MINIMIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA EM ESCOAMENTOS VISCOSOS INCOMPRESSÍVEIS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Lúcia Resende Pereira Bonfim e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 12 de agosto de 1994

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

MINIMIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA EM ESCOAMENTOS VISCOSOS INCOMPRESSÍVEIS

LÚCIA RESENDE PEREIRA BONFIM

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ LUIZ BOLDRINI

DMA - IMECC - UNICAMP

Aos meus pais,
à meu marido, Valdair e
à minha filha, Laís.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Luiz Boldrini, pela orientação segura e atenção despendida neste tempo em que trabalhamos juntos.

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo que recebi desde o início de meus estudos.

Ao meu marido, Valdair Bonfim, pela dedicação e paciência dispensada ao me ensinar certos assuntos que vieram a fazer parte desta tese.

Aos amigos da Pós-Graduação, pelo companheirismo.

À Fátima, pelo trabalho de datilografia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Deus, por tudo.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudaremos um problema de controle, o qual consiste na minimização de um funcional envolvendo a turbulência dentro de um fluido, baseados no artigo de F. Abergel e E. Casas [1]. Basicamente, o objetivo será o de minimizar a turbulência total através do controle de campos externos.

Primeiramente mostraremos a existência de solução (existência do controle ótimo) para esse problema. Como a relação controle–velocidade é multívoca, a derivação das condições de otimalidade satisfeitas pelo controle ótimo são mais difíceis de obter. Para isto utilizaremos uma técnica que é, em geral, muito útil na resolução numérica de problemas de controle ótimo. Especificamente, o que faremos será introduzir uma família aproximada de problemas mais adequados de controle ótimo; procuraremos, então, mostrar que as soluções desses problemas aproximados convergem para uma solução do problema de controle original; derivaremos depois as condições de otimalidade para esses problemas aproximados, e só então tomaremos limites, para assim obter as condições de otimalidade satisfeitas pelo controle ótimo do nosso problema inicial.

Gostaríamos de enfatizar que, embora tenhamos seguido as idéias contidas no artigo de F. Abergel e E. Casas [1], na verdade usamos uma sugestão apresentada naquele artigo na qual se chama a atenção para o fato de que o funcional J_ε definido por $J_\varepsilon(w,u) = J(y(w,u),u) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_j(w,u) - \nabla w_j|^2\,dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |y_j - y_{0j}|^2\,dx + \frac{1}{2}\|u-u_0\|_U^2$, onde (y_0,u_0) é uma solução fixa do problema de controle original, poderia ser modificado removendo-se os dois últimos termos (maiores explicações serão feitas no decorrer da dissertação). Resultando-se assim no J_ε com o qual realmente trabalhamos. Fizemos isso, porque do ponto de vista prático seria um tanto estranho partirmos do fato de que (y_0,u_0) já seja uma solução, pois o que queremos na verdade é realmente obtê-la. Da maneira como fizemos, mostramos que as soluções dos problemas aproximados têm limite, e só então mostramos que este limite é uma solução do problema de controle original.

A partir de agora, faremos uma breve descrição do que foi feito em cada capítulo que se segue.

No primeiro capítulo, procuramos relacionar apenas os principais resultados básicos que foram utilizados na dissertação. Estes envolvem resultados de Análise Funcional, e em particular de Análise Convexa.

Algumas propriedades de espaços de Hilbert estão relatadas na Seção 1, desse capítulo.

Já na Seção 2, procuramos colocar as definições de convergência forte e fraca, além de alguns resultados; entre eles um resultado importante sobre conjuntos limitados em espaços de Banach reflexivo.

Na Seção 3, demos destaque aos resultados de Análise Convexa, principalmente àqueles que envolvem funcionais convexos que são fracamente semicontínuo inferiormente.

Para a Seção 4, damos alguns rudimentos de Espaços de Sobolev, incluindo as definições dos espaços $\mathcal{Y}, Y$ e Y_0 a serem utilizados no decorrer do trabalho, bem como enunciamos um Teorema de Imersão de Sobolev.

Reservamos o Capítulo 2 para fazermos um estudo preliminar da existência e unicidade de soluções para as equações de Navier-Stokes estacionárias que aparecem em nosso problema.

Iniciamos o Capítulo 3 com uma pequena introdução sobre o nosso problema de controle propriamente dito. Depois, na Seção 2 desse capítulo, mostramos um resultado sobre existência de solução para o problema de controle ótimo. Na Seção 3, apresentamos um teorema que fornece as chamadas condições de otimalidade para o problema de controle. Com a finalidade de prová-lo (o que foi feito na Seção 6) reservamos as demais seções para introduzir os problemas aproximados, obter as condições de otimalidade para esses problemas e assim, tomarmos os limites.

Finalmente, com respeito à questão de referências a resultados, adotaremos a numeração das seções da seguinte forma: o primeiro número indicará o capítulo em que se encontra a seção, o segundo número indicará a posição da seção no capítulo. Mais ainda, quando se tratar de numerar fórmulas, ou algumas definições, ou teoremas, aparecerá a mais um terceiro número, o qual indicará o lugar que eles ocupam na seção de um capítulo. Como exemplo, a primeira fórmula que aparecer na segunda seção do terceiro capítulo será indicada com a numeração (3.2.1).

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Nesse capítulo apresentaremos alguns resultados básicos de Análise Funcional, incluindo também os de Análise Convexa. Para o leitor interessado nas demonstrações de tais resultados, sugerimos ver [2], [3] e [4].

1.1 PROPRIEDADES DE ESPAÇOS DE HILBERT

Consideraremos H um espaço de Hilbert com produto escalar $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$:

TEOREMA DE RIESZ: Dado $f \in H'$ (dual topológico) existe um único $u_f \in H$ tal que $< f, v >= (u_f, v)$, $\forall v \in H$.

DEFINIÇÃO: Sejam E e F, espaços vetoriais normados e seja $A : D(A) \subset E \to F$ linear com $\overline{D(A)} = E$.

Definimos $A^* : D(A^*) \subset F' \to E', A^*v = v^*$, onde, $D(A^*) = \{v \in F'; \exists v^* \in E'$, tal que, $< v, Au >=< v^*, u >$, $\forall u \in D(A)\}$.

A^* é dito o *dual de A*. Portanto, $< v, Au >=< A^*v, u >$, $\forall u \in D(A), v \in D(A^*)$.

Agora, se $A : D(A) \subset H \to H$ linear, com $\overline{D(A)} = H$, então A^* é também chamado de *adjunto de A*.

LEMA 1.1.1 (*Lax-Milgram*): Seja $a : H \times H \to I\!R$, uma forma bilinear contínua e coerciva, *i.e.* existe $\alpha > 0$, tal que, $a(v, v) \geq \alpha.|v|^2$, $\forall v \in H$. Dado $f \in H'$, então existe um único $u \in H$, tal que, $a(u, v) =< f, v >$, $\forall v \in H$.

Além disso, $|u| \leq \dfrac{1}{\alpha}|f|_{H'}$.

1.2 CONVERGÊNCIA FORTE E FRACA

Consideremos um espaço de Banach X: dizemos que $\{u_n\} \subset X$ converge *fortemente* a $u \in X(u_n \to u$ em $X)$ se $\{u_n\}$ converge a u na norma de X, *i.e.*, $\|u_n - u\|_X \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Agora, define-se a topologia da *convergência fraca*, em X, como aquela para a qual $u_n \in X \rightharpoonup u \in X$, se e só se, para toda $f \in X'$ (dual topológico), temos que, $< f, u_n > \to < f, u >$, quando $n \to +\infty$.

Enunciaremos agora dois resultados fundamentais, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3], páginas 44 e 52:

PROPOSIÇÃO 1.2.1: Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo, se e somente se, $B_X = \{x \in X; \|x\| \leq R\}$ é compacta na topologia fraca.

PROPOSIÇÃO 1.2.2: Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma sequência em X, tal que, $x_n \rightharpoonup x$ e lim sup $\|x_n\| \leq \|x\|$. Então, $x_n \to x$.

1.3 RESULTADOS DE ANÁLISE CONVEXA

DEFINIÇÃO: Um subconjunto K de um espaço vetorial real X é dito *convexo* se para quaisquer pontos a e b de K o segmento $[a, b]$ está contido em K.

$$[a, b] \text{ é definido por : } x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1], x = t\ a + (1 - t)b$$

FUNÇÕES CONVEXAS EM ESPAÇOS VETORIAIS

Se $K \subset X$ é convexo, dizemos que $\varphi : K \to I\!R$ é *convexa* se $\forall a, b \in K, t \in [0, 1]$: $\varphi(ta + (1 - t)b) \leq t\varphi(a) + (1 - t)\varphi(b)$.

Se o domínio de φ não for o espaço inteiro, poremos $\varphi(x) = +\infty$ nos pontos em que φ não está definida; a nova φ será convexa se e só se a antiga for. Por isso, em nosso caso, uma função convexa será considerada sempre definida no espaço inteiro e tomará valores em $]-\infty, \infty]$ (salvo menção contrária).

Para as demonstrações dos resultados a seguir, o leitor poderá consultar [4], nas páginas 158, 66, 82 e 83.

PROPOSIÇÃO 1.3.1: Se X é um espaço vetorial normado e $K \subset X$ é convexo e fechado, então K é fracamente fechado.

DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço topológico e $f : E \to]-\infty, \infty]$ uma função. Dizemos que f é *semicontínua inferiormente* (*s.c.i*) se

$$f^{-1}(]a, \infty]) \text{ é aberto, } \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que f é *sequencialmente semicontínua inferiormente* se $x_n \to x \Rightarrow f(x) \leq \liminf f(x_n)$.

PROPOSIÇÃO: Se f é semicontínua inferiormente, então, f é sequencialmente semicontínua inferiormente.

PROPOSIÇÃO 1.3.2: Sejam X um espaço vetorial normado e $\varphi : X \to] - \infty, \infty]$ convexa. Então φ é *s.c.i* na norma de X, se e só se, φ é fracamente *s.c.i*.

Observação: Em virtude dessa proposição, será possível obtermos funções convexas fracamente *s.c.i*, para isso:

i) Considera-se uma função $\varphi : K \to \mathbb{R}$ convexa e contínua na norma de X ($K \subset X$, convexo).

ii) Verifica-se se, dada uma sequência qualquer (x_n) em K, $x_n \to x \notin K \Rightarrow \varphi(x_n) \to \infty$.

iii) Redefine-se $\varphi : X \to] - \infty, \infty]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & se\ x \in K \\ \infty, & se\ x \notin K \end{cases}$$

Note-se que ii) equivale a verificar se o gráfico de φ é fechado (o que vale sempre que K for fechado).

PROPOSIÇÃO 1.3.3: Se $K \subset X$ é convexo e $J : K \to \mathbb{R}$ é G-diferenciável sobre K, então todo ponto de mínimo de J sobre K satisfaz à inequação $< J'(u), v - u > \geq 0, \ \forall v \in K$.

PROPOSIÇÃO 1.3.4: Se $\varphi : K \to \mathbb{R}$ é convexa e G-diferenciável, $u \in K$ é ponto de mínimo de φ, se e só se,

$$< \varphi'(u), v - u > \geq 0 \ \forall v \in K.$$

1.4 RUDIMENTOS DE ESPAÇOS DE SOBOLEV

Dados $m \in I\!N$; $1 \leq p \leq +\infty; \Omega \subset I\!R^n$ um domínio aberto, denotamos o espaço de Sobolev:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{y \in L^p(\Omega); D^\alpha y \in L^p(\Omega); |\alpha| \leq m\}$$

(entende-se aqui, $D^\alpha y$ como sendo a derivada no sentido de distribuição).

Introduzimos a seguinte norma em $W^{m,p}(\Omega)$, o que o torna um espaço de Banach:

$$\begin{aligned} \|y\|_{m,p} &= \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha y\|^p_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}} \ ; \ 1 \leq p < \infty \ \text{ e}, \\ \|y\|_{m,\infty} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha y\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Definem-se também as seminormas:

$$\begin{aligned} |y|_{m,p} &= \Big(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha y\|^p_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}} \ ; \ 1 \leq p < \infty \\ |y|_{m,\infty} &= \max_{|\alpha| = m} \|D^\alpha y\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Em nosso caso, trabalharemos com $p = 2$ e $m = 1$ e neste caso denotaremos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Ele é espaço de Hilbert com o produto interno

$$\forall y, z \in H^1(\Omega) : < y, z >_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha y; D^\alpha z)_{L^2(\Omega)}.$$

Consideraremos também os seguintes espaços
$\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H^1_0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$,

$(H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$, o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Valem então os seguintes resultados:
PROPOSIÇÃO: Se Ω tem fronteira Lipschitz:

$$\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{W^{m,p}} = W^{m,p}(\Omega) \text{ , se } 1 \leq p < +\infty.$$

Com base no resultado anterior, estende-se o conceito de *"restrição da função à fronteira"*, para funções de $H^1(\Omega)$ (também chamada de traço da função).

A idéia é a seguinte: define-se a aplicação linear

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ y &\longmapsto \gamma_0(y) = y\Big|_\Gamma \end{aligned}$$

e prova-se que γ_0 é contínua, ou seja, $\forall y \in D(\overline{\Omega}) \Rightarrow \|\gamma_0(y)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}(\Omega)\|y\|_{H^1(\Omega)}$.

Sabemos que uma aplicação linear contínua, na verdade, será uniformemente contínua e, como $D(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$, segue-se que existe uma única extensão de γ_0 (também denotada por γ_0), contínua $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, dita aplicação traço tal que $\forall y \in H^1(\Omega) : \|\gamma_0(y)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}\|y\|_{H^1(\Omega)}$.

Resultados importantes associados a γ_0 estão na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO:

i) $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$;

ii) O espaço imagem de γ_0 é um subespaço próprio e denso de $L^2(\Gamma)$, chamado $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ y &\longmapsto \gamma_0(y) = g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

para $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf\limits_{\substack{y \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 y = g}} \|y\|_{H^1(\Omega)}$

Serão também importantes nesta dissertação os seguintes resultados:

DESIGUALDADE DE POINCARÉ

Seja Ω, aberto limitado. Então, existe uma constante $\mathcal{C}$ (que depende de Ω), tal que, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{C}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$; $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

TEOREMA DE IMERSÃO DE SOBOLEV:

Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq 1$ e seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$.

Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ Lipschitz, então teremos as seguintes inclusões algébricas e topológicas:

$$W^{m,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega), & \text{desde que } \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{q} > 0 \\[2ex] L^q_{loc}(\Omega), & \forall q, \text{ com } 1 \leq q < \infty, \\[1ex] & \text{desde que } \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0 \\[2ex] C^0(\overline{\Omega}), & \text{desde que } \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0 \end{cases}$$

Mais ainda, se Ω é limitado, a imersão canônica de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{q_1}(\Omega)$ é compacta, $\forall q_1 \in \mathbb{R}$ que satisfaz: $1 \leq q_1 < q$, sempre que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} > 0$ ou $1 \leq q_1 < \infty$, quando $p \geq n$.

Em nosso caso, $n = 3$:

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (imersão algébrica e topológica).

Para Ω, limitado:

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q$, tal que, $1 \leq q < 6$, com imersão compacta, isto é, a aplicação $\begin{aligned} i : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^q(\Omega) \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$ é compacta.

O teorema acima será muito utilizado em nosso trabalho; sua demonstração pode ser encontrada em [2], página 99.

Frequentemente, trabalharemos com os espaços produto:

$(D(\Omega))^3, (L^2(\Omega))^3, (H^1(\Omega))^3, (H_0^1(\Omega))^3, (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$ e $(H^{-1}(\Omega))^3 = ((H_0^1(\Omega))')^3 = ((H_0^1(\Omega))^3)'$.

Excetuando-se $(D(\Omega))^3$, os demais espaços estarão munidos da norma produto ou uma norma equivalente; como exemplo temos: $\|y\|_{(L^2(\Omega))^3} = \left(\sum_{j=1}^{3} \|y_j\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$, onde $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$.

Agora, definiremos os seguintes espaços:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y} &= \{y \in (D(\Omega))^3 : div\ y = 0\}, \\
Y &= \{y \in (H^1(\Omega))^3 : div\ y = 0\}, \\
Y_0 &= \{y \in (H_0^1(\Omega))^3 : div\ y = 0\}.
\end{aligned}$$

Pode-se provar que $Y_0 = \overline{\mathcal{Y}}^{(H_0^1(\Omega))^3}$ (Temam [5]).

Estes espaços de funções são os espaços com os quais trabalharemos nesta dissertação.

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES ESTACIONÁRIO

2.1 INTRODUÇÃO

Suponhamos que estamos diante da situação de um escoamento estacionário de um fluido viscoso, incompressível dentro de um domínio físico Ω (um vaso, por exemplo), mantido em movimento devido à uma força externa f ou pelo movimento do vaso Ω que contém o fluido. Em nosso caso, Ω é um conjunto aberto limitado de $I\!R^3$, com fronteira Γ, Lipschitz, e denotaremos por $n(x)$, o vetor normal unitário exterior à Γ, no ponto x.

As equações de movimento para o fluido considerado se reduzem às chamadas equações de Navier-Stokes estacionárias:

$$(2.1.1) \qquad \begin{cases} -\mu\Delta y + (y.\nabla)y + \nabla\pi = f, \text{ em } \Omega \\ div\ y = 0, \text{ em } \Omega \\ y = \Phi_\Gamma, \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

onde a função $y : \Omega \longrightarrow I\!R^3$ dá a velocidade do fluido em cada ponto;

a função $\pi : \Omega \longrightarrow I\!R$ corresponde à pressão;

$\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade;

$(y.\nabla)y$ é o termo não linear, correspondendo à convecção, sendo sua i-ésima coordenada denotada por $[(y.\nabla)y]_i = \sum_{j=1}^{3} y_j.\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$;

$f \in (H^{-1}(\Omega))^3 = (H_0^1(\Omega))')^3 = (H_0^1(\Omega))^3)'$ é o campo de forças externas;

Φ_Γ é um elemento fixo de $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$, tal que, $\Phi_\Gamma.n = 0$, em Γ. Quando $\Phi_\Gamma \equiv 0$ o vaso Ω está em repouso; quando $\Phi_\Gamma \not\equiv 0$ o vaso está em movimento e Φ_Γ é a sua velocidade em Γ.

A condição $div\ y = 0$, em Ω, significa que o fluido é incompressível.

No presente capítulo, o objetivo será mostrar que o sistema (2.1.1) tem ao menos uma solução e que, sob certas hipóteses, nós teremos até a unicidade.

Para isso, primeiramente pretendemos fazer um estudo da existência e unicidade de soluções para as equações de Navier-Stokes homogêneas (com condições de fronteira homogêneas).

Depois, basta fazermos uma modificação no sistema (2.1.1), de tal forma que ele se torne um problema de Navier-Stokes homogêneo, e estaremos, assim, diante de um caso similar ao já estudado; a demonstração da existência de solução segue-se então de maneira análoga, desde que sejam feitas certas considerações.

2.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES HOMOGÊNEAS

O nosso problema será o seguinte:

Dados: $\mu > 0$; $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$, achar funções $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$ e uma função escalar $\pi(x)$, representando a velocidade e a pressão do fluido, respectivamente, as quais estão definidas em Ω e satisfazem as seguintes equações e condições de fronteira:

$$(2.2.1) \qquad \begin{cases} i)\ -\mu\Delta y + (y.\nabla)y + \nabla\pi = f, \text{ em } \Omega \\ \\ ii)\ div\ y = 0, \text{ em } \Omega \\ \\ iii)\ y = 0, \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

Vamos obter uma formulação variacional fraca do problema (2.2.1). Para isto, multiplicando-se a equação (i) do problema (2.2.1) por uma função arbitrária $z \in \mathcal{Y}$ (recorde-se a definição do espaço $\mathcal{Y}$ no final do capítulo anterior) e integrando-se sobre Ω, vem que:

$$-\mu\int_\Omega \Delta y.z dx + \int_\Omega (y.\nabla)y.z dx + \int_\Omega \nabla\pi.z dx = \int_\Omega f.z dx, \ \forall z \in \mathcal{Y}.$$

Logo,

$$-\mu\int_\Omega(\Delta y_1.z_1+\Delta y_2.z_2+\Delta y_3.z_3)dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3} y_i\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.z_j dx+$$
$$+\int_\Omega \nabla\pi.zdx=\int_\Omega f.zdx,\ \forall z\in\mathcal{Y}.$$

Usando-se da primeira identidade de Green e teorema do divergente, teremos que:

$$\mu\int_\Omega(\nabla y_1.\nabla z_1+\nabla y_2.\nabla z_2+\nabla y_3.\nabla z_3)dx-\mu\int_\Gamma\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}.z_1+\frac{\partial y_2}{\partial n}.z_2+\frac{\partial y_3}{\partial n}z_3\right)d\Gamma$$
$$+\int_\Omega(y.\nabla)y.zdx-\int_\Omega \pi.div\ zdx+\int_\Gamma z.n.\pi d\Gamma=\int_\Omega f.zdx,\ \forall z\in\mathcal{Y}.$$

Daí,

$$\mu\int_\Omega \nabla y.\nabla zdx+\int_\Omega(y.\nabla)y.zdx=\int_\Omega f.zdx;\ \forall z\in\mathcal{Y}.$$

E, por argumentos de densidade, já que $Y_0=\overline{\mathcal{Y}}^{H_0^1(\Omega))^3}$ teremos que:

$$\mu\int_\Omega \nabla y.\nabla zdx+\int_\Omega(y.\nabla)y.zdx=\int_\Omega f.zdx,\ \forall z\in Y_0.$$

Assim, a formulação variacional será:

$$(2.2.2)\qquad\begin{cases}\text{Achar } y\in Y_0,\ \text{tal que,}\\[2ex] \mu a_0(y,z)+b(y,y,z)=\langle f,z\rangle,\ \forall z\in Y_0,\end{cases}$$

onde $a_0(\cdot,\cdot)$ é a forma bilinear dada por

$$\begin{aligned}a_0:(H_0^1(\Omega))^3\times(H_0^1(\Omega))^3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (y,z)&\longmapsto a_0(y,z)=\int_\Omega \nabla y.\nabla zdx=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial x_i}dx\end{aligned}$$

e $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ é a forma trilinear dada por

$$\begin{aligned} b : (H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3 \;&\longrightarrow\; I\!R \\ (y,z,w) \;&\longmapsto\; b(y,z,w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} y_i . \frac{\partial z_j}{\partial x_i} . w_j dx = \int_\Omega (y.\nabla) z . w dx. \end{aligned}$$

Mais adiante, mostraremos que a forma bilinear a_0 é contínua e coerciva e que a forma b é contínua e satisfaz algumas propriedades.

A argumentação anterior mostra que se y e π são "funções suaves" satisfazendo o problema (2.2.1), então, y satisfaz (2.2.2). Reciprocamente, se y satisfaz (2.2.2), precisamos mostrar que, em algum sentido, y satisfaz (2.2.1).

Desde que y encontra-se somente em $(H_0^1(\Omega))^3$, teremos menos regularidade do que antes e dizemos que y satisfaz (2.2.1) em um sentido mais fraco do que no sentido clássico, isto é, em um sentido generalizado.

Como $y \in Y_0$, automaticamente temos que $div\ y = 0$ e $\gamma_0 y = 0$.

Mais, usando o fato de que y satisfaz (2.2.2) teremos:

$$\mu \int_\Omega \nabla y . \nabla z dx + \int_\Omega (y.\nabla) y . z dx = \int_\Omega f . z dx, \ \forall z \in Y_0.$$

Seja agora $z \in \mathcal{Y} \subset Y_0$ e, lembrando que $\mathcal{Y} \subset (D(\Omega))^3$, usando a notação de atuação de uma distribuição sobre funções de $(D(\Omega))^3$, podemos escrever a equação acima como $+\mu\langle \nabla y, \nabla z\rangle + \langle (y.\nabla)y, z\rangle = \langle f, z\rangle$.

Observamos ainda que $y_i \dfrac{\partial y}{\partial x_i} \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, pois $y_i \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ (teorema de Imersão de Sobolev) e $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.

Portanto, no sentido de distribuições podemos escrever $\langle -\mu\Delta y + \sum_{i=1}^{3} y_i \dfrac{\partial y}{\partial x_i} - f, z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathcal{Y}$.

Observamos que $-\mu\Delta y + \sum_{i=1}^{3} y_i \dfrac{\partial y}{\partial x_i} - f \in (H^{-1}(\Omega))^3$, assim a atuação da distribuição é na verdade a atuação por dualidade de $(H^{-1}(\Omega))^3$ sobre $(H_0^1(\Omega))^3$. Logo, podemos escrever $\langle -\mu\Delta y + \sum_{i=1}^{3} y_i \dfrac{\partial y}{\partial x_i} - f, z\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3} = 0, \ \forall z \in \mathcal{Y}$.

Nesse momento precisaremos dos seguintes resultados (para maiores detalhes, veja Temam [5], página 14).

PROPOSIÇÃO (2.2.1): Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ e $F = \{F_1, F_2, F_3\}; F_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = 1,2,3$. Uma condição necessária e suficiente que $F = \nabla p$, para algum p em $\mathcal{D}'(\Omega)$, é que $\langle F, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathcal{Y}$.

PROPOSIÇÃO (2.2.2): Seja Ω um conjunto aberto limitado Lipschitz de $\mathbb{R}^3$.

i) Se uma distribuição p tem todas derivadas de primeira ordem $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}; 1 \leq i \leq 3$, em $L^2(\Omega)$, então, $p \in L^2(\Omega)$ e $\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \mathbb{C}(\Omega).\|\nabla p\|_{(L^2(\Omega))^3}$.

ii) Se uma distribuição p tem todas suas primeiras derivadas $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq 3$, em $H^{-1}(\Omega)$, então, $p \in L^2(\Omega)$ e $\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \mathbb{C}(\Omega).\|\nabla p\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}$.

Observação: Combinando os resultados das proposições acima, vemos que se $F \in (H^{-1}(\Omega))^3$ e $\langle F, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathcal{Y}$, então, $F = \nabla p$, com $p \in L^2(\Omega)$.

Agora observemos que, em nosso caso,

$$F = -\mu\Delta y + \sum_{i=1}^{3} y_i \frac{\partial y}{\partial x_i} - f \in (H^{-1}(\Omega))^3 \quad \text{e} \quad \langle F, z\rangle = 0,\ \forall z \in \mathcal{Y}.$$

Podemos então concluir que existe uma distribuição $\pi \in L^2(\Omega)$, tal que $-\mu\Delta y + \sum_{i=1}^{3} y_i \dfrac{\partial y}{\partial x_i} - f = -\nabla\pi$, em Ω, no sentido de distribuição.

Assim, y satisfaz (2.2.1), como queríamos mostrar.

2.2.1 – A FORMA BILINEAR a_0:

A forma bilinear a_0 é contínua e coerciva.

De fato,

$$a_0(y,z) = \int_\Omega \nabla y.\nabla z dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.\frac{\partial z_j}{\partial x_i} dx = \sum_{i,j=1}^{3} \left\langle \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \frac{\partial z_j}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)};$$

em consequência da desigualdade de Cauchy-Schwartz, vem que:

$$
\begin{aligned}
a_0(y,z) &\leq \sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)}.\left|\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{3}\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3}\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\|y\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|z\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.
\end{aligned}
$$

Assim, $a_0(y,z) \leq \sum_{i,j=1}^{3}\|y\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|z\|_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq M\|y\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|z\|_{(H_0^1(\Omega))^3}$ e teremos que a_0 é contínua.

E mais,

$$a_0(z,z) = \int_\Omega|\nabla z|^2dx = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right)^2dx = \|z\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}.$$

Assim, $a_0(z,z) \geq \|z\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}$, e portanto, a_0 é coerciva ($\alpha = 1$).

2.2.2 – PROPRIEDADES DA FORMA TRILINEAR b

Com relação à forma trilinear b, as seguintes propriedades podem ser verificadas para todo $(y,z,w) \in Y_0 \times (H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3$:

i) $| b(y,z,w) | \leq \mathcal{C}(\Omega)\|y\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|z\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|w\|_{(H_0^1(\Omega))^3}$;

ii) $b(y,z,w) = -b(y,w,z)$;

iii) $b(y,z,z) = 0$

Para mostrarmos que b está bem definida e é contínua, observamos que para $n \leq 4$, temos que, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (Teorema de Imersão de Sobolev).

Assim,

$$|b(y,z,w)| = \left|\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_i.\frac{\partial z_j}{\partial x_i}.w_jdx\right| \leq \sum_{i,j=1}^{3}\left|\int_\Omega y_i.\frac{\partial z_j}{\partial x_i}.w_jdx\right|;$$

logo,

$$|b(y,z,w)| \leq \sum_{i,j=1}^{3} \|y_i\|_{L^4(\Omega)}.\left\|\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}.\|w_j\|_{L^4(\Omega)};$$

onde usamos a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{\alpha}$.

Portanto,

$$|b(y,z,w)| \leq \mathcal{C}(\Omega,n)\|y\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|z\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.\|w\|_{(H_0^1(\Omega))^3}.$$

e está mostrada a propriedade (i).

Prova de (ii):

$$\begin{aligned} b(y,z,w) &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_i.\frac{\partial z_j}{\partial x_i}.w_j dx = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_i.\frac{\partial}{\partial x_i}(z_j.w_j)dx - \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_i.z_j.\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx = \\ &= -\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}y_i.z_j.w_j dx + \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Gamma z_j.w_j.y_i.n_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_i.\frac{\partial w_j}{\partial x_i}.z_j dx = \\ &= -\int_\Omega \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right).z_j.w_j dx - \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}.z_j dx = -b(y,w,z). \end{aligned}$$

Agora (iii) decorre de (ii), bastando observar que:

$$b(y,z,z) = -b(y,z,z) \Rightarrow 2b(y,z,z) = 0 \Rightarrow b(y,z,z) = 0$$

□

Observação: Posteriormente trabalharemos com as formas bilinear a e trilinear b definidas apenas nos espaços $(H^1(\Omega))^3$, daí, $a_o = a\mid_{(H_0^1(\Omega))^3}$ e as demonstrações da continuidade de a e b podem ser feitas da mesma maneira; mais ainda, a forma trilinear b satisfará as mesmas propriedades desde que consideremos:

$$(y,z,w) \in Y \times (H^1(\Omega))^3 \times (H^1(\Omega))^3, \quad \text{com} \quad y.n = 0, \text{ em } \Gamma.$$

Agora apresentaremos um teorema que mostra a existência de solução para o problema (2.2.2) e, consequentemente, para o problema (2.2.1):

TEOREMA (2.2.3): Seja Ω, um conjunto limitado de $\mathbb{R}^3$ e seja f dada em $(H^{-1}(\Omega))^3$. Então, o problema (2.2.2) tem ao menos uma solução $y \in Y_0$ e existe uma distribuição

$\pi \in L^2(\Omega)$, tal que, y e π satisfazem o problema (2.2.1).

DEMONSTRAÇÃO: Teremos apenas que provar a existência de y; uma vez dada y, a existência de π e a interpretação do problema (2.2.1) já foi feita anteriormente.

A existência de y é obtida construindo-se soluções aproximadas para o problema (2.2.2), utilizando-se do Método Galerkin, e então passando ao limite.

Sendo Y_0 um subespaço de $(H_0^1(\Omega))^3$, o qual é separável, teremos que Y_0 é separável; logo Y_0 admite um conjunto enumerável e denso; neste caso, Y_0 admite uma base de Schauder.

Fixemos uma base de Schauder de Y_0, $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$; e definamos os subespaços de dimensão finita $Y_{0m} = [w_1, \ldots, w_m]$.

Consideremos os seguintes problemas aproximados: achar as soluções $y_m \in Y_{0m}$, portanto, $y_m = \sum_{i=1}^{m} \zeta_{i,m}.w_i$ com $\zeta_{i,m} \in \mathbb{R}$, que satisfazem:

$$\mu a_0(y_m, z) + b(y_m, y_m, z) = < f, z >, \ \forall z \in Y_{0m}. \tag{2.2.3}$$

No momento, estamos diante das seguintes questões:

1ª) Existe $y_m \in Y_{0m}$, tal que satisfaça o problema aproximado (2.2.3)?

2ª) y_m converge para y em algum sentido apropriado?

3ª) y é solução de (2.2.2)?

Para responder à primeira questão, utilizaremos o lema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [5], página 164:

LEMA (2.2.4): Seja X um espaço de Hilbert de dimensão finita com produto escalar $(\cdot, \cdot)$ e norma $|\cdot|$ e, seja P uma aplicação contínua de X sobre si mesmo, tal que, $(P(\zeta), \zeta) > 0$, para $|\zeta| = R > 0$.
Então, existe $\zeta \in X, |\zeta| \leq R$, tal que, $P(\zeta) = 0$.

Agora, definindo-se a aplicação $P_m : Y_{0m} \to Y_{0m}$, contínua, dada por:

$$(P_m(y), w_i) = ((P_m(y), w_i))_{(H_0^1(\Omega))^3} = \mu a_0(y, w_i) + b(y, y, w_i) - < f, w_i >, \ \forall y \in Y_{0m}; i = 1, \ldots, m.$$

Assim, achar a solução y_m do problema aproximado é equivalente a achar a solução de $P_m(y_m) = 0$.

A pergunta agora é: $\exists R > 0$, tal que, $(P_m(y), y) > 0$, $\forall y \in Y_{0m}$ com $\|y\| = R$?

Temos:

$$(P_m(y), y) = \mu a_0(y, y) + b(y, y, y) - < f, y >;$$

pela propriedade (iii) da forma trilinear b; e usando a coercividade de a_0:

$$(P_m(y), y) = \mu a_0(y, y) - < f, y > = \mu \|y\|^2 - < f, y > .$$

Daí,

$$(P_m(y), y) \geq \mu \|y\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} - \|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \|y\|_{H_0^1(\Omega))^3};$$

logo,

$$(P_m(y), y) \geq \|y\| [\mu \|y\| - \|f\|].$$

Isso segue que $(P_m(y), y) > 0$, para $\|y\| = R$; sendo R suficientemente grande; mais precisamente quando $R > \frac{1}{\mu}.\|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}$.

Assim, podemos aplicar o lema (2.2.4) e concluir que existe $y_m \in Y_{0m}$, tal que, $P_m(y_m) = 0$.

Temos agora uma sequência $\{y_m\}$ de soluções aproximadas e é necessário agora saber se elas convergem e se tal limite é solução de (2.2.2).

Tomando $z = y_m \in Y_{0m}$, em (2.2.3), e usando a coercividade de a_0, vem que:

$$\|y_m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} = a_0(y_m, y_m) = \frac{1}{\mu} < f, y_m > - \frac{1}{\mu} b(y_m, y_m, y_m).$$

Pela propriedade (iii) da forma b:

$$\|y_m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} = \frac{1}{\mu} < f, y_m > \leq \frac{1}{\mu} \|f\|.\|y_m\|.$$

Daí,

$$\|y_m\|_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq \frac{1}{\mu} \|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}.$$

Desde que a sequência y_m está limitada em Y_0, que é um espaço de Hilbert, sabemos que existe $y \in Y_0$ e uma subsequência y_{m_k}, tal que,

$$(2.2.4) \qquad y_{m_k} \rightharpoonup y, \quad \text{em } Y_0, \text{ quando } k \to \infty.$$

O teorema de Imersão de Sobolev, mostra que a injeção de Y_0 sobre $(L^2(\Omega))^3$ é compacta, donde poderemos concluir que ao longo de outra subsequência (que para simplificar a notação ainda chamamos $\{y_{m_k}\}$) teremos:

$$(2.2.5) \qquad y_{m_k} \longrightarrow y, \quad \text{em } (L^2(\Omega))^3 \text{ quando } k \to \infty.$$

Agora, para passarmos ao limite em (2.2.3) precisaremos do seguinte lema: (veja demonstração em [5], página 165).

LEMA (2.2.5): Se y_e converge à y, em Y_0 fracamente e em $(L^2(\Omega))^3$ fortemente, então,

$$b(y_e, y_e, z) \longrightarrow b(y, y, z), \ \forall z \in \mathcal{Y}.$$

Observemos agora que $Y_{01} \subset Y_{02} \subset \ldots$.

Fixemos $z \in Y_{0m}$ e tomemos $m_k > m$:
daí, $\mu a_0(y_{m_k}, z) + b(y_{m_k}, y_{m_k}, z) =< f, z >$, vale $\forall m$;
fazendo $k \to \infty$, usando (2.2.4), (2.2.5) e lema (2.2.5):

$$\mu a_0(y, z) + b(y, y, z) =< f, z >, \text{ vale } \forall m$$

e assim,

$$\mu a_0(y, z) + b(y, y, z) =< f, z > \ \forall z \in \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_{0m}.$$

Portanto,

$$\mu a_0(y, z) + b(y, y, z) =< f, z >, \ \forall z \in Y_0,$$

e teremos que y é uma solução do problema (2.2.2).

Unicidade: Para a unicidade nós temos o seguinte resultado:

TEOREMA (2.2.6): Se $n \leq 4$ e se μ é suficientemente grande ou f é suficientemente pequeno, tal que,

$$(2.2.6) \qquad \mu^2 > c(n).\|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}$$

então, existe uma única solução y de (2.2.2).

DEMONSTRAÇÃO: Tomando-se $z = y \in Y_0$, em (2.2.2), e usando a coercividade de a_0, vem que:

$$\|y\|^2 = a_0(y,y) = \frac{1}{\mu}.< f, y > -\frac{1}{\mu}b(y,y,y);$$

Pela propriedade (iii) da forma trilinear b temos então $\|y\|^2 \leq \frac{1}{\mu}\|f\|.\|y\|$, e daí, a solução y de (2.2.2) satisfaz

$$\|y\| \leq \frac{1}{\mu}\|f\|. \tag{2.2.7}$$

Agora, sejam y_1 e y_2, duas soluções diferentes de (2.2.2) e seja $y = y_1 - y_2$.

Assim, $\mu a_0(y_1,z) + b(y_1,y_1,z) =< f,z >$ e $\mu a_0(y_2,z) + b(y_2,y_2,z) =< f,z >$.

Subtraindo-se estas duas igualdades, obtemos $\mu a_0(y,z) + b(y,y_2,z) + b(y_1,y,z) = 0$, $\forall z \in Y_0$.

Agora, tomando-se $z = y \in Y_0$, tem-se que $\mu a_0(y,y) + b(y,y_2,y) + b(y_1,y,y) = 0$, e pela propriedade (iii) da forma b e coercividade de a_0, obteremos:

$$\|y\|^2 = a_0(y,y) = -\frac{1}{\mu}b(y,y_2,y) \leq \frac{1}{\mu} \mid b(y,y_2,y) \mid .$$

Pela propriedade (i) da forma b, temos

$$\|y\|^2 \leq \frac{1}{\mu}\mathcal{C}(n).\|y\|^2.\|y_2\|,$$

e como de (2.2.7) sabemos que $\|y_2\| \leq \frac{1}{\mu}\|f\|$, concluímos que

$$\|y\|^2 \leq \frac{1}{\mu}\mathcal{C}(n).\|y\|^2\left(\frac{1}{\mu}\|f\|\right) = \frac{1}{\mu^2}\mathcal{C}(n).\|f\|.\|y\|^2.$$

Daí, $\left[1 - \mathcal{C}\frac{(n)}{\mu^2}\|f\|\right].\|y\|^2 \leq 0$, e logo, $\left[\frac{\mu^2 - \mathcal{C}(n).\|f\|}{\mu^2}\right].\|y\|^2 \leq 0$.

Assim devido à (2.2.6), devemos ter $\|y\|^2 \leq 0$, mas, $\|y\|^2 \geq 0$, logo, $\|y\|^2 = 0$ e, portanto, $y = 0$, donde $y_1 = y_2$ $\square$

Observação: A solução do problema (2.2.2) não será provavelmente única se (2.2.6) não for satisfeita.

Finalmente mostraremos que o sistema (2.1.1) tem ao menos uma solução.

2.3 ESTUDO DO PROBLEMA DE NAVIER-STOKES NÃO HOMOGÊNEO

Dados $\mu > 0$, $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$, e $\Phi_\Gamma \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$ tal que $\Phi_\Gamma.n = 0$ em Γ, achar y e π tal que:

$$(2.3.1) \qquad \begin{cases} i) \ -\mu\Delta y + \sum_{i=1}^{3} y_i \dfrac{\partial y}{\partial x_i} + \nabla\pi = f, \quad \text{em} \ \ \Omega. \\ ii) \ div \ y = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega. \\ iii) \ y = \Phi_\Gamma, \quad \text{em} \ \ \Gamma. \end{cases}$$

TEOREMA (2.3.1): Sob as hipóteses acima, existe ao menos um $y \in (H^1(\Omega))^3$ e uma distribuição π, em Ω, satisfazendo (2.3.1).

DEMONSTRAÇÃO: Aqui, antes de pensarmos numa formulação variacional para o problema, precisamos fazer uma mudança de variável dependente para tornar as condições de fronteira homogênea e de tal forma que a nova variável continue tendo divergente nulo. Essa nova variável é obtida subtraindo-se de y uma função Φ adequada. Mas como deve ser essa Φ?

Observemos que, devido à nossas hipóteses, temos que $\int_\Gamma \Phi_\Gamma.nd\Gamma = 0$ e assim, podemos usar um resultado que nos diz que ao resolvermos o seguinte problema de Stokes (uma forma linearizada das equações de Navier-Stokes):

$$\begin{cases} -\mu\Delta\Phi + \nabla p = f, \quad \text{em} \ \ \Omega \\ div \ \Phi = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega \\ \gamma_0\Phi = \Phi_\Gamma; i.e., \Phi = \Phi_\Gamma, \quad \text{em} \ \ \Gamma \end{cases}$$

achamos uma $\Phi \in (H^1(\Omega))^3$ ("extensão de Φ_Γ"), tal que, $\Phi = \Phi_\Gamma$, em Γ e $div \ \Phi = 0$ e também uma função $p \in L^2(\Omega)$. (Para maiores detalhes, veja Temam [5], página 31).

Agora, tomando-se a nova variável $\hat{y} = y - \Phi \in Y_0$, em (2.3.1) (i), obteremos:

$$-\mu\Delta(\hat{y}+\Phi)+\sum_{i=1}^{3}(\hat{y}_i+\Phi_i)\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{y}+\Phi)+\nabla\pi=f,\quad \text{em } \Omega.$$

Logo,

$$-\mu\Delta\hat{y}+\sum_{i=1}^{3}\hat{y}_i\frac{\partial\hat{y}}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{3}\hat{y}_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{3}\Phi_i\frac{\partial\hat{y}}{\partial x_i}+\nabla\pi=\hat{f};$$

onde,

$$\hat{f}=\left(f+\mu\Delta\Phi-\sum_{i=1}^{3}\Phi_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\in(H^{-1}(\Omega))^3.$$

Assim, após esta modificação do sistema (2.3.1) estamos diante de um problema do tipo Navier-Stokes com condições de fronteira homogêneas:

$$(2.3.2)\qquad \begin{cases} \text{Achar } \hat{y}\in(H^1(\Omega))^3 \text{ e } \pi\in L^2(\Omega), \text{ tal que :} \\ -\mu\Delta\hat{y}+(\hat{y}.\nabla)\hat{y}+(\hat{y}.\nabla)\Phi+(\Phi.\nabla)\hat{y}+\nabla\pi=\hat{f} \\ div\ \hat{y}=0, \quad \text{em } \Omega \\ \hat{y}=0, \quad \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente, basta multiplicarmos a equação (2.3.2) por uma função $z\in\mathcal{Y}$ e integrarmos sobre Ω para obter a sua formulação variacional:

$$(2.3.3)\qquad \begin{cases} \text{Achar } \hat{y}\in Y_0, \text{ tal que :} \\ \mu a_0(\hat{y},z)+b(\hat{y},\hat{y},z)+b(\hat{y},\Phi,z)+b(\Phi,\hat{y},z)=\langle\hat{f},z\rangle,\ \forall z\in Y_0. \end{cases}$$

A demonstração da existência de um $\hat{y}\in Y_0$ satisfazendo (2.3.3), poderá ser feita exatamente como no Teorema (2.2.3), desde que certas condições estejam satisfeitas. Para isso, observemos que (2.3.3) pode ser escrito como:

$$c_1(\hat{y},z)+b(\hat{y},\hat{y},z)=\langle\hat{f},z\rangle,\ \forall z\in Y_0;$$

onde,

$$c_1(\hat{y},z)=\mu a_0(\hat{y},z)+b(\hat{y},\Phi,z)+b(\Phi,\hat{y},z)$$

é uma forma bilinear contínua e coerciva. Facilmente podemos verificar a bilinearidade e continuidade de c_1.

Agora, $c_1(z,z) = \mu a_0(z,z) + b(z,\Phi,z) + b(\Phi,z,z)$;
usando a propriedade (iii) da forma b e o fato de que a_0 é coerciva, vem que:

$$c_1(z,z) = \mu.\|z\|^2 + b(z,\Phi,z).$$

Assim, desde que exista algum $\beta > 0$, tal que,

$$\mu\|z\|^2 + b(z,\Phi,z) \geq \beta\|z\|^2,\ \forall z \in Y_0 \tag{2.3.4}$$

obteremos que c_1 é coerciva.

Daí, analogamente à demonstração do Teorema (2.2.3), se ao definirmos a aplicação P_m como sendo:

$$\begin{aligned}(P_m(\hat{y}),z) &= \mu a_0(\hat{y},z) + b(\hat{y},\hat{y},z) + b(\hat{y},\Phi,z) + b(\Phi,\hat{y},z) - \\ &- \langle\hat{f},z\rangle,\ \forall \hat{y},z \in Y_{0m},\end{aligned}$$

precisaremos mostrar que $(P_m(z),z) > 0,\ \forall z \in Y_{0m}$, com $\|z\| = R$ e R adequado.

Para isso, façamos:

$$(P_m(z),z) = \mu a_0(z,z) + b(z,z,z) + b(z,\Phi,z) + b(\Phi,z,z) - \langle\hat{f},z\rangle;$$

pela propriedade (iii) da forma b, o segundo membro se torna

$$= \mu a_0(z,z) + b(z,\Phi,z) - \langle\hat{f},z\rangle = c_1(z,z) - \langle\hat{f},z\rangle.$$

Usando a coercividade de c_1, ou melhor, que a condição (2.3.4) esteja satisfeita, teremos que,

$$(P_m(z),z) \geq \beta\|z\|^2 - \langle\hat{f},z\rangle \geq \beta\|z\|^2 - \|\hat{f}\|.\|z\|,$$

donde segue-se $(P_m(z),z) > 0$, para $\|z\| = R$, com $R > \dfrac{1}{\beta}\|\hat{f}\|$.

E o restante da demonstração segue-se de maneira análoga; usando-se do lema (2.2.4) e mostrando-se, enfim, a existência de $\hat{y}_m \in Y_{0m}$.

Agora, a condição (2.3.4) poderá certamente ser satisfeita se pudermos achar $\Phi \in Y$, com $\Phi = \Phi_\Gamma$ em Γ e satisfaça:

$$| b(z, \Phi, z) | \leq \frac{\mu}{2}\|z\|^2, \ \forall z \in Y_0. \tag{2.3.5}$$

Com a finalidade de provar essa desigualdade, usaremos do seguinte lema:

LEMA (2.3.2): Para todo $\gamma > 0$, existe algum elemento $\Phi = \Phi(\gamma) \in Y$, tal que, $\Phi = \Phi_\Gamma$, em Γ e satisfaz

$$| b(y, \Phi, z) | \leq \gamma.\|y\|.\|z\|, \ \forall y, z \in Y_0.$$

De fato, escolhendo-se $\gamma = \frac{\mu}{2}$ obtém-se a desigualdade (2.3.5).

A demonstração desse lema é técnica e pode ser encontrada em Temam [5], página 174.

CAPÍTULO 3

UM PROBLEMA DE CONTROLE PARA A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

3.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, pretendemos descrever um pouco sobre o problema de controle com que iremos trabalhar. Neste problema participam as equações de Navier-Stokes estacionárias que já estudamos:

$$(3.1.1) \qquad \begin{cases} -\mu\Delta y + (y.\nabla)y + \nabla\pi = f + Bu, \quad \text{em} \ \ \Omega. \\ \\ div\ y = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega. \\ \\ y = \Phi_\Gamma, \quad \text{em} \ \ \Gamma. \end{cases}$$

Aqui, a situação do fluido é a mesma daquela considerada anteriormente, com a diferença que neste sistema aparece um controle $u \in U$, sendo U um espaço de Hilbert, que atua na equação através de uma aplicação $B \in L(U, (H^{-1}(\Omega))^3)$. Este controle poderá agir em todo domínio Ω, ou somente numa parte de Ω, ou até mesmo, numa dada direção do espaço. Todas essas possibilidades podem ser tratadas escolhendo-se um espaço U adequado e a correspondente aplicação linear B.

Como podemos ver, o termo $(f + Bu)$ continua sendo um elemento de $(H^{-1}(\Omega))^3$ e assim, denotando-o por uma $\tilde{f}$, de modo análogo ao que fizemos anteriormente, podemos mostrar que fixados U e B, para cada $u \in U$, êsse sistema (3.1.1) tem ao menos uma solução $(y, \pi) \in (H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$.

Com base nisto, o nosso trabalho se desenvolverá em torno do seguinte problema de controle:

Achar um controle $u \in U$, tal que, se (y, π) é a correspondente solução da equação de Navier-Stokes (3.1.1), então elas minimizam um certo funcional J, o qual envolve a turbulência dentro do fluido.

O detalhamento matemático deste problema será feito na seção seguinte.

3.2 UM RESULTADO DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE

Definiremos o funcional J por:

$$\begin{aligned} J : (H^1(\Omega))^3 \times U &\longrightarrow I\!R \\ (y,u) &\longmapsto J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla \times y \mid^2 dx + \frac{N}{2}\|u\|_U^2; \end{aligned}$$

com $N \geq 0$ e, $\nabla \times y = \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3}, \frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)$ representando a vorticidade do fluido.

Como podemos ver, o termo relevante fisicamente em J é $\frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla \times y \mid^2 dx$, o qual fornece uma estimativa do nível de turbulência dentro do fluido.

Dado K, um subconjunto não vazio, convexo e fechado de U, formularemos matematicamente o problema de controle ótimo como segue:

$$(3.2.1) \qquad \begin{cases} \text{Minimizar } J(y,u) \text{ na classe dos } (y,u) \text{ tais que} \\ \\ (y,u) \in (H^1(\Omega))^3 \times K \text{ e } (y,u) \text{ satisfazendo (3.1.1),} \\ \text{para algum } \pi \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Veremos agora um resultado de existência de solução do problema (3.2.1).

TEOREMA (3.2.1): Assumindo que $N > 0$ ou que K é limitado em U, então (3.2.1) tem ao menos uma solução.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{(y_k, u_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset (H^1(\Omega))^3 \times K$, uma sequência minimizante, logo, $J(y_k, u_k) \to \inf_{(y,u)\in(H^1(\Omega))^3\times K} J(y,u) = c$, quando $k \to +\infty$. Observamos que $0 \leq c < +\infty$ já que $J(y,u) \geq 0$ para todo (y,u).

Da definição de J e as hipóteses do teorema, segue-se que, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada em U. De fato, se por hipótese K for limitado em U; como $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$, segue-se trivialmente, que $\{u_k\}$ é limitada em U. Agora, se tivermos apenas que $N > 0$, poderá ocorrer de K ser ilimitado, daí poderemos concluir a limitação de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ observando a definição de J: suponhamos por contradição que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ não seja limitada; assim existe uma subsequência $\{u_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|u_{kn}\| \to +\infty$, logo,

$$J(y_k, u_{kn}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} | \nabla \times y_k |^2 \, dx + \frac{N}{2}\|u_{kn}\|_U^2 \to +\infty$$

o que é um absurdo, pois, $J(y_k, u_{kn}) \to c$.

Agora, usando (3.1.1), mostraremos a limitação de $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, em $(H^1(\Omega))^3$. Para tal, primeiramente precisamos achar uma formulação variacional para o problema:

$$(3.2.2) \qquad \begin{cases} \text{Dados: } \mu > 0;\ f \in (H^{-1}(\Omega))^3;\ B \in L(U, (H^{-1}(\Omega))^3); u \in U \text{ e,} \\ \Phi_\Gamma \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3, \ \text{ tal que, } \Phi_\Gamma . n = 0, \text{ em } \Gamma; \end{cases}$$

queremos achar $y \in (H^1(\Omega))^3$, tal que,

$$(3.2.3) \qquad \begin{cases} -\mu \Delta y + (y.\nabla.)y + \nabla \pi = f + Bu, \quad \text{em } \Omega \\ div\ y = 0, \text{ em } \Omega \\ y = \Phi_\Gamma, \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

Multiplicando-se (3.2.3) por uma função $z \in \mathcal{Y}$ e integrando-se sobre Ω, vem que:

$$-\mu \int_\Omega \Delta y.z \, dx + \int_\Omega (y.\nabla)y.z \, dx + \int_\Omega \nabla \pi.z \, dx = \int_\Omega (f + Bu) z \, dx, \ \forall z \in \mathcal{Y}.$$

Usando argumentos de densidade, já que $Y_0 = \overline{\mathcal{Y}}^{(H_0^1(\Omega))^3}$, teremos:

$$\mu \int_\Omega \nabla y.\nabla z \, dx + \int_\Omega (y.\nabla)y.z \, dx = \int_\Omega (f + Bu) z \, dx, \ \forall z \in Y_0.$$

Assim, a formulação variacional será:

$$(3.2.4) \qquad \begin{cases} \text{achar } y \in Y, \ \text{ tal que, } \ y = \Phi_\Gamma, \ \text{ em } \Gamma \text{ e} \\ \mu a(y,z) + b(y,y,z) = \langle f + Bu, z \rangle, \ \forall z \in Y_0. \end{cases}$$

Aqui,

$$\begin{array}{rcl} a:(H^1(\Omega))^3\times(H^1(\Omega))^3 & \longrightarrow & I\!R, \text{ bilinear} \\ (y,z) & \longmapsto & a(y,z)=\int_\Omega \nabla y.\nabla z\; dx=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\Big)dx. \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} b:(H^1(\Omega))^3\times(H^1(\Omega))^3\times(H^1(\Omega))^3 & \longrightarrow & I\!R, \text{ trilinear} \\ (y,z,w) & \longmapsto & b(y,z,w)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} y_i.\,\frac{\partial z_j}{\partial x_i}.w_j\; dx=\int_\Omega (y.\nabla)z.w\; dx. \end{array}$$

Conforme já mencionamos anteriormente, nas Seções (2.2.1) e (2.2.2) do Capítulo 2, as formas bilinear a e trilinear b são contínuas e, além disso, a trilinear b satisfaz as três propriedades (i), (ii) e (iii).

Agora, usando o fato de que y_k e u_k constituem soluções do problema (3.2.3) e, consequentemente, do problema (3.2.4), obteremos que $y_k \in Y$ é tal que $y_k = \Phi_\Gamma$ em Γ e satisfaz

$$(3.2.5) \qquad \mu a(y_k,z)+b(y_k,y_k,z)=\langle f+Bu_k,z\rangle,\ \forall z\in Y_0.$$

Mais, devido à (3.2.2), tem-se que $\int_\Gamma \Phi_\Gamma.nd\Gamma = 0$ e pelo teorema (2.4), em Temam [5], existe $\Phi \in Y$, tal que, $\Phi = \Phi_\Gamma$ em Γ e satisfazendo a estimativa do Lema (2.3.2) com um γ adequado a ser escolhido nas computações que se seguem.

Tomando-se $\hat{y}_k = y_k - \Phi \in Y_0$ (logo, $y_k = \hat{y}_k + \Phi$), teremos em (3.2.5):

$$\mu a(\hat{y}_k+\Phi,z)+b(\hat{y}_k+\Phi,\hat{y}_k+\Phi,z)=\langle f+Bu_k,z\rangle,\ \forall z\in Y_0.$$

Assim,

$$\mu a(\hat{y}_k,z)+\mu a(\Phi,z)+b(\hat{y}_k,\hat{y}_k,z)+b(\hat{y}_k,\Phi,z)+b(\Phi,\hat{y}_k,z)+b(\Phi,\Phi,z)=\langle f+Bu_k,z\rangle,\ \forall z\in Y_0.$$

Daí,

$$\mu a(\hat{y}_k,z)+b(\hat{y}_k,\hat{y}_k,z)+b(\hat{y}_k,\Phi,z)+b(\Phi,\hat{y}_k,z)=\langle f+Bu_k,z\rangle-\mu a(\Phi,z)-b(\Phi,\Phi,z),\ \forall z\in Y_0.$$

Agora como antes a fórmula abaixo vale imediatamente no sentido de distribuições para $z \in \mathcal{Y} \subset (D(\Omega))^3$. Como $\Delta\Phi \in (H^{-1}(\Omega))^3$ a atuação da distribuição é na verdade a atuação por dualidade de $(H^{-1}(\Omega))^3$ sobre $(H_0^1(\Omega))^3$. A densidade de $\mathcal{Y}$ em Y_0 garante que a fórmula abaixo vale para todo $z \in Y_0$.

$$-\mu a(\Phi, z) = -\mu \int_\Omega \nabla\Phi.\nabla z \, dx = -\mu\langle\nabla\Phi, \nabla z\rangle =$$
$$= \langle\mu\Delta\Phi, z\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3}.$$

Também vale

$$-b(\Phi, \Phi, z) = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \Phi_i \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i} z_j dx = \left\langle -\sum_{i=1}^{3} \Phi_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, z\right\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3}.$$

Assim,

$$\mu a(\hat{y}_k, z) + b(\hat{y}_k, \hat{y}_k, z) + b(\hat{y}_k, \Phi, z) + b(\Phi, \hat{y}_k, z) =$$
$$\left\langle f + Bu_k + \mu\Delta\Phi - \sum_{i=1}^{3} \Phi_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, z\right\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3}, \quad \forall z \in Y_0.$$

Fazendo-se $z = \hat{y}_k \in Y_0$, tem-se que:

$$\mu a_0(\hat{y}_k, \hat{y}_k) + b(\hat{y}_k, \hat{y}_k, \hat{y}_k) + b(\hat{y}_k, \Phi, \hat{y}_k) + b(\Phi, \hat{y}_k, \hat{y}_k) = \langle\hat{f}_k, \hat{y}_k\rangle$$

onde, $\hat{f}_k = f + Bu_k + \mu\Delta\Phi - \sum_{i=1}^{3} \Phi_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$.

Usando a propriedade (iii) da forma trilinear b e o fato de que a_0 é coerciva, vem que,

$$\|\hat{y}_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq a_0(\hat{y}_k, \hat{y}_k) = \frac{1}{\mu}\langle\hat{f}_k, \hat{y}_k\rangle - \frac{1}{\mu} b(\hat{y}_k, \Phi, \hat{y}_k)$$

Daí,

$$\|\hat{y}_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \frac{1}{\mu}\|\hat{f}_k\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}.\|\hat{y}_k\|_{(H_0^1(\Omega))^3} + \frac{1}{\mu} \mid b(\hat{y}_k, \Phi, \hat{y}_k) \mid;$$

Agora escolhendo Φ de acordo com o Lema (2.3.2) (Capítulo 2), com $\gamma = \frac{\mu}{2}$, teremos:

$$\|\hat{y}_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \frac{1}{\mu}\|\hat{f}_k\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}.\|\hat{y}_k\|_{(H_0^1(\Omega))^3} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu}{2}\|\hat{y}_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}\right).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|\hat{y}_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \frac{1}{\mu}\|\hat{f}_k\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}.\|\hat{y}_k\|_{(H^1_0(\Omega))^3}.$$

Daí,

$$\|\hat{y}_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_1\|\hat{f}_k\|_{(H^{-1}(\Omega))^3};$$

e, consequentemente,

$$\|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} - \|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \|y_k - \Phi\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_1\left\|f + Bu_k + \mu\Delta\Phi - \sum_{i=1}^{3}\Phi_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}.$$

Logo,

$$\|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_1\|f + Bu_k\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \mathcal{C}_1\left\|\mu\Delta\Phi - \sum_{i=1}^{3}\Phi_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3};$$

e, portanto,

$$\|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_1\left[\|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \|B\|.\|u_k\|_U\right] + \mathcal{C}_2;$$

onde, $\mathcal{C}_2$ depende de Φ.

E, como $\left(u_k\right)_{k=1}^{\infty}$ é limitada, segue-se que: $\|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}$, como queríamos mostrar.

Daí, teremos que $\{(y_k, u_k)_{k=1}^{\infty}\}$ é limitado em $(H^1(\Omega))^3 \times U$ (Hilbert).

Assim, de acordo com a Proposição (1.2.1), nós podemos extrair uma subsequência, denotada da mesma forma, e um elemento $(y_0, u_0) \in (H^1(\Omega))^3 \times U$, tal que,

$$(y_k, u_k) \rightharpoonup (y_0, u_0), \text{ em } (H^1(\Omega))^3 \times U.$$

Como $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, temos que $y_k \to y_0$, em $(L^2(\Omega))^3$.

Assim, ao passarmos o limite na equação (3.2.5) verificaremos que (y_0, u_0) satisfaz (3.1.1) para alguma pressão π_0.

Ou seja, de $\mu a(y_k, z) + b(y_k, y_k, z) = \langle f + Bu_k, z\rangle$, $\forall z \in Y_0$, mostraremos que ao fazermos $k \to \infty$ teremos:

$$\mu a(y_0, z) + b(y_0, y_0, z) = \langle f + Bu_0, z\rangle, \ \forall z \in Y_0.$$

Analisaremos a passagem ao limite de cada termo: – Se pensarmos em $a(\cdot, z)$ como um elemento de $(H^{-1}(\Omega))^3$, será suficiente apenas a convergência fraca de $y_k \rightharpoonup y_0$, para concluírmos que, $a(y_k, z) \longrightarrow a(y_0, z)$.

Agora, para mostrar que $b(y_k, y_k, z) \longrightarrow b(y_0, y_0, z)$, $\forall z \in Y_0$.

Basta mostrar que $(b(y_k, z, y_k) \longrightarrow b(y_0, z, y_0)$, $\forall z \in \mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned}
\mid b(y_k, z, y_k) - b(y_0, z, y_0) \mid &= \left|\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega y_{ki}\frac{\partial z_j}{\partial x_i} y_{kj}dx - \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega y_{0i}\frac{\partial z_j}{\partial x_i} y_{0j}dx\right| = \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(y_{ki}.y_{kj} - y_{0i}.y_{0j})dx\right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3} \left|\int_\Omega \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(y_{ki}.y_{kj} - y_{0i}.y_{0j})dx\right|.
\end{aligned}$$

Como $z_j \in D(\Omega)$, segue-se que $\dfrac{\partial z_j}{\partial x_i} \in L^\infty$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\mid b(y_k, z, y_k) - b(y_0, z, y_0) \mid &\leq \sum_{i,j=1}^{3} \left|\int_\Omega M.(y_{ki}.y_{kj} - y_{0i}.y_{0j})dx\right| = \\
&= M.\sum_{i,j=1}^{3} \left|\int_\Omega (y_{ki}.y_{kj} - y_{ki}.y_{0j} + y_{ki}.y_{0j} - y_{0i}.y_{0j})dx\right| \leq \\
&\leq M.\sum_{i,j=1}^{3} \left|\int_\Omega y_{ki}.(y_{kj} - y_{0j})dx\right| + \left|\int_\Omega (y_{ki} - y_{0i}).y_{0j}dx\right|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mid b(y_k, z, y_k) - b(y_0, z, y_0) \mid \leq M.\sum_{i,j=1}^{3} \Big[\|y_{ki}\|_{L^2(\Omega)}.\|y_{kj} - y_{0j}\|_{L^2(\Omega)} + \|y_{ki} - y_{0i}\|_{L^2(\Omega)}.\|y_{0j}\|_{L^2(\Omega)}\Big];$$

onde usamos Hölder para $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Como $y_k \longrightarrow y_0$, em $(L^2(\Omega))^3$, teremos que:

$$| b(y_k,z,y_k)-b(y_0,z,y_0) | \leq \widetilde{M}.\Big[\|y_k\|_{(L^2(\Omega))^3}.\|y_k-y_0\|_{(L^2(\Omega))^3}+\|y_k-y_0\|_{(L^2(\Omega))^3}.\|y_0\|_{(L^2(\Omega))^3}\Big] \to 0.$$

E mais, temos que $u_k \rightharpoonup u_0$, em U, ou seja,

$$\forall w \in U' : \langle u_k, w\rangle \to \langle u_0, w\rangle \iff | \langle u_k - u_0, w\rangle_{U,U'} | \to 0.$$

Assim,

$$| \langle f + Bu_k - (f + Bu_0), z\rangle | = | \langle Bu_k - Bu_0, z\rangle | = | \langle B(u_k - u_0), z\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^3,(H_0^1(\Omega))^3} |,$$

conforme vimos na seção (1.1), pela definição de dual do operador, esse termo será

$$= | \langle u_k - u_0, B^*z\rangle | \to 0, \quad \text{quando} \quad k \to \infty;$$

isso decorre da definição de $u_k \rightharpoonup u_0$, com $w = B^*z \in U'$.

E está mostrada as convergências de cada um dos termos.

Sabemos pela Proposição (1.3.1) que, sendo K um conjunto convexo e fechado forte, teremos que K é fechado fraco, ou seja, como $u_k \rightharpoonup u_0$, segue-se que $u_0 \in K$.

Passemos agora a verificar que J é convexo: basta mostrarmos que J é uma soma de funções convexas; $J(y,u) = \frac{1}{2}A(y) + \frac{N}{2}L(u)$ onde,

$$\begin{aligned} A : (H^1(\Omega))^3 &\longrightarrow I\!R \\ y &\longmapsto A(y) = \|\nabla \times y\|^2_{(L^2(\Omega))^3} = \sum_{j=1}^{3} \|\psi_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \psi_j^2(x)dx = \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \psi_j^2(x)dx = \int_\Omega | \nabla \times y |^2_E \, dx, \end{aligned}$$

(sendo ψ_j, a j-ésima coordenada de $\nabla \times y$) e,

$$\begin{aligned} L : U &\to I\!R \\ u &\longmapsto L(u) = \|u\|^2_U = (u,u)_U. \end{aligned}$$

Primeiramente mostraremos que L é convexa.

Para tal, lembremos que L, convexa $\Longleftrightarrow$ $L(u) \geq L(u_0) + L'(u_0).(u - u_0)$; ora, $L'(u_0).h = \langle u_0, h\rangle + \langle h, u_0\rangle = 2\langle u_0, h\rangle$ e

$$\begin{aligned}
&L(u) \geq L(u_0) + L'(u_0).(u-u_0) \Longleftrightarrow \|u\|_U^2 \geq \|u_0\|_U^2 + 2(u_0, u-u_0)_U \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \|u\|_U^2 \geq \|u_0\|_U^2 + 2(u_0,u)_U - 2\|u_0\|_U^2 \Longleftrightarrow \|u\|^2 - 2(u_0,u)_U + \|u_0\|_U^2 \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow (u-u_0, u-u_0)_U \geq 0 \Longleftrightarrow \|u-u_0\|_U^2 \geq 0;
\end{aligned}$$

o que sabemos ser verdade. Esta demonstração vale para qualquer norma ao quadrado.

Agora mostraremos que $\|\nabla \times y\|^2_{(L^2(\Omega))^3}$ é convexa. Temos:

$$\begin{aligned}
A(ty + (1-t)x) &= \|\nabla \times (ty + (1-t)x)\|^2_{L^2(\Omega))^3} \\
&\quad (\nabla \times (\cdot) \text{ é linear}) \\
&= \|t\nabla \times y + (1-t)\nabla \times x\|^2_{(L^2(\Omega))^3}.
\end{aligned}$$

Agora como $\|\cdot\|^2$ é convexa, então

$$A(ty + (1-t)x) \leq t\|\nabla \times y\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + (1-t)\|\nabla \times x\|^2_{(L^2(\Omega))^3}.$$

Assim,

$$A(ty + (1-t)x) \leq t\, A(y) + (1-t)A(x).$$

Logo, A é convexa.

Assim, J é um funcional convexo e é fácil ver que J é também contínuo na topologia forte de $(H^1(\Omega))^3 \times U$. Donde, pela observação após Proposição (1.3.2), poderemos concluir que J é fracamente semicontínuo inferiormente, então, teremos que $J(y_0, u_0) \leq \lim_{k\to\infty} inf J(y_k, u_k) = \lim_{k\to\infty} J(y_k, u_k) = \inf_{(y,u)\in(H^1(\Omega))^3 \times K} J(y,u)$ e, por outro lado, $inf\ J(y,u) \leq J(y_0, u_0)$.

Portanto, $J(y_0, u_0) = \inf_{(y,u)\in(H^1(\Omega))^3 \times K} J(y,u)$ e (y_0, u_0) é uma solução de (3.2.1). □

A seguir, especificaremos as chamadas condições de otimalidade para o problema de controle (3.2.1).

3.3 SISTEMA DE OTIMALIDADE PARA O PROBLEMA DE CONTROLE

TEOREMA (3.3.1): Se $(\overline{y},\overline{u}) \in (H^1(\Omega))^3 \times U$ é uma solução de (3.2.1), então existe um número $\alpha \geq 0$ e algum elemento $\overline{p} \in (H^1(\Omega))^3$ e $\overline{\pi}, \overline{\lambda} \in L^2(\Omega)$, verificando:

$$\alpha + \|\overline{p}\|_{(H^1(\Omega))^3} > 0 \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} -\mu\Delta\overline{y} + (\overline{y}.\nabla)\overline{y} + \nabla\overline{\pi} = f + B\overline{u}, \quad \text{em } \Omega, \\ \\ div\ \overline{y} = 0, \quad \text{em } \Omega \ \text{ e } \ \overline{y} = \Phi_\Gamma, \quad \text{em } \Gamma. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{cases} -\mu\Delta\overline{p} - (\overline{y}.\nabla)\overline{p} + (\nabla\overline{y})^T\overline{p} + \nabla\overline{\lambda} = \alpha.\nabla \times (\nabla \times \overline{y}), \quad \text{em } \Omega, \\ \\ div\ \overline{p} = 0, \quad \text{em } \Omega; \ \text{ e } \ \overline{p} = 0, \quad \text{em } \Gamma. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

$$(B^*\overline{p} + \alpha.N\overline{u}, u - \overline{u})_U \geq 0, \ \forall u \in K. \tag{3.3.4}$$

E o restante do nosso trabalho será dedicado a mostrarmos esse teorema.

Com a finalidade de prová-lo, consideraremos uma família aproximada de problemas mais adequados de controle ótimo, cujas soluções convergem para elementos que mostraremos ser uma solução do problema (3.2.1), daí, derivaremos as condições de otimalidade para esses problemas aproximados e, finalmente, tomaremos limites para obtermos essas condições de otimalidade do nosso problema de controle original (problema (3.2.1)).

3.4 OS PROBLEMAS APROXIMADOS

Agora, caminharemos na direção de formularmos os problemas aproximados. Para isso, definiremos para todo $\varepsilon > 0$, o funcional:

$$J_\varepsilon : \{w \in Y; w = \Phi_\Gamma, \quad \text{em } \Gamma\} \times U \to I\!R, \text{ por}$$
$$J_\varepsilon(w,u) = J(y(w,u),u) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_j(w,u) - \nabla w_j|^2\, dx,$$

onde, $y(w,u)$ (y que depende de w e u) é a única solução do problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Achar } y \in Y, \ \text{tal que, } \ y = \Phi_\Gamma, \ \text{em } \Gamma \text{ e satisfaz} \\ \mu a(y,z) + b(w,y,z) = \langle f + Bu, z\rangle, \ \forall z \in Y_0. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

A unicidade dessa solução pode ser verificada considerando-se w, um elemento fixo de Y, e pensando-se na formulação variacional acima da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Achar } y \in Y, \text{ tal que, } y = \Phi_\Gamma, \text{ em } \Gamma \text{ e satisfaz} \\ c(y,z) = \langle F, z\rangle, \ \forall z \in Y_0 \end{cases}$$

com

$$\begin{array}{rcl} c : (H^1(\Omega))^3 \times (H^1(\Omega))^3 & \longrightarrow & I\!R, \text{ bilinear contínua e coerciva} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & c(v_1,v_2) = \mu a(v_1,v_2) + b(w,v_1,v_2) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} F : (H^1(\Omega))^3 & \longrightarrow & I\!R, \text{ linear e contínua} \\ z & \longmapsto & F(z) = \langle f + Bu, z\rangle. \end{array}$$

É fácil verificar a bilinearidade e continuidade de c, resta-nos mostrar a coercividade de c: ora, $\forall z \in Y_0, \ c(z,z) = \mu a(z,z) + b(w,z,z)$.

Pela propriedade (iii) da forma b, temos $c(z,z) = \mu a(z,z) = \mu a_0(z,z)$.

Pela coercividade de $a_0 = a\Big|_{(H_0^1(\Omega))^3}$, vem que $c(z,z) \geq \mu \|z\|^2$; daí, c é coerciva.

Mais, $\mid \langle F, z\rangle \mid = \mid \langle f + Bu, z\rangle \mid \leq \|f + Bu\|.\|z\| \leq c.\|z\|$ donde, F é contínua e claramente vemos que F é linear. Assim, pelo lema Lax Milgram teremos que existe um único $y \in Y$, tal que, $c(y,z) = \langle F, z\rangle, \ \forall z \in Y_0$, como queríamos mostrar.

Agora, estaremos diante do seguinte problema:

$$(3.4.2) \qquad \begin{cases} \text{Minimizar } J_\varepsilon(w,u), \text{ tal que,} \\ (w,u) \in Y \times K \text{ e } w = \Phi_\Gamma, \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

Precisamos mostrar que cada problema (3.4.2) tem ao menos uma solução e que eles formam uma família aproximante para (3.2.1).

PROPOSIÇÃO (3.4.1): Para todo $\varepsilon > 0$, existe ao menos uma solução $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de (3.4.2). Mais ainda, se nós denotarmos por y_ε, a solução de (3.4.1) correspondendo à $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ então, nós temos:

$$(3.4.3) \qquad u_\varepsilon \rightharpoonup \overline{u}, \text{ em } U$$

$$(3.4.4) \qquad y_\varepsilon \rightharpoonup \overline{y}, \text{ em } Y$$

$$(3.4.5) \qquad w_\varepsilon \rightharpoonup \overline{y}, \text{ em } Y.$$

$$(3.4.6) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) = J(\overline{y}, \overline{u}), \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

$$(3.4.7) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}|^2 \, dx = 0$$

E mais ainda, se $N > 0$, temos que

$$(3.4.8) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - \overline{u}\|_U = 0, \text{ ou seja, } u_\varepsilon \to \overline{u}, \text{ em } U.$$

DEMONSTRAÇÃO: Primeiramente, mostraremos a primeira parte da proposição, *i.e.*, existe ao menos uma solução $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de (3.4.2). De maneira análoga à demonstração do teorema (3.2.1), façamos:

Seja $\{(w_k, u_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset Y \times K$, uma sequência minimizante de $J_\varepsilon(w, u)$, com $w_k = \Phi_\Gamma$, em Γ. Logo, $J_\varepsilon(w_k, u_k) \to \inf_{(w,u)\in Y\times K} J_\varepsilon(w, u) = c_1$.

Precisamos mostrar que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada em U.

Se K for limitado, podemos facilmente concluir que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ é limitada.

Agora, se tivermos apenas que $N > 0$, poderemos ter K ilimitado; daí, faremos assim:

Suponha que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ não é limitada, então existe uma subsequência $\{u_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, $\|u_{kn}\| \to +\infty$ logo,

$$J_\varepsilon(w, u_{kn}) = J(y_{kn}(w, u_{kn}), u_{kn}) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |\nabla y_{knj} - \nabla w_j|^2 \, dx \to +\infty$$

o que seria uma contradição com $J_\varepsilon(w, u_{kn}) \to c_1$. $\square$

Agora, queremos mostrar que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é limitada em Y.

Consideraremos y_k como a solução de (3.4.1) correspondendo à (w_k, u_k).

Observemos que

$$\left.\begin{array}{ll} w_k = \Phi_\Gamma, & \text{em } \Gamma \\ \text{e } y_k = \Phi_\Gamma, & \text{em } \Gamma \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} w_k - y_k = 0, \text{ em } \Gamma, \\ \text{donde } (w_k - y_k) \in (H_0^1(\Omega))^3. \end{array}$$

Sendo $\{(w_k, u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência minimizante de $J_\varepsilon(w, u)$, teremos que $J_\varepsilon(w_k, u_k)$ é limitado; donde, pela definição de J_ε, decorre que o termo $\|\nabla y_k - \nabla w_k\|^2_{(L^2(\Omega))^3}$ é limitado, e usando a desigualdade de Poincaré, temos:

$$\|y_k - w_k\|_{(L^2(\Omega))^3} \le \|\nabla(y_k - w_k)\|_{(L^2(\Omega))^3} = \|\nabla y_k - \nabla w_k\|_{(L^2(\Omega))^3} \le \mathcal{C}_0.$$

Logo, $\|y_k - w_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \le \mathcal{C}_0$.

Agora,

$$\|w_k\|_{(H^1(\Omega))^3} - \|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \le \|w_k - y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \le \mathcal{C}_0;$$

assim, $\|w_k\|_{(H^1(\Omega))^3} \le \mathcal{C}_0 + \|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3}$.

Se tivermos que $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ é limitada, obteremos o requerido.

Ora, $y_k = y_k(w_k, u_k)$ é solução de (3.4.1), assim:

$$\mu a(y_k, z) + b(w_k, y_k, z) = \langle f + Bu_k, z\rangle, \ \forall z \in Y_0.$$

Agora, precisamos tomar $\Phi \in Y$, tal que, $\Phi = \Phi_\Gamma$, em Γ e verifica $|\ b(y, \Phi, z)\ | \le \dfrac{\mu}{2}\|y\|.\|z\|$, $\forall y, z \in Y_0$ (lema (2.3.2)).

Denotando-se $z = z_k = (y_k - \Phi) \in Y_0$, tem-se que:

$$\mu a(z_k + \Phi; z_k) + b(w_k, z_k + \Phi, z_k) = \langle f + Bu_k, z_k\rangle, \ \forall z_k \in Y_0.$$

Portanto,

$$\mu a(z_k, z_k) + \mu a(\Phi, z_k) + b(w_k; z_k; z_k) + b(w_k, \Phi, z_k) = \langle f + Bu_k; z_k\rangle,$$

e assim,

$$a(z_k,z_k)=\frac{1}{\mu}\langle f+Bu_k;z_k\rangle - a(\Phi,z_k)-\frac{1}{\mu}b(w_k,\Phi,z_k),\ \forall z_k\in Y_0.$$

Lembrando-se que para $a_0 = a\Big|_{(H_0^1(\Omega))^3}$ é válida a coercividade:

$$\begin{aligned}(3.4.9)\qquad \|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} &\leq \mid a(z_k,z_k)\mid \leq \frac{1}{\mu}\mid \langle f+Bu_k,z_k\rangle \mid + \\ &+ \mid a(\Phi,z_k)\mid +\frac{1}{\mu}\mid b(w_k,\Phi,z_k)\mid .\end{aligned}$$

Agora,

$$\mid a(\Phi,z_k)\mid \leq M\|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3}\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3};$$

e,

$$\mid b(w_k,\Phi,z_k)\mid \leq \mid b(z_k,\Phi,z_k)\mid + \mid b(w_k-z_k,\Phi,z_k)\mid .$$

Pelo lema (2.3.2), o segundo membro se torna

$$\leq \frac{\mu}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}+\mid b(w_k-y_k,\Phi,z_k)\mid + \mid b(\Phi,\Phi,z_k)\mid .$$

Pela continuidade de b, o segundo membro passa a ser

$$\leq \frac{\mu}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}+\mathcal{C}\|w_k-y_k\|_{(H^1(\Omega))^3}.\|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3}.\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}+\tilde{\mathcal{C}}.\|\Phi\|^2_{(H^1(\Omega))^3}.\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}.$$

Usando que $\|w_k-y_k\|\leq\mathcal{C}_0$; teremos:

$$\mid b(w_k,\Phi,z_k)\mid \leq \frac{\mu}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}+\mathcal{C}\mathcal{C}_0.\mathcal{C}_1.\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}+\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}_1^2\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}.$$

Daí,

$$\mid b(w_k,\Phi,z_k)\mid \leq \frac{\mu}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}+\mathcal{C}'\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3};$$

logo, (3.4.9) fica:

$$\begin{aligned}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} &\leq \mathcal{C}_2\|f+Bu_k\|_{(H^{-1}(\Omega))^3}.\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}+ \\ &+ M\|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3}.\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}+\frac{1}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}+\frac{\mathcal{C}'}{\mu}\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} &\leq \mathcal{C}_2\left[\|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \|B\|.\|u_k\|_U\right].\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3} + \\ &+ \mathcal{C}_3\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3} + \frac{1}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} + \mathcal{C}_4\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}.\end{aligned}$$

Usando-se da limitação de $\{u_k\}$ em U, vem que:

$$\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_5\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3} + \mathcal{C}_3\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3} + \frac{1}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} + \mathcal{C}_4\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}.$$

Daí,

$\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_6\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3} + \frac{1}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3}$, assim, $\frac{1}{2}\|z_k\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_6\|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3}$. Portanto, $\|z_k\| \leq \mathcal{C}_7$.

Assim,

$$\|y_k\|_{(H^1(\Omega))^3} = \|z_k + \Phi\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \|z_k\|_{(H^1(\Omega))^3} + \|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_7 + \mathcal{C}_8 = \mathcal{C}_9.$$

E finalmente podemos concluir que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é limitada.

Portanto, $\{(w_k, u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ é limitada em $Y \times U$. E daí, podemos extrair subsequência (denotada da mesma forma) e um elemento $(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \in Y \times U$, tal que, $(w_k, u_k) \rightharpoonup (w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ em $Y \times U$, quando $k \to \infty$.

Como K, convexo fechado, temos que $u_\varepsilon \in K$.

Devemos verificar que $w_\varepsilon = \Phi_\Gamma$, em Γ:

Temos que $w_k \rightharpoonup w_\varepsilon$, em $(H^1(\Omega))^3$ quando $k \to \infty$; e $w_k = \Phi_\Gamma$, em Γ.

Para Ω limitado, δ pequeno: $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^{1-\delta}(\Omega)$ (imersão compacta) logo, $w_k \longrightarrow w_\varepsilon$, em $(H^{1-\delta}(\Omega))^3$, quando $k \to \infty$; daí, $\gamma_0 w_k \to \gamma_0 w_\varepsilon$, em $(H^{1-\delta-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$ e, como $\gamma_0 w_k = \Phi_\Gamma$, tem-se que $\gamma_0 w_\varepsilon = \Phi_\Gamma$.

Da definição de J_ε, podemos observar que ele é uma soma de funções convexas, logo, J_ε é um funcional contínuo e convexo, donde segue-se a semicontinuidade inferior de J_ε, na topologia fraca, da qual conclui-se que,

$$J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) \leq \liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon(w_k,u_k) = \lim_{k\to\infty} J_\varepsilon(w_k,u_k) = inf\ J_\varepsilon(w,u).$$

Por outro lado, $inf\ J_\varepsilon(w,u) \leq J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon)$ e daí teremos $inf\ J_\varepsilon(w,u) = J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon)$ e logo, $(w_\varepsilon,u_\varepsilon)$ é uma solução de (3.4.2).

Agora passemos à segunda parte da demonstração:

Sejam $\{(w_\varepsilon,u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ soluções de (3.4.2).

Assim temos que, $J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(y,u)$ e, desde que $y(y,u)=y$, vem que:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(y,u) &= J(y(y,u),u) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_j - \nabla y_j|^2\,dx \\ &= J(y,u);\ \forall (y,u)\in Y\times U, \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

tal que, $y=\Phi_\Gamma$, em Γ e satisfaça (3.1.1).

De onde segue-se:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon j}(w_\varepsilon,u_\varepsilon) - \nabla w_{\varepsilon j}|^2\,dx \leq 2\varepsilon J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) \leq 2\varepsilon J(y,u) \to 0, \text{ quando } \varepsilon\to 0.$$

Assim, $\|\nabla(y_\varepsilon - w_\varepsilon)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \longrightarrow 0$; e ainda temos que, sendo y_ε a solução de (3.4.1) e como w_ε pertence ao domínio de $J_\varepsilon, y_\varepsilon = w_\varepsilon = \Phi_\Gamma$, em Γ.

Logo, $y_\varepsilon - w_\varepsilon = 0$, em Γ; e, portanto: $(y_\varepsilon - w_\varepsilon)\in (H_0^1(\Omega))^3$ e daí, poderemos nos utilizar da desigualdade de Poincaré para deduzirmos a seguinte convergência: $(y_\varepsilon - w_\varepsilon)\to 0$, fortemente em $(H^1(\Omega))^3$.

Realmente,

$$\|y_\varepsilon - w_\varepsilon\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \leq C(\Omega)\|\nabla(y_\varepsilon - w_\varepsilon)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \to 0.$$

Logo,

$$\|y_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} \to 0.$$

E então, sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\|w_\varepsilon - y_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq 1\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{3.4.11}$$

Observemos que, da definição de $J(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ e de $J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ e pela desigualdade (3.4.10), poderemos concluir que $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma sequência limitada em U.

De fato,

$$\frac{N}{2}\|u_\varepsilon\|_U^2 \leq J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(y, u).$$

Logo,

$$\|u_\varepsilon\|_U^2 \leq \frac{2}{N} J(y, u), \quad \text{com } \; N > 0. \tag{3.4.12}$$

Agora, analogamente como fizemos na demonstração da primeira parte, precisamos tomar $\Phi \in Y$ tal que, $\Phi = \Phi_\Gamma$, em Γ e verifica-se $| \; b(y, \Phi, z) \; | \leq \dfrac{\mu}{2}\|y\|.\|z\|$, $\forall y, z \in Y_0$ (conforme lema (2.3.2)).

Denotando-se $z_{0\varepsilon} = y_\varepsilon - \Phi \in Y_0$, teremos de (3.4.1) com $z = z_{0\varepsilon}$:

$$\mu a(z_{0\varepsilon} + \Phi, z_{0\varepsilon}) + b(w_\varepsilon, z_{0\varepsilon} + \Phi, z_{0\varepsilon}) = \langle f + Bu_\varepsilon ; z_{0\varepsilon} \rangle.$$

Usando a coercividade de $a_0 = a\Big|_{(H_0^1(\Omega))^3}$ e propriedade (iii) da forma b, vem que:

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq | \; a(z_{0\varepsilon}, z_{0\varepsilon}) \; | \leq \frac{1}{\mu} \; | \; \langle f + Bu_\varepsilon, z_{0\varepsilon} \rangle \; | \; +$$
$$+ \; | \; a(\Phi, z_{0\varepsilon}) \; | + \frac{1}{\mu} \; | \; b(w_\varepsilon, \Phi, z_{0\varepsilon}) \; | \; .$$

Daí,

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_0 . \|f + Bu_\varepsilon\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} . \|z_{0\varepsilon}\|_{(H^1(\Omega))^3} + M\|\Phi\|_{(H^1(\Omega))^3}\|z_{0\varepsilon}\|_{(H^1(\Omega))^3}$$
$$+ \frac{1}{\mu} \; | \; b(z_{0\varepsilon} + (w_\varepsilon - z_{0\varepsilon}), \Phi, z_{0\varepsilon}) \; | \; .$$

Assim,

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_0 . \left[\|f\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \|B\| . \|u_\varepsilon\|_U \right] . \|z_{0\varepsilon}\|_{(H^1(\Omega))^3} + \mathcal{C}_1 \|z_{0\varepsilon}\|_{(H^1(\Omega))^3} +$$
$$+ \frac{1}{\mu} \left[| \; b(z_{0\varepsilon}, \Phi, z_{0\varepsilon}) \; | + | \; b(w_\varepsilon - z_{0\varepsilon}, \Phi, z_{0\varepsilon}) \; | \right].$$

Pela desigualdade $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, com $a = \|B\|$ e $b = \|u_\varepsilon\|$:

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}_0 . \left[\|f\| + \frac{\|B\|^2}{2} + \frac{\|u_\varepsilon\|^2}{2}\right] . \|z_{0\varepsilon}\|_{(H^1(\Omega))^3} + \mathcal{C}_1 \|z_{0\varepsilon}\|_{(H^1(\Omega))^3} +$$
$$+ \frac{1}{\mu} [| \, b(z_{0\varepsilon}, \Phi, z_{0\varepsilon}) \, | + | \, b((w_\varepsilon - y_\varepsilon) + \Phi, \Phi, z_{0\varepsilon}) \, |] .$$

Usando a desigualdade (3.4.12) e lema (2.3.2), o segundo membro se torna

$$\leq \mathcal{C}_0 \left[\|f\| + \frac{\|B\|^2}{2} + \frac{J}{N}\right] \|z_{0\varepsilon}\| + \mathcal{C}_1 \|z_{0\varepsilon}\| +$$
$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu}{2} \|z_{0\varepsilon}\|^2 + | \, b(w_\varepsilon - y_\varepsilon, \Phi, z_{0\varepsilon}) \, | + | \, b(\Phi, \Phi, z_{0\varepsilon}) \, | \, .\right.$$

Pela continuidade de b, teremos:

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mathcal{C}'_0 \|z_{0\varepsilon}\| + \mathcal{C}_1 \|z_{0\varepsilon}\| + \frac{1}{2} \|z_{0\varepsilon}\|^2 +$$
$$+ \mathcal{C}_2 \|w_\varepsilon - y_\varepsilon\| . \|\Phi\| . \|z_{0\varepsilon}\| + \mathcal{C}'_2 \|\Phi\|^2 . \|z_{0\varepsilon}\| .$$

Daí,

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2 \leq \mathcal{C}_3 \|z_{0\varepsilon}\| + \frac{1}{2} \|z_{0\varepsilon}\|^2 + \mathcal{C}_4 \|w_\varepsilon - y_\varepsilon\| . \|z_{0\varepsilon}\| + \mathcal{C}_5 \, \|z_{0\varepsilon}\| ;$$

e assim,

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2 \leq \mathcal{C}_6 \|z_{0\varepsilon}\| + \frac{1}{2} \|z_{0\varepsilon}\|^2 + \mathcal{C}_4 \|w_\varepsilon - y_\varepsilon\| . \|z_{0\varepsilon}\| .$$

Utilizando-se da desigualdade (3.4.11) vem que:

$$\|z_{0\varepsilon}\|^2 \leq \mathcal{C}_6 \|z_{0\varepsilon}\| + \frac{1}{2} \|z_{0\varepsilon}\|^2 + \mathcal{C}_4 . \|z_{0\varepsilon}\| .$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \|z_{0\varepsilon}\|^2 \leq \mathcal{C}_7 \|z_{0\varepsilon}\| ; \text{ e, portanto } \|z_{0\varepsilon}\| \leq \mathcal{C}_8 .$$

Em consequência,

$$\|y_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} = \|\Phi + z_{0\varepsilon}\| \leq \|\Phi\| + \|z_{0\varepsilon}\| \leq C_9.$$

Ou seja, $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é limitada em $(H^1(\Omega))^3$.

E mais, $\|w_\varepsilon\| - \|y_\varepsilon\| \leq \|w_\varepsilon - y_\varepsilon\| \leq 1$. Portanto, $\|w_\varepsilon\| \leq 1 + C_9 = C_{10}$; assim, $\{w_\varepsilon\}$ é limitada em $(H^1(\Omega))^3$.

Então, nós podemos extrair subsequências (denotadas da mesma forma) e elementos $(\overline{y}, \overline{u}) \in Y \times K$ satisfazendo:

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \overline{u}, \quad \text{em} \quad U.$$

$$y_\varepsilon \rightharpoonup \overline{y}, \quad \text{em} \quad (H^1(\Omega))^3.$$

$$\text{e} \qquad w_\varepsilon \rightharpoonup \overline{y}, \quad \text{em} \quad (H^1(\Omega))^3; \quad \text{pois, } \forall \varphi \in ((H^1(\Omega))^3)' :$$

$$|\, \varphi(w_\varepsilon) - \varphi(\overline{y}) \,| = |\, \varphi(w_\varepsilon - y_\varepsilon) + \varphi(y_\varepsilon - \overline{y}) \,| \leq \|\varphi\| . \|w_\varepsilon - y_\varepsilon\| + |\, \varphi(y_\varepsilon) - \varphi(\overline{y}) \,| \rightarrow 0,$$

onde usamos o fato de que $\|w_\varepsilon - y_\varepsilon\| \rightarrow 0$ e que $y_\varepsilon \rightharpoonup \overline{y}$;
com $\varepsilon \rightarrow 0$.

E está provada (3.4.3), (3.4.4) e (3.4.5) da Proposição (3.4.1).

Dessas convergências e usando o teorema de Imersão de Sobolev, nós podemos passar o limite em:

$$\mu a(y_\varepsilon, z) + b(w_\varepsilon, y_\varepsilon, z) = \langle f + Bu_\varepsilon, z \rangle, \ \forall z \in Y_0;$$

e obtermos:

$$\mu a(\overline{y}, z) + b(\overline{y}, \overline{y}, z) = \langle f + B\overline{u}, z \rangle, \ \forall z \in Y_0. \tag{3.4.13}$$

De (3.4.13) nós deduzimos a existência de um elemento $\overline{\pi} \in L^2(\Omega)$, tal que, $(\overline{y}, \overline{\pi})$ e $\overline{u}$ satisfazem (3.1.1), em consequência $(\overline{y}, \overline{u})$ é um ponto admissível para (3.2.1).

Temos que a família inteira $\{(w_\varepsilon, y_\varepsilon, u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ converge à $(\overline{y}, \overline{y}, \overline{u})$ fracamente em $(H^1(\Omega))^3 \times (H^1(\Omega))^3 \times U$.

Usando a desigualdade (3.4.10), a qual poderá ser usada já que $(\overline{y}, \overline{u})$ satisfaz (3.1.1), obteremos que $J(\overline{y}, \overline{u}) = J_\varepsilon(\overline{y}, \overline{u})$.

Como J_ε é fracamente semicontínuo inferiormente,

$$J(\overline{y}, \overline{u}) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} inf\ J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} sup\ J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Usando novamente a desigualdade (3.4.10), $\lim_{\varepsilon \to 0} sup\ J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(\overline{y}, \overline{u})$.

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) = J(\overline{y}, \overline{u}).$$

Precisamos mostrar que $J(\overline{y}, \overline{u}) = inf(3.2.1)$; ou seja,
$J(\overline{y}, \overline{u}) = \inf_{(y',u') \in (H^1(\Omega))^3 \times K} J(y', u')$, com (y', u') satisfazendo (3.1.1) para algum π.

Ou, equivalentemente, queremos mostrar que:

$$J(\overline{y}, \overline{u}) \leq J(y', u'),\ \forall (y', u') \in (H^1(\Omega))^3 \times K, \text{ satisfazendo (3.1.1).}$$

Para tal, suponhamos que existe $(y', u') \in (H^1(\Omega))^3 \times K$ satisfazendo (3.1.1), tal que, $J(y', u') < J(\overline{y}, \overline{u})$.

Agora, conforme (3.4.10), temos:

$$J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(y, u),\ \forall (y, u) \in Y \times U,$$

tal que, $y = \Phi_\Gamma$, em Γ e satisfaz (3.1.1).

Logo, em particular, $J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(y', u'),\ \forall \varepsilon > 0$.

Assim,

$$J_\varepsilon(w_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(y', u') < J(\overline{y}, \overline{u}).$$

Tomando-se o limite, quando $\varepsilon \to 0$, vem que:

$$J(\overline{y}, \overline{u}) \leq J(y', u') < J(\overline{y}, \overline{u}),$$

o que é um absurdo!

Portanto, $J(\overline{y},\overline{u}) = \inf\limits_{(y',u')\in(H^1(\Omega))^3\times K} J(y',u')$ e já vimos que $(\overline{y},\overline{u})$ satisfaz (3.1.1) para alguma pressão $\overline{\pi}$, logo, $(\overline{y},\overline{u})$ é a solução de (3.2.1) procurada. E, finalmente (3.4.6) está provada.

Agora, observemos que como $(y_\varepsilon,u_\varepsilon) \rightharpoonup (\overline{y},\overline{u})$ e J é fracamente semicontínuo inferiormente temos que $J(\overline{y},\overline{u}) \leq \liminf\limits_{\varepsilon\to 0} J(y_\varepsilon,u_\varepsilon)$ e mais ainda, pela desigualdade (3.4.10), $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) \leq J(\overline{y},\overline{u})$ daí, podemos concluir que $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) - \liminf\limits_{\varepsilon\to 0} J(y_\varepsilon,u_\varepsilon) \leq 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}|^2\,dx\Big) = \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0}(J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) - J(y_\varepsilon,u_\varepsilon)) \leq \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon) - \liminf_{\varepsilon\to 0} J(y_\varepsilon,u_\varepsilon) \leq 0
\end{aligned}$$

e então,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}|^2\,dx\Big) = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\sum\limits_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}|^2\,dx = 0$, e obtemos (3.4.7).

Finalmente, passemos à demonstração de (3.4.8).

Primeiramente lembremos que devido às limitações de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$; $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e de $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, nos foi possível tomar subsequências, as quais foram também denotadas da mesma forma.

De agora em diante, consideraremos $\{u_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'>0}$ como uma subsequência qualquer de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$; $\{w'_\varepsilon\}_{\varepsilon'>0}$, uma subsequência de $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e $\{y'_\varepsilon\}_{\varepsilon'>0}$, uma subsequência de $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e utilizaremos de alguns resultados obtidos, todos em termos de $\varepsilon' > 0$.

Assim, temos que:

$$i) \qquad \lim_{\varepsilon'\to 0}\frac{1}{2\varepsilon'}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon' j} - \nabla w_{\varepsilon' j}|^2\,dx = 0$$

ii) $\lim_{\varepsilon'\to 0} J_{\varepsilon'}(w_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'}) = J(\overline{y}, \overline{u})$; logo,

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\left[J(y_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'}) + \frac{1}{2\varepsilon'}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega \mid \nabla y_{\varepsilon' j} - \nabla w_{\varepsilon' j} \mid^2 dx\right] = J(\overline{y}, \overline{u}).$$

Juntamente com *i*), vem que:

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} J(y_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'}) = J(\overline{y}, \overline{u}).$$

Daí,

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} inf\ J(y_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'}) = J(\overline{y}, \overline{u}).$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} inf\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times y_{\varepsilon'} \mid^2 dx + \frac{N}{2}\|u_{\varepsilon'}\|_U^2\right] = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times \overline{y} \mid^2 dx + \frac{N}{2}\|\overline{u}\|_U^2 \tag{3.4.14}$$

iii) Como $y_{\varepsilon'} \rightharpoonup \overline{y}$, e $\frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times y_{\varepsilon'} \mid^2 dx$ é convexo contínuo, donde é fracamente semi-contínuo inferiormente, segue-se que:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times \overline{y} \mid^2 dx \leq \lim_{\varepsilon'\to 0} inf \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times y_{\varepsilon'} \mid^2 dx;$$

daí,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times \overline{y} \mid^2 dx + \lim_{\varepsilon'\to 0} inf \frac{N}{2}\|u_{\varepsilon'}\|_U^2 \leq \lim_{\varepsilon'\to 0} inf \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times y_{\varepsilon'} \mid^2 dx + \lim_{\varepsilon'\to 0} inf \frac{N}{2}\|u_{\varepsilon'}\|_U^2.$$

Devido à (3.4.14), o segundo membro se torna

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla\times \overline{y} \mid^2 dx + \frac{N}{2}\|\overline{u}\|_U^2.$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} inf \frac{N}{2}\|u_{\varepsilon'}\|_U^2 \leq \frac{N}{2}\|\overline{u}\|_U^2.$$

Devido ao fato de que $N > 0$ temos:

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} inf \|u_{\varepsilon'}\|_U \leq \|\overline{u}\|_U. \tag{3.4.15}$$

iv) Sabemos que $u_{\varepsilon'} \rightharpoonup \overline{u}$ e sendo $\|\cdot\|_U$ um funcional convexo, tem-se: $\|\overline{u}\|_U \leq \lim_{\varepsilon'\to 0} inf \|u_{\varepsilon'}\|_U$.

Logo, juntamente com (3.4.15), obtemos que:

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} inf \|u_{\varepsilon'}\|_U = \|\overline{u}\|_U.$$

Donde concluímos que existe uma subsequência $\{u_{\varepsilon''}\}$ de $\{u_{\varepsilon'}\}$, tal que, $\lim_{\varepsilon'' \to 0} \|u_{\varepsilon''}\| = \|\overline{u}\|_U$.

v) Agora temos, $u_{\varepsilon''} \rightharpoonup \overline{u}$ e $\|u_{\varepsilon''}\|_U \to \|\overline{u}\|_U$; assim, pela Proposição (1.2.2) decorre que $u_{\varepsilon''} \to \overline{u}$.

vi) Utilizaremos o seguinte resultado, de fácil demonstração por contradição.

"Seja $\{a_n\}$, tal que, para qualquer subsequência $\{a_{nk}\}$ de $\{a_n\}$ admite uma outra subsequência $\{a_{n\ell}\}$ convergindo para a. Suponha que a seja sempre o mesmo, isto é, é independente da subsequência. Então, $\{a_n\}$ converge para a".

E, em nosso caso, podemos concluir que:

$$u_\varepsilon \to \overline{u}, \quad \text{em } U, \quad \text{isto é,} \quad \|u_\varepsilon - \overline{u}\|_U \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

□

3.5 AS CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE PARA OS PROBLEMAS APROXIMADOS

PROPOSIÇÃO (3.5.1): Suponhamos que $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ é uma solução de (3.4.2), então, existem dois elementos $y_\varepsilon \in Y$, com $y_\varepsilon = \Phi_\Gamma$, em Γ e $p_\varepsilon \in Y_0$, tal que, o seguinte sistema é satisfeito:

$$\mu a(y_\varepsilon, z) + b(w_\varepsilon, y_\varepsilon, z) = \langle f + Bu_\varepsilon, z\rangle, \ \forall z \in Y_0. \tag{3.5.1}$$

$$\mu a(p_\varepsilon, z) - b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, z) - b(z, p_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon)(\nabla \times z)dx, \ \forall z \in Y_0. \tag{3.5.2}$$

$$(B^* p_\varepsilon + N u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \geq 0, \ \forall u \in K. \tag{3.5.3}$$

DEMONSTRAÇÃO: Desde que $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ é uma solução de (3.4.2), sabemos que existe y_ε correspondendo à $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$, o qual é solução de (3.4.1). Sendo assim, temos que $y_\varepsilon \in Y$, com $y_\varepsilon = \Phi_\Gamma$, em Γ e

$$\mu a(y_\varepsilon, z) + b(w_\varepsilon, y_\varepsilon, z) = \langle f + Bu_\varepsilon, z\rangle, \ \forall z \in Y_0.$$

Logo, obtemos que y_ε satisfaz (3.5.1).

Tomemos $p_\varepsilon \in Y_0$, satisfazendo:

$$(3.5.4) \qquad \begin{cases} \mu a(p_\varepsilon, z) - b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, z) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon)(\nabla \times z)dx + \\ \\ +\displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j})\nabla z_j dx, \ \forall z \in Y_0. \end{cases}$$

Agora, dados $w \in Y_0$ e $u \in U$, nós denotaremos por z_w e z_u, os elementos de Y_0, verificando:

$$(3.5.5) \qquad \mu a(z_w, z) + b(w_\varepsilon, z_w, z) + b(w, y_\varepsilon, z) = 0, \ \forall z \in Y_0;$$

e

$$(3.5.6) \qquad \mu a(z_u, z) + b(w_\varepsilon, z_u, z) = \langle Bu, z\rangle, \ \forall z \in Y_0,$$

respectivamente.

Passemos agora a verificar que J_ε é de classe C^1 e para todo $(w, u) \in Y_0 \times U$, teremos:

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)w = \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon)(\nabla \times z_w)dx + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}).(\nabla z_{wj} - \nabla w_j)dx.$$

De fato, vamos calcular

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)w = \frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon)\Big|_{t=0}.$$

Observemos que,

$$J_\varepsilon(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon) = J(y_\varepsilon^t, u_\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\ (\nabla y_{\varepsilon j}^t - \nabla(w_{\varepsilon j} + tw_j)\ |^2\ dx;$$

onde, em alguns momentos, denotaremos $y_\varepsilon^t = y(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon)$ e, mais adiante, usaremos o fato de que $y(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon)$ satisfaz (3.4.1), isto é, (3.5.7) $\mu a(y(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon), z) + b(w_\varepsilon + tw, y(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon), z) = \langle f + Bu_\varepsilon, z\rangle, \ \forall z \in Y_0.$

Derivando-se (3.5.7) e calculando-se em $t = 0$, temos que:

$$\mu a\Big(\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).w, z\Big) + b(w, y(w_\varepsilon, u_\varepsilon), z) + b\Big(w_\varepsilon, \frac{dy}{dt}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).w, z\Big) = 0 \ \forall z \in Y_0.$$

Devido à (3.5.5), obteremos:

$$\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)w = z_w. \tag{3.5.8}$$

Continuando a nossa verificação, temos que:

$$\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon) = \frac{d}{dt}J(y_\varepsilon^t, u_\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\Big[\int_\Omega |\nabla y_{\varepsilon j}^t - \nabla(w_{\varepsilon j} + tw_j)|^2\, dx\Big].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon) &= \frac{\partial J}{\partial y}(y_\varepsilon^t, u_\varepsilon).\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon).w + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\Big[\|\nabla y_{\varepsilon j}^t - \nabla w_{\varepsilon j} - t\nabla w_j\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] = \\
&= \frac{\partial J}{\partial y}(y_\varepsilon^t, u_\varepsilon).\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon).w \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\langle \nabla y_{\varepsilon j}^t - \nabla w_{\varepsilon j} - t\nabla w_j; \frac{d}{dt}(\nabla y_{\varepsilon j}^t - \nabla w_{\varepsilon j} - t\nabla w_j)\rangle_{L^2(\Omega)} = \\
&= \frac{\partial J}{\partial y}(y(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon), u_\varepsilon).\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon).w + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j}^t - \nabla w_{\varepsilon j} - t\nabla w_j).(\nabla\frac{d}{dt}y_j(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon) - \nabla w_j)dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon)\Big|_{t=0} &= \frac{\partial J}{\partial y}(y(w_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon)\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).w + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_j(w_\varepsilon, u_\varepsilon) - \nabla w_{\varepsilon j}).\Big(\nabla\frac{d}{dt}y_j(w_\varepsilon, u_\varepsilon) - \nabla w_j\Big)dx.
\end{aligned}$$

E, pela igualdade (3.5.8), tem-se que:

$$\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon + tw, u_\varepsilon)\Big|_{t=0} = \frac{\partial J}{\partial y}(y(w_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon).z_w + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}).(\nabla z_{wj} - \nabla w_j)dx.$$

Mas, $\dfrac{\partial J}{\partial y}(y_\varepsilon, u_\varepsilon).z_w = \dfrac{dJ}{dt}(y_\varepsilon + tz_w, u_\varepsilon)\Big|_{t=0}$.

Ora,

$$J(y_\varepsilon + tz_w, u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \times (y_\varepsilon + tz_w)|^2\, dx + \frac{N}{2}\|u_\varepsilon\|_U^2.$$

Assim,

$$J(y_\varepsilon + tz_w, u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\|\nabla \times (y_\varepsilon + tz_w)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{N}{2}\|u_\varepsilon\|_U^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(y_\varepsilon + tz_w, u_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla \times (y_\varepsilon + tz_w)\|_{L^2(\Omega)}^2\right] = \\
&= \langle \nabla \times (y_\varepsilon + tz_w); \nabla \times \frac{d}{dt}(y_\varepsilon + tz_w)\rangle_{L^2(\Omega)} = \\
&= \langle \nabla \times (y_\varepsilon + tz_w); \nabla \times z_w\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{d}{dt}J(y_\varepsilon + tz_w, u_\varepsilon)\Big|_{t=0} = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon).(\nabla \times z_w)dx$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)w &= \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon).(\nabla \times z_w)dx + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}).(\nabla z_{wj} - \nabla w_j)dx = \\
&= \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon)(\nabla \times z_w)dx + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j})\nabla z_{wj}dx - \\
&- \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j})\nabla w_j\, dx.
\end{aligned}$$

Usando (3.5.4), com $z = z_w$, vem que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).w &= \mu a(p_\varepsilon,z_w)-b(w_\varepsilon,p_\varepsilon,z_w)-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_{\varepsilon j}-\nabla w_{\varepsilon j}).\nabla w_j\;dx=\\
&= \mu a(z_w,p_\varepsilon)+b(w_\varepsilon,z_w,p_\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_{\varepsilon j}-\nabla w_{\varepsilon j}).\nabla w_j\;dx.
\end{aligned}
$$

E, por (3.5.5) com $z=p_\varepsilon$:

$$
\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).w=-b(w,y_\varepsilon,p_\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_{\varepsilon j}-\nabla w_{\varepsilon j}).\nabla w_j\;dx.
$$

Portanto,

$$
\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).w=b(w,p_\varepsilon,y_\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_{\varepsilon j}-\nabla w_{\varepsilon j}).\nabla w_j\;dx. \tag{3.5.9}
$$

Da mesma forma, verificaremos agora que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon,u_\varepsilon)u &= \int_\Omega(\nabla\times y_\varepsilon)(\nabla\times z_u)dx+N(u_\varepsilon,u)_U+\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_{\varepsilon j}-\nabla w_{\varepsilon j})\nabla z_{uj}\;dx.
\end{aligned}
$$

De fato, vamos calcular

$$
\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon,u_\varepsilon)u=\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)\Big|_{t=0}.
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu) &= J(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu),u_\varepsilon+tu)+\\
&+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega\mid\nabla y_j(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)-\nabla w_{\varepsilon j}\mid^2dx.
\end{aligned}
$$

Agora utilizaremos que $y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)$ satisfaz (3.4.1), ou seja,

$$\begin{aligned}\mu a(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu);z) &+ b(w_\varepsilon,y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu),z) = \\ &= \langle f+B(u_\varepsilon+tu),z\rangle,\ \forall z\in Y_0.\end{aligned}$$

Derivando-se e calculando-se em $t=0$, tem-se:

$$\mu a\Big(\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).u,z\Big)+b(w_\varepsilon;\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).u,z)=\langle Bu,z\rangle,\ \forall z\in Y_0.$$

Assim de (3.5.6) decorre que

(3.5.10) $$\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).u=z_u.$$

Voltando-se à verificação:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu) &= \frac{\partial J}{\partial y}(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu),u_\varepsilon+tu).\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu).u+ \\ &+ \frac{\partial J}{\partial(u_\varepsilon+tu)}(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu),u_\varepsilon+tu).\frac{d}{dt}(u_\varepsilon+tu)+ \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla y_j(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)-\nabla w_{\varepsilon j}\|^2_{L^2(\Omega)}\right].\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu) &= \frac{\partial J}{\partial y}(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu),u_\varepsilon+tu).\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu).u+ \\ &+ \frac{\partial J}{\partial(u_\varepsilon+tu)}(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu),u_\varepsilon+tu).u+ \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\langle\nabla y_j(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)-\nabla w_{\varepsilon j};\nabla\frac{d}{dt}(y_j(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu))\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)\Big|_{t=0} &= \frac{\partial J}{\partial y}(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon),u_\varepsilon).\frac{dy}{dt}(w_\varepsilon,u_\varepsilon).u+ \\ &+ \frac{\partial J}{\partial u_\varepsilon}(y(w_\varepsilon,u_\varepsilon),u_\varepsilon).u+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_j(w_\varepsilon,u_\varepsilon)- \\ &- \nabla w_{\varepsilon j})(\nabla\frac{d}{dt}y_j(w_\varepsilon,u_\varepsilon))dx.\end{aligned}$$

E por (3.5.10), obteremos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_\varepsilon(w_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)\Big|_{t=0} &= \frac{\partial J}{\partial y}(y_\varepsilon,u_\varepsilon).z_u+\frac{\partial J}{\partial u_\varepsilon}(y_\varepsilon,u_\varepsilon).u+\\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla y_{\varepsilon j}-\nabla w_{\varepsilon j})\nabla z_{uj}dx.\end{aligned}$$

Mas, $\frac{\partial J}{\partial y}(y_\varepsilon,u_\varepsilon).z_u=\frac{d}{dt}J(y_\varepsilon+tz_u,u_\varepsilon)\Big|_{t=0}$.

Ora,

$$J(y_\varepsilon+tz_u,u_\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_\Omega\mid\nabla\times(y_\varepsilon+tz_u)\mid^2dx.+\frac{N}{2}\|u_\varepsilon\|_U^2,$$

o qual se torna:

$$=\frac{1}{2}\|\nabla\times(y_\varepsilon+tz_u)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{N}{2}\|u_\varepsilon\|_U^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(y_\varepsilon+tz_u,u_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla\times(y_\varepsilon+tz_u)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]=\\ &= \langle\nabla\times(y_\varepsilon+tz_u),\nabla\times\left(\frac{d}{dt}(y_\varepsilon+tz_u)\right)\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle\nabla\times(y_\varepsilon+tz_u);\nabla\times z_u\rangle_{L^2(\Omega)};\end{aligned}$$

donde $\frac{d}{dt}J(y_\varepsilon+tz_u,u_\varepsilon)\Big|_{t=0}=\int_\Omega(\nabla\times y_\varepsilon)(\nabla\times z_u)dx.$

Agora como, $\frac{\partial J}{\partial u_\varepsilon}(y_\varepsilon,u_\varepsilon)u=\frac{d}{dt}J(y_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)\Big|_{t=0}$ e, temos

$$J(y_\varepsilon,u_\varepsilon+tu)=\frac{1}{2}\int_\Omega\mid\nabla\times y_\varepsilon\mid^2dx+\frac{N}{2}\|u_\varepsilon+tu\|_U^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(y_\varepsilon,u_\varepsilon+tu) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla\times y_\varepsilon\|^2_{(L^2(\Omega))}\right]+\frac{N}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_\varepsilon+tu\|_U^2\right]=\\ &= N\Big(u_\varepsilon+tu;\frac{d}{dt}(u_\varepsilon+tu)\Big)_U.\end{aligned}$$

Portanto, $\left.\dfrac{d}{dt}J(y_\varepsilon, u_\varepsilon + tu)\right|_{t=0} = N(u_\varepsilon, u)_U$.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)u &= \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon).(\nabla \times z_u)dx + N(u_\varepsilon, u)_U + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j})\nabla z_{uj}dx.\end{aligned}$$

Por (3.5.4); com $z = z_u$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)u &= \mu a(p_\varepsilon, z_u) - b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, z_u) + N(u_\varepsilon, u)_U = \\ &= \mu a(z_u, p_\varepsilon) + b(w_\varepsilon, z_u, p_\varepsilon) + N(u_\varepsilon, u)_U.\end{aligned}$$

E de (3.5.6), com $z = p_\varepsilon$:

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).u = \langle Bu, p_\varepsilon\rangle + N(u_\varepsilon, u)_U = (B^*p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, u)_U. \tag{3.5.11}$$

Desde que $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ é solução de (3.4.2), tem-se:

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).w = 0, \quad \forall w \in Y_0 \text{ e } \frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon, u_\varepsilon)(u - u_\varepsilon) \geq 0, \ \forall u \in K.$$

Assim,

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial u}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).(u - u_\varepsilon) = (B^*p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, u - u_\varepsilon)_U \geq 0, \ \forall u \in K;$$

e obtemos (3.5.3).

Agora, de (3.5.9) temos

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial w}(w_\varepsilon, u_\varepsilon).w = b(w, p_\varepsilon, y_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j})\nabla w_j dx = 0, \ \forall w \in Y_0.$$

Portanto

$$b(w, p_\varepsilon, y_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega (\nabla y_{\varepsilon j} - \nabla w_{\varepsilon j}).\nabla w_j dx. \tag{3.5.12}$$

Usando (3.5.12), com $w = z$ e por (3.5.4) segue-se que:

$$\mu a(p_\varepsilon, z) - b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, z) = \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon).(\nabla \times z)dx + b(z, p_\varepsilon, y_\varepsilon), \ \forall z \in Y_0.$$

Logo,

$$\mu a(p_\varepsilon, z) - b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, z) - b(z, p_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon).(\nabla \times z)dx, \ \forall z \in Y_0.$$

e, daí, obtemos (3.5.2) □

É óbvio que essas condições de otimalidade (3.5.1) à (3.5.3) podem ser escritas da seguinte forma:

COROLÁRIO (3.5.2): Se $(w_\varepsilon, u_\varepsilon)$ é uma solução de (3.4.2), então, existem elementos $y_\varepsilon, p_\varepsilon \in (H^1(\Omega))^3$ e $\lambda_\varepsilon, \pi_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, tais que

$$\text{(3.5.13)} \qquad \begin{cases} -\mu\Delta y_\varepsilon + (w_\varepsilon.\nabla)y_\varepsilon + \nabla\pi_\varepsilon = f + Bu_\varepsilon, \text{ em } \Omega, \\ div\ y_\varepsilon = 0, \text{ em } \Omega; y_\varepsilon = \Phi_\Gamma, \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{(3.5.14)} \qquad \begin{cases} -\mu\Delta p_\varepsilon - (w_\varepsilon.\nabla)p_\varepsilon + (\nabla y_\varepsilon)^T p_\varepsilon + \nabla\lambda_\varepsilon = \nabla \times (\nabla \times y_\varepsilon), \text{ em } \Omega, \\ div\ p_\varepsilon = 0, \text{ em } \Omega; p_\varepsilon = 0, \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{(3.5.15)} \qquad (B^* p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, u - u_\varepsilon)_U \geq 0, \ \forall u \in K.$$

3.6 PROVA DO TEOREMA (3.3.1): Conforme mencionamos anteriormente, para provarmos o teorema tomaremos limites nas condições de otimalidade (3.5.1)–(3.5.3) e nos utilizaremos da Proposição (3.4.1). Nesse processo o ponto essencial é a limitação de $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ em $(H^1(\Omega))^3$.

Primeiramente assumiremos que $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é limitada em $(L^2(\Omega))^3$.

Escolhendo em (3.5.2), $z = p_\varepsilon \in Y_0$ e relembrando as propriedades de b, teremos:

$$\mu a(p_\varepsilon, p_\varepsilon) + b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, p_\varepsilon) - b(p_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon)(\nabla \times p_\varepsilon)dx.$$

Assim,

$$\mu a(p_\varepsilon,p_\varepsilon)+b(p_\varepsilon,y_\varepsilon,p_\varepsilon)=\int_\Omega(\nabla\times y_\varepsilon)(\nabla\times p_\varepsilon)dx.$$

Daí,

$$\|p_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega))^3}\leq\mid a(p_\varepsilon,p_\varepsilon)\mid\leq\frac{1}{\mu}\left|\int_\Omega(\nabla\times y_\varepsilon)(\nabla\times p_\varepsilon)dx\right|+\frac{1}{\mu}\mid b(p_\varepsilon,y_\varepsilon,p_\varepsilon)\mid.$$

Logo,

$$\|p_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega))^3}\leq C_1\left[\|p_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3}+\mid b(p_\varepsilon,y_\varepsilon,p_\varepsilon)\mid\right].$$

Em consequência,

$$\|p_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega))^3}\leq C_1\|p_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3}+C_2\|p_\varepsilon\|^2_{(L^4(\Omega))^3}. \tag{3.5.16}$$

Da desigualdade (Temam [1], pág. 296):

$$\|p_\varepsilon\|_{(L^4(\Omega))^3}\leq\sqrt{2}\|p_\varepsilon\|^{\frac{1}{4}}_{(L^2(\Omega))^3}.\|p_\varepsilon\|^{\frac{3}{4}}_{(H^1(\Omega))^3}. \tag{3.5.17}$$

Daí,

$$\|p_\varepsilon\|^2_{(L^4(\Omega))^3}\leq 2\|p_\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{(L^2(\Omega))^3}.\|p_\varepsilon\|^{\frac{3}{2}}_{(H^1(\Omega))^3}.$$

E, juntamente com (3.5.16), obteremos:

$$\|p_\varepsilon\|^2_{(H^1(\Omega))^3}\leq C_1\|p_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3}+2C_2\|p_\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{(L^2(\Omega))^3}.\|p_\varepsilon\|^{\frac{3}{2}}_{(H^1(\Omega))^3}.$$

Portanto

$$\|p_\varepsilon\|^2_{(H^1(\Omega))^3}\leq C_1\|p_\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3}+C_3\|p_\varepsilon\|^{\frac{3}{2}}_{(H^1(\Omega))^3},$$

o qual prova a limitação de $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ em $(H^1(\Omega))^3$.

Daí, nós podemos extrair uma subsequência, também denotada por p_ε, e um elemento $\overline{p}\in(H^1(\Omega))^3$, tal que, $p_\varepsilon\rightharpoonup\overline{p}$, em $(H^1(\Omega))^3$.

E, facilmente podemos passar o limite em (3.5.2), usando (3.4.4) e (3.4.5) e obtermos; para todo $z\in Y_0$:

$$\mu a(\overline{p},z)-b(\overline{y},\overline{p},z)-b(z,\overline{p},\overline{y})=\int_\Omega(\nabla\times\overline{y}).(\nabla\times z)dx;$$

daqui segue a existência de $\overline{\lambda} \in L^2(\Omega)$, verificando (3.3.3) com $\alpha = 1$. E ainda podemos observar que, como $p_\varepsilon \in Y_0$ e $p_\varepsilon \rightharpoonup \overline{p}$, temos que $\overline{p} \in Y_0$, ou seja, $div\overline{p} = 0$, em Ω e $\overline{p} = 0$, em Γ.

Analogamente, podemos passar o limite em (3.5.1) e obtermos:

$$\mu a(\overline{y}, z) + b(\overline{y}, \overline{y}, z) = \langle f + Bu; z\rangle \ \forall z \in Y_0;$$

donde, sabemos que existe $\overline{\pi} \in L^2(\Omega)$, tal que, $(\overline{y}, \overline{\pi})$ e $\overline{u}$ satisfazem (3.3.2), como queríamos.

Finalmente, para passarmos o limite em (3.5.3) e obtermos (3.3.4) com $\alpha = 1$ é preciso que consideremos que $N > 0$, ou que a aplicação linear e contínua B seja também compacta.

De fato, $0 \leq (B^*p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, u - u_\varepsilon)_U = (B^*p_\varepsilon, u - u_\varepsilon)_U + (Nu_\varepsilon, u - u_\varepsilon)_U$; daí, $0 \leq \langle p_\varepsilon, B(u - u_\varepsilon)\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} + N(u_\varepsilon, u)_U - N\|u_\varepsilon\|_U^2$.
Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq lim\ inf\langle p_\varepsilon, B(u - u_\varepsilon)\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} + lim\ infN(u_\varepsilon, u)_U - Nlim\ inf\|u_\varepsilon\|_U^2 \leq \\ &\leq lim\ inf\langle p_\varepsilon, B(u - u_\varepsilon)\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} + lim\ infN(u_\varepsilon, u)_U - N.\|\overline{u}\|_U^2; \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\| \cdot \|^2$ é fracamente s.c.i. e $u_\varepsilon \rightharpoonup \overline{u}$, em U.

Se $N > 0$, nós temos que $u_\varepsilon \rightarrow \overline{u}$, em U, e como B é contínua segue-se que $B(u - u_\varepsilon) \rightarrow B(u - \overline{u})$, em $(H^{-1}(\Omega))^3$; daí como $p_\varepsilon \rightharpoonup \overline{p}$ em $(H_0^1(\Omega))^3$, tem-se que $\langle p_\varepsilon, B(u - u_\varepsilon)\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} \rightarrow \langle \overline{p}, B(u - \overline{u})\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq lim\langle p_\varepsilon, B(u - u_\varepsilon)\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} + limN(u_\varepsilon, u)_U - N\|\overline{u}\|_U^2 = \\ &= \langle \overline{p}, B(u - \overline{u})\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} + N(\overline{u}, u)_U - N.\|\overline{u}\|_U^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$(B^*\overline{p}, u - \overline{u})_U + (N\overline{u}, u - \overline{u})_U = (B^*\overline{p} + N\overline{u}, u - \overline{u})_U \leq 0, \ \forall u \in K.$$

Agora se $N = 0$, é preciso que a aplicação B seja compacta. Assim, $0 \leq (B^*p_\varepsilon, u - u_\varepsilon)_U = \langle p_\varepsilon, B(u - u_\varepsilon)\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3}$; e como $u - u_\varepsilon \rightharpoonup u - \overline{u}$, em U e B

é compacta tem-se que $B(u-u_\varepsilon) \to B(u-\overline{u})$, em $(H^{-1}(\Omega))^3$.
Portanto, $lim\langle p_\varepsilon, B(u-u_\varepsilon)\rangle \geq 0$, logo, $\langle \overline{p}, B(u-\overline{u})\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3,(H^{-1}(\Omega))^3} \geq 0$, ou seja, $(B^*\overline{p}, u-\overline{u})_U \geq 0,\ \forall u \in K$; como queríamos mostrar.

Agora, se $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ não é limitada em $(L^2(\Omega))^3$, nós tomaremos $\alpha_\varepsilon = \dfrac{1}{\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$ e, redefiniremos $\alpha_\varepsilon.p_\varepsilon$ por p_ε. Assim, (3.5.2) e (3.5.3) se tornam:

$$(3.5.18)\quad \mu a(p_\varepsilon, z) - b(w_\varepsilon, p_\varepsilon, z) - b(z, p_\varepsilon, y_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon \int_\Omega (\nabla \times y_\varepsilon).(\nabla \times z)dx,\ \forall z \in Y_0$$

$$(3.5.19)\qquad (B^*p_\varepsilon + \alpha_\varepsilon N u_\varepsilon, u-u_\varepsilon)_U \geq 0,\ \forall u \in K.$$

E, repetindo o argumento anterior, nós derivamos (3.3.2)-(3.3.4), com $\alpha = 0$. Realmente, passando o limite em (3.5.18): $\mu a(\overline{p}, z) - b(\overline{y}, \overline{p}, z) - b(z, \overline{p}, \overline{y}) = 0,\ \forall z \in Y_0$ a qual é (3.3.3) com $\alpha = 0$. E em (3.5.19): $(B^*\overline{p}, u-\overline{u})_U \geq 0,\ \forall u \in K$ desde que assumimos que a aplicação B seja compacta; obtendo assim (3.3.4), com $\alpha = 0$. Da mesma forma, obtemos (3.3.2) facilmente.

Resta-nos provar (3.3.1). No caso em que $\alpha \neq 0$, tem-se (3.3.1) trivialmente. Se $\alpha = 0$, precisamos provar que $\overline{p} \neq 0$:

Da convergência fraca $p_\varepsilon \rightharpoonup \overline{p}$, em $(H^1(\Omega))^3$ e teorema de Imersão de Sobolev segue a convergência forte de p_ε a $\overline{p}$ em $(L^2(\Omega))^3$, o qual prova, relembrando a redefinição de p_ε que, $\|\overline{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} = 1$.

De fato, como $p_\varepsilon \to \overline{p}$, em $(L^2(\Omega))^3$; teremos, $\|p_\varepsilon - \overline{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} \to 0$; assim, $|\ \|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} - \|\overline{p}\|_{(L^2(\Omega))^3}\ | \leq \|p_\varepsilon - \overline{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} \to 0$.

Daí,

$$\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} \longrightarrow \|\overline{p}\|_{(L^2(\Omega))^3},\ \text{quando } \varepsilon \to 0;$$

e

$$\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} = \|\alpha_\varepsilon.p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} = \left\|\frac{1}{\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}}.p_\varepsilon\right\| = \frac{1}{\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}}.\|p_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} = 1.$$

Logo,

$$\|\overline{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} = 1,\quad \text{donde}\ \ ,\overline{p} \neq 0.$$

$\square$

Com isto está provado o teorema que expressa as condições de otimalidade para o nosso problema de controle.

REFERÊNCIAS

[1] ABERGEL, F. and CASAS, E. – *Some Optimal Control Problems of Multistate Equations Appearing in Fluid Mechanics.* Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M^2AN). Vol. 27, nº 2, (1993), pág. 223 à 247.

[2] ADAMS, R.A. – *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, (1975).

[3] BREZIS, H. – *Analyse Fonctionnelle.* Masson, Paris, (1983).

[4] DICKSTEIN, F. e ACKER, F. – *Uma Introdução à Ánalise Convexa.* Copyright, (1983).

[5] TEMAM, R. – *Navier-Stokes Equations.* North-Holland, Amsterdam, (1979).