SOBRE UM SISTEMA DE LÓGICA INTENSIONAL TRIVALENTE

ELIAS HUMBERTO ALVES

Tese apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do título de Livre Docente em Filosofia.

- 1984 -

À memória de meu pai, Octávio, e à memória da Profa. Ayda Ignez Arruda, amiga e incentivadora.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Queremos, de início, esboçar uma espécie de panorama histórico da lógica intensional, a partir das considerações de Frege (ver [9]).

De acordo com o seu princípio de funcionalidade, o significado de uma expressão deve ser uma função do significado de seus constituintes. No entanto, são conhecidos os exemplos do próprio Frege em que esse princípio parece falhar, se identificarmos significado com denotação ou extensão. Um dos exemplos envolve a chamada lei de Leibiniz, segundo a qual, substituindo-se em qualquer sentença um nome por outro que denote o mesmo indivíduo, o resultado é uma sentença verdadeira se e somente se a sentença original é verdadeira. Ora, tomemos a expressão "estrela da manhã", que denota a mesma entidade que a expressão "estrela da tarde",ou seja, o planeta Vênus. Se a sentença:

"A estrela da manhã não é visível hoje."

é verdadeira, do mesmo modo será verdadeira a sentença:

"A estrela da tarde não é visível hoje."

Entretanto, é verdadeira a sentença:

"Necessariamente a estrela da manhã é idêntica à estrela da manhã",

mas é falsa a sentença:

"Necessariamente a estrela da manhã é idêntica à estrela da tarde", já que a primeira expressa uma necessidade lógica, enquanto a segunda expressa um fato contingente da astronomia.

Outro exemplo de Frege é dado pelas duas setenças abaixo, uma verdadeira e a outra presumivelmente falsa:

"João acredita que a estrela da manhã é a estrela da manhã."

"João acredita que a estrela da manhã é a estrela da tarde."

Contextos como esses (de crença , modalidade, etc.), onde parece falhar a substitutividade, são chamados de contextos oblíquos ou referencialmente opacos.

A solução de Frege para o problema está em sua distinção entre o <u>sentido</u> de uma expressão (sinn) e a <u>referência</u> dessa expressão (bedeuntung). A referência é, para Frege, o que, usualmente, consideremos como denotação, como, por exemplo, os valores de verdade, no caso de sentenças, ou um determinado conjunto, no caso dos predicados. Já o sentido de uma expressão seria algo como o significado dessa expressão. No caso de uma sentença, por exemplo, seria o "pensamento" expresso pela sentença, ou o que, usualmente, se chama de proposição.

Mais tarde, passou-se a usar a expressão <u>intensão</u> para <u>sentido</u> e <u>extensão</u> para <u>referência</u>. A partir dessa distinção, considera-se que as expressões da linguagem natural tem uma espécie de ambiguidade, ou seja, às vezes uma expressão tem uma denotação "normal", mas outras vezes, justamente nos contextos opacos, uma expressão denota o que é, ordinariamente, o seu sentido. Assim , duas sentenças podem ter a mesma denotação (digamos, serem verdadeiras), mas, quando precedidas por um operador modal, denotam o sentido das respectivas sentenças, isto é, as proposições expressas por elas. Como os sentidos de duas sentenças podem não ser o mesmo, não se viola o princípio de que a denotação de uma expressão complexa é uma função das denotações das partes.

Naturalmente, para a construção de uma semântica que incorporasse essa distinção, havia necessidade de se encontrar uma formalização para a noção de sentido e uma maneira de se determinar quando uma expressão tem denotação "normal" e quando ela denota um sentido.

Carnap foi o primeiro a tentar uma formalização da noção de sentido, em [3]. Levando em conta que o significado de uma expressão deve determinar sua extensão, Carnap sugeriu que o sentido de uma expressão (para ele, a intensão) é uma função de possíveis estados de coisas, tal que, para cada particular estado de coisas, tem-se a denotação dessa expressão (para ele, a extensão) nesse particular estado de coisas. Naturalmente, surge o problema de se saber o que é um estado de coisas. A sugestão de Carnap consiste na identificação de possíveis estados de coisas com modelos de linguagem subjacente.

Coube a Church, pela primeira vez, a construção de uma lógica formal contando expressões que denotam intensões, enquanto outras denotam extensões, ou seja, a construção de uma lógica intensional, segundo a linha sugerida por Frege (ver [6]). Contudo, o trabalho de Church consistia em um tratamento exclusivamente sintático e não semântico. Permaneceu o problema de se encontrar uma interpretação adequada para as intensões.

David Kaplan [14] tratou de resolver o problema, construindo uma semântica para o sistema de Church, seguindo as idéias de Carnap. Entretanto, ele se ateve à proposta de consisiderar estados de coisas como modelos da lógica subjacente e essa abordagem tem uma série de inconvenientes.

Coube de fato a Montague, numa série de trabalhos ([16], [10] e [8]), a tarefa de desenvolver completamente uma lógica intensional e sua interpretação, tendo, para isso, se baseado nas idéias da semântica de Kripke para a lógica modal. Como linguista, seu objetivo, era, naturalmente, aplicar esse sistema (que chamaremos IL), na análise de fenômenos intensionais do Inglês.

Tomando os *mundos possíveis* como índices, Montague define sua intensão, à maneira de Carnap, como uma função do conjunto de índices nas extensões. Assim, por exemplo, já que *nome* denota um indivíduo em cada índice, segue-se que a intensão de um nome é uma função dos índices nos indivíduos. Tal intensão é chamada de *conceito individual*. Como outro exemplo, já que um *predicado monádico* denota um conjunto de indivíduos em cada índice, sua intensão será a função que dá, para cada índice, o conjunto denotado nesse índice. Tal intensão se diz uma *propriedade*. Finalmente, uma *sentença* denota um valor de verdade em cada índice. Logo, a intensão de uma sentença é uma função de índices em valores de verdade, chamada uma *proposição*.

Na lógica intensional de Montague pode-se formar, para cada expressão α, uma segunda expressão que deve corresponder à intensão de α. Isso é feito sintaticamente, como veremos depois, por meio de um operador ^, tal que, a cada expressão α, correspon de uma expressão $^\wedge\alpha$. De fato, tal operador funciona como um abs tractor funcional sobre índices. Montague introduz, ainda, um se gundo operador ˅, como uma espécie de inverso do primeiro opera dor.

O sistema IL de Montague é, assim, um sistema extrema mente forte, contendo inclusive a teoria dos tipos. De fato, como bem observa Gallin [10], "a força da ídeia de Carnap para a análi se da linguagem natural só aparece claramente quando passamos pa ra ordens superiores, onde é possível atribuir intensões a muitas pontes do discurso, cuja análise é eludida pela lógica de predica dos ordinária".

Como é sabido, a lógica intensional de Montague se inse re num contexto de lógica bivalente. No entanto, U. Blau levantou, recentemente, algumas objeções quanto ao uso desse tipo de lógica na análise da linguagem natural (ver [2]). (Há uma exposição das idéias de Blau no livro de Stegmüller (ver [18], 2º volume, Cap . II), no qual nos baseamos para as considerações que se seguem.)

A proposta de Blau é a construção de um sistema com três valores, o qual seria um prolongamento da lógica tradicional. O autor parte de considerações analíticas em torno da linguagem e procura mostrar que o pensamento, ao nível da linguagem comum, po de ser melhor caracterizado por meio de uma lógica trivalente. A redução desse pensamento não formal aos limites da lógica clássi ca seria feita através de procedimentos artificiais e algo arbi trários.

Segundo Blau, uma formalização correta num sistema lógi co só é viável quando se compreende claramente, do ponto de vista intituitivo, como devem ser interpretados os valores de verdade. A idéia é decompor o valor "falso" da lógica clássica de forma que as sentenças poderiam ser verdadeiras de um só modo, mas poderiam ser falsas de diversas maneiras. O conceito de "falso" seria decomposto em dois conceitos diversos: o "falso" (F) e o "indeterminado" (I). As sentenças da linguagem natural poderiam, então, ser consideradas verdadeiras, falsas e indeterminadas.

Blau considera duas razões para se atingir a indeterminação. A primeira delas é o uso que fazemos, na linguagem comum, dos chamados "conceitos vagos". Segundo ele, a vaguidade seria inerente a certas partes da linguagem natural, independendo mesmo do contexto de uso.

A segunda razão aparece quando se usam enunciados com signos não referenciais como no famoso exemplo do "atual rei da França". De acordo com Blau, as teorias clássicas da referência, de Frege a Quine, são intuitivamente inadequadas e, portanto, não solucionam esse problema. Assim, os enunciados elementares devem ter valor "indeterminado", se o sujeito cai no âmbito da vaguidade do predicado ou se os pressupostos referenciais não estão satisfeitos.

Partindo dessas considerações, Blau formula um sistema trivalente que considera adequado para tratar dessas situações.

Na oponião de Stegmüller [18], a lógica trivalente de Blau ainda virá a desempenhar papel importante nas análises filosóficas da linguagem e na linguística".

Assim, temos, de um lado, a proposta de uma lógica intensional, feita por Montague e, por outro lado, a de uma lógica trivalente, feita por Blau. Podemos pensar em unir as duas posições. Desse modo, nosso objetivo, neste trabalho, é adaptar o sistema de Montague para três valores de verdade, construindo um sistema intensional trivalente, que chamaremos de IL3. Esse sistema pode ser caracterizado em poucas palavras da seguinte maneira:Ele está para a lógica trivalente "standard", como foi descrita por Rosser e Turquette ([17]). como a lógica IL de Montague está para a teoria dos tipos clássicos, da maneira como foi descrita por Church e Henkin ([5],[12]).

Estendemos, pois, a lógica trivalente referida a uma lógica intensional trivalente. Preferimos partir da lógica trivalente de Lukasiewicz-Tarski (descrita por Rosser e Turquette),em vez de algum outro sistema, como o de Lukasiewicz ou o de Blau,porque nossa intenção, no presente estado de desenvolvimento do tema, é apenas o de mostrar a possibilidade matemática de tal lógica.

Para a construção do sistema IL3, faremos uso da exposição de Gallin da lógica intensional de Montague (ver [10]). Para facilidade do leitor, não nos limitaremos a citar,mas repetiremos várias definições e resultados, mesmo que sejam formalmente idênticos, de maneira que este trabalho possa estar auto-contido. Naturalmente, forneceremos detalhes, quando as demonstrações se afastarem muito das demonstrações correspondentes em IL.

No primeiro capítulo, apresentamos a linguagem e a semântica "standard" de IL3. No segundo capítulo, introduzimos a semântica generalizada, no sentido de Henkin, apresentamos uma axio mática e provamos a correção do sistema, relativamente à semântica generalizada. No quarto capítulo apresentamos uma lista com várias demonstrações de meta-teoremas de IL3, para que se tenha uma boa compreensão sobre o funcionamento do sistema. Vários desses resultados são utilizados no capítulo seguinte, onde demonstraremos um teorema de completude generalizada. Finalmente, no Apêndice examinaremos alguns problemas relativos a IL3.

Queremos agradecer ao Prof. José Alexandre Guerzoni pelos valiosos comentários e sugestões feitos durante a elaboração deste trabalho.

CAPÍTULO I

Neste capítulo, vamos descrever a linguagem e semântica de IL3. Como dissemos, o objetivo é estender a lógica intensional IL de Montague, tal como está descrita em Gallin [10], de maneira a comportar três valores de verdade que, do ponto de vista intuitivo, serão entendidos como "verdadeiro", "falso" e "indeterminado". Tal como IL, a lógica IL3 baseia-se na teoria dos tipos, da maneira como está formulada em Church (ver [5]).

Começamos, com a definição de tipo:

Def. 1: O conjunto dos tipos de IL3 é o menor conjunto T, satisfazendo as seguintes condições, onde e, t e s são três objetos quaisquer:

(i) $e, t \in T$;

(ii) Se $\alpha, \beta \in T$, então $(\alpha,\beta) \in T$;

(iii) Se $\alpha \in T$, então $(s,\alpha) \in T$.

A linguagem de IL3 contém os seguintes símbolos primitivos:

(i) Para cada $\alpha \in T$, um conjunto enumerável de variáveis: x_α^0 , x_α^1 , ...

(ii) Para cada $\alpha \in T$, um conjunto de constantes: c_α^0 , c_α^1 , ...

(iii) Operadores lógicos: $\equiv$, λ, $^\wedge$, $^\vee$.

(iv) Símbolos auxiliares: [,] .

Usaremos as letras 'x', 'y', 'z',...,'f', 'g', 'h', com ou sem sobrescritos e apóstrofes, como variáveis sintáticas para variáveis de IL3. Analogamente, usaremos 'c', 'd',..., para constantes. Empregaremos, sem menção explícita, algumas convenções óbvias sobre uso e omissão de parênteses, bem como a omissão de índices.

Def. 2: O conjunto Tm_α de termos de IL3 de tipo α é descrito recursivamente, como segue:

(i) Se x é uma variável de tipo α, então $x \in Tm_\alpha$.

(ii) Se c é uma constante do tipo α, então $c \in Tm_\alpha$.

(iii) Se $A \in Tm_{\alpha\beta}$ e $B \in Tm_\alpha$, então $[AB] \in Tm_\beta$.

(iv) Se x é uma variável de tipo α e $A \in Tm_\beta$, então $\lambda x A \in Tm_{\alpha\beta}$.

(v) Se $A, B \in Tm_\alpha$, então $[A \equiv B] \in Tm_t$.

(vi) Se $A \in Tm_\alpha$, então $^\wedge A \in Tm_{s\alpha}$.

(vii) Se $A \in Tm_{\alpha\beta}$, então $^\vee A \in Tm_\alpha$.

Def. 3: Se $A \in Tm_t$, então A se diz uma fórmula de IL3.

Passamos, agora a descrever uma semântica para IL3.

Def. 4: Sejam D e I dois conjuntos não vazios. A estrutura "standard" (ou, simplesmente, a estrutura) baseada em D e I é a família indexada $(M_\alpha)\alpha \in T$ de conjuntos, onde:

(i) $M_e = D$

(ii) $M_t = \{0, 2, 1\}$

(iii) $M_{\alpha\beta} = M_\beta^{M_\alpha} = \{F | F : A_\alpha \to M_\beta\}$

(iv) $M_{s\alpha} = M_\alpha^I = \{F | F : I \to M_\alpha\}$

Def. 5: Dada uma estrutura $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$, definimos a função significado, como sendo uma aplicação m que atribui a cada constante C_α uma função de I em M_α; ou seja, $m(C_\alpha) \in M_\alpha^I$.

Def. 6: Um modelo "standard" (ou, simplesmente, um modelo) de IL3, baseado em D e I é um sistema $M = (M_\alpha, m)_{\alpha \in T}$, onde $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$ é a estrutura "standard" baseada em D e I, e é a função significado definida em $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$.

Def. 7: Se M é um modelo baseado em D e I, D se diz o domínio de M e é denotado por Dom (M). I se diz o conjunto índice de M e é denotado por Ind (M).

Def. 8: Se M é um modelo baseado em D e I, uma atribuição sobre M é uma função a, do conjunto das variáveis de IL3 no conjunto $U(M_\alpha)_{\alpha \in T}$, de tal modo que $a(x_\alpha) \in M_\alpha$, para cada

$\alpha \in T$. O conjunto de todas as atribuições sobre M será denotado por At(M).

Def. 9: Se $\alpha \in At(M)$, x_α é uma variável de tipo α e $X \in M_\alpha$, então $a(x/X)$ denota a atribuição a', cujo valor $a'(y)$ para uma variável y é igual a X se y é x_α e é $a(y)$ em caso contrário.

Def. 10: O valor do termo A_α em M, com respeito ao índice i e a atribuição a (em símbolos: $V^M_{i,a}$) é definido recursivamente como segue:

(i) $V^M_{i,a}(x_\alpha) = a(x_\alpha)$

(ii) $V^M_{i,a}(C_\alpha) = m(C_\alpha)(i)$

(iii) $V^M_{i,a}(A_{\alpha\beta}\, B_\alpha) = V^M_{i,a}(A_{\alpha\beta})\,[V^M_{i,a}(B_\alpha)]$

(iv) $V^M_{i,a}(\lambda\, x_\alpha\, A_\beta)$ = a função F em M, cujo valor para $X \in M_\alpha$ é igual a $V^M_{i,a'}(A_\beta)$, onde $a' = a(x/X)$

(v) $V^M_{i,a}(A_\alpha \equiv B_\alpha) = 1$ se $V^M_{i,a}(A_\alpha) = V^M_{i,a}(B_\alpha)$;

$V^M_{i,a}(A_\alpha \equiv B_\alpha) = 2$ se $V^M_{i,a}(A_\alpha) \neq V^M_{i,a}(B_\alpha)$ e:

(1) α é t e $V^M_{i,a}(A_\alpha) = 2$ ou $V^M_{i,a}(B_\alpha) = 2$, ou

(2) α é βt e não ocorre que, para algum $X \in M_\beta$, $V^M_{i,a}(A_\alpha)(x) = 1$ e $V^M_{i,a}(B_\alpha)(x) = 0$ ou vice-versa.

$V^M_{i,a}(A_\alpha \equiv B_\alpha) = 0$ se $V^M_{i,a}(A_\alpha) \neq V^M_{i,a}(B_\alpha)$ e não ocorre (1) nem (2).

(vi) $V^M_{i,a}(\hat{}A_\alpha)$ = a função F em I, cujo valor para $j \in I$ é igual a $V^M_{j,a}(A_\alpha)$

(vii) $V^M_{i,a}(\check{}A_{s\alpha}) = V^M_{i,a}(A_{s\alpha})(i)$

Def. 11: Uma ocorrência da variável x_β no termo A_α é ligada se ela ocorre em uma parte de A_α da forma $\lambda x_\beta B_\alpha$. Em caso contrário, a ocorrência é livre.

Def. 12: Dizemos que o termo B_α é livre para x no termo $A_\beta(x_\alpha)$ se nenhuma ocorrência livre de x em A(x) está numa parte $\lambda y C$, onde y ocorre livre em B.

Def. 13: Se um termo A_α não contém variáveis livres, isto é, nenhuma ocorrência de variável em A_α é livre, então A_α se diz fechado.

Se A_α contém livres exatamente as variáveis distintas x_β e y_α e, para alguma atribuição a, se $a(x) = X$ e $a(y) = Y$, podemos escrever $V^M_{i,X,Y}(A_\alpha)$ no lugar de $V^M_{i,a}(A_\alpha)$. Se A_α é fechada, $V^M_{i,a}(A_\alpha)$ é independente da atribuição a, e podemos escrever, simplesmente, $V^M_i(A_\alpha)$.

Def. 14: A classe MF dos termos modalmente fechados é a menor classe tal que:

(i) $x_\alpha \in$ MF, para toda variável x_α.

(ii) $\hat{}A \in MF$, para todo termo A_α.

(iii) $[A_{\alpha\beta}\ B_\alpha] \in MF$, se $A_{\alpha\beta}$, $B_\beta \in MF$.

(iv) $[A_\alpha \equiv B_\alpha] \in MF$, se A_α, $B_\alpha \in MF$.

(v) $\lambda x_\alpha\ A_\beta \in MF$, se $A_\beta \in MF$.

Se um termo A_α é modalmente fechado, o valor $V^M_{i,a}\ (A_\alpha)$ é independente de $i \in I$. Nesse caso, escreveremos simplesmente, $V^M_a\ (A_\alpha)$.
Escreveremos, ainda, $V^M\ (A_\alpha)$ se A_α é fechado e modalmente fechado.

Passamos, agora, a definir as noções semânticas usuais, como as de satisfação, consequência e validade.

<u>Def. 15</u>: Dada uma fórmula A, um modelo M, um índice i e uma atribuição a, dizemos que <u>A é satisfeita em M por i e a</u> se $V^M_{i,a}\ (A) = 1$. Nesse caso, escreveremos: M, i, a sat A.

Nesse caso de A ser fechada, modalmente fechada ou ambos, podemos simplificar a notação, escrevendo apenas, respectivamente:

M,i sat A,
M,a sat A,
M sat A.

<u>Def. 16</u>: Um conjunto Γ de fórmulas é <u>satisfeito em M por i e a</u>, se M,i,a sat A, para todo $A \in \Gamma$. Neste caso,escrevemos:

M, i, a sat Γ.

Def. 17: Dizemos que A é verdadeira em M, se M, i, a sat A para todo índice i e toda atribuição a.

Def. 18: Uma fórmula A é consequência semântica em IL3 de um conjunto de fórmulas se, toda vez que M, i, a sat Γ, também M, i, a sat A. Nesse caso, escrevemos $\Gamma \models_{IL3}$ (ou, simplesmente, $\Gamma \models A$).

Def. 19: Se A é consequência semântica em IL3 do conjunto vazio de fórmulas, dizemos que A é válida e escrevemos $\models A$, em vez de $\phi \models A$.

Introduzimos, a seguir, vários símbolos definidos, dentre eles, os conectivos, quantificadores e operadores modais.

Def. 20:

$$T = [\lambda x_t\, x_t \equiv \lambda x_t\, x_t]$$

$$F = [\lambda x_t\, x_t \equiv \lambda x_t\, T\,]$$

$$\sim\, = \lambda x_t[F \equiv x_t]$$

$$\& = \lambda x_t\, \lambda y_t[\lambda\, f_{tt}[fx \equiv y] \equiv \lambda f_{tt}[fT]]$$

$$\supset\, = \lambda x_t\, \lambda y_t[[x \& y] \equiv x]$$

Aplicando-se a definição 10, verificamos que, para os conectivos $\sim$, & e $\supset$, obtemos as seguintes tabelas

A	$\sim A$
0	1
1	0
2	2

$\&$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	0	0

$\supset$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	2	2	2

Definimos, a seguir, outra conjunção e uma disjunção.

<u>Def. 21</u>:

$$A \mathbin{\dot{\&}} B = ((A \& B) \equiv (B \& A)) \supset (A \& B)$$

$$A \mathbin{\dot{\vee}} B = \sim (\sim A \mathbin{\dot{\&}} \sim B)$$

As tabelas correspondentes são:

$\dot{\&}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

$\dot{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	1

Finalmente, definimos uma nova implicação:

<u>Def. 22</u>:

$$A \rightarrow B = \sim A \mathbin{\dot{\vee}} B$$

A tabela correspondente é:

$\rightarrow$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	2	1	1

Como se vê, a nova implicação é a implicação do sistema de Lukasiewicz-Tarski, o mesmo ocorrendo com a negação (ver [17]). Segue-se que os demais conectivos podem ser introduzidos pelas definições usuais, obtendo-se o sistema completo:

Def. 23: $A \vee B = (A \to B) \to B$

$A \wedge B = \sim(\sim A \vee \sim B)$

As tabelas correspondentes, como se sabe, são as seguintes:

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

Tendo, previamente, definido o "verdadeiro" e o "falso", podemos agora, definir o terceiro valor, o "indeterminado".

Def. 24:

$$I = [\lambda x_t [x_t \wedge \sim x_t] \equiv \lambda x_t F]$$

Def. 25: Dizemos que A é uma fórmula sentencial se A é formada a partir das fórmulas T, F e I, além de variáveis de tipo t, por meio dos conectivos $\equiv$, $\sim$, $\wedge$, $\to$, $\vee$.

Def. 26: Uma fórmula sentencial é uma tautologia se ela é válida em IL3.

Def. 27: Uma fórmula qualquer de IL3 é tautológica, se ela é obtida a partir de uma tautologia, por substituição uniforme de variáveis por fórmulas de IL3.

Passamos, agora, a definir os quantificadores e os operadores modais intensionais.

Def. 28:

$$\forall x_\alpha\ A = [\lambda x_\alpha\ A \equiv \lambda x_\alpha\ T]$$

$$\exists x_\alpha\ A = \sim \forall x_\alpha \sim A$$

$$[A_\alpha \equiv B_\alpha] = [{}^\wedge A_\alpha \equiv {}^\wedge B_\alpha]$$

$$\Box A = [A \equiv T]$$

$$A = \sim \Box \sim A$$

Facilmente verifica-se que, em qualquer modelo M, os conectivos, quantificadores e operadores modais preservam, pelas definições anteriores, os significados usuais.

Os operadores modais extensionais de Lukasiewicz são definidos da maneira usual:

Def. 29:

$$\nabla A = (\sim A \rightarrow A)$$

$$\Delta A = \sim (A \rightarrow \sim A)$$

Observamos, finalmente, que podemos definir um operador de Slupecki, do que resulta ser funcionalmente completo o cálculo proporcional subjacente ao nosso sistema (Cf [17]).

A definição é a seguinte:

Def. 30:

$$S = \lambda x_{t}\ I$$

CAPÍTULO II

Introduzimos, inicialmente, uma semântica generalizada para IL3, na linha de Henkin [11]. Isso é necessário, uma vez que não existe uma axiomatização completa, já que IL3 contém a teoria dos tipos. A semântica generalizada é a mesma do capítulo anterior, com as seguintes modificações:

Def. 1: Sejam D e I conjuntos não vazios. Uma estrutura baseada em D e I é uma família indexada $\{M_\alpha\}_{\alpha\varepsilon T}$ de conjuntos, tais que:

(i) $M_e = D$;

(ii) $M_t = \{0,1,2\}$;

(iii) $M_{\alpha\beta} \subseteq M_\beta^{M_\alpha}$;

(iv) $M_{s\alpha} \subseteq M_\alpha^I$.

Def. 2: Um modelo generalizado (g-modelo) de IL3, baseado em D e I é um sistema $M = (M_\alpha, m)_{\alpha\varepsilon T}$, onde:

(i) $\{M_\alpha\}_{\alpha\varepsilon T}$ é uma estrutura baseada em D e I ;

(ii) m (a função significado) é uma função que atribui a cada constante c_α um elemento de M_α^I ;

(iii) Existe uma função valoração, V^M, que atribui a cada

$i \varepsilon I$, $a \varepsilon At(M)$ e $A_\alpha \; \varepsilon \; Tm_\alpha$, um valor $V^M_{i,a} \; (A_\alpha) \varepsilon M_\alpha$, satisfazendo as condições recursivas (1) a (7) , apresentadas anteriormente.

As noções de satisfação, g-consequência semântica, g-validade e tautologia são definidas de maneira semelhante às anteriores, com adaptações óbvias.

Para simplificar, omitiremos o sobrescrito M da função V^M.

Introduzimos, agora, um sistema de axiomas para IL3. Esse sistema baseia-se no de Gallin [10], o qual, por sua vez, é uma adaptação do sistema de Henkin [12], com a simplificação de Andrews [1].

Os axiomas são os seguintes:

A1. $g_{tt}T \wedge g_{tt}F \wedge g_{tt}I \equiv \forall x_t \; [gx]$

A2. $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow [x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow f_{\alpha t}x \equiv f_{\alpha t}y]$

A3. $\forall x_\alpha \; [f_{\alpha\beta}x \equiv g_{\alpha\beta}x] \equiv [f \equiv g]$

A4. $(\lambda x_\alpha \; A_\beta(x))B_\alpha \equiv A_\beta(B_\alpha)$, onde $A_\beta(B_\alpha)$ é obtida de $A_\beta(x_\alpha)$,

substituindo-se todas as ocorrências livres de x pelo termo B e (i) B_α é livre para x_α em $A_\beta(x_\alpha)$; (ii) nenhuma ocorrência livre de x em A(x) está no escopo de ^, ou então B é modalmente fechado.

A5. $\Box[{}^\vee f_{s\alpha} \equiv {}^\vee g_{s\alpha}] \equiv [f \equiv g]$

A6. ${}^{\vee\wedge}A_\alpha \equiv A_\alpha$

A7. $[A \equiv T] \equiv A$

A8. $T \to x_t \equiv x_t$

A9. $I \to F \equiv I$

A10. $I \to T \equiv T$

A11. $I \to I \equiv T$

A12. $\neg I \equiv I$

A13. $[A_\alpha \equiv B_\alpha] \equiv [B_\alpha \equiv A_\alpha]$

A14. $\forall x_\alpha\ A(x) \to A(B_\alpha)$, nas condições de A4.

A15. $\forall x_\alpha\ [A \to B] \to [A \to \forall xB]$, se x não é livre em A.

A16. $A_{s\alpha} \equiv A'_{s\alpha} \to {}^{\vee}A \equiv {}^{\vee}A'$

A17. $\Box(A \to B) \to (A \to \Box B)$, onde A é modalmente fechado.

A18. $[(A_\alpha \equiv B_\alpha) \equiv I] \equiv I$, se α não é t nem βt .

A única regra de inferência é a seguinte:

Regra R: De $A_\alpha \equiv A'_\alpha$ e da fórmula B, inferir a fórmula B', onde B' é obtida a partir de B, substituindo-se uma ocorrência de A (não imediatamente precedida por λ) pelo termo A'.

Podemos demonstrar em IL3 as seguintes regras derivadas:

Regra R1: De $A_{t} \equiv A'_{t}$ e A, inferir A' .

Regra R2: De $A_{\alpha\beta} \equiv A'_{\alpha\beta}$, inferir $AB_{\alpha} \equiv A'B_{\alpha}$.

Regra R3: De $A_{\alpha} \equiv A'_{\alpha}$, inferir $B_{\alpha\beta}A \equiv B_{\alpha\beta}A'$.

Regra R4: De $A_{\beta} \equiv A'_{\beta}$, inferir $\lambda x_{\alpha}A \equiv \lambda x_{\alpha}A'$.

Regra R5: De $A_{\alpha} \equiv A'_{\alpha}$, inferir $^\wedge A \equiv {}^\wedge A'$.

Regra R6: De $A_{s\alpha} \equiv A'_{s\alpha}$, inferir $^\vee A \equiv {}^\vee A'$.

Regra R7: De $A_{\alpha} \equiv A'_{\alpha}$, inferir $[B_{\alpha} \equiv A] \equiv [B_{\alpha} \equiv A']$.

Regra R8: De $A_{\alpha} \equiv A'_{\alpha}$, inferir $[A \equiv B_{\alpha}] \quad [A' \equiv B_{\alpha}]$.

Além disso, temos os seguintes casos particulares de A4:

A4.1. $(\lambda x_{\alpha}\ A_{\beta})B_{\alpha} \equiv A_{\beta}$, se x_{α} não é livre em A_{β}.

A4.2. $(\lambda x_{\alpha}\ x_{\alpha})B_{\alpha} \equiv B_{\alpha}$.

A4.3. $(\lambda x_{\alpha}\ [A_{\beta\gamma}\ C_{\beta}])B_{\alpha} \equiv [(\lambda x A)B][\lambda x C)B]$

A4.4. $(\lambda x_{\alpha}\ [A_{\beta} \equiv C_{\beta}])B_{\alpha} \equiv [(\lambda x A)B \equiv (\lambda x C)B]$

A4.5. $(\lambda x_{\alpha}\ \lambda y_{\beta}\ A_{\gamma})B_{\alpha} \equiv \lambda y[(\lambda x A)B]$, se x e y são distintos e y não é livre em B.

A4.6. $(\lambda x_{\alpha}\ {}^{\vee}A_{\alpha\beta})B_{\alpha} \equiv {}^{\vee}[(\lambda x A)B]$

A4.7. $(\lambda x_{\alpha}\ {}^{\wedge}A_{\beta})B_{\alpha} \equiv {}^{\wedge}[(\lambda x A)B]$, se B é modalmente fechado.

Antes de apresentar resultados sobre o sistema proposto, introduzimos algumas definições preliminares.

Def. 1: Uma demonstração de A em IL3 é uma sequência finita de fórmulas, A_1, $A_2, \ldots, A_n$, satisfazendo às seguintes condições:

(i) A_i, $1 \leq i \leq n$ é um axioma ou foi obtido, a partir de fórmulas precedentes, pela regra R.

(ii) A_n é a fórmula A.

Def. 2: A fórmula A é um teorema (formal) de IL3 se existe uma demonstração de A em IL3. Nesse caso, escrevemos $\vdash_{IL3} A$ (ou, simplesmente, $\vdash A$).

Def. 3: Se Γ é um conjunto de fórmulas, dizemos que A é consequência sintática de Γ em IL3, se existem fórmulas $B^1, B^2, \ldots B^n$ em Γ, tais que $\vdash_{IL3} B^1 \to \ldots \to B^n \to A$. Nesse caso, escreveremos $\Gamma \vdash_{IL3} A$ (ou, simplesmente, $\Gamma \vdash A$).

Def. 4: Sendo Γ um conjunto de fórmulas, dizemos que $\Gamma \cup \{A\}$ é inconsistente se e somente se $\Gamma \vdash A \to I$.

Passamos, agora, à demonstração da correção do sistema axiomático proposto, relativamente à semântica generalizada. Não é difícil verificar a g-validade dos axiomas de IL3. Apenas o axioma A4 oferece alguma dificuldade para um teste direto de validade. Contudo, vamos introduzir alguns lemas, dos quais segue-se, imediatamente a g-validade de A4, bem como a correção da regra R.

Lema 1: Se x_α não é livre em A, então $V_{i,a}$ (A) = $V_{i,\bar{a}}$ (A), para todo $X \in M_\alpha$, tal que $\bar{a} = a(x_\alpha/X)$.

Demonstração:

(i) Se $A(x_\alpha)$ é uma constante ou uma variável diferente de x_α, então $V_{i,\bar{a}}$ (A) = $V_{i,a}$ (A), pois x_α não ocorre em A.

(ii) Se $A(x_\alpha)$ é $[C_{\gamma\delta}\ D_\gamma]$ ou é $[C \equiv D]$ ou é $^\wedge C_\alpha$ ou é $^\vee C_\alpha$, o resultado segue-se da hipótese indutiva, pois x_α não ocorre livre em C ou em D.

(iii) Se $A(x_\alpha)$ é $\lambda y_\gamma\ C_\delta$, então:

sub-caso (i):

Se $y = x_\alpha$, então $V_{i,a}$ (A) = $F: M_\gamma \to M_\delta$, tal que $F(X) = V_{i,a'}$ (C), onde $a' = a(x/X)$ e $V_{i,a'}$ (A) = $G: M_\gamma \to M_\delta$, tal que $G(X) = V_{i,\bar{a}'}$ (C), onde $\bar{a}' = \bar{a}(x/X)$. Logo, $\bar{a}' = a'$, donde se segue o resultado desejado.

sub-caso (ii):

Se $y \neq x_\alpha$, o resultado advém da hipótese indutiva.

<u>Lema 2</u>: Seja $A_\beta(B_\alpha)$ um termo obtido de $A_\beta(x_\alpha)$ pela substituição de ocorrências livres de x_α por B_α, tal que:

(i) x_α é livre para B_α

(ii) B_α é modalmente fechada ou nenhuma ocorrência de x_α se dá no escopo de ^.

Então, se $a' = a(x_\alpha/V_{i,a}\ (B_\alpha))$, então
$V_{i,a'}\ (A(x_\alpha)) = V_{i,a}\ (A(B_\alpha))$.

<u>Demonstração</u>:

Por indução no comprimento de $A(x_\alpha)$.

(i) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é constante ou variável diferente de x_α, então $A(x_\alpha) = A(B_\alpha)$. Portanto, pelo lema 1, $V_{i,a'}\ (A(x_\alpha)) = V_{i,a}\ (B_\alpha)$.

<u>Hipótese de Indução</u>: Se $a' = a(x_\alpha/V_{i,a}\ (B_\alpha))$,então $V_{i,a'}\ (C(x_\alpha)) = V_{i,a}\ (C(B_\alpha))$, onde C tem menos símbolos lógicos que $A(x)$.

(ii) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $[CD]$, $A_\beta(B_\alpha)$ é $[C(B_\alpha)D(B_\alpha)]$, o resultado segue-se da hipótese de indução.

(iii) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $y_\gamma\ C_\delta(x_\alpha)$, então:

<u>sub-caso (i)</u>:

Se $y_\gamma = x_\alpha$, pelo lema 1 tem-se o resultado, pois $A_\beta(x_\alpha) = A_\beta(B_\alpha)$.

<u>sub-caso (ii)</u>:

Se $y_\gamma \neq x_\alpha$, $A_\beta(B_\alpha)$ é $\lambda y_\gamma\ C_\delta(B_\alpha)$.

Mas, $V_{i,a'}\ (\lambda y_\gamma\ C_\delta) = G: M_\gamma \to M_\delta$, tal que, para $Y \in M_\gamma$, $G(Y) = V_{i,\bar{a}'}\ (C_\delta)$ e $\bar{a}' = a'\ (y/Y)$;

$V_{i,a}(\lambda y_\gamma\ C_\delta(B_\alpha)) = F: M_\gamma \to M_\delta$, tal que, para $Y \in M_\gamma$, $F(Y) = V_{i,\bar{a}}\ (C_\delta(B_\alpha))$ e $\bar{a} = a(y/Y)$.

Porém, para todo $Y \in M_\gamma$, $\bar{a}' = a'(y/Y)$ e $\bar{a} = a(y/Y)$, ocorre que $\bar{a}' = \bar{a}(x_\alpha(V_{i,\bar{a}}\ (B_\alpha))$. De fato, seja z uma variável qualquer.

Se $z \neq y$ e $z \neq x_\alpha$, então

$\bar{a}'(z) = a'(z) = a(z) = \bar{a}(z) = \bar{a}(x_\alpha/V_{i,a}\ (B_\alpha))(z)$

Se $z = y$, então $z \neq x_\alpha$. Logo,

$\bar{a}'(y) = Y = \bar{a}(x_\alpha/V_{i,a}\ (B_\alpha))(y_\alpha)$

Se $z = x_\alpha$, então

$\bar{a}'(x_\alpha) = \cancel{a'(x_\alpha) =} V_{i,a}(B_\alpha) = V_{i,\bar{a}}(B_\alpha) = \bar{a}(x_\alpha/V_{i,a}/B_\alpha)(x_\alpha)$

Como y não ocorre livre em B_α, segue-se, pelo lema 1, que $V_{i,a}\ (B_\alpha) = V_{i,\bar{a}}\ (B_\alpha)$.

Portanto, pela hipótese indutiva, $G(Y) = F(Y)$, para todo $Y \in M_\gamma$, i.é., $V_{i,a'}\ (\lambda y_\gamma\ C_\delta) = V_{i,a}\ (\lambda y_\gamma\ C_\delta(B_\alpha))$.

Logo, $V_{i,a'}\ (A_\beta(x_\alpha)) = V_{i,a}\ (A_\beta(B_\alpha))$.

(iv) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $[C \equiv D]$, o resultado advém da hipótese indutiva.

(v) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $^\wedge C_\gamma$, então:

sub-caso (i):

Se $A_\beta(x_\alpha)$ não contém x_α livre, pelo lema 1, tem-se o resultado.

Sub-caso (ii):

Se $V_{i,a}(B_\alpha) = V_{i,a}(B_\alpha)$, para todo i,j,a,

$V_{i,a'}(\hat{}C_\gamma) = F: I \to M_\gamma$, tal que $F(j) = V_{j,a'}(C_\gamma(x_\alpha))$;

$V_{i,a'}(\hat{}C_\gamma(B_\alpha)) = G: I \to M_\gamma$, tal que $G(j) = V_{j,a}(C_\gamma(B_\alpha))$.

Como $V_{j,a}(B_\alpha) = V_{i,a}(B_\alpha)$, para todo $j \in I$, tem-se que $a' = a(x_\alpha / V_{j,a}(B_\alpha))$. Logo, por hipótese de indução, $V_{j,a'}(C_\gamma(x_\alpha)) = V_{j,a}(C_\gamma(B_\alpha))$ e, portanto, $F(j) = G(j)$ para todo $j \in I$, ou seja, $V_{i,a}(\hat{}C_\gamma) = V_{i,a'}(\hat{}C_\gamma(B_\alpha))$.

(vi) Se $A(x_\alpha)$ é $\check{}C(x_\alpha)$, o resultado advém da hipótese indutiva.

Lema 3: Se $V_{i,a}(B_\alpha) = V_{i,a}(C_\alpha)$, para todo $i \in I$ e $a \in At(M)$, então $V_{i,a}(A_\beta(B_\alpha)) = V_{i,a}(A_\beta(C_\alpha))$, onde $A_\beta(B_\alpha)$ e $A_\beta(C_\alpha)$ vêm de $A(x_\alpha)$, substituindo-se todas as ocorrências livres de x_α por B_α e C_α, respectivamente.

Demonstração:

Por indução no comprimento de $A(x_\alpha)$.

(i) Se $A(x_\alpha)$ é uma constante ou uma variável diferente de x_α, então $A(B_\alpha) = A(C_\alpha)$, donde $V_{i,a}(A(B_\alpha)) = V_{i,a}(A(C_\alpha))$; Se $A(x_\alpha)$ é x_α, então $A(B_\alpha)$ é B_α e $A(C_\alpha)$ é C_α. Assim, por hipótese, $V_{i,a}(A(B_\alpha)) = V_{i,a}(A(C_\alpha))$.

(ii) Se $A(x_\alpha)$ é $[D_\gamma\ D'_\delta]$, o resultado advém da hipótese indutiva.

(iii) Se $a(x_\alpha)$ é $\lambda y_\delta\ D_\gamma(x_\alpha)$, se $x_\alpha = y_\alpha$, então nada há a substituir e $A(B_\alpha)$ é $A(C_\alpha)$. Se $x_\alpha \neq y_\alpha$, $A(B_\alpha) = \lambda y_\delta\ D_\gamma(B_\alpha)$ e $A(C_\alpha) = \lambda y_\delta\ D_\gamma\ (C_\alpha)$.

Mas, $V_{i,a}\ (\lambda y_\delta\ D_\gamma\ (B_\alpha)) = F$ tal que $F(Y) = V_{i,a'}\ (D_\gamma(B_\alpha))$ e $V_{i,a}\ (\lambda y_\delta\ D_\gamma(C_\alpha)) = G$ tal que $G(Y) = V_{i,a'}(D_\delta(C_\alpha))$, onde $a' = a(y/Y)$ e $Y \in M_\gamma$.

Como $V_{i,a'}(B_\alpha) = V_{i,a'}(C_\alpha)$, para todo $Y \in M_\gamma$, pois y não ocorre livre em C e nem em D, pela hipótese indutiva, $V_{i,a}(A(B_\alpha)) = V_{i,a}(A(C_\alpha))$.

(iv) Se $A(x_\alpha)$ é $[D_\gamma \equiv D'_\gamma]$ ou é $\check{}D_\gamma$, o resultado segue-se da hipótese indutiva.

(v) Se $A(x_\alpha)$ é $\hat{}D_\gamma(x_\alpha)$, então $A(B_\alpha)$ é $\hat{}D_\gamma(B_\alpha)$ e $A(C_\alpha)$ é $\hat{}D_\gamma(B_\alpha)$.

Ora, $V_{i,a}(\hat{}D(B_\alpha)) = F: I \to M_\gamma$, tal que, para $j \in I$, $F(j) = V_{j,a}(D(B_\alpha))$.

Por outro lado, $V_{i,a}(\hat{}D(C_\alpha)) = G: I \to M_\gamma$, tal que, para $j \in I$, $G(j) = V_{j,a}(D(C_\alpha))$.

Como, para todo $j \in I$, $V_{j,a}(B_\alpha) = V_{j,a}(C_\alpha)$, tem-se, pela hipótese indutiva, que $V_{i,a}(A(B_\alpha)) = V_{i,a}(A(C_\alpha))$.

Passemos, então, a demonstrar a correção do sistema IL3 relativamente à semântica generalizada proposta.

Teorema 1: (Teorema da g-validade):

Se $\vdash$ A em IL3, então $\models_g$ A em IL3.

Demonstração:

Mostramos que todos os axiomas são g-válidos e que a regra R preserva a g-validade. Vamos oferecer a demonstração para alguns dos axiomas. Para os demais, o resultado é imediato.

A1. $g_{tt}T \wedge g_{tt}F \wedge g_{tt}I \equiv \forall x_t\ [gx]$

1) Suponhamos que, para algum valor de x_t, $V_{i,a}(gx) = 0$. Então, $V_{i,a}(\lambda x_t[gx] \equiv \lambda x_t T) = 0$. Nesse caso, $V_{i,a}(gT) = 0$ ou $V_{i,a}(gF) = 0$ ou $V_{i,a}(gI) = 0$.

2) Se não ocorre a hipótese do item anterior, então temos dois casos a considerar:

2.1) Se, para qualquer valor de x_t, $V_{i,a}(gx) = 1$, segue-se imediatamente que $V_{i,a}(gT \wedge gF \wedge gI) = 1$.

2.2) Se, para algum valor de x_t, $V_{i,a}(gx) = 2$, então $V_{i,a}(\lambda x_t[gx] \equiv \lambda x_t T) = 2$. Nesse caso, $V_{i,a}(gT \wedge gF \wedge gI) = 2$.

A2. $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow [[x_\alpha \equiv y_\alpha] \rightarrow [f_{\alpha t}x \equiv f_{\alpha t}y]]$

Se $\alpha t = tt$ e $V_{i,a}(x_\alpha \equiv y_\alpha) = 2$, então

$V_{i,a}(x_\alpha) = 2$ e $V_{i,a}(y_\alpha) = 1$ ou vice-versa, ou então,

$V_{i,a}(x_\alpha) = 2$ e $V_{i,a}(y_\alpha) = 0$ ou vice-versa.

Assim, é possível que se tenha $V_{i,a}(fx \equiv fy) = 0$.

Segue-se, entretanto, que $V_{i,a}(x_\alpha \equiv y_\alpha \to ((x_\alpha \equiv y_\alpha) \to fx \equiv fy)) = 1$.

A3. $\forall x_\alpha\ [f_{\alpha\beta}x \equiv g_{\alpha\beta}x] \equiv [f \equiv g]$

$V_{i,a}\ (\ x_\alpha\ [f_{\alpha\beta}x \equiv g_{\alpha\beta}x]) = 1$ see $V_{i,a'}(f_{\alpha\beta})[a'(x)] =$

$V_{i,a}\ (f_{\alpha\beta}[a'(x)]$ para todo $a' = a(x/X)$, onde $X \in M_\alpha$ see

$V_{i,a}\ (g) = V_{i,a}\ (f)$

A4. $(\lambda x_\alpha\ A_\beta(x))B_\alpha \equiv A_\beta(B_\alpha)$

$V_{i,a}((\lambda x_\alpha\ A_\beta(x_\alpha))B_\alpha) = V_{i,a}\ (\lambda x_\alpha\ A_\beta(x_\alpha))[V_{i,a}(B_\alpha)]$.

Mas, $V_{i,a}(\lambda x_\alpha\ A_\beta(x_\alpha)) = F: M_\alpha \to M_\beta$, tal que $F(X) =$

$V_{i,a'}(A_\beta(x_\alpha))$ e $F[V_{i,a}(B_\alpha)] = V_{i,a'}(A_\beta(x_\alpha))$, onde

$a' = a(x_\alpha/V_{i,a}(B_\alpha))$.

Assim, pelo lema 2, temos que:

$V_{i,a'}(A_\beta(x_\alpha)) = V_{i,a}(A_\beta(B_\alpha))$.

A5. $\Box[{}^\vee f_{s\alpha} \equiv {}^\vee g_{s\alpha}] \equiv [f \equiv g\ ]$

(i) $\alpha \neq t$

$V_{i,a}(\Box[{}^\vee f_{s\alpha} \equiv {}^\vee g_{s\alpha}]) = 1$ see, para todo $j \in I$.

$V_{j,a}({}^\vee f) = V_{j,a}({}^\vee g)$ see $V_{j,a}(f) = V_{j,a}(g)$

see $V_{i,a}(f) = V_{i,a}(g)$, pois g e f são modalmente fechados.

(ii) $\alpha = t$

Nesse caso, $V_{i,a}(\Box[{}^{\vee}f_{st} \equiv {}^{\vee}g_{st}]) = 2$ see, para todo $j \in I$, tal que

$V_{j,a}({}^{\vee}f) \neq V_{j,a}({}^{\vee}g)$, $V_{j,a}(f)(g) = 2$ e

$V_{j,a}(g)(j) \neq 2$ see

$V_{i,a}(f \equiv g) = 2$.

A6. ${}^{\vee\wedge}A_{\alpha} \equiv A_{\alpha}$

$V_{i,a}({}^{\vee\wedge}A_{\alpha}) = V_{i,a}({}^{\wedge}A_{\alpha})(i) = F(i) = V_{i,a}(A_{\alpha})$

A14. $\forall x_{\alpha}(A(x) \to A(B_{\alpha}))$.

(i) $V_{i,a}(A(B_{\alpha})) = 0$

Seja $a' = a(x/V_{i,a}(B_{\alpha}))$.

Pelo lema 2, $V_{i,a'}(A(x)) = V_{i,a}(A(B_{\alpha})) = 0$.

Logo, $V_{i,a}(\forall xA(x)) = 0$

(ii) $V_{i,a}(A(B_{\alpha})) = 2$.

Então, pelo lema 2, $V_{i,a'}(A(x)) = 2$, onde

$a' = a(x/V_{i,a}(B_{\alpha}))$.

Logo, $V_{i,a}(\forall xA) \neq 1$ e $V_{i,a}(\forall xA \to A(B_{\alpha})) = 1$.

A15. $\forall x_\alpha [A \to B] \to [A \to \forall xB]$.

(i) $V_{i,a}(A \to \forall xB) = 0$.

Então, $V_{i,a}(A) = 1$ e $V_{i,a}(\forall xB) = 0$.

Logo, $V_{i,a'}(B) = 0$, para algum $X \in M_\alpha$ e $a' = a(x/X)$.

Mas, $V_{i,a'}(A) = V_{i,a}(A) = 1$ pelo lema 1 e a hipótese de que x não ocorre livre em A.

Então, $V_{i,a'}(A \to B) = 0$, donde se segue que:

$V_{i,a}(\forall x(A \to B)) = 0$.

(ii) $V_{i,a}(A \to \forall xB) = 2$.

(a) $V_{i,a}(A) = 1$ e $V_{i,a}(\forall xB) = 2$.

$V_{i,a'}(B) = 2$, para algum $X \in M_\alpha$ e $a' = a(x/X)$.

$V_{i,a'}(A) = V_{i,a}(A) = 1$, pelo lema 1 e hipótese.

$V_{i,a'}(A \to B) = 2$ e, portanto, $V_{i,a}(\forall x(A \to B)) = 2$.

(b) $V_{i,a}(A) = 2$ e $V_{i,a}(\forall xB) = 0$

$V_{i,a'}(B) = 0$, para algum $X \in M_\alpha$ e $a' = a(x/X)$.

Como $V_{i,a'}(A) = V_{i,a}(A) = 2$, segue-se que

$V_{i,a'}(A \to B) = 2$.

Logo, $V_{i,a}(\forall x(A \to B)) \neq 1$.

A16. $A_{s\alpha} \equiv A'_{s\alpha} \to {}^{\vee}A \equiv {}^{\vee}A'$.

(i) $\alpha \neq t$.

Temos:

$V_{i,a}(\check{}A) = V_{i,a}(A)(i) = V_{i,a}(A')(i) = V_{i,a}(\check{}A')$.

(ii) $\alpha = t$

(a) $V_{i,a}(\check{}A_{st} \equiv \check{}A'_{st}) = 0$.

$V_{i,a}(A)(j) = 0$ e $V_{i,a}(A')(j) = 1$ (ou vice-versa), para algum $j \in I$.

Assim, $V_{i,a}(A \equiv A') = 0$.

(b) $V_{i,a}(\check{}A_{st} \equiv \check{}A'_{st}) = 2$.

$V_{i,a}(A) \neq V_{i,a}(A')$ e não existe $i \in I$, tal que

$V_{i,a}(A)(i) = 0$ e $V_{i,a}(A')(i) = 1$ (ou vice-versa).

Logo, $V_{i,a}(A \equiv A') = 2$.

A demonstração da g-validade de A17 é formalmente análoga à de A15. Observe-se que o operador de necessidade funciona como um quantificador sobre índices.

Mostramos, finalmente, que a regra R preserva a g- validade. De fato, suponhamos que $\models_g A \equiv A'$ e $\models_g B$, nas condições da regra.

Como $V_{i,a}(A) = V_{i,a}(A')$, para qualquer M, i, a, segue - se, pelo lema 3, que $V_{i,a}(B) = V_{i,a}(B') = 1$, para qualquer M, i, a.

Fica, assim, demonstrado o Teorema da g-validade,do qual seguem-se, imediatamente, os seguintes corolários:

<u>Corolário 1</u>:

Se $\Gamma \vdash A$ em IL3. então $\Gamma \models_g A$ em IL3.

<u>Corolário 2</u>:

Se Σ é g-satisfazível, então Σ é consistente.

CAPÍTULO III

Retornamos à axiomática de IL3, apresentando uma lista de metoteoremas, com o objetivo de fornecer uma compreensão maior do sistema. Vários desses resultados serão utilizados no próximo capítulo, quando demonstraremos um teorema do completude generalizada.

T1. $\vdash A_\alpha \equiv A_\alpha$

T2. $\vdash T$

T3. $\vdash \forall x_\alpha\ T$

T4. $\vdash \Box T$

T5. Se $\vdash A_\alpha \equiv B_\alpha$, então $\vdash B_\alpha \equiv A_\alpha$

T6. Se $\vdash A_\alpha \equiv B_\alpha$ e $\vdash B_\alpha \equiv C_\alpha$, então $\vdash A_\alpha \equiv C_\alpha$

T7. Se $\vdash \forall x_\alpha\ A_t(x_\alpha)$, então $\vdash A_t(B_\alpha)$, nas condições de A4

T8. Se $\vdash A$, então $\vdash \forall x_\alpha\ A$

T9. Se $\vdash A_t(x)$, então $\vdash A_t(B_\alpha)$, nas condições de A4

T10. $\vdash \lambda x_\alpha\ A_\beta(x_\alpha) \equiv \lambda y_\alpha\ A_\beta(y_\alpha)$, onde A(x) e A(y) são idênticas, exto que A(x) tem ocorrências livres de x onde A(y) tem ocorrências livres de y, e vice-versa.

T11. $\vdash \forall x_\alpha\ A(x) \equiv \forall y_\alpha\ A(y)$, nas condições de T10

T12. $\vdash \forall x_\alpha\ [A_{\alpha\beta}\ x_\alpha \equiv B_{\alpha\beta}\ x_\alpha] \equiv [A \equiv B]$, onde x não ocorre livre em A nem em B.

T13. Se $\vdash A(T)$, $\vdash A(F)$ e $\vdash A(I)$, então $\vdash A\ (x_t)$, onde $A(T)$, $A(F)$ e $A(I)$ são obtidos de $A(x_t)$, substituindo-se todos as ocorrências livres de x por T, F e I, respectivamente.

T14. $\vdash x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow [x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow [f_{\alpha\beta}x \equiv f_{\alpha\beta}y]]$

T15. $[f_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} \rightarrow [fx_\alpha \equiv gx_\alpha]]$

T16. $\vdash F \rightarrow x_t$

T17. (a) $\vdash[T \rightarrow T] \equiv T; \vdash[T \rightarrow F] \equiv F; \vdash[T \rightarrow I] \equiv I; \vdash[F \rightarrow T] \equiv T;$

$\vdash[F \rightarrow F] \equiv T; \vdash[F \rightarrow I] \equiv T; \vdash[I \rightarrow T] \equiv T; \vdash[I \rightarrow F] \equiv T;$

$\vdash[I \rightarrow I] \equiv T.$

(b) $\vdash\neg F \equiv T; \vdash\neg T \equiv F; \vdash\neg I \equiv I$

(c) $\vdash[F \vee F] \equiv F; \vdash[T \vee F] \equiv T; \vdash[I \vee F] \equiv I; \vdash[F \vee T] \equiv T;$

$\vdash[T \vee T] \equiv T; \vdash[I \vee T] \equiv T; \vdash[F \vee I] \equiv I; \vdash[T \vee I] \equiv T;$

$\vdash[I \vee I] \equiv I.$

(d) $\vdash[F \wedge F] \equiv F; \vdash[T \wedge F] \equiv F; \vdash[I \wedge F] \equiv F; \vdash[F \wedge T] \equiv F;$

$\vdash[T \wedge T] \equiv T; \vdash[I \wedge T] \equiv I; \vdash[F \wedge I] \equiv F; \vdash[T \wedge I] \equiv I;$

$\vdash[I \wedge I] \equiv I.$

(e) $\vdash[F \equiv F] \equiv T; \vdash[T \equiv F] \equiv F; \vdash[I \equiv F] \equiv I; \vdash[F \equiv T] \equiv F;$

$\vdash[T \equiv T] \equiv T; \vdash[I \equiv T] \equiv I; \vdash[F \equiv I] \equiv I; \vdash[T \equiv I] \equiv I;$

$\vdash[I \equiv I] \equiv T.$

T18. $\vdash A$ se A é uma tautologia ou A é tautológica.

T19. $\vdash A(B_\alpha) \rightarrow \exists x\ A(x)$, nas condições de A4.

T20. $\vdash \exists x_t\, x_t$

T21. $\vdash \exists x_t \neg x_t$

T22. $\vdash \exists x_\alpha\, [A \equiv x_\alpha]$, onde x_α não ē livre am A.

T23. $\vdash \exists x_t\, [x_t \equiv I]$

T24. $\vdash [B_\alpha \equiv C_\alpha] \rightarrow [[B_\alpha \equiv C_\alpha] \rightarrow [A_\beta(B) \equiv A_\beta(C)]]$, nas condições de **A4.**

T25. $\vdash [B_\alpha \equiv B'_\alpha] \rightarrow [[B_\alpha \equiv B'_\alpha] \rightarrow [A_{\alpha\beta}B \equiv A_{\alpha\beta}B']]$

T26. $\vdash [[A_{\alpha\beta} \equiv A'_{\alpha\beta}] \rightarrow [AB_\alpha \equiv A'B_\alpha]]$

T27. $\vdash \Box A \rightarrow A$

T28. $\vdash A \rightarrow \Box A$, se A ē modalmente fechado

T29. $\vdash A \rightarrow \Diamond A$

T30. Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$ (regra de Gödel)

T31. $\vdash \neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$

T32. $\vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

T33. $\vdash \neg \Box A \equiv \Diamond \neg A$

T34. $\vdash \neg \Diamond A \equiv \Box \neg A$

T35. $\vdash \Box \Diamond A \equiv \Diamond A$

T36. $\vdash \Box \Box A \equiv \Box A$

T37. $\vdash \Diamond \Box A \equiv \Box A$

T38. $\vdash \Diamond \Diamond A \equiv \Diamond A$

T39. $\vdash \Box[A \wedge B] \equiv \Box A \wedge \Box B$

T40. $\vdash \Diamond[A \vee B] \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$

T41. $\vdash \Box A \vee \Box B \rightarrow \Box[A \vee B]$

T42. $\vdash \Diamond[A \wedge B] \rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B$

T43. $\vdash \Box[A \rightarrow B] \rightarrow [\Diamond A \rightarrow \Diamond B]$

T44. $\vdash \Box \forall x_\alpha A \equiv \forall x \Box A$

T45. $\vdash \Diamond \exists x_\alpha A \equiv \exists x \Diamond A$

T46. $\vdash \exists x_\alpha \Box A \rightarrow \Box \exists x A$

T47. $\vdash \Diamond \forall x_\alpha A \rightarrow \forall x \Diamond A$

T48. $\vdash \Box(B \equiv C) \equiv (B \equiv C)$

T49. $\vdash {}^\wedge A_\alpha \equiv f_{s\alpha} \rightarrow \Box(A_\alpha \equiv {}^\vee f_{s\alpha})$

T50. Se $A \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash A$

T51. Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash A$

T52. Se $\vdash A$, então $\Gamma \vdash A$

T53. Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, então $\Gamma \vdash B$

T54. Se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \vdash \forall x_\alpha A$, onde x não ocorre livre em Γ

T55. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ se e somente se $\Gamma \vdash A \rightarrow \ldots \rightarrow A \rightarrow B$ (teorema de dedução)

T56. $\Gamma \vdash A \rightarrow I$ se e somente se $\Gamma \vdash [A \equiv F] \vee [A \equiv I]$

T57. $\vdash [A \rightarrow \forall x_\alpha B] \equiv \forall x [A \rightarrow B]$, se x não ocorre livre em A

T58. $\vdash \forall x_\alpha [A \to B] \to [\forall x A \to \forall x B]$

T59. $\vdash \forall x_\alpha [A \to B] \equiv [\exists x A \to B]$, se x não ocorre livre em B

T60. $\vdash A \wedge \exists x_\alpha B \to \exists x [A \wedge B]$

T61. $\vdash \Box \neg \exists x_\alpha [A \wedge B] \to \Box \neg [A \wedge \exists x B]$, se x não ocorre livre em A

T62. $\vdash \Diamond [A \wedge \exists x_\alpha B] \to \Diamond \exists x [A \wedge B]$, se x não ocorre livre em A

T63. $\vdash [I \to \Box B] \to \Box [I \to B]$

T64. $\vdash \Box [I \to \neg [B \wedge A]] \to \Box [I \to \neg [B \wedge \neg A]] \to \Box [I \to \neg [B \wedge [A \equiv I]]] \to$
$\Box [I \to \neg B]$

T65. $\vdash \Box I \equiv I$

T66. $\vdash [\forall x_\alpha A \wedge \exists x_\alpha B] \to [[\forall x A \wedge \exists x B] \to \exists x [A \wedge B]]$

T67. $\vdash \exists x_\alpha [A \equiv x \wedge \forall x_\alpha^o \ldots \forall x_\alpha^{n-1} [x \equiv x]]$, onde x não é livre em A e x é distinta de $x^o, \ldots, x^{n-1}$.

Fornecemos as demonstrações de alguns dos resultados apresentados acima. Vamos nos ater, especialmente, àqueles que se afastam das demonstrações de teoremas análogos de IL. As demonstrações dos outros resultados podem, em geral, ser reconstruídas, consultando-se Henkin [12] e Andrews [1]. As demonstrações das regras R1 a R8 são imediatas, usando-se T1 e a regra R.

T8. Se $\vdash A$, então $\vdash \forall x_\alpha A$

(1) A Hip.

(2) $[A \equiv T] \equiv A$ A7

(3) $[A \equiv T]$ (1), (2) x R

(4) $\lambda x'_{\alpha}\ A \equiv \lambda x_{\alpha}\ T$ (3) x R4

(5) $\forall x_{\alpha}\ A$ (4) x Def. $\forall$

T9. Se $\vdash A_{t}(x)$, então $\vdash A_{t}(B_{\alpha})$, nas condições de A4.

(1) $A_{t}(x)$ Hip.

(2) $\forall x\ A_{t}(x)$ (1) x T8

(3) $A_{t}(B_{\alpha})$ (2) x T7

T13. Se $\vdash A_{t}(T), \vdash A_{t}(F)$ e $\vdash A_{t}(I)$, então $\vdash A_{t}(x_{t})$

(1) $A(T)$ Hip.

(2) $A(F)$ Hip.

(3) $A(I)$ Hip.

(4) $[\lambda x_{t} A(x_{t})]T \equiv A(T)$ A4

(5) $[\lambda x_{t} A(x_{t})]F \equiv A(F)$ A4

(6) $[\lambda x_{t} A(x_{t})]I \equiv A(I)$ A4

(7) $[\lambda x_{t} A(x_{t})]T \wedge [\lambda x_{t} A(x_{t})]F \wedge [\lambda x_{t} A(x_{t})]I$ (4),(5),(6) x Taut.

(8) $[\lambda x\ A(x_{t})]T \wedge [\lambda x\ A(x_{t})]F \wedge [\lambda x\ A(x_{t})]I \equiv$
$\forall x_{t}[[\lambda x_{t} A(x_{t})]x_{t}]$ A1 x T9

(9) $\forall x_{t}[[\lambda x_{t} A(x_{t})]x_{t}]$ (7),(8) x R

(10) $\forall x_{t}\ A(x_{t})$ (9), A4 x R

(11) $A(x_{t})$ (10) x T7

T14. $\vdash x_{\alpha} \equiv y_{\alpha} \rightarrow [x_{\alpha} \equiv y_{\alpha} \rightarrow [f_{\alpha\beta}x \equiv f_{\alpha\beta}y]]$

(1) $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow f_{\alpha t} x \equiv f_{\alpha t} y$ A2

(2) $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow (\lambda z_\alpha (f_{\alpha\beta} z \equiv f_{\alpha\beta} y) x_\alpha \equiv$
$\lambda z_\alpha (f_{\alpha\beta} z \equiv f_{\alpha\beta} y) y)$ A2 x T9

(3) $f_{\alpha\beta} y \equiv f_{\alpha\beta} y$ T1

(4) $(f_{\alpha\beta} y \equiv f_{\alpha\beta} y) \equiv T$ (3),A7 x R

(5) $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow ((f_{\alpha\beta} x \equiv f_{\alpha\beta} y) \equiv T)$ (2),(3),(4),S4xR

(6) $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow f_{\alpha\beta} x \equiv f_{\alpha\beta} y$ (1),A4 x R

T16. $\vdash F \rightarrow x_t$

(1) $\forall x_t \, x_t \rightarrow x_t$ A13

(2) $F \rightarrow x_t$ (1), def. de $\forall$ e F

T18. $\vdash A$ se A é uma tautologia.

Demonstração: Por indução no número de ocorrências de variáveis livres em A.

(a) A não contém variáveis livres, isto é, contém apenas T, F e I, além dos conectivos. Nesse caso, podemos facilmente mostrar que $\vdash A \equiv T$ ou $\vdash A \equiv F$ ou $\vdash A \equiv I$, pois se A for atômica, o resultado sai de T1. E, se A for molecular, por T1, $\vdash A \equiv A$ e, por hipótese de indução, cada componente B de A é tal que $\vdash B \equiv I$ ou $\vdash B \equiv T$ ou $\vdash B \equiv F$. Assim, por T17, $\vdash A \equiv T$ ou $\vdash A \equiv F$ ou $\vdash A \equiv I$. Como A é tautologia, segue-se, da correção, que $\vdash A \equiv T$. Portanto, $\vdash A$, por A7 e R.

(b) A é $A(x)$. Seja A' igual a $A(T)$, A'' igual a $A(F)$ e A''' igual a $A(I)$. As três fórmulas são tautologias, pois, em caso contrário, para alguma atribuição a, que desse a x_t o valor 0 , 1 ou 2 , $V_{i,a}(A(x)) \neq 1$. Logo, por hipótese de indução , temos: $\vdash A'$, $\vdash A''$ e $\vdash A'''$. Assim, por T13, segue-se que $\vdash A$.

T20. $\vdash \exists x_t \, x_t$

(1)	$T \rightarrow \exists x_t \, x_t$	T19
(2)	T	T2
(3)	$\exists x_t \, x_t$	(1), (2), Taut.

T21. $\vdash \exists x_t \neg x_t$

(1)	$F \equiv F$	T1
(2)	$\lambda x_t \, [F \equiv x_t]F \equiv [F \equiv F]$	A4
(3)	$\lambda x_t \, [F \equiv x_t]F$	(1),(2) x R
(4)	$\neg F$	(3),Def. $\neg$
(5)	$\neg[\lambda x_t \, x_t \equiv \lambda x_t \, T]$	(4),Def. F
(6)	$\neg\forall x_t \, x_t$	(5),Def. $\forall$
(7)	$\neg\forall x_t \neg\neg x_t$	(6) x Taut.
(8)	$\exists x_t \neg x_t$	(7) x Def. $\exists$

T22. $\vdash \exists x_\alpha \, [A_\alpha \equiv x]$, onde x não é livre em A.

(1) $A_\alpha \equiv A_\alpha$ T1

(2) $A_\alpha \equiv A_\alpha \to \exists x_\alpha \, [A_\alpha \equiv x_\alpha]$ T19

(3) $\exists x_\alpha \, [A_\alpha \equiv x_\alpha]$ (1),(2), Taut.

T24. $\vdash B_\alpha \equiv C_\alpha \to [[B_\alpha \equiv C_\alpha] \to [A_\beta(B) \equiv A_\beta(C)]$ nas condições de A4.

Demonstração: Por indução no comprimento de $A_\beta(x_\alpha)$:

Caso Especial: x_α não ocorre livre em $A(x)$ e, portanto,

$A = A(B) = A(C)$.

Por T1, $A_\alpha \equiv A_\alpha$

Logo, por tautologia,

$B \equiv C \to [[B \equiv C] \to [A_\alpha \equiv A_\alpha]]$

i) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é constante ou variável diferente de x_α, recaímos no caso especial.

ii) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é x_α, $A_\beta(B_\alpha)$ é B_α e $A_\beta(C_\alpha)$ é C_α.

Assim, por tautologia, temos que

$B_\alpha \equiv C_\alpha \to [B_\alpha \equiv C_\alpha \to B_\alpha \equiv C_\alpha]$

iii) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $[D_{\gamma\beta}(x) \; D'_\gamma(x)]$, temos o seguinte:

(1) $B_\alpha \equiv C_\alpha \to ([B_\alpha \equiv C_\alpha] \to \lambda x_\alpha [D(x) \; D'(x)] B_\alpha \equiv \lambda x_\alpha \, [D(x) \; D'(x)] C_\alpha)$, por T14 x T9

(2) $B_\alpha \equiv C_\alpha \to [B_\alpha \equiv C_\alpha \to [D(B_\alpha) \; D'(B_\alpha)] \equiv [D(C_\alpha) \; D'(C_\alpha)]]$, por (1) x A4

iv) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $^\wedge D(x_\alpha)$, então, ou B_α e C_α são modalmente fe chados, ou x não ocorre livre. Nessa última hipótese, recaimos no caso especial. Assim, suponhamos que B_α e C_α são modalmente fechados. Temos:

(1) $B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow [B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow \lambda x_\alpha[{}^\wedge D(x)]B_\alpha \equiv \lambda x_\alpha[{}^\wedge D(x)]C_\alpha]$,

por T14 x T9

(2) $B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow [B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow {}^\wedge D(B_\alpha) \equiv {}^\wedge D(C_\alpha)]$

por (1) x A4

(v) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é ${}^\vee D(x_\alpha)$, o raciocínio é análogo ao do item anterior.

(vi) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $D(x) \equiv D'(x)$, então

$A_\beta(B_\alpha)$ é $D(B_\alpha) \equiv D'(B_\alpha)$ e

$A_\beta(C_\alpha)$ é $D(C_\alpha) \equiv D'(C_\alpha)$.

Temos o seguinte:

(1) $B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow [B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow \lambda x_\alpha[D(x) \equiv D'(x)]B_\alpha \equiv \lambda x_\alpha[D(x) \equiv D'(x)]C_\alpha]$

por T14 x T9

(2) $B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow [B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow [D(B_\alpha) \equiv D'(B_\alpha)] \equiv [D(C_\alpha) \equiv D'(C_\alpha)]]$

por (1) x A4

(vii) Se $A_\beta(x_\alpha)$ é $\lambda y_\gamma\ D_\sigma(x_\alpha)$, β é $\gamma\sigma$ e $y \neq x$, pois, do contrário, tem-se o caso especial. Então:

(1) $B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow [B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow D(B_\alpha) \equiv D(C_\alpha)]$, por hipótese indutiva

(2) $\forall y[B_\alpha \equiv C_\alpha \to [B_\alpha \equiv C_\alpha \to D(B_\alpha) \equiv D(C_\alpha)]]$, por T8

(3) $B_\alpha \equiv C_\alpha \to [B_\alpha \equiv C_\alpha \to \forall y[D(B_\alpha) \equiv D(C_\alpha)]]$, por A15, já que y não ocorre livre em B nem em C, pois, por hipótese, tais termos são livres para x.

(4) $[\forall y(\lambda y D(B_\alpha)y \equiv \lambda y D(C_\alpha)y)] \equiv [\lambda y D(B_\alpha) \equiv \lambda y D(C_\alpha)]$,
por A3 x T9

(5) $\forall y(D(B_\alpha) \equiv D(C_\alpha)) \equiv [\lambda y D(B_\alpha) \equiv \lambda y D(C_\alpha)]$,
por (4), A4 x R

(6) $B_\alpha \equiv C_\alpha \to [B_\alpha \equiv C_\alpha \to \lambda y D(B_\alpha) \equiv \lambda y D(C_\alpha)]$,
por (3) e (5) x R

T27. $\vdash \Box A \to A$

(1) $\hat{}A \equiv \hat{}T \to {}^{\vee}{}^{\wedge}A \equiv {}^{\vee}{}^{\wedge}T$ A 16

(2) $\hat{}A \equiv \hat{}T \to A \equiv T$ (1) x A6

(3) $\Box A \to A$ (2) x Def. $\Box$ e $\equiv$, R, A7

T30. Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$

(1) A Hip.

(2) $A \equiv T$ (1) x A7, R

(3) $\hat{}A \equiv \hat{}T$ (2) x R4

(4) $A \equiv T$ (3) x Def. $\equiv$

(5) $\Box A$ (4) x Def. $\Box$

T48. $\vdash \Box(B_\alpha \equiv C_\alpha) \equiv (B \equiv C)$

(1) $\Box({}^{\vee}{}^{\wedge}B \equiv {}^{\vee}{}^{\wedge}C) \equiv (\hat{}B \equiv \hat{}C)$ A5 x T9

(2) $^{\vee\wedge}B \equiv B$ A6

(3) $^{\vee\wedge}C \equiv C$ A6

(4) $\Box(B \equiv C) \equiv (^{\wedge}B \equiv {^{\wedge}C})$ (1),(2),(3) x R

(5) $\Box(B \equiv C) \equiv (B \cong C)$ (4), Def.

T49. $\vdash {^{\wedge}A_\alpha} \equiv f_{s\alpha} \rightarrow \Box(A_\alpha \equiv {^{\vee}f_{s\alpha}})$

(1) $\Box(^{\vee\wedge}A_\alpha \equiv {^{\vee}f_{s\alpha}}) \equiv (^{\wedge}A_\alpha \equiv f_{s\alpha})$ A5 x T9

(2) $^{\vee\wedge}A \equiv A$ A6

(3) $\Box(A \equiv {^{\vee}f_{s\alpha}}) \equiv (^{\wedge}A \equiv f_{s\alpha})$ (1),(2) x R

(4) $(^{\wedge}A \equiv f_{s\alpha}) \rightarrow \Box(A_\alpha \equiv {^{\vee}f_{s\alpha}})$ (3), Taut.

T53. Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash [A \rightarrow B]$, $\Gamma \vdash B$.

Demonstração: Pelas hipóteses e Definição 3, temos:

$$\vdash \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow A)$$

$$\vdash \gamma_1' \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_{m-1}' \rightarrow (\gamma_m \rightarrow [A \rightarrow B])$$

Usando o teorema $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ e troca de premissas m vezes e n vezes, podemos supor que a cadeia inicial é a mesma. Assim, temos:

(1) $\vdash \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow (A \rightarrow B)$

(2) $\vdash \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A$

(3) $\vdash A \rightarrow (\gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow B)$ (1), Troca de premissas

(4) $\vdash \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow (\gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow B)$ (2),(3), Transitividade

ie, $\Gamma \vdash B$

T55. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ see $\Gamma \vdash A \to \ldots \to A \to B$

(1) Se $\Gamma \vdash A \to \ldots \to A \to B$, temos também que $\Gamma \vdash A$, pela Def. 3 e T.50. Logo, por várias implicações de T53, $\Gamma \vdash B$.

(2) Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, pela Def. 3 e troca de premissas, temos que $\Gamma \vdash \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_n \to A \to \ldots \to A \to B$. Por T50 e T53, segue-se que $\Gamma \vdash A \to \ldots \to A \to B$.

T56. $\Gamma \vdash A \to I$ see $\Gamma \vdash [A \equiv F] \vee [A \equiv I]$

Demonstração: Consequência imediata das seguinte tautologia:

$$[[A \equiv F] \vee [A \equiv I]] \equiv [A \to I]$$

T59. $\vdash \forall x_\alpha [A \to B] \equiv [\exists x A \to B]$, se x não é livre em B.

(1)	$[A \to B] \equiv [\neg B \to \neg A]$	Tautologia
(2)	$\forall x_\alpha [A \to B] \equiv \forall x_\alpha [A \to B]$	T1
(3)	$\forall x_\alpha [A \to B] \equiv \forall x_\alpha [\neg B \to \neg A]$	(1),(2) x R
(4)	$\forall x_\alpha [A \to B] \equiv [\neg \forall x \neg A \to B]$	(3),T57 x R
(5)	$\forall x_\alpha [A \to B] \equiv [\neg \forall x \neg A \to B]$	(4),Taut. x R
(6)	$\forall x_\alpha [A \to B] \equiv [\exists x A \to B]$	(5),Def. $\exists$

T60. $\vdash A \wedge \exists x_\alpha B \to \exists x_\alpha [A \wedge B]$, se x não é livre em A.

(1)	$\forall x((B \to A) \to \neg B) \to (\forall x(B \to A) \to \forall x \neg B)$	T.58
(2)	$\forall x((B \to A) \to \neg B) \to ((\exists x B \to A) \to \forall x \neg B)$	(1),T59 x R
(3)	$\forall x((B \to A) \to \neg B) \to ((\exists x B \to A) \to \neg \exists x B)$	(2),Def. $\exists$, Taut.

(4) $\neg((\exists xB \to A) \to \neg\exists xB) \to \neg\forall x((B \to A) \to \neg B)$ (3), Contrap.

(5) $\neg((\exists xB \to A) \to \neg\exists xB) \to \exists x\neg((B \to A) \to \neg B)$ (4) x Def.$\exists$

(6) $(A\ \exists xB) \to \exists x(A \wedge B)$ (5) Def. 1, Taut. x R

T63. $\vdash (A \to \Box B) \to \Box(I \to B)$

(1) $(I \to \Box B) \to \Box(I \to \Box B)$ T28

(2) $\Box(I \to \Box B) \to (\Box I \to \Box\Box B)$ T32

(3) $\Box\Box B \to B$ T27

(4) $\Box I \equiv I$ T27 e T28

(5) $\Box(I \to \Box B) \to (I \to \Box\Box B)$ (2),(4) x R

(6) $\Box(I \to \Box B) \to (I \to B)$ (3),(5) x Taut.

(7) $\Box\Box(I \to \Box B) \to \Box(I \to B)$ (6), T30 e T32

(8) $\Box(I \to \Box B) \to \Box(I \to B)$ (7), T27 x T28

(9) $(I \to \Box B) \to \Box(I \to B)$ (1) e (8) x Taut.

T64. $\vdash \Box(I \to \neg(B \wedge A)) \to \Box(I \to \neg(B \wedge A)) \to \Box(I \to \neg(B \wedge (A \equiv I)) \to \Box(I \to \neg B)$

(1) $(I \to \neg(B \wedge A)) \to (I \to \neg(B \wedge \neg A)) \to (I \to \neg(B \wedge (A \equiv I)) \to (I \to \neg B)$ Tautologia

(2) $\Box(I \to \neg(B \wedge A)) \to \Box(I \to \neg(B \wedge A)) \to \Box(I \to \neg(B \wedge (A \equiv I))) \to \Box(I \to \neg B)$ (1) x T30 x T32

T66. $\vdash (\forall x_\alpha\ A \wedge \exists x_\alpha\ B) \to ((\forall xA \wedge \exists xB) \to \exists x(A \wedge B))$

(1) $\neg(A \wedge B) \to (A \to \neg B)$ Taut.

(2) $\forall x(\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$ (1) x T8

(3) $\forall x\neg(A \wedge B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow \neg B)$ (2) x T58 e Taut

(4) $\forall x\neg(A \wedge B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall x\neg B)$ (3) x T58, Taut.

(5) $\neg(\forall xA \rightarrow \forall x\neg B) \rightarrow \exists x(A \wedge B)$ (4),contrap.e Def. $\exists$

(6) $\neg(\forall xA \rightarrow \neg\exists xB) \rightarrow \exists x(A \wedge B)$ (5),Def.$\exists$,Taut.

(7) $(\forall xA \wedge \exists xB) \rightarrow ((\forall xA \wedge \exists xB) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \neg\exists xB))$ Taut.

(8) $(\forall xA \wedge \exists xB) \rightarrow ((\forall xA \wedge \exists xB) \rightarrow \exists x(A \wedge B))$ 6,7, Taut.

T67. $\vdash \exists x[A \equiv x \wedge \forall x^{o}\ldots\forall x^{n-1}(x \equiv x)]$, x não livre em A e distinto de $x^{0},\ldots,x^{n-1}$.

(1) $x \equiv x$ T1

(2) $\forall x\ \forall x^{o}\ldots\forall x^{n-1}(x \equiv x)$ (1) x n+1 aplicações de T8

(3) $\exists x(A \equiv x)$ T22

(4) $\exists x(A \equiv x) \wedge \forall x\ \forall x^{o}\ldots\forall x^{n-1}(x \equiv x)$ (2),(3), Taut.

(5) $\exists x((A \equiv x) \wedge \forall x^{o}\ldots\forall x^{n-1}(x \equiv x))$ (4) x T66 x Taut.

CAPÍTULO IV

Passamos, agora, a demonstrar a completude do sistema IL3, relativamente à semântica generalizada do capítulo II. Preliminarmente, introduziremos algumas definições e alguns lemas.

Se Δ é um conjunto finito de fórmulas, denotamos por $Cnj(\Delta)$ a conjunção, em alguma ordem fixada, das fórmulas de Δ. Convencionamos que, no caso de Δ ser vazio, $Cnj(\Delta) = T$.

Def. 1: Se $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \varepsilon \omega}$ é uma sequência arbitrária de conjuntos de fórmulas, dizemos que Γ é relativamente consistente em IL3 se, para todo $i \varepsilon \omega$ e para todo subconjunto finito Δ_i de Γ_i, o conjunto de fórmulas $\{ Cnj (\Delta_i) | i \varepsilon \omega$ é consistente em IL3.

Def. 2: Dado Γ como na definição anterior, dada na fórmula A, e $i \varepsilon \omega$, dizemos que A é relativamente i-consistente com Γ em IL3, se a sequência obtida de Γ, acrescentando-se A a Γ_i, é relativamente consistente em IL3.

Lema 1: Seja Σ um conjunto consistente de fórmulas em IL3 e suponhamos que existem infinitas variáveis de cada tipo que não ocorrem em fórmula alguma de Σ. Então, existe, para cada $k \varepsilon \omega$, uma sequência $\Sigma^k = (\Sigma^k_i)_{i \varepsilon \omega}$ de conjuntos de fórmulas, satisfazendo as seguintes condições:

(1) Para cada $k \varepsilon \omega$, $\Sigma^k_i = \phi$ para todos, exceto um número finito de valores de $i \varepsilon \omega$.

(2) Para cada $i \in \omega$, existe uma quantidade enumerável de variáveis de cada tipo que não ocorrem em nenhuma fórmula em nenhum Σ_i^k, para $i \in \omega$.

Demonstração:

Seja (i_0, A^0), $(i_1, A^1), \ldots,$ uma enumeração de todos os pares (i, A), onde $i \in \omega$ e A é uma fórmula de IL3. Definiremos, então, Σ^k, por indução em k, do seguinte modo:

(I) Se $k = 0$, então $\Sigma_0^0 = \Sigma$ e $\Sigma_i^0 = \phi$, para $i > 0$.

(ii) Dado Σ^k satisfazendo (1) e (2), definiremos Σ^{k+1}.

Suponhamos que (i_k, A^k) seja o par (i, A).

Temos os seguintes casos;

Caso 1) A não é relativamente i-consistente com Σ^k. Então, $\Sigma^{k+1} = \Sigma^k$.

Caso 2) A é relativamente i-consistente com Σ^k.

Caso 2.1) A não é da forma $\exists x_\alpha B$ ou $\Diamond B$. Então, Σ^{k+1} é como Σ^k, exceto que $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup \{A\}$.

Caso 2.2) A é da forma $\exists x_\alpha B(x)$. Então , seja Σ^{k+1} como Σ^k , exceto que $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup \{A, B(y_\alpha)\}$, onde y é a primeira variável de tipo α que não ocorre em Σ^k, nem em B(x). Além disso, B(y) é obtida de B(x), substituindo-se todas as ocorrências livres de x por y.

Caso 2.3) A é da forma $\Diamond B$. Então, seja Σ^{k+1} como Σ^k, exceto que $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup \{A\}$ e , além disso, seja $\Sigma_j^{k+1} = \{B\}$, onde j é o menor número diferente de i, para o qual $\Sigma_j^k = \phi$.

Lema 2: Cada Σ^k é relativamente consistente em IL3.

Demonstração:

Por indução de k.

(1) $k = 0$

Suponhamos que Σ^0 seja relativamente inconsistente. Então, para algumas fórmulas B^0, $B^1,\ldots,B^{n-1} \in \Sigma$, a fórmula $\Diamond[B^0 \wedge \ldots \wedge B^{n-1}]$ seria inconsistente em IL3 e, por T29, Σ seria inconsistente, contrariando a hipótese inicial do lema 1.

(2) $k > 0$

Suponhamos que Σ^k seja relativamente consistente e que (i_k, A_k) seja o par (i, A), Mostramos que Σ^{k+1} é relativamente consistente. Temos vários casos a considerar.

Caso 1) A não é relativamente i-consistente com Σ^k. Então, Σ^{k+1} é relativamente consistente, pois $\Sigma^{k+1} = \Sigma^k$.

Caso 2) A é relativamente i-consistente com Σ^k. Temos alguns sub-casos.

Caso 2.1) A não é da forma $\exists xB$ ou $\Diamond B$. Como Σ^{k+1} é obtido de Σ^k, acrescen tando-se A a Σ_i^k, segue-se imediatamente que Σ^{k+1} é relativamente consistente.

Caso 2.2) A é da forma $\exists xB$. Seja y_α a primeira variável de tipo α que não ocorre em Σ^k nem em $B(x)$. Suponhamos, por absurdo, que Σ^{k+1} seja relativamente inconsistente. Então, para alguns conjuntos finitos $\Delta_j \subseteq \Sigma_j^k$, $j \in \omega$, o conjunto

$$\{\Diamond Cnj(\Delta_j) \mid j \neq i\} \cup \{\Diamond [Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge B(y)]\}$$

é inconsistente em IL3. Temos, então, o seguinte, onde Γ é o conjunto $\{\Diamond Cnj(\Delta_i) \mid j \neq i\}$:

$\Gamma \vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge B(y)] \to I$ — por def. de consistência (Def.4Cap.II)

$\Gamma \vdash \forall y(\Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge B(y)] \to I)$ — por T54

$\Gamma \vdash \exists y \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge B(y)] \to I$ — por T59

$\Gamma \vdash \Diamond \exists y[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge B(y)] \to I$ — por T45

$\Gamma \vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge \exists yB] \to \Diamond \exists y[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge B(y)]$ — por T62

$\Gamma \vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge \exists yB] \to I$ — por transitividade

$\Gamma \vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A \wedge \exists xB] \to I$ — por T11

$\Gamma \vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A] \to I$ — por tautologia

Logo, por definição de consistência, o conjunto:

$\{\Diamond Cnj(\Delta_j) | j \neq i\} \cup \{\Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A]\}$

seria inconsistente, contrariando a hipótese.

Caso 2.3) A é da forma $\Diamond B$. Seja j o menor número diferente de i, para o qual $\Sigma_j^k = \phi$ e suponhamos que Σ^{k+1} fosse relativamente inconsistente. Então, para conjuntos finitos $\Delta_\ell \subseteq \Sigma_\ell^k, \ell \in \omega$, o conjunto

$\{\Diamond Cnj(\Delta_\ell) | \ell \neq i,j\} \cup \{\Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A\}$
$\cup \{\Diamond B\}$

seria inconsistente em IL3.

No entanto, temos o seguinte:

$\vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A] \rightarrow \Diamond Cnj(\Delta_i) \wedge \Diamond\Diamond B$

T42

$\vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A] \rightarrow \Diamond\Diamond B$

Tautologia

$\vdash \Diamond[Cnj(\Delta_i) \wedge A] \rightarrow \Diamond B$

T38

Desse modo, o conjunto

$\{\Diamond Cnj(\Delta_\ell) | \ell \neq j,i\} \cup \{\Diamond Cnj(\Delta_i) \wedge A\}$

seria inconsistente, contrariando a hipótese.

Lema 3: Seja $\overline{\Sigma}_i = \cup_{k \in \omega} \Sigma_i^k$. Então, a sequência $\overline{\Sigma} = (\overline{\Sigma}_i)_{i \in \omega}$ é relativamente consistente.

Demonstração:

Consequência do lema 2, uma vez que $\Sigma_i^k \subseteq \Sigma_i^{k+1}$, para k, $i \in \omega$.

Lema 4: $\overline{\Sigma}_i$ é consistente em IL3, para todo $i \in \omega$.

Demonstração:

Consequência do lema 3, pois, se $\overline{\Sigma}_i$ fosse inconsistente, haveria uma fórmula $A \in \overline{\Sigma}_i$, tal que $\vdash_{IL3} A \to I$; logo, $\vdash_{IL3} \Diamond A \to \Diamond I$, e, como $\vdash_{IL3} \Diamond I \to I$, segue-se que $\vdash_{IL3} \Diamond A \to I$ e, portanto, $\overline{\Sigma}$ não seria relativamente consistente.

Lema 5: Se A é uma fórmula, $i \in \omega$ e A é relativamente i-consistente com $\overline{\Sigma}$, então $A \in \overline{\Sigma}_i$.

Demonstração:

Basta escolher k, de maneira que o par (i,A) seja (i_k, A^k). Como A é relativamente i-consistente com Σ^k, por construção $A \in \Sigma_i^{k+1} \subseteq \overline{\Sigma}_i$

Lema 6: Se A é uma fórmula e $\overline{\Sigma}_i \vdash A$, então $A \in \overline{\Sigma}_i$.

Demonstração:

Consequência dos lemas 3 e 5.

Lema 7: $\overline{\Sigma}_i$ é um conjunto maxinal consistente, isto é, para toda fórmula A, $A \in \overline{\Sigma}_i$ ou $\neg A \in \overline{\Sigma}_i$ ou $A \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $A \notin \overline{\Sigma}_i$, $\neg A \notin \overline{\Sigma}$ e $A \equiv I \notin \overline{\Sigma}_i$. Logo, para conjuntos finitos Δ'_j, Δ''_j, $\Delta'''_j \subseteq \overline{\Sigma}_j$, $j \in \omega$, os conjuntos

$\{\Diamond Cnj(\Delta'_j) | j \neq i\} \cup \{\Diamond [Cnj(\Delta'_i) \wedge A\}$,

$\{\Diamond Cnj(\Delta''_j) | j \neq i\} \cup \{\Diamond [Cnj(\Delta''_i) \wedge \neg A\}$,

$\{\Diamond Cnj(\Delta'''_j) | j \neq i\} \cup \{\Diamond [Cnj(\Delta'''_i) \wedge A \equiv I\}$

são consistentes em IL3, pelo lema 5 e def. 2.

Agora, seja $\Delta_j = \Delta'_j \cup \Delta''_j \cup \Delta'''_j$ e seja $\Gamma = \{\Diamond Cnj(\Delta_j) | j \neq i\}$.

Por T42, segue-se que o que for acarretado por

$\{\Diamond Cnj(\Delta'_j) \wedge \Diamond Cnj(\Delta''_j) \wedge \Diamond Cnj(\Delta'''_j)\}$ também será acarretado por $\{\Diamond Cnj(\Delta_j) | j \neq i\}$, isto é, Γ.

Por definição de consistência, temos:

$\Gamma \vdash \Diamond [Cnj(\Delta_i) \wedge A] \rightarrow I$,

$\Gamma \vdash \Diamond [Cnj(\Delta_i) \wedge \neg A] \rightarrow I$,

$\Gamma \vdash \Diamond [Cnj(\Delta_i) \wedge (A \equiv I)] \rightarrow I$.

Por contraposição, def. de $\Diamond$ e tautologia:

$\Gamma \vdash I \rightarrow \Box\neg(Cnj(\Delta_i) \wedge A)$

$\Gamma \vdash I \rightarrow \Box\neg(Cnj(\Delta_i) \wedge \neg A)$

$\Gamma \vdash I \rightarrow \Box\neg(Cnj(\Delta_i) \wedge (A \equiv I))$

Por T63, temos:

$\Gamma \vdash \Box(I \rightarrow \Box(Cnj(\Delta_i) \wedge A))$

$\Gamma \vdash \Box(I \rightarrow \Box(Cnj(\Delta_i) \wedge \neg A))$

$\Gamma \vdash \Box(I \rightarrow \Box(Cnj(\Delta_i) \wedge (A \equiv I)))$

Temos, ainda, o seguinte:

$\Gamma \vdash \Box(I \to \neg B)$, por T53 e T64

$\Gamma \vdash \Box I \to \Box\neg B$, por T32 e T53

$\Gamma \vdash I \to \Box\neg B$, por T65

$\Gamma \vdash \Diamond B \to I$, por tautologia e def. $\Diamond$

Logo, por definição de consistência, o conjunto $\{\Diamond\, Cnj(\Delta_j) | j \in \omega$ é inconsistente em IL3, contrariando o lema 2, o qual garante que $\overline{\Sigma}_i$ é relativamente consistente.

Corolário: Se $A \in \overline{\Sigma}_i$, então $\neg A \notin \Sigma_i$ e $A \equiv I \notin \overline{\Sigma}_i$

Se $\neg A \in \overline{\Sigma}_i$, então $A \equiv I \notin \overline{\Sigma}_i$

Lema 8: Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula $B(x_\alpha)$, tem-se que $\exists x B(x) \in \overline{\Sigma}_i$ se e somente se $B(y_\alpha) \in \overline{\Sigma}_i$, para alguma variável y, que é livre para x em B(x).

Demonstração:

Um dos lados segue-se do lema 6 e T19. O outro lado vem do lema 3 e da construção de Σ^{k+1}.

Lema 9: Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula B, temos que $\Diamond B \in \overline{\Sigma}_i$ se e somente se $B \in \overline{\Sigma}_j$, para algum $j \in \omega$.

Demonstração:

Vamos demonstrar apenas uma das implicações. Suponhamos que $B \in \overline{\Sigma}_j$ e, por absurdo, que $\Diamond B \notin \overline{\Sigma}_i$.

Por T29, T50 e lema 6, segue-se que $i \neq j$, pois $\Sigma_j \vdash \Diamond B$.

Pelo lema 7, $\neg\Diamond B \in \overline{\Sigma}_i$ ou $\Diamond B \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$.

(i) Se $\neg\Diamond B \in \overline{\Sigma}_i$, então $\Box\neg B \in \overline{\Sigma}_i$, por T34. Nesse caso, $\overline{\Sigma}$ é relativamente inconsistente, pois o conjunto $\{\dot{\Diamond}\Box\neg B, \Diamond B\}$ é inconsistente em IL3 por T37.

(ii) Se $\Diamond B \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$, então o conjunto $\{\dot{\Diamond}(\Diamond B \equiv I), \Diamond B\}$ é inconsistente em IL3, pois:

$(\Diamond B \equiv I) \to (\Diamond B \equiv I)$	Tautologia
$\Diamond(\Diamond B \equiv I) \to (\Diamond B \equiv I)$	T28 x contraposição
$\Diamond(\Diamond B \equiv I) \to (\Diamond B \to I)$	por tautologia

A partir dos lemas precedentes, prova-se facilmente o lema fundamental, correspondente ao lema de Lindenbaum, que é o seguinte:

<u>Lema 10</u>: Seja Σ um conjunto consistente de fórmulas de IL3 e suponhamos que exista uma quantidade enumerável de variáveis de cada tipo, que não ocorrem em nenhuma fórmula de Σ. Então, existe uma sequência $\overline{\Sigma} = (\overline{\Sigma}_i)_{i\varepsilon\omega}$ de conjuntos de fórmulas, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\overline{\Sigma}_0$ contém Σ,

(ii) Para cada $i \in \omega$, $\overline{\Sigma}_i$ é um conjunto maximal consistente de fórmulas de IL3,

(iii) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula $B(x_\alpha)$, $\exists x B(x) \in \overline{\Sigma}_i$ se e somente se $B(y_\alpha) \in \overline{\Sigma}_i$, para alguma variável y , que é livre para x em $B(x)$,

(iv) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula B, $\Diamond B \in \overline{\Sigma}_i$ se e somente se $B \in \overline{\Sigma}_j$, para algum $j \in \omega$.

Corolário: Seja $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \omega}$ uma sequência de fórmulas, nas condições do lema 10. Então $\overline{\Sigma}$ satisfaz também as seguintes condições:

(v) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula $B(x_\alpha)$, $\forall x\, B(x) \in \overline{\Sigma}_i$ se e somente se $B(y_\alpha) \in \overline{\Sigma}_i$, para toda variável y que é livre para x em B(x),

(vi) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula B, $\Box B \in \overline{\Sigma}_i$ se e somente se $B \in \overline{\Sigma}_j$, para todo $j \in \omega$.

Podemos, agora, demonstrar o resultado abaixo, do qual segue-se o Teorema de Completude Generalizada.

Lema 11: Se Σ é um conjunto consistente de fórmulas de IL3, então Σ é g-satisfazível por um g-modelo $M = (M_\alpha, m)_{\alpha \in T}$ de IL3, baseado em D e I, onde I é enumerável e D, bem como cada domínio M_α, é no máximo enumerável.

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que haja uma quantidade infinita de variáveis de cada tipo, não ocorrendo em Σ.

Assim, seja $\overline{\Sigma} = (\overline{\Sigma}_i)_{i \in \omega}$ uma sequência de conjuntos de fórmulas, satisfazendo as condições (i) - (vi) do lema 10 e seu corolário. Seja, ainda, $\alpha \in T$ e $i \in \omega$. Definimos a seguinte relação:

$A_\alpha \cong B_\alpha$ (mod i) se e somente se $[A \equiv B] \in \overline{\Sigma}_i$

Essa é uma relação de equivalência entre teoremas de IL3, em face de T1 e tautologia.

Usaremos a seguinte notação: $Var_\alpha = \{x : x$ é variável de tipo $\alpha\}$. Por T22 e propriedade (iii) de $\bar{\Sigma}$, existe, para cada $A \in Tm_\alpha$ e $i \in \omega$, alguma variável $x \in Var_\alpha$, para a qual $A \cong x \pmod{i}$. De fato, a propriedade (iii) implica que existem infinitas variáveis nessas condições, pois, para quaisquer variáveis distintas, $x^o, x^1, \ldots, x^{n-1} \in Var_\alpha$, por T67 e pela propriedade (iii), segue-se que existe uma variável x, distinta de $x^o, \ldots, x^{n-1}$, tal que $A_\alpha \equiv x \in \bar{\Sigma}_i$.

Além disso, por T28, a fórmula $x \equiv y \to \Box[x \equiv y]$ é demonstrável em IL3 e, portanto, a relação $x \cong y \pmod{i}$ é independente de $i \in \omega$, para variáveis x e y. Escreveremos, então, simplesmente, $x \cong y$. Denotaremos por $x/\cong$ a classe de equivalência de x_α em Var_α, sob essa relação. Escolhemos D como sendo o conjunto quociente, $Var_e/\cong$, consistindo de todas as classes $x/\cong$, para $x \in Var_e$. D é, então, no máximo enumerável. Finalmente, fazemos $I = \omega$ e passamos à construção de um g-modelo $M = (M_\alpha, m)_{\alpha \in T}$ de IL3, baseado em D e I, usando-se a sequência $\bar{\Sigma}$.

Inicialmente, definiremos simultaneamente, por recursão em $\alpha \in T$, um conjunto M_α e uma função μ_α de Tm_α em M_α, satisfazendo as seguintes condições:

(1) Para $i, j \in I$, $x \in Var_\alpha$, $\mu_\alpha(x),(i) = \mu_\alpha(x)(j)$,

(2) Para todo $X \in M_\alpha$, existe um $x \in Var_\alpha$, tal que $X = \mu_\alpha(x)(i)$,

(3) Para $i \in I$, $A, B \in Tm_\alpha$, $\mu_\alpha(A)(i) = \mu_\alpha(B)(i)$ se e somente se $A \cong B \pmod{i}$.

Essa função dará origem tanto à atribuição quanto à função significado.

1) $\underline{\alpha = t}$: Seja $M_t = 3 = \{0,1,2\}$. Se $A_t \varepsilon \overline{\Sigma}_i$, $\mu_t(A_t)(i) = 1$.

Se $\neg A_t \varepsilon \overline{\Sigma}_i$, $\mu_t(A_t)(i) = 0$. Se $(A \equiv I) \varepsilon \overline{\Sigma}_i$, $\mu_t(A_t)(i) = 2$.

Mostramos que μ_t satisfaz as condições (1) a (3).

(1) Por T28, $x_t \to \Box x_t$ é um teorema de IL3, e, pela propriedade (vi) do corolário do lema 10, se $x_t \varepsilon \overline{\Sigma}_i$, então ele pertence a todo $\overline{\Sigma}_j$.

(2) Por T20, T21, T23 e propriedade (iii), temos que $y \varepsilon \overline{\Sigma}_i$, $\neg z \varepsilon \overline{\Sigma}_i$ e $w \equiv I \varepsilon \overline{\Sigma}_i$, para algumas variáveis y, z, w. Portanto, $\mu_t(y)(i) = 1$, $\mu_t(z)(i) = 0$ e $\mu_t(w)(i) = 2$.

(3) Segue-se da maximalidade de $\overline{\Sigma}_i$.

2) Seja $M_e = D = Var_e/\cong$. $\mu_e(A_e)(i)$ é $x/\cong$, onde x é uma variável de tipo e, para a qual $A \cong x \pmod i$. Isto é bem definido, pois $A \cong y \pmod i$ se e somente se $y \varepsilon x/\cong$. Em particular, $\mu_e(x_e)(i) = x/\cong$. Assim, valem as condições (1) e (2). A condição (3) verifica-se diretamente, pois $\mu_e(A)(i) = \mu_e(B)(i)$ se e somente se $A \cong x \pmod i$ e $B \cong x \pmod i$ se e somente se $A \cong B \pmod i$.

3) $\underline{\alpha = \beta\gamma}$: Suponhamos que M_β, μ_β, M_γ, μ_γ já estão definidos e que as condições (1) a (3) valem para μ_β e μ_γ. Definimos as funções $\mu_{\beta\gamma}$, de $Tm_{\beta\gamma}$ em $(M_\gamma^{M_\beta})^I$ da seguinte maneira: Dado $A \varepsilon Tm_\alpha$, $i \varepsilon I$ e $X \varepsilon M_\beta$, seja

$x \in Var_\beta$ escolhida de tal modo que $X = \mu_\beta(x)(i)$ e façamos $\mu_{\beta\gamma}(A)(i)(X) = \mu_\gamma(A_{\beta\gamma}\ x_\beta)(i)$.

Tal variável x existe, pela condição (2) para β. A função $\mu_{\beta\gamma}$ está bem definida, pois suponha-se que $y \in Var_\beta$ e $\mu_\beta(y)(i) = X = \mu_\beta(x)(i)$. Pela propriedade (3) para β, $x \cong y$ (mod i) e, por T25, $Ax \cong Ay$ (mod i). Portanto, $\mu_\gamma(Ax)(i) = \mu_\gamma(A_y)(i)$, pela condição (3) para γ.

Mostramos, agora, que valem as condições (1) a (3) para μ_α e definimos M_α.

(1) Suponhamos que $f \in Var_\alpha$ e $i, j \in I$. Mostramos que $\mu_\alpha(f)(i) = \mu_\alpha(f)(j)$.

Seja $X \in M_\beta$. $X = \mu_\beta(x)(i) = \mu_\beta(x)(j)$, pelas condições (1) e (2), para β.

Temos que:

$\mu_\alpha(f)(i)(X) = \mu_\gamma(fx)(i)$ e $\mu_\alpha(f)(j)(X) = \mu_\gamma(fx)(j)$.

Assim, basta mostrar que $\mu_\gamma(fx)(i) = \mu_\gamma(fx)(j)$.

Seja $y \in Var_\gamma$, tal que $fx \cong y$ (mod i). Por T28, a seguinte fórmula é demonstrável em IL3:

$fx \equiv y \to \Box(fx \equiv y)$.

Assim, temos $fx \cong y$ (mod j) e, pelas condições (1) e (3) para γ,

$\mu_\gamma(fx)(i) = \mu_\gamma(y)(i) = \mu_\gamma(y)(j) = \mu_\gamma(fx)(j)$.

(2) Se $A \in Tm_\alpha$, $i \in I$, então $\mu_\alpha(A)(i) = \mu_\alpha(f)(i)$, pa

ra algum $f \varepsilon Var_{\alpha}$. De fato, suponha-se que $A \cong f$ (mod i). Então, se $X \varepsilon M_{\beta}$, digamos $X = \mu_{\beta}(x_{\beta})(i)$, por T26, temos que $Ax_{\beta} \equiv fx_{\beta}$ e, portanto , $Ax_{\beta} \cong fx_{\beta}$ (mod i). Assim, pela propriedade (3) para γ,

$\mu_{\alpha}(A)(i)(X) = \mu_{\gamma}(Ax)(i) = \mu_{\gamma}(fx)(i) = \mu_{\alpha}(f)(i)(X)$.

Definimos, agora M_{α} da seguinte maneira:

$M_{\alpha} = \{ \mu_{\alpha}(f)(i) : f \varepsilon Var_{\alpha}\} \subseteq M_{\gamma}{}^{M_{\beta}}$

Pela condição (1), M_{α} é independente de $i \varepsilon I$ e a condição (2) é satisfeita para α, pois, se $F \varepsilon M_{\alpha}$, então $F = \mu_{\alpha}(f)(i)$.

(3) Seja $A, B \varepsilon Tm_{\alpha}$ e $i \varepsilon I$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mu_{\alpha}(A)(i) = \mu_{\alpha}(B)(i)$

(b) Para todo $Y \varepsilon M_{\beta}$, $\mu_{\alpha}(A)(i)(Y) = \mu_{\alpha}(B)(i)(Y)$

(c) Para todo $y \varepsilon Var_{\beta}$, $\mu_{\alpha}(A)(i)[\mu_{\beta}(y)(i)] = \mu_{\alpha}(B)(i)[\mu_{\beta}(y)(i)]$

(d) Para todo $y \varepsilon Var_{\beta}$, $\mu_{\gamma}(Ay)(i) = \mu_{\gamma}(By)(y)$, por definição de μ_{α}.

(e) Para todo $y \varepsilon Var_{\beta}$, $Ay \cong By$ (mod i), pela propriedade (3) para γ.

(f) Para todo $y \varepsilon Var_{\beta}$, $[Ay \equiv By] \varepsilon \overline{\Sigma}_{i}$, por definição de $\cong$.

(g) $\forall x[Ax \equiv Bx] \varepsilon \overline{\Sigma}_{i}$, onde x é a primeira variável de tipo β que não ocorre livre em A ou B, pela propriedade (v) para $\overline{\Sigma}_i$ (corolário do lema 9).

(h) $[A \equiv B] \in \overline{\Sigma}_i$, por T12.

(i) $A \cong B \pmod{i}$.

Observe-se que, se $A \in Tm_\alpha$, $B \in Tm_\beta$, $i \in I$, então $\mu_\gamma(AB)(i) = \mu_\alpha(A)(i)[\mu_\beta(B)(i)]$, pois, suponha-se que $B \cong x_\beta \pmod{i}$. Por T26, temos $AB \cong Ax \pmod{i}$. Logo,

$$\mu_\gamma(AB)(i) = \mu_\gamma(Ax)(i) =$$

$$= \mu_\alpha(A)(i)[\mu_\beta(x)(i)] = \mu_\alpha(A)(i)[\mu_\beta(B)(i)],$$

pois $\mu_\beta(B)(i) = \mu_\beta(x)(i)$.

4) $\underline{\alpha = \delta\beta}$: Suponhamos que M_β e μ_β já estão definidos, satisfazendo, portanto, as condições (1),(2) e (3) para β.

Definimos, inicialmente, a função μ_α, de Tm_α em $[M_\beta^I]^I$, da seguinte maneira: Tendo-se $A \in Tm_\alpha$ e $i \in I$, escolha-se $f \in Var_\alpha$, de modo que se tenha $A \cong f \pmod{i}$, e façamos $\mu_\alpha(A)(i) = \mu_\beta(\check{}f) \in M_\beta^I$. Isso está bem definido, pois, se tivermos $g \in Var_\alpha$ e $A \cong g \pmod{i}$, então $f \cong g$, ou seja, $f \cong g \pmod{j}$ para todo $j \in I$. Logo, $\check{}f \cong \check{}g \pmod{j}$, para todo $j \in I$, por A16.

Pela condição (3) para β, segue-se que $\mu_\beta(\check{}f)(j) = \mu_\beta(\check{}g)(j)$, para todo $j \in I$. Assim, $\mu_\beta(\check{}f) = \mu_\beta(\check{}g)$ em M_β^I.

Mostramos que valem as condições (1) a (3) para α e definimos M_α.

(1) A condição vale pois, para $f \in Var_{\alpha}$, $i \in I$, temos que $\mu_{\alpha}(f)(i) = \mu_{\beta}({}^{\vee}f)$, que é independente de $i \in I$.

(2) Se $A \in Tm_{\alpha}$, $i \in I$, então $\mu_{\alpha}(A)(i) = \mu_{\alpha}(f)(i)$, para algum $f \in Var_{\alpha}$, uma vez que, se $A \cong f$ (mod i), então $\mu_{\alpha}(A)(i) = \mu_{\beta}({}^{\vee}f) = \mu_{\alpha}(f)(i)$. Podemos, então, definir M_{α} da seguinte maneira:

$M_{\alpha} = \{ \mu_{\alpha}(f)(i) | f \in Var_{\alpha} \} \subseteq M_{\beta}^{I}$.

Pela condição (1), isso é independente de $i \in I$, donde se segue que a condição (2) é satisfeita para α.

(3) Se $A, B \in Tm_{\alpha}$, $i \in I$, escolhemos $f, g \in Var_{\alpha}$, de modo que se tenha $A \cong f$ (mod i) e $B \cong g$ (mod i).

Então, pela condição (3) para β, A5 e propriedade (vi) de $\overline{\Sigma}$ (corolário do lema 10), as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mu_{\alpha}(A)(i) = \mu_{\alpha}(B)(i)$

(b) $\mu_{\beta}({}^{\vee}f) = \mu_{\beta}({}^{\vee}g)$

(c) Para todo $j \in I$, $\mu_{\beta}({}^{\vee}f)(j) = \mu_{\beta}({}^{\vee}g)(j)$

(d) Para todo $j \in I$, ${}^{\vee}f \cong {}^{\vee}g$ (mod j)

(e) Para todo $j \in I$, $[{}^{\vee}f \cong {}^{\vee}g] \in \overline{\Sigma}_{j}$

(f) $\square[{}^{\vee}f \equiv {}^{\vee}g] \in \overline{\Sigma}_{i}$

(g) $[f \equiv g] \in \overline{\Sigma}_{i}$

(h) $f \cong g \pmod{i}$

(i) $A \cong B \pmod{i}$

Temos, assim, definida a estrutura $(M_\alpha)_{\alpha\varepsilon T}$ para IL3, baseada em D e I. Pelas condições (1) e (2), cada domínio M_α é no máximo enumerável.

Definimos, agora, a função significado da seguinte maneira:

$m(C) = \mu_\alpha(c) \ \varepsilon \ M_\alpha^I$.

Temos, assim, um g-modelo $M = (M_\alpha, m)_{\alpha\varepsilon T}$. Provamos, finalmente, que existe uma função valoração, V^M, em M.

Suponhamos que $A \ \varepsilon \ Tm_\alpha$, $a \ \varepsilon \ At(M)$. Suponhamos, ainda, que as variáveis livres de A estão entre as variáveis distintas $x^o, x^1, \ldots, x^{n-1}$, onde x^k é do tipo α_k. Escrevemos, então, A como $A(x^o, \ldots, x^{n-1})$ e escolhemos uma sequência y^0, $y^1, \ldots, y^{n-1}$ de distintas variáveis y^k, de tipo α_k, satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\mu_{\alpha_k}(y^k)(i) = a(x^k)$

(b) y^k é livre para x^k em A

Pelas condições (1) e (2) para a_k, $a(x^k) = \mu_{\alpha_k}(y)\ (i)$, independente de $y \ \varepsilon \ I$, para alguma variável y do tipo α_k. Como $y \cong y'$, $\mu(y')(i) = \mu(y)(i) = a(x^k)$, para uma quantidade enumerável de variáveis y'. Assim, para $k < m$, existe uma quantidade enumerável de variáveis y^k, satisfazendo a condição (a), donde se segue que existe uma sequência y^0, $y^1, \ldots, y^{n-1}$ de distintas variáveis, satisfazendo (a) e (b). Chamamos essa sequência de <u>sequência</u>

representativa para o termo A e atribuição a. Convencionamos que a sequência original, $x^o,\ldots,x^{n-1}$, contém todas as variáveis livres de A.

Seja $\overline{A}$ o termo $A(y^o,\ldots,y^{n-1})$, obtido a partir de A, substituindo-se todas as ocorrências livres de x^k por y^k, para $k < n$.

Dado $i \in I$, definimos a função valoração como segue:

$$V^M_{i,a}\ (A) = \mu_\alpha(\overline{A})(i) \in M_\alpha$$

Mostramos que o valor $\mu_\alpha(\overline{A})(i)$ não depende da sequência $y^o,\ldots,y^{n-1}$. De fato, suponhamos que $z^o, z^1,\ldots,z^{n-1}$ é outra sequência representativa para A e a. Então, $\mu_{\alpha_k}(y^k)(i) = a(x^k) = \mu_{\alpha_k}(z^k)(i)$. Assim, $y^k \cong z^k$ (mod i), donde se segue por várias aplicações de T24, que $A(y^o,\ldots,y^{n-1}) \cong A(z^o,\ldots,z^{n-1})$ (mod i). Logo, $\mu_\alpha[A(y^o,\ldots,y^{n-1})](i) = \mu_\alpha[A(z^o,\ldots,z^{n-1})](i)$.

Para completar a construção do g-modelo e, portanto, a demonstração do lema 11 mostramos, finalmente, que V^M é uma função valoração em M. Para isso, temos que verificar as cláusulas recursivas da definição 10 do capítulo I. Vamos fornecer, apenas, a verificação da cláusula (V), a qual caracteriza o sistema IL3.

Sejam $x^o,\ldots,x^{n-1}$ as distintas variáveis livres de $[A_\alpha \equiv B_\alpha]$ e escolhamos uma sequência representativa $y^o,\ldots,y^{n-1}$ para $[A_\alpha \equiv B_\alpha]$ e a. Seja $V_{i,a}\ (A_\alpha \equiv B_\alpha) = \mu_t(\overline{A_\alpha \equiv B_\alpha})(i) = \mu_t(\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha)(i)$.

Temos vários casos a considerar:

1) Suponhamos que $\mu_t(\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha) = 1$. Então, pela definição de μ_t, $(\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha) \in \Sigma_i$. Logo, $\mu_\alpha(\overline{A}_\alpha)(i) = \mu_\alpha(\overline{B}_\alpha)(i)$, pois

do contrário, pela propriedade (3), $A_\alpha \not\equiv B_\alpha$ (mod i), donde $[\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha] \notin \overline{\Sigma}_i$.

2) Se $\mu_t(\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha)(i) = 2$, então $(\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha) \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$, pela definição de μ_t. Assim, pela maximilidade, $\neg[A \equiv B] \notin \overline{\Sigma}_i$ e $[A \equiv B] \notin \overline{\Sigma}_i$. Por outro lado, $\alpha = t$ ou $\alpha = \beta t$, pois, do contrário, pelo axioma 18, temos $[(\overline{A}_\alpha \equiv \overline{B}_\alpha) \equiv I] \equiv I$, donde se segue que $I \in \overline{\Sigma}_i$, o que é impossível.

Temos, assim, dois sub-casos:

2.1) Seja $\alpha = t$ e, por absurdo, suponhamos que $\mu_t(\overline{A}_t)(i) = 0$ e $\mu_t(\overline{B}_t)(i) = 1$ (O caso inverso é similar.)

Pela definição de μ_t, $\neg\overline{A}_t \in \overline{\Sigma}_i$ e $\overline{B}_t \in \overline{\Sigma}_i$. Como, por hipótese, $[\overline{A}_t \equiv \overline{B}_t] \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$, pela maximalidade e tautologia, segue-se que $I \in \overline{\Sigma}_i$.

Suponhamos, agora, que $\mu_t(A_t) = 2$ e que $\mu_t(A_t)(i) \neq \mu_t(B_t)(i)$.

Pela propriedade (3), $[\overline{A}_t \equiv \overline{B}_t] \notin \overline{\Sigma}_i$ e, pela definição de μ_t, $A_t \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$.

Pela maximalidade de $\overline{\Sigma}_i$, $[\overline{A}_t \equiv \overline{B}_t] \in \overline{\Sigma}_i$ ou $[\overline{A}_t \equiv \overline{B}_t] \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$ ou $\neg[\overline{A}_t \equiv \overline{B}_t] \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$.

Segue-se que, se $\neg[\overline{A}_t \equiv \overline{B}_t] \in \overline{\Sigma}_i$, então $I \in \overline{\Sigma}_i$.

2.2) Seja, agora, $\alpha = \beta t$ e suponhamos que $[\overline{A}_{\beta t} \equiv \overline{B}_{\beta t}] \equiv I \in \overline{\Sigma}_i$.

Suponhamos, ainda, por absurdo, que $\mu_{\beta t}(\overline{A}_{\beta t})(i)(X)$

$= 1$ e $\mu_{\beta t}(\overline{B}_{\beta t})(i)(X) = 0$, para algum $X \varepsilon M_\beta$.

Pela propriedade (2), seja $x_\beta \varepsilon Var_\beta$, tal que $X = \mu_\beta(x_\beta)(i)$.

Pela definição de $\mu_{\beta t}$, temos:

$\mu_{\beta t}(\overline{A}_{\beta t})(i)(X) = \mu_t(\overline{A}_{\beta t}\ x_\beta)(i) = 1$ e

$\mu_{\beta t}(\overline{B}_{\beta t})(i)(X) = \mu_t(\overline{B}_{\beta t}\ x_\beta)(i) = 0$

Pela definição de μ_t, $\overline{A}_{\beta t}\ x_\beta\ \varepsilon\ \overline{\Sigma}_i$ e $\neg(\overline{B}_{\beta t} x_\beta)\ \varepsilon\ \overline{\Sigma}_i$.

Logo, por tautologia e lema 6, $[\overline{A}_{\beta t} x_\beta \wedge \neg(B_{\beta t}\ x_\beta)]\ \varepsilon\ \overline{\Sigma}_i$.

Mas, a seguinte fórmula é tautológica:

$A_{\beta t}\ x_\beta \equiv T \wedge B_{\beta t}\ x_\beta \equiv F \rightarrow [(A_{\beta t} x_\beta \equiv T \wedge B_{\beta t} x_\beta \equiv F) \rightarrow (A_{\beta t}\ x_\beta \equiv B_{\beta t}\ x_\beta)]$.

Assim, segue-se que $\neg(A_{\beta t}\ x_\beta \equiv B_{\beta t}\ x_\beta)\ \varepsilon\ \overline{\Sigma}_i$.

Por outro lado, temos $\vdash (\overline{A}_{\beta t} \equiv \overline{B}_\beta \rightarrow \overline{A}_{\beta t}\ x_\beta \equiv \overline{B}_{\beta t} x_\beta)$, por T15 x T9 e, por tautologia, $\neg(\overline{A}_{\beta t} x_\beta \equiv \overline{B}_{\beta t} x_\beta) \rightarrow \neg(\overline{A}_{\beta t} \equiv \overline{B}_{\beta t})$.

Como consequência, $\neg(\overline{A}_{\beta t} \equiv \overline{B}_{\beta t})\ \varepsilon\ \overline{\Sigma}_i$, mas isso é absurdo pois, pela hipótese inicial, $[\overline{A}_{\beta t} \equiv \overline{B}_{\beta t}]\ \varepsilon\ \overline{\Sigma}_i$.

Fica, assim, demonstrado o lema 11, a partir do qual se demonstra, imediatamente, o seguinte:

Teorema 1: (da Completude Generalizada):

Se Σ é um conjunto consistente de fórmulas de IL3, então Σ é g-satisfazível em IL3.

Corolário 1:

Se $\models_g$ A em IL3, então $\Gamma \vdash$ A em IL3.

Corolário 2:

Se $\Gamma \models_g$ A em IL3, então $\Gamma \vdash$ A em IL3.

Corolário 3 (Teorema da Compacidade Generalizada):

Seja Σ um conjunto de fórmulas de IL3. Então, Σ é g-satisfazível em IL3 se e somente se todo subconjunto finito de Σ é g-satisfazível em IL3.

APÊNDICE

Vamos apresentar, neste Apêndice, alguns problemas relacionados com o sistema IL3. É nossa intenção retomar alguns deles em trabalhos futuros.

Problema 1:

Além do sistema IL, Montague construiu uma gramática (conhecida como PTQ), chamada por ele de "fragmento" do Inglês (ver [16]). Seu objetivo era traduzir cada expressão do Inglês em uma expressão de IL, aplicando, em seguida, a semântica proposta, ou seja, dando, imediatamente, uma interpretação formal para as expressões da linguagem natural. A tradução do Inglês para IL segue um procedimento rigorosamente formalizado, ao contrário das "traduções" da linguagem natural para o cálculo de predicados de 1ª ordem, usuais em cursos introdutórios de Lógica. A tradução proposta por Montague segue exatamente a estrutura sintática de cada sentença inglesa e, além disso, deve satisfazer uma série de requisitos. Por exemplo, cada expressão inglesa deve ser traduzida em uma e apenas uma expressão de IL, ou seja, não existem expressões básicas ambíguas. Outro requisito é que deve existir uma correspondência uniforme entre as categorias do Inglês e os tipos de IL.

No nosso caso, com a construção do sistema IL3, temos, como problema fundamental a aplicação da gramática de Montague, eventualmente reformulada, ao novo sistema, de modo a verificar sua adequação e possivelmente obter resultados novos, ao se levar em conta a indeterminação da linguagem natural.

Problema 2:

Conforme dissemos na Introdução, o nosso objetivo era a penas o de mostrar a possibilidade matemática da construção de um sistema intensional trivalente. Coloca-sem então, o problema, intimamente relacionado com o problema anterior, de verificar qual é o sistema mais adequado para aplicação na análise das linguagens naturais.

Problema 3:

No sistema IL3, admitimos o aparecimento do valor indeterminado apenas ao nível das expressões de tipo t e tipo αt. Daí, a necessidade da introdução do axioma 18. Como poderíamos modificar a semântica de IL3, de maneira a admitir indeterminação para qualquer tipo? Além disso, como poderíamos introduzir constantes individuais sem denotação?

Problema 4:

Vimos que o sistema IL3 contém os operadores modais intensionais, bem como os operadores extensionais de Lukasiewicz. Se entendermos esses último operadores como "necessário" e "possível", algumas teses podem ser consideradas contra-intuitivas. Assim, por exemplo, a seguinte:

$$(Mp \wedge Mq) \rightarrow M(p \wedge q) \ ,$$

significando que duas proposições quaisquer são consistentes entre si.

Outra delas é:

$$Mp \to (M \sim p \to Mq) ,$$

significando que, se uma proposição e sua negação são ambas possíveis, então qualquer proposição é possível.

O problema colocado pelas modalidades de Lukasiewicz é o de saber que sentido é esse de "possível", diferente do sentido encontrado nos outros sistemas usuais. Ora, como IL3 contém os dois tipos de modalidades, esse problema pode ser esclarecido se se exploram as relações existentes entre os operadores modais extensionais e intensionais. Algumas dessas relações, por exemplo, são as seguintes:

$$\vdash_{IL3} \Box A \to \Delta A$$

$$\nvdash_{IL3} \Delta A \to \Box A$$

$$\nvdash_{IL3} \nabla A \to \Diamond A$$

$$\nvdash_{IL3} \Diamond A \to \nabla A$$

Problema 5:

Como observamos na Introdução, o valor "indeterminado " surge intuitivamente, da decomposição do valor "falso" da lógica clássica. No entanto, poderíamos também considerá-lo como uma decomposição do valor "verdadeiro". Em outras palavras, poderíamos considerar, como é usual,, o caso de uma lógica trivalente, com dois valores distinguidos. Esse procedimento tem levado a questões interessantes, por exemplo, tornando mais claras as relações existentes entre a lógica polivalente e outros tipos de lógica, como a lógica paraconsistente (ver [7]). Um problema que se coloca é, então, o de se construir uma lógica intensional trivalente com dois valores distinguidos. Isso leva, naturalmente, ao problema da construção de lógicas intensionais polivalentes quaisquer.

Problema 6:

Podemos definir em IL3 os operadores J_k, k = 0,1,2, que são tais que, para qualquer g-modelo $M = (M_\alpha, m)_{\alpha\in T}$, $V_{i,a}(J_k(A))=1$ see $V_{i,a}(A) = k$ (Cf.[17].

As definições são as seguintes:

$J_0(A) = \sim(\sim A \to A)$

$J_1(A) = \sim(A \to \sim A)$

$J_2(A) = A \equiv \sim A$

Informalmente, diremos que uma fórmula é "bem comportada" se ela tem valor 0 ou 1.

Definimos sintaticamente esse conceito, do seguinte modo:

$A^* = J_1(A) \vee J_0(A)$.

Algumas propriedades desse operador de "bom comportamento" são as seguintes:

$A^0 \to (\neg A)^*$,

$A^* \wedge B^* \to (A \wedge B)^* \wedge (A \vee B)^* \wedge (A \to B)^* \wedge (A \equiv B)^*$,

$\forall x[A(x)]^* \to [\forall x\ A(x)]^*$,

$(\Box A)^* \to A^*$,

$[\Box(A \to B)]^* \to [(\Box A)^* \to (\Box B)+]$,

se $\vdash A$, então $\vdash (\Box A)^*$.

Isso parece indicar a possibilidade de se encontrar uma condição necessária e suficiente em IL3 para que uma fórmula A seja teorema de IL, mostrando, assim, que nos contextos onde não há indeterminação, o sistema IL3 se reduz ao sistema IL.

BIBLIOGRAFIA

[1] Andrews,P., "A reduction of the axioms for the theory of propositional types", Fund. Math., 52 (1963), pp.345-350.

[2] Blau,V., "Zur 3-wertigen logic der natürlichen sprache", Papieri zur linguistik, 4 (1973), pp. 20-96.

[3] Carnap,R., Meaning and Necessity, University of Chicago Press, Chicago, 1947.

[4] Carnap,R., Introduction to Symbolic Logic and its applications, Dover Publications Inc., New York, 1958.

[5] Church,A., "A formulation of the simple theory of types", J. Symbolic Logic, 5(1940), pp. 56-58.

[6] Church,A., "A formulation of the logic of sense and denotation", in Structure, Meaning and Method: Essays in honor of Henry M. Sheffer, Liberal Arts, New York, 1951, pp. 3-24.

[7] Costa,N.C.A. and Alves,E.H., "Relations between paraconsistent logic and many-valued logic", Bulletin of the Section of Logic, Polish. Academy of Sciences, Vol. 10, nº 4, 1981, pp. 185-191.

[8] Douty,D.R., Introduction to Montague Semantics, Reidel, Berlin, 1981.

.../.

[9] Frege,G., Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege, Edited by Peter Geach and Max Black, B. Blackwell, Osford, 1966.

[10] Gallin,D., Intensional and Higher-order modal logics , North Holland, Amsterdam, 1952.

[11] Henkin,L., "Completeness in the theory of types", J. Symbolic Logic, 15(1950), pp. 81-91.

[12] Henkin,L., "A theory of propositional types", Fund. Math., 52(1963), pp. 323-344.

[13] Hughes,G.E. and Cressuwell,M.J., An Introduction to modal logic , Methuen, London, 1968.

[14] Kaplan,D., Foundations of intensional logic, Doctoral Dissertation, University of California at Los Angeles, 1964.

[15] J. Łukaniewicz and A. Tarschi, "Untersuchungen über den Aussagen-kalkul", Compts rendus des sēances de la Societē des Sciences et des Lettres de Varsovie, Vlasse III, Vol. 23, 1930, pp. 1-21.

[16] Montague,R., Formal Philosophy: selected papers of Richard Montague, ed. Richmond Thomason, New Haven, 1974.

.../.

[17] Rosser,J.B. and Turquette,A.R., Many-valued logics, North Holland, Amsterdam, 1952.

[18] Stegmüller,W., A filosofia contemporânea, Bol. 2, EPU, EDUSP, S. Paulo, 1977.