BALANCEAMENTO DETALHADO NA EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK.

ANTONIO JUSTINO RUAS MADUREIRA

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida pelo aluno Antonio Justino Ruas Madureira e aprovada pela comissão julgadora.

14 de dezembro de 1988

Orientador :

Prof. Dr. VINCENT BUONOMANO

Dissertação apresentada no Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Outubro - 1988.

Pelo carinho, à

Sandra e Suely.

MEUS AGRADECIMENTOS

Em especial, ao Prof. Dr. Vincent Buonomano, pela sugestão, estímulos e orientação do trabalho.

Aos professores do IFGW e do IMECC (em especial àqueles do Departamento Matemática Aplicada), pelo apoio, estímulos e ensinamentos.

À Sil, pelas figuras do texto.

Aos meus amigos, como a Maria Ignês, a Natália, e à Suely, pelo acompanhamento, carinho e incentivo.

Aos bibliotecários do IMECC e do IFGW, pela disposição e atenção.

À CAPES e à CPG-IFGW, pelo apoio administrativo financeiro.

RESUMO

Apresentaremos as condições de Balanceamento Detalhado (BD) para a equação de Fokker-Planck, e daremos dois exemplos de sistemas físicos em BD, ou seja, obteremos a distribuição de Boltzmann para partículas em movimento Browniano, e a largura de linha de um laser mono modo não sintonizado.

ÍNDICE

INTRODUÇAO

Em 1828, o botânico inglês R. Brown, observando grãos de pólen disseminados na água, viu que estes apresentavam movimentos caóticos. Posteriormente, em 1905, A. Einstein publica um trabalho onde constroe um modelo físico-matemático, baseado em considerações mecânica-estatísticas, deduzindo a importante equação do movimento das partículas em Movimento Browniano, a equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

na qual $\rho = \rho(xt)$ representa a concentração ou densidade de probabilidade das partículas estarem, no tempo t, no intervalo $(x,x+dx)$, e D é a constante de difusão. Este trabalho veio, no início deste século, confirmar a hipótese, ainda um tanto combatida, da existência real do átomo. Com ele também começou o desenvolvimento da teoria de processos aleatórios (estocásticos).

Pesquisadores de diversas áreas, e em número cada vez maior, tem mostrado interesse na teoria de processos estocásticos. Ela hoje tornou-se numa poderosa ferramenta de investigação em diversas áreas da ciência, e em particular na física estatística de sistemas fora do equilíbrio.

A evolução de um processo estocástico é descrito usualmente com a equação de Langevin, ou equação de Fokker-Planck. A equação de Langevin dá a evolução temporal do processo estocástico X(t), enquanto a equação de Fokker-Planck dá a evolução da densidade de probabilidade dos estados X(t). Existe uma equivalência entre as equações de Langevin e de Fokker-Planck.

Este trabalho se interessa e selimita a uma situação bem particular da equação de Fokker-Planck. É suposto, sobre o processo estocástico que esta descreve, certas condições, as quais são chamadas condições de *Balanceamento Detalhado* (BD). Elas nos dão o balanceamento das probabilidades das transições entre dois estados, localmente, i.e., são iguais a probabilidade conjunta de estar num tempo t_A, no estado **A** e em **B** no tempo t_B posterior, e a probabilidade conjunta de estar no estado **B** em t_A e em **A** no tempo t_B. Estas condições são satisfeitas por muitos sistemas físicos, como os sistemas em equilíbrio e fora do equilíbrio térmico. A figura 1 abaixo mostra duas situações físicas de transições de estados, uma satisfazendo fig.(1.b), e outra não fig.(1.a), as condições BD.

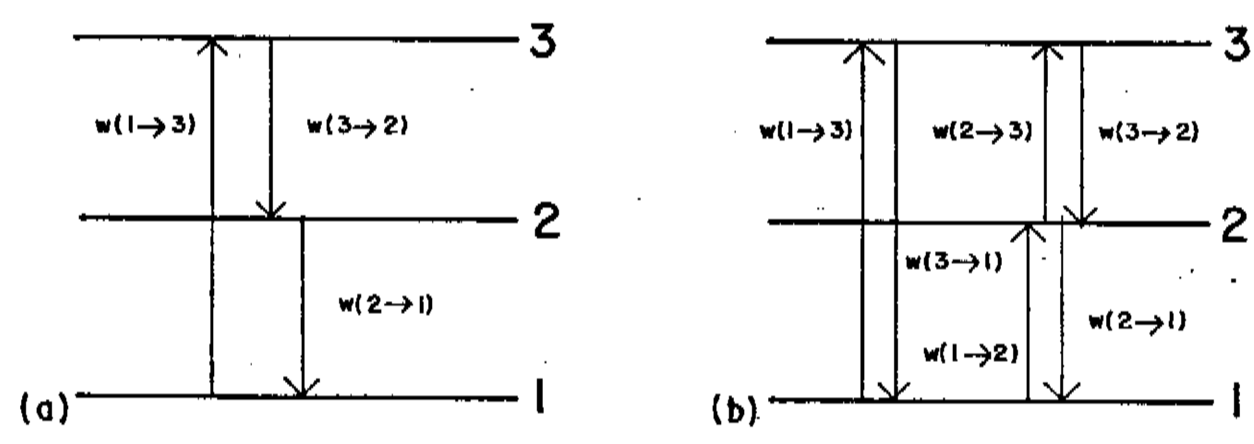


Fig. 1. Balanceamento Detalhado é violado em (a). A corrente de probabilidade é dada por $J = w(1 \to 3)\ \rho_1 = w(3 \to 2)\ \rho_3 = w(2 \to 1)\ \rho_2$. Se $w(i \to j) = w(j \to i)\ \rho_j/\ \rho_i$ o balanceamento detalhado é satisfeito em (b). Aqui ρ_i é a denidade de probabilidade de estado i e $w(i \to j)$ é a taxa de variação temporal da densidade de probabilidade condicional do sistema ir para o estado j dado que ele esta no estado i. Risken (1984).

Neste trabalho apresentaremos:

No capítulo I, os preliminares matemáticos, i.e., a teoria de probabilidade e processos estocásticos, necessários à compreenção do capítulo seguinte.

No capítulo II, damos a solução potencial da equação FP uni e multidimensional com variáveis pares (mantêm inalteradas por inversão temporal) e ímpares (o valor da variável aleatória x passa para -x, quando t passa para -t, i.e., por inversão temporal), obtemos as condições de balanceamento detalhado na forma de operadores, e envolvendo os coeficientes da equação FP.

No capítulo III, apresentamos dois exemplos de sistemas físicos em movimento Browniano, que satisfazem as condições de Balanceamento Detalhado, ou seja, obtemos a distribuição de velocidade (Boltzmann) de um sistema de partículas em movimento Browniano, sujeito a um potencial U(r); e calculamos a largura de linha um Laser mono modo não sintonizado, próximo ao limiar (threshold).

CAPÍTULO I

INTRODUÇAO : Daremos aqui os preliminares matemáticos, i.e., a teoria de processos estocásticos necessária à compreensão dos capítulos seguintes deste trabalho. Não discutiremos a teoria na situação mais geral: faremos uma breve revisão dos principais resultados da teoria de processos estocásticos (demomstraremos alguns destes resultados e outros não, sem justificativas), a saber : I.i) Processos Estocásticos, I.ii) Processo de Markov, I.iii) Equação Diferencial Estocástica, I.iv) Equação de Fokker-Planck.

I.i) PROCESSO ESTOCASTICO - A evolução em tempo de um sistema físico é chamado um processo estocástico quando o sistema muda de acordo com leis probabilísticas. Como um exemplo tipicamente físico, podemos imaginar um sistema de partículas que estão suspensas num líquido sob o movimento dos choques aleatórios e sucessívos entre elas. A representação gráfica do movimento de uma destas partículas é uma realização do processo estocástico.

Antes de definir formalmente um processo estocástico, apresentaremos alguns conceitos básicos de probabilidade, principalmente para desenvolvermos a notação que usaremos.

I.i.A) *Variável Aleatória*

Seja Ω um conjunto e F uma *σ-álgebra* de subconjuntos de Ω, i.e., F satisfaz:

1) Se $A_n \in F$ para $n = 1,2,\ldots$, então $U_n A_n \in F$, onde $U_n A_n$ é a união dos A_n, $n = 1,2,\ldots$;

2) Se $A \in F$ então o seu complementar $(\Omega - A) \in F$;

3) $\emptyset \in F$, onde $\emptyset$ é o conjunto vazio.

A *σ-álgebra de Borel* β em R é a σ-álgebra gerada por todas as bolas (intervalos) abertas em R.

Um elemento A de uma σ-álgebra F é denominado de um conjunto *mensurável*, o qual chamaremos de evento.

Medida é uma função m não negativa, definida em uma σ-álgebra F tal que:

1) $m(\emptyset) = 0$;

2) Se A_i é uma sequência de subconjuntos disjuntos em F, então $m(U_i\ A_i) = \Sigma_i\ m(A_i)$, com $i = 1,2,\ldots$.

Uma medida P_r definida em F é denominada *medida de probabilidade* se $P_r(\Omega) = 1$. O número $P_r(A)$, $A \in F$, é chamado a probabilidade do evento A. Um conjunto Ω, junto com uma σ-álgebra F e uma medida de probabilidade P_r em F, constitui o que chamamos de um *espaço de probabilidade*, denotamos por (Ω,F,P_r) ou $\Omega(F,P_r)$ ou simplismente (Ω,P_r). Com esses conceitos em mente, definiremos variável aleatória e então, processo estocástico.

Definição: Uma *variável aleatória* é uma aplicação X tal que

$$X : \Omega \rightarrow R ,$$

e

$$X^{-1}(B) \in F \quad , \quad \text{qualquer que seja } B \in \beta$$

onde (Ω,F,P_r) é um espaço de probabilidade e β o σ-álgebra de Borel em R.

Definiremos agora o que vem a ser um processo estocástico.

Definição: Seja D um subconjunto conexo dos números reais, e (Ω,F,P_r) um espaço de probabilidade. Um *Processo estocástico* X(t) é uma função de duas variáveis:

$$X : D \times \Omega \rightarrow R ,$$

$$(t,w) \rightarrow X(t,w) ,$$

onde $t \in D$ e $w \in \Omega$, e tal que, para cada t fixo,

$$X_t : \Omega \rightarrow R ,$$

definida por

$$X_t(w) \equiv X(t,w) = x ,$$

é uma variável aleatória. Isto é, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas pelo conjunto D.

Fixando um evento elementar $w \in \Omega$, obtemos uma função

$$X_w : D \rightarrow R$$

que são denominadas *trajetórias ou realizações do processo*.

No que segue, consideraremos o espaço de estado contínuo, i.e., mudanças de estado estão ocorrendo em todo instante de tempo (variável aleatória $X_t \equiv X$ contínua em $t \in D$). Consideraremos daqui em diante $D \equiv R$.

I.1.B) *Função Densidade de Probabilidade*

Dado um número real x, consideramos o evento

$$I_X = (w : X(w) \leq x) ,$$

onde X é agora uma variável aleatória.

Sua probabilidade $P_r(I_X) = P_X$ depende de x e é denominada a *função distribuição da variável aleatória* X_t, a qual é definida por

$$P_X : R \rightarrow R_+ .$$

$$P_X(x) = P_r(w : X(w) \leq x)$$

para qualquer $x \in R$ e $w \in \Omega$.

São propriedades da função distribuição $P_X(x)$:

1) $P_X(-\infty) = 0$; $P_X(+\infty) = 1$.

2) P_X é uma função não decrescente de x, i.e., $P_X(x_1) \leq P_X(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

3) P_X é contínua à direita.

Se a função P_X for absolutamente contínua e diferenciável para todo x, então sua derivada

$$\frac{dP_X(x)}{dx} = \rho(x) , \tag{1}$$

existe (o que assumiremos daqui por diante), e é chamada *densidade de probabilidade*. A partir da eq.(1) vemos que

$$dP_X(x) = \rho(x)dx,$$

isto é, $\rho(x)dx$ é a probabilidade de encontrar o valor da variável aleatória X no intervalo $(x,x+dx)$, pois

$$dP_X(x) = P_r(w : X(w) \leq x+dx) - P_r(w : X(w) \leq x) .$$

I.1.C) *Densidade de probabilidade conjunta e condicional*

Podemos estender o conceito de densidade de probabilidade para calcular a probabilidade em que as variáveis aleatória $X_{t1}, \ldots, X_{t2}$ estejam no intervalo $(x_1,x_1+dx_1); \ldots; (x_n,x_n+dx_n)$, no tempo $t_1, \ldots, t_n$, respectivamente. Denotamos tal probabilidade por $\rho(x_1t_1, \ldots, x_nt_n)\, dx_1 \ldots dx_n$, e denominamos $\rho(x_1t_1, \ldots, x_nt_n)$ a *densidade de probabilidade conjunta*.

A *densidade de probabilidade condicional* P que o sistema (um sistem descrito por um processo estocástico tem seu estado representado pela variável aleatória X) ocupe a posição x_{n+1} no tempo t_{n+1}, dado que o sistema esteve em $x_1, \ldots, x_n$, nos tempos $t_1, \ldots, t_n$, é definida por

$$P(x_1t_1,\ldots,x_nt_n/x_{n+1}t_{n+1}) = \frac{\rho(x_1t_1,\ldots,x_{n+1}t_{n+1})}{\rho(x_1t_1,\ldots,x_nt_n)} \quad , \tag{2}$$

desde que $\rho(x_1t_1,\ldots,x_nt_n) \neq 0$.

As funções densidade de probabilidade condicional satisfazem a seguinte equação :

$$P(x_1t_1,\ldots,x_{n-1}t_{n-1}/x_{n+1}t_{n+1}) =$$

$$= \mathrm{Int}(P(x_1t_1,\ldots,x_{n-1}t_{n-1}/x_nt_n)\ P(x_1t_1,\ldots,x_nt_n/x_{n+1}t_{n+1})\ dx_n) \quad , \tag{3}$$

onde Int(f(x) dx) é a integral de f(x) sobre todo o domínio da variável x.

I.1.D) *Estacionariedade e Homogeneidade*

I.1.D.1) *Estacionariedade* - Dizemos que um processo X(t) é *estacionário* se

$$\rho(x_1t_1,\ldots,x_nt_n) = \rho(x_1,t_1+\eta;\ldots;x_n,t_n+\eta) \quad , \tag{4}$$

para todo n = 1,2,..., e toda constante arbitrária $\eta \in R$.

I.1.D.2) *Homogênidade* - Um sistema é dito *homogêneo* se

$$P(x_1t_1/x_2t_2) = P(x_1,t_1+\eta/x_2,t_2+\eta) \quad ,$$

qualquer que seja $\eta \in R$.

Lema: Se um sistema for estacionário, o será também homogêneo.

Prova:

$$P(x_1t_1/x_2t_2) = \frac{\rho(x_1t_1,x_2t_2)}{\rho(x_1t_1)}$$

$$= \frac{\rho(x_1,t_1+\eta;x_2,t_2+\eta)}{\rho(x_1,t_1+\eta)}$$

$$= P(x_1,t_1+\eta/x_2,t_2+\eta) \ ,$$

onde temos usado a equação (4) com, n = 1,2, na segunda igualdade.

I.1.E) *Esperança, Variancia, Covariancia*

Muito importante na teoria de probabilidade e em suas aplicações são certas parâmetros que são obtidos de acordo com regras específicas, através da função densidade de probabilidade. Eles nos dão uma descrição quantitativa e geral das variáveis aleatória. De particular interesse são: a esperança, a variância, o momento, e a covariância, as quais passamos a descrever.

I.1.E.1) *Esperança* - Seja X uma variável aleatória contínua e $\rho(x)$ a sua densidade de probabilidade. A *esperança* ou *valor médio* de X é definido por:

$$E(X) = \mathrm{Int}(x\ \rho(x)\ dx) \ . \tag{6}$$

Usaremos também, neste trabalho, a notação $\langle X \rangle$ para a esperança de X.

São propriedades da esperança:

a) Para toda constante real c,

$$E(cx) = c\ E(x) \ .$$

b) Se X_1, ..., X_n são variáveis aleatória com esperanças, então a esperança de sua soma existe e é a soma de suas esperanças,

$$E(x_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) \ .$$

c) Se X_1, ..., X_n são *variáveis aleatória independentes*, i.e., a densidade de probabilidade conjunta for dada por

$$\rho(x_1,\ldots,x_n) = \rho(x_1)\ \ldots\ \rho(x_n) \ ,$$

com esperança finita, então seu produto é uma variável aleatória com esperança finita e igual ao produto das esperanças,

$$E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n) .$$

d) A esperança de uma constante é a própria constante,

$$E(c) = c .$$

I.1.E.2.) *Variância* - A *variância* de X é definida por

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 .$$

Decorre da definição que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

Denotando E(X) por μ e Var(X) por σ^2, temos que

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 .$$

Propriedades da variância:

a) A variância de uma constante é zero,

$$\sigma^2(c) = 0 .$$

b) Seja c uma constante, pode-se facilmente provar que

$$\sigma^2(cX) = c^2\sigma^2(X) .$$

c) A variância da soma de variáveis independentes $X_1, \dots, X_n$, é igual a soma de suas variâncias,

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \dots + \sigma^2(X_n) .$$

Definimos o *desvio padrão* de uma variável aleatória como sendo a raiz quadrada positiva da sua variância,

$$\sigma = [Var(X)]^{1/2} .$$

I.1.E.3) *Momento* - Seja $n \geq 0$ um inteiro. Se a esperança da variável aleatória X^n existe, então chamamo-la o n-*ésimo momento* de X. Se a integral

$$Int(x^n\ \rho(x)\ dx) ,$$

não converge, dizemos que o n-ésimo momento não existe.

I.1.E.4) *Covariância* - A *covariância* de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 é definida por:

$$Cov(X_1,X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)]$$

$$= E(X_1,X_2) - \mu_1\mu_2 \ .$$

onde $\mu_i = E(X_i)$

Se X_1, X_2 são independentes, então

$$Cov(X_1,X_2) = 0 \ .$$

Seja X uma variável aleatória com esperança μ e variância σ^2. Sua *variável aleatória normalizada* $X*$ é definida por:

$$X* = \frac{X - \mu}{\sigma} \ ,$$

e então

$$E(X*) = 0 \ , \ e$$

$$\sigma^2(X*) = 1 \ .$$

Fica, assim portanto, justificado a denominação variável aleatória normalizada.

Sejam $X*_1$ e $X*_2$ as variáveis normalizadas de X_1 e X_2, respectivamente. Definimos a *função de correlação* de X_1 e X_2, a qual denotamos $g(X_1,X_2)$, por

$$g(X_1,X_2) = Cov(X*_1,X*_2)$$

$$= \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2} \ ,$$

$$g : X_1 \times X_2 \rightarrow [-1,1] \quad .$$

Se X_1 e X_2 forem independentes, temos que

$$g(X_1,X_2) = 0 \quad ,$$

e se forem fortemente dependentes, i.e., $X_2 = c\ X_1$ (onde c é uma constante),

$$|\ g(X_1,X_2)\ | = 1 \quad .$$

Como vimos acima, podemos considerar, sem perda de generalidade, as variáveis aleatória como sendo normalizadas. Assumindo isto (e faremos daqui por diante),temos que

$$\begin{aligned} g(X_1,X_2) &= Cov(X_1,X_2) \\ &= Int(X_1\ X_2\ \rho(x_1,x_2)\ dx_1 dx_2) \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

I.ii) PROCESSO DE MARKOV - Um processo estocástico X(t) é chamado um processo de Markov quando

$$P(x_1 t_1,\ldots,x_n t_n/x_{n+1} t_{n+1}) = P(x_n t_n/x_{n+1} t_{n+1}) \quad , \tag{8}$$

onde $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, para todo $n = 2,3,\ldots$.

Intuitivamente significa que a probabilidade do sistema ir do estado x_n em t_n, a qualquer outro estado, num tempo posterior t_{n+1}, não depende da história prévia do sistema, isto é, informações sobre o comportamento no passado do sistema, não influência no conhecimento do comportamento futuro, quando se conhece exatamente o seu estado presente.

Se o processo estocástico for Markoviano, a eq. (3) torna-se

$$P(x_{n-1}t_{n-1}/x_{n+1}t_{n+1}) = Int(P(x_{n-1}t_{n-1}/x_n t_n)\ P(x_n t_n/x_{n+1}t_{n+1})\ dx_n), \tag{9}$$

onde $t_{n-1} < t_n < t_{n+1}$, qualquer que seja n; e as funções P acima são denominadas funções densidade de transição de probabilidade, e a equação, equação de *Chapman-Kolmogorov*.

Multiplicando a equação (9) por $\rho(x_{n-1}t_{n-1})$, e usando as equações

$$P(x_{n-1}t_{n-1}/x_{n+1}t_{n+1}) = \frac{\rho(x_{n-1}t_{n-1},x_{n+1}t_{n+1})}{\rho(x_{n-1}t_{n-1})} ,$$

e

$$P(x_{n-1}t_{n-1}/x_nt_n) = \frac{\rho(x_{n-1}t_{n-1},x_nt_n)}{\rho(x_{n-1}t_{n-1})} ,$$

obtemos

$$\rho(x_{n-1}t_{n-1},x_{n+1}t_{n+1}) = \mathrm{Int}(\rho(x_{n-1}t_{n-1},x_nt_n)P(x_nt_n/x_{n+1}t_{n+1})dx_n). \quad (10)$$

Integrando a eq.(10) com respeito a x_{n-1}, resulta

$$\rho(x_{n+1}t_{n+1}) = \mathrm{Int}(\rho(x_nt_n)\ P(x_nt_n/x_{n+1}t_{n+1})\ dx_n) , \quad (11)$$

onde $t_n < t_{n+1}$.

I.11.A) *Descrição Posterior e Anterior*

A descrição temporal dos processos estocásticos, pode sempre ser dividido em: (1) descrição posterior e (2) descrição anterior.

I.11.A.1) *Descrição Posterior* - Por esta, entendemos o processo descrito pela densidade de probabilidade condicional definida pela eq.(8) para processos de Markov. E $P(x_nt_n/x_{n+1}t_{n+1})$ denomina-se densidade de transição de probabilidade posterior. Dissemos aqui, que o sistema tem uma probabilidade de evoluir para um estado x_{n+1} em t_{n+1}, a partir do estado inicial x_n em t_n ($t_n < t_{n+1}$); e onde n é arbitrário.

I.II.A.2) *Descrição Anterior* - No desejo de descrever processos que são "simétricos" em tempo, introduzimos a descrição anterior representada por $P_{*}(x_n t_n, \ldots, x_2 t_2 / x_1 t_1)$.

Definição : Definimos a densidade de probabilidade condicional anterior $P_{*}(x_n t_n, \ldots, x_2 t_2 / x_1 t_1)$ pela equação

$$P_{*}(x_n t_n, \ldots, x_2 t_2 / x_1 t_1) = \frac{\rho(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)}{\rho(x_2 t_2, \ldots, x_n t_n)} , \qquad (12)$$

onde $t_1 < t_2 \ldots < t_n$, e desde que $\rho(x_2 t_2, \ldots, x_n t_n) \neq 0$.
Ela, P_{*}, representa a densidade de probabilidade de encontrar o sistema no estado x_1 em t_1, dado que nos tempos posteriores $t_2, \ldots, t_n$, o sistema ocupará os estados $x_2, \ldots, x_n$, respectivamente.

I.II.B) *Propriedades Markovianas de um Processo Estocástico*

Se um processo estocástico for Markoviano, ele ficará conhecido se conhecermos as densidades de probabilidade conjunta de ordem (n = 2). As densidades conjunta com $n \geq 3$ são funções das densidades de probabilidade de ordem n, n = 1,2.

$$\rho(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n) = \frac{\rho(x_1 t_1, x_2 t_2) \ldots \rho(x_{n-1} t_{n-1}, x_n t_n)}{\rho(x_2 t_2) \ldots \rho(x_{n-1} t_{n-1})} . \qquad (13)$$

Prova : Pela eq.(2) obtemos

$$\rho(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n) = P(x_1 t_1, \ldots, x_{n-1} t_{n-1} / x_n t_n) \, \rho(x_1 t_1, \ldots, x_{n-1} t_{n-1}) ,$$

na qual substituimos a eq.(8) e obtemos

$$P(x_1t_1,\ldots,x_nt_n) = P(x_1t_1,\ldots,x_{n-1}t_{n-1})\ P(x_{n-1}t_{n-1}/x_nt_n)$$

$$= P(x_1t_1,\ldots,x_{n-1}t_{n-1}) \frac{P(x_{n-1}t_{n-1},x_nt_n)}{P(x_{n-1}t_{n-1})} \quad (14)$$

Resolvendo de forma análoga $P(x_1t_1,\ldots,x_{n-i}t_{n-i}/x_{n-i+1}t_{n-i+1})$, onde n fixo e $i = 2,3,\ldots$, até que $n-i+1 = 2$, e substituindo recursivamente em (14), obtemos

$$P(x_1t_1,\ldots,x_nt_n) = \frac{P(x_1t_1,x_2t_2)\ \ldots\ P(x_{n-1}t_{n-1},x_nt_n)}{P(x_2t_2)\ \ldots\ P(x_{n-1}t_{n-1})} .$$

□

A propriedade Markoviana de um processo é invariante por uma "inversão" do tempo, ou seja, se um dado processo estocástico X(t) tem a propriedade

$$P(x_1t_1,\ldots,x_{n-1}t_{n-1}/x_nt_n) = P(x_{n-1}t_{n-1}/x_nt_n) ,$$

na descrição posterior, então ele terá propriedade similar na descrição anterior, isto é:

$$P_*(x_nt_n,\ldots,x_2t_2/x_1t_1) = P_*(x_2t_2/x_1t_1) , \quad (15)$$

para $t_1 < t_2 \ldots < t_n$.

Prova - Substituindo a eq.(13) no numerador e denominador do segundo membro da eq.(12), obtemos

$$P_*(x_nt_n,\ldots,x_2t_2/x_1t_1) = \frac{\dfrac{\rho(x_1t_1,x_2t_2)\ \ldots\ \rho(x_{n-1}t_{n-1},x_nt_n)}{\rho(x_2t_2)\rho(x_3t_3)\ \ldots\ \rho(x_{n-1}t_{n-1})}}{\dfrac{\rho(x_2t_2,x_3t_3)\ \ldots\ \rho(x_{n-1}t_{n-1},x_nt_n)}{\rho(x_3t_3)\ \ldots\ \rho(x_{n-1}t_{n-1})}}$$

$$= \frac{\rho(x_1t_1,x_2t_2)}{\rho(x_2t_2)}$$

$$= P_*(x_2t_2/x_1t_1)\ ..$$

bf

Existe uma relação entre as densidades de probabilidade posterior e anterior e é dada pela equação

$$P_*(x_2t_2/x_1t_1) = \frac{\rho(x_1t_1)}{\rho(x_2t_2)}\ P(x_1t_1/x_2t_2)\ . \tag{16}$$

Prova : Substituimos a expressão

$\rho(x_1t_1,x_2t_2) = \rho(x_1t_1)\ P(x_1t_1/x_2t_2)$

na equação que define a densidade de probabilidade anterior

$$P_*(x_2t_2/x_1t_1) = \frac{\rho(x_1t_1,x_2t_2)}{\rho(x_2t_2)}\ ,$$

obtemos

$$P_*(x_2t_2/x_1t_1) = \frac{\rho(x_1t_1)}{\rho(x_2t_2)}\ P(x_1t_1/x_2t_2)\ .$$

□

I.ii.C) *Processo de Wiener*

Um processo estocástico X(t) é chamado um processo de *incrementos independentes* se as variáveis aleatórias, $X(t_2)$ - (t_1) , $X(t_3)$ - $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ - $X(t_{n-1})$, são independentes para qualquer t_i, i = 1, ..., n, e $t_1 \leq t_2 < \ldots < t_n$.

O processo estocástico X(t) é dito com *incrementos estacionários* se a densidade de probabilidade conjunta dos incrementos $X(t+\eta)$ - X(t) depende somente de η e não de t.

Dizemos que um processo estocástico X(t) é um *processo de Wiener* ou *processo de movimento Browniano*, se satisfaz as seguintes condições:

1) X(0) = 0 com probabilidade um.

2) X(t) tem incrementos independentes estacionários.

3) < X(t) > = 0, para todo t (< > significa esperança ou média).

4) Qualquer que seja o intervalo de tempo (s,t), X(t) - X(s) está normalmente distribuida com variância $\sigma^2(t-s)$.

I.ii.D) *Evolução de um Processo Estocástico*

A evolução de um processo estocástico é descrito em duas maneiras "equivalentes" (veja seção (I.iv.B.3)), a equação de Langevin

$$dX(t) = h(X,t)\, dt + q(X,t)\, dW(t) \quad , \tag{17.a}$$

onde W(t) é um processo de Wiener,

e a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \rho(xt)}{\partial t} = - \frac{\partial b(xt)\ \rho(xt)}{\partial x} + \frac{\partial^2 D(xt)\ \rho(xt)}{\partial x^2} \quad , \tag{17.b}$$

onde $b(xt)$ e $D(xt)$ são os coeficientes drift velocidade e de difusão, respectivamente (a equação (17.b) será tratada com maiores detalhes na seção (I.iv)).

Cada uma das equações acima tem certas vantagens e certas desvantagens. A equação de Langevin, (17.a), é mais intuitiva: o primeiro termo do segundo membro é um termo determinístico (por exemplo um campo externo aplicado ao sistema), e o segundo termo é um ruído. Mas ela é extremamente difícil matematicamente, envolvendo-se em integrais estocástica (ou integrais de Wiener). A equação de Fokker-Planck, (17.b), por outro lado, é uma equação diferencial clássica, mas é menos intuitiva. Podemos vê-la como dando a evolução da densidade de probabilidade de um processo estocástico $X(t)$, enquanto a eq.(17.a), como dando a evolução do próprio processo.

I.iii) EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA - Nesta seção daremos alguns conceitos sobre a equação diferencial de uma processo estocástico $X(t)$,ou mais especificamente sobre equações de Langevin; sendo as referências Risken (1984) e [1] como principais.

Na seção (I.ii.D) demos a equação de Langevin para o caso unidimensional, eq.(17.a).Para o caso multidimensional, a equação é dada por

$$dX_i(t) = h_i(X,t)\, dt + q_{ij}(X,t)\, dW_j(t) \qquad (18.a)$$

ou ainda

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = h_i(X,t) + q_{ij}(X,t)\, \Gamma_j(t) \quad , \qquad (18.b)$$

$$\langle \Gamma_i(t) \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \Gamma_i(t)\, \Gamma_j(t') \rangle = 2\, \delta_{ij}\, \delta(t-t') \quad ,$$

onde a derivada formal $\Gamma_j(t) \equiv dW_j(t)/dt$ pode ser definida adequadamente na *Teoria de Integrais Estocásticas* [7]. $\Gamma(t)$ representa *ruído branco* no sentido que $< \Gamma(t)\, \Gamma(t') > =$ cte. $\delta(t-t')$.

Se o processo estocástico $X(t)$ for estacionário, temos que na eq.(18.a,18.b), $h_i(X,t) = h_i(X)$ e $q_{ij}(X,t) = q_{ij}(X)$. Além do que, $q_{ij}(X)$ pode ser escolhido de maneira a por a correlação, entre os tempos t e t', de $\Gamma(t)$, como $2\, g\, \delta_{ij}\, \delta(t-t')$ (ver seção I.iv.B.3), i.e.:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = h_i(X) + \Gamma_i(t) \quad , \tag{19}$$

onde $< \Gamma_i(t) > = 0 \quad ; \quad < \Gamma_i(t)\, \Gamma_j(t') > = 2\, g\, \delta_{ij}\; \delta(t-t')$, para todo $i,j = 1,2,...,N$.

I.iv) EQUAÇAO DE FOKKER_PLANCK - Na seção anterior (I.iii) apresentamos a equação de Langevin que nos dá a evolução temporal de $X(t)$. Aqui obteremos as equações de Kramers-Moyal (KM) e Fokker-Planck (FP),que é um caso especial da primeira, que descrevem a evolução temporal não de $X(t)$, mas de sua densidade de probabilidade, a qual nos possibilita calcular os parâmetros que caracterizam as variáveis aleatória como : suas esperanças,suas corelacões, etc. Inicialmente descreveremos a equação KM (I.iv.A) e em seguida a equação FP (I.iv.B).

I.iv.A) *Equação de Kramers-Moyal*

Dada a existência dos coeficientes $D^{(n)}(x',t)$ definidos por

$$D^{(n)}(x',t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{n!} \frac{< [X(t+\tau) - X(t)]^n >|_{X(t)=x'}}{\tau}$$

$$= (1/n!) \lim_{\tau\to 0} (1/\tau)\ \mathrm{Int}((x-x')^n\, P(x',t/x,t+\tau)dx) \ , \tag{20}$$

e das derivadas

$$\frac{\partial^n D^{(n)}(x,t)\ \rho(x,t)}{\partial x^n} \quad ,$$

para todas as ordens n, temos que a evolução temporal da densidade de probabilidade é dada pela equação Kramers-Moyal (nesta subseção ficará implícito a existência de somatório em n = 1, 2, ...,em todas as equações que aparecer n)

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = (-1)^n \frac{\partial^n D^{(n)}(x,t)\ \rho(x,t)}{\partial x^n} \quad , \tag{21}$$

ou

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = l_k(x,t)\ \rho(x,t) \quad , \tag{22}$$

onde o operador KM, l_{km}, é definido por

$$l_{km}(x,t) = (-1)^n \frac{\partial^n D^{(n)}(x,t)}{\partial x^n} \quad . \tag{23}$$

Os coeficientes $D^{(n)}(x,t)$ são limites de esperanças condicionais, e $|_{X(t)=x'}$ significa que, no tempo, a variável aleatória X(t) tem o valor exato x'.

Derivação : Existe varias maneiras de derivar a equação KM, [10]. Partiremos da equação (11), onde a densidade de probabilidade $\rho(x,t+\tau)$, para $\tau > 0$, escreve-se

$$\rho(x,t+\tau) = \mathrm{Int}(P(x',t/x,t+\tau)\ \rho(x',t)\ dx') \quad . \tag{24}$$

Na eq.(24) a densidade de transição de probabilidade $P(x',t/x,t+\tau)$ segue da seguinte identidade :

$$P(x',t/x,t+\tau) = \mathrm{Int}(P(x',t/y,t+\tau)\ \delta(y-x)\ dy) \tag{25}$$

Usando a expansão formal em série de Taylor da função delta de Dirac (ver Risken 1984)

$$\delta(y-x) = \delta(x'-x) + \frac{(y-x')^n}{n!}\ \frac{\partial^n \delta(x'-x)}{\partial x'^n}$$

$$= \delta(x'-x) + (-1)^n\ \frac{(y-x')^n}{n!}\ \frac{\partial^n \delta(x'-x)}{\partial x^n} \tag{26}$$

Da equação (25)obtemos,

$$P(x',t/x,+\tau) = \left(1 + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (1/n!)\ \mathrm{Int}[(y-x')^n\ .\right.$$

$$\left. .\ P(x',t/y,t+\tau)\ dy]\ \right)\ \delta(x'-x)\quad . \tag{27}$$

Substituindo a eq.(27) na eq.(24) resulta :

$$\rho(x,t+\tau) - \rho(xt) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathrm{Int}((1/n!)\ \mathrm{Int}[(y-x')^n\ .$$

$$.\ P(x',t/y,t+\tau)\ dy]\ \delta(x'-x)\ \rho x't)\ dx')\ . \tag{28}$$

Dividindo ambos os membros da eq.(28) por τ e fazendo o limite, quando $\tau \to 0$, obtemos para o primeiro membro

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\rho(x,t+\tau) - \rho(xt)}{\tau} = \frac{\partial\rho(xt)}{\partial t}\quad .$$

E para o segundo membro

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathrm{Int}((1/n!) \lim (1/\tau) \mathrm{Int}[(y-x')^n P(x't/y,t+\tau) dy] .$$

$$. \rho(x't) \delta(x'-x) dx')$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathrm{Int}(D^{(n)}(x't) \rho(x't) \delta(x'-x) dx')$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n D^{(n)}(xt) \rho(xt)}{\partial x^n} ,$$

onde na primeira linha temos usado a eq.(20). Portanto

$$\frac{\partial \rho(xt)}{\partial t} = (-1)^n \frac{\partial^n D^{(n)}(xt) \rho(xt)}{\partial x^n} , \qquad (21)$$

a qual pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho(xt)}{\partial t} = L_{km}(xt) \rho(xt) , \qquad (22)$$

onde $L_{km}(xt)$ é definido pela eq.(23).

□

I.iv.A.1) *Equação de Kramers-Moyal Posterior* - A densidade de transição de probabilidade P(x't/xt) é a densidade de probabilidade $\rho(xt)$ para condição inicial $\rho(xt) = \delta(x-x')$. Então P(x't'/xt) obedece a equação KM (22)

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} = L_{km}(xt)\ P(x't'/xt) \qquad (29)$$

com a condição inicial

$$P(x't'/xt) = \delta(x-x') \qquad (30)$$

I.iv.A.2) *Equação de Kramers-Moyal Anterior* - Na eq.(29) ocorre operadores diferenciais com respeito a x e t, i.e., com respeito ao valor da variável aleatória X(t) no tempo posterior $t > t'$. Na eq.KM anterior temos operadores diferenciais em relação a x' e t', i.e, com respeito ao valor da variável aleatória X(t') no tempo anterior $t' < t$. Ambas equações levam ao mesmo resultado para a densidade de transição de probabilidade (ver apêndice B).

Dada a existência dos coeficientes $D^{(n)}(x't')$ definidos pela eq.(20), e das derivadas

$$\frac{\partial^n P(x't'/xt)}{\partial x'^n} ,$$

para todas as ordens n, temos que a evolução temporal de $P(x't'/xt)$, em relação a t' (descrição anterior), $t' < t$, é dada pela *equação de Kramers-Moyal anterior*

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = -\ L^{+}_{km}(x't')\ (x't'/xt) \quad , \qquad (31)$$

onde

$$L^{+}_{km}(x't') = D^{(n)}(x't')\ \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \quad . \qquad (32)$$

Derivação : Partimos da equação de Chapman-Kolmogorov, eq.(9), na forma

$$P(x't'/xt) = Int(P(x''t'/xt)\ P(x't'/x'',t'+\tau)\ dx'') \quad , \tag{33}$$

onde $t' < t'+\tau < t$.

Escrevemos, como em (22), a identidade

$$P(x't'/x'',t'+\tau) = Int(\delta(y-x'')\ \rho(x't'/y,t'+\tau)\ dy) \tag{34}$$

Substituindo a função delta de Dirac, na sua forma expandida em série de Taylor,

$$\delta(y-x'') = \delta(x'-x'') + \frac{(y-x')^n}{n!}\ \frac{\partial^n \delta(x'-x'')}{\partial x'^n} \quad , \tag{35}$$

na eq.(34), obtemos :

$$P(x't'/x'',t'+\tau) = (1 + (1/n!)\ Int[(y-x')^n\ P(x't'/y,t'+\tau)\ dy] \ .$$

$$. \frac{\partial^n}{\partial x'^n}\ )\ \delta(x'-x'') \quad . \tag{36}$$

Substituindo (36) em (33) resulta

$$P(x't'/xt) - P(x',t'+\tau/xt) = Int((1/n!)\ Int[(y-x')^n \ .$$

$$. P(x't'/y,t'+\tau)\ dy]\ \frac{\partial^n}{\partial x'^n}\ \delta(x'-x'')$$

$$. P(x'',t'+\tau/xt)\ dx'') \tag{37}$$

Dividindo ambos os membros da eq.(37) por τ, fazendo o limite quando $\tau \to 0$, e usando a eq.(20) obtemos :

$$-\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = \mathrm{Int}(D^{(n)}(x't')\ \frac{\partial^n}{\partial x'^n}\ \delta(x'-x'')\ P(x''t'/xt)\ dx'')$$

$$= D^{(n)}(x't')\ \frac{\partial^n P(x't'/xt)}{\partial x'^n} \quad . \tag{38}$$

Usando o operador KM anterior $L^{+}_{km}(x't')$, o qual é o adjunto do operador $L_{km}(x't')$ (ver apêndice A), e definimos pela eq.(32), reescrevemos a eq.(38) como

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = -\ L^{+}_{km}(x't')\ P(x't'/xt) \quad , \tag{32}$$

a qual denomina-se *equação KM anterior*.

□

Para o caso de N variáveis estocásticas, o procedimento é similar ao caso unidimensional, e obtemos para a equação KM posterior multidimensional,

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} = L_{km}(xt)\ P(x't'/xt) \tag{39}$$

onde

$$L_{km}(xt) = (-1)^n\ \frac{\partial^n D^{(n)}{}_{j1\ldots jn}(xt)}{\partial x_{j1}\ldots\partial x_{jn}} \quad , \tag{40}$$

onde temos usado a notação de Einstein nos jn's, $j1,\ldots,jn = 1,\ldots,N$.

Para a correspondente equação KM anterior escrevemos :

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} = - L^{+}_{km}(x't')\, P(x't'/xt) \,, \tag{41}$$

$$L^{+}_{km}(x't') = D^{(n)}_{j1\ldots jn}(x't')\, \frac{\partial^{n}}{\partial x_{j1}\cdots\partial x_{jn}} \,, \tag{42}$$

com a condição inicial

$$P(x't'/xt) = \delta(x-x') \,. \tag{43}$$

O valor x significa, no caso multidimensional, uma N-upla, isto é, $x \equiv (x_1,\ldots,x_N)$ e portanto

$$\delta(x-x') = \delta(x-x_1') \;\ldots\; \delta(x_N-x_N') \,. \tag{44}$$

I.iv.B) *Equação de Fokker-Planck*

A equação de Kramers-Moyal é uma expansão infinita, i.e., contêm derivada de todas as ordens. Quando um dos coeficientes $D^{(n)}(xt)$, $n \geq 3$, for nulo, todos os coeficientes com $n \geq 3$ serão nulos (teorema de Pawula), Risken (1984), ficando apenas termos até segunda ordem, n=1,2, a qual passa a chamar-se *equação de Fokker-Planck*, ou *equação de difusão*.

I.iv.B.1) *Caso Unidimensional* - Para uma dimensão a equação FP é só os dois primeiros termos da eq.(21), ou seja

$$\frac{\partial P(xt)}{\partial t} = - \frac{\partial b(xt)\, P(xt)}{\partial x} + \frac{\partial^2 D(xt)\, P(xt)}{\partial x^2} \,, \tag{45}$$

ou

$$\frac{\partial P(xt)}{\partial t} = L_{fp}(xt)\, P(xt) \,, \tag{46}$$

onde

$$L_{fp}(xt) = -\frac{\partial b(xt)}{\partial x} + \frac{\partial^2 D(xt)}{\partial x^2} \quad . \tag{47}$$

Temos aqui mudado os símbolos dos coeficientes $D^{(1)}(xt)$ para $b(xt)$, o qual chamamos coeficiente *drift velocidade*; $D^{(2)}(xt)$ para $D(xt)$, denominado *coeficiente de difusão*.

A densidade de transição de probabilidade também obedece a equação FP, eq.(46), com a condição inicial dada pela eq.(30); e obtemo-la colocando $D^{(n)}(xt) = 0$, para $n \geq 3$, na equação (29), isto é:

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} = L_{fp}(xt)\, P(x't'/xt) \quad , \tag{48}$$

com

$$P(x't'/xt') = \delta(x-x') \quad . \tag{30}$$

A equação (48) denomina-se *equação FP posterior*. Para obtermos a *eq.FP anterior*, usamos a eq.(32) com o mesmo raciocínio feito no caso posterior, resultando

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = -L^{+}_{fp}(x't')\, P(x't'/xt) \tag{49}$$

onde

$$L^{+}_{fp}(x't') = b(x't')\frac{\partial}{\partial x'} + D(x't')\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad , \tag{50}$$

e

$$P(x't'/xt) = \delta(x-x') \quad . \tag{30}$$

As equações (48,49) dão soluções equivalentes para a densidade de transição de probabilidade $P(x't'/xt)$, Apêndice B.

A equação FP (45) pode ser reescrita usando a *corrente de probabilidade* $J(xt)$, definida por

$$J(xt) = b(xt)\,\rho(xt) - \frac{\partial D(xt)\,\rho(xt)}{\partial x} , \qquad (51)$$

como uma equação de continuidade, i.e.:

$$\frac{\partial \rho(xt)}{\partial t} + \frac{\partial J(xt)}{\partial x} = 0 , \qquad (52)$$

A corrente de probabilidade J ,pode ser reescrita de forma mais compacta, e por essa e outras conveniências, introduziremos outros coeficientes. Assim como definimos o coeficiente drift velocidade posterior $b(x_1t_1)$, em termos da densidade de transição de probabilidade posterior $P(x_1t_1/x_2t_2)$,

$$b(x_1t_1) = \lim_{t_2\to t_1^+} \frac{1}{t_2-t_1} \operatorname{Int}((x_2-x_1)\,P(x_1t_1/x_2t_2)\,dx_2) , \qquad (53)$$

definimos também o coeficiente drift velocidade anterior $b_*(x_2t_2)$, em termos da densidade de probabilidade anterior $P_*(x_2t_2/x_1t_1)$, $t_2 > t_1$, ou seja

$$b_*(x_2t_2) = \lim_{t_1\to t_2^-} \frac{E[X(t_2) - X(t_1)]\ |X(t_2)= x_2}{t_2 - t_1}$$

$$b_*(x_2t_2) = \lim_{t_1\to t_2^-} \frac{1}{t_2-t_1} \mathrm{Int}((x_2-x_1)\, P_*(x_2t_2/x_1t_1)\, dx_1) . \tag{55}$$

Substituindo a eq.(16) em (55) obtemos

$$b_*(x_2t_2) = \lim_{t_1\to t_2^-} \frac{1}{t_2-t_1} \mathrm{Int}((x_2-x_1) \frac{\rho(x_1t_1)}{\rho(x_2t_2)} .$$

$$.P(x_1t_1/x_2t_2)\, dx_1 . \tag{56}$$

Demonstra-se [3] que o drift anterior $b_*(xt)$ pode se reescrito como

$$b_*(xt) = b(xt) - \frac{2}{\rho(xt)} \frac{\partial D(xt)\, \rho(xt)}{\partial x} . \tag{57}$$

Definimos a *velocidade estocástica* $U(xt)$ por

$$U(xt) = \frac{1}{\rho(xt)} \frac{\partial D(xt)\, \rho(xt)}{\partial x} , \tag{58}$$

que substituindo na eq.(57) resulta

$$U(xt) = \frac{b(xt) - b_*(xt)}{2} . \tag{59}$$

Substituindo as equações (56-59) na equação (51) obtemos

$$J(xt) = \rho(xt)\, V(xt) , \tag{60}$$

$$V(xt) = \frac{b(xt) + b_*(xt)}{2} , \tag{61}$$

a *velocidade corrente*.

Se o processo estocástico X(t) for homogêneo em tempo, pode-se provar facilmente que os coeficientes drift posterior b, anterior b* e de difusão D não dependem do tempo, e a equação FP (45) passa a ter dependência temporal somente na densidade de probabilidade ρ, ou seja

$$\frac{\partial\rho(xt)}{\partial t} = -\frac{\partial b(xt)\ \rho(xt)}{\partial x} + \frac{\partial^2 D(xt)\ \rho(xt)}{\partial x^2} \quad . \tag{62}$$

Mas se o processo for estacionário, temos que tanto b, b*, D como a própria densidade de probabilidade ρ, e a corrente de probabilidade J independem do tempo. A equação FP (52) torna-se:

$$\frac{\partial J(xt)}{\partial x} = 0 \quad . \tag{63}$$

I.iv.B.2) *Caso Multidimensional* - Aqui a variável aleatória X(t) é um vetor $X = (X_1, \ldots, X_N)$, e seus valores x são N-uplas, isto é,

$x = (x_1, \ldots, x_N)$, e

$\delta(x-x') = \delta(x_1-x'_1) \ \ldots \ \delta(x_N-x'_N)$.

Assim posto então, a equação FP para várias variáveis será

$$\frac{\partial\rho(xt)}{\partial t} = L_{fp}(xt)\ \rho(xt) \quad , \tag{64}$$

onde

$$L_{fp}(xt) = -\frac{\partial b_i(xt)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}(xt)}{\partial x_i x_j} \quad , \tag{65}$$

com a notação de Einstein.

A equação FP posterior é dada por

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} = L_{fp}(xt)\, P(x't'/xt) \quad , \tag{66}$$

e a anterior

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = - L_{fp^*}(x't')\, P(x't'/xt) \quad , \tag{67}$$

onde

$$L_{fp^*}(x't') = b_i(x't') \frac{\partial}{\partial x'_i} + D_{ij}(x't') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \quad , \tag{68}$$

e ambas com a condição inicial

$$P(x't'/xt') = \delta(x-x') \quad . \tag{69}$$

Se o processo for estacionário, temos que a equação FP pode ser escrita como

$$L_{fp}(x)\, \rho(x) = 0 \quad , \tag{70}$$

com

$$L_{fp}(x) = - \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad . \tag{71}$$

Em termos da corrente de probabilidade

$$\frac{\partial J_i(x)}{\partial x_i} = 0 \quad , \tag{72}$$

onde J_i, a i-ésima componente da corrente de probabilidade, é dada por

$$J_i(x) = b_i(x)\ \rho(x) - \frac{\partial D_{ij}(x)\ \rho(x)}{\partial x_j} \quad , \tag{73}$$

ou

$$J_i(x) = \rho(x)\ V_i(x) \quad , \tag{74}$$

com

$$V_i(x) = \frac{b_i(x) + b_{i*}(x)}{2} \quad , \tag{75}$$

a i-ésima componente da velocidade corrente. Para a velocidade estocástica, temos que sua i-ésima componente será

$$U_i(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial D_{ij}(x)\ \rho(x)}{\partial x_j} \quad , \tag{76}$$

ou ainda,

$$U_i(x) = \frac{b_i(x) - b_{i*}(x)}{2} \quad . \tag{77}$$

I.iv.B.3) *Coeficientes Drift, Difusão e a Equação de Wiener* - Como dissemos anteriormente (I.ii.D), existe uma equivalência entre a equação de Langevin (18.a,18.b) e a equação FP (64,65). As equações estão relacionadas via os coeficientes, Risken (1984),

$$b_i(xt) = h_i(xt) + q_{kj}(xt)\ \frac{\partial q_{ij}(xt)}{\partial x_k} \quad ; \tag{78}$$

$$D_{ij}(xt) = q_{ik}(xt)\ q_{jk}(xt) \quad . \tag{79}$$

Se os coeficientes q_{ij} independem de x, o segundo termo do segundo membro da eq.(78) se anula. E se, além disso, usarmos para a equação de Langevin a eq.(19), onde os q_{ij} são escolhidos de maneira a colocar a correlação, entre os tempos t e t', de Γ como indicado na eq.(19). Então as relações entre os coeficientes, eqs.(78,79), serão (ver Apêndice C) :

$$b_i(xt) = h_i(xt) \quad ; \tag{80}$$

$$D_{ij}(xt) = g\ \delta_{ij} \quad . \tag{81}$$

CAPÍTULO II

BALANCEAMENTO DETALHADO

Neste capítulo, derivaremos a solução $\rho(x)$ para a equação de difusão, i.e., a equação FP, de um processo estocástico X(t), estacionário, sob condições de Balanceamento Detalhado (BD). Primeiro faremos o caso mais elementar, uma dimensão com variáveis pares (II.i), para facilitar o entendimento. Depois o caso multidimensional com variáveis pares (II.ii) e finalmente, o multidimensional com variáveis ímpares (II.iii) que é o caso mais geral. Seguiremos principalmente o Risken (1984), a ref. [11] e [3].

II.i) CASO UNIDIMENSIONAL PAR - Seja X(t) um processo de difusão, estacionário, de uma dimensão. A equação FP se reduz à eq.(I.63), que podemos escrever como

$$J(x) = C \ , \tag{1}$$

onde C é uma constante real, cujo valor obteremos adicionando a condição de balanceamento detalhado.

Definição : Um processo estocástico estacionário X(t), está em *balanceamento detalhado* se satisfaz a seguinte condição :

$$P(x_1t_1/x_2t_2)\ \rho(x_1t_1) = P(x_2t_1/x_1t_2)\ \rho(x_2t_1) \quad , \tag{2}$$

para $t_1 < t_2$

Lema : Se o processo X(t) estiver em BD, então a corrente de probabilidade, J(x), se anula.

Prova : Substituindo a equação (I.4), com $n = 1$ e $\eta = t_2 - t_1$, e a eq.(2), em (I.55) teremos :

$$b_*(x_2t_2) = \lim_{t_1 \to t_2^-} \frac{1}{t_2 - t_1} \operatorname{Int}((x_2 - x_1)\ P(x_2t_1/x_1t_2)\ dx_1) \quad . \tag{3.a}$$

Trocando x_1 por x_2 e x_2 por x_1 na equação (I.53), obtemos

$$b(x_2t_1) = -\lim_{t_2 \to t_1^+} \frac{1}{t_2 - t_1} \operatorname{Int}((x_2 - x_1)\ P(x_2t_1/x_1t_2)\ dx_1) \quad . \tag{4.a}$$

Usando o fato que nosso processo $X(t)$ é estacionário, temos que $b_*(x_2t_2) = b_*(x_2,0)$ e $b(x_2t_1) = b(x_2,0)$, nos permitindo reescrever as equações (3.a) e (4.a) como

$$b_*(x_2,0) = \lim_{\tau \to 0^+} (1/\ \tau)\ \operatorname{Int}((x_2 - x_1)\ P(x_2,0/x_1\tau)\ dx_1] \quad ; \tag{3.b}$$

$$b(x_2,0) = -\lim_{\tau \to 0^+} (1/\ \tau)\ \operatorname{Int}((x_2 - x_1)\ P(x_2,0/x_1\tau)\ dx_1) \quad ; \tag{4.b}$$

que implica

$$b(x_2t_2) = -\ b_*(x_2t_2) \quad . \tag{5}$$

Substituindo (5) em (I.61) resulta

$$V(x) = 0 \quad . \tag{6}$$

A equação (6) em (I.60) nos fornece

$$J(x) = 0 \quad . \tag{7}$$

□

Portanto C, em (1), é nulo e

$$b(x)\,\rho(x) - \frac{\partial D(x)\,\rho(x)}{\partial x} = 0 \quad . \tag{8}$$

Podemos colocar a solução procurada, ρ, na forma de um chamado potencial

$$\rho(x) = \exp[\,-\,\varnothing(x)\,] \quad ,$$

e reescrever a equação (8) como:

$$\frac{\partial\varnothing(x)}{\partial x} = -\,\frac{b(x)}{D(x)} + \frac{\partial \ln D(x)}{\partial x} \quad , \tag{9}$$

Integrando com respeito a x, resulta

$$\varnothing(x) = \ln D(x) - \mathrm{Int}\left(\frac{b(x')}{D(x')}\, dx' \right) \quad , \tag{10}$$

da qual segue que:

$$\rho(x) = \frac{1}{D(x)} \exp[\ \mathrm{Int}(\frac{b(x')}{D(x')} dx')\ ] \quad . \tag{11}$$

Tanto em (10) como em (11) o extremo de integração inferior é x_o e superior é x . As demais constantes de integração foram incorporadas em x_o , a qual é determinada pela condição de normalização.

Então o conhecimento da velocidade drift posterior, b(x), e o coeficiente de difusão D(x), nos permite escrever a densidade de probabilidade estacionária em termos de uma integral .(uma integral de linha em geral, veja seção (II.ii))

II.ii) CASO MULTIDIMENSIONAL PAR - Como estamos diante de um processo estocástico estacionário a N variáveis pares, o problema se resume a resolver a equação FP (I.70). Aqui x é uma variável de N dimensões, real, $x \in E^N$.

A condição de BD garante que J(x) se anule. A demonstração é similar à realizada acima, no caso unidimensional, bastando aplicar para cada componente $J_i(x)$ o mesmo raciocínio à todas as componentes de x. Portanto temos que

$$J_i(x) = 0 \quad , \tag{12.a}$$

ou numa forma mais explicita

$$b_i(x)\ \rho(x) - \frac{\partial D_{ij}(x)\ \rho(x)}{\partial x_j} \quad , \tag{12.b}$$

onde lembramos que estamos usando a convenção de somatória sobre índices repetidos (notação de Einstein).

Suponhamos agora a solução em termos de um chamado potencial $\emptyset(x)$

$$P(x) = \exp[\, - \emptyset(x)\,] \quad , \tag{13}$$

que substituindo na equação acima, transforma-a numa equação em $\emptyset(x)$

$$- b_i(x) + \frac{\partial D_{ij}(x)}{\partial x_j} = D_{ij}(x) \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_j} \quad . \tag{14}$$

Se a matriz de difusão (D_{ij}) admite uma inversa para todo x, podemos escrever:

$$D^{-1}_{ki}(x) \left(- b_i(x) + \frac{\partial D_{ij}(x)}{\partial x_j} \right) = D^{-1}_{ki}(x) \left(D_{ij}(x) \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_j} \left(D^{-1}_{ki}(x)\; D_{ij}(x) \right)$$

$$= \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_j} \delta_{kj}$$

$$= \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_k} \quad , \tag{15.a}$$

ou ainda trocando os índices k por i e vice-versa, obtemos

$$\frac{\partial \text{Ø}(x)}{\partial x_i} = D^{-1}_{ik}(x) \left(- b_k(x) + \frac{\partial D_{kj}(x)}{\partial x_j} \right) . \tag{15.b}$$

O lado esquerdo expressa a componente na direção x_i do gradiente de Ø(x), satisfazendo portanto as condições de rotacional nulo

$$\frac{\partial^2 \text{Ø}(x)}{\partial x_l \partial x_i} = \frac{\partial^2 \text{Ø}(x)}{\partial x_i \partial x_l} . \tag{16}$$

Substituindo a equação (15.b) em (16), vemos que as funções drift posterior $b_i(x)$ e de difusão $D_{ij}(x)$ satisfazem a equação

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(D^{-1}_{ik}(x) \left[- b_k(x) + \frac{\partial D_{kj}(x)}{\partial x_j} \right] \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D^{-1}_{lk}(x) \left[- b_k(x) + \frac{\partial D_{kj}(x)}{\partial x_j} \right] \right) . \tag{17}$$

Com essa condição em mente, podemos fazer uma integral de linha da equação

$$d\text{Ø}(x) = \frac{\partial \text{Ø}(x)}{\partial x_i} dx_i \quad , \qquad (i = 1,\ldots,N) \ , \tag{18}$$

e obter independente do caminho

$$\varnothing(x) = \mathrm{Int}\left(\frac{\partial \varnothing(x')}{\partial x'_i} dx'_i \right) , \tag{19}$$

onde os extremos de integração superior e inferior são as N-úplas $(a_1,\ldots,a_N)$ e $(x_1,\ldots,x_N)$ respectivamente. Sendo a primeira N-úpla constante que é definida pela condição de normalização

$$\mathrm{Int}(\exp[- \varnothing(x)] dx) = 1 . \tag{20}$$

Substituindo as eq.(19,15.b) em (13), obtemos a função densidade de probabilidade

$$\rho(x) = \exp[\mathrm{Int}(D^{-1}_{ik}(x') (- b_i(x') + \frac{\partial D_{kj}(x')}{\partial x_j}) dx')] . \tag{21}$$

Então sabendo $b_i(x)$ e $D_{ij}(x)$, sabemos $\varnothing(x)$, via uma integração de linha da eq.(15.b), que nos dá $\rho(x)$, a solução da equação de Fokker-Planck em BD.

II.iii) CASO MULTIDIMENSIONAL PARES E IMPARES - Este é o caso mais geral, e será dividido em quatro partes. Em (II.iii.A) damos a definição de BD para variáveis pares e ímpares, em (II.iii.B) demonstramos uma equação de BD na forma de equação operador, a qual é mais conveniente. Na seção (II.iii.C) definimos os coeficientes reversíveis e irreversíveis e demonstramos as condições potênciais, e em (II.iii.D) deduzimos a solução da equação FP.

II.III.A) *Condições BD Para Variáveis Arbitrárias* -

Para melhor entendermos o caso do Balanceamento Detalhado com variáveis pares e ímpares, daremos um exemplo de uma equação de FP com variáveis velocidade e posição. Suponhamos um gás de partículas, que sofrem uma transição tal que, no tempo τ tenha posições $\mathbf{r}' \in E^3$ e velocidades $\mathbf{v}' \in E^3$, e adquire em $\tau+t$, posições $\mathbf{r}$ e velocidades $\mathbf{v}$. A densidade de prob. dessa transição, a qual simbolizamos como

$$(\mathbf{r}',\mathbf{v}',\tau) \rightarrow (\mathbf{r},\mathbf{v},\tau+t) \quad , \tag{22}$$

é dada por

$$\rho(\mathbf{r}',\mathbf{v}',\tau;\mathbf{r},\mathbf{v},\tau+t) \quad . \tag{23.a}$$

A transição inversa no tempo, neste caso, não pode ser feita simplesmente trocando as variáveis posição e velocidade no tempo τ, com aquelas no tempo $\tau+t$. Mas temos que inverter o sinal da variável ímpar, no caso a velocidade, e manter o sinal da variável par, a posição da partícula, pois o movimento de $\mathbf{r}'$ para $\mathbf{r}$ é de direção opsta daquela de $\mathbf{r}$ para $\mathbf{r}'$. Tal transição chamamos de *inversão temporal* e escrevemo-la simbolicamente como

$$(\mathbf{r},-\mathbf{v},\tau) \rightarrow (\mathbf{r}',-\mathbf{v}',\tau+t) \quad . \tag{24}$$

Sua densidade de probabilidade é portanto

$$\rho(\mathbf{r},-\mathbf{v},\tau;\mathbf{r}',-\mathbf{v}',\tau+t) \quad . \tag{25.a}$$

Desde que estamos supondo X(t) um processo estacionário, podemos escrever as equações (23.a) e (25.a), respectivamente, como :

$$\rho(\mathbf{r}',\mathbf{v}',0;\mathbf{r},\mathbf{v},t) \quad ; \tag{23.b}$$

$$\rho(\mathbf{r},-\mathbf{v},0;\mathbf{r}',-\mathbf{v}',t) \quad . \tag{25.b}$$

Por definição o *princípio de Balanceamento Detalhado* requer que as duas densidades de probabilidade conjunta, (23.a) e (25.a) ou (23.b) e (25.b), sejam iguais, isto é :

$$\rho(\mathbf{r}',\mathbf{v}',0;\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \rho(\mathbf{r},-\mathbf{v},0;\mathbf{r}',-\mathbf{v}',t) \quad . \tag{26}$$

Usando a densidade de probabilidade condicional, reescrevemos a equação (26)

$$P(\mathbf{r}',\mathbf{v}',0/\mathbf{r},\mathbf{v},t)\ \rho(\mathbf{r}',\mathbf{v}') = P(\mathbf{r},-\mathbf{v},0/\mathbf{r}',-\mathbf{v}',t)\ \rho(\mathbf{r},-\mathbf{v}) \quad . \tag{27}$$

É tradicional e convêniente reescrever esta equação em uma forma mais geral na seguinte maneira : variáveis arbitrárias x_i se transformam em variáveis invertidas, sob condições de inversão temporal, como

$$x_i \rightarrow \varepsilon_i x_i \quad , \tag{28}$$

onde

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{se } x_i \text{ for par ,} \\ -1 & \text{se } x_i \text{ for ímpar .} \end{cases}$$

Definição - A condição de BD geral, de (26), adquire a forma

$$\rho(x',0;x,t) = \rho(\varepsilon x,0;\varepsilon x',t) \quad , \tag{29}$$

onde $(\varepsilon x) = (\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_N x_N)$.

Usando a densidade de probabilidade condicional, reescrevemos (29)

$$P(x',0/x,t)\ \rho(x') = P(\varepsilon x,0/\varepsilon x',t)\ \rho(\varepsilon x) \quad . \tag{30}$$

II.iii.B) *Equação Operador e as Condições Potênciais* -

Vamos seguir, aqui, o tratamento em termos de operadores do Risken (1984). Antes de derivarmos as condições potênciais, isto é, as condições necessárias e suficientes sobre a forma da equação FP, tal que o princípio de BD seja satisfeito, exprimimos a definição de BD numa forma de uma equação operador eq. (41), e mostraremos sua equivalência à equação (30). Daí então, mais facilmente obteremos as condições potênciais.

Usando a densidade de probabilidade condicional P (que nada mais é do que a função de Green da equação de Fokker-Planck), e o operador FP L_{fp}, escrevemos a equação FP.

$$\frac{\partial P(x',0/x,t)}{\partial t} = L_{fp}(x)\ P(x',0/x,t) \quad , \tag{31}$$

onde L_{fp} dado pela eq. (1.65).

A solução de (31) está sujeita à condição inicial

$$P(x',0/x,t)|_{t=0} = \delta(x-x') \quad . \tag{32}$$

Então, com (32) em mente, dizemos que a solução formal da equação (31) é dada por:

$$P(x',0/x,t) = \exp[L_{fp}(x)\ t]\ \delta(x-x') \quad , \tag{33}$$

i.é., $\exp[L_{fp}(x)]$ é um operador que associa uma densidade de probabilidade unitária, $\delta(x-x')$, à $P(x',0\ /\ x,t)$. É dito formal porque não existe uma maneira de construir explicitamente, mas podemos supor que existe, Risken (1984). Para facilitar o entendimento podemos pensar da função delta de Dirac, $\delta(x-x')$, como uma das funções usuais que são usadas para defini-la.

Substituindo (33) em (30) resulta imediatamente:

$$\exp[L_{fp}(x)t]\delta(x-x')\rho(x') = \exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(\xi x-\xi x')\rho(\xi x) \tag{34.a}$$

trocamos $\rho(x')$ por $\rho(x)$ no lado esquerdo de (34.a) pois

$$\delta(x-x')\rho(x') = \delta(x-x')\rho(x) \quad , \tag{34.b}$$

e assim o operador atuará tanto sobre a função δ como sobre ρ .
Desde que somente mudanças de sinais estão envolvidas entre os argumentos das duas funções delta, em (34), podemos afirmar que estas são iguais. A equação (34) então resulta

$$\exp[L_{fp}(x)t]\delta(x-x')\rho(x) = \exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(x-x')\rho(\xi x) \ . \tag{35}$$

O operador no lado direito de (35) depende de $\xi x'$ enquanto a função densidade ρ é função de ξx, esta portanto pode ser colocada à esquerda do operador, isto é,

$$\exp[L_{fp}(x)t]\delta(x-x')\rho(x) = \rho(\xi x)\exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(x-x') \quad . \tag{36}$$

A eq.(36) é uma equação operador e so faz sentido quando aplicado a uma função. Usando (ver apêndice B)

$$A(x')\ \delta(x-x') = A^{*}(x)\ \delta(x-x') \quad , \tag{37}$$

onde A é um operador diferencial real em x' e A^{*} é seu adjunto, na eq. (36) resulta:

$$\exp[L_{fp}(x)t]\delta(x-x')\rho(x) = \rho(\xi x)\exp[L_{fp}(\xi x)t]^{+}\delta(x-x') \tag{38}$$

Então

$$(\exp[L_{fp}(x)t]\rho(x) - \rho(\xi x)\exp[L^{+}{}_{fp}(\xi x)t])\delta(x-x') = 0 \ . \tag{39}$$

Para que a equação (39) seja válida para qualquer que seja a função que ela aplica, a expressão entre chaves deve ser nula, i.e.,

$$\exp[L_{fp}(x)t]\rho(x) = \rho(\xi x)\exp[L^{+}{}_{fp}(\xi x)t] \quad . \tag{40}$$

Fazendo uma expansão em série de potência em t das funções operadores em torno de $t = 0$, em ambos lados da eq.(40), e tomando somente o termo constante e o linear em t, chegamos à

$$\rho(x) = \rho(\xi x) \quad , \tag{41}$$

e à equação operador

$$L_{fp}(x)\ \rho(x) = \rho(x)\ L^{+}{}_{fp}(\xi x) \quad , \tag{42}$$

onde de novo esta é uma equação operador, e tem significado quando é aplicada a uma função f(x) à sua direita, ou seja:

$$L_{fp}(x)\ [\rho(x)\ f(x)] = \rho(x)\ L^{+}{}_{fp}(\xi x)\ f(x) \quad ,$$

i.e., demonstramos que a eq.(30) implica as eqs.(41) e (42).

Na direção inversa, temos que se as eqs.(41,42) forem satisfeitas, o sistema estará em Balanceamento Detalhado.Podemos ver isso da seguinte maneira: aplicamos o operador FP, L_{fp}, ao primeiro membro da equação (42), e obtemos :

$$\begin{aligned} L_{fp}(x)\ [L_{fp}(x)\ \rho(x)] &= L_{fp}{}^{2}(x)\ \rho(x) \\ &= L_{fp}(x)\ [\rho(x)\ L^{+}{}_{fp}(\xi x)] \\ &= [L_{fp}(x)\ \rho(x)]\ L^{+}{}_{fp}(\xi x) \\ &= [\rho(x)\ L^{+}{}_{fp}(\xi x)]\ L^{+}{}_{fp}(\xi x) \\ &= \rho(x)\ L^{+}{}_{fp}{}^{2}(\xi x) \quad . \end{aligned} \tag{43}$$

Repetindo n vezes a operação acima, obtemos

$$L_{fp}{}^{n}(x)\ \rho(x) = \rho(x)\ L^{+}{}_{fp}{}^{n} \quad . \tag{44}$$

Multiplicando ambos os membros de (44) por $t^{n}/n!$ e somando sobre $n = 0,1,2,\ldots$, resulta:

$$\Sigma_n\ (t^n/n!)\ L_{fp}{}^n(x)\ \rho(x) = \Sigma_n\ (t^n/n!)\ \rho(x)\ L^+{}_{fp}{}^n\ (\xi x)\ . \tag{45}$$

Realizaremos agora as etapas, em ordem inversa, que nos conduziram da equaçao (34.a) a (42). Como cada termo do somatório em (45) são operadores diferenciais aplicados à $\rho(x)$, podemos separá-los de ρ e somá-los, aplicando a soma a $\rho(x)$ em seguida, isto é:

$$(\Sigma_n\ (t^n/n!)\ L_{fp}{}^n(x))\ \rho(x) = \rho(x)\ (\Sigma_n\ (t^n/n!)\ L^+{}_{fp}{}^n(\xi x)). \tag{46}$$

Os termos entre colchetes são expansões em série de potência em t da função operador exponêncial, o que nos permite escrever (46), tendo (41) em mente, como a equação (40), a qual é válida para qualquer função delta, i.e., (46) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\exp[L_{fp}(x)t]\rho(x)\delta(x-x') &= \rho(\xi x)\exp[L^+{}_{fp}(\xi x)t]\delta(x-x')\\ &= \rho(\xi x)(\exp[L^+{}_{fp}(\xi x')t])^+\delta(x-x')\\ &= \rho(\xi x)\exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(x-x') \quad ,\end{aligned} \tag{36}$$

onde temos usado a eq.(37) na segunda linha. No segundo membro da eq.(36) o operador depende de $\xi x'$ enquanto ρ é função de ξx, portanto esta pode ser colocada à direita do operador, obtendo assim a equação (35), i.e.:

$$\exp[L_{fp}(x)t]\rho(x)\delta(x-x') = \exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(x-x')\rho(\xi x)\ . \tag{35}$$

Substituindo a eq.(34.b) no primeiro membro resulta:

$$\exp[L_{fp}(x)t]\delta(x-x')\rho(x') = \exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(x-x')\rho(\xi x)$$
$$= \exp[L_{fp}(\xi x')t]\delta(\xi x-\xi x')\rho(\xi x) \ , \qquad (34.a)$$

que é a eq.(34.a). Usando a eq.(33) temos

$$P(x',0/x,t)\ \rho(x') = P(\xi x,0/\xi x',t)\ \rho(\xi x) \ . \qquad (30)$$

Então demonstramos que as eqs.(41) e (42) são formas equivalentes de exprimir a condição BD,eq.(30).

□

II.III.C) *Coeficientes Reversíveis e Irreversíveis* -

Para mais convenientimente escrevermos a equação operador (42), introduziremos novos coeficientes, a saber, a *velocidade drift irreversível* b^+_i e a *velocidade reversível* b^-_i, as quais definimos da seguinte maneira:

$$b^+_i(x) = (1/2)\ [b_i(x) + \xi_i b_i(\xi x)] \ ; \qquad (47)$$

$$b^-_i(x) = (1/2)\ [b_i(x) - \xi_i b_i(\xi x)] \ . \qquad (48)$$

E portanto

$$b_i(x) = b^+_i(x) + b^-_i(x) \ . \qquad (49)$$

A velocidade drift se divide em uma parte reversível e outra irreversível, cujas transformações a variáveis invertidas obtemos facilmente substituindo x por ξx nas equações (47) e (48), e sabendo que $\xi^2=1$, isto é:

$$b^{+}_i(x) = \varepsilon_i b^{+}_i(\varepsilon x) \quad ; \tag{50}$$

$$b^{-}_i(x) = - \varepsilon_i b^{-}_i(\varepsilon x) \quad . \tag{51}$$

A parte irreversível se transforma de maneira oposta à derivada temporal de x , enquanto a reversível da mesma maneira, podendo esta ser observada no movimento determinístico cuja equação

$$\frac{dx_i}{dt} = b^{-}_i(x) \quad , \tag{52}$$

não é mudado por reversão temporal, como podemos ver facilmente escrevendo a equação do movimento, onde o tempo t passa a ser -t e o valor da variável aleatória x para εx, i.é.,

$$\frac{d\varepsilon_i x_i}{d(-t)} = b^{-}_i(\varepsilon x) \quad , \tag{53}$$

Desenvolvendo o primeiro membro e substituindo a eq. (3.51) no segundo membro, (3.53) resulta:

$$-\varepsilon_i \frac{dx_i}{dt} = - \frac{1}{\varepsilon_i} b_i(x) \quad , \tag{54}$$

a qual, sabendo que $\varepsilon_i^2 = 1$, resulta na equação de movimento (52).

□

Por causa da decomposição da velocidade drift, o operador FP também se decompõe numa parte reversível e noutra irreversível, cujas expressões obtemos substituindo (49) na eq.(I.65),

$$L^{-}_{fp}(x) = \frac{\partial b^{-}_{i}(x)}{\partial x_{i}} \quad ; \tag{55}$$

$$L^{+}_{fp}(x) = - \frac{\partial b^{+}_{i}(x)}{\partial x_{i}} + \frac{\partial^{2} D_{ij}(x)}{\partial x_{i} \partial x_{j}} \quad ; \tag{56}$$

$$L_{fp}(x) = L^{-}_{fp}(x) + L^{+}_{fp}(x) \quad , \tag{57}$$

onde $L^{+}_{fp}(x)$ significa *operador* FP *posterior irreversível*, não mais significando o adjundo do operador FP posterior (ou *operador* FP *anterior*). Substituindo (49) em (I.73), obtemos a decomposição da corrente de probabilidade total J, numa parte *reversível* J^{-}, e noutra *irreversível* J^{+}. Explicitamente

$$J_{i}(x) = J^{-}_{i}(x) + J^{+}_{i}(x) \quad , \tag{58}$$

onde

$$J^{-}_{i}(x) = \rho(x)\; b^{-}_{i}(x) \quad ; \tag{59}$$

$$J^{+}_{i}(x) = \rho(x)\; b^{+}_{i}(x) - \frac{\partial D_{ij}(x)\; \rho(x)}{\partial x_{j}} \quad . \tag{60}$$

Uma vez que as variáveis reversíveis e irreversíveis foram introduzidas, trabalharemos a equação operador (42) afim de obter as condições potênciais. Sua forma explícita é

$$[-\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}(x)}{\partial x_i \partial x_j}]\ \rho(x) = \rho(x)\ [\ b_i(\xi x)\ \frac{\partial}{\partial(\xi_i x_i)} +$$

$$+ D_{ij}(x)\ \frac{\partial^2}{\partial(\xi_i x_i)\partial(\xi_j x_j)}\ ] \quad . \tag{61}$$

Desenvolvendo o primeiro membro, colocando o operador $(\partial/\partial x_i)$ do lado esquerdo para a direita, resulta

$$-\frac{\partial[b_i(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i} - b_i(x)\ \rho(x)\ \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial[D_{ij}x)\ \rho(x)]}{\partial x_j}\ \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{\partial^2[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_j} + D_{ij}(x)\ \rho(x)\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

E usando o fato que $[\partial/\partial(\xi_i x_i)] = \xi_i[\partial/\partial x_i]$ no segundo membro, este resulta:

$$\xi_i\ \rho(x)\ b_i(\xi x)\ \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_i \xi_j\ \rho(x)\ D_{ij}(\xi x)\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad .$$

Transcrevendo o segundo membro para o primeiro obtemos:

$$- \frac{\partial[b_i(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i} - b_i(x)\ \rho(x)\ \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_j}\ \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{\partial^2[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_j} + D_{ij}(x)\ \rho(x)\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$- \varepsilon_i\ \rho(x)\ b_i(\varepsilon x)\ \frac{\partial}{\partial x_i} - \varepsilon_i \varepsilon_j\ \rho(x)\ D_{ij}(\varepsilon x)\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0\ . \tag{62}$$

Se $D_{ij} = D_{ji}$, temos a igualdade entre o quinto e o terceiro termo, a saber,

$$\frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial[D_{ji}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_j}\ \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_j}\ \frac{\partial}{\partial x_i}\ , \tag{63}$$

e com isto em mente, agrupamos os termos de mesmo operador em (62)

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_i(x)\ \rho(x) - \frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_j} \right)$$

$$- \left(\rho(x)\ [b_i(x) + \varepsilon_i b_i(\varepsilon x)] - 2\ \frac{\partial[D_{ij}(x)\ \rho(x)]}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \rho(x) \left(D_{ij}(x) - \varepsilon_i \varepsilon_j\ D_{ij}(\varepsilon x) \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0\ . \tag{64}$$

Usando as equações (I.73) e (58) no primeiro termo; (50) e (60) no segundo termo, reescrevemos (64) como

$$
-\frac{\partial[J^-_i(x) + J^+_i(x)]}{\partial x_i} - 2\, J^+_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i} +
$$

$$
+ \rho(x)\, \left(D_{ij}(x) - \varepsilon_i \varepsilon_j\, D_{ij}(\varepsilon x) \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad . \tag{65}
$$

Para que essa equação operador seja válida, os coeficientes das derivadas de zero-ésima, primeira e segunda ordem devem ser nulos, isto é:

$$
D_{ij}(x) = \varepsilon_i \varepsilon_j\, D_{ij}(\varepsilon x) \quad ; \tag{66.a}
$$

$$
J^+_i(x) = 0 \quad ; \tag{66.b}
$$

$$
\frac{\partial J^-_i(x)}{\partial x_i} = 0 \quad . \tag{66.c}
$$

O conjunto de equações (66a-66c) são as condições necessárias e suficientes para o balanceamento detalhado, o qual chamamos *condições potenciais*, cujo nome torna-se-á claro no ítem (II.iii.D).

Usando as condições potenciais, sob BD, podemos fazer uma identificação entre a velocidade drift irreversível, b^+, com a velocidade estocástica U, a velocidade drift reversível, com a velocidade corrente V. Para provarmos a primeira asserção, substituímos a equação (I.76) em (60) e obtemos para J^+_i a expressão

$$J^{+}_{i}(x) = [\ b^{+}_{i}(x) - U_{i}(x)\ ]\ \rho(x) \tag{67}$$

E usando a condição potencial (66.b) em (67) obtemos

$$[\ b^{+}_{i}(x) - U_{i}(x)\ ]\ \rho(x) \doteq 0 \tag{68}$$

Para que esta equação seja válida qualquer que seja o valor de x, a expressão entre colchetes deve ser nula, isto é,

$$b^{+}_{i}(x) = U_{i}(x) \tag{69}$$

□

Para provarmos a segunda asserção feita acima, substituimos (66.b) em (58), usamos (I.74) e (59) sairemos com a igualdade

$$b^{-}_{i}(x)\ \rho(x) = V_{i}(x)\ \rho(x) \tag{70}$$

que se mantém para todo valor de x. Portanto

$$b^{-}_{i}(x) = V_{i}(x) \tag{71}$$

□

Se tivermos somente variáveis pares, $b^{+} = b$ e $b^{-} = 0$. Portanto $V=0$ e $U = b$, o que implica $b+ = -b$, em concordancia com o demonstrado no ítem (II.ii).

II.iii.D) *Solução da Equação de Fokker-Planck*

Escrevendo a solução estacionária da equação de Fokker-Planck na forma de um potencial

$$P(x) = EXP[-\,\emptyset(x)\,] \tag{72}$$

onde $\emptyset(x)$ pode ser interpretado como um potêncial termodinâmico generalizado (ref.[6] pag. 106). Usando (59,60), (66.b,66.c) e (72), colocamos as condições potênciais (66.a-66.c) em termos do coeficiente de difusão, das velocidades drift reversível, irreversível e da função potêncial.

$$D_{ij}(x) = \varepsilon_i \varepsilon_j \; D_{ij}(\varepsilon x) \tag{66.a}$$

$$b^+_i(x) = \frac{\partial D_{ij}(x)}{\partial x_j} - D_{ij}(x) \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_j} \tag{73}$$

$$\frac{\partial b^-_i(x)}{\partial x_i} = b^-_i(x) \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_i} \tag{74}$$

Se a matriz de difusão possuir inversa, podemos resolver a equação (73) em termos das componentes do gradiente de $\emptyset$. Procedemos multiplicando ambos membros da equação (73) pela matriz inversa, e usando o fato que

$$D^{-1}_{ki}(x) \; D_{ij}(x) = \delta_{kj} \tag{75}$$

onde δ_{kj} é a função delta de Kronecker, obtemos

$$\frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_k} = D^{-1}_{ki}(x) \; [\; \frac{\partial D_{ij}(x)}{\partial x_j} - b^+_i(x) \;] \tag{76}$$

Do fato que o rotacional de uma função gradiente é nulo, tiramos a condição de integrabilidade

$$\frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_l \partial x_k} \tag{77}$$

e portanto $d\emptyset$ pode ser escrito na forma de uma diferêncial exata (daí o nome *potêncial*)

$$d\emptyset = \frac{\partial \emptyset(x)}{\partial x_k} dx_k \tag{78}$$

que integrando obtemos

$$\emptyset(x) = \mathrm{Int}\left(\frac{\partial \emptyset(x')}{\partial x'_k} dx'_k \right) \tag{79}$$

com os extremos de integração superior e inferior as N-úplas $(a_1,\ldots,a_N)$ e $(x_1,\ldots,x_N)$ respectivamente.

Substituindo (76) e (79) em (72), obtemos por uma integração de linha a solução densidade de probabilidade estacionária

$$\rho(x) = \mathrm{EXP}\left(\mathrm{Int}\left[D^{-1}_{kl}(x') \left(\frac{\partial D_{lj}(x')}{\partial x'_j} - b^{+}_{l}(x') \right) dx'\right] \right) \tag{80}$$

com limites de integração $(a_1,\ldots,a_N)$ e $(x_1,\ldots,x_N)$, e onde a primeira N-úpla é uma constante determinada pela condição de normalização.

Então, de novo, sabendo o coeficiente drift b e de difusão D explicitamente, poderemos calcular a solução da equação de FP, $\rho(x)$, em BD.

Encerrando esse capítulo, notificamos que existe uma forma tensorial das equações FP e Langevin, bem como das condições BD (foge ao escopo deste trabalho). Estas equações podem ser usadas, em particular, em sistemas de coordenadas arbitrárias, em espaços Euclidianos. Ver referência [9].

CAPÍTULO III

Apresentaremos, neste capítulo, dois exemplos de sistemas físico que estão em Balanceamento Detalhado, cuja evolução temporal é dada pela equação de Langevin ou, de maneira equivalente, pela equação de Fokker-Planck. Primeiro apresentamos um exemplo de sistema em equilíbrio térmico, Distribuição de Boltzmann, na seção (III.i); em em seguida, um exemplo de sistema físico longe do equilíbrio termico, Largura de Linha de Um Laser Mono Modo Não Sintonizado, na seção (III.ii).

III.i) DISTRIBUIÇÃO de BOLTZMANN - Suponhamos o movimento de uma partícula num meio estocástico à temperatura T, isto é, num meio que provoca flutuações em seu movimento. Assumiremos que o movimento é unidimensional e o estado da partícula é descrito por sua posição R e velocidade V [3]. Podemos supor, atuando sobre a partícula: uma força viscosa diretamente proporcional à velocidade, $-\beta V$, onde β é uma constante que depende da viscosidade do meio e do tamanho da partícula, uma força $U'(R)$ derivada de um potêncial $U(R)$, e uma força, não mais macroscópicas como as duas anteriores, mas microscópica e estocástica, $\Gamma(t)$ ($dW(t) = \Gamma(t)dt$, $W(t)$ é um processo de Wiener). Então a equação de Langevin do movimento da partícula é

$$\frac{dR(t)}{dt} = V(t) \quad , \tag{1}$$

e

$$\frac{dV(t)}{dt} = - \frac{U'(R)}{m} - \frac{\beta V}{m} + \frac{(\beta kT)^{1/2}}{m} \Gamma(t) \quad ; \tag{2}$$

$$< \Gamma(t) > = 0 \quad ; \quad < \Gamma(t) \Gamma(t') > = 2 \, \delta(t-t') \quad ,$$

onde k é a constante de Boltzmann, e o coeficiente $(\beta kT)^{1/2}$ será justificado posteriormente.

As equações (1) e (2) se encontram na forma das equações de Langevin (I.18.a), (ver Risken (1984))

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = h_i(X,t) + g_{ij}(X,t) \, \Gamma_j(t) \quad ; \tag{3}$$

$$< \Gamma(t) > =0 \quad ; \quad < \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') > = 2 \, \delta_{ij}(t-t') \quad .$$

Entre as eqs.(1,2) e a eq.(3) há as seguintes identificações

$$X_1 = R \quad ; \quad X_2 = V$$

$$g_{11} = g_{12} = g_{21} = 0 \quad ; \quad g_{22} = (\beta kT)^{1/2} \quad ;$$

$$\Gamma_1(t) = 0 \quad ; \quad \Gamma_2(t) = \Gamma(t) \quad .$$

Usando as eqs.(I.78,79), temos que : as componentes do coeficiente drift são

$$b_r(r,v) = v \quad ; \tag{4}$$

$$b_v(r,v) = - [U'(r) + \beta v]/m \quad , \tag{5}$$

e os elementos da matriz de difusão são constantes e valem

$$D_{rr} = D_{rv} = D_{vr} = 0 \quad ; \tag{6}$$

$$D_{vv} = \frac{\beta kT}{m^2} \quad . \tag{7}$$

Substituindo as eqs (4-7) na equação FP, eq.(I.64), resulta

$$\frac{\partial \rho(r,v,t)}{\partial t} = - \frac{\partial\, v\rho(r,v,t)}{\partial r} + \frac{1}{m}\frac{\partial([U'(r) + \beta v]\rho(r,v,t))}{\partial v} +$$

$$+ \frac{\beta kT}{m^2}\frac{\partial^2 \rho(r,v,t)}{\partial v^2} \quad . \tag{8}$$

Supondo-se o sistema estacionário, $\rho(r,v,t) = \rho(r,v)$, e portanto o primeiro membro da eq.(8) é nulo, obtendo-se então

$$- \frac{\partial\, v\rho(r,v)}{\partial r} + \frac{1}{m}\frac{\partial([U'(r) + \beta v]\rho(r,v))}{\partial v} + \frac{\beta kT}{m^2}\frac{\partial^2 \rho(r,v)}{\partial v^2} = 0 \quad . \tag{9}$$

Aqui, r (a posição) é uma variável par e v (a velocidade) uma variável ímpar. Então

$$\varepsilon_r r = r \tag{10}$$

$$\varepsilon_v v = -v \tag{11}$$

Usando as eqs.(4,5,10,11) e as eqs.(II.48,49), obtemos os coeficientes drift irreversíveis

$$b_r^{+}(r,v) = 0 \quad ; \tag{12}$$

$$b_v^{+}(r,v) = - \beta v/m \quad , \tag{13}$$

e os reversíveis

$$b_r^{-}(r,v) = v \quad ; \tag{14}$$

$$b_v^{-}(r,v) = - U'(r)/m \quad . \tag{15}$$

As equações (6,7,10,11) nos garante que a condição de Balanceamento Detalhado (II.66.a) esteja satisfeita, enquanto as eqs.(6,12) e (II.60) nos garante a satisfação de parte da condição (II.66.b), isto é :

$$J_r^{+}(r,v) = 0 \quad .$$

Para que a outra parte esteja satisfeita, ou seja,

$J_v^+(r,v) = 0$,

temos que, usando as eqs.(6,7,13) e a eq.(II.60),

$$-\frac{\beta v}{m}\rho(r,v) - \frac{\beta kT}{m^2}\frac{\partial\rho(r,v)}{\partial v} = 0 ,$$

ou ainda

$$\frac{kT}{m}\frac{\partial\rho(r,v)}{\partial v} = -v\rho(r,v) . \qquad (16)$$

A solução da equação (16),

$$\rho(r,v) = \exp[- mv^2/2kT] f(r) , \qquad (17)$$

garante então que a segunda condição BD, eq.(II.66.b), esteja satisfeita ($f(r)$ é uma função de r até então arbitrária). A terceira condição BD, eq.(II.66.c), escreve-se

$$\frac{\partial J_r^-(r,v)}{\partial r} + \frac{\partial J_v^-(r,v)}{\partial v} = 0 . \qquad (18)$$

Substituindo as eqs.(14,15,II.59) na eq.(18), resulta :

$$v\frac{\partial\rho(r,v)}{\partial r} - \frac{U'(r)}{m}\frac{\partial\rho(r,v)}{\partial v} = 0 . \qquad (19)$$

Substituindo a eq.(17) em (19), obtemos

$$\frac{1}{f(r)}\frac{df(r)}{dr} = -\frac{U'(r)}{kT} ,$$

cuja solução é dada por

$f(r) = \exp[\, - U(r)/kT \,]$. (20)

Assim as três condições BD são satisfeitas e a densidade de probabilidade ρ, será

$\rho(r,v) = c \exp(- [\, (mv^2/2) + U(r) \,] \,/\, kT \,)$, (21)

onde c é uma constante de normalização.

A eq.(21) é a familiar distribuição de Boltzmann da mecânica estatística. Notamos que o denominador kT surge do assumido coeficiente da força de flutuação (estocástica) $(\beta kT)^{1/2}$ na eq.(2). Nessa equação temos uma parte macroscópica (determística), e a ela, adicionamos a força de flutuação cuja magnitude permitiu reproduzir exatamente a distribuição de Boltzmann. Isso nos diz que representar um sistema de particulas independentes, num banho térmico à temperatura T, por um processo de Wiener estacionário, da forma da equação de Langevin (1,2), e em Balaceamento Detalhado, possui considerável validade física.

III.ii) LARGURA de LINHA de um LASER MONO MODO NÃO SINTONIZADO - As propriedades estatísticas do Laser tem sido investigado tanto teoricamente como experimentalmente, em detalhes [18]. Para um Laser com um simples modo, próximo à região limiar (threshold) e sintonizado (diferença entre frequência atômica e da cavidade, nula), a teoria é simples e concorda com os dados experimentais muito bem. Quando o Laser não é sintonizado, as propriedades estatísticas da intensidade não se complicam tanto, como no caso de se obter informação a respeito das propriedades estatísticas da fase da luz do Laser, por exemplo, a usual largura de linha, ver figuras 2 e 3. O que faremos nesta seção, é exatamente isso, obter teoricamente as curvas do fator largura de linha, de um Laser mono modo não sintonizado perto da região limiar, fig. 2 e 3. Para tal, fizemos cinco divisões : em (III.ii.A), apresentamos um resumos dos resultados; em (III.ii.B), mostramos que os coeficientes da equação FP satisfazem as condições BD; na subseção (III.ii.C) introduzimos o operador L generalizado (para processos estocásticos em BD), e a partir de suas autofunções, obtemos uma expressão para a densidade de probabilidade conjunta; em (III.ii.D), apresentamos a densidade de probabilidade conjunta para o nosso Laser; na subseção (III.ii.E), calculamos a função de correlação da amplitude da luz do Laser, e apartir desta obtemos finalmente, a largura de linha. Teremos referências [19-23] como principais.

III.ii.A) *Resumo dos Resultados.*

A largura de linha $\Delta\nu$ pode ser escrita como

$$\Delta\nu = \frac{C}{P}\, \alpha_L(a,\delta) \quad . \tag{22}$$

Aqui, C é uma constante do Laser contendo o parâmetro de sintonização δ, o qual é definido na equação (27), P é a potência de saída e α_L é o fator largura de linha. No caso em que o Laser é sintonizado (δ=0), $\alpha_L(a,0)$ varia de 2 para 1 passando pela região limiar, de baixo para cima do limiar, isto é, variando o parâmetro de bombeamento de valores negativos para positivos, ver figura 2. Quando o Laser não é sintonizado, esse fator é aumentado, ver fig.3. Se a dessintonização não for muito grande, $\alpha_L(a,\delta)$ pode ser aproximado por valores da sintonização, da seguinte maneira :

$$\alpha_L(a,\delta) = \alpha_L(a,0) + [\ 2 - \alpha_L(a,0)\ ]\ \delta^2 \quad . \tag{23}$$

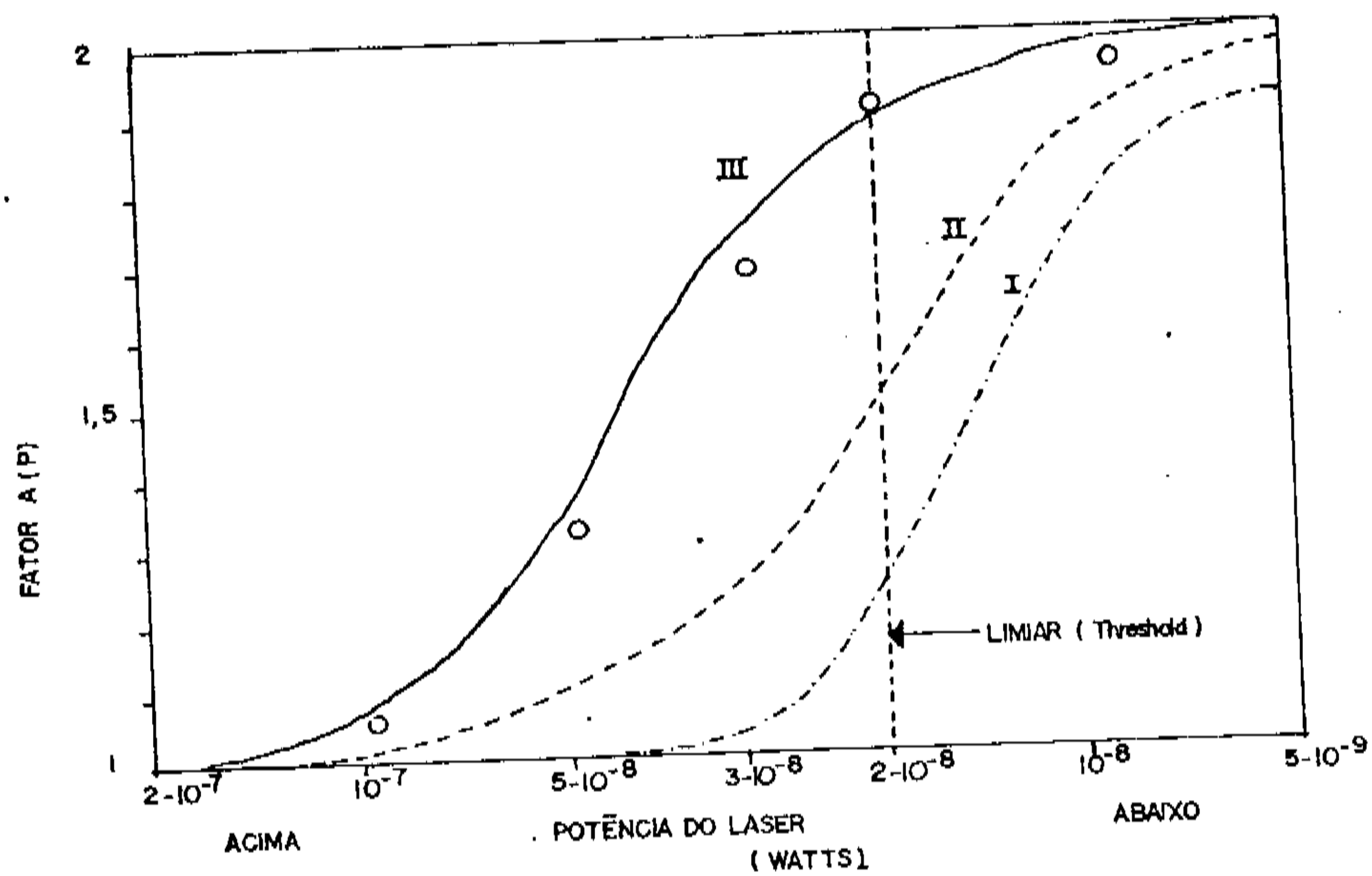


Fig. 2. Alguns valores do fator largura de linha $A(P) = \alpha_L$, determinados experimentalmente (pequenos círculos). A curva III representa resultados teóricos dados por Hempstead , Lax, e também pelo Risken. Curvas I e II são preditas por Grossmann e Richter. Esta figura foi reproduzida da ref. [21].

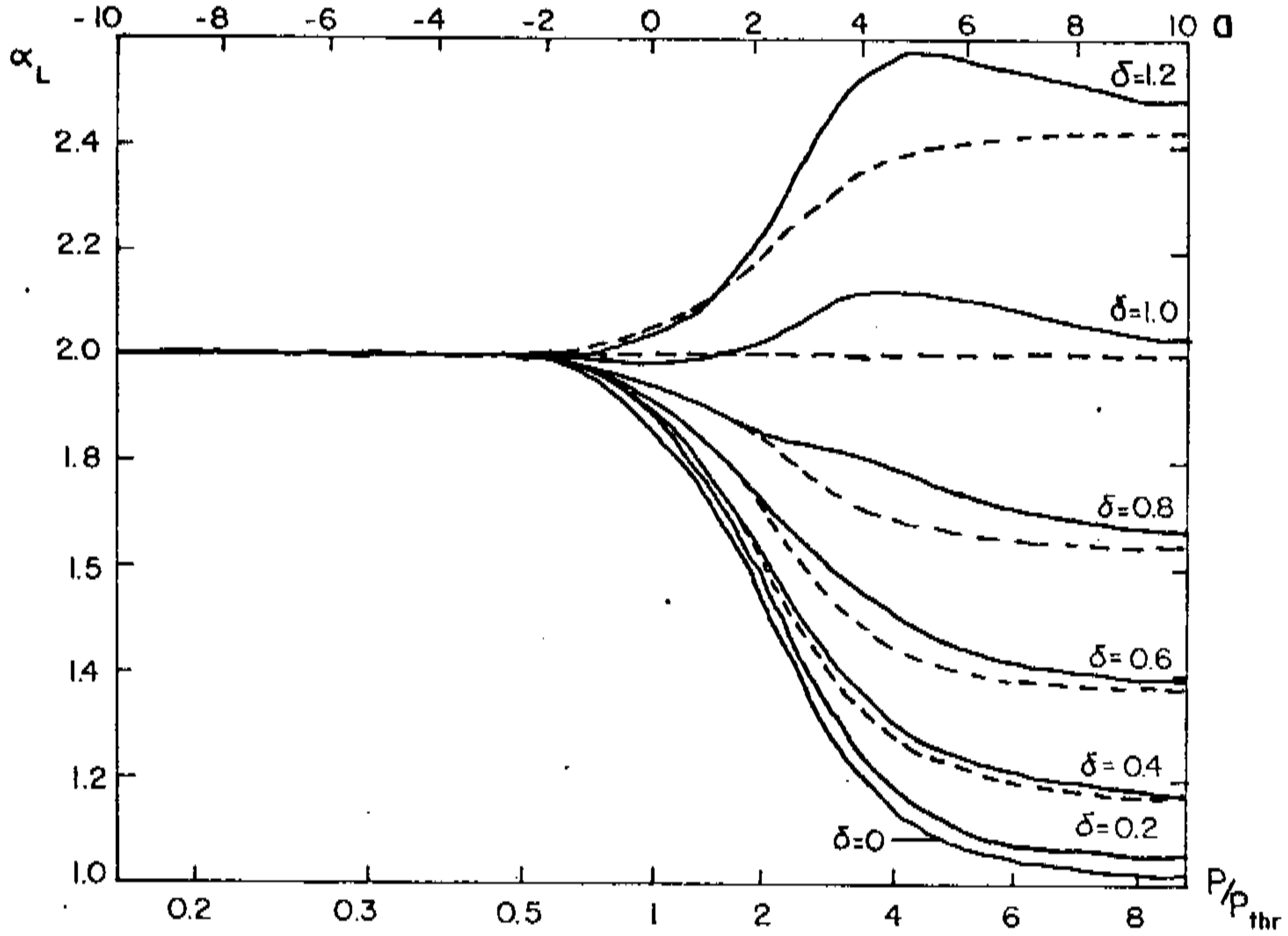
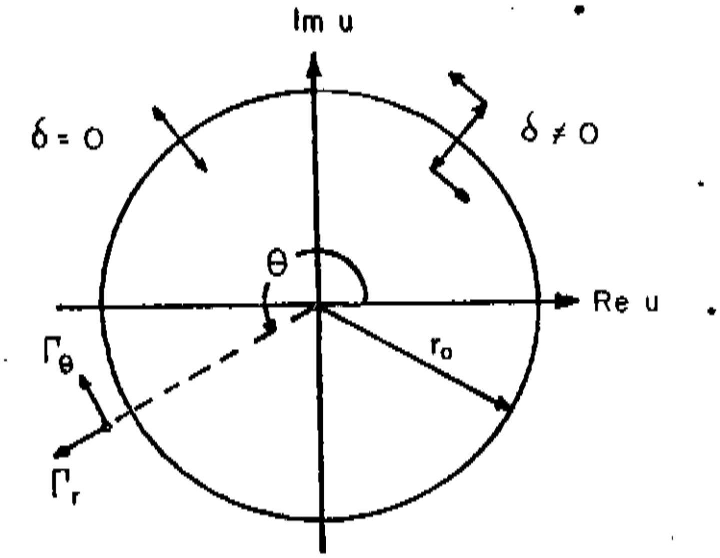


Fig.3. O fator largura de linha $\alpha_L(a,\delta)$ tanto como uma função do parâmetro de bombeamento, a, bem como uma função da potência de saída normalizada P/P_{thr}, para varios parâmetros de sintonização δ (curva sólida). A aproximação, eq.(23), é também apresentada (linha pontilhada). Note que nessa figura a potência de bambeamento é aumentada para a direita, enquanto na fig.2, ela é aumentada na direção esquerda para direita . Ver ref. [21].

$$E(t) = u(t)e^{-iw_0 t} + u^{*}(t)e^{iw_0 t}$$



$\delta = 0$ Difusão de Fase produzida somente por Γ_θ

$\delta \neq 0$ Difusão de Fase produzida por Γ_θ e Γ_r

Fig. 4. Explicação do aumento do fator largura de linha devido à dessintonização.

Ver ref. [21].

A elevação do fator largura de linha, devido à dessintonização, pode ser explicado da seguinte maneira [21,22] (ver fig.4) : Com a sintonização, a razão de 2 para 1 ocorre porque acima da região limiar a amplitude do Laser é estabilizada e portanto, somente metade do ruído (somente aquela na direção-θ) contribui para a largura de linha. No caso em que não há sintonização, entretanto, as pequenas flutuações na direção-r leva a uma adicional difusão. Se temos sintonização, o fator largura de linha pode ser expressado por um autovalor de um certo operador hermitiano. Mas tomando dessintonização em conta, temos que resolver um problema de autovalor de um operador não hermitiano. Entretanto o problema é simplificado, em certa extensão, porque as condições BD são satisfeitas.

III.11.B) *Equações da Amplitude do Laser Mono Modo Não Sintonizado.*

As propriedades estatísticas da amplitude da luz de um Laser mono modo, E(t), são descritas pela amplitude complexa u(t), isto é :

$$E(t) = u(t) \exp[-iw_o t] + u^*(t) \exp[iw_o t] \quad . \tag{24}$$

Perto da região limiar, a equação da amplitude u(t) é a equação de Langevin [21,22]

$$\frac{du(t)}{dt} = \beta \ (1 + i\delta) \ [\ a \ (g/\beta)^{1/2} - |u|^2 \ ] \ u + \Gamma(t) \quad ; \tag{25}$$

$$\langle\Gamma(t)\rangle = 0 \ ; \ \langle\Gamma(t) \ \Gamma^*(t')\rangle = 4 \ g \ \delta(t-t') \ ; \ \langle\Gamma(t) \ \Gamma(t')\rangle = 0 \ . \tag{26}$$

Na equação (25), δ é um parâmetro de sintonização, o qual é definido por

$$\delta = \frac{w_c - w_a}{\gamma} \quad , \tag{27}$$

onde w_c é a frequência da cavidade, w_a é a freqência atômica, e γ é a largura de linha atômica (largura de linha da cavidade $<< \gamma$). As constantes do laser β e g dependem do parâmetro de sintonização. No nosso caso [21], temos que

$$\beta = \beta(\delta) = \frac{\beta(0)}{1 + \delta^2} \quad ; \tag{28}$$

$$g = g(\delta) = \frac{g(0)}{1 + \delta^2} \quad . \tag{29}$$

Devido ao fato que $\Gamma(t)$ é delta correlacionado, e é grande o número de fotons, suporemos u(t) um processo de Markov contínuo. Então a densidade de probabilidade condicional de u pode ser determinada por uma equação de Fokker-Planck. Denotando a parte real de u por x_1 e a parte imaginária por x_2 (não faremos aqui distinção notacional entre um processo estocástico, variável aleatória, e o valor dessa variável), temos que

$$u = x_1 + ix_2 \quad , \tag{30}$$

onde assumiremos x_1 uma variável aleatória par, e x_2, uma variável ímpar, assim

$$\varepsilon_1 = 1 \quad ; \quad \varepsilon_2 = -1 \quad . \tag{31}$$

Seja também

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + i\Gamma_2(t) \quad . \tag{32}$$

Substituindo as eqs.(30,32) em (25), obtemos

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \beta \, [a \, (g/\beta)^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2)] \, [x_1 - x_2 \, \delta] + \Gamma_1(t) \quad ; \tag{33}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \beta \, [a \, (g/\beta)^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2)] \, [x_2 + x_1 \delta] + \Gamma_2(t) \quad . \tag{34}$$

Inserindo as eqs.(30,32) em (26) resulta

$$< \Gamma_i(t) > = 0 \quad ; \quad < \Gamma_i(t) \, \Gamma_j(t') > = 2 \, g \, \delta_{ij} \, \delta(t-t') \quad . \tag{35}$$

As eqs.(33-35) são as equações de Langevin e estão na forma das equações (I.19). Usando então, (I.80,81) e (33-35) obtemos os coeficientes drift

$$b_1(x_1,x_2) = \beta \, [a \, (g/\beta)^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2)] \, [x_1 - x_2 \, \delta] \quad ; \tag{36}$$

$$b_2(x_1,x_2) = \beta \, [a \, (g/\beta)^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2)] \, [x_2 + x_1 \, \delta] \quad , \tag{37}$$

e os elementos da matriz de difusão

$$D_{12} = D_{21} = 0 \quad ; \quad D_{11} = D_{22} = g \quad . \tag{38}$$

III.ii.B.1) *Equação FP e o Laser Mono Modo Não Sintonizado* - Substituindo as eqs.(36-38) na eq.(I.65,66), obtemos a equação FP

$$\frac{\partial P(x_1',x_2',t'/x_1,x_2,t)}{\partial t} =$$

$$- \frac{\partial\ \beta[a(g/\beta)^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2)][x_1 - x_2\delta]P(x_1',x_2',t'/x_1,x_2,t)}{\partial x_1}$$

$$- \frac{\partial\ \beta[a\ (g/\beta)^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2)][x_2 + x_1\delta]P(x_1',x_2',t'/x_1,x_2,t)}{\partial x_2}$$

$$+ g \frac{\partial^2\ P(x_1',x_2',t'/x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} + g \frac{\partial^2\ P(x_1',x_2',t'/x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} \quad , \tag{39}$$

com a condição inicial, eq.(I.69),

$$P(x_1',x_2,t'/x_1,x_2,t') = \delta(x_1-x_1')\ \delta(x_2-x_2') \quad . \tag{40}$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis,

$$X_1 = (\beta/g)^{1/4}\ x_1 \quad ; \quad T = (g\beta)^{1/2}\ \tau \quad , \tag{41}$$

na equação (39), obtemos uma equação de Fokker-Planck, onde as constantes do Laser, β e g, são normalizadas para 1. Usando os novos coeficientes drift e difusão, onde aparecem as novas variáveis X_1, X_2 , $\beta = g = 1$, e as eqs.(II.47,48), obtemos as velocidades drift irreversíveis

$$b_1^+(X_1,X_2) = [\ a - (\ X_1^2 + X_2^2\ )\ ]\ X_1 \quad ; \tag{42}$$

$$b^{+}_{2}(X_1,X_2) = [\ a - (X_1^2 + X_2^2)\ ]\ X_2 \quad , \tag{43}$$

e as velocidades drift reversíveis

$$b^{-}_{1}(X_1,X_2) = -\ [a - (X_1^2 + X_2^2)\ ]\ X_2\ \delta \quad ; \tag{44}$$

$$b^{-}_{2}(X_1,X_2) = [\ a - (X_1^2 + X_2^2)\ ]\ X_1\ \delta \quad . \tag{45}$$

Os elementos da matriz de difusão, eq.(38), serão

$$D_{ij} = \delta_{ij} \quad . \tag{46}$$

III.ii.B.2) *Condições BD e o Laser Mono Modo Não Sintonizado* - As condições BD são satisfeitas como pode ser visto : A primeira condição, (II.66.a), obtemos facilmente tendo em mente as eqs.(41,46). Para vermos que a segunda condição BD é satisfeita, não usaremos (II.66.b) diretamente, mas sim , sua forma equivalente, a qual é obtida substituindo a eq.(II.76) em (II.77), ou seja

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\ (D^{-1}_{ki}\ [\ \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - b^{+}_{i}\ ]) = \frac{\partial}{\partial x_k}\ (D^{-1}_{li}\ [\ \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - b^{+}_{i}\ ]) \quad . \tag{47}$$

Substituindo as eqs.(42,43,46) em (47), e sabendo que

$$D^{-1}_{ij} = \delta_{ij} \quad , \tag{48}$$

obtemos a satisfação da segunda condição BD. Para a terceira condição, também não usaremos a eq.(II.66.c), mas sua forma equivalente (obtida substituindo a eq.(II.74) em (II.76))

$$\frac{\partial b_i^-}{\partial x_i} = b_i^- D^{-1}_{ik} \left[\frac{\partial D_{kj}}{\partial x_j} - b^+_k \right] . \tag{49}$$

É suficiente agora substituir as eqs.(44-46,48) em (49) para vermos a satisfação da terceira condição BD. Lembramos aqui que estamos usando a convenção sobre índices repetidos. M. Lax (ver ref.[36] citada na ref.[21]) tratou ambas variáveis, x_1 e x_2, como variáveis pares, estabelecendo assim, que as condições BD são violadas na presença da dessintonização.

III.ii.C) *Operador L e o Balanceamento Detalhado.*

Por conveniência, a qual torna-se-á claro, introduziremos o operador

$$L = \exp[\emptyset/2]\, L_{fp} \exp[-\emptyset/2] \;;\; L^+ = \exp[-\emptyset/2]\, L^+_{fp} \exp[\emptyset/2] , \tag{50}$$

que substituindo na relação BD (II.42), esta simplifica para

$$L(x) = L^+(\varepsilon x) . \tag{51}$$

A eq.(51) junto com $\emptyset(x) = \emptyset(\varepsilon x)$ são também condições necessária e suficientes para Balanceamento Detalhado.

III.ii.C.1) *O Operador L e a Equação FP* - Podemos escrever a equação FP posterior (I.66), e a equação FP anterior (I.67), em termos do operador L e L$^+$, respectivamente (ver Apêndice D), ou seja :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{P(x',0/x,\tau)}{\Psi_o(x)} \right] = L(x) \left[\frac{P(x',0/x,\tau)}{\Psi_o(x)} \right] , \tag{52}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,[\,\Psi_o(x')\,P(x',0/x,\tau)\,] = L^{+}(x')\,[\,\Psi_o(x')\,P(x',0/x,\tau)\,]\;, \tag{53}$$

onde

$$\Psi_o(x) = \exp[\,-\,\varnothing(x)/2\,]\;. \tag{54}$$

Estamos supondo aqui, um processo estocástico $X(t)$ estacionário. Ambas as eqs.(52,53), juntamente com a condição inicial (I.69), possuem solução em comum dada por (Apêndice D)

$$P(x',0/x,\tau) = \{\,\frac{\Psi_o(x)}{\Psi_o(x')}\,\exp\,[\,L(x)\,\tau\,]\,\}\,\delta(x-x')\;. \tag{55}$$

Expandindo a função delta de Dirac, na eq.(55), em série de autofunções do operador L, obteremos uma expansão em série, para a densidade de probabilidade condicional $P(x',0/x,\tau)$, em termos destas autofunções.

III.ii.C.2) *Operador L e os Coeficientes Drift e Difusão* - Em geral o operador L não é hermitiano, mas prova-se (ver Apêndice E) que L pode ser escrito como [20]

$$L(x) = L_H(x) + L_A(x)\;; \tag{56}$$

$$L_H(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\,[\,D_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,] - \frac{1}{\Psi_o(x)}\,(\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,[\,D_{ij}(x)\,\frac{\partial\Psi_o(x)}{\partial x_j}\,]\,)\;; \tag{57}$$

$$L_A(x) = -\,b^{-}_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} + b^{-}_i(x)\,\frac{1}{\Psi_o(x)}\,\frac{\partial\Psi_o(x)}{\partial x_i}\;. \tag{58}$$

o operador diferêncial entre chaves, na eq.(57), não atua sobre uma função do lado de fora dessa chave. As eqs(57,58) podem ainda ser escritas usando uma forma mais explícita, isto é, só envolvendo os coeficientes drift e difusão, ou seja (Apêndice E)

$$L_H(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} [D_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}] - V(x) \quad , \tag{59}$$

onde

$$V(x) = \frac{1}{\Psi_o(x)} (\frac{\partial}{\partial x_i} [D_{ij}(x) \frac{\partial P_o(x)}{\partial x_j}])$$

$$= \frac{1}{4} D^{-1}_{ij}(x) [\frac{\partial D_{ik}(x)}{\partial x_k} - b^+_i(x)] [\frac{\partial D_{jl}(x)}{\partial x_l} - b^+_j(x)] \quad .$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{ij}(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial b^+_i(x)}{\partial x_i} \quad ; \tag{60}$$

$$L_A(x) = - b^-_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial b^-_i(x)}{\partial x_i} \quad . \tag{61}$$

Pode-se mostrar (o raciocínio é semelhante ao realizado no Apêndice A) que L_H é hermitiano e L_A, antihermitiano, ou formalmente,

$$L^+_H(x) = L_H(x) \quad ; \tag{62}$$

$$L^+_A(x) = - L_A(x) \quad . \tag{63}$$

Se o Laser for sintonizado ($\delta = 0$), $b^-_i(x) = 0$ e então, $L_A(x) = 0$.

Portanto $L = L_H$, hermitiano.

III.11.C.3) *Autofunções de L e a Expansão da Densidade de Probabilidade conjunta* - Procuramos autofunções $\Psi_l(x)$ do operador $L(x)$, talque

$$L(x)\ \Psi_l(x) = -\lambda_l\ \Psi_l(x) \quad . \tag{64}$$

Aqui, o sinal negativo é usado de maneira que, apesar do operador L não ser hermitiano, a parte real do autovalor λ seja positiva (ver Apêndice da ref.[20]). Pode-se mostrar que o conjugado complexo, $\Psi_l{*}(x)$, também é autofunção de $L(x)$ com autovalor $\lambda_l{*}$, ou seja

$$L(x)\ \Psi_l{*}(x) = -\lambda_l{*}\ \Psi_l{*}(x) \quad , \tag{65}$$

e também,

$$L(\xi x)\ \Psi_l{*}(\xi x) = -\lambda_l{*}\ \Psi_l{*}(\xi x) \quad . \tag{66}$$

Usando a condição BD, eq.(51), em (66) obtemos

$$L^{+}(x)\ \Psi_l{*}(\xi x) = -\lambda_l{*}\ \Psi_l{*}(\xi x) \quad . \tag{67}$$

Então a condição BD simplifica bastante os nossos cálculos, pois se conhecermos as autofunções $\Psi_l(x)$ de $L(x)$, é imediato as autofunções de $L^{+}(x)$, ou seja $\Psi_l{*}(\xi x)$. Como $L(x)$ não é hermitiano, não podemos garantir a ortogonalidade entre as suas autofunções, para diferentes autovalores. Entretanto, pode-se demonstrar que as autofunções $\Psi_l(x)$, de $L(x)$, e $\Psi_l{*}(\xi x)$, do operador $L^{+}(x)$, formam um conjunto biortogonal, isto é :

$$\mathrm{Int}([\Psi_i{*}(\xi x)]{*} \Psi_j(x)\, dx) = \delta_{ij} \quad . \tag{68}$$

Apesar de L não ser hermitiano ($b^-{}_i(x) \neq 0$), asssumiremos a existência de $\Psi_i(x)$ e que estas, junto com $\Psi_i{*}(\xi x)$, formam um conjunto completo. Então a função delta Dirac pode ser expandida em termos das funções desse conjunto

$$\delta(x-x') = \Sigma_i \; [\Psi_i{*}(\xi x)]{*} \Psi_i(x) \quad . \tag{69}$$

Esta equação pode ainda ser escrita como

$$\delta(x-x') = \Sigma_i \; \Psi_i(x) \; \Psi_i(\xi x') \quad . \tag{70}$$

Substituindo a eq.(70) em (55), e usando o fato que [20]

$$(\exp[L(x) \, \tau]) \, \Psi_i(x) = \Psi_i(x) \exp[- \lambda_i \, \tau] \quad , \tag{71}$$

obtemos a expansão, da densidade de probabilidade condicional, em termos das autofunções de L e L^+, ou seja

$$P(x',0/x,\tau) = \frac{\Psi_0(x)}{\Psi_0(x')} \Sigma_i \; \Psi_i(\xi x') \; \Psi_i(x) \exp[- \lambda_i \, \tau] \quad . \tag{72}$$

Aqui o operador exponencial , $\exp[L(x) \, \tau]$ da eq.(55), não se aplicou à $\Psi_i(\xi x')$, por causa da dependência desta em $\xi x'$. A densidade de probabilidade conjunta (estacionária) é dada, para $\tau \geq 0$, por

$$\rho(x',0;x,\tau) = P(x',0/x,\tau) \; \rho(x')$$

$$\rho(x',0;x,\tau) = \Psi_o(x)\ \Psi_o(x')\ \Sigma_i\ \Psi_i(\xi x')\ \Psi_i(x)\ \exp[\ -\ \lambda_i\ \tau\ \ ]\ . \tag{73}$$

É claro aqui, que $\rho(x',0/x,\tau)$ satisfaz as condições BD, uma vez que $\Psi_o{}^2(x) = \rho(x) = \rho(\xi x) = \Psi_o{}^2(\xi x)$. Para obtermos a densidade de probabilidade conjunta, para $\tau \leq 0$, procedemos da seguinte maneira : Escrevemos, como propriedade da densidade de probabilidade conjunta,

$$\rho(x',t';x,t) = \rho(x,t;x',t')\ . \tag{74}$$

Usamos o fato que o processo estocástico X(t) é estacionário, obtemos ($\tau = t-t'$)

$$\begin{aligned}\rho(x',0;x,\tau) &= \rho(x,0;x',-\tau)\\ &= \rho(\xi x',0;\xi x,-\tau)\ ,\end{aligned} \tag{75}$$

onde na última linha, temos usado a condição BD, eq.(II.29). Da eq.(75) obtemos, para $\tau \leq 0$, a densidade de probabilidade conjunta

$$\begin{aligned}\rho(x',0;x,\tau) &= \rho(\xi x',0;\xi x,|\tau|)\\ &= \Psi_o(x)\ \Psi_o(x')\ \Sigma_i\ \Psi_i(x')\ \Psi_i(\xi x)\ \exp[\ -\ \lambda_i\ |\tau|\ ]\ .\end{aligned} \tag{76}$$

Com as eqs(73,76) em mente, estamos aptos a calcular funções de correlação, muito úteis no estudo das propriedades estatísticas, como a largura de linha de um Laser.

III.11.D) *Densidade de Probabilidade Conjunta de um Laser Mono Modo Não Sintonizado.*

Na subseção anterior obtivemos a densidade de probabilidade conjunta em termos das autofunções dos operadore L e L⁺ no âmbito geral(em BD). Aplicaremos agora, os resultados ao nosso caso, pois as condições BD são satisfeitas.

Fazendo as mudanças de variáveis

$$X_1 = r\cos\Theta \quad ; \quad X_2 = r\,\mathrm{sen}\Theta \quad , \tag{77}$$

nas eqs.(42-46), e substituindo-as nas eqs.(59-61), obter-se-á o operador L em coordenadas polares

$$L_H(r,\Theta) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} - V(r) \quad ; \tag{78}$$

$$V(r) = a + [(a^2/4) - 2]\, r^2 - (a/2)\, r^4 + (1/4)\, r^6 \quad ; \tag{79}$$

$$L_A(r,\Theta) = -\,(a - r^2)\,\delta\,\frac{\partial}{\partial\Theta} \quad . \tag{80}$$

Pelo fato que $\exp[\,in\Theta\,]$ é uma autofunção de L com respeito a Θ, escrevemos :

$$\Psi_k(X_1,X_2) = \frac{\Psi_{nm}(r)}{(r)^{1/2}}\,\frac{\exp[\,in\Theta\,]}{(2\pi)^{1/2}} \quad . \tag{81}$$

A notação do duplo índice vem do fato que para cada valor de n, em $\exp[\,in\Theta\,]$, obtemos uma equação operador (eq.(83) abaixo). Para cada uma destas, existe autofunções $\Psi_{nm}(r)$ com dependencia somente em r. Quando X_2 vai para $-X_2$, Θ vai para $-\Theta$ (portanto Θ é uma variável ímpar), então

$$\Psi_k(\varepsilon_1X_1,\varepsilon_2X_2) = \Psi_k(X_1,-X_2)$$

$$= \frac{\Psi_{nm}(r)}{(r)^{1/2}}\,\frac{\exp[\,-in\Theta\,]}{(2\pi)^{1/2}} \tag{82}$$

Substituindo a eq.(81) em (78-80), obtemos a equação diferêncial não hermitiano, com autovalores λ_{nm} (geralmente complexos),

$$\Psi''_{nm} + [\ \lambda_{nm} - V_n - in\ (a - r^2)\ \delta\ ]\ \Psi_{nm} = 0 \quad ; \tag{83}$$

$$V_n = [\ n^2 - (1/4)\ ]\ (1/r^2) + a + [\ (a^2/4) - 2\ ]\ r^2 - (a/2)\ r^4 + + (r^6/4) \quad . \tag{84}$$

A solução estacionária $\Psi_o(x)$ é uma autofunção com autovalor nulo, como pode ser visto das eqs.(56-58).

Cálculo de $\Psi_o(x)$: Sabendo $\rho(x)$, podemos calcular $\Psi_o(x)$. Substituindo a eq.(46) em (II.80) resulta

$$\rho(X) = \exp(\ \mathrm{Int}[b^+_1(X)\ dX_1] + \mathrm{Int}[b^+_2(X)\ dX_2]\ ) \quad . \tag{85}$$

Usando as eqs.(42,43,77) em (85) obtemos,

$$\rho(r,\Theta) = c\ \exp[\ (ar^2/2) - (r^4/4)\ ] \quad , \tag{86}$$

onde c é uma constante de normalização e vale

$$c = \frac{2}{(\pi)^{1/2}}\ \frac{\exp[\ -(a^2)/4\ ]}{[\ 1 + \mathrm{erf}(a/2)\ ]} \quad ; \tag{87}$$

$$\mathrm{erf}(a/2) = \frac{2}{(\pi)^{1/2}}\ \mathrm{Int}(\ - x^2\ dx\ ) \quad . \tag{88}$$

Na eq.(88), o extremo de integração superior é a/2, e o inferior zero. Mas $\rho(x) = \Psi_o^2(x)$, então

$$\Psi_o(r) = (c)^{1/2} \exp[\,(ar^2/4) - (r^4/8)\,] \quad , \tag{89}$$

a qual junto com a eq.(81) resulta ($\lambda_{oo} = 0$) :

$$\Psi_{oo}(r) = (2\pi cr)^{1/2} \exp[\,(ar^2/4) - (r^4/8)\,] \quad . \tag{90}$$

□

A densidade de probabilidade condicional, eq.(72), no nosso caso, será, (usando a eq.(81)) em coordenadoas polares :

$$P(r',\Theta',0/r,\Theta,\tau) = \frac{1}{2\pi r}\,\frac{\Psi_{oo}(r)}{\Psi_{oo}(r')}\,\Sigma_m\,\Sigma_n\,(\,\Psi_{nm}(r)\,\Psi_{nm}(r')\,.$$
$$.\,\exp[in(\Theta - \Theta')]\,.\,\exp[-\,\lambda_{nm}\,\tau]\,)\quad , \tag{91}$$

onde m = 0, 1, 2, ... ; n = ..., -1, 0, 1, ...

As densidades de probabilidade conjunta serão (usando eqs.(73,77,81), para $\tau \geq 0$,

$$P(r',\Theta',0;r,\Theta,\tau) = \frac{\Psi_{oo}(r)}{2\pi r}\,\frac{\Psi_{oo}(r')}{2\pi r'}\,\Sigma_m\,\Sigma_n\,(\,\Psi_{nm}(r)\,\Psi_{nm}(r')\,.$$
$$.\,\exp[in(\Theta - \Theta')]\,.\,\exp[-\,\lambda_{nm}\,\tau]\,)\quad , \tag{92}$$

e para $\tau \leq 0$,

$$P(r',\Theta',0;r,\Theta,\tau) = \frac{\Psi_{oo}(r)}{2\pi r}\,\frac{\Psi_{oo}(r')}{2\pi r'}\,\Sigma_m\,\Sigma_n\,(\,\Psi_{nm}(r)\,\Psi_{nm}(r')\,.$$
$$.\,\exp[in(\Theta' - \Theta)]\,.\,\exp[-\,\lambda_{nm}\,|\tau|]\,)\,. \tag{93}$$

III.11.E) *Função de Correlação e a Largura de Linha.*

Para calcularmos a largura de linha do laser, é necessário obtermos a função de correlação da amplitude de seu campo. Empenhemo-nos então em seu cálculo.

III.II.E.1) *Função de Correlação* - A função de correlação da amplitude $u(t)$ é definida por [21]

$$g(a,\tau) = \langle u^*(t+\tau)\, u(t) \rangle \quad . \tag{94}$$

Para $\tau \geq 0$,

$$g(a,\tau) = \mathrm{Int}\ (\ \mathrm{Int}\ [\ u^*\, u'\ \rho(u',0;u,\tau)\ d^2u\ ]\ d^2u'\ ) \quad . \tag{95}$$

Reescrevendo a eq.(95) em coordenadas polares, e inserindo a eq.(92), resulta :

$$\begin{aligned} G(a,T) &= \Sigma\ (\ \mathrm{Int}\ [\ r\ \Psi_{oo}(r)\ \Psi_{1m}(r)\ dr\ ]^2 \exp[\ -\ \lambda_{1m}\ T\ ] \\ &= G(a,0)\ \Sigma_m\ A_m \exp[\ -\ \lambda_{1m}\ T\ ] \quad ; \end{aligned} \tag{96}$$

$$A_m = \frac{(\ \mathrm{Int}\ [\ r\Psi_{oo}(r)\ \Psi_{1m}(r)\ dr\ ]\ )^2}{G(a,0)} \quad . \tag{97}$$

Colocando $T = 0$ na eq.(96), vemos que

$$\Sigma_m\ A_m = 1 \qquad ; \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad . \tag{98}$$

Podemos pensar A_m como a influencia relativa do n-ésimo termo na eq.(96). Na região próxima ao limiar (threshold), os cálculos (ver [22] cap. 12) de A_O (m=0) apresentam que $1 - A_O = \Sigma_m A_m$,(m=1,2,...), é da ordem de 2 % . Então podemos fazer uma aproximação para a eq.(96)

$$G(a,T) = G(a,0) \exp[\ -\lambda_{1o}\ T\ ] \quad . \tag{99}$$

Usando a eq.(97), com n=0, obtemos uma boa aproximação para $G(a,0)$ $(A_0 \simeq 1)$

$$G(a,0) \simeq (\text{Int} [r \Psi^2_{00}(r) \, dr])^2$$
$$\simeq \text{Int} [r^2 \Psi^2_{00}(r) \, dr]$$
$$= < |U|^2 > \quad , \tag{100}$$

onde $U = (\beta/g)^{1/4} u$, ver eq.(41).

Escrevendo o autovalor λ_{10} em termos de sua parte real, $Re\lambda_{10}$, e imaginária $Im\lambda_{10}$, isto é,

$$\lambda_{10} = Re\lambda_{10} + iIm\lambda_{10} \quad ,$$

e retornando "à escala original", eq.(41), temos

$$g(a,\tau) = < |u|^2 > \exp(- (g\beta)^{1/2} [Re\lambda_{10} + iIm\lambda_{10}] \tau) \quad . \tag{101}$$

Para o caso em que $\tau \leq 0$, o cálculo é similar e obtemos

$$g(a,\tau) = < |u|^2 > \exp(-(g\beta)^{1/2} [Re\lambda_{10} + iIm\lambda_{10}] |\tau|)$$
$$= < |u|^2 > \exp(-(g\beta)^{1/2} [Re\lambda_{10} |\tau| - iIm\lambda_{10} \tau]) \quad . \tag{102}$$

$$g(a,\tau) = g^*(a,|\tau|) \quad . \tag{103}$$

III.1.E.2) *Largura de Linha* - A transformada de fourier da função de correlação dá a densidade espectral, a qual não definiremos aqui (ver [22,23]). A largura de linha $\Delta\nu$, no nosso caso, é dada por (a parte real de $g(a,\bar{\sigma})$ são iguais para $\bar{\sigma} \geq 0$ e $\bar{\sigma} \leq 0$, eq.(101,102))

$$\Delta\nu = (g\beta)^{1/2}\, \mathrm{Re}\lambda_{1o}$$
$$= \alpha_L\, g \,/ < |u|^2 > \quad , \tag{104}$$

onde

$$< |u|^2 > = (g/\beta)^{1/2} < |U|^2 > \quad ;$$

$$< |U|^2 > = \mathrm{Int}(\ r^2\, \Psi^2_{oo}(r)\ dr\ )$$
$$= a + \frac{2}{(\pi)^{1/2}}\,\frac{\exp[\,-\,a^2/4\,]}{1 + \mathrm{erf}(a/2)} \quad , \tag{105}$$

e $\mathrm{erf}(a/2)$ é definida na eq.(88).

A potência de saída P dividida pela potência na região limiar (threshold), isto é, P_{thr} é

$$\frac{P}{P_{thr}} = \frac{< |U|^2 >}{< |U|^2 >_{thr}} = \frac{(\pi)^{1/2}}{2} < |U|^2 > \quad . \tag{106}$$

O fator largura de linha α_L é definida por [21,23]

$$\alpha_L = \alpha_L(a,\delta) = < |U|^2 > \mathrm{Re}\lambda_{1o} \quad , \tag{107}$$

ou em têrmos da potência de saída normalizada (P/P_{thr})

$$\alpha_L = \frac{2}{(\pi)^{1/2}}\,\frac{P}{P_{thr}}\,\mathrm{Re}\lambda_{1o} \quad . \tag{108}$$

A fig.3 apresenta os resultados do cálculo numérico desse fator largura de linha, eqs.(107,108) [19,21,23]. No caso em que o laser esta sintonizado, α_L varia de 2 para 1 passando pela região limiar. Com o aumento da dessintonização (aumento de δ), essa razão é diminuida . Quando δ é maior que 1, α_L é até mesmo maior, na região acima do limiar, do que abaixo desta.

Para a dessintonização δ não muito grande, H. Risken e K. Seybold [21,23] propoem uma aproximação para o fator largura de linha $\alpha_L(a,\delta)$, eq.(107), onde esta pode ser expressada pelo fator $\alpha_L(a,0)$ com sintonização,

$$\alpha_L(a,\delta) = \alpha_L(a,0) + [\ 2 - \alpha_L(a,0)\ ]\ \delta^2 \quad . \tag{109}$$

Por exemplo : para $\delta = 1$ temos, pela eq.(109), que $\alpha_L(a,1) = 2$, o qual é correto a menos de um erro menor que 7 %, ver fig.3. Para regiões muito acima (a >> 0) e muito abaixo (a << 0) do limiar, a eq.(109) é exata [23].

APÊNDICE A

OPERADOR ADJUNTO DE FOKKER-PLANCK

Demonstraremos que o operador de Fokker-Planck anterior é o adjunto do operador FP posterior. O mesmo é verdade para o operador de Kramers-Moyal, a demonstração é similar mas não será feita.

Observação : Omitiremos neste apêndice as dependências em x e t. Usaremos a notação de Einstein a menos que se diga o contrário.

Seja L_{fp} o operador FP posterior, eq.(I.64), e denotamos por $L^{+}_{fp} = (L_{fp}{}^{T})^{*}$ o seu adjunto. Aqui $*$ significa conjugado complexo e $L_{fp}{}^{T}$ é o transposto do operador L_{fp}. Então vamos demonstrar, resumidamente, que

$$L^{+}_{fp} = - b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ,$$

isto é, o operador FP anterior.

Prova : Seja (u_k) um conjunto de funções que gera o espaço de aplicações de L_{fp}. O elemento de matriz $(L_{fp})_{kl}$ associado ao operador L_{fp} é dado por

$$(L_{fp})_{kl} = \mathrm{Int}(u_k{}^{*} L_{fp} u_l \, dx)$$

$$= \mathrm{Int}(u_k{}^{*} [- \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}] u_l \, dx) , \qquad (1)$$

onde $dx = dx_1 \ldots dx_N$ e u_k, para todo k, se anula nos extremos de integração, os quais serão omitidos. Por definição de operador adjunto,

$$(L^{+}_{fp})_{lk} = ([(L_{fp})^{T}]^{*})_{lk}$$

$$= [(L_{fp})_{kl}]^{*}$$

$$= (\mathrm{Int}[u_k^{*} (- \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}) u_l \, dx])^{*} \quad . \qquad (2)$$

Aplicando o operador L_{fp} à função u_l, calculando o conjugado complexo e sabendo que os coeficientes b_i e D_{ij} são reais, obtemos:

$$(L^{+}_{fp})_{lk} = \mathrm{Int}(u_k [- \frac{\partial b_i u_l^{*}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij} \, u_l^{*}}{\partial x_i \partial x_j}] \, dx)$$

$$= - \mathrm{Int}(u_k b_i \frac{\partial u_l^{*}}{\partial x_i} dx) - \mathrm{Int}(u_k u_l^{*} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dx)$$

$$+ \mathrm{Int}(u_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} . \frac{\partial u_l^{*}}{\partial x_j} dx) + \mathrm{Int}(u_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_l^{*}}{\partial x_i} dx)$$

$$+ \mathrm{Int}(u_k D_{ij} \frac{\partial^2 u_l^{*}}{\partial x_i \partial x_j} dx) + \mathrm{Int}(u_k u_l^{*} \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} dx) \quad . \qquad (3)$$

Resolvendo no segundo membro da eq.(3) cada integral, da subentendida somatória, por integração parcial na dependência em x_i, obtemos:

OBS: Abandonamos provisoriamente a notação de Einstein.

$$-\mathrm{Int}(u_k b_i \frac{\partial u_l^{*}}{\partial x_i} dx_i) = - u_l^{*} u_k b_i + \mathrm{Int}(u_l^{*} \frac{\partial u_k b_i}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \mathrm{Int}(u_k u_l{}^* \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\, dx_i) + \mathrm{Int}(u_l{}^*\, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx_i)$$

Temos usado o fato que tanto $u_l{}^*$ como u_k anulam nos extremos de integração. Então

$$- \mathrm{Int}(u_k b_i \frac{\partial u_l{}^*}{\partial x_i}\, dx) = \mathrm{Int}(u_k u_l{}^* \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\, dx) + \mathrm{Int}(u_l{}^*\, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx) \quad .$$

Note que usamos dx e não dx_i. Reassumindo a notação de Einstein temos

$$- \mathrm{Int}(u_k b_i \frac{\partial u_l{}^*}{\partial x_i}\, dx) = \mathrm{Int}(u_k u_l{}^* \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\, dx) + \mathrm{Int}(u_l{}^*\, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx) \quad . \qquad (4)$$

Ao substituir a eq.(4) na eq.(3), o segundo termo desta é cancelado e

$$(L^+{}_{fp})_{lk} = \mathrm{Int}(u_l{}^*\, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx) + \mathrm{Int}(u_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} . \frac{\partial u_l{}^*}{\partial x_j}\, dx) +$$

$$+ \mathrm{Int}(u_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_l{}^*}{\partial x_i}\, dx) + \mathrm{Int}(u_k\, D_{ij} \frac{\partial^2 u_l{}^*}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \mathrm{Int}(u_k\, u_l{}^* \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\, dx) \quad . \qquad (5)$$

Similarmente, desenvolvemos em integrais por partes em relação a x_i as integrais N-uplas das duas últimas subentendidas somatórias da eq.(5). Abandonamos novamente a notação de Einstein.

$$\mathrm{Int}(u_k\, u_l{*}\, \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i) = u_k\, u_l{*}\, \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - \mathrm{Int}(\, \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k u_l{*}}{\partial x_i}\, dx_i)$$

$$= -\ \mathrm{Int}(u_k\, \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_l{*}}{\partial x_i}\, dx_i)$$

$$-\ \mathrm{Int}(u_l{*}\, \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx_i \quad ; \tag{6}$$

$$\mathrm{Int}(u_k\, D_{ij}\, \frac{\partial^2 u_l{*}}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i) = u_k\, D_{ij}\, \frac{\partial u_l{*}}{\partial x_j} - \mathrm{Int}(\, \frac{\partial u_l{*}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k D_{ij}}{\partial x_i}\, dx_i)$$

$$= -\ \mathrm{Int}(u_k\, \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} . \frac{\partial u_l{*}}{\partial x_j}\, dx_i) -$$

$$-\ \mathrm{Int}(D_{ij}\, \frac{\partial u_k}{\partial x_i} . \frac{\partial u_l{*}}{\partial x_j}\, dx_i) \quad . \tag{7}$$

Na segunda linha das eqs.(6,7) usamos o fato que u_k anula nos extremos de integração. Substituindo as integrais simples, eqs.(6,7), nas integrais N-uplas onde estão inseridas, e usando a notação de Einstein, os dois últimos termos do segundo membro da eq.(5) resulta :

$$\mathrm{Int}\left(u_k u_l^* \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\, dx\right) = -\,\mathrm{Int}\left(u_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_l^*}{\partial x_i}\, dx\right) -$$

$$-\,\mathrm{Int}\left(u_l^* \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx\right) \quad , \tag{8}$$

e

$$\mathrm{Int}\left(u_k D_{ij} \frac{\partial^2 u_l^*}{\partial x_i \partial x_j}\, dx\right) = -\,\mathrm{Int}\left(u_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} . \frac{\partial u_l^*}{\partial x_j}\, dx\right) -$$

$$-\,\mathrm{Int}\left(D_{ij} \frac{\partial u_l^*}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right. \quad . \tag{9}$$

Substituindo as eqs.(8,9) em (5), vemos que o primeiro termo da eq.(8) e eq.(9) cancelam com o terceiro e o segundo termo da eq.(5) respectivamente. Portanto

$$(L^{+}_{fp})_{lk} = \mathrm{Int}\left(u_l^* \, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx\right) - \mathrm{Int}\left(u_l^* \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx\right) -$$

$$-\,\mathrm{Int}\left(D_{ij} \frac{\partial u_l^*}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx\right)$$

$$= \mathrm{Int}\left(u_l^* \, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx\right) - \mathrm{Int}\left(\frac{\partial u_l^* D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx\right) \quad . \tag{10}$$

Abandonamos a notação de Einstein para resolver as integrais simples, por integração por partes em relação a x_j, das N-uplas contidas no último termo da eq.(10).

$$- \mathrm{Int}(\frac{\partial u_l{*}\, D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx_j) = - u_l{*}\, D_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mathrm{Int}(u_l{*}\, D_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j$$

$$= \mathrm{Int}(u_l{*}\, D_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j) \quad . \tag{11}$$

E portanto

$$- \mathrm{Int}(\frac{\partial u_l{*}\, D_{ij}}{\partial x_j} . \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx) = \mathrm{Int}(u_l{*}\, D_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i}\, dx) \quad , \tag{12}$$

que substituindo no segundo termo da eq.(10), esta resulta (reutilizando a notação de Einstein) :

$$(L^{+}{}_{fp})_{lk} = \mathrm{Int}(u_l{*}\, b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx) + \mathrm{Int}(u_l{*}\, D_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}\, dx)$$

$$= \mathrm{Int}(u_l{*}\, [\; b_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \;]\, dx)$$

$$= \mathrm{Int}(u_l{*}\, [\; b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \;]\, dx) \quad . \tag{13}$$

Como as funções (u_k) são arbitrárias, temos que :

$$L^*_{fp} = b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad . \tag{14}$$

□

APÊNDICE B

EQUIVALÊNCIA DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO ANTERIOR E POSTERIOR

As soluções formais, da equação KM posterior

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} = L_{km}(x)\ P(x't'/xt) \quad , \qquad (1)$$

e da equação KM anterior

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = L^{+}_{km}(x')\ P(x't'/xt) \quad , \qquad (2)$$

para os operadores KM independentes do tempo, e com a condição inicial

$$P(x't'/xt') = \delta(x-x') \quad , \qquad (3)$$

são dadas por :

$$P(x't'/xt) = (\ \exp[\ L_{km}(x)\ (t-t')\ ]\ )\ \delta(x-x') \quad , \qquad (4)$$

e

$$P(x't'/xt) = (\ \exp[\ L^{+}_{km}(x')\ (t-t')\ ]\ )\ \delta(x-x') \quad , \qquad (5)$$

respectivamente.

Mostraremos aqui que as soluções (4,5) são equivalentes, mas antes demonstraremos que

$$A(x)\ \delta(x-x') = A^{+}(x')\ \delta(x-x') \quad , \qquad (6)$$

onde $A^{+}(x')$ é o adjunto do operador $A(x)$ geral, que contem somente operadores diferenciais com respeito à x e funções que dependem somente de x.

Prova : Seja $f(x)$ uma função arbitrária qualquer, mas no domínio de A. Podemos escrever $A(x)\ f(x)$ de duas maneiras distintas :

$$A(x)\ f(x) = A(x)\ \mathrm{Int}(\delta(x-x')\ f(x')\ dx')$$

$$= \mathrm{Int}(A(x)\ \delta(x-x')\ f(x')\ dx')$$

$$= \mathrm{Int}(f(x')\ A(x)\ \delta(x-x')\ dx'\ , \tag{7}$$

também

$$A(x)\ f(x) = \mathrm{Int}(\delta(x-x')\ A(x')\ f(x')\ dx')$$

$$= \mathrm{Int}(f(x')\ A^{+}(x')\ \delta(x-x')\ dx') \quad . \tag{8}$$

Subtraindo a eq.(8) da eq.(7), obtemos

$$0 = \mathrm{Int}(f(x')\ [A(x)\delta(x-x') - A^{+}(x')\delta(x-x')]\ dx') \quad . \tag{9}$$

Como $f(x')$ é arbitrária, então a expressão entre colchetes deve ser nula, ou seja

$$A(x)\ \delta(x-x') = A^{+}(x')\ \delta(x-x') \tag{6}$$

□

Para mostrar a equivalência entre as soluções, eqs.(4,5), colocamos :

$$A(x) = \mathrm{EXP}[\ L_{km}(x)\ (t-t')\ ]\ , \tag{10}$$

e

$$A^{+}(x') = \mathrm{EXP}[\ L^{+}(x')\ (t-t')\ ]\ , \tag{11}$$

e substituimos na eq.(6).

Neste trabalho o processo estocástico $X(t)$ é estacionário e a demonstração, para operadores dependentes do tempo, foge ao nosso escopo, ver Risken (1984).

APÊNDICE C

COEFICIENTES DRIFT, DIFUSÃO E A EQUAÇÃO WIENER

Apresentaremos aqui um "esboço da demonstração" das eqs(I.80,81).

Da equação de Langevin

$$\frac{dX_i(t')}{\partial t'} = h_i(X(t'),t') + \Gamma_i(t') \quad ; \tag{1}$$

$$< \Gamma_i(t') > = 0 \quad ; \quad < \Gamma_i(t)\, \Gamma_j(t') > = 2\, g\, \delta_{ij}\, \delta(t-t') \quad ,$$

temos que

$$X_i(t+\Delta t) - x_i = \mathrm{Int}(h_i(X(t'),t')\, dt') + \mathrm{Int}(\Gamma_i(t')\, dt') \quad , \tag{2}$$

onde $X_i(t) = x_i$, $\Delta t > 0$, $t \leq t' \leq t+\Delta t$ (os extremos de integração são os extremos desse intervalo). Usaremos aqui a notação de Einstein.

Expandindo $h_i(X(t'),t')$ em série de Taylor obtemos :

$$h_i(X(t'),t') = h_i(x,t') + [X_k(t') - x_k] \frac{\partial h_i(x,t')}{\partial x_k} + \ldots \quad . \tag{3}$$

Substituindo eq.(3) em (2) resulta

$$X_i(t+\Delta t) - x_i = \mathrm{Int}(h_i(x,t')\, dt') + \mathrm{Int}([X_k(t') - x_k] \frac{\partial h_i(x,t')}{\partial x_k}\, dt')$$

$$+ \mathrm{Int}(\Gamma_i(t')\, dt') + \ldots \quad . \tag{4}$$

Obtemos $[X_k t') - x_k]$ recursivamente, substituimos na eq.(4),

$$X_i(t+\Delta t) - x_i = \mathrm{Int}(h_i(x,t')\,dt') + \mathrm{Int}(\Gamma_i(t')\,dt') +$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[h_k(x,t'')\,\frac{\partial h_i(x,t')}{\partial x_k}\,dt'']\,dt') +$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[(X_j(t'') - x_j)\,\frac{\partial h_k(x,t'')}{\partial x_j}\,\frac{\partial h_i(x,t')}{\partial x_k}\,dt'']\,dt') + \ldots \quad . \qquad (5)$$

Aqui $t \leq t'' \leq t'$, e os extremos de integração em t'' t (inferior) e t' (superior). Dividindo ambos os membros da eq.(5) por Δt e fazendo $\Delta t \to 0$ ($t \leq t' \leq t+\Delta t$ então $t' \to t$), os terceiros, quartos, ..., termos do segundo membro são nulos. Tomando em seguida a média, obtemos :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{< X_i(t+\Delta t) - x_i >}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{Int}(h_i(x,t')\,dt')}{\Delta t}$$

$$= h_i(x,t) \qquad (6)$$

onde temos usado o fato que

$< \Gamma_i(t') > = 0$ e $< h_i(x,t') > = h_i(x,t)$.

Substituindo (6) em

$$b_i(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< X_i(t+\Delta t) - x_i >}{\Delta t} \quad , \qquad (7)$$

o coeficiente drift velocidade posterior, obtemos :

$$b_i(x,t) = h_i(x,t) \qquad (8)$$

Para calcular o coeficiente de difusão

$$D_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< [X_i(t+\Delta t) - x_i]\ [X_j(t+\Delta t) - x_j] >}{\Delta t} \quad , \qquad (9)$$

o procedimento é similar.

$$[X_i(t+\Delta t) - x_i]\ [X_j(t+\Delta t) - x_j] = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[h_i(X(t'),t')\ .$$

$$\cdot_i(X(t''),t'')\ dt'']\ dt') +$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[\Gamma_i(t')\ \Gamma_j(t'')\ dt'']\ dt') +$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[h_i(X(t')t')\ \Gamma_j(t'')\ dt'']\ dt') +$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[h_j(X(t''),t'')\ \Gamma_i(t')\ dt'']\ dt') \quad , \qquad (10)$$

onde $t \leq t' \leq t+\Delta t$, $t \leq t'' \leq t+\Delta t$ (intervalo de integração em t' e t", respectivamente). Substituindo a eq.(3) no segundo membro da eq.(10) resulta :

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}[\Gamma_i(t')\ \Gamma_j(t'')\ dt'']\ dt') + \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[h_i(x,t')\ h_j(x,t'')dt'']\ dt')$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[\Gamma_i(t')\ h_j(x.t'')\ dt'']\ dt') + \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[\Gamma_j(t'')h_i(x,t')dt'']dt')$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[(X_l(t'') - x_l)\ \Gamma_i(t')\ \frac{\partial h_j(x,t'')}{\partial x_l}\ dt'']\ dt') +$$

$$+ \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[(X_k(t') - xk)\ \Gamma_j(t'')\ \frac{\partial h_i(x,t')}{\partial x_k}\ dt'']\ dt') + \ldots \quad .$$

Calculando o valor médio dessa expressão, dividindo por Δt, fazendo o limite quando $\Delta t \to 0$, e com o fato em mente que $< \Gamma_i(t) > = 0$, temos que todos os termos serão nulos, com exceção do primeiro. A eq.(10) então resulta

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{< [X_i(t+\Delta t) - x_i]\,[X_j(t+\Delta t) - x_j]}{\Delta t} =$$

$$= \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[< \Gamma_i(t')\, \Gamma_j(t'') > dt'']\, dt') \qquad (11)$$

Substituindo (11) em (9) obtemos

$$D_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[< \Gamma_i(t')\, \Gamma_j(t'')\, dt'']\, dt')$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{Int}(\mathrm{Int}[g\, \delta_{ij}\, \delta(t'-t'')\, dt'']\, dt')$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{Int}(g_{\;ij}\, dt') \quad , \qquad (12)$$

onde na segunda linha temos usado a correlação temporal de $\Gamma(t)$, isto é,

$$< \Gamma_i(t')\, \Gamma_j(t'') > = 2\, g\, \delta_{ij}\, \delta(t'-t'') \quad .$$

A última integral, na eq.(12), tem extremo inferior de integração t, e superior, $t + \Delta t$. Então

$$\mathrm{Int}(g\, \delta_{ij}\, dt') = g\, \delta_{ij}\, \Delta t \quad . \qquad (13)$$

Substituindo (13) em (12), obtemos a eq.(I.81), ou seja

$$D_{ij}(x,t) = g\, \delta_{ij} \quad . \qquad (14)$$

APÊNDICE D

EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK E O OPERADOR L

É-nos conveniente escrever a equação de Fokker-Planck posterior (anterior) usando, no lugar de L_{fp} (L^{+}_{fp}), o operador L (L^{+}) definido em (III.50). "Demonstraremos" aqui então, que se o processo estocástico X(t) for estacionário, a equação FP posterior pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left[\frac{1}{\Psi_o(x)} P(x',0/x,\tau) \right] = L(x) \left[\frac{1}{\Psi_o(x)} P(x',0/x,\tau) \right] , \qquad (1)$$

e a equação FP anterior,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left[\Psi_o(x') P(x',0/x,\tau) \right] = L^{+}(x') \left[\Psi_o(x') P(x',0/x,\tau) \right] . \qquad (2)$$

Desde que a densidade de probabilidade condicional $P(x',0/x,\tau)$ satisfaça, em (1) e (2), a condição inicial

$$P(x',0/x,0) = \delta(x-x') , \qquad (3)$$

ambos terão soluções iguais, ou seja

$$P(x',0/x,\tau) = \frac{\Psi_o(x)}{\Psi_o(x')} \{ \exp[L(x)\, \tau] \} \delta(x-x') . \qquad (4)$$

Prova : Seja X(t) um processo estacionário,

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t} \; L_{fp}(x) \; P(x't'/xt) \quad , \tag{5}$$

a equação FP posterior, e

$$\frac{\partial P(x't'/xt)}{\partial t'} = - L^{+}_{fp}(x') \; P(x't'/xt) \quad , \tag{6}$$

a equação FP anterior, onde em ambas, $t \geq t'$, e os operadores $L_{fp}(x)$ e $L^{+}_{fp}(x')$ são definidos por (I.65) e (I.68), respectivamente.

Da estacionariedade do processo estocástico X(t), temos

$$P(x't'/xt) = P(x',t'+\eta/x,t+\eta) \quad . \tag{7}$$

Fazendo $\eta = - t'$, e $t - t' = \tau$, em (7) obtemos

$$P(x't'/xt) = P(x',0/x,\tau) \quad . \tag{8}$$

Se t' for constante, $dt = d\tau$, e a eq.(5) será

$$\frac{\partial P(x',0/x,\tau)}{\partial \tau} = L_{fp}(x) \; P(x',0/x,\tau) \tag{9}$$

Fazendo t constante, $dt' = - d\tau$, e a eq.(6)

$$\frac{\partial P(x',0/x,\tau)}{\partial \tau} \; L^{+}_{fp}(x) \; P(x',0/x,\tau) \quad . \tag{10}$$

Da definição dos operadores L e L^{+} (operador adjunto de L), eq.(III.29), obtemos

$$L_{fp}(x) = \exp[- \varnothing(x)/2] \; L(x) \; \exp[\varnothing(x)/2] \quad ; \tag{11}$$

$$L^{+}_{fp}(x) \quad \exp[\varnothing(x)/2] \; L^{+}(x) \; \exp[- \varnothing(x)/2] \quad . \tag{12}$$

Lembrando-se que

$\rho(x) = \exp[- \varnothing(x)] = [\Psi_o(x)]^2$,

reescrevemos (11) e (12)

$$L_{fp}(x) = \Psi_o(x)\, L(x) \frac{1}{\Psi_o(x)} \quad ; \tag{13}$$

$$L^*_{fp}(x) = \frac{1}{\Psi_o(x)} L^*(x)\, \Psi_o(x) \quad . \tag{14}$$

Inserindo as equações (13) e (14) em (9) e (10), respectivamente, resulta :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\Psi_o(x)} P(x',0/x,\tau) \right] = L(x) \left[\frac{1}{\Psi_o(x)} P(x',0/x,\tau) \right] \quad , \tag{15}$$

a equação FP posterior na forma do operador L, eq.(1); e

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\Psi_o(x')\, P(x',0/x,\tau)] = L^*(x') [\Psi_o(x')\, P(x',0/x,\tau)] \quad , \tag{16}$$

a equação FP anterior em termos do operador L^*, eq.(2).

A eq.(15) possui solução formal

$$P(x',0/x,\tau) = \Psi_o(x) (\exp[L(x)\, \tau])\, C(x,x') \quad . \tag{17}$$

Com a condição incial (3), em (17), obtemos

$$C(x,x') = \frac{1}{\Psi_o(x)}\,\delta(x-x')$$

$$= \frac{1}{\Psi_o(x')}\,\delta(x-x') \quad . \qquad (18)$$

Inserindo (18) em (17) resulta

$$P(x',0/x,\tau) = \frac{\Psi_o(x)}{\Psi_o(x')}\,(\,\exp[\,L(x)\,\tau\,]\,)\,\delta(x-x') \quad , \qquad (19)$$

a solução da equação FP posterior (1).

Podemos escrever a solução da eq.(16) como

$$P(x',0/x,\tau) = \frac{1}{\Psi_o(x')}\,(\,\exp[\,L^{+}(x')\,\tau\,]\,C'(x,x') \quad . \qquad (20)$$

Usando a eq.(3) em (20), temos

$$C'(x,x') = \Psi_o(x')\,\delta(x-x')$$

$$= \Psi_o(x)\,\delta(x-x') \quad . \qquad (21)$$

Substituindo a e.(21) em (20), e tendo em mente a eq.(B.6), obtemos

$$P(x',0/x,\tau) = \frac{\Psi_o(x)}{\Psi_o(x')}\,(\,\exp[\,L(x)\,\tau\,]\,)\,\delta(x-x') \quad , \qquad (22)$$

a qual é a solução da equação FP anterior (2), igual à solução da equação FP posterior (1).

□

APÊNDICE E

O OPERADOR L E OS COEFICIENTES DRIFT E DIFUSÃO

Calcularemos neste apêndice uma expressão para o operador L(x), em termos dos coeficientes drift e difusão, quando o processo estocástico X(t) for estacionário, e estiver em Balanceamento Detalhado, ou seja, que o operador definido por (usaremos aqui a convenção de somatória sobre índices repetidos, e negligenciaremos as dependências em x)

$$L = \exp[\emptyset/2]\, L_{fp}\, \exp[-\emptyset/2] \quad , \tag{1}$$

onde

$$\exp[-\emptyset/2] = [P]^{1/2} = \Psi_o \quad ; \tag{2}$$

$$L_{fp} = -\frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \tag{3}$$

pode ser escrito por

$$L = L_H + L_A \quad ; \tag{4}$$

$$L_H = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\Psi_o} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ij} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x_i} \right] \right\} \quad ; \tag{5}$$

$$L_A = -b^-_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b^-_i \frac{1}{\Psi_o} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x_i} \quad , \tag{6}$$

ou ainda, mais explicitamente, em termos dos coeficientes drift e difusão

$$L_H = \frac{\partial}{\partial x_i} [D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}] + V \quad ; \tag{7}$$

$$V = \frac{1}{4} D^{-1}_{ij} [\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} - b^+_i][\frac{\partial D_{jl}}{\partial x_l} - b^+_j] - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial b^+_i}{\partial x_i} \quad ; \tag{8}$$

$$L_A = b^-_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^-_i}{\partial x_i} \quad . \tag{9}$$

Dividiremos os cálculos em quatro partes : E.i, E.ii, E.iii, E.iv, onde obteremos as equações (6), (5), (9) e (7,8), respectivamente.

Cálculos - Inserindo a eq.(3) em (1); e aplicando L a uma função arbitrária de x, mas do seu domínio (por questões de claridade de raciocínio), obtemos

$$L\,[f] = \exp[\emptyset/2] \{ - \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \} \{ \exp[- \emptyset/2] \} [f] +$$

$$+ \exp[\emptyset/2] \{ \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \} \{ \exp[- \emptyset/2] \} [f] \quad . \tag{10}$$

Substituindo a equação

$$b_i = b^+_i + b^-_i \quad , \tag{11}$$

na eq.(10), resulta

$$L\,[f] = \exp[\varnothing/2]\ \left(- \frac{\partial b^{-}_{i}}{\partial x_{i}} \right) \left(\exp[-\ \varnothing/2] \right) [f]$$

$$+ \exp[\varnothing/2]\ \left(- \frac{\partial b^{+}_{i}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_{i} \partial x_{j}} \right) \left(\exp[-\ \varnothing/2] \right) [f] \quad . \qquad (12)$$

E.1) *Operador* L_A (*caso* I).

Desenvolvendo o primeiro termo, do segundo membro da eq.(12), obteremos uma expressão para L_A.

$$\exp[\varnothing/2]\ \left(- \frac{\partial b^{-}_{i}}{\partial x_{i}} \right) \left(\exp[-\ \varnothing/2] \right) [f] =$$

$$= -\ \exp[\varnothing/2]\ \frac{\partial b^{-}_{i}\ \exp[-\ \varnothing/2]\ f}{\partial x_{i}}$$

$$= -\ \exp[\varnothing/2]\ \frac{\partial (\ b^{-}_{i}\ \exp[-\ \varnothing]\ )\ (\ \exp[\varnothing/2]\ f\ )}{\partial x_{i}}$$

$$= -\ \exp[\varnothing/2]\ f\ \exp[\varnothing/2]\ \frac{\partial b^{-}_{i}\ \exp[-\ \varnothing]}{\partial x_{i}}$$

$$-\ \exp[\varnothing/2]\ b^{-}_{i}\ \exp[-\ \varnothing]\ \frac{\partial f\ \exp[\varnothing/2]}{\partial x_{i}} \quad . \qquad (13)$$

Substituindo as eqs.(2,II.59) em (13) resulta

$$\exp[\emptyset/2] \left(- \frac{\partial b^-_i}{\partial x_i} \right) \left(\exp[-\emptyset/2] [f] = \right.$$

$$= - \exp[\emptyset] f \frac{\partial J^-_i}{\partial x_i}$$

$$- b^-_i \exp[-\emptyset/2] \left(f \frac{\partial \exp[\emptyset/2]}{\partial x_i} + \exp[\emptyset/2] \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

$$= - b^-_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - f\, b^-_i \exp[-\emptyset/2] \frac{\partial \exp[\emptyset/2]}{\partial x_i}$$

$$= - b^-_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + f\, b^-_i \frac{1}{\exp[-\emptyset/2]} \frac{\partial \exp[-\emptyset/2]}{\partial x_i} \qquad (14)$$

Na segunda linha (igualdade) da eq.(14) usamos a terceira condição BD, eq.(II.66.). Substituindo (2) em (14) resulta

$$\exp[\emptyset/2] \left(\frac{\partial b^-_i}{\partial x_i} \right) \left(\exp[-\emptyset/2] \right) [f] =$$

$$= \left(- b^-_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b^-_i \frac{1}{\Psi_o} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x_i} \right) [f]$$

$$= L_A [f]$$

onde L_A é definida pela eq.(6).

E.ii) *Operador* L_H (*caso* I).

Desenvolvendo agora o último termo, do segundo membro da eq.(11), obtemos uma expressão para o operador L_H. Seja este um operador tal que, aplicado à função f, resulte neste termo, isto é,

$$L_H\,[f] = \exp[\varnothing/2]\ \left(- \frac{\partial b^{*}_{i}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \left(\exp[-\,\varnothing/2] \right) [f] \quad . \tag{15}$$

Aplicando o termo entre chaves, da eq.(15), à $\exp[-\,\varnothing/2]\,f$, obtemos

$$L_H\,[f] = -\exp[\varnothing/2]\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(b^{*}_{i} \exp[-\,\varnothing] \right) \left(f \exp[\varnothing/2] \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \left(D_{ij} \exp[-\,\varnothing] \right) \left(f \exp[\varnothing/2] \right)}{\partial x_j} \right)$$

$$= -\exp[\varnothing/2]\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(f \exp[\varnothing/2] \right) J^{*}_{i} - D_{ij} \exp[-\,\varnothing]\ \frac{\partial f \exp[\varnothing/2]}{\partial x_j} \right.$$

$$= \exp[\varnothing/2]\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \exp[-\,\varnothing]\ \frac{\partial f \exp[\varnothing/2]}{\partial x_j} \right) \quad , \tag{16}$$

onde usamos a eq.(II.60) na segunda linha (igualdade), na terceira, usamos a segunda condição BD, eq.(II.66.b). Desenvolvendo o termo entre chaves, em (16), resulta :

$$L_H[f] = f \exp[\emptyset/2] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \exp[-\emptyset] \frac{\partial \exp[\emptyset/2]}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \exp[\emptyset/2] D_{ij} \exp[-\emptyset] \frac{\partial \exp[\emptyset/2]}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ D_{ij} \exp[\emptyset/2] \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \exp[-\emptyset/2]}{\partial x_i} \quad . \qquad (17)$$

Trocando , no último termo do segundo membro da eq.(17), i por j, j por i, usando o fato que $D_{ji} = D_{ij}$, e somando-o em seguida ao segundo termo do segundo membro, obteremos :

$$\exp[\emptyset/2] D_{ij} \exp[-\emptyset] \frac{\partial \exp[\emptyset/2]}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \exp[\emptyset/2] D_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \exp[-\emptyset/2]}{\partial x_i} =$$

$$= \exp[\emptyset/2] D_{ij} \left(\exp[-\emptyset] (-1) \exp[\emptyset] \frac{\partial \exp[-\emptyset/2]}{\partial x_j} + \frac{\partial \exp[-\emptyset/2]}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= 0 \quad . \qquad (18)$$

Inserindo (18) em (17) resulta

$$L_H [f] = \exp[\emptyset/2]\, f \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \exp[-\emptyset] \exp[\emptyset] \frac{\partial \exp[-\emptyset/2]}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad . \tag{19}$$

Substituindo a eq.(2) e (19), obtemos

$$L_H [f] = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\Psi_o} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x_j} \right) \right] \right) [f] \quad . \tag{20}$$

Portanto

$$L_H = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\Psi_o} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ij} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x_j} \right] \right) \quad . \tag{21}$$

□

Substituindo as eqs.(14,21) em (11),

$$L [f] = L_H [f] + L_A [f]$$

$$= (L_H + L_A) [f] \quad . \tag{22}$$

Portanto

$$L = L_H + L_A \quad , \tag{23}$$

onde L_H e L_A são definidos por (5) e (6), respectivamente. Em geral o operador L não é hermitiano, mas pode ser decomposto (em BD) numa parte hermitiana (L_H) e noutra antihermitiana (L_A), isto é,

$$L^+ \neq L \quad ; \tag{24}$$

$$L^+_H = L_H \quad ; \tag{25}$$

$$L^+_A = - L_A \quad . \tag{26}$$

As eqs.(25,26) comprovam (24), mas a demonstração de (25) e (26) não será feita aqui (o raciocínio é similar ao usado no Apêndice A).

Podemos ainda escrever os operadores L_H e L_A em termos só dos coeficientes drift e difusão.

E.iii) *Operador* L_A (*caso* II).

Para colocarmos o operador L_A em termos só dos coeficientes drift e difusão, basta substituir (2) em (6),

$$L_A = b^-_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} b^-_i \frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} , \tag{27}$$

e em seguida, inserir a eq.(II.74),

$$L_A = b^-_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial b^-_i}{\partial x_i} . \tag{28}$$

O operador L_A só depende do coeficiente drift reversível. Se tivermos somente variáveis pares $b^-_i = 0$ e portanto $L_A = 0$.

E.iv) *Operador* L_H (*caso* II).

Para expressarmos o operador L_H em termos dos coeficientes drift e difusão, escrevemos a eq.(21) como

$$L_H = \frac{\partial}{\partial x_i} [D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}] + V , \tag{29}$$

onde

$$V = \frac{1}{\Psi_o} (\frac{\partial}{\partial x_i} [D_{ij} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x_j}]) . \tag{30}$$

É suficiente portanto, desenvolvermos V. Para isso, substituimos (2) em (30),

$$V = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \emptyset}{\partial x_j} - \frac{1}{2} D_{ij} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{4} D_{ij} \frac{\partial \emptyset}{\partial x_j} \frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} \quad . \tag{31}$$

Substituindo a eq.(II.76) no último termo da eq.(31), este resulta :

$$\frac{1}{4} D_{ij} \frac{\partial \emptyset}{\partial x_j} \frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} = \frac{1}{4} D_{ij} D^{-1}{}_{jk} D^{-1}{}_{ip} \left[\frac{\partial D_{pn}}{\partial x_n} - b^{*}{}_{p} \right] \left[\frac{\partial D_{kl}}{\partial x_l} - b^{*}{}_{k} \right]$$

$$= \frac{1}{4} D^{-1}{}_{ip} \left[\frac{\partial D_{pn}}{\partial x_n} - b^{*}{}_{p} \right] \left[\frac{\partial D_{il}}{\partial x_l} - b^{*}{}_{k} \right] \quad , \tag{32}$$

onde usamos o fato que $D_{ij} D^{-1}{}_{jk} = \delta_{ik}$, na segunda linha (igualdade). Substituindo agora, a eq.(II.76) (como feito com o último termo acima) nos dois primeiros termos do segundo membro da eq.(31), e somando-os obtemos :

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \emptyset}{\partial x_j} - \frac{1}{2} D_{ij} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{kl}}{\partial x_l} - b^{*}{}_{k} \right] D^{-1}{}_{jk} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i}$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{kl}}{\partial x_l} - b^{*}{}_{k} \right] D_{ij} \frac{\partial D_{jk}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} D_{ij} D^{-1}{}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial D_{kl}}{\partial x_l} - b^{*}{}_{k} \right] \tag{33}$$

Usando o fato que $D_{ij} D^{-1}{}_{jk} = \delta_{ik}$ na eq.(33), esta resulta :

$$
-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial \emptyset}{\partial x_j}-\frac{1}{2}D_{ij}\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_i \partial x_j}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial D_{kl}}{\partial x_l}-b^{*}_{k}\right]\frac{\partial \delta_{ik}}{\partial x_i}
$$

$$
-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial D_{il}}{\partial x_l}-b^{*}_{i}\right]
$$

$$
=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D_{ij}}{\partial x_i \partial x_l}+\frac{1}{2}\frac{\partial b^{*}_{i}}{\partial x_i} \qquad (34)
$$

Trocando o índice l por j na eq.(34), p por j , n por l, e l por k, na eq.(32); e inserindo-as em seguida na (31), obtemos a eq.(7) com V dado pela eq.(8).

□

REFERENCIAS

[1] BOTH, N. T. : *Mecânica Quântica Estocástica*. Tese de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas.

[2] DITCHBURN, R. : *Light*. Vol. II, 3. ed., Academic Press, London, 1976.

[3] DOOB, J. S. : *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953.

[4] GARDINER, C. W. : *Handbook of Stochastic Methods*. Springer Ser. Synergetics, Vol.13, Springer, Berlin, Heidelberg,New York, 1983.

[5] GHIRARDI, G. C. : *The Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics: A Critical Review*. Revista Del Nuovo Cimento, 1,3:1978.

[6] GNEDENKO, B. V. : *The Theory of Probability*. 2 ed., Mir, Moscou, 1973.

[7] GRAHAM, R. e HAKEN, H. : *Generalized Thermodynamic Potencial for Markoff Systems in Detailed Balance and far from Thermal Equilibrium*. Z. Physik 243, 289 (1971).

[8] GRAHAM, R. e HAKEN, H. : *Fluctuations and Stability of Staticionary Non-Equilibrium Systems in Detailed Balanced* Z. Physik 245, 141 (1971)

[9] GRAHAM, R. : *Covariant Formulation of Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*. Z. Physik B 26, 397 (1977)

[10] HAKEN, H. : *Cooperative Phenomena in Sistems Far From thermal Equilibrium and in Nonphysical Sistems*. Vol.47,No.1,January 1975.

[11] HAKEN, H. : *Nonequilibrium Phase Transitions and Instability Hierarchy of the Laser, an Example from Synergetics*. Springer Ser. Synergetics, Vol.3, Sringer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[12] JAZWINSKI, A. H. : *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York and London, 1970.

[13] NELSON, A. : *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Mathematical Notes, Princeton, New Jersey, 1972.

[14] PAPOULIS, A. : *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Mac-Graw-Hill, New York, 1965.

[15] RISKEN, H. : *Distribution - and Correlation - Functions for a Laser Amplitude*. Z. Physik 186, 85 (1965).

[16] RISKEN, H. : *Correlation Function of the Amplitude and of the Intensity Fluctuation for a Laser Model near Threshold*. Z. Physik 191, 302 (1966).

[17] RISKEN, H. e VOLLER, H. D. : *The Transient Solution of the Laser Fokker-Planck Equation*. Z.Physik 204, 240 (1967).

[18] RISKEN, H. : *Statistical Properties of Laser Light*. Progress in Optics, Vol. VIII, Pag.239, Editor : Wolf, E., North-Holland, Amsterdam, 1970.

[19] RISKEN, H. e Seybold, K. : *Linewith of a Detuned Single Mode Laser Near Threshold*. Physics Letters, 38A, 63 (1972).

[20] RISKEN, H. : *Solution of the Fokker-Planck Equation in Detailed Balance*. Z. Physik 251, 231 (1972).

[21] RISKEN, H. : *Detuned Single Mode Laser and Detailed Balance*. Coherence and Qantum Optics, Pag.551, Editores : Mandel, L. e Wolf, E., Plenum Press, New York, 1973.

[22] RISKEN, H. : *The Fokker-Planck Equation*. Springer Ser. Synergetics, Vol.18, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[23] SEYBOLD, K. e RISKEN, H. : *On the theory of a Detuned Single Mode Laser Near Threshold*. Z. Physik 267, 323 (1974).

[24] STRATONICH, R.L. : *Topics in the theory of Random Noise*. Vol.1, Gordon & Breach, New York, 1963.