

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Bifurcações de Órbitas Periódicas
Simétricas em Sistemas Reversíveis**

por

Germano Abud de Rezende [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do Cnpq.

Bifurcações de Órbitas Periódicas Simétricas em Sistemas Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Germano Abud de Rezende** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de Abril de 2004.

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Prof. Dr. Paulo Régis Ruffino.

Prof. Dr. Ronaldo Garcia.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aos meus pais

Célia e Nadir

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha esposa Cassiana Javessine pela paciência e compreensão sem os quais jamais teria conseguido concluir este trabalho. Agradeço também à minha sogra Neuza pelo apoio e confiança. Também sou grato ao prof. Marco Antonio Teixeira pela credibilidade que depositou em mim, pelo competente trabalho de orientação e ajuda em diversos momentos. Finalmente, quero agradecer aos professores, funcionários e colegas de curso pelos momentos felizes e pela solidariedade durante os momentos difíceis, e de um modo especial à Tânia, Cidinha, Ednaldo e aos companheiros Elder Jesus, Rogério Casagrande, Maurício, Marcos César (pelo trabalho desenvolvido com o Latex), Alonso, Rodolfo, Edward, Lindomberg, Vinícius, Marcelo Gonçalves, Ariosvaldo e tantos outros que permanecerão na minha memória.

ABSTRACT

In this work we investigate the typical bifurcation of symmetric periodic orbits near the origin of a family of reversible systems $\dot{x} = f(x, \mu)$. We are assuming that $D_x f(0, 0)$ has only purely imaginary eigenvalues $\pm iw_1, \dots, \pm iw_k$. Incorporated with putting f into normal form, a modified version of Liapunov-Schmidt reduction can be applied to obtain the reduced bifurcation equations. We then focus on the cases in resonance, i.e, $w_j = n_j w_0$, where w_0 is a nonzero real number and n_j is an integer for each j . Some codimension-two bifurcations are illustrated for the system in non-semisimple resonance with $n_j = 1, 2$. A few codimension-one cases are also illustrated.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo dos tipos de bifurcações de órbitas periódicas simétricas, próximo da origem, de uma família de sistemas reversíveis $\dot{x} = f(x, \mu)$. Supomos que $D_x f(0, 0)$ tem apenas autovalores imaginários puros da forma $\pm iw_1, \dots, \pm iw_k$. Colocamos f em sua forma normal e uma versão modificada do método de redução de Liapunov-Schmidt é aplicado para obter as equações de bifurcação reduzidas. Os casos em ressonância, i.e, $w_j = n_j w_0$, onde w_0 é um número real não nulo e n_j é um inteiro positivo para cada j , são então focalizados. Algumas bifurcações de codimensão 2 são ilustradas para o sistema em ressonância não semi-simples, com $n_j = 1, 2$. Alguns casos de codimensão 1 são também ilustrados.

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Abstract	ii
Resumo	iii
Introdução	1
Objetivo	1
Estrutura dos Tópicos Apresentados	2
1 Formas Normais	4
1.1 Uma visão geral	5
1.2 Formas Normais para Campos com Parâmetros	14
1.3 Formas Normais de Sistemas Reversíveis	19
2 O Método de Redução de Liapunov-Schmidt	23
2.1 Uma Primeira Visão do Método	23
2.2 O Método em Espaços de Dimensão Infinita	26
2.3 O Método Aplicado a Sistemas Reversíveis	30
3 Ressonância	39
3.1 Não semi-simples 1:1:1	39
3.2 Não semi-simples 1:1:2	41
3.3 Não semi-simples 2:2:1	44
3.4 Não semi-simples 1:1	48

3.5	Não semi-simples 1:1 degenerada	49
3.6	Semi-simples 1:2	51
3.7	Semi-simples 2:3	53
A	Alternativa Fredholm	55
	Bibliografia	58

Introdução

A Teoria de Sistemas Dinâmicos Reversíveis tem sido alvo de estudo, nas últimas décadas, por um grande número de matemáticos e físicos. Um sistema $\dot{x} = f(x)$ é denominado reversível se existe uma aplicação $R : M \rightarrow M$ que satisfaz:

$$DR_x f(x) = -f(Rx)$$

No nosso trabalho, focalizamos o estudo da dinâmica de tais sistemas em torno de pontos de equilíbrio, através da teoria de Formas Normais e do método de redução de Liapunov-Schmidt.

Tais sistemas surgem em diversos problemas práticos na física e na engenharia. Em [20] encontramos vários exemplos de sistemas reversíveis.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é investigar a existência e os tipos de bifurcações de órbitas periódicas simétricas de famílias a k -parâmetros de sistemas reversíveis expressados por $\dot{x} = f(x, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}^k$.

Em geral, a teoria de formas normais nos fornece uma boa simplificação desse estudo. Através dela podemos eliminar termos não lineares irrelevantes para o nosso estudo. Estes termos são chamados de monômios não-ressonantes.

Em particular, estudamos sistemas que variam em torno de um certo valor do parâmetro ($\mu = 0$).

Exibiremos alguns tipos de bifurcações representadas genericamente por famílias a 1 e 2 parâmetros. Neste ponto, o método de redução de Liapunov-Schmidt é de grande utilidade.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, desenvolvemos a Teoria de Formas Normais. O método consiste em encontrar mudanças de coordenadas formais de tal maneira que o sistema dinâmico fique em uma forma "mais simples" que o original. Desta maneira o seu estudo torna-se mais fácil. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [1], [3], [6], [23], [21], e [17].

Na seção 1.1, fazemos uma introdução, abordando elementos básicos da Teoria de Formas Normais e apresentando alguns exemplos.

Na seção 1.2, apresentamos a versão da Teoria de Formas Normais para o caso de campos vetoriais com parâmetros. Esta versão difere da apresentada na seção 1.1 apenas pelo fato de se permitir que as mudanças de coordenadas dependam do parâmetro. Também apresentamos exemplos.

Na seção 1.3, adequamos o método para o caso reversível. O principal resultado é que a forma normal respeita a reversibilidade.

- No capítulo 2, apresentamos o método de redução de Liapunov-Schmidt. Sua utilidade está no fato de que ele reduz o problema inicial, em dimensão infinita, para um problema em dimensão finita. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [8], [13], e [17].

Na seção 2.1, damos uma primeira visão do método em dimensão finita, apresentando os conceitos básicos.

Na seção 2.2, estendemos o método para o caso de dimensão infinita. Aqui são necessárias algumas hipóteses extras.

Na seção 2.3, adequamos o método para o caso reversível. Observamos que as órbitas periódicas são determinadas pelos zeros de uma aplicação M no espaço de soluções X . Aplicando o teorema da função implícita, reduzimos $M = 0$ para $M|_Q = 0$, onde Q é

um subespaço (núcleo generalizado) de X . Quando o campo vetorial é colocado na sua forma normal (que comuta com a parte semi-simples de $A_0 = D_x f(0, 0)$) de ordem m , a aplicação reduzida $M|_Q = 0$ tem imagem em Q até ordem m . Com este resultado, as equações que determinam as bifurcações podem ser expressadas explicitamente.

- No capítulo 3 e suas seções aplicamos os teoremas e resultados citados para estudar os tipos de bifurcações de órbitas periódicas simétricas próximas da origem, e estas bifurcações têm codimensão 1 ou 2. Em particular, consideramos alguns casos com ressonância. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [8], [12], e [17].

CAPÍTULO 1

Formas Normais

Um *campo vetorial* em uma variedade C^∞ , M , é uma aplicação $f : M \rightarrow TM$ no fibrado tangente de M . Localmente, temos $f(x) = (x, \sum f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i})$, onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma base em $T_x M$.

Dado um campo vetorial f , defina a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x).$$

A *solução* (ou trajetória) de f é uma curva $x : R \rightarrow M$ tal que $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$. Queremos investigar estas soluções.

Um difeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ define o campo vetorial

$$(\Phi^* f)(x) = (D\Phi(x))^{-1} f(\Phi(x)), \quad x \in M,$$

onde $D\Phi(x)$ é a diferencial da aplicação $\Phi(x)$. Nos referimos ao campo $\Phi^* f$ como o *pull-back* de f por Φ .

Dois campos f, g são *conjugados* se existe um difeomorfismo Φ tal que

$$g = \Phi^* f.$$

A idéia natural é levar o campo vetorial f , por uma transformação, a uma forma mais simples para o seu estudo.

Se existem vizinhanças U, V de $x_0 \in M$ e um difeomorfismo local $\Phi : U \rightarrow V$ tal que $g(x) = (\Phi^* f)(x), \forall x \in U$ então os campos f e g são ditos *localmente conjugados* em uma vizinhança de x_0 .

Um ponto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 0$ é dito *singular* (ou crítico), caso $f(x_0) \neq 0$, é dito *não-singular*.

Se dois campos f, g são conjugados então os pontos singulares de f são levados em pontos singulares de g e órbitas periódicas de f , em órbitas periódicas de g (preservando-se o período).

Neste capítulo apresentaremos a Teoria de Formas Normais e a utilizaremos para simplificar o estudo de famílias de sistemas reversíveis da forma $\dot{x} = f(x, \mu)$.

1.1 Uma visão geral

Apresentaremos a teoria geral de formas normais. As principais referências são [1], [6] e [23].

Consideremos um campo vetorial de classe C^r no \mathbb{R}^n representado por

$$\dot{w} = G(w) \tag{1.1}$$

com $r \geq 4$.

Suponha que (1.1) tem ponto crítico em $w = w_0$.

Primeiramente encontraremos uma transformação linear de coordenadas que coloque (1.1) em uma forma mais simples.

a) transladamos o ponto crítico para a origem:

$$v = w - w_0,$$

Assim (1.1) é conjugado a

$$\dot{v} = G(v + w_0) = H(v). \tag{1.2}$$

b) Isolando a parte linear do campo (1.2):

$$\dot{v} = DH_0(v) + \bar{H}(v) \tag{1.3}$$

onde $\bar{H}(v) = H(v) - DH_0(v)$ (observe que $\bar{H}(v) = O(|v|^2)$).

c) Seja T a mudança de base que transforma DH_0 em sua forma canônica de Jordan (real).

Assim, pela transformação $v = Tx$ vem que

$$\dot{x} = T^{-1}DH(0)Tx + T^{-1}\bar{H}(Tx)$$

$$\dot{x} = Jx + F(x) \quad (1.4)$$

onde J é a forma de Jordan de DH_0 e $F(x) = T^{-1}\bar{H}(Tx)$. Assim a parte linear de (1.2) foi simplificada o máximo possível pela transformação $v = Tx$.

d) Vamos simplificar a parte não linear $F(x)$. Tomando-se a expansão de Taylor para $F(x)$ temos

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + \dots + F_{r-1}(x) + O(|x|^r) \quad (1.5)$$

onde $F_i(x)$ representa os termos de ordem i na expansão de Taylor de $F(x)$. Introduzimos a mudança de coordenadas

$$x = y + h_2(y) \quad (1.6)$$

onde $h_2(y)$ é de ordem 2 em y .

e) Daí, derivando (1.6) obtemos

$$\dot{x} = (id + Dh_2(y))\dot{y} = Jy + Jh_2(y) + F_2(y + h_2(y)) + \dots + F_{r-1}(y + h_2(y)) + O(|y|^r) \quad (1.7)$$

Cada termo $F_k(y + h_2(y))$ pode ser reescrito como $F_k(y) + O(|y|^{k+1}) + \dots + O(|y|^{2k})$. Daí a expressão acima se reescreve como

$$(id + Dh_2(y))\dot{y} = Jy + Jh_2(y) + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) \dots + \tilde{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r)$$

onde os termos $\tilde{F}_k(y)$ representam os termos $O(|y|^k)$ modificados pela transformação de coordenadas.

Agora, para y suficientemente pequeno, $(id + Dh_2(y))^{-1}$ existe e pode ser representado por uma expressão em série como

$$(id + Dh_2(y))^{-1} = id - Dh_2(y) + O(|y|^2).$$

Assim, obtemos

$$\dot{y} = Jy + Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) \dots + \tilde{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r). \quad (1.8)$$

Até aqui $h_2(y)$ foi tomada completamente arbitrária. Agora, escolhemos uma forma específica para $h_2(y)$ de forma a simplificar os termos $O(|y|^2)$ o tanto quanto possível. Devemos escolher $h_2(y)$ tal que

$$Dh_2(y)Jy - Jh_2(y) = F_2(y) \quad (1.9)$$

que elimina $F_2(y)$ em (1.8).

A equação (1.9) pode ser vista como uma equação funcional tendo como incógnita, a função $h_2(y)$. Ela é conhecida como *equação homológica*. Queremos motivar o fato de que, quando vista de forma correta, esta é de fato uma equação linear agindo num espaço vetorial linear. Concluiremos isto da seguinte maneira:

1. definindo o apropriado espaço vetorial linear;
2. definindo o operador linear nesse espaço;
3. descrevendo a equação linear a ser solucionada nesse espaço vetorial linear.

Passo 1: O espaço H_k dos monômios a valores vetoriais de grau k .

Seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de \mathbb{R}^n e $z = (z_1, \dots, z_n)$ coordenadas com respeito a essa base. Considere agora os elementos básicos com coeficientes consistindo de monômios de grau k , i.e.,

$$(z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n})u_i, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = k, \quad 0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}.$$

Nos referimos a estes objetos como monômios a valores vetoriais de grau k . O conjunto de todos eles forma um espaço vetorial que denotaremos H_k . Uma base óbvia para H_k consiste dos elementos formados quando consideramos todas as possibilidades de monômios de grau k que multiplicam cada u_i , i.e., $\{(z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n})u_i; \sum_{j=1}^n \alpha_j = k\}$ e assim a dimensão de H_k é

$$\dim H_k = n \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

onde n é a dimensão do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.1. $\{e_1, e_2\}$ base canônica de \mathbb{R}^2 . Denotando as coordenadas com respeito a essa base por x, y temos:

$$H_2 = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Passo 2: Vamos reconsiderar a equação (1.9). É claro que $h_2(y)$ pode ser visto como um elemento de H_2 . É fácil verificar que a aplicação $h_2(y) \mapsto Dh_2(y)Jy - Jh_2(y)$ é linear de H_2 em H_2 .

Analogamente, para qualquer elemento $h_k(y) \in H_k$, é verdade que $h_k(y) \mapsto Dh_k(y)Jy - Jh_k(y)$ é linear de H_k em H_k .

Definimos o *operador homológico* associado a J por $L_J(h_k(y)) = -(Dh_k(y)Jy - Jh_k(y))$.

Passo 3: A solução de (1.9).

Voltamos ao problema de resolver (1.9). É claro que $F_2(y)$ pode ser visto como elemento de H_2 . Por álgebra elementar, sabemos que H_2 pode ser (não unicamente) representado como

$$H_2 = L_J(H_2) \oplus W_2 \quad (1.10)$$

onde W_2 é o espaço complementar de $L_J(H_2)$.

Resolver (1.9) é como resolver a equação $Ax = b$ em álgebra linear.

Se $F_2(y)$ está na imagem de $L_J(\cdot)$, então todos os termos da forma $O(|y|^2)$ podem ser eliminados de (1.9). Em qualquer caso, podemos escolher $h_2(y)$ tal que restam apenas os termos $O(|y|^2)$ que estão em W_2 .

Denotaremos estes termos por $F_2^r(y) \in W_2$ (r denota o termo “ressonante”). Assim (1.8) pode ser simplificada para

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + \tilde{F}_3(y) \dots + \tilde{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r).$$

Neste ponto, podemos esclarecer a frase “simplificar os termos de segunda ordem”. Ela significa introduzir uma mudança de coordenadas tal que, no novo sistema de coordenadas, os termos de segunda ordem estão no espaço complementar a $L_J(H_2)$. Se $L_J(H_2) = H_2$, então todos os termos de segunda ordem podem ser eliminados. Podemos repetir este processo (*passos 1, 2 e 3*) para os termos de ordem 3, 4, 5, ... e daí obtemos o seguinte Teorema:

Teorema 1.2. (Forma Normal) *A equação (1.5) pode ser transformada, por meio de uma sequência de mudanças de coordenadas analíticas, em*

$$\dot{y} = Jy + F_2^r(y) + F_3^r(y) \dots + F_{r-1}^r(y) + O(|y|^r) \quad (1.11)$$

onde $F_k^r(y) \in W_k$, $2 \leq k \leq r-1$, e W_k é o espaço complementar de $L_J(H_k)$.

A equação acima é dita estar na sua *forma normal*.

Observação 1.3. *Observe que:*

1. Os termos $F_k^r(y)$, $2 \leq k \leq r-1$, são referidos como os termos ressonantes.
2. A estrutura dos termos ressonantes em (1.11) é determinada totalmente pela parte linear do campo vetorial (no sentido em que basta conhecer J para encontrarmos $W_k = (L_J(H_k))^C$ e cada termo $F_k^r(y)$ como combinação linear dos elementos da base de W_k).

3. Deve estar claro que simplificando-se os termos de ordem k , não modificamos os termos de ordem menor. Entretanto, termos de ordem maior são afetados. Isto acontece em cada passo da aplicação do método.

Exemplo 1.4. Encontraremos a forma normal para um campo em \mathbb{R}^2 na vizinhança de um ponto crítico, onde a parte linear é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando os termos de segunda ordem:

$$H_2 = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Queremos computar $L_J(H_2)$. Faremos isto, computando a ação de $L_J(\cdot)$ em cada elemento da base:

$$L_J \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_J \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_J \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_J \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$$

$$L_J \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix}$$

$$L_J \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Daí, } L_J(H_2) = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Como $\left\{ \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix} \right\}$ são l.i., os termos de segunda ordem que são combinações lineares destes 4 vetores podem ser eliminados. Para determinar a natureza dos termos de segunda ordem que não podem ser eliminados ($F_2^r(y)$) precisamos

computar o espaço complementar de $L_J(H_2)$. W_2 tem dimensão igual a 2. A representação matricial de $L_J(\cdot)$ nessa base é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um modo de determinar W_2 é encontrar dois vetores em \mathbb{R}^6 linearmente independentes e ortogonais a cada coluna da matriz acima, ou, em outras palavras, dois autovetores linearmente independentes a esquerda associados a zero ($v^T A = 0$). Os vetores

$$\left(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 0 \right), \left(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \right)$$

satisfazem tal propriedade. Assim,

$$W_2 = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daí uma forma normal até segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_1 x^2 + O(3) \\ \dot{y} &= a_2 xy + a_3 x^2 + O(3) \end{aligned}$$

com $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. A escolha de W_2 não é única, outra escolha poderia ser

$$W_2 = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

pois $\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}xy \end{pmatrix}$. Com esta escolha para W_2 a forma normal é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_1 x^2 + O(3) \\ \dot{y} &= a_2 x^2 + O(3) \end{aligned}$$

Outra possibilidade seria

$$W_2 = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \right\}$$

e daí teríamos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + O(3) \\ \dot{y} &= a_1x^2 + b_2xy + O(3) \end{aligned}$$

Observação 1.5. A fim de verificar a condição de invertibilidade de L_J encontraremos seus autovalores.

Suponhamos que DH_0 é diagonalizável e seus autovetores são e_1, \dots, e_n correspondendo aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Seja J sua forma de Jordan. Então segue que

$$Je_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tome como base para H_k o conjunto dos elementos da forma

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} e_i, \quad \sum_{j=1}^s \alpha_j = k, \quad \alpha_j \geq 0,$$

onde nós consideramos todos os possíveis termos $x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s}$ de grau k multiplicando cada e_i , $i = 1, \dots, n$. Agora, consideramos a ação de $L_J(\cdot)$ em cada um desses elementos da base de H_k . Seja

$$h_k(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} e_i, \quad \sum_{j=1}^s \alpha_j = k, \quad \alpha_j \geq 0,$$

então um simples cálculo mostra que

$$L_J(h_k(x)) = Jh_k(x) - Dh_k(x)Jx = [\lambda_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \lambda_j] h_k(x).$$

Assim, o operador linear $L_J(\cdot)$ é diagonal nessa base, com autovalores dados por

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \lambda_j.$$

Agora podemos visualizar o problema. Para que o operador $L_J(\cdot)$ seja invertível, ele não deve possuir o zero como um autovalor, o que neste caso acontece se

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^s \alpha_j \lambda_j.$$

A equação acima é dita ser uma ressonância e ela é a origem do nome “termos ressonantes” para os termos não-lineares que não podem ser removidos na forma normal. O inteiro $\sum_{j=1}^s \alpha_j$ é chamado de ordem de ressonância.

No caso em que J não é diagonal, podemos verificar que os autovalores de $L_J(\cdot)$ ainda são da forma $\lambda_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \lambda_j$.

Observação 1.6. *Aqui introduziremos um produto interno em H_k e verificaremos algumas propriedades. Sejam $p(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} x^\alpha e_j$ e $q(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha j} x^\alpha e_j$, onde $p_{\alpha j}$ e $q_{\alpha j}$ são constantes complexas e $x^\alpha e_j = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} e_j$. Definimos o seguinte produto interno em H_k :*

$$[p, q] = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} \bar{q}_{\alpha j} \alpha!,$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$.

Por exemplo, se $|\alpha| = |\beta| = k$ e $1 \leq i, j \leq n$ então definimos o seguinte produto interno:

$$[x^\alpha e_i, x^\beta e_j] = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \alpha!$$

onde δ_{ij} e $\delta_{\alpha\beta}$ são os símbolos de Kronecker.

O operador L_{A^*} , é o operador adjunto de L_A com respeito ao produto interno $[\cdot, \cdot]$ em H_k para cada $k \geq 2$, onde A^* é o operador adjunto de A com respeito ao produto interno usual (\cdot, \cdot) em \mathbb{C}^n . De fato, sejam $p, q \in H_k$, $p(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} x^\alpha e_j$ e $q(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha j} x^\alpha e_j$. Usando a linearidade de L_A , L_{A^*} e propriedades de produto interno, temos

$$\begin{aligned} [L_A p, q] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} p_{\alpha j} \bar{q}_{\beta i} [L_A (x^\alpha e_i), x^\beta e_j], \\ [p, L_{A^*} q] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} p_{\alpha j} \bar{q}_{\beta i} [x^\alpha e_i, L_{A^*} (x^\beta e_j)]. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que

$$[L_A (x^\alpha e_i), x^\beta e_j] = [x^\alpha e_i, L_{A^*} (x^\beta e_j)]$$

para qualquer α, β, i, j com $|\alpha| = |\beta| = k$ e $1 \leq i, j \leq n$. Daí,

$$\begin{aligned} L_A (x^\alpha e_i) &= -D(x^\alpha e_i) Ax + A(x^\alpha e_i) \\ &= -\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l a_{lm} \frac{x^\alpha x_l}{x_m} e_i + \sum_{l=1}^n a_{li} x^\alpha e_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{A^*} (x^\beta e_j) &= -D(x^\beta e_j) A^* x + A^* (x^\beta e_j) \\ &= -\sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_m \bar{a}_{lm} \frac{x^\beta x_l}{x_m} e_j + \sum_{l=1}^n \bar{a}_{jm} x^\beta e_m. \end{aligned}$$

$$\text{Desta forma } [L_A^k(x^\alpha e_i), x^\beta e_j] = \begin{cases} (-\sum_{l=1}^n \alpha_l a_{ll} + a_{ii}) \alpha!, & \text{se } i = j \text{ e } \alpha = \beta, \\ -\alpha_l a_{lm} \beta!, & \text{se } i = j; \beta_l = \alpha_l - 1, \\ & \beta_m = \alpha_m + 1 \text{ para qualquer } l \neq m; \\ a_{ji} \alpha! & \text{se } i \neq j \text{ com } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$[x^\alpha e_i, L_{A^*}^k(x^\beta e_j)] = \begin{cases} (-\sum_{l=1}^n \beta_l a_{ll} + a_{ii}) \beta!, & \text{se } i = j \text{ e } \beta = \alpha, \\ -\beta_m a_{lm} \alpha!, & \text{se } i = j; \alpha_l = \beta_l + 1, \\ & \alpha_m = \beta_m - 1 \text{ para qualquer } s \neq l, m; \\ a_{ji} \alpha! & \text{se } i \neq j \text{ com } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As duas expressões acima são iguais.

Podemos colocar uma ordem nos elementos da base de H_k , $\{x^\alpha e_j \mid |\alpha| = k, 1 \leq j \leq n\}$. Faremos isto por uma ordenação lexicográfica reversa, i.e.,

$$x^\alpha e_i < x^\beta e_j, \text{ se e somente se } (i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) > (j, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

onde $(i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) > (j, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ se e somente se $i > j$ ou $i = j$ e o primeiro componente de desigualdade, $\alpha_s \neq \beta_s$, satisfaz $\alpha_s > \beta_s$, $1 \leq s \leq n$. Escrevemos $i \sim (j, \alpha)$ se $x^\alpha e_j$ é o i -ésimo elemento da base com respeito a ordenação lexicográfica reversa.

Seja $d_k = \dim H_k$ e $U_k = \{u_1, \dots, u_{d_k}\}$ uma base ortogonal de H_k . Usaremos a base U_k da forma

$$u_i(x) = x^\alpha e_j, \quad |\alpha| = k, \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde $i \sim (j, \alpha)$ está na ordem lexicográfica reversa para $i = 1, \dots, d_k$.

Lema 1.7. Se A é triangular superior (respec., inferior) com elementos da diagonal $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, então L_A é triangular inferior (respec., superior). Em ambos os casos os elementos da diagonal de L_A são $\lambda_j - \sum_{l=1}^n \alpha_l \lambda_l$ onde $i \sim (j, \alpha)$.

Teorema 1.8. Seja $A = S + N$ a decomposição Jordan-Chevalley $S - N$ de A . Então $L_A = L_S + L_N$ é a decomposição $S - N$ do operador L_A .

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de \mathbb{C}^n tal que nessa base,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 + N_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s I_s + N_s \end{pmatrix}$$

onde λ_i são os autovalores de A , I_i é a matriz identidade $n_i \times n_i$, $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$i = 1, \dots, s$; $n_1 + \dots + n_s = n$. Pela unicidade da decomposição $S - N$ temos

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s I_s \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_s \end{pmatrix}$$

Pela Observação (1.5) L_S é diagonal e pelo lema anterior, L_N é triangular inferior com zeros na diagonal. Assim, L_S é semi-simples e L_N é nilpotente. É fácil verificar que L_S e L_N comutam (detalhes em [6]). \square

1.2 Formas Normais para Campos com Parâmetros

Consideremos o campo

$$\dot{x} = f(x, \mu); \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in I \subset \mathbb{R}^p; \quad (1.12)$$

onde I é um aberto de \mathbb{R}^p e f é de classe C^r em cada variável. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(0, 0) = 0$. O nosso objetivo é transformar (1.12) em sua forma normal próximo do ponto crítico em ambos espaços de fase e parâmetros. A melhor maneira de se fazer isto é proceder de modo análogo aos sistemas sem parâmetros, a não ser em permitir que os coeficientes da transformação dependam dos parâmetros.

Exemplo 1.9. $x \in \mathbb{R}^2$ e $D_x f(0, 0)$ tem autovalores $\lambda(0) = \pm i\omega(0)$. Daí podemos encontrar uma transformação linear tal que $D_x f(0, \mu)$ tem a forma

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & -\operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ \operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

para μ suficientemente pequeno.

Assim, pelo teorema da função implícita, o ponto crítico varia de maneira C^r com μ (para μ suficientemente pequeno) tal que, se necessário, podemos introduzir uma mudança de coordenadas (dependendo do parâmetro) tal que $x = 0$ é ponto crítico para todo μ suficientemente

pequeno. Tomando-se

$$\operatorname{Re} \lambda(\mu) = |\lambda(\mu)| \cos(2\pi\theta(\mu))$$

$$\operatorname{Im} \lambda(\mu) = |\lambda(\mu)| \sin(2\pi\theta(\mu))$$

é fácil ver que (1.13) assume a forma

$$D_x f(0, \mu) = |\lambda(\mu)| \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta(\mu)) & -\sin(2\pi\theta(\mu)) \\ \sin(2\pi\theta(\mu)) & \cos(2\pi\theta(\mu)) \end{pmatrix}$$

Assim, queremos a forma normal da seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = |\lambda(\mu)| \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta(\mu)) & -\sin(2\pi\theta(\mu)) \\ \sin(2\pi\theta(\mu)) & \cos(2\pi\theta(\mu)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(x, y; \mu) \\ f^2(x, y; \mu) \end{pmatrix}$$

onde cada f^i é não linear em x e y . Frequentemente, omitiremos a dependência do parâmetro de λ, θ , etc, para simplificar a notação. Quando a parte linear de campos vetoriais têm autovalores complexos, é mais fácil calcular a forma normal, utilizando-se coordenadas complexas. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Daí, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \exp(2\pi i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^1(z, \bar{z}; \mu) \\ F^2(z, \bar{z}; \mu) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

onde $F^1(z, \bar{z}; \mu) = f^1(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) + i f^2(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu)$ e $F^2(z, \bar{z}; \mu) = f^1(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu) - i f^2(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z}); \mu)$.

Assim precisamos realmente estudar a equação

$$\dot{z} = |\lambda| e^{2\pi i\theta} z + F^1(z, \bar{z}; \mu) \quad (1.15)$$

pois a segunda coordenada de (1.14) é simplesmente a conjugada complexa da primeira componente.

Iremos então colocar (1.15) na forma normal e transformá-la novamente para as variáveis x, y . Expandindo (1.15) em sua série de Taylor temos

$$\dot{z} = |\lambda| e^{2\pi i\theta} z + F_2 + F_3 + \dots + F_{r-1} + O(|z|^r, |\bar{z}|^r), \quad (1.16)$$

onde F_j é polinômio em z, \bar{z} , de ordem j com coeficientes dependendo de μ .

Simplificando os termos de segunda ordem: Tomamos a transformação $z \mapsto z + h_2(z, \bar{z})$,

onde h_2 é de segunda ordem em z e \bar{z} , com coeficientes dependendo de μ . Segue de (1.16) que

$$\dot{z} \left(1 + \frac{\partial h_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} = \lambda z + \lambda h_2 + F_2(z, \bar{z}) + O(3), \quad (1.17)$$

ou seja,

$$\dot{z} = \left(1 + \frac{\partial h_2}{\partial z} \right)^{-1} \left(\lambda z + \lambda h_2 - \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} + F_2(z, \bar{z}) + O(3) \right).$$

Note que vale $\dot{\bar{z}} = \bar{\lambda} \bar{z} + \bar{F}_2 + o(3)$ e para z, \bar{z} suficientemente pequenos,

$$\left(1 + \frac{\partial h_2}{\partial z} \right)^{-1} = 1 - \frac{\partial h_2}{\partial z} + O(2).$$

Daí, temos das duas equações acima e de (1.17) que

$$\dot{z} = \lambda z - \lambda \frac{\partial h_2}{\partial z} z - \bar{\lambda} \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \lambda h_2 + F_2 + O(3). \quad (1.18)$$

Então, podemos eliminar todos os termos de segunda ordem se

$$\lambda h_2 - \left(\lambda \frac{\partial h_2}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) + F_2 = 0. \quad (1.19)$$

A aplicação $h_2 \mapsto \lambda h_2 - \left(\lambda \frac{\partial h_2}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right)$ é linear, do espaço dos monômios em z, \bar{z} nele mesmo. Nós denotaremos este espaço por H_2 . F_2 pode ser vista como um elemento deste espaço. Assim, resolver (1.19) é um problema de álgebra linear. Temos $H_2 = \text{ger}\{z^2, z\bar{z}, \bar{z}^2\}$.

Computando a ação da aplicação linear acima em cada elemento da base temos:

$$\begin{aligned} \lambda z^2 - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} z^2 \right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \right) \bar{z} \right) &= -\lambda z^2 \\ \lambda z\bar{z} - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} z\bar{z} \right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z\bar{z} \right) \bar{z} \right) &= -\bar{\lambda} z\bar{z} \\ \lambda \bar{z}^2 - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} \bar{z}^2 \right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 \right) \bar{z} \right) &= (\lambda - 2\bar{\lambda}) \bar{z}^2 \end{aligned}$$

Assim, nessa base a aplicação linear é diagonal e sua matriz é

$$\begin{pmatrix} -\lambda(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\mu) - 2\bar{\lambda}(\mu) \end{pmatrix}$$

Para $\mu = 0$ deve ser óbvio que $\lambda(0) \neq 0$ e $\lambda(0) = -\bar{\lambda}(0)$, assim, para μ suficientemente pequeno $\lambda(\mu) \neq 0$ e $\lambda(\mu) - 2\bar{\lambda}(\mu) \neq 0$. Daí, para μ suficientemente pequeno, todos os termos de segunda ordem podem ser eliminados de (1.16).

Simplificando os termos de terceira ordem:

Temos que $z = \lambda z + F_3 + O(4)$.

Tomamos a transformação $z \mapsto z + h_3(z, \bar{z})$, onde h_3 é de terceira ordem em z e \bar{z} , com coeficientes dependendo de μ . Segue que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left(1 + \frac{\partial h_3}{\partial z}\right)^{-1} \left(\lambda z + \lambda h_3 - \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z} + F_3(z, \bar{z}) + O(4)\right) = \\ &= \lambda z - \lambda \frac{\partial h_3}{\partial z} z - \bar{\lambda} \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \lambda h_3 + F_3 + O(4). \end{aligned}$$

Queremos resolver

$$\lambda h_3 - \left(\lambda \frac{\partial h_3}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z}\right) + F_3 = 0. \quad (1.20)$$

Note que temos $H_3 = \text{ger}\{z^3, z^2\bar{z}, z\bar{z}^2, \bar{z}^3\}$. Computando a ação da aplicação linear $h_3 \mapsto \lambda h_3 - (\lambda \frac{\partial h_3}{\partial z} z + \bar{\lambda} \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \bar{z})$ em cada elemento da base, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda z^3 - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} z^3\right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^3\right) \bar{z}\right) &= -2\lambda z^3 \\ \lambda z^2\bar{z} - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} z^2\bar{z}\right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2\bar{z}\right) \bar{z}\right) &= -(\lambda + \bar{\lambda}) z^2\bar{z} \\ \lambda z\bar{z}^2 - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} z\bar{z}^2\right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z\bar{z}^2\right) \bar{z}\right) &= -2\bar{\lambda} z\bar{z}^2 \\ \lambda \bar{z}^3 - \left(\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} \bar{z}^3\right) z + \left(\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^3\right) \bar{z}\right) &= (\lambda - 3\bar{\lambda}) \bar{z}^3 \end{aligned}$$

Logo, nessa base a matriz da transformação linear é

$$\begin{pmatrix} 2\lambda(\mu) & & & \\ & -(\lambda(\mu) + \bar{\lambda}(\mu)) & & \\ & & -2\bar{\lambda}(\mu) & \\ & & & \lambda(\mu) - 3\bar{\lambda}(\mu) \end{pmatrix}$$

Agora, em $\mu = 0$, $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = 0$ e daí a segunda coluna acima é nula; entretanto, nenhuma das colunas remanescentes é identicamente nula em $\mu = 0$. Então, para μ suficientemente pequeno, os termos de terceira ordem que não são da forma $z^2\bar{z}$ podem ser eliminados. Assim, a forma normal é

$$\dot{z} = \lambda z + c(\mu) z^2\bar{z} + O(4);$$

onde $c(\mu)$ é uma constante que depende de μ .

Simplificando os termos de quarta ordem: Note que, em cada ordem, a simplificação depende de que $\lambda h - (\lambda z \frac{\partial h}{\partial z} + \bar{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bar{z}) = 0$ (e conseqüentemente temos uma coluna nula na matriz de L_J) para algum $h = z^n \bar{z}^m$, onde $m + n$ é a ordem do termo a ser simplificado. Daí,

$$\begin{aligned} \lambda z^n \bar{z}^m - (n\lambda z^n \bar{z}^m + m\bar{\lambda} z^n \bar{z}^m) &= 0, \\ (\lambda - n\lambda - m\bar{\lambda}) z^n \bar{z}^m &= 0 \end{aligned}$$

Em $\mu = 0, \lambda = -\bar{\lambda}$, assim não deve ocorrer que $1 + m - n = 0$. É fácil ver que isto nunca acontece se m e n são números pares. Assim, todos os termos de ordem par podem ser removidos e a forma normal é dada por

$$\dot{z} = \lambda z + c(\mu) z^2 \bar{z} + O(5);$$

para μ em alguma vizinhança de $\mu = 0$. Observe ainda que para obter essa forma, o campo precisa ser pelo menos C^5 .

Em coordenadas cartesianas temos:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu) &= \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \\ c(\mu) &= a(\mu) + ib(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \omega y + (ax - by)(x^2 + y^2) + o(5) \\ \dot{y} &= \omega x + \alpha y + (bx + ay)(x^2 + y^2) + o(5) \end{aligned}$$

Em coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r + ar^2 + \dots \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 + \dots \end{aligned}$$

1.3 Formas Normais de Sistemas Reversíveis

Aqui apresentaremos a Teoria de Formas Normais aplicada a sistemas reversíveis. As principais referências são [6], [18] e [21].

Definição 1.10. *Um difeomorfismo $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma involução se $R^2 = I$.*

Teorema 1.11 (Montgomery-Bochner). *Seja G um grupo compacto de difeomorfismos de uma variedade M de classe C^k ($k \geq 1$) ou analítica. Suponha que cada difeomorfismo de G é de classe C^k ou analítico. Então na vizinhança de um ponto fixo estacionário, coordenadas admissíveis podem ser escolhidas tais que os difeomorfismos sejam lineares.*

Assim se considerarmos $G = \{I, R\}$, em consequência do Teorema de Montgomery-Bochner, obtemos que toda involução, na vizinhança de um ponto fixo, pode ser linearizada. Portanto, em nosso trabalho estaremos sempre supondo que $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma involução linear.

Definição 1.12. *Um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ tal que $(DR)(x)f(x) = -f(R(x))$ é dito R -involutivo ou R -reversível.*

Como estamos supondo R linear a igualdade acima se reescreve como $Rf(x) = -f(Rx)$.

Observe da definição acima que se $x(t)$ é uma solução do sistema, então $Rx(-t)$ também é solução. Assim, a involução pode ser vista como uma simetria neste sistema envolvendo espaço e tempo.

Definição 1.13. *Uma órbita periódica simétrica é a órbita de uma solução periódica $x(t)$ com $Rx(-t) = x(t + \theta)$.*

Seja R uma involução linear em \mathbb{R}^n e A_μ , $\mu \in \mathbb{R}^k$, uma família C^∞ de transformações lineares R -involutivas em \mathbb{R}^n . Tome $A = A_0$.

Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ uma família de aplicações R -involutivas com $f(0, \mu) = 0$ e $Df(0, \mu) = A_\mu$, $\forall \mu \in \mathbb{R}^k$.

Usaremos a notação $f(x, \mu) = f_\mu(x)$. Para uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, seja $T_m g$ o seu polinômio de Taylor de grau m e $\tilde{T}_m g$ a parte homogênea de grau m em $T_m g$.

Seja ainda $\Phi^* g$ o pull-back de g por Φ , isto é, $(\Phi^* g)(y) = (D\Phi(y))^{-1} g(\Phi(y))$. A^* denotará a adjunta de A .

Temos assim o seguinte teorema da forma normal paramétrica:

Teorema 1.14. *Para cada $m \geq 2$, existe uma vizinhança Ω_m da origem em \mathbb{R}^k e uma aplicação $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega_m, \mathbb{R}^n)$ tal que para cada $\mu \in \Omega_m$,*

$$\begin{aligned} R\Phi_\mu &= \Phi_\mu R, \\ \Phi_\mu^* f_\mu &= A_\mu + g_\mu, \end{aligned}$$

onde $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega_m, \mathbb{R}^n)$, $D_x g_\mu(0) = 0$, $R \circ T_m g_\mu = -T_m g_\mu \circ R$ e $T_m g_\mu \circ e^{tA^*} = e^{tA^*} \circ T_m g_\mu$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nos passos (A) – (C) apresentamos uma demonstração.

(A) Para $l \in \mathbb{N}$, sejam

$$\begin{aligned} H_l &= \{h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \text{ cada componente } h_i \text{ é um polinômio homogêneo de grau } l\}. \\ H_l^\pm &= \{h \in H_l; Rh(x) = \pm h(Rx)\}. \end{aligned}$$

Em H_l defina os operadores lineares:

$$(L_{A_\mu})(h)(x) = A_\mu h(x) - Dh(x) \cdot A_\mu(x), \quad h \in H_l, \quad \mu \in \mathbb{R}^k.$$

Então a imagem desse operador restrito a H_l^+ é

$$R_l(A_\mu) = \{(L_{A_\mu})h; h \in H_l^+\}, \quad \text{para cada } \mu \in \mathbb{R}^k.$$

Temos então que $R_l(A_\mu) \subset H_l^-$ para cada $\mu \in \mathbb{R}^k$. De fato, tome $h \in H_l^+$ e considere a função $\tilde{h}(x) = h(Rx)$. Temos que

$$D\tilde{h}(x) = D(h(Rx)) = (Dh)(Rx)R$$

e como $h(Rx) = R(h(x))$ segue que $\tilde{h}(x) = R(h(x))$ e daí

$$(Dh)(Rx)R = (D\tilde{h})(x) = R(Dh)(x).$$

Assim, se $h \in H_l^+$, vale que $(Dh)(Rx) = R(Dh)(x)R^{-1}$. Agora, tome $(L_{A_\mu})h \in R_l(A_\mu)$, daí,

$$\begin{aligned} (L_{A_\mu})(h(Rx)) &= A_\mu h(Rx) - Dh(Rx)A_\mu(Rx) = A_\mu R(hx) - Dh(Rx)A_\mu(Rx) = \\ &= A_\mu R(hx) - RDh(x)R^{-1}A_\mu(Rx) = -RA_\mu(hx) + RDh(x)A_\mu(x) = \\ &= -R(A_\mu h(x) - Dh(x)A_\mu(x)) = -R(L_{A_\mu})(h(x)). \end{aligned}$$

Portanto, $R_l(A_\mu) \subset H_l^-, \forall \mu \in \mathbb{R}^k$.

Seja W_l um subespaço complementar a $R_l(A)$ em H_l^- , isto é,

$$H_l^- = W_l \oplus R_l(A).$$

Tome $\{(L_A)h_j\}_{j=1}^s$ uma base de $R_l(A)$; assim, para μ em uma vizinhança suficientemente pequena Ω_l da origem em \mathbb{R}^k temos que

$$H_l^- = W_l \oplus \text{ger}\{(L_{A_\mu})h_j\}_{j=1}^s. \quad (1.21)$$

Podemos supor que $\Omega_{l+1} \subset \Omega_l, 1 \leq l \leq m-1$.

- (B) Usaremos indução sobre l para encontrar $h_\mu^l \in H_l^+, w_\mu^l \in W_l$, com $\mu \in \Omega_l$. Um difeomorfismo Φ_μ é então construído com $\tilde{T}_l \Phi_\mu = h_\mu^l$ e $\tilde{T}_l \Phi^* f_\mu = w_\mu^l$ para $2 \leq l \leq m$. g_μ é então dada por $\sum_{l=2}^m w_\mu^l$.

Sejam então $\Phi_\mu^1 = I, g_\mu^1 = A_\mu$ e suponha que h_μ^{l-1} e w_μ^{l-1} foram encontrados. Defina

$$\begin{aligned} \Phi_\mu^{l-1} &= I + \sum_{i=2}^{l-1} h_\mu^i \\ g_\mu^{l-1} &= A_\mu + \sum_{i=2}^{l-1} w_\mu^i \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{T}_l(\Phi^* f_\mu) &= (L_{A_\mu})\tilde{T}_l \Phi_\mu + \tilde{T}_l[(T_l f_\mu - A_\mu)T_{l-1} \Phi_\mu - D_x(T_{l-1} \Phi_\mu - I).(T_{l-1}(\Phi^* f_\mu) - A_\mu)] = \\ &= (L_{A_\mu})\tilde{T}_l \Phi_\mu + \tilde{T}_l[(T_l f_\mu - A_\mu)\Phi_\mu^{l-1} - D_x(\Phi_\mu^{l-1} - I).(g_\mu^{l-1} - A_\mu)] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Observe que se $R \circ f_\mu = -f_\mu \circ R$ então $R \circ T_j f_\mu = -T_j f_\mu \circ R, \forall \mu, \forall j$ e o termo entre colchetes em (1.22) anticomuta com R se Φ_μ^{l-1} comuta com R . De fato, temos que

$$\begin{aligned} &[(T_l f_\mu - A_\mu)\Phi_\mu^{l-1} - D_x(\Phi_\mu^{l-1} - I).(g_\mu^{l-1} - A_\mu)](Rx) = \\ &= (T_l f_\mu - A_\mu)R\Phi_\mu^{l-1}(x) - RD_x(\Phi_\mu^{l-1} - I)R^{-1}.(g_\mu^{l-1} - A_\mu)(Rx) = \\ &= -R(T_l f_\mu - A_\mu)\Phi_\mu^{l-1}(x) - RD_x(\Phi_\mu^{l-1} - I)R^{-1}R.(g_\mu^{l-1} - A_\mu)(x) = \\ &= -R[(T_l f_\mu - A_\mu)\Phi_\mu^{l-1} - D_x(\Phi_\mu^{l-1} - I).(g_\mu^{l-1} - A_\mu)](x). \end{aligned}$$

Assim, de acordo com a decomposição (1.21) podemos encontrar um único $w_\mu^l \in W_l$ e h_μ^l como a única combinação linear de h_1, \dots, h_s tal que $\tilde{T}_l \Phi_\mu = h_\mu^l, \forall \mu \in \Omega_l$, e o lado direito de (1.22) é igual a w_μ^l . Após encontrar h_μ^l para $2 \leq l \leq m$, podemos construir um difeomorfismo Φ_μ tal que $R \circ \Phi_\mu = \Phi_\mu \circ R$ e $\tilde{T}_l \Phi_\mu = h_\mu^l$ para $2 \leq l \leq m$.

(C) Um produto interno pode ser construído no espaço de polinômios homogêneos escalares como no espaço de polinômios homogêneos vetoriais, isto é, H_l . Assim, W_l pode ser escolhido como o núcleo do operador $(L_A)^* = L_{A^*} : H_l^- \rightarrow H_l^+$. Isto é, cada w_μ^l pode ser escolhido de forma a comutar com e^{tA^*} , $\forall t \in \mathbb{R}$. De fato, tome $w_\mu^l \in W_l = \text{Ker}(L_{A^*})$. Daí, $A^*w_\mu^l(x) = Dw_\mu^l(x)A^*(x)$. Considere a curva $\gamma(t) = e^{-tA^*}w_\mu^l(e^{tA^*}x)$. Temos que $\gamma(0) = w_\mu^l$ e

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= e^{-tA^*}Dw_\mu^l(e^{tA^*}x)e^{tA^*}A^*(x) - e^{-tA^*}A^*w_\mu^l(e^{tA^*}x) = \\ &= e^{-tA^*}[Dw_\mu^l(e^{tA^*}x)A^*e^{tA^*}(x) - A^*w_\mu^l(e^{tA^*}x)] = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\gamma(t) = cte = w_\mu^l(x)$ e daí,

$$\begin{aligned}e^{-tA^*}w_\mu^l(e^{tA^*}x) &= w_\mu^l(x) \implies \\ \implies w_\mu^l(e^{tA^*}x) &= e^{tA^*}w_\mu^l(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Reciprocamente, derivando-se a igualdade (1.23) em relação a t e tomando-se $t = 0$ obtemos que $A^*w_\mu^l(x) = Dw_\mu^l(x)A^*(x)$ e logo $w_\mu^l \in \text{Ker}(L_{A^*})$. Portanto,

$$w_\mu^l \in \text{Ker}(L_{A^*}) \Leftrightarrow w_\mu^l(e^{tA^*}x) = e^{tA^*}w_\mu^l(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que um campo vetorial reversível f_μ com $f_\mu(0) = 0$, $D_x f_\mu(0) = A_\mu$, $A_0 = A$, está em sua forma normal de ordem $m \geq 2$, se $T_m f_\mu \circ e^{tA^*} = e^{tA^*} \circ T_m f_\mu$. Seja $A^* = S^* + N^*$ a decomposição Jordan-Chevalley $S - N$ de A^* . Os operadores nilpotente N^* e semi-simples S^* também tornam L_{N^*} nilpotente e L_{S^*} semi-simples em H_l^- . Além disso, L_{N^*} e L_{S^*} comutam.

Assim, $L_{A^*} = L_{S^*} + L_{N^*}$ é a decomposição $S - N$ de L_{A^*} em H_l^- . Temos então, o seguinte teorema:

Teorema 1.15. *Para $m \geq 2$, um campo vetorial reversível f_μ está na sua forma normal de ordem m se e somente se $T_m f_\mu \circ e^{tS^*} = e^{tS^*} \circ T_m f_\mu$ e $T_m f_\mu \circ e^{tN^*} = e^{tN^*} \circ T_m f_\mu$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Segue diretamente da definição. □

CAPÍTULO 2

O Método de Redução de Liapunov-Schmidt

O Método de Redução de Liapunov-Schmidt simplifica o estudo de certas aplicações possibilitando a redução da dimensão do seu domínio de definição. O livro texto usado neste capítulo foi [8].

2.1 Uma Primeira Visão do Método

Introduziremos o método no caso em que a dimensão é finita.

Consideremos o sistema

$$\Phi_i(y, \alpha) = 0, i = 1, \dots, n; \quad (2.1)$$

onde $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ ; $y = (y_1, \dots, y_n)$ a variável em (2.1); $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ o vetor de parâmetros, com $\alpha_0 = \lambda$ o parâmetro de bifurcação e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ parâmetros auxiliares.

Assumiremos que $\Phi_i(0, 0) = 0, \forall i$ e tentaremos descrever as soluções para este sistema, localmente, em vizinhança da origem.

Seja $(d\Phi)_{0,0}$ a matriz jacobiana de Φ na origem.

Se o posto de $(d\Phi)_{0,0}$ é n , segue do Teorema da Função Implícita que (2.1) pode ser

resolvida, unicamente, para y como função de α ; em outras palavras, este é um caso não-degenerado, onde não ocorre bifurcação.

Consideraremos o caso degenerado minimal, i.e, o posto de $(d\Phi)_{0,0}$ e igual a $n - 1$.

(a) Dedução das equações de redução

Duas escolhas arbitrárias são necessárias para iniciar o método de redução de Liapunov-Schmidt.

Vamos escrever $L = (d\Phi)_{0,0}$ para simplificar a notação.

Precisamos escolher espaços vetoriais complementares M e N para $Ker L$ e $Im L$ respectivamente, obtendo-se as decomposições:

$$\mathbb{R}^n = Ker L \oplus M \quad (2.2)$$

$$\mathbb{R}^n = N \oplus Im L \quad (2.3)$$

Seja E a projeção de \mathbb{R}^n sobre $Im L$ com $Ker E = N$. A projeção complementar $I - E$ tem imagem igual a N e núcleo igual a $Im L$.

A seguinte observação inicia a dedução:

Se $u \in \mathbb{R}^n$, então $u = 0 \Leftrightarrow Eu = 0$ e $(I - E)u = 0$.

Assim, o sistema (2.1) pode ser decomposto em um par de equações equivalentes:

$$E\Phi(y, \alpha) = 0 \quad (2.4)$$

$$(I - E)\Phi(y, \alpha) = 0 \quad (2.5)$$

A idéia básica por trás da redução de Liapunov-Schmidt é que (2.4) pode ser resolvido para $n - 1$ das variáveis y , e então se substituimos estes valores em (2.5) temos uma equação para a variável restante.

Vamos desenvolver esta idéia. Primeiramente, aplicamos o Teorema da Função Implícita para mostrar que (2.4) pode ser resolvido para $n - 1$ das variáveis. Devido a soma (2.2) podemos decompor $y \in \mathbb{R}^n$ como $y = v + w$, $v \in Ker L$, $w \in M$. Vamos escrever (2.4) como

$$E\Phi(v + w, \alpha) = 0 \quad (2.6)$$

Mais especificamente, estamos pensando em (2.6) como definindo uma aplicação $F : Ker L \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow Im L$ onde $F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha)$.

Pela regra da cadeia, a diferencial de (2.6) com respeito às variáveis w , na origem, é $E(d\Phi)_{0,0} = EL = L$.

Portanto, a aplicação linear $L : M \rightarrow \text{Im } L$ é invertível.

Daí, pelo Teorema da Função Implícita, temos que (2.6) tem solução única para w próximo da origem. Vamos escrever esta solução como $w = W(v, \alpha)$; assim $W : \text{Ker } L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ satisfaz

$$\begin{aligned} E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) &= 0 \\ W(0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituímos W em (2.5) para obter a aplicação $\phi : \text{Ker } L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$ dada por

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \quad (2.8)$$

Assim os zeros de $\phi(v, \alpha)$ estão em correspondência 1 - 1 com os zeros de $\Phi(y, \alpha)$, a correspondência sendo dada por: $\phi(v, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0$.

A aplicação ϕ tem todas as informações que precisamos da redução de Liapunov-Schmidt, mas ela tem a desvantagem de ser uma aplicação entre subespaços 1-dimensionais de \mathbb{R}^n , i.e, $\phi : \text{Ker } L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$. Em aplicações é usual escolher coordenadas explícitas em $\text{Ker } L$ e N e daí obter a aplicação $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$. É claro que isto acrescenta escolhas arbitrárias ao método, além das escolhas de M e N .

Vamos introduzir coordenadas como se segue.

Sejam v_0 e v_0^* vetores não nulos em $\text{Ker } L$ e $(\text{Im } L)^\perp$ respectivamente, onde o complemento ortogonal é tomado com respeito ao produto interno usual de \mathbb{R}^n .

Qualquer vetor $v \in \text{Ker } L$ pode ser escrito unicamente como $v = xv_0$, $x \in \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \phi(xv_0, \alpha) \rangle. \quad (2.9)$$

Como $\phi(xv_0, \alpha) \in N$, $g(x, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \phi(xv_0, \alpha) = 0$, logo os zeros de g estão em correspondência 1 - 1 com as soluções de $\Phi(y, \alpha) = 0$. É importante notar que quando substituímos a definição (2.8) em (2.9), a projeção $(I - E)$ desaparece, i.e, $g(x, \alpha) = \langle v_0^*, (I - E)\Phi(xv_0 + W(xv_0, \alpha), \alpha) \rangle = \langle v_0^*, \Phi(xv_0 + W(xv_0, \alpha), \alpha) \rangle$. A razão desta simplificação é que $v_0^* \in (\text{Im } L)^\perp$, e para qualquer vetor $V \in \mathbb{R}^n$, $EV \in \text{Im } L$, daí, $\langle v_0^*, EV \rangle = 0$. Logo, $\langle v_0^*, (I - E)V \rangle = \langle v_0^*, V \rangle$.

(b) *Uma "visão geral" da redução de Liapunov-Schmidt*

Vamos dividir a dedução da equação de redução (2.9) em 5 passos:

1. Decompor o espaço ambiente em componentes relacionadas a L ;
2. Transferir esta decomposição para a equação (2.4);
3. Mostrar que (2.4) pode ser resolvida para $n - 1$ das variáveis, usando o T.F.I.;
4. Substituir a solução de (2.4) em (2.5) para obter (2.8);
5. Escolher coordenadas em $\text{Ker}L$ e $(\text{Im}L)^\perp$ para obter (2.9).

A essência da redução de Liapunov-Schmidt é mostrar que o T.F.I. é aplicável em situações onde isso não é aparente. Assim, o passo 3 é fundamental na redução. Observe que nos passos 1 e 5 escolhas são feitas, enquanto 2 e 4 são puramente notacionais.

Observação 2.1. *Uma visão geométrica do método de Liapunov-Schmidt é apresentada em [8]. Em particular, esta visão esclarece a identificação do diagrama de bifurcação $\{(v, \alpha) \in \text{Ker}L \times \mathbb{R}^{k+1} : \phi(v, \alpha) = 0\}$ com o conjunto solução $\{(y, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} : \Phi(y, \alpha) = 0\}$ das equações completas.*

2.2 O Método em Espaços de Dimensão Infinita

Definição 2.2. *Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} espaços de Banach. Um operador linear limitado $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é Fredholm se satisfaz:*

- i) $\text{Ker}L$ é um subespaço de dimensão finita de \mathcal{X} ;
- ii) $\text{Im}L$ é um subespaço fechado de \mathcal{Y} com codimensão finita.

Se L é Fredholm, definimos o índice de L como sendo o inteiro $i(L) = \dim \text{Ker}L - \text{codim} \text{Im}L$.

Proposição 2.3. *Se $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é Fredholm, então existem subespaços fechados M e N de \mathcal{X} e \mathcal{Y} respectivamente, tais que*

- a) $\mathcal{X} = \text{Ker}L \oplus M$
- b) $\mathcal{Y} = N \oplus \text{Im}L$

Observação 2.4. Se $i(L) = 0$ então $\dim N = \dim \text{Ker} L$; em particular, se $\text{Ker} L = \{0\}$ então L é sobrejetor e pelo Teorema do Gráfico Fechado, L é invertível.

Para operadores diferenciais, \mathcal{X} e \mathcal{Y} são tipicamente subespaços do espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ onde Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^n . Este espaço tem o produto interno usual

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi)v(\xi)d\xi \quad (2.10)$$

Vamos discutir o uso de complementos ortogonais em (2.3), *i.e.*,

a) $M = (\text{Ker} L)^\perp$

b) $N = (\text{Im} L)^\perp$

Geralmente \mathcal{X} e \mathcal{Y} não são completos com respeito ao produto interno (2.10). Por exemplo, \mathcal{X} pode estar em $C^k(\Omega)$ e \mathcal{Y} pode estar em $C(\Omega)$. Em geral, para um subespaço $S \subset \mathcal{Y}$ de dimensão infinita, não é verdade que $\mathcal{Y} = S \oplus S^\perp$. Apesar de $S \cap S^\perp = \{0\}$, a soma pode não ser igual a \mathcal{Y} . O problema nestes casos é que os elementos que faltam pertencem ao dual \mathcal{Y}^* . Entretanto, a decomposição $\mathcal{Y} = S \oplus S^\perp$ é válida nos seguintes 2 casos especiais:

1. S tem dimensão finita;
2. S é a imagem de um operador diferencial elíptico.

No primeiro caso basta aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. No segundo caso, a discussão gira em torno da alternativa Fredholm,

$$(\text{Im} L)^\perp = \text{Ker} L^* \quad (2.11)$$

onde L^* é a adjunta de L .

A fórmula acima geralmente é válida para operadores lineares, desde que o complemento ortogonal seja tomado em \mathcal{Y}^* e a adjunta seja definida como um operador $L^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$.

Para os casos em que consideramos, \mathcal{Y}^* é um subespaço de funções generalizadas. O ponto fundamental em justificar o segundo caso está em que as soluções de equações diferenciais elípticas são regulares. Em particular, para estes operadores $\text{Ker} L^* \subset \mathcal{Y}$.

Assim a decomposição $\mathcal{Y} = \text{Im} L \oplus (\text{Im} L)^\perp$ vale.

Observação 2.5. Quando L é um operador diferencial elíptico, $\text{codim Im} L = \dim \text{Ker} L^*$, daí, vale a fórmula $i(L) = \dim \text{Ker} L - \dim \text{Ker} L^*$.

Vamos agora à “mecânica” da redução de Liapunov-Schmidt:

Seja $\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\Phi(0,0) = 0$, uma aplicação C^∞ entre espaços de Banach. Queremos aplicar o método de redução de Liapunov-Schmidt para resolver a equação

$$\Phi(u, \alpha) = 0 \quad (2.12)$$

para u como função de α próximo de $(0,0)$.

Seja L a diferencial de Φ na origem, *i.e.*, $Lu = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi(hu,0) - \Phi(0,0)}{h} \right)$. Assumiremos que L é Fredholm de índice zero.

Passo 1: Decompondo \mathcal{X} e \mathcal{Y} :

$$a) \mathcal{X} = \text{Ker}L \oplus M \quad (2.13)$$

$$b) \mathcal{Y} = N \oplus \text{Im}L$$

Passo 2: Reescrevendo (2.12) em um par de equações equivalentes:

$$a) E\Phi(u, \alpha) = 0 \quad (2.14)$$

$$b) (I - E)\Phi(u, \alpha) = 0$$

onde $E : \mathcal{Y} \rightarrow \text{Im}L$ é a projeção associada a decomposição (2.13.b).

Passo 3: Usamos (2.13.a) para escrever $u = v + w$, $v \in \text{Ker}L$, $w \in M$. Aplicamos o Teorema da Função Implícita para resolver (2.14.a) para w como função de v e α . Isto nos conduz a uma função $W : \text{Ker}L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ tal que

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0. \quad (2.15)$$

Passo 4: Definimos $\phi : \text{Ker}L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$ por

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \quad (2.16)$$

Passo 5: Escolhemos uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ para $\text{Ker}L$ e uma base $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ para $(\text{Im}L)^\perp$. Definimos $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \rangle \quad (2.17)$$

Observação 2.6. *Discutindo cada passo: Passo 1: A hipótese de L ser Fredholm garante a decomposição. Além disso, $\text{Ker}L$ e N são de $\dim < \infty$. Passo 2: Puramente notacional. Passo 3: Mostraremos que o Teorema da Função Implícita é, de fato, aplicável. Extraímos uma aplicação $F : \text{Ker}L \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \text{Im}L$ de (2.14.a), isto é,*

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha)$$

Derivando, temos que a diferencial de F com respeito a W na origem é $EL = L$. Afirmamos que $L : M \rightarrow \text{Im}L$ é invertível. No caso de dimensão finita é válido porque $L|_M$ é $1-1$ e sobrejetora. No caso de espaço de Banach, L é também $1-1$, mas precisamos de uma hipótese técnica adicional para concluir que L é invertível, a saber, que $\text{Im}L$ é fechado. Entretanto, L é Fredholm por hipótese, logo $\text{Im}L$ é fechado e L é invertível. Assim, o Teorema da Função Implícita garante que (2.14.a) pode ser resolvido para $w = W(v, \alpha)$. A solução obtida depende C^∞ dos parâmetros $\alpha_0, \dots, \alpha_k$. Passo 4: Puramente notacional. Passo 5: Quando escrevemos $(\text{Im}L)^\perp$ estamos usando (pela primeira vez) o fato de que \mathcal{Y} é munido do produto interno (2.10). Como L é Fredholm de índice zero, $\dim \text{Ker}L = \dim (\text{Im}L)^\perp$ e ambas são finitas.

Proposição 2.7. *Se a linearização de (2.12) é um operador Fredholm de índice zero, então as soluções de (2.12) estão (localmente) em correspondência $1-1$ com as soluções do sistema finito*

$$g_i(x, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

onde g_i é definida por (2.17).

Demonstração. Pode ser encontrada em [8]. □

2.3 O Método Aplicado a Sistemas Reversíveis

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Considere uma família C^∞ de campos vetoriais f_μ , R -involutivos em V com $f_\mu(0) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{R}^k$. Tome $A_\mu = Df_\mu(0)$. Denote por $Y = C^0(S^1, V)$ o espaço de Banach das aplicações contínuas de $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ em V ; por $X = C^1(S^1, V)$ o subespaço C^1 de Y . Definimos um produto interno em Y por

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle u(\theta), v(\theta) \rangle d\theta \quad (2.18)$$

com $u, v \in Y$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V . Suponha que w_0 é um número real não nulo. Estamos interessados em encontrar soluções periódicas próximas da origem, do sistema

$$\dot{x} = f_\mu(x) \quad (2.19)$$

com período próximo de $\frac{2\pi}{w_0}$, quando μ está próximo de 0. Considere a aplicação $M : X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ definida por

$$M(x, \mu, w)(t) = w\dot{x}(t) - f_\mu(x(t)). \quad (2.20)$$

Se $(x(t), \mu, w)$ satisfaz $M = 0$, então $x(wt)$ é uma solução $\frac{2\pi}{w}$ -periódica de 2.19. De fato, temos

$$\dot{x}(wt) = w\dot{x}(wt) \stackrel{M=0}{=} f_\mu(x(wt))$$

e daí $x(wt)$ é solução de 2.19. Vejamos que é $\frac{2\pi}{w}$ -periódica, escreva $y(t) = x(wt)$, assim

$$y\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = y(t) \Leftrightarrow x\left(w\left(t + \frac{2\pi}{w}\right)\right) = x(wt) \Leftrightarrow x(wt + 2\pi) = x(wt)$$

o que é verdade já que $x(t)$ é 2π -periódica.

Então, nosso problema se reduz a resolver $M = 0$ para w próximo de w_0 , μ próximo de 0. Tome $T := D_x M(0, 0, w_0) : X \rightarrow Y$; isto é, $T(x)(t) = w_0\dot{x}(t) - A_0(x(t))$. Note que T é um operador Fredholm de índice zero (veja detalhes no Apêndice).

Definimos a adjunta de T , $T^* : X \rightarrow Y$ por $T^*(x)(t) = -w_0\dot{x}(t) - A_0^*(x(t))$, de forma que $(Tx, y) = (x, T^*y)$.

Iremos supor ao longo do texto que A_0 tem apenas autovalores imaginários puros. Uma base complexa $\{e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ pode ser escolhida de forma que $\{(e_1 + \bar{e}_1), i(e_1 - \bar{e}_1), \dots, (e_n + \bar{e}_n), i(e_n - \bar{e}_n)\}$ forma uma base ortonormal para V .

Nessa base complexa, A_0 está na forma de Jordan complexa e R está também em uma forma bem simples.

Além disso, V_0 é invariante por R , onde V_0 é a soma direta dos autoespaços generalizados de A_0 com autovalores múltiplos inteiros de $i\omega_0$. Seja

$$Q = \{e^{\frac{tS_0}{\omega_0}} v_0; \quad v_0 \in V_0^{\mathbb{R}}\} \subset X,$$

onde S_0 é a parte semi-simples de A_0 e $V_0^{\mathbb{R}}$ é o espaço dos vetores reais em V_0 . Observe que $\dim Q = \dim V_0^{\mathbb{R}}$ e logo Q tem dimensão finita.

Lema 2.8. $TQ \subset Q$ e $T^*Q \subset Q$

Demonstração. Tome $q(t) = e^{\frac{tS_0}{\omega_0}} v_0 \in Q$. Daí,

$$T(q(t)) = e^{\frac{tS_0}{\omega_0}} (S_0 - A_0)v_0 \in Q$$

$$T^*(q(t)) = e^{\frac{tS_0}{\omega_0}} (-S_0 - A_0^*)v_0 \in Q$$

□

Sejam

$$X_1 = \{x \in X; (x, Q) = 0\}$$

$$Y_1 = \{y \in Y; (y, Q) = 0\}$$

os complementos ortogonais de Q em X e Y respectivamente. O Lema anterior produz o seguinte lema:

Lema 2.9. *Com as notações anteriores temos o seguinte resultado:*

1. $X = X_1 \oplus Q; \quad Y = Y_1 \oplus Q$
2. $T : X_1 \rightarrow Y_1$ é 1 - 1 e sobrejetora.

Demonstração. O primeiro item é imediato. Observe que $\text{Ker}T \subset Q$ e pelo lema anterior $TQ \subset Q$. Daí, T é injetora. Tome $x_1 \in X_1$, daí $(Tx_1, Q) = (x_1, T^*Q) = 0$ pois $T^*Q \subset Q$. Assim, $Tx_1 \in Y_1$ e logo $T(X_1) \subseteq Y_1$. Agora, $y_1 \in Y_1 \Rightarrow (y_1, Q) = 0 \Rightarrow \exists x \in X$ tal que $Tx = y_1$. Mas $TQ \subset Q$ logo $x \in X_1$ e daí $y \in T(X_1)$. □

Observação 2.10. *Nosso processo de redução é baseado no Lema [2.9]. O lema modifica o método de redução de Liapunov-Schmidt em que $M = 0$ é reduzida para $M|_Q = 0$, onde Q é um subespaço de X e Y_1 é um subespaço de $\text{Im}T$.*

Escreva $M(q, x_1, \mu, w) := M(q + x_1, \mu, w)$ para $q \in Q$, $x_1 \in X_1$. Pelo Teorema da Função Implícita, a equação $M|_{Y_1}(q, x_1, \mu, w) = 0$ pode ser resolvida para x_1 como função de q, μ, w ; denotaremos esta solução por $x_1 = x_1^*(q, \mu, w)$.

Observe que existe uma ação natural de \mathbb{S}^1 em Y , a saber,

$$(\Psi_\beta x)(t) = x(t + \beta), \quad \beta \in \mathbb{S}^1.$$

O grupo \mathbb{S}^1 também age em V_0 , via

$$\varphi_\beta(v_0) = e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0.$$

Por outro lado, a involução R , originalmente definida em V , pode ser estendida para Y ; a saber,

$$(\tilde{R}y)(t) = Ry(-t).$$

Olhando para a definição de M , podemos observar que

$$\begin{aligned} \tilde{R}M(x(t), \mu, w) &= -M(Rx(t), \mu, w) \\ \Psi_\beta M(x(t), \mu, w) &= M(\Psi_\beta x(t), \mu, w) \end{aligned}$$

A próxima proposição é consequência do Teorema da Função Implícita.

Proposição 2.11. (a) $x_1^*(0, 0, w_0) = 0$;

$$(b) \quad \Psi_\beta x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w) = x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} \varphi_\beta(v_0), \mu, w);$$

$$(c) \quad \tilde{R}x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w) = x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} Rv_0, \mu, w).$$

Vamos estabelecer a equação de bifurcação reduzida como se segue:

$$B(v_0, \mu, w) = 0 \tag{2.21}$$

onde $B : V_0^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow V_0^{\mathbb{R}}$ é definida por

$$B(v_0, \mu, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(x^*(v_0, \mu, w), \mu, w) dt$$

$$\text{e } x^*(v_0, \mu, w) = e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0 + x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w).$$

Observação 2.12. *Aqui vale justificar o aparecimento da fórmula acima:*

Vamos definir o seguinte operador em Y :

$$\mathcal{D} : Y \rightarrow Y$$

$$\mathcal{D}(\cdot) = \sum_{i=1}^m (\cdot, q_i) q_i,$$

onde $\{q_i\}_{i=1}^m$ é uma base de Q .

Observe que \mathcal{D} é projeção sobre Q com núcleo igual a Y_1 . A projeção complementar $I - \mathcal{D}$ sobre Y_1 tem núcleo igual a Q . Assim temos que

$$M(q, x_1, \mu, w) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (I - \mathcal{D})M(q, x_1, \mu, w) = 0 \\ \mathcal{D}M(q, x_1, \mu, w) = 0 \end{cases}$$

Agora, $(I - \mathcal{D})M : Q \times X_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow Y_1$ e derivando com respeito a variável x temos que $(I - \mathcal{D})T : X_1 \rightarrow Y_1$ é isomorfismo e pelo T.F.I. obtemos $x_1^*(q, \mu, w)$ com $(I - \mathcal{D})M(q, x_1^*(q, \mu, w), \mu, w) = 0$.

Precisamos resolver $\mathcal{D}M(q, x_1^*(q, \mu, w), \mu, w) = 0$. Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{D}M(q, x_1^*(q, \mu, w), \mu, w) = 0 &\Leftrightarrow (M, q_i) = 0, \quad \forall q_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle M, q_i \rangle dt = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{tS_0^*}{w_0}} M(x^*(v_0, \mu, w), \mu, w) dt = 0 \end{aligned}$$

e como $S_0^* = -S_0$ temos que

$$\mathcal{D}M(q, x_1^*(q, \mu, w), \mu, w) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(x^*(v_0, \mu, w), \mu, w) dt = 0$$

Proposição 2.13.

- (a) $\varphi_\beta(B(v_0, \mu, w)) = B(\varphi_\beta(v_0), \mu, w)$
- (b) $RB(v_0, \mu, w) = B(Rv_0, \mu, w)$

Demonstração. (a) Temos que

$$\begin{aligned} B(\varphi_\beta(v_0), \mu, w) &= B(e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0, \mu, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(x^*(e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0, \mu, w), \mu, w) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(e^{\frac{tS_0}{w_0}} e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0 + x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0, \mu, w), \mu, w) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(e^{\frac{(t+\beta)S_0}{w_0}} v_0 + x_1^*(e^{\frac{(t+\beta)S_0}{w_0}} v_0, \mu, w), \mu, w) dt \end{aligned}$$

e fazendo $\tau = t + \beta \implies t = \tau - \beta$ temos que

$$\begin{aligned} B(\varphi_\beta(v_0), \mu, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\tau-\beta)S_0}{w_0}} M(x^*(e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0, \mu, w), \mu, w) d\tau = \\ &= \frac{e^{\frac{\beta S_0}{w_0}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\tau S_0}{w_0}} M(x^*(e^{\frac{\beta S_0}{w_0}} v_0, \mu, w), \mu, w) d\tau = \\ &= \varphi_\beta(B(v_0, \mu, w)). \end{aligned}$$

(b) Observe agora que

$$\begin{aligned} RB(v_0, \mu, w) &= R \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(x^*(v_0, \mu, w), \mu, w) dt \right) \stackrel{R \text{ é linear}}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} RM(x^*(v_0, \mu, w), \mu, w) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{tS_0}{w_0}} M(Rx^*(v_0, \mu, w), \mu, w) dt = \\ &= -B(Rv_0, \mu, w). \end{aligned}$$

□

Assim, cada solução (v_0, μ, w) de (2.21) corresponde a uma solução $\frac{2\pi}{w}$ -periódica, $x(t)$ da equação (2.19), pela relação $x(t) = x^*(v_0, \mu, w)$.

Teorema 2.14. *Denote por $Fix(R)$ o conjunto dos pontos fixos de R . Temos o seguinte resultado:*

- (a) *Para cada μ próximo da origem, $(w - w_0)$, se v_0 é uma solução de (2.21) então $\varphi_\beta(v_0)$ é solução para todo $\beta \in \mathbb{S}^1$. Além disso, v_0 e $\varphi_\beta(v_0)$ correspondem a mesma órbita periódica de (2.19).*
- (b) *Para cada μ próximo da origem, $(w - w_0)$, se v_0 é uma solução de (2.21) então Rv_0 também é solução de (2.21). Além disso, se $v_0 \in Fix(R)$ então $x(t) = x^*(v_0, \mu, w)$ é uma órbita periódica simétrica de (2.19) com $R(x(0)) = x(0)$.*

Enfatizamos que, de fato, se $x(t)$ é uma solução $\frac{2\pi}{w}$ -periódica de (2.19) então $M(x(t), \mu, w) = 0$ e correspondentemente existe $v_0 \in V_0^{\mathbb{R}}$ com $B(v_0, \mu, w) = 0$. Além disso, devido a simetria, $v_0 \in Fix(R)$.

Portanto, procurar por pequenas soluções periódicas simétricas resulta em resolver a equação

$$G(v_0, \mu, w) = 0 \tag{2.22}$$

onde $G(v_0, \mu, w) = B(v_0, \mu, w)|_{v_0 \in \text{Fix}(R)}$.

Suponha que A_0 é uma matriz R -involutiva com autovalores apenas da forma $\pm iw_0$ e múltiplos inteiros de $\pm iw_0$, digamos, $\pm in_1 w_0, \pm in_2 w_0, \dots, \pm in_k w_0$, com n_j inteiros positivos. Assim, dizemos que o sistema está em ressonância $n_1 : n_2 : \dots : n_k$. Como já vimos, uma base pode ser escolhida de forma que $S_0 + S_0^* = 0$, onde S_0 é a parte semisimples de A_0 . Um produto interno também pode ser definido de forma que os autoespaços generalizados correspondentes a autovalores distintos sejam ortogonais entre si.

Nessa base, seja $A_\mu = A(\mu)$ a deformação versal R -involutiva de A_0 , como descrito em [23].

$A(\mu)$ tem a propriedade de comutar com S_0 . Agora, considere o sistema R -involutivo $\dot{x} = f(x, \mu)$ em $V = V_0$ com $D_x f_\mu(0) = A_\mu$ e f estando em sua forma normal de ordem m , $m \geq 2$ para $\mu \in \Omega_m$, como discutido na seção (1.3).

Escreva

$$f(x, \mu) = A_\mu(x) + \tilde{f}(x, \mu) + r(x, \mu)$$

onde

$$e^{tA_0^*} \circ \tilde{f}(x, \mu) = \tilde{f}(e^{tA_0^*} x, \mu)$$

e $r(x, \mu) = o(|x|^{m+1})$ quando $x \rightarrow 0$ uniformemente para $\mu \in \Omega_m$.

Teorema 2.15. *Com as notações acima, temos o seguinte resultado:*

$$(a) \quad x^*(v_0, \mu, w)(t) = e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0 + o(|v_0|^{m+1})$$

$$(b) \quad B(v_0, \mu, w) = \frac{w}{w_0} S v_0 - A_\mu v_0 - \tilde{f}(v_0, \mu) + o(|v_0|^{m+1})$$

Demonstração. É suficiente provar (a) pois a segunda parte segue imediatamente da definição de B . Então consideremos a restrição de M a Q :

$$M(v_0, \mu, w) := M(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w).$$

Desde de que $\dot{q} = \frac{S_0}{w_0} q; \forall q \in Q$, e que A_μ, \tilde{f} comutam com $e^{\frac{tS_0}{w_0}}$ obtemos:

$$\begin{aligned} M(v_0, \mu, w) &= w \left(e^{\frac{tS_0}{w_0}} \right)' v_0 - f \left(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu \right) \\ &= e^{\frac{tS_0}{w_0}} \left(w \frac{S_0}{w_0} v_0 - A_\mu - \tilde{f}(v_0, \mu) \right) - r \left(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu \right) \end{aligned}$$

o qual para $\tilde{M}(v_0, \mu, w) := (I - \mathcal{D}) M(v_0, \mu, w)$ implica que $D^j \tilde{M}(0, \mu, w) = 0$ para $0 \leq j \leq m$ para todo (μ, w) . Temos

$$(I - \mathcal{D}) M(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, x_1^* \left(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w \right), \mu, w) \equiv 0;$$

diferenciando esta identidade em $v_0 = 0$ temos $D^j x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w) = 0$ para $0 \leq j \leq m$ para todo (μ, w) numa vizinhança de $(0, 0)$. Desta forma,

$$x_1^*(e^{\frac{tS_0}{w_0}} v_0, \mu, w) = O(\|v_0\|^{m+1}), \quad (2.23)$$

e o resultado segue da definição de $x^*(v_0, \mu, w)$. \square

Exemplo 2.16. Considere o campo de vetores em $C^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

satisfazendo a hipótese da reversibilidade, com parte linear

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e seja

$$R : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1, x_2, x_3, -x_4).$$

a involução em questão. Assim a forma normal associada ao campo (2.24) é dada por

$$\dot{x} = A_\mu x + \tilde{f}(x, \mu) + O(|x|^5) \quad (2.25)$$

com

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

e

$$\tilde{f}(x, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x, \mu) \\ \tilde{f}_2(x, \mu) \\ \tilde{f}_3(x, \mu) \\ \tilde{f}_4(x, \mu) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_1(x, \mu) &= a_1(\mu)x_1^2x_3 + 2a_2(\mu)x_1x_3x_4 - 2a_2(\mu)x_2x_3^2 - a_1(\mu)x_3^3, \\
 \tilde{f}_2(x, \mu) &= \begin{cases} b_1(\mu)x_1^3 + (2b_2(\mu) - a_1(\mu))x_1^2x_4 - \\ 2b_2(\mu)x_1x_2x_3 + b_1(\mu)x_1x_3^2 + 2a_2(\mu)x_1x_4^2 \\ -2a_2(\mu)x_2x_3x_4 - a_1(\mu)x_3^2x_4, \end{cases} \\
 \tilde{f}_3(x, \mu) &= a_1(\mu)x_1^3 - 2a_2(\mu)x_1^2x_4 + 2a_2(\mu)x_3^2x_4, \\
 \tilde{f}_4(x, \mu) &= \begin{cases} a_1(\mu)x_1^2x_2 + b_1(\mu)x_1^2x_3 - 2a_2(\mu)x_1x_2x_4 + \\ 2b_2(\mu)x_1x_3x_4 + 2a_2(\mu)x_2^2x_3 \\ + (a_1(\mu) - 2b_2(\mu))x_2x_3^2 + b_1(\mu)x_3^3 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Os coeficientes a_1 , a_2 , b_1 , b_2 dependem diferencialmente de μ . Assim aplicando o teorema (2.15) em $x_1 = x_4 = 0$ temos

$$G(v_0, \mu, w) = G(x_2, x_3, \mu, w).$$

com $\beta = -x_2$, $\alpha = x_3$, a equação da bifurcação torna-se

$$0 = w\alpha - \beta - a_1(\mu)\alpha^3 + 2a_2(\mu)\alpha^2\beta + O(|(\alpha, \beta)|^5), \tag{2.29}$$

$$0 = w\beta + \mu\alpha - a_1(\mu)\alpha^2\beta + 2a_2(\mu)\alpha\beta^2 + b_1(\mu)\alpha^3 + 2b_2(\mu)\alpha^2\beta + O(|(\alpha, \beta)|^5). \tag{2.30}$$

Da equação (2.29) temos que $\beta = w\alpha + O(|(\alpha, w)|^3)$. Substituindo em (2.30) temos

$$0 = b_1(\mu)\alpha^3 + w^2\alpha + \mu\alpha + O(|(\alpha, w)|^4) \tag{2.31}$$

de forma que ou $\alpha = 0$ ou $\mu = -w^2 - b_1(\mu)\alpha^2 + O(|(\alpha, w)|^3)$. Assim o diagrama de bifurcação de (2.25) usando w e α pode ser facilmente descrito. Note ainda que a solução $\alpha = w = 0$ corresponde ao ponto fixo $x = 0$. Desde que b_1 depende diferencialmente de μ segue que se $b_1(0) \neq 0$ então $b_1(\mu) \neq 0$ para $|\mu|$ pequeno. Desta forma, a forma quadrática em (2.31) é não degenerada e determina o comportamento qualitativo das soluções em torno da origem (o sinal de $b_1(0)$ determina qual bifurcação ocorre).

No próximo capítulo iremos aplicar os nossos resultados para estudar os tipos de bifurcações de órbitas periódicas simétricas próximo da origem, e estas bifurcações são de codimensão 1 ou 2. Em particular, os casos ressonantes com $n_j = 1, 2$ são considerados.

Também examinamos o caso ressonante subharmônico $2 : 3$. Para todos os casos, exceto o caso degenerado $1 : 1$, colocamos f_μ em sua forma normal de ordem 3. No caso degenerado, tomamos a forma normal de ordem 5.

Nas formas normais obtidas para a ressonância de ordem 3, escolhemos complementos não-ortogonais para simplificar algumas componentes dos campos vetoriais modificados. É importante notar que, ao fazer isto, a propriedade comutativa com S_0 continua válida. Também observamos que a Proposição 2.13(a) induz uma simetria \mathbb{Z}_2 em (2.22). Esta simetria tem um importante papel na resolução das equações reduzidas.

Uma equação $\Phi(y, \mu) = 0$ que determina os diagramas de bifurcação pode ser obtida por eliminação na resolução das equações reduzidas. O conjunto de transição da bifurcação é definido como $\mathcal{B} = \{\mu; \Phi(y, \mu) = 0 \text{ e } \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y, \mu) = 0 \text{ para algum } y\}$. O conjunto $\Phi_\mu^{-1}(0) = \{y; \Phi(y, \mu) = 0\}$ é uma variedade para μ suficientemente pequeno, com $\mu \notin \mathcal{B}$. Descrevendo este conjunto obtemos os diagramas de bifurcação. Podemos usar métodos elementares da Teoria de Singularidades para descrever $\Phi_\mu^{-1}(0)$.

CAPÍTULO 3

Ressonância

3.1 Não semi-simples 1:1:1

Nesta seção, estudaremos os tipos de bifurcações órbitas periódicas simétricas próximas da origem para o sistema reversível em ressonância não semi-simples 1 : 1 : 1. Consideramos A como um bloco de Jordan de dimensão 3, visto que, caso contrário, ele será de codimensão maior do que 2. Em coordenadas complexas, considere $V = \{z \mid z = (z_1, z_2, z_3)\}$,

$$A_\mu = \begin{pmatrix} iw_0 & 1 & 0 \\ \mu_2 & iw_0 & 1 \\ i\mu_1 & \mu_2 & iw_0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_\mu = \begin{cases} ia_1 z_1^2 \bar{z}_1 + \frac{4}{3} a_2 z_1 (z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2) + O(|z|^4), \\ ia_1 z_1 z_2 \bar{z}_1 + b_1 z_1^2 \bar{z}_1 + ib_2 z_1 (z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2) + O(|z|^4), \\ \frac{1}{2} ia_1 z_2^2 \bar{z}_1 + 2a_2 z_3 (z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2) + 3ia_3 \bar{z}_3 (z_2^2 - 2z_1 z_3) + 3ia_4 \left(\frac{1}{2} z_2^2 \bar{z}_3 - z_2 z_3 \bar{z}_2 + z_3^2 \bar{z}_1 \right) + \\ + b_1 z_1 z_2 \bar{z}_1 + ib_2 z_2 (z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2) + 2b_3 \bar{z}_2 (z_2^2 - 2z_1 z_3) + \\ + 2b_4 (z_1 z_2 \bar{z}_3 - z_1 z_3 \bar{z}_2 + z_2 z_3 \bar{z}_1 - \frac{1}{2} z_2^2 \bar{z}_2) + ic_1 z_1^2 \bar{z}_1 + c_2 z_1 (z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2) + \\ + ic_3 \bar{z}_1 (z_2^2 - 2z_1 z_3) + ic_4 (z_1^2 \bar{z}_3 - z_1 z_2 \bar{z}_2 + \frac{1}{2} z_2^2 \bar{z}_1) + O(|z|^4) \end{cases} \quad (3.1)$$

e $R(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \bar{z}_3)$; onde $a_j, b_j, c_j, j = 1, 2, 3, 4$ são números reais. Escolhemos um complemento não ortogonal para a forma normal de f de modo a simplificar \tilde{f}_μ . Ao fazer isto, \tilde{f}_μ ainda comuta com S_0 . Observe que $Fix(R) = \{(\alpha, i\beta, \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. A equação de bifurcação resultante é

$$\begin{aligned} 0 &= G(\alpha, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2, w) = \\ &= \begin{cases} \sigma\alpha - \beta - a_1\alpha^3 - \frac{8}{3}a_2\alpha^2\beta + O(|\alpha, \beta, \gamma|^4); \\ -\mu_2\alpha - \sigma\beta - \gamma - b_1\alpha^3 + (a_1 + 2b_2)\alpha^2\beta + O(|\alpha, \beta, \gamma|^4); \\ -\mu_1\alpha - \mu_2\beta + \sigma\gamma - c_1\alpha^3 - (b_1 + 2c_2)\alpha^2\beta + \\ +(2c_3 - c_4)\alpha^2\gamma + g(\alpha, \beta, \gamma), \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\sigma = w - w_0$, g contém os termos de terceira ordem em (3.1) com coeficientes diferentes de b_1, c_1, c_2, c_3, c_4 ; e termos de ordem maior. A \mathbb{Z}_2 - simetria da equação de bifurcação aqui pode ser representada por $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Em (3.2) nas 2 primeiras linhas, resolvendo-se β, γ em termos de α, σ, μ_2 obtemos

$$\begin{aligned} \beta &= \sigma\alpha - a_1\alpha^3 + O(|\alpha, \sigma, \mu_2|^4) \\ \gamma &= -\mu_2\alpha - \sigma^2\alpha - b_1\alpha^3 + O(|\alpha, \sigma, \mu_2|^4) \end{aligned}$$

e substituindo-se na terceira linha de (3.2) temos que

$$\alpha^3[\mu_2(a_1 + c_4 - 2c_3) + c_1 + 2c_2\sigma] + \alpha(2\mu_2\sigma + \sigma^3 + \mu_1) = O(|\alpha, \sigma, \mu_1, \mu_2|^5).$$

Devido a \mathbb{Z}_2 - simetria, esta equação é ímpar em α ; e assim nós podemos resolver α^2 em termos de σ, μ_1, μ_2 . O conjunto de bifurcação consiste dos parâmetros μ_1, μ_2 em que α^2 tem múltiplos zeros. Alguns cálculos mostram que este conjunto é $\mathcal{B} = \{(\mu_1, \mu_2) | \mu_1^2 + \frac{32}{27}\mu_2^3 = 0\}$. A medida que (μ_1, μ_2) varia sobre \mathcal{B} ele sofre uma bifurcação de codimensão 1, como indicado no diagrama abaixo, Figura 3.1 (assumindo $c_1 > 0$). Observe que (σ, α) e $(\sigma, -\alpha)$ representam a mesma órbita periódica, e desenhamos o diagrama apenas para $\alpha > 0$.

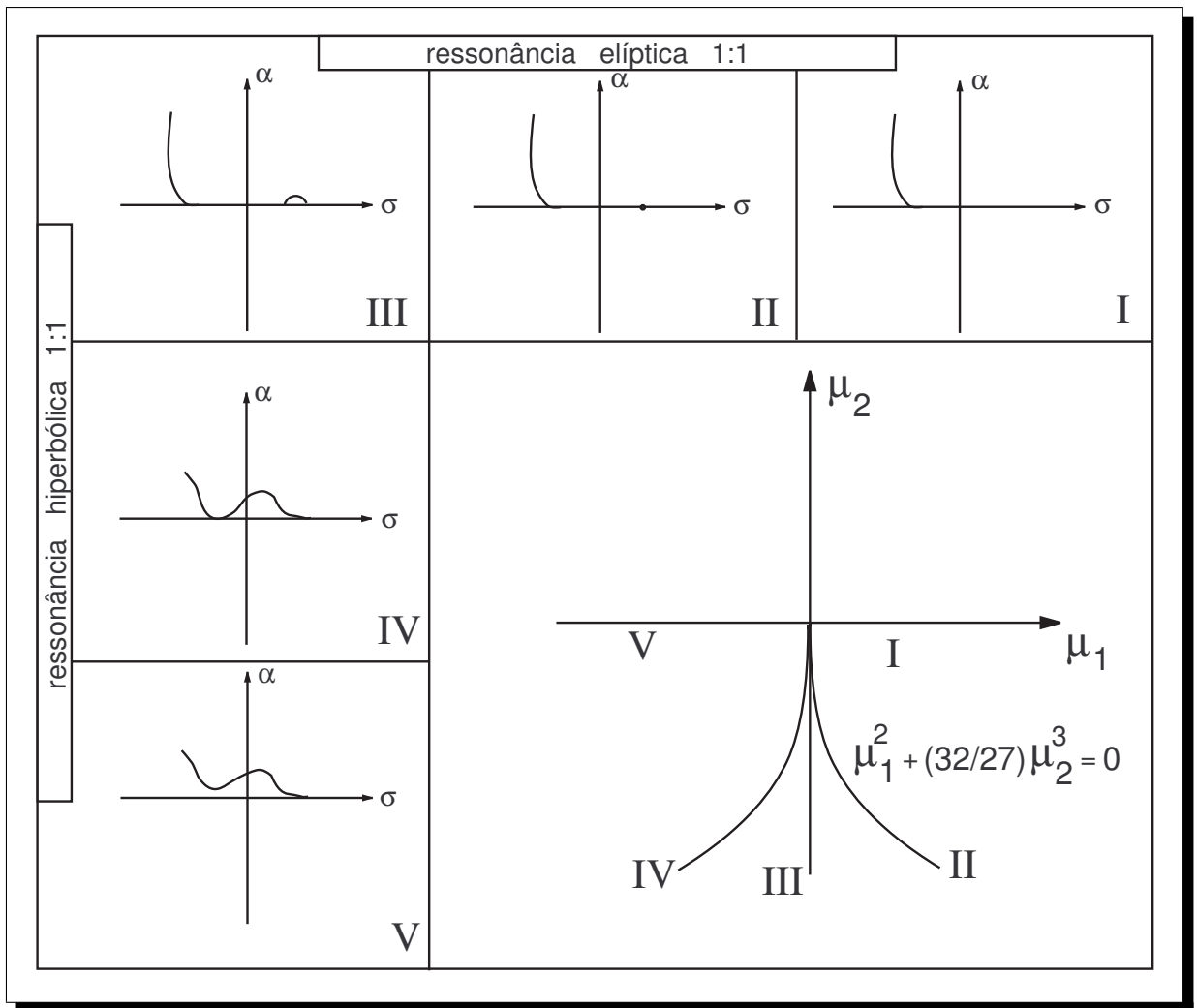


Figura 3.1: Ressonância não Semi-simples 1:1:1, $c_1 > 0$.

3.2 Não semi-simples 1:1:2

Vamos considerar, em coordenadas complexas, $V = \{z \mid z = (z_1, z_2, z_3)\}$, e em V ,

$$A_\mu = \begin{pmatrix} iw_0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & iw_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2iw_0 + i\mu_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_\mu = \begin{cases} ia_2 z_1^2 \bar{z}_1 + O(|z|^4) \\ 2ia_1 \bar{z}_2 z_3 + ia_2 z_1 z_2 \bar{z}_1 + 2ia_3 z_2 z_3 \bar{z}_3 + 2a_4 z_2 (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + \\ + b_1 \bar{z}_1 z_3 + b_2 z_1^2 \bar{z}_1 + b_3 z_1 z_3 \bar{z}_3 + ib_4 z_1 (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + O(|z|^4) \\ ic_1 z_1^2 + ic_2 z_1 z_3 \bar{z}_1 + c_3 z_3 (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + ic_4 z_3^2 \bar{z}_3 + O(|z|^4), \end{cases} \quad (3.3)$$

e $R(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \bar{z}_3)$; onde $a_j, b_j, c_j, j = 1, 2, 3, 4$ são números reais. Escolhemos um complemento não ortogonal para a forma normal de f de modo a simplificar \tilde{f}_μ . Como no caso com ressonância 1 : 1 : 1, temos que $Fix(R) = \{(\alpha, i\beta, \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. As equações de bifurcação são

$$0 = G(\alpha, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2, w) = \begin{cases} i[\sigma\alpha - \beta - a_2\alpha^3 + O(|\alpha, \beta, \gamma|^4)]; \\ -[\sigma\beta + \mu_1\alpha + 2a_1\beta\gamma - a_2\alpha^2\beta + b_1\alpha\gamma + b_2\alpha^3 + b_3\alpha\gamma^2 + g_2(\alpha, \beta, \gamma)]; \\ i[2\sigma\gamma - \mu_2\gamma - c_1\alpha^2 + 2c_3\alpha\beta\gamma - c_4\gamma^3 + O(|\alpha, \beta, \gamma|^4)]; \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\sigma = w - w_0$, g_2 contém os termos de terceira ordem com coeficientes diferentes de a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 ; e termos de ordem maior na segunda componente. A \mathbb{Z}_2 - simetria nas equações pode ser expressa por $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (-\alpha, -\beta, \gamma)$. Resolvendo-se β em termos de α, σ, γ na primeira equação em (3.4) obtemos

$$\beta = \sigma\alpha - a_2\alpha^3 + O(|\alpha, \sigma, \gamma|^4).$$

e substituindo-se na segunda equação de (3.2) e usando a \mathbb{Z}_2 - simetria mencionada acima, temos que

$$\alpha[\mu_1 + \sigma^2 + 2a_1\sigma\gamma + b_1\gamma + b_2\alpha^2 + b_3\gamma^2 + O(|\alpha, \sigma, \gamma|^3)] = 0.$$

Resolvendo-se a equação acima, assumindo que $b_1 \neq 0$, temos que $\alpha = 0$ ou

$$\gamma = \frac{-1}{b_1} \left[(\mu_1 + \sigma^2) - \frac{2a_1}{b_1} \sigma\mu_1 + b_2\alpha^2 + \frac{b_3}{b_1^2} \mu_1^2 \right] + O(|\alpha, \sigma, \mu_1|^3). \quad (3.5)$$

Observe que $O(|\alpha, \beta, \gamma|^4) = \alpha^2 O(|\alpha, \beta|^4) + \beta^2 O(|\alpha, \beta|^4) + \gamma O(|\alpha, \beta, \gamma|^3)$. Assim a terceira equação em (3.4) pode ser reescrita como

$$2\sigma\gamma - \mu_2\gamma - c_1\alpha^2 - c_4\gamma^3 = \alpha^2 O(|\alpha, \gamma, \sigma|^2) + \gamma g_3(\alpha, \gamma, \sigma), \quad (3.6)$$

onde $g_3(\alpha, \gamma, \sigma) = O(|\alpha, \gamma, \sigma|^3)$. Dois ramos de soluções são obtidas considerando-se (3.5) e (3.6). O primeiro é dado por

$$\alpha = 0$$

$$2\sigma\gamma - \mu_2\gamma - c_4\gamma^3 + \gamma g_3(0, \gamma, \sigma) = 0$$

e o segundo ramo é determinado pela expressão de γ em (3.5) juntamente com (3.6). α^2 pode ser resolvido como função de σ, μ_1, μ_2 ,

$$\alpha^2 = \frac{-1}{c_1} \left[\frac{1}{b_1} (2\sigma - \mu_2)(\mu_1 + \sigma^2) + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^3) \right].$$

Os diagramas de bifurcação podem ser obtidos considerando-se o seguinte produto em (3.6),

$$\alpha^2 [c_1 + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^1)] = \Phi := \Phi_1 \cdot \Phi_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{-1}{b_1} \left[2\sigma - \mu_2 - \frac{c_4}{b_1^2} \mu_1^2 + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^3) \right], \\ \Phi_2 &= \left[(\mu_1 + \sigma^2) - \frac{2a_1}{b_1} \sigma \mu_1 + \frac{b_3}{b_1^2} \mu_1^2 + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^3) \right]. \end{aligned}$$

Os zeros duplos de Φ formam o conjunto de bifurcação \mathcal{B} . Depois de alguns cálculos, obtemos $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left\{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 + \frac{1}{4} \left(\mu_2 + \frac{c_4}{b_1^2} \mu_1^2 \right)^2 - \frac{a_1}{b_1} \left(\mu_2 + \frac{c_4}{b_1^2} \mu_1^2 \right) \mu_1 + \frac{b_3}{b_1^2} \mu_1^2 = 0 \right\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = 0 \} \end{aligned}$$

Note que a_1, b_1, c_1 são os coeficientes dos termos de segunda ordem na forma normal original. Desenhemos os diagramas de bifurcações para $a_1, b_1, c_1, c_4 > 0$. O primeiro ramo é denotado por Γ_1 (em $\alpha = 0$), o segundo por Γ_2 . No ponto q temos que a coordenada σ é zero de Φ_1 . Os pontos p_1 e p_2 são os pontos onde coordenadas σ são zeros de Φ_2 . E em algum valor de transição do parâmetro, dois dos três pontos q, p_1, p_2 colidem. A colisão entre p_1 e p_2 produz uma bifurcação ressonante hiperbólica 1 : 1 em *II* na Figura 3.2, e uma bifurcação ressonante elíptica 1 : 1 em *VIII* na Figura 3.2. A colisão entre p_1 e q produz uma bifurcação ressonante elíptica 1 : 2 e a colisão entre p_2 e q produz uma bifurcação ressonante hiperbólica 1 : 2. Para a_1, b_1, c_1, c_4 com sinais diferentes, uma análise similar pode ser feita para obter os diagramas de bifurcação.

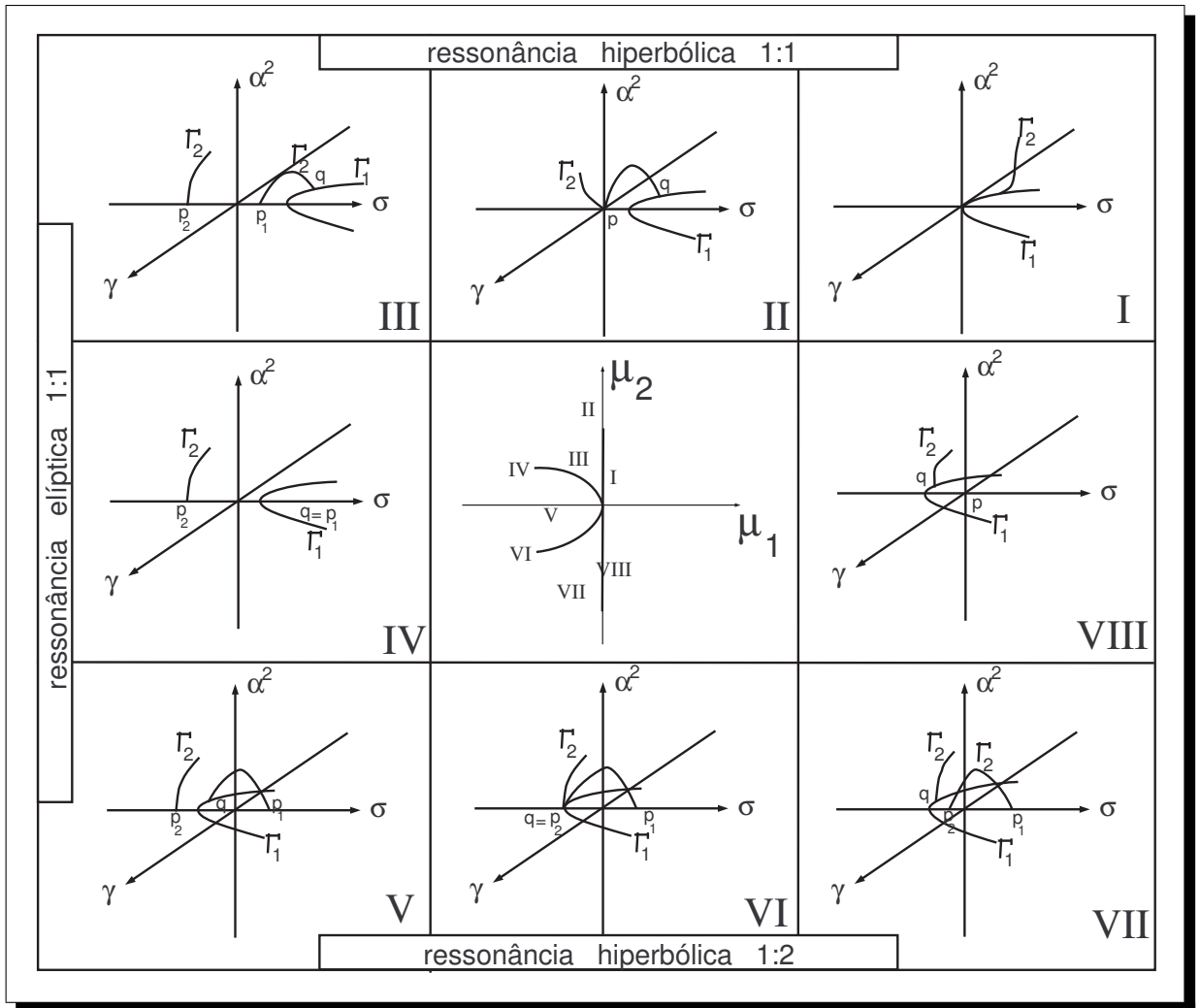


Figura 3.2: Ressonância não Semi-simples 1:1:2, $a_1, b_1, c_1, c_4 > 0$.

3.3 Não semi-simples 2:2:1

Em coordenadas complexas, considere $V = \{z \mid z = (z_1, z_2, z_3)\}$,

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 2iw_0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & 2iw_0 & 0 \\ 0 & 0 & iw_0 + i\mu_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_\mu = \begin{cases} ia_1 z_3^2 + ia_2 z_1^2 \bar{z}_1 + O(|z|^4) \\ ia_2 z_1 z_2 \bar{z}_1 + 2ia_3 z_2 z_3 \bar{z}_3 + 2a_4 z_2 (z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1) + b_1 z_3^2 + \\ + b_2 z_1^2 \bar{z}_1 + ib_3 z_1 (z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1) + b_4 z_1 z_3 \bar{z}_3 + O(|z|^4) \\ ic_1 z_1 \bar{z}_3 + ic_2 z_1 z_3 \bar{z}_1 + c_3 z_3 (z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1) + O(|z|^4), \end{cases} \quad (3.7)$$

e $R(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \bar{z}_3)$; onde a_j, b_j, c_j , são números reais. Novamente, um complemento não ortogonal foi escolhido para simplificar a primeira componente de \tilde{f}_μ . Note que $Fix(R) = \{(\alpha, i\beta, \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. As equações de bifurcação resultantes são

$$\begin{aligned} 0 = G(\alpha, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2, w) = \\ = \begin{cases} i[2\sigma\alpha - \beta - a_1\gamma^2 - a_2\alpha^3 + g_1(\alpha, \beta, \gamma)]; \\ -2\sigma\beta - \mu_1\alpha - b_1\gamma^2 - b_2\alpha^3 - b_4\alpha\gamma^2 + g_2(\alpha, \beta, \gamma); \\ i[\sigma\gamma - \mu_2\gamma - c_1\alpha\gamma - c_2\alpha^2\gamma + 2c_3\alpha\beta\gamma + g_3(\alpha, \beta, \gamma)]; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\sigma = w - w_0$, $g_1, g_3 = O(|\alpha, \beta, \gamma|^4)$, $g_2 = (a_2 - 2b_3)\alpha^2\beta - 4a_4\alpha\beta^4 + 2a_2\beta\gamma^2 + O(|\alpha, \beta, \gamma|^4)$. A \mathbb{Z}_2 - simetria nas equações pode ser representada por $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, -\gamma)$. Se nos restringirmos a $\gamma = 0$ também temos uma \mathbb{Z}_2 - simetria $(\alpha, \beta) \rightarrow (-\alpha, -\beta)$. Agora, vamos encontrar os zeros não triviais de G . Primeiramente, resolvemos a primeira equação em (3.8) e obtemos

$$\begin{aligned} \beta = 2\sigma\alpha - a_1\gamma^2 - a_2\alpha^3 + O(|\alpha, \sigma, \gamma|^4) = \\ = \alpha[2\sigma + O(|\alpha, \sigma|^2)] - \gamma^2[a_1 + O(|\alpha, \sigma, \gamma|^2)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A última expressão é obtida usando-se a \mathbb{Z}_2 - simetria em g_1 mencionada anteriormente. A \mathbb{Z}_2 - simetria também pode ser usada para reescrever g_2 como

$$g_2 = \beta[(a_2 - 2b_3)\alpha^2 - 4a_4\alpha\beta^3 + 2a_2\gamma^2] + \alpha^2 O(|\alpha, \beta|^2) + \beta^2 O(|\alpha, \beta|^2) + O(|\alpha, \beta, \gamma|^2)$$

e substituindo-se β em (3.9) na segunda equação de (3.8) temos que

$$\alpha[4\sigma^2 + \mu_1 + b_2\alpha^2 + O(|\alpha, \sigma|^3)] = \gamma^2[-b_1 + 2a_1\sigma - b_4\alpha + O(|\alpha, \sigma, \mu_1|^2)]. \quad (3.10)$$

Se $\gamma = 0$ obtemos o primeiro ramo de soluções, $\Gamma_1 = \{(\alpha, \sigma, 0) | 4\sigma^2 + \mu_1 + b_2\alpha^2 + O(|\alpha, \sigma|^3) = 0\}$. Para $b_2 \neq 0$, este conjunto gera uma bifurcação ressonante 1 : 1, com o parâmetro μ_1 variando próximo de zero. Se $\gamma \neq 0$, retiramos γ da terceira equação em (3.8) (como $g_3 = \gamma O(|\alpha, \beta, \gamma|^3)$) e resolvemos para α ,

$$\alpha = \frac{1}{c_1}(\sigma - \mu_2) + O(|\gamma, \sigma, \mu_2|^2). \quad (3.11)$$

Substituindo-se α na expressão acima em (3.10) e resolvendo para $\gamma^2 = \gamma^2(\sigma, \mu_1, \mu_2)$, temos que

$$\gamma^2 = \frac{-1}{b_1 c_1} [\mu_1(\sigma - \mu_2)] + \frac{1}{b_1} \left(\frac{-4c_1^2 - b_2}{c_1^3} \right) \sigma^3 + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^3),$$

onde $O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^3)$ contém os termos de terceira ordem diferentes de σ^3 e termos de ordem maior. Agora, em (3.11), α pode ser expresso como função de σ, μ_1, μ_2 e de (3.10) obtemos

$$\gamma^2 \left[-b_1 + 2a_1\sigma - \frac{b_4}{c_1}(\sigma - \mu_2) + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^2) \right] = \Phi := \Phi_1 \cdot \Phi_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left[\frac{1}{c_1}(\sigma - \mu_2) + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^2) \right], \\ \Phi_2 &= \left[\left(4 + \frac{b_2}{c_1^2} \right) \sigma^2 - \frac{2b_2}{c_1^2} \sigma \mu_2 + \frac{b_2}{c_1^2} \mu_2^2 + \mu_1 + O(|\sigma, \mu_1, \mu_2|^3) \right]. \end{aligned}$$

Então a colisão dos zeros de Φ_1 e Φ_2 nos dá o conjunto de bifurcação \mathcal{B} . Denote o zero de Φ_1 por q e os dois zeros de Φ_2 por p_1, p_2 . Assim p_1, p_2 colidem em $\mathcal{B}_2 = \{(\mu_1, \mu_2) | (b_2 + 4c_1^2)\mu_1 = -4b_2\mu_2^2\}$. q e p_1 (ou p_2) colidem em $\mathcal{B}_1 = \{(\mu_1, \mu_2) | 4\mu_2^2 + \mu_1 = 0\}$. Portanto, $\mathcal{B} = \{(\mu_1, \mu_2) | \mu_1 = 0\} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Para $b_2 + 4c_1^2 > 0$ e $b_2 < 0$ esboçamos o conjunto de bifurcação \mathcal{B} e o diagrama de bifurcação na Figura 3.3. Nesta figura, também assumimos que $b_1 < 0, c_1 > 0$; o diagrama é similar para diferentes sinais de b_1, c_1 . Para $b_2 > 0$ ou $b_2 < 0$ com $b_2 + 4c_1^2 < 0$, o conjunto de bifurcação \mathcal{B} é como na Figura 3.4 o diagrama de bifurcação pode ser esboçado de maneira similar.

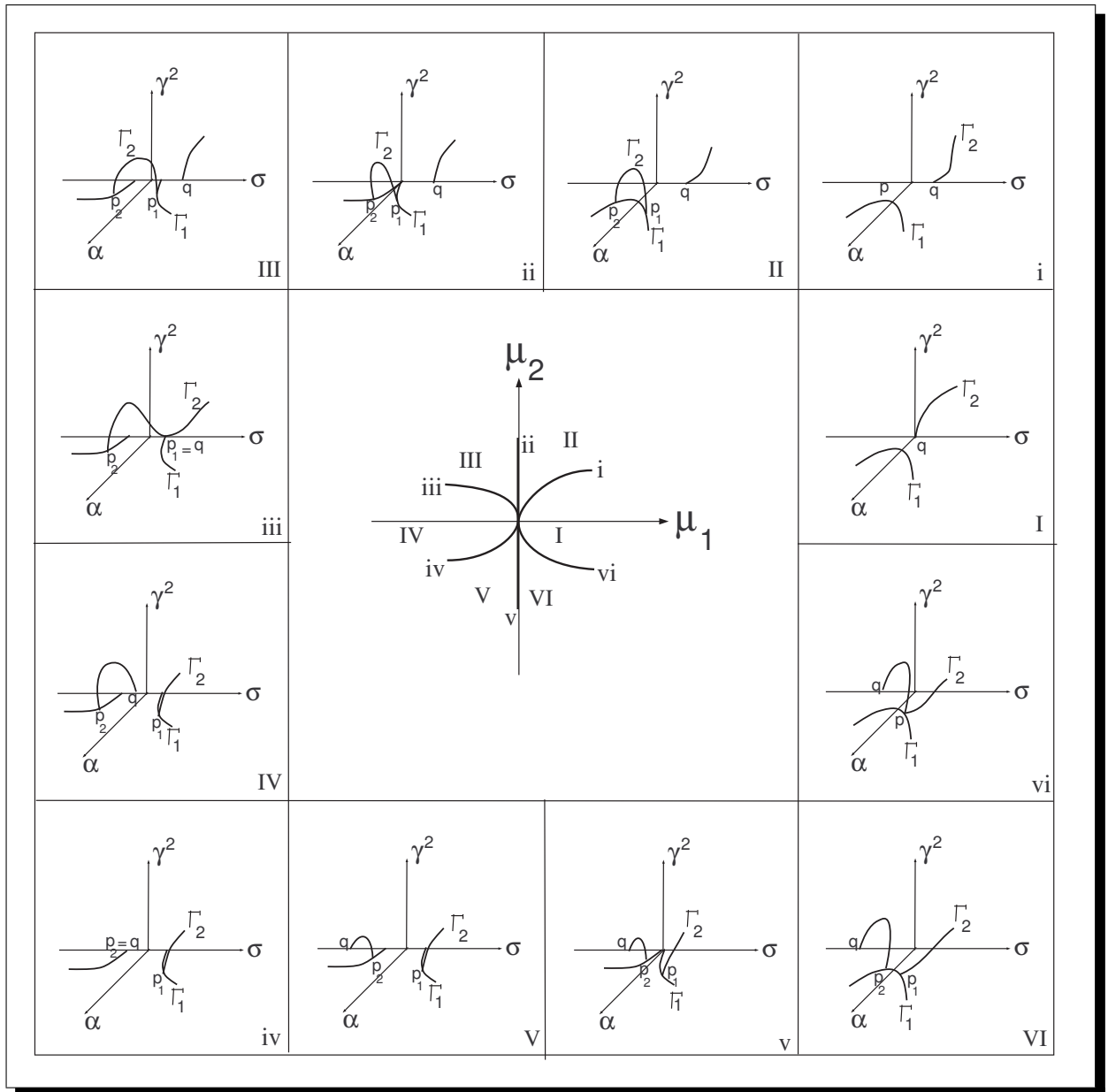


Figura 3.3: Ressonância não Semi-simples 2:2:1, $b_1 < 0, b_2 < 0, b_2 + 4c_1^2 > 0, c_1 > 0$.

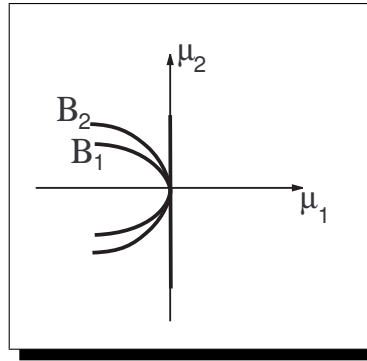


Figura 3.4: Conjunto de bifurcação para $b_2 > 0$ ou $b_2 < 0$ e $b_2 + 4c_1^2 < 0$

3.4 Não semi-simples 1:1

Em coordenadas complexas, considere $V = \{z \mid z = (z_1, z_2)\}$,

$$A_\mu = \begin{pmatrix} iw_0 & 1 \\ \mu & iw_0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_\mu = \begin{bmatrix} ia_1 z_1^2 \bar{z}_1 + a_2 z_1 (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + O(|z|^5) \\ ia_1 z_1 z_2 \bar{z}_1 + a_2 z_2 (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + b_1 z_1^2 \bar{z}_1 + \\ + ib_2 z_1 (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + O(|z|^5) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e $R(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, -\bar{z}_2)$; onde a_j, b_j , são números reais. Como \tilde{f}_μ é R -involutiva, cada coeficiente em \tilde{f}_μ é ou real ou imaginário puro. Note que $Fix(R) = \{(\alpha, i\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. As equações de bifurcação são

$$\begin{aligned} 0 &= G(\alpha, \beta, \mu, \sigma) = \\ &= \begin{bmatrix} i[\sigma\alpha - \beta - a_1\alpha^3 + 2a_2\alpha^2\beta + O(|\alpha, \beta|^5)]; \\ -[\sigma\beta + \mu\alpha - a_1\alpha^2\beta + 2a_2\alpha\beta^2 + b_1\alpha^3 + 2b_2\alpha^2\beta + O(|\alpha, \beta|^5)]; \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\sigma = w - w_0$. Note que aqui, a \mathbb{Z}_2 -simetria nas equações é dada por $(\alpha, \beta) \rightarrow (-\alpha, -\beta)$. Usaremos σ e α para descrever as bifurcações de órbitas simétricas. Resolvendo a primeira equação em (3.13), obtemos $\beta = \sigma\alpha + O(|\alpha, \sigma|^3)$ e substituindo na segunda equação obtemos uma equação que é ímpar em α , devido a \mathbb{Z}_2 -simetria, Assim temos que $\alpha = 0, \beta = 0$ ou

$$\mu = -\sigma^2 - b_1\alpha^2 + O(|\alpha, \sigma|^3).$$

Usando essa relação, esboçamos o diagrama de bifurcação na Figura 3.5 para $b_1 > 0$, e Figura 3.6 para $b_1 < 0$.

Como (α, σ) e $(-\alpha, \sigma)$ correspondem a mesma órbita periódica, esboçamos os diagramas apenas para $\alpha > 0$. Na Figura 3.5, $\mu \geq 0$, a origem é a única solução. A Figura 3.5 corresponde ao caso elíptico; enquanto que a Figura 3.6 corresponde ao caso hiperbólico.

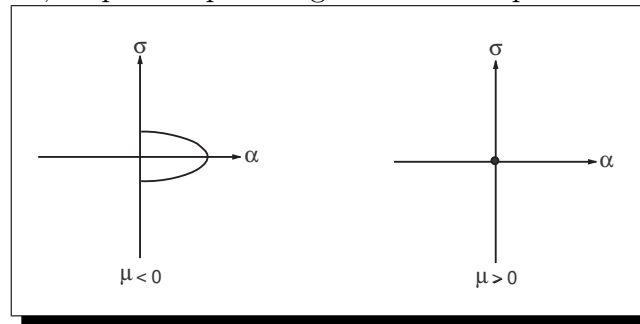


Figura 3.5: Ressonância não Semi-simples 1:1, $b_1 > 0$.

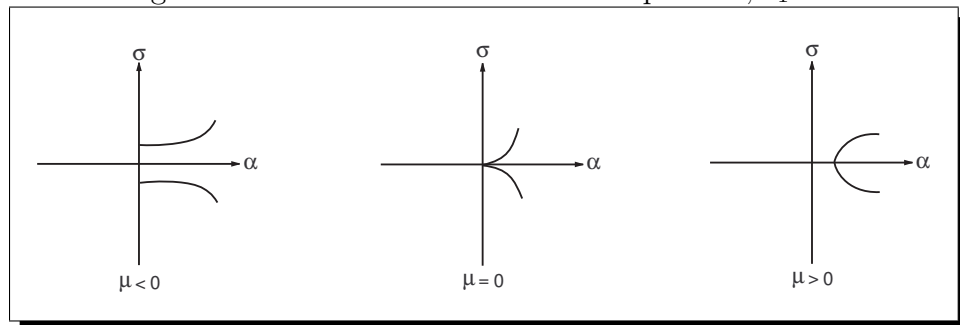


Figura 3.6: Ressonância não Semi-simples 1:1, $b_1 < 0$.

3.5 Não semi-simples 1:1 degenerada

Nesta seção, discutiremos o caso degenerado da *Sec.3.4*, isto é, tomaremos b_1 variando próximo de 0. Seja $\nu = b_1$. A equação de bifurcação é

$$\begin{aligned}
 0 &= G(\alpha, \beta, \mu, \sigma) = \\
 &= \begin{cases} i[\sigma\alpha - \beta - a_1\alpha^3 + 2a_2\alpha^2\beta - a_3\alpha^5 + 4a_4\alpha^3\beta^2 + O(|\alpha, \beta|^7)]; \\ -[\sigma\beta + \mu\alpha - a_1\alpha^2\beta + 2a_2\alpha\beta^2 + \nu\alpha^3 + 2b_2\alpha^2\beta - a_3\alpha^4\beta + \\ + 4a_4\alpha^2\beta^3 + b_3\alpha^5 - 4b_4\alpha^3\beta^2 + O(|\alpha, \beta|^7)] \end{cases} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação em (3.14) obtemos

$$\beta = \sigma\alpha - a_1\alpha^3 + 2a_2\alpha^3\sigma + O(|\alpha, \sigma|^5).$$

e substituindo-a na segunda equação obtemos uma equação que é ímpar em α . Isto resulta que

$$\mu + \nu\alpha^2 + [\sigma + 2a_2\alpha^2\sigma - (a_1 - b_2)\alpha^2]^2 + (b_3 - b_2^2)\alpha^4 + O(|\alpha, \sigma, \mu, \nu|^5) = 0$$

Fazendo $\sigma' = \sigma + 2a_2\alpha^2\sigma - (a_1 - b_2)\alpha^2$, obtemos a equação $\Phi = 0$, onde

$$\Phi = \mu + (\sigma')^2 + \nu\alpha^2 + (b_3 - b_2^2)\alpha^4 + O(|\alpha, \sigma', \mu, \nu|^5).$$

O conjunto de bifurcação é

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ (\mu, \nu) \mid \Phi = 0, \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma'} = 0, \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = 0 \right\} = \\ &= \{ (\mu, \nu) \mid \mu = 0 \text{ ou } \nu^2 = 4(b_3 - b_2^2)\mu \text{ e } (b_3 - b_2^2)\nu < 0 \}. \end{aligned}$$

Assumimos que $b_3 - b_2^2 \neq 0$; e usamos α, σ' para representar cada órbita periódica simétrica. Os diagramas de bifurcação estão esboçados nas Figuras 3.7 e 3.8 dependendo do sinal de $b_3 - b_2^2$.

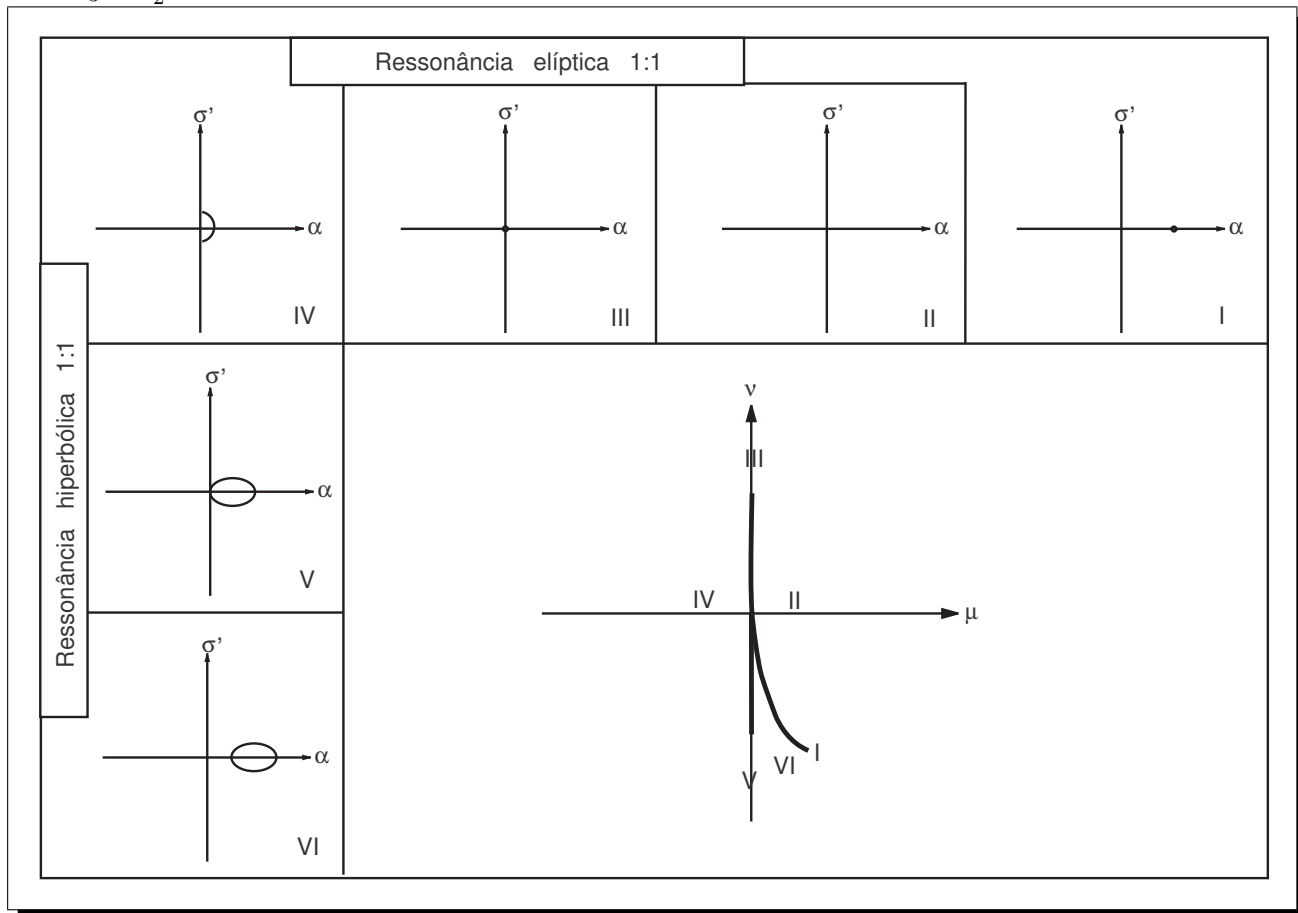


Figura 3.7: Ressonância degenerada não Semi-simples 1:1, $b_3 - b_2^2 > 0$.

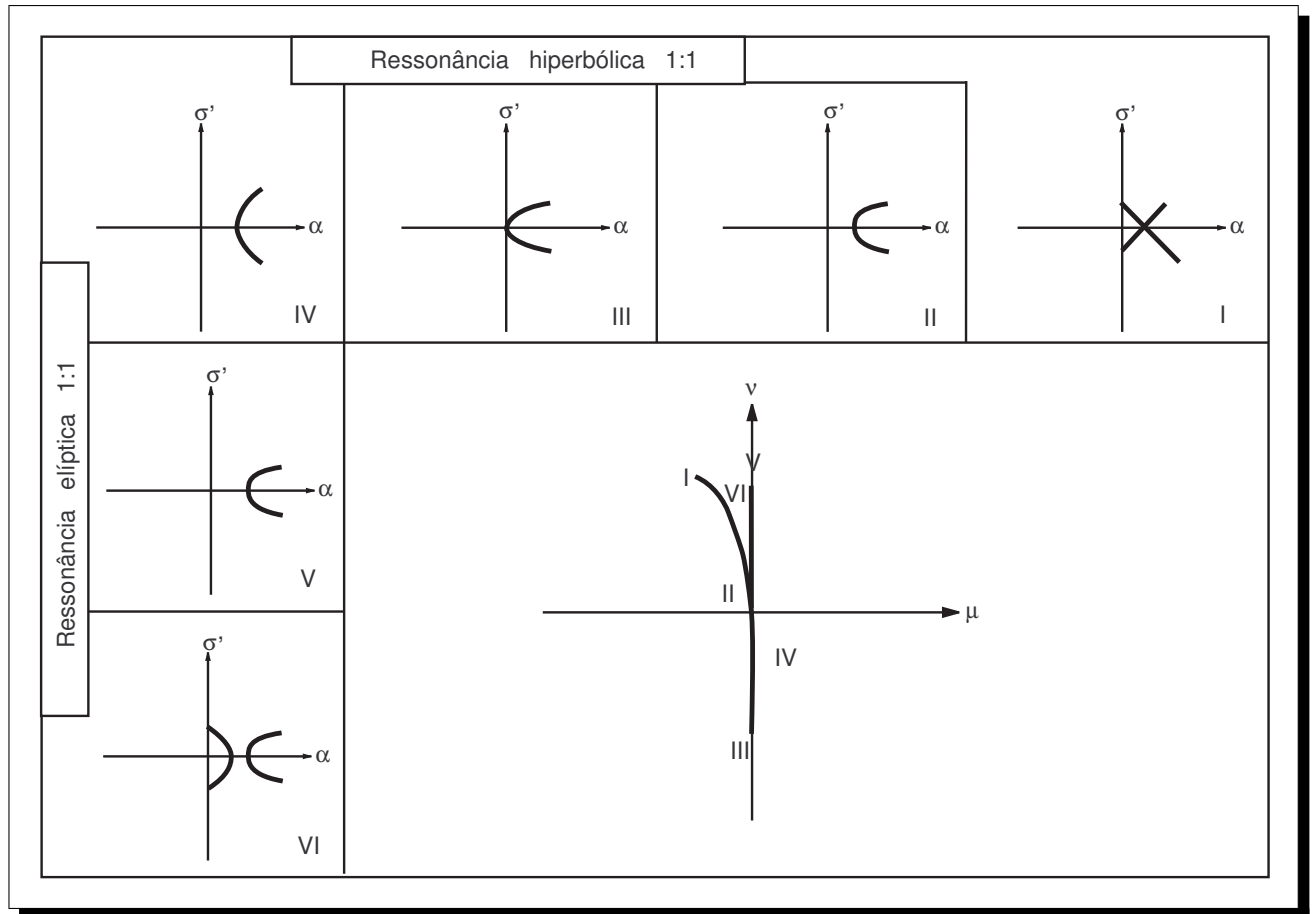


Figura 3.8: Ressonância degenerada não Semi-simples 1:1, $b_3 - b_2^2 < 0$.

3.6 Semi-simples 1:2

Em coordenadas complexas, considere em $V = \{z \mid z = (z_1, z_2)\}$,

$$A_\mu = \begin{pmatrix} i(w_0 + \mu_1) & 0 \\ 0 & i(2w_0 + \mu_2) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_\mu = \begin{bmatrix} i[a_1 \bar{z}_1 z_2 + a_2 z_1^2 \bar{z}_1 + a_3 z_1 z_2 \bar{z}_2] + O(|z|^4) \\ i[b_1 z_1^2 + b_2 z_1 z_2 \bar{z}_1 + b_3 z_2^2 \bar{z}_2] + O(|z|^4) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

e $R(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$; onde a_j, b_j , são números reais. Como \tilde{f}_μ é R -involutiva, os coeficientes de \tilde{f}_μ são todos imaginários puros. Note que $Fix(R) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. A \mathbb{Z}_2 - simetria

nas equações pode ser expressa por $(\alpha, \beta) \rightarrow (-\alpha, \beta)$. A equação de bifurcação é

$$0 = G(\alpha, \beta, \mu, \sigma) = \begin{cases} \sigma\alpha - \mu_1\alpha - a_1\alpha\beta - a_2\alpha^3 - a_3\alpha\beta^2 + O(|\alpha, \beta|^4); \\ 2\sigma\beta - \mu_2\beta - b_1\alpha^2 - b_2\alpha^2\beta - b_3\beta^3 + O(|\alpha, \beta|^4); \end{cases} \quad (3.16)$$

onde $\sigma = w - w_0$. Resolvendo a primeira equação em (3.16) e usando a \mathbb{Z}_2 - simetria obtemos

$$\alpha = 0 \text{ ou } \sigma = \mu_1 - a_1\beta - a_2\alpha^2 - a_3\beta^2 + O(|\alpha, \beta|^3). \quad (3.17)$$

Substituindo na segunda equação em (3.16), tomando $\nu = 2\mu_1 - \mu_2$, temos

$$\alpha = 0 \text{ e } \beta(2\sigma - \mu_2 - b_3\beta^2) = O(|\beta|^4) \quad (3.18)$$

ou

$$\beta(\nu + 2a_1\beta + 2a_2\alpha^2 + 2a_3\beta^2 - b_2\alpha^2 - b_3\beta^2) - b_1\alpha^2 + O(|\alpha, \beta|^4) = 0 \quad (3.19)$$

Como o lado esquerdo de (3.19) é invariante por (α, β) e $(-\alpha, \beta)$ ele é ímpar em α , e daí (3.19) pode ser resolvida para α^2 em termos de μ, β, σ . Temos que

$$\alpha^2 = \beta \left[\frac{\nu}{b_1} + \frac{2a_1}{b_1}\beta + O(|\beta|^2) \right]. \quad (3.20)$$

Aqui, assumimos que $a_1 \cdot b_1 \neq 0$. Usando α, β para representar as órbitas periódicas, o diagrama de bifurcação da Figura 3.9 é obtido de (3.18) e (3.20). A Figura 3.9, corresponde ao caso hiperbólico; enquanto que a Figura 3.10 corresponde ao caso elíptico. (α, σ) e $(-\alpha, \sigma)$ correspondem a mesma órbita periódica simétrica. De fato, a órbita intersecta o plano $Fix(R)$ nesses dois pontos.

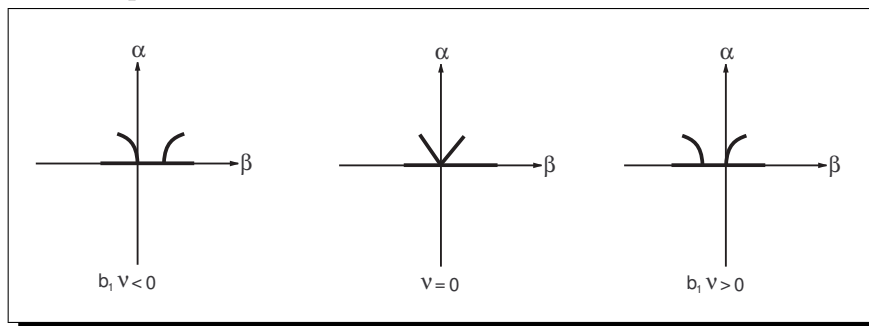
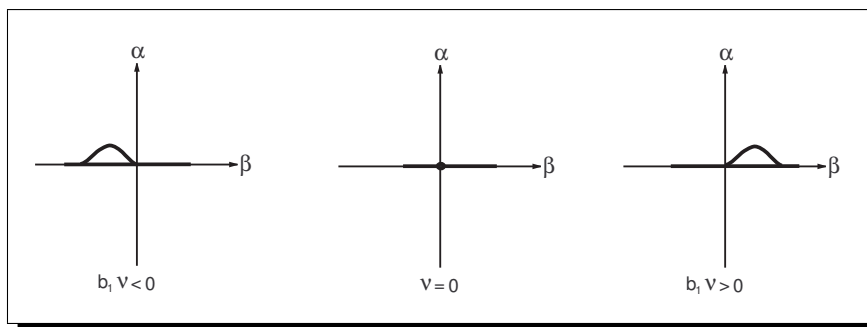


Figura 3.9: Ressonância 1:2, $a_1 \cdot b_1 > 0$.

Figura 3.10: Ressonância 1:2, $a_1 \cdot b_1 < 0$.

3.7 Semi-simples 2:3

Em coordenadas complexas, considere em $V = \{z \mid z = (z_1, z_2)\}$,

$$A_\mu = \begin{pmatrix} i(2w_0 + \mu_1) & 0 \\ 0 & i(3w_0 + \mu_2) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_\mu = \begin{cases} i[a_1 z_1^2 \bar{z}_1 + a_2 z_1 z_2 \bar{z}_2] + O(|z|^4) \\ i[b_1 z_1 z_2 \bar{z}_1 + b_2 z_2^2 \bar{z}_2] + O(|z|^4), \end{cases} \quad (3.21)$$

e $R(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$; onde a_j, b_j , são números reais. Como \tilde{f}_μ é R -involutiva, os coeficientes de \tilde{f}_μ são todos imaginários puros. Note que $Fix(R) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. A \mathbb{Z}_2 -simetria nas equações pode ser expressa por $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, -\beta)$. A equação de bifurcação é

$$0 = G(\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2, w) =$$

$$= \begin{cases} 2\sigma\alpha - \mu_1\alpha - a_1\alpha^3 - a_2\alpha\beta^2 + O(|\alpha, \beta|^4); \\ 3\sigma\beta - \mu_2\beta - b_1\alpha^2\beta - b_2\beta^3 + O(|\alpha, \beta|^4); \end{cases} \quad (3.22)$$

onde $\sigma = w - w_0$. Resolvendo a segunda equação em (3.22) e usando a \mathbb{Z}_2 -simetria obtemos

$$\beta = 0 \text{ ou } \sigma = \frac{1}{3}(\mu_2 + b_1\alpha^2 + b_2\beta^2) + O(|\alpha, \beta|^3). \quad (3.23)$$

Substituindo na primeira equação em (3.22), tomando $\nu = \frac{2}{3}\mu_2 - \mu_1$, temos

$$\beta = 0 \text{ e } \alpha(2\sigma - \mu_1 - a_1\alpha^2) = O(|\alpha|^4) \quad (3.24)$$

ou

$$\alpha \left(\nu + \frac{2}{3}b_1\alpha^2 + \frac{2}{3}b_2\beta^2 \right) - a_1\alpha^3 - a_2\alpha\beta^2 + O(|\alpha, \beta|^4) = 0 \quad (3.25)$$

Vamos assumir que $(\frac{2}{3}b_2 - a_2)(\frac{2}{3}b_1 - a_1) \neq 0$. Resolvendo β^2 em (3.25) temos que

$$\beta^2 = -\left(\frac{2}{3}b_2 - a_2\right)^{-1} \left[\nu + \left(\frac{2}{3}b_1 - a_1\right) \alpha^2 \right] + O(|\alpha|^3). \tag{3.26}$$

Os diagramas de bifurcações (Figuras 3.11 e 3.12) são obtidos de (3.24) e (3.26) usando α e β para representar cada órbita periódica. Note que (α, β) e $(\alpha, -\beta)$ correspondem a mesma órbita periódica.

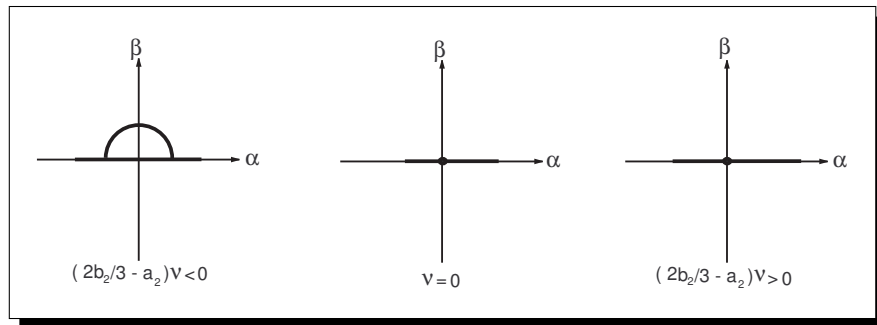


Figura 3.11: Ressonância 2:3, $(\frac{2}{3}b_2 - a_2)(\frac{2}{3}b_1 - a_1) > 0$.

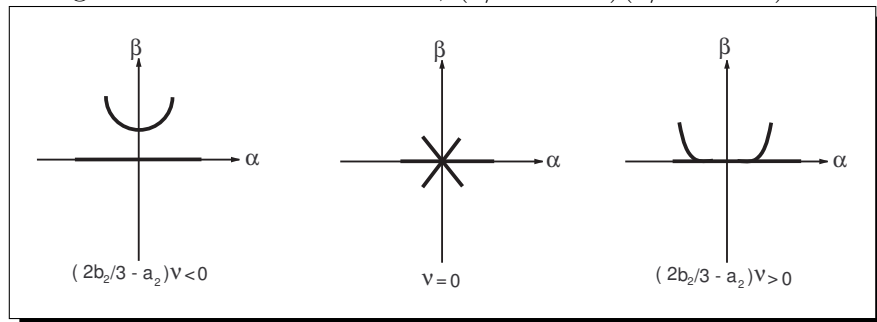


Figura 3.12: Ressonância 2:3, $(\frac{2}{3}b_2 - a_2)(\frac{2}{3}b_1 - a_1) < 0$.

APÊNDICE A

Alternativa Fredholm

Neste apêndice, verificaremos que o operador $T : \mathcal{X} = C^1(\mathbb{S}^1, V) \rightarrow \mathcal{Y} = C^0(\mathbb{S}^1, V)$ definido na seção 2.3, é um operador Fredholm de índice zero.

Primeiramente, verificaremos que $\text{Im } T$ é fechado em \mathcal{Y} . Para isto, basta verificar que T é fechado, isto é, $\text{Graf}(T) = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : y = Tx\}$ é fechado em $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Tome $z = (x, y) \in \overline{\text{Graf}(T)}$, isto é, existe sequência $z_n = (x_n, Tx_n) \in \text{Graf}(T)$ tal que $z_n \rightarrow z$. Assim, $x_n \rightarrow x$ e $Tx_n \rightarrow y$. Queremos mostrar que $y = Tx$.

De fato, temos que

$$Tx_n = w_0 \dot{x}_n - A_0 x_n$$

e daí

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} w_0 \dot{x}_n - A_0 x_n = w_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{x}_n - A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = w_0 \dot{x} - A_0 x = Tx.$$

O fato de que $x_n \rightarrow x \Rightarrow \dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ é demonstrado em [16] na pag 294. Portanto T é fechado.

Teorema A.1. *Sejam \mathcal{X}, \mathcal{Y} espaços de Banach e $T : D(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um operador fechado, onde $D(T)$ é o domínio de T . Se $D(T)$ é fechado em \mathcal{X} então T é limitado.*

Demonstração. Veja em [16] na pag 292. □

Teorema A.2. *Sejam \mathcal{X}, \mathcal{Y} espaços de Banach e $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um operador linear. Se T é fechado então T é contínuo.*

Demonstração. Veja em [?] na pag 20. □

Pelos dois Teoremas acima, temos que $Tx = w_0\dot{x} - A_0x$ é limitado e contínuo.

Vejamos agora que $\dim \text{Ker}T < \infty$ e $\text{codim Im}T = \dim \text{Ker}T$.

Aqui apresentaremos uma formulação um pouco mais geral, que pode ser encontrada em [9] ou [10].

Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$, w -periódica e contínua em t . Seja $f \in C^0(\mathbb{S}^1, V) = \mathcal{Y}$ uma função contínua e w -periódica. Considere a e.d.o. homogênea

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{A.1})$$

e a equação não homogênea

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (\text{A.2})$$

Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de (A.1) e $S(t, s) = X(t)X^{-1}(s)$ o operador de evolução. Suponha que a única solução w -periódica de (A.1) é a solução nula. Isto equivale a dizer que $S(w, 0)x_0 = x_0$ implica $x_0 = 0$ ou ainda que $I - S(w, 0)$ é invertível.

Neste caso, dizemos que o sistema (A.1) é não crítico com relação ao espaço $\mathcal{Y}_w = \{y \in C^0(\mathbb{S}^1, V) : y \text{ é } w\text{-periódica}\}$. Seja $\mathcal{X}_w = \{y \in C^1(\mathbb{S}^1, V) : y \text{ é } w\text{-periódica}\}$.

Uma solução de (A.2) é dada por

$$x(t) = S(t, 0)x_0 + \int_0^t S(t, s)f(s)ds$$

e esta solução é w -periódica se e só se

$$x_0 = S(w, 0)x_0 + \int_0^w S(w, s)f(s)ds = S(w, 0)x_0 + S(w, 0) \int_0^w S(0, s)f(s)ds.$$

Assim, no caso não crítico, temos que $x(t)$ é solução w -periódica se e só se

$$x_0 = (I - S(w, 0))^{-1} \int_0^w S(0, s)f(s)ds.$$

Consideremos agora o caso crítico. A equação

$$(I - S(w, 0))x_0 = \int_0^w S(w, s)f(s)ds$$

tem solução se e só se, para toda solução y_0 de

$$y_0(I - S(w, 0)) = 0$$

tem-se que

$$y_0 \int_0^w S(w, 0)f(s)ds = \int_0^w y_0 S(w, s)f(s)ds = 0.$$

Vemos que $y_0 S(w, s)$ é solução w – periódica da equação adjunta

$$\dot{y} = -yA(t) \quad (\text{A.3})$$

se e somente se $y_0(I - S(w, 0)) = 0$.

Lema A.3. (Alternativa Fredholm) *A equação não homogênea (A.2) tem solução w – periódica se e somente se f é ortogonal a todas as soluções w – periódicas da equação adjunta (A.3).*

Observação A.4. • *Pode-se mostrar que a dimensão do espaço das soluções w – periódicas da equação homogênea é igual a da equação adjunta.*

- *Se f não for ortogonal a todas as soluções w – periódicas da equação adjunta, então pode-se mostrar que toda solução de (A.2) é não limitada.*

Neste caso tomamos $T(x)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$ e temos

$$\text{Ker}T = \{x \in \mathcal{X} : x \text{ é solução } w \text{ – periódica de (A.1)}\}$$

$$\text{Im}T = \{g \in \mathcal{Y}_w : \int_0^w y(s)g(s)ds = 0, \forall \text{ solução } w \text{ – periódica, } y, \text{ de (A.3)}\}$$

Assim, $\dim \text{Ker}T = \text{codim Im}T$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arnold, V.I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, Second Edition, 1988.
- [2] Arnold, V.I. and Sevryuk, M.B., *Oscillations and Bifurcations in Reversible Systems*. Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics - ed. Sagdeev, R.D.(Mir,Moscou),pp.31-64, 1986.
- [3] Arrowsmith, D.K. and Place, C.M., *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [4] Belitskii,G., *C^∞ -normal Forms of Local Vector Fields*. preprint, 2001.
- [5] Brézis, H., *Análisis Funcional: Teoría e Aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., 1984.
- [6] Chow, Shui-Nee and Li, Chengzhi and Wang, Duo, *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.
- [7] Chow, Shui-Nee and Hale,J.K., *Methods of Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [8] Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1985.
- [9] Hale, J.K., *Ordinary Differential Equations*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XXI. Wiley-Interscience, 1969.

- [10] Rodrigues, H.M., *Introdução ao Método Alternativo e Aplicações*. Notas Didáticas, número 28. ICMC-São Carlos.
- [11] Smale,S. and Hirsch,M.W., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [12] Iooss,G. and Adelmeyer, M., *Topics in Bifurcations Theory and Applications*. World Scientific - Advanced Series in Nonlinear Dynamics/Vol.3, Second Edition, 1998.
- [13] Junior, G.F.M., *Bifurcações Elementares em Sistemas Reversíveis*. Tese de Mestrado - I.M.E.C.C./Unicamp, 2003.
- [14] Knobloch,J. and Vanderbauwhede, A., *A General Reduction Method for Periodic Solutions in Conservative and Reversible Systems*. Preprint 1994.
- [15] Knobloch,J. and Vanderbauwhede, A., *Hopf Bifurcation at k-fold Resonances in reversible systems*. Preprint, 1995.
- [16] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, 1989.
- [17] Shih, Chih-Wen, *Bifurcations of symmetric periodic orbits near equilibrium in reversible systems*. International J. Bifurc. Chaos, Vol. 7, No. 3, 569 – 584, 1997.
- [18] Lima, M.F.S., *Famílias Genéricas a 1-parâmetro de Campos Vetoriais Reversíveis*. Tese de Mestrado - I.M.E.C.C./Unicamp, 2002.
- [19] Perko, Lawrence, *Differential equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [20] Roberts, J.A.G. and Quispel, G.R.W., *Chaos and Time-reversal Symmetry: Order and Chaos in Reversible Dynamical Systems*. Phys. Rep. Vol 216, 63, 1992.
- [21] Silva, G.F., *Formas Normais de Sistemas Dinâmicos Reversíveis*. Tese de Mestrado - I.M.E.C.C./Unicamp, 2002.
- [22] Vanderbauwhede, A., *Hopf Bifurcations for Equivariant Conservative and Time-Reversible Systems*. Proc. Roy. Edinburgh 116A, 103-128, 1990.
- [23] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 1990.