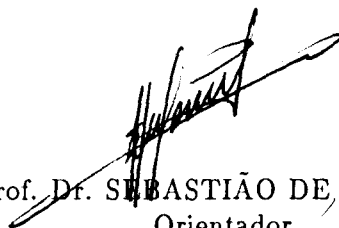


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - IMECC

**GRÁFICOS DE CONTROLE COM TAMANHOS  
AMOSTRAIS VARIADOS  
BASEADOS NAS  $m$  ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES**

GLADSTON LUIZ DA SILVA  $\approx 28$



Prof. Dr. SEBASTIÃO DE AMORIM  
Orientador

Dissertação apresentada ao Departamento  
de Estatística da Universidade Estadual de  
Campinas para obtenção do Título de Mes-  
tre em Estatística.

CAMPINAS  
Estado de São Paulo - Brasil  
Abril - 1992

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

16443

GRÁFICOS DE CONTROLE COM TAMANHOS  
AMOSTRAIS VARIADOS  
BASEADOS NAS  $m$  ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES

Este exemplar corresponde a versão final da  
tese devidamente corrigida e defendida pelo  
Sr. Gladston Luiz da Silva e aprovada pela  
Comissão Julgadora. 38

Campinas, 27 de Abril de 1992.

Prof. Dr. Sebastião de Amorim ✱  
Orientador

Dissertação apresentada ao Departamento  
de Estatística da Universidade Estadual de  
Campinas para obtenção do Título de Mes-  
tre em Estatística.

À minha esposa

Valéria

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Sebastião de Amorim, o meu agradecimento pela orientação e apoio recebidos durante a realização deste trabalho.

Aos meus professores, incentivo constante para a continuidade de minha formação.

Aos colegas de turma, que por todo o companheirismo e amizade serão lembranças sempre presentes.

À Inês e ao Amorim, pelo total apoio dado durante a confecção deste trabalho.

À Maria Lúcia e ao Rogério, o meu agradecimento pela ajuda recebida na digitação deste trabalho.

À minha mãe e irmãos pelo amor e incentivo recebidos.

À minha esposa Valéria, presença fundamental, pelo apoio, compreensão e carinho em todos os momentos.

Às instituições CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

# ÍNDICE

ÍNDICE	v
RESUMO	vii
Capítulo 1	
<b>GRÁFICOS DE CONTROLE</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Gráfico de Controle de Shewhart . . . . .	6
1.3 Modelo Básico de Duncan . . . . .	7
1.4 Gráficos de Controle $\bar{X}$ com Limites de Alerta e Tamanhos Amostrais Variados . . . . .	10
1.5 Revisão Bibliográfica . . . . .	14

## Capítulo 2

### GRÁFICOS DE CONTROLE COM TAMANHOS AMOSTRAIS VARIADOS BASEADOS NAS $m$ ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES 18

- 2.1 Determinação do Tempo Esperado até a Ocorrência de uma Falha . . . 18
- 2.2 Gráficos de Controle com Tamanhos Amostrais Variados Baseados  
nas 2 Últimas Observações . . . . . 21
- 2.3 Gráficos de Controle com Tamanhos Amostrais Variados Baseados  
nas  $m$  Últimas Observações . . . . . 30

## Capítulo 3

### SIMULAÇÕES MONTE CARLO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE PROPOSTOS 39

### CONCLUSÕES 63

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 65

### APÊNDICE 67

## RESUMO

Neste trabalho são apresentados esquemas alternativos ao gráfico de controle proposto por Shewhart, segundo o modelo básico de Duncan para o planejamento econômico de gráficos de controle.

No Capítulo 1 faz-se uma revisão bibliográfica, onde algumas alternativas ao gráfico de controle  $\bar{X}$  são apreciadas dando motivação à execução deste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos os gráficos de controle com tamanhos amostrais variados, onde as  $m$  últimas observações são consideradas. Os resultados obtidos apresentam ganhos significativos de eficiência em processos que apresentam perturbações na média. O processo com  $m = 1$  é uma Cadeia de Markov e, como tal foi modelada, determinando-se a expressão que permite calcular o tempo médio gasto para que perturbações na média sejam detectadas.

Simulações Monte Carlo dos processos propostos são apresentadas no Capítulo 3, onde alguns delineamentos amostrais são avaliados, verificando-se excepcionais ganhos de eficiência com relação ao esquema proposto por Shewhart. As conclusões dos resultados obtidos são apresentadas a seguir.

## Capítulo 1

# GRÁFICOS DE CONTROLE

### 1.1. Introdução

Os gráficos de controle estatístico, introduzidos pelo Dr. Walter A. Shewhart (1931), servem para definir o padrão que um determinado processo deve atingir, servem de instrumento para que o padrão seja atingido; e, por último, servem para julgar se o padrão tem sido atingido. Os gráficos de controle são, portanto, instrumentos que possibilitam a especificação do que se é desejado, a produção de itens que satisfaçam à especificação e a inspeção do que foi produzido para que se verifique se satisfazem à especificação.

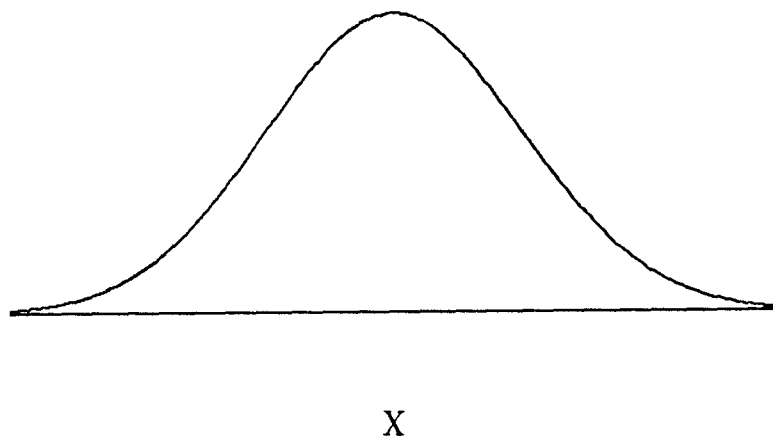
Em um processo onde se deseja utilizar o controle estatístico é fundamental que se diferencie as causas de variação da produção. Há um tipo de variação no processo que é resultado de uma soma de fatores, onde cada um tem uma contribuição insignificante, que são tecnicamente inevitáveis. Estes fatores são caracterizados como causas comuns da variabilidade e pertencem à classe das variações aleatórias.



Há também as fontes de variações geradas a partir de causas especiais, ou seja, fatores de variação que surgiram de erros de operação, de ajustes indevidos no processo, da não uniformidade da matéria-prima, da combinação de dois ou mais destes fatores, etc. As variações geradas por fatores deste tipo caracterizam processos que possuem causas assinaláveis.

Pode-se dizer então que um processo está sob controle quando as causas de variações são aleatórias, não havendo variações na produção devidas às causas assinaláveis.

O gráfico de controle é construído a partir de um processo onde o característico de qualidade  $X$  é calculado segundo a retirada de amostras de tamanho específico a intervalos constantes de tempo. Considerando a não existência de causas assinaláveis,  $X$  estará sujeito a flutuações amostrais segundo um padrão estatístico representado pela Figura 1.1 abaixo.



**Figura 1.1:** Padrão estatístico de um processo de produção com característico de qualidade  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

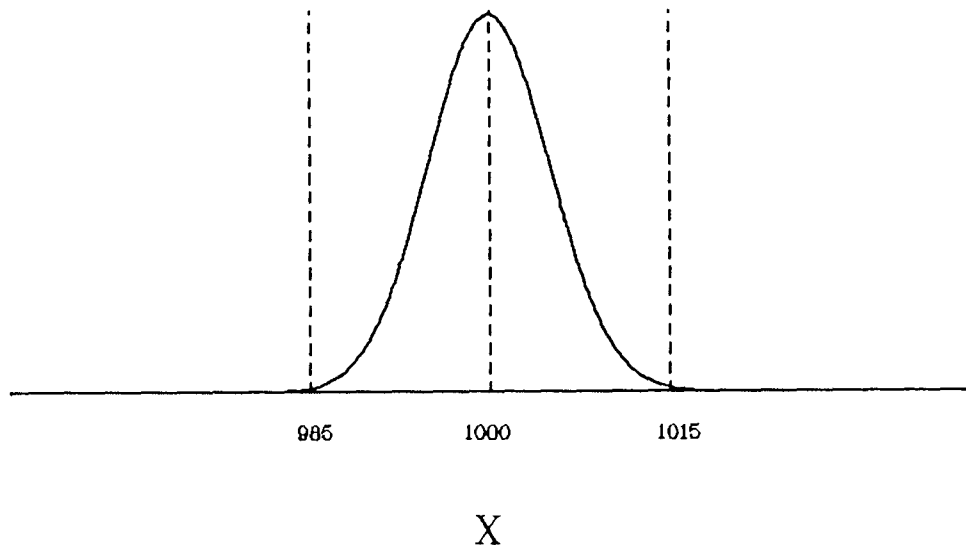
Se for retirado um número suficientemente grande de amostras, pode-se estimar a média e pontos extremos da distribuição. Supondo que a distribuição de  $X$  seja normal, pode-se estimar a sua média a partir das amostras e estimar o seu desvio padrão a partir da média dentre as amostras. O processo está sob controle se a média e a variância de  $X$  são, respectivamente,  $\mu$  e  $\sigma^2$ , onde  $\mu$  é um valor definido segundo especificações de projeto e  $\sigma^2$  é uma característica do processo. Havendo um desvio na média  $\mu$  de um valor  $\delta\sigma$ , ou um aumento na variância evidencia-se um descontrole no processo.

Para o característico de controle  $X$  existem, em geral, limites de tolerância que são especificados em projeto. Considerando a existência da variabilidade inerente (aleatória) ao processo de manufatura, há a possibilidade de que algum item seja fabricado fora das especificações, isto é, o valor da variável  $X$  ser abaixo do Limite Inferior de Tolerância (LIT) ou acima do Limite Superior de Tolerância (LST).

Considerando que o processo esteja sob controle, a frequência de ocorrência de itens fora de controle irá depender da variabilidade deste e da severidade dos limites de tolerância. Em processos onde os limites de tolerância são folgados, verifica-se que raramente um item será produzido fora das especificações. Em contrapartida, com limites de tolerância rigorosos será possível verificar uma maior frequência de itens produzidos fora das especificações.

Considere, por exemplo, um processo cuja média seja  $\mu=1.000$  e a variância seja  $\sigma^2=25$ . Sendo os limites de tolerância iguais a LIT=985 e LST=1.015, a frequência de itens fora das especificações será 2,7 a cada 1.000 itens produzidos.

A curva que caracteriza o processo descrito acima é apresentada na Figura 1.2.

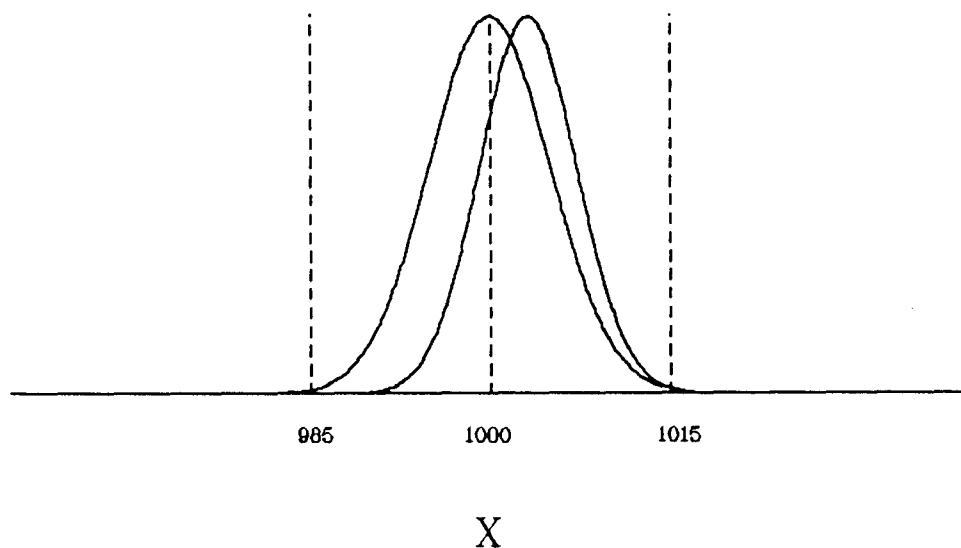


**Figura 1.2:** Padrão estatístico de um processo de produção com característico de qualidade  $X \sim N(1.000, 25)$ .

A possibilidade de alguma alteração no processo deve ser sempre considerada. Pode haver alteração na média e (ou) na variância deste e tais perturbações podem não ser percebidas de imediato. Voltando ao exemplo anterior, considere que a média do processo tenha sofrido alteração para  $\mu=1.004$ . A frequência de itens fora de especificação passaria para 14,0 a cada 1.000 itens produzidos. A Figura 1.3 ilustra este exemplo.

Desta maneira, em não havendo uma imediata percepção do descontrole no processo pelo operador, será observado um aumento na fabricação de itens fora das especificações. Assim, considerando que itens que não atendam às especificações, ou são perdidos, ou necessitam de re-trabalho, pode-se estabelecer uma função de perda associada à variável  $X$ , onde a perda é zero quando  $X = \mu$  e a perda é total quando o  $X \notin (LIT, LST)$ . A função quadrática  $f(X, \mu) = k(X - \mu)^2$

pode ser empregada para a avaliação desta questão.



**Figura 1.3:** Curvas de distribuição de processos onde o característico de qualidade  $X \sim N(1.000, 25)$  passa a ser  $X \sim N(1.004, 25)$ .

A rápida detecção de uma perturbação na média é um desafio a ser enfrentado, visto que, dados os parâmetros que constituem o gráfico de controle, se fosse aumentado o tamanho amostral, obter-se-ia uma maior informação de  $X$ , mas aumentaria-se o custo do processo. Se fossem diminuídos os limites de controle, o tempo médio esperado entre a ocorrência de uma perturbação média e sua detecção diminuiria, mas aumentaria-se o número de pontos fora destes limites, isto é, de alarmes falsos, acarretando novamente aumento no custo do processo.

Assim, alternativas ao esquema clássico de Shewhart, que será apresentado a seguir, têm sido propostas visando uma maior eficiência na detecção de causas assinaláveis no processo, mantidos os parâmetros iniciais do gráfico de controle de Shewhart.

Define-se eficiência de um processo a razão entre os tempos médios esperados para se detectar alguma perturbação no processo, obtidos pelo método

clássico de Shewhart e por algum método alternativo que proporcione esta comparação.

## 1.2. Gráfico de Controle de Shewhart

O esquema clássico apresentado por Shewhart baseia-se na construção do gráfico de controle para a variável  $\bar{X}$ , através de amostras de tamanho  $n$  a intervalos de tempos constantes  $h$ . O valor médio amostral de  $X$ ,  $\bar{X}$ , é plotado sequencialmente num gráfico onde limites de controle são definidos. Estes representam os limites nos quais os pontos obtidos poderiam estar com grande probabilidade se o processo estivesse operando sob controle. Os limites de controle, Limite Superior de Controle (LSC) e Limite Inferior de Controle (LIC), são usualmente mais ou menos 3 desvios padrões da média,  $3\sigma_{\bar{X}}$  ou  $3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$  onde  $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$  é uma estimativa de  $\sigma_{\bar{X}}$  obtida das amostras. A figura abaixo representa o gráfico de controle descrito acima.

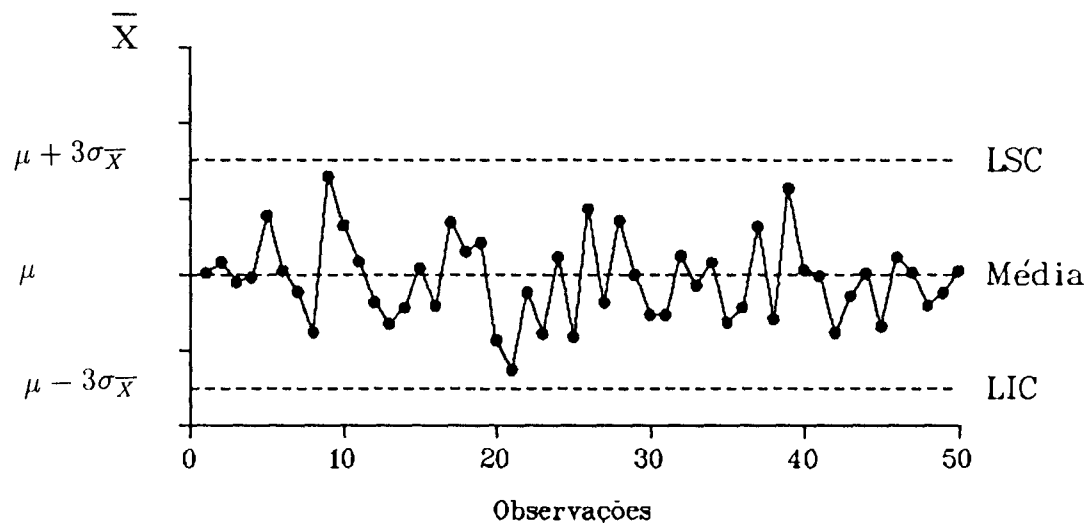


Figura 1.4: Gráfico de controle  $\bar{X}$ .

Shewhart recomenda que enquanto as observações estiverem ocorrendo dentro dos limites de controle não haja intervenção no processo. Havendo ocorrência de uma observação fora dos limites de controle entende-se que o processo está fora de controle e ações devidas de investigação e correção devem ser tomadas para eliminar as causas assinaláveis.

A não ocorrência de pontos fora dos limites de controle e a existência de um comportamento aleatório dos pontos no gráfico de controle não significa que causas assinaláveis não estejam presentes. Os limites de controle fornecem uma excelente proteção contra alarmes falsos, isto é, há sempre a probabilidade de que algum ponto caia fora dos limites de controles. Entretanto, esta probabilidade é tão pequena que na ocorrência deste fato, é mais provável que haja uma causa assinalável no processo.

O gráfico de controle é conceitualmente um teste de hipótese contínuo no tempo. Uma observação dentro dos limites de controle recomenda a não rejeição da hipótese de controle estatístico do processo, enquanto que a não ocorrência de uma observação fora dos limites de controle recomenda a rejeição da hipótese. Assim sendo, há a probabilidade de se concluir que um processo está fora de controle, quando na realidade está sob controle. No jargão estatístico esta situação caracteriza o erro do tipo I, isto é, um alarme falso. Há também a probabilidade de se aceitar a hipótese de o processo estar sob controle quando de fato não está, caracterizando assim o erro do tipo II.

### **1.3. Modelo Básico de Duncan**

O planejamento de um gráfico de controle é determinado pela escolha de seus parâmetros, ou seja, o tamanho amostral ( $n_0$ ), o intervalo entre as amostras ( $h_0$ ), e o fator de determinação dos limites de controle ( $k_0$ ). Sua implementação

envolve vários custos que estão diretamente ligados à escolha destes parâmetros, visto que, há custos com a amostragem, com a investigação e correção de eventuais causas especiais no processo e custos com as perdas decorrentes da operação do sistema fora de controle estatístico.

Objetivando determinar a escolha ótima destes parâmetros, Duncan (1956) introduziu o primeiro modelo para o planejamento econômico de gráficos de controle.

O modelo proposto por Duncan assume que a variável  $X$  tenha a seguinte característica,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Neste, o descontrole estatístico ocorre quando há uma perturbação estável na média  $\mu$  de tal forma que  $X \sim N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)$ , sendo  $\delta$  constante. Além disso, assume-se que a ocorrência de uma perturbação não permita que outras ocorram até que esta seja detectada e eliminada, dando assim, início a outro ciclo de qualidade.

Desta forma, o modelo de Duncan para o acompanhamento de um processo é composto pelos seguintes eventos:

- Evento 1:** O processo entra em operação.
- Evento 2:** Ocorre um alarme falso e o processo é paralisado.
- Evento 3:** Reinicia-se o processo.
- Evento 4:** Ocorre uma perturbação estável na média.
- Evento 5:** O gráfico de controle detecta a perturbação.
- Evento 6:** A perturbação é diagnosticada fisicamente.
- Evento 7:** A perturbação é corrigida.
- Evento 8:** Reinicia-se o processo e, conseqüentemente, outro ciclo.

Entre dois eventos tem-se uma etapa:

- Etapa 1 (entre os eventos 1 e 2):** O processo está operando sob controle estatístico.
- Etapa 2 (entre os eventos 2 e 3):** O processo está paralisado e verifica-se que este não possui variações por causas assinaláveis.
- Etapa 3 (entre os eventos 3 e 4):** O processo está operando sob controle estatístico.
- Etapa 4 (entre os eventos 4 e 5):** O processo está operando fora de controle, sem o conhecimento do operador.
- Etapa 5 (entre os eventos 5 e 6):** Ou o processo está paralisado, ou está operando fora de controle, mas com o conhecimento do operador.
- Etapa 6 (entre os eventos 6 e 7):** As causas já foram identificadas e estão sendo corrigidas.
- Etapa 7 (entre os eventos 7 e 8):** Executam-se os procedimentos para a reinitialização do processo.

Denomina-se ciclo de qualidade o intervalo entre os eventos 1 e 6.

O tempo decorrido entre o início de operação do processo e a ocorrência de uma perturbação na média é denominado  $T_1$ .

Ao tempo decorrido entre a ocorrência da perturbação na média e sua detecção pelo gráfico de controle denota-se  $T_2$ .

Pode-se considerar portanto, que o ciclo de qualidade terá o comprimento  $T = T_1 + T_2$ .



## 1.4 Gráficos de Controle $\bar{X}$ com Limites de Alerta e

### Tamanhos Amostrais Variados

Considerando um processo que esteja sob controle, a esperança para a ocorrência de um alarme falso, ou seja  $\bar{X} \notin (LIC, LSC)$ , é de 1 a cada 370 inspeções, para  $k = 3$ . Havendo uma perturbação na média de 0.1 desvio padrão, a esperança para a ocorrência de um alarme falso cairia para 1 a cada 308 inspeções para um delimitamento amostral onde  $n=4$ .

Suponha que após  $n_1$  inspeções ocorra uma perturbação no processo de tal forma que a média  $\mu$  mude para  $\mu + \delta\sigma$ . Suponha ainda que sejam necessários  $n_2$  inspeções para que se detecte a perturbação após esta ter ocorrido. Esta situação é apresentada na Figura 1.5:

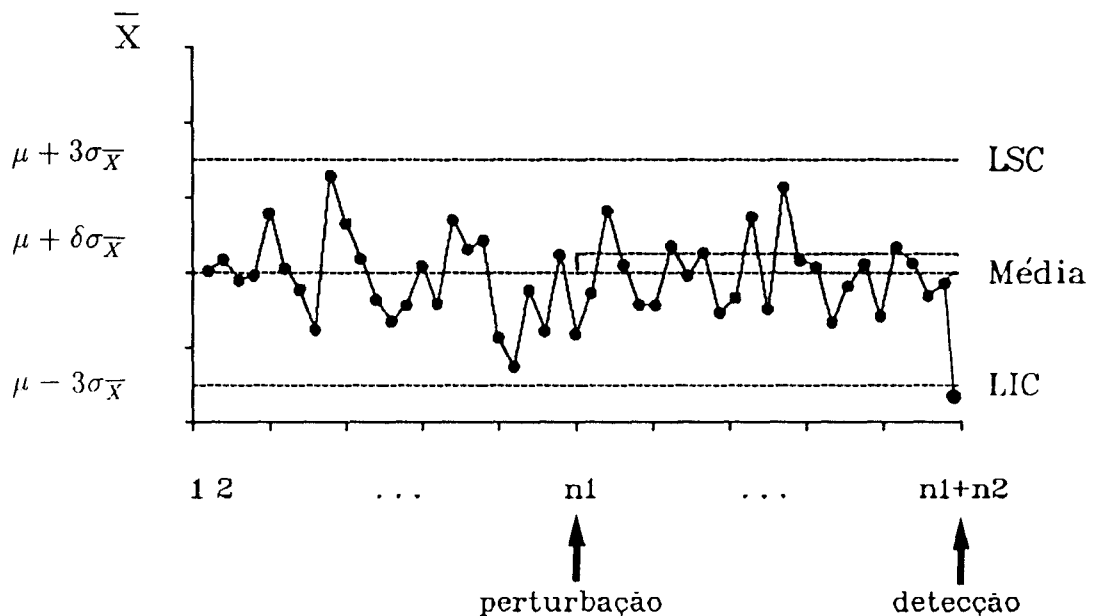


Figura 1.5: Gráfico de controle  $\bar{X}$  com perturbação na média.

O tempo médio esperado para que se tenha uma observação fora dos limites de controle é de 370 inspeções dado que  $N_1 \sim \text{Geométrica}(p)$  e  $E(N_1) = 1/p$ .

Após a ocorrência da perturbação  $X \sim N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)$ , a probabilidade de se obter um valor fora dos limites de controle irá depender do tamanho amostral e do desvio virtual  $\delta$  que o processo sofrer.

Considere o exemplo onde  $k = 3$ ,  $n = 4$  e  $\delta = 1/2$ . A probabilidade de se obter uma observação fora dos limites de controle é 0,0228. Portanto, o tempo médio necessário para que o processo detecte a perturbação é de aproximadamente 44 inspeções.

Pela Tabela 1.1 pode-se sentir a variação que há no tempo médio esperado para detecção da perturbação em função de  $\delta$ , onde  $n = 4$  e  $E(N_2) = 1/p$ :

**Tabela 1.1:**  $E(N_2)$  para gráficos de controle  $\bar{X}$ .

$\delta\sqrt{n}$	$E(N_2)$
0,00	370,37
0,50	156,25
1,00	43,86
1,50	14,97
2,00	6,30
2,50	3,24
3,00	2,00

A detecção imediata de uma perturbação no processo é necessária para que se mantenha este operando dentro das especificações. Assim, Lemos (1991) propõe a introdução dos limites de alerta onde são mantidos fixos os intervalos entre as observações e varia-se o tamanho da amostra segundo o seguinte esquema: se a  $i$ -ésima observação situar-se entre os limites de alerta, então a  $(i+1)$ -ésima observação será obtida segundo uma amostra de tamanho  $n_p$ , com  $n_p < n_0$ , e no caso da  $i$ -ésima observação situar-se fora dos limites de alerta, mas ainda entre os limites de controle,

a  $(i + 1)$ -ésima observação será obtida segundo uma amostra de tamanho  $n_g$ , com  $n_g > n_0$ , onde  $n_p < n_g$ . O esquema descrito acima é apresentado graficamente na Figura 1.6:

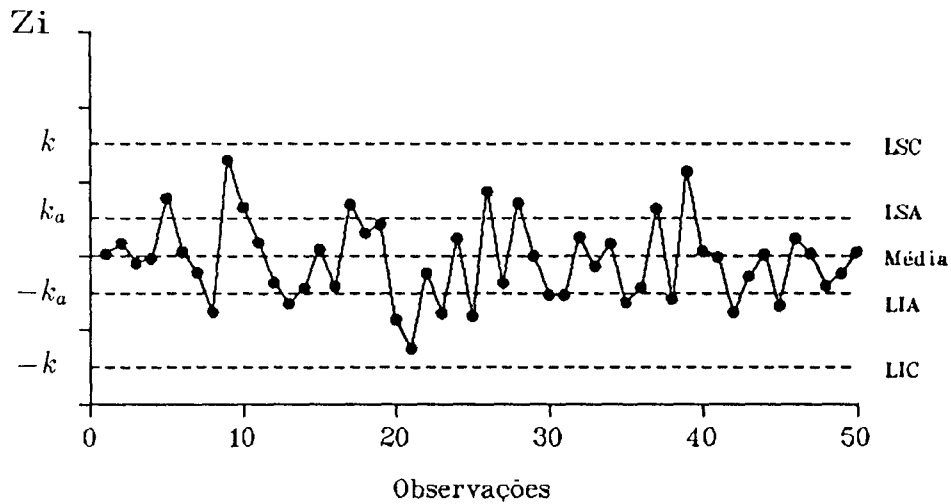


Figura 1.6: Gráfico de controle  $Z_i$  com limites de alerta e tamanhos amostrais variados.

onde  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{X}}^2)$  e  $Z_i = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0, 1) \quad i = 1, 2, 3, \dots$

A notação paramétrica usada representa:

- (i)  $k$  : fator de determinação dos limites de controle;
- (ii)  $k_a$  : fator de determinação dos limites de alerta;
- (iii)  $\mu$  : média do processo;
- (iv) LSC : Limite Superior de Controle;
- (v) LIC : Limite Inferior de Controle;
- (vi) LSA : Limite Superior de Alerta;
- (vii) LIA : Limite Inferior de Alerta.

A variação amostral no delineamento utilizado deve ser tal que, na média o tamanho amostral seja igual a  $n_0$ , isto é,

$$E[n/Z_i \in (LIC, LSC)] = n_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

e a frequência de paradas desnecessárias seja a mesma.

Mas,

$$E[n/Z_i \in (LIC, LSC)] = n_p \times P(Z_i \in (LIA, LSA)/Z_i \in (LIC, LSC)) + \\ + n_g \times P(Z_i \notin (LIA, LSA)/Z_i \in (LIC, LSC)).$$

De forma mais simples, pode-se escrever:

$$E[n/Z_i \in (LIC, LSC)] = n_p \times P(n = n_p) + n_g \times P(n = n_g) = n_0. \quad (1.4.1)$$

Os resultados da Tabela 1.2 foram obtidos segundo um delineamento amostral ( $n_p = 1, n_g = 10, n_0 = 4$ ) e  $k=3$  e  $k_a=1$ , respeitando a condição (1.4.1), onde  $ER = \frac{E_2(N_2)}{E_1(N_2)}$ .

**Tabela 1.2:**  $E(N_2)$  e Eficiência Relativa para o processo de controle onde ( $n_p = 1, n_g = 10, n_0 = 4$ ) e  $k=3$  e  $k_a=0,963827$ .

$\delta\sqrt{n_0}$	$\delta\sqrt{n_p}$	$\delta\sqrt{n_g}$	$E(N_2)$	$ER$
0,2	0,1	0,316228	305,944512	1,01
0,4	0,2	0,632456	183,994788	1,09
0,6	0,3	0,948683	92,137709	1,30
0,8	0,4	1,264911	43,303798	1,65
1,0	0,5	1,581139	20,864605	2,10
1,2	0,6	1,897367	10,998480	2,53
1,4	0,7	2,235940	6,393302	2,85
1,6	0,8	2,529822	4,482381	2,76
1,8	0,9	2,846050	3,380485	2,57
2,0	1,0	3,162278	2,749439	2,29
3,0	1,5	4,743416	1,783769	1,12

A simples introdução dos limites de alerta no gráfico de controle e a variação do tamanho amostral resultaram em ganhos significativos na eficiência dos processos em detectar perturbações que por ventura ocorram. As situações nas quais os maiores ganhos foram obtidos ocorreram quando houve desvios efetivos na média entre 1,2 a 1,8.

## 1.5. Revisão Bibliográfica

Vance (1983) se reporta aos trabalhos publicados no período de 1970 a 1980 referentes a Controle de Qualidade, classificando-os de acordo com a técnica de gráfico de controle utilizada.

Montgomery (1980) apresenta uma revisão e análise dos diferentes modelos econômicos em gráficos de controle, desenvolvidos nas três últimas décadas.

Duncan (1956) apresenta o primeiro modelo completo para o planejamento econômico de gráficos de controle, utilizando uma metodologia formal para determinar a escolha ótima dos parâmetros  $n_0$ ,  $k_0$  e  $h_0$ , para processos sujeitos a perturbações aleatórias em sua média. A regra de controle assumida é a de que existe uma causa assinalável no processo sempre que houver um ponto fora dos limites de controle.

Duncan (1971) discute algumas técnicas para obtenção dos valores economicamente ótimos para  $n_0$ ,  $k_0$  e  $h_0$ , quando há multiplicidade de causas assinaláveis.

Costa (1989) considera o modelo básico de Duncan com a hipótese de taxa de falha constante relaxada, admitindo deterioração do processo. Adota-se a distribuição de Weibull para o tempo entre falha do sistema e três delineamentos alternativos são propostos, onde variam-se os parâmetros  $n$ ,  $k$ , e  $h$ .

Ewan (1963) apresenta vários esquemas de gráficos de controle possíveis indicando aqueles nos quais o esquema de Somas Acumuladas é mais apropriado. Este método de controle, originalmente proposto por Page (1954), baseia-se em todas as informações pretéritas, dando pesos iguais independentemente da antiguidade das mesmas.

O esquema das Médias Móveis baseia-se na média das  $m$  últimas observações de  $\bar{X}$  e é uma alternativa ao esquema das Somas Acumuladas.

Uma alternativa proposta por Alexandre (1989) é a Média Móvel Ponderada Exponencialmente (MMPE) com correções para estabilizar a variância, que é o caso limite tanto para o esquema clássico de Shewhart, que baseia-se apenas na última observação, quanto para o esquema de Somas Acumuladas, que utiliza-se de todas as observações com cada um recebendo o mesmo peso. Por definição, conforme descrita por Roberts (1959) e Hunter (1986), a MMPE é

$$Y_i = \sum_{j=0}^{i-2} \lambda(1-\lambda)^j \bar{X}_{i-j} + (1-\lambda)^{i-1} \bar{X}_1, \quad i = 2, 3, 4, 5, \dots,$$

ou, analogamente

$$Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1-\lambda)Y_{i-1},$$

onde,  $Y_1 = \bar{X}_1$ .

Esta estatística envolve todas as observações, onde cada uma recebe um peso conforme a sua antiguidade onde  $\lambda \in [0, 1]$ . Se  $\lambda \rightarrow 0$  a MMPE se equivale ao critério das Somas Acumuladas, se  $\lambda \rightarrow 1$  a MMPE se equivale ao esquema clássico de Shewhart.

O artigo proposto por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas (1988) considera as propriedades do gráfico de controle baseadas em  $\bar{X}$  onde o intervalo

entre cada par de amostras varia de acordo com o valor observado na primeira das amostras. A idéia consiste em utilizar um intervalo  $h_0$  variável entre as amostras para o gráfico  $\bar{X}$ , de forma que, se o  $i$ -ésimo valor de  $\bar{X}$ ,  $\bar{X}_i$ , estiver próximo ao objetivo especificado  $\mu$ , será utilizado um intervalo longo  $h_l$ , com  $h_l > h_0$ , para a inspeção da  $(i + 1)$ -ésima amostra,  $\bar{X}_{i+1}$ . Caso o valor da  $i$ -ésima amostra estiver longe o suficiente do valor objetivado, ou seja, próximo a um dos limites de controle, será utilizado um intervalo curto  $h_c$ , com  $h_c < h_0$ , para a inspeção seguinte, onde  $h_c < h_l$ .

Estabeleceu-se uma região interna aos limites de controle, denominada Região de Alerta, que fica definida pelo parâmetro  $k_a$ . Os valores dos parâmetros  $k_a$ ,  $h_c$  e  $h_l$  são escolhidos de tal forma que

$$E[h/Z_i \in (LIC, LSC)] = h_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, mantidos os parâmetros do gráfico de controle de Shewhart, ou seja, os limites de controle a  $\pm 3$  desvios padrões da média e o mesmo tamanho amostral, será possível determinar o tempo médio necessário para que ocorra uma causa assinalável no processo e preservar o tempo médio gasto entre as inspeções.

Neste trabalho é apresentada uma alternativa ao artigo proposto por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas (1988), onde são mantidos fixos os limites de controle, mas ao invés de se variar o intervalo entre as inspeções, varia-se o tamanho amostral destas. Na ocorrência de uma observação próxima ao objetivo (média), determina-se a inspeção seguinte com base em uma amostra de tamanho pequeno. Caso a observação ocorra próxima a um dos limites de controle, a inspeção seguinte será realizada com base em uma amostra de tamanho grande. Da mesma forma, o processo é observado de tal forma que o tamanho médio amostral seja igual ao tamanho amostral fixo, isto é,

$$E[n/Z_i \in (LIC, LSC)] = n_p \times P(n = n_p) + n_g \times P(n = n_g) = n_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior, generalizou-se o processo passando-se a considerar não apenas a última observação, mas as  $m$ -últimas observações de forma que o tamanho amostral seria definido de acordo com a posição do vetor resultante em uma esfera em  $\mathbb{R}^m$ . Se a distância Euclidiana entre os pontos que definem o vetor for pequena, isto é, o ponto extremo inferior próximo ao limite de alerta, o tamanho utilizado para a inspeção seguinte será pequeno. Caso contrário, estando o ponto extremo do vetor próximo ao limite de controle, será utilizado um tamanho amostral grande para a próxima inspeção.



## Capítulo 2

# GRÁFICOS DE CONTROLE COM TAMANHOS AMOSTRAIS VARIADOS BASEADOS NAS $m$ ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES

### 2.1. Determinação do Tempo Esperado até a Ocorrência de uma Falha

O esquema proposto por Lemos (1991) onde são introduzidos os limites de alerta e varia-se o tamanho amostral, pode receber outro tratamento matemático, de tal forma que, o cálculo da expressão que determina o tempo esperado até a ocorrência de uma falha fique facilitado.

Considere  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_i, \dots$ , variáveis aleatórias i.i.d onde  $Z_i \sim N(0,1), \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots$

Como

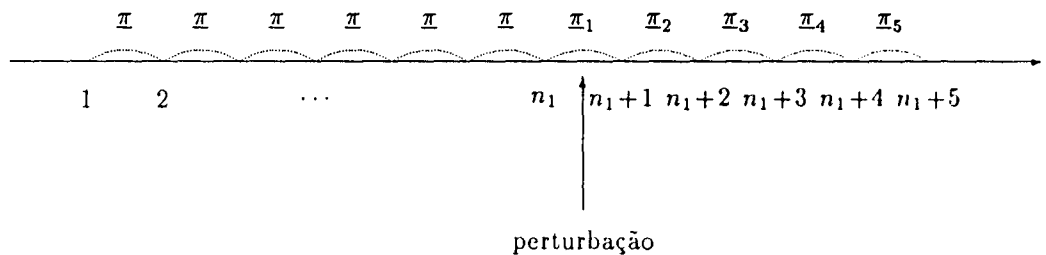
$$P(a \leq Z_i \leq b / Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_{i-1} = z_{i-1}) = P(a \leq Z_i \leq b / Z_{i-1} = z_{i-1}), \quad (2.1.1)$$

a propriedade de Markov está satisfeita e  $\{Z_i, i \geq 0\}$  é uma Cadeia de Markov, Hoel, Port e Stone (1972).

Sendo este processo estacionário, o espaço de estados para esta Cadeia de Markov pode ser expresso por  $S(n_p, n_g, para)$  onde

$n_p$  = amostra pequena;  
 $n_g$  = amostra grande;  
 para = ocorrência de causa assinalável.

Suponha que o processo em estudo sofra uma perturbação em sua média entre a  $n_1$ -ésima e  $(n_1 + 1)$ -ésima observações, conforme mostra o esquema a seguir:



Objetiva-se saber em quanto tempo o processo será absorvido após a perturbação ter ocorrido. Para isto, deve-se calcular a matriz de transição para cada inspeção, isto é,  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_i, \dots$ , até que o processo seja absorvido.

Seja a distribuição inicial dada por

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} \pi_1^0 \\ \pi_2^0 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

onde

$$\pi_1^0 = \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} \times P(-k \leq Z_i \leq k)$$

$$\pi_2^0 = P(-k \leq Z_i \leq k) - P(-k_a \leq Z_i \leq k_a).$$

Assim, por (2.1.1)

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_1^{(0)} p_{11} + \pi_2^{(0)} p_{21} \\ \pi_1^{(0)} p_{12} + \pi_2^{(0)} p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}' \times \begin{bmatrix} \pi_1^{(0)} \\ \pi_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{bmatrix} \pi_1^{(1)} p_{11} + \pi_2^{(1)} p_{21} \\ \pi_1^{(1)} p_{12} + \pi_2^{(1)} p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}'^2 \times \begin{bmatrix} \pi_1^{(0)} \\ \pi_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{bmatrix} \pi_1^{(2)} p_{11} + \pi_2^{(2)} p_{21} \\ \pi_1^{(2)} p_{12} + \pi_2^{(2)} p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}'^3 \times \begin{bmatrix} \pi_1^{(0)} \\ \pi_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\pi_n = \begin{bmatrix} \pi_1^{(n)} p_{11} + \pi_2^{(n)} p_{21} \\ \pi_1^{(n)} p_{12} + \pi_2^{(n)} p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}'^n \times \begin{bmatrix} \pi_1^{(0)} \\ \pi_2^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

Por (2.2.3), pode-se determinar

$$\begin{aligned} P(N_2 = n) &= \pi'_{n-1} \times \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \\ &= [\pi_1^{(0)} \ \pi_2^{(0)}] \times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}'^{n-1} \times \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$P(N_2 = n) = \pi'_0 \times (P_{12})^{n-1} \times p_3 \quad (2.1.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
 p_{11} = p_{21} &= 0.9973 \times \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} \times P(-k \leq Z_j \leq k); \\
 p_{12} = p_{22} &= 0.9973 \times [P(-k \leq Z_j \leq k_a) + P(k_a \leq Z_j \leq k)]; \\
 p_{13} = p_{23} &= 1 - P(-k \leq Z_j \leq k) e
 \end{aligned}$$

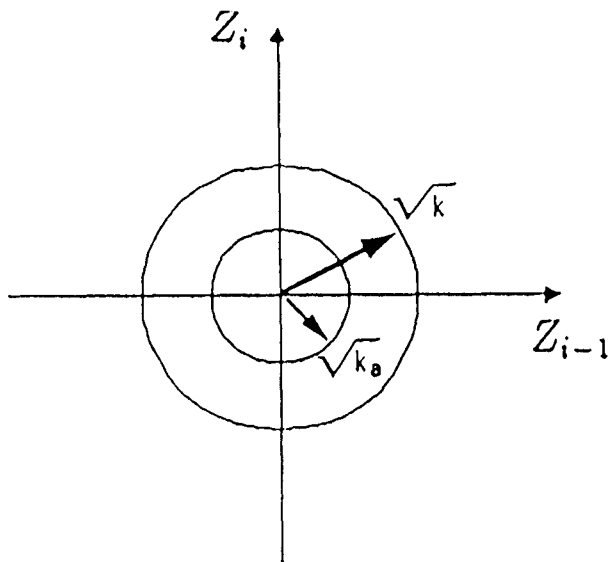
Finalmente, por (2.1.4),

$$\begin{aligned}
 E(N_2) &= \pi'_0 \times W_{12}^0 \times p_3 + 2\pi'_0 \times W_{12}^1 \times p_3 + 3\pi'_0 \times W_{12}^2 \times p_3 + \dots + i\pi'_0 \times W_{12}^{i-1} \times p_3 + \dots \\
 E(N_2) &= \pi'_0 \times (W - W_{12})^{-2} \times p_3.
 \end{aligned}$$

## 2.2. Gráficos de Controle com Tamanhos Amostrais Variados Baseados nas 2 Últimas Observações

Seguindo a idéia proposta quando da introdução dos limites de alerta, pode-se acompanhar processos de produção pela inspeção da  $(i - 1)$ -ésima e  $i$ -ésima observações variando-se seu tamanho amostral segundo a posição do vetor resultante no gráfico. Se o vetor resultante estiver em qualquer posição interna à circunferência de raio  $\sqrt{k_a}$ , o tamanho amostral para a inspeção seguinte será  $n_p$ . Caso o vetor resultante esteja situado entre as circunferências de raio  $\sqrt{k_a}$  e  $\sqrt{k}$ , isto é, entre os limites de alerta e de controle, então o tamanho amostral para a inspeção seguinte será  $n_g$ , onde  $n_p < n_g$ .

O esquema descrito acima é apresentado a seguir na Figura 2.1, onde a variável de interesse  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Z_i = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0,1)$ .



**Figura 2.1:** Gráfico de controle para processos com tamanhos amostrais variados baseados nas 2 últimas observações.

A notação paramétrica usada representa:

- (i)  $k$ : fator de determinação do limite de controle;
- (ii)  $k_a$ : fator de determinação do limite de alerta.

Sendo  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_i, \dots$ , variáveis aleatórias iid onde  $Z_i \sim N(0,1)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, 4, \dots$ , então  $Y_i = \sum_{j=1}^m Z_j^2 \sim \chi_{(m)}^2$ , Qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade cuja função densidade de probabilidade é dada pela expressão abaixo (vide Johnson e Kotz, pag. 167, 1972):

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(m/2)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2} \times y^{(m/2-1)} \times e^{-\frac{1}{2}y} \times \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

onde  $E(Y) = m$  e  $Var(Y) = 2m$ .

Assim pode-se determinar o processo de controle segundo a sequência  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_i, \dots$ , onde

$$Y_i = Z_i^2 + Z_{i+1}^2 \sim \chi_{(2)}^2, \text{ com parâmetro de centralidade } \lambda = 0, \text{ e} \quad (2.2.1)$$

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y_i} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y_i).$$

É importante destacar que  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_i, \dots$ , não são independentes. A auto-correlação serial existente neste processo de controle será compensada pela eficiência obtida com o seu uso, conforme resultados que serão apresentados no decorrer deste trabalho.

A função de auto-correlação observada na série  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ , é dada por

$$\rho(Y_i, Y_{i+r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{sc } r = 1 \\ 0 & \text{sc } r > 1 \end{cases}, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.2.2)$$

A determinação de  $k$  de tal forma que a taxa de alarmes falsos seja de um a cada 370,37 inspeções, fica extremamente dificultada devido à estrutura de correlação existente. Observe que a probabilidade de um alarme falso na primeira inspeção é igual a 0,0027. A segunda inspeção só ocorrerá caso não ocorra um alarme falso na primeira e, devido à correlação positiva existente entre  $Y_1$  e  $Y_2$ , pode-se concluir que  $P(Y_2 \geq k/Y_1 \leq k) < 0.0027$ . Seguindo este raciocínio, deveriam ser determinadas probabilidades que demandariam árduo cálculo numérico, visto que, a função de densidade conjunta de  $Y_i, Y_{i+1}$  é dada por (vide Johnson e Kotz, pag. 261, Vol 3, 1972):

$$f_{Y_i, Y_{i+1}}(y_i, y_{i+1}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \times e^{-\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})} \times \int_0^{\min(y_i, y_{i+1})} \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{t(y_i - t)(y_{i+1} - t)}} dt.$$

Neste trabalho não serão calculados os valores exatos de  $k$ , contudo boas aproximações para processos que possuam a frequência de alarmes falsos desejada, serão obtidas por simulações Monte Carlo.

Considerando que a frequência de paradas desnecessárias seja de uma a cada 370.37 inspeções, a variação do tamanho amostral deve ser tal que na média, seja igual a  $n_0$ . Assim,

$$E(n/Y_i \leq k) = n_0, \text{ isto é,}$$

$$E(n/Y_i \leq k) = n_p \times P(Y_i \leq k_a/Y_i \leq k) + n_g \times P(Y_i \geq k_a/Y_i \leq k) = n_0. (2.2.3)$$

Sendo

$$P(Y_i \leq k_a/Y_i \leq k) = \frac{P(\{Y_i \leq k_a\} \cap \{Y_i \leq k\})}{P(Y_i \leq k)} = \frac{P(Y_i \leq k_a)}{P(Y_i \leq k)}, \text{ e}$$

$$P(Y_i \geq k_a/Y_i \leq k) = 1 - P(Y_i \leq k_a/Y_i \leq k), \text{ então de (2.1.3)}$$

$$n_p \times \frac{P(Y_i \leq k_a)}{P(Y_i \leq k)} + n_g \times \left[ 1 - \frac{P(Y_i \leq k_a)}{P(Y_i \leq k)} \right] = n_0$$

Portanto,

$$P(Y_i \leq k_a) = \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} \times P(Y_i \leq k). (2.2.4)$$

Pela definição do delineamento amostral  $(n_0, n_p, n_g)$  e do limite de controle  $(k)$ , pode-se determinar o limite de alerta para o processo de controle.

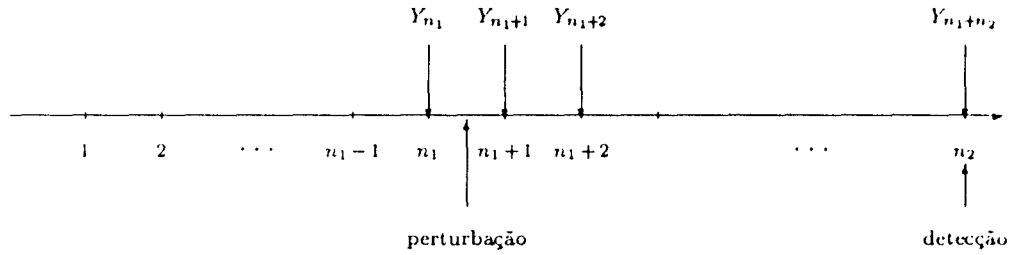
A eficiência deste processo pode ser avaliada a partir do momento em que ocorrer uma perturbação em sua média. Considere que uma perturbação igual a  $\delta\sigma$  ocorra entre a  $n_1$ -ésima e  $(n_1 + 1)$ -ésima observações. Portanto,  $Z_i \sim N(0, 1) \forall i = 1, 2, 3, \dots, n_1$  e após a perturbação,

$$Z_i \sim \begin{cases} N(\delta\sqrt{n_p}, 1) & \text{se } n = n_p \\ N(\delta\sqrt{n_g}, 1) & \text{se } n = n_g \end{cases}, \quad \forall i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2.$$

$$Y_i \sim \begin{cases} \chi_{(2)}^2 & \text{central, } \forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1, \\ \chi_{(2)}^2 & \text{n\~{a}o central, } \lambda = \delta^2 n \text{ para } i = n_1, \\ \chi_{(2)}^2 & \text{n\~{a}o central, } \lambda = \delta^2 \sum_{j=i}^{i+1} n_{(j)} \text{ para } i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 - 1, \end{cases}$$

onde  $n = n_{(j)}$ .

Ilustrando o processo descrito acima, tem-se o seguinte esquema:



Sejam  $T_i = Y_{n_1+i}$  e  $M_i$  seu tamanho amostral para  $\forall i = 1, 2, \dots, n_2$ . Para que seja determinada a expressão de  $E(N_2)$  deve-se, primeiramente, calcular  $P(N_2 = i)$ . Assim,

$$P(N_2 = i) = P(T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i-1) \times P(T_i > k / T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i-1) \quad (2.2.5)$$

Denotando  $p_i = P(T_i > k / T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i-1)$ ,

ent\~{a}o,

$$1 - p_i = P(T_i \leq k / T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i-1).$$

Deste modo,

$$P(T_1 \leq k) = 1 - p_1,$$



$$\begin{aligned}
P(T_2 \leq k/T_1 \leq k) &= 1 - p_2, \\
P(T_3 \leq k/T_1 \leq k \cap T_2 \leq k) &= 1 - p_3, \\
&\vdots \\
P(T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i-1) &= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \dots (1 - p_{i-1})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P(N_2 = i) = (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_{i-1}) p_i. \quad (2.2.6)$$

Visando facilitar a notação, considere as seguintes expressões:

$$(i) \quad P(T_j \leq k/M_j = n_p) = \gamma_j(k_p); \quad (2.2.7)$$

$$(ii) \quad P(T_j \leq k/M_j = n_g) = \gamma_j(k_g); \quad (2.2.8)$$

$$(iii) \quad P(T_j \leq k_a/M_j = n_p) = \gamma_j(k_{ap}); \quad (2.2.9)$$

$$(iv) \quad P(T_j \leq k_a/M_j = n_g) = \gamma_j(k_{ag}); \quad (2.2.10)$$

$$(v) \quad P(Y_{n_1} \leq k_a) = \gamma(k_a); \quad (2.2.11)$$

$$(vi) \quad P(Y_{n_1} \leq k) = \gamma(k); \quad (2.2.12)$$

Para determinar-se  $P(N_2 = i)$ , é necessário que se calcule  $p_i, \forall i = n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ . Assim,

$$\begin{aligned}
p_1 = P(T_1 > k) &= P(T_1 > k/M_1 = n_p) \times P(M_1 = n_p) + \\
&\quad + P(T_1 > k/M_1 = n_g) \times P(M_1 = n_g). \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

Por (2.1.7) e (2.1.8), tem-se

$$p_1 = [1 - \gamma_1(k_p)] \times P(M_1 = n_p) + [1 - \gamma_1(k_g)] \times P(M_1 = n_g)$$

onde,

$$P(M_1 = n_p) = P(Y_{n_1} \leq k_a / Y_{n_1} \leq k) = \frac{P(Y_{n_1} \leq k_a)}{P(Y_{n_1} \leq k)} = \frac{\gamma(k_a)}{\gamma(k)},$$

portanto,

$$P(M_1 = n_g) = 1 - \frac{\gamma(k_a)}{\gamma(k)}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para  $p_1$ , pode-se determinar  $p_2, p_3, \dots, p_i$ .

$$\begin{aligned} p_2 &= [1 - \gamma_2(k_p)] \times P(M_2 = n_p) + [1 - \gamma_2(k_g)] \times P(M_2 = n_g); \\ p_3 &= [1 - \gamma_3(k_p)] \times P(M_3 = n_p) + [1 - \gamma_3(k_g)] \times P(M_3 = n_g); \\ &\vdots \\ p_i &= [1 - \gamma_i(k_p)] \times P(M_i = n_p) + [1 - \gamma_i(k_g)] \times P(M_i = n_g), \\ p_i &= [\gamma_i(k_g) - \gamma_i(k_p)] \times P(M_i = n_p) + 1 - \gamma_i(k_g) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\begin{aligned} P(M_2 = n_p) &= P(T_1 \leq k_a / T_1 \leq k) = \\ &= P(T_1 \leq k_a / \{M_1 = n_p\} \cap \{T_1 \leq k\}) \times P(\{M_1 = n_p\} \cap \{T_1 \leq k\}) + \\ &\quad + P(T_1 \leq k_a / \{M_1 = n_g\} \cap \{T_1 \leq k\}) \times P(\{M_1 = n_g\} \cap \{T_1 \leq k\}) = \\ &= P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_p\} \cap \{T_1 \leq k\}) + \\ &\quad + P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_g\} \cap \{T_1 \leq k\}) = \\ &= P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_p\}) + P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_g\}) \\ &= P(T_1 \leq k_a / M_1 = n_p) \times P(M_1 = n_p) \\ &\quad + P(T_1 \leq k_a / M_1 = n_g) \times P(M_1 = n_g) \end{aligned}$$

Substituindo-se (2.2.9) e (2.2.10) na expressão acima, tem-se

$$P(M_2 = n_p) = \gamma_1(k_{ap}) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag}) \times P(M_1 = n_g)$$

Pelo mesmo raciocínio acima,

$$\begin{aligned} P(M_3 = n_p) &= P(T_2 \leq k_a / T_2 \leq k) = \\ &= \gamma_2(k_{ap}) \times P(M_2 = n_p) + \gamma_2(k_{ag}) \times P(M_2 = n_g), \end{aligned}$$

e, por recorrência,

$$P(M_i = n_p) = \gamma_{i-1}(k_{ap}) \times P(M_{i-1} = n_p) + \gamma_{i-1}(k_{ag}) \times P(M_{i-1} = n_g)$$

mas,

$$P(M_i = n_g) = 1 - P(M_i = n_p)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} P(M_i = n_p) &= [\gamma_{i-1}(k_{ap}) - \gamma_{i-1}(k_{ag})] \times \\ &\quad \times P(M_{i-1} = n_p) + \gamma_{i-1}(k_{ag}). \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Seja,

$$(i) B_i(k_a) = \gamma_i(k_{ap}) - \gamma_i(k_{ag}); \quad (2.2.16)$$

$$(ii) B_i(k) = \gamma_i(k_p) - \gamma_i(k_g). \quad (2.2.17)$$

Substituindo (2.2.16) em (2.2.15), tem-se:

$$P(M_2 = n_p) = B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag});$$

$$\begin{aligned} P(M_3 = n_p) &= B_2(k_a) \times P(M_2 = n_p) + \gamma_2(k_{ag}) = \\ &= B_2(k_a) \times [B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag})] + \\ &\quad + \gamma_2(k_{ag}); \end{aligned}$$

$$P(M_4 = n_p) = B_3(k_a) \times P(M_3 = n_p) + \gamma_3(k_{ag}),$$

mas como  $\gamma_i(k_{ap}) = \gamma_2(k_{ap})$ ,  $\gamma_i(k_{ag}) = \gamma_2(k_{ag})$ ,  $\gamma_i(k_p) = \gamma_2(k_p)$  e  $\gamma_i(k_g) = \gamma_2(k_g)$  para  $\forall i = 3, 4, \dots, n_2$ , portanto,

$$\begin{aligned} P(M_4 = n_p) &= B_2(k_a) \times \{B_2(k_a) \times [B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag})] \\ &\quad + \gamma_2(k_{ag})\} + \gamma_3(k_{ag}) = \\ &= B_2(k_a)^2 \times [B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag})] + \gamma_2(k_{ag}) \times \\ &\quad \times [1 + B_2(k_a)]; \\ &\quad \vdots \\ P(M_i = n_p) &= B_2(k_a)^{i-2} \times [B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag})] + \gamma_2(k_{ag}) \times \\ &\quad \times [1 + B_2(k_a) + B_2(k_a)^2 + \dots + B_2(k_a)^{i-3}]. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Substituindo-se a expressão (2.2.18) em (2.2.14) e, em seguida, (2.2.6), obteve-se,

$$\begin{aligned}
P(N_2 = i) &= [B_1(k) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_g)] \times \\
&\quad \times [B_2(k) \times P(M_2 = n_p) + \gamma_2(k_g)] \times \dots \\
\dots &\quad \times [B_2(k) \times P(M_{i-1} = n_p) + \gamma_2(k_g)] \times \\
&\quad \times [1 - B_2(k) \times P(M_i = n_p) + \gamma_2(k_g)].
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Pela expressão (2.2.19) pode-se determinar

$$E(N_2) = \sum_{i=1}^{\infty} i \times P(N_2 = i).$$

### 2.3. Gráficos de Controle com Tamanhos Amostrais Variados Baseados nas $m$ Últimas Observações

Generalizando a idéia anterior, pode-se acompanhar processos de produção pela inspeção das  $m$ -últimas observações variando-se seu tamanho amostral segundo a posição do vetor resultante no gráfico. Se o vetor resultante estiver em qualquer posição interna à esfera de raio  $\sqrt{k_a}$ , limite de alerta, o tamanho amostral para a inspeção seguinte será  $n_p$ , com  $n_p < n_0$ . Caso o vetor resultante esteja situado entre as esferas de raio  $\sqrt{k_a}$  e  $\sqrt{k}$ , isto é, entre os limites de alerta e de controle, então o tamanho amostral para a inspeção seguinte será  $n_g$ , onde  $n_g > n_0$ .

A variável de interesse é  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Sem perda de generalidade, considere  $Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ .

A notação paramétrica usada representa:

- (i)  $k$ : fator de determinação do limite de controle;
- (ii)  $k_a$ : fator de determinação do limite de alerta.

Da mesma forma, a variação do tamanho amostral deve ser tal que na média, seja igual a  $n_0$ . Com base nesta condição considere

$$Y_i = Z_i^2 + Z_{i+1}^2 + \dots + Z_{i+(m-2)}^2 + Z_{i+(m-1)}^2 \sim \chi_{(m)}^2 \text{ com } \lambda = 0, \quad (2.3.1)$$

onde

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(m/2)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2} \times y^{(m/2-1)} \times e^{-\frac{1}{2}y} \times \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

$$\text{e } E(Y) = m \text{ e } Var(Y) = 2m.$$

A auto-correlação serial na sequência  $Y_i, Y_{i+1}, Y_{i+2}, \dots$ , é a seguinte:

$$\rho(Y_i, Y_{i+r}) = \begin{cases} \frac{m-r}{m} & \text{se } r = 1, 2, \dots, m-1 \\ 0 & \text{se } r > m-1 \end{cases}, \quad \forall i = m, m+1, m+2, \dots, \quad (2.3.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} Y_{n_i} &= Z_{n_i}^2 + Z_{n_i+1}^2 + \dots + Z_{n_i+(m-1)}^2 \sim \chi_m^2; \\ Y_{n_{i+1}} &= Z_{n_i+1}^2 + Z_{n_i+2}^2 + \dots + Z_{n_i+(m-2)}^2 \sim \chi_m^2; \\ Y_{n_{i+2}} &= Z_{n_i+2}^2 + Z_{n_i+3}^2 + \dots + Z_{n_i+(m-3)}^2 \sim \chi_m^2; \\ &\vdots \\ Y_{n_{i+r}} &= Z_{n_i+r}^2 + Z_{n_i+(r+1)}^2 + \dots + Z_{n_i+r+(m-1)}^2 \sim \chi_m^2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

A demonstração deste resultado é apresentada a seguir:

Por definição

$$\begin{aligned}\rho(Y_i, Y_{i+r}) &= \frac{Cov(Y_i, Y_{i+r})}{\sqrt{Var(Y_i)}\sqrt{Var(Y_{i+r})}}, r = 1, 2, \dots, m-1 \\ Cov(Y_i, Y_{i+r}) &= Cov\left(\sum_{j=i}^{i+(m-1)} Z_j^2, \sum_{j=i+r}^{i+r+(m-1)} Z_j^2\right) \\ &= Cov\left(\sum_{j=i+r}^{i+(m-1)} Z_j^2, \sum_{j=i+r}^{i+(m-1)} Z_j^2\right)\end{aligned}$$

pois  $Z_i^2, Z_{i+1}^2, \dots, Z_{i+(m-1)}^2, \dots, Z_{i+r+(m-1)}^2$  são independentes.

Portanto,

$$Cov(Y_i, Y_{i+r}) = \sum_{j=i+r}^{i+(m-1)} Var Z_j^2 = 2(m-r) \text{ e, finalmente,}$$

$$\rho(Y_i, Y_{i+r}) = \frac{2(m-r)}{\sqrt{2m}\sqrt{2m}} = \frac{m-r}{m}$$

Por (2.3.1), pode-se calcular

$$E(n/Y_i \leq k) = n_p \times P(Y_i \leq k_a/Y_i \leq k) + n_g \times P(Y_i \geq k_a/Y_i \leq k) = n_0, (2.3.3)$$

onde

$$P(Y_i \leq k_a) = \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} \times P(Y_i \leq k). \quad (2.3.4)$$

Conhecendo-se o delineamento amostral  $(n_0, n_p, n_g)$  e o limite de controle  $(\sqrt{k})$ , pode-se determinar o limite de alerta para o processo de controle.

Pode-se assim, determinar a eficiência deste processo caso ocorra uma perturbação em sua média. Considere que uma perturbação igual a  $\delta\sigma$  ocorra entre a  $n_1$ -ésima e  $(n_1 + 1)$ -ésima obsercações. Portanto,  $Z_i \sim N(0, 1) \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n_1$ . Após a perturbação,

$$Z_i \sim \begin{cases} N(\delta\sqrt{n_p}, 1) & \text{se } n = n_p \\ N(\delta\sqrt{n_g}, 1) & \text{se } n = n_g \end{cases}, \quad \forall i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2;$$

$$Y_i \sim \begin{cases} \chi_{(m)}^2 & \text{central,} & \forall i = 1, 2, \dots, n - (m - 1), \\ \chi_{(m)}^2 & \text{não central,} & \lambda = \delta^2 n \text{ para } i = n_1 - (m - 2), \\ \chi_{(m)}^2 & \text{não central,} & \lambda = \delta^2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+2} n_{(j)} \text{ para } i = n_1 - (m - 3), \\ \chi_{(m)}^2 & \text{não central,} & \lambda = \delta^2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+3} n_{(j)} \text{ para } i = n_1 - (m - 4), \\ & \vdots & \vdots \\ \chi_{(m)}^2 & \text{não central,} & \lambda = \delta^2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+(m-1)} n_{(j)} \text{ para } i = n_1, \\ \chi_{(m)}^2 & \text{não central,} & \lambda = \delta^2 \sum_{j=i}^{i+(m-1)} n_{(j)} \text{ para} \\ & & i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2 - (m - 1). \end{cases}$$

onde  $n = n_{(j)}$ .

Sejam  $T_i = Y_{n_1+i}$  e  $M_i$  seu tamanho amostral para  $\forall i = 1, 2, \dots, n_2$ . Para que seja determinada a expressão para que  $E(N_2)$  seja conhecida deve-se, primeiramente, calcular  $P(N_2 = i)$ . Assim,

$$\begin{aligned} P(N_2 = i) &= P(T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i - 1) \times \\ &\quad \times P(T_i > k/T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i - 1) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Denotando  $p_i = P(T_i > k/T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i - 1)$ ,

então,

$$1 - p_i = P(T_i \leq k/T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i - 1).$$



Deste modo,

$$\begin{aligned}
P(T_1 \leq k) &= 1 - p_1, \\
P(T_2 \leq k/T_1 \leq k) &= 1 - p_2, \\
P(T_3 \leq k/T_1 \leq k \cap T_2 \leq k) &= 1 - p_3, \\
&\vdots \\
P(T_j \leq k, \forall j = 1, 2, \dots, i-1) &= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \dots (1 - p_{i-1})
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Portanto,

$$P(N_2 = i) = (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_{i-1})p_i. \tag{2.3.7}$$

Para facilitar a notação, considere as seguintes expressões:

$$(i) P(T_j \leq k/M_j = n_p) = \gamma_j(k_p); \tag{2.3.8}$$

$$(ii) P(T_j \leq k/M_j = n_g) = \gamma_j(k_g); \tag{2.3.9}$$

$$(iii) P(T_j \leq k_a/M_j = n_p) = \gamma_j(k_{ap}); \tag{2.3.10}$$

$$(iv) P(T_j \leq k_a/M_j = n_g) = \gamma_j(k_{ag}); \tag{2.3.11}$$

$$(v) P(Y_{n_1} \leq k_a) = \gamma(k_a); \tag{2.3.12}$$

$$(vi) P(Y_{n_1} \leq k) = \gamma(k); \tag{2.3.13}$$

Para determinar-se  $P(N_2 = i)$ , é necessário que se calcule  $p_i, \forall i = n_1, n_1 + i, \dots, n_1 + n_2$ . Assim,

$$\begin{aligned}
p_1 = P(T_1 > k) &= P(T_1 > k/M_1 = n_p) \times P(M_1 = n_p) + \\
&+ P(T_1 > k/M_1 = n_g) \times P(M_1 = n_g).
\end{aligned}
\tag{2.3.14}$$

Por (2.3.8) e (2.3.9), tem-se

$$p_1 = [1 - \gamma_1(k_p)] \times P(M_1 = n_p) + [1 - \gamma_1(k_g)] \times P(M_1 = n_g)$$

onde,

$$P(M_1 = n_p) = P(Y_{n_1} \leq k_a / Y_{n_1} \leq k) = \frac{P(Y_{n_1} \leq k_a)}{P(Y_{n_1} \leq k)} = \frac{\gamma(k_a)}{\gamma(k)},$$

portanto,

$$P(M_1 = n_g) = 1 - \frac{\gamma(k_a)}{\gamma(k)},$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para  $p_1$ , podem ser determinados  $p_2, p_3, \dots, p_i$ .

$$\begin{aligned}
p_2 &= [1 - \gamma_2(k_p)] \times P(M_2 = n_p) + [1 - \gamma_2(k_g)] \times P(M_2 = n_g) ; \\
p_3 &= [1 - \gamma_3(k_p)] \times P(M_3 = n_p) + [1 - \gamma_3(k_g)] \times P(M_3 = n_g) ; \\
&\vdots \\
p_i &= [1 - \gamma_i(k_p)] \times P(M_i = n_p) + [1 - \gamma_i(k_g)] \times P(M_i = n_g) , \\
p_i &= [\gamma_i(k_g) - \gamma_i(k - p)] \times P(M_i = n_p) + 1 - \gamma_i(k_g)
\end{aligned}
\tag{2.3.15}$$

$$\begin{aligned}
P(M_2 = n_p) &= P(T_1 \leq k_a / T_1 \leq k) = \\
&= P(T_1 \leq k_a / \{M_1 = n_p\} \cap \{T_1 \leq k\}) \times P(\{M_1 = n_p\} \cap \{T_1 \leq k\}) + \\
&\quad + P(T_1 \leq k_a / \{M_1 = n_g\} \cap \{T_1 \leq k\}) \times P(\{M_1 = n_g\} \cap \{T_1 \leq k\}) = \\
&= P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_p\} \cap \{T_1 \leq k\}) + \\
&\quad + P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_g\} \cap \{T_1 \leq k\}) = \\
&= P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_p\}) + P(\{T_1 \leq k_a\} \cap \{M_1 = n_g\}) \\
&= P(T_1 \leq k_a / M_1 = n_p) \times P(M_1 = n_p) \\
&\quad + P(T_1 \leq k_a / M_1 = n_g) \times P(M_1 = n_g)
\end{aligned}$$

Substituindo-se (2.3.10) e (2.3.11) na expressão acima, tem-se

$$P(M_2 = n_p) = \gamma_1(k_{ap}) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag}) \times P(M_1 = n_g)$$

Pelo mesmo raciocínio acima,

$$\begin{aligned}
P(M_3 = n_p) &= P(T_2 \leq k_a / T_2 \leq k) = \\
&= \gamma_2(k_{ap}) \times P(M_2 = n_p) + \gamma_2(k_{ag}) \times P(M_2 = n_g),
\end{aligned}$$

e, por recorrência,

$$\begin{aligned}
P(M_i = n_p) &= \gamma_{i-1}(k_{ap}) \times P(M_{i-1} = n_p) + \\
&\quad + \gamma_{i-1}(k_{ag}) \times P(M_{i-1} = n_g)
\end{aligned}$$

mas,

$$P(M_i = n_g) = 1 - P(M_i = n_p)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} P(M_i = n_p) &= [\gamma_{i-1}(k_{ap}) - \gamma_{i-1}(k_{ag})] \times \\ &\times P(M_{i-1} = n_p) + \gamma_{i-1}(k_{ag}). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Seja,

$$(i) \quad B_i(k_a) = \gamma_i(k_{ap}) - \gamma_i(k_{ag}); \quad (2.3.17)$$

$$(ii) \quad B_i(k) = \gamma_i(k_p) - \gamma_i(k_g). \quad (2.3.18)$$

Substituindo (2.3.17) em (2.3.16), tem-se:

$$\begin{aligned} P(M_2 = n_p) &= B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag}) ; \\ P(M_3 = n_p) &= B_2(k_a) \times P(M_2 = n_p) + \gamma_2(k_{ag}) = \\ &= B_2(k_a) \times [B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag})] + \gamma_2(k_{ag}) ; \\ P(M_4 = n_p) &= B_3(k_a) \times P(M_3 = n_p) + \gamma_3(k_{ag}) = \\ &= B_3(k_a) \times \{B_2(k_a) \times [B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_{ag})] + \\ &\quad + \gamma_2(k_{ag})\} + \gamma_3(k_{ag}) = \\ &= B_3(k_a) \times B_2(k_a) \times B_1(k_a) \times P(M_1 = n_p) + \\ &\quad + B_3(k_a) \times B_2(k_a) \times \gamma_1(k_{ag}) + B_3(k_a) \times \gamma_2(k_{ag}) + \gamma_3(k_{ag}) = \\ &= P(M_1 = n_p) \times \prod_{j=1}^3 B_j(k_a) + \sum_{j=1}^2 \gamma_j(k_{ag}) \times \prod_{t=j+1}^3 B_t(k_a) + \gamma_3(k_{ag}) ; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(M_i = n_p) &= P(M_1 = n_p) \times \prod_{j=1}^{i-1} B_j(k_a) + \sum_{j=1}^{i-2} \gamma_j(k_{ag}) \times \\
&\quad \times \prod_{t=j+1}^{i-1} B_t(k_a) + \gamma_{i-1}(k_{ag}). \tag{2.3.19}
\end{aligned}$$

onde  $\gamma_i(k_{ap}) = \gamma_m(k_{ap})$ ,  $\gamma_i(k_{ag}) = \gamma_m(k_{ag})$ ,  $\gamma_i(k_p) = \gamma_m(k_p)$  e  $\gamma_i(k_g) = \gamma_m(k_g)$  para  $\forall i = m + 1, m + 2, \dots, n_2$ .

Substituindo-se a expressão (2.3.19) em (2.3.5) e, em seguida, (2.3.7), obteve-se,

$$\begin{aligned}
P(N_2 = i) &= [B_1(k) \times P(M_1 = n_p) + \gamma_1(k_g)] \times \\
&\quad \times [B_2(k) \times P(M_2 = n_p) + \gamma_2(k_g)] \times \dots \\
&\quad \dots \times [B_{i-1}(k) \times P(M_{i-1} = n_p) + \gamma_{i-1}(k_g)] \times \\
&\quad \times [1 - B_i(k) \times P(M_i = n_p) + \gamma_i(k_g)]. \tag{2.3.20}
\end{aligned}$$

Pela expressão (2.3.20) pode-se determinar

$$E(N_2) = \sum_{i=1}^{\infty} i \times P(N_2 = i).$$

A partir deste resultado pode-se avaliar o desempenho de gráficos de controle baseados nas  $m$  últimas observações segundo diversos delineamentos amostrais, verificando suas eficiências relativas ao esquema proposto por Shewhart de acordo com as perturbações que os processos sofrerem.

## Capítulo 3

# SIMULAÇÕES MONTE CARLO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE PROPOSTOS

Com a determinação da expressão para  $E(N_2)$ , torna-se natural a realização de comparações entre processos de controle baseados em diversos delineamentos amostrais, para que conclusões possam ser tiradas segundo as eficiências obtidas. Infelizmente, a expressão para  $E(N_2)$  envolve dificuldades intransponíveis de cálculo, tornando-se praticamente inúteis para estes propósitos.

Por repetições Monte Carlo foi possível a realização de simulações que apresentaram resultados bastante interessantes (vide programa no apêndice).

O valor de  $k$  que garante uma taxa de alarmes falsos igual a 1 : 370, foi determinado, para cada valor de  $m$ , por aproximações sucessivas, através de simulações Monte Carlo. Em cada caso, o valor  $k_0$  de partida foi determinado, ignorando-se a auto-correlação na série dos  $Y'$ s. Neste ponto,  $k_0$  é dado por  $F_m^{-1}(0,9973)$ , onde  $F$  é a FDP da qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade. Por exemplo, para  $m = 2$ ,  $F_2(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$ , e  $k_0 = -2\log(1 - 0,9973) = 11.8290$ . É interessante notar aqui que os valores de  $k_a$  são determinados diretamente pela

expressão 2.1.4, sem a influência direta da estrutura de correlação.

Inicialmente realizaram-se 10.000 repetições Monte Carlo simulando um processo baseado nas 2 últimas observações, cujo tamanho amostral médio foi  $n_0 = 4$  e limite de controle  $k = 11,8290$ . Devido à estrutura de correlação existente entre as variáveis aleatórias  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ , o número médio de inspeções obtido para que houvesse uma observação fora do limite de controle foi de  $513,2 \pm 10,1$  inspeções ao nível de confiança de 0,95.

Conforme apontado por Verdi (1991), este resultado é qualitativamente esperado dada a correlação positiva entre  $Y_i$  e  $Y_{i+1}$ .

Assim, para que fosse possível comparar o delineamento anterior com o esquema clássico de Shewhart, foi necessária a determinação de  $k$  via simulações Monte Carlo, de tal forma que o intervalo de confiança ao nível de confiança de 0,95 contivesse o valor desejado de 370 inspeções.

Para  $k = 11,15$  realizaram-se 10.000 repetições Monte Carlo onde o número médio de inspeções para que houvesse um alarme falso foi de  $371,7 \pm 7,4$  inspeções.

Da mesma forma, foi necessária a determinação de  $k$  para processos que baseavam-se até nas 6 últimas observações. A Tabela 3.1 apresenta os valores médios de inspeções obtidos com seus respectivos intervalos de confiança ao nível de 0,95:

**Tabela 3.1:** Número médio de inspeções para a ocorrência de um alarme falso para os respectivos valores de  $m$  e  $k$  com limites do IC ao nível de 0,95.

$m$	$k$	LimInf	Média	LimSup
2	11,15	364,3	371,7	379,1
3	13,00	364,5	371,8	379,1
4	14,64	364,2	371,3	378,4
5	16,20	363,4	370,7	378,1
6	17,72	365,3	372,7	380,1

Determinados os valores de  $k$ , foi possível calcular os valores de  $k_a$  (HP - 32S) de tal forma que

$$P(Y_i \leq k_a) = \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} \times P(Y_i \leq k).$$



A Tabela 3.2 apresenta valores obtidos para  $k_a$  segundo delineamentos amostrais, com ( $n_0 = 4$ ), que servirão de base para simulações de interesse.

**Tabela 3.2:** Valores de  $k_a$  obtidos por Simulações Monte Carlo segundo os respectivos delineamentos amostrais.

$m$	$(n_p, n_g)$	$k_a$
2	(2,8)	2,182114
	(1,10)	2,182114
	(1,25)	4,106484
	(1,50)	5,821093
3	(2,8)	3,381761
	(1,10)	3,381761
	(1,25)	5,665710
	(1,50)	7,591663
4	(2,8)	4,547045
	(1,10)	4,547045
	(1,25)	7,117258
	(1,50)	8,796370
5	(2,8)	5,6902915
	(1,10)	5,6902915
	(1,25)	8,5050904
	(1,50)	10,301296
6	(2,8)	6,818233
	(1,10)	6,818233
	(1,25)	9,850178
	(1,50)	11,750408

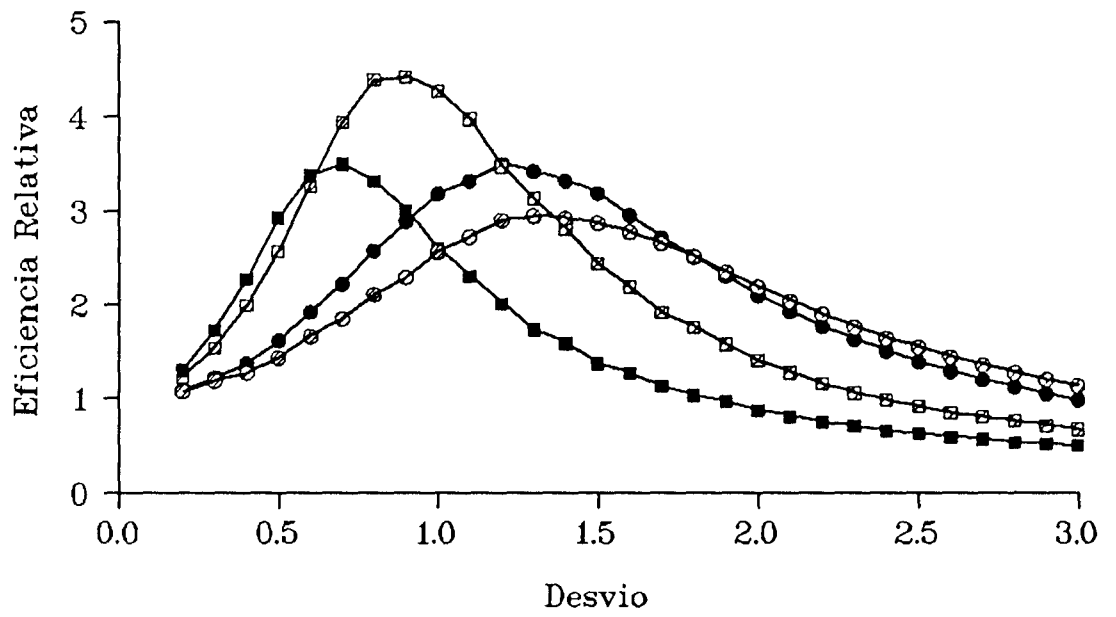
Com base nos parâmetros da tabela 3.2 foram realizadas simulações Monte Carlo para os delineamentos amostrais apresentados, sendo que para cada desvio no processo foram feitas 10.000 repetições. Os resultados obtidos são apresentados a seguir em forma de tabelas e de gráficos.

Tabela 3.3:  $E(N_2)$  para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 2$ .

$\delta\sqrt{n}$	Shewhart	$(n_p, n_g)$			
		(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,0	370,37	367,09	368,86	376,50	368,25
0,2	308,43	287,00	280,44	249,90	236,57
0,3	253,14	213,09	207,36	164,45	146,40
0,4	200,08	156,97	145,47	100,32	87,77
0,5	155,22	108,26	96,07	60,14	52,86
0,6	119,67	71,98	62,15	36,56	35,39
0,7	92,32	49,85	41,44	23,41	26,36
0,8	71,55	33,87	27,69	16,31	21,54
0,9	55,83	24,27	19,32	12,63	18,53
1,0	43,89	17,08	13,76	10,28	16,82
1,1	34,80	12,75	10,47	8,75	15,06
1,2	27,82	9,57	7,94	8,00	13,80
1,3	22,43	7,60	6,55	7,14	12,93
1,4	18,25	6,24	5,49	6,48	11,50
1,5	14,97	5,21	4,69	6,13	10,91
1,6	12,38	4,46	4,19	5,64	9,76
1,7	10,33	3,89	3,80	5,39	9,13
1,8	8,69	3,45	3,46	4,94	8,40
1,9	7,37	3,13	3,19	4,69	7,61
2,0	6,30	2,87	3,00	4,49	7,21
2,1	5,43	2,66	2,82	4,26	6,69
2,2	4,72	2,48	2,67	4,08	6,28
2,3	4,13	2,35	2,54	3,90	5,81
2,4	3,65	2,23	2,43	3,72	5,56
2,5	3,24	2,10	2,34	3,54	5,15
2,6	2,90	2,02	2,26	3,43	4,88
2,7	2,62	1,94	2,19	3,25	4,58
2,8	2,38	1,87	2,12	3,11	4,43
2,9	2,17	1,81	2,07	3,02	4,14
3,0	2,00	1,76	2,03	2,94	3,93

Tabela 3.4: Eficiência Relativa para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 2$ .

$\delta\sqrt{n}$	$(n_p, n_g)$			
	(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,2	1,075	1,100	1,234	1,304
0,3	1,188	1,221	1,539	1,729
0,4	1,275	1,375	1,994	2,280
0,5	1,434	1,616	2,581	2,936
0,6	1,663	1,926	3,273	3,381
0,7	1,852	2,228	3,944	3,502
0,8	2,112	2,584	4,387	3,322
0,9	2,300	2,890	4,420	3,013
1,0	2,570	3,190	4,269	2,609
1,1	2,729	3,324	3,977	2,311
1,2	2,907	3,504	3,478	2,016
1,3	2,951	3,424	3,141	1,735
1,4	2,925	3,324	2,816	1,587
1,5	2,873	3,192	2,442	1,372
1,6	2,776	2,955	2,195	1,268
1,7	2,656	2,718	1,917	1,131
1,8	2,519	2,512	1,759	1,035
1,9	2,355	2,310	1,571	0,968
2,0	2,195	2,100	1,403	0,874
2,1	2,041	1,926	1,275	0,812
2,2	1,903	1,768	1,157	0,752
2,3	1,757	1,626	1,059	0,711
2,4	1,637	1,502	0,981	0,656
2,5	1,543	1,385	0,915	0,629
2,6	1,436	1,283	0,845	0,594
2,7	1,351	1,196	0,806	0,572
2,8	1,273	1,123	0,765	0,537
2,9	1,199	1,048	0,719	0,524
3,0	1,136	0,985	0,680	0,509



- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 50]
- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 25]
- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 10]
- Delineamento Amostral [np: 2, ng: 8]

Figura 3.1: Eficiência Relativa para  $m = 2$  segundo os delineamentos amostrais propostos.

Tabela 3.5:  $E(N_2)$  para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 3$ .

$\delta\sqrt{n}$	Shewhart	$(n_p, n_g)$			
		(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,0	370,37	366,77	375,95	375,03	373,74
0,2	308,43	277,86	270,93	233,85	216,69
0,3	253,14	206,18	192,55	143,32	129,82
0,4	200,08	142,08	127,26	85,92	78,42
0,5	155,22	92,94	82,27	51,95	49,54
0,6	119,67	62,20	52,17	32,08	36,38
0,7	92,32	41,17	34,14	21,58	29,08
0,8	71,55	27,96	22,78	16,33	24,57
0,9	55,83	19,89	16,12	13,06	22,16
1,0	43,89	14,21	11,93	11,29	19,52
1,1	34,80	10,61	9,12	9,73	17,23
1,2	27,82	8,46	7,41	8,86	15,88
1,3	22,43	6,70	6,24	8,16	14,47
1,4	18,25	5,78	5,36	7,39	13,25
1,5	14,97	4,90	4,83	6,94	11,76
1,6	12,38	4,32	4,36	6,37	10,91
1,7	10,33	3,84	3,93	5,95	9,87
1,8	8,69	3,47	3,64	5,56	9,14
1,9	7,37	3,17	3,41	5,24	8,47
2,0	6,30	2,94	3,18	4,94	7,81
2,1	5,43	2,75	2,99	4,70	7,39
2,2	4,72	2,58	2,86	4,38	6,75
2,3	4,13	2,44	2,69	4,23	6,29
2,4	3,65	2,31	2,58	3,99	5,83
2,5	3,24	2,19	2,49	3,80	5,53
2,6	2,90	2,10	2,39	3,66	5,15
2,7	2,62	2,02	2,33	3,46	4,92
2,8	2,38	1,93	2,24	3,36	4,63
2,9	2,17	1,89	2,19	3,26	4,35
3,0	2,00	1,82	2,10	3,12	4,20

Tabela 3.6: Eficiência Relativa para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 3$ .

$\delta\sqrt{n}$	$(n_p, n_g)$			
	(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,2	1,110	1,138	1,319	1,423
0,3	1,228	1,315	1,766	1,950
0,4	1,408	1,572	2,329	2,551
0,5	1,670	1,887	2,988	3,133
0,6	1,924	2,294	3,730	3,289
0,7	2,242	2,704	4,278	3,175
0,8	2,559	3,141	4,382	2,912
0,9	2,807	3,463	4,275	2,519
1,0	3,089	3,679	3,888	2,248
1,1	3,280	3,816	3,577	2,020
1,2	3,288	3,754	3,140	1,752
1,3	3,348	3,595	2,749	1,550
1,4	3,157	3,405	2,470	1,377
1,5	3,055	3,099	2,157	1,273
1,6	2,866	2,839	1,943	1,135
1,7	2,690	2,628	1,736	1,047
1,8	2,504	2,387	1,563	0,951
1,9	2,325	2,161	1,406	0,870
2,0	2,143	1,981	1,275	0,807
2,1	1,975	1,816	1,155	0,735
2,2	1,829	1,650	1,078	0,699
2,3	1,693	1,535	0,976	0,657
2,4	1,580	1,415	0,915	0,626
2,5	1,479	1,301	0,853	0,586
2,6	1,381	1,213	0,792	0,563
2,7	1,297	1,124	0,757	0,533
2,8	1,233	1,063	0,708	0,514
2,9	1,148	0,991	0,666	0,499
3,0	1,099	0,952	0,641	0,476

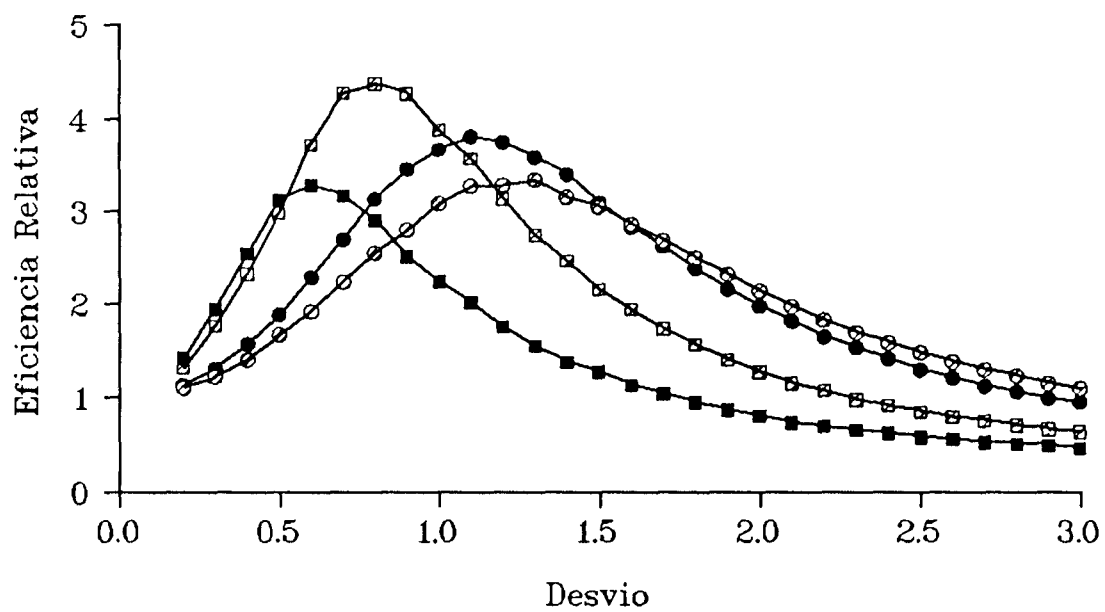


Figura 3.2: Eficiência Relativa para  $m = 3$  segundo os delineamentos amostrais propostos.

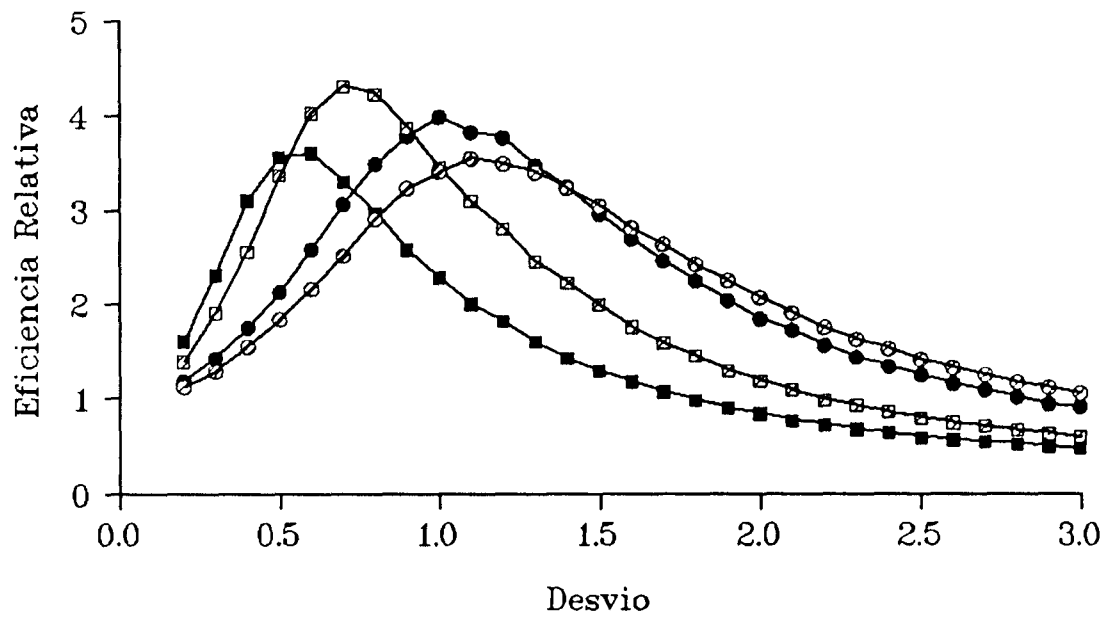
Tabela 3.7:  $E(N_2)$  para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 4$ .

$\delta\sqrt{n}$	Shewhart	$(n_p, n_g)$			
		(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,0	370,37	366,81	367,34	371,33	366,66
0,2	308,43	273,69	259,57	220,62	191,02
0,3	253,14	195,62	176,85	132,61	109,38
0,4	200,08	128,69	114,01	77,96	64,31
0,5	155,22	84,25	72,79	46,02	43,52
0,6	119,67	55,23	46,19	29,68	33,13
0,7	92,32	36,63	30,04	21,43	27,87
0,8	71,55	24,53	20,46	16,91	23,96
0,9	55,83	17,23	14,74	14,40	21,59
1,0	43,89	12,86	11,00	12,69	19,18
1,1	34,80	9,79	9,09	11,22	17,35
1,2	27,82	7,96	7,38	9,90	15,28
1,3	22,43	6,59	6,45	9,12	13,97
1,4	18,25	5,64	5,61	8,19	12,78
1,5	14,97	4,90	5,04	7,50	11,56
1,6	12,38	4,39	4,58	7,02	10,50
1,7	10,33	3,91	4,19	6,49	9,63
1,8	8,69	3,58	3,86	5,97	8,81
1,9	7,37	3,27	3,61	5,67	8,19
2,0	6,30	3,04	3,41	5,30	7,49
2,1	5,43	2,85	3,15	4,98	7,03
2,2	4,72	2,69	3,01	4,77	6,47
2,3	4,13	2,54	2,87	4,44	6,05
2,4	3,65	2,39	2,72	4,23	5,66
2,5	3,24	2,29	2,59	4,07	5,43
2,6	2,90	2,19	2,50	3,87	5,06
2,7	2,62	2,09	2,40	3,69	4,77
2,8	2,38	2,03	2,34	3,55	4,52
2,9	2,17	1,95	2,30	3,41	4,29
3,0	2,00	1,89	2,19	3,30	4,14



Tabela 3.8: Eficiência Relativa para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 4$ .

$\delta\sqrt{n}$	$(n_p, n_g)$			
	(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,2	1,127	1,188	1,398	1,615
0,3	1,294	1,431	1,909	2,314
0,4	1,555	1,755	2,566	3,111
0,5	1,842	2,132	3,373	3,567
0,6	2,167	2,591	4,032	3,612
0,7	2,520	3,073	4,308	3,313
0,8	2,917	3,497	4,231	2,986
0,9	3,240	3,788	3,877	2,586
1,0	3,413	3,990	3,459	2,288
1,1	3,555	3,828	3,102	2,006
1,2	3,495	3,770	2,810	1,821
1,3	3,404	3,478	2,459	1,606
1,4	3,236	3,253	2,228	1,428
1,5	3,055	2,970	1,996	1,295
1,6	2,820	2,703	1,764	1,179
1,7	2,642	2,465	1,592	1,073
1,8	2,427	2,251	1,456	0,986
1,9	2,254	2,042	1,300	0,900
2,0	2,072	1,848	1,189	0,841
2,1	1,905	1,724	1,090	0,772
2,2	1,755	1,568	0,990	0,730
2,3	1,626	1,439	0,930	0,683
2,4	1,527	1,342	0,863	0,645
2,5	1,415	1,251	0,796	0,597
2,6	1,324	1,160	0,749	0,573
2,7	1,254	1,092	0,710	0,549
2,8	1,172	1,017	0,670	0,527
2,9	1,113	0,943	0,636	0,506
3,0	1,058	0,913	0,606	0,483



- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 50]
- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 25]
- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 10]
- Delineamento Amostral [np: 2, ng: 8]

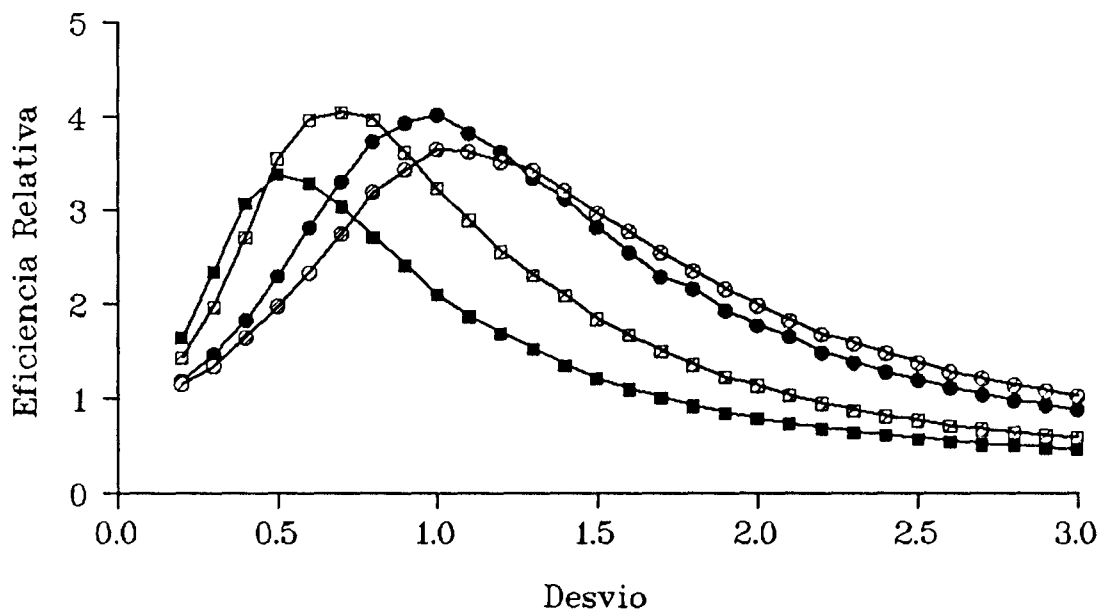
Figura 3.3: Eficiência Relativa para  $m = 4$  segundo os delineamentos amostrais propostos.

Tabela 3.9:  $E(N_2)$  para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 5$ .

$\delta\sqrt{n}$	Shewhart	$(n_p, n_g)$			
		(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,0	370,37	369,70	367,77	367,92	368,42
0,2	308,43	266,25	258,65	214,87	187,45
0,3	253,14	187,91	172,49	128,31	107,77
0,4	200,08	121,43	109,19	73,60	64,89
0,5	155,22	78,32	67,41	43,62	45,85
0,6	119,67	51,16	42,44	30,12	36,36
0,7	92,32	33,55	27,86	22,77	30,31
0,8	71,55	22,36	19,11	18,02	26,35
0,9	55,83	16,22	14,16	15,39	23,10
1,0	43,89	12,00	10,90	13,55	20,84
1,1	34,80	9,59	9,09	12,02	18,60
1,2	27,82	7,90	7,66	10,88	16,47
1,3	22,43	6,53	6,70	9,70	14,67
1,4	18,25	5,68	5,84	8,71	13,48
1,5	14,97	5,04	5,31	8,13	12,34
1,6	12,38	4,46	4,85	7,41	11,25
1,7	10,33	4,05	4,51	6,88	10,20
1,8	8,69	3,69	4,02	6,40	9,42
1,9	7,37	3,41	3,81	6,01	8,66
2,0	6,30	3,17	3,55	5,52	7,93
2,1	5,43	2,97	3,28	5,23	7,36
2,2	4,72	2,81	3,17	4,96	6,83
2,3	4,13	2,61	2,99	4,70	6,37
2,4	3,65	2,47	2,85	4,48	5,90
2,5	3,24	2,35	2,71	4,17	5,55
2,6	2,90	2,27	2,60	4,06	5,24
2,7	2,62	2,16	2,51	3,86	5,03
2,8	2,38	2,08	2,42	3,69	4,68
2,9	2,17	2,00	2,33	3,53	4,46
3,0	2,00	1,94	2,26	3,37	4,25

Tabela 3.10: Eficiência Relativa para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 5$ .

$\delta\sqrt{n}$	$(n_p, n_g)$			
	(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,2	1,158	1,192	1,435	1,645
0,3	1,347	1,468	1,973	2,349
0,4	1,648	1,832	2,718	3,083
0,5	1,982	2,303	3,558	3,385
0,6	2,339	2,820	3,973	3,291
0,7	2,752	3,314	4,054	3,046
0,8	3,200	3,744	3,971	2,715
0,9	3,442	3,943	3,628	2,417
1,0	3,658	4,027	3,239	2,106
1,1	3,629	3,828	2,895	1,871
1,2	3,522	3,632	2,557	1,689
1,3	3,435	3,348	2,312	1,529
1,4	3,213	3,125	2,095	1,354
1,5	2,970	2,819	1,841	1,213
1,6	2,776	2,553	1,671	1,100
1,7	2,551	2,290	1,501	1,013
1,8	2,355	2,162	1,358	0,923
1,9	2,161	1,934	1,226	0,851
2,0	1,987	1,775	1,141	0,794
2,1	1,828	1,655	1,038	0,738
2,2	1,680	1,489	0,952	0,691
2,3	1,582	1,381	0,879	0,648
2,4	1,478	1,281	0,815	0,619
2,5	1,379	1,196	0,777	0,584
2,6	1,278	1,115	0,714	0,553
2,7	1,213	1,044	0,679	0,521
2,8	1,144	0,983	0,645	0,509
2,9	1,085	0,931	0,615	0,487
3,0	1,031	0,885	0,593	0,471



- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 50]
- ◻ Delineamento Amostral [np: 1, ng: 25]
- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 10]
- Delineamento Amostral [np: 2, ng: 8]

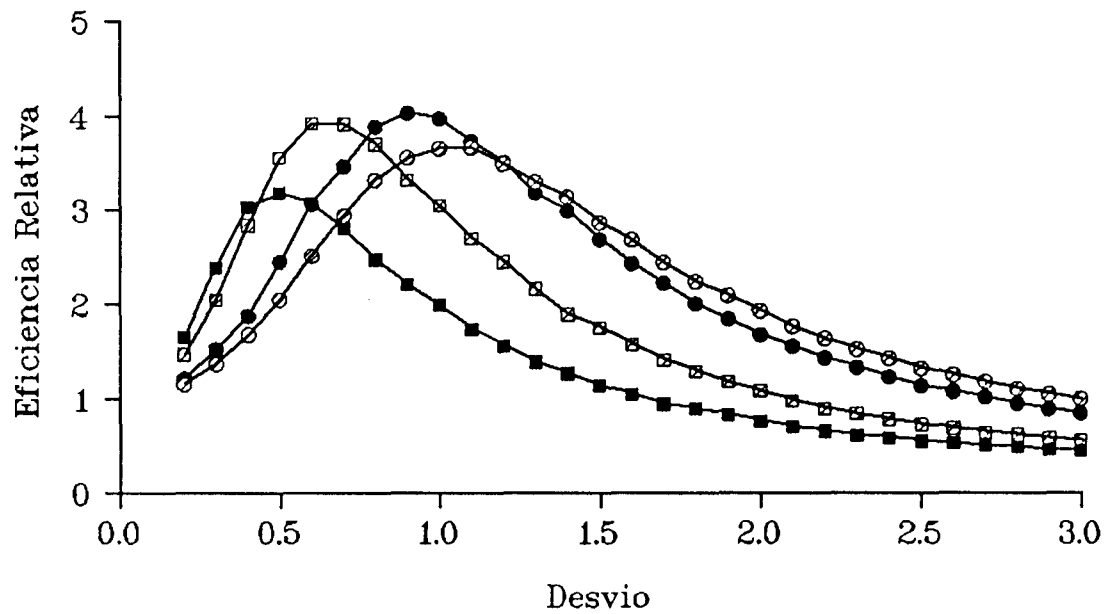
Figura 3.4: Eficiência Relativa para  $m = 5$  segundo os delineamentos amostrais propostos.

Tabela 3.11:  $E(N_2)$  para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 6$ .

$\delta\sqrt{n}$	Shewhart	$(n_p, n_g)$			
		(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,0	370,37	375,86	372,23	367,18	372,73
0,2	308,43	265,35	252,10	208,38	185,45
0,3	253,14	183,61	165,24	123,54	105,78
0,4	200,08	118,64	106,22	70,42	65,83
0,5	155,22	75,46	63,22	43,57	48,71
0,6	119,67	47,56	39,03	30,48	38,89
0,7	92,32	31,30	26,63	23,53	32,89
0,8	71,55	21,53	18,37	19,30	28,87
0,9	55,83	15,67	13,82	16,80	25,23
1,0	43,89	11,98	11,03	14,40	21,97
1,1	34,80	9,48	9,31	12,87	19,96
1,2	27,82	7,96	7,92	11,36	17,72
1,3	22,43	6,79	7,05	10,36	16,08
1,4	18,25	5,81	6,10	9,61	14,29
1,5	14,97	5,22	5,57	8,52	13,05
1,6	12,38	4,61	5,09	7,82	11,75
1,7	10,33	4,23	4,64	7,27	10,86
1,8	8,69	3,88	4,33	6,70	9,63
1,9	7,37	3,52	3,99	6,21	8,80
2,0	6,30	3,26	3,75	5,78	8,17
2,1	5,43	3,07	3,48	5,50	7,60
2,2	4,72	2,87	3,27	5,20	7,06
2,3	4,13	2,70	3,09	4,87	6,67
2,4	3,65	2,55	2,95	4,63	6,13
2,5	3,24	2,44	2,83	4,41	5,78
2,6	2,90	2,31	2,68	4,18	5,42
2,7	2,62	2,21	2,56	4,03	5,15
2,8	2,38	2,14	2,49	3,80	4,81
2,9	2,17	2,06	2,42	3,70	4,62
3,0	2,00	1,99	2,34	3,53	4,36

Tabela 3.12: Eficiência Relativa para os delineamentos amostrais definidos abaixo com  $n_0 = 4$  e  $m = 6$ .

$\delta\sqrt{n}$	$(n_p, n_g)$			
	(2,8)	(1,10)	(1,25)	(1,50)
0,2	1,162	1,223	1,480	1,663
0,3	1,379	1,532	2,049	2,393
0,4	1,686	1,884	2,841	3,039
0,5	2,057	2,455	3,563	3,187
0,6	2,516	3,066	3,926	3,077
0,7	2,950	3,467	3,924	2,807
0,8	3,323	3,895	3,707	2,478
0,9	3,563	4,040	3,323	2,213
1,0	3,664	3,979	3,048	1,998
1,1	3,671	3,738	2,704	1,743
1,2	3,495	3,513	2,449	1,570
1,3	3,303	3,182	2,165	1,395
1,4	3,141	2,992	1,899	1,277
1,5	2,868	2,688	1,757	1,147
1,6	2,685	2,432	1,583	1,054
1,7	2,442	2,226	1,421	0,951
1,8	2,240	2,007	1,297	0,902
1,9	2,094	1,847	1,187	0,838
2,0	1,933	1,680	1,090	0,771
2,1	1,769	1,560	0,987	0,714
2,2	1,645	1,443	0,908	0,669
2,3	1,530	1,337	0,848	0,619
2,4	1,431	1,237	0,788	0,595
2,5	1,328	1,145	0,735	0,561
2,6	1,255	1,082	0,694	0,535
2,7	1,186	1,023	0,650	0,509
2,8	1,112	0,956	0,626	0,495
2,9	1,053	0,897	0,586	0,470
3,0	1,005	0,855	0,567	0,459



- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 50]
- ◻ Delineamento Amostral [np: 1, ng: 25]
- Delineamento Amostral [np: 1, ng: 10]
- Delineamento Amostral [np: 2, ng: 8]

Figura 3.5: Eficiência Relativa para  $m = 6$  segundo os delineamentos amostrais propostos.



Pelos resultados obtidos percebe-se que os maiores ganhos de eficiência ocorrem quando a média do processo se desloca 0,5 a 2,0 desvios padrões em relação à sua média.

De fato, para pequenos desvios na média, entre 0,2 e 0,5, o delineamento que apresentou os melhores resultados foi  $(n_p = 1, n_g = 50)$ . Para desvios superiores este delineamento não obteve os níveis de eficiência que os demais obtiveram.

Com o delineamento  $(n_p = 1, n_g = 25)$  foram obtidos os maiores ganhos quando da ocorrência de desvios entre 0,5 e 1,0. Aliás, a eficiência relativa chegou a ser de 4,42, a maior registrada nas simulações.

Outros resultados interessantes ocorreram quando utilizou-se o delineamento amostral  $(n_p = 1, n_g = 10)$ . Neste caso, os maiores ganhos ocorreram em processos com desvios entre 0,6 e 1,5.

Já com o delineamento amostral  $(n_p = 2, n_g = 8)$  houve ganhos quando os processos apresentavam desvios da ordem de 2,0 a 3,0. Nestas circunstâncias, este delineamento foi superior aos demais.

É interessante notar que a medida que  $m$  aumenta, os processos com os delineamentos amostrais  $(n_p = 2, n_g = 8)$  e  $(n_p = 1, n_g = 10)$  passam a ter maior eficiência quando há ocorrência de pequenos desvios. Para  $m = 6$ , por exemplo, os maiores níveis de eficiência são obtidos para o delineamento  $(n_p = 1, n_g = 10)$ . Já para os delineamentos amostrais  $(n_p = 1, n_g = 25)$  e  $(n_p = 1, n_g = 50)$  o aumento de  $m$  implicou em uma perda de eficiência para qualquer desvio que o processo sofra.

Outros resultados interessantes são obtidos quando avalia-se a variação de  $m$  em cada delineamento amostral estudado.

Verificou-se que a medida que houve aumento da amplitude entre  $n_p$  e  $n_g$ , o aumento de  $m$  implicou em ganhos de eficiência em processos com desvios

cada vez menores da média.

Por exemplo, para o delineamento amostral ( $n_p = 2, n_g = 8$ ) houve ganhos de eficiência a medida que  $m$  cresceu apenas nos processos onde houve desvios na média de até 1,7. A partir de então não houve ganhos e, neste caso, o processo mais eficiente ocorreu quando  $m = 2$ .

Os gráficos a seguir ilustram os resultados obtidos.

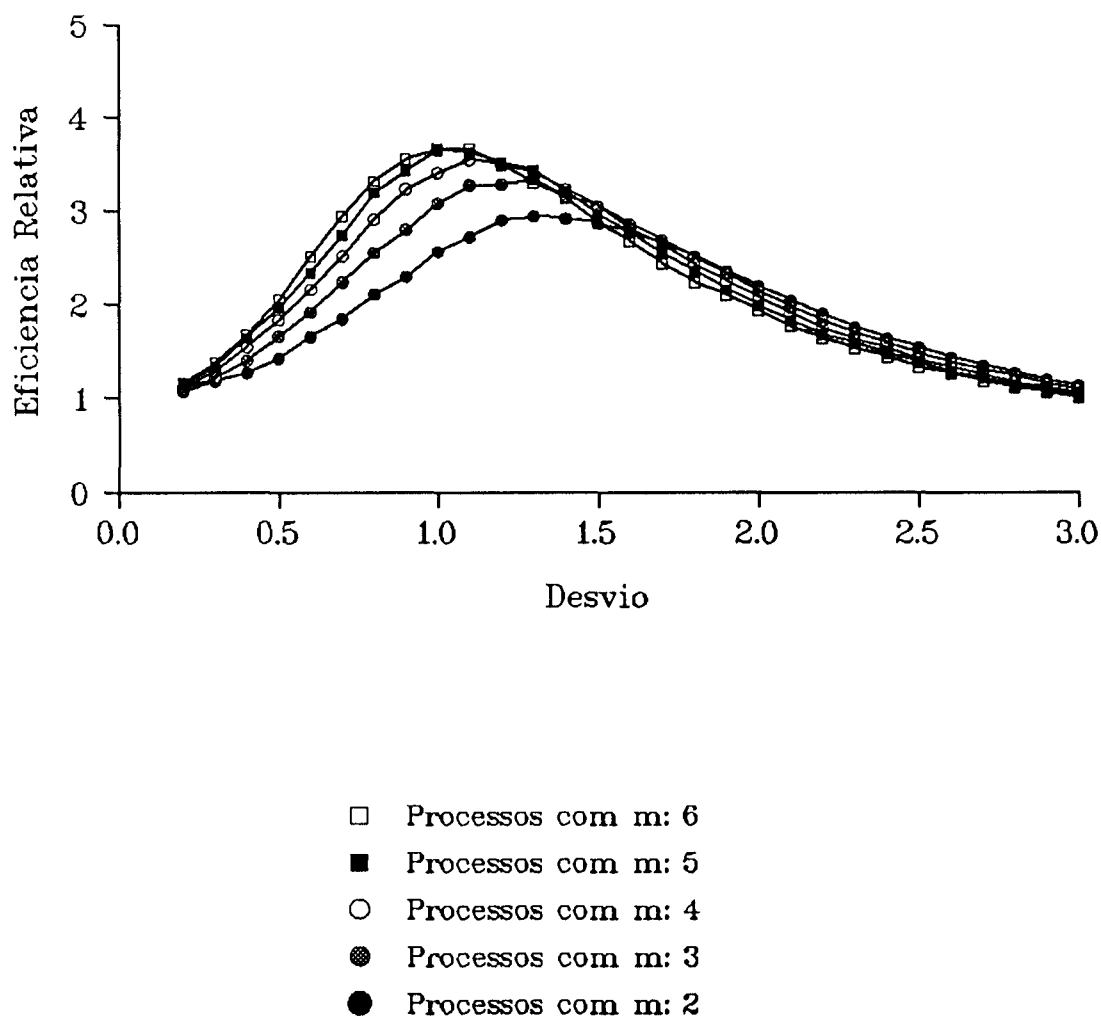
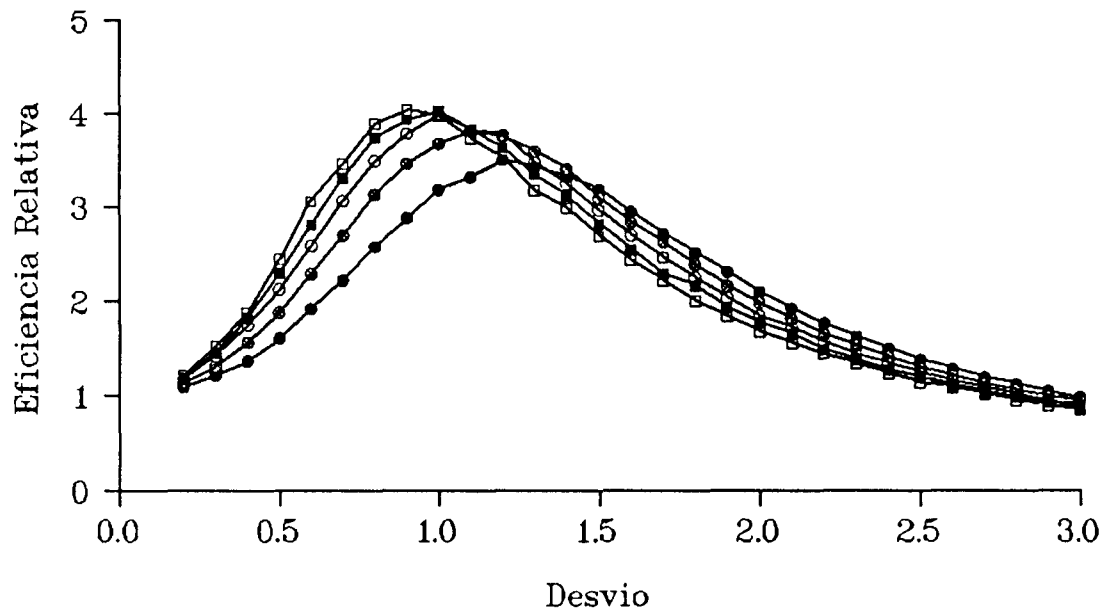
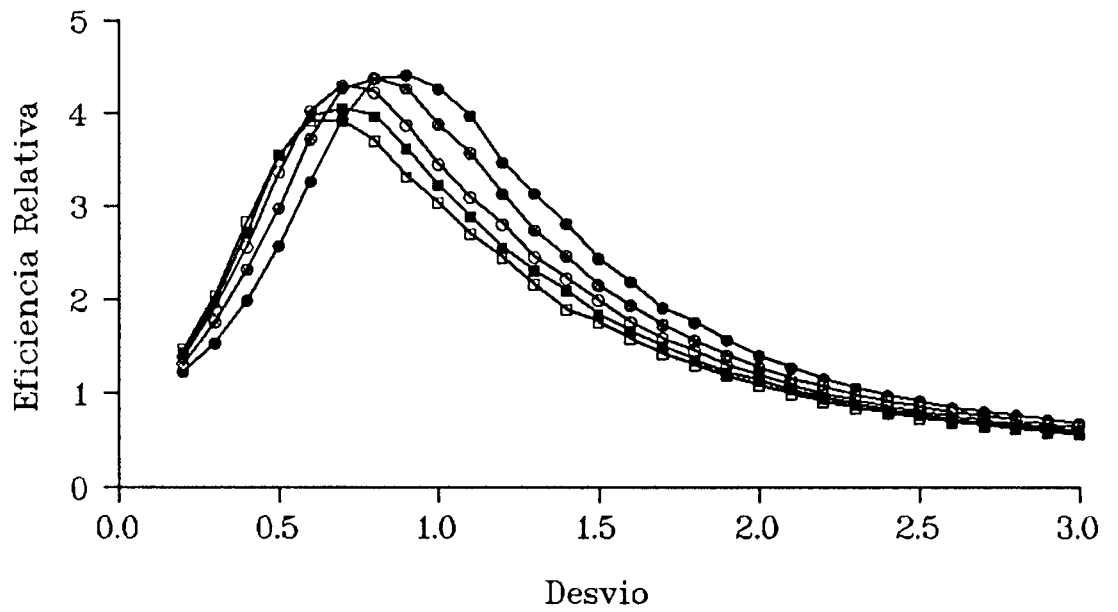


Figura 3.6: Eficiência Relativa segundo o delineamento amostral ( $n_p = 2, n_g = 8$ ) para  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .



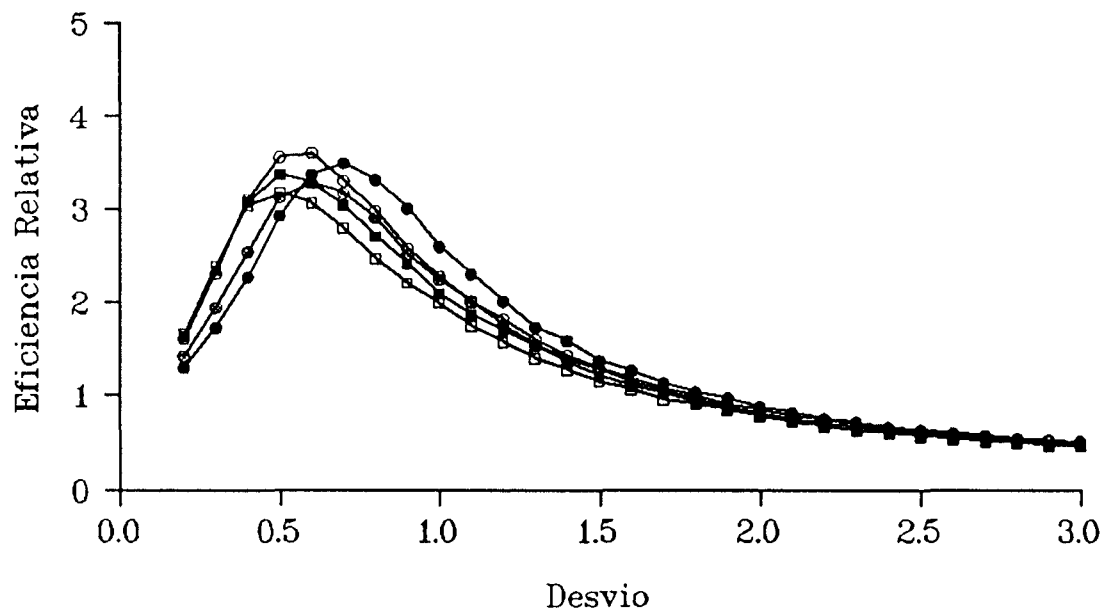
- Processos com m: 6
- Processos com m: 5
- Processos com m: 4
- ⊗ Processos com m: 3
- Processos com m: 2

Figura 3.7: Eficiência Relativa segundo o delineamento amostral ( $n_p = 1, n_g = 10$ ) para  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .



- Processos com  $m$ : 6
- Processos com  $m$ : 5
- Processos com  $m$ : 4
- Processos com  $m$ : 3
- Processos com  $m$ : 2

**Figura 3.8:** Eficiência Relativa segundo o delineamento amostral ( $n_p = 1, n_g = 25$ ) para  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .



- Processos com m: 6
- Processos com m: 5
- Processos com m: 4
- Processos com m: 3
- Processos com m: 2

Figura 3.9: Eficiência Relativa segundo o delineamento amostral ( $n_p = 1, n_g = 50$ ) para  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .

## 4. Conclusões

Diante dos resultados obtidos, verificou-se que todas alterações sugeridas ao esquema clássico de Shewhart, refletiram em ganhos de eficiência pela redução do tempo médio esperado entre ocorrência e detecção de perturbações estáveis na média do processo, sem alterações nos custos amostrais nem na taxa de alarmes falsos.

O Capítulo 1 apresentou algumas pequenas mudanças ao esquema de Shewhart, onde resultados interessantes foram obtidos, dando motivação às propostas apresentadas no Capítulo 2.

No Capítulo 3 foram realizadas simulações Monte Carlo cujos resultados possibilitaram que as seguintes conclusões fossem formuladas.

A simples variação do tamanho amostral no gráfico de controle, onde  $(n_p = 1, n_g = 10, n_o = 4)$ , resultou em valores de eficiência relativa de até 2,71.

Avaliar as eficiências de processos que baseavam-se nas variações dos delineamentos amostrais associadas à utilização das  $m$  -últimas observações foi a proposta deste trabalho e resultou em ganhos significativos.

A possibilidade de avaliar vários cenários motivou a utilização de simulações de processos por repetições Monte Carlo, produzindo resultados interessantíssimos.

O aumento de  $m$  e a variação dos delineamentos amostrais possibilitaram concluir que há ganhos na eficiência relativa para processos que sofreram determinados níveis de perturbações. Por exemplo, para processos com delineamento amostral ( $n_p = 1, n_g = 10, n_0 = 4$ ) obtiveram-se ganhos de eficiência quando  $m$  passou de 2 para 3 apenas para processos com até 1,4 desvios da média. Quando  $m$  passou de 5 para 6 só houve ganhos quando observaram-se processos com até 1,0 desvio padrão da média.

Já para o delineamento amostral ( $n_p = 1, n_g = 50, n_0 = 4$ ) houve ganhos de eficiência quando passou-se a inspecionar não apenas as 2 últimas observações, mas as 3 últimas, apenas para processos que sofreram até 0,5 desvio padrão. Quando  $m$  passa de 5 para 6, os ganhos ocorrem apenas em caso de desvio de até 0,3 na média.

Percebe-se que para delineamentos em que as amplitudes entre  $n_p$  e  $n_g$  são pequenas, o aumento de  $m$  implica em ganhos de eficiência cada vez maiores para razoáveis níveis de desvios da média. À medida que a amplitude entre os tamanhos amostrais aumenta, percebe-se que os ganhos de eficiência são cada vez menores e ocorrem apenas em processos com pequenas perturbações.

De uma forma geral, verificou-se que todas as mudanças sugeridas ao esquema clássico de Shewhart acarretaram em ganhos de eficiência. A possibilidade de ganhos ainda maiores com delineamentos amostrais diferentes dos já apresentados, sugere um estudo para a determinação do melhor delineamento amostral para cada  $m$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXANDRE, J.W.C. (1989), **A Média Móvel Ponderada Exponencialmente como Alternativa a  $\bar{X}$  na Construção de Gráficos de Controle**, Tese de Mestrado, Departamento de Estatística, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP.
- COSTA, A.F.B. (1989), **O Projeto Econômico do Gráfico de Controle  $X$  para Sistemas com Deterioração**, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica, UNICAMP, Campinas, SP.
- DUNCAN, A.J. (1956), The Economic Design of  $\bar{X}$  Charts Used to Maintain Current Control of a Process, **Journal of the American Statistical Association**, No. 51, p. 228-242.
- DUNCAN, A.J. (1971), The Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts When There Is a Multiplicity of Assignable Causes, **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 66, No. 333, p. 107-121.
- DUNCAN, A.J. (1986), **Quality Control and Industrial Statistics**, Homewood, Illinois: Irwin, p. 417-556.
- EWAN, W.D. (1963), When and How to Use Cu-Sum Charts, **Technometrics**, Vol. 5, No. 1, p. 1-22.
- HUNTER, J.S. (1986), The Exponentially Weight Moving Average, **Journal of Quality Technology**, Vol. 18, No. 4, p. 203-210.
- JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1972), **Continuous Univariate Distributions - 1**, Boston: Houghton Mifflin Company, p. 167.
- JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1972), **Continuous Univariate Distributions - 3**, Boston: Houghton Mifflin Company, p. 261.



- LEMOS, I.G. (1991), **Gráficos de Controle para a Média de um Processo com Limites de Advertência e Tamanhos Amostrais Variáveis**, Tese de Mestrado, Departamento de Estatística, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP.
- HOEL, P.G., PORT, S.C. e STONE, C.J. (1972), **Introduction to Stochastic Processes**, Boston: Houghton Mifflin Company.
- MONTGOMERY, D.C. (1980), The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature Survey, **Journal of Quality Technology**, Vol. 12, No. 2, p. 75-87.
- REYNOLDS, M.R., Jr., AMIN, R.W., ARNOLD, J.C. e NACHILAS, J.A. (1988),  $\bar{X}$  Charts with Variable Sampling Intervals, **Technometrics**, Vol. 30, No. 2, p. 181-192.
- ROBERTS, S.W. (1959), Control Charts Tests Based on Geometric Moving Averages, **Technometrics**, **Technometrics**, Vol. 1, No. 3, p. 239-250.
- SHEWHART, W.A. (1931), **Economic Control of Quality of Manufactured Product**, New York: D. Van Nostrand.
- SHEWHART, W.A. (1939), **Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control**, The Graduate School, Department of Agriculture, Washington, DC .
- VANCE, L.C. (1983), A Bibliography of Statistical Quality Control Chart Techniques, 1970-1980, **Journal of Quality Technology**, Vol. 15, No. 2, p. 59-62.
- VERDI, L.A.R. (1991), **Gráficos de Controle com Amostragem a Tempos Variáveis Comandados pelas  $M$  Últimas Observações**, Tese de Mestrado, Departamento de Estatística, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP.

## APÊNDICE

Todas as simulações Monte Carlo foram realizadas em microcomputadores 386 SX e 386 DX, ambos com co-processadores aritméticos. A linguagem de programação utilizada foi o Turbo Pascal Versão 5.0. O programa abaixo é geral e simula um processo onde ( $n_p = 1$ ,  $n_g = 25$   $n_0 = 4$ ) e  $m = 5$ .

```
program Simula;

const
  NP=1;
  NG=25;
  PRNP=0.868895;
  NN=5;
  IMAX=11;

type z2t=array[1..11] of real;

var
  l                               :integer;
  DEL                             :array[1..18] of real;
  NMC,e,i,IMC,N,j                :longint;
  soman,soman2                   :comp;
  d,dnp,dng,y,x,u,K,KA,DELTA     :real;
  nmedio,dpnmedio,
  varnmedio                       :extended;
  z2                              :z2t;
  Saida                           :text;

procedure Normal(var r:real);

  var u1,u2 :real;

  begin
    u1:=Random;
    u2:=Random;
    r:=Sqrt(-2.0*Ln(u1))*Sin((2*Pi)*u2);
  end;
```

```

procedure Qui(var e,i:longint; var z2:z2t; var K,KA,d,y:real);

var x,t :real;
    j :integer;
begin
  Normal(x);
  t:=x+d;
  z2[i]:=t*t;
  for j:=e to i do
    begin
      y:=y+z2[j];
    end;
  if y<=K then
    begin
      if y<=KA then d:=dnp
        else d:=dng;
      end;
    end;
end;

begin
  Randomize;
  Assign(Saida,'Saida.dat');
  Rewrite(Saida);
  Write('NMC:');
  Readln(NMC);
  DEL[1]:=0.15;DEL[2]:=0.25;DEL[3]:=0.35;DEL[4]:=0.45;DEL[5]:=0.55;
  DEL[6]:=0.65;DEL[7]:=0.75;DEL[8]:=0.85;DEL[9]:=0.95;DEL[10]:=1.05;
  DEL[11]:=1.10;DEL[12]:=1.15;DEL[13]:=1.20;DEL[14]:=1.25;DEL[15]:=1.30;
  DEL[16]:=1.35;DEL[17]:=1.40;DEL[18]:=1.45;
  for l:= 1 to 18 do
    begin
      DELTA:=DEL[l];
      dnp:=DELTA*Sqrt(NP);
      dng:=DELTA*Sqrt(NG);
      K:=11.15;
      KA:=4.106484;
      y:=0.0;
      d:=0.0;
      soman:=0;
      soman2:=0;
      IMC:=1;
      repeat
        N:=0;
        e:=1;
        for i:=e to NN do
          begin
            Normal(x);
            z2[i]:=x*x;
          end;
        u:=Random;
        if u<PRNP then d:=dnp
          else d:=dng;
        while y<=K do
          begin
            while (i<IMAX) and (y<=K) do
              begin
                y:=0.0;
                Inc(N);
                Inc(i);
                Qui(e,i,z2,K,KA,d,y);
                Inc(e);
              end;
            if i=IMAX then
              begin
                i:=NN;
                e:=1;
                for j:=1 to NN do
                  z2[j]:=z2[j+NN+1];
                end;
          end;
      until e>NN;
    end;
end;

```

```

    end;
    soman:=soman+N;
    soman2:=soman2+N*N;
    Inc(IMC);
    y:=0.0;
    until IMC=NMC+1;
    nmedio:=soman/NMC;
    varnmedio:=(soman2-NMC*nmedio*nmedio)/(NMC-1);
    dpnmedio:=Sqrt(varnmedio/NMC);
    {Writeln(Saida,'Limite Inferior',' ','Media',' ','Limite Superior');}

    Writeln(Saida,Delta:3:2,nmedio-1.96*dpnmedio:10:2,nmedio:15:2,nmedio+1.96*
                                                    *dpnmedio:14:2);
    end;
    close(Saida);
end.

```