

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

As Possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa

Autor: Wilton Sturm

Orientadora: Professora Doutora Dione Lucchesi de Carvalho

Este exemplar corresponde à redação

final da ~~defesa~~ defendida por

..... *Wilton Sturm*

e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data *11/11/1999*

Assinatura: *Dione Lucchesi de Carvalho*

Orientador (a)

COMISSÃO JULGADORA:

..... *Dione Lucchesi de Carvalho*

..... *Caro J. S.*

..... *Horacio L. Guedes*

1999

20001703

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V. DE	
TOMBO BC/	40077
PROC.	278,00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	27/02/00
N.º CPD	

CM-00134439-9

**CATALOGAÇÃO NA FONTE ELABORADA PELA BIBLIOTECA
DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP**

St97p

Sturm, Wilton.

As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa / Wilton Sturm. -- Campinas, SP : [s.n.], 1999.

Orientador : Dione Lucchesi de Carvalho.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Análise combinatória. 2. Aprendizagem. 3. Ambiente de sala de aula. 4. Educação matemática. 5. Solução de problemas. I. Carvalho, Dione Lucchesi. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

SUMÁRIO

1. Apresentação	1
1.1 Introdução	1
1.2 O Percurso até a Pesquisa	5
1.3 Resumo de cada Capítulo	7
2. Metodologia da Pesquisa	9
2.1 Introdução	9
2.2 O Diário e Outros Instrumentos de Pesquisa	13
2.3 Análise e Estabelecimento de Categorias	16
2.3.1 Diário	16
2.3.2 Categorias	17
2.3.3 Análise do Questionário e das Provas	22
3. Bibliografia Comentada	24
4. A Proposta	36
4.1 Primeira Fase	37
4.2 Segunda Fase	42
4.3 Terceira Fase	43
4.4 Quarta Fase	47

5. Considerações acerca do Exercício I.8	52
5.1 Inclusão do Exercício na Proposta	53
5.2 Desenvolvimento em Sala de Aula	59
5.3 Discussões após a Apresentação do Exercício	61
6. A relação entre Arranjo e Combinação	69
6.1 Propostas de Abordagem da Relação entre Arranjo e Combinação	69
6.2 A Relação entre Arranjo e Combinação na Proposta em estudo	72
7. Considerações Finais	80
8. Bibliografia	88

AGRADECIMENTOS

Uma vez fazendo parte do Grupo de pesquisa PRAPEM – Prática Pedagógica em Matemática, gostaria de agradecer às sugestões e o apoio que seus integrantes me proporcionaram. Deixo um agradecimento especial aos professores Ângela, Anna Regina, Dario, Miguel e Vera.

Não posso deixar de agradecer aos meus professores e aos meus alunos, pois com vocês muito aprendi.

Agradeço à FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela ajuda financeira.

Em especial, minha gratidão ao companheirismo da minha Orientadora, a Professora Dione Lucchesi de Carvalho.

E a todos aqueles em que pude sentir apoio, de uma forma ou de outra, meu carinho:
meus pais, Wilson e Wilma;

Wilsinho e Márcia;

Fernanda.

Para os amigos, um abraço e meu muito obrigado.

RESUMO

A pesquisa que originou esta dissertação teve como foco os procedimentos apresentados pelos alunos e pelo professor, perante uma proposta pedagógica alternativa de Análise Combinatória. A denominação “alternativa” deve-se a características como abertura à participação dos alunos e predominância do pensamento combinatório ao invés da ênfase às fórmulas. Foi desenvolvida em uma sala de 2ª série do Ensino Médio.

Uma razão que motivou este trabalho foi que boa parte dos professores consideram Análise Combinatória como algo complicado. Consideram-na um assunto de difícil entendimento por parte dos alunos. Estes, por sua vez, acabam vendo-se frente a várias fórmulas e nomenclaturas “sem sentido”.

Outra razão é a dificuldade de se encontrar textos relativos ao ensino de Análise Combinatória.

A análise se desenvolveu numa perspectiva qualitativa, na qual o pesquisador analisou sua própria prática pedagógica, como professor da turma. O principal instrumento de registro foi o “Diário”, no qual foi anotado com o máximo de detalhes o que ocorreu durante as aulas.

Foram selecionados dois episódios para análises. O primeiro refere-se a um exercício trabalhado durante as aulas, que reúne a inclusão do exercício na proposta, seu desenvolvimento em aula e os momentos de debates após o mesmo ter sido apresentado. O outro episódio discute a relação entre Arranjo e Combinação, verificando como alguns textos tratam este assunto e analisando as aulas dedicadas a esta parte da proposta.

Finalmente, foram feitas considerações acerca da pesquisa e mais especificamente, da proposta, e abertos horizontes para outras pesquisas.

ABSTRACT

The research that originated this dissertation had as focus the procedures presented by the students and the teacher, front an alternative pedagogical proposal of Combinatorial Analysis.

The denomination alternative is due to characteristics as opening to students' participation and privilege of combinatorial reasoning instead of emphasis on formulas.

The proposal was developed in a 2nd grade classroom of high school.

One reason that motivated this work was that a considerable part of teachers consider Combinatorial Analysis as something complicated. They consider it difficult to be understood by the students. The students, from their point of view, face several formulas and nomenclatures without any significance.

Another reason is the difficult to find texts relationed to the teaching of Combinatorial Analysis.

The analysis was developed in a qualitative perspective, in which the researcher analysed his proper pedagogical practice, being the teacher of the class.

The pricipal instrument applied to report the data was the "Diary", in which the researcher wrote the maximun of details of what occurred during the classes.

Two episodes was selected. The first one refers to an exercise developed during the classes, with discussions about the inclusion of the exercise in the proposal, its development in the classes and the discussions that ocurred after it was presented. The other episode discusses the relation between arrangement and combination, verifying how some texts treat this subject and analysing the classes dedicated to this part of the proposal.

Finally, considerations were made about the research and, more specifically, of the proposal. Besides this, another point that can be observed is perspectives to new researches.

APRESENTAÇÃO

INTRODUÇÃO

Antes de me graduar em Matemática na UNICAMP, comecei a lecionar, em 1994, em uma escola estadual pública, na época de Primeiro Grau, na cidade de Paulínia, no estado de São Paulo. Naquela escola tive minhas primeiras experiências como professor, ministrando aulas em duas quintas séries.

A partir daí, minha história com o curso de Licenciatura em Matemática começou a mudar. Daquele momento até a conclusão do curso, passei a me empenhar mais nas disciplinas que cursava e soube selecionar as que seriam mais importantes para minha carreira, já que a prática em sala de aula me permitia ter referências do que mais iria me ajudar enquanto profissional.

Estas primeiras experiências foram bastante enriquecedoras também em outros sentidos: pude constatar como era o dia-a-dia de um professor, seu envolvimento com a escola, com os alunos, com os pais e passei a questionar os conteúdos ensinados em Matemática.

Pude perceber que no começo, quando ainda buscava minha identidade como professor, a tendência era que desse aulas semelhantes às que tive quando aluno. Isto me levava a conflitos já que a maioria daquelas aulas não me proporcionara boas referências. No ginásio, a professora, além de autoritária, tinha um método de ensino calcado no ato de decorar fórmulas e procedimentos, sem demonstrar abertura para questionamentos ou dúvidas dos alunos. O Segundo Grau havia me proporcionado a visão do que não deve acontecer numa escola: greves intermináveis, troca constante de professores, longos períodos de ausência dos professores titulares sem a presença de um substituto.

Pelas experiências enquanto aluno, meu modelo era o dos professores que havia tido no Cursinho. Entretanto, podia perceber através da prática e nas conversas com outros professores e colegas da licenciatura que aquele modelo podia até ser bom para o espírito informativo dos Cursinhos, porém não para a formação adequada do aluno, ainda mais para alunos de quinta série.

Sob este aspecto, as disciplinas do curso de Licenciatura relacionadas à Educação Matemática foram boas, pois fizeram com que eu percebesse a importância para o professor de refletir sobre sua atuação em aula. O fato de estar lecionando, enquanto cursava estas disciplinas, possibilitou-me a reflexão sobre minha atuação em aula, incluindo didática, relacionamento com os alunos, em resumo, minha prática. Estas reflexões me levaram a mudar gradativamente as aulas, deixando de ensinar regras prontas ou receitas para resolver exercícios, saindo do estilo “cursinho” e possibilitando mais participação dos alunos ao propor atividades cuja maior importância fosse o raciocínio e não o domínio de fórmulas ou procedimentos rotineiros.

Apesar das tentativas inovadoras para mim (e para os alunos), usava também de aulas tradicionais, baseadas na minha experiência como aluno, e não me satisfazia. A crença de que uma aula pode ser sempre melhorada me acompanha e creio que esta idéia dificilmente me deixará.

Permaneci naquela escola de Paulínia quase dois anos, onde trabalhei também com uma sexta série. Pude constatar novamente a dificuldade em romper com a prática vigente, tanto para o professor quanto para os alunos. Quando tive de ensinar o conceito e as operações com números inteiros, os alunos, principalmente os repetentes, queriam que fossem ensinadas simplesmente as “regrinhas” do ano anterior. Não acreditava naquele tipo de ensino e o desconhecimento da matéria por parte dos próprios repetentes era um sintoma de sua ineficácia. Porém, encontrando dificuldades para ensinar de modo diferente, não conseguia que os alunos aceitassem minhas tentativas de mudança e podia sentir um clima de insatisfação nas aulas.

No final de 1995, acertei meu ingresso para o ano seguinte em uma escola particular em Itu, também no Estado de São Paulo. Em 1996 iria lecionar para o Ensino Médio. Considerando que meu Segundo Grau não havia me proporcionado um bom conhecimento da Matemática referente a este nível, dediquei o período de janeiro e fevereiro de 1996 para estudar os conteúdos que iria ensinar. Foi um período de aprendizagem e questionamento dos conteúdos quanto às suas aplicações e ainda como ensiná-los.

Dentre os conteúdos que deveria ensinar, estava Análise Combinatória, um tema que havia sido complicado para mim e para meus colegas (enquanto estudante) e me perguntava como fazer para que os alunos não tivessem de encará-la como um “terror”.

As disciplinas que havia concluído na Licenciatura e minhas experiências me faziam supor que não devia basear as aulas somente nas fórmulas; afinal era assim que Análise Combinatória me havia sido apresentada e desejava que meu trabalho fosse mais eficaz.

Buscando ampliar os conhecimentos sobre o tema, tive a oportunidade de assistir ao mini-curso “Como Resolver Problemas de Combinatória”, ministrado pelo Prof. Doutor Seiji Hariki, recentemente falecido, e pela Professora Janice Cássia Rigolino, durante o IV EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática, em janeiro de 1996.

As idéias daquele mini-curso vieram ao encontro do que estava pensando, o que, de certa forma, me estimulou a preparar atividades que dessem conta do propósito de não calcar o ensino de Análise Combinatória exclusivamente em fórmulas e sim, tentar uma abordagem mais construtiva. Algumas atividades das quais participei no mini-curso e as reflexões sobre minha prática em aula levaram-me a tentar basear o ensino de Análise Combinatória na compreensão do princípio multiplicativo e suas aplicações e na construção de fórmulas e/ou técnicas de contagem a partir de situações-problema, pois acredito que *“é plausível esperar que, pelo menos em análise combinatória, o esquema tradicional ‘explicação de teoria matemática seguida de resolução de exercícios’ possa ser substituído por um esquema mais construtivista”*(Hariki, 1996, p. 5).

Passei a acreditar que o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação.

Enquanto preparava as aulas, pude perceber que o tema gerava dificuldades em mais pessoas do que imaginava. Frequentemente pedia a ajuda de colegas para resolver ou discutir algum exercício e muitos declaravam que não sabiam, ou então verificava, acompanhando suas tentativas de resolução, que a maioria realmente não tinha conhecimentos de Análise Combinatória suficientes. Quando comento que meu trabalho de mestrado relaciona-se com esta parte da Matemática, ouço exclamações de pessoas manifestando seu desconhecimento acerca do tema.

Ao contrário de certas partes da Matemática, alguns problemas de Análise Combinatória podem permitir diversas interpretações e as soluções, obtidas de muitas

maneiras. Esta diversidade de alternativas incomodou-me de tal modo, que me influenciou a mudar minhas próprias concepções acerca de Matemática. De certa forma escolhi cursar e ensinar Matemática por sua exatidão; devido às minhas experiências enquanto aluno de Licenciatura e professor, hoje vejo que ela não é fechada como eu a enxergava. De certa forma, passei de uma concepção de cunho absolutista para uma mais falibilista já que *“segundo a visão absolutista, “o conhecimento é feito de verdades absolutas e representa o domínio único do conhecimento incontestável” (ERNEST, 1991, p.7). A visão falibilista, por outro lado, considera o conhecimento matemático falível e corrigível e em contínua expansão, como qualquer outro tipo de conhecimento humano” (CURY, 1994, p. 39).*

Ensinar Análise Combinatória havia se tornado um desafio no sentido de realizar um trabalho que negasse minha expectativa pessimista em relação ao tema, e que não proporcionasse aos meus alunos as dificuldades que eu e colegas tínhamos. Acabei satisfeito ao colocar em prática o que havia preparado. Pude perceber que meus alunos, ao contrário da minha “geração”, não apresentaram traumas ou desgostos em relação a este tema; quase todos se interessavam em resolver e discutir os problemas, participando das aulas.

Os bons resultados observados em 1996 me indicavam que aquele era o caminho a ser seguido, apesar de saber que o trabalho colocado em prática deveria ser constantemente melhorado.

Acreditando ter encontrado um caminho, surgiu o anseio de poder auxiliar meus colegas, professores do Ensino Médio, que, como eu, desejam ensinar Análise Combinatória de um modo eficaz, sem impingir a imagem que ninguém consegue entender direito. Para que isso ocorresse, fazia-se necessária uma reflexão mais crítica sobre a proposta trabalhada no sentido de conhecer suas possibilidades e limitações.

Estas considerações me levaram a envolver a proposta num estudo de mestrado, sendo que minhas aspirações iniciais objetivavam que a proposta fosse mais estudada e compartilhada com outros professores, que também têm ou tiveram as mesmas dificuldades e buscam experiências que possam ser reelaboradas e utilizadas, levando em conta suas realidades profissionais.

O PERCURSO ATÉ A PESQUISA

Meu propósito trabalhar em aula, está sujeito às características do professor e do ambiente escolar; fazem-se necessárias considerações acerca de possíveis particularidades, que podem depender do professor e da situação em que se está desenvolvendo uma proposta de ensino sob alguns aspectos, inovadora. Acredito que devem ser levadas em conta algumas características que são próprias da minha identidade como professor.

Minha experiência profissional pode ser considerada pequena visto que na ocasião do meu ingresso no Mestrado tinha menos de três anos de magistério. Entretanto, posso considerar que minha formação me possibilitou diferentes experiências, uma vez que ter cursado Licenciatura em Matemática na UNICAMP me proporcionou um contato direto com pesquisas e pessoas nelas envolvidas.

Enquanto professor, vale ser dito que apesar de alguns “ossos” do ofício, tenho muito gosto pelo trabalho que faço, o que sem dúvida é algo que me impulsiona a buscar tentativas de melhorá-lo, como foi o caso da elaboração da proposta.

Quanto à Análise Combinatória, apesar de não considerar que tenha um extraordinário conhecimento nem que seja exímio em solucionar problemas do tema, estive numa posição privilegiada pelo fato de estudar e me dedicar ao tema, corrigindo falhas de minha formação inicial, enquanto preparava as aulas relativas a proposta.

O contato com colegas tem me mostrado que os professores quase não têm tempo para se dedicar ao estudo dos temas que ensinam, já que são quase sempre obrigados a assumir um grande número de aulas a fim de conseguir um salário relativamente digno.

Durante a realização desta pesquisa, procurei estar presente em encontros de Educação Matemática para conhecer mais sobre a área e, em particular, discutir idéias sobre Análise Combinatória.

Isso me fez perceber que muitos professores têm um despreparo até em relação a elementos básicos de Análise Combinatória, o que provavelmente leva os idealizadores dos mini-cursos a dedicar mais tempo às questões relacionadas ao conteúdo matemático do que às de natureza didático-pedagógicas, chegando inclusive a ensinar conceitos básicos como Permutações ou a diferença entre Arranjos e Combinações.

Ainda assim, acho que discussões sobre a melhor maneira de se ensinar o tema deveriam estar mais presentes nos cursos, já que uma questão parece ser de senso comum para aqueles que os ministraram: é possível ensinar Análise Combinatória sem que os elementos-chave sejam as fórmulas. É possível, mas...como fazê-lo? Que alternativas temos, quais as conseqüências?.. Parece-me que faltam discussões sobre estes aspectos.

Características como abertura à participação dos alunos e relevância do pensamento combinatório ao invés da ênfase às fórmulas seriam elementos presentes no transcorrer da proposta que estaria estudando. Estas características eram diferentes das que encontrei quando aluno e sendo assim, considerei a proposta como sendo alternativa. Pensei então em uma questão norteadora do trabalho: **investigar as possibilidades pedagógicas de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.**

Os objetivos básicos deste estudo foram:

- analisar uma proposta de ensino de Análise Combinatória e sua experimentação em sala de aula;
- identificar as possibilidades e limites com relação ao ensino/aprendizagem da proposta, no sentido de colaborar em futuras investigações sobre Análise Combinatória;
- contribuir para o trabalho de professores de Matemática do Ensino Médio que busquem aprimorar sua formação em relação ao ensino/aprendizagem de Análise Combinatória.

Os alunos com os quais trabalhei eram do período noturno. Este é um fator a ser considerado, já que no noturno normalmente o aluno chega para aula com certo cansaço, o que pode ser um elemento que atrapalha seu desempenho.

No entanto, no presente caso, a situação mostrou-se diferente em relação ao que normalmente se encontra em termos de ensino noturno: a faixa etária dos alunos é correspondente à série trabalhada do Ensino Médio de cursos diurnos, além de os alunos apresentarem um bom índice de freqüência.

Esta situação diferente pode ser creditada ao fato de a escola em questão ser particular. Quanto à escola, a opção foi aquela na qual já vinha trabalhando, na cidade de Itu. Vale ser dito que a Direção contribuiu dando a retaguarda adequada para que o trabalho transcorresse sem atropelos.

As aulas foram referentes a Arranjo, Permutação e Combinação, considerados sem repetição de elementos.

A proposta foi desenvolvida em Março e Abril de 1997, em uma sala com 33 alunos de segunda série de Ensino Médio. Dispunha de 3 aulas por semana, de 40 minutos cada.

Acredito que o ensino, o conhecimento, não se dá em uma única via: é sempre preciso contar com a colaboração dos alunos para que o trabalho em sala de aula se processe de modo adequado. Julgo que tenho um bom relacionamento com os alunos e penso que soube aproveitar esta característica, quando apliquei a proposta, podendo contar com bom ambiente em de aula.

RESUMO DE CADA CAPÍTULO

Esta pesquisa seguiu a linha qualitativa e como instrumento de registro das aulas foi utilizado um diário onde se anotou o que foi considerado relevante. Outras fontes de informação que foram consideradas são as provas escritas que os alunos fizeram (ver Anexo 1) e um questionário (ver anexo 2) onde puderam manifestar suas opiniões. No próximo capítulo, são encontradas descrições sobre o uso de cada instrumento, bem como se deram suas análises.

Um elemento motivador deste trabalho é que foram encontrado poucos textos sobre o ensino de Análise Combinatória. No capítulo 3, são descritas e comentadas publicações relacionadas ao tema, que podem constituir uma fonte de informações para estudos posteriores.

A descrição da proposta que foi tratada nesta pesquisa se encontra no capítulo 4. Além de sua descrição, cada uma de suas quatro fases é alvo de reflexões, tendo por base o desenvolvimento em aula.

A análise dos instrumentos indicou dois episódios que mereceram análise aprofundada. Um deles compõe o capítulo 5 e refere-se a um exercício presente na proposta; são discutidos além da inclusão do exercício na proposta, seu desenvolvimento em aula e os momentos de discussão após a apresentação do mesmo.

O capítulo 6 trata de discutir, no outro episódio, a relação entre Arranjo e Combinação, descrevendo como algumas publicações tratam este assunto e analisando as aulas dedicadas a esta parte da proposta.

Finalmente, no capítulo 7 encontram-se considerações sobre a proposta e a pesquisa em si, além de outras perspectivas de investigação.

METODOLOGIA DA PESQUISA

INTRODUÇÃO

O foco de análise da pesquisa que originou esta dissertação foi o desenvolvimento de uma proposta alternativa de ensino de Análise Combinatória, descrita no capítulo 4, considerando os procedimentos apresentados pelo professor e alunos em interação. A preocupação era compreender a dinâmica da experiência em sala de aula. Sendo assim, a preocupação com tal contexto esteve presente desde o princípio da pesquisa. O andamento da proposta poderia ser melhor entendido se fosse analisado no ambiente natural, tentando levar em conta o lado não diretamente visível que permeia a sala de aula. Uma vez que já estava trabalhando em escola no Ensino Médio, decidi desenvolver a proposta em minhas aulas, estudando minha prática.

Estas características, de estar em sala de aula e ser ao mesmo tempo professor e pesquisador, indicaram que a perspectiva a ser adotada para esta pesquisa seria a qualitativa, uma vez que “*na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 47).

Zabalza (1994) indica que uma condição básica¹ para “uma boa investigação qualitativa” é descrever como foram os passos dados no que se refere à obtenção e à análise das informações. Estas descrições podem colaborar para o entendimento da investigação bem como possibilitar que seja reaplicada em outros contextos. No presente capítulo, são apresentadas considerações sobre o analisar da própria prática e discutidos os instrumentos utilizados.

Mais que quantificar, na avaliação da proposta deveriam predominar dados que pudessem descrever aspectos relacionados à complexidade de uma sala de aula. O principal instrumento de registro utilizado foi o “Diário”, escrito após cada aula, e que será discutido

¹ O autor destaca três condições: “*Ampliar ao máximo o contexto de análise; descrever o próprio processo seguido na obtenção e análise da informação; Configurar a investigação como um autêntico processo de busca deliberativa*” (zabalza, 1994, p. 21).

adiante. Os dados, portanto, foram recolhidos diretamente no campo, no cotidiano. Minha interferência foi preponderantemente enquanto professor, não enquanto pesquisador. Zabalza (1994) escreve que os diários de professores são o tema de uma linha de investigação cuja metodologia deve ser de tipo qualitativo. Segundo este autor, tal linha de investigação aborda “*o pensamento as propostas didáticas que os professores apresentam*”(Zabalza, 1994, p. 9).

A opção pelo trabalho na perspectiva qualitativa se deu por causa da natureza da pesquisa, que determinou também o modo como o Diário foi utilizado: retratar as aulas de modo descritivo, visando a obter elementos para analisar o desenvolvimento da proposta e minha própria prática. Os trechos extraídos do Diário, presentes no texto, serão destacados em itálico.

Lampert (1990) e Ball (1993) são duas pesquisadoras que se dedicaram a investigar a própria prática. Além disso, seus artigos mereceram atenção porque entre os instrumentos utilizados pelas duas autoras encontrava-se, como nesta pesquisa, o diário para registro das atividades de campo.

Lampert (1990) escreve um projeto que examina as possibilidades de trazer a prática do conhecimento matemático escolar para perto do que significa conhecer e fazer Matemática, numa situação onde são alterados deliberadamente os papéis e as responsabilidades do professor e dos alunos, no discurso de sala de aula. O projeto foi desenvolvido em aulas regulares de quinto ano (*fifth-grade*) em uma escola pública nos Estados Unidos. O caso de ensino/aprendizagem analisado no artigo refere-se ao conteúdo matemático “*expoentes*”. As aulas são descritas e analisadas nas perspectivas matemática, pedagógica e social.

Lampert aponta que analisar a própria prática não é uma perspectiva usual de fazer pesquisa em vários aspectos, como o teste da teoria e o desenvolvimento da prática que foram feitos simultaneamente e interativamente pela autora. Em tal processo o conhecimento e as disposições associadas à resolução prática de problemas no lecionar são integrados às ações reflexivas e práticas da mesma pessoa e só mais tarde desconectadas para análise.

No desenho de sua perspectiva de pesquisa, duas tradições metodológicas deram sua contribuição: a pesquisa-ação e ciência social interpretativa. Segundo a autora, na pesquisa-

ação, muitas vezes o investigador e o ator são a mesma pessoa. Isto significa que os raciocínios práticos e teóricos são difíceis de ser distinguidos, tanto na prática quanto na análise da prática. No caso da análise de Lampert, o professor é tanto inventor das ações (na situação do lecionar) quanto analista das ações (depois do fato). Para a autora, sob tais condições, é possível que o leitor confunda a justificativa post hoc e as interpretações das aulas, que estão sendo oferecidas, com aquelas que estavam na mente do professor, quando as ações descritas estavam ocorrendo. Entretanto, o conhecimento que é usado para analisar o ato de lecionar não é inteiramente o mesmo usado para lecionar. Lecionar e a análise do lecionar são práticas diferentes requerendo diferentes tipos de conhecimento.

No meu caso, uma das maiores dificuldades foi o distanciamento: algumas vezes parecia que estava sendo crítico demais, só percebendo falhas ou incoerências; outras vezes, temia estar sendo benevolente demais ao avaliar o trabalho realizado. Neste último caso, para tudo parecia haver uma “desculpa” razoável e ainda pude perceber que algumas vezes quando tentava retomar uma linha “neutra” de avaliação, tive receio de relatar fatos que julgava adequados. Uma outra dificuldade ocorreu no momento de escrever esta dissertação: alguns trechos aparecem como que exclusivamente escritos pelo professor que lecionou Análise Combinatória, enquanto outros parecem indicar que foram escritos pelo pesquisador como se este fosse outra pessoa. No capítulo 4, onde a proposta é avaliada, são encontradas impressões próprias do professor: *“os alunos pareceram compreender, de maneira geral, a importância da ordenação dos elementos nos agrupamentos e a necessidade de saber se, nos exercícios que estamos tratando, há ou não repetição de elementos”*, bem como comentários típicos do pesquisador: *“nota-se que o professor ao resolver na lousa os exercícios, mostrou/apresentou várias estratégias e o objetivo pode ser considerado alcançado, devendo ser feita uma ressalva quanto ao diagrama de árvore”*.

Ball (1993), em seu artigo, discute como a matemática, enquanto um assunto escolar, pode e deve ser conectada à matemática enquanto “disciplina”². Ela lecionou matemática diariamente para um grupo heterogêneo de terceiro ano (third grade) em uma escola pública nos Estados Unidos. Ball cita que além de desenvolver a pesquisa, é também

² A autora entende Matemática enquanto disciplina como aquela cujas atividades permitem que os alunos façam conjecturas, argumentações, como fazem os matemáticos.

seu objeto. Ela manteve encontros regulares com a outra professora da classe, que lecionava as outras disciplinas.

Esta autora cita que escrevia diariamente no que chama “jornal”, seus pensamentos e trabalhos. Além disso, todas as aulas foram gravadas (em áudio) e muitas, filmadas. Os cadernos dos alunos bem como suas lições de casa foram fotocopiadas. Os alunos foram entrevistados regularmente, formal e informalmente, sozinhos ou em grupos pequenos.

Trechos transcritos indicam que a autora utilizou seu jornal principalmente para relatar suas idéias, seus desejos e expectativas em relação ao que havia preparado para as aulas e também para relatar suas reflexões, questões e dúvidas acerca de apresentar (e como apresentar) certas idéias aos alunos.

Lampert (1990), durante sua pesquisa, foi também a professora da turma e utilizou, além do diário, outros instrumentos de registro das informações: gravações em áudio e vídeo, registros feitos por um observador, cadernos dos estudantes e suas lições de casa.

Lampert (1990) cita que ela registrou no diário, notas de campo detalhadas, incluindo descrições de como as aulas e as unidades foram planejadas e implementadas; análises iniciais do processo de planejamento em si mesmo; as aulas como foram lecionadas e o trabalho dos alunos. Nestas notas de campo, começou a desenvolver um mapa do terreno matemático que estava sendo atravessado. Também refletiu sobre o desenvolvimento da cultura de sala de aula, através das interações sociais particulares que ocorreram. Houve um outro momento de análise, quando as aulas foram consideradas e comparadas durante o ano inteiro. Neste estágio, padrões matemáticos e sociais foram notados nas aulas e nas notas de campo.

Finalmente, o corpo todo e partes do corpo (componentes individuais) foram analisados, usando enquadramentos (frameworks) teóricos da matemática e das ciências sociais.

No caso da pesquisa que originou esta dissertação, era necessário o registro das aulas, de modo a poder analisar-se a proposta, não somente como sugestão de trabalho pedagógico, mas seu desenvolvimento em sala de aula real, enfrentando a diversidade de alunos, os “tropeços” do dia-a-dia do professor e da escola. Como instrumento para este registro, foi utilizado o que chamamos Diário.

Além do Diário, outras fontes de informação foram utilizadas:

- as duas provas escritas que os alunos fizeram (ver Anexo 1);
- o questionário onde os alunos puderam manifestar suas opiniões (ver anexo 2).

Foi entendido como Diário, as anotações feitas por mim em um caderno sobre o que ocorreu durante as aulas. Tais anotações foram feitas rigorosamente após o término das aulas pois, segundo Lüdke (1986), quanto mais próxima do momento da observação, maior será a fidelidade, a precisão nas anotações. O que aconteceu em sala de aula, em termos de interações verbais entre alunos e professor, os registros na lousa e ainda registros escritos de procedimentos dos alunos, tudo o que de uma forma ou outra percebi, foi anotado. Além disso, senti necessidade de registrar reflexões acerca de aspectos como as próprias aulas, o que estava percebendo sobre a proposta e sobre os alunos como pessoas, suas dúvidas e até sobre ser professor.

A análise do Diário foi feita no sentido de elaborar categorias. Categoria *“se refere a um conceito que abrange elementos ou aspectos com características comuns que se relacionam entre si”* (Gomes, 1994, p. 70). As categorias não foram levantadas a priori, foi após a coleta de dados, ou seja, após o Diário ter sido totalmente escrito, que se deu o trabalho de levantamento delas. Segundo Gomes (1994, p. 70), *“as categorias podem ser estabelecidas antes do trabalho de campo, na fase exploratória da pesquisa, ou a partir da coleta de dados”*. Segundo este último autor, este procedimento pode ser, em geral, usado em qualquer tipo de análise de pesquisa qualitativa.

As categorias, quando confrontadas com o Diário como um todo e com as provas realizadas pelos alunos, propiciaram o aprofundamento em dois episódios que se mostraram importantes como dilemas, sob o ponto de vista do professor e dificuldades próprias da Análise Combinatória.

O DIÁRIO E OUTROS INSTRUMENTOS DE PESQUISA

Lampert incluiu em seu diário as descrições de como as unidades foram planejadas. Meus registros foram diferentes: o planejamento da proposta de Análise Combinatória e comentários acerca de parte de seu desenvolvimento foram redigidos à parte e compõem o capítulo 4 desta dissertação. O Diário não tinha uma estrutura previamente determinada.

Isto, por um lado, permitiu que características do professor e das aulas aparecessem naturalmente; por outro, fez com que aflorassem diversos tipos de informações. Estas, no decorrer da análise, foram categorizadas.

A necessidade de anotar comentários acerca de vários aspectos me fez questionar se deveria impor algum limite aos tipos de informações que registrava. A opção foi deixar registradas as emoções que sentia, o que fez com que o Diário se tornasse mais que uma fonte de informações acerca do desenvolvimento da proposta, mas também contivesse registros de reflexões sobre como sentia as aulas e sobre dilemas próprios do ser professor.

Para que o Diário fosse elaborado, foi essencial a disciplina no sentido de escrever rigorosamente após as aulas. As anotações foram feitas de próprio punho e quando transcritas, tentei retratar com a maior fidelidade possível, as informações escritas no primeiro momento. Na transcrição, houve também o cuidado de se corrigir a versão escrita de próprio punho, do ponto de vista gramatical. Alguns termos, entretanto, mesmo que não fossem os mais utilizados na linguagem escrita, foram mantidos como forma de tentar evidenciar as emoções do professor, registradas na primeira versão.

Na tentativa de fazer com que a leitura da transcrição fosse facilitada, foi adotada uma fonte diferente para designar o que foi escrito na lousa pelo professor. Uma outra fonte foi usada para anotações que constam apenas de uma segunda versão do Diário. Esta última fonte identifica comentários e reflexões feitas após o Diário ter sido escrito, o que constitui uma primeira forma de análise para as seis primeiras aulas.

Só o fato de os alunos terem sido avisados de que aquele trabalho faria parte de um estudo de mestrado, pareceu fazer com que ficassem tímidos nas primeiras aulas: Provavelmente essa reação seria aumentada, caso houvesse a presença de alguém filmando ou gravando as aulas. Sendo assim, optei por usar o Diário, consciente de que qualquer que fosse o instrumento de registro das aulas, poderiam ser apontados prós e contras. Cabe apontar uma limitação do trabalho com o Diário: em vários momentos o professor se utiliza da observação de expressões, gestos e até silêncios para se guiar e ter idéia de estar sendo compreendido, se deve mudar ou não seu procedimento na sala de aula. Algumas expressões orais ou gestuais acabam não sendo registradas num diário da natureza do que foi utilizado. Em relação a esta atitude do professor, cabe o alerta de que quando confiamos em expressões ou gestos, podemos sim perceber muitos sinais, muitas coisas que ficam

implícitas, que não precisam ser ditas. Enquanto pesquisadores, devemos entretanto ter consciência de que, do mesmo modo, coisas importantes podem ter passado despercebidas. Na posição de professor e pesquisador, é importante que o próprio anote o que pode perceber, para que estas restrições fiquem minimizadas.

Um outro aspecto restritivo a ser citado é que, no Diário, é muito difícil identificar grande parte da interrelação entre os alunos. Só foi possível notar diálogos entre os alunos, quando ocorreram perto do professor. Esta restrição, entretanto, não prejudicou a pesquisa pois seu foco era o desenvolvimento da proposta como um todo.

Durante a aplicação da proposta, duas outras fontes de informação foram utilizadas na análise: o questionário e as provas dos alunos.

O questionário foi elaborado para conhecer como os alunos estavam percebendo aquela forma de ensino. O objetivo era obter uma visão geral do trabalho do ponto de vista deles. Foi elaborado sem a utilização de uma bibliografia específica. Sua aplicação se deu no final dos dois meses de trabalho e algumas de suas perguntas foram pensadas tendo como base certas manifestações dos próprios alunos.

Cada prova foi realizada individualmente e constou de cinco exercícios. Quanto ao conteúdo das provas, os exercícios foram escolhidos com o intuito de abordar o que havia sido estudado/apresentado estritamente em sala, uma vez que, por estar trabalhando no período noturno, não foram propostas tarefas a serem realizadas em outros momentos que não durante as aulas. As provas não trouxeram, portanto, exercícios com maiores “novidades”, com particularidades muito diferentes daquilo que os alunos já haviam enfrentado.

Outro fator levado em conta na seleção dos exercícios foi o equilíbrio entre exercícios com ou sem restrições em relação à presença ou não de certos elementos nos agrupamentos pedidos. Além disso, outra preocupação foi tentar equilibrar exercícios cujos contextos já tivessem sido apresentados/explorados em aula, com outros que tratassem de contextos diferentes.

A avaliação da aprendizagem pode ser considerada tradicional: a nota atribuída aos alunos no final do bimestre em que a proposta foi aplicada foi baseada somente nas notas de duas provas.

ANÁLISE E ESTABELECIMENTO DE CATEGORIAS

DIÁRIO

O Diário foi analisado enfocando especialmente dois aspectos:

- o trabalho do professor: suas reflexões, inclusive levando em conta o lado emocional, como pessoa e profissional, ao aplicar uma proposta que se relacionou com ele por motivos já comentados; como o tema tinha sido difícil enquanto aluno, como o professor passou a ser mais “construtivo” e “falibilista”, por estar no início de uma trajetória profissional e ter acreditado que aquela proposta era o caminho...

- a proposta em si: num primeiro momento, enquanto uma proposta que o professor avalia como adequada à sua realidade (turma e turno em que trabalha) e às suas concepções e, num segundo momento, quanto ao seu desenvolvimento em sala de aula e ao próprio ensino/aprendizagem de Análise Combinatória

Estes aspectos nortearam a classificação do conteúdo do Diário em categorias, que serão descritas.

Um trabalho de levantamento de categorias nunca estará totalmente pronto, pois sempre será possível direcionar um novo olhar sobre o material, reavaliando cada categoria, com a troca de certos elementos, aprimorando os critérios, criando novas categorias. Após algumas tentativas, confrontando as categorias, promovendo releituras e aprofundamentos nas reflexões, chegou-se a uma versão que serviu para a continuidade do trabalho, no sentido de explorar as categorias à procura de informações, principalmente no que diz respeito ao trabalho do professor e ao desenvolvimento da proposta em sala de aula. Estes dois aspectos, de alguma maneira, influenciaram na elaboração das categorias pois, como assinalam Bogdan e Biklen (1994, p. 221), *“determinadas questões e preocupações de investigação dão origem a determinadas categorias”*.

Considero que a análise do Diário deu-se após ele ter sido totalmente escrito e transcrito, uma vez que, a cada dia em que fazia as anotações, não analisava o que havia escrito anteriormente.

Após a transcrição do Diário, fez-se uma leitura das seis primeiras aulas e as análises foram escritas no próprio Diário. Para cada aula foram feitas anotações

principalmente quanto às manifestações dos alunos, em termos das resoluções apresentadas para os problemas, suas dúvidas e procedimentos. Além disso, foram anotadas também reflexões e perguntas acerca dos procedimentos utilizados pelo professor.

Praticamente se originou uma outra versão do Diário, esta comentada, cujas anotações e reflexões auxiliaram o desenvolvimento de um outro momento de análise: o levantamento de categorias. A primeira análise foi, portanto, importante para a organização do material que compunha o Diário em categorias porque indicou/delineou pontos que se tornariam “alvo” na elaboração das mesmas.

A opção pelo levantamento de categorias ocorreu, porque se desejava um tratamento das informações contidas no Diário que não fosse genérico. As informações eram de conteúdo diverso e esta foi uma das razões de se fazerem “recortes” que foram organizados em categorias.

Um risco que se corre, quando se trabalha com a decomposição de um material em categorias, é perder a perspectiva do todo. Assim sendo, a preocupação de voltar a se remeter ao Diário como um todo, a todas as aulas, a todo o desenvolvimento da proposta, foi algo constante

O fato de não haver categorias a priori permitiu uma mobilidade de recortes e a criação ou eliminação de categorias, à medida que novas composições se mostrassem mais apropriadas. Entretanto, este processo torna-se trabalhoso pois, como ocorre em pesquisas como esta, havia grande quantidade de material; cada aula descrita no Diário apresentava conteúdos de várias categorias e até pequenos trechos apresentavam recortes de diversas categorias.

CATEGORIAS

As categorias elaboradas a partir da análise do Diário podem ser classificadas em dois grupos. As quatro do primeiro grupo referem-se ao cotidiano em sala de aula, à dinâmica de trabalho no desenvolvimento das atividades relativas à pesquisa.

O Diário pôde ser, ainda, fonte de outras categorias, de natureza diferente das primeiras, desta vez englobando as reflexões que o professor fez, enquanto escrevia seu Diário e que compuseram o segundo grupo, com cinco delas.

As relativas ao cotidiano em sala de aula foram numeradas, enquanto as outras foram indicadas por um código alfabético.

À medida que as categorias sejam descritas, os critérios de suas elaborações se explicitarão.

GRUPO 1: CATEGORIAS RELACIONAS COM O COTIDIANO DA SALA DE AULA

Estas categorias podem ser distribuídas em dois sub-grupos: um, composto pelas três primeiras, relacionadas com as manifestações dos alunos, a maneira como abordaram os exercícios, suas dúvidas; e outro, contemplado pela categoria 4, relativo à atuação do professor no processo de interação com os alunos, dando explicações, procurando entender e valorizar o que os alunos faziam. (ver Anexo 3)

Categoria 1: Procedimentos dos alunos.

Estão incluídos nesta categoria os procedimentos dos alunos por ocasião da resolução dos problemas. Esses procedimentos foram verbalizados na classe ou percebidos pelo professor, pelas anotações em seus cadernos, e refletiam o que uma parte da sala havia feito.

Categoria 2: Reações dos alunos.

Esta categoria contempla as reações dos alunos em relação aos problemas, como fazer comparações entre os exercícios, manifestar suas motivações ou suas dúvidas acerca de enunciados e dos procedimentos apresentados pelo professor ou por colegas. Esta última reação, as dúvidas, foi considerada em destaque, dada a frequência em que ocorre e pela importância que o professor de Matemática normalmente atribui ao tratamento delas.

Categoria 3: Interações.

Nesta categoria estão descritos casos de procedimentos e reações apresentados individualmente, por algum aluno, para quem foi impossível perceber se era único ou se refletia a maneira de proceder de outros colegas.

Categoria 4: Procedimentos e atuação do professor.

Esta categoria teve o intuito de englobar as narrativas do Diário referentes à postura, à atuação do professor em termos da discussão e apresentação da resolução dos exercícios. Pode ser observado então como o professor tratou ou valorizou o que os alunos haviam feito, além dos procedimentos de resolução dos exercícios utilizados pelo próprio professor.

A maioria dos exercícios, trabalhados na proposta, foi enquadrada nestas categorias, como no caso do exercício: “Se lançarmos ao mesmo tempo 3 moedas iguais uma única vez, quais e quantos são os resultados possíveis?”

Cat.1: Procedimentos dos alunos	Cat.2: Reações dos alunos	Cat.3: Interações	Cat.4: Procedimentos e atuação do professor
	<p>No segundo exercício, mal tinha terminado de colocar o enunciado e já houve quem falasse: mas é igual!! (...) No exercício 2 houve muita discussão KCK e KCC são dois que podem acontecer?</p> <p>a maioria pareceu compreender e aceitou a resposta...inclusive alguns iam dizendo...é, não vale a ordem...é, as moedas são iguais...se as moedas fossem numeradas seria diferente (muito bom este comentário, achei).</p>	<p>Zélia: eu não concordo. Ninguém se manifestou. Achava que ia ter mais gente marquei bobeira pois ficou só a Zélia não concordando ...embora disse que achava ótimo que ela não havia concordado. Falei para algum colega tentar explicar o exercício e o que ouvimos foram: não importa a ordem, se elas fossem numeradas... Me pareceu que ela não entendeu direito mas deixou os exercícios rolarem para frente.</p>	<p>e eu dizia: é..., mas como as moedas são iguais e você joga para cima e só vê como elas caem não dá para contar isto... tem de contar isto uma vez só. (...) mostrei na lousa a resolução</p> <p>Eu procurei repetir estas considerações em voz alta para que todos ouvissem.</p> <p>Disse que (para aquele exercício) aquele esquema de árvore não dava para ser utilizado, nem o Princípio Multiplicativo (sem usar estes nomes).</p>

Os exercícios que não foram incluídos, não forneceram informações importantes para a análise que ocorreu. Isto se deu tanto pela natureza do exercício (como no caso:

“Determine o valor da expressão a seguir para $n = 10$ e $p = 3$. $n!/p!(n-p)!$ ”) quanto pelo seu desenvolvimento em aula (como aconteceu com o exercício: “Quantas são as maneiras possíveis de se estabelecer o grupo dos 3 primeiros colocados de um certo páreo, com 10 competidores?”).

GRUPO 2: CATEGORIAS RELACIONAS COM AS REFLEXÕES

Nas três primeiras categorias deste tipo, A, B e C, foram incluídas as reflexões feitas enquanto o Diário era escrito. Quanto ao conteúdo das outras duas, a presença mais forte é de reflexões feitas durante o correr das aulas.

Categoria A: A posição de pesquisador.

Esta categoria diz respeito às considerações relacionadas a aspectos próprios da situação em que a pesquisa se realizou e das situações enfrentadas pelo investigador em relação ao seu andamento.

Categoria B: O conteúdo e a proposta.

Nesta categoria estão enquadradas as reflexões acerca das estratégias e abordagens que foram utilizadas no trabalho com determinados exercícios, exemplos e assuntos relacionados diretamente com o conteúdo em geral de Análise Combinatória.

Categoria C: A posição do professor.

Nesta categoria, estão contidas reflexões sobre a profissão, sobre o “ser professor em sala de aula”, incluindo a relação entre professor e alunos, a postura adotada, gestão da sala de aula e o lado emocional do profissional.

Categoria D: A relação dos alunos com o conteúdo e a proposta.

Neste item temos reflexões ocorridas na própria sala de aula, sobre procedimentos e dúvidas manifestados pelos alunos.

Categoria E: Alunos.

Esta categoria tem um caráter de reflexões intuitivas. Neste caso temos percepções acerca das reações dos alunos em geral ou de certos alunos sob alguns aspectos como manifestações, mesmo físicas, de interesse ou não, do tipo de participação e em relação às explicações dadas.

O trabalho inicial foi categorizar as aulas descritas no Diário no primeiro grupo de categorias. Dada a percepção da emergência de categorias de outra natureza, o Diário foi

novamente varrido, tendo em vista a elaboração do segundo grupo. Assim sendo, houve intersecção somente entre as categorias de grupos diferentes. Dentro de cada grupo, não houve intersecção.

A análise que seguiu o levantamento de categorias procurou levar em conta o todo e não fragmentá-lo, ou seja, a separação em categorias serviu para esclarecer o conjunto total das informações contidas no Diário.

O “enquadramento” em categorias do conteúdo do Diário possibilitou sua separação em episódios para que cada um pudesse revelar ou não os aspectos que foram objeto de atenção da pesquisa, como o trabalho do professor e o desenvolvimento da proposta em sala de aula. Em geral, o desenvolvimento de cada exercício tornou-se um episódio.

Este trabalho indicou um episódio que mereceu especial atenção e uma análise mais detalhada. As aulas relativas ao exercício designado como I.8, “A placa de moto é formada por três letras e quatro dígitos. O número de placas que podem ser formadas com o prefixo ABC é: a) 100 b) 10000 c) 30 d) 110 e) 999”, quando tratadas dentro das categorias, revelaram-se as mais ricas, em especial na categoria 4 “procedimentos e atuação do professor” na qual se destacam algumas características do trabalho como os dilemas do professor, suas explicações, suas reflexões. Além disso, este exercício se destacou também na categoria 3 “interações”; neste episódio, as interações com os alunos acabaram revelando potencial para novas reflexões, que de um modo geral podem retratar o trabalho de qualquer professor envolvido com o ensino de Análise Combinatória. Para a análise deste episódio, o Diário foi utilizado como um todo. Somente as categorias não bastaram para esclarecer como o episódio permeou a proposta em si, de um modo geral. O exercício I.8 voltou a ser evocado em muitos momentos, além daquele em que foi apresentado e resolvido. Sua análise somente dentro das categorias não permitiria mostrar como esteve presente em reflexões feitas pelo professor, provocando discussões com os alunos e influenciando de alguma maneira os exercícios presentes nas provas. De certa forma, o mesmo foi feito por Lampert: os dados referidos pela autora foram tomados de uma lição sobre expoentes. Para colocar os eventos desta aula dentro de um contexto, ela também se remeteu a transcritos de aulas que ocorreram em outros pontos, durante o ano.

O episódio, envolvendo o exercício I.8, permitiu a exploração de aspectos relacionados com o trabalho do professor e retrata também um problema próprio da

proposta desenvolvida. As análises indicaram também um outro ponto que poderia ser explorado/aprofundado, desta vez mais próprio da Análise Combinatória em si e não particularmente da proposta. As aulas descritas e os resultados das provas apontaram para um aspecto que permeia praticamente todo trabalho de ensino de Análise Combinatória e que era objeto de atenção, desde a preparação da proposta: a sistematização da relação entre Arranjo e Combinação e a construção da fórmula de Combinação. No capítulo 6, além de uma análise de episódios relacionados com as aulas desenvolvidas na proposta sobre esta parte da Análise Combinatória, são descritos como alguns textos, que apresentam preocupação com o ensino/aprendizagem de Análise Combinatória, tratam esta questão.

ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO E DAS PROVAS

As duas outras fontes de informação utilizadas nesta pesquisa, as duas provas que os alunos fizeram e um questionário, contribuíram principalmente no esclarecimento de algumas questões pontuais e complementando a análise do Diário.

O questionário forneceu elementos de comparação, do ponto de vista dos alunos, entre a proposta desenvolvida e outros trabalhos visto que alguns alunos destacaram que o trabalho desenvolvido proposto não era centrado em fórmulas. Outros alunos preferiram destacar aspectos da relação professor-aluno, incluindo as explicações do professor. O questionário não correspondeu totalmente às expectativas pois da maneira como foi preparado e aplicado, provocou respostas genéricas, evasivas e com chavões como “matemática é importante”. Deve ser levado em conta também que os alunos têm poucas oportunidades de responder a questionários deste tipo, de avaliar uma proposta de ensino e de avaliar a própria aprendizagem. Como era o trabalho de aula que estaria sendo avaliado, a identificação foi optativa, fato que acabou por impossibilitar uma retomada com os alunos cujas manifestações foram mais interessantes e mereciam detalhamento.

A análise das respostas propiciou informações sobre a forma de avaliação praticada. Duas perguntas do questionário foram baseadas em manifestações de alguns alunos. No decorrer das aulas, foi possível perceber que certos alunos consideraram que as duas provas realizadas não refletiram seu aprendizado. Esta percepção coloca a avaliação em

questionamento pois 10 dos 28 alunos que responderam ao questionário, citaram que a nota das provas não havia refletido o que sabiam.

Em relação às provas, apesar dos cuidados com sua elaboração, um elemento de reflexão é a limitação de uma avaliação “tradicional”, enquanto avaliadora de um trabalho com as características do que foi desenvolvido nesta pesquisa. A participação em aula, de vários alunos, poderia substituir ou complementar a avaliação? A resposta pode ser afirmativa, mas o professor deveria ser capaz de dedicar a devida atenção a cada aluno, o que foi complicado devido ao pouco tempo em contato com os alunos e eram 33, o que dificultou avaliar todos eles nestes outros moldes.

Vale ressaltar que uma discussão sobre avaliação foge ao âmbito desta dissertação.

Sua análise forneceu elementos de cunho quantitativo para as análises dos episódios selecionados, após a categorização do conteúdo do Diário. O contexto trabalhado no exercício I.8 voltou a aparecer em dois exercícios, um em cada prova e as análises deste dois exercícios propiciaram informações sobre, por exemplo, a aplicação do Princípio Multiplicativo nos momentos de resolução. Em relação à discussão da relação entre Arranjo e Combinação, os exercícios das provas relativos a esses dois temas foram também objeto de análise para complementar as reflexões.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Um dos elementos motivadores da investigação que originou esta pesquisa foi ensinar Análise Combinatória pela primeira vez. Naquela época, procurei uma bibliografia que me auxiliasse a tentar uma abordagem diferenciada ou textos que focassem o ensino/aprendizagem de Análise Combinatória. Julgava que tal material auxiliaria a elaboração das aulas e o desenvolvimento do curso que estava preparando. Encontrei poucos textos relacionados ao tema.

Percebi também que poucos enfocavam temas relativos ao Ensino Médio. Lendo a tese de doutorado (1994) e os artigos (1993, 1995) de Fiorentini pude constatar a não existência no Brasil de nenhuma tese ou dissertação, que tivesse como objeto de investigação, o ensino de Análise Combinatória naquele nível escolar.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, a dificuldade inicial foi sanada apenas em parte: encontrei textos que tratam de Análise Combinatória sob diferentes aspectos.

A bibliografia consultada mostra que existem trabalhos dedicados à Análise Combinatória enquanto conteúdo matemático, sem, entretanto, considerações específicas sobre o trabalho em sala de aula (Nogueira, 1972; Backx, Poppe e Tavares, 1975; Morgado et al. 1991; Santos, Mello e Murari 1995; Vilenkin, s/d). Foram consultados também alguns livros didáticos (Iezzi et al. 1979; Trotta; Imenes e Jakubovic, 1979; Hariki e Onaga, 1980). Outros trabalhos tratam da Análise Combinatória em relação com a Probabilidade (Lecoutre, 1985; Fischbein, Nello e Marino, 1991; Parzysz, 1993; Henry, s/d; Jones et al, 1997) ou com outros aspectos da Matemática Discreta (Hart, Maltas e Rich, 1990; Litwiller e Duncan, 1992; Kenney e Bezuska, 1993). Existem estudos que tratam da relação entre a formação do conceito de Arranjos, Permutações e Combinações e o desenvolvimento intelectual de crianças e jovens, utilizando o método clínico (Piaget e Inhelder, 1951; Fischbein, Pampu e Minzat, 1970; Fischbein, 1975; English, 1993; Fischbein e Grossman, 1997). Foram encontrados ainda textos que fazem uma referência direta ao ensino/aprendizagem do tema (Glaymann e Varga, 1973; UNESCO, 1977; Hariki, 1996; São Paulo, 1990, 1991; Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1994, 1996; Roa, Batanero, Godino e Cañizares, 1996).

Entre os textos que tratam do tema enquanto conteúdo matemático, algumas publicações nacionais foram encontradas, como é o caso do trabalho de Nogueira (1972). A apresentação da Análise Combinatória se dá de um modo formal. Para cada tema, inicialmente é apresentada a definição e a fórmula, sem preocupações com o significado dos termos e símbolos envolvidos. No momento seguinte, aparecem alguns exercícios, sob o título “Aplicações”. Além de Arranjos, Permutações e Combinações, que são discutidos nos casos com e sem repetição, este trabalho apresenta também a potenciação de polinômios. Os capítulos finais são destinados apenas à apresentação de exercícios, alguns resolvidos.

No livro *Prelúdio à Análise Combinatória* (Backx, Poppe e Tavares, 1975), são apresentados exercícios, alguns resolvidos e outros não, utilizando-se basicamente o Princípio Multiplicativo, que se constitui a base deste trabalho que almeja tornar a Análise Combinatória mais acessível aos estudantes. Dedicam mais atenção às Permutações e Combinações que aos Arranjos, tema que aparece como um apêndice. Provavelmente isto é consequência do fato de os autores dedicarem especial atenção ao Princípio Multiplicativo. Supõem que, se o leitor dominar este princípio, compreenderá a fórmula dos Arranjos como decorrente. O mesmo não ocorre no caso das Permutações, pois este tema é utilizado no momento da dedução da fórmula das Combinações. Além de discutir estes temas também nos casos com repetição, os autores apresentam outros temas como potenciação de polinômios e cardinalidade de conjuntos. O Princípio Multiplicativo é freqüentemente retomado na apresentação e discussão das diversas fórmulas.

Este trabalho mostra a preocupação dos autores com o fato de a Análise Combinatória ser um tema no qual normalmente os estudantes encontram dificuldades, e para quem a Análise Combinatória se enquadra como um tabu.

Na mesma linha do trabalho de Backx, Poppe e Tavares (1975), encontramos os livros de Morgado et alli. (1991) e Santos, Mello e Murari (1995). O trabalho de Morgado et alli. contempla, além dos temas abordados por aqueles autores, a História da Análise Combinatória. Apresenta, ainda, uma parte dedicada à Probabilidade. Apresenta inclusive outros temas: princípio da indução matemática, princípio da inclusão e exclusão, funções geradoras, princípio da casa dos pombos e grafos.

O livro de Santos, Mello e Murari (1995) demonstra preocupação com o significado formal dos temas abordados. Este trabalho se apresenta com o objetivo de ser uma fonte de exemplos e exercícios para professores do Ensino Médio. Diferentemente dos livros de Backx, Poppe e Tavares (1975) e Morgado et alli. (1991), aborda diretamente os Arranjos. Seu segundo capítulo traz inicialmente, os princípios aditivo e multiplicativo e algumas aplicações dos mesmos, com a intenção de tornar clara a apresentação das definições de Arranjo, Permutação e Combinação para o leitor.

Um outro trabalho que pode ser considerado desta linha é o livro de Vilenkin (s/d), que faz em seu prefácio, menção à História da Análise Combinatória. Apresenta problemas resolvidos e um apêndice com mais de 400 problemas.

Apesar de conter grande quantidade de exercícios, estes textos não discutem suas possíveis utilizações em sala de aula. A contribuição desses trabalhos se dá principalmente em relação ao conhecimento matemático. Coerentemente com seus propósitos, os textos analisam todos os ramos da Análise Combinatória.

Estes trabalhos, entretanto, não me auxiliaram na investigação que originou esta dissertação, uma vez que eu procurava principalmente considerações acerca de Arranjos, Permutações e Combinações no contexto de sala de aula. Assim mesmo, parece leitura obrigatória para aqueles que desejam se aprofundar no tema com uma visão que vai além da Análise Combinatória do Ensino Médio. O professor pode, através destes textos, aperfeiçoar seu conhecimento matemático, conhecer melhor certas definições, além de ter uma fonte de exercícios que poderão ser propostos em sala de aula.

Outra fonte de conhecimento e de exercícios/exemplos que podem ajudar o professor são os livros didáticos. Este fato não é novidade, grande parte dos professores envolvidos na tarefa de ensinar um tema, vai buscar informações em tais publicações. Comigo não foi diferente. Na época da elaboração da minha proposta encontrei dificuldades para achar textos que tratassem do assunto, os primeiros que me auxiliaram foram os livros didáticos. Entretanto, pela sua própria natureza, esse tipo de publicação geralmente não discute questões diretamente relacionadas com ensino/aprendizagem. Por esta razão, esses livros serviram basicamente como fonte de exercícios. Não foram analisados criticamente quanto ao seu valor enquanto livro didático, o que não me impediu

de me ater a alguns deles, os mais importantes para o desenvolvimento da pesquisa que originou esta dissertação.

O livro “Curso de Matemática 2” de Hariki e Onaga (1980), recebeu especial atenção visto que um dos autores foi, de certa forma, motivador desta investigação. Este, juntamente com o livro “Aulas de Matemática 2” de Iezzi et alli. (1979), foi uma fonte de exercícios e idéias. Alguns exercícios utilizados na proposta foram baseados nos apresentados nestes livros.

Um tratamento diferenciado dado à Análise Combinatória se apresenta no livro “Matemática Aplicada 2”, de Trotta; Imenes e Jakubovic (1979). Um exemplo que evidencia esta diferenciação é a apresentação de todas as 512 (!!) possibilidades que temos como resposta de um exercício, como forma de ilustrar e discutir modos de resolução dos problemas. Este texto tem um caráter diferente dos livros didáticos de sua época uma vez que, em algumas ocasiões, contextualiza o assunto trabalhado na História da Matemática ou em aplicações práticas.

Posso dizer que tive contato com grande parte das publicações atuais deste tipo. Desta pesquisa bibliográfica pude concluir que um professor que esteja também frente à situação de lecionar Análise Combinatória, sem ter que se prender a algum material já pronto, pode certamente pensar em exercícios baseados em livros didáticos, uma vez que é possível encontrar exercícios desde os tradicionais até os que se destacam pela criatividade.

Como foi mencionado, no começo do trabalho houve a dificuldade em achar textos relacionados diretamente à Análise Combinatória. Muitos dos textos encontrados tratavam basicamente de Probabilidade ou de Matemática Discreta em geral, relacionando-as com Análise Combinatória.

É assim o caso de Henry (s/d), que traça um breve paralelo entre as noções de probabilidade tradicional e experimental; faz uma retrospectiva histórica mostrando a evolução das concepções de probabilidade e atenta para os programas de Ensino Médio da França, com relação ao ensino de probabilidades, citando que de 1982 a 1991 há uma simplificação da combinatória envolvida, portanto comenta Análise Combinatória apenas de passagem.

Outro trabalho é o de Lecoutre (1985). Na comparação dos resultados obtidos pelos sujeitos de problemas do tipo: “faz-se um sorteio de dois entre três objetos (um branco e

dois vermelhos) e se comparam dois resultados: (1) um objeto é branco e outro é vermelho e (2) os dois são vermelhos”, observa-se um erro de equiprobabilidade, por parte de estudantes. O autor trata em seu artigo, de estudar a resistência do erro após a consideração de informações em combinatória e informações em frequências. Os efeitos dessas informações mostra-se limitado: aproximadamente metade dos sujeitos continuam a dar respostas erradas de equiprobabilidade.

Já Parzysz (1993) deseja, em seu artigo, mostrar as potencialidades do diagrama de árvore. Em um primeiro momento, escreve sobre a utilidade do diagrama no estudo de Probabilidade. Em seguida, o autor propõe usar-se o esquema de árvore para definir e estudar as propriedades das Combinações de n elementos, tomadas k a k e a lei binomial. O autor não se refere a dados empíricos.

Jones et alii. (1997) apresentam um framework sobre o pensamento probabilístico em crianças. Foram quatro os principais construtos incorporados no framework: espaço amostral, probabilidade de um evento, comparações probabilísticas e probabilidade condicional. No caso do espaço amostral, um entendimento do mesmo é exibido pela habilidade em identificar o conjunto completo de resultados em dois tipos de experimentos, de uma etapa e de duas etapas, envolvendo portanto, o pensamento combinatório, dada a necessidade de formação de todos os resultados possíveis. Como os outros construtos não se relacionavam diretamente com Análise Combinatória e sim com Probabilidade, as contribuições desta pesquisa foram as considerações feitas sobre o espaço amostral.

Para cada construto, quatro níveis de pensamento foram estabelecidos e, entre as conclusões relacionadas com espaço amostral, foi observado que as crianças consideradas no nível 1 não elaboraram uma lista completa dos resultados; as classificadas no nível 2 foram capazes de identificar um conjunto completo de resultados para um experimento de uma etapa e, às vezes, de listar os resultados para os experimentos de duas etapas, sem apresentar uma estratégia que possibilite a generalização. No caso deste último experimento, no nível 3, foi identificada a tendência do aparecimento de tal estratégia; finalmente, no nível 4 as estratégias utilizadas para listar os resultados indicavam a presença de uma lei geral de formação.

Fischbein, Nello e Marino (1991), desenvolveram um trabalho com sujeitos de 9 a 14 anos no qual selecionaram tópicos que poderiam estimular novas interpretações

referentes às primeiras noções intuitivas do pensamento probabilístico, como tipos de eventos (impossível, possível e certo) e eventos compostos. Em relação às conclusões desta pesquisa, foi notado que as várias ordens possíveis de um conjunto de resultados elementares não são contadas em separado, ou seja, “(...) *não há um entendimento natural do fato que, em um espaço amostral, possíveis resultados deveriam ser distinguidos e contados separadamente se a ordem de seus componentes elementares é diferente*” (Fischbein, Nello e Marino, 1991, p. 547).

Hart, Maltas e Rich (1990), examinam como a Matemática Discreta pode ser ensinada em 7º e 8º graus da Middle School e na High School. Os autores elaboram duas estratégias para encaixar Matemática Discreta no currículo destes níveis escolares. No caso da High School, é discutido um curso de teoria finita de grafos. No caso dos 7º e 8º graus, três tópicos são considerados apropriados para os estudantes: diferenças finitas, recursão e teoria de grafos. Entre os exemplos de casos onde a idéia de recursão pode ser usada, aparece a notação fatorial, que é usualmente definida de uma maneira— $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ — que não enfatiza sua natureza recursiva: $n! = n \cdot (n-1)!$.

A recursão e a notação fatorial também foram discutidas no artigo de Kenney e Beuszka (93). Inicialmente, os autores escrevem sobre o que é e por que ensinar Matemática Discreta. Dentre os muitos temas desta área, é focalizada a recursão. Segundo os autores, uma boa ocasião para começar a usar relações de recorrência é, por exemplo, com a definição de fatorial uma vez que temos: $n! = (n-1)! \cdot n$. Outra fonte indicada como rica em modelos recursivos é o triângulo de Pascal sendo que quando as combinações são introduzidas, provam o modelo aditivo básico para o triângulo.

O triângulo de Pascal é relacionado com campeonatos esportivos no trabalho de Litwiller e Duncan (92), em que os autores investigam o número de maneiras que um time pode ganhar uma série de jogos.

Estes textos foram consultados na esperança de que as menções à Análise Combinatória, mesmo que indiretas, trouxessem algum auxílio relevante à investigação em curso. Infelizmente este fato não ocorreu. As pesquisas relatadas foram realizadas junto a sujeitos de faixa etária inferior à dos alunos do Ensino Médio no Brasil e, além disso, nenhuma delas foi realizada em situação natural de sala de aula. Este último aspecto limita a utilização das contribuições encontradas, como as do trabalho de Jones et alii (1997), que

oferecem dados acerca de utilizações de estratégias que possibilitem generalizações e as de Parzys (1993), sobre as possibilidades da utilização do diagrama de árvore no ensino/aprendizagem de Análise Combinatória.

Outros estudos tratam da relação entre a formação de conceitos relativos à Análise Combinatória e o desenvolvimento intelectual de crianças e jovens, utilizando o método clínico em suas pesquisas.

Na década de 50, Piaget e Inhelder realizaram estudos acerca da capacidade combinatória. Em seu livro “La gènese de l’idée de hasard chez l’enfant” (1951), os autores apresentam resultados que relacionam a idade dos indivíduos com a capacidade de chegar a um sistema de contagem para os temas Combinações, Permutações e Arranjos. Os autores consideraram três níveis distintos relacionados à idade dos indivíduos.

Para cada período e cada um dos temas analisados, os resultados foram semelhantes. Basicamente, foi constatado que em relação ao nível I - até os sete anos, não há procura de procedimento ou sistema de construção por parte dos indivíduos. Já no nível II - dos sete aos onze, os sujeitos iniciam a busca de um sistema e no nível III - acima de onze anos, há indícios da descoberta de um sistema ou lei de formação.

Em um artigo, Fischbein, Pampu e Minzat (1970), questionam Piaget e Inhelder e investigam os efeitos da instrução direta – ou seja, incluindo exemplos na formulação da questão – na habilidade de lidar com Permutações e Arranjos em 60 crianças, divididas em três grupos de 20, segundo suas idades: 10, 12 e 14 anos. Usando elementos como letras, números, figuras, as crianças foram testadas individualmente e as sessões experimentais consistiram de duas fases:

Estimação subjetiva do número de permutações. Os autores verificaram que para estimar o número de permutações possíveis, com 3, 4 e 5 elementos, o fator idade foi significativo e o fator número de elementos envolvidos foi considerado muito significativo, no sentido que existiu uma tendência de subestimar o número de permutações possíveis. Esta tendência foi mais significativa quanto maior o número de objetos envolvidos.

Aquisição de estratégia sistemática no cálculo do número de arranjos e permutações (efeitos da instrução). Estudando efeitos de instrução, os autores investigam, através da combinação de aprendizagem por descoberta com instrução programada, os procedimentos dos alunos frente a arranjos de dois objetos em grupos de 3 e de 4 e

permutações de 3, 4 e 5 elementos. Nestes experimentos foram utilizados os diagramas de árvore. Entre os resultados, para os arranjos, foi notado que a resolução tipo 2. 2. 2 aparece espontaneamente somente no caso de poucos sujeitos, após de terem feito o primeiro diagrama de árvore.

Fischbein (1975), em seu livro, que traz inclusive o artigo acima citado como apêndice, dedica um capítulo à Análise Combinatória, fazendo inicialmente uma revisão do trabalho de Piaget, principalmente o envolvido no livro já citado, para em seguida discorrer sobre a apresentação de técnicas combinatórias a indivíduos, como esquemas e modelos generativos, como por exemplo, o diagrama de árvore.

Fischbein e Grossman (1997) apresentam uma pesquisa acerca da relação entre esquemas e intuições, sendo que sua principal hipótese é que intuições são sempre baseadas em certos esquemas estruturais. Esta hipótese é verificada considerando-se problemas combinatórios. Nesta pesquisa, foi aplicado um questionário contendo problemas de Permutações, Arranjos com e sem repetição e Combinação, solicitando aos sujeitos que apenas estimassem as respostas. Alguns dias depois do questionário aplicado, foi feita uma entrevista para que os sujeitos justificassem suas soluções. Os sujeitos eram alunos dos graus 7, 9 e 11, estudantes de “Teachers Colleges” e adultos com pouca educação escolar em termos matemáticos.

No caso das Permutações de três elementos, para o caso dos alunos dos graus 7 a 11, o valor das estimativas variou, aumentando de acordo com a idade. Já entre os estudantes de “Teachers Colleges” e os adultos, o número foi próximo da resposta certa. No caso das Permutações de 4 e 5 elementos, foi notada uma grande subestimativa, sem regularidades em termos de idades. É de se destacar que nenhum dos participantes chegou à fórmula $P(n) = n!$. Suas justificativas faziam referências a operações binárias, como, por exemplo, no caso de quatro elementos, 4. 4, 3. 4, 2^4 . Essas operações se mostraram presentes também na resolução dos outros problemas.

Os Arranjos e as Combinações foram tomados dois a dois, nos casos de 3, 4 e 5 elementos. Em relação aos Arranjos, novamente as operações binárias foram muito utilizadas pelos sujeitos. Porém, no caso dos Arranjos com repetição, cuja fórmula é uma operação binária ($A_{n,k} = n^k$), o uso destas operações levou os resultados das estimativas a ser próximos da resposta correta. Quanto ao aspecto idade, houve dificuldade em se encontrar

algum tipo de regularidade, à exceção dos alunos dos graus 7 a 11, onde houve um aumento, conforme a idade, do valor estimado. Já no caso dos Arranjos sem repetição, o uso das operações binárias levou os resultados a ser superestimados.

Para os problemas de Combinações, novamente houve uma superestimativa dos valores. Entretanto, os sujeitos não reproduziram simplesmente os mesmos números do caso dos Arranjos sem repetição, demonstrando uma noção que os resultados são menores.

Em seu estudo, English (1993) investiga as estratégias usadas por crianças de 7 a 12 anos na solução de problemas combinatórios. Foram aplicados problemas onde as crianças deveriam vestir, de todas as maneiras possíveis, com dois e com três itens, ursos de brinquedo. Tanto no caso dos dois quanto no caso dos três itens, as estratégias das crianças foram semelhantes, sendo identificadas: tentativa e erro; “transicionais”, com o aparecimento de algum padrão; e estratégias com padrões consistentes e completos.

Em relação a esses trabalhos, deve-se ressaltar que os autores enfocaram, entre outros, os temas desta dissertação. No entanto, a grande maioria dos sujeitos envolvidos nas pesquisas tem idade inferior à dos alunos envolvidos neste trabalho. O único trabalho em que os sujeitos não são somente crianças é o de Fischbein e Grossman (1997) mas a situação em que a pesquisa se desenvolve é diferente daquela da sala de aula.

O fato de as tarefas envolvidas nestas investigações serem desenvolvidas individualmente pelos sujeitos é um outro ponto que também limita as contribuições destes textos. A situação de entrevista ou de resposta a um questionário é muito diferente daquela de sala de aula onde existem interações e/ou relacionamentos próprios. Além disso, estas situações não levam em conta o trabalho do professor e seu objetivo de ensinar Arranjos, Permutações ou Combinações para muitos alunos, ao mesmo tempo e em igual espaço.

A contribuição destes trabalhos se dá quando procuramos comparar seus resultados com o que acontece em sala de aula, tentando traçar um paralelo entre as manifestações dos sujeitos envolvidos naquelas pesquisas e os alunos, como no caso das informações sobre o pensamento combinatório, que foram as mais úteis destas pesquisas. Essas informações podem explicar, algumas reações dos alunos durante o processo ensino/aprendizagem dos temas.

Entre os textos que apresentam preocupação ao ensino/aprendizagem do tema, estão os trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996). Os três autores apresentam a

pesquisa sobre a capacidade combinatória e sua relação com a instrução escolar dos sujeitos, na faixa etária dos 14 anos. Para 720 alunos com e sem instrução em Análise Combinatória, é aplicado um questionário com 13 problemas, classificados segundo três modelos:

Seleção: de um conjunto de m elementos, se extraem n elementos, como por exemplo “*Se quer eleger um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário: Para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Arturo, Basílio, Carlos e David. Quantos comitês diferentes se podem eleger com os quatro candidatos? Exemplo: Arturo como presidente, Carlos como tesoureiro e David como secretário*” (Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1996, p. 39);

Colocação: deve-se introduzir n elementos em m lugares, como é o caso do exercício “*Dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes das cores amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes? Exemplo: Podemos colocar uma carta no envelope amarelo, outra no branco e outra no creme.*” (Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1996, p. 38);

Partição: diz respeito a dividir um conjunto de n elementos em m subconjuntos, como é o caso do exercício “*Maria e Carmen têm quatro cromos numerados de 1 a 4. Decidem reparti-los entre as duas (dois cromos para cada uma). De quantos modos se podem repartir os objetos? Exemplo: Maria pode ficar com os cromos 1 e 2, e Carmen com os 3 e 4.*” (Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1996, p. 39).

Os alunos apresentaram grande dificuldade em resolver os problemas. Os autores consideram a existência de 11 tipos de erros, tais como levar em conta a ordem dos elementos, quando isto não é necessário e vice-versa; considerar a repetição dos elementos de modo errado ao desejado e vice-versa; tentar resolver um problema através da enumeração das possibilidades sem apresentar um procedimento que dê conta de formar todos os casos. Os autores puderam perceber que há uma certa “regularidade” no aparecimento dos erros para ambos os grupos de alunos, com e sem instrução.

A grande contribuição de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo ao assunto, entretanto, é seu trabalho intitulado *Razonamiento Combinatorio* (1994). Neste livro os autores tratam da Análise Combinatória sob vários enfoques. No primeiro capítulo, tratam

de aspectos como perspectiva histórica, conceitos e modelos combinatórios. No capítulo 2 apresentam investigações acerca do tema na perspectiva de ensino e aprendizagem. O terceiro e último capítulo contém um plano de unidades destinadas ao ensino de Análise Combinatória para alunos com idades entre 10 e 18 anos.

Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1996), apresentam um estudo dos processos de resolução de problemas combinatórios tendo como sujeitos quatro estudantes de Licenciatura em Matemática, selecionados entre os que obtiveram os melhores os piores resultados dentre 29 estudantes que resolveram 13 problemas combinatórios. O que os melhores alunos tiveram como característica foi a identificação da operação combinatória envolvida, a compreensão da importância ou não da ordem e da repetição de elemento, a capacidade de enumeração sistemática, a capacidade recursiva e de generalização. O que caracterizou os piores alunos foi a confusão sobre a relevância da ordem e da repetição, sobre o tipo dos elementos envolvidos, falta de capacidade de enumeração e erros aritméticos.

Em seu livro, Glaymann e Varga (1974) propõem sugestões para ensinar Análise Combinatória, sem se referir a dados de pesquisa. Apresentam um posicionamento interessante em termos de didática, sugerem problemas abertos, elaborados de modo que possibilitem diferentes formas para respondê-los. Discutem a relação entre Arranjo e Combinação sem repetição comparando variantes de um problema e ilustrando as situações através de diagramas de árvore. Em seus “comentários para o professor”, há um aprofundamento teórico do assunto trabalhado.

Hariki (1996) trata das conexões entre diferentes problemas combinatórios, citando que o estabelecimento das conexões constitui uma boa estratégia de resolução de tais problemas. O funcionamento da estratégia da conexão é ilustrado através da busca de problemas relacionados a um problema que se quer resolver. É ilustrada também a estratégia da imersão, na qual são produzidos problemas conexos variando os dados numéricos de um dado problema.

A busca por exercícios e comentários acerca de metodologias para o ensino do assunto acabou me levando à consulta de propostas curriculares, como foi o caso da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, 2º grau, do Estado de São Paulo (São Paulo, 1991): nesta proposta, conhecida como Proposta da CENP, o conteúdo de Análise

Combinatória é dividido em três etapas: Familiarização com problemas que envolvem contagem, com a apresentação de problemas variados; Sistematização da contagem, em que são introduzidas técnicas de formação e contagem dos agrupamentos, como o Princípio Multiplicativo e o diagrama de árvore; e Sistematização dos conceitos, na qual são trabalhadas nomenclaturas e fórmulas de Arranjos com e sem repetição, fatorial, Permutações simples e Combinações simples. Esta proposta foi uma rica fonte de exercícios e acredito que pode auxiliar bastante os professores como um parâmetro para seu trabalho em sala de aula.

O mesmo pode ser dito sobre a proposta curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação para o Magistério (São Paulo, 1990), onde praticamente o mesmo conteúdo da primeira proposta é apresentado, porém de modo resumido.

Outra Proposta Curricular consultada foi a da UNESCO, datada do ano de 1977, na qual o objetivo do módulo destinado à Análise Combinatória é introduzir as idéias fundamentais, utilizando-se as noções e definições de funções (injetoras ou bijetoras, por exemplo) entre conjuntos. Os temas trabalhados são: Arranjos, Permutações, Conjunto Potência, Combinações, Propriedades dos números combinatórios. No módulo destinado à Probabilidade, é sugerido que primeiramente se trate de temas da Análise Combinatória, que serão aplicados no cálculo de probabilidades. Os temas sugeridos são: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutações, Arranjos e Combinações.

As propostas citadas não fazem referência à utilizações em sala de aula. Em seu livro, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) propõem um plano de ensino no qual sugerem posturas para o professor na gerência das aulas. Entretanto, não se referem a pesquisas em sala de aula sobre o tal plano. Podemos considerar tal plano de ensino como uma proposta curricular, pois há a sugestão de uma metodologia de ensino a ser utilizada, além de temas de Análise Combinatória a serem abordados em determinadas faixas etárias e atividades a serem desenvolvidas para cada tema.

A presente dissertação dá um passo diferente, no sentido de que se propõe a analisar o trabalho de um professor que, uma vez desiludido e incomodado com a prática pedagógica em Análise Combinatória que conhecia, elabora e experimenta em sala de aula, uma proposta de ensino que avalia “adequada” à sua realidade (turma e turno em que trabalha) e às suas concepções de ensino.

A PROPOSTA

A Proposta pode ser dividida em 4 fases, de acordo com os objetivos de cada momento: “Familiarização com problemas de contagem em geral”, “Estudo da notação fatorial”, “Levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução” e “Relação das características (modo de resolver) com os temas em si e ‘formalização’ dos conceitos/temas”. Na última fase, os temas referidos são Arranjo, Permutação e Combinação, todos sem repetição de elementos.

Os exercícios que propus visavam a propiciar ao aluno situações em que ele pudesse discutir com colegas e com o professor suas dúvidas ou concretizar suas certezas. Cada exercício deveria ainda despertar nos estudantes, necessidades de se organizar para elaborar uma listagem adequada ou chegar a um procedimento geral de cálculo, uma fórmula geral, ou seja, os exercícios propiciariam momentos para que os alunos refletissem sobre o que estavam conhecendo/aprendendo.

Almejava que cada exercício trouxesse um aspecto estimulante para o desenvolvimento do tema em estudo.

Na maior parte dos livros didáticos destinados ao Ensino Médio, o termo “exercício” é utilizado para indicar tarefas repetitivas, destinadas a treinar o aluno em um determinado procedimento e/ou algoritmo; não o utilizei neste sentido. O sentido aqui utilizado é semelhante ao de “problemas” em Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1994), que os selecionaram com o propósito de abarcar os aspectos da Análise Combinatória que ela desejou abordar, pois os exercícios foram escolhidos de modo que contemplassem os objetivos de cada fase da proposta.

O material apostilado, utilizado pela escola na qual desenvolvemos o trabalho de campo, foi analisado de tal forma, que serviu como fonte de exercícios. O conteúdo sugerido para ser ensinado no segundo ano está dividido em quatro apostilas, que são divididas nas chamadas lições. Análise Combinatória está presente na apostila destinada a ser trabalhada no primeiro bimestre, sendo que o conteúdo que foi objeto deste estudo consta de 7 lições.

Geralmente a estrutura das lições da apostila é composta de uma explicação sucinta do tema, quando é o caso, da apresentação de sua fórmula e uma lista de exercícios. Como

a proposta a ser trabalhada não seguiria esta estrutura, foram utilizados também outros exercícios, que viessem ao encontro do intuito de cada fase. Os outros exercícios foram elaborados pelo professor ou baseados em fontes como a Proposta da CENP (São Paulo, 1991) ou livros didáticos, principalmente os já citados “Curso de Matemática” de Hariki e Onaga (1979) e “Aulas de Matemática” de Iezzi et alii.(1979).

Neste capítulo, é apresentada uma descrição de cada uma das fases. Na descrição de cada fase estão incluídos os exercícios desenvolvidos e será usado o código (ap) para os extraídos do material apostilado, (el) para os elaborados pelo professor, (pc) para os que constam da proposta de CENP (São Paulo, 1991) e (cm) para os baseados no livro “Curso de Matemática” (Hariki e Onaga, 1979) e (am) para os baseados no livro “Aulas de Matemática”(Iezzi et alii., 1979).

Para cada fase, após sua descrição, foram feitas reflexões acerca de seu desenvolvimento, tendo por base as anotações feitas no Diário sobre as aulas. Como já citado, tais anotações, como todas as menções ao Diário nesta dissertação, serão destacadas em itálico.

As fases foram:

Primeira fase: “Familiarização com problemas de contagem em geral”.

Os objetivos desta fase: que os alunos tivessem um primeiro contato com os problemas de contagem; se acostumassem a ler e interpretar os problemas e, ao mesmo tempo, tivessem as primeiras noções de estratégias de contagem como a listagem, o chamado Princípio Multiplicativo, e os diagramas de árvore.

Entre as estratégias de contagem inclui-se ainda uma que pode ser considerada intermediária entre a listagem de todos os casos possíveis e a aplicação direta do Princípio Multiplicativo, que consiste em se tomar um elemento e como base e listar/formar todas as possibilidades que incluem este elemento. Sendo n o total de possibilidades, tendo e como base e , sendo m o total de possíveis elementos-base, uma vez contado n , a totalidade dos casos será $n+n+\dots+n = m.n$, não havendo portanto, a necessidade de se listarem todos os $m.n$ casos.

Considerarei como Princípio Multiplicativo (P. M.) a estratégia que consiste no seguinte: se um evento pode ocorrer n_1 modos diferentes, um segundo evento de n_2 modos diferentes, um terceiro evento de n_3 modos diferentes, ..., um k -ésimo evento de n_k modos diferentes, então o evento composto dos k eventos sucessivamente pode ocorrer de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ modos diferentes. Este princípio é chamado por alguns autores de Princípio Fundamental da Contagem.

Esta fase foi desenvolvida em quatro aulas.

Os exercícios trabalhados inicialmente foram:

I.1) “Se lançarmos uma moeda três vezes consecutivas, quais e quantos são os resultados possíveis?”(pc)

I.2) “Se lançarmos ao mesmo tempo 3 moedas iguais uma única vez, quais e quantos são os resultados possíveis?”(pc)

I.3) “Da cidade A até a cidade B pode se fazer a viagem de trem ou de navio. Existem duas companhias ferroviárias e duas de navegação à disposição e em todas há 3 tipos de passagem: 1ª classe, 2ª e econômica. De quantos modos uma pessoa pode fazer sua viagem de A até B?”(am)

I.4) “Com os algarismos 8, 7 e 5, quantos números de 3 algarismos podemos formar:

a) Não podendo repetir algarismos?

b) Podendo haver algarismo repetido?”(el)

Para início, foram planejados dois exercícios que tivessem enunciados parecidos, mas que propiciassem respostas (e procedimentos para obtê-las) diferentes, para que os alunos percebessem que deveriam dedicar especial atenção à leitura dos problemas, aos dados do enunciado, uma vez que toda informação pode ser útil e até decisiva em um problema de Análise Combinatória. Era esperado que o procedimento mais usado fosse a listagem de todos os casos possíveis.

Os dois exercícios seguintes foram escolhidos com a expectativa de que possibilitassem o surgimento de estratégias de resolução diferentes da listagem, esperada nos iniciais. No exercício I.3, era esperado que as respostas seguissem principalmente a estratégia intermediária entre a listagem de todos os casos possíveis e a aplicação direta do Princípio Multiplicativo e no seguinte, o uso de diagrama de árvore e multiplicação.

Os exercícios que se seguiram eram da apostila e foram, nesta ordem:

I.5) Um time de futebol dispõe de 2 jogos de calções, 2 jogos de meias e 3 jogos de camisas. De quantas maneiras os jogadores podem vestir-se para um jogo? (ap)

I.6) À diretoria de uma firma concorrem 3 candidatos à presidência e 5 à vice-presidência. Quantas chapas distintas podem ser formadas? (ap)

I.7) Um grupo é constituído de 3 moças e 2 rapazes. Então, o número de casais possíveis é: a) 6 b) 5 c) 9 d) 3 e) 15.(ap)

I.8) A placa de moto é formada por três letras e quatro dígitos. O número de placas que podem ser formadas com o prefixo ABC é: a) 100 b) 10000 c) 30 d) 110 e) 999 (ap)

Estes exercícios deveriam servir para que os alunos começassem a perceber de modo mais intenso, as possibilidades do uso do P. M., enquanto instrumento mais manuseável que os diagramas de árvore ou mais geral que a estratégia aditiva. Havia também a expectativa de que nestes exercícios, a presença do professor enquanto “auxiliar” fosse menos necessária.

Os exercícios não seguiram necessariamente uma ordem crescente de dificuldades embora o último (I.8) estivesse nesta posição pois esperava-se que os anteriores lhe dessem um “suporte” no aspecto em que seria muito trabalhoso o uso de listagem/contagem de todos os casos possíveis. Este último foi escolhido, inclusive, com o intuito de mostrar e discutir uma falha nas alternativas, uma vez que não existem placas em nosso país com a seqüência 0000, portanto a resposta correta era 9999, que não era apresentada.

Alguns exercícios eram de múltipla escolha. Embora não ache muito interessante este tipo de exercício, já que o aluno pode querer adaptar seu procedimento de modo a chegar a uma resposta sugerida, foi importante que neste primeiro momento, tivéssemos exercícios com esta característica, uma vez que a fase foi de apresentação do tema e de exercícios. Vale ser dito que, quando os alunos resolveram este tipo de exercício, não foram aceitas soluções sem justificativas.

Reflexões relativas à fase 1.

Em relação ao objetivo de fazer os alunos terem um primeiro contato com situações-problema de Análise Combinatória lendo/interpretando os problemas, enquanto primeira experiência, a fase pode ser considerada frutífera, uma vez que os alunos participaram das aulas discutindo e interpretando os enunciados, como no caso das moedas e das placas.

As aulas descritas no Diário revelam que os objetivos específicos dos dois primeiros exercícios em particular (perceber a necessidade de se ler atentamente os exercícios) podem ser considerados alcançados na medida em que os alunos tenderam a considerar o I.2 igual ao I.1: *No segundo exercício, mal tinha terminado de colocar o enunciado e já houve quem falasse: mas é igual!! (referindo-se ao primeiro) Era exatamente isso que eu queria!!* Após as discussões, convenceram-se de suas diferenças.

Quanto aos enunciados, chegou a ser uma surpresa que alguns alunos não soubessem direito o que era jogo de camisas ou de calções, na montagem de uniformes (exercício I.5). Não imaginava que haveria dúvidas... O questionamento a ser feito é até que ponto o professor deve explicar o que o exercício está pedindo. Se o aluno não sabe o que é jogo de camisas ou comissão, por exemplo, pode resolver errado, mas se o professor detalhar o exercício, pode ser que na explicação, venha embutida a resposta do problema. Se explicarmos demais, estaremos respondendo de antemão ao problema. Se o aluno não dominar o contexto, não estaremos verificando se conhece um procedimento adequado para resolvê-lo. Creio que entender o enunciado do exercício faz parte da Análise Combinatória, embora mais importante seja o modo de se resolver os exercícios pois, em situação mais prática, as pessoas podem discutir com colegas e até perguntar àquele que propõe o problema, que tipos de agrupamentos são esperados.

Um outro objetivo da fase era apresentar aos alunos técnicas de contagem. Notou-se que já no terceiro exercício, alguns alunos já tentaram adotar alguma estratégia mais elaborada que as listagens: (...) *comecei perguntando como Karina havia feito. Ela me ditou e eu escrevi na lousa:*

$$2F.3P=6 \quad 6+6=12$$

$$2N.3P=6$$

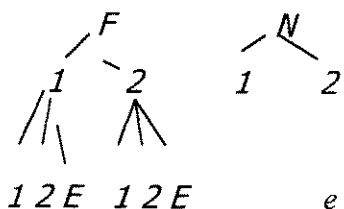
P: – *Wania, como você fez?*

(...)

$$Wania: – 4C.3P=12$$

P: – E você? (para Bruno)

Viagem



e falei : – Bom, já dá para observarmos que vai dar

12.

Nota-se que o professor ao resolver na lousa os exercícios, mostrou/apresentou várias estratégias e o objetivo pode ser considerado alcançado, devendo ser feita uma ressalva quanto ao diagrama de árvore. Esta estratégia deveria ter sido mais explorada, como em exercícios que não tratassem de Arranjos, que viessem a propiciar um diagrama “irregular”. Na proposta, os diagramas apresentados foram regulares em todos os seus “ramos”: não houve nenhum diferente. Também poderia ter sido mais discutida sua impraticabilidade, quando o resultado é grande. Além disso, uma importante justificativa para maior discussão do uso do diagrama é que ele dá uma sustentação visual às idéias empregadas para a resolução do problema, isto pode ser interessante especialmente no caso do P M..

Em relação ao P. M., estratégia que foi apresentada com mais frequência, é difícil dizer se foi entendido já nesta fase ou não. Parece-me que um entendimento definitivo só foi acontecer na fase 3.

Além de uma maior ênfase no diagrama de árvore, questões como a importância do ordenamento dos elementos, poderiam ter sido mais realçadas, visando já à fase 4 onde os alunos deveriam identificar os exercícios que tratavam de arranjos e os que tratavam de combinações.

Ainda em relação às estratégias, o professor poderia ter pedido que os alunos primeiramente “chutassem” um resultado e depois comparasse seus chutes com os reais resultados. Diferenças entre “chutes” e resultados corretos seriam uma justificativa para aprender técnicas eficazes de contagem.

Quanto ao professor, ele poderia ter falado mais sobre a importância de uma leitura criteriosa. Foi possível notar que ficou “devendo” perguntar/pedir aos alunos para

explicarem com suas palavras o que os exercícios solicitavam... é possível notar que apenas no princípio ele faz isso, promovendo discussões com os alunos.

Segunda fase: “Estudo da notação fatorial”.

Para esta fase usou-se pouco mais de uma aula.

Tendo visto e trabalhado os exercícios da fase anterior, neste ponto era esperado que os alunos já tivessem as primeiras percepções de que a multiplicação tem um papel importante no estudo da Análise Combinatória.

Como a notação fatorial poderia ser usada, foi dedicada uma fase para a resolução de exercícios envolvendo exclusivamente sua utilização. O objetivo era possibilitar aos alunos alguma familiaridade com exercícios cujos cálculos poderiam ser representados com o uso desta notação.

Os exercícios desta fase foram:

II.1) “Quantos são os anagrama das palavra GRAU?”(el)

II.2) “Quantos são os números de 5 algarismos que podem ser escritos usando os algarismos 1, 3, 5, 7, 9, sem repetição?”(el)

II.3) “Simplifique: a) $7!/6!$ b) $8!/5!$ c) $n!/(n-1)!$ ” (am)

II.4) “Indique com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas: a) $5! = 5.6!$ b) $5! = 5.4!$ i) (sic) $(n-1)!/n! = 1/n$ j) $n!/0! = n!$ (ap)

II.5) “Determine o valor da expressão a seguir para $n = 10$ e $p = 3$. $n!/p!(n-p)!$ ”(ap)

Além do exercício I.4, da fase anterior, os dois primeiros desta fase foram planejados de modo a ilustrar aplicações do fatorial, de tal forma que os alunos percebessem que existem situações cujas resoluções apresentam uma multiplicação e cujos fatores formam uma seqüência decrescente de números naturais, desde um número n até o número um.

Reflexões relativas à fase 2.

Esta fase teve o objetivo de familiarizar os alunos com o trabalho com fatorial. Mais do que em relação aos seus objetivos, esta fase pode ser questionada quanto à sua permanência.

Sua presença é justificada pelo professor, pois o fatorial poderia ser ainda usado. Pergunta: “Por que não ensinar fatorial quando for sentida a necessidade?” Ficou impossível saber se a fase deu resultado, pois nos exercícios que se seguiram, não era preciso dominar a utilização de tal notação.

O fatorial só apareceu com utilidade relativa na fórmula das Permutações, na fase 4, na qual constituiu, de certa forma, um formalismo, pois as Permutações foram apresentadas como um caso particular de Arranjo, cuja fórmula não envolveu diretamente o fatorial. Em relação à fórmula das Combinações, a presença do símbolo $p!$ no denominador ($C_{n,p} = A_{n,p}/p!$) é um elemento facilitador que simplifica a notação. Na verdade, foi somente neste momento que o fatorial mostrou-se relevante. Voltando à pergunta feita acima: “Se é importante que os alunos conheçam o fatorial, quando ensiná-lo? No fim do curso ou como fiz, no meio dele, mas quase sem reutilizá-lo?”

Uma idéia é apresentá-lo no meio do curso, enquanto símbolo simplificador de uma conta, mas propondo exercícios cuja utilização realmente evite cálculos trabalhosos, e retomá-lo com ênfase quando for o momento de apresentar fórmulas que envolvam a notação.

A fórmula $C_{n,p} = n! / (n-p)! p!$ não foi apresentada nas aulas referentes à pesquisa. Esta fórmula, que envolve mais diretamente cálculos com o fatorial, foi trabalhada em aulas seguintes às registradas, quando o assunto era o número binomial e o binômio de Newton.

Terceira fase: “Levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução”.

As características que determinam o modo de resolução dos problemas foram: ordenação dos elementos, aplicação direta do Princípio Multiplicativo, aplicabilidade do diagrama de árvore. Para a fase, trabalhada num total de três aulas, foi elaborada uma lista de exercícios, com o intuito de contemplar os diferentes temas, de modo que, a partir dela, fosse possível um levantamento das características e na fase seguinte, a classificação dos problemas em Arranjos, Permutações, Combinações.

Os exercícios desta fase são os da lista que segue:

LISTA DE EXERCÍCIOS

III.1) É preciso pintar uma bandeira de 4 faixas horizontais. As cores das faixas devem ser diferentes. Se dispomos de 6 cores diferentes, de quantos modos a bandeira pode ser pintada? (el)

III.2) O professor deve escolher 3 entre 4 alunos para irem em uma excursão. De quantos jeitos o professor pode fazer isto? (el)

III.3) De quantas formas 4 pessoas podem ficar em fila indiana? (am)

III.4) Duas equipes de vôlei vão decidir um campeonato no sistema “melhor de três” (fazem no máximo três jogos, e uma equipe vence assim que conseguir duas vitórias). De quantos modos podemos obter a equipe campeã? (am)

III.5) De um grupo de 4 meninos, sua babá deve fazer uma lista de 3 deles onde o 1º da lista ganhará um vídeo-game, o 2º um autorama e o 3º ganhará um carrinho. Quantas listas diferentes a babá pode fazer? (el)

III.6) Dado o conjunto $A=\{x, y, z\}$, quantos e quais subconjuntos de A , com 2 elementos, podemos formar? (cm)

III.7) Dos anagramas da palavra PERNAMBUCO, quantos começam pela sílaba PER (nesta ordem)? (am)

III.8) Jogamos dois dados iguais simultaneamente e observamos os resultados. Quais e quantas são as somas possíveis dos resultados? (pc)

O momento em que os alunos resolveram a lista, foi o único previsto para que trabalhassem em duplas. Para evitar que algum aluno simplesmente se apropriasse dos procedimentos do colega, sem buscar o próprio procedimento, foi solicitado que cada membro da dupla deveria responder metade da lista; deste modo cada aluno deveria se interessar pelo trabalho do outro. Os exercícios foram distribuídos para que em cada parte, do 1 ao 4 e do 5 ao 8, figurasse um exercício de cada um dos 3 temas: Arranjo, Permutação e Combinação e ainda um que não pudesse ser diretamente considerado como pertencente a um dos temas. Durante a resolução, as duplas tiveram liberdade para interagir com as outras.

Alguns exercícios merecem comentários. No caso do exercício 6 era esperado que os alunos tivessem alguma dificuldade em saber o que é subconjunto que se refere à ordem

dos elementos. O exercício 4 foi escolhido com o intuito de propiciar mais de uma interpretação, sendo que até mesmo o professor não tinha absoluta convicção quanto ao resultado que mais lhe parecia correto.

Os exercícios 2 e 5 tinham, propositadamente, dados numéricos iguais porque serviriam futuramente de base para uma comparação entre Arranjo e Combinação, no caminho de uma fórmula para Combinações.

Somente ao final do trabalho das duplas é que foram explicados e discutidos mais detalhadamente os exercícios na lousa. Foram abordados alternadamente um exercício da primeira metade com um da segunda, o que pareceu ser a forma mais adequada pelo modo como os exercícios foram divididos para as duplas e também porque assim seriam discutidos, a cada vez, dois exercícios com características semelhantes – 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 – deixando mais claro os diferentes modos de resolver.

Reflexões relativas à fase 3.

Quanto à lista elaborada contemplar diferentes temas, o fato de ela propiciar que fossem discutidos exercícios que não eram necessariamente de Arranjo, Permutação e Combinação, como foi o caso dos exercícios III.4 e III.8, indica uma reflexão: a fase 4, como veremos, é dedicada à sistematização de Arranjo, Permutação e Combinação, portanto as últimas aulas serão praticamente exclusivas para estes temas. Apesar disto, o objetivo geral da proposta não era que os alunos soubessem trabalhar apenas com estes temas.

Exercícios que não tratam de Arranjo, Permutação ou Combinação aparecem portanto nas fases 1 e 3. Poderiam ser dadas mais aulas para este tipo de exercício. Entretanto, levando-se em conta o tempo de aula utilizado para o desenvolvimento da proposta, ao menos este tipo de exercício foi abordado. Considero que um curso de Análise Combinatória não deve abordar somente tais temas.

Em relação a levantar características de cada tema, não surgiram dificuldades, embora este levantamento pudesse ter recebido maior ênfase, já com vistas à próxima fase. Na verdade, a fase 3 está muito relacionada com a fase seguinte, aparecendo como preparatória da fase 4.

Assim mesmo, ela foi rica em dúvidas, (...) como no caso de Sérgio que no final da aula me perguntou (quanto ao ex III 2) como vamos saber se é:

ABC

ABD = 4 ou 4.3.2.1 = 24

ACD

BCD

(...)

Ulisses, Nuno, Fabiola e outros perguntaram e eu respondi (...) que uma vez contado $\{x,y\}$ não devíamos por $\{y,x\}$.

Gabriel e Daniela/ Elza perguntaram: – O e III 7 é assim... Per e depois 7.6...?

Os alunos pareceram compreender, de maneira geral, a importância da ordenação dos elementos nos agrupamentos e a necessidade de saber se, nos exercícios que estamos tratando, há ou não repetição de elementos.

Nos momentos de interação com os alunos foi possível notar uma lacuna na fase 1: não foi trabalhado um caso do tipo 5. 4. 3. Somente na lista da fase 3 é que apareceram os primeiros casos deste tipo. Os alunos se preocuparam com o fato do fatorial “não se esgotar”, ou seja da seqüência decrescente de fatores não parar no 1:

Bruna/Fabiola: – No ex III.5 vai ficar um de fora...não tem problema? Como fazer...? É ABC?

(...)

Nelson tinha feito isto no ex5^o: $\frac{\quad}{4 \quad 4 \quad 4}$

Com ele tive discussões parecidas com as que tive com Bruna e Felicia, com exemplos e mostrando que para o 1^o prêmio, temos 4 opções, para o 2^o, 3 opções e que não tem problema um ficar de fora.

Alguns alunos perguntaram, referindo-se ao ex III 1:– Pode ser 6 5 4 3 sem chegar no final?

(...)

Percebi um incômodo em por exemplo, Nelson, Bruna e Felicia, Ulisses, Nuno, e Sergio com relação ao fato de não esgotarmos o fatorial por inteiro na resolução e “ficar gente de fora” nos exemplos de possíveis respostas.

O professor tenta aproveitar ao máximo os momentos de interação com os alunos que esta fase propiciou, valorizando suas dúvidas.

No momento de resolver os exercícios em lousa, sua posição é de certa forma facilitada, pois tinha uma boa noção dos procedimentos que os alunos haviam utilizado. Na sua própria solução, o professor tenta levar em conta as soluções que haviam sido elaboradas por alunos:

P.: – Vou mostrar um modo que um colega fez (Ulisses e Nelson)

(...)

P.: – Fúlvio, é assim?(já tinha visto o dele, pareceu ser o único na sala)

Isto foi possível porque, quando os alunos resolviam os exercícios, o professor circulava pela sala, discutindo com eles. Além disso, pôde recolher e observar suas folhas de respostas.

O professor, que havia anteriormente se lamentado quanto ao fato de os alunos não deixarem os erros em seus cadernos, desta vez não sente a necessidade de analisar os procedimentos escritos dos alunos, tamanha a interação, as discussões de que participou.

Resolver exercícios em lousa fez com que o professor se centrasse em si mesmo e na sua lousa. Devemos considerar que em nossa prática, dificilmente escapamos de situações que pedem comportamentos como este, mesmo que o intuito seja o de valorizar os procedimentos dos alunos e não os do professor.

Quarta fase: “Relação das características (modo de resolver) com os temas em si e ‘formalização’ dos conceitos/temas”.

Era esperado que até aqui, os alunos já estivessem familiarizados com os problemas de contagem e soubessem diferenciá-los.

Esta fase, que se desenvolveu em oito aulas, foi planejada com o intuito de proporcionar que os alunos discutissem as relações entre Arranjo e Permutação, uma vez

que a Permutação pode ser vista como um Arranjo de n elementos, tomados n a n , e entre Arranjo e Combinação, considerando-se que estes conceitos diferem por considerar-se ou não a ordenação dos elementos. Também permitiu que os alunos trabalhassem com a formalização dos diversos conceitos e com a generalização possibilitada pelas fórmulas.

As primeiras atividades de cada tema foram elaboradas de modo que favorecessem a construção das fórmulas. Mais que os alunos formalizarem ou sistematizarem aquilo que vinham trabalhando, o objetivo era que, além de dominar as fórmulas, soubessem aplicá-las nos momentos mais adequados, ou seja, em que estratégias como listagem ou diagrama de árvore são insuficientes, pois o número de possibilidades é “grande”.

O primeiro tema trabalhado nesta fase foi Arranjo. Foi colocada na lousa uma seqüência de exercícios, na qual gradativamente, os elementos envolvidos se tornaram gerais:

IV.1) “De quantos modos 12 pilotos podem ser classificados do 1º ao 3º lugar numa corrida?” (el)

Os 3 momentos seguintes trataram de generalizar o número de pilotos:

IV.2) “Idem ao anterior, porém até o 5º colocado”.(el)

IV.3) “Idem ao 1º , até o 3º , com n pilotos”.(el)

Depois foi dado o exercício:

IV.4) “Idem ao 3º , até o 5º colocado”.(el)

A seguir, tivemos uma generalização “total”:

IV.5) “De quantos modos n pilotos podem ser classificados até o p º lugar numa corrida?”(el)

É de se notar que o exercício que dá origem ao processo não apresentava novidades, pois era do mesmo tipo que os alunos estavam resolvendo, sem ter conhecimento da fórmula.

A este exercício seguiu-se uma apresentação do conceito de Arranjo e exercícios da apostila:

IV.6) “Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 1 a 9 ?” (ap)

IV.7) “Quantas são as maneiras possíveis de se estabelecer o grupo dos 3 primeiros colocados de um certo páreo, com 10 competidores?”(ap)

IV.8) “Calcule o número de arranjos de 10 elementos: a) tomados 2 a 2 b) tomados 3 a 3”.(ap)

A seguir trabalhamos com Permutação. Primeiramente foram colocados na lousa exemplos/exercícios do tipo:

IV.9) “Quantos são os arranjos de 5 elementos tomados 5 a 5?”(el)

IV.10) “Quantos são os arranjos de n elementos tomados n a n ?”(el)

Após a discussão, houve a apresentação do conceito de Permutação e, a seguir, foram trabalhados os exercícios:

IV.11) “Quantos são os anagramas da palavra MÉDICO?”(ap)

IV.12) “Calcule o número de anagramas da palavra VESTIBULAR que começam com V e terminam com L.”(ap)

IV.13) “Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Calcule o número de possibilidades em que essas pessoas podem se acomodar no automóvel, se entre as pessoas: a) somente uma sabe dirigir; b) duas sabem dirigir; c) todas sabem dirigir.”(ap)

O último tema foi Combinação. O objetivo era chegar à fórmula que relaciona Combinação com os conceitos já conhecidos: Arranjo e Permutação. Para isso foram comparados os exercícios III.2 e III.5 que estavam na lista da fase 3, com o propósito de comparar Arranjo e Combinação, uma vez que tinham dados numéricos iguais e diferiam por considerar ou não a importância da ordem dos elementos envolvidos.

Após a comparação entre os exercícios e a “construção” da fórmula, os seguintes exercícios foram apresentados:

IV.14) “Dado um conjunto com 6 elementos, quantas são as combinações 3 a 3?”(ap)

IV.15) “Dispondo-se de 5 pessoas, quantas comissões de 3 membros podemos formar?”(ap)

IV.16) “Calcule o número de combinações de 10 elementos: a) tomadas 2 a 2; b) tomadas 3 a 3.”(ap)

Após estes primeiros exercícios, foi o momento de trabalharmos outros exercícios envolvendo Combinação, simultaneamente com exercícios de Arranjo.

IV.17) “Numa classe de 10 alunos, de quantas maneiras diferentes podemos distribuir um 1º, um 2º e um 3º prêmios?”(ap)

IV.18) “A biblioteca do seu colégio empresta no máximo 3 livros por pessoa. Um estudante deve escolher, entre 10 livros de seu interesse, 3 para serem retirados. De quantos modos poderá fazê-lo?”(ap)

IV.19) “Determine quantos números de 3 algarismos distintos podem ser escritos no sistema de numeração decimal, considerando: a) somente os algarismos ímpares b) somente os algarismos pares”(ap)

IV.20) “Com os divisores naturais do número 12, quantos produtos de 2 fatores distintos podemos formar?”(ap)

Os alunos deveriam redobrar sua atenção quanto ao aspecto de os elementos deverem estar ordenados ou não. Neste caso, o objetivo foi verificar se eles estavam atentos e sabiam diferenciar os exercícios que se referiam a cada um dos temas.

Os exercícios utilizados neste caso eram os que constavam de uma lição da apostila já que, pela maneira como estavam apresentados, os alunos não podiam saber antecipadamente a que tema se referiam.

Reflexões relativas à fase 4.

Antes de tratar dos objetivos, uma pergunta básica é saber se os alunos estavam familiarizados com os exercícios a ponto de poder diferenciá-los. Creio que a resposta é afirmativa já que àquela altura, quando os exercícios eram apresentados, os alunos tomavam a iniciativa de resolvê-los, arriscando-se sem receio de errar, característica das atitudes perante exercícios de Matemática. Além disso, todo o trabalho realizado anteriormente serviu para que os alunos compreendessem que, nos enunciados dos exercícios, aparecem as características determinantes para suas resoluções.

No que diz respeito ao objetivo de discutir a relação entre Arranjo e Permutação, isto foi feito no momento da definição de Permutação e pareceu bem sucedida, uma vez que os alunos compreenderam o fato desta ser um caso particular de Arranjo.

Sobre a relação entre Arranjo e Combinação, além da comparação entre os exercícios III.2 e III.5 da lista, houve a necessidade de apresentar um outro exemplo. Poderia ter sido dedicado mais tempo a esta relação, que é importante para se construir a fórmula das combinações. Outros exemplos poderiam ter sido preparados e apresentados,

levando-se em conta que era previsto que houvesse algumas dificuldades. Tais considerações chamam a atenção para a esta complexa relação e, sendo assim, a discussão é retomada no capítulo 6.

Foi importante comparar cada fórmula apresentada a um exercício resolvido em lousa. Deste modo, as fórmulas assumiram maior significado para os alunos.

Quando os alunos resolviam os exercícios relativos a Arranjos, pude notar que *Bruno teve dificuldades em saber que arranjo era (“quantos quanto a quanto”) e eu disse para ele resolver como ele faria, independente de ser Arranjo ou não. Aproveitei e sugeri isto para sala, aproveitando o que Ulisses havia dito, que fizessem como se nunca tivessem ouvido falar de Arranjo.* De um modo geral, estes exercícios não representaram empecilhos uma vez que os alunos acabaram percebendo que já haviam resolvido outros daquele tipo, independente de tê-los classificado como Arranjo.

Os exercícios escolhidos para contemplar o tema Permutações foram resolvidos sem dificuldades, apesar de que somente um deles (IV.11) era resolvido somente com $P_n = n!$; os outros não eram de aplicação direta da fórmula.

Em relação aos exercícios acerca de Combinação, uma crítica que pode ser feita ao desenvolvimento da proposta: em todos os exercícios iniciais os elementos eram tomados 3 a 3. Isto causou certa confusão, como no caso de uma aluna que chegou a perguntar se era “sempre 3” no denominador da fórmula $C_{n,p} = A_{n,p}/p!$.

Quanto ao professor, as considerações a serem feitas estão envolvidas na relação entre Arranjo e Combinação e uma discussão mais aprofundada é encontrada no capítulo 6.

Finalmente, deve-se dizer que apenas uma aula foi dedicada para trabalhar os exercícios de Arranjo e Combinação, aparecendo “mesclado”. Foi pouco tempo. Esta é uma parte importante e não foi oferecido aos alunos o tempo adequado para refletir sobre as diferenças entre os casos, bem como para os momentos de aplicar as fórmulas.

CONSIDERAÇÕES ACERCA DO EXERCÍCIO I.8

O desenvolvimento da proposta e seu desenrolar em sala de aula foram descritos no Diário. A leitura do Diário revelou elementos para o levantamento de categorias, evidenciou as reflexões que o professor fez no correr das aulas e pôde mostrar alguns episódios relevantes/marcantes no processo todo.

Um dos episódios selecionados para análise é relativo ao último exercício da primeira fase da proposta. Este episódio compreende o momento do curso no qual o exercício foi proposto, bem como outras vezes em que o mesmo foi “evocado” por alunos ou pelo professor. Antes das primeiras considerações, devemos lembrar seu enunciado (I.8): A placa de moto é formada por três letras e quatro dígitos. O número de placas que podem ser formadas com o prefixo ABC é: a) 100 b) 10000 c) 30 d) 110 e) 999.

As razões para a seleção deste episódio são.

- a escolha do momento da inclusão do exercício na proposta pois a ordem de grandeza do parâmetros era tal que indicaria a insuficiência de estratégias de contagem como listagem e diagrama de árvore. Além disso, o exercício poderia proporcionar discussões acerca do enunciado, já que entre suas alternativas de resposta não havia a “correta da prática”. (embora a aplicação da fórmula leve à alternativa b));

- o desenvolvimento do exercício em aula, quando é considerado como os alunos o abordaram;

- os momentos de discussão após o exercício ter sido apresentado, uma vez que ele voltou a ser comentado em aulas seguintes e sua temática, incluída nas provas.

Inclusão do exercício na proposta

O primeiro aspecto a ser considerado neste episódio é a inclusão do exercício I.8 na proposta, durante o planejamento. Este exercício constava do material apostilado usado pelos alunos com quem trabalhei. Ainda que, nem sempre, os exercícios fossem colocados em ordem crescente de dificuldade, esse exercício foi escolhido para ser o último da primeira fase, pois era esperado que os anteriores lhe dessem um “suporte”, porque seria quase impossível o uso de listagem de todos os casos ou a elaboração de um diagrama de árvore, completo. Podemos questionar: “Se ele fosse um dos primeiros, será que os alunos não teriam a mesma capacidade de resolver?” É provável que sim, contando de 1 a 9999 e, incluindo o “0000”, contabilizariam 10000, o que é confirmado, quando observamos que o professor registrou que *“Teve quem pensou ...de 0001 até 9999 são 9999, não tem esta resposta, então é 10000 porque entra o 0000”* ou ainda quando levamos em conta o que ele ouviu de Fabiola: *“...ah eu tentei daquele jeito (0001 e ir contando) mas eu parei no 4999 nem sei por quê. (embora ela demonstrou que tinha aceitado e compreendido que era 10000) ”*. Entretanto, uma vez que a fase 1 deveria ser aquela de apresentação das diferentes estratégias de contagem, a presença desta atividade provavelmente se justificaria também para mostrar a insuficiência da listagem ou do diagrama de árvore.

Neste aspecto, podemos fazer outro questionamento: “As primeiros exercícios deram realmente o suporte necessário?” Em que os exercícios anteriores auxiliaram? Aqueles alunos que resolveram o exercício, fizeram uso do Princípio Multiplicativo, o que provavelmente indica um influência dos exercícios anteriores, pois fora no transcórre daquela fase, que o professor o havia apresentado. Esta última afirmação vem ao encontro de um dos propósitos do exercício: por se tratar do “final da fase” e já que sua resposta era “grande”, esperava-se que o exercício mostrasse a necessidade de um instrumento de contagem mais geral, como o Princípio Multiplicativo, portanto neste aspecto, seu propósito foi atingido.

Outro motivo de sua escolha foi em relação à alternativa que responde ao exercício. Apesar da aplicação correta da fórmula levar a uma resposta adequada (10000) para a questão do exercício (o número de placas que podem ser formadas com o prefixo ABC), poderia ser discutida uma possível falha do exercício, já que neste caso, a resposta

considerada correta pela aplicação de uma fórmula, não estaria correspondendo à resposta correta na prática; na verdade, por algum motivo a placa 0000 não é comercializada e assim na prática temos 9999 placas diferentes. Isto deveria ser aproveitado pelo professor no sentido de apresentar-se aos alunos como um ser que também tem suas dúvidas, suas incertezas e ainda mostrar mais uma vez, a necessidade de os alunos lerem e entenderem os problemas colocados, mostrando que as dúvidas, poderiam fazer parte do processo ensino/aprendizagem.

É de se notar também que o professor pôde fazer a crítica à inexistência da alternativa 9999, porque conhecia o contexto do enunciado do problema. Este é um dilema muitas vezes vivido pelo professor que leciona Análise Combinatória: conhece ou não o contexto tratado no problema o suficiente, para ter certeza da resposta e do procedimento para obtê-la? Pode ser questionado, se isto se torna um critério para o professor escolher o que vai propor aos alunos. Se o professor não estivesse a par da formação (na prática) de placas, teria notado a falta da alternativa 9999? Provavelmente não. Só quem já fez certas observações sobre as placas de carro estaria atento à falta de uma alternativa mais adequada; basta ver que existem alunos que não se convencem, como revela um diálogo na aula seguinte à apresentação do exercício:

Classe: – E o 0000?

P.: – Bom, o exercício considera, embora a gente saiba que na realidade esta placa não existe.

Nuno: – Existe sim.

P. e alunos: – Não, esta placa não é comercializada.

Neste caso, se eu não conhecesse o contexto, um aluno poderia responder 9999, e se não ouvisse sua justificativa, eu consideraria errado... Será então que não cometi tal equívoco em algum outro exercício? Espero não ter feito isto. Em relação a esta última questão, cabe a observação de que o professor aponta/discute a possível falha nas alternativas, mas acaba não explorando/alertando com os alunos a possibilidade de outros exercícios poderem não ser claros quanto ao enunciado.

Esta dificuldade em relação aos contextos é maior até para os alunos que para os professores; afinal é de se esperar que os alunos não tenham muita familiaridade com certos termos.

Exemplificando: não é claro para os alunos, ao menos em um primeiro momento, que em alguns tipos de grupos ou comissões, a ordem dos elementos não é importante. Podemos notar quantas discussões acerca de enunciados aconteceram na mesma fase do exercício em questão (fase 1): *“Alguns alunos não sabiam direito o que significava jogo de camisetas e calções e meias (meninas, em geral)”...” teve quem perguntou: Pode ser tipo assim... camisetas verde, amarelo e azul”* ou na fase 3, em relação ao modo de representar conjuntos: *“Creio que a maior parte que acertou tinha me perguntado e tirou a dúvida sobre se $\{x, y\}$ deveria ser considerado como $\{y, x\}$ ”...”Durante a explicação, Flávio me perguntou: Professor, isto ($\{x, x\}$) também não vale em matemática?”*

Além disso, nem sempre o enunciado do exercício deixa claros certos aspectos como a importância da ordem ou a possibilidade de haver repetições nos elementos a serem considerados. Três ordens de dificuldades podem ser destacadas.

Uma dificuldade ocorre ao aluno quando ele tem uma dúvida acerca de um termo matemático (que em si não apresenta possibilidade de mais de uma interpretação), como mostra, por exemplo, a dúvida sobre conjuntos, relatada anteriormente. Neste caso, há os alunos que recordam o termo com um breve resumo ou uma dica e também os que ainda assim, não se lembram ou nunca depararam com o termo.

Uma segunda possibilidade de dúvida é acerca de um termo não matemático, não familiar para certos alunos. Mesmo que o termo não seja dúbio, não gere mais de um sentido, o aluno pode não ter a devida noção do que aquele termo significa. Isto acontece com termos que não pertencem ao seu universo diário. Normalmente são termos de que o aluno já ouviu falar, mas não sabe exatamente o que querem dizer. Observando um exemplo anteriormente mencionado, podemos notar que as maiores dúvidas sobre a composição de uniformes esportivos, ocorreram entre as meninas. Cabe aqui uma observação: pode ocorrer que o termo seja desconhecido de todos, como o termo “anagrama”, que normalmente é novidade. Este último caso é mais simples de ser resolvido pelo professor, pois todos os alunos sentem praticamente a mesma necessidade de explicação.

Finalmente, um outro caso é aquele em que o termo é relativamente familiar para todos, mas o termo em si é dúbio ou pode ser interpretado de mais de uma maneira, como é

o caso de “comissão”, termo muito usado em problemas de Análise Combinatória. Dependendo da situação, a ordem dos elementos de uma comissão é relevante ou não.

A posição do professor nestes casos é complicada, pois simplesmente informar ao aluno que um determinado termo subentende uma condição de importância de ordem ou repetição, faz com que o problema praticamente deixe de existir e os alunos devam somente “manipular” corretamente números e fórmulas. Por outro lado, a ausência de informação pode fazer com que o exercício não se preste à aprendizagem, se o aluno, por desconhecimento de um dado termo, não consegue nem dar início a alguma tentativa de resolução.

O exercício I.8 ainda foi trazido à tona no que diz respeito aos contextos ou enunciados dos problemas (devemos lembrar que desde o princípio o exercício teve esta finalidade, entre outras) no momento da discussão acerca de uma dúvida quanto à resposta de um exercício da fase 3:

P: – Lembram o exercício das placas? Na verdade não eram 10000 pois o 0000 não entra, aí por exemplo eu até critiquei a apostila.

Nuno: – Não tem mesmo o 0000? Acho que tem.

P e Cesar: – Não tem não.

Nuno: – Por quê?

P. e Cesar: – Não sei , inclusive acho que podia ter.

Por conta do que foi discutido até aqui, nas provas (ver Anexo 1) procurei tratar de contextos que não gerassem dúvidas para não prejudicar alguém que não os conhecesse o suficiente. Desejava que os erros ou dificuldades não se dessem tanto à falta de compreensão do que era pedido/esperado. É claro que não dá para desvincular uma coisa da outra, mas a idéia principal era, uma vez que o aluno tivesse compreendido o que era pedido/esperado, analisasse de que forma trabalharia para responder às questões.

Considerando que o exercício I.8 e seu desenrolar chamou a atenção dos alunos e do professor, o contexto de placas de automóveis foi utilizado em cada prova que os alunos realizaram.

A primeira prova, que foi feita por 31 alunos, realizou-se na aula 9, portanto seis aulas depois que o exercício I.8 havia sido apresentado. O quinto exercício desta prova era: “5) Um país usava o seguinte modo para fazer suas placas de veículos: três caracteres,

sendo os dois primeiros, vogais; e o último, um algarismo. Como a frota cresceu, foram bolados novos tipos de placas: novamente três posições, sendo a primeira ocupada por vogal, a segunda por uma letra qualquer (inclusive K, W, Y e vogais) e a última posição por um algarismo. Pergunta: quantas placas a mais foi possível conseguir usando o novo tipo de placa?”. Doze alunos acertaram o exercício 5) usando o P. M., ou seja, fizeram algo como: $5.5.10=250$; $5.26.10=1300$; $1300-250=1050$ placas a mais. Outros 12 alunos erraram o exercício, apesar de usarem também o P. M., sendo que 5 deles não foram até o fim do problema, apresentando como resposta 1300, ou seja, o número de placas do segundo tipo; os outros erraram porque consideraram as vogais como sendo 4. A aplicação do P. M. foi, em geral, correta e visto que 24 alunos optaram por utilizá-lo, parece que os alunos tiveram a devida noção de que outras estratégias seriam impraticáveis pois a resposta era um número muito elevado. Quanto aos outros sete estudantes que erraram, houve uma aluna que esboçou uma listagem de difícil compreensão e apresentou o número 40 como resposta enquanto seis deixaram a questão em branco.

A segunda prova foi realizada na última das 18 aulas, ou seja, bastante tempo depois da maioria das discussões acerca da temática do exercício I:8. Os alunos já haviam tido um contato formal com Arranjos, Permutações e Combinações. O quarto exercício era o seguinte: “4) Houve um atropelamento e o motorista fugiu. Ouvidas as testemunhas, chegou-se às seguintes conclusões comuns:

A parte numérica consta de 4 algarismos diferentes e os dois últimos algarismos são zero e seis

A placa tem duas letras e a primeira é uma vogal enquanto a segunda é uma consoante.

Quantas são as chapas suspeitas?”

O P. M. foi utilizado por 26 dos 30 alunos que realizaram a prova, sendo que os restantes deixaram o exercício em branco. Como no caso da prova anterior, o modo de aplicar esta estratégia foi correto, o que indica uma boa compreensão. Entretanto, o número de alunos que fizeram algo do tipo $5.21.8.7.1.1=5880$ e portanto deram respostas certas, foi relativamente baixo (9). Desta vez os erros ocorreram em sua maior parte (10 alunos) por causa de interpretações erradas das restrições que eram impostas, como é o caso de alunos que fizeram $5.21.10.10.1.1$ ou $5.21.9.8.1.1$, ou seja, não consideraram o fato dos algarismos

serem diferentes ou não levaram em conta que dois algarismos (não um!!) já eram conhecidos.

Dada a natureza das provas, suas contribuições para a análise deste episódio são limitadas, pois os alunos não foram entrevistados para que fosse possível maior compreensão de como utilizaram as discussões acerca do exercício I.8 para resolver os problemas das provas, referentes ao contexto de placas de automóveis. Outro aspecto a ser notado é que os exercícios das provas não foram simplesmente repetições do exercício tratado neste episódio. Assim, as possibilidades de análise recaíram sobre a aplicação do Princípio Multiplicativo. Lembremos que o exercício I.8 era o último de uma fase que visava, entre outros objetivos, à apresentação desta estratégia de contagem.

Desenvolvimento em sala de aula

O desenvolvimento do exercício possibilitou ao professor questionar os procedimentos dos alunos, bem como o dele próprio ao propor o exercício e ao apresentar o Princípio Multiplicativo.

Logo a seguir à proposição do exercício, o professor nota que uma certa parcela dos alunos sequer dá início a alguma tentativa de resolvê-lo: “O ex7³ (I.8) praticamente não apresentou meio termo: ou o aluno fez ou não fez.” Dentre os exercícios desta fase, este foi aquele em que os alunos apresentaram maior dificuldade. Por quê? O “salto” foi grande demais? Foi notado que dentre os quatro primeiros exercícios, os alunos manifestaram maiores dificuldades ao resolverem o item b) do exercício I.4: “Com os algarismos 8, 7 e 5, quantos números de 3 algarismos podemos formar: a) Não podendo repetir algarismos? b) Podendo haver algarismo repetido?”. A resposta, 27, era mais de duas vezes maior que 12, o maior número que havia expressado uma resposta até aquele momento. A resposta 10000 era bem maior que qualquer outra com que os alunos tivessem tido contato. Este fato parece ter uma certa influência, ainda mais se lembrarmos os sujeitos observados por Fischbein (1970): em um primeiro momento, quanto maior o número de resultados possíveis, maior a tendência de que este número fosse subestimado. Entretanto, em seu trabalho com Grossman (1997), estimativas feitas para Arranjos com repetição se mostraram próximas dos resultados certos. Além do mais, se levarmos em conta a já discutida e provável capacidade dos alunos de resolver o exercício, mesmo que ele fosse um dos primeiros apresentados, o fato de ele ser resolvido por menos alunos que o esperado, indica que o problema não foi o “salto”; na verdade parece que os alunos sentiram necessidade de utilizar aquilo que haviam aprendido, ou seja, acharam que deviam de algum modo aplicar o P. M..

Supor que o conteúdo apresentado deve ser aplicado imediatamente, após seu estudo, acontece freqüentemente em sala de aula. Quando é apresentado algum tema novo, os alunos supõem que o conhecimento recém adquirido deva ser de alguma maneira aplicado nas atividades que se seguirem. Nas aulas de Matemática, muitas vezes, esta suposição se confirma, pois muitos professores deixam subentendido que esperam que seus

³ O exercício I.8 foi inicialmente designado por “exercício7”.

alunos utilizem apenas os temas que foram recém-abordados. Isto talvez explique o fato de os alunos, ao tentarem adaptar suas resoluções para incluir conceitos ou estratégias recém-adquiridas, apresentem soluções erradas, quando não absurdas. Em relação às aulas registradas, podemos perceber este fato também por ocasião do andamento da fase 3. Os exercícios desta fase foram propostos logo após a apresentação da notação de fatorial e foi possível notar que alguns queriam aplicar o fatorial nos exercícios, sem se aterem à sua conveniência. Isto é retratado, por exemplo, no seguinte fragmento do Diário: *“Percebi um incomodo em por exemplo, Nelson, Bruna e Felicia, Ulisses, Nuno, e Sergio com relação ao fato de não esgotarmos o fatorial por inteiro na resolução e “ficar gente de fora” nos exemplos de possíveis respostas. Creio que isto está relacionado entre si e mais ainda à aula anterior (ou... à idéia da necessidade de usar a aula anterior)”*

No caso do exercício do episódio selecionado, este fato parece que é acentuado pelo professor já que, ao apresentar e discutir o exercício, enfatiza o P. M., e em nenhum momento alerta sobre as vantagens deste procedimento; sequer cita qualquer um dos outros. Esta postura do professor é contraditória em relação a um dos critérios de escolha desta atividade, que foi justamente o de mostrar a insuficiência de outras técnicas que não o P. M., quando o número de resultados possíveis é alto.

Provavelmente, por ter sido apresentado no final de aula, os alunos se saíram da sala e não manifestaram maiores dúvidas, embora uma aluna tenha conversado com o professor sobre como havia pensado:

“No intervalo, Fabíola disse: – Ah eu tentei daquele jeito (0001 e ir contando) mas eu parei no 4999 nem sei por que. (embora ela demonstrou que tinha aceito e compreendido que era 10000)

Falei: – é olha podemos ter 0001, 0002,4999 mas também podemos ter 8735 por exemplo.

Fabíola: – É, é sim.”

Discussões após a apresentação do exercício

Se no final da aula em que o exercício foi apresentado os alunos praticamente não se manifestaram, logo no início da aula seguinte, houve um mal-estar. Alguns alunos pediram uma nova explicação. Foi impossível saber se de uma aula para outra, eles conversaram entre si ou notaram individualmente que algumas dúvidas haviam ficado, mas o fato é que uma parte da turma queria maiores explicações.

“Ia começar a aula quando Zélia me pediu que explicasse de novo o ex7 (I.8) da aula anterior.

Dei uma perguntada geral e vi que uma parte da classe queria também a tal explicação embora alguns dissessem ah, não!!

A maioria pediu uma “explicadinha rápida”!!”

O professor entretanto não repete simplesmente o exercício, ele o transforma, o reelabora, com o intuito de estimular aqueles que não tinham dúvidas, o que é uma atitude a ser elogiada. Podemos questionar por que o professor não fez o mesmo exercício, mas com mais calma, e com alguma estratégia diferente. A verdade é que ele continua insistindo no uso do P. M.

O professor havia colocado uma restrição, ainda que de passagem, na aula anterior, no momento de discussão do exercício, quando perguntou o que aconteceria se fossem pedidas apenas placas pares:

“P.: – E se eu quisesse que a chapa tivesse final par? ABC _____

10 10 10 é 10 aqui?”

Classe: – 5

P.: – Isso, pode ser 0, 2, 4, 6, 8, ou seja, 5 opções....,”

Neste outro momento, ele propõe um exercício alternativo, sem a sigla ABC estar obrigatoriamente na placa. Nesta mudança, o professor de novo atua no sentido de retirar a restrição e demonstra em momentos seguintes, uma preocupação com este aspecto. Uma questão que pode ser posta é que outros tipos de mudança poderiam ser eficazes? Podemos pensar que o professor poderia ter simplesmente contado: 1, 2, 3, ..., 9999. Outra idéia seria pedir que os alunos mesmos explicassem o exercício.

Após esta nova explicação, um aluno (Nuno) faz uma “ponte” com jogos como a telesena. O professor valoriza em parte as colocações do aluno, proporcionando uma discussão, que alerta sobre a importância de levar em conta ou não, a ordenação dos elementos, já que na telesena não importa a ordem dos números, enquanto que nas placas, a ordem dos algarismos é importante. Entretanto, o professor não pergunta o resultado que aquele aluno encontrou, inclusive pressupondo que estivesse errado. O professor agiu desta forma, pois conhecia o aluno e sabia que ele costumava dar palpites não fundamentados em aula. Além disso, o aluno não se mostrou confiante e disposto a defender o resultado e o comentário foi feito em um momento no qual não havia ligação direta com o que estava sendo discutido. Ainda assim, o professor poderia ter perguntado o procedimento do aluno para obter o resultado e aí sim, falar da questão da ordenação; deste modo a discussão, com o alerta feito, seria melhor valorizada.

No meio desta discussão, o professor faz uso do que estava escrito na lousa e volta-se à atividade, propondo novas variantes quanto à montagem de placas. Após a apresentação das variantes, o professor se dirige novamente para Nuno e o alerta sobre a importância da ordem, retomando os dois primeiros exercícios da fase I.

Vale notar que o professor reflete acerca do andamento da aula e das discussões em aula (*achei boa esta discussão*) e no momento em que escreve sobre ela (*A coisa tomou outro rumo. Um bom rumo, acho...*). É quando reflete de imediato, no momento em que a aula se desenvolve, que o professor opta pela continuidade do processo que propõe variantes do exercício.

As variantes apresentadas podem ser consideradas “complicadoras” pois conduzem a números maiores e a contextos práticos inexistentes. Num primeiro momento, o professor reflete apenas sobre a mudança, sobre o fato de ter feito variações do exercício na explicação, considerando-a como positiva. A seguir, questiona o tipo de mudança: deveria ter “complicado” ou “simplificado”?

Este último questionamento se dá com base na discussão que o professor provoca sobre um outro exercício ((III.5) De um grupo de 4 meninos, sua babá deve fazer uma lista de 3 deles onde o 1º da lista ganhará um vídeo-game, o 2º um autorama e o 3º ganhará um carrinho. Quantas listas diferentes a babá pode fazer?). Ele propôs uma variante para o exercício, desta vez com números menores e contexto mais próximo de uma situação vivida

no “dia-a dia” dos alunos, uma situação de sala de aula, citando como exemplo seus pertences⁴:

Karina e Tais: – Tá certo? $4m \cdot 3p = 12$

P.: – Não, não é bem isso, entendo o que vocês acham mais não é bem isso. Olha, vamos supor o seguinte: eu tenho dois presentes p/ dar a vocês duas minha mala e meu jaleco⁵ (eu uso para dar aula) quantas são as chances...

Tais: – Jaleco para mim mala para ela e mala para mim, jaleco para ela

P.: – Então são duas.

Tais e Karina: – Sim, duas.

P.: – E a idéia foi a mesma do exercício, não?

Tais e Karina: – Sim

Os registros sobre esta aula e sua atitude frente a tal exercício revelam reflexões do professor indagando se seus procedimentos para explicar tinham sido esclarecedores. Faz questões do tipo: “Complicar ou simplificar com a introdução da nova variante? Restringir mais ou menos?”

Comentário: Aqui e agora que estou escrevendo penso que devia ter feito isto antes. Estranho como não fiz isto antes: “simplificar” o problema, colocar a mesma idéia, o mesmo problema com números pequenos, de fácil imaginação e listagem até.

Estranho por que acho isto uma boa idéia, boa artimanha para resolver problemas e não tinha sugerido isto antes, para ninguém, que mancada!

Esta é uma boa tática, acho, para ajudá-los a entender certos problemas.

Ontem achei que foi uma boa idéia mudar o problema das placas, complicando-o!

Ainda acho que foi uma boa mas poderia ter... simplificado-o!

Naquele momento, o professor repensa a estratégia usada no exercício, envolvendo placas e acha que seria melhor ter simplificado ao invés de complicar.

Quando um problema não é logo entendido, cabe ao professor uma missão difícil. Ele tem de auxiliar os alunos de forma que possa fazer com que resolvam o problema, o que só é possível havendo compreensão. Este auxílio tem de ser de modo tal que o professor não detalhe demais o problema, ou seja, que sua nova explicação não se

⁴ Os pertences tomados como exemplo eram considerados pelos alunos como “marca registrada” do professor.

⁵ O termo jaleco foi usado pois era assim que uma das alunas envolvidas naquela discussão, a Tais, o designava.

transforme na apresentação da solução. Uma alternativa é lançar um problema parecido, de tal modo que sua resolução auxilie na compreensão do primeiro. É preciso que o novo problema se identifique com o original de modo que ajude a clareá-lo.

Para se formular um novo problema, o professor pode:

Alterar as restrições do problema original. Isto deve visar a uma melhor compreensão do problema, independentemente de os parâmetros se tonarem maiores ou menores. Alterar as restrições não significa necessariamente redução da ordem de grandeza dos parâmetros, embora tal redução resulte muitas vezes num problema de resolução mais fácil, através de uma estratégia simplificada que leve a uma estratégia geral, servindo ao problema original, com parâmetros maiores.

Alterar o contexto do problema original. Consiste em propor um problema análogo cujos entes matemáticos sejam os mesmos, mas cujo contexto seja mais familiar, de modo a ser melhor compreendido. Deste modo o aluno poderá se dar conta de que uma mesma atividade pode ser encontrada em outro contexto. Barth (1993) indica que um novo contexto não implica uma melhor compreensão por parte de todos os alunos; o contexto será mais familiar para cada um de acordo com a própria história de vida, isto é, quanto maior for o número de encontros que o aluno teve com um determinado contexto, melhor será seu entendimento. Isto significa que quando estamos trabalhado com um único aluno ou com um grupo pequeno, é mais fácil encontrar um contexto conhecido e/ou estimulante para todos; numa situação de sala de aula, o professor deve estar consciente de que é praticamente impossível encontrar-se um contexto que seja conhecido por todos; mudar o contexto de um problema auxiliará a compreensão, de modos variados, de certos alunos, enquanto outros não terão auxílio obrigatoriamente enquanto compreensão, somente enquanto generalização.

Este episódio revelou um dilema do professor: ao propor um problema análogo, lançou um problema cujos parâmetros são maiores que do original, o que o torna aparentemente mais complicado. Vale lembrar que o original tratava de placas com determinado prefixo (... O número de placas que podem ser formadas com o prefixo ABC é...) enquanto o análogo não fazia qualquer restrição ao prefixo, como confirma o trecho extraído do Diário: *“Para não voltar a repetir o exercício de novo, falei: “... vamos imaginar algo diferente no exercício. Ele só quer placas com ABC mas e se não dissesse*

nada...”. Na verdade os problemas eram bem parecidos, o que mudava era a “restrição”; o professor tratou de eliminar restrições ou “leis” do problema, deixando-o cada vez mais “aberto”: Isto fez com que o número que exprimiria o resultado fosse maior, embora não calculado, e o que ocorreu também, foi que outras novas situações que foram propostas se afastaram da situação encontrada na realidade, em relação ao contexto trabalhado:

” ...e quando a frota cresceu precisaram aumentar as placas. Deve ter havido sugestões: por que não aumentar um número?

— — — — —
26 26 10 10 10 10

(...)

P.: – Alguém pode ter sugerido: por que não só letras?

— — — — —
26 26 26 26 26 26

(...)

P.: – E por que não valer números e letras? Ai, seria uma beleza...

— — — — —
36 36 36 36 36 36“

No caso do problema dos brinquedos a atitude do professor foi outra: propôs um problema análogo com parâmetros menores que os originais e outro contexto. Duas alunas faziam a conta 2.2 e o professor dá a sugestão para elas pensarem: *“eu tenho dois presentes p/ dar a vocês duas minha mala e meu jaleco (eu uso para dar aula) quantas são as chances...”*

O professor tanto sugere números menores para que o resultado fosse facilmente verificável sem o auxílio de maiores cálculos, como se utiliza de seu próprio material de trabalho, conhecido dos alunos, portanto tratando de uma situação mais próxima dos alunos.

O dilema reside na sua dúvida quanto às estratégias que utilizou. Suas reflexões mostram que ele depara com a questão de complicar ou simplificar o problema em relação a cálculos e contextos, ao propor uma nova versão de exercício.

Discorrendo sobre um exemplo, Glaymann e Varga (1974) citam que é interessante variar seus parâmetros. Estes autores apresentam uma discussão envolvendo variantes de um exercício, a chamada situação aberta: um exemplo deliberadamente ambíguo, que é utilizado em suas variantes para se discutirem diversos temas como o Princípio Multiplicativo, Arranjos, Permutações e Combinações. Para esses autores, é importante variar a grandeza dos parâmetros, não necessariamente partindo do menor para o maior.

Entretanto, uma idéia para se começar a discutir um caso que gerou dúvidas, é trabalhar em um primeiro momento com o mesmo contexto, porém com parâmetros menores. A partir daí, tirar conclusões gerais, fazer observações, ressaltar que (e por quê) tipos de cálculos devem ser efetuados etc... uma vez que, com parâmetros menores, fica mais fácil imaginar a situação, contabilizar os casos pedidos, sem usar maiores recursos algébricos, listando por escrito ou mentalmente. Com parâmetros menores, é mais simples verificar o resultado e é possível também recorrer a estratégias “mais visuais”, como listagens ou diagramas de árvore completos.

Assim sendo, o procedimento do professor de simplificar, de reduzir os valores dos parâmetros tem fundamento, mas podemos questionar: “E quanto ao fato de em um certo momento, ter complicado um problema ao explicá-lo? Foi um erro ter retirado restrições e conseqüentemente aumentado os valores dos parâmetros?”

Entre os meios para o estabelecimento de um plano de resolução, Polya (1978) sugere que muitas vezes podemos começar nosso trabalho perguntando-nos se conhecemos algum problema semelhante àquele que nos deparamos. Entre os meios da variação de um problema, estão a generalização, a particularização e o recurso à analogia. Em relação à analogia, o autor afirma que “*podemos nos considerar felizes quando, ao tentarmos resolver um problema, conseguimos descobrir um problema análogo mais simples*” (Polya, 1978, p. 29).

Este autor, não afirmando que o problema análogo deve ser necessariamente mais simples, indica que não há uma regra ou uma determinação sobre simplificar ou complicar. No caso do exercício, envolvendo a formação de placas, o professor poderia ter proposto exercícios análogos cujos parâmetros fossem menores, o que, segundo sua ótica, poderia “simplificar” a situação. Esta atitude, entretanto, não garantiria que sua explicação fosse melhor compreendida. Deve-se questionar ainda que tipos de restrições poderiam ser

propostas. Pedir o total de placas com final 3, por exemplo? Isto não serviria para que uma listagem ou um diagrama de árvore pudesse ser utilizado. Quanto aos cálculos mentais que os alunos poderiam fazer, haveria muita diferença? Se fossem capazes de calcular mentalmente 10.10.10, provavelmente já teriam sido capazes de incluir um 10 nesta multiplicação e não sairíamos do problema original. Devemos observar que no primeiro momento em que a resolução do exercício é discutida, o professor faz uma questão nesta linha, à qual a classe responde sem maiores dificuldades:

“P.: – E se eu quisesse que a chapa tivesse final par? ABC _____

10 10 10 é 10 aqui?

Classe: – 5”

Devemos lembrar que estamos analisando algo que ocorreu em sala de aula, e que neste ambiente as coisas não ocorrem de uma maneira “melhor” ou “pior”. O professor, mudou (aumentou) os parâmetros e a idéia pareceu dar certo uma vez que os alunos demonstraram, em tal momento, estar entendendo, acompanhando seu raciocínio... No momento em que se teve de resolver um problema correlato, o caminho tomado pelo professor lhe pareceu apropriado e espera-se então um prosseguimento no tal caminho e que nas discussões continuasse a aumentar os valores possíveis dos parâmetros. Além disso, aumentar os parâmetros significou no primeiro momento, tratar-se de um problema que fosse mais próximo da situação que temos em nosso país.

No caso do exercício envolvendo a formação de placas, apesar da variação dos parâmetros, este contexto é sempre mantido. Com o outro exercício, além da simplificação (diminuição) dos parâmetros, há uma mudança no contexto do caso imaginário de distribuição de brinquedos para um caso mais familiar, envolvendo os pertences do professor.

Esta última consideração leva à pergunta: o que dizer acerca de uma mudança no contexto do problema?

Uma vez proposto um problema análogo/auxiliar, devemos ter o cuidado de não perder de vista o problema original. Resolvido o novo problema (o problema auxiliar), devemos nos perguntar acerca da possibilidade de utilizarmos o resultado (e os meios para se chegar até ele) no problema original. Podemos então tratar de mudar o contexto do

problema original, se tomarmos o cuidado de criar um problema auxiliar mais familiar ao aluno de tal modo, que ambos necessitem dos mesmos meios para se chegar aos resultados. Como cita Polya, *“um problema novo que seja mais intimamente relacionado com o problema proposto terá melhor possibilidade de ser útil”*(Polya, 1978, p. 43).

Uma outra vantagem de tratarmos de um contexto mais próximo ao cotidiano do aluno é que ele poderá ter maior entendimento do que é pretendido, pois poderá usar sua experiência pessoal. A falta de domínio de um contexto pode atrapalhar também os professores e acredito que a idéia de pensar em um problema auxiliar com um contexto mais bem dominado é uma alternativa também para compreenderem e alargarem sua visão acerca de um dado problema.

A RELAÇÃO ENTRE ARRANJO E COMBINAÇÃO

Esperava-se que a sistematização da relação entre Arranjo e Combinação e a construção da fórmula de Combinação não fossem uma atividade simples para os alunos. Sendo assim, a preocupação com este fato permeou todo o trabalho de campo, desde a preparação das atividades que comporiam cada fase da proposta. Este cuidado, entretanto, não garantiu a eficácia desejada. A inquietação causada pela percepção deste fato levou à descrição da forma como algumas publicações (UNESCO, 1977; Hariki e Onaga, 1979, Trotta, Imenes e Jacobovic, 1979; SÃO PAULO, 1990 e 1991; Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1994) tratam este assunto e à análise de episódios, descritos no Diário, acerca das aulas dedicadas a esta parte da proposta.

Propostas de abordagem da relação entre Arranjo e Combinação

Analisando os textos como a Proposta Curricular para o ensino de Matemática; 2º GRAU (São Paulo, 1991), Proposta curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério (São Paulo, 1990), Proposta da UNESCO (1977), e Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), e os livros didáticos Hariki e Onaga (1979) e Trotta, Imenes e Jacobovic (1979), foi possível perceber que estas publicações apresentam o tema Arranjo antes de Combinação.

No livro de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) é apresentado um plano de ensino de Análise Combinatória para alunos com idades entre 10 e 18 anos. Este plano é separado em 12 unidades didáticas: 1) Enumeração sistemática; 2) Regra do produto e diagramas de árvore; 3) Grafos. Regra da soma; 4) Modelo de colocações. Caso de objetos distinguíveis; 5) Modelo de colocações. Caso de objetos indistinguíveis; 6) Mostras ordenadas. Arranjos; 7) Permutações. Números fatoriais; 8) Mostras não ordenadas. Combinações; 9) Colocação e distribuição de objetos; 10) Subpolações e partições. Números combinatórios; 11) Princípio de inclusão e exclusão. Outros métodos lógicos; 12) Procedimentos analíticos. Funções geradoras. Os autores propõem que a unidade destinada

às Combinações seja trabalhada na Enseñanza Secundaria (2º ciclo)⁶. Nesse nível de escolaridade, supõe-se que os alunos já tiveram contato, com uma gama de situações-problema, que incluem casos em que a ordenação dos elementos não deve ser considerada. A proposta dos autores espanhóis prevê em seu desenvolvimento, várias sistematizações com parâmetros pequenos, nas quais a divisão aparece expressando a relação: “muitos são transformados em um”, sendo que este “muitos” pode se referir tanto aos elementos serem ou não ordenados quanto a serem ou não distinguíveis.

É suposto, portanto, que, quando os alunos chegarem à unidade destinada às Combinações, já tenham sistematizado em fórmulas, as relações entre Combinações e Arranjos para valores de parâmetros pequenos. Segundo os autores, é esperado que as situações-problema apresentadas, possibilitem que “os alunos generalizem a relação entre Arranjos, Permutações e Combinações, para o caso geral: $A_{n,r} = C_{n,r} \cdot P_r$.” (Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1994, p. 191).

A proposta destes autores é praticamente completa em relação aos temas abordados e abrange vários anos de escolaridade, possibilitando que os principais temas sejam trabalhados em diversos níveis de profundidade. A aplicação da proposta dos autores espanhóis demandaria uma mudança curricular, o que não é objeto de estudo desta dissertação.

Com exceção do livro de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), as publicações analisadas procuram sempre utilizar de algum modo a fórmula dos Arranjos para apresentar/discutir a fórmula das Combinações. A maneira de ilustrar como as fórmulas estão relacionadas é diferente em cada uma das publicações. Alguns textos fazem apenas o uso de argumentações retóricas, outros fazem analogias (ou comparações) com elementos de conjuntos e alguns fazem uso de certo tipo de desenho.

A Proposta Curricular para o ensino de Matemática; 2º GRAU (São Paulo, 1991) apresenta, na parte dedicada a “sistematizar o conceito de combinação simples” (p. 111) uma discussão apoiada em apenas um exemplo. Nesse exemplo são consideradas as permutações dos elementos dos quatro subconjuntos de 3 elementos, de um conjunto de 4 elementos, que dão origem aos 24 arranjos simples, tomados 3 a 3, daí se obtendo a relação $A_{4,3} = P_3 \cdot C_{4,3}$. A seguir é apresentada uma definição de combinação, “dado um conjunto E ,

⁶ Se fizermos uma correspondência com nossa escolarização, seria o Ensino Médio.

com n elementos, qualquer subconjunto com k elementos de E é uma combinação simples dos elementos de E , tomados k a k ” (São Paulo, 1991, p. 112), e apresentada a fórmula $A_{n,k} = P_k \cdot C_{n,k}$.

Já a Proposta curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério (São Paulo, 1990), discute combinações simples interpretando apenas um problema já trabalhado, sem fazer generalizações. O problema é considerado, como o analisado na Proposta do 2º grau, sobre o número de subconjuntos de três elementos de um conjunto A de 4 elementos. A resolução apresentada tenta justificar que o número total (24) de agrupamentos de 3 elementos deve ser dividido por $3!$, ou seja, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, que representa o “número de agrupamentos que descrevem o mesmo subconjunto de A ” (São Paulo, 1990, p.244). Não aparece nem uma definição nem uma fórmula para as Combinações.

Na Proposta da UNESCO (1977) a relação entre Arranjo, Permutação e Combinação é apresentada em sua forma geral, ou seja através da fórmula $C_{n,k} \cdot P_k = A_{n,k}$ após a discussão de um único problema, que envolve uma combinação de 5 elementos tomados 3 a 3. Uma diferença entre esta proposta em relação às Propostas curriculares do Estado de São Paulo é o uso da linguagem de funções (injetoras ou bijetoras) entre conjuntos.

O livro de Hariki e Onaga (1979) dá um exemplo de problema onde a ordem dos elementos não é importante e cita que o total de casos possíveis é uma combinação de 6 elementos, tomados 4 a 4 e propõe, para determinar o número $C_{6,4}$ sem precisar numerá-los (escrever) todos, que os arranjos de 6 elementos, tomados 4 a 4, podem ser obtidos, fazendo-se:

1: escolha de agrupamentos não ordenados de 4 elementos, dentre o 6 disponíveis ($C_{6,4}$);

2: ordenação de cada um dos agrupamentos obtido no 1º evento (P_4).

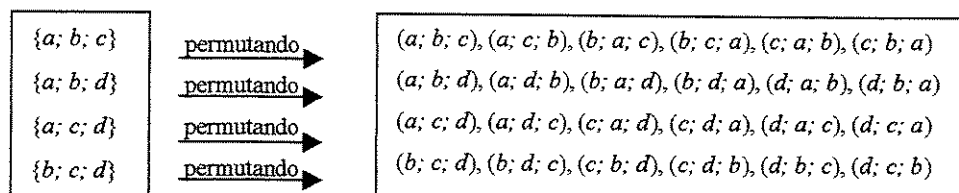
A conclusão é que o número de arranjos de 6 elementos, tomados 4 a 4 é dado pela relação $A_{6,4} = C_{6,4} \cdot P_4$, daí $C_{6,4} = A_{6,4} / P_4$. A seguir é citado que, através de um raciocínio análogo ao desenvolvido no exemplo, é possível deduzir que o número de combinações de n elementos, tomados n a n é dado por: $C_{n,p} = A_{n,p} / P_n$.

O livro de Trotta, Imenes e Jacobovic (1979), assim como as propostas curriculares, também relaciona em um primeiro momento, as combinações de 4 elementos, 3 a 3, com os

arranjos de 4 elementos, 3 a 3, para a seguir, comentar que a idéia utilizada no exemplo vale em geral. Neste caso são mostradas todas as Combinações e todos os Arranjos, com uma indicação de que os totais se relacionam através de uma Permutação (os elementos são a, b, c e d):

Combinações
de a, b, c, d
tomados 3 a 3.

Arranjos sem repetição de a, b, c, d tomados 3 a 3



(Trotta, Imenes e Jacobovic (1979, pág. 27).

Seja porque os autores (UNESCO, 1977; Hariki e Onaga, 1979, Trotta, Imenes e Jacobovic, 1979; SÃO PAULO, 1990 e 1991) não fundamentam a escolha da abordagem para a complexa relação entre Arranjo e Combinação, seja porque pautam sua discussão sobre um único caso, as indicações para o professor, sobre como ele deve abordar o tema em sala de aula, são insuficientes. Sendo assim, não proporcionam elementos de reflexão, questões, sugestões, nem do ponto de vista didático nem do ponto de vista do conceito matemático. Parece haver a crença de que com um único exemplo, o conceito e fórmula já serão compreendidos. Não são discutidas outras alternativas para se iniciarem as discussões. O trabalho, desenvolvido anteriormente à apresentação da fórmula das combinações, é aproveitado no sentido de relacionar a fórmula com algo já trabalhado: o conceito de Arranjo é retomado, quando se cita a importância da ordenação; normalmente um exercício de Arranjo é usado para que a fórmula utilizada para resolvê-lo sirva como ponto de apoio à construção da fórmula de Combinações.

A relação entre Arranjo e Combinação na Proposta em estudo

A proposta desenvolvida propunha que a apresentação das fórmulas fosse um dos “últimos” momentos, e que acontecesse após os alunos terem já trabalhado com variados tipos de problemas, utilizando variadas estratégias para resolução.

A discussão mais aprofundada sobre a relação entre Arranjo e Combinação deu-se na chamada fase IV da proposta que foi objeto de estudo desta dissertação. O tema Arranjo foi sistematizado antes de Combinação, pois era esperado que o estudo do primeiro pudesse auxiliar de algum modo a compreensão do segundo, principalmente no que diz respeito às respectivas fórmulas. Na fase 3 da proposta, foram incluídos dois exercícios que tinham o objetivo de incitar a comparação entre Arranjo e Combinação favorecendo a construção da fórmula de Combinação na fase seguinte.

Nas fases 1, 2 e 3, alguns exercícios foram escolhidos com o intuito de fornecer um suporte às discussões da 4. Assim sendo, durante o desenvolvimento da proposta, foi dado destaque à importância do aspecto ordenação e, na aula em que a fórmula de Combinação foi apresentada, os alunos já haviam tido contato com variados problemas e demonstravam ter percebido que um aspecto que poderia diferenciar a resolução de um exercício em relação a outro, era a necessidade de os elementos estarem ordenados ou não. Antes da apresentação da fórmula de Combinação, os alunos já haviam entrado em contato também com a fórmula de Arranjo e de Permutação. A construção dessas duas fórmulas se deu de forma tranquila e os alunos demonstraram ter percebido que elas eram uma formalização daquilo que já vinham fazendo sem se preocuparem com a terminologia, como podemos perceber na expressão de Ulisses: *“A gente já sabia resolver exercícios de arranjos só que não dava nome para ele”*.

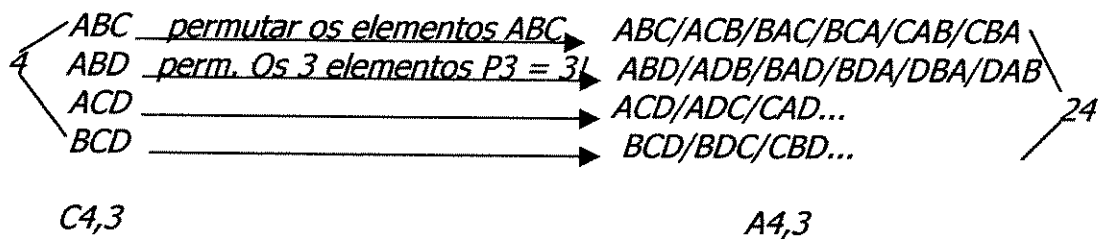
A estratégia utilizada, para que a fórmula de Combinação fosse deduzida foi semelhante à dos textos que haviam sido consultados, ou seja, comparar casos de Arranjo e de Combinação com os mesmos valores para os parâmetros, de modo que o aluno percebesse que os arranjos podem ser obtidos através da permutação dos elementos de cada agrupamento (de cada Combinação). Já visando a este momento, dois exercícios da fase 3, um de Arranjo e outro de Combinação, tinham parâmetros iguais e foram retomados por ocasião da discussão da fórmula de Combinação. Os exercícios eram:

“III.2) O professor deve escolher 3 entre 4 alunos para irem em uma excursão. De quantos jeitos o professor pode fazer isto?”

“III.5) De um grupo de 4 meninos, sua babá deve fazer uma lista de 3 deles onde o 1º da lista ganhará um vídeo-game, o 2º um autorama e o 3º ganhará um carrinho. Quantas listas diferentes a babá pode fazer?”

Os alunos lembraram os dois exercícios e foram alertados para a necessidade de uma fórmula para os casos cuja ordem não era importante. Uma idéia que poderia ter sido desenvolvida: ao final de um exercício de Arranjo, já resolvido com o auxílio da fórmula, o professor poderia propor que os alunos que criassem um procedimento (uma fórmula) semelhante, caso o enunciado fosse mudado de maneira que a ordem não fosse mais importante, ou seja, caso o enunciado passasse a se referir a um exercício de Combinação.

O professor, entretanto, prosseguindo naquilo que havia planejado, comparou os resultados dos dois exercícios em lousa, utilizando-se de uma estratégia parecida com a utilizada por Trotta, Imenes e Jacobovic (1979):



Era esperado que os alunos tivessem mais facilidade para compreender a fórmula das Combinações. Foi possível notar que, apesar de os alunos perceberem que, permutando os elementos de cada combinação, obtinha-se uma parte dos arranjos, houve certa dificuldade em aceitar a relação $C_{4,3} \cdot 3! = A_{4,3}$ e a fórmula conseqüente: $C_{n,p} = A_{n,p}/p!$.

O professor percebe as dúvidas e propõe um outro exemplo. Sua posição lembra de certa forma o dilema, já comentado no capítulo 5, sobre que estratégia utilizar. O professor dá um exemplo com valores menores para parâmetros gerais (uma Combinação de 4 elementos, tomados 2 a 2) e sua estratégia parece adequada tanto em relação ao entendimento da relação entre Combinação, Permutação e Arranjo como também quanto ao entendimento do símbolo $C_{n,p}$.

A passagem da discriminação de todos os elementos, feita em lousa, para a simbologia $C_{4,3} \cdot 3! = A_{4,3}$ e $C_{4,3} = A_{4,3}/3!$ causou dificuldades, a alguns alunos que perguntaram: “*eu já sei que vai ser 3! embaixo quando olho $C_{4,3}$?*”.

Em relação à simbologia utilizada na fórmula, as questões indicaram que os alunos parecem mais preocupados em saber utilizar mecanicamente a fórmula do que em entendê-la.

Quanto ao entendimento das operações envolvidas na fórmula, a maior dificuldade pareceu ser a compreensão de que a divisão diminui o número de arranjos na exata medida de dar o número de combinações, ou seja, de que a divisão “desmistura” os agrupamentos onde a ordem importa, fazendo resultar um caso de cada bloco de agrupamento, mas não levando em conta a ordenação dos elementos. De um modo geral, os registros do Diário revelaram a dificuldade de certos alunos para compreender por que a presença da divisão pelo fatorial (Permutação) dividindo o total de Arranjos, tem o “efeito” de determinar o número de Combinações.

O trabalho com os exercícios que se seguiram à apresentação da fórmula parece ter mostrado que o entendimento da simbologia ficou bem resolvido uma vez que os alunos não manifestaram qualquer tipo de dúvida neste sentido, além de o professor ter podido constatar que não houve nenhum tipo de erro no manuseio do símbolo $C_{n,p}$.

Em contrapartida, não foi possível averiguar se os alunos entenderam por que a fórmula dá certo, ou melhor, por que, quando os arranjos $A_{n,p}$ são divididos pelas permutações P_n , o resultado é o número de combinações $C_{n,p}$.

A segunda prova (ver anexo 1) que os alunos realizariam, estava já marcada para a segunda aula, após aquela em que a fórmula de Combinação foi discutida. Mesmo assim, apenas um aluno (Cesar) manifestou ao professor a preocupação em identificar os casos de Arranjo e Combinação, como mostra o trecho do Diário:

“No final da aula Cesar disse: tudo bem na prova vai ter exercícios “misturados” de arranjo e combinação ... como é que eu vou saber...”

Até parei no final a aula, pedi que ele repetisse a pergunta em voz alta para a sala ouvir e disse: em primeiro lugar vai ter mesmo exercícios de arranjos, permutações e combinações e fiquem “espertos” pois tem exercício que não é só aplicar a fórmula direto (...)

P.: – Então a 1ª coisa é ler e entender com atenção, outra idéia legal é começar a listar algumas possibilidades e pensar/comparar para ver se por exemplo importa a ordem ou não, se dá para usar a fórmula ou não...

E para a gente trabalhar alguns exercícios onde temos que interpretar se é arranjo ou combinação vamos resolver exercícios da aula 7 da apostila, onde eles vêm misturados.”

No final da fase 4, o professor esperava conhecer se os alunos sabiam identificar ou diferenciar exercícios que tratavam de Arranjos e os que tratavam de Combinação e utilizar as fórmulas coerentemente em cada situação.

Após a apresentação das fórmulas, foi prevista uma atividade na qual os exercícios de Arranjos e Combinações viessem mesclados, de modo que os alunos não fossem induzidos a usar esta ou aquela fórmula. Entretanto, a aula dedicada a esta atividade não saiu como o esperado; poucos alunos se manifestaram e não foi possível verificar se sabiam vincular conceitos e fórmulas aos respectivos exercícios. Apenas três alunas chegaram a perguntar como saberiam distinguir se estavam trabalhando com um ou outro tema, enquanto os demais não se manifestaram, parecendo não ter dificuldades. O ideal seria terem uma outra aula deste tipo, mas a aula seguinte já havia sido agendada para a segunda prova.

Dois exercícios da segunda prova, realizada por 30 alunos, foram ao encontro da atenção dada aos alunos para diferenciarem Arranjos de Combinações e aplicarem as respectivas fórmulas. O exercício 1 tratava de Combinação: “O diretor de um clube deve escolher 3 sócios que deverão ser responsáveis pela pintura de uma sala do clube. Se o clube tem 12 sócios, de quantos modos o diretor pode escolher os 3 sócios?”

Em relação a este exercício, 11 alunos o acertaram ($\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$), apesar de dois deles terem identificado a conta com o símbolo $A_{12,3}$. Entre os 19 alunos que o erraram, 18 resolveram-no como se o mesmo tratasse de Arranjos ($12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$), sendo que 7 dos 18 inclusive, utilizaram a notação $A_{12,3}$ enquanto um utilizou a notação $C_{12,3}$, correspondendo à fórmula errada.

O exercício que envolvia Arranjo era o 3: “Juquinha deve colorir um mapa da América do Norte (3 países) sendo que cada país deve ser colorido com uma cor diferente da dos outros países. Como Juquinha tem uma caixa com 11 lápis diferentes, de quantos modos ele pode fazer sua tarefa?”.

Este exercício foi resolvido corretamente ($11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$) por 25 alunos, sendo que 2 deles identificaram a conta com o símbolo $C_{11,3}$ e 8 com o símbolo correto. Os outros 5 resolveram como se estivessem lidando com um caso de Combinações ($\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!}$). Destes cinco, três identificaram a conta com o símbolo $C_{11,3}$. Este fato, e a observação de que no

caso do exercício 1, cerca de 50% dos alunos que erraram, utilizaram o símbolo do Arranjo, indica que o conhecimento da fórmula não garante o acerto do exercício.

Quanto a lidar com o símbolo para as Combinações, que havia causado desconforto para os alunos, isto parece ter sido superado, uma vez que o símbolo apareceu 14 vezes (9 nas resoluções do exercício 1 e 5 no caso do exercício 3) e em 11 vezes, as contas que apareceram, estiveram coerentes com o símbolo. Nas outras três vezes em que o símbolo apareceu, estava relacionado a Arranjo (uma vez no exercício 1 e duas vezes no exercício 3).

Foram notados ainda dois casos onde a conta relativa a uma Combinação apareceu “solta”, sem nenhum símbolo identificando-a (um caso no exercício 1 e um no exercício 3), além dos dois casos já citados, em que foi identificada com o símbolo do Arranjo.

Vale notar, portanto, que os alunos que fizeram Combinações identificaram-na corretamente.

Em relação à quantidade consideravelmente maior de erros no exercício sobre Combinação, isto se deve aparentemente a uma interpretação errada dos alunos que pensando tratar-se de um exercício de Arranjo, podem não ter percebido que os agrupamentos não deveriam levar em conta a ordem.

Na primeira prova (ver Anexo 1) não surgiram dificuldades deste tipo, pois os alunos souberam identificar os casos onde a ordem era importante ou não, e souberam também determinar corretamente o número de agrupamentos pedidos em cada caso.

Na primeira prova⁷, o Arranjo estava presente no exercício 1 (uma Permutação) e no item a) do exercício 2. Estes dois exercícios foram:

“1) Uma classe deverá ter, certo dia, seis aulas de seis matérias diferentes (M, P, F, Q, B e H). Se a primeira aula tem de ser da disciplina F, de quantos modos pode ser montado o horário do dia?”

“2) Numa sacola existem 5 esferas de cinco cores diferentes. Faço 3 retiradas de uma bola da sacola e para cada retirada anoto a cor da bola. Quantas seqüências possíveis vou anotar: a) sendo que a esfera retirada não é mais colocada de volta?
b) sendo que, a cada retirada, a esfera retirada é colocada de volta na sacola?”

⁷Para facilitar a leitura, os exercícios da primeira prova serão indicados em negrito

Dos 31 alunos que realizaram esta prova, 28 acertaram o exercício 1 (5.4.3.2.1 =120) e 21 acertaram o item a) do exercício 2 (5.4.3 =60).

Diferentemente da segunda prova, o exercício que tratava de Combinação teve praticamente o mesmo número de respostas certas que o de Arranjo. Vinte e dois alunos acertaram o exercício 3: “Quantos coquetéis distintos, de duas bebidas, podemos formar, dispondo de quatro bebidas quaisquer?” (6 coquetéis, resposta obtida por listagem).

Acrescente-se que, na ocasião da primeira prova, os alunos ainda não haviam discutido nenhuma fórmula para calcular o número de Arranjos ou de Combinações. Por este motivo, os parâmetros envolvidos no exercício tinham valores pequenos, de modo que fosse viável a listagem dos casos possíveis, que foi, aliás, o procedimento utilizado por aqueles que acertaram o exercício.

Na ocasião em que foi realizada a segunda prova, os alunos já haviam sistematizado os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação e suas respectivas fórmulas. Houve então uma diferença relevante entre os dois exercícios sobre Combinação dados nas provas, pois no caso da Segunda, era esperado que, por conta dos valores dos parâmetros, os alunos utilizassem, ao invés de uma listagem, a fórmula correspondente. Os alunos parecem ter percebido que a saída para este último exercício era uma fórmula, mas a maioria utilizou erradamente Arranjo.

Dos 18 erros observados no exercício 1 da segunda prova (que se referia a Arranjo), houve apenas um caso em que a resolução foi identificada como sendo uma Combinação. Normalmente quem fez uma Combinação identificou-a de modo correto. É, portanto, provável que os alunos que erraram este exercício, consideraram que se tratava de uma situação envolvendo Arranjos.

Uma outra possibilidade pode ter acontecido. A ênfase dada ao Princípio Multiplicativo, se por um lado trouxe boa compreensão, por outro pode ter acarretado sua aplicação exagerada. Pelo fato de os alunos conhecerem a grande aplicabilidade do P. M., é possível que alguns deles tenham-no adotado como um “dispositivo de segurança”, ou seja, quando não se tem certeza de que se trata ou que fórmula utilizar, trabalha-se com o P. M.

A análise das provas, entretanto, não possibilitou informações mais “refinadas” acerca do que os alunos pensaram, quando resolviam os problemas, por exemplo, porque uma boa parte deles resolveram um exercício de Combinação como se fosse de Arranjo.

Mesmo assim, as informações obtidas permitem algumas conclusões tais como a de reservar mais tempo para os alunos trabalharem com a fórmula das Combinações, tanto “isoladamente” quanto em situações em que tivessem de resolver exercícios variados, mas não só entre Arranjos e Combinações simples, como foi feito na proposta; deveriam ser incluídos casos com repetição de elementos (mesmo que nos caso das Combinações com repetição, os parâmetros fossem pequenos, uma vez que este tema específico não seria sistematizado) e ainda casos que não pudessem receber nenhuma denominação em especial.

O símbolo que representa Combinação foi apresentado aos alunos somente quando eles depararam com sua fórmula. Como foi visto, o símbolo foi mais um elemento gerador de dúvidas. Isto poderia ser minimizado se o símbolo fosse usado antes de a fórmula ser discutida. Ao retomar o exercício da lista (III.2, sobre uma excursão), o professor poderia ter indicado que seu resultado seria representado com o símbolo $C_{4,3}$ e também ter lembrado outros exercícios já trabalhados que envolvessem Combinações, expressando seus resultados vinculados ao símbolo ou ainda apresentado outros exemplos, possibilitando que a fórmula fosse discutida com os alunos, já conhecendo o símbolo.

Os exercícios referentes à Combinação, que haviam aparecido até o momento da fórmula ser apresentada, envolveram parâmetros pequenos para que fosse viável a contagem dos casos possíveis, sem fórmula. Apesar de os alunos não terem questionado a importância de uma nova fórmula, uma idéia interessante seria apresentar um exercício de Combinação cujos parâmetros envolvidos fossem elevados para que os alunos percebessem a sua necessidade.

Apesar de esta proposta ter sido desenvolvida em cerca de dois meses, enquanto o plano de ensino de Análise Combinatória sugerido por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) envolveu vários anos de estudo, uma idéia dos autores espanhóis que poderia ser aproveitada é a de apresentar, durante o desenvolvimento da proposta, casos que propiciassem o aparecimento de uma divisão como transformação de muitos casos em um. Exercícios envolvendo casos deste tipo, com parâmetros pequenos, poderiam possibilitar que os alunos percebessem tal “efeito” da divisão, antes da fórmula de Combinação ser apresentada; isto provavelmente diminuiria as dificuldades dos alunos e contribuiria para um melhor entendimento da tal fórmula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Algumas características da proposta desenvolvida foram importantes no processo de ensino de Análise Combinatória, como o trabalho inicial de familiarização dos alunos com diferentes exercícios, fazendo-se uso de outras estratégias de contagem que não as fórmulas, como foi o caso da enumeração sistemática e do diagrama de árvore. Além disso, a sistematização como síntese dos trabalhos anteriores foi também proveitosa para os alunos.

Acredito que qualquer que fosse a proposta analisada, ela poderia ser aprimorada, a cada experimentação. As primeiras referências para a elaboração da proposta, além das experiências enquanto fui aluno e professor, foram livros didáticos e as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo. Durante o correr desta pesquisa, tive contato com vários outros textos. Através destas leituras pude pensar, refletir e aprender pois alguns textos deram indicações para mudanças e aprimoramentos que podem ser feitos na proposta.

O diagrama de árvore, por exemplo, poderia ter sido mais explorado, como indicam Fischbein (1975), Glaymann e Varga (1974), Parzysz (1993), entre outros. Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1996) acreditam que esta estratégia deve ser reforçada no ensino de Análise Combinatória. Em sua pesquisa, estes últimos autores constataram que os alunos têm dificuldades e usam pouco esta estratégia.

Os autores espanhóis (Roa, Batanero, Godino e Cañizares, 1996) verificaram também que o aluno que erra um problema de Análise Combinatória, normalmente não faz uma enumeração sistemática. Este aspecto pareceu ser compreendido pelos alunos com os quais trabalhei, mas durante o desenvolvimento da proposta não houve nenhum momento especial para ressaltar e posteriormente avaliar tal aspecto, para saber o quanto eles compreenderam e usaram a enumeração sistemática como estratégia de contagem.

Durante o desenvolvimento da proposta, procurei sempre destacar junto aos alunos a importância de aspectos como ordenação e repetição dos elementos envolvidos nos exercícios. Estes aspectos poderiam ter sido avaliados de modo específico, especialmente quando se leva em conta que no questionário aplicado por Batanero, Godino e Navarro-

Pelayo (1996), no caso de alunos com instrução em Análise Combinatória, os dois principais erros foram os de ordem e repetição.

Além disso, a proposta desenvolvida poderia ter proporcionado momentos em que os alunos devessem criar um enunciado para determinado, tipo de problema para que eles explicitassem sua compreensão; talvez com exercícios menos tradicionais, incentivaria os alunos a outros desafios.

É verdade que os exercícios contidos na proposta podem ser considerados um tanto tradicionais. No entanto, a proposta se diferencia da maioria da prática vigente, no sentido de se experimentar uma mudança na relação do professor e dos alunos com a Análise Combinatória, mais precisamente no modo como aquele apresenta e discute cada tema (Arranjo, Permutação e Combinação), primeiramente apresentando exercícios para depois chegar às sistematizações.

Quanto à proposta em si e suas possibilidades, um aspecto positivo ocorreu em relação ao uso do P. M., uma vez que os alunos parecem ter compreendido a “potencialidade” e as aplicações desta estratégia. Como já discutido no capítulo 6, foi impossível saber se os alunos o utilizaram indiscriminadamente, como um “dispositivo de segurança” que poderia garantir uma probabilidade grande de se acertar os exercícios. Entretanto, boa parte deles compreenderam seu “funcionamento” e souberam utilizá-lo adequadamente.

A primeira fase permitiu a apresentação de exercícios que familiarizaram os alunos com a Análise Combinatória em geral e com algumas estratégias de contagem. A presença do P. M. entre aquelas estratégias propiciou que as fórmulas de Arranjo e de Permutação fossem aprendidas de modo “natural”, sem maiores dificuldades, pois os alunos perceberam que estas fórmulas decorrem de modo direto do P. M. e compreenderam a fórmula como apenas mais um auxílio na resolução dos exercícios. Assim sendo, exemplificações do P. M. através dos exercícios das fases primeira e terceira, fizeram com que Arranjo com e sem repetição e Permutação sem repetição já fossem praticamente ensinados, antes de sua sistematização. Estas exemplificações, além de importantes quando facilitaram a compreensão das fórmulas, mostraram-se interessantes, porque de certa forma pouparam o tempo demandado para a discussão das fórmulas. Isto é ainda mais relevante, quando se

leva em conta que a proposta relativa a esta pesquisa foi desenvolvida no período noturno, que de certa forma cobra algumas prioridades, como o uso adequado do tempo.

De um modo geral, a maneira como os alunos foram avaliados foi insuficiente para a constituição de informações de cunho qualitativo para a proposta em si. As provas (ver Anexo 1) forneceram somente elementos quantitativos para as análises referentes aos capítulos 5 e 6.

De certa forma, o número de alunos em sala (33) foi algo que me impeliu a não pensar em outras maneiras de avaliar, que não fosse aquela posta em prática. Entretanto, dada minha opção por investigar em ambiente natural, ou seja, em sala de aula, devemos ter em mente que freqüentemente há mais de 33 alunos em classes do Ensino Médio. Assim sendo, de que outro modo a avaliação poderia ter sido realizada?

Mesmo que a avaliação se resumisse no instrumento “prova”, pelo menos deveriam ter sido aplicadas mais que duas, e algumas mais “localizadas”, preparadas para avaliar somente um dentre os vários temas trabalhados. Deste modo, poderiam ser obtidas informações mais pontuais, precisas e refinadas acerca dos aspectos envolvidos no processo de ensino/aprendizagem de Análise Combinatória.

Percebi a dificuldade de observar de modo preciso os 33 alunos, portanto as impressões do dia-a-dia não poderiam constituir por si só uma avaliação.

Uma maneira de proceder, para avaliar de outra forma que não com provas, seria ter previsto entrevistas com os alunos, logo após as provas; deste modo seria possível saber, por exemplo, por que certos alunos fizeram cálculos cuja lógica não consegui compreender; permitiria ainda a análise mais profunda de certos tipos de acertos e erros, como por exemplo por que o Princípio Multiplicativo foi utilizado inadequadamente por tantos alunos no exercício relativo à Combinação, na segunda prova. O aluno teria acreditado que o exercício era de arranjo ou simplesmente preferiu aplicar uma estratégia que quase sempre havia dado certo?

As entrevistas poderiam ocorrer, conforme as anotações do diário indicassem no sentido de se poder compreender melhor certas manifestações dos alunos ou seus procedimentos. De um modo geral, poderiam ser um elemento que buscasse a visão do aluno, seu pensamento, sua avaliação da proposta.

Esta avaliação da proposta por parte dos alunos foi tentada de certa forma com o questionário (ver anexo 2) que procurou saber a visão do aluno sobre o trabalho desenvolvido; além disso, trouxe maiores informações relativas a algumas de suas manifestações durante o desenvolvimento da proposta, como em relação às provas refletirem o quanto eles haviam aprendido. O questionário, de certa maneira, não correspondeu: suas respostas foram genéricas e evasivas e este fato fez com que as “reflexões” dos alunos sobre a proposta ficassem em segundo plano.

É provável que, mesmo que certas mudanças fossem implementadas na proposta, o professor se debateria com dúvidas, dificuldades, receios ou dilemas; afinal cada nova experiência se torna uma nova aprendizagem.

Esta dissertação deve contribuir como uma possível base de reflexões, para que cada professor elabore sua proposta, seu modo de trabalhar com Análise Combinatória. Além de depender do tempo disponível, dos pré-requisitos que os alunos possuem, do ambiente em sala de aula e na escola, o trabalho realizado em aula depende muito de cada professor. Em uma proposta de ensino (acerca de qualquer conteúdo matemático, não necessariamente de Análise Combinatória) deve transparecer a “cara” do professor, sua história enquanto profissional e talvez, até enquanto aluno, suas experiências, seu conhecimento pedagógico e acadêmico sobre o conteúdo e suas concepções (sobre o ensino/aprendizagem daquele conteúdo e sobre Matemática e Educação em geral), ou seja, proposta de ensino é o professor quem faz.

A presente dissertação constatou que existem poucos textos que discutem o Ensino Médio, portanto novas investigações poderiam discutir práticas acerca de outros conteúdos do Ensino Médio, como Probabilidade ⁸, Trigonometria, Matrizes ou Geometria Analítica. Como no caso desta pesquisa, além de Propostas Curriculares e outros textos, a prática de cada pesquisador pode constituir uma referência para as discussões.

Quando a proposta foi desenvolvida, em Março e Abril de 1997, eu já havia tido um contato de praticamente um mês com os alunos, identificando aqueles que participavam mais. Além disso, no ano anterior havia sido o professor daquela turma, portanto conhecia a maioria. No desenrolar desta pesquisa, a análise dos instrumentos foi uma maneira de conhecer melhor meus alunos; uma questão que vem me causando inquietação é por que

⁸ Alguns textos apresentados no capítulo 3 podem ser aproveitados.

alunos considerados bons em Matemática (com boas notas, que têm facilidade para resolver exercícios, que participam/contribuem), às vezes não se dão bem em Análise Combinatória, não se sentem à vontade. Outros ficam ainda mais incomodados, pois percebem, pela primeira vez, alguma dificuldade para compreender algo em Matemática. Parece que Análise Combinatória é um caso à parte, dentro da Matemática, em relação aos outros conteúdos.

Ulisses, que havia sido um aluno de destaque no ano anterior, nas primeiras aulas não se mostrou do mesmo modo, como retrata este trecho do Diário: *“Ulisses não está indo tão bem como eu pensava que ele iria, falta interpretar bem os problemas”*. No decorrer das aulas, aí sim, ele se destacou, seja participando com comentários, seja mostrando familiaridade com o conteúdo, quando resolveu certos exercícios, usando procedimentos próprios.

Bruno foi outro caso. Chegou inclusive a conversar comigo, explicando que havia algo de errado, pois apesar de se dedicar e sempre ter sido bom aluno em Matemática, estava encontrando dificuldades em resolver os exercícios propostos e seu desempenho nas provas não era aquele ao qual estava acostumado.

Acredito que estas diferenças acontecem, em parte, porque nos outros conteúdos em geral, os exercícios trabalhados podem ser enxergados sob certo padrão conhecido, ou melhor, cada novo exercício pode ser de alguma maneira relacionado diretamente com os exercícios trabalhados anteriormente. Já em Análise Combinatória, a maioria das vezes “cada exercício é um novo exercício”. Os exercícios anteriores podem não representar a experiência necessária para o bom entendimento e resolução do exercício seguinte, chegando a parecer que as experiências anteriores em Análise Combinatória são zeradas a cada exercício. O caráter “mecanicista” de solução de problemas em Matemática conta pouco na resolução de problemas em Análise Combinatória.

Uma dificuldade que senti, foi analisar minha própria prática. As considerações/reflexões acerca deste tipo de análise feitas no capítulo destinado à metodologia utilizada nesta pesquisa, podem ser uma referência para o pesquisador que decidir atuar neste terreno. Este terá de estar preparado para dificuldades e questões que não serão facilmente respondidas, dada a carência de uma bibliografia que discuta de modo aprofundado este tema.

O pesquisador provavelmente enfrentará o dilema de saber até onde suas avaliações estão sendo justas, não sendo demasiadamente auto-crítico nem condescendente em relação a si mesmo. É importante que o pesquisador tenha com quem dialogar, que seja capaz de fazê-lo enxergar as coisas com distanciamento. Uma pessoa indicada é a do orientador que, no caso desta pesquisa, foi fundamental para discutir as conclusões do pesquisador e para questioná-lo. As questões levantadas podem fazer o pesquisador perceber o que está coerente e bem fundamentado e aquilo que ainda demanda outras análises, leituras, explicações, com vistas a reflexões mais aprofundadas.

No caso desta pesquisa, além das contribuições do orientador, o grupo pesquisa PRAPEM - Prática Pedagógica em Matemática, da UNICAMP, também deu sua contribuição. Após a coleta de dados, o trabalho foi submetido à apreciação do grupo, analisado como um todo e a contribuição veio com críticas e sugestões, como para categorias a serem levantadas no diário.

A discussão com o grupo de pesquisa foi ainda mais importante pois se deu antes do exame de qualificação. O Exame de Qualificação é outro momento que deve ser bem aproveitado pelo pesquisador que analisa sua própria prática, pois é neste momento que outros olhares além do seu e de seu orientador, serão lançados sobre o trabalho. Cada olhar, cada ótica diferente poderá fornecer críticas, questionamentos, sugestões e opções que poderão orientar o trabalho. O pesquisador poderá contar com mais que seu próprio olhar, ouvir experiências que e ter outras visões do trabalho.

Este contato com o orientador ou com outros pesquisadores é um fator que auxilia no que diz respeito à legitimação da pesquisa e aos seus resultados.

Em relação ao desenvolvimento da pesquisa, o fato de professor e pesquisador serem a mesma pessoa, pode ser considerado proveitoso no sentido de se evitar aquilo que Bogdan e Biklen (1994) chamam de “efeito do observador”: as modificações que podem ocorrer por causa da presença do pesquisador, como o comportamento das pessoas. Segundo estes autores, *“nunca é possível ao investigador eliminar todos os efeitos que produz nos sujeitos”* (Bogdan e Biklen, 1994, p. 69). Os alunos se mostraram um pouco intimidados, quando foram avisados de que estariam participando de uma pesquisa, mas pareceu que, em nenhum momento, eles se sentiram em contato com alguém que não fosse

seu professor, o que foi um fator positivo para que a timidez inicial fosse superada mais rápida e naturalmente.

Durante a elaboração da dissertação, só tive a oportunidade de conhecer a posição de colegas professores através de relatos orais e acredito que seria de interesse geral que suas posições e pontos de vista fossem de alguma maneira documentados.

A maioria da bibliografia relativa ao tema tem o seu foco no aluno. Mesmo os textos destinados ao professor discutem a Análise Combinatória em si ou propõem sugestões de ensino, sem colocar-se na posição do professor. Os textos não trazem à tona o pensamento do professor, sua relação com o tema, suas concepções, sua visão sobre a importância da Análise Combinatória. A importância de estudos deste tipo pode se revelar na possibilidade de dialogar com os professores que vêm buscando alternativas para seu trabalho.

O contato com eles tem me permitido perceber suas expectativas negativas em relação ao ensino de Análise Combinatória, o que os faz sentir a necessidade de discutir o tema e suas práticas. Este é um caminho que deveria ser mais investigado: estudar os anseios, as dificuldades para ensinar (e até compreender!!) o tema, os pontos de vista dos professores em relação ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Pode ser discutido como os professores enxergam a Análise Combinatória, como ensiná-la; também é possível investigar o que eles conhecem do tema, seu preparo/condição (conhecimento) para ensiná-lo e também suas próprias aulas. Isto pode se dar através da observação da prática dos profissionais ou de entrevistas. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) descrevem os resultados de uma investigação (Navarro-Pelayo, 1991) que se baseou em entrevistas com professores. São apontadas conclusões acerca de metodologia de ensino, interesse e utilidade da Análise Combinatória para os alunos, dificuldades do tema e mudanças a serem introduzidas na metodologia.

Vale ressaltar que a bibliografia comentada no capítulo 3 apresenta, em sua maioria, discussões sobre estudantes de várias idades e diferentes conhecimentos prévios de Análise Combinatória. Mesmo que o professor não esteja trabalhando com o Ensino Médio, a presente dissertação tem a expectativa de contribuir, estimulando os professores a experimentar, a aprimorar suas práticas, a evoluir, a tentar sempre encontrar a forma mais

adequada, conforme sua realidade e as necessidades dos alunos, ao ensinar Análise Combinatória.

BIBLIOGRAFIA

ANDRÉ, Marli Eliza D. Afonso de. Texto, contexto e significados: algumas questões na análise de dados qualitativos. In: Cad. Pesq. Nº 45, 66-71, mai/1983. São Paulo.

BACKX, Arago de Carvalho, POPPE, Luiz M. B., TAVARES, Raymundo N. O. Prelúdio à Análise Combinatória. São Paulo: Ed. Nacional, 1975.

BALL, Deborah Loewenberg. With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics. In: Elementary School Journal. 93: (4), mar./1993.

BARTH, Britt-Mari. O saber em construção. Instituto Piaget, 1993.

BATANERO, Carmen, NAVARRO-PELAYO, Virginia, GODINO, Juan Díaz. Razonamiento combinatorio. Madri: Síntesis, 1994.

BATANERO, Carmen, NAVARRO-PELAYO, Virginia, GODINO, Juan Díaz. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. In: Educación Matemática, vol. 8, nº 1. Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

BOGDAN, Roberto C. e BIKLEN, Sari Knopp. Investigação qualitativa em educação. Tradutores: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CURY, Helena N.. As Concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. Porto Alegre: UFRGS-FE, 1994, Tese de Doutorado.

DAVID, F. N.. Games, Gods and Gambling. Londres: CHARLES GRIFFIN, 1962.

ENGLISH, Lyn D.. Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. In: Journal for Research in Mathematics Education, vol. 24, nº 3, 1993.

FERREIRA, Ana Cristina. O desafio de ensinar-aprender matemática no noturno: um estudo das crenças de estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte. Campinas, 1998.

FIORENTINI, Dario. Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática. Campinas: UNICAMP-FE, 1994. Tese de Doutorado.

———. Teses e Dissertações de Mestrado ou Doutorado, Relativas à Educação Matemática, Produzidas/Defendidas no Brasil no Período de 1991 a 1995. In: Zetetiké, ano 3, n.4. Campinas: UNICAMP-FE-CEMPEM, 1995.

———. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. In: Zetetiké, ano 3, n.4. Campinas: UNICAMP-FE-CEMPEM, 1995.

———. Memória e Análise da Pesquisa Acadêmica em Educação Matemática no Brasil: O Banco de Teses do CEMPEM/FE-UNICAMP. In: Zetetiké, ano 1, n.1. Campinas: UNICAMP-FE-CEMPEM, 1993.

FISCHBEIN, Efraim. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In: The British Journal of Educational Psychology, vol. 40, part 3, nov./1970.

FISCHBEIN, Efraim. The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1975.

FISCHBEIN, Efraim, NELLO, Maria Sainati, MARINO, Maria Sciolis. Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. In: Educational Studies in Mathematics, vol. 22, nº 6, dez./1991.

FISCHBEIN, Efraim, GROSSMAN, Aline. Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. In: Educational Studies in Mathematics, vol. 34, nº 1, out./1997.

GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto. Matemática 2: 2º grau: trigonometria, matrizes, análise combinatória, geometria. São Paulo: FTD, 1992.

GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto, GIOVANNI Jr, José Ruy. Matemática Fundamental, volume único. São Paulo: FTD, 1994.

GLAYMANN, Maurice, VARGA, Tamas. Les probabilités à l'école. CEDIC, 1974.

GOMES, Romeu. A análise de dados em pesquisa qualitativa. In: DESLANDES, Suely Ferreira. Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 1994.

HALD, Anders. A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. Wiley, 1989.

HARIKI, Seiji, ONAGA, Dulce. Curso de Matemática, vol. 2. São Paulo: Ed. Harbra, 1979.

HARIKI, Seiji. Conectar Problemas: Uma Nova Estratégia de Resolução de Problemas Combinatórios.(mimeo. distribuído no IV EPEM-1996). Este artigo foi obtido

por ocasião da participação de um mini-curso ministrado pelo autor no Encontro Paulista de Educação Matemática de 1996.

HART, Eric W., MALTAS, James, RICH, Beverly. Teaching discrete mathematics in grades 7-12. In: *Mathematics Teacher*, vol. 83, nº 5, mai./1990.

HENRY, Michel. A abordagem frequentista do ensino de probabilidade no 2º grau francês. Da estatística à probabilidade: a visão frequentista.

IEZZI, Gelson et al. *Aulas de Matemática*, volume 2. São Paulo: Atual, 1979.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática 2º grau, 2ª série: versão azul*. São Paulo: Atual, 1993.

INHELDER, Barbel e PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. Trad. De Dante Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976.

JONES, Graham A. et al. A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. In: *Educational Studies in Mathematics*, vol. 32, nº 2, fev./1997.

KENNEY, Margaret J., BEZUSZKA, Stanley J.. Implementing the Discrete Mathematics Standards: Focusing on Recursion. In: *Mathematics Teacher*, vol. 86, nº 8, nov./1993.

LAMPERT, Magdalene. When the problem is not the question and when the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research*, nº 27, 29-63, 1990.

LECOUTRE, Marie-Paule. Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6, nº 2-3, 1985.

LIGHTNER, James E.. Um Resumo da História da Probabilidade e da Estatística. In: Mathematics Teacher, 1991; tradução: Antonio C. Patrocínio, 1996.

LIMA, Roberto de Barros. Introdução. In: BACKX, Arago de Carvalho, POPPE, Luiz M. B., TAVARES, Raymundo N. O. Prelúdio à Análise Combinatória. São Paulo: Ed. Nacional, 1975.

LITWILLER, Bonnie H., DUNCAN, David R.. Combinatorics Connections: Playoff Series and Pascal's Triangle. In: Mathematics Teacher, vol. 85, nº 7, out./1992.

LÜDKE, Menga. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Antonio dos Santos. Matemática na escola do 2º grau. São Paulo: Atual, 1996.

MEIRA, Luciano. Aprendizagem, ensino e negociação de significados em sala de aula. Cadernos da ANPEPP, 95-112.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: DESLANDES, Suely Ferreira. Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 1994.

MORGADO, Augusto, PITOMBEIRA, João B., CARVALHO, Paulo, FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

NOGUEIRA, Rio. Lições de Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1972.

PARZYSZ, Bernard. Des statistiques aux probabilités Exploitions les arbres. In: REPERES-IREM, nº 10,1993.

PIAGET, Jean e INHELDER, Barbel. La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France, 1974.

PINTO, Renata A.. Erros e Dificuldades no Ensino da Álgebra: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula. Campinas: UNICAMP-FE, 1997. Dissertação de Mestrado.

RASHED, Roshdi. Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes. Paris: Société D'Édition Les Belles Letres, 1984.

ROA, Rafael, BATANERO, Carmen, GODINO, Juan D. e CAÑIZARES, M. Jesús. Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. Epsilon, 36, 1996.

SANTOS, José Plínio de Oliveira, MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T. C.. Introdução à Análise Combinatória. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

SCHÖN, Donald A. The Reflective Practitioner. Cambridge, Massachusetts: Basic Books, 1983.

SÃO PAULO (Estado) SE/CENP. Proposta curricular para o ensino de Matemática; 2º GRAU. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SÃO PAULO (Estado) SE/CENP. Proposta curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério. São Paulo: SE/CENP, 1990.

SMOLKA, Ana L. B.. A Prática Discursiva na Sala de Aula: uma Perspectiva Teórica e um Esboço de Análise. In: Cadernos CEDES, N° 24. Campinas: Papirus, 1991.

_____. Conhecimento e Produção de Sentidos na Escola: a Linguagem em foco. In: Cadernos CEDES, N° 35. Campinas: Papirus, 1995.

THIOLLENT, Michel. Metodologia da Pesquisa-Ação. São Paulo: Cortez, 1994.

TROTTA, Fernando, IMENES, Luis Márcio P., JACUBOVIC, José. Matemática Aplicada, vol. 2, 2° grau. São Paulo: Ed. Moderna, 1979.

TUCKER, Alan. Applied Combinatorics (second edition). New York: Ed. John Wiley and sons, 1984.

UNESCO. Los módulos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria, 1977.

VILENKIN, N. De cuantas formas? Combinatoria. Moscou: Editorial Mir.(s/d).

ZABALZA, Miguel Ángel. Diários de Aula. Tradução: José Augusto Pacheco. Portugal: Porto Editora, 1994.

ANEXOS

Anexo 1

Provas

Primeira prova

1) Uma classe deverá ter, certo dia, seis aulas de seis matérias diferentes (M, P, F, Q, B e H). Se a primeira aula tem de ser da disciplina F, de quantos modos pode ser montado o horário do dia?

2) Numa sacola existem 5 esferas de cinco cores diferentes. Faço 3 retiradas de uma bola da sacola e para cada retirada anoto a cor da bola. Quantas seqüências possíveis vou anotar: a) sendo que a esfera retirada não é mais colocada de volta?

b) sendo que, a cada retirada, a esfera retirada é colocada de volta na sacola?

3) Quantos coquetéis distintos, de duas bebidas, podemos formar, dispondo de quatro bebidas quaisquer?

4) Com os algarismos do conjunto $\{5, 6, 7, 8\}$, quantos números de três algarismos podemos formar sendo que o algarismo 7 deve estar presente exatamente duas vezes nos números formados?

5) Um país usava o seguinte modo para fazer suas placas de veículos: três caracteres, sendo os dois primeiros, vogais; e o último, um algarismo. Como a frota cresceu, foram bolados novos tipos de placas: novamente três posições, sendo a primeira ocupada por vogal, a segunda por uma letra qualquer (inclusive K, W, Y e vogais) e a última posição por um algarismo. Pergunta: quantas placas a mais foi possível conseguir usando o novo tipo de placa?

Segunda prova

1) O diretor de um clube deve escolher 3 sócios que deverão ser responsáveis pela pintura de uma sala do clube. Se o clube tem 12 sócios, de quantos modos o diretor pode escolher os 3 sócios?

2) De quantos modos podemos organizar uma fila indiana composta de 7 pessoas - 4 rapazes e 3 moças, mas de tal modo que não aconteça de ficarem moças atrás de moças (e o mesmo para rapazes – não deve haver rapaz atrás de rapaz)?

3) Juquinha deve colorir um mapa da América do Norte (3 países) sendo que cada país deve ser colorido com uma cor diferente da dos outros países. Como Juquinha tem uma caixa com 11 lápis diferentes, de quantos modos ele pode fazer sua tarefa?

4) Houve um atropelamento e o motorista fugiu. Ouvidas as testemunhas, chegou-se às seguintes conclusões comuns:

A parte numérica consta de 4 algarismos diferentes e os dois últimos algarismos são zero e seis

A placa tem duas letras e a primeira é uma vogal enquanto a segunda é uma consoante.

Quantas são as placas suspeitas?

5) Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 3 algarismos menores que 400 podem ser formados...a) sem repetição de algarismos?

b) podendo haver algarismos repetidos?

Anexo 2

Questionário

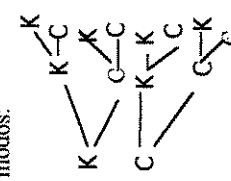
Sobre o trabalho do 1º bimestre com Análise Combinatória:

- 1) Fale um pouco sobre cada um dos temas que você estudou
- 2) Você se sente seguro para resolver questões ou exercícios a respeito? Justifique
- 3) Compare o trabalho com sua outras experiências ou aulas de Matemática de modo a poder avaliar o trabalho
- 4) Você acha que sua nota nas provas refletiu o que você realmente sabia? Justifique
- 5) Qual a importância do tema (Análise Combinatória)?
- 6) Utilize o verso da folha ou outro espaço para fazer mais comentários, se você achar necessário

Anexo 3

Os quadros a seguir são referentes aos exercícios da Primeira Fase da Proposta, quando enquadrados nas categorias do GRUPO 1: CATEGORIAS RELACIONAS COM O COTIDIANO DA SALA DE AULA

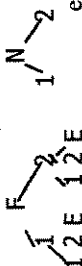
Exercício: (1.1) "Se lançarmos uma moeda três vezes consecutivas, quais e quantos são os resultados possíveis?"

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos Rapidamente tive que ajudar em coisas do tipo: um resultado possível é cara, cara, cara, um outro possível é cara, coroa, cara.	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
<p>A partir daí não houveram muitas dificuldades, quase todos os alunos fizeram o exercício. Quem resolveu, resolveu listando as oito possibilidades.</p> <p>P: Como resolveram? Cl: Ah! Fui escrevendo... Um aluno: KKK outro KCC outro CCC... Cl: Coloca tudo cara primeiro! P: Espere aí, é melhor seguir uma certa ordem, então? Cl: Sim.</p>			<p>Após um pequeno tempo depois de ter colocado o enunciado, dei a sugestão para os alunos escreverem "K" para cara e "C" para coroa. (...)</p> <p>P: Então deixa eu ver como alguém resolveu...Karen! A Karen Então me ditou como ela tinha feito e eu escrevi na lousa...A classe disse que aquela resposta estava OK! Al disse: olha, todos que resolveram fizeram assim mas tem outros modos:</p>
			 <p>1º lanc. 2º 3º (apresentei o esquema de árvore, que pareceu ser bem entendido)</p> <p>usando o esquema de árvore que estava na lousa, falei e escrevi o seguinte: poderia ser também:</p> $1^\circ \text{ lanc. } \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 8$ <p>P.: No 1º lançamento, tenho 2 possibilidades, para cada um do 1... ou fixando um do 1º tenho 2 e finalmente no 3º lançamento tenho 2 possibilidades então... terei um total de oito!</p>

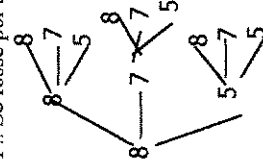
Exercício: (1.2) “Se lançarmos ao mesmo tempo 3 moedas iguais uma única vez, quais e quantos são os resultados possíveis?”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
	<p>No segundo exercício, mal tinha terminado de colocar o enunciado e já houve quem falasse: mas é igual!! (...) No exercício 2 houve muita discussão KCK e KCC são dois que podem acontecer?</p> <p>a maioria pareceu compreender e aceitou a resposta...inclusive alguns iam dizendo...é, não vale a ordem...é, as moedas são iguais...se as moedas fossem numeradas seria diferente (muito bom este comentário, achei).</p>	<p>Zélia: eu não concordo. Ninguém se manifestou. Achava que ia ter mais gente marquei bobeira pois ficou só a Zélia não concordando ...embora disse que achava ótimo que ela não havia concordado. Falei para algum colega tentar explicar o exercício e o que ouvimos foram: não importa a ordem, se elas fossem numeradas.. Me pareceu que ela não entendeu direito mas deixou os exercícios rolarem para frente.</p>	<p>e eu dizia: é..., mas como as moedas são iguais e você joga para cima e só vê como elas caem não dá para contar isto... tem de contar isto uma vez só. (...) mostrei na lousa a resolução</p> <p>Eu procurei repetir estas considerações em voz alta para que todos ouvissem.</p> <p>Disse que (para aquele exercício) aquele esquema de árvore não dava para ser utilizado, nem o Princípio Multiplicativo (sem usar estes nomes).</p>

Exercício: (I.3) “Da cidade A até a cidade B pode se fazer a viagem de trem ou de navio. Existem duas companhias ferroviárias e duas de navegação à disposição e em todas há 3 tipos de passagem: 1ª classe, 2ª e econômica. De quantos modos uma pessoa pode fazer sua viagem de A até B?”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
<p>Ela me ditou e eu escrevi na lousa: $2F.3P=6$ $6+6=12$ $2N.3P=6$ P: Wania, como você fez? Van.: $4C.3P=12$ P: E você? (para Bruno) Viagem</p>  <p>$12E \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} E$ e falei : Bom, já dá para observarmos que vai dar 12</p>	<p>Me pareceu aqui que os alunos estavam cansados, mais por terem de copiar os exercícios, uma vez que houve questões do tipo ...e os exercícios da apostila?</p> <p>Este exercício animou os alunos pois de um modo geral eles conseguiram resolver</p>		<p>Falavam ainda dois exercícios que eu havia preparado e em tal situação dei uma “administrada” do tipo: Vamos lá, que só faltam dois. (...) e me animou também, quando vi que surgiram várias resoluções. No momento de usar a lousa para mostrar as várias idéias surgidas, comecei perguntando como Karina havia feito. Ela me ditou e eu escrevi na lousa:</p> <p>Falei da importância da multiplicação, mas alertei para eles tomarem cuidado pois nem todas as respostas podem ser obtidas pela multiplicação.</p>

Exercício: (1.4) “Com os algarismos 8, 7 e 5, quantos números de 3 algarismos podemos formar: a) Não podendo repetir algarismos? b) Podendo haver algarismo repetido?”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
<p>No exercício 4 a) boa parte (todos, acho) listou os seis números possíveis.</p>	<p>que os alunos, parecem, entenderam</p> <p>Mas no b) alguns já diziam ah! vai ser muitos.</p>		<p>Na lousa coloquei os 6 e argumentei que também dava o esquema de árvore. Aqui eu falei este nome e também o nome Princípio Multiplicativo.</p> $\begin{array}{r} \text{Cent} \\ \text{dez} \\ \text{unid} \\ 3 \quad 2 \quad 1 \\ = 6 \end{array}$
<p>Entretanto, só um aluno (Bruno) fez pelo P.M. (acho que era tão óbvio) o resto fez (escreveu) todos: só alguns chegaram nos 27.</p> <p>Outra parte se deu mal, “travando” em algum lugar ou chegando a 21, como uns 4 alunos.</p>			<p>P.: Então vamos tentar achar um jeito só de fazer contas e achar o resultado sem ter de escrever todos.</p> <p>Respondi que eram 27, que se eles fossem listar deviam manter certa ordem pois senão iam errar.</p> <p>P.: Se fosse por árvore, teríamos.</p>  <p>E perguntei: Quantos começam por 8? C1: 9 Pensando assim, quantos por 5? 9 E por 7? 9 Bom, teremos 27. E falei do P.M. $\begin{array}{r} \text{cent} \\ \text{dez} \\ \text{unid} \\ 3 \quad 3 \quad 3 \\ = 27 \end{array}$</p>

Exercício: (1.5) “Um time de futebol dispõe de 2 jogos de calções, 2 jogos de meias e 3 jogos de camisas. De quantas maneiras os jogadores podem vestir-se para um jogo?”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
<p>Tais e Zélia optaram por dar nomes mesmo às cores. Boa parte fez coisas do tipo c1, c2, c3 etc.. Quanto às respostas, o pessoal foi meio lento e creio que listagem foi o método mais usado.</p> <p>Na lousa, pedi que Bruno falasse como tinha feito (eu já tinha visto). Bruno gosta do diagrama de árvore.</p> <p>Ele fez:</p> $ \begin{array}{c} c1 \quad c2 \quad c3 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ s1 \quad s2 \quad s1 \quad s2 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \downarrow \quad \swarrow \\ m1 \quad m2 \quad m1 \quad m2 \end{array} $ <p>Coloquei algo assim na lousa já argumentando que se para a camisa 1 haviam 4 tipos de uniforme, então o total seria 12. Os alunos aceitaram numa boa.</p>	<p>Alguns alunos não sabiam direito o que significava jogo de camisas e calções e meias (meunias, em geral)</p> <p>Voltando ao ex.: teve quem perguntou: Pode ser tipo assim... camisas verde , amarelo e azul?</p>		<p>P.: Sim, tranquilo. Camisa verde, amarela azul,...short, sei lá...duas cores...verde ou amarelo e meias, a mesma coisa.</p> <p>Além disso, também escrevi e argumentei:</p> $ \frac{\text{cam}}{3} \frac{\text{short}}{2} \frac{\text{meia}}{2} = 12 \text{ o} $ <p>que um certo número de alunos tinha feito. Combinei com os alunos de chamarmos isto de esquema de multiplicação e sempre (em todos os exercícios) alertei que nem sempre podemos usá-lo, é importante antes fazer um desenhinho, um rascunhozinho para ver se dá mesmo para usar.</p>

Exercício: (1.6) “À diretoria de uma firma concorrem 3 candidatos à presidência e 5 à vice-presidência. Quantas chapas distintas podem ser formadas?”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
<p>E aí classe, como fizeram? Saulo : Ah, eu listei. P.: Como? Assim: 1° P 1° VP 1° P 2° VP 1° P 3° VP 1° P 4° VP 1° P 5° VP e daí fiz 2° P 1° VP ... (...) Ainda no ex.1 ocorreu em alguns momentos: P.: Dá para usar a multiplicação. Cl.: Eu estou usando a soma. Neste caso estavam se referindo a raciocínios como o apresentado acima. (...)</p>	<p>Existiram pequenas dúvidas sobre como constituir a chapa (...) A maioria fez usando listagem e multiplicação. Muitos iam resolvendo e perguntando: dá 15? P.: Sim, é isso.</p>	<p>Wania: A B C (no seu caderno) 1 2 3 4 5 mas se eu fizer A e 1 , os outros vão sobrar, não pode ..ou pode? P.: Veja, se a chapa for A1 os outros não farão parte da chapa e tudo bem, sei lá, eles só votarão, por exemplo. Se a chapa for A2, a mesma coisa, os 6 que sobram farão outra coisa, tudo bem. Zélia : Tudo bem professor, dá 15 mas...não dá 15 mesmo! P.: Vamos ver a resolução. .</p>	
		<p>Enquanto o pessoal resolvia rapidamente o ex5 e partia para o ex7, ocorreu o seguinte: Em seu caderno 1° P 1° VP 1° P 2° VP 1° P 3° VP 1° P 4° VP</p>	

		<p>15 chapas</p> <p>1º P 5º VP</p> <p>Zélia: como assim 15?</p> <p>Eu meo que repeti a explicação anterior só com ela:</p> <p>Ora, temos três pessoas que podem ser presidente e nosso colega (que me relatou a resposta) os chamou assim: 1º P 2º P e 3º P e do mesmo modo para os 5 que podem ser vice-presidentes...</p> <p>Para o cara chamado 1º P:</p> <p>1º P 1º VP 2º P 1º VP 3º P 1º VP</p> <p>1º P 2º VP 2º P 2º VP 3º P 2º VP</p> <p>1º P 3º VP 2º P 3º VP 3º P 3º VP</p> <p>1º P 4º VP 2º P 4º VP 3º P 4º VP</p> <p>1º P 5º VP 2º P 5º VP 3º P 5º VP</p> <p>Que podem ser feitas 5 chapas a mesma coisa</p> <p>15!!!!</p> <p>Aqui creio que ela se satisfiz.</p>	
--	--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

mais 5

Exercício: (1.7) “Um grupo é constituído de 3 moças e 2 rapazes. Então, o número de casais possíveis é: a) 6 b) 5 c) 9 d) 3 e) 15.”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
			<p>O ex foi tranquilo, eu mesmo fiz a listinha e (como sempre) raciocinei no esquema da multiplicação: $m \cdot r$</p> <p>$3 \cdot 2 = 6$ para cada moça posso formar dois casais!!</p>

Exercício: (1.8) “A placa de moto é formada por três letras e quatro dígitos. O número de placas que podem ser formadas com o prefixo ABC é: a) 100 b) 10000 c) 30 d) 110 e) 999”

Cat. 1: Procedimentos dos alunos	Cat. 2: Reações dos alunos	Cat. 3: Interações	Cat. 4: Procedimentos e atuação do professor
<p>Teve quem pensou ...de 0001 até 9999 são 9999, não tem esta resposta, então é 10000 por que entra o 0000. (...)</p>	<p>O ex praticamente não apresentou meio termo: ou o aluno fez ou não fez. (...)</p>		<p>Olha...ABC...me dêem um exemplo de placa Tais: ABC0907 P.: precisa ser 0 no 1º dígito? Cl.: Não. Pode ser 1, 2, 3 ... Lousa: ABC1907, ABC 2907 ... Quantas opções para o 1º dígito? Alguns alunos: 10 P.: 10, né!? (contei os dígitos) 1, 2, 3 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 opções, então ABC ____ 10 Cl.: 10. P.: Olha, uma vez que eu preenchi o 1º dígito, para o 2º dígito, qualquer que seja o 1º, tenho 10 opções. ABC ____ 10 10 ____ e assim por diante, para o 3º e para o 4º ABC ____ 10 10 10 10 então: 10000 P.: E se eu quisesse que a chapa tivesse final par? ABC ____ 10 10 10 é 10 aqui? Cl.: 5 P.: Isso, pode ser 0, 2, 4, 6, 8, ou seja, 5 opções, bom mas finalizando 5temos mesmo 10000. Só um detalhe, eu não sou do detran mas tenho quase certeza que não existem chapas do tipo 0000 então o exercício tinha esta falha. (...)</p>
		<p>No intervalo, Fabíola disse ah eu tentei daquele jeito (0001 e ir contando) mas</p>	

	<p>la começar a aula quando Zélia me pediu que explicasse de novo o ex da aula anterior. (...) uma parte da classe queria também a tal explicação embora alguns dissessem ah, não!! A maioria pediu uma "explicadinha rápida"!!</p>	<p>eu parei no 4999 nem sei por que.(embora ela demonstrou que tinha aceito e compreendido que era 10000) Falei: é olha podemos ter 0001, 0002, ...,4999 mas também podemos ter 8735 por exemplo. Fábula: E, é sim. (...)</p>	<p>Para não voltar a repetir o exercício de novo, falei: bem vamos imaginar algo diferente no exercício. Ele só quer placas com ABC mas e se não dissesse nada, Sabemos que uma placa é formada assim: ____três letras e 4 números Continuei: pode ser (louca) AAA AAB AAC então quantas letras podem ser aqui? (indicando o terceiro "espaço") _____ (na 1ª aula quase só deu eu falando) Cl.: 23, 26. P.: Bom, gente nas placas são usadas 26 letras pois incluímos k, y e w. ABA ACA ABB ____26 ora, depois que esgotamos AA e as 26 letras podemos mudar para a letra do meio P.: Percebemos o seguinte: para cada uma das 26 opções, tenho outras 26 na 2ª letra porisso dá o esquema da multiplicação... e o mesmo para a outra letra (sempre ressalto o fato que nem</p>
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

		<p>sempre dará certo o esquema de multiplicação)</p> <p>$\overline{26\ 26\ 26}$</p> <p>26^3</p> <p>Teve quem disse dá (não sei quanto) e eu disse que não tinha feito a conta. Bom, gente para os dígitos vai ser a mesma idéia: $10.10.10.10 = 10^4 = 10000$ os alunos foram falando junto!!!</p> <p>Mas vamos ver isto direito, o exercício fixa ABC então, deixa até eu exagerar aqui (acho que foi uma boa idéia)</p> <p><u>A</u> ____ P.: quanta opções para a 1ª letra? 1 Cl.: Uma</p> <p>P.: E, só o A que está fixo e para a segunda? Cl.: Uma</p> <p>P.: e a 3ª? Cl.: Uma</p> <p><u>A</u> <u>B</u> <u>C</u> 1 1 1</p> <p>P.: Então 1.1.1 = 1 opção: ABC Bem, podemos ter: Lousa ABC0001 ABC0002 ABC0010 ABC0011</p> <p>Cl.: e o 0000?</p> <p>P.: Bom, o exercício considerava, embora a gente saiba que na realidade esta placa não existe. Nuno: Existe sim.</p> <p>P. e alunos: Não, esta placa não é comercializada. P.: Bom, então para o 1º dígito temos 10 opções.</p> <p><u>10</u> ____ por exemplo pode ser o 3 $\frac{3}{10}$ ____</p> <p>Se fixar o 3 tenho quantas opções para o 2º dígito? Cl.: 10</p> <p>P.: 10 pois pode repetir número e dei um exemplo de uma placa com números repetidos. P.: se fixar o 2 a mesma coisa: 10 opções, se for o 5, também 10 opções, ou seja, para cada número no 1º dígito, tenho 10 opções na 2ª ... e o mesmo na 3ª e na 4ª</p> <p><u>10 10</u> ____</p>
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

		<p>Nuno: Ah! E para calcular os resultados da megasena? Eu calculei e deu ...(ele disse um resultado)</p> <p>P.: Olha, tudo bem depois se você quiser eu confiro no fim da aula. Um cuidado que você tem de ter é o seguinte: na megasena tanto faz sortear o 1 e depois o 15 e depois o 27 quanto 1º o 27, depois o 1 e depois o 15 e não sei se você levou isto em consideração, aí não é só aplicar o esquema da multiplicação.</p>	<p><u>10 10 10 10 = 10000</u> E acho que agora realmente os alunos entenderam.</p> <p>Senti uma dúvida no ar. P.: Olha, tem inclusive um daqueles papatudo ou telesena em que você tinha números numa cartela por exemplo: 15, 27 35. Se no sorteio saísse nesta ordem você ganhava um prêmio P1, se saísse, sei lá, 27, 35, 15 você ganhava um prêmio P2, diferente pois as chances são diferentes. Olha, daqui um tempinho dará para a gente resolver isto. Não adianta a gente começar com um exemplo deste pois a gente não teria ferramentas para resolver, porisso estamos indo devagar, progredindo. Vejam, mesmo no correr do tempo, as coisas evoluem, antigamente não existia megasena ou coisas parecidas. As apostas eram mais com moedas, cartas, como por exemplo aqueles exercícios que vimos no começo... Cl.: E dados? P.: Também. Vejam: uma pessoa que sabia que no arremesso da moeda 3 vezes existem 8 chances possíveis leva vantagem para apostar contra uma pessoa que não sabe disto. Ele sabe que tem uma chance em 8 para ganhar e tem mais noção de quanto ou como apostar. Do mesmo modo, olhem o exercício das placas (que estava na lousa). O pessoal usava placas de 2 letras e quando a frota cresceu precisaram aumentar as placas. Devem ter havido sugestões: por que não aumentar um número?</p> <p><u>26 26 10 10 10 10</u> Cl.: não é vantagem pois multiplica por 10.</p>
--	--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

		<p>P.: E, se pensarmos nas placas de 2 letras...se colocarmos uma letra a mais, a gente multiplica o que tinha por 26, com um número, multiplicamos só por 10. (achei boa esta discussão...)</p> <p>P.: Alguém pode ter sugerido: por que não só letras?</p> <p><u>26 26 26 26 26 26 26</u> ia ter placas pra caramba mas aí pode ser que os policiais tenham argumentado que fica mais difícil para memorizar letras que números...</p> <p>Nuno: eu acho mais fácil letras...</p> <p>P.: E, sei lá, estou dizendo que pode ser que tenham pensado isto...</p> <p>P.: E por que não valer números e letras? Ai, seria uma beleza...</p> <p><u>36 36 36 36 36 36 36</u></p> <p>(...)</p> <p>O fruto desse debate foi voltarmos à discussão sobre ordem</p> <p>Nuno demonstrava não concordar muito com o que dizíamos.</p> <p>Voltei e comparei os exercícios envolvendo as moedas:</p> <p>Em um deles $KCK \neq KKC$</p> <p>No outro $KCK = KKC$ disse que neste exercício o caso KCK deve ser contado uma só vez, o que importava era a quantidade de caras e coroas.</p> <p>Ele ainda não parecia convencido.</p> <p>Fiz uma breve volta aos exercícios que tínhamos visto e dei exemplos</p> <p>E aí Nuno pareceu estar mais convencido.</p> <p>Aproveitei isto e alertei a classe sobre a importância da ordem.</p>
--	--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

