ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS SOBRE ANÉIS DE DIVISÃO

ARY O. CHIACCHIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS SOBRE ANÉIS DE DIVISÃO

ARY O. CHIACCHIO

Orientador:
Prof. Dr. João Bosco Prolla

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/1982

Aos manos:

Edson, Renato, Nancy e Carlos.

Agradeço ao Prof. Dr. João Bosco Prolla pela orientação e estímulo, aos amigos que sempre me incentivaram, à minha mãe (ela sabe porque), e à FAPESP que através de bolsa custeou parcialmente meus estudos de Pós-Graduação.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Existem alguns aspectos interessantes da teoria dos espaços vetoriais topológicos que não são abordados nos tratados mais comuns da literatura (Bourbaki, Köthe, Schaefer, etc.) e que foram muito bem cobertos na monografia do Prof. Leopoldo Nachbin de 1948. Na presente tese, tratamos de alguns tópicos encontrados na obra do Prof. Nachbin com a seguinte modificação: o Prof. Nachbin em seu trabalho utiliza como escalares elementos de um corpo topológico, enquanto aqui utilizamos elementos de um anel de divisão topológico, ou seja, abandonamos a comutatividade do produto dos escalares. Aliás, já em seu artigo no Bulletin Amer. Math. Soc., volume 55 de 1949, o Prof. Nachbin utiliza os anéis de divisão topológicos como escalares. Incorporamos, na presente tese, a exposição de alguns resultados desse artigo e que dão continuidade aos assuntos tratados na monografia de 1948.

O principal resultado obtido nesta tese é o Teorema 4.24, que dá condições necessárias e suficientes para que um anel de divisão topológico seja valorizável. Ele é a versão não-comutativa do correspondente resultado de Nachbin |3| que então aparece aqui como Corolário 4.25. Este resultado de Nachbin é mais geral que o de Shafarevich [6] que supunha uma condição a mais: além de supor que o conjunto dos elementos nilpotentes ou neutros é limitado, também supõe que o conjunto dos elementos nilpotentes é aberto. (Cf. Theorem 1, Wieslaw |7|) .

Uma palavra sobre a organização do assunto. Como dissemos acima, os resultados principais são os do Capítulo IV que tratam do problema de caracterizar os anéis de divisão topológicos valorizáveis e as consequências do anel ser estritamente minimal. Os outros capítulos contêm apenas o absolutamente necessário para a compreensão do Capítulo IV. Estão, portanto, longe de esgotar o assunto de que tratam. Para tornar auto-suficiente a leitura da presente tese, incluímos nesses capítulos demonstrações que, consultando a monografia |3| do Prof. L.Nachbin, seriam desnecessárias, pois nelas a comutatividade não tem nenhum papel. Assim sendo, transcrevemos diversas demonstrações de |3| para facilidade de leitura, em vez de referir a |3| para a demonstração.

CAPÍTULO I

ANÉIS DE DIVISÃO TOPOLÓGICOS

1.1 DEFINIÇÃO: Um *anel de divisão topológico* (ADT) é um par (R, τ_R) onde R é um anel de divisão e τ_R é uma topologia sobre R tal que as operações

$$(x,y) \to x\,y$$

$$(x,y) \to x+y$$

$$x \to x^{-1}$$

são contínuas. Observamos que as duas primeiras operações acima estão definidas no produto $R \times R$ munido da topologia produto, e a última está definida apenas em $R \setminus \{0\} = R^*$.

Uma topologia sobre um anel de divisão que o torna um anel de divisão topológico é dita *admissível*.

Todo anel de divisão, munido da topologia caótica, é um anel de divisão topológico. (Basta notar que todo $x \in R$ tem apenas uma vizinhança: o próprio R.) Neste caso R é dito *anel de divisão caótico*. Analogamente, todo anel de divisão munido da topologia discreta é um anel de divisão topológico (o que se demonstra notando que a parte reduzida a x é uma vizinhança de cada $x \in R$) que se denomina *anel de divisão discreto*.

1.2 PROPOSIÇÃO: *Em todo anel de divisão topológico* R, *a função* $y = px+q$, *onde* $p,q \in R$, *sendo* $p \neq 0$ *e* x *varia em* R, *é um homeomorfismo de* R *sobre* R.

DEMONSTRAÇÃO: Em primeiro lugar, dado $y \in R$, existe um e só um

$x \in R$ tal que $y = px+q$, a saber $x = p^{-1}y-p^{-1}q$. Logo a função $y = px+q$ é uma correspondência biunívoca de R sobre R. Provemos agora que esta função é contínua. Dado $x_0 \in R$ e dada uma vizinhança W de $y_0 = px_0+q$, é possível determinar uma vizinhança U_0 de px_0 e outra U_1 de q tais que $U_0+U_1 \subset W$. Como $q \in U_1$ vem, em particular, $U_0+q \subset W$. Além disso, sendo U_0 vizinhança de px_0, é possível determinar uma vizinhança V_0 de p e outra V de x_0 tais que $V_0V \subset U_0$. Como $p \in V_0$, temos $pV \subset U_0$ donde $pV+q \subset U_0+q$, isto é, $pV+q \subset W$ o que prova a continuidade de $y = px+q$.

A função inversa $x = p^{-1}y+(-p^{-1}q)$, sendo do mesmo tipo, é também contínua. Assim, $y = px+q$ é um homeomorfismo de R sobre R.

1.3 LEMA: *Num anel de divisão topológico R, a aderência do conjunto $\{0\}$ é um ideal bilateral.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x,y \in \overline{\{0\}}$, $r \in R$. Devemos mostrar que $x+y \in \overline{\{0\}}$, rx e $xr \in \overline{\{0\}}$. Como $x,y \in \overline{\{0\}}$, temos que para qualquer vizinhança V de x e para qualquer vizinhança U de y, $0 \in V$ e $0 \in U$. Como $(x,y) \to x+y$ é uma função contínua, dada uma vizinhança W de x+y encontramos vizinhanças V e U de x e y respectivamente, tais que $V+U \subset W$. Como $0 \in V$, $0 \in U$ temos $0+0 = 0 \in W$. Logo, $x+y \in \overline{\{0\}}$.

A função $(r,x) \to rx$ é contínua. Então, dada uma vizinhança W de rx existem vizinhanças U e V de r e x respectivamente tais que $UV \subset W$. Como $r \in U$ e $0 \in V$ temos $r \cdot 0 = 0 \in W$. Logo $rx \in \overline{\{0\}}$. Analogamente para $x \cdot r$.

1.4 LEMA: *Se a aderência do conjunto* $\{0\}$ *é* R, *então* R *é caótico.*

DEMONSTRAÇÃO: Por absurdo, suponha R não caótico. Então existe $A \neq \emptyset$, $A \neq R$, aberto. Seja $x_0 \in R$, $x_0 \in A$. Considere $B = A - x_0$. B é aberto (Proposição 1.2), não vazio ($A \neq \emptyset$). Seja $b \in B$. B é vizinhança de b e $b \in \overline{\{0\}}$ (hipótese). Logo $0 \in B$ o que implica $x_0 \in A$, contradição. Logo, $\overline{\{0\}} = R \Rightarrow R$ caótico.

1.5 LEMA: *Um anel de divisão topológico* R *é separado se e só se a aderência do zero é o conjunto* $\{0\}$.

DEMONSTRAÇÃO: A condição é evidentemente necessária; reciprocamente, se ela é satisfeita, a diagonal de $R \times R$, imagem inversa do conjunto $\{0\}$ pela aplicação contínua $(x,y) \to x-y$ é um conjunto fechado, donde R é separado.

1.6 PROPOSIÇÃO: *Salvo os anéis de divisão caóticos, todo anel de divisão topológico é separado.*

DEMONSTRAÇÃO: Num anel de divisão topológico R, a aderência do conjunto $\{0\}$ é um ideal bilateral (Lema 1.3), logo é $\{0\}$ ou R. Como R não é caótico, $\overline{\{0\}} \neq R$ (Lema 1.4), logo $\overline{\{0\}} = \{0\}$ e então pelo Lema 1.5, R é separado.

1.7 PROPOSIÇÃO: *Para que um anel de divisão topológico* R *seja não discreto é necessário e suficiente que, qualquer que seja a vizinhança* V *do* 0 *exista um* $\lambda \in V$ *sendo* $\lambda \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, se R não é discreto, consideremos uma vizinhança V do 0 e seja A aberto tal que $0 \in A \subset V$. Se

V não contivesse nenhum $\lambda \neq 0$ então A conteria apenas o 0, isto é, a parte $\{0\}$ seria aberta. Sendo $y = x+a$ um homeomorfismo de R sobre R que transforma $\{0\}$ na parte $\{a\}$, concluiríamos que $\{a\}$ seria aberto qualquer que fosse $a \in R$. Como $X = \bigcup_{a \in X} \{a\}$, para toda parte não vazia $X \subset R$, concluiríamos que todas as partes de R seriam abertas, contra a hipótese de que R não é discreto.

Reciprocamente, se toda vizinhança de 0 contém algum $\lambda \neq 0$, então R não é discreto, pois se R fosse discreto a parte $V = \{0\}$ seria aberto e, portanto, seria uma vizinhança de 0 não contendo pelo menos um $\lambda \neq 0$.

CAPÍTULO II

ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

2.1 DEFINIÇÃO: Seja (R, τ_R) um anel de divisão topológico. Um *espaço vetorial topológico* (EVT) *sobre* (R, τ_R) é um par (E, τ_E) onde E é um espaço vetorial sobre R e τ_E é uma topologia sobre E tal que as operações:

$$(\lambda, x) \in R \times E \to \lambda x \in E$$

$$(x, y) \in E \times E \to x + y \in E$$

são contínuas, onde $R \times E$ e $E \times E$ têm as suas topologias produto $\tau_R \times \tau_E$ e $\tau_E \times \tau_E$, respectivamente.

Todo anel de divisão topológico (R, τ_R) pode ser concebido como um EVT sobre ele mesmo.

Se E for um espaço vetorial sobre um anel de divisão topológico (R, τ_R), toda topologia sobre E que torne E um EVT sobre (R, τ_R) é dita τ_R-*admissível*. (Quando não houver perigo de confusão diremos simplesmente *admissível*.)

Se munirmos E de sua topologia caótica, E torna-se um EVT sobre (R, τ_R) dito então *espaço vetorial caótico*.

Se τ_R for a topologia discreta sobre R, e τ_E for a topologia discreta sobre E, então (E, τ_E) é um EVT sobre (R, τ_R), dito *espaço vetorial discreto*. Por outro lado, se τ_R *não* for a topologia discreta, então a topologia discreta sobre E *não* é τ_R-admissível.

Se (E, τ_E) é um EVT sobre um anel de divisão topológico (R, τ_R), se $R' \subset R$ é um subanel de divisão e munirmos R'

da topologia induzida por τ_R, isto é, $\tau_R|R'$, então $(R', \tau_R|R')$ é um ADT, e (E, τ_E) é um EVT sobre $(R', \tau_R|R')$. Assim, todo EVT sobre um anel de divisão topológico é também um EVT sobre qualquer subanel topológico do mesmo.

Se E for um EVT sobre (R, τ_R) e V for um subespaço vetorial de E, então V é também um espaço topológico relativamente à topologia induzida sobre V pela topologia de E. Verifica-se facilmente que $(V, \tau_E|V)$ é um EVT sobre (R, τ_R) dito, por isso, um *subespaço vetorial topológico de* (E, τ_E). Um *subespaço vetorial fechado* é um subespaço vetorial que ao mesmo tempo é uma parte fechada do espaço topológico E.

Se $\{E_i\}$ é uma família de EVT's sobre um mesmo anel de divisão topológico (R, τ_R) então o conjunto $\underset{i}{\pi} E_i$, como produto de espaços topológicos é também um espaço topológico e, como produto de espaços vetoriais sobre R, é também um espaço vetorial sobre R. Verifiquemos que $\underset{i}{\pi} E_i$ é um EVT sobre (R, τ_R). De fato, sejam $a = \{a_i\}$ e $b = \{b_i\}$ dois pontos do produto e seja W uma vizinhança no produto do ponto $a+b$. Colocamos $c = a+b$, $c = \{c_i\}$, isto é, $c_i = a_i+b_i$. Sendo W uma vizinhança de c no produto, existe um conjunto finito não vazio de índices J e vizinhanças W_j de c_j em E_j $(j \in J)$ tais que, se $x = \{x_i\}$ satisfizer $x_j \in W_j$ para todo $j \in J$, então $x \in W$. Como E_j é um EVT e W_j é vizinhança de $c_j = a_j + b_j$ em E_j, é possível determinar uma vizinhança U_j de a_j e outra V_j de b_j, ambas em E_j, tais que $U_j+V_j \subset W_j$ $(j \in J)$.

Seja U (resp. V) o conjunto de todos os pontos $x = \{x_i\}$ do produto tais que $x_j \in U_j$ (resp. $x_j \in V_j$) para todo $j \in J$. Então U é vizinhança de a no produto, V é vizinhança de b no produto e $U+V \subset W$. Assim a soma $x+y$ é contínua no produto. Analogamente verifica-se que λx também é contínuo. Por isso, o produto de EVT's sobre um mesmo anel de divisão topológico (R, τ_R) é também um EVT sobre o referido - (R, τ_R).

Seja (E, τ_E) um EVT sobre (R, τ_R). Sempre que não houver perigo de confusão diremos simplesmente "seja E um EVT sobre R".

2.2 PROPOSIÇÃO: *Sendo* E *um EVT sobre* R, *a função* $y = \lambda x + b$ *onde* $\lambda \in R$ *sendo* $\lambda \neq 0$, $b \in E$ *e* x *varia em* E *é um homeomorfismo de* E *sobre* E.

DEMONSTRAÇÃO: Dado $y \in E$, existe um e só um $x \in E$ tal que $y = \lambda x + b$, a saber $x = \lambda^{-1}y - \lambda^{-1}b$. Logo, a função $y = \lambda x + b$ é uma bijeção. Provemos a continuidade. Dado $x_0 \in E$ e dada uma vizinhança W de $y_0 = \lambda x_0 + b$ é possível determinar uma vizinhança U_0 de λx_0 e outra U_1 de b tais que $U_0+U_1 \subset W$. Como $b \in U_1$ vem, em particular $U_0+b \subset W$. Além disso, sendo U_0 uma vizinhança de λx_0 é possível determinar uma vizinhança V_0 de λ em R e outra V de x_0 tais que $V_0V \subset U_0$. Como $\lambda \in V_0$, teremos $\lambda V \subset U_0$ donde $\lambda V + b \subset U_0 + b$, isto é, $\lambda V + b \subset W$ o que prova a continuidade de $y = \lambda x+b$. A função inversa $x = \lambda^{-1} y - \lambda^{-1} b$ sendo do mesmo tipo também é contínua. Assim, $y = \lambda x + b$ é um homeomorfismo de E sobre E.

OBSERVAÇÃO: Um espaço topológico E é dito *regular* se, qualquer que seja o ponto $a \in E$, o conjunto das vizinhanças fechadas desse ponto for uma base de vizinhanças do mesmo.

2.3 PROPOSIÇÃO: *Todo espaço vetorial topológico é um espaço topológico regular.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $a \in E$ e consideremos uma vizinhança W de a. Como $a = 0+a$, é possível determinar uma vizinhança U_1 de 0 e outra V de a tais que $U_1 + V \subset W$. Como $y = -x$ é um homeomorfismo de E sobre E, a transformada $-U_1$ da vizinhança U_1 de 0 é uma vizinhança de $-0 = 0$. Logo $U = U_1 \cap (-U_1)$, como intersecção de duas vizinhanças do 0, é ainda vizinhança do 0 e obviamente $U = -U$. Sendo $U \subset U_1$, teremos $U+V \subset W$. Vamos provar que $\bar{V} \subset W$. De fato, tomemos um $b \in E \setminus W$. Como $y = x+b$ é um homeomorfismo de E sobre E, a transformada $U + b$ de U é uma vizinhança de $0 + b = b$. Ora, $U+b$ é disjunta de V, pois se existisse um $x \in U+b$, $x \in V$, teríamos $b-x \in -U = U$, $x \in V$ donde $b = (b-x) + x \in U+V \subset W$ e portanto $b \in W$, o que não é verdade. Logo $U+b$ é disjunta de V. Isso prova que b não é aderente a V. Logo, todo ponto aderente a V pertence a W, isto é, $\bar{V} \subset W$. Como $\bar{V} \supset V$, podemos dizer que $\bar{V}$ é uma vizinhança de a e como, além disso, $\bar{V}$ é fechada e contida em W, a regularidade está provada.

2.4 COROLÁRIO: *Todo anel de divisão topológico é um espaço topo-*

lógico regular.

2.5 PROPOSIÇÃO: *A aderência de um subespaço vetorial S de um EVT E é um subespaço vetorial.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos $a,b \in \bar{S}$. Seja $c = a+b$ e consideremos uma vizinhança arbitrária W de c em E. Podemos determinar uma vizinhança U de a em E e outra V de b em E tais que $U+V \subset W$. Como $a \in \bar{S}$, U intersecta S, isto é, existe $a' \in S$, $a' \in U$. Analogamente, existe $b' \in S$, $b' \in V$. Tem-se que $a'+b' \in S$ pois S é subespaço vetorial. Além disso, $a'+b' \in U+V$, donde $a'+b' \in W$. Assim está provado que toda vizinhança W de c em E intersecta S. Logo $c \in \bar{S}$, isto é, $a,b \in \bar{S}$ implica $a+b \in \bar{S}$. Se $\lambda \in R$ e $a \in \bar{S}$ então $\lambda a \in \bar{S}$. Verificação análoga. Logo $\bar{S}$ é um subespaço vetorial.

2.6 PROPOSIÇÃO: *Seja (E, τ_E) um EVT sobre um anel de divisão topológico (R, τ_R). Se τ_E não for a topologia caótica, então (R, τ_R) é um espaço separado, isto é, de Hausdorff.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que τ_E não é a topologia caótica. Então existe uma parte aberta $A \subset E$ que não é vazia nem coincide com E. Tomemos um ponto $m \in A$ e outro $n \in E \setminus A$ e consideremos a função $f(\lambda) = \lambda(n-m)+m$ definida para $\lambda \in R$ com valores em E. Como A é uma vizinhança de $f(0) = m$ em E, a continuidade de $f(\lambda)$ implica a existência de uma vizinhança V do 0 em R tal que $f(V) \subset A$, isto é, se $\lambda \in V$ então $f(\lambda) \in A$. Daí resulta que $1 \notin V$ porque se $1 \in V$ teríamos $f(1) \in A$.

Mas $f(1) = n$ e $n \notin A$. Assim obtivemos uma vizinhança V do 0 em R que não contém o 1 e portanto é uma parte própria de R. Isso implica que a topologia de R não é caótica e aplicando a proposição 1.6 concluímos que R é separado.

2.7 COROLÁRIO: *Se* (E, τ_E) *é um EVT separado sobre* (R, τ_R) *e* $E \neq \{0\}$, *então* (R, τ_R) *é separado.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, E como EVT separado que contém pelo menos dois pontos não é caótico. Basta então aplicar a proposição.

2.8 PROPOSIÇÃO: *Para que um EVT* E *seja separado é necessário e suficiente que a intersecção de todas as vizinhanças de* 0 *se reduza a* 0 .

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos E separado. Para cada $x \in E$, sendo $x \neq 0$, existe uma vizinhança V_x de 0 em E que não contém x. Daí resulta que cada $x \neq 0$ não pertence à intersecção de todas as vizinhanças do 0 em E; como essa intersecção contém o 0, ela se reduz a 0.

Reciprocamente, suponhamos que a intersecção de todas as vizinhanças do 0 em E se reduz a 0. Dados $a, b \in E$, sendo $a \neq b$, tem-se $b-a \neq 0$, logo existe uma vizinhança V do 0 tal que $b-a \notin V$, donde segue que $b \notin a+V$. Como a translação $y = a+x$ é um homeomorfismo sobre E, a transformada $a+V$ da vizinhança V do 0 é uma vizinhança de a. Assim, existe uma vizinhança de a que não contém b . Como E é regular (proposição 2.3) concluímos que E é separado.

2.9 DEFINIÇÃO: A intersecção de todas as vizinhanças de 0 em um EVT E é chamada *núcleo* do espaço.

2.10 PROPOSIÇÃO: *O núcleo de um EVT* E *coincide com a aderência em* E *da parte reduzida à origem e é o menor subespaço vetorial fechado de* E.

DEMONSTRAÇÃO: Seja N o núcleo de E. Dada qualquer vizinhança V do 0 em E, pela regularidade de E, existe uma vizinhança fechada U do 0 em E tal que $U \subset V$. Como $0 \in U$, isto é, $\{0\} \subset U$ tem-se que $\overline{\{0\}} \subset \bar{U} = U$, donde $\overline{\{0\}} \subset V$. Pela arbitrariedade de V, conclue-se que $\overline{\{0\}} \subset N$. Para provar que $N \subset \overline{\{0\}}$, tomemos um ponto $x \in N$ qualquer. Toda vizinhança V de x em E intersecta $\{0\}$, isto é, $0 \in V$, pois se fosse $0 \notin V$ existiria uma vizinhança fechada U de x tal que $U \subset V$ e como $E \setminus U$ seria aberto, $0 \in E \setminus U$ e $x \notin E \setminus U$, teríamos uma vizinhança $E \setminus U$ de 0 não contendo x e contradizendo $x \in N$. Isso prova que x é aderente a $\{0\}$, isto é, $x \in \overline{\{0\}}$, donde $N \subset \overline{\{0\}}$. Assim $N = \overline{\{0\}}$. O fato de $\{0\}$ ser um subespaço vetorial de E mostra que $N = \overline{\{0\}}$ é um subespaço vetorial fechado. Além disso, qualquer que seja o subespaço vetorial fechado S de E, tem-se $0 \in S$, isto é, $\{0\} \subset S$ donde $\overline{\{0\}} \subset \bar{S} = S$ ou seja $N \subset S$. Assim N é o menor subespaço vetorial fechado de E.

2.11 PROPOSIÇÃO: *Para que um EVT* E *seja separado é necessário e suficiente que a parte reduzida à origem seja fechada.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja N o núcleo de E. Pela proposição anterior $N = \overline{\{0\}}$. Por outro lado, para que E seja separado é necessário e suficiente que $N = \{0\}$ (proposição 2.8), isto é, que $\overline{\{0\}} = \{0\}$, como queríamos provar.

2.12 PROPOSIÇÃO: *Seja E um espaço vetorial sobre um ADT (R,τ_R). Sendo τ_1 e τ_2 duas topologias τ_R-admissíveis sobre E, para que τ_1 seja menos fina que τ_2 é necessário e suficiente que toda vizinhança de 0 segundo τ_1 seja vizinhança de 0 segundo τ_2.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $\tau_1 \leq \tau_2$. Se V for uma vizinhança de 0 segundo τ_1, existirá uma parte A aberta segundo τ_1 tal que $0 \in A \subset V$. Então A será também aberta segundo τ_2 e por consequência V será vizinhança de 0 segundo τ_2.

Reciprocamente, seja A uma parte qualquer aberta segundo τ_1. Se A fosse a parte vazia, então A seria aberta segundo τ_2. Suponhamos $A \neq \emptyset$. Para cada $a \in A$ existe uma vizinhança V_a de a segundo τ_1 tal que $V_a \subset A$. Como $y = x-a$ é um homeomorfismo de E sobre E segundo τ_1, $V_a - a$ é uma vizinhança de 0 segundo τ_1. Por hipótese, daí resulta que $V_a - a$ é também vizinhança de 0 segundo τ_2. Como $y = x+a$ é um homeomorfismo de E sobre E segundo τ_2, $(V_a - a)+a$ ou seja, V_a é uma vizinhança de a segundo τ_2. Assim, para cada $a \in A$ existe uma vizinhança V_a de a segundo τ_2, ou seja, A é aberto segundo τ_2. Isso prova que $\tau_1 \leq \tau_2$.

2.13 DEFINIÇÃO: Seja (E,τ) um EVT sobre (R, τ_R). Diz-se que um conjunto $\tilde{\mathbf{V}}$ de τ-vizinhanças da origem é um *sistema fundamen* *tal de* τ*-vizinhanças da origem* se dada uma τ-vizinhança qualquer V da origem, existir $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subset V$.

Evidentemente, todo sistema fundamental de τ-vizinhanças da origem é uma base de filtro de partes de E.

2.14 TEOREMA: *Seja* (E,τ) *um EVT sobre um anel de divisão topológico não discreto* (R, τ_R). *Se* $\mathcal{V}$ *é um sistema fundamental de* τ*-vizinhanças da origem, então* $\mathcal{V}$ *é uma base de filtro de partes de* E *tal que:*

(V1) *Dada* $W \in \mathcal{V}$ *existe* $V \in \mathcal{V}$ *tal que* $V+V \subset W$.

(V2) *Dada* $W \in \mathcal{V}$ *existem* U, τ_R*-vizinhança da origem de* R *e* $V \in \mathcal{V}$ *tais que* $UV \subset W$.

(V3) *Se* $V \in \mathcal{V}$ *e* $\lambda \neq 0$ *então existe* $W \in \mathcal{V}$ *tal que* $W \subset \lambda V$.

(V4) *Se* $x \in E$ *e* $W \in \mathcal{V}$ *existe* $\lambda \neq 0$ *tal que* $\lambda x \in W$.

Reciprocamente, dada uma base de filtro $\mathcal{V}$ *sobre* E *de partes que contém a origem e satisfazendo V1-V4, existe uma única topologia admissível* τ *sobre* E *tal que* $\mathcal{V}$ *é um sistema fundamental de* τ*-vizinhanças da origem.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de τ-vizinhanças de 0. Para provar (V1), tomemos $W \in \mathcal{V}$. Pela continuidade da soma é possível determinar $V_1 \in \mathcal{V}$ e $V_2 \in \mathcal{V}$ tais que $V_1+V_2 \subset W$. Existe $V \in \mathcal{V}$ com $V \subset V_1 \cap V_2$ e teremos então $V+V \subset W$.

Para provar (V2), tomemos $W \in \mathcal{V}$; pela continuidade na origem $(0,0) \in R \times E$ da multiplicação por escalares é possível determinar uma τ_R-vizinhança U de 0 e $V \in \overset{\frown}{V}$ tais que $UV \subset W$.

A propriedade (V3) resulta de que, para cada $\lambda \in R$, sendo $\lambda \neq 0$, a homotetia $y = \lambda x$ é um homeomorfismo de E sobre E que transforma 0 em 0 e portanto transforma $V \in \overset{\frown}{V}$ em λV, que é pois τ-vizinhança da origem. Existe então $W \in \overset{\frown}{V}$, $W \subset \lambda V$.

Finalmente, para justificar (V4), consideremos um $x \in E$ e $W \in \overset{\frown}{V}$: notando que $0.x = 0$, podemos determinar uma τ_R-vizinhança U de 0 e outra V de x em E tais que $UV \subset W$. Ora, existe ao menos um $\lambda \in U$ tal que $\lambda \neq 0$ e como $x \in V$ virá $\lambda x \in UV$ donde $\lambda x \in W$.

Reciprocamente, suponhamos dada uma base de filtro $\overset{\frown}{V}$ sobre E de partes que contém a origem e satisfazendo V1-V4. Definamos uma topologia τ sobre E, dizendo que a parte $X \subset E$ é aberta segundo τ quando X é vazia ou quando X não é vazia e para todo $x \in X$ existe um $V \in \overset{\frown}{V}$ tal que $x+V \subset X$.

A1) $\emptyset \in \tau$ (por definição) e $E \in \tau$ (pois $\overset{\frown}{V}$ é base de filtro).

A2) Se X_1 e X_2 são abertos, devemos mostrar que $X_1 \cap X_2$ é aberto, ou seja, para todo $x \in X_1 \cap X_2$ existe um $V \in \overset{\frown}{V}$ tal que $x+V \subset X_1 \cap X_2$. Basta tomar $V \subset V_1 \cap V_2$ onde $V_1 \in \overset{\frown}{V}$ é tal que $x+V_1 \subset X_1$ e $V_2 \in \overset{\frown}{V}$ é tal que $x+V_2 \subset X_2$.

A3) Se $X_i \in \tau$ então $\bigcup_{i \in I} X_i \in \tau$.

Se $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, existe $i \in I$ tal que $x \in X_i$, logo existe $V \in \tilde{V}$ tal que $x+V \subset X_i$. Então $x+V \subset \bigcup_{i \in I} X_i$ ou seja $\bigcup_{i \in I} X_i \in \tau$.

De A1, A2 e A3 temos que τ é topologia. Provemos agora que uma parte $W \subset E$ é uma vizinhança segundo τ de um ponto $a \in E$ se e só se existe $W_0 \in \tilde{V}$ tal que $a+W_0 \subset W$. De fato, se W é vizinhança de a segundo τ, existe uma parte aberta X segundo τ tal que $a \in X \subset W$. Como X é aberto segundo τ e $a \in X$, existe $W_0 \in \tilde{V}$ tal que $a+W_0 \subset X$ donde $a+W_0 \subset W$.

Inversamente, suponhamos que $a+W_0 \subset W$, onde $W_0 \in \tilde{V}$. Seja X o conjunto de todos os $x \in E$ tais que existe ao menos um $V \in \tilde{V}$ para o qual $x+V \subset W$. É óbvio que $a \in X$ pois $a+W_0 \subset W$. É óbvio também que $X \subset W$ pois se $x \in X$, determinando $V \in \tilde{V}$ tal que $x+V \subset W$ e notando que $0 \in V$, teremos $x = x+0 \in x+V$ donde $x \in W$ o que prova que $X \subset W$. Para mostrar então que W é vizinhança de a segundo τ basta provar que X é aberto segundo τ. De fato, dado $x \in X$, existe $V \in \tilde{V}$ tal que $x+V \subset W$. Por (V1) existe $U \in \tilde{V}$ tal que $U+U \subset V$. Então, se $y \in x+U$ teremos $y+U \subset x+U+U \subset x+V$, donde $y+U \subset W$ o que prova que $y \in X$ e portanto $x+U \subset X$. Logo X pertence a τ.

Em particular, fazendo $a = 0$, vemos que $\tilde{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 na topologia τ.

Provemos agora que τ é uma topologia admissível sobre E. De fato, consideremos dois vetores $a,b \in E$ e seja $W \supset (a+b)+W_0$, onde $W_0 \in \tilde{V}$, uma vizinhança qualquer de $a+b$

segundo τ. Determinemos, segundo (V1), $W_1 \in \overset{\backsim}{V}$ tal que $W_1+W_1 \subset W_0$. Pondo $U = a+W_1$, $V = b+W_1$ teremos uma vizinhança de a e outra de b, ambas segundo τ, tais que $U+V = (a+b)+(W_1+W_1)$ donde $U+V \subset W$ o que prova a continuidade da soma de vetores. Consideremos agora um escalar $\alpha \in R$, um vetor $a \in E$ e seja $W \supset \alpha a+W_0$, onde $W_0 \in \overset{\backsim}{V}$, uma vizinhança qualquer de αa segundo τ. Suponhamos em primeiro lugar que $\alpha = 0$. Temos então $\lambda x = \lambda(x-a)+\lambda a$. Por (V1) podemos determinar $W_1 \in \overset{\backsim}{V}$ tal que $W_1+W_1 \subset W_0$. Por (V2) podemos determinar uma τ_R-vizinhança U_1 do 0 e uma $V \in \overset{\backsim}{V}$ tais que $U_1V \subset W_1$. Por (V4) existe um $\delta \in R$, $\delta \neq 0$ tal que $\delta a \in V$. Como U_1 é τ_R-vizinhança do 0 e $\delta \neq 0$ $U_1\delta$ é τ_R-vizinhança do 0. Pondo $U = U_1 \cap U_1\delta$ temos outra τ_R-vizinhança de 0. Se então $\lambda \in U$, $x \in a+V$, em primeiro lugar virá $\lambda \in U_1$, $x-a \in V$, donde $\lambda(x-a) \in U_1V$ ou $\lambda(x-a) \in W_1$; em segundo lugar virá $\lambda \in U_1\delta$ donde $\lambda a \in (U_1\delta)a = U_1(\delta a) \subset U_1V$ ou $\lambda a \in W_1$. Reunindo os dois fatos, teremos $\lambda x = \lambda(x-a)+\lambda a \in$ $\in W_1+W_1$ ou $\lambda x \in W_0$ para todo $\lambda \in U$, $x \in a+V$ o que prova a continuidade de λx para $\lambda = 0$ e $x = a$.

Suponhamos agora $\alpha \neq 0$. Temos: $\lambda x-\alpha a = (\lambda-\alpha)x+\alpha(x-a)$. Determinemos $W_1 \in \overset{\backsim}{V}$ tal que $W_1+W_1 \subset W_0$. Pelo que acabamos de ver, é possível obter uma τ_R-vizinhança U do 0 e uma $V_1 \in \overset{\backsim}{V}$ tais que $\lambda-\alpha \in U$, $x \in a+V_1$ impliquem $(\lambda-\alpha)x \in W_1$. Por (V3), existe $W_2 \in \overset{\backsim}{V}$ tal que $W_2 \subset \alpha^{-1}W_1$. Por outro lado, existe $V \in \overset{\backsim}{V}$ tal que $V \subset V_1 \cap W_2$. Logo $V \subset V_1 \cap \alpha^{-1}W_1$. Supondo então $\lambda \in \alpha+U$, $x \in a+V$ teremos em primeiro lugar que $\lambda-\alpha \in U$, $x \in a+V$, donde $(\lambda-\alpha)x \in W_1$ e em segundo lugar que $x \in a+\alpha^{-1}W_1$ donde $x-a \in \alpha^{-1}W_1$ ou $\alpha(x-a) \in W_1$. Daí

$\lambda x-\alpha a = (\lambda-\alpha)x+\alpha(x-a) \in W_1+W_1 \subset W_0$ donde $\lambda x \in \alpha a+W_0 \in W$ para $\lambda \in \alpha+U$, $x \in a+V$ o que prova a continuidade de λx para $\lambda = \alpha$ e $x = a$. Assim está visto que τ é admissível.

Para provar a unicidade de τ, basta observar que se uma outra topologia admissível τ_1 sobre E possuir também $\breve{V}$ como sistema fundamental de τ_1-vizinhanças de 0, então toda τ-vizinhança do 0 é τ_1-vizinhança do 0. Logo $\tau \leq \tau_1$. Analogamente, $\tau_1 \leq \tau$; donde $\tau = \tau_1$.

Sendo E e F dois espaços vetoriais topológicos sobre o mesmo anel de divisão topológico (R, τ_R), chama-se *transformação linear contínua* de E em F, toda transformação linear de E em F que seja contínua entre os espaços topológicos E e F.

Uma transformação linear de E sobre F que seja ao mesmo tempo um homeomorfismo entre E e F é denominada um *isomorfismo* entre E e F. Dois EVT's sobre um mesmo (R, τ_R) são ditos *isomorfos* se existir pelo menos um isomorfismo entre eles. É claro que se E e F forem isomorfos como EVT's, daí resultará que E e F serão isomorfos como espaços vetoriais, mas a recíproca pode ser falsa. Quando o espaço dos valores F é o próprio anel de divisão topológico (R, τ_R), toda transformação linear contínua de E em R é chamada *forma linear contínua* ou *funcional linear contínuo*.

2.15 PROPOSIÇÃO: *Para que uma transformação linear* $T : E \to F$ *en* *tre dois EVT's seja contínua em* E *é necessário e suficiente que* T *seja contínua em pelo menos um ponto de* E .

DEMONSTRAÇÃO: Se T for contínua em E, isto é, em todos os pontos de E, T será contínua em pelo menos um ponto de E.

Reciprocamente, suponhamos T contínua em um certo $x_0 \in E$. Dado qualquer outro $x_1 \in E$, dada uma vizinhança W_1 de $y_1 = T(x_1)$ em F e pondo $y_0 = T(x_0)$, a transformação $v = u+(y_0-y_1)$ é um homeomorfismo de F sobre F, que transforma y_1 em y_0. Logo $W_0 = W_1+(y_0-y_1)$ é uma vizinhança de y_0 em F. Pela continuidade de T em x_0, existe uma vizinhança V_0 de x_0 em E tal que $T(V_0) \subset W_0$. A transformação $v = u+(x_1-x_0)$ é um homeomorfismo de E sobre E que transforma x_0 em x_1. Logo $V_1 = V_0+(x_1+x_0)$ é uma vizinhança de x_1 em E. Ora, $T(V_1) = T(V_0)+T(x_1)-T(x_0) \subset W_0+(y_1-y_0) = W_1$ isto é, $T(V_1) \subset \subset W_1$, o que prova a continuidade de T em x_1.

Sendo E e F dois EVT's sobre (R, τ_R) diremos que uma transformação linear contínua $T : E \to F$ de E *sobre* F é um *homomorfismo contínuo* de E *sobre* F se a transformada T(A) de qualquer parte aberta A de E for aberta em F. Se $T : E \to F$ for apenas uma transformação em F, o conjunto $F_1 = T(E)$ é um subespaço vetorial topológico de F e T pode ser considerada como uma transformação *sobre* F_1. Diremos então que $T : E \to F$ é um *homomorfismo contínuo* de E em F se $T : E \to F_1$ for um homomorfismo contínuo de E sobre F_1. Notemos que no caso puramente vetorial, utilizamos as expressões "transformação linear" e "homomorfismo" como sinônimas; no caso vetorial topológico, todo "homomorfismo contínuo" é uma "transformação linear contínua" sem que a recíproca seja por força verdadeira.

Consideremos um EVT E sobre um anel de divisão topológico (R, τ_R), um espaço vetorial F sobre R e uma transformação linear $T : E \to F$ de E sobre F. Indiquemos com τ_E a topologia dada sobre E e definamos uma topologia τ_F sobre F dizendo que $Y \subset F$ é aberto segundo τ_F se $T^{-1}(Y)$, isto é, sua imagem inversa, for aberto segundo τ_E.

A1) $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_E$, $T^{-1}(F) = E \in \tau_E$ e portanto $\emptyset$ e $F \in \tau_F$.

A2) $T^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = T^{-1}(Y_1) \cap T^{-1}(Y_2)$ e portanto $Y_1 \cap Y_2 \in \tau_F$ se $Y_1, Y_2 \in \tau_F$.

A3) $T^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) = \bigcup_{i \in I} T^{-1}(Y_i)$ e logo $\bigcup_{i \in I} Y_i \in \tau_F$ se $Y_i \in \tau_F$ $\forall\, i \in I$.

Assim, τ_F é topologia sobre F.

Para que $Y \subset F$ seja aberto segundo τ_F é necessário e suficiente que exista $X \subset E$ aberto segundo τ_E tal que $T(X) = Y$. De fato, se Y for aberto segundo τ_F, pondo $X = T^{-1}(Y)$ teremos uma parte aberta segundo τ_E tal que $T(X) = Y$ (T é sobre F).

Reciprocamente, suponhamos que $Y = T(X)$, sendo X aberto segundo τ_E. Seja N o núcleo de T. $T^{-1}(Y) = N+X$ e como $N+X = \bigcup_{n \in N} n+X$ e cada $n+X$ é aberto segundo τ_E, o mesmo sucede com $T^{-1}(Y)$, isto é, Y é aberto segundo τ_F.

Provemos agora que τ_F é τ_R-admissível. Para isso, consideremos dois vetores $m, n \in F$ e seja W uma vizinhança aberta de $m+n$ segundo τ_F. Como T é uma transformação sobre F, existem $a,b \in E$ tais que $T(a) = m$ e $T(b) = n$. Ora $a+b \in T^{-1}(W)$ e $T^{-1}(W)$ é aberto segundo τ_E: logo existem vizinhanças A de a e B de b, abertos segundo τ_E, tais que $A+B \subset T^{-1}(W)$. Pondo $U = T(A)$ e $V = T(B)$ obtemos vizinhanças abertas segundo τ_F de m e n respectivamente e $U+V \subset W$. Assim, a soma de vetores em F é contínua segundo τ_F. Vamos provar que o produto de um escalar $\lambda \in R$ por um vetor $m \in F$ é contínuo. Seja W uma vizinhança aberta de λm segundo τ_F. Como T é transformação sobre F, existe $a \in E$ tal que $T(a) = m$. Ora $\lambda a \in T^{-1}(W)$ e $T^{-1}(W)$ é aberto segundo τ_E. Logo existem vizinhanças abertas U de λ em R e outra A de a em E tais que $UA \subset T^{-1}(W)$. Pondo $V = T(A)$ obtemos uma vizinhança aberta de m segundo τ_F e $UV = UT(A) = T(UA) \subset W$. Assim, o produto de um escalar por um vetor é contínuo. A topologia τ_R-admissível τ_F, assim obtida sobre F denomina-se *imagem direta* de τ_E por meio de T.

Considerando F munido com τ_F, a transformação T é um homomorfismo contínuo de E sobre F. De fato, como a imagem inversa $T^{-1}(Y)$ de toda parte aberta Y segundo τ_F é aberta segundo τ_E, T é contínua; além disso, já foi visto que a imagem direta $T(X)$ de toda parte aberta X segundo τ_E é aberta segundo τ_F.

2.16 PROPOSIÇÃO: *Para que a imagem direta da topologia de um EVT* E *por uma transformação linear* T *sobre outro espaço vetorial* F *seja separada é necessário e suficiente que o núcleo da transfor-*

mação seja fechado em E.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $N = T^{-1}(0)$ o núcleo. Se τ_F for separada, a parte reduzida à origem de F será fechada segundo τ_F (proposição 2.11) e portanto N, como imagem inversa de uma parte fechada por uma função contínua, será fechado em E.

Reciprocamente, se N for fechado em E, seu complementar $E \setminus N$ será aberto em E, portanto $T(E \setminus N)$ será - aberto segundo τ_F. Ora $T(E \setminus N)$ é o complementar da parte $\{0\}$ em F. Logo $\{0\}$ é fechado segundo τ_F, isto é, τ_F é separada.

Seja dado um EVT E. A partir de cada subespaço vetorial $V \subset E$ podemos construir o espaço vetorial quociente E/V e a transformação canônica $\varphi : E \to E/V$.

Sendo φ uma transformação linear de E sobre E/V, podemos munir E/V da imagem direta da topologia de E. Assim, E/V torna-se um EVT dito *quociente* de E por V; a topologia de E/V é dita *quociente* da topologia de E por V e a transformação canônica fica sendo um homomorfismo contínuo de E sobre E/V. A última proposição demonstrada mostra que o EVT quociente de um espaço vetorial topológico E por um subespaço vetorial V é separado se e só se V é fechado em E. De fato, V é o núcleo da transformação canônica. Em particular, se considerarmos um EVT E, o seu núcleo N será um subespaço vetorial fechado (proposição 2.10) e por isso, E/N é denominado EVT separado associado a E.

Vejamos agora a noção de *imagem inversa de uma topologia*. Sejam E um espaço vetorial sobre um ADT (R,τ_R) , (F,τ_F)

um EVT sobre (R, τ_R) e $T : E \to F$ uma transformação linear de E em F. Definamos uma topologia τ_E sobre E dizendo que $X \subset E$ é aberto segundo τ_E se existe $Y \subset F$ aberto segundo τ_F tal que $X = T^{-1}(Y)$.

A1) $\emptyset = T^{-1}(\emptyset)$, $E = T^{-1}(F)$ e portanto $\emptyset$ e $E \in \tau_E$.

A2) Se $X_1, X_2 \in \tau_E$, devemos mostrar que $X_1 \cap X_2 \in \tau_E$, ou seja, devemos mostrar que existe $Y \subset F$ aberto segundo τ_F tal que $X_1 \cap X_2 = T^{-1}(Y)$. Basta tomar $Y = Y_1 \cap Y_2$ onde Y_1 e Y_2 são abertos de F tais que $X_1 = T^{-1}(Y_1)$ e $X_2 = T^{-1}(Y_2)$.

A3) Se $X_i \in \tau_E$ $\forall\, i \in I$, devemos mostrar que $\bigcup_{i \in I} X_i \in \tau_E$, ou seja, devemos mostrar que existe $Y \subset F$ aberto segundo τ_F tal que $\bigcup_{i \in I} X_i = T^{-1}(Y)$. Basta tomar $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ onde Y_i é aberto de F e tal que $X_i = T^{-1}(Y_i)$ $\forall\, i \in I$.

Assim, τ_E é topologia sobre E.

Provemos agora que τ_E é τ_R-admissível sobre E. Para isso, consideremos dois vetores $a, b \in E$ e seja W uma vizinhança aberta de $a+b$ segundo τ_E. Ponhamos $m = T(a)$ e $n = T(b)$. Existe $Y \subset F$ aberto segundo τ_F tal que $W = T^{-1}(Y)$. Como $a+b \in W$, donde $m+n \in Y$, existem vizinhanças M de m e N de n abertas segundo τ_F tais que $M+N \subset Y$. Pondo $U = T^{-1}(M)$, $V = T^{-1}(N)$ obtemos uma vizinhança U de a e outra V de b, ambas abertas segundo τ_E tais que $U+V \subset W$. Isso prova a continuidade da soma de vetores em E.

Sejam $\lambda \in R$ e $a \in E$ e seja W uma vizinhança aberta de λa segundo τ_E. Seja $m = T(a)$. Existe $Y \subset F$ aberto segundo τ_F tal que $W = T^{-1}(Y)$. Como $\lambda a \in W$, donde $\lambda m \in Y$, existem vizinhanças abertas U de λ em R e M de m em F tais que $UM \subset Y$. Pondo $V = T^{-1}(M)$ obtemos uma vizinhança aberta de a segundo τ_E tal que $UV = UT^{-1}(M) = T^{-1}(UM) \subset T^{-1}(Y) = W$. Logo o produto de um escalar por um vetor é contínuo.

A topologia τ_R-admissível τ_E assim obtida sobre E denomina-se *imagem inversa* de τ_F por meio de T.

CAPÍTULO III

PARTES LIMITADAS

3.1 DEFINIÇÃO: Seja (E, τ_E) um EVT sobre (R, τ_R) e $L \subset E$. Diremos que L é τ_E-*limitado*, ou simplesmente *limitado* se não houver perigo de confusão, se para toda τ_E-vizinhança W de 0 existir τ_R-vizinhança V de 0 tal que $VL \subset W$.

3.2 PROPOSIÇÃO: *Se* (R, τ_R) *não é discreto, para que a parte* $L \subset E$ *seja limitada em* E *é necessário e suficiente que, para toda vizinhança* W *do* 0 *em* E *exista um* $\lambda \in R$, *sendo* $\lambda \neq 0$, *tal que* $\lambda L \subset W$.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, se L é limitado, dada uma τ_E-vizinhança W do 0, existe uma τ_R-vizinhança V do 0 tal que $VL \subset W$. A hipótese de R não ser discreto permite obter um $\lambda \in V$, $\lambda \neq 0$ (proposição 1.7) e então $\lambda L \subset W$.

Reciprocamente, suponhamos que L possui a propriedade do enunciado. Dada a vizinhança W de 0 em E, pela continuidade do produto de um escalar por um vetor na origem $(0,0) \in R \times E$, podemos obter uma vizinhança V_1 de 0 em R e outra W_1 de 0 em E tais que $V_1 W_1 \subset W$. Pela hipótese, existe um $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda L \subset W_1$. Pondo $V = V_1 \lambda$ obtemos uma vizinhança de 0 em R tal que $VL = (V_1 \lambda) L = V_1(\lambda L) \subset \subset V_1 W_1$ donde $VL \subset W$ e portanto L é limitado.

A proposição que acabamos de provar supondo R não discreto, mostra imediatamente o conteúdo geométrico da noção de parte limitada: uma parte L é limitada se e só se ela pode ser tornada, por meio de uma homotetia de centro 0 e de uma razão $\lambda \neq 0$ conveniente, tão pequena e próxima de 0 quanto se desejar.

Uma variante da proposição 3.2 é a seguinte: *Se* (R,τ_R) *não é discreto, para que a parte* $L \subset E$ *seja limitada em* E *é necessário e suficiente que, para toda* τ_E*-vizinhança do* 0*, exista um* $\lambda \in R$ *tal que* $L \subset \lambda W$. Basta observar que $\lambda L \subset W$, $\lambda \neq 0$ implicam $L \subset \lambda^{-1}W$, que $L \subset \lambda W$, $\lambda \neq 0$ implicam $\lambda^{-1}L \subset W$ e que a parte reduzida à origem é obviamente limitada. Esta nova forma significa, geometricamente, que uma parte L é limitada se e só se toda τ_E-vizinhança da origem pode ser ampliada por uma homotetia de centro 0 e razão λ conveniente de modo a abranger L. A proposição 3.2 precedente mostra também que a noção de parte limitada em E independe da topologia que se está considerando sobre o anel de divisão R, desde que se exclua a topologia discreta de R. O que sucede quando o anel de divisão topológico dos escalares é discreto é esclarecido pela proposição seguinte:

3.3 PROPOSIÇÃO: *Se* R *é discreto ou se* E *é caótico, todas as partes de* E *são limitadas. Fora desses dois casos,* E *não é limitado e portanto nem todas as partes de* E *são limitadas.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos uma parte $L \subset E$ e seja W uma vizinhança qualquer de 0 em E. Se R for discreto, a parte $V = \{0\}$ será aberta em R e assim teremos uma vizinhança V do 0 em R tal que $VL = \{0\}$, donde $VL \subset W$. Logo, toda parte de E será limitada. Se E for caótico, necessariamente $W=E$ e pondo $V = R$ teremos uma vizinhança de 0 em R tal que

$VL \subset W$. Logo, toda parte de E será limitada.

Suponhamos agora que nem R é discreto nem E é caótico. Esse último fato significa que existe uma parte aberta $A \subset E$, sendo $A \neq \emptyset$ e $A \neq E$. Tomemos um ponto $m \in A$ e outro $n \in E \setminus A$. A translação $y = x-m$ é homeomorfismo de E sobre E e portanto transforma a parte aberta A em outra parte aberta $W = A-m$. É claro que $0 \in W$ e portanto W é τ_E-vizinhança de 0; é claro também que $n-m \notin W$ e portanto $W \neq E$. Daí resulta que para todo $\lambda \in R$, sendo $\lambda \neq 0$, a inclusão $\lambda E \subset W$ é falsa, pois $\lambda E = E$ e $W \subset E$, $W \neq E$. Aplicando a proposição 3.2, concluímos que E não é limitado.

OBSERVAÇÃO: A proposição que acabamos de provar indica que a noção de parte limitada só tem interesse real no caso dos espaços vetoriais topológicos *não caóticos* sobre anéis de divisão topológicos *não discretos*.

Como todo anel de divisão topológico (R, τ_R) é um EVT sobre si mesmo, tem sentido falar em parte limitada de R. A proposição 3.3, mostra que um ADT R é limitado se e só se R é caótico ou discreto.

3.4 PROPOSIÇÃO: *Seja* E *um EVT sobre um anel de divisão topológico não discreto* R. *Para que um subespaço vetorial* $S \subset E$ *seja limitado é necessário e suficiente que* S *esteja contido no núcleo* N *de* E. *Portanto, para que o único subespaço vetorial limitado seja a parte reduzida à origem é necessário e suficiente que* E *seja separado.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos em primeiro lugar que $S \subset N$. Qualquer que seja a vizinhança W de 0 em E, tem-se $N \subset W$ donde $S \subset W$, isto é, $1.S \subset W$ o que prova que S é uma parte limitada. Reciprocamente, suponhamos S limitada. Qualquer que seja a vizinhança W do 0 em E, existe $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda S \subset W$. Ora $\lambda S = S$ pois $\lambda \neq 0$ e S é subespaço vetorial; logo $S \subset W$ e tendo em conta a arbitrariedade de W vem $S \subset N$. Assim está provada a primeira asserção. A segunda resulta da primeira e da proposição 2.8. O núcleo de um EVT é pois, o maior subespaço vetorial limitado.

3.5 **PROPOSIÇÃO:** (a) *Toda parte de uma parte limitada também é limitada.*

(b) *A reunião de um número finito não nulo de partes limitadas é limitada.*

(c) *Toda parte finita é limitada.*

(d) *Se* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *são partes limitadas, a soma* $L_1+L_2+\ldots+L_n$ *é limitada.*

(e) *Se* $\Omega \subset R$ *é limitada em* R *e* $L \subset E$ *é limitada em* E *então* ΩL *é limitada em* E.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Suponhamos $A \subset B \subset E$. Se B for limitada, para toda τ_E-vizinhança W do 0 existe uma vizinhança U do 0 em R tal que $UB \subset W$, donde segue que $UA \subset W$ e portanto A será limitada.

(b) Suponhamos $A, B \subset E$ limitadas. Dada uma τ_E-vizinhança W do 0, existe uma vizinhança U do 0 em R tal que $UA \subset W$ e outra vizinhança V do 0 em R tal que $VB \subset W$. Pondo

$T = U \cap V$, obtemos uma vizinhança do 0 em R tal que $TA \subset W$ e $TB \subset W$ donde segue que $T(A \cup B) \subset W$ e portanto $A \cup B$ é limitada. Por indução passamos desse caso para o caso geral.

(c) A parte vazia é claramente limitada. Consideremos agora uma parte $\{x\}$ reduzida a um ponto $x \in E$. Dada uma τ_E-vizinhança W do 0, como $0 = 0.x$ existe uma vizinhança U do 0 em R e outra V de x em E tais que $UV \subset W$. De $x \in V$ resulta $Ux \subset W$ e portanto $\{x\}$ é limitada. Pela parte (b) podemos concluir que toda parte finita não vazia é limitada.

(d) Consideremos duas partes $A, B \subset E$ não vazias. Suponhamos A e B limitadas. Dada uma τ_E-vizinhança W de 0 qualquer, existe outra τ_E-vizinhança W_1 de 0 tal que $W_1 + W_1 \subset \subset W$. Determinemos uma vizinhança U do 0 em R tal que $UA \subset W_1$ e outra V de 0 em R tal que $VB \subset W_1$. Pondo $T = U \cap V$ obtemos uma vizinhança de 0 em R tal que $TA \subset W_1$ e $TB \subset W_1$. Ora, $T(A+B) \subset TA+TB \subset W_1 + W_1$, donde $T(A+B) \subset W$. Logo $A+B$ é limitada. O caso de n parcelas é obtido por indução.

(e) Seja W uma τ_E-vizinhança de 0. Como L é limitada em E, existe uma vizinhança U_1 de 0 em R tal que $U_1 L \subset W$. Como Ω é limitada em R, existe uma vizinhança U do 0 em R tal que $U\Omega \subset U_1$. Então $U(\Omega L) = (U\Omega)L \subset U_1 L$, donde $U(\Omega L) \subset W$. Assim ΩL é limitada em E.

3.6 PROPOSIÇÃO: *Uma parte é limitada se e só se sua aderência o for.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos $L \subset E$. Como $L \subset \bar{L}$, se $\bar{L}$ for limitado, o mesmo sucederá com L. Inversamente, suponhamos L limitada. Se R fosse discreto, $\bar{L}$ seria obviamente limitada. Suponhamos R não discreto. Dada uma τ_E-vizinhança W de 0, existe outra τ_E-vizinhança fechada W_1 de 0 contida em W (proposição 2.3). Determinemos $\lambda \in R$, sendo $\lambda \neq 0$ tal que $L \subset \lambda W_1$. A homotetia $y = \lambda x$ é um homeomorfismo de E sobre E e por isso transforma a parte fechada W_1 na parte λW_1 também fechada. Portanto $\bar{L} \subset \overline{\lambda W_1} = \lambda W_1$, donde $\bar{L} \subset \lambda W$, isto é, $\bar{L}$ é limitada.

3.7 PROPOSIÇÃO: *Toda parte compacta é limitada.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja K uma parte compacta de (E, τ_E). Seja W uma τ_E-vizinhança da origem de E. Para cada $x \in K$, existem vizinhança V_x da origem de R e vizinhança W_x de x em E tais que $V_x W_x \subset W$, pois $0x = 0$. Pela compacidade do conjunto K, existe uma parte finita $F \subset K$ tal que K está contido na união finita A de todos os W_x com $x \in F$. Definamos V como a interseção finita de todos os V_x com $x \in F$. Obtemos assim uma vizinhança V da origem de R e, é claro,

$$VK \subset VA \subset W$$

pois $V \subset V_x$ e $V_x W_x \subset W$ para todo $x \in F$. Logo K é limitado.

3.8 PROPOSIÇÃO: *Sejam* E *e* F *EVT's sobre* (R, τ_R). *Toda transformação linear contínua* $T : E \to F$ *transforma partes limitadas em partes limitadas.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $A \subset E$ é limitada em E e seja $B = T(A)$. Dada uma τ_F-vizinhança W de 0, a continuidade de T e o fato de ser $T(0) = 0$ permitem determinar uma τ_E-vizinhança V de 0 tal que $T(V) \subset W$. Como A é limitada em E, existe uma vizinhança U de 0 em R tal que $UA \subset V$. Temos então: $UB = UT(A) = T(UA) \subset T(V)$ donde $UB \subset W$, isto é, B é limitada em F.

3.9 PROPOSIÇÃO: *Seja S um subespaço vetorial topológico do EVT E. Se $A \subset E$ é limitado em E então $A \cap S$ é limitado em S. Se $A \subset S$, então A é limitada em S se e só se A for limitada em E.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos $A \subset E$ limitado em E e ponhamos $B = A \cap S$. Dada uma vizinhança qualquer W de 0 em S, existe uma vizinhança V de 0 em E tal que $W = V \cap S$. Como A é limitada em E, existe uma vizinhança U de 0 em R tal que $UA \subset V$. Daí segue $UB = (UA) \cap S \subset V \cap S$, donde $UB \subset W$, isto é, B é limitada em S. Suponhamos agora que $A \subset S$. Se A for limitada em E, pelo que precede $A \cap S$, ou seja, A será limitada em S. Suponhamos agora A limitada em S. Dada uma vizinhança qualquer W de 0 em E e pondo $V = W \cap S$, obtemos uma vizinhança de 0 em S. Pela hipótese, existe uma vizinhança U de 0 em R tal que $UA \subset V$, donde $UA \subset W$, isto é, A é limitada em E.

3.10 PROPOSIÇÃO: *Se $\pi_i E_i$ for um produto de EVT's, para que uma parte A do produto seja limitada nesse produto é necessário e* *suficiente que suas projeções nos fatores sejam limitadas nesses fatores.*

DEMONSTRAÇÃO: Para cada índice $i \in I$, a projeção $p_i : \pi_i E_i \to E_i$ do produto sobre o i-ésimo fator é uma transformação linear contínua do produto sobre esse fator. Portanto, se A for limitada em $\pi_i E_i$, sua i-ésima projeção $A_i = p_i(A)$ será limitada em E_i (proposição 3.8).

Reciprocamente, suponhamos cada A_i limitada em E_i e seja $A' = \pi_i A_i$. Dada uma vizinhança qualquer W de 0 em $\pi_i E_i$, existem um conjunto não vazio finito de índices $i_1, \ldots, i_n$ e vizinhanças V_1 de 0 em E_{i_1}, V_2 de 0 em $E_{i_2}, \ldots, V_n$ de 0 em E_{i_n} tais que se $x = \{x_i\}$ satisfizer $x_{i_1} \in V_1$, $x_{i_2} \in V_2, \ldots, x_{i_n} \in V_n$, então $x \in W$. Como A_{i_1} é limitada em E_{i_1}, existe uma vizinhança U_1 de 0 em R tal que $U_1 A_{i_1} \subset V_1$; analogamente, como A_{i_2} é limitada em E_{i_2}, existe uma vizinhança U_2 de 0 em R tal que $U_2 A_{i_2} \subset V_2$ e assim por diante até $U_n A_{i_n} \subset V_n$. Pondo $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ obtemos uma vizinhança de 0 em R. Um ponto genérico de UA' é da forma λx, onde $\lambda \in U$ e $x = \{x_i\} \in A'$, isto é, $x_i \in A_i$ para todo i. Como então $\lambda \in U_1$ teremos $\lambda x_{i_1} \in U_1 A_{i_1}$, donde segue-se que $\lambda x_{i_1} \in V_1$ e analogamente $\lambda x_{i_2} \in V_2, \ldots$ $\ldots, \lambda x_{i_n} \in V_n$. Isto prova que $\lambda x \in W$ e por consequência $UA' \subset W$. Assim está visto que A' é limitada no produto e notando que $A \subset A'$ concluímos que A é limitada no produto.

3.11 PROPOSIÇÃO: *Um anel de divisão topológico* R *é compacto se e só se ele é caótico ou discreto e finito.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos R compacto. A proposição 3.7 mostra que R é limitado e portanto R é caótico ou discreto (Observação após proposição 3.3). No segundo caso R será finito em virtude da compacidade, pois "todo espaço discreto compacto é finito". Reciprocamente, se R for caótico, R será compacto pois obviamente "todo espaço topológico caótico é compacto"; se R for discreto e finito, R será compacto pois "todo espaço topológico finito é compacto".

3.12 DEFINIÇÃO: Um anel de divisão topológico (R,τ_R) é dito de *tipo V* se tem a seguinte propriedade: Se $A \subset R$ está *afastado da origem* (isto é, A é disjunto de uma vizinhança da origem) então A^{-1} é limitado.

3.13 PROPOSIÇÃO: *Seja* (E,τ_E) *um EVT sobre um anel de divisão topológico não discreto* (R,τ_R). *Se* (R,τ_R) *for de tipo V, então, para todo* $x_0 \in E$, $x_0 \notin \overline{\{0\}}$, *a aplicação* $\lambda \in R \to \lambda x_0$ *é um isomorfismo vetorial topológico entre* (R,τ_R) *e o espaço vetorial topológico* $(Rx_0, \tau_E|Rx_0)$, *onde* Rx_0 *denota o subespaço vetorial de* E *gerado por* x_0 .

DEMONSTRAÇÃO: Como $x_0 \neq 0$, $\lambda \to \lambda x_0$ é isomorfismo vetorial contínuo. Provemos que sua inversa, digamos ϕ, é contínua. ϕ é linear, donde basta provar a continuidade na origem. Seja W uma vizinhança de 0 em R. Temos que encontrar uma vizinhança N de 0 em E tal que $\lambda x_0 \in N \Rightarrow \lambda \in W$. Como $x_0 \notin \overline{\{0\}}$, existe vizinhança simétrica V de 0 em E tal que $0 \notin x_0+V$. Daí $x_0 \notin V$. Como E é EVT existem W' vizinhança de 0 em E e U vizinhança de 0 em R tais que $UW' \subset V$. Seja $T = \{\lambda \in R \mid \lambda x_0 \in W'\}$. Se $\lambda \in T$ então $\lambda \in (R \setminus U)^{-1}$. De fato, suponha que $\lambda_0 \in T$ e $\lambda_0 \notin (R \setminus U)^{-1}$. Então $\lambda_0^{-1} \notin R \setminus U$ o que implica $\lambda_0^{-1} \in U$. Daí $x_0 = \lambda_0^{-1}\lambda_0 x_0 \in UW' \subset V$, absurdo.

$R \setminus U$ está afastado da origem. Como R é do tipo V temos $(R \setminus U)^{-1}$ limitado. Então existe vizinhança V_1 de 0 em R tal que $V_1(R \setminus U)^{-1} \subset W$. Como R é não discreto, existe $\mu \in V_1$, $\mu \neq 0$. Consideremos $N = \mu W'$. Seja $v \in N \cap Rx_0$. $v = \lambda x_0 = \mu t$, $t \in W'$. Logo $t = \mu^{-1}\lambda x_0 \in W'$ => $\mu^{-1}\lambda \in T$ => => $\mu^{-1}\lambda \in (R \setminus U)^{-1}$. Logo $\lambda = \mu\mu^{-1}\lambda \in V_1(R \setminus U)^{-1} \subset W$ ou seja ϕ é contínua na origem.

CAPÍTULO IV

VALORIZAÇÕES E ANÉIS DE DIVISÃO TOPOLÓGICOS ESTRITAMENTE MINIMAIS

Introduzamos algumas noções simples relativas a um anel de divisão R. Se n é um inteiro usual, representaremos com o mesmo símbolo n o elemento de R definido do seguinte modo: se $n > 0$ então $n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$ onde $1 \in R$; se $n = 0$ então n é o zero de R; se $n < 0$ então n é o simétrico do elemento $-n$ de R. Os elementos assim definidos são denominados *inteiros* do anel de divisão. O fato de representarmos os inteiros do anel de divisão e os inteiros usuais com os mesmos símbolos não tem inconveniente algum, desde que se tenha presente a cada momento qual o significado dos símbolos.

Sendo n um inteiro (usual) e $x \in R$ definiremos o símbolo x^n do seguinte modo: se $n > 0$ então $x^n = \underbrace{x.x\ldots x}_{n}$ se $n = 0$ e $x \neq 0$ então $x^0 = 1$; e se $n < 0$ e $x \neq 0$ então $x^n = (x^{-1})^{-n}$. Note que x^n não é definido se $x = 0$ e $n \leq 0$.

4.1 DEFINIÇÃO: Uma *valorização* sobre um anel de divisão R é uma função v definida sobre R, com valores reais e tal que:

(1) $0 \leq v(x) < +\infty$, $v(0) = 0$

(2) $v(xy) = v(x)v(y)$

(3) $v(x+y) \leq v(x) + v(y)$; onde $x,y \in R$.

Um anel de divisão munido de uma valorização é dito um *anel de divisão valorizado*.

Todo anel de divisão R pode ser valorizado pela função v definida do seguinte modo: $v(0) = 0$ e $v(x) = 1$ se $x \neq 0$. Esta valorização é dita *trivial*, por oposição às demais que são ditas *não triviais*.

EXEMPLO: R o anel dos quatérnios, $v(x) = |x|$ onde $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ e $|x| = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$.

Uma noção ligeiramente mais geral é a de *quase-valorização*, isto é, uma função v definida sobre R, com valores reais, que satisfaz às condições (1), (2) acima e, em lugar de (3) satisfaz à:

(4) *existe um número real* m *tal que* $v(x+y) \leq m\{v(x)+v(y)\}$ *quaisquer que sejam* $x,y \in R$.

Fazendo $x = 1$, $y = 0$ vemos que $1 \leq m$. É claro que entre os números m adequados à condição (4) existe um mínimo, que será chamado *primeiro multiplicador* da quase-valorização. Uma valorização é pois uma quase-valorização cujo primeiro multiplicador é a unidade.

Toda quase-valorização possui as seguintes propriedades:

1a.) $v(x) > 0$ se $x \neq 0$: de fato $v(x)v(x^{-1}) = v(xx^{-1}) = v(1) = 1$ o que exige $v(x) \neq 0$.

2a.) $v(x^{-1}) = v^{-1}(x)$ se $x \neq 0$: o que resulta da mesma demonstração.

3a.) $v(x^n) = v^n(x)$: é o que resulta de (2) se $n > 0$; da propriedade precedente se $n < 0$, $x \neq 0$; e é óbvio se $n = 0$, $x \neq 0$.

4a.) $v(xy^{-1}) = \frac{v(x)}{v(y)}$ se $y \neq 0$ (resulta da 2ª)

5a.) $v(-x) = v(x)$: de fato $v[(-x)^2] = v^2(-x)$, isto é, $v(x^2) = v^2(-x)$ donde $v^2(x) = v^2(-x)$ e $v(x) = v(-x)$.

A condição (4) é equivalente à seguinte:

(5) *existe um número real* M *tal que* $v(x+y) \leq M.\sup\{v(x),v(y)\}$ *quaisquer que sejam* $x,y \in R$.

De fato, se (4) for satisfeita, ter-se-á:

$$v(x+y) \leq m\{v(x)+v(y)\} \leq 2m \sup \{v(x),v(y)\}$$

em virtude da desigualdade $a+b \leq 2 \sup \{a,b\}$ e portanto (5) também será satisfeita com $M = 2m$.

Reciprocamente, se (5) for satisfeita, ter-se-á:

$$v(x,y) \leq M . \sup \{v(x),v(y)\} \leq M\{v(x)+v(y)\}$$

em virtude da desigualdade $\sup \{a,b\} \leq a+b$ válida se $a,b \geq 0$ e portanto (4) também será satisfeita com $m = M$.

Fazendo $x = 1$ e $y = 0$ em (5), vemos que $1 \leq M$. É claro que entre os números adequados à condição (5) existe um mínimo que será chamado *segundo multiplicador* da quase-valorização.

O raciocínio que acaba de ser utilizado para mostrar a equivalência de (4) e (5) mostra que, entre os multiplicadores m e M, tem-se a relação $1 \leq m \leq M \leq 2m$. Em particular, se o segundo multiplicador for a unidade, isto é, $M = 1$, então também $m = 1$ e v será uma valorização caracterizada pelo fato de satisfazer à condição abaixo, mais exigente do que (3):

(6) $v(x+y) \leq \sup \{v(x),v(y)\}$ *quaisquer que sejam* $x,y \in R$.

Uma valorização que satisfaz a condição (6) é dita *não-arquimediana* por oposição às valorizações ditas *arquimedianas* cujos segundos multiplicadores são maiores que a unidade.

4.2 PROPOSIÇÃO: *Uma valorização é não-arquimediana se, e somente se,* $v(z) \leq 1$ *implica* $v(z+1) \leq 1$, *para todo* $z \in R$.

DEMONSTRAÇÃO: Se a valorização é não-arquimediana temos que : $v(x+y) \leq \sup\{v(x),v(y)\}$. Se $v(z) \leq 1$ então:

$$v(z+1) \leq \sup\{v(z),v(1)\} = \sup\{v(z),1\} = 1 .$$

Logo $v(z) \leq 1$ implica $v(z+1) \leq 1$ para todo $z \in R$.

Reciprocamente, suponhamos que $v(z) \leq 1$ implica $v(z+1) \leq 1$ para todo $z \in R$. Podemos supor $y \neq 0$, $x \neq 0$, $0 < v(x) \leq v(y)$. Daí $\sup\{v(x),v(y)\} = v(y)$ e $v(xy^{-1}) \leq 1$ implica $v(xy^{-1}+1) \leq 1$. Agora

$$v(x+y) = v((xy^{-1}+1)y) = v(xy^{-1}+1) . v(y) \leq v(y) ,$$

ou seja, $v(x+y) \leq \sup\{v(x),v(y)\}$ e logo v é não-arquimediana.

4.3 PROPOSIÇÃO: *Para que uma valorização seja não arquimediana é necessário e suficiente que* $v(n) \leq 1$ *para todo inteiro* $n \in R$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos a valorização não-arquimediana. Se $n>0$, (6) mostra por recorrência que: $v(x_1+\ldots+x_n) \leq \sup\{v(x_1),\ldots,v(x_n)\}$ onde $x_1,\ldots,x_n \in R$. Fazendo $x_1 = x_2 =\ldots= x_n = 1$ obtemos $v(n) \leq 1$. Se $n < 0$ então $v(n) = v(-n) \leq 1$. Finalmente , $v(0) = 0 \leq 1$.

Reciprocamente, devemos mostrar que se $v(z) \leq 1$ então $v(z+1) \leq 1$ para todo $z \in R$.

$$[v(z+1)]^n = v[(z+1)^n] = v\left(\sum_{i=1}^{n} C_n^i z^i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} v(C_n^i z^i) \leq \sum_{i=1}^{n} v^i(z) \leq n+1.$$

Daí $v(z+1) \leq (n+1)^{1/n}$. Como $(n+1)^{1/n} \to 1$ quando $n \to +\infty$, no limite obteremos $v(z+1) \leq 1$ e portanto a valorização é não-arquimediana.

4.4 PROPOSIÇÃO: *Se v é uma valorização e $0 < h \leq 1$, $h \in \mathbb{R}$, então v^h também é uma valorização. Se v é não-arquimediana e $h > 0$ então v^h também é não arquimediana. Se v é uma quase-valorização e $h > 0$ então v^h também é uma quase-valorização.*

DEMONSTRAÇÃO: O único ponto que necessita demonstração é o referente às condições (3) até (6).

Se v é uma valorização e $0 < h \leq 1$ tem-se: $v^h(x+y) \leq \{v(x)+v(y)\}^h \leq v^h(x)+v^h(y)$ em virtude da desigualdade $(a+b)^h \leq a^h+b^h$ se $a,b \geq 0$ e portanto v^h também é uma valorização.

Se v é uma valorização não arquimediana e $h > 0$ tem-se: $v^h(x+y) \leq [\sup\{v(x),v(y)\}]^h = \sup\{v^h(x),v^h(y)\}$ em virtude da relação $[\sup\{a,b\}]^h = \sup\{a^h,b^h\}$ se $a,b \geq 0$ donde segue que v^h também é uma valorização não arquimediana.

Se v é uma quase-valorização e $h > 0$ tem-se: $v^h(x+y) \leq [M \sup\{v(x),v(y)\}]^h = M^h \sup\{v^h(x),v^h(y)\}$ o que prova que v^h também é uma quase-valorização.

4.5 PROPOSIÇÃO: *Sejam m e M os multiplicadores de uma quase-*

valorização. Se $M \geq 2$ *então* $m = \frac{M}{2}$. *Se* $1 \leq M \leq 2$ *então* $m = 1$. *Em resumo* $m = \sup\{1, \frac{M}{2}\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Ponhamos $k = \sup\{1, \frac{M}{2}\}$. Tem-se $k \geq 1$, $2k \geq M$ e portanto $v(x_1+x_2) \leq 2k \sup\{v(x_1), v(x_2)\}$. Daí segue :

$$v(x_1+x_2+x_3+x_4) \leq 2k \sup\{v(x_1+x_2), v(x_3+x_4)\} \leq$$
$$\leq 4k^2 \sup\{v(x_1), v(x_2), v(x_3), v(x_4)\} .$$

Em geral, considerando um inteiro $n \geq 1$ e pondo $N = 2^n$, vem:

(1) $v(x_1+\ldots+x_N) \leq N\, k^n \sup\{v(x_1),\ldots,v(x_N)\}$

Supondo $x_1 = \ldots = x_N = x$ obtemos em particular

(2) $v(2^n x) \leq 2^n\, k^n\, v(x)$.

Provemos agora que se p for um inteiro e $0 \leq p < 2^n$ então $v(pn) \leq 2p\, k^n\, v(x)$. Isto é claro se $n = 1$. Suponhamos $n > 1$ e admitamos que $0 \leq p < 2^{n-1}$ implica $v(px) \leq 2p\, k^{n-1} v(x)$. Consideremos agora um inteiro p sendo $0 \leq p < 2^n$. Se for $0 \leq p < 2^{n-1}$ então $v(px) \leq 2p\, k^{n-1} v(x) \leq 2p\, k^n\, v(x)$ pois $k \geq 1$. Suponhamos $2^{n-1} \leq p < 2^n$. Como $px = 2^{n-1}x + (p-2^{n-1})x$ teremos: $v(px) \leq 2k \sup\{v(2^{n-1}x), v[(p-2^{n-1})x]\}$. Podemos distinguir dois casos:

1º) $v(px) \leq 2k\, v(2^{n-1}x)$. Aplicando (2) onde em lugar de n figure $n-1$ teremos: $v(2^{n-1}x) \leq 2^{n-1}\, k^{n-1}\, v(x)$ donde $v(px) \leq$ $\leq 2k\, 2^{n-1}\, k^{n-1}\, v(x) \leq 2p\, k^n\, v(x)$.

2º) $v(px) \leq 2k\, v\,[(p-2^{n-1})x]$. Notemos que $p-2^{n-1} < 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$. Pela hipótese $v[(p-2^{n-1})x] \leq 2(p-2^{n-1})k^{n-1} v(x)$. Como $2(p-2^{n-1}) < p$ teremos $v(px) \leq 2k\, p\, k^{n-1} v(x) = 2p\, k^n\, v(x)$. Assim está provado que $0 < p < 2^n$ implica $v(px) \leq 2p\, k^n\, v(x)$. Suponhamos $x \neq 0$.

Daí $v(x+y) = v(x(1+x^{-1}y)) = v(x)\ v(1+x^{-1}y)$. Logo

$$[v(x+y)]^{N-1} = [v(x)\ v(1+x^{-1}y)]^{N-1} = [v(x)]^{N-1}\ [v(1+x^{-1}y)]^{N-1} =$$

$$= [v(x)]^{N-1}\ v[(1+x^{-1}y)^{N-1}] = [v(x)]^{N-1}\ v\left\{\sum_{i=1}^{N-1} C^i_{N-1}\ (x^{-1}y)^i\right\}$$

e aplicando (1) podemos continuar com:

$$\leq\ [v(x)]^{N-1}\ N\ k^n \sup_{0\leq i\leq N-1} v\ \{C^i_{N-1}\ (x^{-1}y)^i\}$$

Notando que $\sum\limits_{i=1}^{N-1} C^i_{N-1} = 2^{N-1}$ e portanto $C^i_{N-1} < 2^{N-1}$ podemos continuar com

$$\leq\ [v(x)]^{N-1}\ N\ k^n \sup_{0\leq i\leq N-1} 2\ C^i_{N-1}\ k^{N-1}\ v^i(x^{-1}y)\ \leq$$

$$\leq\ [v(x)]^{N-1}\ N\ k^n \sum_{i=0}^{N-1} 2\ C^i_{N-1}\ k^{N-1}\ v^i(x^{-1}y)\ =$$

$$=\ [v(x)]^{N-1}\ 2\ N\ k^{N+n-1}\ \{v(1) + v(x^{-1}y)\}^{N-1}\ =$$

$$=\ 2\ N\ k^{N+n-1}\ \{v(x) + v(y)\}^{N-1}\ .$$

Extraindo a raiz $N-1$ vem: $v(x+y) \leq (2N)^{\frac{1}{N-1}}\ k^{\frac{N+n-1}{N-1}}\ \{v(x)+v(y)\}$

Fazendo $n \to +\infty$ e portanto $N \to +\infty$ e notando que $(2N)^{\frac{1}{N-1}} \to 1$ e $k^{\frac{N+n-1}{N-1}} \to k$ virá $v(x+y) \leq k\{v(x)+v(y)\}$. Isto prova que entre m e k tem-se a relação $m \leq k$. Ora, já foi visto que $m \geq 1$ e $m \geq \frac{M}{2}$ donde segue $m \geq k$ e finalmente $m = k$.

4.6 PROPOSIÇÃO: *Se* v *é uma quase-valorização, para todo* $h > 0$ *suficientemente pequeno* v^h *será uma valorização.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que o segundo multiplicador de v seja M. Tem-se $v^h(x+y) \leq M^h \sup\{v^h(x),v^h(y)\}$. Se $M^h \leq 2$, isto é, se $0 < h < \frac{1}{\log_2 M}$ teremos que o segundo multiplicador de v^h é ≤ 2. Aplicando a proposição precedente, vemos que v^h é uma valorização.

Consideremos um anel de divisão R munido de uma quase-valorização v. Vamos definir a partir de v uma topologia τ sobre R do seguinte modo: Para cada $\varepsilon > 0$ e cada $a \in R$, seja $B(a,\varepsilon)$ o conjunto dos pontos $x \in R$ tais que $v(x-a) \leq \varepsilon$, o qual chamaremos de *bola* de centro a e raio ε.

Dizemos que uma parte $X \subset R$ é *aberta* se X for vazia ou, em caso contrário, se para cada $a \in X$ existir um $\varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \subset X$. É fácil ver que τ é uma topologia sobre R.

Cada $B(a,\varepsilon)$ é uma vizinhança de a. De fato, definamos V como sendo o conjunto dos $x \in R$ para cada um dos quais existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(a,\varepsilon)$. É claro que $a \in V$ e que $V \subset B(a,\varepsilon)$. Provemos que V é aberto. Dado $x \in V$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(a,\varepsilon)$. Ponhamos $\delta_1 = \frac{\delta}{2m}$ (sendo m o primeiro multiplicador de v). Se $y \in B(x,\delta_1)$, isto é, $v(y-x) \leq \delta_1$, então $B(y,\delta_1) \subset B(a,\varepsilon)$: de fato, para $z \in B(y,\delta_1)$, isto é, $v(z-y) \leq \delta_1$ tem-se:

$$v(z-x) \leq m\,\{v(z-y)+v(y-x)\} \leq 2\delta_1 m = \delta$$

donde $z \in B(x,\delta) \subset B(a,\varepsilon)$. Assim, para todo $y \in B(x,\delta_1)$ tem-se $B(y,\delta_1) \subset B(a,\varepsilon)$ e por consequência $y \in V$. Isto prova que $B(x,\delta_1) \subset V$. Daí se conclui que V é aberto e a seguir que $B(a,\varepsilon)$ é vizinhança de a. Uma consequência imediata é que, para cada $a \in R$, o conjunto das bolas $B(a,\varepsilon)$ é uma base de vizinhanças de a.

A topologia τ é separada. De fato, se $a,b \in R$ sendo $a \neq b$, então $v(a-b) > 0$. Determinemos δ tal que $0 < \delta < \frac{v(a-b)}{2m}$. Se existisse um ponto x comum a $B(a,\delta)$ e $B(b,\delta)$, teríamos $v(x-a) \leq \delta$ e $v(x-b) \leq \delta$ donde

$$v(a-b) \leq m\ \{v(a-x)+v(x-b)\} \leq 2\,\delta\, m < v(a-b)$$

o que é absurdo. Logo $B(a,\delta)$ e $B(b,\delta)$ são vizinhanças disjuntas de a e b e τ é separada.

A topologia τ é admissível. Para provar a continuidade da soma, consideremos $a,b \in R$ e seja W uma vizinhança de $a+b$. Existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(a+b,\varepsilon) \subset W$. Ponhamos $U = B(a,\delta)$ e $V = B(b,\delta)$ onde $\delta = \frac{\varepsilon}{2m}$. U e V são vizinhanças de a e b respectivamente tais que $U+V \subset W$. De fato, se $x \in U$, isto é, $v(x-a) \leq \delta$ e $y \in V$, isto é, $v(y-b) \leq \delta$ então: $v((x+y)-(a+b)) \leq m[v(x-a)+v(y-b)] \leq 2m\delta = \varepsilon$, isto é, $x+y \in B(a+b,\varepsilon)$, donde $x+y \in W$. Portanto a soma é contínua.

Para estabelecer a continuidade do produto, tomemos $a,b \in R$ e seja W uma vizinhança de ab. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(ab,\varepsilon) \subset W$. Como $xy-ab = (x-a)(y-b)+a(y-b)+(x-a)b$ tem-se: $v(xy-ab) \leq mv(x-a)v(y-b)+m^2v(a)v(y-b)+m^2v(x-a)v(b)$.

Determinemos $\delta > 0$ de modo que $m\delta^2+m^2v(a)\delta + {}+ m^2\delta v(b) \leq \varepsilon$. Pondo $U = B(a,\delta)$ e $V = B(b,\delta)$ obtemos vizinhanças de a e b respectivamente, tais que $UV \subset W$. De fa to, se $x \in U$, isto é, $v(x-a) \leq \delta$ e $y \in V$, isto é, $v(y-b) \leq \delta$ então a relação acima escrita mostra que $v(xy-ab) \leq \varepsilon$ isto é, $xy \in B(ab,\varepsilon)$ donde $xy \in W$. Assim a continuidade do produto está vista.

Finalmente, o inverso é contínuo. Com efeito, sendo $a \in R$, $a \neq 0$, W uma vizinhança de a^{-1}, determinemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(a^{-1},\varepsilon) \subset W$. Notemos que $v(a) > 0$ e determinemos $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \frac{v(a)}{2m}$, $\delta \leq \frac{\varepsilon v^2(a)}{2m}$. Pondo $V = B(a,\delta)$ obtemos uma vizinhança de a tal que $(V \setminus \{0\})^{-1} \subset W$. De fato, se $x \in V$, $x \neq 0$, tem-se $v(x-a) \leq \delta$. Como

$$v(a) \leq m[v(a-x)+v(x)] \leq m\left[\frac{v(a)}{2m} + v(x)\right]$$

obtemos $\frac{v(a)}{2m} \leq v(x)$ donde $v^{-1}(x) \leq \frac{2m}{v(a)}$. Além disso, $x^{-1}-a^{-1} = x^{-1}(a-x)a^{-1}$ donde

$$v(x^{-1}-a^{-1}) = v^{-1}(x)v(a-x)v^{-1}(a) \leq \frac{2m}{v(a)}\frac{\varepsilon v^2(a)}{2m}v^{-1}(a) = \varepsilon$$

e portanto $x^{-1} \in B(a^{-1},\varepsilon)$ donde $x^{-1} \in W$. Assim está provada a continuidade do inverso.

A topologia τ é a discreta se, e só se, v for a valorização trivial. De fato, $B(0,\frac{1}{2})$ é uma vizinhança de 0; ora, se v for a valorização trivial, então $B(0,\frac{1}{2})$ contém apenas o 0 e por isso τ será discreta.

Reciprocamente, suponhamos que v não é a valorização trivial: existe então um $a \neq 0$ tal que $v(a) \neq 1$ e podemos supor $v(a) < 1$ (substituindo, se necessário, a por a^{-1}). Seja V uma vizinhança qualquer do 0. Determinemos $\varepsilon > 0$ de modo que $v(a^n) = v^n(a) \leq \varepsilon$. Teremos então $a^n \in B(0,\varepsilon)$ donde $a^n \in V$ o que prova que toda vizinhança de 0 contém pelo menos um elemento distinto do zero: logo τ não é discreta.

4.7 PROPOSIÇÃO: *Se* v *é uma quase-valorização sobre o anel de divisão* R *e* $X \subset R$, *para que* X *seja limitada é necessário e suficiente que exista um número* $A > 0$ *tal que* $v(x) \leq A$ *para todo* $x \in X$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que o número A existe. Dada uma vizinhança W do 0, determinemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset W$. Pondo $U = B(0, \frac{\varepsilon}{A})$ temos $UX \subset W$. De fato, se $u \in U$ e $x \in X$ então $v(ux) = v(u)v(x) \leq \frac{\varepsilon}{A} . A = \varepsilon$, isto é, $ux \in B(0,\varepsilon)$ donde $ux \in W$. Logo X é limitado.

Suponhamos agora X limitado. Se v for trivial, basta tomar $A = 1$. Suponhamos v não trivial, e portanto a topologia correspondente não discreta. Como $B(0,1)$ é uma vizinhança do 0, existe um $t \neq 0$ tal que $tX \subset B(0,1)$. Ponhamos $A = v^{-1}(t)$. Se $x \in X$ tem-se $v(tx) \leq 1$ donde $v(x) \leq A$.

4.8 DEFINIÇÃO: Seja (R,τ_R) um anel de divisão topológico separado. Um elemento $x \in R$ é dito *nilpotente* se $x^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, isto é, se para toda τ_R-vizinhança W do 0 existe um inteiro $N \geq 1$ tal que $x^n \in W$ para todo $n \geq N$.

Um elemento $x \in R$ é dito *antinilpotente* se $x \neq 0$ e x^{-1} é nilpotente.

Um elemento $x \in R$ é dito *neutro* se x não é nilpotente nem antinilpotente.

É óbvio que o 1 é neutro e que o zero é nilpotente.

Se x for nilpotente e diferente de 0, antinilpotente ou neutro, então x^{-1} será antinilpotente, nilpotente ou neutro respectivamente.

4.9 PROPOSIÇÃO: *Seja* $p \geq 1$ *um inteiro. Para que* x^p *seja nilpotente, antinilpotente ou neutro, é necessário e suficiente que* x *possua a mesma propriedade.*

DEMONSTRAÇÃO: Se x é nilpotente, dada uma vizinhança W do 0, existe inteiro $N_0 \geq 1$ tal que $x^n \in W$ para $n \geq N_0$. Queremos encontrar um inteiro $N \geq 1$ tal que se $m \geq N$, $(x^p)^m \in W$. Basta tomar N como o primeiro inteiro maior que N_0/p.

Suponhamos x^p nilpotente. O caso $p = 1$ é trivial e por isso, seja $p > 1$. Seja W uma vizinhança do 0. Pela nilpotência de x^p, existe um inteiro $N_0 \geq 1$ tal que $(x^p)^n \in W$ ou seja $x^{pn} \in W$ para $n \geq N_0$. Fixemos um inteiro i, $i \leq i \leq p-1$. Temos $0x^i = 0$: logo é possível determinar uma vizinhança U_i de 0 e outra V_i de x^i tais que $U_iV_i \in W$. Pela nilpotência de x^p, existe um inteiro $N_i \geq 1$ tal que $(x^p)^n \in U_i$, donde segue $(x^p)^n x^i \in U_iV_i$ ou seja $x^{pn+i} \in W$ para $n \geq N_i$. Seja N o produto de p pelo maior dos $N_0, N_1, \ldots, N_{p-1}$. Se $n \geq N$ podemos escrever $n = pn'+i$ onde $n' \geq N_0, \ldots, N_{p-1}$ e $0 \leq i \leq p-1$: logo $x^n \in W$ para $n \geq N$ e por isso x é nilpotente.

Se x é antinilpotente então $x \neq 0$, x^{-1} é nilpotente e daí $(x^{-1})^p$ é nilpotente e logo x^p é antinilpotente. Reciprocamente, se x^p é antinilpotente, então $(x^p)^{-1} = (x^{-1})^p$

é nilpotente, logo x^{-1} é nilpotente e daí x é antinilpotente.

Se x é neutro então x^p é neutro, pois se x^p fosse nilpotente ou antinilpotente, x seria do mesmo tipo. Reciprocamente, se x^p é neutro então x também é neutro, pois se x fosse nilpotente ou antinilpotente, x^p seria do mesmo tipo.

4.10 PROPOSIÇÃO: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico tal que* τ_R *provém de uma quase-valorização* v. *Para que* $a \in R$ *seja nilpotente, antinilpotente ou neutro é necessário e suficiente que* $v(a) < 1$, $v(a) > 1$ *ou* $v(a) = 1$, *respectivamente.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $v(a) < 1$. Dada uma vizinhança W do 0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset W$. Como $v^n(a) \to 0$ quando $n \to \infty$ existe um inteiro $N \geq 1$ tal que $v^n(a) = v(a^n) \leq \varepsilon$, isto é, $a^n \in B(0,\varepsilon)$, donde $a^n \in W$ para $n \geq N$. Logo a é nilpotente. Reciprocamente, suponhamos a nilpotente. Existe um inteiro $N \geq 1$ tal que $a^n \in B(0, \frac{1}{2})$ para $n \geq N$. Em particular, $a^N \in B(0, \frac{1}{2})$, isto é, $v(a^N) = v^N(a) \leq \frac{1}{2}$, donde $v(a) \leq (\frac{1}{2})^{\frac{1}{N}} < 1$.

Observando que $v(a^{-1}) = v^{-1}(a)$, concluímos que a é antinilpotente se e só se $v(a) > 1$. Finalmente, por exclusão, vemos que a é neutro se, e só se, $v(a) = 1$.

4.11 DEFINIÇÃO: Duas quase-valorizações sobre um mesmo anel de divisão são ditas *equivalentes* se elas determinam a mesma topologia sobre esse anel de divisão.

4.12 PROPOSIÇÃO: *Duas quase-valorizações* v *e* w *sobre um anel* *de divisão* R *são equivalentes se, e somente se, existe* $h > 0$ *tal que* $w = v^h$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que um tal h existe. Dados $a \in R$ e $\varepsilon > 0$, então x satisfaz $v(x-a) \leq \varepsilon$ se e só se $v^h(x-a) \leq \varepsilon^h$ isto é, se e só se $w(x-a) \leq \varepsilon^h$. Isto prova que $B_v(a,\varepsilon) = B_w(a,\varepsilon^h)$, onde os índices v e w servem para salientar que se tratam de bolas relativas às quase-valorizações v e w. Sejam τ_v e τ_w as topologias determinadas por v e w. Se $X \subset R$ é aberto segundo τ_v, ou X é vazio, e portanto aberto segundo τ_w ou X não é vazio: então para todo $a \in X$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B_v(a,\varepsilon) \subset X$, isto é, $B(a,\varepsilon^h) \subset X$. Isto prova que X ainda é aberto segundo τ_w. Logo $\tau_v \leq \tau_w$. Analogamente se vê que $\tau_w \leq \tau_v$ donde segue $\tau_w = \tau_v$, isto é, v e w são equivalentes.

Reciprocamente, suponhamos v e w equivalentes pelo fato de determinarem a mesma topologia τ. Se τ fosse discreta, v e w seriam triviais e bastaria tomar $h = 1$. Suponhamos τ não discreta, isto é, v e w não triviais.

Se $v(x) < 1$, então x é nilpotente e portanto $w(x) < 1$ e reciprocamente, isto é, as condições $v(x) < 1$ e $w(x) < 1$ são equivalentes. Como v não é trivial, existe um $a \in R$, $a \neq 0$, tal que $v(a) \neq 1$. Podemos supor $v(a) < 1$ (substituindo, se necessário, a por a^{-1}) e é claro que então $w(a) < 1$. Determinemos $h > 0$ pela condição $w(a) = v^h(a)$, isto é, $h = \dfrac{\log w(a)}{\log v(a)}$.

Consideremos um $x \in R$ e dois inteiros m, n, sen do $m > 0$. Para que $x^m(a^{-1})^n$ seja nilpotente, é necessário e suficiente que $v(x^m a^{-n}) < 1$, isto é $\frac{v^m(x)}{v^n(a)} < 1$, o que equivale a $\frac{\log v(x)}{\log v(a)} > \frac{n}{m}$; de modo idêntico vemos que $x^m(a^{-1})^n$ é nilpotente se, e só se, $\frac{\log w(x)}{\log w(a)} > \frac{n}{m}$. Isto mostra que o conjunto dos números racionais menores que $\frac{\log v(x)}{\log v(a)}$ é idêntico ao conjunto dos números racionais menores que $\frac{\log w(x)}{\log w(a)}$. Logo $\frac{\log v(x)}{\log v(a)} = \frac{\log w(x)}{\log w(a)}$ donde $\log w(x) = h \log v(x)$ e $w = v^h$.

4.13 DEFINIÇÃO: Um anel de divisão topológico (R,τ_R) é dito *valorizável* se for possível obter pelo menos uma valorização sobre R que determine a topologia τ_R.

4.14 PROPOSIÇÃO: *Um anel de divisão topológico* (R,τ_R) *é valorizável se, e só se, existir uma quase-valorização sobre* R *que determine a topologia* τ_R.

DEMONSTRAÇÃO: (R,τ_R) valorizável implica a existência de uma valorização que determina a topologia τ_R. Mas, toda valorização é uma quase-valorização.

Reciprocamente, suponhamos que exista uma quase-valorização v que determine a topologia τ_R. A proposição 4.6 mostra que existe um $h > 0$ tal que v^h é uma valorização e em seguida, a proposição 4.12 mostra que v^h determina a topologia τ_R; logo (R,τ_R) é valorizável.

4.15 DEFINIÇÃO: Um *grupo ordenado* é uma terna $(G, \cdot, \leq)$ tal que $(G,\cdot)$ é um grupo com uma relação de ordem $\leq$ reflexiva , antisimétrica, transitiva, total e tal que $x \leq y$ implica $ax \leq ay$ e $xa \leq ya$ $\forall a \in G$.

4.16 DEFINIÇÃO: Dois grupos ordenados G e G' são ditos *ordenadamente isomorfos* se existe um isomorfismo de grupos $f : G \to G'$ tal que $x < y$ implica $f(x) < f(y)$.

4.17 DEFINIÇÃO: Um grupo ordenado G é dito *arquimediano* se para quaisquer $a,b \in G$ com $b > 1$, existe algum inteiro n tal que $b^n > a$.

4.18 NOTAÇÃO: Seja (R,τ_R) um anel de divisão topológico separado. Denotaremos o conjunto dos elementos nilpotentes de R por N_1, o conjunto dos elementos antinilpotentes por N_{-1} e o conjunto dos elementos neutros por N_0 .

4.19 DEFINIÇÃO: $N = N_1 \cup N_0$.

4.20 LEMA: *Se* $NN_1 \subset N_1$ *então* N_0 *é subgrupo normal de* R^*, *o grupo multiplicativo dos elementos não nulos de* R .

DEMONSTRAÇÃO: (a) N_0 é fechado com respeito a tomar inversos.

(b) N_0 é fechado sob automorfismos internos.

De fato, se $a \in N_0$ e $xa\,x^{-1} \notin N_0$ então $(xa\,x^{-1})^n = xa^n x^{-1} \to 0$ ou $xa^{-n} x^{-1} \to 0$. Pela continuidade da multiplicação em anéis de divisão topológicos , - $xa^n x^{-1} \to 0$ implica que $a^n x^{-1} \to 0$, o que, por sua vez, implica $a^n \to 0$, o que contradiz a neutralidade de a. Analogamente excluímos a possibilidade de $x\,a^{-n} x^{-1} \to 0$.

(c) N_0 é fechado sob multiplicação.

De fato, se $x, y \in N_0$ e $xy \notin N_0$ então $xy \in N_1$ ou $y^{-1}x^{-1} \in N_1$. Se $xy \in N_1$, pela hipótese, $x^{-1}(xy) = y \in N_1$ contradição. Se $y^{-1}x^{-1} \in N_1$ então $y(y^{-1}x^{-1}) = x^{-1} \in N_1$, o que implica $x \in N_{-1}$, contradição.

De (a), (b) e (c) temos que N_0 é subgrupo normal de R^*.

4.21 LEMA: *Se* $N N_1 \subset N_1$, *então* $N_1 N_0 \subset N$.

DEMONSTRAÇÃO: Observemos inicialmente que, pela hipótese, o produto de elementos nilpotentes é nilpotente.

Sejam $x \in N_1$ e $y \in N_0$. Suponhamos que $xy \notin N$. Então $xy \in N_{-1}$ e logo $y^{-1}x^{-1} \in N_1$. Daí temos $y(y^{-1}x^{-1}) = x^{-1} \in N_1$ e então $xx^{-1} \in N_1$, o que é absurdo. Logo $xy \in N$.

4.22 DEFINIÇÃO: Seja (R, τ_R) um anel de divisão topológico separado tal que $N N_1 \subset N_1$. Se aN_0, bN_0 pertencem a R^*/N_0 define-se $aN_0 \geq bN_0$ se e somente se $ab^{-1} \in N$.

4.23 LEMA: *A relação da definição acima está bem definida e torna* R^*/N_0 *um grupo ordenado.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $aN_0 = a'N_0$ e $bN_0 = b'N_0$ e seja $ab^{-1} \in N$. Escolhemos $n_1, n_2 \in N_0$ tais que $a' = n_1 a$ e $b' = n_2 b$. Então $a'(b')^{-1} = (n_1 a) b^{-1} n_2^{-1} = n_1 \, ab^{-1} \, n_2^{-1}$.

Se $ab^{-1} \in N_1$ então $n_1 ab^{-1} \in N_1$ pois $NN_1 \in N_1$. Pelo Lema 4.21 segue que o produto $n_1 ab^{-1} n_2^{-1} \in N$ ou seja $a'(b')^{-1} \in N$.

Se $ab^{-1} \in N_0$ então $n_1 ab^{-1} n_2^{-1} \in N_0$ e também nesse caso $a'(b')^{-1} \in N$. Logo a relação está bem definida.

Vamos verificar agora que R^*/N_0 é grupo ordenado.

(i) a relação é claramente reflexiva.

(ii) a relação é antisimétrica:

De fato, se $aN_0 \geq bN_0$ e $aN_0 \leq bN_0$ então $ab^{-1} \in N$ e $ba^{-1} \in N$. Se ab^{-1} e $ba^{-1} \in N_1$ teremos $ab^{-1}ba^{-1} = 1 \in N_1$ o que é absurdo. Daí, um deles deve pertencer a N_0, e logo ambos pertencem a N_0, donde $aN_0 = bN_0$. Com efeito, mostremos que $aN_0 \subset bN_0$ ou seja $b^{-1}aN_0 \subset N_0$. Considere $n \in N_0$. Então $b^{-1}an = a^{-1}ab^{-1}an = a^{-1}(ab^{-1})an$. Mas $ab^{-1} \in N_0$ e daí, $a^{-1}(ab^{-1})a \in N_0$ pois N_0 é subgrupo normal e finalmente $a^{-1}(ab^{-1})an \in N_0$ pois N_0 é subgrupo. Analogamente se verifica que $bN_0 \subset aN_0$.

(iii) a relação é transitiva.

Suponha $aN_0 \geq bN_0$ e $bN_0 \geq cN_0$. Isso significa que $ab^{-1} \in N$ e $bc^{-1} \in N$. Devemos mostrar que $ac^{-1} \in N$. Considere a relação $(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1}$. Se $bc^{-1} \in N_1$ então, desde que $(ab^{-1}) \in N$, teremos $ac^{-1} \in N_1$ (pois $N N_1 \subset N_1$) e logo $ac^{-1} \in N$.

Por outro lado, se $bc^{-1} \in N_0$, suponha primeiro que $ab^{-1} \in N_0$. Segue então que $ac^{-1} \in N_0$ desde que N_0 é um subgrupo e logo $ac^{-1} \in N$.

Se $bc^{-1} \in N_0$ e $ab^{-1} \in N_1$, segue que $ac^{-1} \in N$ pelo Lema 4.21.

(iv) $aN_0 \geq bN_0$ implica $axN_0 \geq bxN_0$ e $xaN_0 \geq xbN_0$ para qualquer $x \in R^*$.

De fato, se $aN_0 \geq bN_0$ temos $ab^{-1} \in N$ e daí $ab^{-1} = axx^{-1}b^{-1} = ax(bx)^{-1} \in N$ ou seja $axN_0 \geq bxN_0$. Agora $xaN_0 \geq xbN_0$ se e somente se $xa(xb)^{-1} \in N$ ou seja, $xab^{-1}x^{-1} \in N$.

Se $ab^{-1} \in N_0$ o resultado segue pois N_0 é subgrupo normal.

Se $ab^{-1} \in N_1$ o resultado segue pois N_1 é fechado sob automorfismos internos. Com efeito, se $a \in N_1$, $a^n \to 0$, logo $xa^n \to 0$, $xa^n x^{-1} \to 0$ ou seja $(xa\,x^{-1})^n \to 0$ ou ainda $xax^{-1} \in N_1$, pela continuidade da multiplicação em anéis de divisão topológicos.

(v) a relação é total.

Dados $a,b \in R$ devemos ter $aN_0 \geq bN_0$ ou $bN_0 \geq aN_0$. Suponhamos que isso não ocorre. Então $ab^{-1} \notin N$ e $ba^{-1} \notin N$. Mas $ab^{-1} \notin N$ implica que $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in N$, contradição.

De (i) - (v) temos que R^*/N_0 é grupo ordenado.

4.24 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(a) R *é valorizável.*

(b) $\begin{cases} (1) & N \text{ é limitado.} \\ (2) & N N_1 \subset N_1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (i) & N_1 \text{ é vizinhança limitada da origem.} \\ (ii) & N N_1 \subset N_1 . \end{cases}$

DEMONSTRAÇÃO: (a) => (b): Se R é valorizável e v é sua valorização, então N é o conjunto dos $x \in R$ tais que $v(x) \leq 1$, isto é, N é limitado (proposição 4.7).

Para provar (2), seja $a \in N_1$ e $b \in N$. Então $v(a) < 1$ e $v(b) \leq 1$. Temos então:

$$v((ba)^n) = v^n(ba) = v^n(b)\, v^n(a) \leq v^n(a) \to 0$$

ou seja, $ba \in N_1$.

(b) => (c): Só precisamos mostrar que N_1 é vizinhança da origem.

Seja W uma vizinhança do 0 tal que $1 \notin W$. Como N é limitado, existe uma vizinhança V do 0 tal que $VN \subset W$, isto é, $1 \notin VN$. Daí resulta que $V \subset N_1$. De fato, se existisse $t \in V$, $t \notin N_1$, seria $t \neq 0$ e $t^{-1} \in N$ (pois o inverso de um elemento neutro ou antinilpotente é neutro ou nilpotente) donde $tt^{-1} \in VN$ o que não é verdade. Isso prova - que N_1 é vizinhança do 0.

(c) => (a): Suponhamos que R satisfaça (i) e (ii). Se τ_R é a topologia discreta consideramos a valorização trivial e R é valorizável. Suponhamos que τ_R não é a topologia discreta.

Pelo Lema 4.20, N_0 é um subgrupo normal de R^*. Pelo Lema 4.23, R^*/N_0 é um grupo ordenado. Vamos mostrar que R^*/N_0 é um grupo ordenado arquimediano. Observe que se $aN_0 > bN_0$ então $ab^{-1} \in N_1$. De fato, se fosse $ab^{-1} \in N_0$ então $aN_0 = bN_0$, contradição. Logo $bN_0 > 1N_0 = N_0$ implica $b \in N_1$.

Para quaisquer $a,b \in R^*$ com $bN_0 > N_0$, vamos mostrar que existe algum inteiro n tal que $b^n a^{-1} \in N_1$. Pela nilpotência de b e pela continuidade da multiplicação, sabemos que $b^n a^{-1} \to 0$. Desde que N_1 é vizinhança do 0, segue que para n suficientemente grande, $b^n a^{-1} \in N_1$.

Sabemos que um grupo ordenado arquimediano é ordenadamente isomorfo a um subgrupo do grupo aditivo dos números reais com a ordem natural. Então, R^*/N_0 é ordenadamente isomorfo a um subgrupo aditivo dos reais. Seja f um isomorfismo de ordem de R^*/N_0 em $(\mathbb{R}, +)$. Considere a aplicação h obtida compondo a aplicação canônica com f .

$$h : R^* \to R^*/N_0 \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, +)$$
$$a \to aN_0 \to f(aN_0) = h(a)$$

Considere $v : R \to \mathbb{R}$ definida por: $v(a) = e^{-h(a)}$, para $a \neq 0$, $v(0) = 0$.

v é uma função com valores reais positivos tal que:

I) $v(x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

(II) $v(ab) = e^{-h(a)-h(b)} = e^{-h(a)} . e^{-h(b)} = v(a)\ v(b)$ pois $h(ab) = h(a) + h(b)$.

III) $v(x) < 1$ se e somente se $x \in N_1$.

De fato, se $x \in N_1$, então $x1^{-1} \in N_1$ e daí $xN_0 > N_0$. Portanto $f(xN_0) > f(N_0) = 0$, desde que f é um isomorfismo - de ordem; em outras palavras, $f(xN_0) = h(x) > 0$ e daí $v(x) = e^{-h(x)} < 1$. Se $v(x) < 1$ então $h(x) > 0$. Isto é equivalente a dizer que $f(xN_0) > f(N_0)$ e então devemos ter $xN_0 > N_0$ o que implica $x1^{-1} = x \in N_1$.

Vamos agora considerar a família de conjuntos

$$B_\varepsilon(0) = \{a \in R \ ; \ v(a) < \varepsilon\}$$

onde $\varepsilon > 0$ e mostrar que cada aberto W contendo 0 contém um desses conjuntos $B_\varepsilon(0)$ e que cada $B_\varepsilon(0)$ contém um aberto U contendo o 0.

1) $B_\varepsilon(0)$ contém um aberto U contendo 0.

Escolhemos $b \in R$ tal que $v(b) > \varepsilon^{-1}$. Se não existe tal b então $0 < v(x) \leq \varepsilon^{-1}$ para todo $x \in R$ e daí $v(x^{-n}) \leq \varepsilon^{-1}$ donde $v(x^{-1}) \leq \sqrt[n]{\varepsilon^{-1}}$ e logo $0 < v(x^{-1}) \leq 1$ ou ainda $0 < v(x) \leq 1$. Daí $v(x) = 0$ ou 1 para todo $x \in R$. Então, se $b \neq 0$, $v(b) = 1$, ou equivalentemente, $h(b) = f(bN_0) = 0$, o que implica $bN_0 = N_0$. Em outras palavras, nesse caso, todo $b \in R$, $b \neq 0$, é neutro. Contradição pois $R \neq N$ (R não é limitado pois τ_R não é a topologia discreta; ver observação após proposição 3.3).

Como N_1 é vizinhança do 0 existe um aberto U contendo 0 tal que $Ub \subset N_1$. Daí para todo $x \in U$, $xb \in N_1$, logo $v(xb) < 1$. Desde que $1 > v(xb) = v(x)v(b) > \frac{v(x)}{\varepsilon}$, temos $v(x) < \varepsilon$ ou $U \subset B_\varepsilon(0)$.

2) Cada aberto W contendo 0 contém uma $B_\varepsilon(0)$.

Como N_1 é limitado, existe um aberto V contendo 0 tal que $VN_1 \subset W$. $V \neq \{0\}$ pois τ_R não é a topologia discreta. Considere $a \in V$, $a \neq 0$; portanto $aN_1 \subset W$.

Para $x \in B_{\frac{1}{v(a^{-1})}}(0)$, temos $v(x) < \frac{1}{v(a^{-1})}$ e daí $v(a^{-1})v(x) = v(a^{-1}x) < 1$. Logo $a^{-1}x \in N_1$ ou $x \in aN_1$ e segue que $B_{\frac{1}{v(a^{-1})}}(0) \subset aN_1 \subset W$.

Finalmente, consideremos uma vizinhança W do 0 tal que $1 \notin W$ e em seguida determinemos outra vizinhança V do 0

tal que $V+V \subset W$. Pelo que foi visto acima, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset V$. Provemos que $\varepsilon v(x+y) \leq \sup\{v(x), v(y)\}$. De fato, em caso contrário, teríamos $\varepsilon v(x+y) > v(x)$, $\varepsilon v(x+y) > v(y)$, e isto exigiria que $x+y \neq 0$ e a seguir que $\varepsilon > v[x(x+y)^{-1}]$, $\varepsilon > v[y(x+y)^{-1}]$ donde $x(x+y)^{-1} \in V$, $y(x+y)^{-1} \in V$ e somando, $1 \in V+V \subset W$, o que contradiria $1 \notin W$. A relação indicada está pois provada. Pondo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ obtemos

$$v(x+y) \leq M \sup\{v(x), v(y)\} .$$

Assim está provado que v é uma quase-valorização que determina a topologia τ_R. Logo, pela proposição 4.14, R é valorizável.

4.25 COROLÁRIO (L.Nachbin [3]): *Para que um corpo topológico separado seja valorizável é necessário e suficiente que* N *seja limitado.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta provar que $NN_1 \subset N_1$. Observemos inicialmente que a fórmula $(xy)^n = x^n y^n$ mostra que num corpo o produto de dois elementos nilpotentes é nilpotente, e que o produto de dois elementos antinilpotentes é antinilpotente.

Sejam agora $x \in N$ e $y \in N_1$. Se $x \in N_1$, a observação anterior mostra que $xy \in N_1$. Se $x \in N_0$ então xy não é antinilpotente, pois em caso contrário, também x seria antinilpotente. Com efeito, $x = (xy)y^{-1}$. Logo $xy \in N$. Se fosse $xy \in N_0$, a relação $y = x^{-1}(xy)$ mostraria que $y \in N_0$ (pois N_0 é subgrupo), o que contradiz a hipótese $y \in N_1$. Logo $xy \in N_1$.

4.26 DEFINIÇÃO: Seja R um anel de divisão topológico. Uma parte $X \subset R$ é dita *restrita* se, a origem não é aderente ao conjunto dos inversos dos elementos não nulos de X, isto é, $0 \notin \overline{(X \setminus \{0\})^{-1}}$.

4.27 PROPOSIÇÃO: *Uma parte* $X \subset R$ *é restrita se, e só se existir vizinhança* U *de* 0 *tal que* $1 \notin UX$.

DEMONSTRAÇÃO: A condição $1 \in UX$ equivale a U não ser disjunta de $(X \setminus \{0\})^{-1}$: de fato, se $1 \in UX$, então $1 = ux$, $u \in U$, $x \in X$, logo $x \neq 0$, $x^{-1} = u$, isto é, $u \in (X \setminus \{0\})^{-1}$ e U e $(X \setminus \{0\})^{-1}$ não são disjuntos.

Reciprocamente, se U e $(X \setminus \{0\})^{-1}$ não são disjuntos, isto é, há $u \in U$, $u \in (X \setminus \{0\})^{-1}$ então $u \neq 0$ e $u^{-1} \in X$ donde $1 = uu^{-1} \in UX$. Portanto, a existência de uma vizinhança U do 0 tal que $1 \notin UX$ equivale à existência de uma vizinhança U do 0 disjunta de $(X \setminus \{0\})^{-1}$, isto é, equivale a $0 \notin \overline{(X \setminus \{0\})^{-1}}$.

4.28 PROPOSIÇÃO: *Toda parte limitada de um anel de divisão topológico separado é restrita.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, se $X \subset R$ for limitada, determinando uma vizinhança W do 0 tal que $1 \notin W$ e em seguida outra vizinhança U do 0 tal que $UX \subset W$, teremos $1 \notin UX$ e daí X será restrita.

4.29 TEOREMA: *Para que um anel de divisão topológico* R *seja valorizável é necessário e suficiente que:*

(1) N_1 *seja uma vizinhança do zero.*

(2) $NN_1 \subset N_1$.

(3) *Toda parte restrita seja limitada.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos R valorizado por v . Então $N_1 = \{a \in R \ / \ v(a) < 1\} = B_1(0)$, isto é, os elementos nilpotentes formam uma vizinhança do 0 e a condição (1) está verificada. A condição (2) já foi verificada na demonstração do Teorema 4.24. Vamos verificar (3). Seja $X \subset R$ uma parte restrita. Determinemos uma vizinhança V do 0 tal que $1 \notin VX$. Em seguida determinemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset V$. Para todo $x \in X$ tem-se $v(x) < \frac{1}{\varepsilon}$ (pois se fosse $v(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, seria $x \neq 0$ e $v(x^{-1}) \leq \varepsilon$, isto é, $x^{-1} \in B_\varepsilon(0) \subset V$ donde $1 = x^{-1}. x \in VX$, contradição) e portanto X é limitada.

Reciprocamente, suponhamos que as condições do enunciado são satisfeitas. Temos então $1 \notin N_1N$ (pois se fosse $1 = xy$, sendo x nilpotente e y nilpotente ou neutro, seria $x \neq 0$ e $x^{-1} = y$ e y seria antinilpotente). Isso prova que N é uma parte restrita. Por (3), N é limitada. Aplicando o Teorema 4.24, vemos que R é valorizável.

4.30 COROLÁRIO: *Para que um corpo topológico separado seja valorizável é necessário e suficiente que:*

(1) N_1 *seja uma vizinhança do* 0 .

(2) *Toda parte restrita seja limitada.*

Seja (R,τ_R) um anel de divisão topológico separado. Uma topologia τ sobre R será dita *admissível em relação a* τ_R

se R munido de τ for um espaço vetorial topológico sobre (R,τ_R). Segue-se que toda vizinhança da origem de R segundo τ também é vizinhança da origem segundo τ_R: logo $\tau \leq \tau_R$. Assim está visto que toda topologia sobre um anel de divisão topológico (R,τ_R) admissível em relação à topologia τ_R é menos fina que τ_R.

4.31 DEFINIÇÃO: Um anel de divisão topológico separado (R,τ_R) será dito *estritamente minimal* se não existir nenhuma topologia separada τ sobre R, admissível em relação à topologia τ_R de R, sendo além disso $\tau < \tau_R$. É equivalente dizer que τ_R é a única topologia separada sobre R admissível em relação à τ_R.

Um anel de divisão topológico separado (R,τ_R) será dito *minimal* se não existir nenhuma topologia τ que torne R um anel de divisão topológico separado tal que $\tau < \tau_R$, ou seja, τ_R é um elemento minimal no conjunto ordenado de todas as topologias de anel de divisão topológico separado sobre R.

4.32 PROPOSIÇÃO: *Todo anel de divisão topológico separado estritamente minimal é minimal.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja (R,τ_R) um anel de divisão topológico separado e estritamente minimal. Se (R,τ_R) não fosse minimal existiria uma topologia τ de anel de divisão topológico separado tal que $\tau < \tau_R$; mas então, τ seria admissível em relação a τ_R (de fato, so precisamos provar que o produto

$$(R,\tau_R)\times(R,\tau) \to (R,\tau)$$
$$(x,y) \to xy$$

é contínuo. Seja W uma τ-vizinhança de xy. Então existem τ-

vizinhanças U de x e V de y tais que $UV \subset W$, pois (R,τ) é ADT. Como toda τ-vizinhança é τ_R-vizinhança, U é τ_R-vizinhança de x e logo temos a continuidade do produto acima) e (R,τ_R) não seria estritamente minimal, contradição.

4.33 PROPOSIÇÃO: *Todo anel de divisão topológico separado não discreto em que as partes restritas sejam limitadas é estritamente minimal.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja (R,τ_R) um ADT satisfazendo a hipótese acima. Seja τ uma topologia separada sobre R, admissível em relação a τ_R. Já vimos que $\tau \leq \tau_R$. Para provar que $\tau_R \leq \tau$, consideremos uma vizinhança W_0 do 0 segundo τ para a qual $1 \notin W_0$. Observando que $0 . 0 = 0$ e que τ é admissível em reção à τ_R, podemos determinar uma vizinhança U_0 de 0 segundo τ_R e outra vizinhança V_0 de 0 segundo τ tais que $U_0V_0 \subset W_0$ e por consequência, $1 \notin U_0V_0$. Isto prova que V_0 é uma parte restrita. Por hipótese, V_0 é então limitada. Seja agora W uma vizinhança qualquer do 0 segundo τ_R. Como V_0 é limitada e (R,τ_R) não é discreto, existe um $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda V_0 \subset W$. Ora, V_0 sendo uma vizinhança do 0 segundo τ, o mesmo sucede com λV_0: a última relação mostra que também W é vizinhança do 0 segundo τ. Isto prova que $\tau_R \leq \tau$. Logo $\tau = \tau_R$ e (R,τ_R) é estritamente minimal.

4.34 PROPOSIÇÃO: *Todo anel de divisão topológico não discreto e valorizável é estritamente minimal.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo teorema 4.29, em todo anel de divisão topológico valorizável, as partes restritas são limitadas. Aplicando a proposição precedente temos o resultado.

4.35 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal.*

(2) *Se* E *é um EVT sobre* (R,τ_R) *e* $f : E \to R$ *é uma forma linear, para que* f *seja contínua é necessário e suficiente que seu núcleo* $f^{-1}(0)$ *seja fechado em* E .

(3) *Se* E *e* F *são EVT's sobre* (R,τ_R) , *com* F *unidimensional separado e* $f : E \to F$ *é uma transformação linear não nula, então* f *é contínua se e somente se* $f^{-1}(0)$ *é fechado em* E .

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): Suponhamos (R,τ_R) estritamente minimal. Indiquemos com τ_E a topologia de E . Se f for contínua, $f^{-1}(0)$ é fechado em E pois $\{0\}$ é fechado em R . Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(0)$ seja fechado em E . Se f for identicamente nula, sua continuidade é óbvia. Suponhamos f não identicamente nula: então existe $a \in E$ tal que $f(a) \neq 0$. Dado arbitrariamente um $\lambda \in R$ e pondo $x = \dfrac{\lambda}{f(a)} a$, temos $f(x) = \lambda$ o que prova que f é transformação linear de E sobre R . Pensando então em R como um espaço vetorial sobre o anel de divisão topológico R e em f como uma transformação linear do EVT E sobre o espaço vetorial R , podemos considerar sobre R a topologia τ obtida como imagem direta de τ_E por f. A proposição 2.16, mostra que τ é separada. Além disso, R munido de τ é um EVT sobre (R,τ_R) , isto é, τ é admissível -

em relação à τ_R. Como (R,τ_R) é estritamente minimal temos $\tau = \tau_R$. Finalmente f é um homeomorfismo contínuo de E sobre R munido de τ e por isso, sobre R munido de τ_R.

(2) => (1): Suponhamos que (R,τ_R) não seja estritamente minimal, isto é, que exista uma topologia τ sobre R que o torne um EVT separado sobre (R,τ_R), sendo $\tau < \tau_R$. Ponhamos $E = R$, $\tau_E = \tau$: então E, munido de τ_E é um EVT sobre o anel de divisão topológico (R,τ_R). Definamos $f : E \to R$ pondo $f(x) = x$ para todo $x \in E$. É claro que o núcleo $f^{-1}(0)$ é fechado em E, pois $f^{-1}(0)$ reduz-se ao 0 e τ_E é separada. Todavia f não é contínua (pois se f fosse contínua, a imagem inversa $f^{-1}(X)$ de toda parte aberta segundo τ_R seria aberta segundo τ_E: ora $f^{-1}(X) = X$ e então concluiríamos que $\tau_R \leq \tau_E = \tau$ contradizendo $\tau < \tau_R$).

(1) => (3): Se f é contínua é claro que seu núcleo é fechado em E. Vamos assumir que $f^{-1}(0)$ é fechado em E. Notando que $f(E) = F$, podemos introduzir em F a topologia de EVT τ_F imagem direta por meio da f da topologia τ_E. Desde que todo espaço vetorial F de dimensão 1 sobre R é algebricamente isomorfo a R considerado como espaço vetorial sobre R, a hipótese de que (R,τ_R) é estritamente minimal é equivalente a dizer que todo espaço vetorial de dimensão 1 sobre R possui somente uma topologia de EVT separado sobre (R,τ_R). Portanto τ_F coincide com a topologia dada em F e a prova termina observando-se que f é contínua de τ_E em τ_F.

(3) => (1): Como na demonstração de (2) => (1).

4.36 PROPOSIÇÃO: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal.*

(2) *Quaisquer que sejam* E *e* F, *EVT's separados sobre* (R,τ_R), $\dim F = 1$ *e* $f : E \to f$ *transformação linear, então* f *é contínua se, e somente se seu gráfico* $G(f)$ *é fechado em* $E \times F$.

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): É claro que o gráfico de uma aplicação contínua num espaço separado é fechado. Portanto, a continuidade de f implica que $G(f)$ é fechado.

Reciprocamente, assuma que $G(f)$ é fechado. Definamos $\varphi(x,y) = f(x)-y$ para $x \in E$, $y \in F$. Então $\varphi : ExF \to F$ é uma transformação linear com núcleo $\varphi^{-1}(0) = G(f)$ fechado. Pelo teorema anterior, φ é contínua e desde que $\varphi(x,0) = f(x)$ concluímos que f é contínua.

(2) => (1): Suponhamos que (R,τ_R) não é estritamente minimal. Definamos τ, E, τ_E e f como na demonstração de (2) => (1) do teorema precedente. Fazemos $F = R$. Provemos que $G(f)$ é fechado. Se $(a,\alpha) \notin G(f)$, onde $a \in E$, $\alpha \in R$, isto é, $a \neq \alpha$, podemos determinar uma vizinhança U de a segundo τ e outra V de α segundo τ tais que $U \cap V = \emptyset$. Daí resulta que $U \times V$ é disjunta de $G(f)$ (pois se $(x,\lambda) \in U \times V$ e $(x,\lambda) \in G(f)$ então $x \in U$, $\lambda \in V$ e $x = \lambda$ o que é impossível). Como $\tau < \tau_R$ temos que V também é vizinhança de α segundo τ_R, e daí $U \times V$ é vizinhança de (a,α) em $E \times R$. Logo $(a,\alpha) \notin \overline{G(f)}$ o que prova $G(f) = \overline{G(f)}$.

Basta observar agora que f não é contínua.

4.37 DEFINIÇÃO: Seja (E,τ) um EVT sobre um anel de divisão topológico (R,τ_R) tal que E é a soma direta (algébrica) de dois subespaços E_1 e E_2, isto é, $E_i \subset E$ $(i = 1,2)$ e $E = E_1 \oplus E_2$. Sejam τ_1 e τ_2 as topologias induzidas por τ em E_1 e E_2 respectivamente. A aplicação $\begin{array}{l} E \to E_1 \times E_2 \\ x \to (x_1, x_2) \end{array}$ é um isomorfismo.

Definimos a topologia $\tau_1 \oplus \tau_2$ em E como a topologia imagem inversa da topologia $\tau_1 \times \tau_2$ pelo isomorfismo acima.

4.38 PROPOSIÇÃO: *Seja* (E,τ) *um EVT sobre um anel de divisão topológico estritamente minimal* (R,τ_R). *Suponhamos que* $E = E_1 \oplus E_2$ *onde* E_1 *e* E_2 *são subespaços vetoriais de* E, *o primeiro sendo unidimensional. Sejam* τ_1 *e* τ_2 *as topologias induzidas por* τ *em* E_1 *e* E_2 *respectivamente. Então temos* $\tau = \tau_1 \oplus \tau_2$ *se e somente se* E_2 *é fechado em* E.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que a relação $\tau = \tau_1 \oplus \tau_2$ implica que E_2 (e também E_1) é fechado em E.

Reciprocamente, vamos assumir que E_2 é fechado em E. Colocando $\tau^* = \tau_1 \oplus \tau_2$ obtemos uma topologia de EVT sobre (R,τ_R) em E. Considere uma vizinhança W do 0 em E de - acordo com τ e determine alguma vizinhança V do 0 em E de acordo com τ tal que $V+V \subset W$. Então $W_1 = V \cap E_1$ é uma vizinhança do 0 em E_1 de acordo com τ_1 e $W_2 = V \cap E_2$ é uma vizinhança do 0 em E_2 de acordo com τ_2 e temos $W_1+W_2 \subset W$. Desde que W_1+W_2 é vizinhança do 0 em E de acordo com τ^*, o mesmo é verdade para W e provamos que $\tau \leq \tau^*$ (I). Por outro lado, todo $x \in E$ pode ser escrito de maneira única como

$x = x_1+x_2$ onde $x_i \in E_i$, $i = 1,2$. Definimos $\pi_i : E \to E_i$ por $\pi_i(x) = x_i$. Desde que $E_2 = \pi_1^{-1}(0)$ é fechado em E , podemos usar o teorema 4.35 e dizer que $\pi_1 : E \to E_1$ é contínua de τ em τ_1 . Segue-se que $\pi_1 : E \to E$ é contínua de τ em τ . Desde que $\pi_2(x) = x-\pi_1(x)$, também podemos dizer que $\pi_2 : E \to E$ é contínua de τ em τ , ou equivalentemente, que $\pi_2 : E \to E_2$ é contínua de τ em τ_2 . Provado isso, seja W uma vizinhança de 0 em E de acordo com τ^* ; por definição existem vizinhanças W_1 do 0 em E_1 de acordo com τ_1 e W_2 de 0 em E_2 de acordo com τ_2 tais que $W_1+W_2 \subset W$. Pela continuidade de π_1 , podemos encontrar uma vizinhança V_1 de 0 em E (segundo τ) tal que $\pi_1(V_1) \subset W_1$ e analogamente uma vizinhança V_2 de 0 em E (segundo τ) para a qual $\pi_2(V) \subset W_2$. Colocando $V = V_1 \cap V_2$ vemos que $V \subset W_1+W_2 \subset W$; portanto W é uma vizinhança de 0 em E segundo τ e provamos que $\tau^* \leq \tau$ (II). De (I) e (II) temos $\tau = \tau^*$.

4.39 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal e completo.*

(2) *Todo espaço vetorial sobre* R *de dimensão finita tem uma única topologia de EVT separado sobre* (R,τ_R) *(e é completo nessa topologia).*

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): Por indução na dimensão. Seja $n = \dim E < \infty$. Se $n = 1$, E é algebricamente isomorfo a R considerado como espaço vetorial sobre R ; como (R,τ_R) é estritamente minimal, então E possui somente uma topologia de EVT separado sobre (R,τ_R) (e é completo nessa topologia).

Suponhamos $n > 1$ e o teorema válido para todo F, $\dim F < n$.

Podemos escrever $E = E_1 \oplus F$ onde $\dim E_1 = 1$ e $\dim F = n-1 < n$.

Sejam τ, μ duas topologias de EVT separado sobre (R,τ_R) em E, τ_1 e μ_1 as topologias induzidas sobre E_1 por τ e μ respectivamente, τ_F e μ_F as topologias induzidas sobre F por τ e μ, respectivamente. τ_1 e μ_1 são topologias de EVT separado sobre (R,τ_R) em E_1. Como E_1 é de dimensão 1, temos $\tau_1 = \mu_1$. Como $\dim F = n-1 < n$, pela hipótese de indução, $\tau_F = \mu_F$ e além disso, F é completo nessa topologia. Daí, F é fechado em E e então $\tau = \tau_1 \oplus \tau_F$ e $\mu = \mu_1 \oplus \mu_F$ (pela proposição 4.38). Como $\tau_1 = \mu_1$ e $\tau_F = \mu_F$ temos $\tau = \mu$ e a implicação está demonstrada.

(2) ⇒ (1): Se todo espaço de dimensão 1 sobre R possui somente uma topologia de EVT separado sobre (R,τ_R), (R,τ_R) é estritamente minimal. Vamos assumir que R não é completo e considerar seu completamento, $\check{R}$, isto é, essencialmente o único anel topológico completo contendo R como subanel topológico denso. Então podemos tomar algum $\xi \in \check{R} \setminus R$. Seja $E \subset \check{R}$ o conjunto de todos os pontos $x\xi+y$ onde $x,y \in R$. Desde que $R \subset \check{R}$, podemos dizer que $\check{R}$ é um EVT sobre R. Mas E é um subespaço vetorial de $\check{R}$. Portanto, a topologia τ_1 induzida no espaço vetorial E pela topologia de $\check{R}$ é de EVT separado sobre (R,τ_R). Além disso $R \subset E$, $\overline{R} = E$ (o fecho em E de acordo com τ_1) pois R é denso em $\check{R}$ e a fortiori em E. Por ou-

tro lado, a aplicação $(x,y) \to x\xi+y$ é um isomorfismo de espaço vetorial entre $R \times R$ e E. Desde que $R \times R$ é um EVT sobre (R,τ_R), podemos transferir sua topologia para uma topologia τ_2 de EVT separado sobre (R,τ_R) em E e é claro que $\bar{R} = R$ (onde o fecho em E segundo τ_2). Por esse procedimento, estamos capacitados a estabelecer duas topologias de EVT separado sobre (R,τ_R) distintas τ_1 e τ_2 no espaço vetorial E de dimensão 2 sobre R. Contradição. Logo R é completo.

4.40 COROLÁRIO: *Sejam* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado estritamente minimal e completo,* (E,τ) *um EVT separado sobre* (R,τ_R). *Todo subespaço vetorial de* E *de dimensão finita é fechado.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja F um subespaço vetorial de E com $\dim F < \infty$. $\tau_F = \tau|_F$ é uma topologia de EVT separado sobre (R,τ_R) em F. Pelo teorema τ_F é única e F é τ_F-completo. Logo F é fechado em E.

4.41 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal e completo.*

(2) *Todo automorfismo de qualquer EVT separado* E *de dimensão finita sobre* (R,τ_R) *é contínuo.*

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): Pelo teorema 4.39 temos a unicidade da topologia de EVT separado sobre (R,τ_R) no caso de espaço vetorial de dimensão finita: desde que a transformada de uma topologia de EVT separado por um isomorfismo algébrico é topologia de

EVT separado, podemos inferir que esse isomorfismo algébrico é também homeomorfismo. Mais geralmente, se $f: E \to F$ é uma transformação linear, com núcleo $S = f^{-1}(0)$ entre dois EVT's separados de dimensão finita, podemos considerá-la como a composição do homomorfismo natural $E \to E/S$ e do isomorfismo natural $E/S \to f(E)$: portanto f é contínua.

(2) => (1): Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias de EVT separado sobre (R,τ_R) no espaço vetorial $R^n = \underbrace{R\times\ldots\times R}_{n}$. Considere o espaço vetorial $R^n \times R^n$ munido com a topologia de EVT separado $\tau_1 \times \tau_2$. Desde que $R^n \times R^n$ é um conjunto quadrado, a simetria $\{x,y\} \to \{y,x\}$ tem significado (onde $x,y \in R^n$). Essa transformação é um automorfismo de $R^n \times R^n$. Pela hipótese ela é contínua e isso implica dizer que $\tau_1 = \tau_2$. Isso mostra que todo espaço vetorial de dimensão finita sobre R tem uma única topologia de EVT separado sobre (R,τ_R). Pelo teorema 4.39, (R,τ_R) é estritamente minimal e completo.

4.42 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal e completo.*

(2) *Quaisquer que sejam* E *e* F, *EVT's separados sobre* (R,τ_R) $\dim F < \infty$, *e* $f: E \to F$ *transformação linear, então* f *é contínua se, e só se,* $f^{-1}(0)$ *é fechado em* E.

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): Como no teorema 4.35 (usando o teorema 4.41).

(2) => (1): Se as condições sobre R não são satisfeitas podemos encontrar um espaço vetorial E sobre R de di-

mensão 1 ou 2 (veja segunda parte da prova do teorema 4.39) munido com duas topologias de EVT separado sobre (R,τ_R) τ_1 e τ_2 tais que $\tau_1 < \tau_2$: então a transformação idêntica de E não é contínua de τ_1 em τ_2 mas tem núcleo fechado.

4.43 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal e completo.*

(2) *Quaisquer que sejam* E *e* F, *EVT's separados sobre* (R,τ_R) $\dim F < \infty$, *e* $f: E \to F$ *transformação linear, então* f *é contínua se, e só se, seu gráfico é fechado em* $E \times F$.

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): Como na proposição 4.36 (usando o teorema 4.42). (2) => (1): Como no teorema 4.42.

4.44 TEOREMA: *Seja* (R,τ_R) *um anel de divisão topológico separado. São equivalentes:*

(1) (R,τ_R) *é estritamente minimal e completo.*

(2) *Quaisquer que sejam* (E,τ) *e* (F,τ_F) *EVT's separados sobre* (R,τ_R), $\dim E < \infty$, *e* $f: E \to F$ *transformação linear,* f *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO: (1) => (2): Considere $F_1 = f(E) \subset F$. F_1 é um subespaço vetorial topológico de F e $f: E \to F_1$ é sobre. Consideremos em E a topologia τ_E, imagem inversa da topologia $\tau_{F_1} = \tau_F|_{F_1}$ por meio de f. τ_E é topologia de EVT separado sobre (R,τ_R) em E e f é contínua de τ_E em τ_{F_1}. Como (R,τ_R) é estritamente minimal e completo $\tau_E = \tau$ (teorema

4.39), e logo f é contínua de τ em τ_{F_1}, logo de τ em τ_F.

(2) => (1): Como no teorema 4.42.

4.45 OBSERVAÇÃO: A definição de anel de divisão topológico estritamente minimal (Definição 4.31) e os resultados pertinentes (que mostram serem eles os conjuntos de escalares para os quais os resultados clássicos sobre funcionais lineares são verdadeiros) são devidos a L.Nachbin (ver Nachbin [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI: *Topologie Générale*, Capítulos 3 e 4, Hermann Paris, 1960.

[2] I. KAPLANSKY: *Topological methods in valuation theory*, Duke Math. J. 14 (1947), 527-541.

[3] L. NACHBIN: *Espaços Vetoriais Topológicos*, Rio de Janeiro, 1948.

[4] L. NACHBIN: *On strictly minimal topological division rings*, Bulletin Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1128-1136.

[5] L. NARICI, E. BECKENSTEIN e G. BACHMAN: *Functional Analysis and Valuation Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

[6] I. SHAFAREVICH: *On the normalizability of topological fields*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, URSS, vol. 40, (1943), 133-135.

[7] W. WIESLAW: *On topological fields*, Colloquium Math. 29 (1974), 119-146.