 713-734.

[2] S.N.Antonzev, A.V.Kazhikov, Mathematical Study of Flows of Non Homogeneus Fluids, Novossibirks, Lectures at the University, 1973 (Russian).

[3] J.P.Aubin, Un Théorème de Compacitè, C.R. Acad. Sci., 256(1963), 5042-5044.

[4] H.Beirão da Veiga, Difusion on Viscous Fluids, Ann., Sc. Normal Sup. Pisa, 10 (1983), 341-355.

[5] J.L.Boldrini, M.A.Rojas-Medar, On Error Bound of Nonstationary Stratified Fluid Motion. (a aparecer)

[6] J.L.Boldrini, M.A.Rojas-Medar, Error Bound for Galerkin Approximation ofNavier-Stokes Equations: Technical Remark on a Result of Salvi. (a aparecer).

[7] L.Cattabriga, Su Um Probleme al Contorno Relativo al Sistema di Equazioni di Stokes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31(1961), 308-340.

[8] H.Fujita, T.Kato, On the Navier-Stokes Initial Value Problem I, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.

[9] J.Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley-Intercience, 1980.

[10] J.G.Heywood, The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions, Indiana Univ. Math. J., 29

(1980), 639-681.

[11] J.G.Heywood, Classical Solutions of the Navier-Stokes, Proc. IUTAM Symp. 1979, Approx. Methods for Navier-Stokes Problems, R.Rautmann, (ed.) Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., 771 (1980), 235-248.

[12] J.G.Heywood, An Error Estimate Uniform in Time for Spectral Galerkin Approximations of the Navier-Stokes Problem, Pacific J.Math.,98 (1982), 333-345.

[13] J.G.Heywood, R.Rannacher, Finite Elemente Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem I: Regularity of Solutions and Second Order Error Estimates for Spatial Discretization, SIAM J.Num. Anal., 19 (1982), 275-311.

[14] A.V.Kazhihov, Solvability of the Initial and Boundary - Value Problem for the Equations of Motion of an Inhomogeneous Viscous Incompressible Fluid, Dok. Akad. Nauk. 216 (1974), 1008-1010. English Transl., Soviet Physic. Dokl., 19(1974), 331-332.

[15] J.U.Kim, Weak Solutions of an Initial Boundary Value Problems for an Incompressible Viscous Fluid, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), 89-96.

[16] O.A.Ladyszhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, Second Revised Edition, New York, 1969.

[17] O.A.Ladyszhenskaya, V.A.Solonnikov, Unique Solvability of an Initial and Boundary Value Problem for Viscous Incompressible Nonhomogeneous Fluids, Zap. Naučn Sem. Leningrado Otdel Math. Inst. Steklov, 52(1975), 52-109, Engllish Transl., J.Soviet Math., 9 (1978), 697-749.

[18] J.L.Lions, Quelques Methodes de Resolution des Problems aux Limites Non-Lineares, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[19] J.L.Lions, On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics, de la Penha, L.A.Medeiros (eds), in Contemp. Devel. in Cont. Mech. and Partial Diff. Eq., North-Holland (1978), 284-346.

[20] J.L.Lions, On Some Problems Connected with Navier-Stokes Equations, in Nonlinear Evolution Equations, M.G.Crandall (ed), Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978, 59-84.

[21] H.Okamoto, On the Equation of Nonstationary Stratified Fluid Motion: Uniqueness and Existence of the Solutions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA Math, 30 (1984), 615-643.

[22] M.Padula, On the Existence for Non-Homogeneous Incompressible Fluids. Rend., Circ. Mat. Palermo II Ser. I, 287 (1982), 119-124.

[23] R.Rautmann, On the Convergence-Rate of Nonstationary Navier-Stokes Approximations, Proc. IUTAM Symp. 1979, Approx. Methods for Navier-Stokes Problems, R.Rautmann (ed.), Springer-Verlag, Lectures Notes in Mathematics, 771 (1980), 235-248.

[24] R.Rautmann, On Optimum Regularity of Navier-Stokes Solutions at Time t = 0., Math. Z., 184 (1983), 141-149.

[25] R.Salvi, Error Estimates for the Spectral Galerkin Approximations of the Solutions of Navier-Stokes Type Equations, Glasgow Math. J., 31 (1989), 199-211.

[26] R.Salvi, The Equations of Viscous Incompressible Nonhomogeneous Fluid: On the Existence and Regularity, a aparecer no J.Australian Math. Soc.

[27] J.Simon, Écoulement d'un Fluide Non Homogène Avec Une Densité Initial S'Annulant, C.R.Acad. Sci., 287 (1978), 1009-1012.

[28] J.Simon, Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids: Existence of Velocity, Density, and Pressure, SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 1093-1117.

[29] R.Temam, Navier-Stokes Equations, North-Holland, revised edit, 1979.

[30] R.Temam, Behaviour at Time t = 0 of the Solutions of Semilinear Evolutions Equations, J. Diff. Eq., 43 (1982), 73-92.