

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

ESTUDO DE UM DISPOSITIVO DE REDUÇÃO DE AMPLITUDE
NA PASSAGEM DE UM ROTOR PELA VELOCIDADE CRÍTICA

KATIA LUCCHESI CAVALCA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
de Campinas - UNICAMP, como parte dos requi-
sitos exigidos para obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

Campinas, 15 de Julho de 1988



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

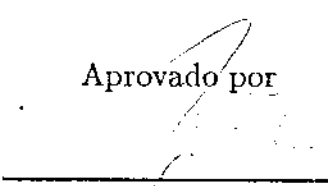
Tese de: Mestrado

Título da Tese: ESTUDO DE UM DISPOSITIVO DE REDUÇÃO
DE AMPLITUDE NA PASSAGEM DE UM ROTOR
PELA VELOCIDADE CRÍTICA

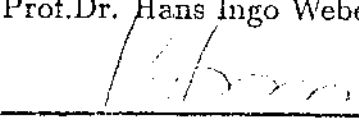
Autor: Katia Lucchesi Cavalca

Orientador: Prof.Dr.Hans Ingo Weber

Aprovado por



Prof.Dr. Hans Ingo Weber, presidente



Prof.Dr. Francisco P. Lèpore Neto



Prof.Dr. João Roberto Barbosa

Campinas, 15 de Julho de 1988

Dedicada
à Gino Lucchesi *in memoriam*
exemplo de trabalho,
honestidade e perseverança.

Agradecimentos

Aos meus pais, Gilberto e Alma, e ao meu marido Franco, pelo apoio, incentivo e compreensão.

Ao meu orientador Prof. Dr. Hans Ingo Weber pela dedicação, incentivo e amizade.

Aos colegas Milton Dias Junior, Ilmar Ferreira Santos e Marco Lúcio Bittencourt, pelas discussões sobre o assunto e auxílio na confecção da tese.

A todo pessoal do Geprom, professores e funcionários, sem os quais este trabalho não teria sido possível.

À Coordenação de Pós-Graduação e funcionários, pela cooperação e boa vontade.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela concessão da bolsa de estudos.

RESUMO

Este trabalho trata da análise não linear de um Rotor Laval simples passando pela sua ressonância, sob ação do atrito seco de Coulomb. Introduce-se o atrito no sistema através de um mecanismo auxiliar independente, de forma que este atue principalmente nas direções perpendiculares e transversais ao eixo do rotor. Através de simulação numérica observou-se alterações dinâmicas interessantes na resposta do sistema quando da variação de determinados parâmetros, de onde surgiram algumas recomendações construtivas importantes. Verificou-se que, desacoplando o sistema auxiliar após a velocidade crítica, ocorre uma redução da amplitude de vibração na ressonância, ou seja, o atrito seco, neste caso, atua como força amortecedora do movimento vibratório.

ABSTRACT

The non-linear analysis of a simple Laval Rotor crossing its resonance under Coulomb dry friction action is studied. This friction is introduced in the system through an auxiliary mechanism so that it works mainly on the perpendicular and transversal directions of the rotor shaft. Interesting dynamical changes on the system response are observed through numerical simulations when some parameters are varied. Some important constructive requirements appeared from these numerical studies. It could be verified that disconnecting the auxiliary system after the critical speed, a vibrational amplitude reduction occurs on the resonance, i.e., in this case the dry friction works like a damping force of the vibratory motion.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	2
2	TIPOS DE DISPOSITIVOS AUXILIARES PARA AMORTECIMENTO DE VIBRAÇÕES DE UM ROTOR	4
3	MODELAMENTO MATEMÁTICO DE UM ROTOR LAVAL CRUZANDO A RESSONÂNCIA	8
3.1	Análise Linear	10
3.1.1	Comportamento do modelo linear na passagem pela ressonância	11
3.1.2	Torque mínimo necessário à ultrapassagem da velocidade crítica em rotores sem amortecimento externo	14
3.2	Análise Não Linear	14
3.2.1	Comportamento do modelo não linear na passagem pela ressonância	14
3.2.2	Modelo não linear com amortecimento externo viscoso	17
3.2.3	Torque mínimo necessário à ultrapassagem da velocidade crítica em sistemas não lineares e não amortecidos	17
3.3	Torque líquido de acionamento	25
4	ESTUDO DA PASSAGEM PELA RESSONÂNCIA DE UM ROTOR LAVAL COM ATRITO SECO	31
4.1	Sistema Adicional com Fixação Flexível	33
4.1.1	Resultados obtidos	36
4.2	Sistema Adicional com Fixação Rígida	43
4.2.1	Resultados obtidos para regime estacionário	43
4.2.2	Resultados obtidos quando da aceleração através da ressonância	49
4.2.3	Efeito do amortecimento viscoso sobre o sistema sujeito ao atrito seco	57
4.2.4	Atrito seco atuando somente na região da ressonância	59
5	ESTUDO TEÓRICO DE ESTABILIDADE	64
5.1	Descrição do Método	64
5.2	Amortecimento Viscoso Equivalente	65
5.2.1	Amortecimento por atrito viscoso com fixação flexível	65
5.2.2	Amortecimento por atrito viscoso com fixação rígida	68
5.3	Estudo de Autovalores para Sistema Não Linear com Atrito Seco	70
6	DESACELERAÇÃO - RESULTADOS	76

7	DISPOSITIVO AUXILIAR COM OS ROLETES INCLINADOS	83
7.1	Resultados Obtidos	86
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	92
A	AMORTECIMENTO EQUIVALENTE	93
A.1	Amortecimento Viscoso	93
A.2	Amortecimento por atrito viscoso	95
A.3	Amortecimento por atrito seco	98
B	MÉTODO COMPUTACIONAL SHAMPINE-GORDON	100
B.1	Estrutura do integrador	100
B.2	Espaçamento entre pontos	101

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A passagem de um rotor flexível pela sua velocidade crítica tem sido amplamente estudada ao longo dos anos, apresentando este assunto uma vasta bibliografia, inclusive na forma de teses de Mestrado e Doutorado [13,19,25].

Um dos trabalhos mais citados data de 1932 quando F.M. Lewis [16] estudou uma solução exata para o problema não-linear de passagem pela ressonância.

Em seguida, Dorning (1959) [5] e Bodger (1967) [3] ampliaram este estudo analisando de forma mais detalhada a passagem pela ressonância nos casos acelerado e desacelerado.

Yanabe e Tamura (1971, 1972) estudaram métodos computacionais para a solução das equações não-lineares de um rotor Laval, obtendo resultados satisfatórios na parte experimental e na análise simulatória pelo método de Runge-Kutta [28]. Feito isto, observou-se que a vibração transiente durante a ultrapassagem da ressonância pode ser dividida em três regiões distintas no domínio do tempo [29], conforme será visto no Capítulo 3.

Matsuura (1975) [20] e Aiba (1976) [1] buscaram soluções exatas através da integral de Fresnel, comparando-as com as obtidas através do método computacional Runge-Kutta-Gill.

Em 1977, Matsuura [21] formula uma condição teórica que testa se um rotor é capaz de realizar uma ultrapassagem no mínimo lenta pela sua velocidade crítica.

Trabalhos mais recentes como o de R. Gasch, R. Markert e H. Pfützner (1979) [10] aplicam toda a teoria anterior em problemas mais complexos de eixos reais. Num estudo especial, mostraram que o efeito torsional sobre o comportamento vibracional de flexão é desprezível.

Em 1980, Yanabe e Tamura [30] estendem suas equações aproximadas para rotores com dois graus de liberdade (dois discos) analisando a recíproca influência entre as duas rotações críticas em diversas condições.

F. Ehrlich e D. Childs (1984) realizaram estudos sobre instabilidades de sistemas auto-excitáveis, que restringem o desempenho de turbomáquinas, causando dificuldades de projeto e operação. Este problema é causado por forças de equilíbrio tangenciais devido a um fluido ou mecanismo de fricção. O fenômeno ocorre na frequência natural e a amplitude passa a aumentar progressivamente com a velocidade de rotação [16]. Este fenômeno é muito semelhante ao aqui descrito no Capítulo 4.

S. Ganapathy e M.A. Parameswaran (1986) desenvolveram um trabalho sobre a transição pela ressonância de um sistema vibratório desbalanceado, verificando requisitos de potência mínima necessária [8].

V. Marchis e F. Vatta (1985) obtiveram resultados numéricos interessantes para sistemas mecânicos com atrito de Coulomb [18].

Também em 1986, S.W. Shaw [24] estudou sistemas com atrito seco. Ambos estudos mostram

que a diferenciação entre os coeficientes de atrito estático e dinâmico atua de forma mais significativa em baixas rotações.

O trabalho mais recentemente desenvolvido por Z. Viderman e I. Porat (1987) [27] trata de um método de controle ótimo para amplitude na ressonância. São propostos três métodos de controle:

- 1 Mola como força linear oposta à deflexão do eixo.
- 2 Mola como força linear perpendicular à deflexão e oposta à rotação.
- 3 Amortecimento viscoso, onde as forças são lineares e opostas à velocidade de vibração.

Com relação a amplitude na ressonância, os métodos 2 e 3 são muito superiores ao método 1, sendo ainda o amortecimento viscoso a melhor solução teórica.

Vê-se que é uma literatura extensa, contando ainda com livros textos consagrados como: *Rotordynamik* Gasch, R. & Pfützner, H., *Vibrating System with Limited Power Supply* Kononenko, V.O., *Vibrations* Magnus, K. e outros.

O que se pretende no presente trabalho é analisar um mecanismo de redução de amplitude de vibração na ressonância baseado no princípio do atrito seco como força amortecedora. Este sistema deve atuar somente nas faixas de grandes amplitudes, podendo ser acoplado e/ou desacoplado ao rotor estudado.

Desta forma, feito o modelamento e equacionamento do sistema, passou-se à análise dos resultados obtidos através do método computacional Shampine-Gordon [23] para integração das equações de movimento. Este método é muito eficiente uma vez que ele próprio define o passo de integração, que por sua vez é variável durante o processo. A solução para cada ponto é calculada em várias etapas, havendo uma interpolação dos resultados para fornecer a solução final. Este processo fornece maior estabilidade para o método e precisão nos resultados.

Inicialmente, fez-se uma revisão sobre análise linear e não-linear de um rotor Laval, procurando-se ajustar as melhores condições de integração, uma vez que o método utilizado fora recém-implementado na época.

Em seguida, verificaram-se efeitos provocados pelo atrito seco como as instabilidades e a redução de amplitude na ressonância, procurando as melhores condições de engate e desengate do mecanismo auxiliar.

Fez-se uma equivalência entre atrito seco e viscoso para o estudo teórico de estabilidade do sistema, complementando-o com a determinação dos autovalores.

Dai surgiram algumas recomendações construtivas como a rigidez do sistema adicional e a montagem opcional para elevadas forças de atrito (Capítulo 4).

Após um breve estudo sobre o caso desacelerado, verificou-se condições favoráveis de alinhamento dos roletes sobre os eixos do sistema de coordenadas de forma a não prejudicar a atuação do mecanismo amortecedor.

O escopo deste trabalho limita-se apenas à análise simulatória. Sugere-se para estudos futuros uma realização experimental para verificação dos fenômenos aqui descritos, para então serem consideradas aplicações práticas.

Capítulo 2

TIPOS DE DISPOSITIVOS AUXILIARES PARA AMORTECIMENTO DE VIBRAÇÕES DE UM ROTOR

Objetivando-se reduzir a amplitude máxima de vibração na ressonância quando procura-se trabalhar com fonte de acionamento mínima possível para ultrapassá-la, introduziu-se num sistema teoricamente simples e conhecido, um amortecimento adicional que utiliza o princípio do atrito seco como força aplicada contrária ao movimento vibratório.

Sabe-se que a passagem da ressonância pode ser efetuada com amplitude reduzida quando se dispõe de aceleração suficientemente elevada para que o sistema não tenha tempo de aumentar sua amplitude, que no caso da análise estacionária de um sistema sem atrito, tende ao infinito. Todavia, é objetivo deste trabalho analisar esta situação numa condição de torque próximo do mínimo torque necessário à ultrapassagem.

Por outro lado, a introdução do amortecimento viscoso no sistema está sujeita a limitações intrínsecas que, freqüentemente, não resolvem o problema. Neste trabalho é proposto um sistema mecânico adicional que, a partir de um certo instante, introduz um amortecimento por atrito seco no sistema, ou seja, pode ser engatado e desengatado atuando apenas nas faixas de grandes amplitudes de vibração, e cuja função corresponde a redução da amplitude.

Com a finalidade de estudar os efeitos provocados pela introdução do atrito seco no sistema, imaginou-se inicialmente um sistema de amortecimento seco composto por quatro roletes de material sintético que apresentasse alto coeficiente de atrito em contato com o aço. Estes roletes vem dispostos sobre o disco de um rotor Laval posicionado verticalmente, diametralmente opostos ao longo dos eixos y e z , conforme Fig.2.1.

Os roletes estão fixos nas direções y e z , porém têm rotação livre no sentido da rotação do disco, evitando introduzir torques contrários ao acionamento.

Entretanto, deste modelo decorrem algumas limitações:

- A dificuldade de realizar um engate/desengate perfeitos de forma a não provocar pequenas inclinações do disco, o que modifica de forma significativa a operação pretendida.

- Limitação da força normal aplicada, pois ela deve ser exatamente igual em todos os roletes. Além disso, esforços elevados podem causar deformações indesejáveis ou excessivas na superfície dos roletes.

Partiu-se, então, para uma forma construtiva que se imaginou mais eficiente, considerando quatro pares de roletes nas mesmas posições, os quais podem se abrir e fechar sobre o disco. Este modelo apresenta duas variações teóricas com relação à fixação externa do sistema mecânico adicional, podendo ser flexível (Fig.2.2) ou rígida, fazendo-se $K_c \rightarrow \infty$.

O sistema flexível apresenta no seu modelamento cinco graus de liberdade: $y_w, z_w, y_c, z_c, \varphi$, e como se verá posteriormente, possui um comportamento dinâmico muito interessante.

Aumentando-se a rigidez do sistema adicional, K_c , notou-se uma pequena melhora dos resultados, até que para uma frequência natural do sistema adicional cerca de cinco vezes maior que a frequência natural do rotor, o comportamento do sistema é praticamente análogo ao do sistema adicional quando fixado rigidamente.

Optou-se então, teoricamente, pelo sistema adicional rígido, o que simplificou razoavelmente o problema reduzindo dois graus de liberdade no equacionamento geral, ou seja, o sistema global volta a ter três graus de liberdade y_w, z_w, φ .

Entretanto, no modelo rígido, K_c deve tender ao infinito ou a massa do sistema adicional deve ser praticamente nula, o que são condições não realizáveis na prática. Faz-se, para o caso em estudo, a recomendação construtiva para que K_c seja tal que $\omega_c \geq 5\omega$, pois teoricamente este sistema tem o comportamento análogo ao caso rígido. Deve-se observar que este valor limite de K_c ainda não pode ser generalizado para sistemas que apresentem outras características dinâmicas.

Estes tipos de modelo para atrito seco introduzem acentuadas instabilidades no sistema após a ressonância, sendo que no modelo rígido linearizado surge uma matriz N assimétrica de forças dependentes do deslocamento. Nos capítulos que seguem, verificou-se ser esta matriz N a responsável pelas instabilidades do sistema linearizado.

Tentando minimizar o efeito instabilizante desta matriz, uma nova variação do modelo foi idealizada, sendo que neste caso tentou-se trabalhar com os roletes inclinados, ou seja, a força de atrito total não atua mais diretamente nas direções y e z , mas sim com uma inclinação relativa as mesmas. As forças atuantes em y e z serão doravante projeções da força total de atrito nestas direções.

A Fig.2.3 mostra uma vista superior do disco do rotor com os roletes inclinados.

Foram simulados em computador exemplos correspondentes aos três modelos apresentados que serão discutidos e analisados no decorrer do trabalho.

Ainda estão em aberto discussões quanto a detalhes construtivos de possíveis realizações experimentais.

No capítulo seguinte faz-se uma breve revisão do modelamento de um Rotor Laval simples e linearizado, analisando-se, de forma mais extensa, o comportamento não linear para o mesmo sistema, a fim de verificar as mudanças nas respectivas respostas quando da introdução do atrito seco para o caso não-linear e atrito viscoso equivalente para o caso linearizado.

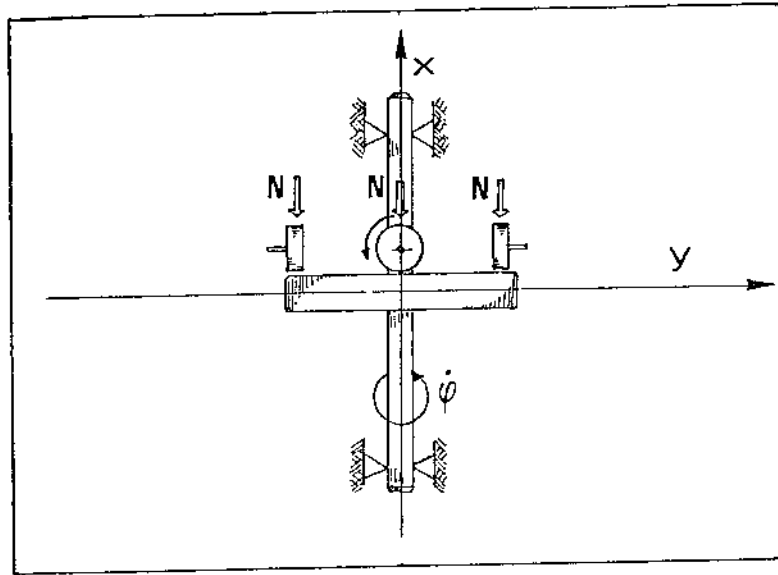


Figura 2.1: Modelamento inicial do dispositivo adicional

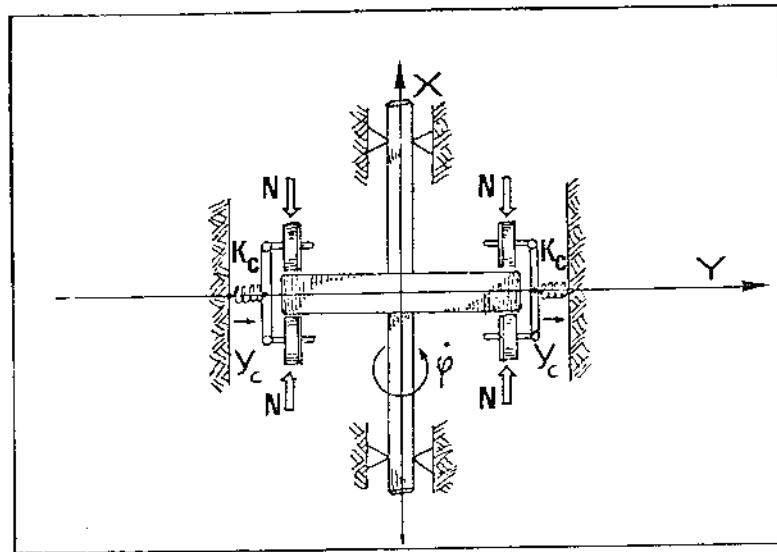


Figura 2.2: Sistema adicional com fixação flexível.

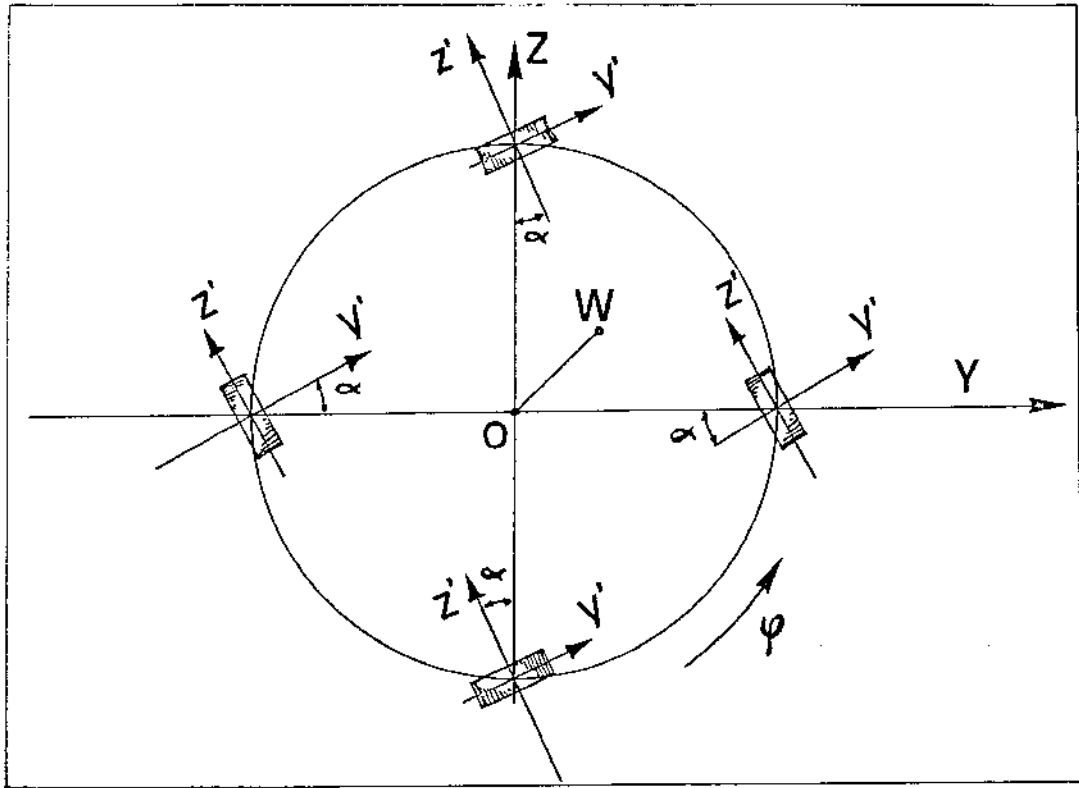


Figura 2.3: Vista superior do sistema adicional com roletes inclinados.

Capítulo 3

MODELAMENTO MATEMÁTICO DE UM ROTOR LAVAL CRUZANDO A RESSONÂNCIA

Pode-se analisar grande parte dos fenômenos existentes em máquinas rotativas através do Rotor Laval, que consiste de um eixo flexível sem massa e de um disco, neste caso, rigidamente fixado ao meio.

O rotor é posicionado verticalmente, podendo-se desprezar a ação da força peso.

À medida que a velocidade de rotação do eixo aumenta, ou seja, quando o rotor é acelerado, as forças inerciais atuantes no sistema devido a uma excentricidade ϵ também aumentam [9], causando deflexão do eixo do rotor (Figs.3.1 e 3.2).

Esta excentricidade pode surgir devido a fatores como não homogeneidade do material do disco, forma de fixação do disco ao eixo etc.

Para a Fig.3.2 tem-se a seguinte notação:

- O = centro do eixo imaginário que une os mancais.
- W = centro do disco por onde passa o eixo.
- S = centro de massa do disco.
- ϵ = excentricidade.
- m = massa do disco.
- I_p = momento de inércia polar do disco.
- k = constante elástica do eixo em todas as direções radiais.
- ϕ = ângulo de rotação do disco.
- y_w, z_w = coordenadas inerciais do ponto W .

- T = torque líquido aplicado.
- k_{y_w}, k_{z_w} = forças de restituição nas respectivas direções y_w e z_w .

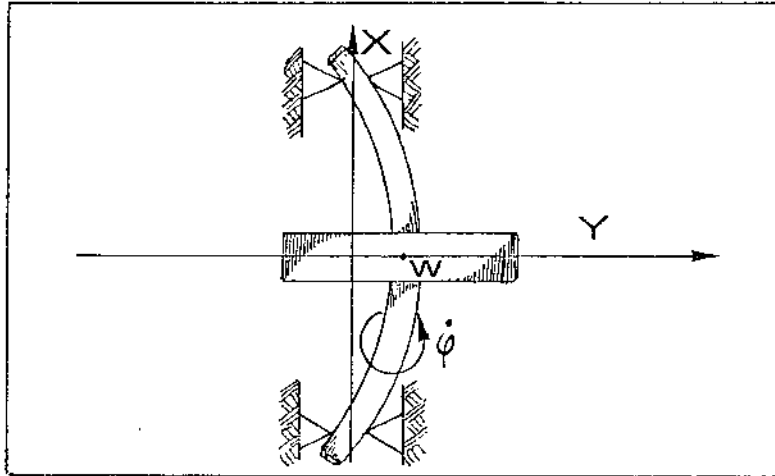


Figura 3.1: Rotor Laval.

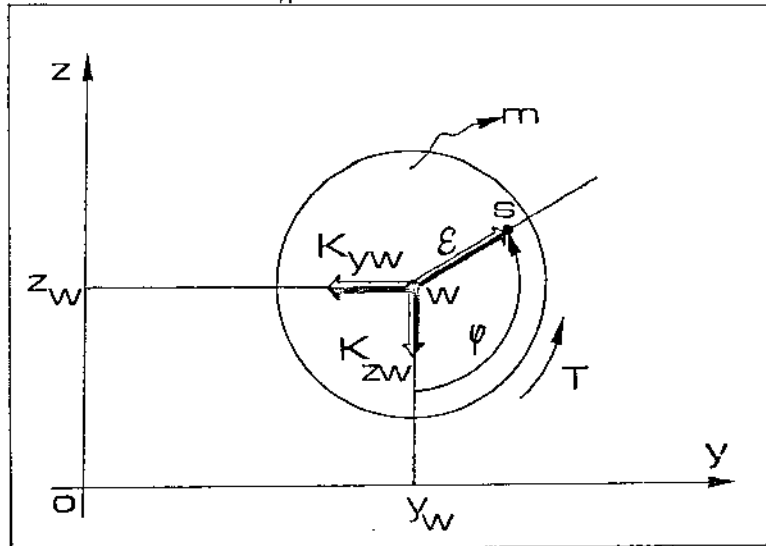


Figura 3.2: Rotor Laval - Coordenadas Inerciais.

Muitas vezes, as freqüências naturais do rotor em dois planos perpendiculares são iguais ou muito próximas. O movimento forçado de um sistema com duas freqüências naturais idênticas, próximo à ressonância, geralmente caracteriza-se pelo fato que a parte predominante contém harmônicas com a freqüência da força de excitação. Portanto, é conveniente separar e analisar as condições de freqüência nas respectivas direções. Assim, a freqüência natural simples atua em duas coordenadas do sistema juntamente com a equação que governa o fornecimento de energia, perfazendo três equações diferenciais para o sistema [14].

Na formulação que segue, os mancais foram considerados rígidos comparados ao eixo e desprezou-se inicialmente qualquer amortecimento (Fig.3.2).

Pela Lei de Newton:

$$m\ddot{y}_s = -ky_w \quad (3.1)$$

$$m\ddot{z}_s = -kz_w \quad (3.2)$$

Analisando os pontos W e S obtém-se a relação de coordenadas:

$$y_s = y_w + \epsilon \cos(\varphi - 90) = y_w + \epsilon \operatorname{sen} \varphi \quad (3.3)$$

$$z_s = z_w + \epsilon \operatorname{sen}(\varphi - 90) = z_w - \epsilon \cos \varphi \quad (3.4)$$

Como as forças nos mancais dependem da excentricidade, substitui-se (y_s, z_s) por (y_w, z_w) e suas respectivas derivadas:

$$m\ddot{y}_w + ky_w = \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \operatorname{sen} \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (3.5)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi) \quad (3.6)$$

onde: $\omega^2 = k/m =$ frequência natural do sistema.

A equação de momento em relação ao centro de massa do sistema:

$$I_p \ddot{\varphi} = T + \epsilon k(z_w \operatorname{sen} \varphi + y_w \cos \varphi) \quad (3.7)$$

3.1 Análise Linear

Nesta análise, simplifica-se a equação de momento (3.7), considerando-se regime estacionário ou $T = 0$. Desta forma, o acionamento é o necessário para vencer as resistências, pois o torque líquido aplicado é a diferença entre o torque do motor (T_m) e o torque resistivo devido à perdas inerentes ao sistema (T_p).

$$T = T_m - T_p \quad (3.8)$$

Pode-se escrever o momento de inércia I_p em função do raio de giração ρ :

$$I_p = m\rho^2 \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.7) para $T = 0$, vem:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\epsilon}{\rho^2} (z_w \operatorname{sen} \varphi + y_w \cos \varphi) \omega^2 \quad (3.10)$$

Como $\epsilon, y_w, z_w \ll \rho$ tem-se praticamente $\ddot{\varphi} = 0$ e $\dot{\varphi} = \Omega = \text{cte}$. Portanto: $\varphi = \Omega t + \beta$. O ângulo β pode ser anulado escolhendo-se convenientemente a origem dos tempos.

Passa-se, então, a trabalhar com dois graus de liberdade:

$$m\ddot{y}_w + ky_w = \epsilon m \Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t + \beta) \quad (3.11)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = -\epsilon m \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \quad (3.12)$$

A solução homogênea das equações (3.11) e (3.12) é transitória, tendendo a desaparecer com a introdução de um amortecimento externo viscoso.

Na solução particular da equação completa, o sistema responde de acordo com a excitação gerada pelo desbalanceamento.

$$y_w = Y_p \text{sen}(\Omega t + \beta) \quad (3.13)$$

$$z_w = -Z_p \text{cos}(\Omega t + \beta) \quad (3.14)$$

y_w e z_w são, então, as respostas permanentes do sistema desde que $\Omega \neq \omega$. Y_p e Z_p , que neste caso possuem o mesmo valor, são as amplitudes máximas de vibração, ou melhor, as deflexões máximas do eixo nas respectivas direções y e z .

$$Y_p = Z_p = \frac{\epsilon \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (3.15)$$

A trajetória do ponto W é, então, uma circunferência cujo raio tende ao infinito quando $\Omega = \omega$, estando o sistema num estado de ressonância.

Um raciocínio análogo pode ser aplicado ao centro de massa S .

$$y_s = Y_s \text{sen}(\Omega t + \beta) \quad (3.16)$$

$$z_s = -Z_s \text{cos}(\Omega t + \beta) \quad (3.17)$$

onde: $Y_s = Z_s = \frac{\epsilon \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}$

Relacionando as coordenadas dos pontos W e S , verifica-se que os pontos O , W , S (Fig.3.2) situam-se sobre uma reta.

$$\frac{y_w}{z_w} = \frac{y_s}{z_s} = -\tan(\Omega t + \beta) \quad (3.18)$$

Portanto, na análise linear do sistema não amortecido, a deflexão do eixo é estática e não influenciada pela velocidade de rotação, não existindo tensões alternativas de momento fletor no eixo. Na passagem pela ressonância, o ponto S sofre um giro de 180° em torno do ponto W , desencadeando-se um processo de autocentragem do eixo à medida que a velocidade de rotação aumenta.

3.1.1 Comportamento do modelo linear na passagem pela ressonância

Sabe-se que é necessário ter à disposição um certo torque de acionamento para que o rotor possa ultrapassar a ressonância.

Considerou-se para este estudo um rotor com amortecimento externo viscoso para análise da deflexão do eixo na rotação crítica.

$$m\ddot{y}_w + c\dot{y}_w + ky_w = \epsilon m \Omega^2 \text{sen} \Omega t \quad (3.19)$$

$$m\ddot{z}_w + c\dot{z}_w + kz_w = -\epsilon m \Omega^2 \text{cos} \Omega t \quad (3.20)$$

Na forma complexa: $r_w = z_w - iy_w$.

$$\ddot{r}_w + \frac{c}{m}\dot{r}_w + \omega^2 r_w = -\epsilon \Omega^2 e^{+i\Omega t} \quad (3.21)$$

A solução completa é:

$$r_w = \underbrace{e^{\delta t}(R_1 e^{i\omega_1 t} + R_2 e^{-i\omega_1 t})}_{\text{homogênea}} + \underbrace{R_p e^{i\Omega t}}_{\text{particular}} \quad (3.22)$$

onde:

- $\delta = -\frac{c}{2m}$ = amortecimento externo.
- $\omega_1 = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ = frequência de vibração transiente.
- $\xi = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2m\omega}$ = fator de amortecimento externo viscoso.
- Ω = frequência de excitação.
- ω = frequência natural.

Para condições iniciais: $r_w(0) = 0$ e $\dot{r}_w(0) = 0$, obtém-se R_1 e R_2 :

$$\begin{aligned} R_1 &= -\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{\eta - i\xi}{2\sqrt{1 - \xi^2}}\right)\right) R_p \\ R_2 &= -\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\eta - i\xi}{2\sqrt{1 - \xi^2}}\right)\right) R_p \end{aligned} \quad (3.23)$$

Na ressonância, para pequeno amortecimento: $\eta = 1$, $\xi \ll 1$, $\omega_1 \approx \omega = \Omega$.

$$r_w(t) = R_p e^{i\omega t} (1 - e^{-\xi\omega t}) \quad (3.24)$$

onde: $R_p = \frac{\epsilon}{2i\xi}$

$$r_w(t) = \frac{\epsilon}{2\xi} (1 - e^{-\xi\omega t}) \underbrace{e^{i(\omega t + \pi/2)}}_{\text{parte oscilatória}} \quad (3.25)$$

Para $t \rightarrow \infty$, o raio da trajetória de W cresce inicialmente tendendo depois para um valor constante (Fig.3.3). Se $t \rightarrow \infty$:

$$r_w \rightarrow \frac{\epsilon}{2\xi} \quad (3.26)$$

Para o caso não amortecido na ressonância, vem:

$$r_w(t) = \frac{\epsilon\omega t}{2} e^{-\xi\omega t} \underbrace{e^{i(\omega t + \pi/2)}}_{\text{parte oscilatória}} \quad (3.27)$$

$$r_w(t) \Big|_{\xi=0} = \frac{\epsilon\omega t}{2} e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (3.28)$$

O ponto W se move, neste caso, numa trajetória espiral de dentro para fora, na ponta de um vetor girante com velocidade de rotação constante, que cresce com o tempo. Este crescimento é proporcional a ϵ e ω (Fig.3.4).

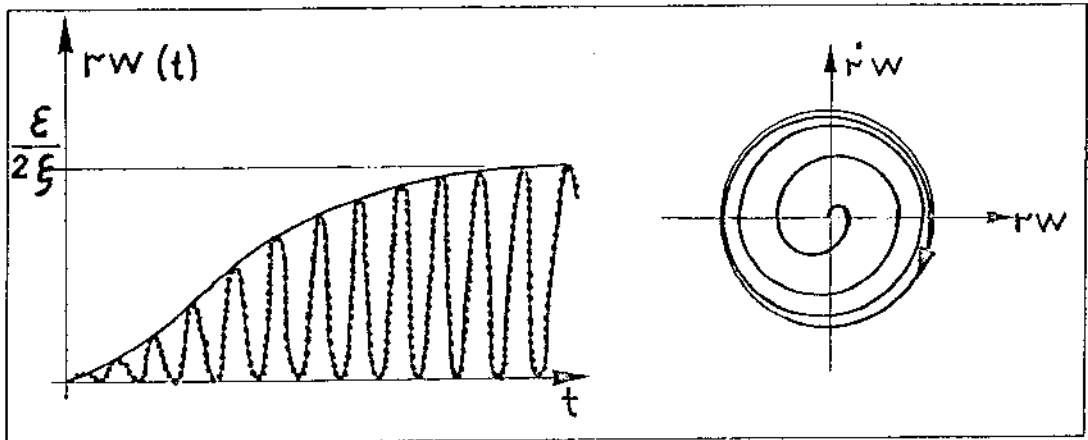


Figura 3.3: Trajetória de W na ressonância - sistema amortecido

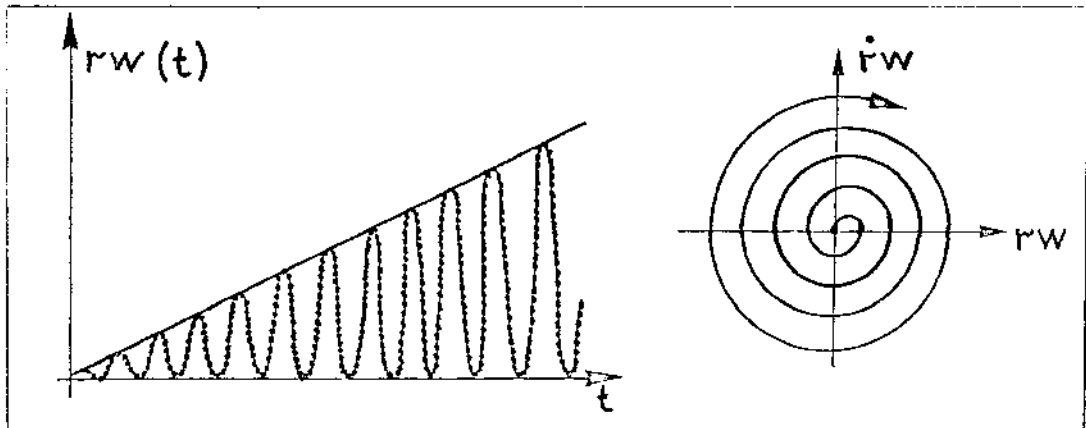


Figura 3.4: Trajetória de W na ressonância - sistema não amortecido.

3.1.2 Torque mínimo necessário à ultrapassagem da velocidade crítica em rotores sem amortecimento externo

Partiu-se da equação de momento (3.7), fazendo $\ddot{\varphi} = 0$, ou seja, o acionamento é suficiente para manter a velocidade de rotação constante. Tem-se, então, o equilíbrio:

$$T = -\epsilon k(z_w \operatorname{sen} \varphi + y_w \cos \varphi) \quad (3.29)$$

Como ϵ , y_w , z_w são pequenos, ocorre uma pequena variação periódica de T , que na ressonância assume valores consideráveis.

Separando a equação (3.28) nas coordenadas y_w e z_w :

$$y_w = -\frac{\epsilon \omega t}{2} \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) = -\frac{\epsilon \omega t}{2} \cos \omega t \quad (3.30)$$

$$z_w = \frac{\epsilon \omega t}{2} \cos(\omega t + \pi/2) = -\frac{\epsilon \omega t}{2} \operatorname{sen} \omega t \quad (3.31)$$

Substituindo as expressões (3.30) e (3.31) na equação (3.29):

$$T = \frac{\epsilon^2 k \omega t}{2} \quad (3.32)$$

que é o mínimo torque necessário para manter a condição $\ddot{\varphi} = 0$. O sistema somente conseguirá passar a ressonância se possuir uma energia de acionamento superior ao valor dado pela equação (3.32).

3.2 Análise Não Linear

A análise linear feita até aqui explica muito do comportamento dos sistemas oscilatórios. Entretanto, alguns efeitos não são explicáveis ou possíveis de analisar pela teoria linear. Esta última relaciona linearmente causa e efeito, ou seja, dobrando-se a carga, a resposta tem sua amplitude dobrada. Na análise linear também prevalece o princípio da superposição das soluções homogênea e particular.

Em sistemas não lineares a relação causa e efeito deixa de ser proporcional e não prevalece o princípio de superposição na solução das equações.

No caso do Rotor Laval, o bem conhecido efeito *stalling* do sistema, quando o torque é insuficiente para uma ultrapassagem da crítica, não pode ser estudado por análise simplificada.

3.2.1 Comportamento do modelo não linear na passagem pela ressonância

De acordo com as Figs.3.1 e 3.2, as equações gerais do movimento, já vistas inicialmente, são:

$$\ddot{z}_w + \omega^2 z_w = -\epsilon((\dot{\varphi})^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\ddot{y}_w + \omega^2 y_w = \epsilon((\dot{\varphi})^2 \operatorname{sen} \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)$$

$$I_p \ddot{\varphi} = T + k\epsilon(z_w \operatorname{sen} \varphi + y_w \cos \varphi)$$

cujas soluções são obtidas por integração das equações, utilizando-se o método computacional Shampine-Gordon [23], partindo sempre de condições iniciais nulas.

O torque líquido fornecido ao sistema na equação (3.7) é inicialmente considerado constante. O rotor analisado corresponde a uma realização experimental já existente e que apresenta as seguintes características:

- $\omega = 125,66 \text{rd/s}$
- $k = 31580 \text{N/m}$
- $m = 2 \text{kg}$
- $I_p = 0,0056 \text{kgm}^2$
- $\epsilon = 0,001 \text{m}$

A excentricidade do centro de massa introduz não linearidades no sistema, as quais dissipam energia mais rapidamente, pois o eixo passa a girar fletido (*whirling*) e esta deflexão tende a aumentar muito na ressonância, transformando parte da energia de rotação em energia de deformação.

As Figs.3.5, 3.6, 3.7 mostram a existência de duas regiões distintas quando um rotor atravessa a ressonância, caracterizadas pela notável mudança no comportamento da velocidade de rotação em sistemas não amortecidos [6,10,16,28,29,30].

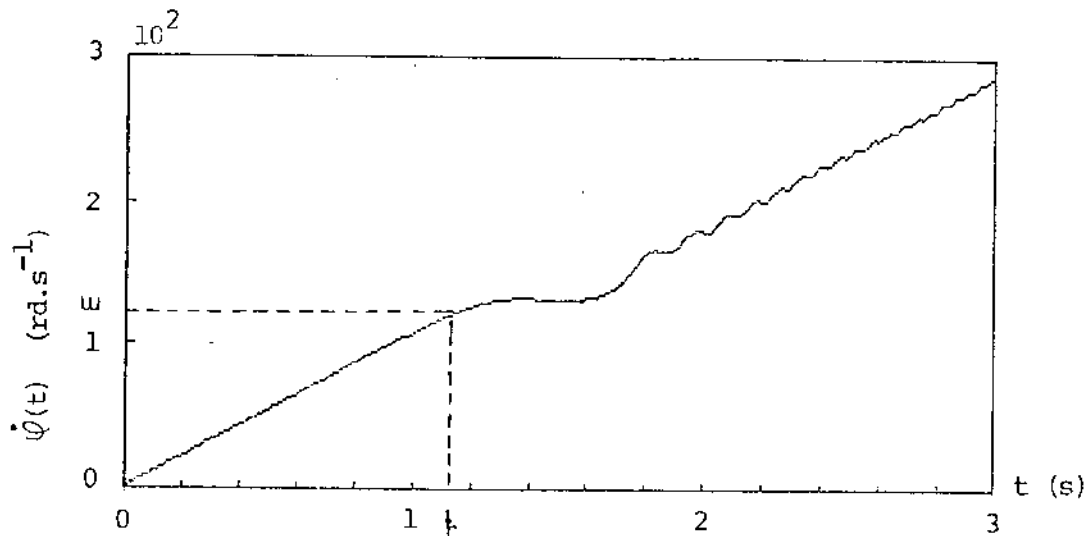


Figura 3.5: Velocidade angular $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo.

A primeira região vai desde o início da aceleração do rotor até se alcançar a velocidade crítica (tempo t_c). A velocidade angular cresce praticamente de forma linear (Fig.3.5) e a aceleração se mantém constante (Fig.3.6). A amplitude de vibração cresce lenta e gradualmente até atingir a crítica, quando então aumenta rápida e acentuadamente (Fig.3.7).

Quando a velocidade de rotação ultrapassa a ressonância começa a segunda região.

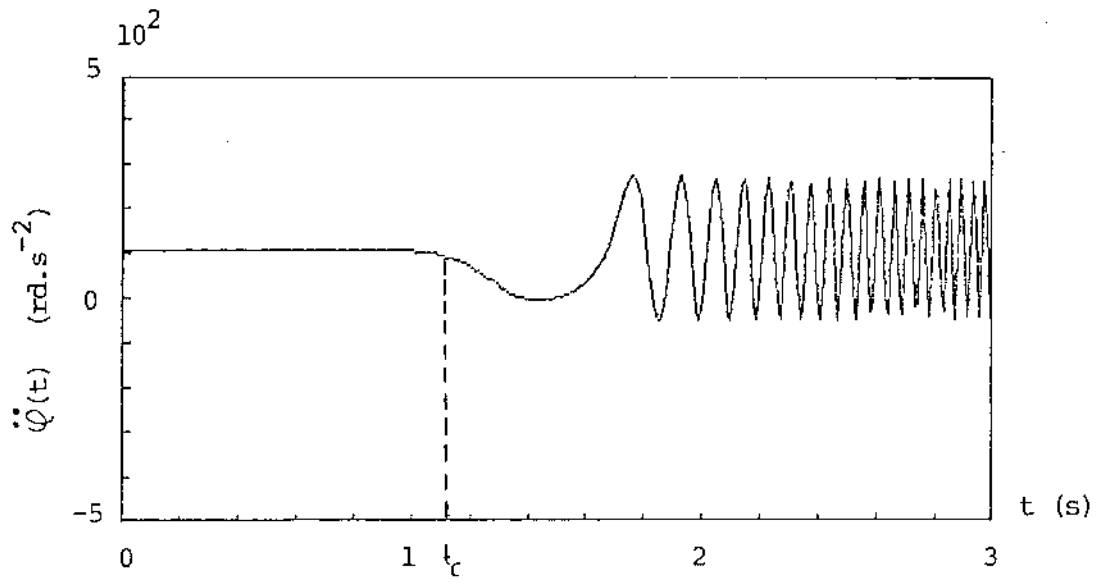


Figura 3.6: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo.

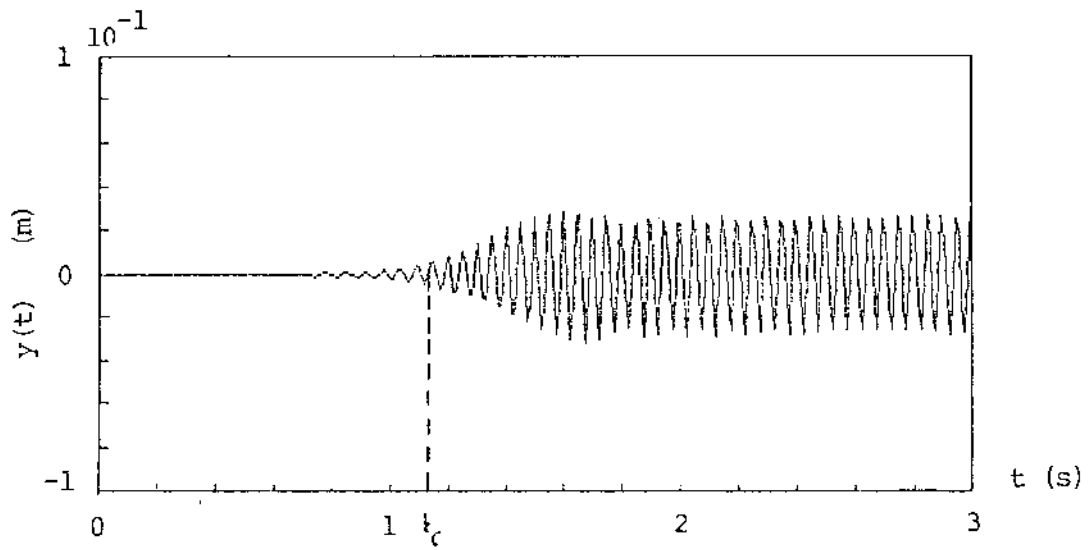


Figura 3.7: Deslocamento $y(t) \times$ tempo.

A amplitude de vibração atinge um valor máximo a uma velocidade próxima à crítica, após o que a força de excitação, ou desbalanceamento, pode extrair um pouco da energia de deformação que colocou no sistema e, não havendo amortecimento, o sistema continua vibrando numa amplitude um pouco menor que seu valor máximo. A velocidade de rotação mantém-se por algum tempo em torno da velocidade crítica para depois continuar aumentando e a aceleração, após uma ligeira queda, passa a oscilar em torno do seu valor inicial. A vibração transiente ainda se divide em três partes no domínio do tempo:

- Antes de atingir a ressonância: tem-se vibração forçada pelo desbalanceamento, cuja frequência de vibração é igual à frequência instantânea da força externa.
- Durante a ultrapassagem da ressonância: neste caso a frequência de vibração é igual à frequência natural do sistema.
- Após a ultrapassagem: a vibração, então, resulta de uma atuação conjunta das vibrações livre e forçada.

3.2.2 Modelo não linear com amortecimento externo viscoso

Introduziu-se, inicialmente, amortecimento externo viscoso que pode ser imaginado atuando aerodinamicamente sobre o rotor. No equacionamento, este amortecimento é representado incluindo-se os termos $c/m \dot{y}_w$ e $c/m \dot{z}_w$ à esquerda das equações (3.5) e (3.6), respectivamente.

Neste caso, a amplitude máxima de vibração, durante a ultrapassagem da velocidade crítica, será afetada, pois esta amplitude será menor para sistemas amortecidos em relação aos não amortecidos. E, ainda, o decréscimo da amplitude na ressonância depende do fator de amortecimento (ξ), pois quanto maior for este fator, menor será o pico na ressonância.

As Figs.3.8, 3.9, 3.10 ilustram o efeito do fator ξ sobre o deslocamento $y(t)$.

O aumento do amortecimento viscoso sobre o sistema está sujeito a limitações intrínsecas que freqüentemente não resolvem o problema de aumento de amplitude na ressonância. Nos capítulos seguintes será estudada a influência do atrito seco no comportamento do rotor, quando atuando sobre o disco nas direções y e z . Deste estudo será apresentado um sistema adicional que atua somente na faixa de elevadas amplitudes de vibração, isto é, sua função corresponde a reduzir a amplitude máxima nas proximidades da velocidade crítica do sistema.

3.2.3 Torque mínimo necessário à ultrapassagem da velocidade crítica em sistemas não lineares e não amortecidos

Há um torque líquido mínimo atuante no sistema abaixo do qual o rotor não consegue ultrapassar a ressonância, pois a energia fornecida ao sistema não é suficiente para superar perdas devido à deformação do eixo e demais perdas intrínsecas ao sistema, não restando energia de rotação suficiente para aceleração além da ressonância [1,8,20].

Quando isto ocorre, o rotor é acelerado até a velocidade crítica, quando então a velocidade de rotação permanece *flutuando* em torno ou ligeiramente abaixo da mesma. Este fenômeno é conhecido como *stalling* ou *beat phenomenon* (batimento da velocidade de rotação com a velocidade crítica do rotor). Conseqüentemente, a amplitude máxima cresce indefinidamente e o motor é dito insuficiente para a ultrapassagem (Figs. 3.11, 3.12, 3.13).

No caso de o motor ser suficiente ou fornecer o torque necessário à ultrapassagem da crítica, verificam-se dois casos de passagem pela ressonância: passagem lenta e passagem rápida.

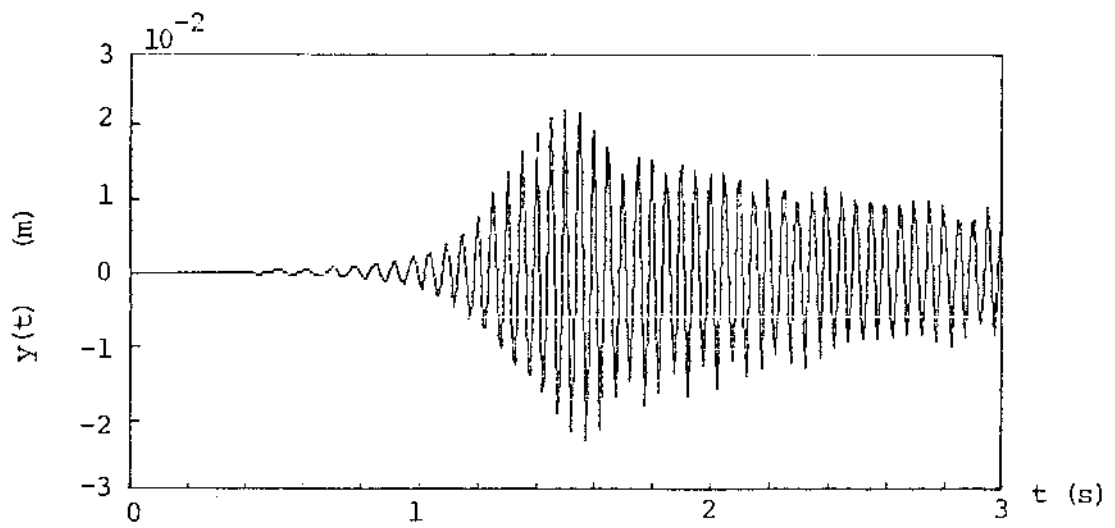


Figura 3.8: Deslocamento $y(t) \times$ tempo, $\xi = 0,005$.

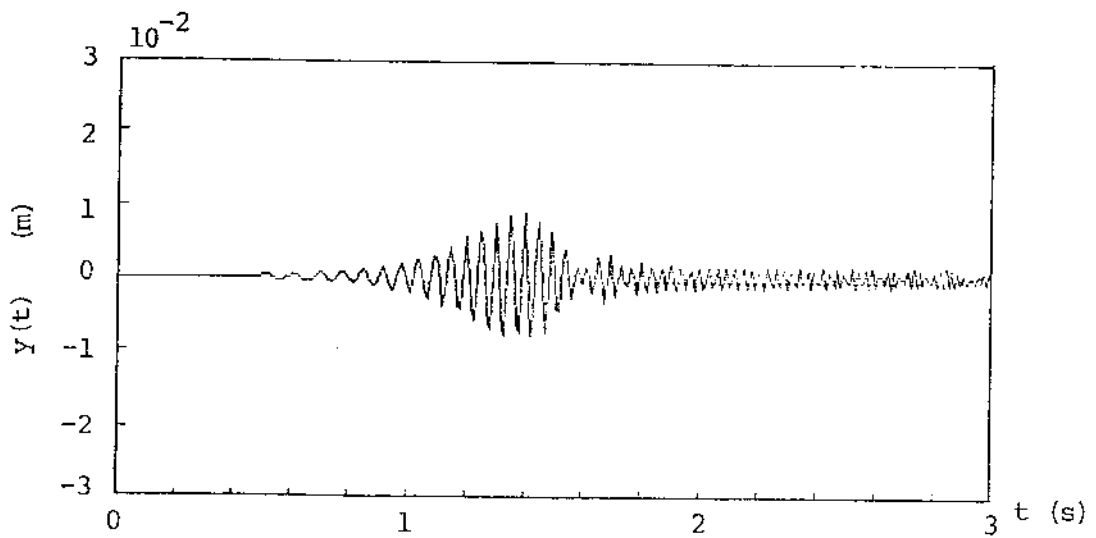


Figura 3.9: Deslocamento $y(t) \times$ tempo, $\xi = 0,05$.

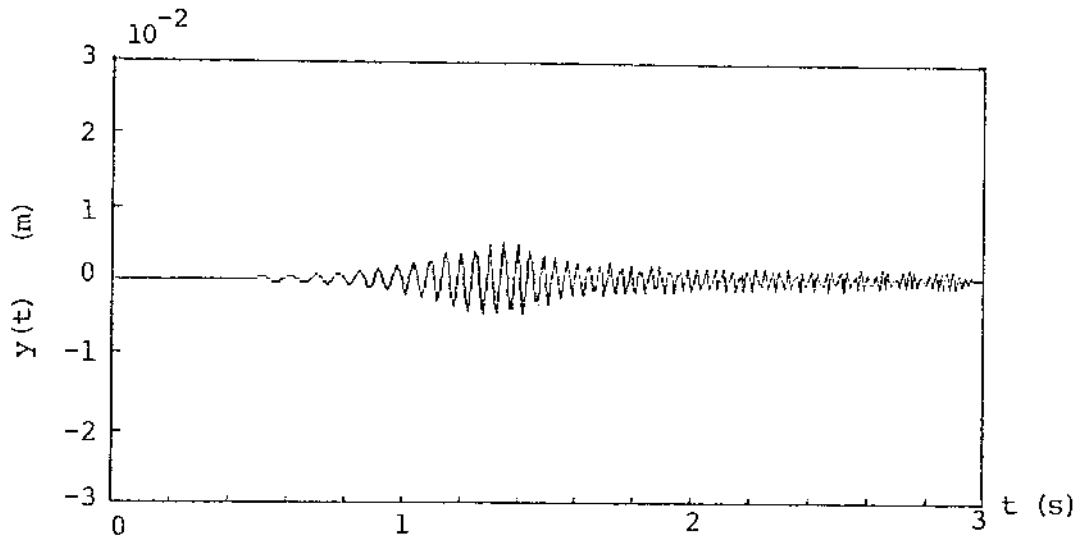


Figura 3.10: Deslocamento $y(t)$ x tempo, $\xi = 0,1$.

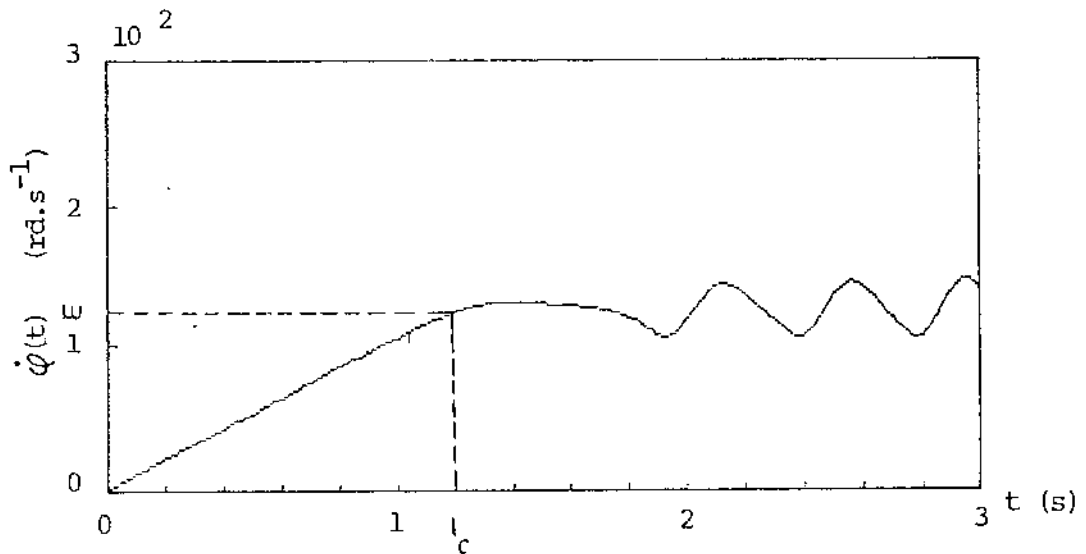


Figura 3.11: Velocidade de rotação $\dot{\phi}(t)$ x tempo, $T = 0,59\text{Nm}$.

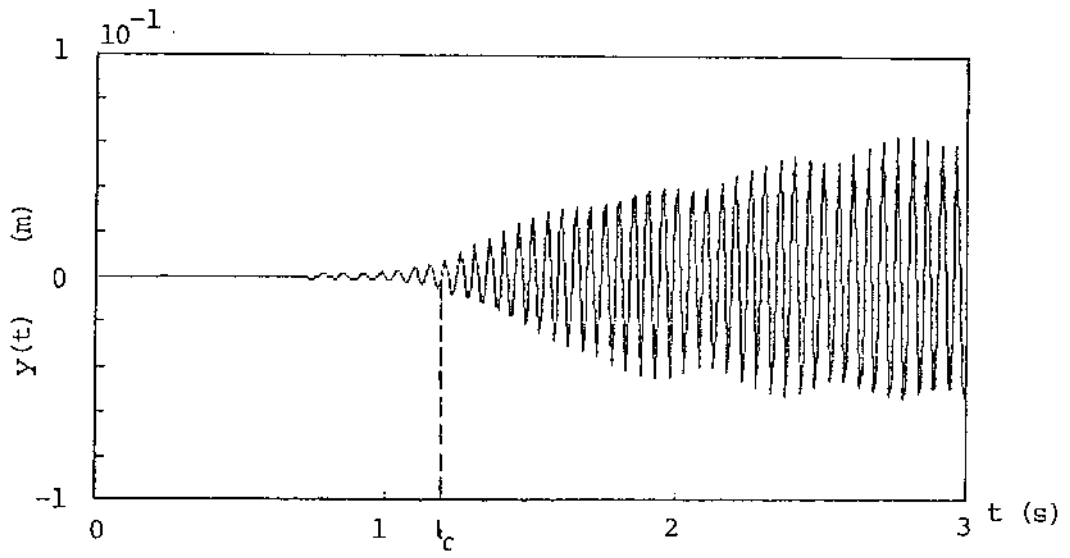


Figura 3.12: Deslocamento $y(t)$ \times tempo, $T = 0,59Nm$.

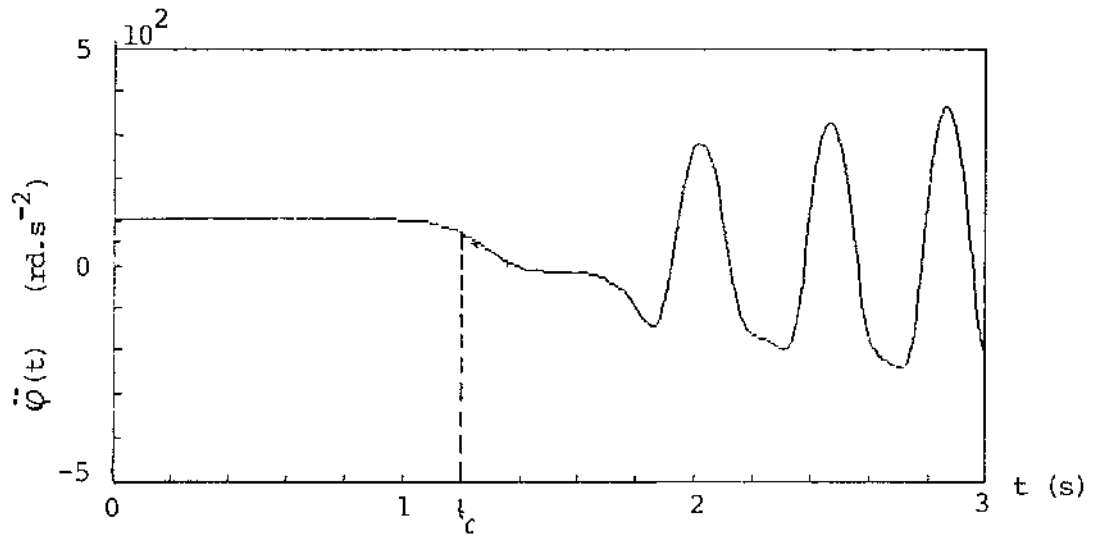


Figura 3.13: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t)$ \times tempo, $T = 0,59Nm$.

Quando o torque fornecido é o mínimo necessário para o sistema ultrapassar a ressonância, a passagem será lenta. Assim, a velocidade de rotação cresce quase linearmente até o valor crítico, onde surge um *patamar*, o que significa que o sistema permanece um tempo na velocidade crítica antes de ultrapassá-la (item 3.2.1) Fig.3.14. Neste patamar, ocorre uma queda na aceleração angular do sistema e a amplitude de vibração cresce notavelmente (Figs.3.15 e 3.16).

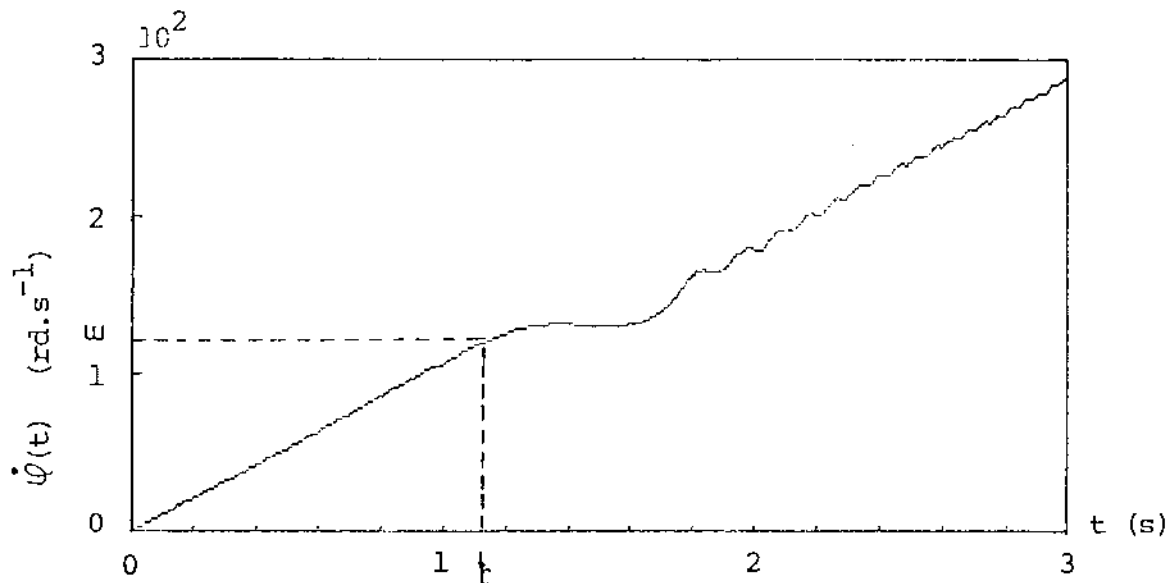


Figura 3.14: Velocidade de rotação $\dot{\phi}(t) \times$ tempo, $T_{min} = 0,6Nm$.

À medida que o torque de acionamento supera o valor de T_{min} , o *patamar* da velocidade de rotação vai diminuindo, até desaparecer. Tem-se, então, um acionamento de alta potência ou passagem rápida. Neste caso, o rotor é acelerado através da ressonância sem que o sistema tenha tempo de *tomar conhecimento* (Figs.3.17, 3.18, 3.19).

Matsuura [21] formulou em 1977 uma expressão aproximada para verificar a condição em que o rotor pode efetuar uma passagem lenta pela ressonância.

Sua dedução parte do princípio proposto por V.O. Kononenko [14] de que o sistema ultrapassará a ressonância se o torque do motor T_m for maior que o torque dinâmico (T_d) devido aos deslocamentos y_w e z_w do centro do disco, conforme a equação (3.7), quando as perdas do sistema forem desprezíveis.

Esta diferença apresenta-se crítica na região de ressonância onde y_w e z_w assumem valores elevados, sendo portanto a diferença entre T_m e T_d menor nesta região do que no percurso restante. Isto pode explicar porque numa situação onde se dispõe apenas do torque mínimo (T_{min}) a velocidade estacione um certo tempo no valor crítico, bem como o acentuado aumento da amplitude neste intervalo de tempo. À medida que se aumenta o torque de acionamento, esta diferença ($T_m - T_d$) também aumenta até que T_d passa a ser insignificante para um certo valor de T_m , onde então ocorre o já visto acionamento de alta potência.

O autor obteve uma expressão genérica para analisar um rotor vibrando em duas direções perpendiculares de um plano, ou seja, o sistema pode ultrapassar a ressonância quando for satisfeita a

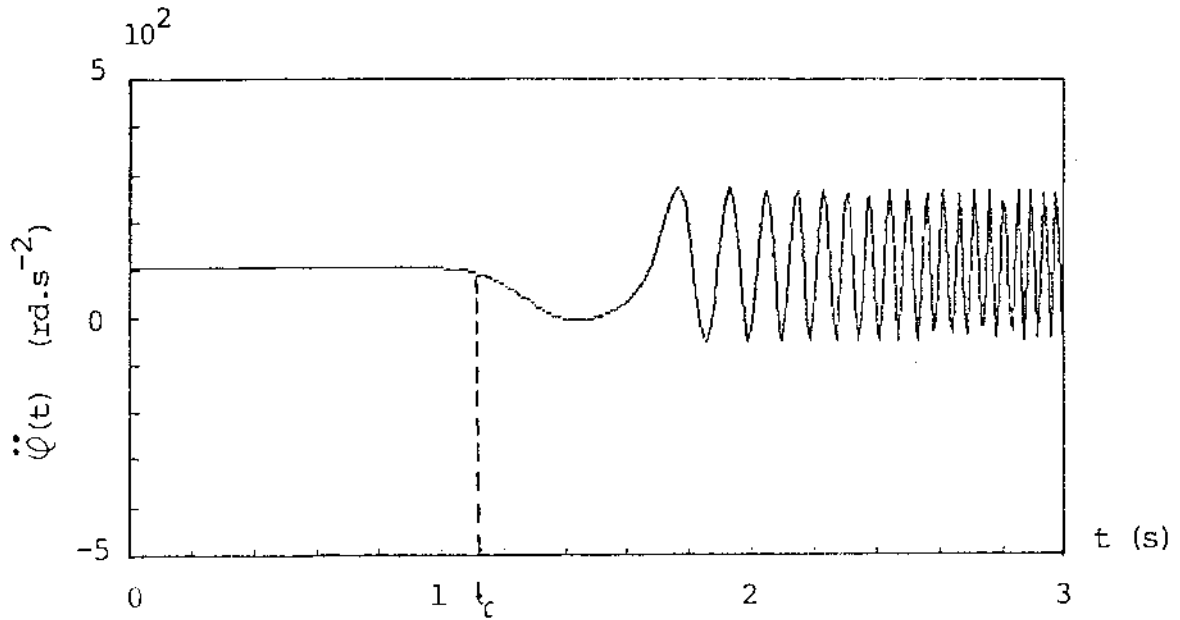


Figura 3.15: Deslocamento $y(t) \times$ tempo, $T_{min} = 0,6Nm$.

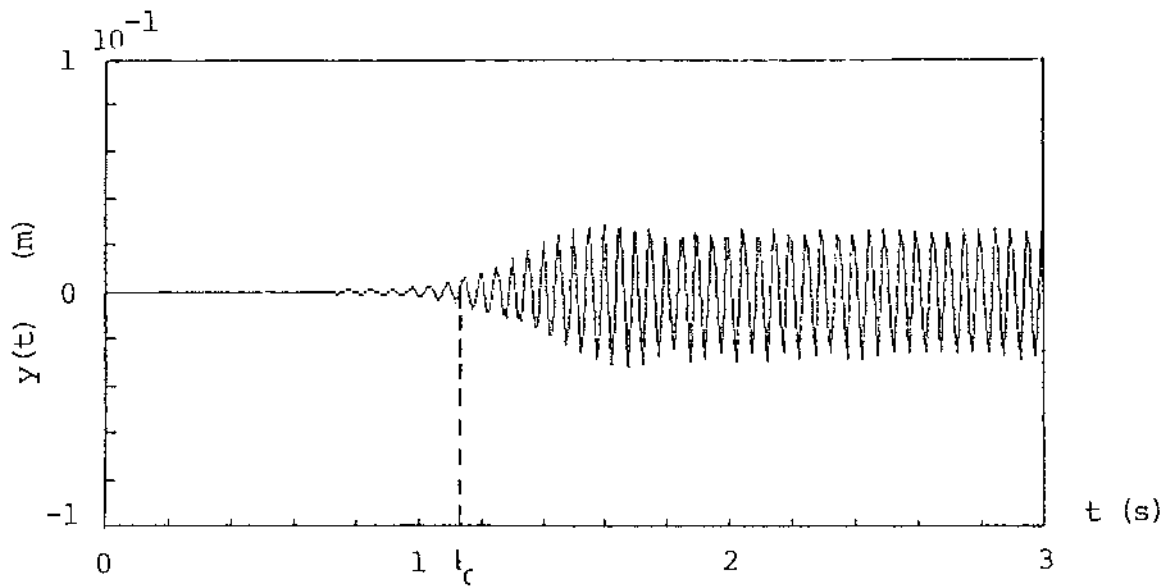


Figura 3.16: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo, $T_{min} = 0,6Nm$.

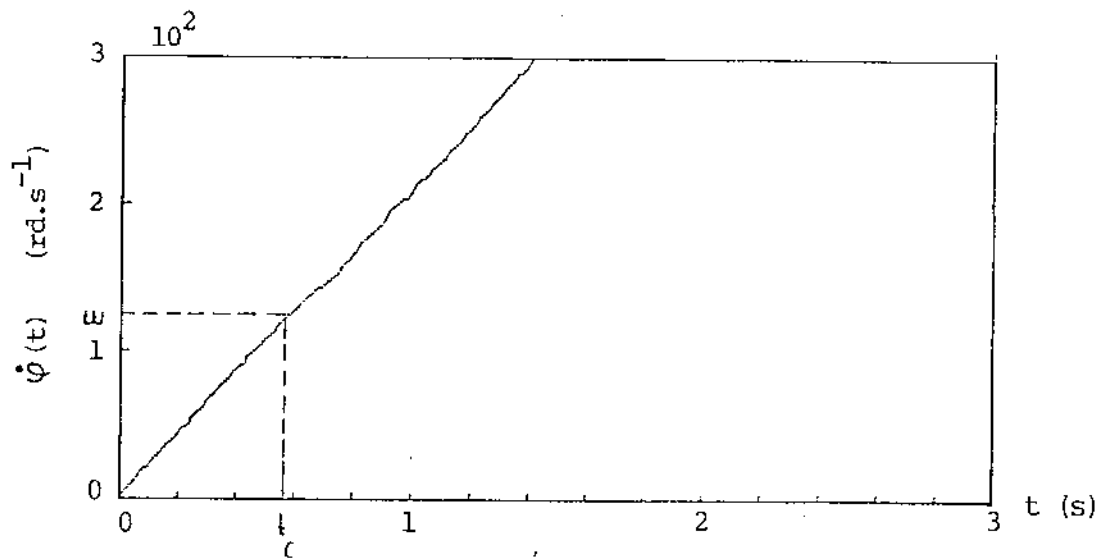


Figura 3.17: Velocidade de rotação $\dot{\phi}(t) \times$ tempo, $T = 1,2Nm$.

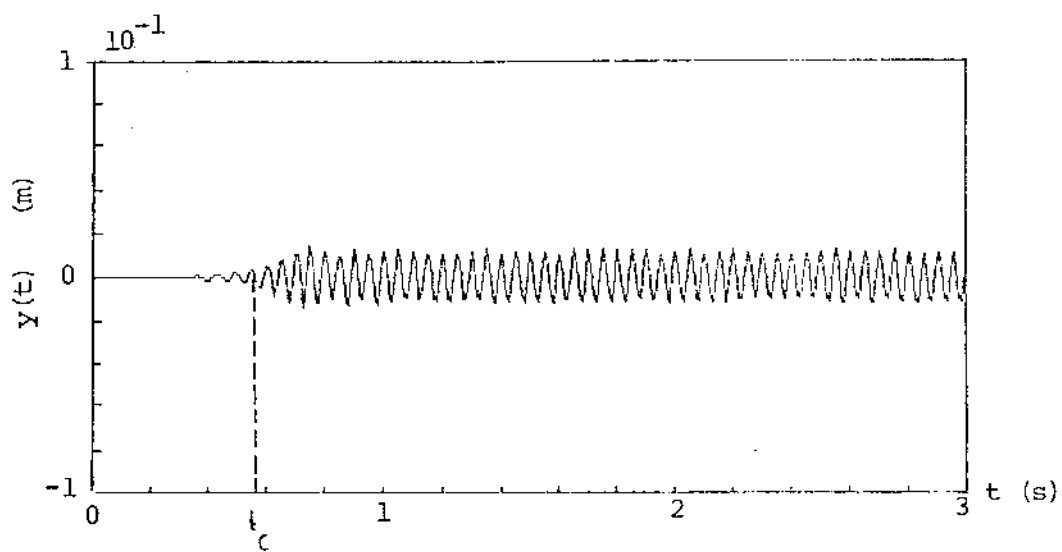


Figura 3.18: Deslocamento $y(t) \times$ tempo, $T = 1,2Nm$.

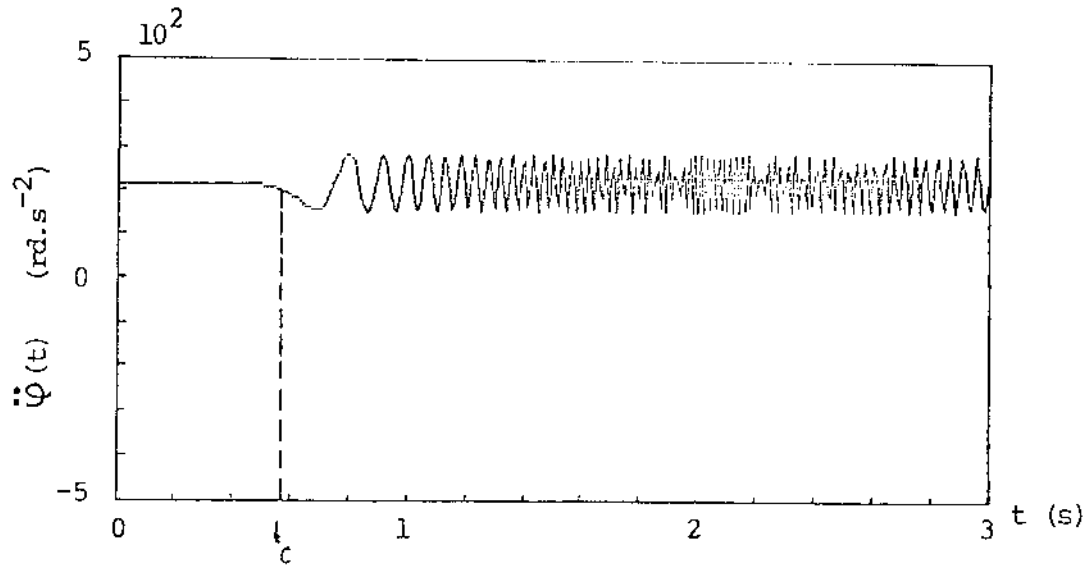


Figura 3.19: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo, $T = 1,2Nm$.

condição (3.33):

$$B = 2\pi\mu_I\mu_m q\rho_{max} < 1,0 \quad (3.33)$$

onde:

- $\mu_I = m \frac{\epsilon^2}{I_p + m\epsilon^2}$
- $\mu_m = m/M$.
- $\epsilon =$ excentricidade da massa m .
- $I_p =$ momento de inércia polar do disco do rotor.
- $m =$ massa desbalanceada (disco).
- $M =$ massa total do sistema (disco + eixo).
- $q =$ coeficiente de aceleração $= f_n^2/h$.
- $f_n =$ frequência natural em ciclos/s.
- $h =$ aceleração angular em ciclos/s².
- $\rho_{max} = 3,78\sqrt{q}$ para sistemas não amortecidos.

Determina-se, então, o valor de B para os casos das Figs.3.13 e 3.16. Para o sistema descrito em 3.2.1 tem-se:

- $\mu_I = 3,57 \times 10^{-4}$.
- $\mu_m = 0,92$.

Na condição de torque insuficiente $T = 0,59Nm$ (Fig.3.13), determina-se para $\dot{\varphi} = 125,66rd/s$ ou $f_n = 20ciclos/s^2$:

$$\ddot{\varphi} \approx 50rd/s^2 \text{ ou } h = 7,96ciclos/s^2$$

Portanto:

$$q = 50,25 \text{ e } \rho_{max} = 26,80$$

O valor de $B = 2,78 > 1,0$ que indica, conforme a simulação, que o motor é insuficiente para ultrapassar a ressonância.

Para torque mínimo $T = 0,6Nm$ (Fig.3.16) e $\dot{\varphi} = 125,66rd/s$, vem:

$$\ddot{\varphi} \approx 100rd/s^2 \text{ ou } h = 15,92ciclos/s^2 \quad q = 25,13 \text{ e } \rho_{max} = 18,95$$

Portanto, $B = 0,98 < 1,0$ sendo o torque $0,6Nm$ considerado suficiente para ultrapassagem da ressonância.

Nota-se que quando a faixa de velocidade de operação está acima da rotação crítica, quanto maior o torque de acionamento em relação a T_{min} , menor a amplitude de vibração na ressonância e menor também o efeito *stalling* do rotor.

Pode-se fazer a mesma observação reduzindo a excentricidade ϵ ou aumentando o amortecimento externo (c/m).

3.3 Torque líquido de acionamento

Deve-se ter em mente que o torque líquido que atua no rotor é a diferença entre o torque do motor e o torque de perdas, conforme análise linear, equação (3.8). A consideração de que o acionamento é feito por um motor corrente contínua atuando no sistema com torque constante depende, portanto, da ordem de grandeza do torque de perdas em relação ao torque mínimo de acionamento do motor e da influência da diferença $T_m - T_p$ na resposta do sistema.

Esta diferença geralmente não é constante [10] mas depende da velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t)$.

Para motores corrente contínua, as curvas características foram consideradas tais como esquema da Fig.3.20, onde:

- T_{m1} = curva de torque para motor₁.
- T_{m2} = curva de torque para motor₂.
- ω = velocidade crítica do rotor.
- ω_{n1} = velocidade na qual o motor₁ atinge sua potência nominal.
- ω_{n2} = velocidade na qual o motor₂ atinge sua potência nominal.

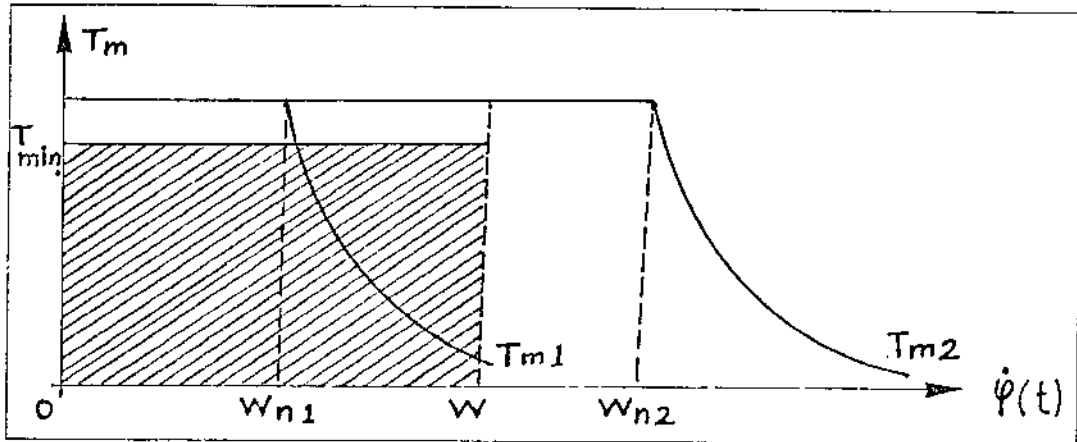


Figura 3.20: Esquema de curvas características para motores DC.

Para velocidades de rotação acima do valor nominal do motor, a potência do motor (área sob a curva $T_m \times \dot{\psi}(t)$) permanece constante. Para isso, se a velocidade de rotação aumenta, o torque do motor deve diminuir gradualmente.

Neste estudo, considerou-se trabalhar nas condições do motor₂, para evitar casos em que a potência fornecida pelo motor na velocidade crítica seja inferior à potência mínima necessária à ultrapassagem da mesma, pois o motor seria insuficiente como no caso do motor₁ (Fig.3.20).

Antes, porém, de desprezar o torque resistivo, fez-se um levantamento da curva de perdas a fim de verificar sua ordem de grandeza.

Este levantamento foi feito experimentalmente para a bancada do rotor já descrito no item 3.2.1 deste capítulo:

- 1 motor corrente contínua KUPER 2T-M1 1/2 hp com variador de torque.
- 1 motor DC Kuper K57, 12 3.300rpm.
- rotor Laval.
- 1 sensor de velocidade de rotação Magnetic Transducer Type MM0002 B & K.
- 1 tacômetro B & K type 5586.

A saída do tacômetro foi ligada ao IIP 9845 64K que fez a coleta de dados durante a queda de velocidade a partir de um valor acima da crítica.

Por ajuste geométrico obteve-se a equação (3.34) para a curva de velocidade em função do tempo (Fig.3.21).

$$\dot{\psi}_q(t) = 8575,51(t + 150,65)^{-0,7210} \quad (3.34)$$

com um coeficiente de correlação igual a 0,989.

Isolando-se o tempo na equação (3.34) e derivando-a para obter a desaceleração angular:

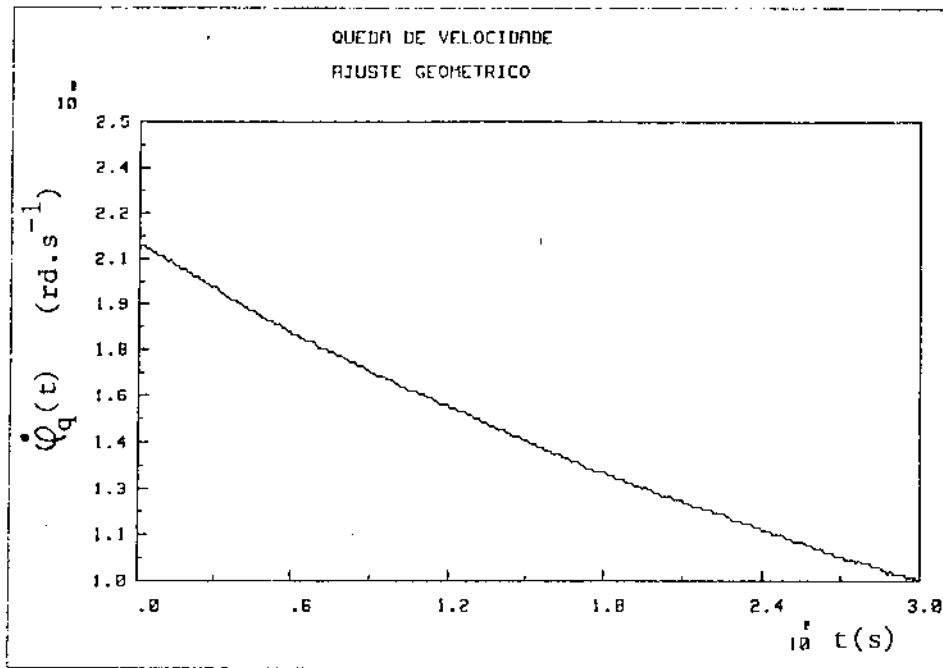


Figura 3.21: Queda de velocidade de rotação no tempo.

$$t = \left(\frac{8575,51}{\dot{\varphi}_q(t)} \right)^{1,3869} - 150,65 \quad (3.35)$$

$$\ddot{\varphi}_q(t) = -6183,34(t + 150,65)^{-1,7210} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) em (3.36) e multiplicando o resultado por I_p :

$$T_p = I_p \ddot{\varphi}_q = -1,3665 \times 10^{-8} (\dot{\varphi}_q)^{2,3869} \quad (3.37)$$

Obtém-se, então, o gráfico para o torque resistivo em função da velocidade de rotação, conforme Fig.3.22.

Em muitos casos práticos, T_p varia muito lenta e suavemente com o tempo, de forma que na região de ressonância, pode-se considerar o torque líquido aplicado constante.

No intervalo considerado, a variação do torque resistivo é da ordem de $10^{-3} Nm$.

Para $\epsilon = 0,001m$, o torque mínimo para a ultrapassagem é aproximadamente $0,6 Nm$. Neste caso, é aceitável a consideração feita inicialmente que o torque líquido atuante sobre o rotor é constante.

Tomando-se uma excentricidade menor, $\epsilon = 0,0001m$, o torque mínimo do motor será aproximadamente $0,029 Nm$, e neste caso, leva-se em conta o torque resistivo, notando-se pequenas variações no comportamento do sistema, conforme Figs.3.23, 3.24 e 3.25.

A área sob a curva da Fig.3.26 é a potência líquida atuante sob o rotor quando é levado em conta o torque resistivo. Esta potência é a mínima necessária à ultrapassagem da ressonância para $\epsilon = 0,0001m$.

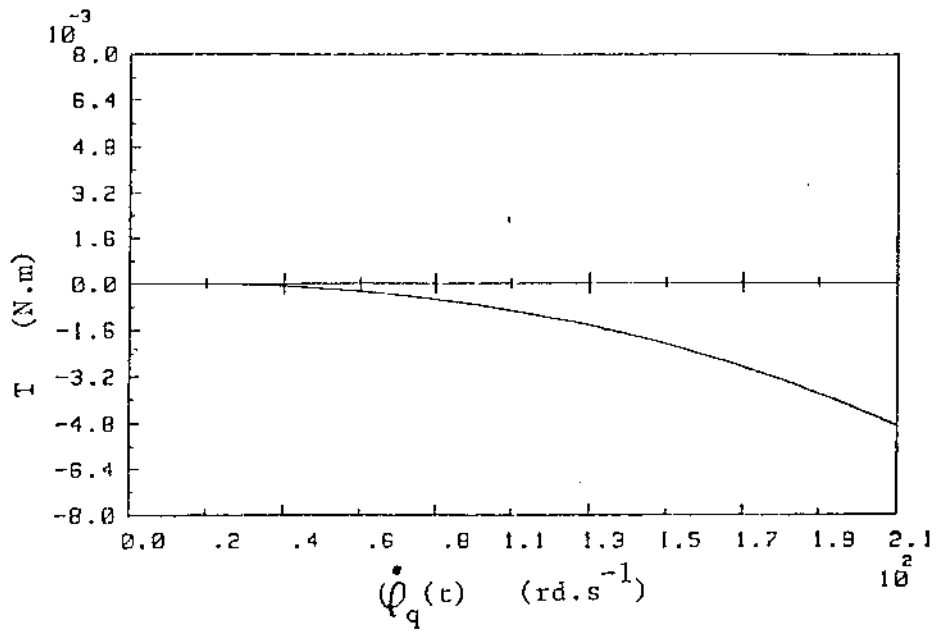


Figura 3.22: Torque resistivo \times velocidade de rotaçao.

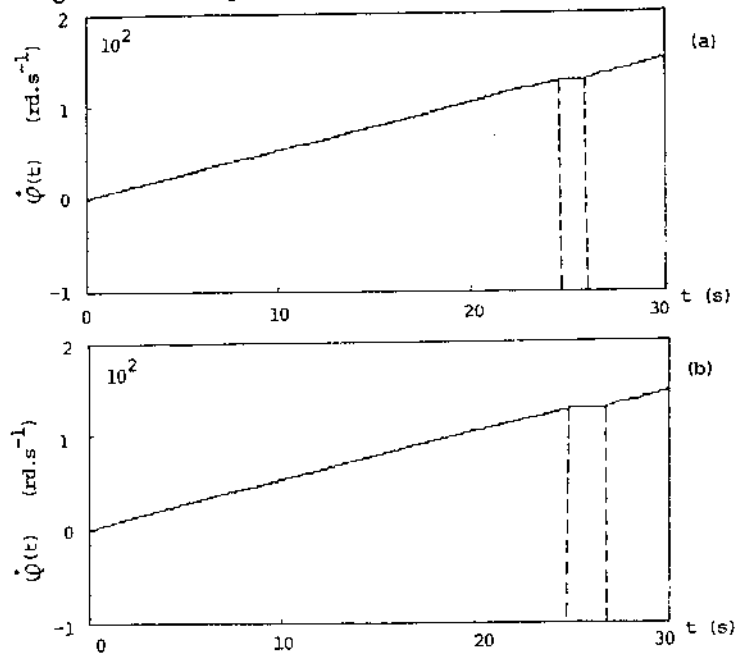


Figura 3.23: Velocidade de rotaçao $\dot{\phi}(t)$ \times tempo, $T_m = 0,029\text{N}\cdot\text{m}$: a) sem torque resistivo, b) com torque resistivo.

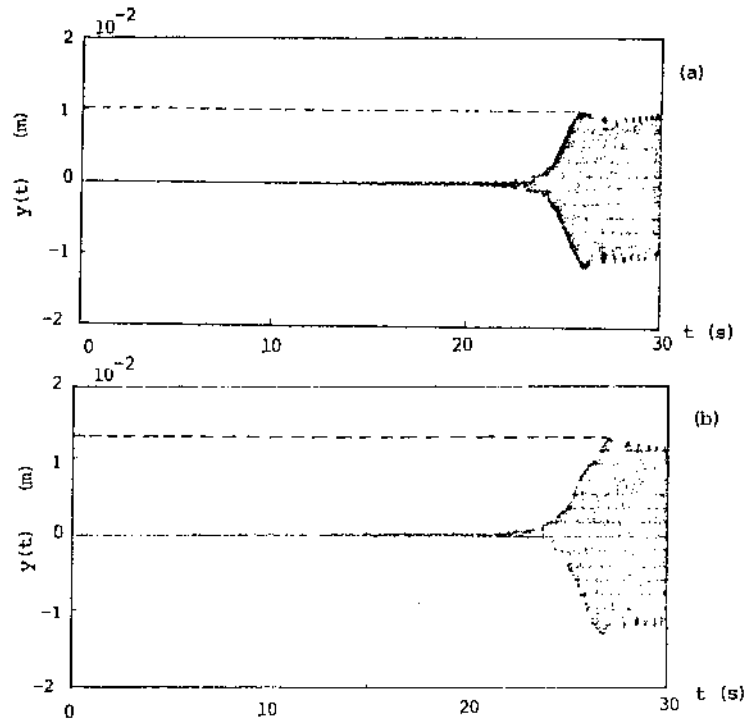


Figura 3.24: Deslocamento $y(t) \times$ tempo, $T_m = 0,029 Nm$: a) sem torque resistivo, b) com torque resistivo.

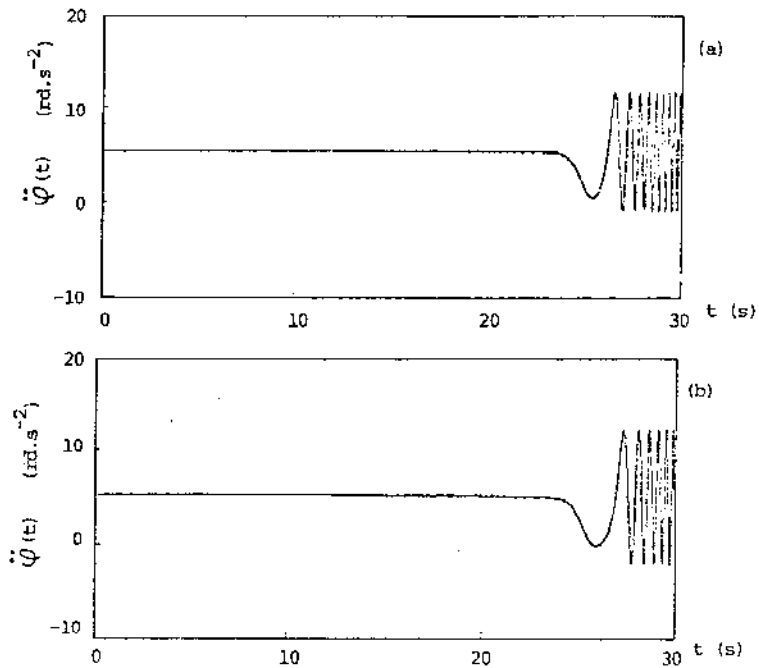


Figura 3.25: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo, $T_m = 0,029 Nm$: a) sem torque resistivo; b) com torque resistivo.

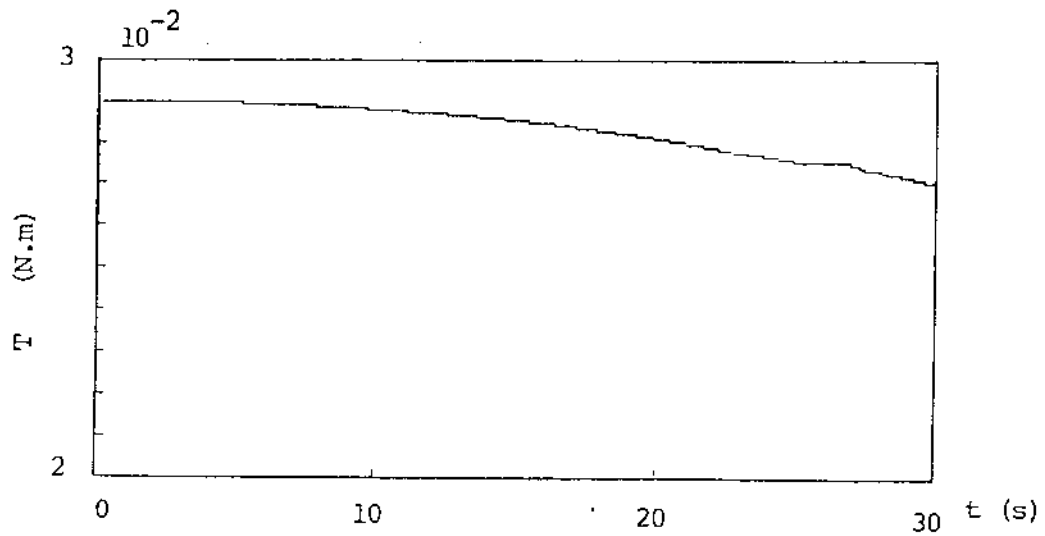


Figura 3.26: Torque líquido \times velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t)$.

A fim de simplificar o trabalho computacional, utilizou-se $\epsilon = 0,001m$, reduzindo de forma significativa o tempo de processamento, uma vez que se utiliza cerca de 10 vezes menos o número de pontos de integração para um mesmo passo de integração. Além disso, no caso em estudo, não será comum trabalhar com motores cujo torque seja da ordem de $10^{-2}Nm$.

No capítulo 4 serão discutidos comportamentos de um Rotor Laval sujeito à ação do atrito seco, buscando sempre a solução que melhor atende ao problema inicialmente proposto da redução da amplitude de vibração durante a passagem pela ressonância.

Capítulo 4

ESTUDO DA PASSAGEM PELA RESSONÂNCIA DE UM ROTOR LAVAL COM ATRITO SECO

Considerou-se aqui o atrito proposto por Coloumb [11,12], segundo o qual a força de atrito independe do valor da velocidade de escorregamento, apresentando módulo constante diretamente proporcional à força normal atuante, variando apenas de sinal.

O atrito de Coloumb aplicado em sistemas mecânicos introduz fortes não linearidades devido a uma descontinuidade da função força de atrito nas proximidades do repouso (velocidade de escorregamento nula) [18].

Antes de um corpo iniciar um movimento sobre uma superfície rugosa, a força de atrito atuante é a de atrito estático, cujo coeficiente é representado por μ_s . Após iniciado o movimento, numa certa velocidade não nula, a força de atrito sofre uma ligeira queda em seu valor, permanecendo constante a partir de então (comportamento teórico mais comum). Esta é a força de atrito dinâmico, cujo coeficiente é μ_d (Fig.4.1), onde adotou-se F_a = força de atrito e N = força normal. A curva tracejada esquematiza um possível comportamento real do atrito, com uma queda acentuada do valor estático para o dinâmico, seguida de uma curvatura suave para depois aumentar mais rapidamente, sendo que este aumento depende dos materiais das superfícies em contato e da rugosidade.

Verificou-se em estudos anteriores [24] que a diferenciação dos coeficientes estático e dinâmico atua de forma significativa abaixo da ressonância e em baixa rotação.

Neste estudo, assumiu-se que os coeficientes de atrito estático e dinâmico apresentam o mesmo valor uma vez que o sistema oscila periódica e rapidamente em torno do centro O e atinge sua velocidade crítica num curto intervalo de tempo, permanecendo muito pouco na região onde esta diferenciação se faz importante. Conforme o modelo teórico da Fig.4.1 aproxima-se a curvatura por uma reta de valor constante, limitando-se a trabalhar fora da região onde o atrito começa a aumentar. O modelo teórico para a força de atrito, a ser introduzida à direita das equações (3.5), (3.6) e (3.7), será aquele proposto pela Fig.4.2.

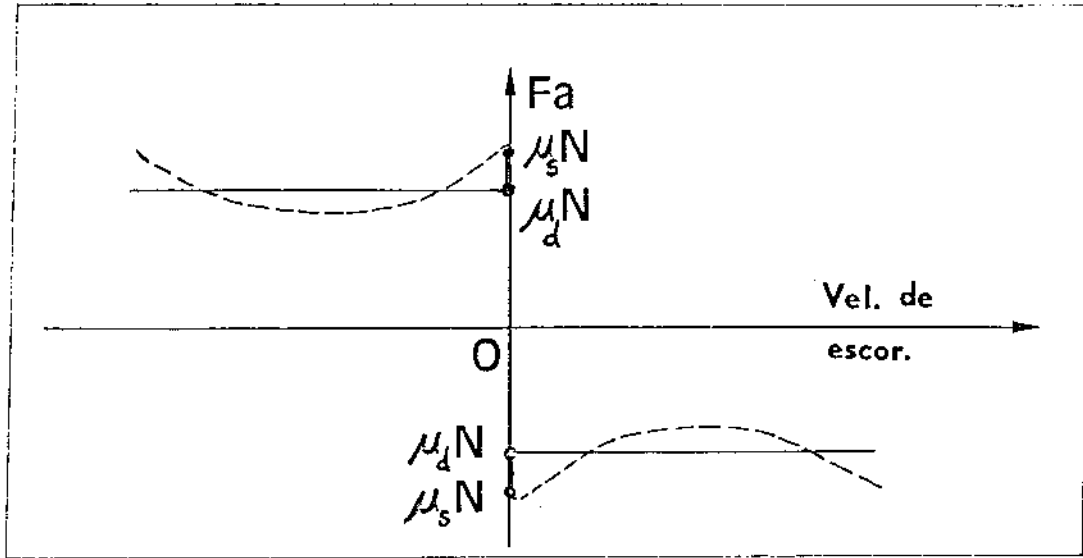


Figura 4.1: Comportamento proposto para o atrito de Coulomb.

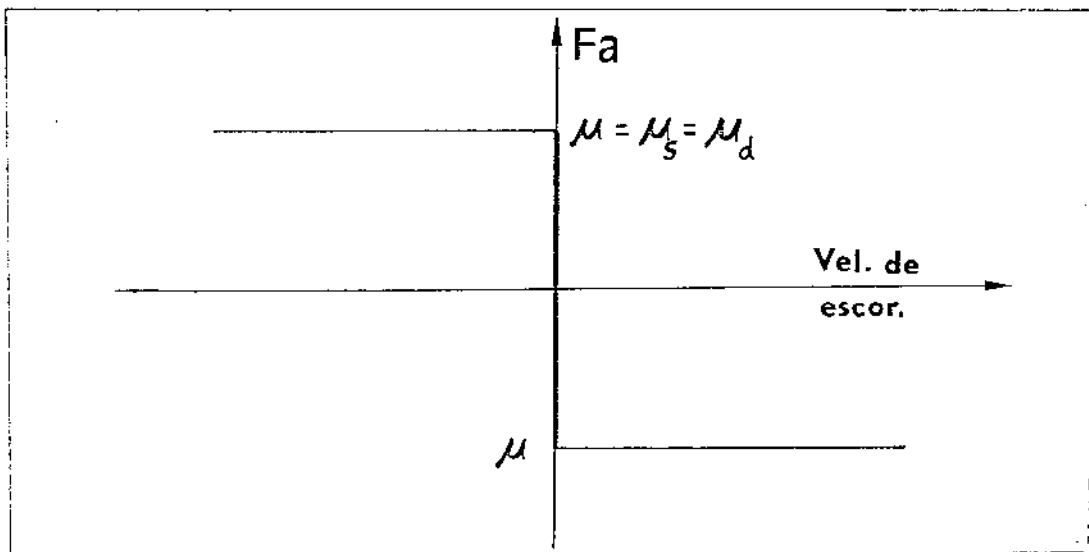


Figura 4.2: Modelo teórico para a força de atrito.

4.1 Sistema Adicional com Fixação Flexível

O modelamento matemático baseia-se na Fig.2.2 do Capítulo 2 que para facilidade de comunicação passa a se chamar modelo 2.2.

Uma vista superior do modelo (Fig.4.3) indica a localização dos roletes sobre uma circunferência de diâmetro $2L$, sendo os pontos A, B, C, D representantes dos pontos de contato entre os roletes e o disco, estes inicialmente em repouso.

Tem-se as equações, básicas e bem conhecidas, de um Rotor Laval não amortecido:

$$m\ddot{y}_w + ky_w = \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \text{sen}\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = -\epsilon m((\dot{\varphi})^2 2 \cos\varphi + \ddot{\varphi} \text{sen}\varphi)$$

$$I_p \ddot{\varphi} = T + \epsilon k(z_w \text{sen}\varphi + y_w \cos\varphi)$$

A inclusão do atrito seco exige um estudo prévio de seu comportamento, principalmente quanto ao sinal, de acordo com as velocidades resultantes nos pontos de contato, para depois integrá-la às equações iniciais.

Define-se para a Fig.4.3:

- A, B, C, D = pontos de contato entre os roletes e o disco.
- L = raio da circunferência sobre a qual estão os roletes.
- r_i = distância entre o centro do disco (W) e os pontos de contato.
- \dot{y}_w, \dot{z}_w = velocidades de vibração do ponto W nas respectivas direções y e z .
- $\dot{\varphi}$ = velocidade angular ou velocidade de rotação do disco.

As demais variáveis já foram descritas no Capítulo 3 (Fig. 3.2).

Fez-se, então, um estudo de sinal de acordo com as velocidades resultantes nos pontos A, B, C, D da Fig.4.3, dadas pela equação

$$v_i = v_w + \dot{\varphi} \times r_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.1)$$

onde:

- v_i = velocidade resultante no ponto de contato i .
- v_w = velocidade do centro do disco W (\dot{y}_w, \dot{z}_w).
- $\dot{\varphi}$ = velocidade angular ou de rotação do disco.
- r_i $i = 1, 2, 3, 4$ = distância do ponto W aos pontos A, B, C, D , respectivamente.

As distâncias r_i são, vetorialmente:

$$\begin{aligned} r_1 &= (L - y_w)\hat{e}_y - z_w\hat{e}_z \\ r_2 &= -y_w\hat{e}_y + (L - z_w)\hat{e}_z \\ r_3 &= -(L + y_w)\hat{e}_y - z_w\hat{e}_z \\ r_4 &= -y_w\hat{e}_y - (L + z_w)\hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.2)$$

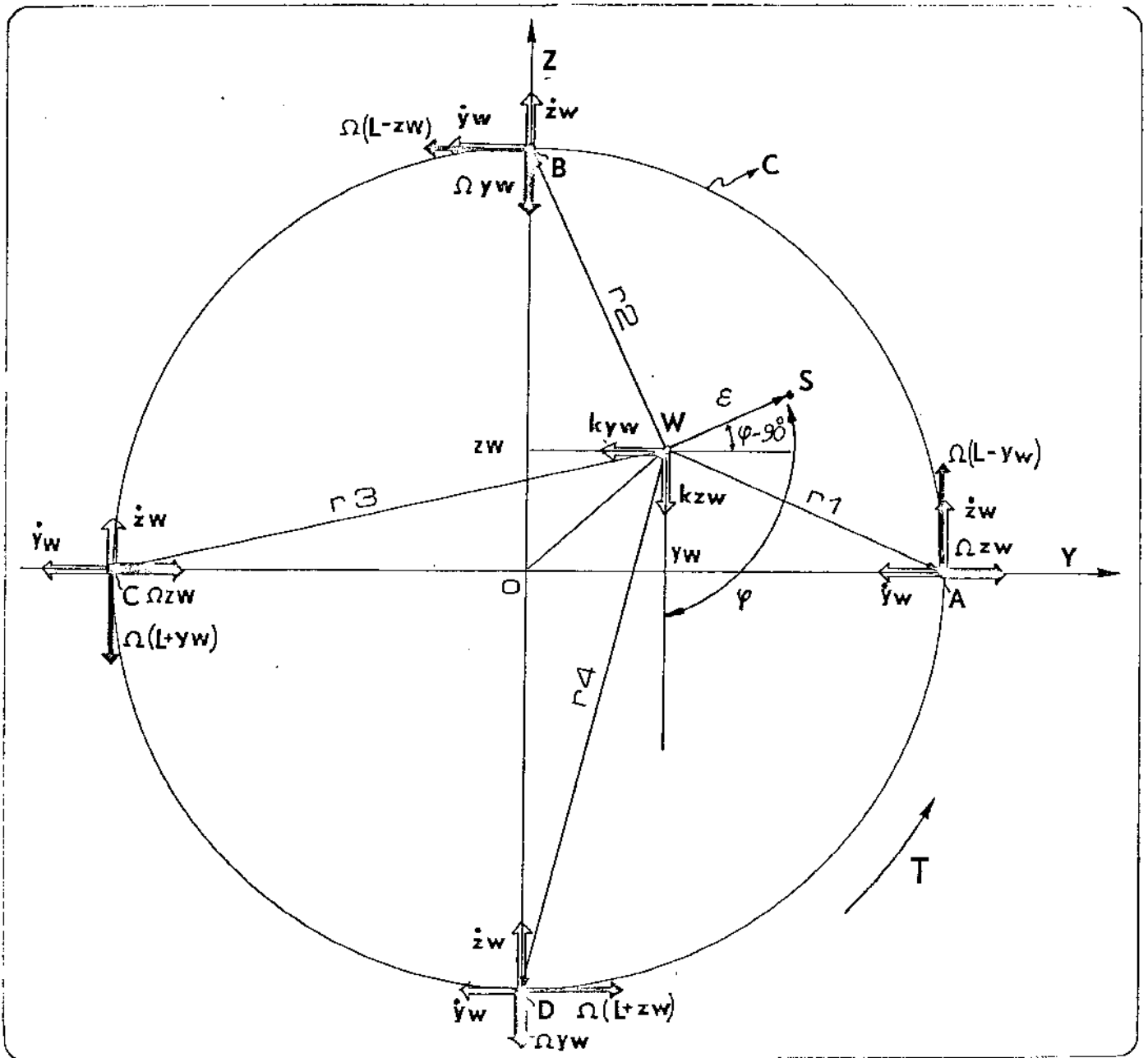


Figura 4.3: Vista superior do modelo 2.2 .

Portanto, para o ponto A tem-se:

$$v_1 = (\dot{y}_w \hat{e}_y + \dot{z}_w \hat{e}_z) + \det \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & (L - y_w) & -z_w \end{bmatrix}$$

$$v_1 = (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w) \hat{e}_y + (\dot{z}_w + \dot{\varphi} (L - y_w)) \hat{e}_z$$

Analogamente, para os pontos B, C, D :

$$\begin{aligned} v_2 &= (\dot{y}_w - \dot{\varphi} (L - z_w)) \hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w) \hat{e}_z \\ v_3 &= (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w) \hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi} (L + y_w)) \hat{e}_z \\ v_4 &= (\dot{y}_w + \dot{\varphi} (L + z_w)) \hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.3)$$

A estas velocidades devem-se subtrair as velocidades relativas do sistema adicional que, possuindo fixação flexível, possui velocidades de vibração \dot{y}_c e \dot{z}_c nas respectivas direções y e z .

As velocidades resultantes v'_i serão, portanto:

$$\begin{aligned} v'_1 &= (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) \hat{e}_y + (\dot{z}_w + \dot{\varphi} (L - y_w) - \dot{z}_c) \hat{e}_z \\ v'_2 &= (\dot{y}_w - \dot{\varphi} (L - z_w) - \dot{y}_c) \hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w - \dot{z}_c) \hat{e}_z \\ v'_3 &= (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) \hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi} (L + y_w) - \dot{z}_c) \hat{e}_z \\ v'_4 &= (\dot{y}_w + \dot{\varphi} (L + z_w) - \dot{y}_c) \hat{e}_y + (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w - \dot{z}_c) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde:

- \dot{y}_c, \dot{z}_c = velocidade de vibração do sistema adicional nas respectivas direções y e z .

Os pontos A e C (v'_1 e v'_3) localizam-se sobre o eixo y . Assim, suas velocidades resultantes em \hat{e}_z se relacionam com a rotação dos roletes, sendo desprezada sua influência sobre a força de atrito.

Para estes pontos, o sinal da força de atrito é dado pela componente em \hat{e}_y :

$$\begin{aligned} (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) < 0 & \quad F_{a_y} > 0 \\ (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) = 0 & \quad F_{a_y} = 0 \\ (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) > 0 & \quad F_{a_y} < 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

O mesmo raciocínio se aplica aos pontos B e D (v'_2 e v'_4)

$$\begin{aligned} (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w - \dot{z}_c) < 0 & \quad F_{a_z} > 0 \\ (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w - \dot{z}_c) = 0 & \quad F_{a_z} = 0 \\ (\dot{z}_w - \dot{\varphi} y_w - \dot{z}_c) > 0 & \quad F_{a_z} < 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Desta forma, inclui-se o atrito seco nas equações (3.5) e (3.6), bem como o momento gerado por estas forças na equação (3.7):

$$m\ddot{y}_w + ky_w = 2F_{a_y} + \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \text{sen}\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi) \quad (4.7)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = 2F_{a_z} - \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi} \text{sen}\varphi) \quad (4.8)$$

$$I_p \ddot{\varphi} = T + \epsilon k(z_w \text{sen}\varphi + y_w \cos\varphi) + 2F_{a_y}(z_w - \epsilon \cos\varphi) - 2F_{a_z}(y_w + \epsilon \text{sen}\varphi) \quad (4.9)$$

$$m\ddot{y}_c + k_c y_c = -2F_{a_y} \quad (4.10)$$

$$m\ddot{z}_c + k_c z_c = -2F_{a_z} \quad (4.11)$$

Como o sistema adicional é flexível, as forças de atrito em y e z transmitem movimento vibratório ao mesmo, daí o aparecimento das equações (4.10) e (4.11) excitadas apenas pelo atrito.

As equações (4.7) a (4.11) serão igualmente integradas pelo método computacional Shampine-Gordon, sendo as características do rotor as mesmas descritas no Capítulo 3.

4.1.1 Resultados obtidos

O módulo da força de atrito aplicada ao sistema foi obtido por uma equivalência entre a energia dissipada pelo amortecimento viscoso (c/m) e a energia dissipada pela força de atrito seco aplicada sobre o disco do rotor (Apêndice A).

Iniciou-se o estudo numa condição de torque mínimo necessário à ultrapassagem da ressonância em sistemas não amortecidos (Capítulo 3, item 3.2.3). A rigidez do sistema adicional (k_c) foi inicialmente escolhida de forma que sua velocidade crítica (ω_c) fosse cinco vezes maior que a crítica do rotor (ω): $\omega_c = 5\omega$.

Aplicou-se uma força de atrito em módulo igual a $12,4N$ sendo o rotor acionado por um torque constante de $0,6Nm$.

Nota-se não haver grandes variações no modelo para $\dot{\varphi}(t) < \omega$. Entretanto, a partir da velocidade crítica o sistema sofre mudanças acentuadas. Como foi visto no Capítulo 3, este torque $0,6Nm$ era suficiente para ultrapassagem da ressonância. Com a introdução do torque da força de atrito na equação (4.9), os torques dinâmicos ou inerentes ao sistema superaram o valor do torque de acionamento. Deve-se observar uma tendência da aceleração angular, que sofre uma queda após atingir a velocidade crítica, em oscilar em torno ou próxima a zero (Fig.4.6). Com esta queda da aceleração, ocorre conseqüente perda de energia de rotação e a velocidade angular, após ultrapassar um pouco a crítica, sofre uma ligeira queda, entrando em batimento na ressonância (Fig.4.4). Como o sistema adicional retira mais energia de rotação do rotor, ou dissipando-a pelo atrito ou transferindo-a ao sistema adicional na forma de vibração, estacionando o rotor na ressonância, ocorre um já esperado aumento acentuado e progressivo da amplitude de vibração (Fig.4.5), ou seja, este torque não é mais suficiente para ultrapassar a ressonância.

É interessante notar o comportamento da velocidade resultante em y , dada pela equação (4.5), a qual atinge um valor máximo ao mesmo tempo em que a velocidade de rotação apresenta um pico muito suave (Figs.4.4 e 4.7). Quando a velocidade de rotação do rotor cai e *estaciona* no seu valor crítico, a velocidade resultante também sofre uma queda, passando a oscilar num nível mais baixo de amplitude.

A velocidade de vibração do sistema adicional (Fig.4.8) tem uma influência tênue neste caso, pois sua ordem de grandeza é bem menor que as demais parcelas da velocidade resultante, talvez pela relação $\omega_c = 5\omega$ ser decorrente de um elevado valor de k_c .

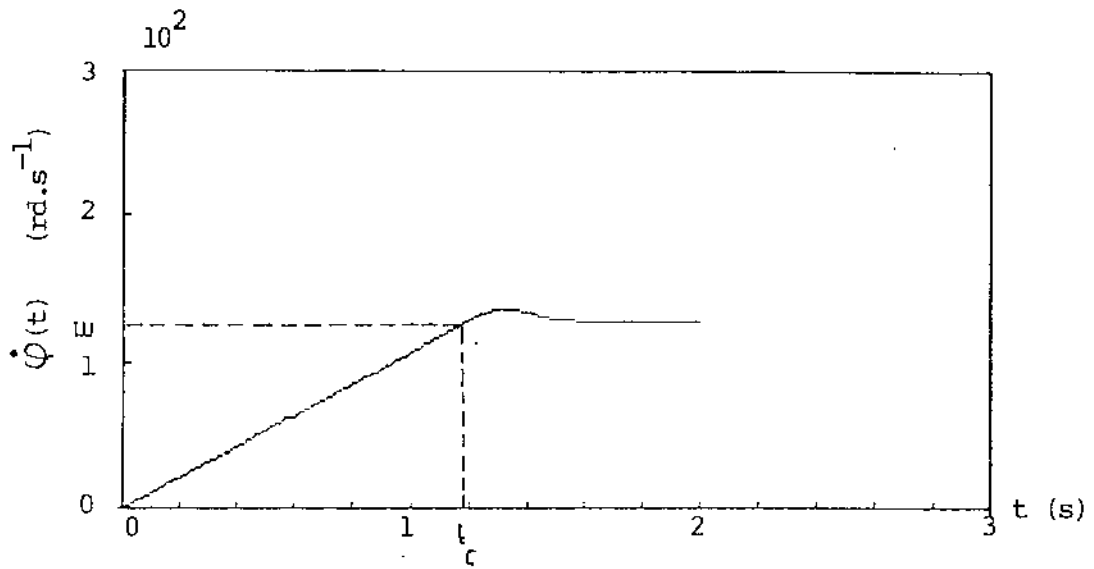


Figura 4.4: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 0,6Nm$ e $F_a = 12,4N$).

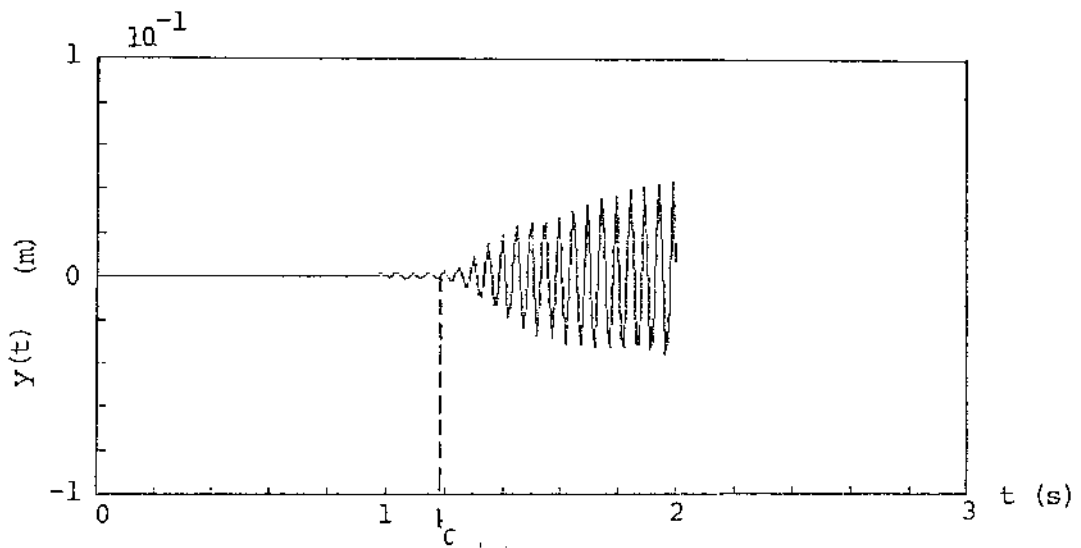


Figura 4.5: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($T = 0,6Nm$ e $F_a = 12,4N$).

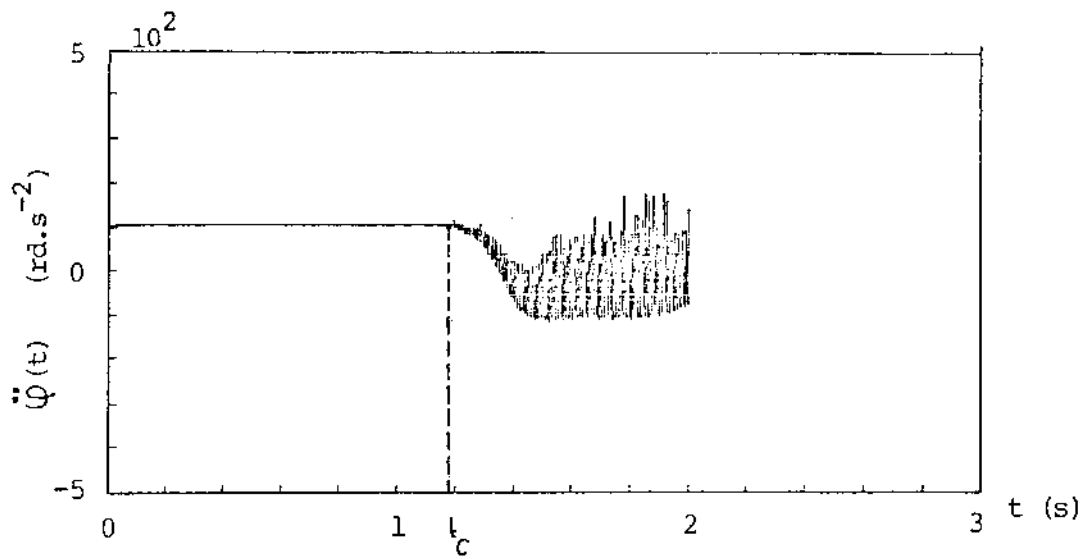


Figura 4.6: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 0,6Nm$ e $F_a = 12,4N$).

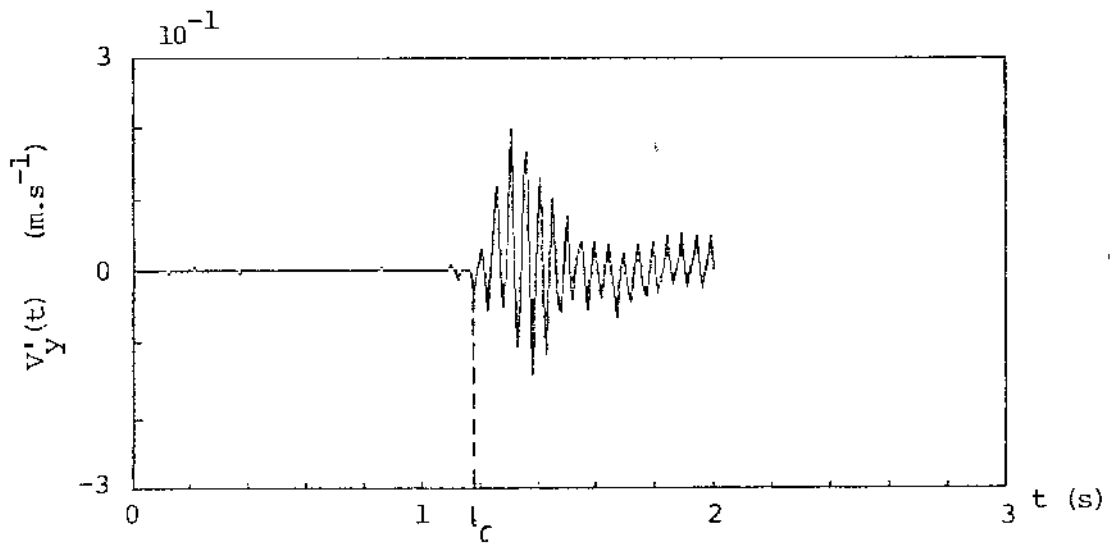


Figura 4.7: Velocidade resultante $V'_y \times$ tempo ($T = 0,6Nm$ e $F_a = 12,4N$).

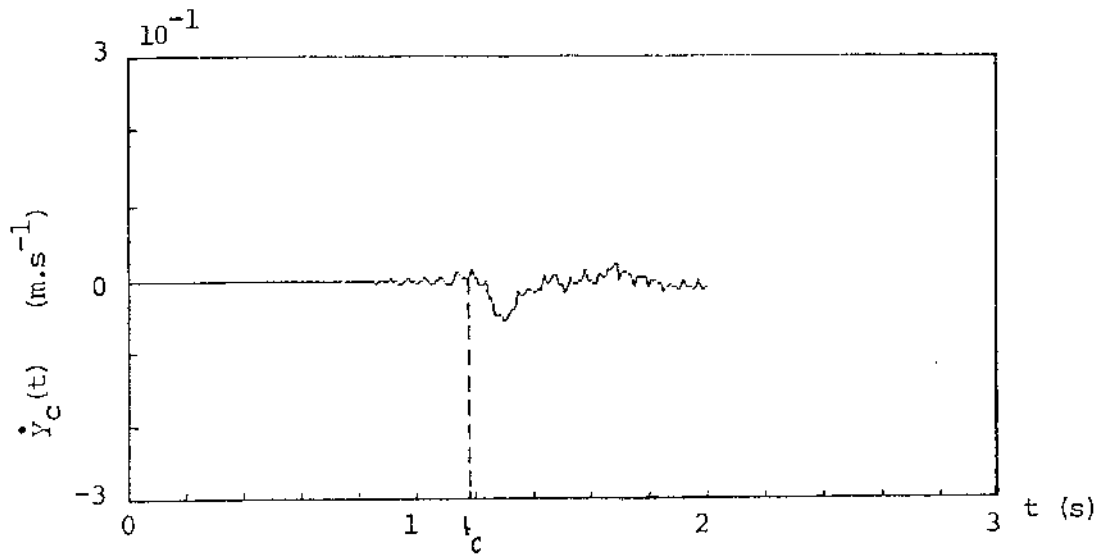


Figura 4.8: Velocidade de vibração do sistema adicional $\dot{y}_c(t) \times$ tempo ($T = 0,6Nm$ e $F_a = 12,4N$).

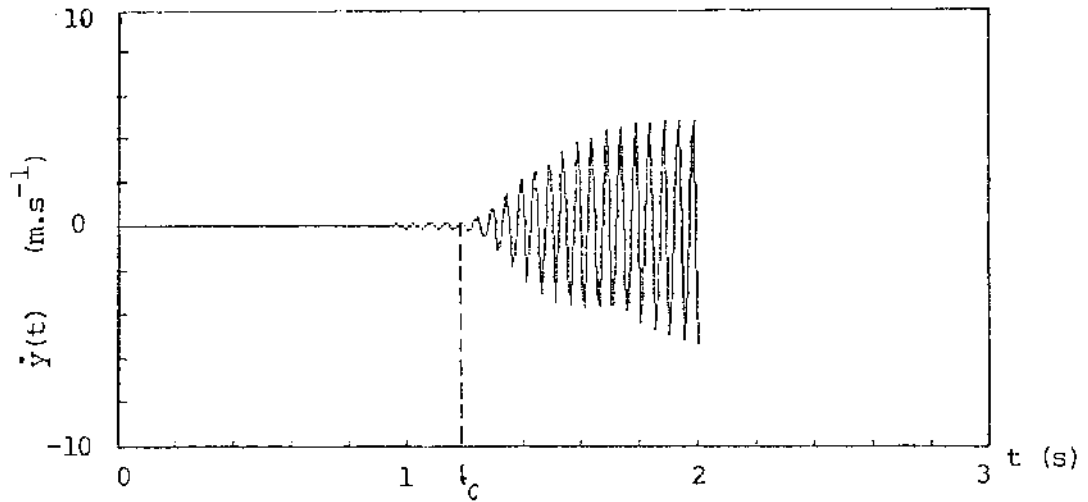


Figura 4.9: Velocidade de vibração do rotor $\dot{y}(t) \times$ tempo ($T = 0,6Nm$ e $F_a = 12,4N$).

À medida que se fornece mais energia ao sistema, ou seja, aumentando-se o torque de acionamento, a velocidade de rotação passa a alcançar valores mais elevados após ultrapassar a crítica, demorando mais para cair e estacionar na ressonância. A Fig.4.10 mostra a velocidade de rotação para uma acionamento de $1,2Nm$ e $1,5Nm$, respectivamente.

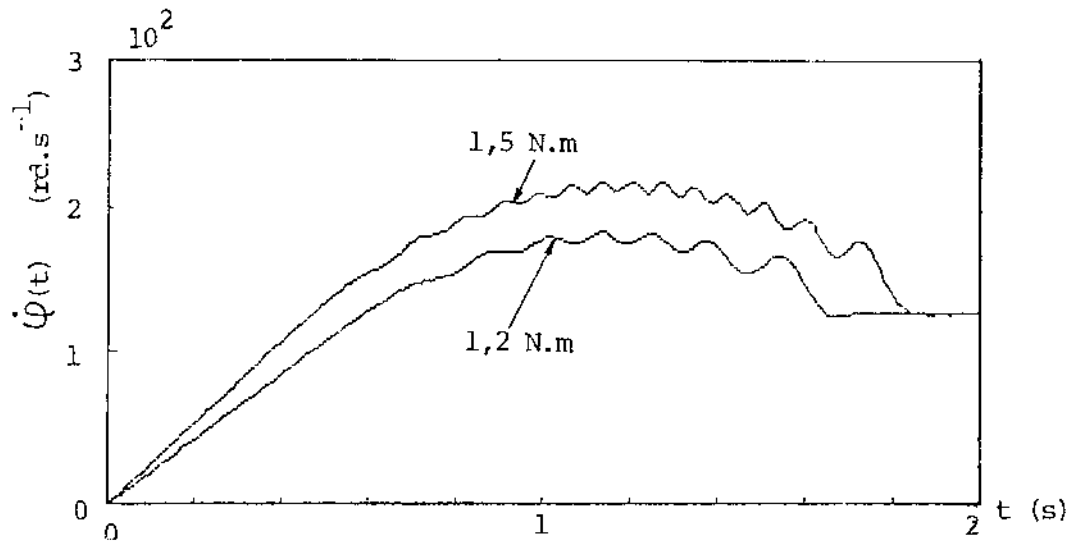


Figura 4.10: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times \text{tempo}(F_a = 12,4N)$.

O comportamento geral descrito até aqui permanece o mesmo.

O mesmo efeito pode ser obtido enrijecendo-se o sistema, ou aumentando-se o valor de k_c , ou seja, quanto mais rígido for o sistema, melhor será a curva de velocidade de rotação que passará a atingir valores mais elevados, pois menor será a energia de rotação perdida para o sistema adicional na forma de vibração.

As Figs. 4.11, 4.12, 4.13 mostram o comportamento do sistema adicional (\hat{y}_c) para diversos valores de rigidez (k_c), tais que $\omega_c = 3\omega, 5\omega, 10\omega$, respectivamente ($F_a = 12,4N$).

Quanto maior o valor de k_c , menor a vibração do sistema adicional e melhor a curva de velocidade de rotação do rotor, conforme Fig.4.14.

Contudo, esta melhora no comportamento de velocidade de rotação não elimina a instabilidade gerada pela força de atrito, e a amplitude de vibração continua aumentando indefinidamente (Fig.4.15).

A seguir, mostra-se que o comportamento do sistema global quando a fixação do sistema adicional é rígida, é praticamente o mesmo que para fixação flexível com $\omega_c = 5\omega$ e 10ω .

Passa-se, então, a trabalhar com sistema rígido, que fornece resultados melhores pois a rigidez k_c é máxima. Além disso, reduz-se dois graus de liberdade no equacionamento matemático, o que simplifica consideravelmente o trabalho, bem como reduz o tempo computacional.

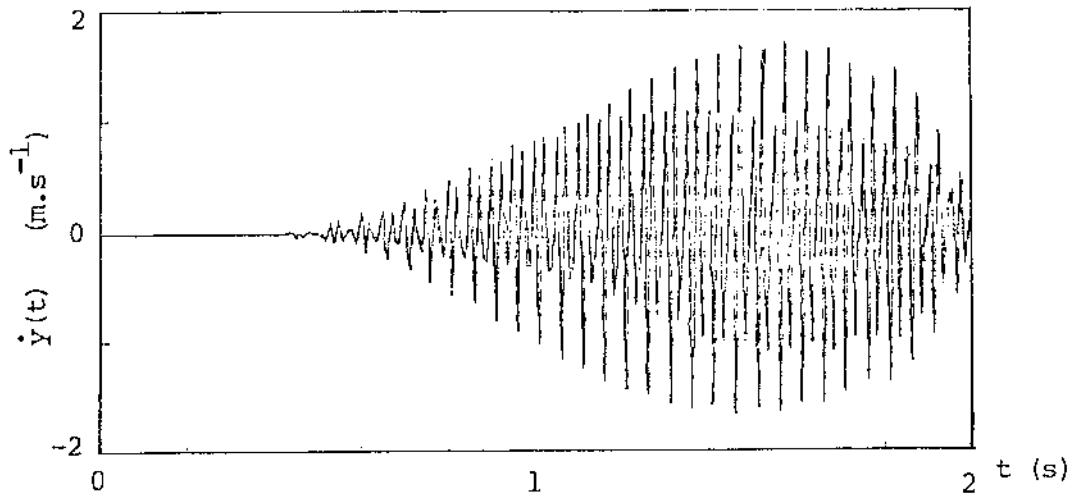


Figura 4.11: Velocidade de vibração do sistema adicional $\dot{y}_c(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$ e $\omega_c = 3\omega$).

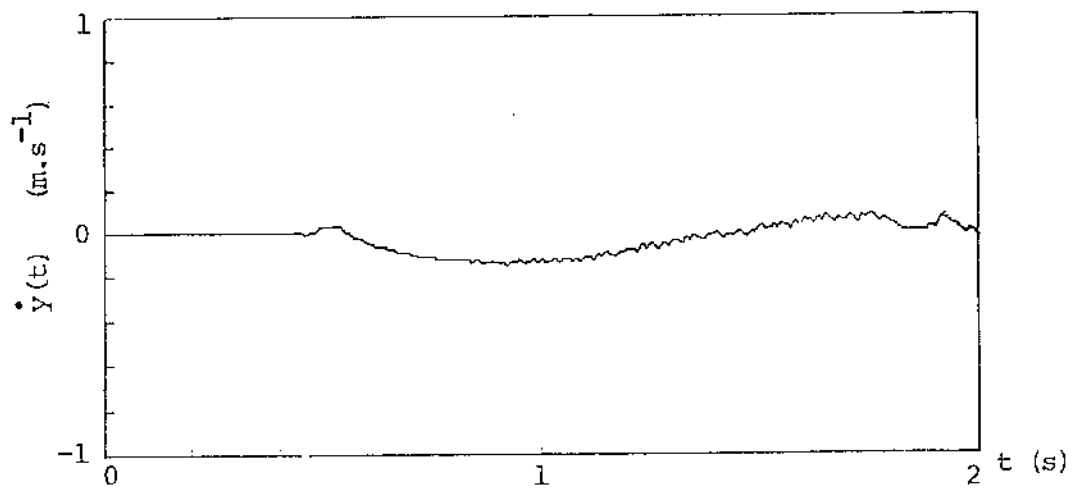


Figura 4.12: Velocidade de vibração do sistema adicional $\dot{y}_c(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$ e $\omega_c = 5\omega$).

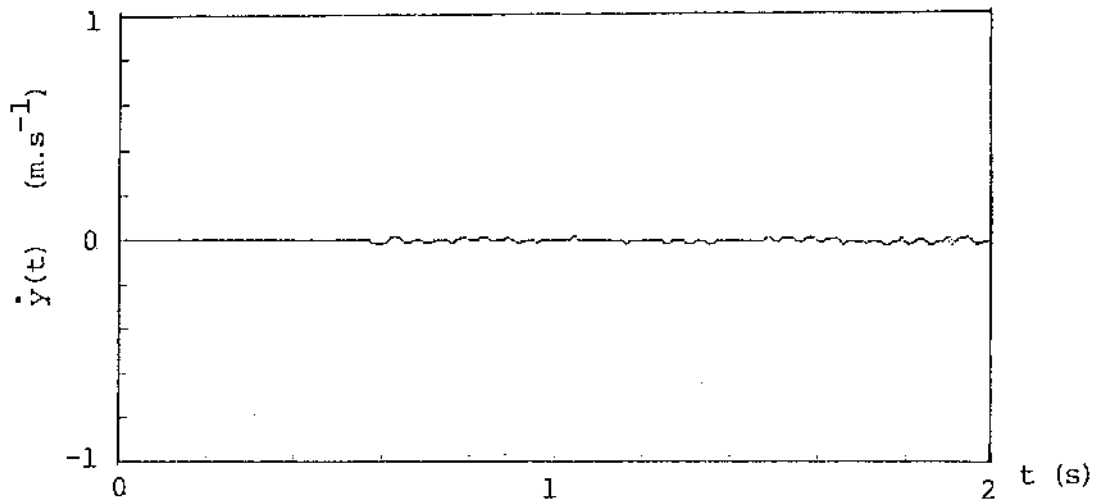


Figura 4.13: Velocidade de vibração do sistema adicional $\dot{y}_c(t)$ x tempo ($T = 1,5Nm$ e $\omega_c = 10\omega$).

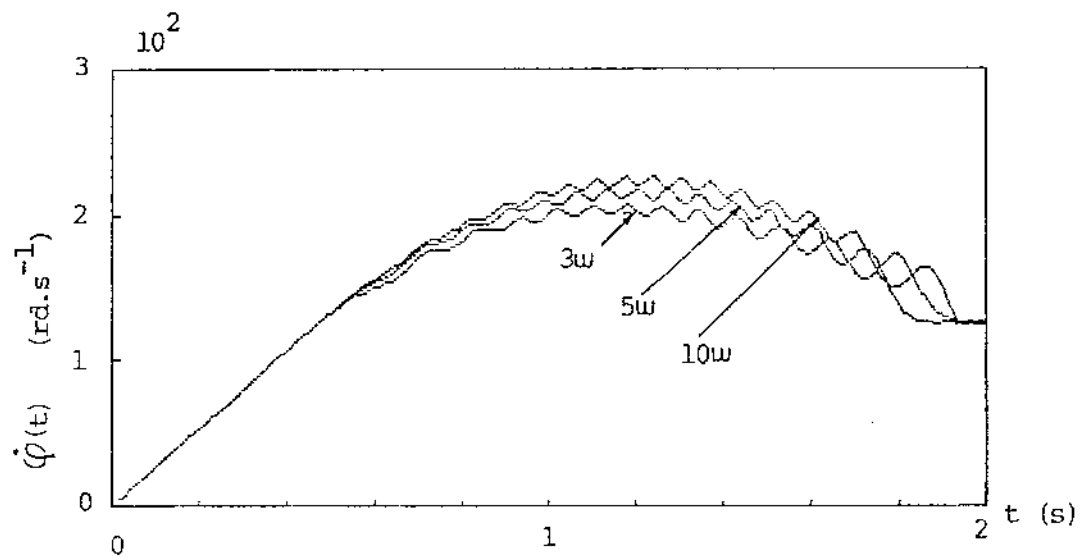


Figura 4.14: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t)$ x tempo ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$).

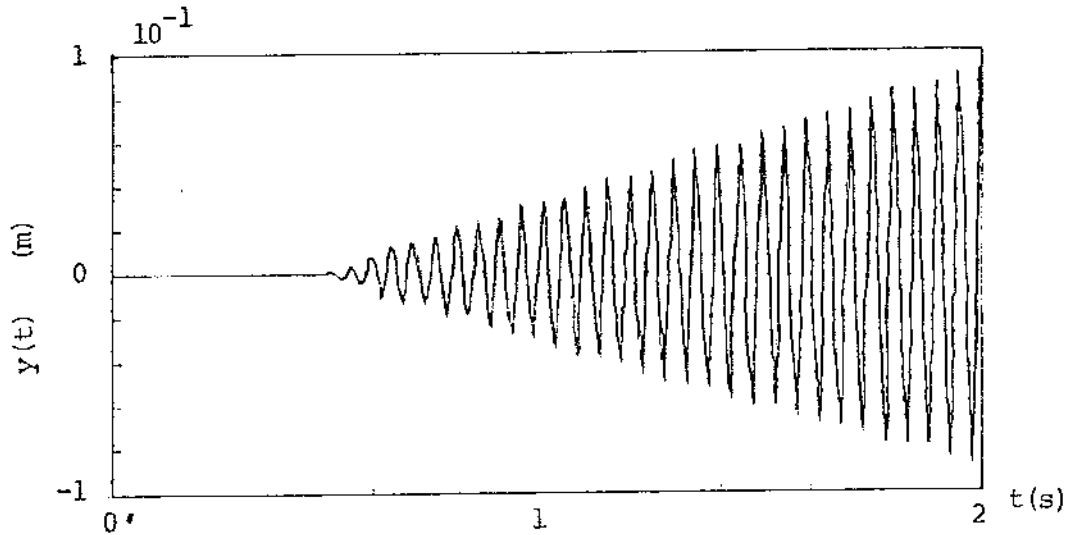


Figura 4.15: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($T = 1,5 Nm$, $\omega_c = 10\omega$, $F_a = 12,4 N$).

4.2 Sistema Adicional com Fixação Rígida

Neste caso, faz-se K_c tender a infinito no modelo 2.2, desaparecendo com isso o caráter vibratório do sistema adicional (\dot{y}_c, \dot{z}_c). O sinal da força de atrito é, agora, dado pelas expressões de velocidade resultante nos pontos de contato A, B, C, D , conforme equação (4.3).

Para os pontos A e C (v_1 e v_3):

$$\begin{aligned} (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) < 0 & F_{a_y} > 0 \\ (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) = 0 & F_{a_y} = 0 \\ (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) > 0 & F_{a_y} < 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Analogamente, para B e D (v_2 e v_4):

$$\begin{aligned} (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) < 0 & F_{a_x} > 0 \\ (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) = 0 & F_{a_x} = 0 \\ (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) > 0 & F_{a_x} < 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

As equações de movimento são idênticas às equações (4.7), (4.8), (4.9), sendo que doravante trabalha-se novamente com três graus de liberdade.

4.2.1 Resultados obtidos para regime estacionário

Inicialmente, fez-se um estudo em regime estacionário ($T = 0$) para sistema não linear, com velocidade inicial de rotação igual à crítica. Compara-se o comportamento do sistema não amortecido com o do mesmo sistema quando sujeito ao atrito seco, neste caso acoplado desde o início do movimento ($t = 0$) (Figs.4.16, 4.17, 4.18).

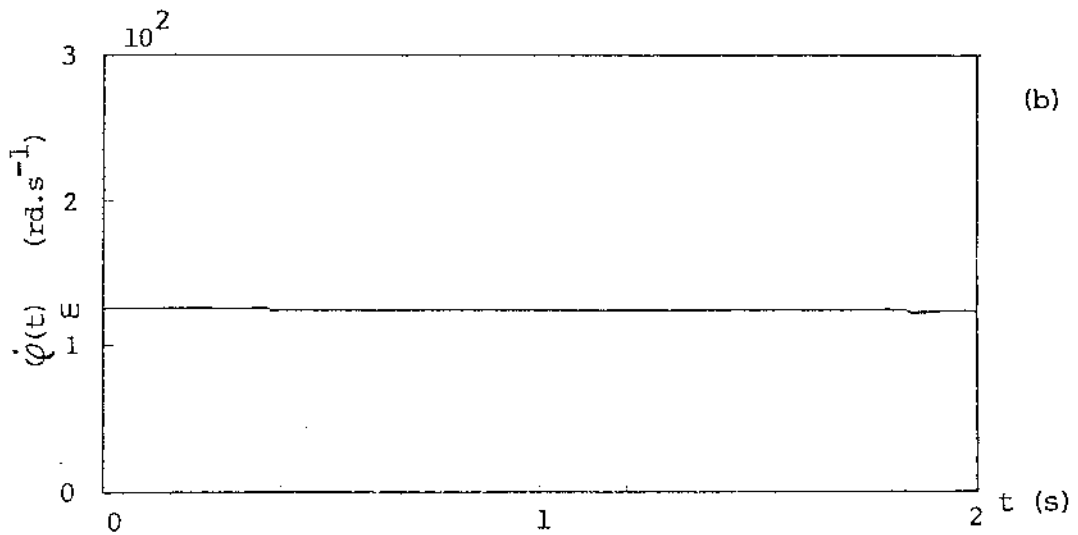
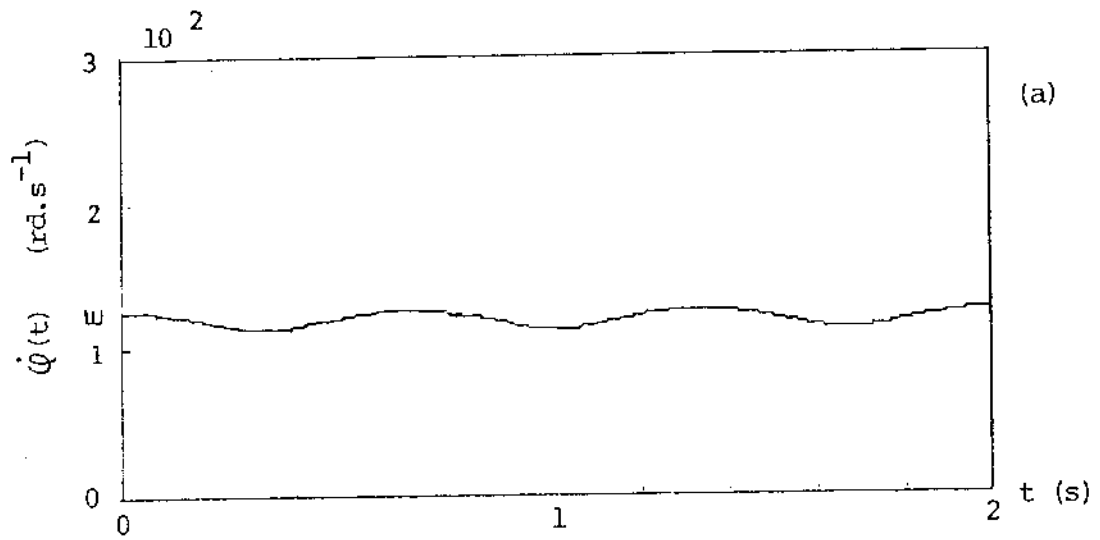


Figura 4.16: Velocidade de rotação $\dot{\phi}(t) \times$ tempo: a) não amortecido; b) amortecimento por atrito seco $12,4N$.

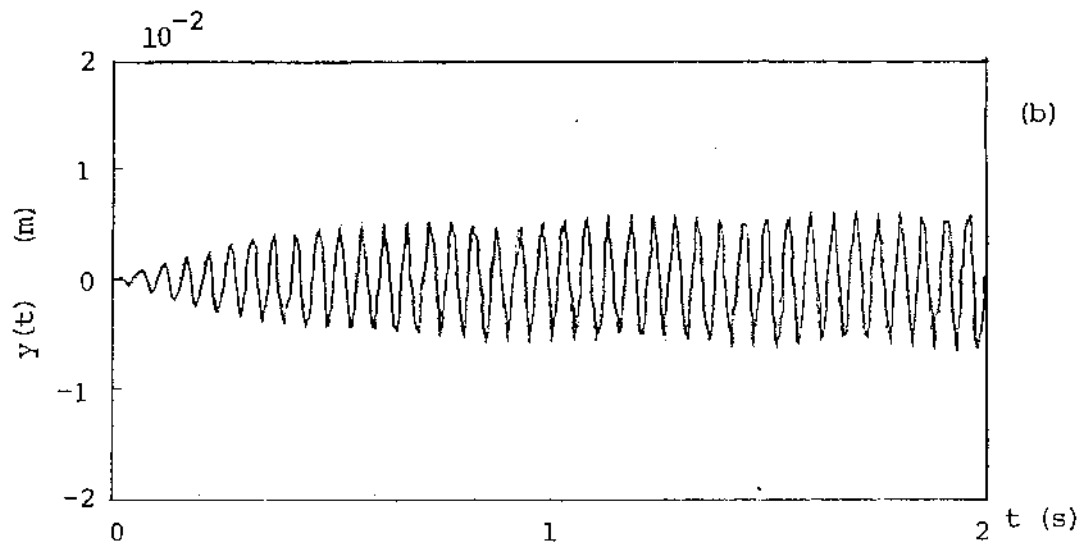
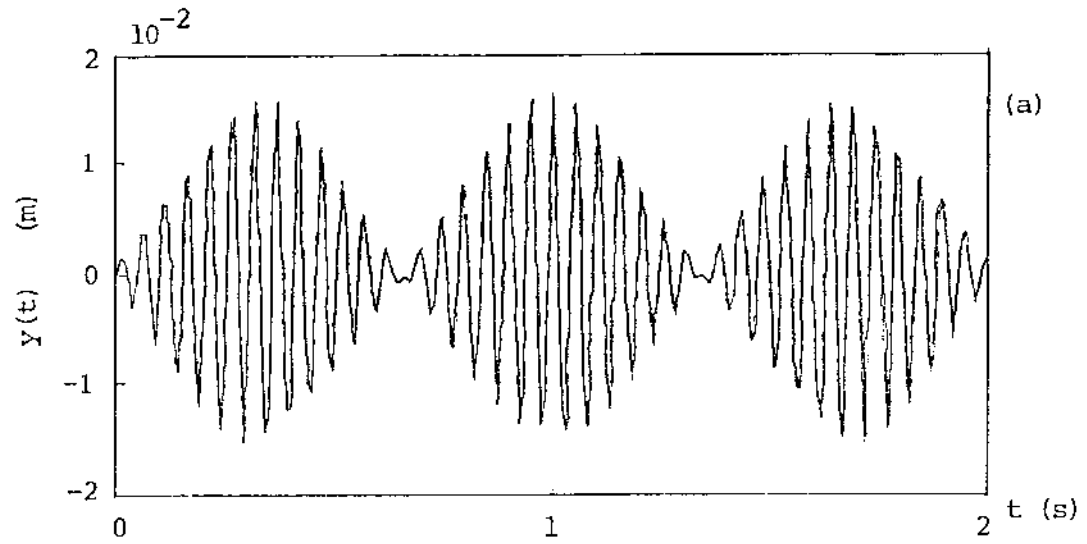


Figura 4.17: Deslocamento $y(t)$ x tempo: a) não amortecido; b) amortecimento por atrito seco $12,4N$.

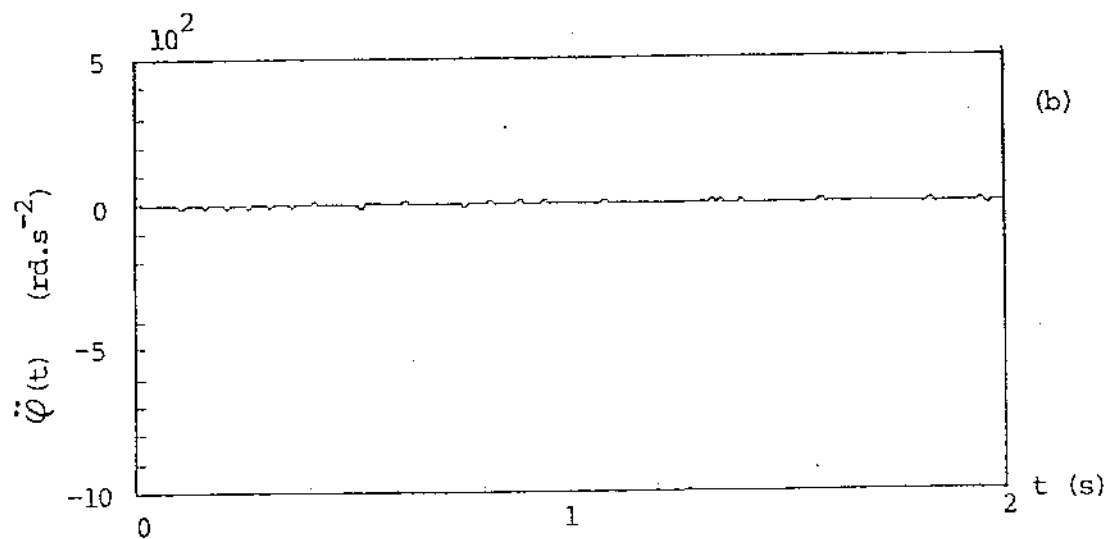
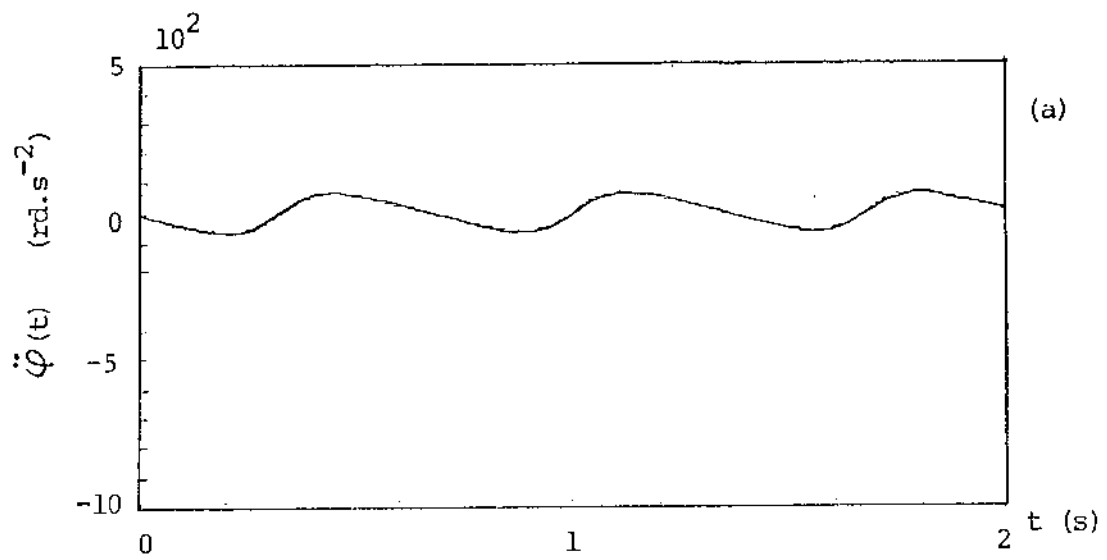


Figura 4.18: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo a) não amortecido; b) amortecimento por atrito seco $12,4N$.

No sistema não amortecido, a velocidade de rotação permanece oscilando em torno da velocidade crítica. Quando se introduz o atrito seco no sistema, a velocidade de rotação deixa de oscilar e seu valor passa a cair suavemente (Fig.4.16). A aceleração angular, que no caso não amortecido apresenta tênue oscilação em torno de zero, permanece constante e nula no caso com atrito seco (Fig.4.18), sendo a queda da velocidade de rotação devido à dissipação de energia causada pelas não linearidades impostas pelo atrito.

A Fig.4.17 mostra uma atuação favorável do atrito seco com relação à redução de amplitude de vibração na ressonância em regime estacionário, pois neste caso esta redução foi de cerca de 50%.

Estudou-se, também, a influência do atrito seco no comportamento do sistema quando este é introduzido num instante qualquer, não nulo ($t \neq 0$). O comportamento do sistema passa imediatamente do caso a) para o caso b) das Figs.4.16, 4.17, 4.18 anteriores, sendo que a aceleração angular apresenta pequenas perturbações, não sendo mais perfeitamente nula (Fig.4.21), enquanto que a eficiência do amortecimento é muito inferior ao caso anterior, pois a redução da amplitude de vibração é muito pequena. Uma vez que ocorre um choque instantâneo no sistema quando da introdução do atrito, pode-se considerar a hipótese de que isto prejudicaria a atuação do mesmo como amortecimento, não permitindo reduzir de forma significativa o nível de vibração do rotor (Fig.4.20).

Para este estudo, imaginou-se o acoplamento do sistema adicional para $t = 1s$ (Fig. 4.19).

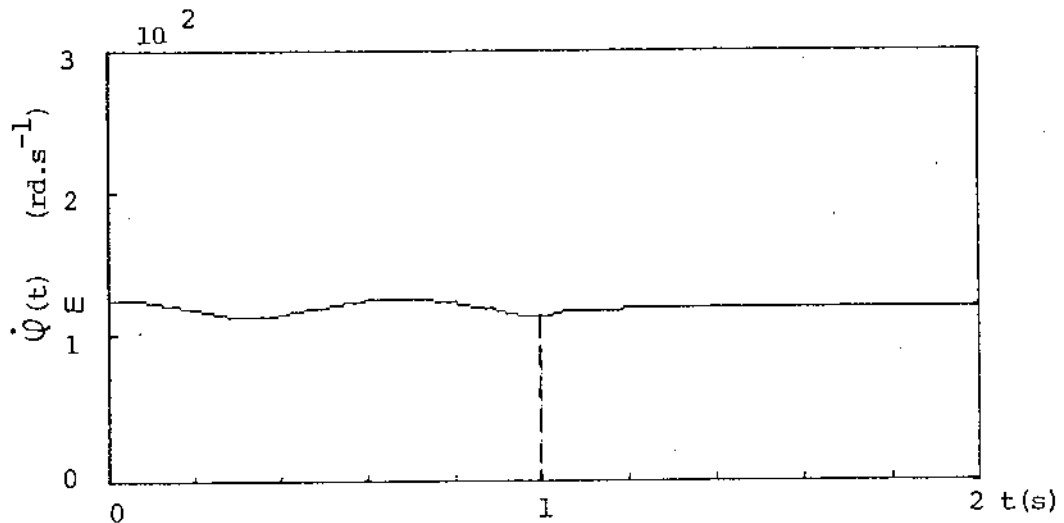


Figura 4.19: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo ($F_a = 12,4N$ em $t = 1s$).

Assim, deve-se procurar iniciar o movimento com o sistema adicional já acoplado, a fim de obter melhor eficiência do amortecedor.

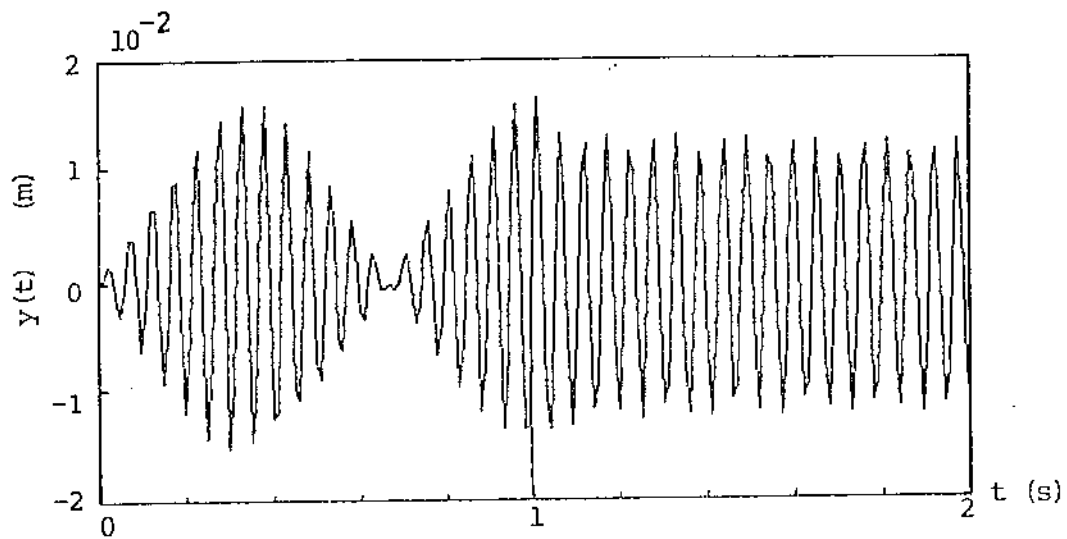


Figura 4.20: Deslocamento $y(t)$ \times tempo ($F_a = 12,4N$ em $t = 1s$).

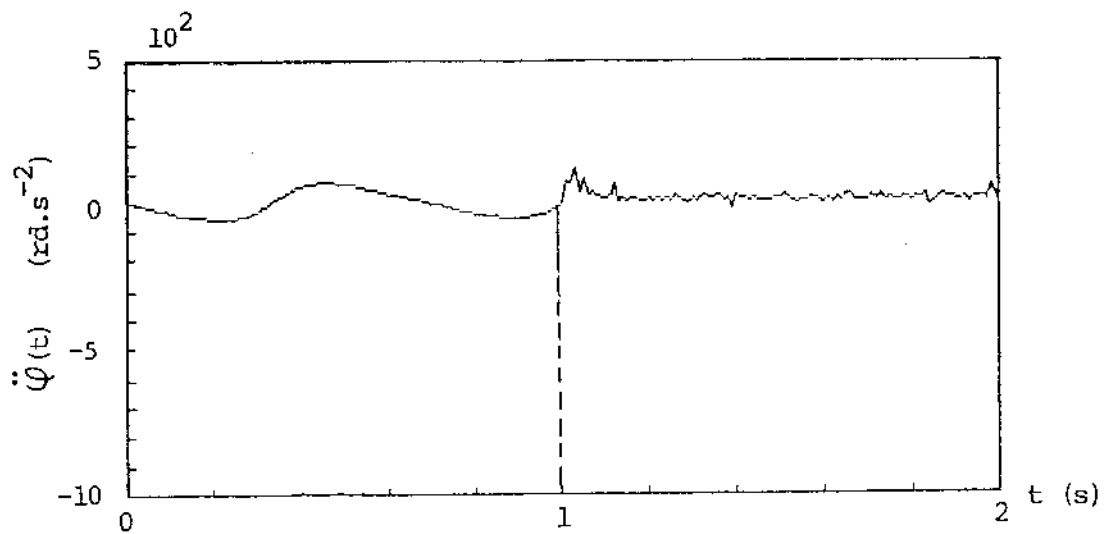


Figura 4.21: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t)$ \times tempo ($F_a = 12,4N$ em $t = 1s$).

4.2.2 Resultados obtidos quando da aceleração através da ressonância

O primeiro passo desta análise foi verificar a semelhança de comportamento entre este sistema e os sistemas correspondentes com amortecedor fixado de forma flexível para $\omega_c = 5\omega$ e 10ω . Verifica-se esta semelhança através das simulações obtidas a seguir.

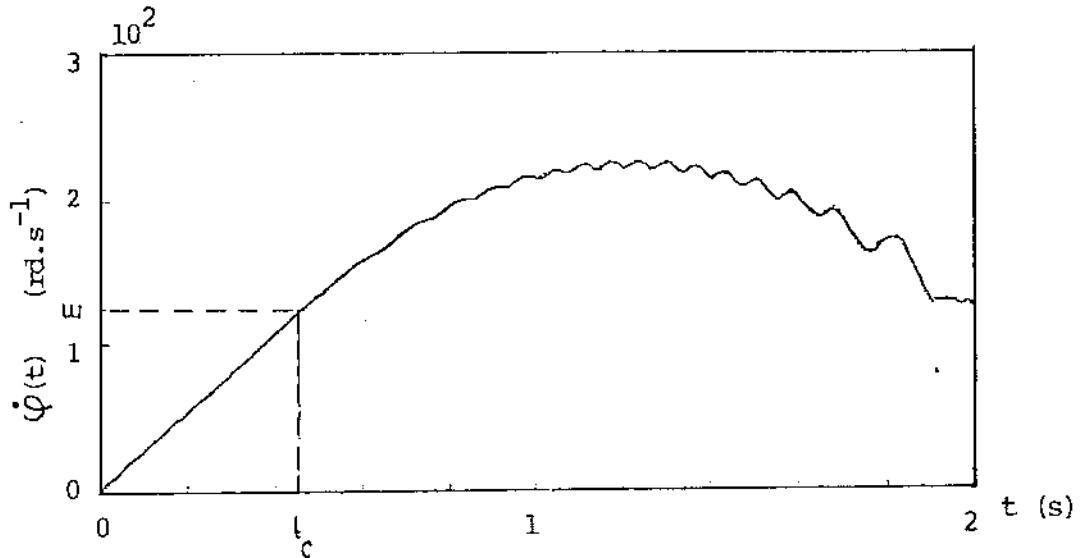


Figura 4.22: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$).

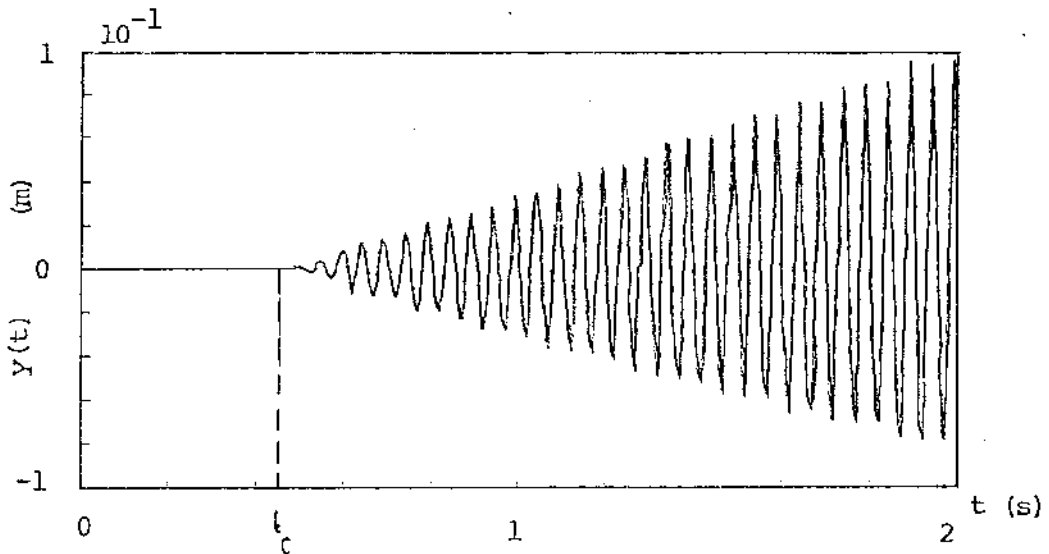


Figura 4.23: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$).

Analogamente ao item 4.1.1, observa-se o aumento do nível de oscilação da velocidade resultante (Fig.4.25) juntamente com o crescimento da velocidade de rotação (Fig.4.22) após cruzar a ressonância, e sua posterior queda para um nível de oscilação bem mais baixo quando a rotação do

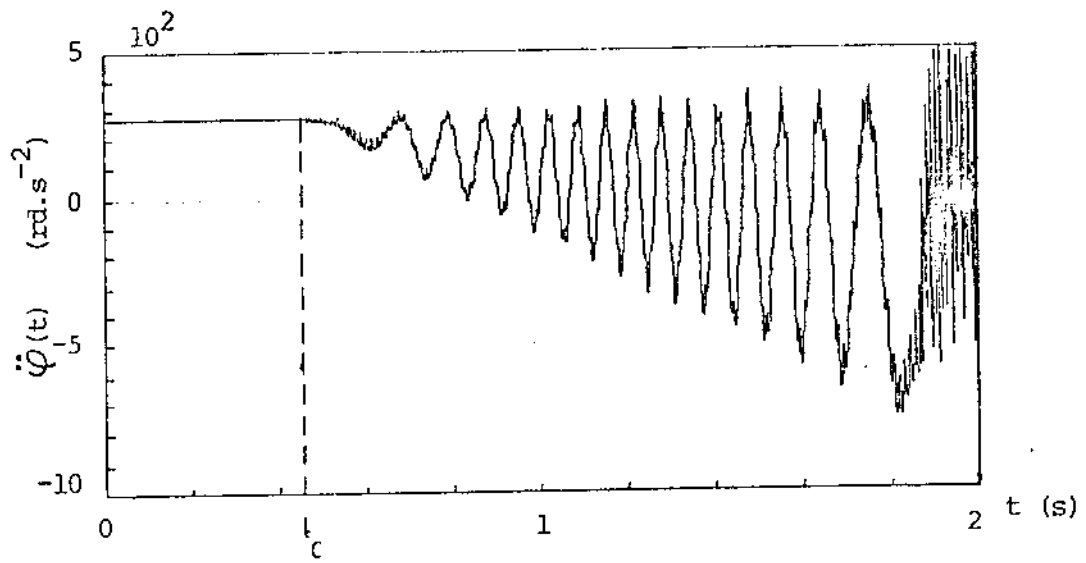


Figura 4.24: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t)$ \times tempo ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$).

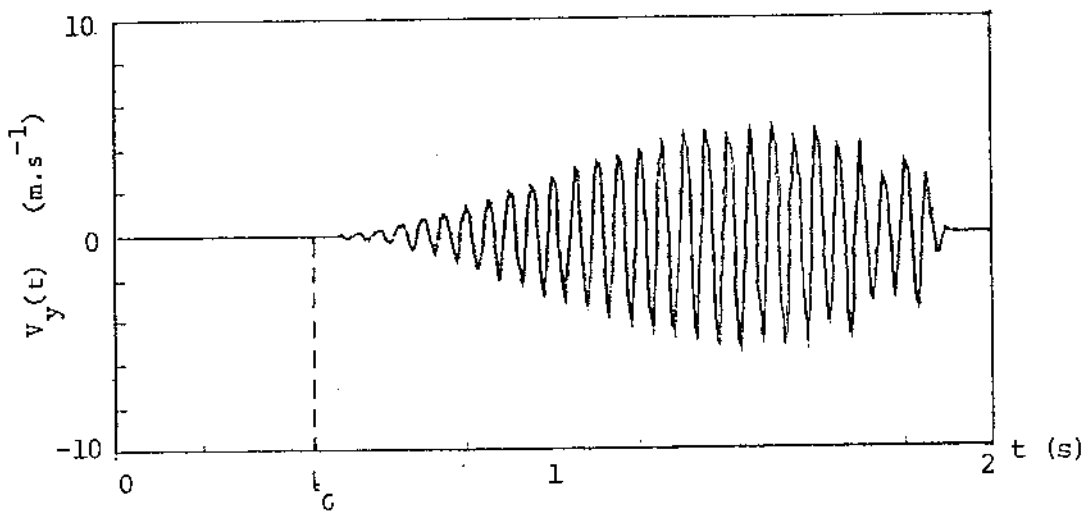


Figura 4.25: Velocidade resultante V_y \times tempo ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$).

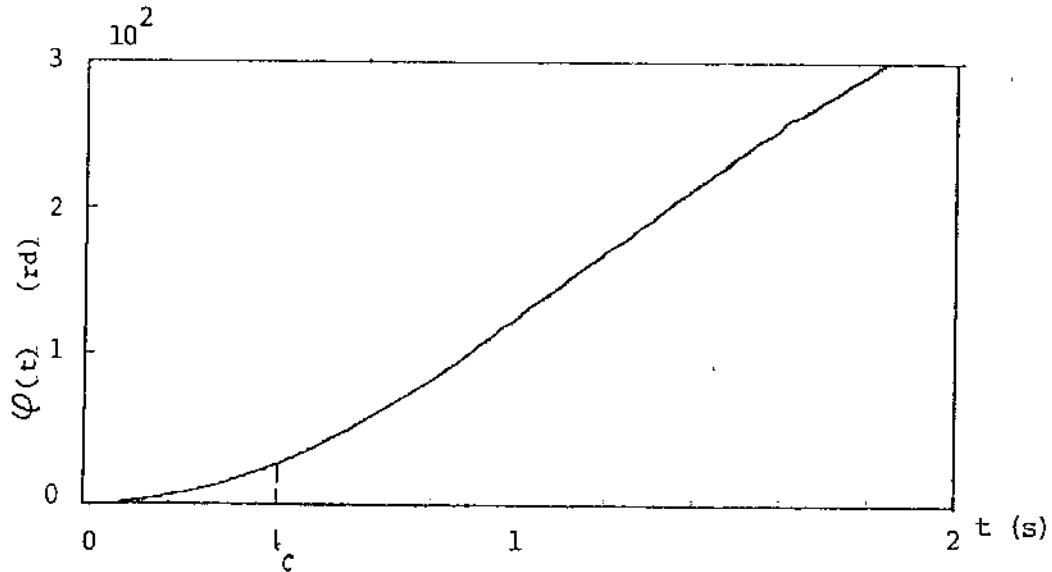


Figura 4.26: Deslocamento angular $\varphi(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$).

eixo *estaciona* em sua velocidade crítica.

O mesmo comportamento anterior verifica-se para a aceleração angular $\ddot{\varphi}(t)$, cujo valor médio cai progressivamente até que num dado instante passa a oscilar em torno de zero (Fig.4.24). Neste instante a velocidade de rotação é igual à crítica do rotor e, como o torque dinâmico do sistema deve ter aproximadamente o mesmo valor do torque de acionamento (aceleração em torno de zero), a velocidade permanece, então, na ressonância.

Um efeito semelhante ao da variação do torque de acionamento Fig.(4.10) pode ser obtido pela variação do módulo da força de atrito, ou ainda, variando-se a força normal. As Figs.4.27 a 4.31 mostram este efeito para forças de atrito de $6N$ e $24N$.

Comparando-se as curvas entre si e também com os resultados obtidos anteriormente para atrito de $12,4N$, vê-se que o aumento da força de atrito acentua seu efeito instabilizante sobre o sistema bem como a dissipação de energia, pois a velocidade de rotação cai mais rapidamente para o valor crítico (Fig.4.27b) influenciando a velocidade resultante que sofre uma redução do seu valor máximo, caindo mais rapidamente para o nível inferior de vibração (Fig.4.30b). Conseqüentemente, o avanço do ângulo de rotação é mais lento (Fig.4.31b) devido à deficiência causada à aceleração angular, que passa a oscilar com frequência muito maior próxima ou logo abaixo de zero (Fig.4.29b). É interessante que a instabilidade do movimento vibratório, apesar de mais acentuada, aparece com um pequeno atraso após a ultrapassagem da ressonância (Fig.4.28b). Da mesma forma, a redução da força de atrito diminui a dissipação de energia e, conseqüentemente, as instabilidades são muito tênues (Fig.4.28a), embora aqui já apareçam durante a passagem pela velocidade crítica. Neste caso, quanto menor a força de atrito, mais o comportamento se aproximará do caso não amortecido e menores serão as instabilidades. Porém, deve-se notar pelas Figs.4.28 e 4.23 que, no instante em que o rotor alcança a velocidade crítica (t_c), a amplitude de vibração $y(t)$ será menor quanto maior

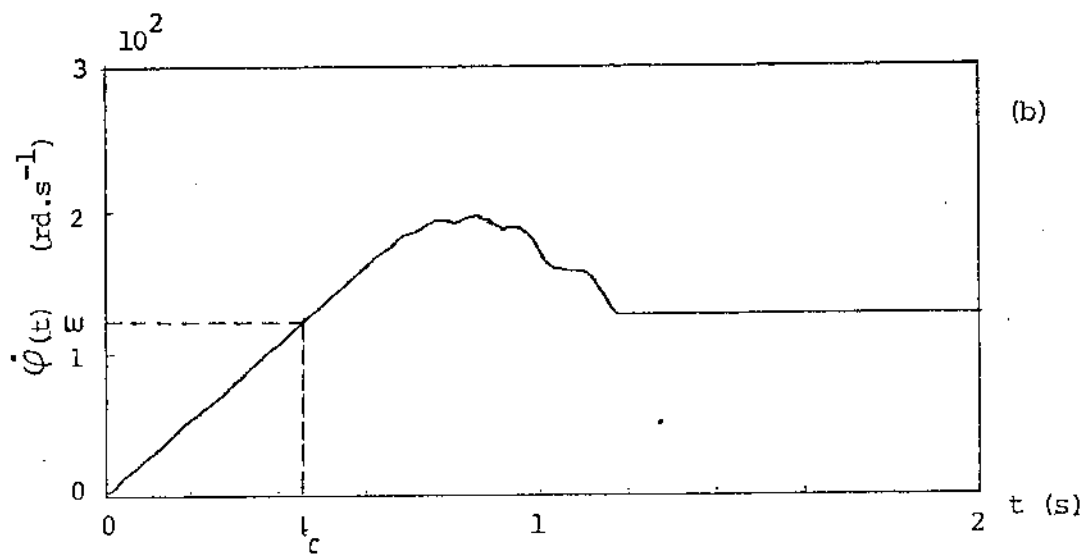
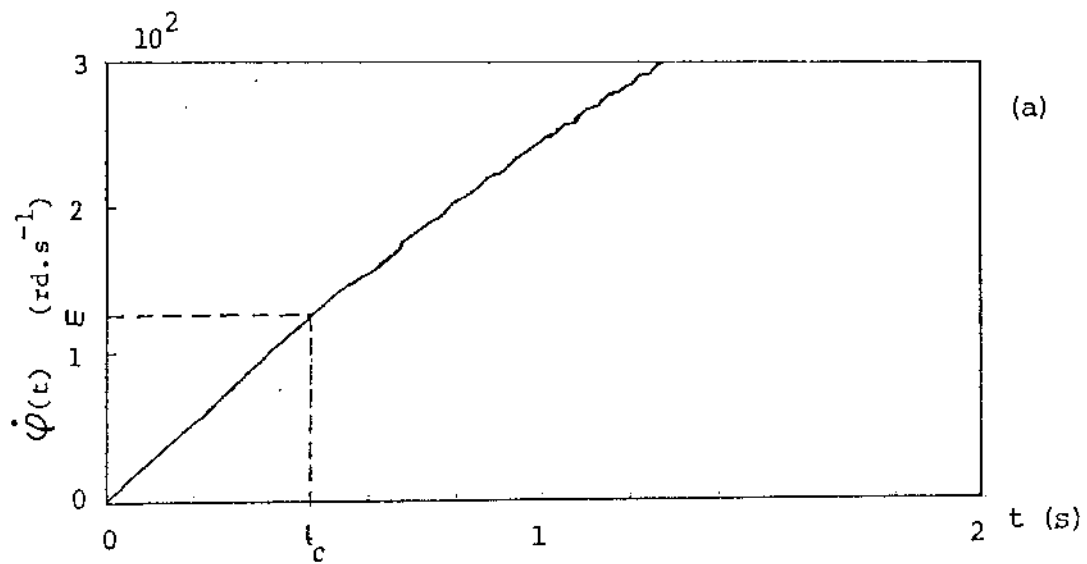


Figura 4.27: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 1,5\text{Nm}$): a) $F_a = 6\text{N}$; b) $F_a = 24\text{N}$.

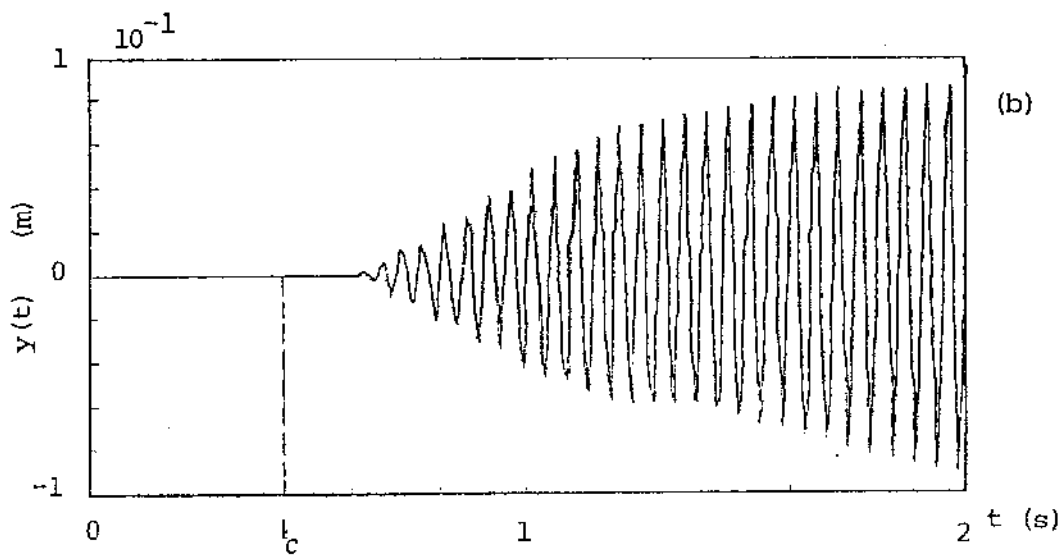
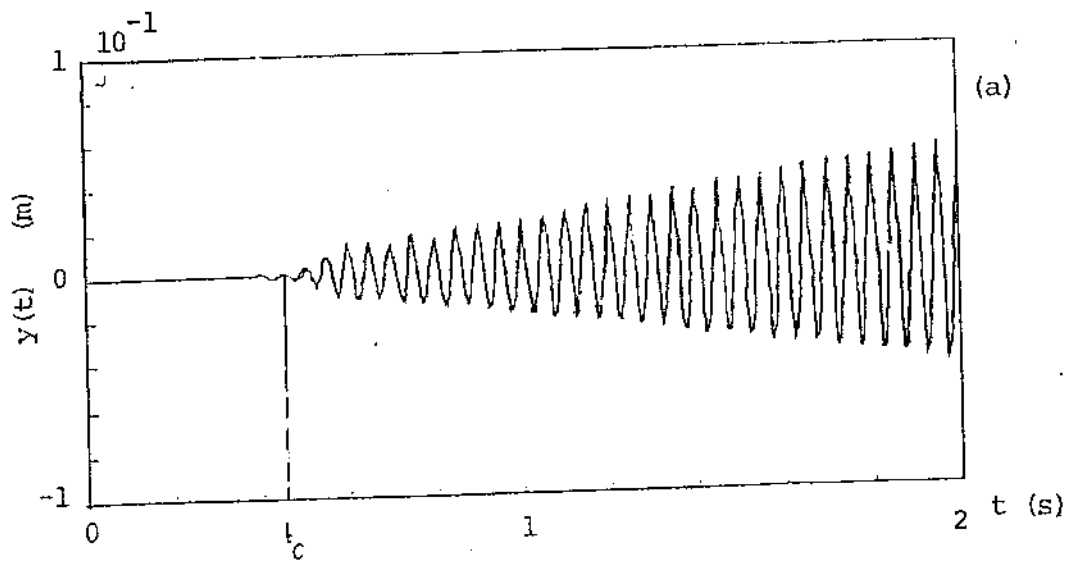


Figura 4.28: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($T = 1,5 Nm$): a) $F_a = 6N$; b) $F_a = 24N$.

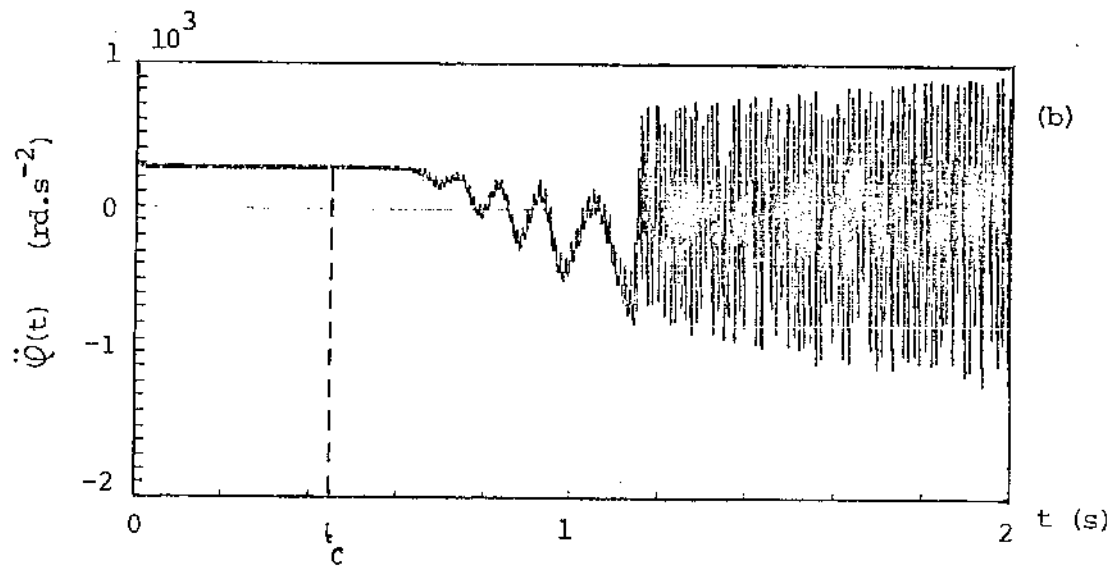
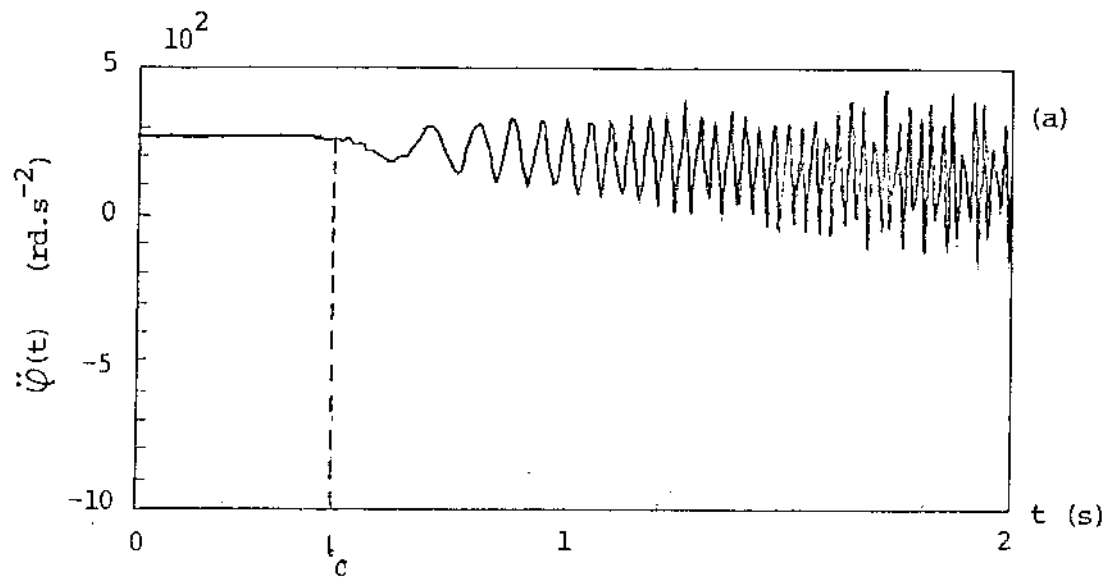


Figura 4.29: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 1,5\text{Nm}$): a) $F_a = 6\text{N}$; b) $F_a = 24\text{N}$.

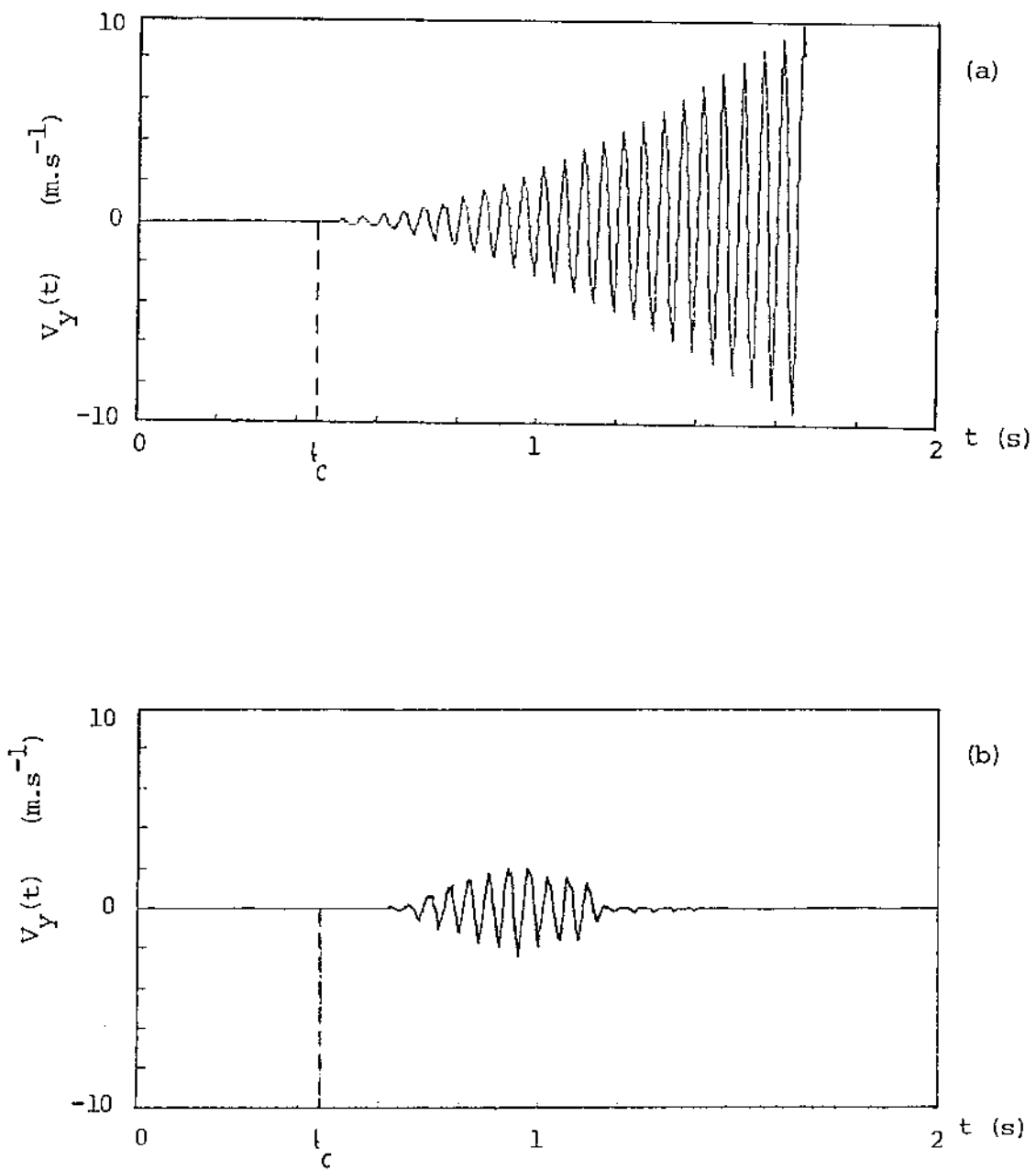


Figura 4.30: Velocidade resultante $V_y(t) \times$ tempo ($T = 1,5\text{ Nm}$): a) $F_a = 6\text{ N}$; b) $F_c = 24\text{ N}$.

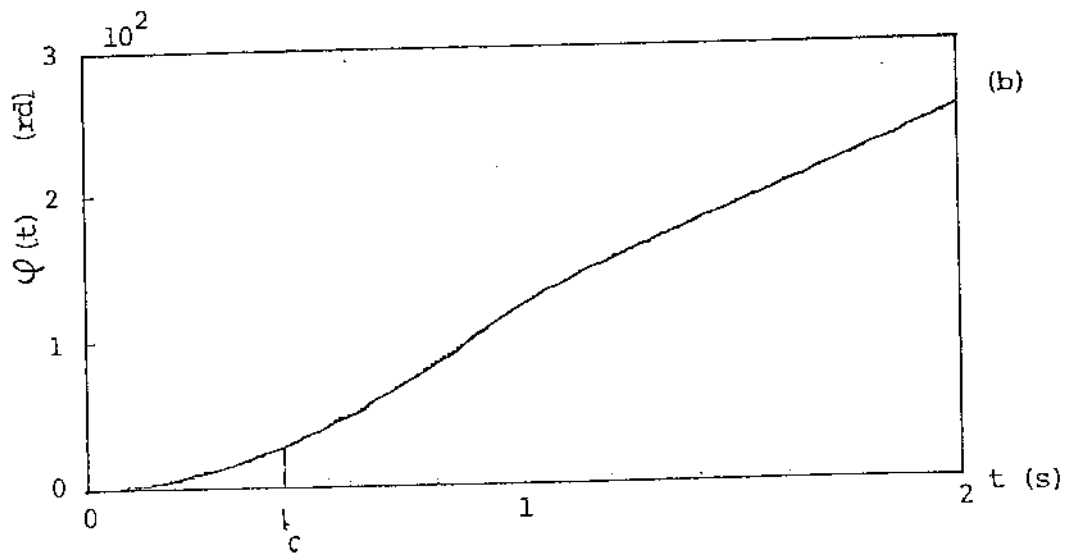
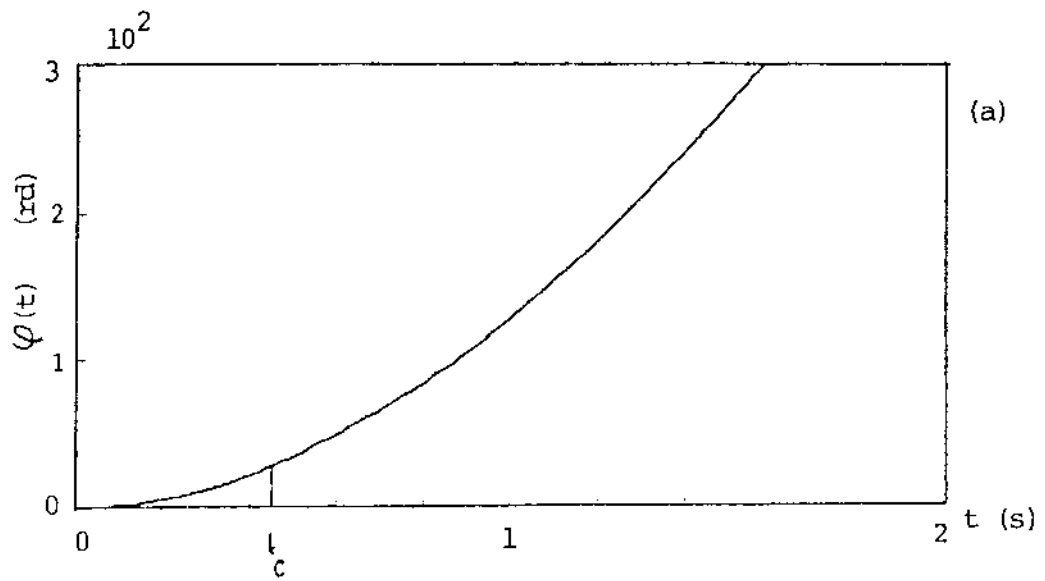


Figura 4.31: Deslocamento angular $\varphi(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$): a) $F_a = 6N$; b) $F_a = 24N$.

for a força de atrito. Surge daí, um compromisso entre a força de atrito, amplitude de vibração na ressonância e velocidade de rotação, ou seja, o valor da força de atrito não pode ser muito baixo a ponto de não provocar amortecimento satisfatório, nem muito alto a ponto de prejudicar a aceleração do sistema e conseqüentemente a velocidade de rotação. Maiores considerações a este respeito serão feitas adiante. Deve-se acrescentar que, como mostram as simulações anteriores, o efeito da variação da força de atrito não obedece um critério de linearidade.

4.2.3 Efeito do amortecimento viscoso sobre o sistema sujeito ao atrito seco

Estuda-se aqui o efeito de um amortecimento viscoso (c/m) bem pequeno, atuando sobre o eixo do rotor e analisa-se sua influência sobre o sistema sujeito ao atrito seco.

Para tanto, utilizou-se um fator de amortecimento viscoso $\xi = 0,005$, sendo este amortecimento proporcional às velocidades de vibração do ponto W (\dot{y}_w, \dot{z}_w), nas direções y e z .

As Figs.4.32 a 4.34 mostram os resultados obtidos para um torque de $1,5Nm$ e uma força de atrito de $12,4N$.

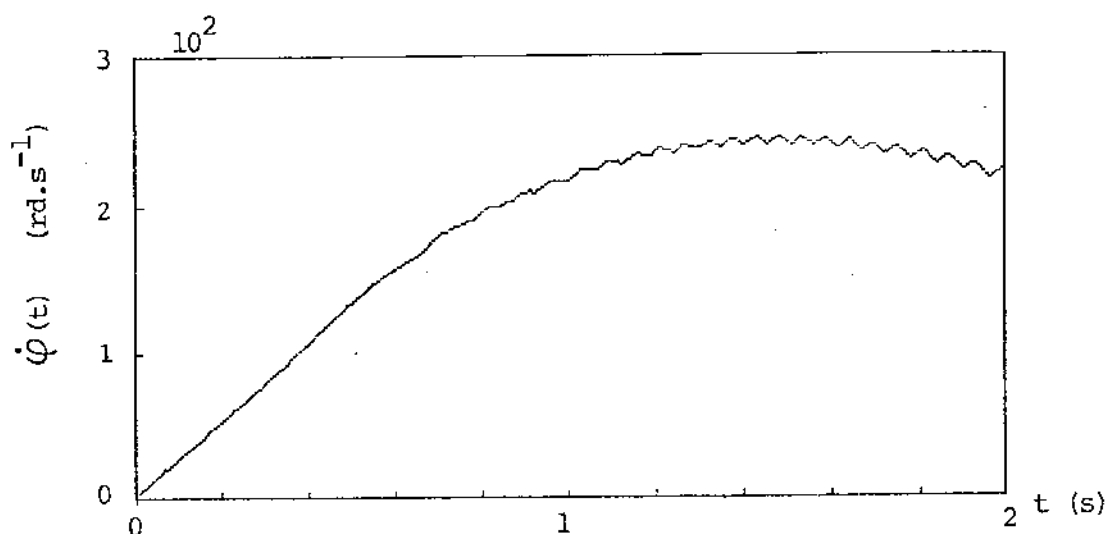


Figura 4.32: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$, $F_a = 12,4N$, $\xi = 0,005$).

A ação conjunta do atrito seco com um pequeno amortecimento viscoso, apesar de não modificar as características gerais do sistema, minimiza os efeitos instabilizantes do atrito (Figs.4.23 e 4.33), dissipando menos energia, pois a queda da aceleração angular é mais lenta dentro do mesmo intervalo de tempo considerado (Figs.4.24 e 4.34). Conseqüentemente, a velocidade não chega a estacionar na ressonância neste período (Figs.4.22 e 4.32).

Como não foi considerado um efeito amortecedor dos roletes, pois estes na realidade o introduzem no sistema, pode-se esperar um melhor comportamento do rotor do que os simulados aqui.

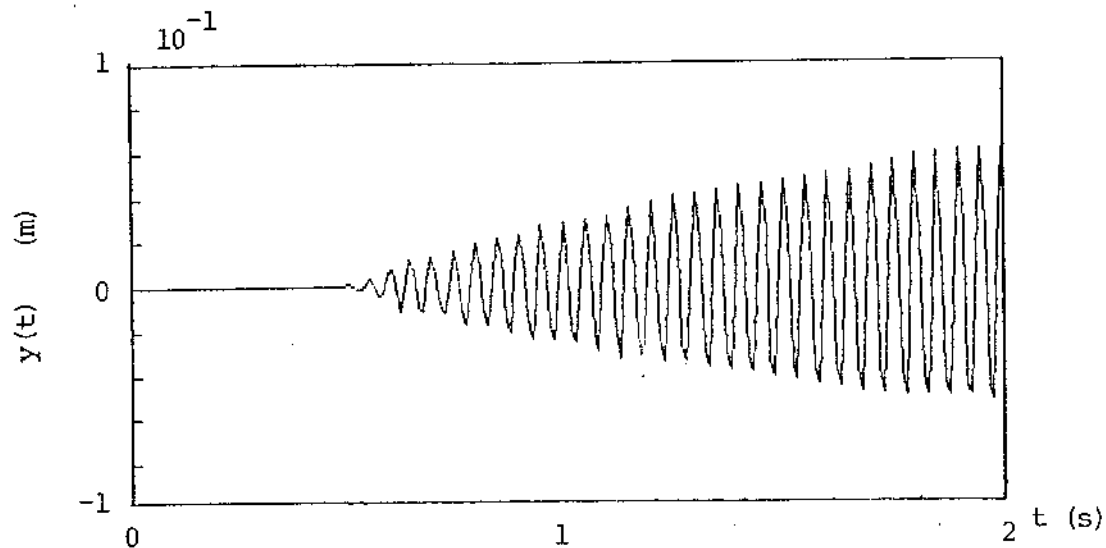


Figura 4.33: Deslocamento $y(t)$ \times tempo ($T = 1,5Nm$, $F_a = 12,4N$, $\xi = 0,005$).

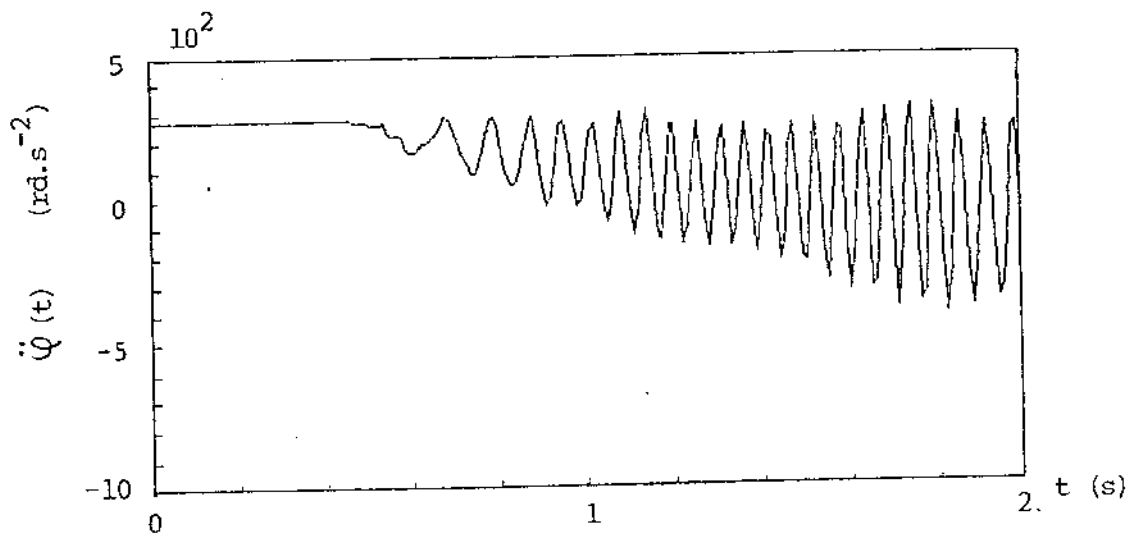


Figura 4.34: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t)$ \times tempo ($T = 1,5Nm$, $F_a = 12,4N$, $\xi = 0,005$).

4.2.4 Atrito seco atuando somente na região da ressonância

Tentou-se aqui eliminar as instabilidades geradas no sistema acoplando e desacoplando o sistema adicional na região da ressonância ou apenas desacoplando-o após a velocidade crítica no caso de estar acoplado já em $t = 0$. Ao contrário do caso estacionário, o controle de acoplamento/desacoplamento do atrito seco será feito pela velocidade de rotação e não pelo tempo, pois é muito mais coerente definir a região de ressonância pela velocidade de rotação.

Foram simulados dois casos:

caso a) o amortecedor é acoplado a $\omega_a = 100\text{rd/s}$ e desacoplado a $\omega_d = 140\text{rd/s}$.

caso b) o amortecedor é engatado desde o início do movimento ($t = 0$) e desengatado também em $\omega_d = 140\text{rd/s}$ (Figs.4.35, 4.36, 4.37).

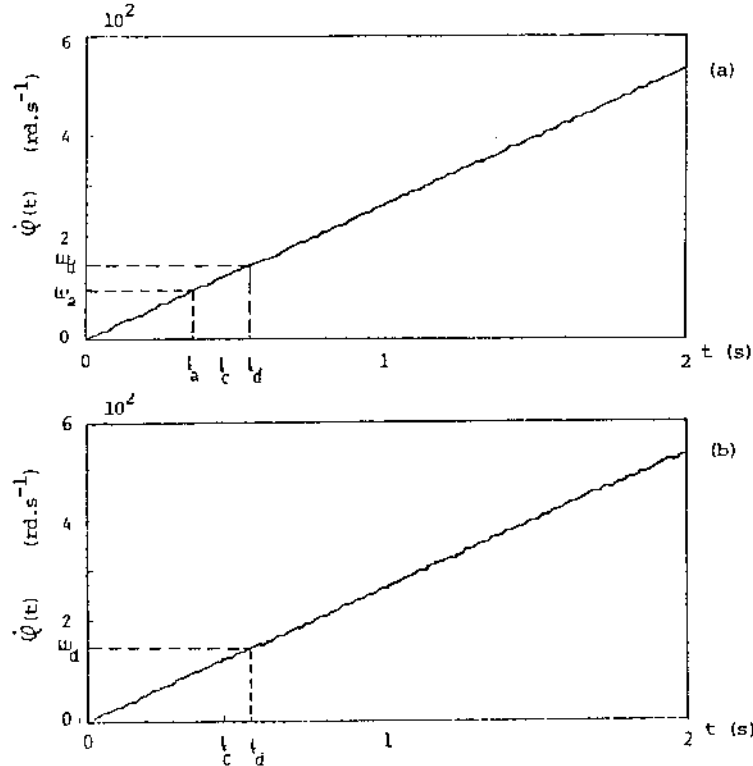


Figura 4.35: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 1, 5\text{Nm}$).

Conforme o caso estacionário (Figs. 4.19, 4.20, 4.21), o choque provocado pelo engate da força de atrito a uma dada velocidade prejudica a eficiência do amortecedor (Fig.4.36). Além da redução da amplitude de vibração ser maior no caso b), nota-se que no caso a) surgem oscilações mais acentuadas em t_a . Quando o amortecedor é engatado em $t = 0$, estas oscilações somente serão visíveis graficamente após a ressonância. A aceleração angular também apresenta um nível de vibração menor no caso b), Fig.4.37.

Quando se retira ou desacopla a força de atrito do sistema, as instabilidades são eliminadas. Quanto mais próximo à velocidade crítica for desacoplado o amortecedor, menor será a amplitude de vibração resultante. Porém, existe um valor limite para a velocidade de desacoplamento (ω_d) tanto do ponto de vista prático como da simulação. Nos resultados obtidos, verificou-se que para

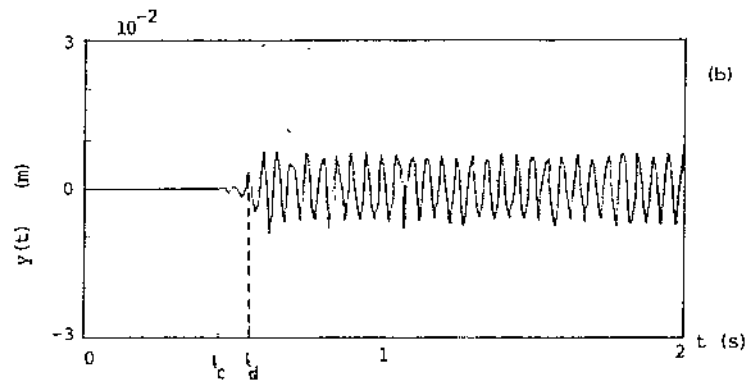
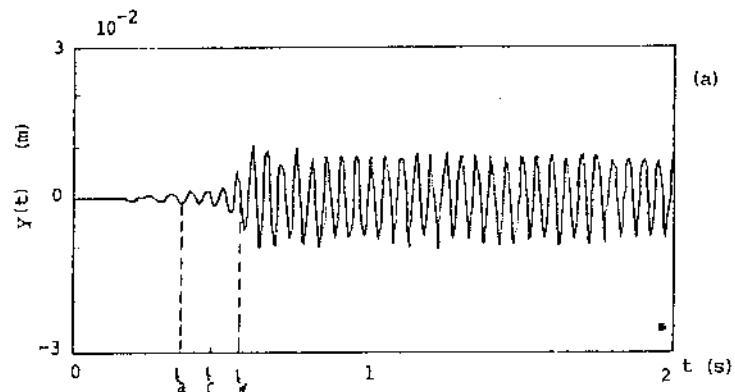


Figura 4.36: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$).

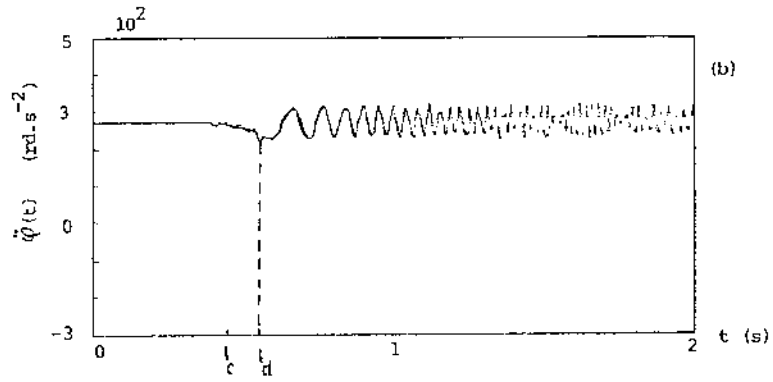
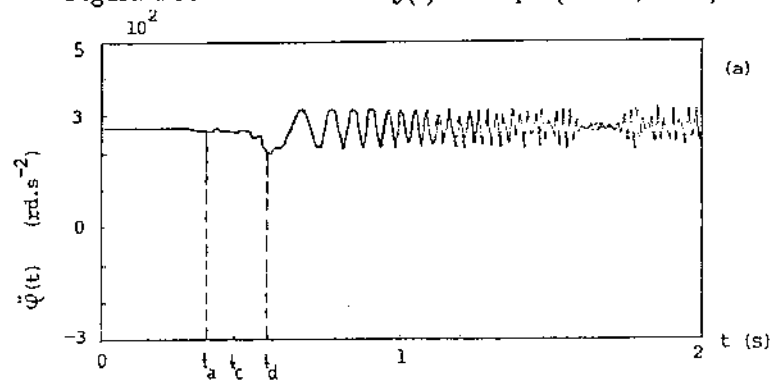


Figura 4.37: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo ($T = 1,5Nm$).

desacoplamentos em rotações abaixo de 140rd/s não se obtém melhora de comportamento, ou seja, não se consegue maior redução da amplitude de vibração. Na prática, torna-se difícil pensar numa realização experimental com acoplamento e/ou desacoplamento dentro de faixas muito estreitas, pois a variação entre a velocidade crítica e a velocidade de desacoplamento, no caso 140rd/s , ocorre em razão de segundos.

Cabe comentar que aumentando-se a força de atrito, consegue-se melhor redução da amplitude de vibração, embora isto implique em possíveis problemas construtivos.

Observa-se nas Figs.4.38 e 4.39 a redução de amplitude de vibração para uma força de atrito de 24N e acionamento $T = 1,5\text{Nm}$.

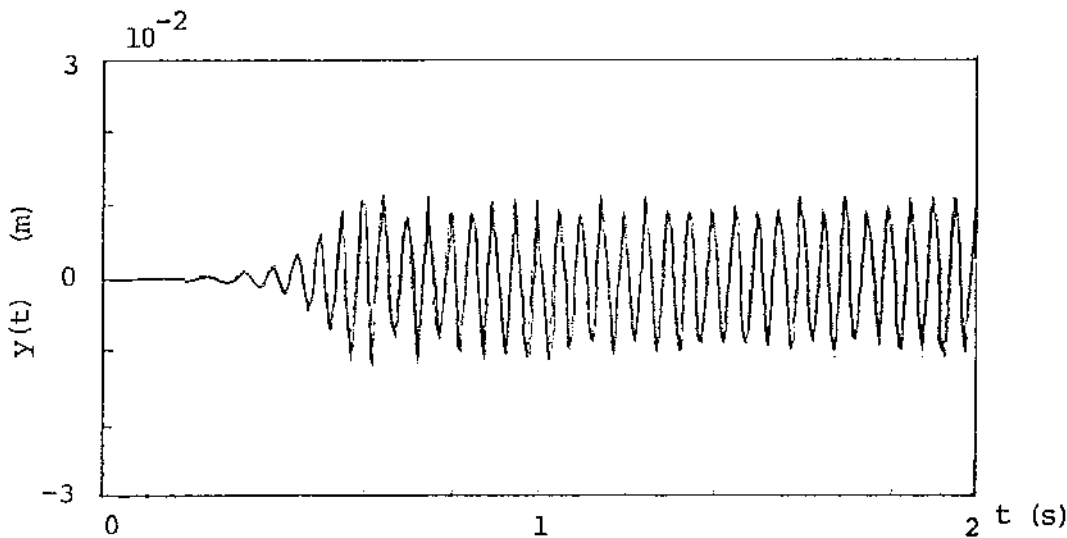


Figura 4.38: Deslocamento $y(t)$ \times tempo (sistema não amortecido).

Neste caso, o amortecimento foi cerca de 50% aproximadamente. No exemplo da Fig.4.36b, a redução foi de cerca de 36%.

Além das limitações físicas já expostas em 4.2.2, existem algumas limitações construtivas para o caso de aumento da força de atrito. Existe um valor máximo admissível para o esforço normal sobre os roletes de forma que não ocorra esmagamento de sua superfície, o que acarretaria problemas como deformação permanente, efeitos de plasticidade ou atrito de rolamento. Este último, prejudicando muito o sistema, pois introduziria mais torques negativos na equação de momento, dissipando maior energia cinética de rotação, efeito este não considerado no modelamento.

Se o valor do coeficiente de atrito fosse $\mu = 0,6$ para produzir uma força de atrito de aproximadamente 12N seria necessário um esforço normal de 20N . Isto significaria, para cada par de roletes, um esforço normal de 10N por rolete, o que já é um valor razoável, dependendo, contudo, das dimensões dos roletes. Seguindo o mesmo raciocínio, para uma força de atrito de 24N necessitaria-se de 40N de esforço normal, o que representaria 20N/rolete . Neste último caso, o valor talvez seja um tanto excessivo, pois os roletes não podem ser muito espessos uma vez que no modelamento considerou-se apenas um ponto de contato para cada rolete. Nestes casos, pode-se optar por uma forma construtiva com maior número de roletes nas direções y e z (Fig.4.40). Nesta figura tem-se:

- $A, A_1, A_2 \dots$ = pontos de contato dos roletes à direita do eixo y .
- $C, C_1, C_2 \dots$ = pontos de contato dos roletes à esquerda do eixo y .

- etc ...

As respectivas distâncias dos roletes ao centro O do plano yz não interferem no equacionamento para este modelo, conforme equações (4.7), (4.8), (4.9), nem nas velocidades resultantes responsáveis pelo sinal da força de atrito (equações (4.12), (4.13)). Esta é, portanto, uma possível solução para o problema.

No Capítulo 5, faz-se um estudo de estabilidade do sistema, baseando-se numa relação de equivalência entre atrito seco e atrito viscoso (Apêndice A). Utilizou-se o método proposto por Müller [22], complementando a análise com o cálculo de autovalores para sistemas fixados flexível ou rigidamente.

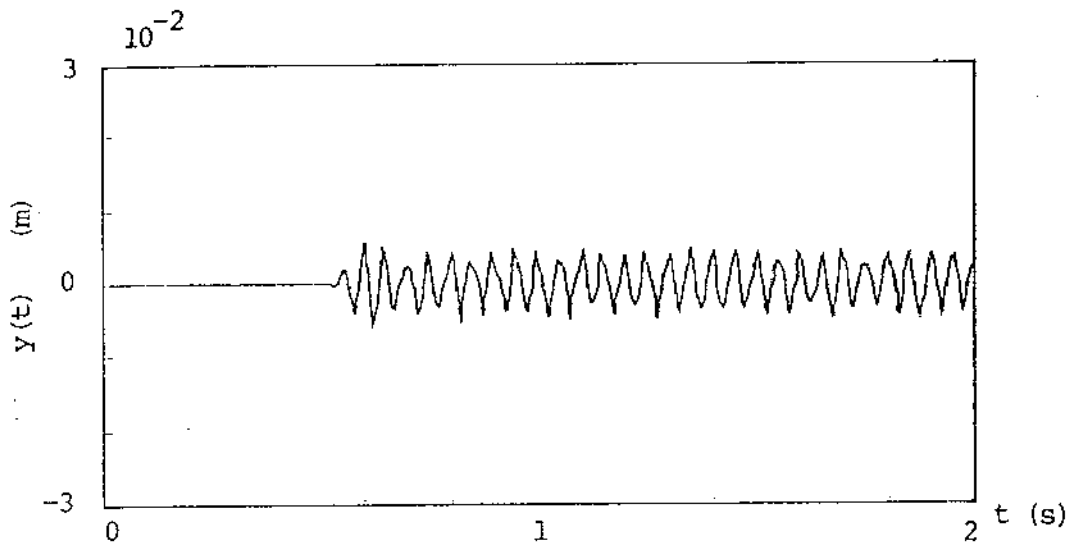


Figura 4.39: Deslocamento $y(t)$ \times tempo ($F_a = 24N$).

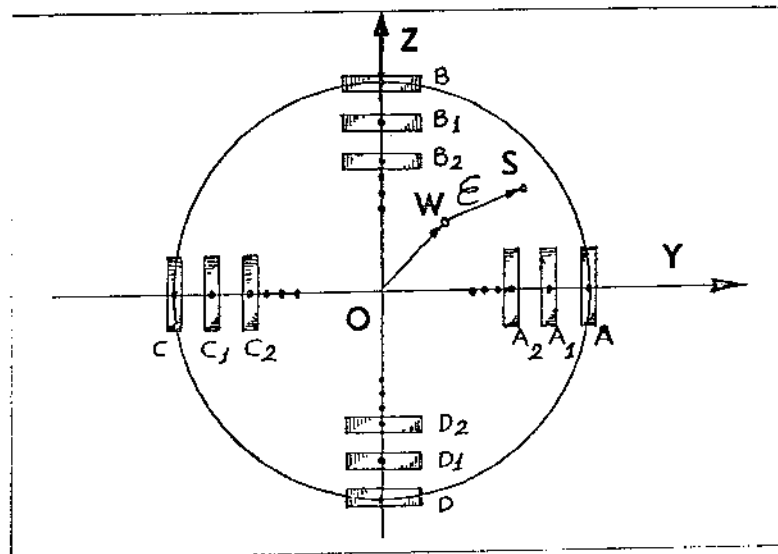


Figura 4.40: Vista superior do modelo com maior número de roletes.

Capítulo 5

ESTUDO TEÓRICO DE ESTABILIDADE

Este estudo é interessante no sentido de fornecer informações sobre tendências de comportamento do sistema, permitindo uma comparação de resultados com os obtidos nas simulações do Capítulo 4.

5.1 Descrição do Método

O método de análise utilizado é o proposto por Peter C. Müller [22] para sistemas $M - D - G - K - N$. Sabe-se que, num modelo completo, a equação matricial homogênea é:

$$[M]\ddot{z}(t) + [D + G]\dot{z}(t) + [K + N]z(t) = 0 \quad (5.1)$$

onde:

- M = matriz de massa do sistema.
- D = matriz de amortecimento (simétrica).
- G = matriz de forças giroscópicas (anti-simétrica).
- K = matriz de forças conservativas dependentes da posição (simétrica).
- N = matriz de forças não-conservativas dependentes da posição (anti-simétrica).
- $z(t), \dot{z}(t), \ddot{z}(t)$ = vetores deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente.

Segundo Müller, o sistema $M - D - G - K - N$ apresenta estabilidade assintótica quando:

$$\begin{cases} K = K^t > 0 \\ D = D^t > d_o I > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

onde:

- K^t, D^t = transpostas das matrizes K e D .

- $I =$ matriz identidade.
- $d_o = \frac{n_{max}}{2k_{min}}(g_{max} + \sqrt{g_{max}^2 + 4m_{max}k_{min}})$.

sendo:

- $m_{max} = \max \lambda_i(M) \quad i = 1, \dots, f$.
- $g_{max} = \max \lambda_i(G_i) \quad i = 1, \dots, f$.
- $k_{min} = \min \lambda_i(K) \quad i = 1, \dots, f$.
- $n_{max} = \max \lambda_i(N_i) \quad i = 1, \dots, f$.
- $\max, \min \lambda_i(S) =$ máximo ou mínimo autovalor da matriz $(\lambda I - S)$.
- $f =$ número de graus de liberdade.

Sabe-se, ainda, que uma matriz hermitiana real ($H = H^t$) é positiva definida, ou $H = H^t > 0$, se todos os seus autovalores $\lambda_i(H)$ são positivos e não nulos [15].

Antes de aplicar o método proposto, faz-se uma linearização do sistema com amortecimento viscoso equivalente.

5.2 Amortecimento Viscoso Equivalente

Utilizou-se o mesmo modelo 2.2 proposto no Capítulo 2, sendo que, ao invés do atrito seco, introduziu-se atrito viscoso no sistema. Este último é representado por um coeficiente de atrito viscoso f_a que multiplica as correspondentes velocidades de escorregamento resultantes nos pontos de contato A, B, C, D , da Fig.4.3.

5.2.1 Amortecimento por atrito viscoso com fixação flexível

As velocidades resultantes V'_1, V'_2, V'_3, V'_4 foram dadas no sistema de equações (4.4). Multiplicando-se estas velocidades pelo coeficiente f_a e lembrando-se que o atrito viscoso tem sinal contrário ao das mesmas, obtêm-se as equações de movimento do sistema, neste caso:

$$m\ddot{y}_w + ky_w = -2f_a(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w - \dot{y}_c) + \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \text{sen} \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (5.3)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = -2f_a(\dot{z}_w + \dot{\varphi}y_w - \dot{z}_c) - \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \text{sen} \varphi) \quad (5.4)$$

$$m_c \ddot{y}_c + k_c y_c = 2f_a(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w - \dot{y}_c) \quad (5.5)$$

$$m_c \ddot{z}_c + k_c z_c = 2f_a(\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w - \dot{z}_c) \quad (5.6)$$

$$I_p \ddot{\varphi} = T + k\epsilon(z_w \text{sen} \varphi + y_w \cos \varphi) - 2f_a(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w - \dot{y}_c)(z_w - \epsilon \cos \varphi) + 2f_a(\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w - \dot{z}_c)(y_w + \epsilon \text{sen} \varphi) \quad (5.7)$$

Linearizando-se para $T = 0$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\epsilon}{\rho^2} (z_w \operatorname{sen} \varphi + y_w \cos \varphi) \omega^2 - \frac{2f_a}{m\rho^2} (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) (z_w - \epsilon \cos \varphi) + \frac{2f_a}{m\rho^2} (\dot{y}_w + \dot{\varphi} z_w - \dot{y}_c) (y_w + \epsilon \operatorname{sen} \varphi) \quad (5.8)$$

Como ϵ , y_w , $z_w \ll \rho$, pode-se adotar aproximadamente $\ddot{\varphi} = 0$. Neste caso, $\dot{\varphi} = \Omega = \text{cte}$ e $\varphi = \Omega t + \beta$.

As equações linearizadas são:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_w + ky_w = -2f_a(\dot{y}_w + \Omega z_w - \dot{y}_c) + cm\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t \\ m\ddot{z}_w + kz_w = -2f_a(\dot{z}_w - \Omega y_w - \dot{z}_c) - cm\Omega^2 \cos \Omega t \\ m_c \ddot{y}_c + k_c y_c = 2f_a(\dot{y}_w + \Omega z_w - \dot{y}_c) \\ m_c \ddot{z}_c + k_c z_c = 2f_a(\dot{z}_w - \Omega y_w - \dot{z}_c) \end{cases} \quad (5.9)$$

Rearranjando-as:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_w + 2f_a \dot{y}_w - 2f_a \dot{y}_c + ky_w + 2f_a \Omega z_w = cm\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t \\ m_c \ddot{y}_c - 2f_a \dot{y}_w + 2f_a \dot{y}_c + k_c y_c - 2f_a \Omega z_w = 0 \\ m\ddot{z}_w + 2f_a \dot{z}_w - 2f_a \dot{z}_c + kz_w - 2f_a \Omega y_w = -cm\Omega^2 \cos \Omega t \\ m_c \ddot{z}_c - 2f_a \dot{z}_w + 2f_a \dot{z}_c + k_c z_c + 2f_a \Omega y_w = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Matricialmente, tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_w \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{z}_w \\ \ddot{z}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2f_a & -2f_a & 0 & 0 \\ -2f_a & 2f_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_a & -2f_a \\ 0 & 0 & -2f_a & 2f_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_w \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_w \\ \dot{z}_c \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k & 0 & 2f_a \Omega & 0 \\ 0 & k_c & -2f_a \Omega & 0 \\ -2f_a \Omega & 0 & k & 0 \\ 2f_a \Omega & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_w \\ y_c \\ z_w \\ z_c \end{Bmatrix} = cm\Omega^2 \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} \Omega t \\ 0 \\ -\cos \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Identificam-se, então, as matrizes, determinando os autovalores:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c \end{bmatrix} \quad \lambda_{1,2} = m \quad \lambda_{3,4} = m_c$$

$$D = D^t = \begin{bmatrix} 2f_a & -2f_a & 0 & 0 \\ -2f_a & 2f_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_a & -2f_a \\ 0 & 0 & -2f_a & 2f_a \end{bmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 2f_a \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_4 = 4f_a$$

$$(K + N) = \begin{bmatrix} k & 0 & 2f_a \Omega & 0 \\ 0 & k_c & -2f_a \Omega & 0 \\ -2f_a \Omega & 0 & k & 0 \\ 2f_a \Omega & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix}$$

É necessário aqui separarmos as matrizes K (simétrica) e N (anti-simétrica). Como toda matriz pode ser escrita como sendo a soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica, procede a solução:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 2f_a\Omega & 0 \\ 0 & k_c & -2f_a\Omega & 0 \\ -2f_a\Omega & 0 & k & 0 \\ 2f_a\Omega & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & x_1 & z_1 \\ 0 & k_c & y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & k & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 & z_2 \\ 0 & 0 & y_2 & 0 \\ x_2 & -y_2 & 0 & 0 \\ -z_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = -2f_a\Omega$
- $y_1 = y_2 = -f_a\Omega$
- $z_1 = f_a\Omega$
- $z_2 = -f_a\Omega$

Portanto,

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & f_a\Omega \\ 0 & k_c & -f_a\Omega & 0 \\ 0 & -f_a\Omega & k & 0 \\ f_a\Omega & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2f_a\Omega & -f_a\Omega \\ 0 & 0 & -f_a\Omega & 0 \\ -2f_a\Omega & f_a\Omega & 0 & 0 \\ f_a\Omega & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contudo, a matriz D possui um autovalor nulo, sendo os demais positivos. Desta forma, é uma matriz positiva semi-definida de acordo com a definição dada no item 5.1, não se enquadrando nas condições propostas pelo método em (5.2), onde as matrizes K e D devem ser positivas definidas.

Como esta é uma condição necessária e não suficiente, nada se pode afirmar quanto à estabilidade deste sistema.

Porém, realizou-se um estudo de autovalores do sistema para dois diferentes valores de rigidez tais que $\omega_c = 3\omega$ e 5ω . O cálculo foi feito por um programa já existente que pede como entrada de dados as matrizes M , $(D + G)$, $(K + N)$, nesta forma.

Considerou-se a massa do sistema adicional flexível (m_c) igual à massa do disco (m) e adotou-se o valor do coeficiente de atrito equivalente $f_a = 6,283$ (Apêndice A). As demais características do sistema são as mesmas descritas no Capítulo 3, item 3.2.1).

As Tabelas 5.1, 5.2, 5.3 contém os autovalores obtidos nos dois casos de rigidez K_c , nas proximidades da ressonância ($\omega = 125,66rd/s$).

Os dois primeiros autovalores são referentes às coordenadas do disco (y_w, z_w) enquanto que os dois últimos são referentes ao sistema adicional (y_c, z_c). O valor imaginário corresponde à parte oscilatória do movimento e o valor real, ao amortecimento. A análise é, então, feita sobre a parte real do autovalor, pois quando esta é negativa, o sistema é assintoticamente estável e quando é positiva, o sistema é instável.

$\omega_c = 3\omega = 376,98rd/s$	$\omega_c = 5\omega = 628,30rd/s$
$-6,2607 \pm 125,70i$	$-6,2591 \pm 125,67i$
$-4,155 \times 10^{-2} \pm 125,66i$	$-4,154 \times 10^{-2} \pm 125,66i$
$-3,1494 \pm 376,93i$	$-3,1497 \pm 628,27i$
$-3,1484 \pm 376,89i$	$-3,1496 \pm 628,25i$

Tabela 5.1: $\Omega = 124rd/s$ estável.

$\omega_c = 3\omega = 376,98rd/s$	$\omega_c = 5\omega = 628,30rd/s$
$-6,3022 \pm 125,70i$	$-6,3007 \pm 125,67i$
$1,5259 \times 10^{-3} \pm 125,66i$	$2,130 \times 10^{-6} \pm 125,66i$
$-3,1494 \pm 376,93i$	$-3,1498 \pm 628,27i$
$-3,1483 \pm 376,89i$	$-3,1495 \pm 628,25i$

Tabela 5.2: $\Omega = 125,66rd/s$ instável.

Das Tabelas 5.1, 5.2, 5.3 observa-se que a instabilidade surge muito tênue na velocidade crítica, acentuando-se à medida que a velocidade de rotação aumenta além da ressonância, em ambos os casos.

Verifica-se ainda que, para $\omega_c = 5\omega$, a instabilidade é menos acentuada na velocidade crítica ($\Omega = 125,66rd/s$), pois o autovalor é menos positivo neste caso.

Isto vem de encontro às conclusões anteriores de que quanto mais rígido for o sistema, melhores serão as respostas obtidas. Nota-se, ainda que o sistema adicional não é afetado nesta faixa de rotação, pois os autovalores praticamente não mudam (movimento estável).

Em seguida, o mesmo estudo será aplicado ao sistema adicional com fixação rígida, comparando-se os resultados.

5.2.2 Amortecimento por atrito viscoso com fixação rígida

Neste caso, as velocidades de escorregamento resultantes V_1, V_2, V_3, V_4 foram dadas pelo sistema de equações (4.3), sendo as equações de movimento:

$$m\ddot{y}_w + ky_w = -2f_a(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) + \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \text{sen}\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi) \quad (5.12)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = -2f_a(\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) - \epsilon m((\dot{\varphi})^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi} \text{sen}\varphi) \quad (5.13)$$

$$I_p\ddot{\varphi} = T + k\epsilon(z_w \text{sen}\varphi + y_w \cos\varphi) - 2f_a(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w)(z_w - \epsilon \cos\varphi) + 2f_a(\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w)(y_w + \epsilon \text{sen}\varphi) \quad (5.14)$$

$\omega_c = 3\omega = 376,98rd/s$	$\omega_c = 5\omega = 628,30rd/s$
$-6,3609 \pm 125,70i$	$-6,3594 \pm 125,67i$
$5,8676 \times 10^{-2} \pm 125,66i$	$5,8680 \times 10^{-2} \pm 125,66i$
$-3,1494 \pm 376,93i$	$-3,1498 \pm 628,27i$
$-3,1483 \pm 376,89i$	$-3,1496 \pm 628,25i$

Tabela 5.3: $\Omega = 128rd/s$ instável.

Fazendo $T = 0$ e desprezando-se os torques dinâmicos das forças de restituição e das forças de atrito viscoso, obtém-se as equações linearizadas:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_w + ky_w = -2f_a(\dot{y}_w + \Omega z_w) + cm\Omega^2 \text{sen}\Omega t \\ m\ddot{z}_w + kz_w = -2f_a(\dot{z}_w - \Omega y_w) - \epsilon m\Omega^2 \text{cos}\Omega t \end{cases} \quad (5.15)$$

Rearranjando as equações:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_w + 2f_a\dot{y}_w + ky_w + 2f_a\Omega z_w = cm\Omega^2 \text{sen}\Omega t \\ m\ddot{z}_w + 2f_a\dot{z}_w + kz_w - 2f_a\Omega y_w = -\epsilon m\Omega^2 \text{cos}\Omega t \end{cases} \quad (5.16)$$

Escrevendo-as matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_w \\ \ddot{z}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2f_a & 0 \\ 0 & 2f_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_w \\ \dot{z}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 2f_a\Omega \\ -2f_a\Omega & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_w \\ z_w \end{Bmatrix} = cm\Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen}\Omega t \\ -\text{cos}\Omega t \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Identifica-se, portanto, as matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2f_a & 0 \\ 0 & 2f_a \end{bmatrix} \lambda_{1,2} = 2f_a > 0$$

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \lambda_{1,2} = k > 0$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 2f_a\Omega \\ -2f_a\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

De acordo com o método descrito em 5.1 as matrizes simétricas K e D são positivas definidas: $K = K^t > 0$ e $D = D^t > 0$.

Passa-se, então, ao cálculo de d_o :

$$(\lambda I - M) = \begin{bmatrix} \lambda - m & 0 \\ 0 & \lambda - m \end{bmatrix} = (\lambda - m)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = m \quad m_{max} = m$$

$$(\lambda I - K) = \begin{bmatrix} \lambda - k & 0 \\ 0 & \lambda - k \end{bmatrix} = (\lambda - k)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = k \quad k_{min} = k$$

$$(\lambda I - iN) = \begin{bmatrix} \lambda & -2f_a\Omega i \\ 2f_a\Omega i & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4f_a^2\Omega^2 = 0 \quad \lambda_1 = 2f_a\Omega \quad \lambda_2 = -2f_a\Omega \quad n_{max} = 2f_a\Omega$$

$$d_o = \frac{n_{max}}{2k_{min}} \sqrt{4m_{max}k_{min}} \quad \text{pois } g_{max} = 0$$

$$d_o = \frac{2f_a \Omega}{2k} \sqrt{4mk} = \frac{2f_a \Omega}{\omega} \quad (5.18)$$

De acordo com o critério de estabilidade:

$$D = D^t = \begin{bmatrix} 2f_a & 0 \\ 0 & 2f_a \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \frac{2f_a \Omega}{\omega} & 0 \\ 0 & \frac{2f_a \Omega}{\omega} \end{bmatrix} = d_o I > 0$$

Portanto, para $f_a \neq 0$: $2f_a > \frac{2f_a \Omega}{\omega}$.

$$\Omega < \omega \quad (5.19)$$

Ou seja, o sistema apresenta estabilidade assintótica somente para rotações abaixo da velocidade crítica. Para $\Omega \geq \omega$, o sistema torna-se instável, conforme as Figs.5.1, 5.2, 5.3.

Para rotações abaixo da velocidade crítica (Fig.5.1) a atuação do amortecimento por atrito viscoso é praticamente desprezível do ponto de vista da amplitude de vibração, que permanece a mesma. Entretanto, a curva torna-se mais suave com o amortecimento.

Por outro lado, este mesmo atrito viscoso causa forte instabilidade no sistema quando funcionando além da ressonância (Fig.5.3).

Fez-se aqui o mesmo estudo de autovalores visto em 5.2.1 nas proximidades da ressonância (Tabela 5.4).

$\omega = 124rd/s$ estável
$-6,2584 \pm 125,66i$
$-4,1526 \times 10^{-2} \pm 125,66i$
$\omega = 125,66rd/s$ instável
$-6,3000 \pm 125,66i$
$2,8610 \times 10^{-6} \pm 125,66i$
$\Omega = 128rd/s$ instável
$-6,3587 \pm 125,66i$
$5,8661 \times 10^{-2} \pm 125,66i$

Tabela 5.4:

É interessante comparar este resultado da Tabela 5.4 com aqueles obtidos nas Tabelas 5.1, 5.2, 5.3 para $\omega_c = 5\omega$, referentes a y_w e z_w . Confirma-se, desta forma, a recomendação construtiva de $\omega_c \approx 5\omega$ para o sistema em questão, pois os autovalores são praticamente os mesmos para este caso e para o caso flexível.

5.3 Estudo de Autovalores para Sistema Não Linear com Atrito Seco

Fez-se aqui o mesmo cálculo de autovalores feito em 5.2. Porém, como as equações não são lineares, o cálculo dos autovalores foi feito ponto a ponto para valores de φ , $\dot{\varphi}$ e $F_{a,y}$. As equações (4.7), (4.8), (4.9) foram escritas matricialmente da seguinte forma:

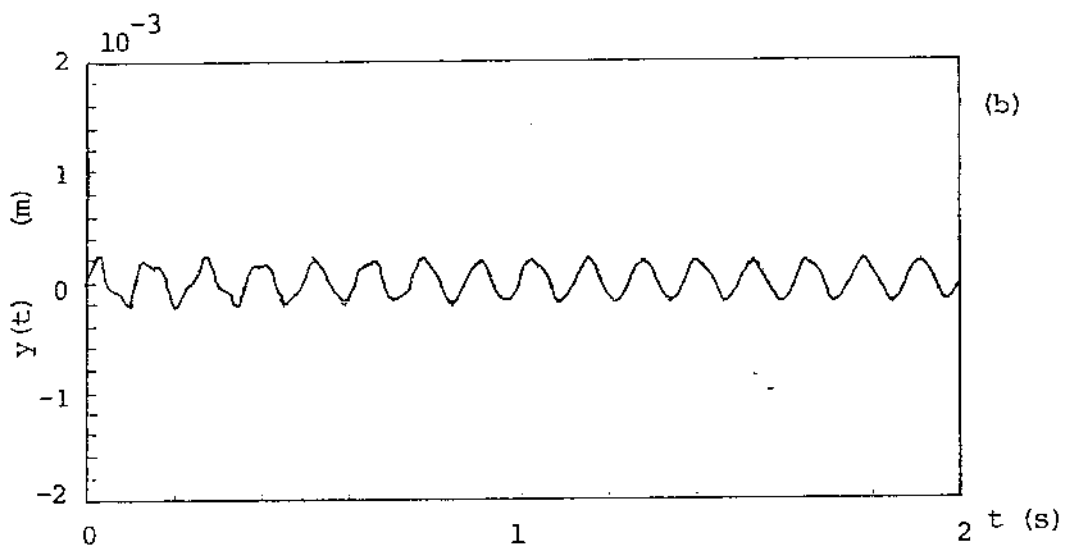
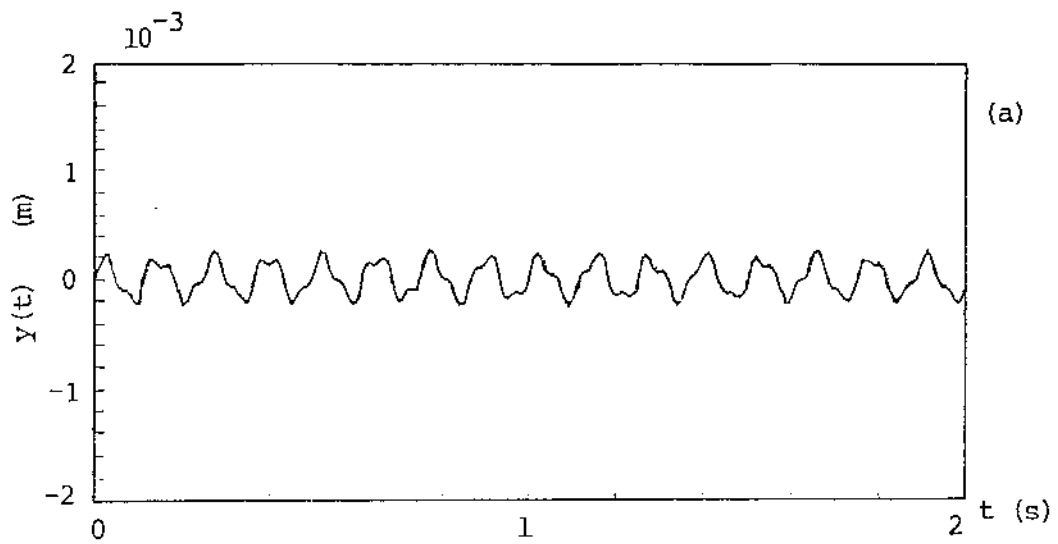


Figura 5.1: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($\omega = 50rd/s$): a) $f_a = 0$; b) $f_a = 6,283$.

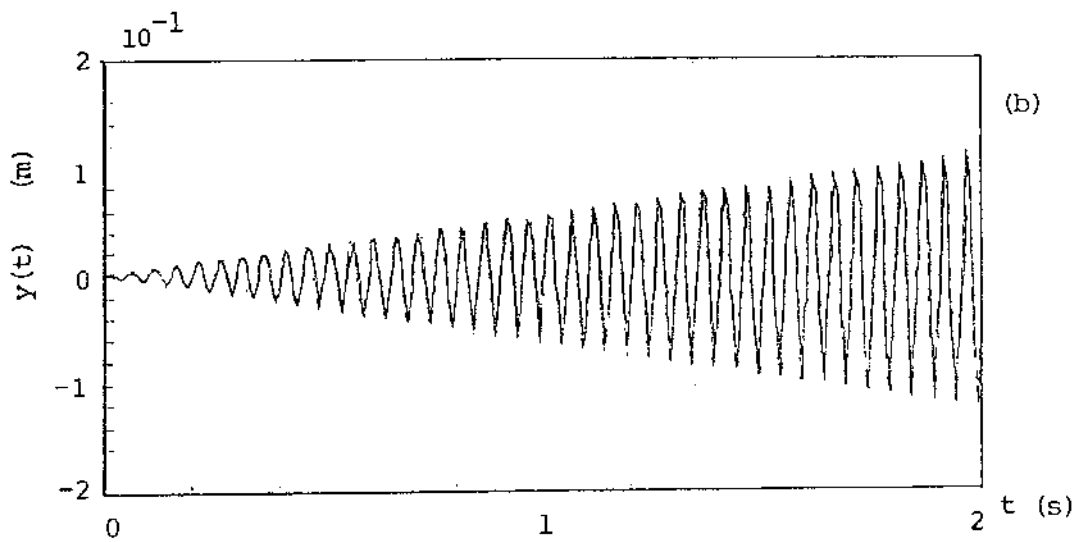
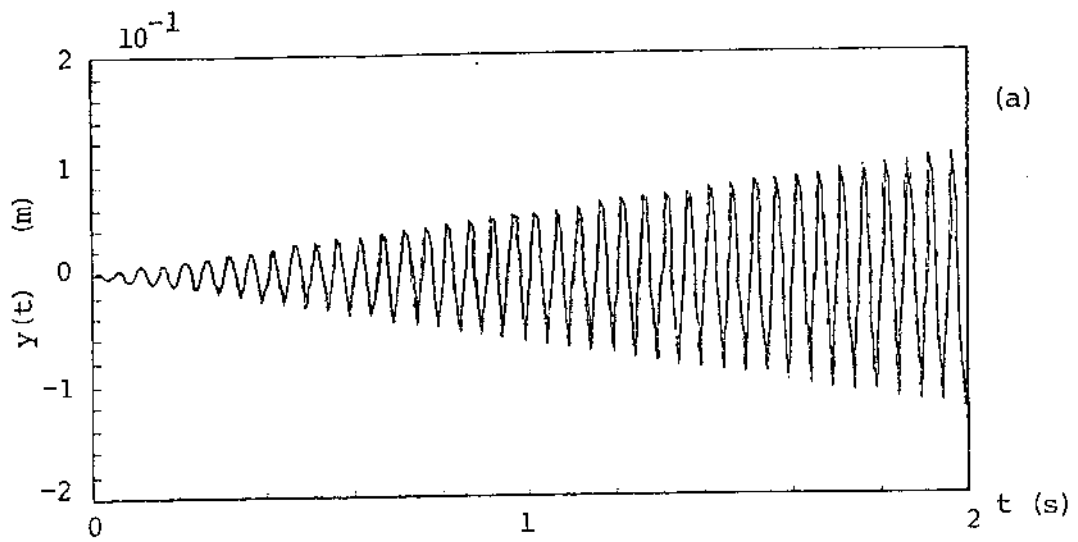


Figura 5.2: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($\omega = 125,66 \text{rd/s}$): a) $f_a = 0$; b) $f_a = 6,283$.

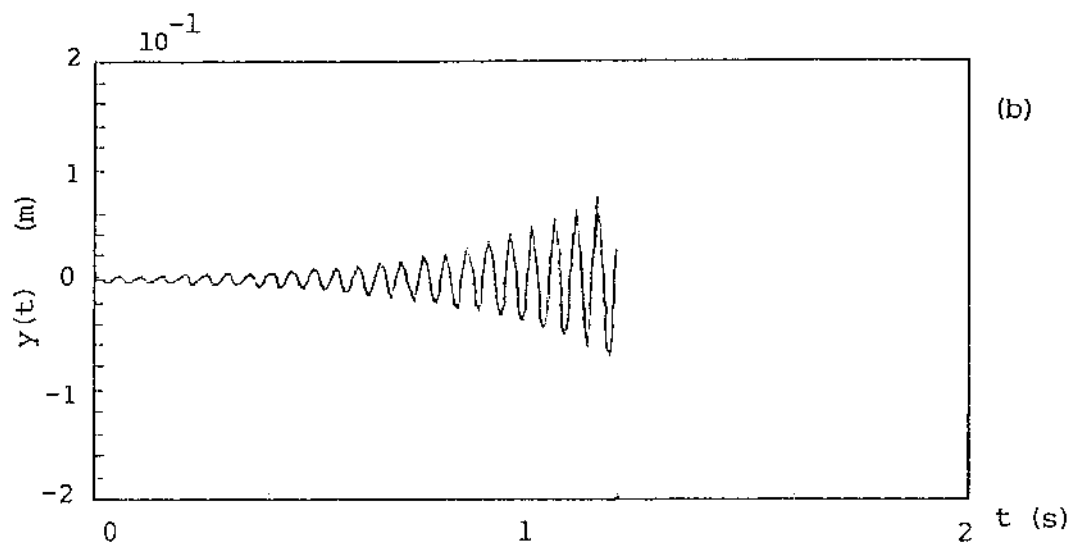
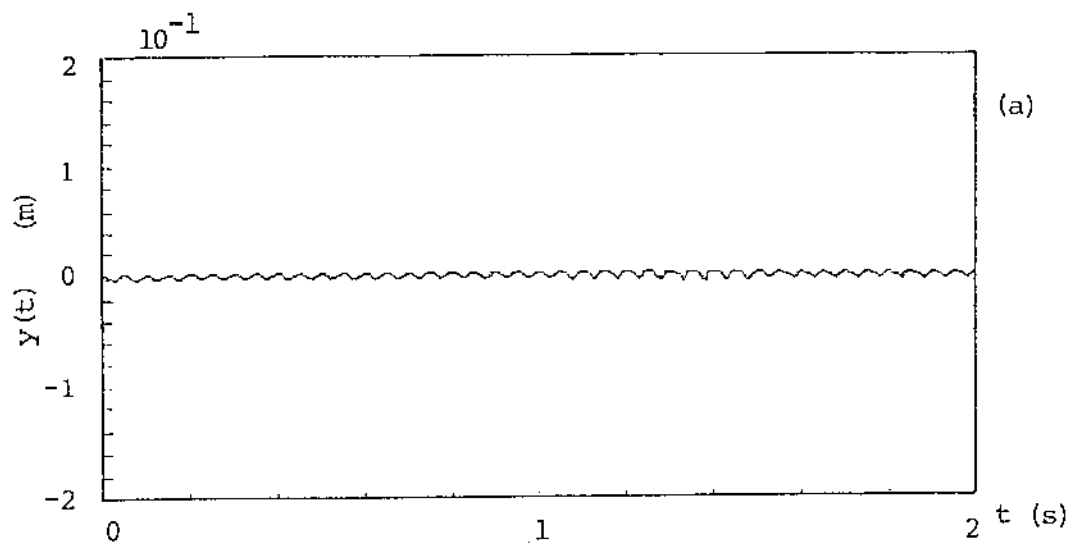


Figura 5.3: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($\omega = 250 \text{rd/s}$): a) $f_a = 0$; b) $f_a = 6,283$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & cm \cos \varphi \\ 0 & m & em \sin \varphi \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_w \\ \ddot{z}_w \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cm\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 & 0 & cm\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_w \\ \dot{z}_w \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k\epsilon \cos \varphi + 2F_{a_x} & -k\epsilon \sin \varphi - 2f_{a_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_w \\ z_w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2F_{a_y} \\ 2F_{a_x} \\ T - 2F_{a_y}\epsilon \cos \varphi - 2F_{a_x}\epsilon \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

O exemplo estudado é o referente às Fig.4.22 a 4.26 com acionamento 1,5Nm e força de atrito 12,4N. As matrizes de entrada são:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0,002 \cos \varphi \\ 0 & 2 & 0,002 \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0,0056 \end{bmatrix}$$

$$(D + G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,002\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0,002\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K + N) = \begin{bmatrix} 31580 & 0 & 0 \\ 0 & 31580 & 0 \\ -31,58 \cos \varphi + 2F_{a_x} & -31,58 \sin \varphi - 2F_{a_y} & 0 \end{bmatrix}$$

Determinam-se os autovalores atribuindo os valores das variáveis das matrizes em cada ponto integrado próximo a crítica. A tabela 5.5 mostra os resultados obtidos para os autovalores.

PONTOS	AUTOVALORES
$\varphi = 1055^\circ$	$-1,846 \times 10^{-2} \pm 125,67i$
$\dot{\varphi} = 99rd/s$	$-5,9307 \times 10^{-1} \pm 125,66i$
$F_{a_y} = -12,4N$	$3,6951 \times 10^{-2}$
$F_{a_x} = 12,4N$	0
$\varphi = 1107^\circ$	$-1,9073 \times 10^{-5} \pm 125,66i$
$\dot{\varphi} = 101,7rd/s$	$-6,2167 \times 10^{-3} \pm 125,66i$
$F_{a_y} = 12,4N$	$1,2486 \times 10^{-2}$
$F_{a_x} = -12,4N$	0
$\varphi = 1289^\circ$	$3,4034 \times 10^{-5} \pm 125,66i$
$\dot{\varphi} = 109,7rd/s$	$-6,038 \times 10^{-3} \pm 125,66i$
$F_{a_y} = 12,4N$	$1,2013 \times 10^{-2}$
$F_{a_x} = -12,4N$	0
$\varphi = 1553^\circ$	$2,2169 \times 10^{-2} \pm 125,66i$
$\dot{\varphi} = 120,4rd/s$	$4,7088 \times 10^{-6} \pm 125,66i$
$F_{a_y} = -12,4N$	$4,4324 \times 10^{-2}$
$F_{a_x} = 12,4N$	0

Tabela 5.5:

Observa-se para os dois primeiros valores referentes às coordenadas (y_w, z_w) que a instabilidade aparece, embora tênue, para uma rotação de 109rd/s, um pouco abaixo da crítica, tornando-se mais

acentuada à medida que se aproxima da ressonância ($\dot{\varphi} = 120rd/s$), pois os autovalores ficam cada vez mais positivos.

Os dois últimos autovalores correspondem ao ângulo de rotação φ , daí o fato de possuírem apenas a parte real. O autovalor nulo indicaria um modo de corpo rígido, que pode ser devido às linhas e colunas nulas nas matrizes $(D + G)$ e $(K + N)$.

No Capítulo 6, algumas considerações foram feitas para o caso de desaceleração através da ressonância, principalmente quando devido às perdas ou torque resistivo.

Capítulo 6

DESACELERAÇÃO - RESULTADOS

O problema da desaceleração de um rotor através da sua velocidade crítica tem recebido pouca atenção em vista do correspondente problema da aceleração através da ressonância.

Como as máquinas mais se danificam na tentativa de aceleração além da crítica, o que já ocorre bem menos na desaceleração, esta última tem sido de menor interesse.

Faz-se importante aqui a análise da desaceleração de um rotor devido somente à ação das perdas (equação (3.37)). Considera-se o sistema em movimento além da ressonância, assumindo-se as condições iniciais neste instante. Retira-se, então, a fonte de energia e deixa-se o sistema movimentar-se livremente. O efeito das forças resistivas faz com que a velocidade comece a decrescer, como já foi visto no Capítulo 3, item 3.3.

Alguns trabalhos anteriores [3,5,14], mostram que na desaceleração através da ressonância a amplitude de vibração está associada à variação da velocidade angular da mesma maneira que na aceleração. Desta forma, a amplitude aumenta quando a rotação é igual à velocidade crítica, atingindo um valor máximo. Quando a velocidade cai abaixo da crítica, o sistema continua vibrando com uma amplitude um pouco inferior ao valor máximo atingido. As Figs.6.1, 6.2, 6.3 mostram o comportamento do mesmo sistema estudado até aqui, não linear e não amortecido, quando sujeito à ação das perdas (torque resistivo) e também para o caso de uma desaceleração de $-0,6Nm$ a fim de facilitar a visualização do fenômeno.

No caso b) a passagem pela ressonância ocorre em menor intervalo de tempo que no caso acelerado ($T = 0,6Nm$) das Figs. 3.14, 3.15, 3.16. A velocidade de rotação permanece menos tempo na ressonância (Fig.6.1b), o que não dá tempo ao sistema para aumentar muito sua amplitude de vibração (Fig.6.2b). Neste caso, a amplitude máxima de vibração para desaceleração de $-0,6Nm$ é menor que para aceleração.

Entretanto, o torque resistivo é, na maioria das vezes, tão pequeno que o sistema pode ser considerado operando em estado de equilíbrio dinâmico em todas as velocidades, ou seja, o rotor desacelera lentamente através de estados de equilíbrio sucessivos. A importância deste estudo infinitamente lento é devido à dificuldade prática de realizá-lo em curto intervalo de tempo.

Bodger [3] desenvolveu uma análise baseando-se em que a qualquer instante a energia total do sistema é a soma das energias cinética e potencial de um rotor flexível desbalanceado em rotação.

Assumiu-se o sistema como linear com amortecimento viscoso (c/m).

Tem-se as já conhecidas equações semelhantes às do Capítulo 5:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_w + c\dot{y}_w + ky_w = mc\Omega^2 \text{sen}\Omega t \\ m\ddot{z}_w + c\dot{z}_w + kz_w = -mc\Omega^2 \text{cos}\Omega t \end{cases} \quad (6.1)$$

Analisou-se a direção z , pois y é análoga.

A solução particular da equação, no equilíbrio, é:

$$z_w = \frac{\epsilon\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 - (2\xi\eta)^2}} \quad (6.2)$$

onde:

- $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ = razão de velocidades.
- ω = velocidade crítica.
- ϵ = excentricidade.
- ξ = fator de amortecimento viscoso.

Fazendo-se $\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 - (2\xi\eta)^2}}$ vem:

$$z_w = \mu\epsilon\eta^2 \quad (6.3)$$

A energia total do sistema, segundo Bodger:

$$\begin{aligned} E_t &= \underbrace{\frac{1}{2}J_p\Omega^2}_{\text{energia de rotação}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}m(\bar{\epsilon} + z_w)^2\Omega^2}_{\text{energia adicional de rotação devido ao desbalanceamento}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}kz_w^2}_{\text{energia potencial de deformação}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

O caso não amortecido pode ser analisado fazendo-se $\xi = 0$ em (6.3).

Bodger obteve, após alguns artifícios matemáticos, uma expressão para energia total adimensional em função da razão η .

De acordo com a Fig.6.4, a energia decresce com a queda da velocidade, aumentando na ressonância, para depois decrescer novamente. Não há energia suficiente no sistema para provocar uma grande amplitude de vibração, enquanto mantendo a velocidade crítica. Daí porque a amplitude máxima de vibração na desaceleração por torque resistivo (Fig.6.2a) não é maior que no caso da passagem lenta ou aceleração com torque mínimo através da ressonância (Fig.3.15).

Quando atrito seco é introduzido no sistema, no caso da desaceleração devido às perdas, ocorre uma melhora nos resultados simulados, pois a velocidade cai mais rapidamente (Fig.6.5) e a amplitude máxima de vibração é menor, sendo que seu valor vai decrescendo continuamente (Fig.6.6). Neste caso, a força de atrito aplicada foi de 12,4N a uma velocidade inicial de 140rd/s.

No Capítulo 7 desenvolveu-se o estudo de uma variante do modelo 2.2, girando-se os roletes de um ângulo α e verificando-se problemas de alinhamento dos roletes sobre o eixo em que atuam, bem como a influência da distância dos pontos de contato ao centro do disco no comportamento geral do sistema.

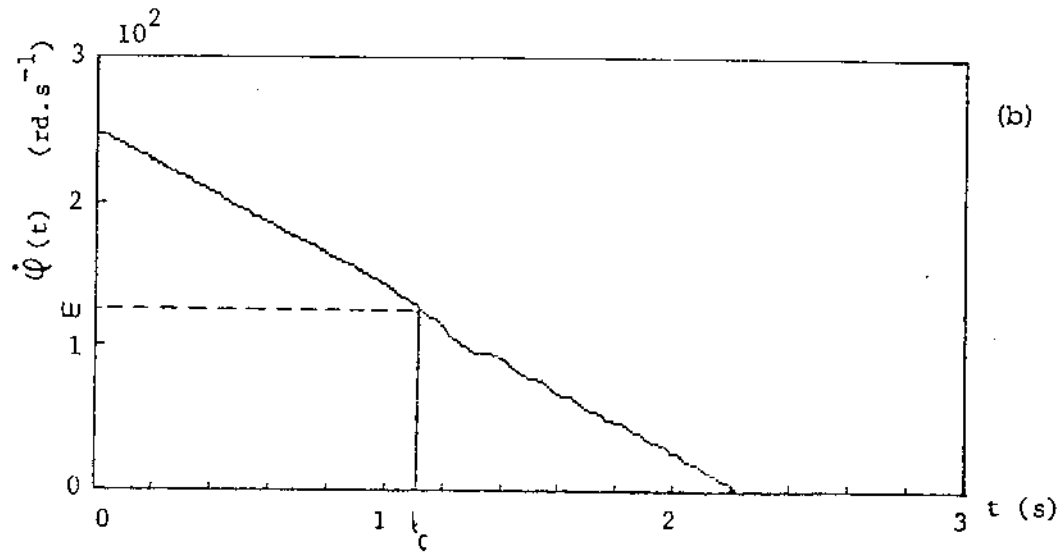
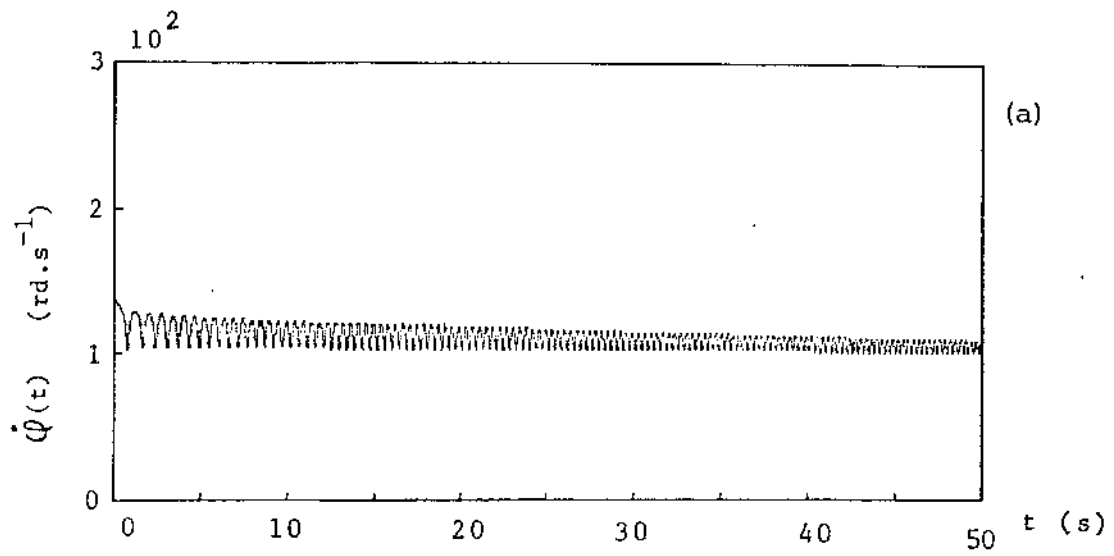


Figura 6.1: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t)$ x tempo: a) torque resistivo ($\dot{\varphi}_0 = 140\text{rd/s}$); b) $T = -0,6\text{Nm}$ ($\dot{\varphi}_0 = 250\text{rd/s}$).

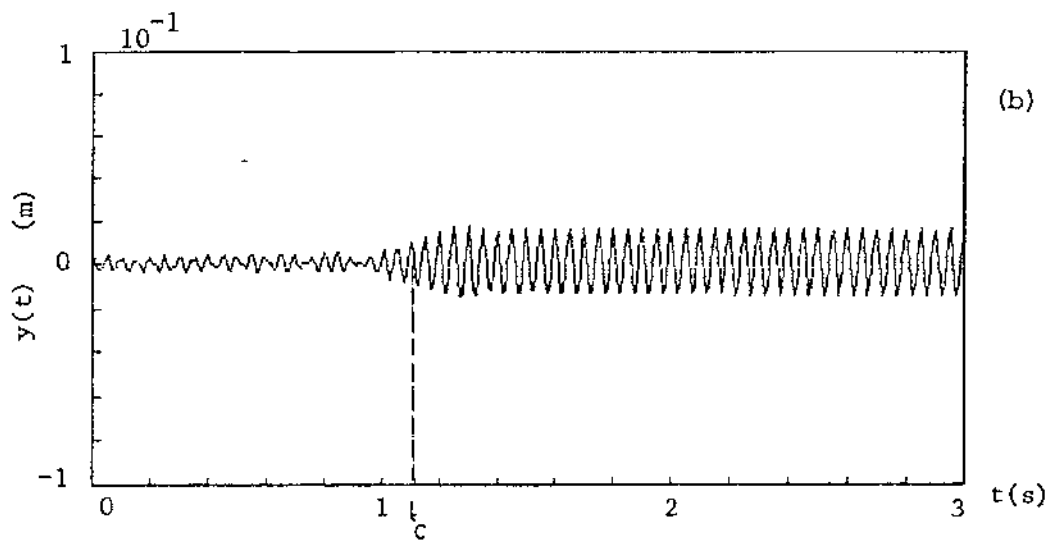
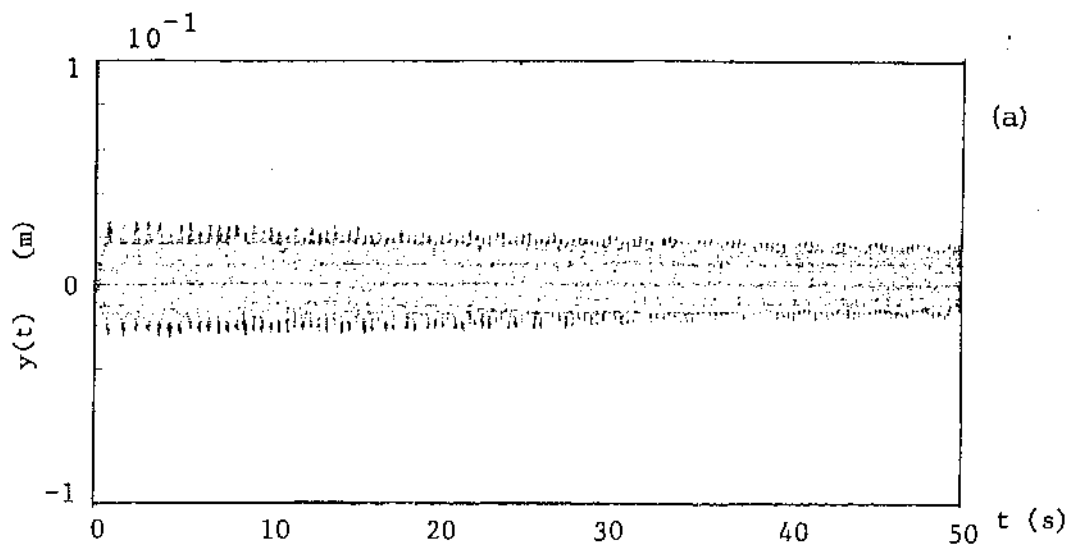


Figura 6.2: Deslocamento $y(t)$ \times tempo: a) torque resistivo; b) $T = -0,6 Nm$.

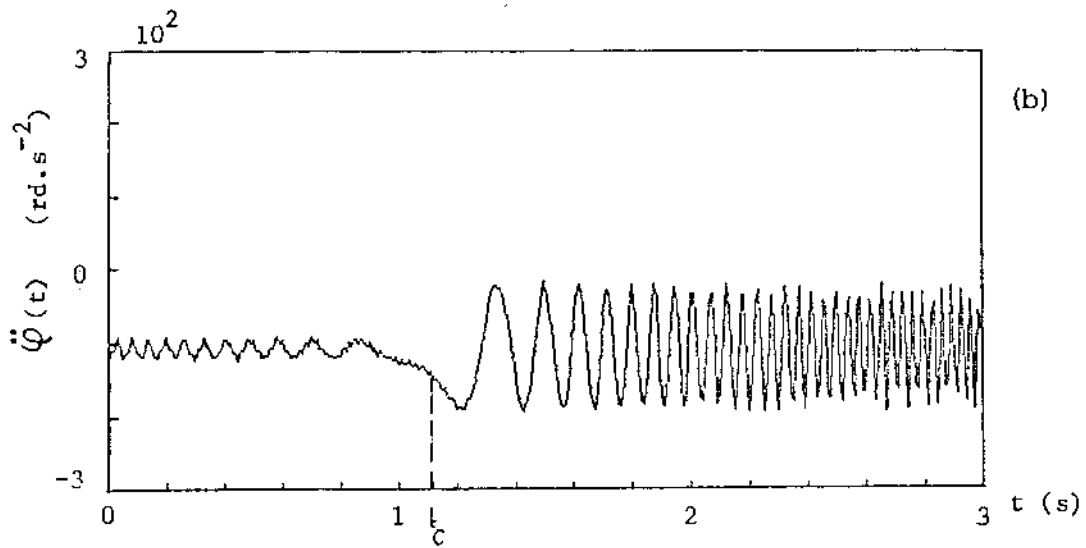
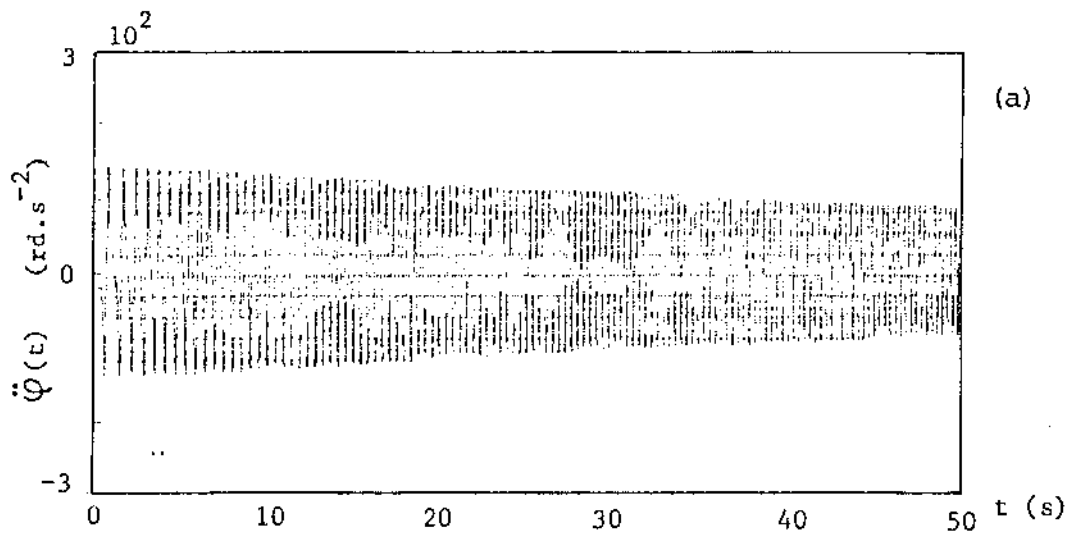


Figura 6.3: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo: a) torque resistivo; b) $T = -0,6 \text{ Nm}$.

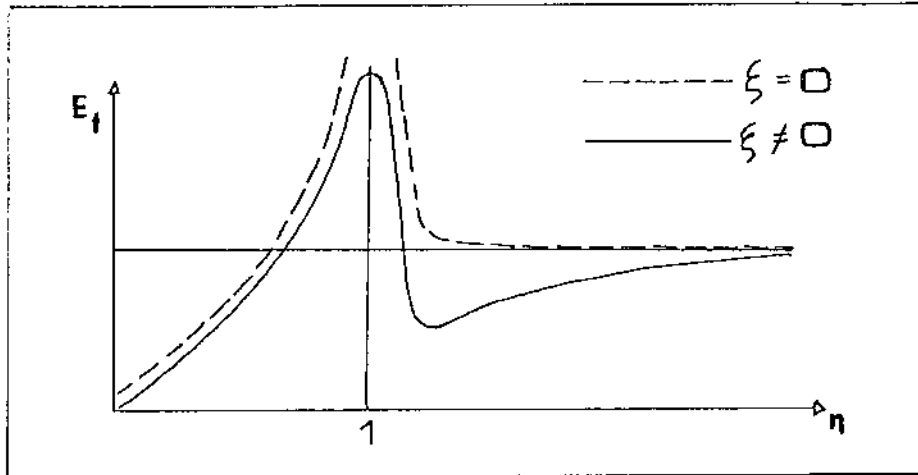


Figura 6.4: Energia total \times razão de velocidade de rotação.

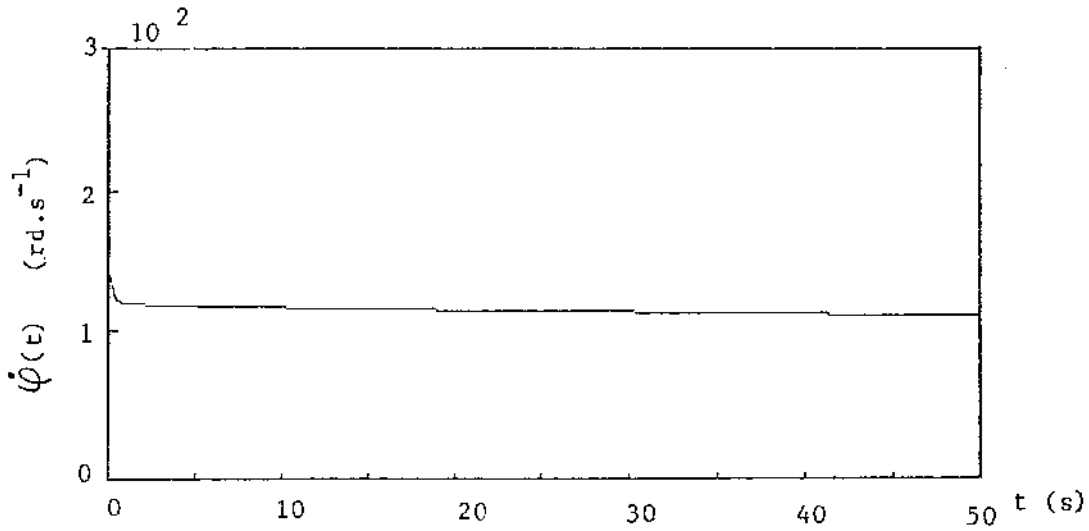


Figura 6.5: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t)$ \times tempo.

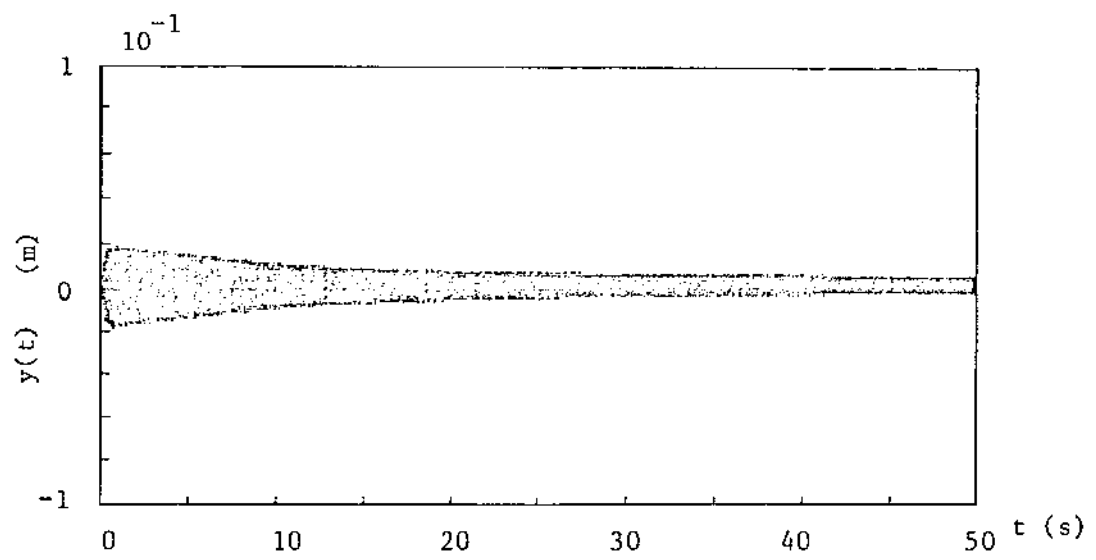


Figura 6.6: Deslocamento $y(t)$ \times tempo.

Capítulo 7

DISPOSITIVO AUXILIAR COM OS ROLETES INCLINADOS

Este estudo foi desenvolvido baseado na Fig.2.3, na tentativa de minimizar o efeito dos termos $2f_a\Omega z_w$, $2f_a\Omega y_w$ na matriz N assimétrica, estudada no Capítulo 5.

Os roletes sofrem um giro α , sendo então suas coordenadas (y', z') conforme Fig.7.1.

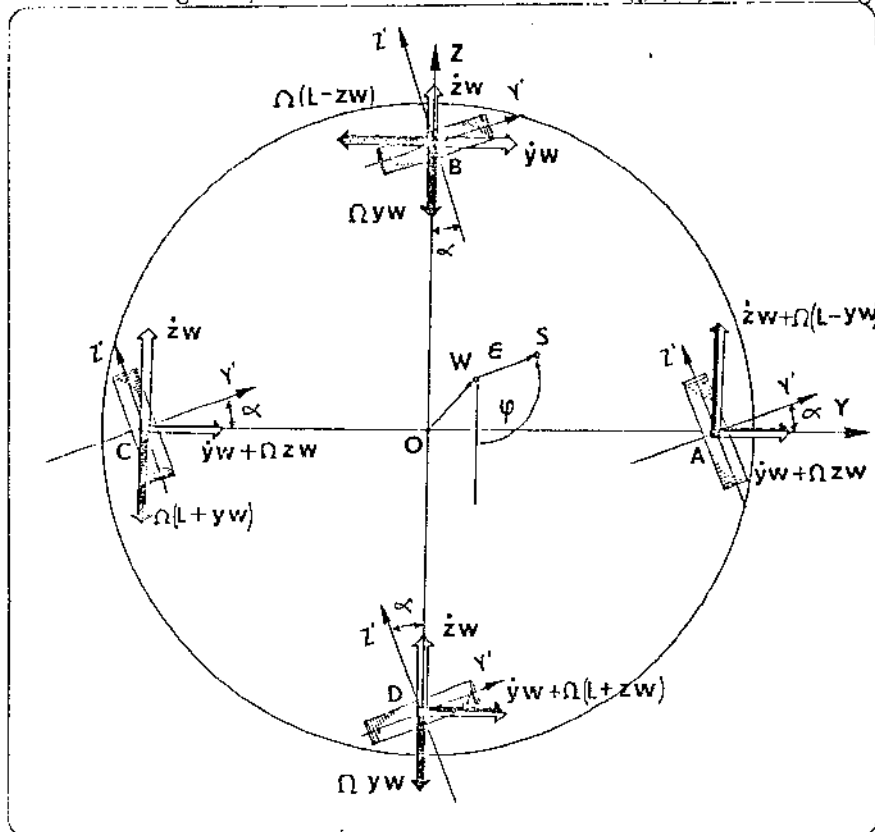


Figura 7.1: Esquema para roletes inclinados - velocidades resultantes.

As novas velocidades de escorregamento resultantes serão as respectivas projeções daquelas vistas no Capítulo 4 (Fig.4.3).

Escreve-se a matriz de rotação R dos eixos (y, z) para (y', z') .

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

As velocidades resultantes nas coordenadas (y', z') são obtidas multiplicando-se matricialmente a matriz de rotação pelas velocidades resultantes em (y, z) dadas pela equações (4.3). Por exemplo, para o ponto A :

$$V_{G1} = R \cdot V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \\ (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w)) \end{Bmatrix}$$

$$V_{G1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \cos \alpha + (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w)) \text{sen} \alpha \\ -(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \text{sen} \alpha + (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w)) \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

Analogamente, para os pontos B, C, D :

$$\begin{aligned} V_{G1} &= [(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \cos \alpha + (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w)) \text{sen} \alpha] \hat{e}_{y'} + \\ &\quad [-(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \text{sen} \alpha + (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w)) \cos \alpha] \hat{e}_{z'} \\ V_{G2} &= [(\dot{y}_w - \dot{\varphi}(L - z_w)) \cos \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) \text{sen} \alpha] \hat{e}_{y'} + \\ &\quad [-(\dot{y}_w - \dot{\varphi}(L - z_w)) \text{sen} \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) \cos \alpha] \hat{e}_{z'} \\ V_{G3} &= [(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \cos \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}(L + y_w)) \text{sen} \alpha] \hat{e}_{y'} + \\ &\quad [-(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \text{sen} \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}(L + y_w)) \cos \alpha] \hat{e}_{z'} \\ V_{G4} &= [(\dot{y}_w + \dot{\varphi}(L + z_w)) \cos \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) \text{sen} \alpha] \hat{e}_{y'} + \\ &\quad [-(\dot{y}_w + \dot{\varphi}(L + z_w)) \text{sen} \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) \cos \alpha] \hat{e}_{z'} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Para os pontos A e C , o sinal da força de atrito na direção y' será dado pelas componentes de V_{G1} e V_{G3} em $\hat{e}_{y'}$.

Ponto A :

$$[(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \cos \alpha + (\dot{z}_w + \dot{\varphi}(L - y_w)) \text{sen} \alpha] \begin{cases} < 0 & F_{ay'_1} > 0 \\ = 0 & F_{ay'_1} = 0 \\ > 0 & F_{ay'_1} < 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Ponto C :

$$[(\dot{y}_w + \dot{\varphi}z_w) \cos \alpha + (\dot{z}_w - \dot{\varphi}(L + y_w)) \text{sen} \alpha] \begin{cases} < 0 & F_{ay'_3} > 0 \\ = 0 & F_{ay'_3} = 0 \\ > 0 & F_{ay'_3} < 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Nos pontos de contato B e D (V_{G2} e V_{G4}), utilizaram-se as componentes em $\hat{e}_{z'}$.

Ponto B :

$$[(\dot{z}_w + \dot{\varphi}y_w) \cos \alpha - (\dot{y}_w - \dot{\varphi}(L - z_w)) \text{sen} \alpha] \begin{cases} < 0 & F_{az'_2} > 0 \\ = 0 & F_{az'_2} = 0 \\ > 0 & F_{az'_2} < 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Ponto *D*:

$$[(\dot{z}_w - \dot{\varphi}y_w) \cos \alpha - (\dot{y}_w + \dot{\varphi}(L + z_w)) \text{sen} \alpha] \begin{cases} < 0 & F_{az'_4} > 0 \\ = 0 & F_{az'_4} = 0 \\ > 0 & F_{az'_4} < 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Contudo, as forças de atrito geradas neste caso atuam nas direções (y', z') . Como as equações de movimento estão escritas nas coordenadas (y, z) é necessário reverter as forças de atrito para estas direções a fim de introduzi-las nas equações de movimento. Para tanto utiliza-se a inversa da matriz de rotação R^{-1} .

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = R^{-1} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

onde:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Aplicando-se a equação (7.8) para os casos (7.4) a (7.7) vem:

$$F_{ay_{1,3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ay'_{1,3}} \\ 0 \end{Bmatrix} = F_{ay'_{1,3}} \cos \alpha \hat{e}_y + F_{ay'_{1,3}} \text{sen} \alpha \hat{e}_z \quad (7.9)$$

$$F_{az_{2,4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{az'_{2,4}} \end{Bmatrix} = -F_{az'_{2,4}} \text{sen} \alpha \hat{e}_y + F_{az'_{2,4}} \cos \alpha \hat{e}_z \quad (7.10)$$

As equações (3.5) e (3.6) tornam-se:

$$m\ddot{y}_w + ky_w = (F_{ay'_1} + F_{ay'_3}) \cos \alpha - (F_{az'_2} + F_{az'_4}) \text{sen} \alpha + cm((\dot{\varphi})^2 \text{sen} \alpha - \ddot{\varphi} \cos \alpha) \quad (7.11)$$

$$m\ddot{z}_w + kz_w = (F_{ay'_1} + F_{ay'_3}) \text{sen} \alpha + (F_{az'_2} + F_{az'_4}) \cos \alpha - cm((\dot{\varphi})^2 \cos \alpha - \ddot{\varphi} \text{sen} \alpha) \quad (7.12)$$

A equação de momento é bem mais complexa. Chamou-se T_i $i = 1 \dots 4$, o momento para cada ponto de contato *A*, *B*, *C*, *D*, respectivamente.

$$T_i = r_{Si} \times F_{ai} \quad (7.13)$$

onde: r_{Si} = distância do ponto *S* aos pontos de contato *A*, *B*, *C*, *D* (análogo às equações (4.2)).

Para o ponto *A*:

$$T_1 = r_{S1} \times F_{ay'_1} = \det \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & (L - y_S) & -z_S \\ 0 & F_{ay'_1} \cos \alpha & F_{ay'_1} \text{sen} \alpha \end{bmatrix} = [F_{ay'_1} \text{sen} \alpha (L - y_S) + F_{ay'_1} \cos \alpha z_S] \hat{e}_x$$

Analogamente para B, C, D :

$$\begin{aligned} T_2 &= [-F_{az'_2} \cos \alpha y_S + F_{az'_2} \operatorname{sen} \alpha (L - z_S)] \hat{e}_x \\ T_3 &= [-F_{ay'_3} \operatorname{sen} \alpha (L + y_S) + F_{ay'_3} \cos \alpha z_S] \hat{e}_x \\ T_4 &= [-F_{az'_4} \cos \alpha y_S - F_{az'_4} \operatorname{sen} \alpha (L + z_S)] \hat{e}_x \end{aligned} \quad (7.14)$$

Somando-se os momentos T_1, T_2, T_3, T_4 e acrescentando-os ao lado esquerdo da equação (3.7):

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\varphi} &= T + [(F_{ay'_1} + F_{ay'_3}) \cos \alpha - (F_{az'_2} + F_{az'_4}) \operatorname{sen} \alpha] z_S \\ &\quad - [(F_{az'_2} + F_{az'_4}) \cos \alpha - (F_{ay'_1} + F_{ay'_3}) \operatorname{sen} \alpha] y_S \\ &\quad + (F_{ay'_1} - F_{ay'_3} + F_{az'_2} - F_{az'_4}) L \operatorname{sen} \alpha \\ &\quad + ck(z_w \operatorname{sen} \varphi + y_w \cos \varphi) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Nota-se das equações (7.11), (7.12) e (7.15) que quando as forças de atrito em y' ou em z' apresentarem sinais diferentes ($F_{ay'_1} = -F_{ay'_3}$ ou $F_{az'_2} = -F_{az'_4}$) desaparece o atrito seco nas direções y e z , respectivamente, sendo que na equação de momento somente atua a parcela que multiplica a distância L . Já para forças com o mesmo sinal ($F_{ay'_1} = F_{ay'_3}$ ou $F_{az'_2} = F_{az'_4}$), o único termo que é eliminado é justo aquele dependente de L . Seguindo adiante, as equações (7.11), (7.12), (7.15) são igualmente integradas pelo método Shampine-Gordon, observando-se uma dependência do sinal das forças em y' e z' com relação ao ângulo α .

7.1 Resultados Obtidos

Inicialmente, para o mesmo exemplo das Figs.4.22 a 4.26 ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$) com fixação rígida, adotou-se uma distância $L = 5cm$ para rotações $\alpha = 1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$.

À medida que o ângulo de inclinação dos roletes aumenta ocorre um atraso na instabilidade do movimento conforme Figs.7.3. Em $\alpha = 10^\circ$, o sistema já não é mais instável dentro da faixa de tempo simulada. Nota-se também que a instabilidade é mais intensa (amplitudes maiores) quanto menor é o ângulo α . Porém, no caso da velocidade de rotação (Figs.7.2) nota-se que até certo ponto a aceleração aumenta com o ângulo α , pois a velocidade de rotação atinge valores mais altos.

Para ângulos mais elevados ($\alpha = 20^\circ$) apesar do sistema não ser instável, a aceleração piora, pois a velocidade de rotação atinge valores menores dentro do período considerado (Fig.7.2d). Uma explicação para este comportamento foi que durante a simulação notou-se que quando se inclinam os roletes, as forças de atrito em y e z passam a ter sinais opostos, anulando-se em y e z durante um certo intervalo de tempo que se torna cada vez maior com o aumento de α . Por exemplo, na Fig.7.3a as forças de atrito se anulam até $\dot{\varphi} \approx 127rd/s$. A partir deste valor elas apresentam o mesmo sinal, e o movimento passa a ser instável. Na Fig.7.3b estas forças se anulam até $\dot{\varphi} \approx 215rd/s$, passando o movimento a ser instável a partir de então. Daí o atraso de instabilidade com o aumento de α . Por outro lado, para $\alpha = 20^\circ$ nota-se que a aceleração do sistema é pior que para $\alpha = 10^\circ$.

Uma vez que nos dois casos o efeito de atrito seco se anula durante todo o percurso, analisa-se o termo em L da equação (7.15) de momento. Como este termo multiplica $\operatorname{sen} \alpha$, quanto maior o ângulo de inclinação, maiores serão os binários correspondentes na direção do torque de acionamento, sendo neste caso em sentido contrário ao mesmo, desacelerando ainda mais o sistema (Fig.7.2c e d). Ou seja, apesar de afastar as instabilidades, a inclinação dos roletes prejudica a atuação do atrito seco como o amortecedor de vibrações uma vez que este se anula num certo intervalo dependente de α .

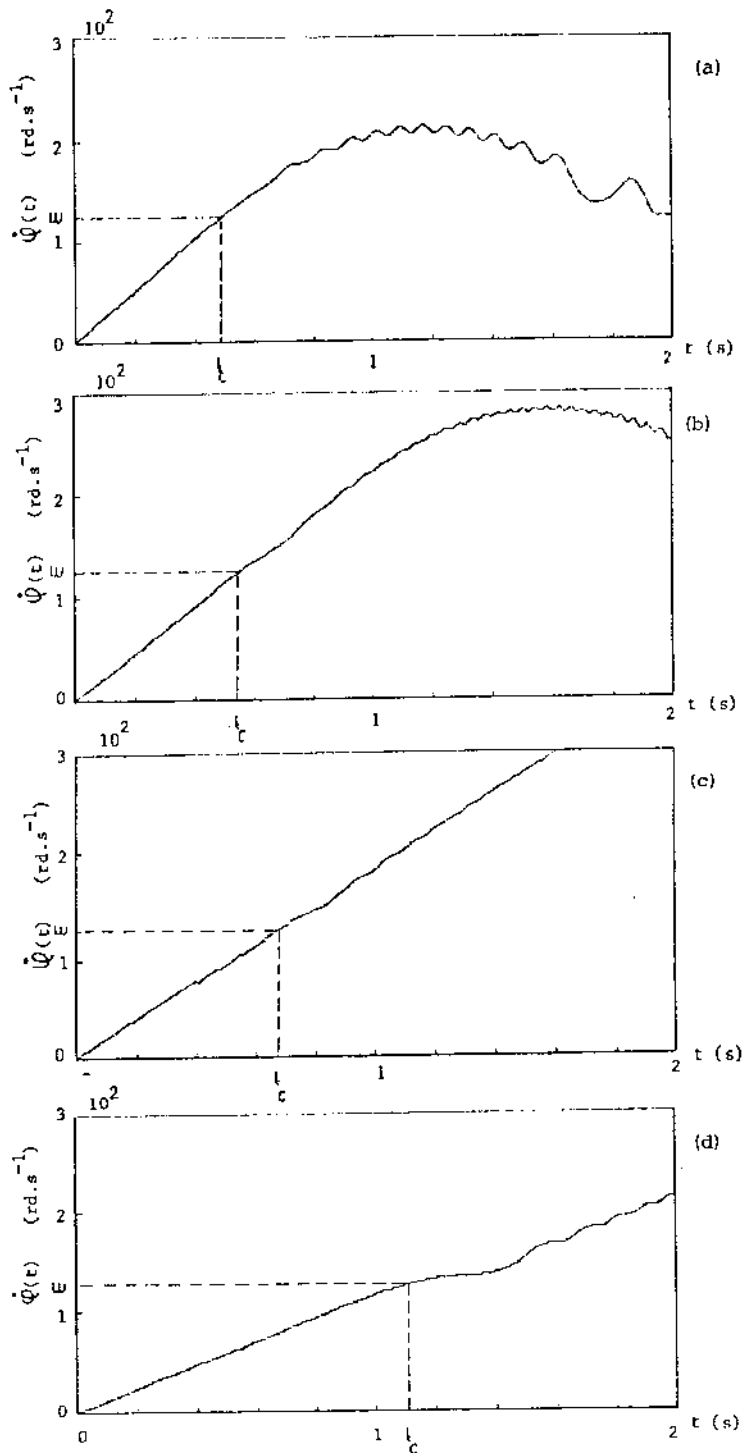


Figura 7.2: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo: a) $\alpha = 1^\circ$; b) $\alpha = 5^\circ$; c) $\alpha = 10^\circ$; d) $\alpha = 20^\circ$.

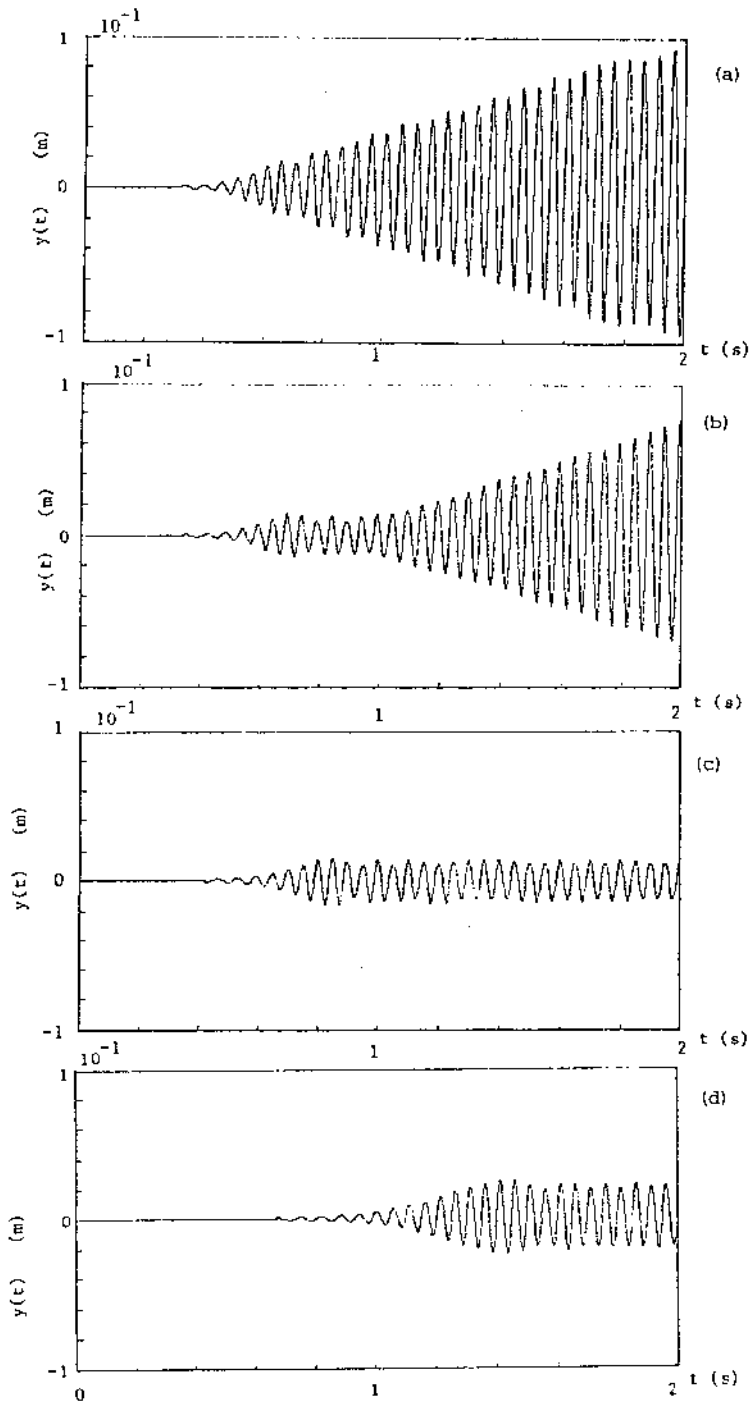


Figura 7.3: Deslocamento $y(t) \times$ tempo: a) $\alpha = 1^\circ$; b) $\alpha = 5^\circ$; c) $\alpha = 10^\circ$; d) $\alpha = 20^\circ$.

Surge daí uma outra questão: deve haver uma inclinação máxima permissível na montagem dos roletes de forma a não prejudicar a atuação dos mesmos como amortecedor, isto é, um valor máximo de α cuja resposta do sistema seja semelhante àquelas do Capítulo 4.

Para o exemplo em questão este ângulo é de $2,4'$, variando de acordo com os demais parâmetros do sistema (Figs.7.4 e 7.5). Neste caso, o atrito foi desacoplado a $140rd/s$ (comparar Figs.4.35b e 4.36b).

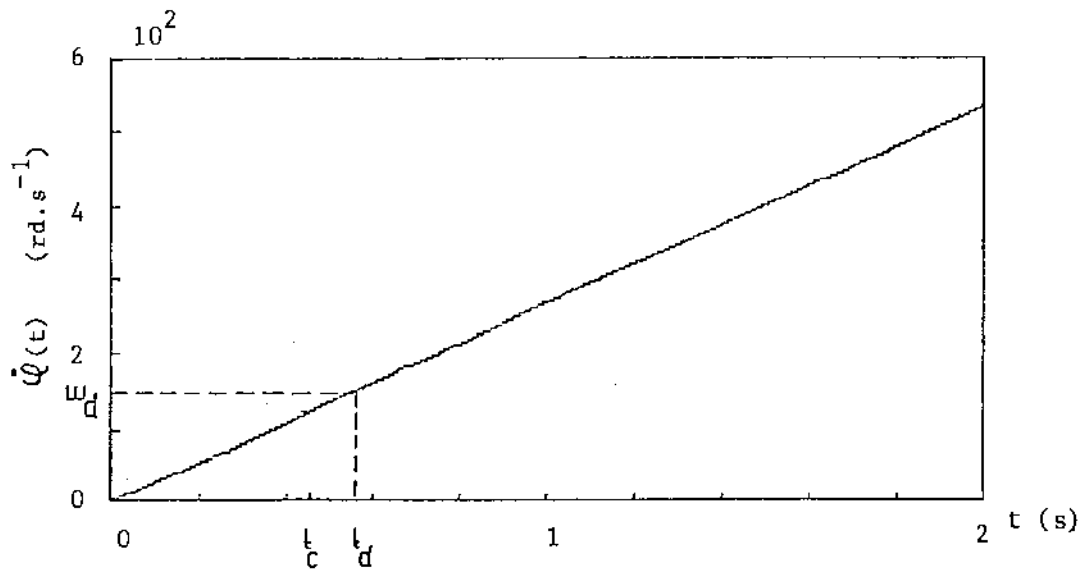


Figura 7.4: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times \text{tempo} (\alpha_{max} = 2,4', L = 5cm)$.

Um parâmetro geométrico que afeta diretamente este valor máximo de α é a distância L , ou raio da circunferência sobre a qual estão os pontos de contato dos roletes.

Para as mesmas condições de acionamento e atrito anteriores ($T = 1,5Nm$ e $F_a = 12,4N$) adotou-se uma distância $L = 2,5cm$ para $\alpha = 5^\circ$.

Nota-se que quanto mais próximos do centro O estiverem os roletes ou, quanto menor a distância L , menor será o atraso da instabilidade (Figs.7.3b e 7.6). Desta forma, o desvio máximo permitido é também maior que para $L = 5cm$, sendo neste caso $\alpha_{max} = 4,8'$. Na Fig.7.7 o sistema adicional também foi desacoplado a $140rd/s$.

Observou-se das simulações que, reduzindo o torque de acionamento e mantendo a força de atrito, ou o inverso, mantendo o mesmo acionamento e aumentando o valor do atrito, as condições de alinhamento dos roletes tornam-se mais rígidas, isto é, o desvio máximo permitido é cada vez menor.

De forma a não se obter um futuro modelo experimental muito caro, se aconselharia inicialmente que a montagem dos roletes sobre o disco fosse a mais próxima possível do eixo do rotor, pois quanto menor esta distância mais folga se tem para um possível desvio α dos roletes.

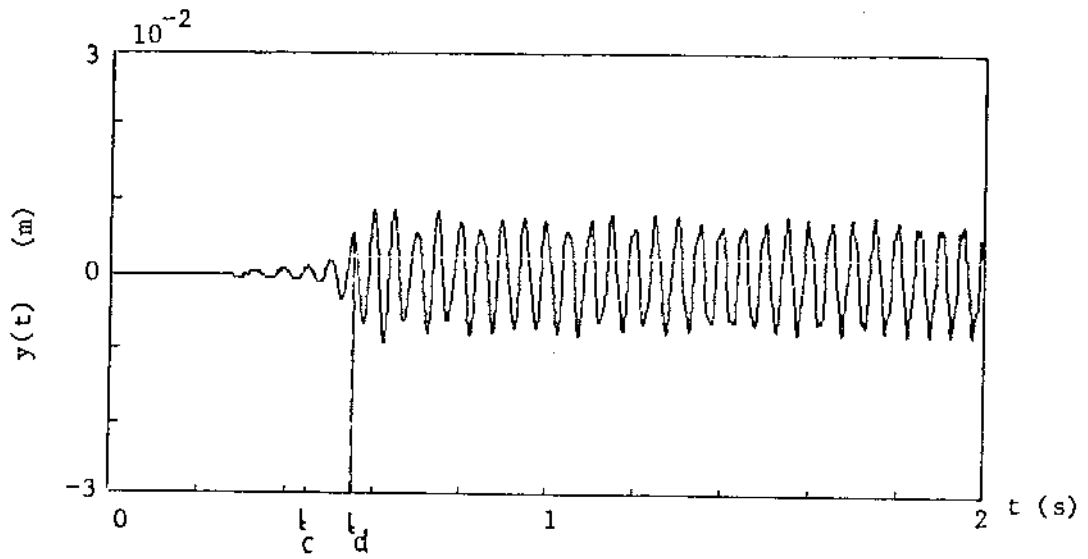


Figura 7.5: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($\alpha_{max} = 2,4'$, $L = 5cm$).

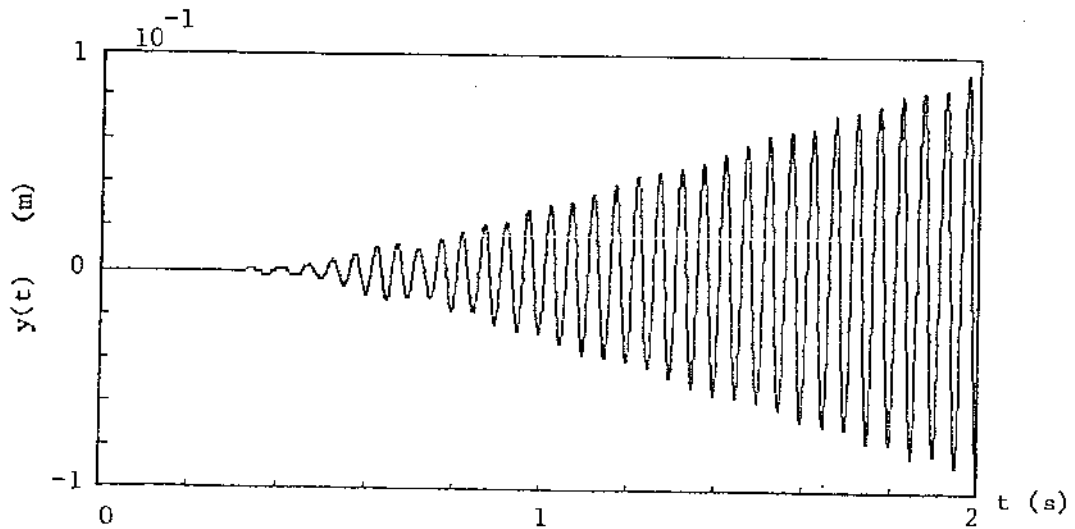


Figura 7.6: Deslocamento $y(t) \times$ tempo.

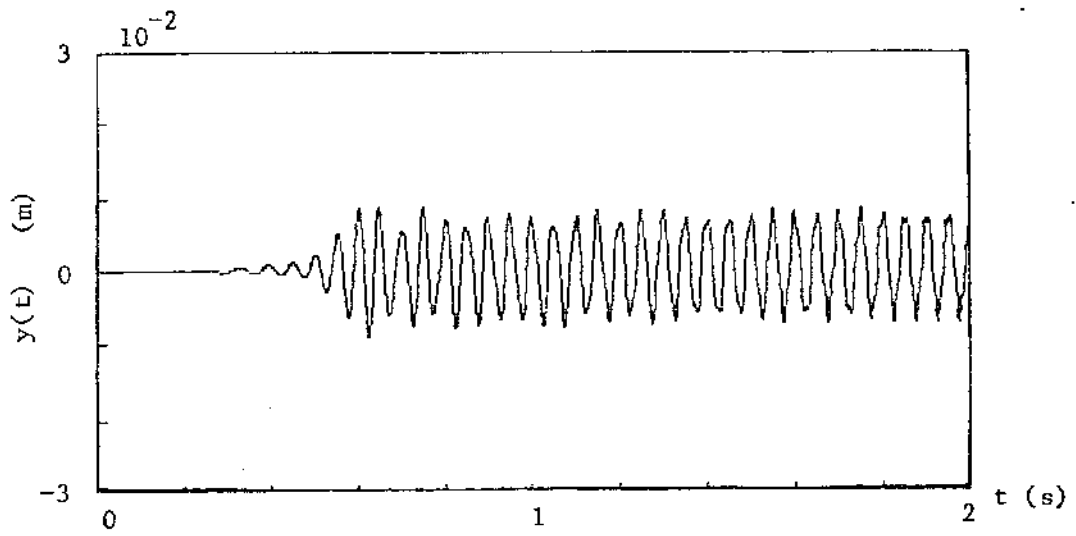


Figura 7.7: Deslocamento $y(t) \times$ tempo ($\alpha_{max} = 4,8'$, $L = 2,5cm$).

Capítulo 8

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Apesar de não se ter alcançado um nível excepcional de redução de amplitude na ressonância, o resultado obtido de uma redução de 50% na amplitude é bem razoável, podendo evitar uma colisão do rotor no caso de este estar envolvido por uma superfície externa limitante.

Para o caso estudado, fica a recomendação para rigidez k_c do mecanismo auxiliar tal que $\omega_c = 5\omega$. Além disso, para futuras realizações experimentais, aconselha-se que a montagem dos roletes seja a mais próxima possível do eixo, com a devida precisão no alinhamento dos mesmos.

Prosseguindo com os estudos, torna-se necessário aplicar o método a sistemas com características diversas de forma a verificar qualquer tipo de padrão se for o caso, seja no nível de amortecimento, nas recomendações construtivas etc.

Além disso, antes de considerar possíveis aplicações, vê-se a necessidade de uma realização experimental de forma a observar os fenômenos estudados, bem como verificar a compatibilidade teórica e prática dos resultados.

Apêndice A

AMORTECIMENTO EQUIVALENTE

A.1 Amortecimento Viscoso

A influência principal do amortecimento nos sistemas oscilatórios é a de limitar a amplitude de resposta na ressonância, sabendo-se que este tem pequena influência nas regiões afastadas da ressonância.

No caso de se aplicar amortecimento viscoso num Rotor Laval, obtém-se as equações linearizadas para $T = 0$:

$$m\dot{y}\omega + c\dot{y}\omega + ky\omega = \epsilon m\Omega^2 \text{sen}\Omega t \quad (\text{A.1})$$

$$m\ddot{z}\omega + c\dot{z}\omega + kz\omega = -\epsilon m\Omega^2 \text{cos}\Omega t \quad (\text{A.2})$$

Como tais equações são desacopladas, apresenta-se aqui a solução para a equação (A.1), sendo análoga a solução da equação (A.2):

Considerando-se:

- $y\omega = Y_w \text{sen}(\Omega t - \alpha_y)$
- $\dot{y}\omega = Y_w \Omega \text{cos}(\Omega t - \alpha_y)$
- $\ddot{y}\omega = -Y_w \Omega^2 \text{sen}(\Omega t - \alpha_y)$

Substitui-se na equação (A.1):

$$-Y_w \Omega^2 \text{sen}(\Omega t - \alpha_y) + \frac{c}{m} Y_w \Omega \text{cos}(\Omega t - \alpha_y) + \omega^2 Y_w \text{sen}(\Omega t - \alpha_y) = \epsilon \Omega^2 \text{sen}\Omega t \quad (\text{A.3})$$

Desenvolvendo as diferenças em seno e cosseno, chega-se às seguintes igualdades:

$$[(\omega^2 - \Omega^2)Y_w \text{cos}\alpha_y + \frac{c}{m} Y_w \Omega \text{sen}\alpha_y] \text{sen}\Omega t = \epsilon \Omega^2 \text{sen}\Omega t \quad (\text{A.4})$$

$$[-(\omega^2 - \Omega^2)Y_w \text{sen}\alpha_y + \frac{c}{m} Y_w \text{cos}\alpha_y] \text{cos}\Omega t = 0 \quad (\text{A.5})$$

Da equação (A.5) obtém-se o ângulo de fase entre a excitação e resposta do sistema (Fig. A.1):

$$\tan \alpha_y = \frac{\frac{c}{m} \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2} \quad (\text{A.6})$$

onde:

- $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$
- $\xi = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2m\omega}$

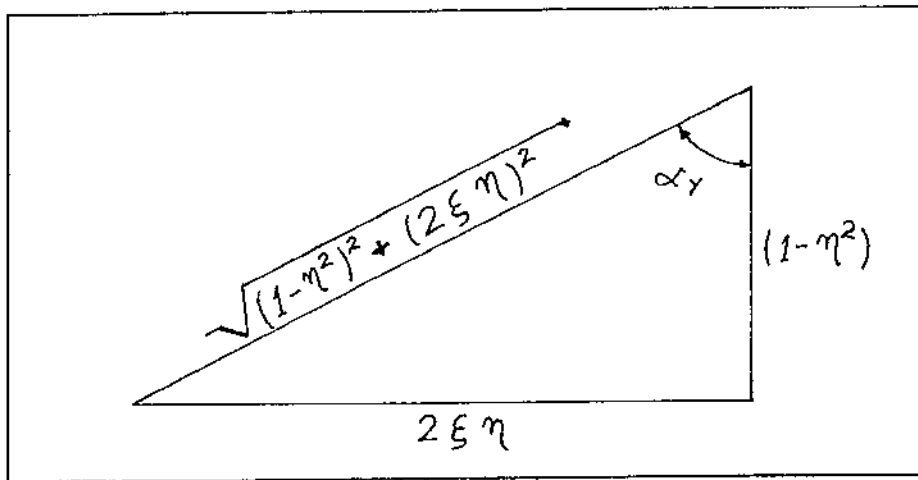


Figura A.1: Ângulo de fase.

Reescrevendo a equação (A.4):

$$[(1 - \eta^2) \cos \alpha_y + 2\xi\eta \operatorname{sen} \alpha_y] Y_w = \epsilon \eta^2 \quad (\text{A.7})$$

Da Fig. A.1 obtém-se $\cos \alpha_y$ e $\operatorname{sen} \alpha_y$ que substituídos na equação fornecem a expressão da amplitude de vibração:

$$Y_w = \frac{\epsilon \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad (\text{A.8})$$

Na ressonância, tem-se $\eta = 1$ na equação (A.8), e portanto, a amplitude máxima amortecida na ressonância é:

$$Y_w = \frac{c}{2\xi} \quad (\text{A.9})$$

Não existe expressão tão simples para outros tipos de amortecimento. É possível, entretanto, aproximar-se do mesmo valor de amplitude na ressonância encontrando o valor de um amortecimento *equivalente* cujo efeito seja semelhante ao amortecimento viscoso na região da ressonância.

Para isto, iguala-se a energia dissipada pelo amortecimento viscoso com a dissipada pela força de amortecimento não viscoso com movimento harmônico suposto [26].

A energia dissipada por ciclo pela ação de uma força de amortecimento F_d é dada por:

$$W_d = \oint F_d dy_\omega \quad (\text{A.10})$$

A força de amortecimento neste caso é $F_d = c\dot{y}_w$, onde:

$$\dot{y}_w = Y_w \Omega \cos(\Omega t - \alpha_y)$$

A equação (A.10) torna-se então:

$$W_d = \oint c \dot{y}_w dy_w \quad (\text{A.11})$$

Sabe-se que:

$$\dot{y}_w = \frac{dy_w}{dt}$$

Então:

$$W_d = \oint c (\dot{y}_w)^2 dt$$

$$W_d = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} c Y_w^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t - \alpha_y) dt \quad (\text{A.12})$$

Resolvendo a integral [4] na expressão (A.12) tem-se:

$$W_d = c Y_w^2 \Omega^2 \frac{\pi}{\Omega} = \pi c Y_w^2 \Omega \quad (\text{A.13})$$

que é a energia dissipada por ciclo pela força de amortecimento viscoso.

A.2 Amortecimento por atrito viscoso

Partindo-se das equações vistas no Capítulo 5 (item 5.2.2) fez-se o desenvolvimento semelhante ao anterior:

$$\begin{cases} \ddot{y}_w + \omega^2 y_w = -\frac{2f_a}{m} (\dot{y}_w + \Omega z_w) + \epsilon \Omega^2 \text{sen} \Omega t \\ \ddot{z}_w + \omega^2 z_w = -\frac{2f_a}{m} (\dot{z}_w - \Omega y_w) - \epsilon \Omega^2 \text{cos} \Omega t \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

ou

$$\begin{cases} \ddot{y}_w + \frac{2f_a}{m} \dot{y}_w + \omega^2 y_w + \frac{2f_a}{m} \Omega z_w = \epsilon \Omega^2 \text{sen} \Omega t \\ \ddot{z}_w + \frac{2f_a}{m} \dot{z}_w + \omega^2 z_w - \frac{2f_a}{m} \Omega y_w = -\epsilon \Omega^2 \text{cos} \Omega t \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Adotando:

$$y_w = A_1 \text{sen}(\Omega t - \beta_1) \quad z_w = -A_2 \text{cos}(\Omega t - \beta_2)$$

$$\dot{y}_w = A_1 \Omega \text{cos}(\Omega t - \beta_1) \quad \dot{z}_w = A_2 \Omega \text{sen}(\Omega t - \beta_2)$$

$$\ddot{y}_w = -A_1 \Omega^2 \text{sen}(\Omega t - \beta_1) \quad \ddot{z}_w = A_2 \Omega^2 \text{cos}(\Omega t - \beta_2)$$

Substitui-se nas equações (A.15):

$$-A_1 \Omega^2 \text{sen}(\Omega t - \beta_1) + A_1 \Omega \frac{2f_a}{m} \text{cos}(\Omega t - \beta_1) + \omega^2 A_1 \text{sen}(\Omega t - \beta_1) - \frac{2f_a}{m} \Omega A_2 \text{cos}(\Omega t - \beta_2) = \epsilon \Omega^2 \text{sen} \Omega t \quad (\text{A.16})$$

$$A_2 \Omega^2 \cos(\Omega t - \beta_2) + A_2 \Omega \frac{2f_a}{m} \text{sen}(\Omega t - \beta_2) - \omega^2 A_2 \cos(\Omega t - \beta_2) - \frac{2f_a}{m} \Omega A_1 \text{sen}(\Omega t - \beta_1) = -\epsilon \Omega^2 \cos \Omega t \quad (\text{A.17})$$

Desenvolvendo os termos em seno e cosseno e igualando-os em ambas expressões, vem:
Da expressão (A.16):

$$\begin{cases} [(\omega^2 - \Omega^2)A_1 \cos \beta_1 + A_1 \Omega \frac{2f_a}{m} \text{sen} \beta_1 - A_2 \Omega \frac{2f_a}{m} \text{sen} \beta_2] = \epsilon \Omega^2 \\ -(\omega^2 - \Omega^2)A_1 \text{sen} \beta_1 + A_1 \Omega \frac{2f_a}{m} \cos \beta_1 - A_2 \Omega \frac{2f_a}{m} \cos \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Da expressão (A.17):

$$\begin{cases} [(\omega^2 - \Omega^2)A_2 \cos \beta_2 + A_2 \Omega \frac{2f_a}{m} \text{sen} \beta_2 - A_1 \Omega \frac{2f_a}{m} \text{sen} \beta_1] = \epsilon \Omega^2 \\ (\omega^2 - \Omega^2)A_2 \text{sen} \beta_2 - A_2 \Omega \frac{2f_a}{m} \cos \beta_2 - A_1 \Omega \frac{2f_a}{m} \cos \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Fazendo-se $\beta_1 = \beta_2$, $A_1 = A$ e $A_2 = -A$ igualam-se as expressões em (A.18) e (A.19):

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2)A \text{sen} \beta - 2 \frac{2f_a}{m} \Omega A \cos \beta = 0 \\ (\omega^2 - \Omega^2)A \cos \beta + 2 \frac{2f_a}{m} \Omega A \text{sen} \beta = \epsilon \Omega^2 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Obtém-se os ângulos de fase β_1 e β_2 (Fig. A.2)

$$\tan \beta = \frac{2 \frac{2f_a}{m} \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (\text{A.21})$$

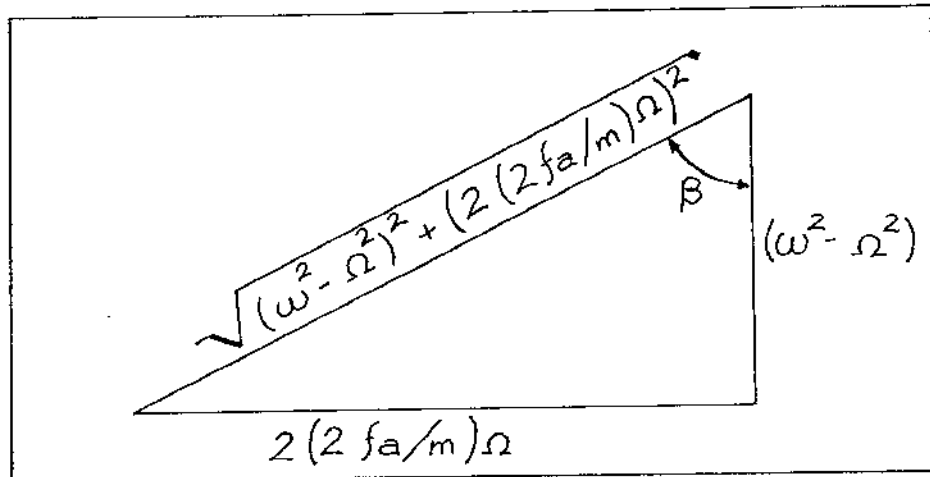


Figura A.2: Ângulo de fase.

O valor da amplitude A é, então:

$$A = \frac{\epsilon \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \left(2 \frac{2f_a}{m} \Omega\right)^2}} \quad (\text{A.22})$$

Na ressonância, $\Omega = \omega$ na expressão (A.22):

$$A = \frac{\epsilon \omega^2}{2 \frac{2I_a}{m} \omega} = \frac{\epsilon \omega}{2 \frac{2I_a}{m}} \quad (\text{A.23})$$

Tem-se, portanto:

$$y_\omega = A \operatorname{sen}(\Omega t - \beta)$$

$$z_\omega = A \cos(\Omega t - \beta)$$

Passa-se, então, ao cálculo da energia dissipada por ciclo para $F_d = 2f_a(\dot{y}_\omega + \Omega z_\omega)$:

$$W_d = \oint (2f_a)(\dot{y}_\omega + \Omega z_\omega) \dot{y}_\omega dt \quad (\text{A.24})$$

onde: $\dot{y}_\omega = A\Omega \cos(\Omega t - \beta)$.

Substituindo \dot{y}_ω e z_ω na integral (A.24):

$$W_d = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} (2f_a) 2A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t - \beta) dt \quad (\text{A.25})$$

Resolvendo a integral (A.25):

$$W_d = (2f_a) 2A^2 \Omega^2 \frac{\pi}{\Omega} = \pi(2f_a) 2A^2 \Omega \quad (\text{A.26})$$

que é a energia dissipada por ciclo pelo atrito viscoso.

Para encontrar um valor de f_a satisfatório, basta igualar os valores de W_d deduzidos nos itens A.1 e A.2.

Para isto, adotou-se $\xi = 0,05$, que é um valor razoável na prática, conforme Figs.A.3 e A.4, obtendo-se a amplitude máxima na ressonância para amortecimento viscoso (equação A.9):

$$y_w = \frac{\epsilon}{2\xi} = \frac{0,001}{2 \times 0,05} = 0,01 m$$

Nota-se boa redução da amplitude máxima de vibração na ressonância em relação ao sistema não amortecido visto na Fig.4.17 a).

Ocorre uma ligeira queda da velocidade de rotação neste caso devido à energia dissipada pelo amortecimento viscoso (Fig.A.3).

Procede-se, então, ao cálculo de um valor de f_a equivalente a $\xi = 0,05$, igualando-se as equações (A.13) e (A.26):

$$\pi(2f_a) 2A^2 \Omega = \pi c y_w^2 \Omega \quad (\text{A.27})$$

como: $\Omega = \omega$, então $y_w = A = 0,01 m$ resultando: $4f_a = c$

$$f_a = \frac{c}{4} = 6,283 N.s/m \quad (\text{A.28})$$

que foi o valor utilizado no estudo de estabilidade do Capítulo 5.

A.3 Amortecimento por atrito seco

Aplicando-se a mesma linearização às equações (4.7), (4.8) e (4.9) do Capítulo 4, obtém-se:

$$\begin{cases} m\ddot{y}\omega + ky\omega = 2F_{ay} + \epsilon m\Omega^2 \text{sen}\Omega t \\ m\ddot{z}\omega + kz\omega = 2F_{az} - \epsilon m\Omega^2 \text{cos}\Omega t \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Neste caso, como o atrito seco não apresenta termos em seno e cosseno, não haverá uma defasagem entre excitação e resposta, mas somente uma alteração no valor da amplitude máxima de vibração.

Assim, pode-se adotar:

$$y\omega = A_y \text{sen}\Omega t$$

$$z\omega = A_z \text{cos}\Omega t$$

Resolve-se o caso para $y\omega$, pois a solução em $z\omega$ é análoga.

A expressão para energia dissipada pelo atrito seco é:

$$W_d = \oint 2F_{ay} dy\omega \quad (\text{A.30})$$

Porém, sabe-se que a força de atrito seco muda de sinal durante um ciclo. Portanto,

$$W_d = \oint 2F_{ay} \dot{y}\omega dt$$

$$W_d = 2F_{ay} A_y \Omega \left[- \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \text{cos}\Omega t dt + \int_{\frac{3\pi}{2n}}^{\frac{5\pi}{2n}} \text{cos}\Omega t dt \right] \quad (\text{A.31})$$

Resolvendo as integrais:

$$W_d = 2F_{ay} A_y \Omega \frac{4}{\Omega} = 8F_{ay} A_y \quad (\text{A.32})$$

que é a energia dissipada por ciclo pelo atrito seco.

Para obter um valor de F_{ay} equivalente a $\xi = 0,05$ ou $f_a = 6,283$ basta igualar as expressões (A.13) ou (A.26) à expressão (A.32)

$$8F_{ay} A_y = \pi c y_w^2 \Omega$$

como:

$$A_y = Y_w = 0,01m$$

$$c = 25,132Ns/m$$

$$\Omega = \omega = 125,66rd/s$$

$$F_{ay} = \frac{\pi c Y_w \omega}{8} = 12,4N \quad (\text{A.33})$$

o que corresponde a uma força normal de 20,7N para $\mu = 0,6$.

Este valor de atrito seco foi aplicado ao mesmo sistema não linear no Capítulo 4. Notou-se razoável redução da amplitude máxima de vibração (Fig.4.17 b), bem como uma ligeira queda de velocidade de rotação devido à energia dissipada conforme Fig. 4.16b.

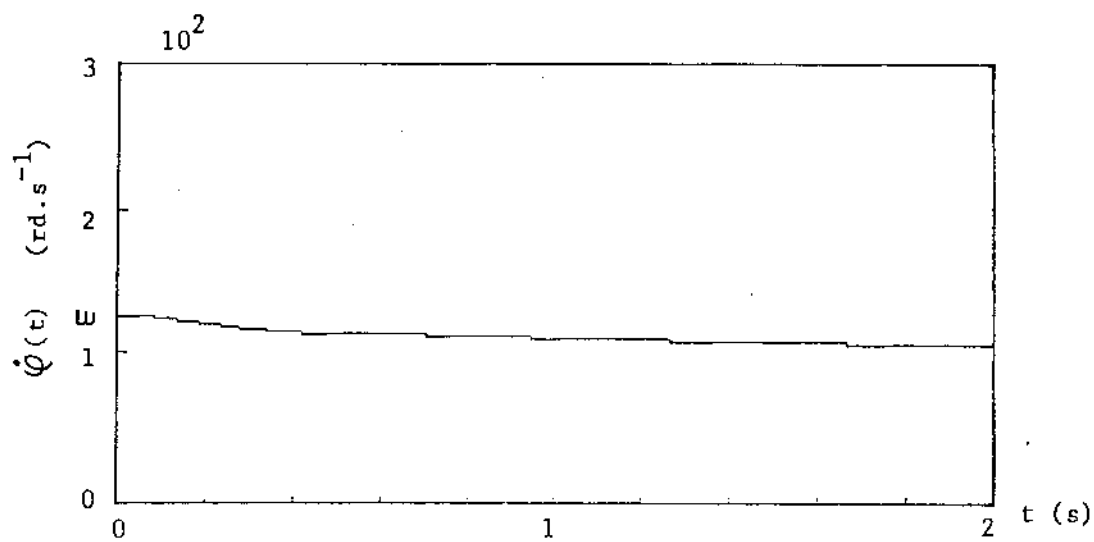


Figura A.3: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t) \times$ tempo, sistema não linear, $T = 0$, $\omega = 125,66\text{rd/s}$, $\xi = 0,05$.

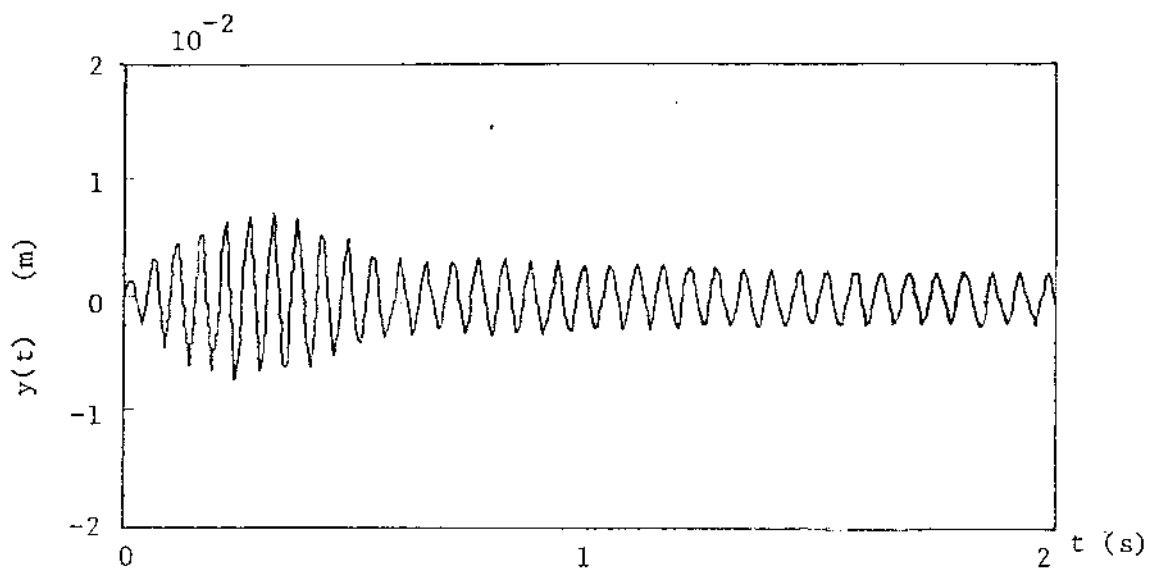


Figura A.4: Deslocamento $y(t) \times$ tempo, sistema não linear, $T = 0$, $\omega = 125,66\text{rd/s}$, $\xi = 0,05$.

Apêndice B

MÉTODO COMPUTACIONAL SHAMPINE-GORDON

B.1 Estrutura do integrador

A integração pelo método computacional Shampine-Gordon é feita através da chamada, pelo programa principal, da subrotina DE, que por sua vez chama as subrotinas *STEP*, *INTRP* e *MACHIN*.

A subrotina DE integra sistemas de até vinte equações diferenciais do tipo:

$$\frac{dy(i)}{dt} = f(t, y(1), y(2) \dots y(neqn)) \quad (\text{B.1})$$

Esta subrotina integra desde o tempo inicial do intervalo até o tempo final, que seria no caso o produto entre o número de pontos e o espaçamento entre eles.

DE chama dois subprogramas importantes: o integrador *STEP* e a rotina de interpolação *INTRP*.

STEP usa as equações de Adams-Bashforth (*predictor*) para prever o valor e as de Adams-Moulton (*corrector*) para corrigi-lo posteriormente, também conhecido como método *PECE*. A própria subrotina *STEP* ajusta a ordem do polinômio interpolador, bem como o tamanho do passo de integração para controlar o erro. Desta forma, para um mesmo ponto deveria se esperar sempre um mesmo resultado independentemente do espaçamento utilizado.

Por razões de eficiência, DE integra além do tempo final internamente, chamando a subrotina *INTRP* para obter a solução neste ponto.

Os parâmetros de DE são:

- *F* : função $F(t, y, y_p)$ para avaliar as derivadas $y_p = \frac{dy(i)}{dt}$.
- *NEQN* : número de equações a serem integradas.
- *y* : vetor solução no tempo.
- *T* : tempo inicial t_0 (será alterado durante a integração).
- *TOUT* : ponto final do intervalo de integração.
- *RELERR*, *ABSERR* : erros ou tolerâncias relativa e absoluta.

- *IFLAG* : indica o estado de integração.

Na primeira chamada, o programa principal deve fornecer os seguintes dados: número de equações *NEQN*, o valor inicial de *T*, *RELERR*, *ABSERR*.

Deve também inicializar *IFLAG* = 1 e as condições iniciais através do vetor $y(i)$, dimensionado no programa principal.

A função *F* deve ser declarada em um comando *EXTERNAL*, criando-se a subrotina $F(t, y, y_p)$.

O valor de *TOUT*, inicialmente nulo, é definido, a cada integração, através de um comando *DO* variando do valor um até o número total de pontos desejados. Em cada passo faz-se:

$$TOUT = TOUT + XINCR$$

onde: *XINCR* = espaçamento desejado entre os pontos.

Por sua vez, a subrotina *DE* tem como saída:

- $y(i)$: vetor solução no tempo.
- *T* : último ponto alcançado na integração. Portanto $T = TOUT$ se o retorno é normal.
- *IFLAG* : este controlador pode ter seu valor variando entre 2 e 6.
 - 2 - retorno normal, continua integração.
 - 3 - tolerâncias muito pequenas, deve-se aumentar *ABSERR* e *RELERR*.
 - 4 - são necessários mais passos do que os definidos em *DE*.
 - 5 - equações rígidas, precisa-se diminuir as tolerâncias.
 - 6 - entrada de parâmetros inválida (erro fatal).

Nas chamadas subseqüentes, *DE* retorna com todos os valores necessários para prosseguir com a integração.

A única constante que depende da máquina utilizada é o erro de *roundoff* unitário *U*, que é o menor número positivo tal que $(1,0 + U) > 1,0$. Este valor de *U* é determinado pela subrotina *MACHIN* e é utilizado para verificar se o tamanho do passo de integração necessário ou a tolerância do erro são muito pequenos para a precisão da máquina, estando o usuário neste caso exigindo precisão demais.

Deve-se ressaltar aqui que a subrotina *STEP*, durante a integração, avança um passo a cada chamada e a extrapolação local é feita de maneira a se obter estabilidade e precisão.

B.2 Espaçamento entre pontos

O valor de *XINCR* que, de acordo com a estrutura do programa, não deveria influenciar o resultado em pontos equivalentes, acaba por interferir na resposta de forma significativa.

A fim de evitar o aparecimento de instabilidades numéricas na simulação, o salto da força de atrito foi modelado como uma reta muito inclinada num intervalo quase zero da velocidade de escorregamento (Fig.B.1).

Feito isto, notou-se que, dependendo da escolha do espaçamento entre os pontos, obtinha-se diferentes respostas para um mesmo problema. Nestes exemplos tem-se $T = 1,2Nm$, $F_a = 12,4N$ e $\omega_c = 3\omega$, com fixação flexível.

No item a) das Figs. B.2, B.3, B.4, o sistema se comporta como estável, sujeito à aceleração aproximadamente constante. Já o item b) mostra uma desaceleração do sistema com comportamento

instável da amplitude de vibração. No item c) tem-se o comportamento mais coerente das curvas, ou seja, movimento instável com crescimento inicial da velocidade de rotação e posterior queda para a rotação crítica.

Quanto maior o espaçamento entre os pontos, menor o número de pontos sobre a recta inclinada da Fig.B.1 e menor a precisão dos resultados. Para $XINCR = 10^{-4}$, obteve-se o mesmo resultado de $XINCR = 10^{-3}$. Desta forma, para maior segurança, utilizou-se um espaçamento de 10^{-4} entre os pontos, considerando as instabilidades como sendo próprias do sistema e geradas pelo atrito seco.

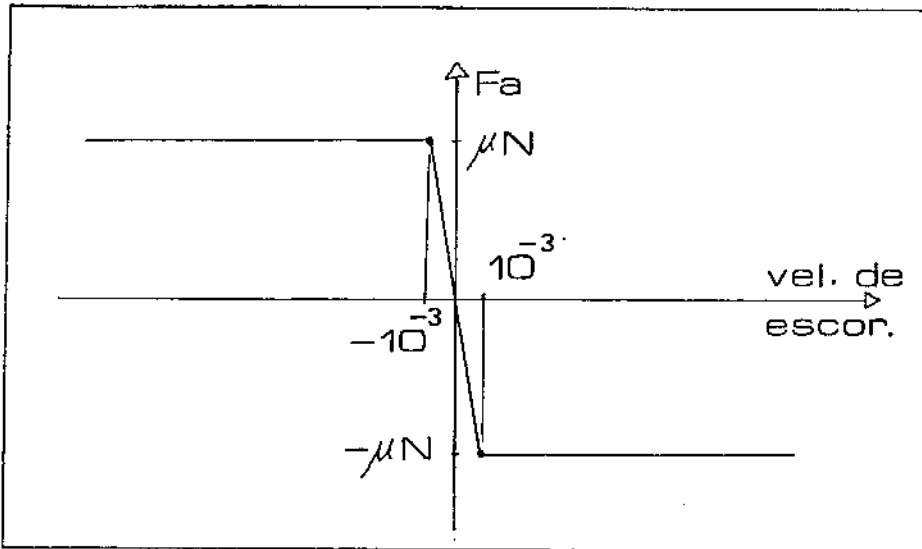


Figura B.1: Modelo para atrito seco a ser introduzido no programa.

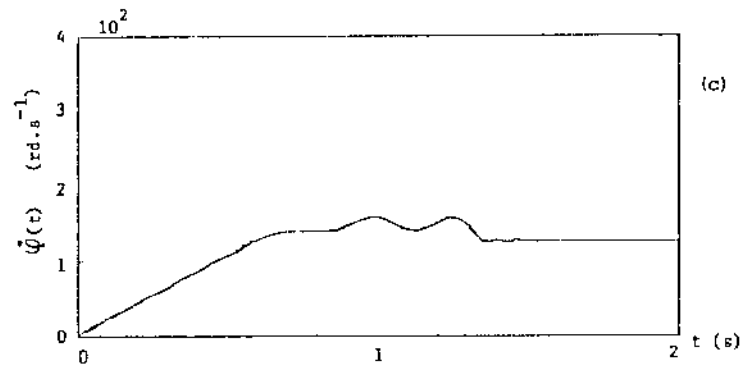
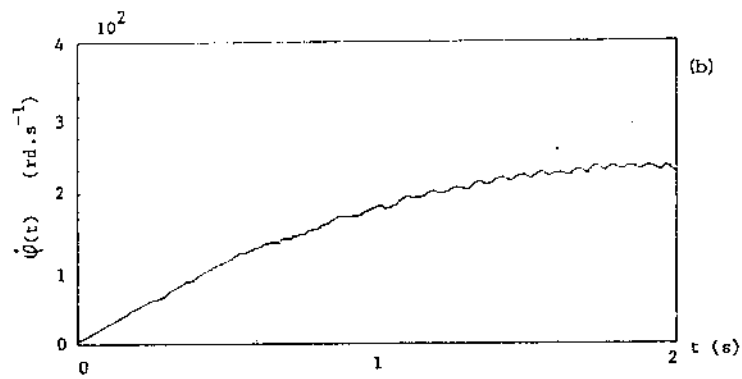
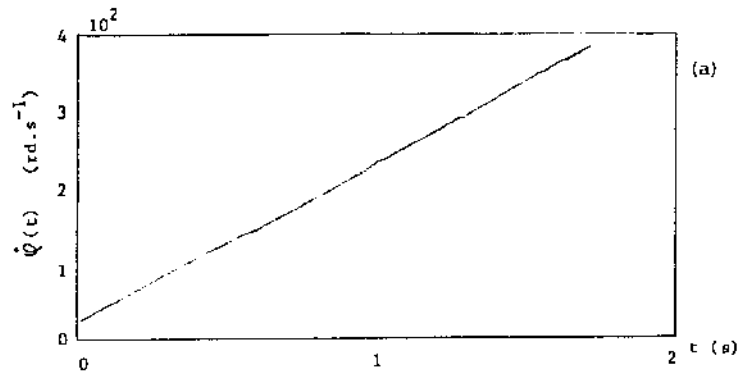


Figura B.2: Velocidade de rotação $\dot{\varphi}(t)$ x tempo: a) $XINCR = 10^{-1}$; b) $XINCR = 10^{-2}$; c) $XINCR = 10^{-3}$.

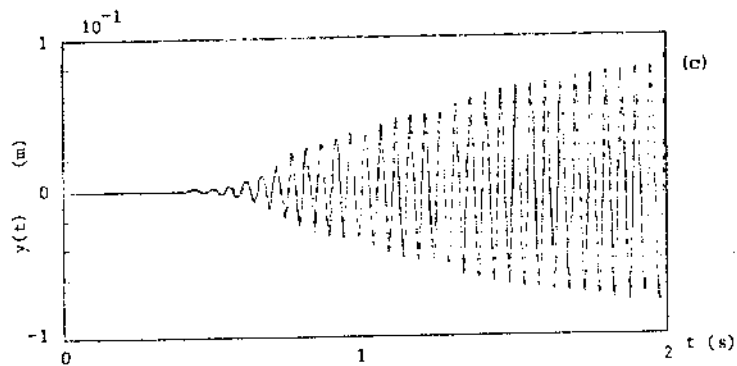
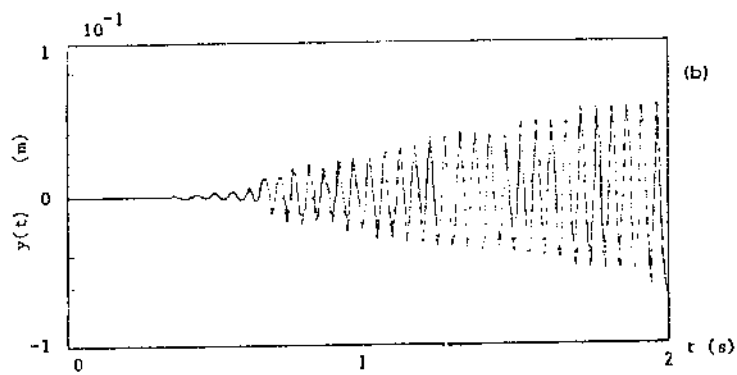
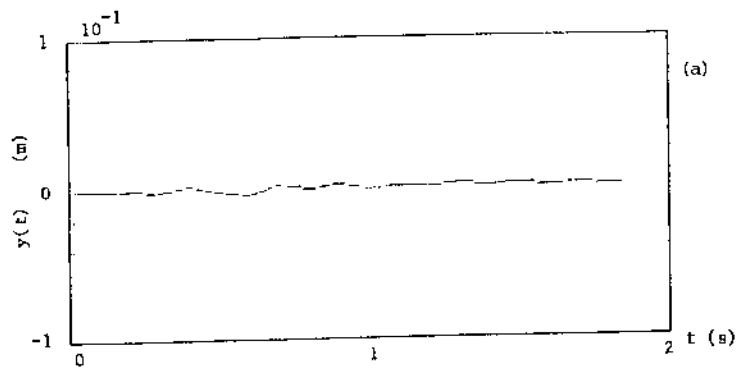


Figura B.3: Deslocamento $y(t) \times$ tempo: a) $XINCR = 10^{-1}$; b) $XINCR = 10^{-2}$; c) $XINCR = 10^{-3}$.

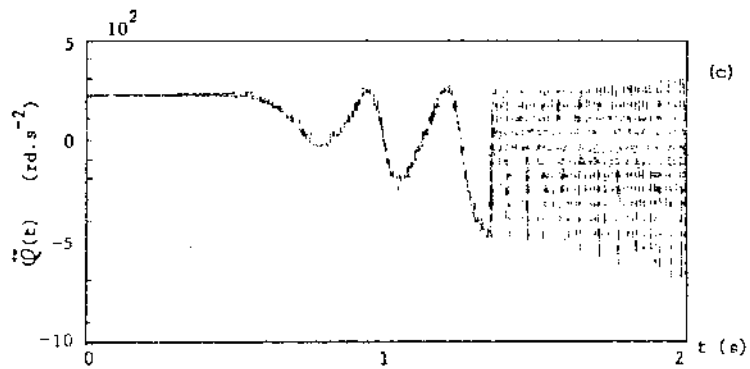
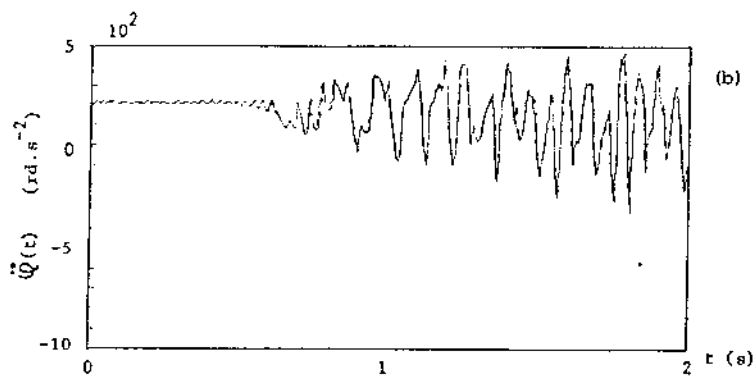
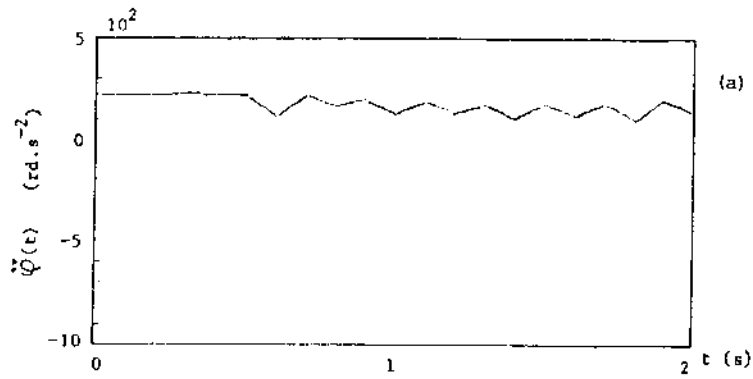


Figura B.4: Aceleração angular $\ddot{\varphi}(t) \times$ tempo: a) $XINCR = 10^{-1}$; b) $XINCR = 10^{-2}$; c) $XINCR = 10^{-3}$.

Bibliografia

- [1] Aiba, S. *On the Vibration of a Rotating Shaft Passing through the Critical Speed*. Bulletin of JSME, Vol.19, n.128, 1976, pp.95.
- [2] Beer, F.P. e Johnston, E.R. *Resistência dos Materiais*. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1982.
- [3] Bodger, W.K. *Deceleration of an Unbalanced Rotor through a Critical Speed*. Transactions ASME, Series B, Journal of Engineering for Industry, Vol.89, n.4, 1967, pp.582.
- [4] Boulos, P. *Introdução ao Cálculo*. Vol.II, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.
- [5] Dorning, A. *Transients in Simple Undamped Oscillators under Inertial Disturbances*. Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.26, n.2, 1959, pp.217.
- [6] Ehrich, F. e Childs, D. *Self-excited Vibration in High-performance Turbomachinery*. Mechanical Engineering, May 1984.
- [7] Ernst, R. *Deutsch/Portugiesisch - Wörterbuch der Industriellen Technik*. Band VII, Brandstetter Verlag Wiesbaden, 1963.
- [8] Ganapathy, S. e Parameswaran, M.A. *Transition over Resonance and Power Requirements of an Unbalanced Mass-driven Vibratory System*. Mechanism and Machine Theory, Vol.21, n.1, 1986, pp.73.
- [9] Gasch, R. e Pfützner, H. *Rotordynamik*. Springer-Verlag, 1975.
- [10] Gasch, R., Markert, R. e Pfützner, H. *Acceleration of Unbalanced Flexible Rotors through the Critical Speeds*. Journal of Sound and Vibration, Vol.63, n.3, 1979, pp.393.
- [11] Halling, J. *Principles of Tribology*. The MacMillan Press Ltda., London and Basingstone, 1975.
- [12] Harris, C.M. e Grede, C.E. *Shock and Vibration - Handbook*. 2nd edition, McGraw-Hill Book Company, 1976.
- [13] Hollburg *Das Verhalten von Elektrisch Angetriebenen drehend biege-elastischen Rotoren beim Hochlauf*., Berlin, 1981.
- [14] Kononenko, V.O. *Vibrating Systems with Limited Power Supply*. London Iliffe, London, 1969.
- [15] Kreyszig, E. *Matemática Superior 2*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1984.

- [16] Lewis, F.M. *Vibration during Acceleration through a Critical Speed*. Transactions ASME, APM-54-24, 1932, pp.253.
- [17] Magnus, K. *Vibrations*. Blackie & Son Limited, London, 1965.
- [18] Marchis, V. e Vatta, F. *A Numerical Approach on the Combined Viscous and Coulomb Friction Motion*. Mechanism and Machine Theory, Vol.20, n.3, 1985, pp.171.
- [19] Markert, R. *Resonanzdurchfahrt unwuchtiger biegeelastischer Rotoren*. Berlin, 1980.
- [20] Matsuura, K. *A Study of Vibration and Velocity Characteristics of an Accelerated Unbalanced Rotor*. Bulletin of JSME, Vol.18, n.125, 1975, pp.1226.
- [21] Matsuura, K. *A Method for Estimating the Condition that a Rotor Can Pass through Resonance*. Bulletin of JSME, Vol.20, n.145, 1977, pp.801.
- [22] Müller, P.C. *Stabilität und Matrizen*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1977.
- [23] Shampine, L.F. e Gordon, M.K. *Computer Solution of Ordinary Differential Equations - The initial value problem*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1975.
- [24] Shaw, S.W. *On the Dynamic Response of a System with Dry Friction*. Journal of Sound and Vibration, Vol.108, n.2, 1986, pp.305.
- [25] Szczygielski *Dynamisches Verhalten eines schnell drehenden Rotors bei Anstreifvorgängen*. ETH Zürich, 1986.
- [26] Thomson, W.T. *Teoria da Vibração*. Ed. Interciência Ltda., Rio de Janeiro, 1978.
- [27] Viderman, Z. e Porat, I. *An Optimal Control Method for Passage of a Flexible Rotor through Resonances*. Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol.109, 1987, pp.216.
- [28] Yanabe, S. e Tamura, A. *Vibration of a Shaft Passing through a Critical Speed*. Bulletin of JSME, Vol.14, n.76, 1971, pp.1050.
- [29] Yanabe, S. e Tamura, A. *Vibration of a Shaft Passing through a Critical Speed (2nd) report*. Bulletin of JSME, Vol.15, n.89, 1972, pp.1364.
- [30] Yanabe, S. e Tamura, A. *Vibration of a Rotating Shaft Passing through Two Critical Speeds*. C255/80 Cambridge, 1980, pp.29.