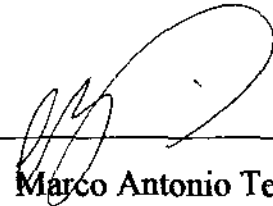


**BIFURCAÇÕES LOCAIS DE APLICAÇÕES REVERSÍVEIS
BIDIMENSIONAIS**

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Alancardek P. Araujo e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 03 de dezembro de 1993

Prof. Dr.



Marco Antonio Teixeira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação

Bifurcações Locais de Aplicações Reversíveis Bidimensionais

Alancardek Pereira Araujo

Orientador:
Prof. Marco Antônio Teixeira

Tese apresentada, para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Campinas - SP
1993

A meus pais,

Merodak Araújo

e

Roselita Pereira Araujo

Agradecimentos

- Ao Prof. Marco Antônio Teixeira, pela introdução ao assunto Sistemas Reversíveis e pela orientação.
- Ao Prof. Luiz A. B. San Martin por valiosas conversas acerca de Grupos de Lie de Espaços de Jatos.
- À CAPES e FAEP - FUNCAMP pelo suporte financeiro.
- Aos Professores do Depto de Matemática da U.F.E.S, pelo valioso "empurrão" inicial em matemática, pelo qual sou infinitamente grato.
- Aos Professores do Depto de Física da U.F.E.S, em particular a Prof. Natália Boboshko.
- A todos os meus amigos e professores do IMECC que direta ou indiretamente contribuíram com os bons momentos que tive nestes quase três anos. Em especial, Ademir, Angela, Carlos Julio, Guillermo, Gonzalo, Pedro, Ronan, Ruben e Sônia.
- Ao Rudson do IFGW pelo suporte computacional.
- A meus pais pelo constante auxílio ao longo destes anos.
- A Ana Cláudia pelos belos momentos desde quando a conheci.

Índice

Abstract	v	
Resumo	vi	
Capítulo 1	Sistemas Reversíveis. Definições e Propriedades Básicas	1
1.1	Sistemas Hamiltonianos	1
1.2	Sistemas Reversíveis	5
1.3	Sistemas Reversíveis Bidimensionais	9
Capítulo 2	Uma família a 2-parâmetros de difeomorfismos reversíveis do cilindro $S^1 \times R$	15
2.1	Introdução	15
2.2	A família a 2-parâmetros de difeomorfismos. Reversibilidade	16
2.3	Pontos fixos	20
2.4	A matriz jacobiana de $T_{\alpha,\beta}$ e a estabilidade dos pontos fixos	22
Capítulo 3	Bifurcações Locais dos pontos fixos simétricos de $T_{\alpha,\beta}$	26
3.1	Introdução	26
3.2	Diagramas de bifurcação dos pontos fixos simétricos de $T_{\alpha,\beta}$	27
3.3	Bifurcações decorrentes da perda de hiperbolicidade de $T_{\alpha,\beta}$ num ponto fixo simétrico (x_0, y_0)	30
3.4	Elementos de análise local	35
Capítulo 4	Bifurcações Locais dos pontos fixos assimétricos de $T_{\alpha,\beta}$	40
4.1	Introdução	40
4.2	Pontos fixos assimétricos	40
4.3	Pontos fixos assimétricos com determinante igual a um	41
4.4	Pontos fixos assimétricos com determinante diferente de um	44

Abstract

The purpose of this note is to study dynamical systems (with continuous and discrete time) that display time reversal symmetry. These systems have the characterizing property that knowing a solution implies in knowing another solution simply by setting the first and running it in reverse direction of time. A simple example of such a system is Newton's equation for a particle with unit mass under the action of the potential V , i.e.,

$$\ddot{x} = -\nabla V(x) \quad (0)$$

In this case, it is easy to see that, if $x(t)$ is a solution of (0), then $x(-t)$ is also a solution of (0). A system as (0), or a system that has time reversal symmetry is called *a reversible system*. Reversible dynamical systems appear in many branches of Physics (for example see Roberts [Ro1]).

In this note, we start with an introductory presentation of reversible systems. Next, we study a model of a reversible discrete dynamical system represented by a 2-parameter family of diffeomorphisms of the cylinder. We are interested in analysing the local bifurcations of this family, that is, the structural changes of the orbit space of a small neighborhood of the fixed points. This family presents rich dynamics, in the sense that, conservative and dissipative behaviors can coexist in the same phase portrait.

Resumo

Estas notas dedicam-se ao estudo de uma classe particular de sistemas dinâmicos (a tempo contínuo e discreto) que se caracterizam por exibir simetria de reversibilidade de tempo, isto é, num tal sistema ao se determinar uma solução, automaticamente se conhecerá uma outra, a saber, é a anterior percorrida no sentido inverso do tempo. Um exemplo de tal sistema, é a equação de Newton para uma partícula de massa unitária sujeita a um potencial $V(x)$, isto é,

$$\ddot{x} = -\nabla V(x) \quad (0)$$

onde claramente, se $x(t)$ é uma solução de (0) então $x(-t)$ é ainda uma solução de (0). Denominaremos por *sistemas reversíveis*, aqueles que possuem simetria de reversibilidade de tempo. Sistemas reversíveis são abundantes em Física (veja Roberts [Ro1]), daí a importância do estudo de tais sistemas.

Nestas notas introduziremos o objeto de estudo (sistemas reversíveis) definindo-o e dando suas propriedades básicas. Em seguida estudaremos um caso particular de sistema dinâmico reversível a tempo discreto, a saber, uma família a 2-parâmetros de difeomorfismos reversíveis do ponto de vista de bifurcações locais, ou seja, mudanças estruturais locais do espaço de órbitas quando os parâmetros são deixados variar. Tal família exibe dinâmica bastante rica, contendo regiões do espaço de fase com comportamentos dinâmicos conservativo e dissipativo coexistindo.

Capítulo 1 **Sistemas Reversíveis.**

Definições e Propriedades

Básicas

1.1 Sistemas Hamiltonianos

A principal motivação para a definição de sistema reversível provém da Mecânica Clássica. Por exemplo, se considerarmos o sistema potencial para uma partícula de massa unitária sujeita a um potencial $V(x)$, temos:

$$\ddot{x} = -\nabla V(x) \tag{1.1}$$

É fácil ver que, se $x(t)$ é uma solução de (1.1), então $x(-t)$ é ainda uma solução de (1.1). Dizemos neste caso que o sistema (1.1) possui simetria de reversibilidade de tempo. O sistema de primeira ordem associado a (1.1) é o sistema hamiltoniano dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial y} H(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $H(x,y) = K(y)+V(x)$, sendo K a energia cinética da partícula. Como ao inverter a direção do tempo em $x(t)$ se inverte também o sinal da velocidade $y(t)$, temos que a simetria de reversibilidade de tempo de (1.1), implica na invariância da equação (1.2) com relação às transformações $t \rightarrow -t$ e $R(x,y) = (x,-y)$. Tal fato é válido para qualquer sistema hamiltoniano par na segunda variável, como veremos.

Proposição 1.1.1. Considere o sistema hamiltoniano (1.2) sobre R^n com função hamiltoniana de classe C^∞ e par na segunda variável, isto é, $H: R^{2n} \rightarrow R$, $H(x,y) = H(x,-y)$. Então, o sistema (1.2) é invariante sob as transformações combinadas: $s: R \rightarrow R$ e $R: R^{2n} \rightarrow R^{2n}$, dadas por $s(t) = -t$ e $R(x,y) = (u(x),v(y)) = (x,-y)$.

Prova:

Suponhamos que $(x(t),y(t))$ seja uma solução de (1.2), i.,é,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial}{\partial y} H(x(t),y(t)) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial}{\partial x} H(x(t),y(t))\end{aligned}\tag{1.3}$$

Mostremos que $(u(s),v(s)) = (x(-t),-y(-t))$ é também uma solução de (1.2).

Com efeito,

$$\frac{d}{ds} u(s) = -\frac{d}{dt} u(-t) = -\frac{d}{dt} x(-t) = -\dot{x}(-t)\tag{1.4}$$

$$\frac{d}{ds} v(s) = -\frac{d}{dt} v(-t) = -\frac{d}{dt} (-y(-t)) = \dot{y}(-t)\tag{1.5}$$

Por outro lado,

$H(u,v) = H(x(u),-y(v)) = H(x(u),y(v))$, pois H é par na segunda variável.

$$\frac{\partial}{\partial u} H(u,v) = \frac{\partial}{\partial x} H(x(u),y(v)) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} H(u,-v)\tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} H(u,v) = \frac{\partial}{\partial y} H(x(u),y(v)) \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial y} H(u,-v)\tag{1.7}$$

Sendo $x(t) = u(-t) = u(s(t))$ e $y(t) = -v(-t) = -v(s(t))$, temos

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{ds} u(s(t)) \frac{ds}{dt} = -\frac{d}{ds} u(s)\tag{1.8}$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{d}{ds} v(s(t)) \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} v(s)\tag{1.9}$$

(1.8), (1.9), (1.6) e (1.7) em (1.3) resulta

$$-\frac{d}{ds} u(s) = \frac{\partial}{\partial y} H(x(t),y(t)) = \frac{\partial}{\partial y} H(u(s),-v(s)) = -\frac{\partial}{\partial v} H(u(s),v(s))$$

$$\frac{d}{ds}u(s) = \frac{\partial}{\partial v}H(u(s), v(s))$$

$$\frac{d}{ds}v(s) = -\frac{\partial}{\partial x}H(x(t), y(t)) = -\frac{\partial}{\partial x}H(u(s), -v(s)) = -\frac{\partial}{\partial u}H(u(s), v(s))$$

Assim, fica provada a invariância de (1.2) sob as transformações s e R .

Observação 1.1.2. Fica também provado que a simetria de reversibilidade de tempo do sistema potencial (1.1), é equivalente à invariância do sistema hamiltoniano associado, com relação às transformações combinadas, $t \rightarrow -t$ e $R(x, y) = (x, -y)$. Este é um importante passo para a generalização do conceito de reversibilidade.

Observação 1.1.3. Seja $X : R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ o campo hamiltoniano associado ao sistema (1.2), isto é,

$$X(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}H(x, y), -\frac{\partial}{\partial x}H(x, y) \right)$$

e seja $R : R^{2n} \rightarrow R^{2n}$, dada por $R(x, y) = (x, -y)$ como na Prop. 1.1.1. Então

$$DR(x, y)[X(x, y)] = R[X(x, y)] = \left(\frac{\partial}{\partial y}H(x, y), \frac{\partial}{\partial x}H(x, y) \right)$$

sendo H par na segunda variável temos que

$$R[X(x, y)] = \left(-\frac{\partial}{\partial y}H(x, -y), \frac{\partial}{\partial x}H(x, -y) \right) = -X(R(x, y))$$

logo,

$$DR(x, y)[X(x, y)] = -X \circ R(x, y). \quad (1.10)$$

A igualdade (1.10) é as vezes expressa dizendo-se que a aplicação R *reverte* o campo X , ou ainda que, X é *R-reversível*.

Observação 1.1.4. Sejam X_t a aplicação fluxo no tempo t associada ao campo hamiltoniano X do sistema (1.2), R como na Prop. 1.1.1. e $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$. É claro que, $t \rightarrow X_t(x,y)$ é a curva integral de X por (x,y) . Então, temos que $t \rightarrow R \circ X_t(x,y)$ é a curva integral de $-X$ por $R(x,y) = (x,-y)$.

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t} R(X(x,y)) = DR \left[\frac{\partial}{\partial t} X(x,y) \right] = R[X(X(x,y))] = -X(R(X(x,y)))$$

Mas $t \rightarrow R \circ X_t(x,y)$ é a curva integral de X por $R(x,y) = (x,-y)$ percorrida no sentido inverso do tempo, logo,

$$R \circ X_t = X_t^{-1} \circ R \tag{1.11}$$

A igualdade (1.11) é, as vezes expressa dizendo-se que a aplicação X_t é *R-reversível*.

Assim, vemos que a transformação R desempenha um papel crucial na análise qualitativa de um sistema hamiltoniano com função de Hamilton par na segunda variável. R age como uma "anti-simetria" de X no seguinte sentido: R leva órbitas de X sobre órbitas de X , mas revertendo a orientação. Além disso, R é uma involução, isto é, $R^2 = R \circ R = \text{id}$ e o conjunto de seus pontos fixos é um subespaço de \mathbb{R}^{2n} de dimensão n , a saber, $y = 0$. Denotamos por $F(R)$ este conjunto. A aplicação R neste caso particular, é uma reflexão de \mathbb{R}^{2n} com relação ao subespaço $F(R)$.

Classicamente, um sistema dinâmico (a tempo contínuo ou discreto) é dito reversível se existir uma involução R , não necessariamente a mesma do caso anterior, tal que $\dim F(R)$ vale metade da dimensão do espaço de fase. Se o sistema for a tempo real, o campo de vetores X associado, satisfaz a relação (1.10), e se o sistema for a tempo discreto, a aplicação satisfaz a mesma relação satisfeita pela aplicação fluxo no tempo t (1.11). Devaney [De1] baseado nas

propriedades essenciais da reversibilidade dos sistemas hamiltonianos, estendeu o conceito de reversibilidade a sistemas dinâmicos mais gerais.

1.2 Sistemas Reversíveis

Nesta seção M denotará uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ , $\text{Diff}(M)$ o espaço dos difeomorfismos de classe C^∞ de M e $\chi(M)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^∞ de M .

Definição 1.2.1. Um difeomorfismo $R \in \text{Diff}(M)$, chama-se uma *involução* se $R^2 = R \circ R = \text{id}$, onde $\text{id} \in \text{Diff}(M)$ é a aplicação identidade.

Definição 1.2.2. Um campo de vetores $X \in \chi(M)$, ou a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = X(x),$$

é dito *reversível* se existir uma involução $R \in \text{Diff}(M)$ tal que

$$DR[X(x)] = -X \circ R(x), \quad \forall x \in M.$$

Dizemos também que o campo de vetores X é *R-reversível*, ou ainda que, R *reverte a direção do tempo*.

Observação 1.2.3. O motivo de dizer que R reverte a direção do tempo na Def. 1.2.2 é a seguinte:

Se $x(t)$ é uma solução de

$$\dot{x} = X(x)$$

então também será $R \circ x(-t)$, a qual é a reflexão por R da trajetória $x(t)$, percorrida no sentido inverso do tempo.

Definição 1.2.4. Um difeomorfismo $T \in \text{Diff}(M)$ chama-se *reversível* se existir uma involução $R \in \text{Diff}(M)$ tal que

$$T \circ R \circ T(x) = R(x), \quad \forall x \in M$$

Dizemos também que o difeomorfismo T é *R-reversível*, ou ainda que R reverte a direção do tempo.

Observação 1.2.5. A justificativa acerca da afirmação acima de que R reverte a direção do tempo é a seguinte: Se $x_{i+1} = T(x_i)$, então

$$T \circ R(x_{i+1}) = R(x_i) = R \circ T^{-1}(x_{i+1})$$

se $y_{i+1} = R(x_{i+1})$ então $T(y_{i+1}) = y_i$, ou seja, a ação de T em y_i retorna no tempo (discreto).

Os sistemas Hamiltonianos da seção anterior, são agora um caso particular de sistemas reversíveis, onde $M = R^{2n}$ e $R \in \text{Diff}(M)$ e $R(x,y) = (x,-y)$.

Dado que as aplicações (difeomorfismos) reversíveis são os principais objetos de estudo nestas notas, voltaremos muito mais atenção para estes casos, do que para campos vetoriais, além disso, todos os resultados obtidos para aplicações podem ser convenientemente convertidos para campos vetoriais.

Proposição 1.2.6. Um difeomorfismo $T \in \text{Diff}(M)$ é reversível se, e somente se, é a composição de duas involuções.

Prova:

Suponhamos que T seja R -reversível, então $R \circ T = T^{-1} \circ R$, com $R^2 = \text{id}$.

Então, $R_1 = R \circ T$ é uma involução. Com efeito,

$$(R_1)^2 = (R \circ T^{-1}) \circ (R \circ T^{-1}) = (R \circ T^{-1} \circ R \circ T^{-1}) = R \circ (R \circ T) \circ T^{-1} = R \circ R = \text{id}.$$

É claro que, $T = R \circ (T^{-1} \circ R) = R \circ R_1$.

Reciprocamente, se $T = R_1 \circ R_2$, onde $R_1^2 = R_2^2 = \text{id}$, então,

$$R_1 \circ T = (R_1 \circ (R_1 \circ R_2))^{-1} = (R_1 \circ R_2)^{-1} \circ R_1^{-1} = T^{-1} \circ R_1,$$

ou seja, T é R_1 -reversível, e portanto reversível. De forma inteiramente análoga, obtemos que T é R_2 -reversível, assim temos o:

Corolário 1.2.7. Sejam R_1 e $R_2 \in \text{Diff}(M)$ involuções, então $T = R_1 \circ R_2$ se, e somente se, T é R_j -reversível ($j=1,2$).

É comum classificar os sistemas dinâmicos em sistemas conservativos e sistemas dissipativos. Os sistemas conservativos são caracterizados pela existência de uma função real, contínua e não constante, a qual é constante ao longo das órbitas do sistema, tal função é comumente chamada de uma integral primeira. Por exemplo os sistemas mecânicos conservativos são deste tipo, tendo a energia total como uma integral primeira. Foi sobre tais sistemas que originou-se o conceito de reversibilidade, e eles formam a classe mais importante dos sistemas reversíveis.

Quanto aos sistemas dissipativos, estes caracterizam-se por contrair e/ou expandir volumes do espaço de fase, tais sistemas exibem atratores (repulsores) e portanto estabilidade (instabilidade) assintótica, fenômeno que não ocorre em sistemas conservativos. O seguinte diagrama de Venn mostra a interrelação entre sistemas reversíveis (R) e conservativos (C).

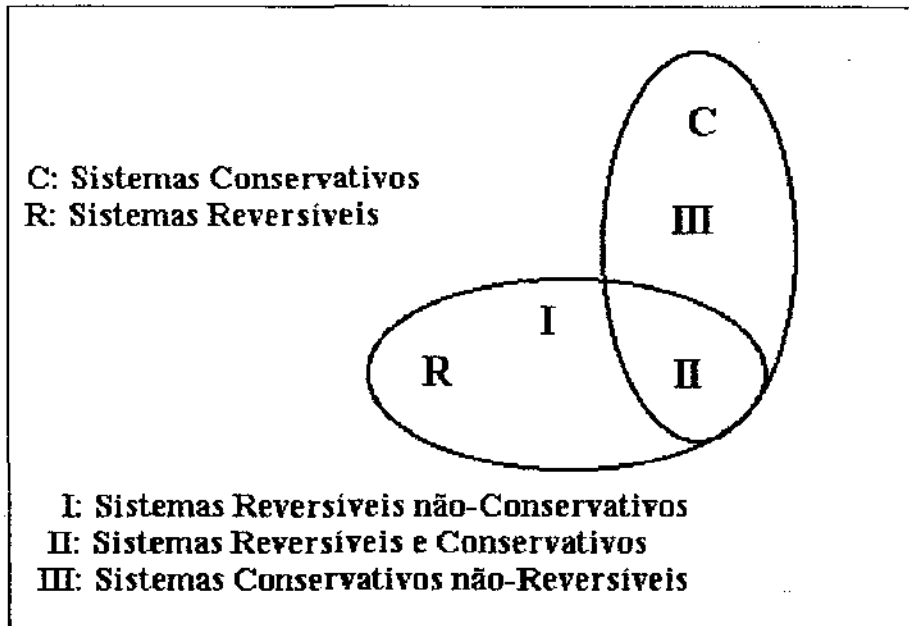


FIG. 1.1

Na região I, citamos como exemplos os sistemas da forma

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}^2)$$

com $F: R^2 \rightarrow R^2$ diferenciável, os quais, por exemplo modelam movimentos com atrito quadrático. Neste caso temos a simetria de reversibilidade de tempo, mas tal sistema não é conservativo.

A região II possui os sistemas hamiltonianos mais conhecidos, isto é, a função de Hamilton é par na segunda variável.

A região III é bem mais sutil, mas um exemplo de sistema conservativo não reversível foi dado por Sevryuk [Se1]: Um sistema hamiltoniano cuja função hamiltoniana é dada por

$$H(x, y) = \prod_{i=1}^6 (a_i x + b_i y).$$

Para parâmetros gerais a_i, b_i , o fluxo gerado por um sistema hamiltoniano com a função de Hamilton acima, não é reversível.

E apesar de sistemas reversíveis terem se originado do caso hamiltoniano, com dimensão par do espaço de fase, citamos um exemplo devido a Arecchi [Ar1], de uma equação diferencial ordinária que modela experimentos com lasers

de CO_2 , onde a dimensão do espaço de fase é igual a 3, e é reversível com a involução $R: R^3 \rightarrow R^3$ dada por, $R(x,y,z) = (-x,y,-z)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= zx + y + c_1 \\ \dot{y} &= zy - x \\ \dot{z} &= c_2 - x^2 - y^2.\end{aligned}$$

1.3 Sistemas Reversíveis Bidimensionais

Para os sistemas bidimensionais se chegou nas últimas duas décadas, a um conhecimento bastante razoável de suas propriedades dinâmicas, o que não ocorreu em geral para sistemas em dimensões superiores. Isto deve-se em parte, à complexidade dinâmica da estrutura de órbitas crescente com a dimensão. Voltaremos nossa atenção nesta seção, principalmente para as aplicações reversíveis bidimensionais, dado que nos próximos capítulos lidaremos com um exemplo específico de sistema dinâmico reversível a tempo discreto, a saber, uma família a 2-parâmetros de difeomorfismos do cilindro $S^1 \times R$. Investigaremos mais de perto o caso da reversibilidade clássica em dimensão dois, onde exige-se que as involuções sejam tais que, o conjunto de seus pontos fixos formem uma curva diferenciável. A família de aplicações que desejamos estudar, assim como muitas outras modelando processos físicos, são da classe anteriormente descrita (veja Roberts [Ro1]).

Proposição 1.3.1. (Involuções lineares do plano). Seja $L: R^2 \rightarrow R^2$ um isomorfismo tal que $L \circ L = \text{id}$, isto é, L é uma involução linear. Então, numa base conveniente de R^2 , a matriz de L é de uma das seguintes formas:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ se } \det(L) = 1.$$

$$b) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \text{ com } \alpha^2 + \beta\gamma = 1, \text{ se } \det(L) = -1.$$

Prova:

Represente L pela matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

assim,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

e como $L = L^{-1}$, o resultado segue-se imediatamente comparando-se as duas matrizes.

Observação 1.3.2. A importância da Prop. 1.3.1 reside no fato de que, a parte linear de qualquer involução avaliada sobre um de seus pontos fixos, é uma involução linear.

Observação 1.3.3. Um importante resultado é: Qualquer involução é conjugada em torno de seus pontos fixos, a sua parte linear. (Este resultado vale para qualquer dimensão: Teorema de Bochner, veja Montgomery e Zippin [Mo1]).

Observação 1.3.4. Finn [Fi1] mostrou que o conjunto dos pontos fixos de uma C^1 -involução do plano, é não vazio. E no caso da involução reverter orientação, ele mostrou que o conjunto de seus pontos fixos é uma curva no plano, ilimitada e sem auto-interseções. No caso da involução ser analítica, ele demonstrou que a curva de pontos fixos é também analítica.

O caso mais comumente encontrado de involuções são as que revertem a orientação, e será neste caso que concentraremos a atenção de agora em diante.

Ou seja, sempre que considerarmos uma aplicação reversível bidimensional T , então $T = R_1 \circ R_2$, onde R_1 e R_2 revertem a orientação, e portanto o conjunto dos pontos fixos de tais involuções são curvas planas como as dadas na Obs. 1.3.4. Uma órbita típica de uma aplicação reversível bidimensional é ilustrada na FIG. 1.2 abaixo:

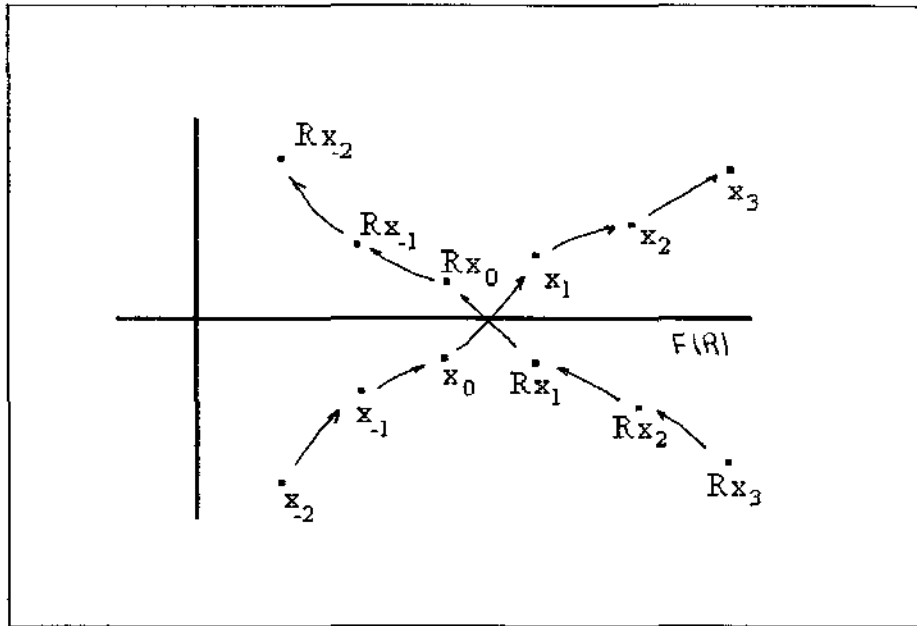


FIG. 1.2

Definição 1.3.5. Seja $T = R_1 \circ R_2$ uma aplicação reversível do plano. Um ponto fixo simultâneo x_0 para R_1 e R_2 , isto é, $x_0 \in F(R_1) \cap F(R_2)$, chama-se um *ponto fixo simétrico* de T . Se x_0 é um ponto fixo de T que não é simétrico, então x_0 é chamado um *ponto fixo assimétrico* de T . Analogamente se x_0 é um ponto periódico de T , de período k , isto é, $T^k(x_0) = x_0$ ($k = \min \{n ; T^n(x_0) = x_0\}$), tal que $x_0 \in F(R_1) \cap F(R_2)$, então x_0 é chamado um *ponto periódico simétrico* de T . A órbita de um ponto periódico simétrico de T , chama-se uma *órbita periódica simétrica* de T . Se x_0 for um ponto periódico de T não simétrico, então x_0 é dito ser um *ponto periódico assimétrico* de T .

Proposição 1.3.6. Seja $T = R_1 \circ R_2$ uma aplicação reversível e x_0 um ponto fixo (periódico) assimétrico de T , então $R_j(x_0)$ é um ponto fixo (periódico) assimétrico de T , $j=1,2$. Além disso, $R_1(x_0) = R_2(x_0)$. Ou seja, os pontos fixos (periódicos) assimétricos de T , ocorrem sempre aos pares.

Prova:

$$x_0 \notin F(R_1) \cap F(R_2), \text{ e } T(x_0) = x_0.$$

$$T \circ R_1(x_0) = R_1 \circ R_2 \circ R_1(x_0) = R_1 \circ R_2^{-1} \circ R_1^{-1}(x_0) = R_1 \circ T^{-1}(x_0) = R_1(x_0).$$

$$T^{-1} \circ R_2(x_0) = (R_1 \circ R_2)^{-1} \circ R_2(x_0) = R_2 \circ R_1 \circ R_2(x_0) = R_2 \circ T(x_0) = R_2(x_0).$$

Além disso,

$$R_1(x_0) = T \circ R_2(x_0) = R_2 \circ T^{-1}(x_0) = R_2(x_0).$$

O caso de x_0 ser ponto periódico assimétrico é similar.

Definição 1.3.7. Seja $R: R^2 \rightarrow R^2$ uma involução que reverte a orientação. O conjunto $F(R)$ formado pelos pontos fixos de R , chama-se a *curva de simetria* associada à involução R .

Seja T R -reversível para alguma involução R , então as interseções $F(R) \cap T^k(F(R))$, quando não vazias, determinam pontos periódicos simétricos de T , de período $2k$, ou seja:

Proposição 1.3.8. Seja T R -reversível, $x_0 \in F(R)$ e suponhamos que $T^k(x_0) \in F(R)$. Então $T^{2k}(x_0) = x_0$.

Prova:

$$T^k(x_0) = R \circ T^k(x_0) = T^{-k} \circ R(x_0) = T^{-k}(x_0),$$

$$\text{logo, } T^{2k}(x_0) = x_0.$$

Assim, podemos determinar geometricamente os pontos periódicos simétricos de T .

Vejamos agora como comportam-se as variedades invariantes associadas a pontos fixos hiperbólicos sob a ação de uma involução R , de uma aplicação R -reversível. (Sobre variedades invariantes e hiperbolicidade veja Palis [Pa1]).

Proposição 1.3.9. Sejam T uma aplicação R -reversível, x_0 um ponto fixo hiperbólico simétrico de T e $W^s(x_0)$, $W^u(x_0)$ as variedades estável e instável de T associadas a x_0 . Então,

$$R(W^u(x_0)) = W^s(x_0) \text{ e } R(W^s(x_0)) = W^u(x_0).$$

Prova:

Seja $x \in W^u(x_0)$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{-n}(x) = x_0.$$

$$x_0 = R(\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{-n}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R \circ T^{-n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n \circ R(x)$$

logo, $R(x) \in W^s(x_0)$, ou seja, $R(W^u(x_0)) \subset W^s(x_0)$. De maneira inteiramente análoga prova-se que $R(W^s(x_0)) \subset W^u(x_0)$, e portanto $R(W^u(x_0)) = W^s(x_0)$.

Da mesma forma, prova-se que $R(W^s(x_0)) = W^u(x_0)$.

Proposição 1.3.10. Sejam T como na Prop. 1.3.9, x_0 um ponto fixo hiperbólico assimétrico de T , $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ as variedades estável e instável associadas a x_0 . Então,

$$R(W^u(x_0)) = W^s(R(x_0)) \text{ e } R(W^s(x_0)) = W^u(R(x_0)).$$

Prova:

Seja $x \in W^u(x_0)$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{-n}(x) = x_0, \text{ daí } \lim_{n \rightarrow +\infty} R \circ T^{-n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n \circ R(x) = R(x_0)$$

isto é, $R(x) \in W^s(R(x_0))$, ou seja, $R(W^u(x_0)) \subset W^s(R(x_0))$, de maneira inteiramente análoga, mostra-se que $W^s(R(x_0)) \subset R(W^u(x_0))$, e portanto, $R(W^u(x_0)) = W^s(R(x_0))$. O outro caso é inteiramente análogo.

Não lidaremos nestas notas com bifurcações globais de sistemas reversíveis, mas observamos que, a Prop. 1.3.9 fornece um método geométrico para determinar pontos de interseção da variedade instável, com a variedade estável associadas a um ponto fixo hiperbólico. Tais pontos, ditos *homoclínicos*, estão associados à presença de comportamento caótico (sensibilidade com respeito às condições iniciais e existência de ferraduras) na aplicação que os contém. Devaney [De2] é uma boa exposição sobre este assunto, com uma aplicação prática ao sistema de Hénon.

Capítulo 2 **Uma família a 2-parâmetros de difeomorfismos reversíveis do cilindro $S^1 \times R$**

2.1 Introdução

Iniciaremos este capítulo apresentando uma família a 2-parâmetros de difeomorfismos do cilindro $S^1 \times R$, demonstraremos sua reversibilidade exibindo sua decomposição como composição de involuções. Em seguida exibiremos seus pontos fixos simétricos e assimétricos e na última seção calcularemos a matriz jacobiana destas aplicações (família de transformações lineares) que será útil na determinação do tipo topológico local de muitos pontos fixos (não de todos). Tal família, como veremos nos dois próximos capítulos, apresenta dinâmica local bastante diversificada, com comportamentos dissipativo e conservativo coexistindo no mesmo espaço de fase. Por exemplo, no desdobramento de uma bifurcação de Rimmer, podem ocorrer curvas KAM envolvendo um par atrator-fonte (veja Rimmer [Ri1]).

O interesse no estudo desta família particular de sistemas dinâmicos reside em Física, pois famílias deste tipo modelam uma série de fenômenos em Física do Plasma e Física Nuclear, onde é comum se fazerem experimentos com partículas carregadas, confinadas numa região sob a ação de campos elétricos, magnéticos, etc. As aplicações em estudo dão o movimento das partículas, sujeitas às condições descritas anteriormente. B. V. Chirikov [Ch1] e J. A. G. Roberts and G. R. W. Quispel [Ro1] são excelentes exposições sobre este assunto.

2.2 A família a 2-parâmetros de difeomorfismos.

Reversibilidade

A família a 2-parâmetros que propomo-nos a estudar, é a seguinte (veja Post [Po1]):

$$T_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} x_1 = x + \omega(y) \pmod{1} \\ y_1 = \frac{y + \alpha g(x_1)}{1 - \beta y h(x_1)} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde ω , g e h são funções analíticas reais, sendo g e h funções periódicas de período 1, isto é, $g(x+1) = g(x)$ e $h(x+1) = h(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Com as escolhas, $\omega(y) = y$, $g(x) = \sin(x)$ e $\beta = 0$, então T_α é a aplicação "standard" de Chirikov-Taylor (veja Chirikov [Ch1]).

Proposição 2.2.1 Se ω é uma função ímpar ($\omega(-y) = -\omega(y)$), então para cada par (α, β) , a aplicação $T_{\alpha,\beta}$ é reversível com a seguinte decomposição como produto de involuções:

$$T_{\alpha,\beta} = I_1 \circ I_2$$

com

$$I_1 = I_{1\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} x_1 = x \pmod{1} \\ y_1 = \frac{-y + \alpha g(x)}{1 + \beta y h(x)} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$I_2(x,y) = \begin{cases} x_1 = x + \omega(y) \pmod{1} \\ y_1 = -y \end{cases} \quad (2.3)$$

Prova:

Denotaremos por $\text{id}: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ a identidade de $\text{Diff}(S^1 \times \mathbb{R})$.

a) I_1 é uma involução. Com efeito,

$$I_1 = I_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} x_1 \pmod{1} \\ -y_1 + \alpha g(x_1) \\ 1 + \beta y_1 h(x_1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x \pmod{1}) \pmod{1} \\ -\left(\frac{-y + \alpha g(x \pmod{1})}{1 + \beta y h(x)} \right) + \alpha g(x \pmod{1}) \\ 1 + \beta \left(\frac{-y + \alpha g(x)}{1 + \beta y h(x)} \right) h(x \pmod{1}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \pmod{1} \\ y(1 + \alpha \beta g(x) h(x)) \\ 1 + \alpha \beta g(x) h(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \pmod{1} \\ y \end{cases} = \text{id.}$$

Logo, I_1 é uma involução.

b) Para I_2 temos que $I_2 \circ I_2(x, y) =$

$$= \begin{cases} x_1 + \omega(y_1) \pmod{1} \\ -y_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x + \omega(y) \pmod{1} + \omega(-y)) \pmod{1} \\ -(-y) \end{cases}$$

sendo ω ímpar temos

$$I_2^2 = \begin{cases} x \pmod{1} \\ y \end{cases} = \text{id.}$$

Logo, I_2 é uma involução.

c) $I_1 \circ I_2(x, y) =$

$$= \begin{cases} x_1 = x + \omega(y) \pmod{1} \\ y_1 = \frac{y + \alpha g(x_1)}{1 - \beta y h(x_1)} \end{cases}$$

$$= T_{\alpha, \beta}.$$

Portanto $T_{\alpha, \beta}$ é reversível.

Proposição 2.2.2. Se g e h são ambas funções ímpares, então para cada (α, β) , a aplicação $T_{\alpha, \beta}$ é reversível, com a seguinte decomposição em produto de involuções:

$$T_{\alpha, \beta} = J_1 \circ J_2,$$

com

$$J_1 = J_{1\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} x_1 = -x \pmod{1} \\ y_1 = \frac{y - \alpha g(x)}{1 + \beta y h(x)} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$J_2(x, y) = \begin{cases} x_1 = -x - \omega(y) \pmod{1} \\ y_1 = y \end{cases} \quad (2.5)$$

Prova:

$$a) J_1 \circ J_1(x, y) = \begin{cases} -x_1 \pmod{1} \\ y_1 - \alpha g(x_1) \\ 1 + \beta y_1 h(x_1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(-x \pmod{1}) \pmod{1} \\ \left(\frac{y + \alpha g(x \pmod{1})}{1 + \beta y h(x)} \right) - \alpha g(-x \pmod{1}) \\ 1 + \beta \left(\frac{y - \alpha g(x)}{1 + \beta y h(x)} \right) h(-x \pmod{1}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(\text{mod } 1) \\ \frac{y(1 + \alpha\beta g(x)h(x))}{1 + \alpha\beta g(x)h(x)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(\text{mod } 1) \\ y \end{cases} = \text{id.}$$

Logo, J_1 é uma involução.

b) $J_2 \circ J_2(x,y) =$

$$= \begin{cases} (x + \omega(y)(\text{mod } 1) - \omega(y))(\text{mod } 1) \\ y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(\text{mod } 1) \\ y \end{cases} = \text{id.}$$

Logo J_2 é uma involução.

c) $J_1 \circ J_2(x,y) =$

$$= \begin{cases} x_1 = x + \omega(y)(\text{mod } 1) \\ y_1 = \frac{-(-y) + \alpha g(x + \omega(y)(\text{mod } 1))}{1 + \beta(-y)h(x + \omega(y)(\text{mod } 1))} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_1 = x + \omega(y)(\text{mod } 1) \\ y_1 = \frac{y + \alpha g(x_1)}{1 - \beta y h(x_1)} \end{cases}$$

$$= T_{\alpha,\beta}.$$

Logo, $T_{\alpha,\beta}$ como definida anteriormente, é reversível.

Observação 2.2.3. Se R é uma involução, $F(R)$ denotará o conjunto de seus pontos fixos, como dito na seção 1.3 e será uma curva diferenciável em $S^1 \times R$, chamada de curva de simetria associada à involução R .

Proposição 2.2.4. Sejam I_1 e I_2 as involuções dadas na Prop. 2.2.1. Então as curvas de simetria associadas a I_1 e I_2 , são respectivamente:

$$F(I_1): \quad \beta h(x)y^2 + 2y - \alpha g(x) = 0 \quad (2.6)$$

$$F(I_2): \quad y = 0. \quad (2.7)$$

Prova:

$$F(I_1) = \{(x,y); I_1(x,y) = (x,y)\}$$

Resolvendo

$$I_1(x,y) = \begin{cases} x_1 \pmod{1} \\ -y_1 + \alpha g(x_1) \\ 1 + \beta y_1 h(x_1) \end{cases} = \begin{cases} x \pmod{1} \\ y \end{cases}$$

obtemos a relação (2.6).

E resolvendo

$$I_2(x,y) = \begin{cases} x_1 = x + \omega(y) \pmod{1} \\ y_1 = -y \end{cases} = \begin{cases} x \pmod{1} \\ y \end{cases}$$

obtemos a relação (2.7).

Proposição 2.2.5. Sejam J_1 e J_2 as involuções da Prop. 2.2.2. Então, as curvas de simetria associadas a J_1 e J_2 são respectivamente:

$$F(J_1): \quad 2x \in Z \quad (2.8)$$

$$F(J_2): \quad (2x + \omega(y)) \in Z \quad (2.9)$$

Prova:

Da mesma forma que a Prop. anterior com J_1 e J_2 no lugar de I_1 e I_2 .

2.3 Pontos Fixos

Proposição 2.3.1. Seja $T_{\alpha,\beta} = I_1 \circ I_2$ a decomposição dada na Prop. 2.2.1. Então, os pontos fixos simétricos de $T_{\alpha,\beta}$ são:

$$\text{SFP1} = \{(x_0, y_0); \alpha g(x_0) = 0\}$$

Enquanto que os pontos fixos assimétricos de $T_{\alpha, \beta}$ são:

$$\text{AFP1} = \text{AFP11} \cup \text{AFP12}, \text{ onde}$$

$$\text{AFP11} = \{(x_0, y_0); \alpha g(x_0) = \beta h(x_0) = 0, y_0 \neq 0 \text{ e } \omega(y_0) \in Z\}$$

$$\text{AFP12} = \left\{ (x_0, y_0); \alpha g(x_0) \neq 0, \beta h(x_0) \neq 0, y_0 \neq 0, \omega(y_0) \in Z \text{ e } \frac{h(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} \right\}$$

Prova:

a) Para os pontos fixos simétricos, basta determinar a interseção

$F(I_1) \cap F(I_2)$ em (2.6) e (2.7).

b) Os pontos fixos assimétricos são obtidos resolvendo $T_{\alpha, \beta}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, e descartando os pontos fixos simétricos.

Proposição 2.3.2. Seja $T_{\alpha, \beta} = J_1 \circ J_2$ como na Prop. 2.2.2. Então, os pontos fixos simétricos de $T_{\alpha, \beta}$ são:

$$\text{SFP2} = \{(x_0, y_0); 2x_0 \in Z \text{ e } \omega(y_0) \in Z\}$$

Enquanto que os pontos fixos assimétricos são:

$$\text{AFP2} = \text{AFP21} \cup \text{AFP22}, \text{ onde}$$

$$\text{AFP21} = \{(x_0, y_0); \alpha g(x_0) = \beta h(x_0) = 0, 2x_0 \notin Z \text{ e } \omega(y_0) \in Z\}$$

$$AFP22 = \left\{ (x_0, y_0); \alpha g(x_0) \neq 0, \beta h(x_0) \neq 0, y_0 \neq 0, \omega(y_0) \in Z \text{ e } \frac{h(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} \right\}$$

Prova:

Os mesmos argumentos da Prop. anterior.

Nos próximos capítulos, investigaremos a dinâmica de $T_{\alpha, \beta}$ numa pequena vizinhança dos pontos fixos dados nas Proposições 2.3.1 e 2.3.2, e suas mudanças estruturais (bifurcações), quando os parâmetros são deixados variar.

2.4 A matriz jacobiana de $T_{\alpha, \beta}$ e a estabilidade dos pontos fixos

O tipo topológico local numa pequena vizinhança de um ponto fixo (x_0, y_0) de $T_{\alpha, \beta}$, muitas vezes pode ser determinado pela parte linear de $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) , $DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0)$. Uma condição suficiente para que isto ocorra, é que (x_0, y_0) seja um ponto fixo hiperbólico (Teorema de Grobman-Hartman, veja Palis [Pa1]). Mas, mesmo no caso onde (x_0, y_0) não é hiperbólico, a parte linear de $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) ainda é fundamental na determinação do tipo topológico local.

Definição 2.4.1. Sejam $T: R^2 \rightarrow R^2$ um difeomorfismo, (x_0, y_0) um ponto fixo de T e λ_1, λ_2 os autovalores de $DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0)$. Dizemos que o ponto fixo (x_0, y_0) é do tipo:

- i) *Atrator* se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$.
- ii) *Repulsor* ou *fonte* se $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$.
- iii) *Sela* se $0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ ou $0 < |\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$.
- iv) *Elítico* ou *centro* se $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ com $\lambda_1, \lambda_2 \notin \{-1, 1\}$.

Citaremos um Lema que será útil na análise da estabilidade local dos pontos fixos de $T_{\alpha,\beta}$.

Lema 2.4.2. Seja $L: R^2 \rightarrow R^2$ um isomorfismo, com $\text{tr}(L) = \text{traço}(L)$ e $\text{det}(L) = \text{determinante}(L)$. Então $0 \in R^2$ é um ponto fixo do tipo:

- i) Atrator se $|\text{det}(L)| < 1$, $|\text{tr}(L)| < 1 + \text{det}(L)$.
- ii) Repulsor se $|\text{det}(L)| > 1$, $|\text{tr}(L)| < 1 + \text{det}(L)$.
- iii) Sela se $|\text{tr}(L)| > 1 + \text{det}(L)$.
- iv) Elítico se $|\text{det}(L)| = 1$ e $|\text{tr}(L)| = 1 + \text{det}(L)$.

Prova:

A equação característica de L , é dada por

$$\lambda^2 - \text{tr}(L)\lambda + \text{det}(L) = 0$$

donde os autovalores são dados por

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(L) + \sqrt{\text{tr}^2(L) - 4 \text{det}(L)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{tr}(L) - \sqrt{\text{tr}^2(L) - 4 \text{det}(L)}}{2}$$

o resultado segue-se considerando λ_1 e λ_2 como na Def. 2.4.1.

Proposição 2.4.3. A matriz jacobiana da aplicação $T_{\alpha,\beta}$ num ponto (x,y) é dada por:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} x_1(x,y) = 1 & \frac{\partial}{\partial y} x_1(x,y) = \omega'(y) \\ \frac{\partial}{\partial x} y_1(x,y) = \frac{\alpha g'(x_1) + \beta y y_1 h'(x_1)}{1 - \beta y h(x_1)} & \frac{\partial}{\partial y} y_1(x,y) = \mathfrak{J}(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} y_1(x,y) \omega'(y) \end{array} \right)$$

onde

$$\mathfrak{J}(x,y) = \frac{1 + \alpha \beta g(x) h(x)}{(1 - \beta y h(x_1))^2}$$

é o determinante jacobiano em (x,y) .

Prova:

Simple derivação das funções componentes de $T_{\alpha,\beta}$ com relação a x e y .

Observação 2.4.4. Para usos futuros, convém escrever o determinante jacobiano $\mathfrak{J}(x,y)$ como:

$$\mathfrak{J}(x,y) = \frac{1 + \beta y_1 h(x_1)}{1 - \beta y h(x_1)} = \frac{y_1}{y} \left(\frac{y_1 - \alpha g(x_1)}{y + \alpha g(x_1)} \right).$$

Convém agora considerarmos os resultados anteriores aplicados a um ponto fixo (x_0, y_0) de $T_{\alpha,\beta}$, para determinarmos a estabilidade dos pontos fixos.

Assim, se (x_0, y_0) é um ponto fixo de $T_{\alpha,\beta}$, temos que $DT_{\alpha,\beta}(x_0, y_0)$ vale:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} x_1(x_0, y_0) = 1 & \frac{\partial}{\partial y} x_1(x_0, y_0) = \omega'(y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \frac{\alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0)}{1 - \beta y_0 h(x_0)} & \frac{\partial}{\partial y} y_1(x_0, y_0) = \mathfrak{J}(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) \omega'(y_0) \end{array} \right)$$

onde

$$\mathfrak{J}(x,y) = \frac{1 + \beta y_0 h(x_0)}{1 - \beta y_0 h(x_0)} = \left(\frac{y_0 - \alpha g(x_0)}{y_0 + \alpha g(x_0)} \right) = \det(DT_{\alpha,\beta}(x_0, y_0))$$

$$\text{tr}(DT_{\alpha,\beta}(x_0, y_0)) = 1 + \mathfrak{J}(x_0, y_0) + \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1.$$

Proposição 2.4.5. Seja (x_0, y_0) um ponto fixo de $T_{\alpha,\beta}$ de qualquer um dos tipos SFP1, SFP2, AFP11 ou AFP21. Então o determinante jacobiano de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) vale $\mathfrak{J}(x_0, y_0) = 1$. Além disso, (x_0, y_0) é:

i) Uma sela se

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) > 0 \text{ ou } \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < -4.$$

ii) Um ponto elítico se

$$-4 < \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < 0.$$

Prova:

Basta aplicar o Lema 2.4.2 a $L = DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0)$.

Proposição 2.4.6. Seja (x_0, y_0) um ponto fixo de $T_{\alpha, \beta}$ de qualquer um dos tipos AFP12 ou AFP22. Então $\mathfrak{I}(x_0, y_0) \neq 1$, e (x_0, y_0) é:

i) Um atrator se $\mathfrak{I}(x_0, y_0) < 1$ e

$$-2(1 + \mathfrak{I}(x_0, y_0)) < \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < 0$$

ii) Um repulsor se $\mathfrak{I}(x_0, y_0) > 1$ e

$$-2(1 + \mathfrak{I}(x_0, y_0)) < \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < 0$$

iii) Uma sela se

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < -2(1 + \mathfrak{I}(x_0, y_0)) \text{ ou } \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) > 0$$

Prova:

Aplicação do Lema 2.4.2 a $L = DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0)$.

Observação 2.4.7. Afim de utilização nos capítulos posteriores, se (x_0, y_0) é um ponto fixo de $T_{\alpha, \beta}$ dos tipos AFP12 ou AFP22 podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \frac{\beta y_0^2 g'(x_0)}{1 - \beta y_0 h(x_0)} \left(\frac{h'(x_0)}{g'(x_0)} - \frac{h(x_0)}{g(x_0)} \right).$$

Capítulo 3 Bifurcações Locais dos pontos fixos simétricos de $T_{\alpha,\beta}$

3.1 Introdução

Nosso principal objetivo neste capítulo, é descrever um método eficiente, que permita investigar as bifurcações locais dos pontos fixos simétricos de $T_{\alpha,\beta}$. Tal método não será útil na investigação de todas as possíveis bifurcações, mas apenas daquelas decorrentes da perda de hiperbolicidade de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) . O motivo disto é mais ou menos o seguinte: Veremos adiante que sob condições bem gerais satisfeitas por $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) , o diagrama de bifurcação de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) , apresenta regiões abertas no espaço dos parâmetros α, β , consistindo de valores (α, β) para os quais (x_0, y_0) é um ponto fixo hiperbólico para $T_{\alpha,\beta}$, e regiões abertas com valores (α, β) para os quais (x_0, y_0) é um ponto fixo elítico. Nas regiões hiperbólicas a dinâmica local de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) é completamente determinada pela dinâmica da sua parte linear (Teorema de Grobman-Hartman), enquanto que na região elítica, o estudo das bifurcações aí, conduz ao estudo das bifurcações de famílias parametrizadas de difeomorfismos do círculo, objeto com o qual não lidaremos nestas notas. Assim, nosso método consistirá em descrever o tipo topológico local de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) quando (α, β) pertence à fronteira da região de hiperbolicidade dita acima. Nosso método derivará das investigações independentes de F. Takens [Ta1] e R.I. Bogdanov [Bo1] sobre as singularidades nilpotentes de campos de vetores.

3.2 Diagramas de bifurcação dos pontos fixos simétricos de $T_{\alpha,\beta}$

O nome diagrama de bifurcação em nosso contexto é um abuso de linguagem, pois não se trata de um desdobramento universal do ponto fixo (x_0, y_0) , mas apenas um dispositivo gráfico que descreve as regiões onde $DT_{\alpha,\beta}(x_0, y_0)$ é hiperbólica ou não.

Proposição 3.2.1. Sejam $T_{\alpha,\beta} = I_1 \circ I_2$ como na Prop. 2.2.1 e $(x_0, 0)$ um ponto fixo simétrico do tipo SFP1 com na Prop. 2.3.1. Então a matriz jacobiana de $T_{\alpha,\beta}$ em $(x_0, 0)$ é dada por:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} x_1(x_0, 0) = 1 & \frac{\partial}{\partial y} x_1(x_0, 0) = \omega'(y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, 0) = \alpha g'(x_0) & \frac{\partial}{\partial y} y_1(x_0, 0) = 1 + \alpha g'(x_0) \omega'(y_0) \end{array} \right)$$

Proposição 3.2.2. Sejam $T_{\alpha,\beta}$ e $(x_0, 0)$ como na Prop. anterior. Suponhamos que $T_{\alpha,\beta}$ satisfaça a condição genérica $g'(x_0) \neq 0$ e $\omega'(0) \neq 0$. Então para $\omega'(0)g'(x_0) > 0$, $(x_0, 0)$ é:

i) Uma sela se

$$\alpha > 0 \text{ ou } \alpha < \frac{-4}{g'(x_0)\omega'(0)}.$$

ii) Um ponto elítico se

$$\frac{-4}{g'(x_0)\omega'(0)} < \alpha < 0.$$

O caso $\omega'(0)g'(x_0) < 0$, é similar.

Prova:

Consequência imediata da Prop. 2.4.5.

Corolário 3.2.3. O diagrama de bifurcação do ponto fixo $(x_0, 0) \in \text{SFP1}$ é o dado pela FIG. 2.1 abaixo, com as retas r_1 e r_2 dadas por:

$$r_1: \alpha = 0$$

$$r_2: \alpha = \frac{-4}{g'(x_0)\omega'(0)}$$

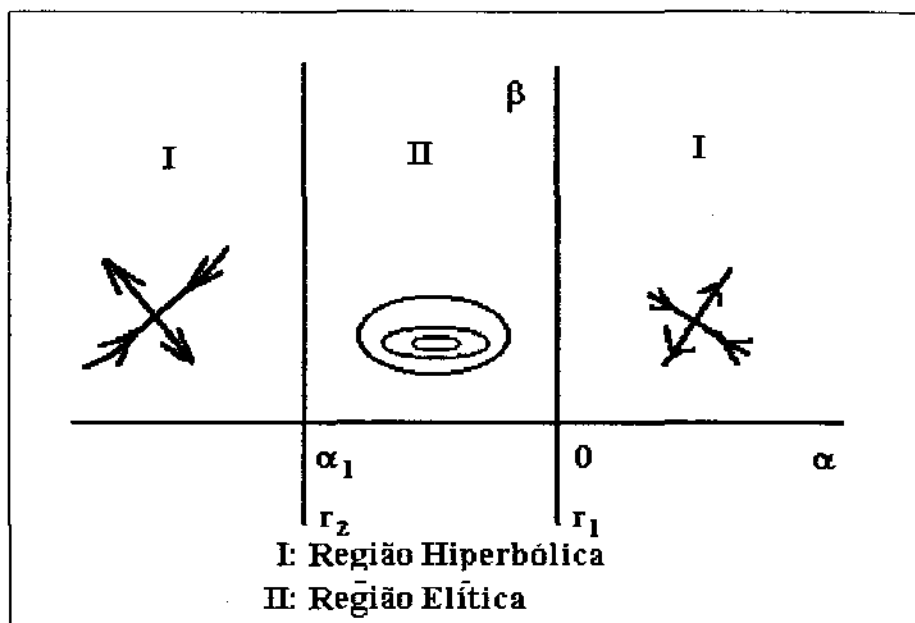


FIG. 3.1

Proposição 3.2.4. Seja $T_{\alpha,\beta} = J_1 \circ J_2$ como na Prop. 2.2.2 e (x_0, y_0) um ponto fixo simétrico do tipo SFP2, com dado na Prop. 2.3.2. Então, a matriz jacobiana de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) , é dada por:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} x_1(x_0, y_0) = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0) \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} x_1(x_0, y_0) = \omega'(y_0) \\ \frac{\partial}{\partial y} y_1(x_0, y_0) = 1 + (\alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0)) \omega'(y_0) \end{array} \right)$$

Proposição 3.2.5. Sejam $T_{\alpha, \beta}$ e (x_0, y_0) como na Prop. 3.2.4. Suponhamos também que $T_{\alpha, \beta}$ satisfaça a condição genérica, $y_0 \neq 0$, $h'(x_0) \neq 0$ e $\omega'(y_0) \neq 0$, então para $h'(x_0)\omega'(y_0) > 0$, (x_0, y_0) é:

i) Uma sela se

$$\beta < \frac{-4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(y_0)} - \frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha \text{ ou } \beta > -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha.$$

ii) Um ponto elítico se

$$\frac{-4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(y_0)} - \frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha < \beta < -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha.$$

O caso $h'(x_0)\omega'(y_0) < 0$, é similar.

Prova:

Consequência imediata da Prop. 2.4.5.

Corolário 3.2.6. O diagrama de bifurcação do ponto fixo $(x_0, y_0) \in \text{SFP2}$, é o dado pela FIG. 3.2 abaixo, onde as retas r_1 e r_2 são as retas no espaço $\alpha\beta$ dadas por:

$$r_1: \beta = -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha.$$

$$r_2: \beta = -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha - \frac{4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(y_0)}.$$

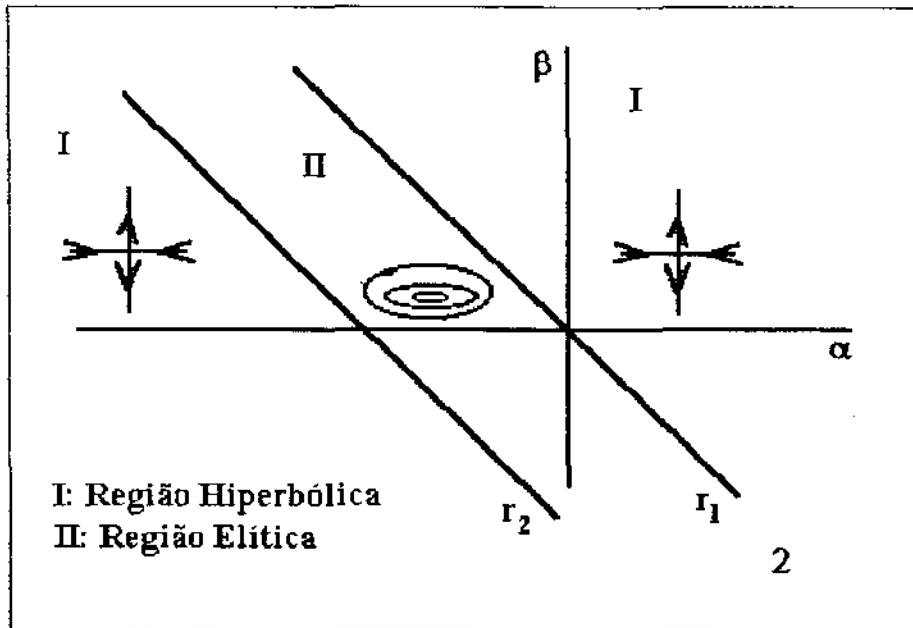


FIG. 3.2

Observação 3.2.7. Como vimos nos Corol. 3.2.3 e 3.2.6 figuras 3.1 e 3.2, para $T_{\alpha,\beta}$ satisfazendo condições genéricas bem razoáveis, as regiões I e II são abertos no espaço dos parâmetros $\alpha\beta$ com uma fronteira comum, a saber, as retas r_1 e r_2 . Nosso objetivo central neste capítulo, é obter um método que permita determinar a dinâmica local de $T_{\alpha,\beta}$ no ponto fixo simétrico (x_0, y_0) , quando $(\alpha, \beta) \in r_1$ ou $(\alpha, \beta) \in r_2$.

3.3 Bifurcações decorrentes da perda de hiperbolicidade de $T_{\alpha,\beta}$ num ponto fixo simétrico (x_0, y_0)

Analisaremos aqui a aplicação $T_{\alpha,\beta}$ num ponto fixo simétrico (x_0, y_0) quando os parâmetros (α, β) estão sobre as retas r_1 e r_2 dos diagramas de bifurcação dados nas figuras 3.1 e 3.2.

Proposição 3.3.1. Sejam $T_{\alpha,\beta} = I_1 \circ I_2$ e $(x_0, 0) \in \text{SFP1}$. Suponhamos que $T_{\alpha,\beta}$ satisfaça a condição genérica em $(x_0, 0)$ dada por: $g'(x_0) \neq 0$ e $\omega'(0) \neq 0$. Então se (α, β) pertence à reta r_1 , isto é, $\alpha = 0$, então a parte linear de $T_{\alpha,\beta}$ é dada por:

$$DT_{\alpha,\beta}(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ a qual é semelhante a } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E se (α, β) pertence à reta r_2 , isto é,

$$\alpha_2 = \alpha = -\frac{4}{g'(x_0)\omega'(0)}, \text{ então a parte linear de } T_{\alpha_2,\beta} \text{ em } (x_0, 0) \text{ é dada por}$$

$$DT_{\alpha_2,\beta}(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(0) \\ -\frac{4}{\omega'(0)} & -3 \end{pmatrix}, \text{ a qual é semelhante a } Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prova:

Simple substituição dos valores (α, β) pertencentes a r_1 e r_2 na matriz jacobiana.

Proposição 3.3.2. Sejam $T_{\alpha,\beta} = J_1 \circ J_2$ e $(x_0, y_0) \in \text{SFP2}$ um ponto fixo simétrico. Suponhamos que $T_{\alpha,\beta}$ satisfaça a condição genérica em (x_0, y_0) dada por: $y_0 \neq 0$, $h'(x_0) \neq 0$ e $\omega'(y_0) \neq 0$. Então, se (α, β) pertence à reta r_1 , isto é,

$$\beta_1 = -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha_1 \text{ então a parte linear de } T_{\alpha_1,\beta_1} \text{ em } (x_0, y_0) \text{ é dada por}$$

$$DT_{\alpha_1,\beta_1}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(y_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ a qual é semelhante a } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E se (α, β) pertence à reta r_2 , isto é,

$$\beta_2 = -\frac{4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(0)} - \frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha_2 \text{ então a parte linear de } T_{\alpha_2, \beta_2}$$

$$\text{em } (x_0, y_0) \text{ é dada por } DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(y_0) \\ -\frac{4}{\omega'(y_0)} & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{a qual é semelhante a } Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prova:

Simple substituição dos valores (α, β) pertencentes a r_1 ou r_2 na matriz jacobiana.

Os pontos fixos com parte linear semelhante à matriz S acima, foram estudados, no caso de campos de vetores, independentemente por Bogdanov [Bo1] e Takens [Ta1], onde neste caso, a parte linear do campo de vetores correspondente é semelhante a

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bogdanov e Takens deram um desdobramento universal para este tipo de singularidade de campos de vetores, dita nilpotente. Tal bifurcação chamada de Bogdanov-Takens é de codimensão 2, no sentido que, ocorre genericamente em famílias a 2-parâmetros de campos de vetores (difeomorfismos) cuja parte linear passa por autovalores iguais a zero (um) de multiplicidade dois.

Definição 3.3.3. Seja $\varphi_{\alpha, \beta}: R^2 \rightarrow R^2$ uma família a 2-parâmetros de difeomorfismos bidimensionais. Sejam (x_0, y_0) um ponto fixo de $\varphi_{\alpha_0, \beta_0}$, diremos que

(α_0, β_0) é um valor de bifurcação de Bogdanov-Takens (BT) para $\varphi_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) , se a parte linear $D\varphi_{\alpha_0, \beta_0}(x_0, y_0)$ for semelhante à matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diremos também que ocorre uma bifurcação de Bogdanov-Takens (BT) de $\varphi_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) para $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \beta_0$.

Definição 3.3.4. Seja $X_{\alpha, \beta}: R^2 \rightarrow R^2$ uma família a 2-parâmetros de campos de vetores bidimensionais. Sejam (x_0, y_0) uma singularidade de X_{α_0, β_0} , diremos que (α_0, β_0) é um valor de bifurcação de Bogdanov-Takens (BT) para $X_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) , se a parte linear $DX_{\alpha_0, \beta_0}(x_0, y_0)$ for semelhante à matriz

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diremos também que ocorre uma bifurcação de Bogdanov-Takens (BT) de $X_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) para $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \beta_0$.

Proposição 3.3.5. Sejam (x_0, y_0) um ponto fixo simétrico de $T_{\alpha, \beta}$ de qualquer um dos tipos SFP1 ou SFP2, (α_1, β_1) valores dos parâmetros pertencentes à reta r_1 de qualquer um dos diagramas de bifurcação (FIG. 3.1 ou 3.2). Então (α_1, β_1) é um valor de bifurcação (BT) para $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

Consequência imediata da Def. 3.3.3 e das Prop. 3.3.1 e 3.3.2.

Proposição 3.3.6. Sejam $T_{\alpha, \beta}$ e (x_0, y_0) como na Prop. anterior. Seja (α_2, β_2) valores dos parâmetros pertencentes à reta r_2 dos diagramas de bifurcação dados nas FIG. 3.1 e 3.2. Então (α_2, β_2) é um valor de bifurcação BT para $T_{\alpha, \beta}^2 = T_{\alpha, \beta} \circ T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

i) Para $T_{\alpha,\beta} = I_1 \circ I_2$ e $(x_0, 0) \in \text{SFP1}$ temos que

$$DT_{\alpha,\beta_2}(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(0) \\ -\frac{4}{\omega'(0)} & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } (DT_{\alpha,\beta_2}(x_0, 0))^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2\omega'(0) \\ \frac{8}{\omega'(0)} & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{a qual é semelhante a } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Para $T_{\alpha,\beta} = J_1 \circ J_2$ e $(x_0, y_0) \in \text{SFP2}$ vale o mesmo resultado, já que

$$DT_{\alpha,\beta_2}(x_0, 0) = DT_{\alpha_2,\beta_2}(x_0, y_0).$$

Observação 3.3.7. Vale observar que os pontos fixos simétricos $(x_0, 0) \in \text{SFP1}$ ou $(x_0, y_0) \in \text{SFP2}$ são fixados pela família $T_{\alpha,\beta}$, isto é, $T_{\alpha,\beta}(x_0, 0) = (x_0, 0)$ e $T_{\alpha,\beta}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ para todos (α, β) , considerando $T_{\alpha,\beta}$ com as involuções convenientes. Mas a estabilidade destes pontos fixos mudam, de acordo com os diagramas de bifurcação dados anteriormente.

Encontramo-nos na seguinte situação: Fixado um ponto fixo simétrico (x_0, y_0) de $T_{\alpha,\beta}$, ao deixarmos os parâmetros variarem temos que, se (α, β) pertence à região I do plano $\alpha\beta$, então o comportamento dinâmico local de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) é hiperbólico, mais especificamente do tipo sela. Quando (α, β) avança na direção da região II passando pela reta r_1 , (FIG. 3.1 e 3.2), $T_{\alpha,\beta}$ passa por uma bifurcação BT, e logo depois (genericamente), (x_0, y_0) torna-se um ponto fixo elítico. Por outro lado, se (α, β) pertence à região I e avança na direção da região II, passando pela reta r_2 , então $T_{\alpha,\beta}^2$ passa por uma bifurcação BT em (x_0, y_0) . Assim, como estamos interessados nas bifurcações decorrentes da perda de hiperbolicidade de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) , é suficiente para nós determinar a dinâmica

local de $T_{\alpha,\beta}$, quando (α,β) está sobre as retas r_1 e r_2 dos diagramas de bifurcação anteriores.

3.4 Elementos de análise local

Do ponto de vista da análise local, podemos considerar o nosso problema situado num aberto de R^2 , e nossos pontos fixos, situados na origem. Com isto em mente, podemos considerar os seguintes conjuntos:

$V(2)$: O espaço dos C^∞ -germes de funções reais $f: U \subset R^2 \rightarrow R$, onde U é alguma vizinhança de $0 \in R^2$.

$\text{Diff}(2)$: O espaço dos C^∞ -germes de difeomorfismos em $0 \in R^2$, tendo 0 como ponto fixo.

$\chi(2)$: O espaço dos C^∞ -germes de campos de vetores em $0 \in R^2$, tendo 0 como singularidade.

$J_2^k (\chi_2^k)$: O grupo (espaço) dos k -jatos de germes de difeomorfismos (campos de vetores) tendo 0 como ponto fixo (singularidade).

$j_k: \text{Diff}(2) \rightarrow J_2^k$ ($j_k: \chi(2) \rightarrow \chi_2^k$) denota a projeção natural.

Definição 3.4.1. Seja $\varphi \in \text{Diff}(2)$ um difeomorfismo. Dizemos que φ *C^r-mergulha em fluxo* ($r \in N \cup \{0\} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$), se existir um campo de vetores $X \in \chi(2)$ e um C^r -difeomorfismo $g: U \subset R^2 \rightarrow R^2$, U uma vizinhança de $0 \in R^2$, tal que, $g \circ \varphi \circ g^{-1} = X_t$, onde X_t denota a aplicação fluxo no tempo t associada ao campo de vetores X .

Enunciaremos um resultado devido a Takens [Ta1], que afirma que, uma certa classe de difeomorfismos, que engloba os que têm parte linear semelhante à matriz semisimples S dada na Def. 3.3.3, têm a propriedade de mergulhar em

fluxo. Portanto a dinâmica local em 0 do difeomorfismo em estudo, fica completamente determinada pela dinâmica local de um campo de vetores associado a ele, pela Definição acima.

Teorema 3.4.2. (Takens [Ta1]). Seja $\varphi \in \text{Diff}(2)$ tal que, os autovalores de $D\varphi(0)$ são da forma:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = e^{i2\pi \frac{n}{m}}, \text{ com } m, n \in \mathbb{N} \text{ e } \text{m.d.c}(m, n) = 1,$$

(se $m = 1$ ou 2 , $D\varphi(0)$ será suposta ser não diagonalizável). Então existem, $g \in J_2^k$ e um campo de vetores $X \in \chi(2)$, invariante sob a rotação R , de um ângulo $2\pi n/m$, tais que

$$j_k(g \circ \varphi \circ g^{-1}) = j_k(X_1 \circ R)$$

onde X_1 denota a aplicação fluxo no tempo 1 do campo de vetores X . Além disso, se $m=1$, e φ cumpre a condição C_1 , isto é, no desenvolvimento em série de Taylor de φ em torno de 0, os coeficientes de y^2 são não nulos. Então, g e X acima, podem ser escolhidos de forma a satisfazer também a condição C_1 . Isto é, o 2-jato de campo de vetores X , é da forma:

$$X(x, y) = ay^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x + by^2) \frac{\partial}{\partial y}, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Prova:

Veja Takens [Ta1].

Observação 3.4.3. Observemos que a condição C_1 dada anteriormente, é genérica, isto é, se $\Gamma(2) \subset \text{Diff}(2)$ é o conjunto dos difeomorfismos satisfazendo a hipótese inicial do Teorema 3.4.2, então, o subconjunto $\Gamma_1(2) \subset \Gamma(2)$ formado pelos difeomorfismos que satisfazem C_1 é residual em $\Gamma(2)$.

Teorema 3.4.4. (Takens [Ta2]). Seja $\varphi \in \text{Diff}(2)$ com parte linear semelhante à matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e satisfazendo a condição genérica C_1 acima. Então, o 2-jato de φ em 0, determina o tipo topológico local de φ em 0.

Prova:

Veja Takens [Ta2].

Takens [Ta2] provou este resultado, utilizando a técnica do Blowing-up de singularidades, isto é, mudanças de coordenadas singulares em torno da singularidade em estudo. (Veja também Guckenheimer e Holmes [Gu1]).

Observação 3.4.5. Se $\varphi \in \text{Diff}(2)$ é como no Teorema 3.4.2., mas não satisfaz a condição genérica C_1 , não podemos garantir que o 2-jato de φ determine o tipo topológico local de φ em 0. Mas neste caso, vale ainda um resultado mais fraco.

Proposição 3.4.6. (Dumortier [Du1]). Seja $\varphi \in \text{Diff}(2)$ analítico (C^∞), tendo 0 como ponto fixo isolado. Então existe $k < \infty$, tal que, $j_k(\varphi)$ determina o tipo topológico local de φ em 0.

Prova:

Veja Dumortier [Du1].

Dumortier [Du1] mostrou para campos de vetores X que, se numa singularidade degenerada, a parte linear de X satisfaz uma condição chamada de desigualdade de Lojaciewicz, que para campos analíticos equivale á isolamento da singularidade, então existe uma sequência finita de Blowing-ups que aplicados ao campo "aniquilam todas as degenerescências" produzindo determinância finita (isto é, tipo topológico local determinado por um k -jato, $k < \infty$).

Voltando à nossa aplicação $T_{\alpha,\beta}$, temos que, (x_0, y_0) é um ponto fixo simétrico de qualquer um dos tipos SFP1 ou SFP2, para T_{α_1, β_1} , onde (α_1, β_1) são valores dos parâmetros sobre a reta r_1 dos diagramas de bifurcação dados nas FIGs. 3.1 e 3.2, isto é, (α_1, β_1) são valores de bifurcação BT. Neste caso, para determinar a dinâmica local de T_{α_1, β_1} em (x_0, y_0) , basta determinar o campo de vetores dado pelo Teorema de Takens 3.4.2.

Agora se (α_2, β_2) são valores dos parâmetros sobre a reta r_2 dos diagramas de bifurcação, temos que para a aplicação $T_{\alpha_2, \beta_2}^2 = T_{\alpha_2, \beta_2} \circ T_{\alpha_2, \beta_2}$, ocorre uma bifurcação BT, e o Teorema de Takens produz um campo de vetores que "contém" a dinâmica local de T_{α_2, β_2}^2 em (x_0, y_0) . O seguinte resultado afirma que este campo também descreve a dinâmica local de T_{α_2, β_2} .

Lema 3.4.7. Sejam $\varphi \in \text{Diff}(2)$ e $X \in \chi(2)$ tais que, $\varphi^2 = X_1$. Então a órbita positiva de x por φ é reunião de duas órbitas de X_1 , a saber, a órbita de x por X_1 e a órbita de $\varphi(x)$ por X_1 .

Prova:

Denotemos por $O^+\varphi(x)$ a órbita positiva de x por φ .

$$O^+\varphi(x) = \{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x), \varphi^4(x), \dots, \varphi^n(x), \dots\}$$

$$O^+\varphi^2(x) = \{x, \varphi^2(x), \varphi^4(x), \dots, \varphi^{2n}(x), \dots\} = O^+X_1(x), \text{ por hipótese.}$$

$$\begin{aligned} O^+X_1(\varphi(x)) &= \{x, X_1(\varphi(x)), X_1^2(\varphi(x)), \dots, X_1^n(\varphi(x)), \dots\} = \\ &= \{x, \varphi^3(x), \varphi^5(x), \dots, \varphi^{2n+1}(x), \dots\}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } O^+\varphi(x) = O^+X_1(x) \cup O^+X_1(\varphi(x)).$$

Assim, podemos tratar da mesma forma o estudo das bifurcações locais de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) , quando os parâmetros (α, β) passam pela retas r_1 ou r_2 .

O último resultado importante desta seção, é um Lema devido a Takens [Ta1], que fornece um candidato natural a campo de vetores satisfazendo as condições do Teorema 3.4.2.

Lema 3.4.8. (Takens [Ta1]). Seja $G \subset J_2^k$ um subgrupo de Lie tal que, $G_1 = j_1(G)$, consiste apenas de elementos φ , tal que $(\varphi - \text{id})$ é nilpotente. Então $\text{Exp}: \mathfrak{L}(G) \rightarrow G$, é um difeomorfismo, onde $\mathfrak{L}(G)$ denota a álgebra de Lie de G .

Prova:

Veja Takens [Ta1].

Em particular, dado um k -jato de difeomorfismo φ com parte linear semelhante a

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

então podemos obter um k -jato de campo de vetores X , tendo φ como fluxo no tempo 1. A saber pela relação, $\varphi = \text{Exp}(X)$, onde

$$\text{Exp}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

Sendo que, na expressão acima, as iteradas de X devem ser interpretadas, como sendo as iteradas de X , visto como um operador diferencial sobre o conjunto dos C^∞ -germes de funções reais em $0 \in R^2$. Isto é,

$$\text{Se } X(x, y) = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}; a, b, f \in V(2)$$

$$\text{então, } X(f)(x, y) = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Capítulo 4 Bifurcações locais dos pontos fixos assimétricos de $T_{\alpha,\beta}$

4.1 Introdução

Descreveremos aqui a dinâmica local da aplicação $T_{\alpha,\beta}$ na vizinhança de um ponto fixo assimétrico (x_0, y_0) . Como já vimos no Cap. 1, tais pontos fixos ocorrem sempre aos pares. No que se segue, dividiremos o estudo dos pontos fixos assimétricos em duas classes: Pontos fixos assimétricos com determinante jacobiano igual a um, e pontos fixos assimétricos com determinante jacobiano diferente de um.

4.2 Pontos fixos assimétricos

De acordo com o Cap. 2, seq. 2.3, os pontos fixos assimétricos de $T_{\alpha,\beta}$ com a decomposição $T_{\alpha,\beta} = I_1 \circ I_2$ são:

$$\text{AFP11} = \{(x_0, y_0); \alpha g(x_0) = \beta h(x_0) = 0, y_0 \neq 0 \text{ e } \omega(y_0) \in Z\}$$

$$\text{AFP12} = \left\{ (x_0, y_0); \alpha g(x_0) \neq 0, \beta h(x_0) \neq 0, y_0 \neq 0, \omega(y_0) \in Z \text{ e } \frac{h(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} \right\}$$

Enquanto que, os pontos fixos assimétricos de $T_{\alpha,\beta} = J_1 \circ J_2$ são:

$$\text{AFP21} = \{(x_0, y_0); \alpha g(x_0) = \beta h(x_0) = 0, 2x_0 \notin Z \text{ e } \omega(y_0) \in Z\}$$

$$\text{AFP22} = \left\{ (x_0, y_0); \alpha g(x_0) \neq 0, \beta h(x_0) \neq 0, y_0 \neq 0, \omega(y_0) \in Z \text{ e } \frac{h(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} \right\}$$

Proposição 4.2.1. Os pontos fixos assimétricos dos tipos AFP11 e AFP21 têm determinante jacobiano igual a um, enquanto que, os pontos fixos assimétricos dos tipos AFP12 e AFP22 têm determinante jacobiano diferente de um.

Prova:

Basta observar que o determinante jacobiano de $T_{\alpha, \beta}$ é dado por

$$\mathfrak{J}(x_0, y_0) = \frac{1 + \beta y_0 h(x_0)}{1 - \beta y_0 h(x_0)}$$

e fazer as respectivas substituições.

De agora em diante nos referiremos ao determinante jacobiano de $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) por determinante de (x_0, y_0) .

4.3 Pontos fixos assimétricos com determinante igual a um

Proposição 4.3.1. Seja (x_0, y_0) um ponto fixo assimétrico de qualquer um dos tipos AFP11 ou AFP21. Então a matriz jacobiana de $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) é dada por:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} x_1(x_0, y_0) = 1 & \frac{\partial}{\partial y} x_1(x_0, y_0) = \omega'(y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0) & \frac{\partial}{\partial y} y_1(x_0, y_0) = 1 + (\alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0)) \omega'(y_0) \end{array} \right)$$

Proposição 4.3.2 Seja (x_0, y_0) um ponto fixo assimétrico de qualquer um dos tipos AFP11 ou AFP21. Suponhamos que $T_{\alpha, \beta}$ satisfaça a condição genérica em (x_0, y_0) dada por: $g'(x_0) \neq 0$, $h'(x_0) \neq 0$ e $\omega'(y_0) \neq 0$. Então (x_0, y_0) é:

i) Uma sela se

$$\beta < \frac{-4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(y_0)} - \frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha \text{ ou } \beta > -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha$$

ii) Um ponto fixo elítico se

$$\frac{-4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(y_0)} - \frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha < \beta < -\frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha$$

Prova:

Consequência imediata da Prop. 2.4.5.

Corolário 4.3.3. Seja (x_0, y_0) como na Prop. 4.3.2, então o diagrama de bifurcação de (x_0, y_0) é o dado pela FIG. 4.1 abaixo, onde r_1 e r_2 são retas no espaço $\alpha\beta$ dadas por:

$$r_1: \beta = \frac{-g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha$$

$$r_2: \beta = \frac{-4}{y_0^2 h'(x_0) \omega'(y_0)} - \frac{g'(x_0)}{y_0^2 h'(x_0)} \alpha$$

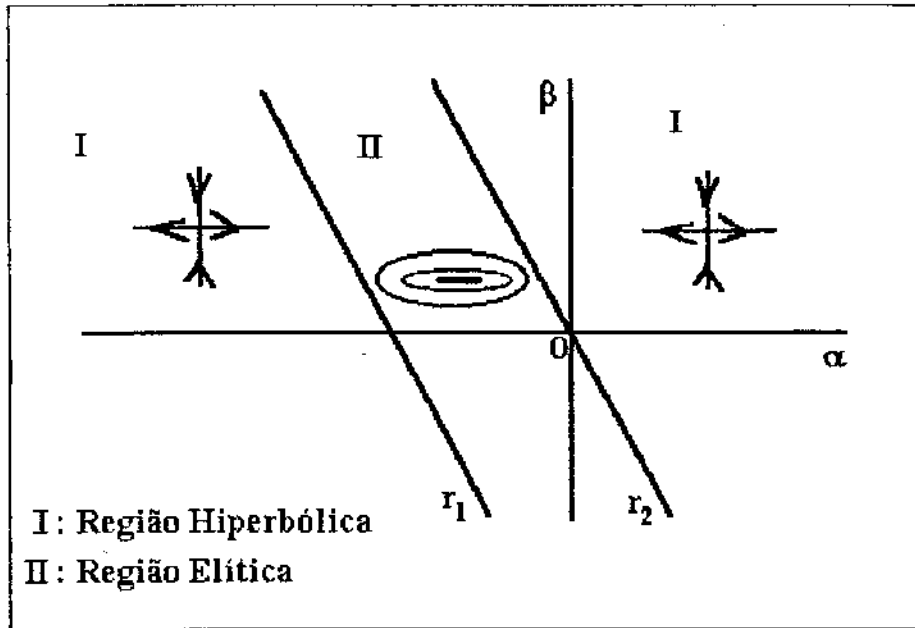


FIG. 4.1

Proposição 4.3.4. Sejam (x_0, y_0) um ponto fixo assimétrico dos tipos AFP11 ou AFP21 e (α_1, β_1) valores dos parâmetros sobre a reta r_1 do diagrama de bifurcação FIG. 4.1. Então, (α_1, β_1) é um valor de bifurcação BT para $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

Calculando a matriz jacobiana de $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) , obtemos

$$DT_{\alpha_1, \beta_1}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(y_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ a qual é semelhante a } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 4.3.5. Sejam (x_0, y_0) como na Prop. anterior e (α_2, β_2) valores dos parâmetros sobre a reta r_2 do diagrama de bifurcação da FIG. 4.1. Então (α_2, β_2) é um valor de bifurcação BT para $T_{\alpha, \beta}^2 = T_{\alpha, \beta} \circ T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

$$DT_{\alpha, \beta}^2(x_0, y_0) = DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0) \circ DT_{\alpha, \beta}(x_0, y_0)$$

onde $DT_{\alpha_2, \beta_2}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & \omega'(y_0) \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, a qual é semelhante a $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Logo, $(DT_{\alpha_2, \beta_2}(x_0, y_0))^2$ é semelhante a $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Concluimos portanto que, a dinâmica local de $T_{\alpha, \beta}$ na vizinhança de um ponto fixo assimétrico com determinante um, é semelhante à dinâmica local em torno dos pontos fixos simétricos estudados no Cap. anterior, no sentido de terem diagramas de bifurcação semelhantes. Assim, podemos aplicar os métodos desenvolvidos no Cap. anterior, pra determinar a dinâmica local de $T_{\alpha, \beta}$ em torno de um tal ponto fixo.

4.4 Pontos fixos assimétricos com determinante diferente de um

Estudaremos agora as bifurcações locais de $T_{\alpha, \beta}$ que ocorrem na vizinhança de um ponto fixo assimétrico (x_0, y_0) dos tipos AFP12 ou AFP22. Como as definições de AFP12 e AFP22 são idênticas, designaremos um tal ponto fixo apenas por AFP, isto é,

$$\text{AFP} = \left\{ (x_0, y_0); \alpha g(x_0) \neq 0, \beta h(x_0) \neq 0, y_0 \neq 0, \omega(y_0) \in Z e \frac{h(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} \right\}$$

A definição de ponto fixo AFP, força-nos a estudar a função

$$z(x) = \frac{h(x)}{g(x)},$$

e suas interseções com as retas horizontais

$$-\frac{\alpha}{\beta} y_0^2, \text{ para cada } y_0 \text{ fixado, tal que } \omega(y_0) \in Z.$$

Tal análise é consistente, já que, a condição $\omega(y_0) \in Z$, só é satisfeita para um conjunto discreto de y_0 .

Proposição 4.4.1 (Bifurcação Sela-nó). Sejam $y_0 \neq 0$ fixado tal que $\omega(y_0) \in Z$, x_m um ponto de máximo local de $z(x) = h(x)/g(x)$ tal que $g(x_m) \neq 0$ e $h(x_m) \neq 0$, (α_0, β_0) valores dos parâmetros para os quais

$$z(x_m) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} y_0^{-2}.$$

Suponhamos, além disso que, $D^2T_{\alpha_0, \beta_0}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então para $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$ ocorre uma bifurcação sela-nó para $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

Nas hipóteses da Prop. 4.4.1, temos a FIG. 4.2 abaixo

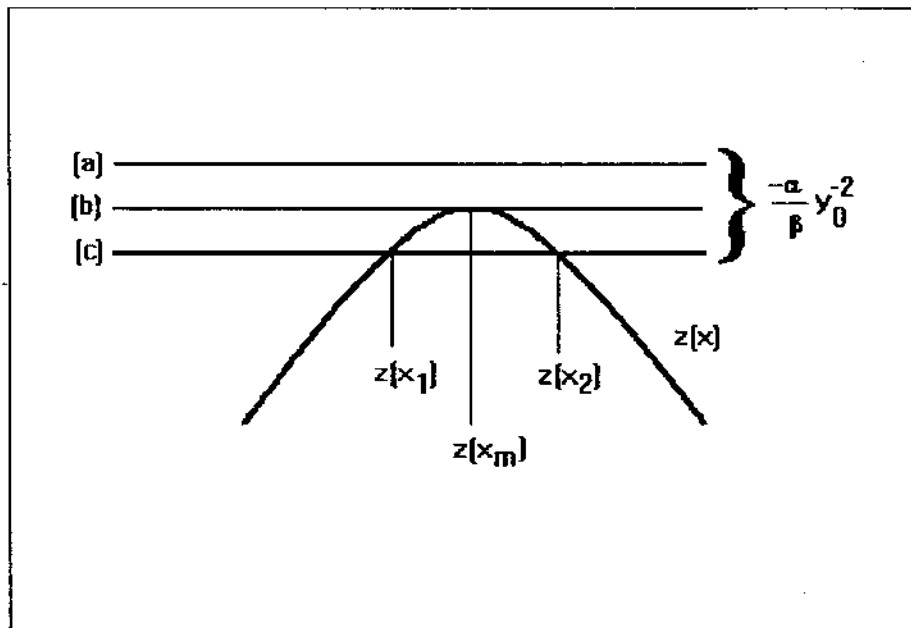


FIG. 4.2

onde destacam-se três situações:

$$(a) -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} > z(x_m);$$

$$(b) -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} = z(x_m); \text{ neste caso } (\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0);$$

$$(c) -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} < z(x_m);$$

Em (a), a condição de ponto fixo AFP não é satisfeita, e portanto $T_{\alpha, \beta}$ não possui ponto fixo. Em (b), existe um único ponto fixo AFP (x_m, y_0) . Em (c), existem dois pontos fixos AFP (x_1, y_0) e (x_2, y_0) , com $x_1 < x_m$ e $x_2 > x_m$. Devemos portanto estabelecer a estabilidade dos pontos fixos (x_1, y_0) e (x_2, y_0) .

Usando a Prop.2.4.6, e o fato que podemos escrever para $(x_0, y_0) \in \text{AFP}$

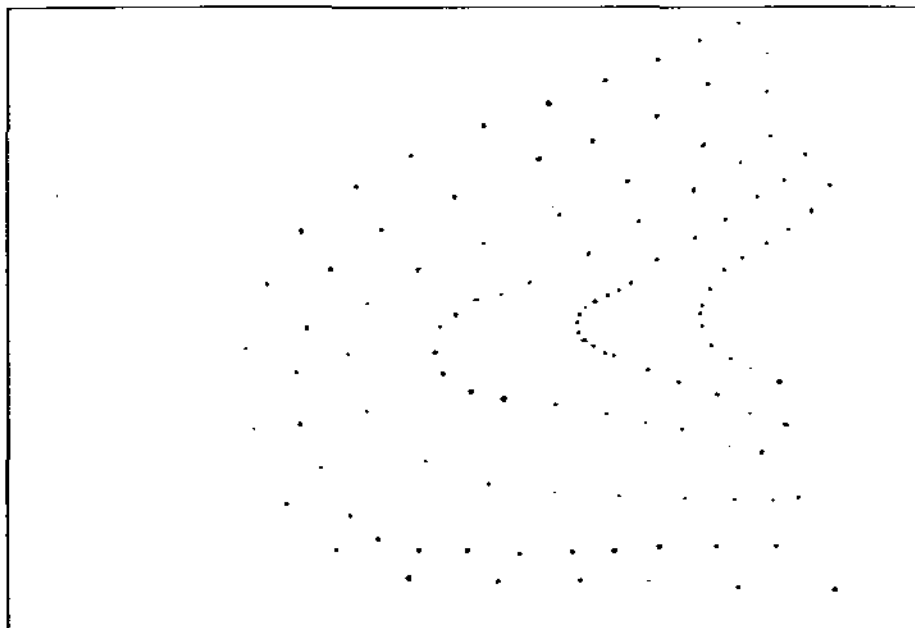
$$\frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) \omega'(y_0) = \omega'(y_0) \left(\frac{\beta y_0^2 g(x_0)}{1 - \beta y_0 h(x_0)} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{g(x)} \right)_{x=x_0}$$

vemos que a expressão acima, muda de sinal (genericamente) para $x = x_m$. Portanto, na situação (c), lembrando que o determinante jacobiano de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) é denotado por \mathfrak{J} , temos para (x_1, y_0) e (x_2, y_0) :

i) Um nó atrator e uma sela com $\mathfrak{J} < 1$, se $\beta y_0 h(x_0) < 0$.

ii) Um nó repulsor e uma sela com $\mathfrak{J} > 1$, se $\beta y_0 h(x_0) > 0$.

Quando (α, β) em (c) tende para (α_0, β_0) na situação (b), o par atrator-sela (repulsor-sela) colide em (x_0, y_0) para $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$, $DT_{\alpha_0, \beta_0}(x_0, y_0)$ possui um único autovalor igual a um, somando-se a isto a condição $D^2T_{\alpha_0, \beta_0}(x_0, y_0) \neq 0$, então a bifurcação sela-nó toma lugar.



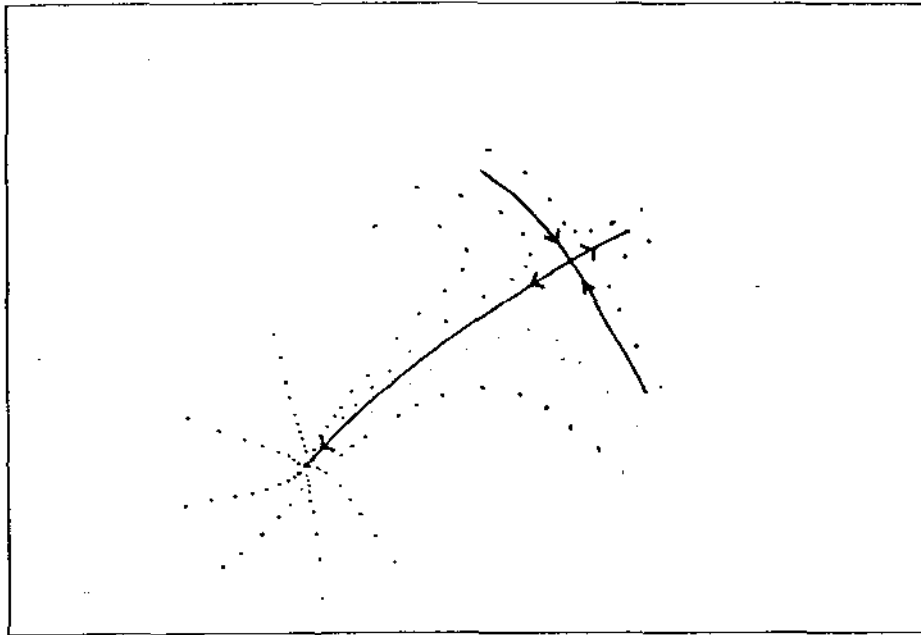


FIG. 4.3

A FIG. 4.3 acima ilustra uma bifurcação sela-nó para a aplicação

$$T_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} x_1 = x + y \pmod{1} \\ y_1 = \frac{y + \alpha \cos 2\pi x_1}{1 - \beta y \cos 4\pi x_1} \end{cases}$$

onde na parte de cima não há pontos fixos. Na parte de baixo, imediatamente após um valor de bifurcação satisfazendo a Prop. anterior, temos uma sela e um atrator.

Para o que se segue, convém denotar por FP1 os seguintes pontos fixos $FP1 = \{(x_0, y_0); \alpha g(x_0) = \beta h(x_0) = 0 \text{ e } \omega(y_0) \in Z\}$ os quais, como já vimos, podem ser pontos fixos simétricos ou assimétricos, dependendo das funções g e h . Além disso, tais pontos fixos, são fixados por todos os elementos da família, isto é, $T_{\alpha,\beta}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, para todo (α, β) . E o determinante jacobiano de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) vale sempre um.

Proposição 4.4.2 (Bifurcação Transcrítica). Sejam $y_0 \neq 0$ fixado tal que $\omega(y_0) \in Z$, (x_0, y_0) um ponto fixo tipo FP1, o qual não é máximo nem mínimo de $z(x) = h(x)/g(x)$ e (α_0, β_0) valores dos parâmetros satisfazendo

$$z(x_0) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} y_0^{-2}.$$

Então, se $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$ ocorre uma bifurcação transcritical para $T_{\alpha, \beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

Nas hipóteses da Prop. temos a figura 4.3 abaixo:

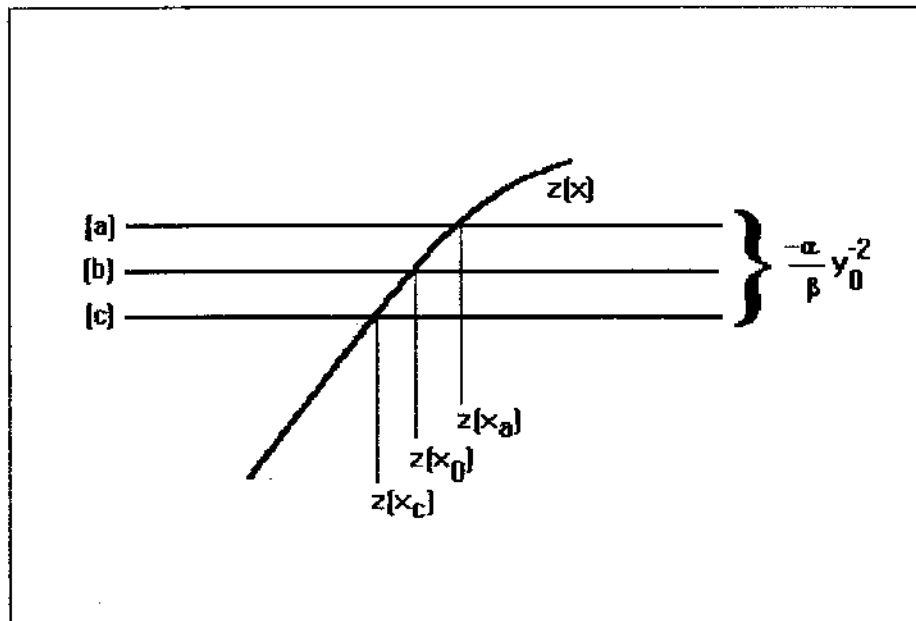


FIG. 4.3

$$z(x) = \frac{h(x)}{g(x)}, \text{ com } h(x_0) = g(x_0) = 0;$$

$$\text{logo, } z(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Na FIG. 4.3 destacam-se três situações:

$$a) -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} > \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)};$$

$$b) -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}; \text{ neste caso } (\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0);$$

$$c) -\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} < \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Na situação (a) temos um ponto fixo AFP (x_a, y_0) , com $x_a > x_0$ e o ponto fixo FP1 (x_0, y_0) . Na situação (b), temos apenas o ponto fixo FP1 (x_0, y_0) . E na situação (c), temos um ponto fixo AFP (x_c, y_0) com $x_c < x_0$. Determinemos portanto, a estabilidade dos pontos fixos nas situações (a), (b) e (c). Como já observamos no capítulo 2, a estabilidade de um ponto fixo FP1 (x_0, y_0) é dada por:

$$i) \text{ Sela, se } \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) > 0 \text{ ou } \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < -4;$$

$$ii) \text{ Elítico, se } -4 < \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < 0.$$

Donde a matriz jacobiana de $T_{\alpha, \beta}$ no ponto fixo FP1 (x_0, y_0) é:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} x_1(x_0, y_0) = 1 & \frac{\partial}{\partial y} x_1(x_0, y_0) = \omega'(y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0) & \frac{\partial}{\partial y} y_1(x_0, y_0) = 1 + \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) \omega'(y_0) \end{array} \right)$$

Assim,

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \omega'(y_0) (\alpha g'(x_0) + \beta y_0^2 h'(x_0));$$

Podemos escrever

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = -\omega'(y_0) \beta y_0^2 g'(x_0) + \left(-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} - \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)} \right) \quad (4.2)$$

É claro que, no valor de bifurcação (α_0, β_0) por (4.1), a expressão acima (4.2), muda de sinal (genericamente). Logo, o ponto fixo FP1 muda de sela para ponto elítico (ou vice-versa), por uma bifurcação BT. Enquanto que, para o ponto fixo AFP (x_a, y_0) ou (x_c, y_0) temos que

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x, y_0) = \frac{\omega'(y_0) \beta y_0^2 g'(x)}{1 - \beta y_0 h(x_0)} + \left(-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} - \frac{h'(x)}{g'(x)} \right) \quad (4.3)$$

sendo $x = x_a$ ou $x = x_c$.

Agora, para (α, β) próximo de (α_0, β_0) , podemos escrever (4.3) como

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = \omega'(y_0) \beta y_0^2 g'(x_0) + \left(-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} - \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)} \right) \quad (4.4)$$

A expressão anterior (4.4) é obtida por expandir $z(x)$ em torno de x_0 e substituindo em em (4.3). Observemos que a expressão (4.4) é (4.2) com o sinal invertido. Além disso, o determinante jacobiano de $(x, y_0) \in \text{AFP}$, onde $x = x_a$ ou $x = x_c$ vale:

$$\mathfrak{J}(x, y_0) = \frac{1 + \beta y_0 h(x)}{1 - \beta y_0 h(x)}; \quad \text{o qual expandido em torno de } x_0 \text{ produz}$$

$$\mathfrak{J}(x - x_0, y_0) = 1 + 2\beta y_0 h'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

\mathfrak{J} portanto muda do valor $\mathfrak{J} < 1$ para $\mathfrak{J} > 1$ no valor de bifurcação. Portanto ao passarmos da situação (a), para a situação (c) na FIG. 4.3, temos:

- i) Um ponto elítico e uma sela com $\mathfrak{J} > 1$ transformam-se numa sela com $\mathfrak{J} = 1$ e um atrator, ou vice-versa.
- ii) Um ponto elítico e uma sela com $\mathfrak{J} < 1$ transformam-se numa sela com $\mathfrak{J} = 1$ e um repulsor, ou vice-versa.

Portanto na situação (b), a bifurcação transcritical toma lugar.

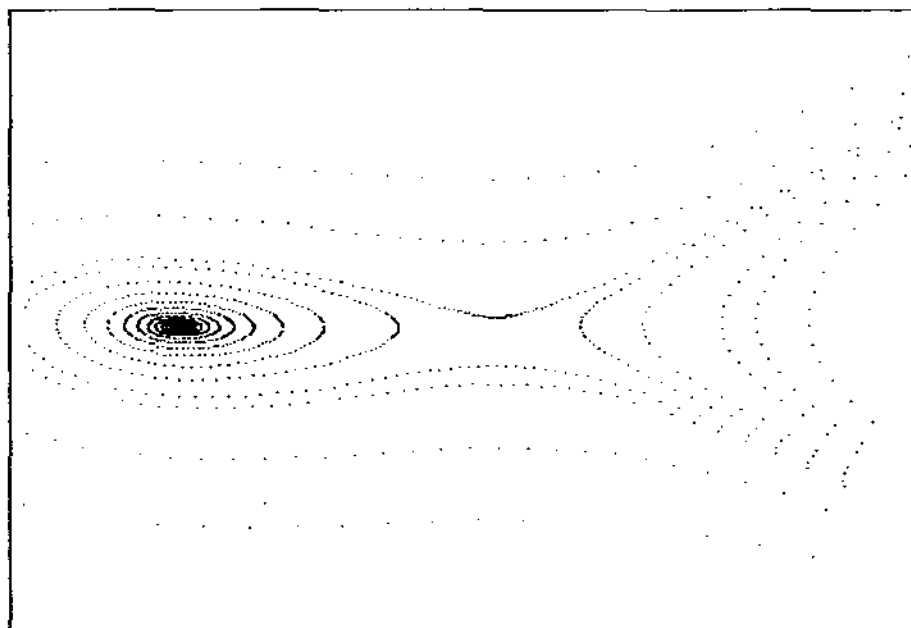
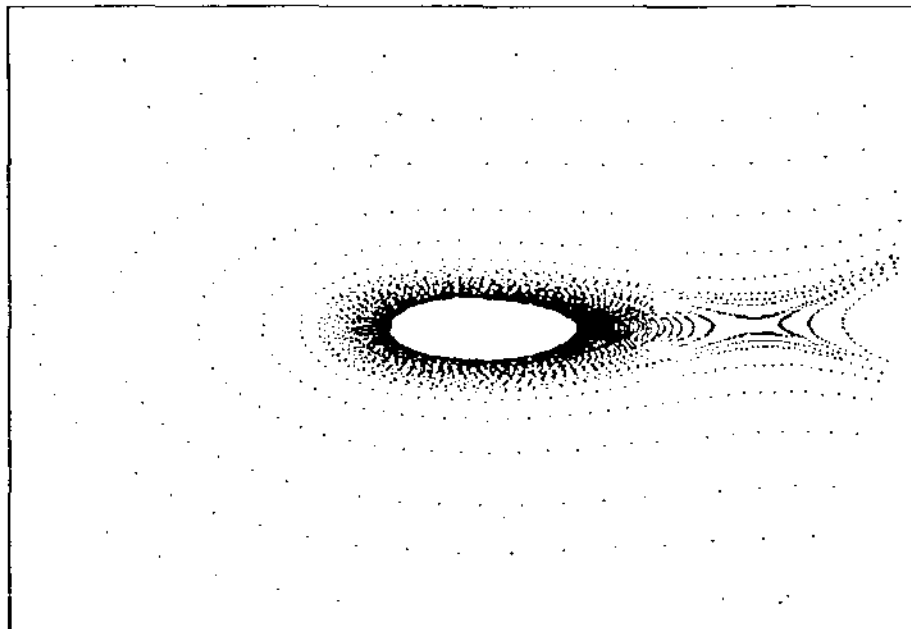


FIG. 4.4

A FIG. 4.4 ilustra uma bifurcação transcritical para a aplicação:

$$T_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} x_1 = x + y \pmod{1} \\ y_1 = \frac{y + \alpha \sin 2\pi x_1 - 1/2}{1 - \beta y \sin 2\pi(x_1 - 1/2)} \end{cases}$$

onde na parte superior, temos um ponto fixo elítico e uma sela com $\mathfrak{I} > 1$. Em seguida, na parte inferior, após uma bifurcação transcítica temos uma sela com $\mathfrak{I} = 1$ e um atrator. Nesse caso, o ponto fixo FP1 é: $x_0 = 1/2$ e $y_0 = 1$.

Uma situação diferente das duas anteriores, é quando temos um ponto fixo simétrico $(x_0, y_0) \in \text{FP1}$. Então numa situação estável (vide diagrama de bifurcação FIG. 3.1 e 3.2), (x_0, y_0) é uma sela ou um ponto elítico, digamos que seja um ponto elítico. Então quando os parâmetros são deixados variar, pode ocorrer que (x_0, y_0) transforme-se numa sela através de uma bifurcação BT, e imediatamente também ocorra o nascimento de um par atrator-repulsor. Tal bifurcação é chamada uma *bifurcação de Rimmer* (veja Rimmer [Ri1]).

Proposição 4.4.3 (Bifurcação de Rimmer) Sejam $y_0 \neq 0$ fixado tal que $\omega(y_0) \in \mathbb{Z}$, (x_0, y_0) um ponto fixo simétrico do tipo FP1 tal que x_0 é um ponto de máximo ou mínimo da função $z(x) = h(x)/g(x)$ e (α_0, β_0) valores dos parâmetros tais que

$$-\frac{\alpha_0}{\beta_0} y_0^{-2} = z(x_0).$$

Então, para $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$, ocorre uma bifurcação de Rimmer de $T_{\alpha,\beta}$ em (x_0, y_0) .

Prova:

Com as hipóteses da Prop. temos a FIG. 4.5 abaixo

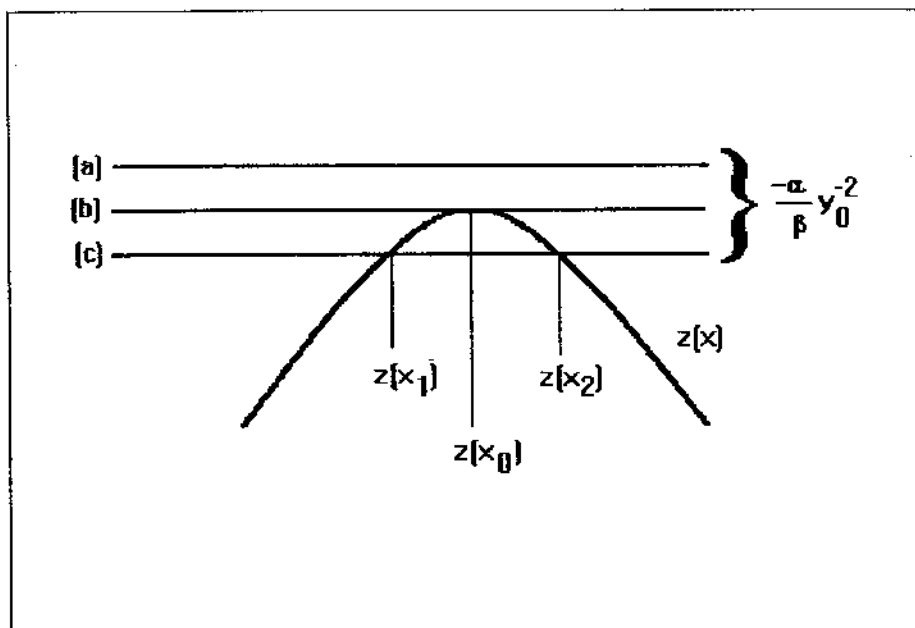


FIG. 4.5

Temos que, se $(x_0, y_0) \in \text{FP1}$, então $g(x_0) = h(x_0) = 0$, logo

$$z(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Três situações na FIG. 4.5, merecem destaque:

- a) $-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} > \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}$;
b) $-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}$; neste caso $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$;
c) $-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} < \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Na situação (a) a condição de ponto fixo AFP não é satisfeita, portanto temos um único ponto fixo, a saber o ponto fixo simétrico FP1 (x_0, y_0) . Na situação (b) ainda temos o único ponto fixo (x_0, y_0) . Na situação (c) temos o ponto

fixo FP1 (x_0, y_0) mais dois pontos fixos AFP recém nascidos, a saber (x_1, y_0) e (x_2, y_0) . Determinemos a estabilidade dos pontos fixos destas configurações.

Como já notamos na situação anterior, a estabilidade do ponto fixo simétrico FP1 (x_0, y_0) é regida por:

i) Sela, se $\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) > 0$ ou $\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < -4$;

ii) Elítico, se $-4 < \omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) < 0$.

Temos que

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = -\omega'(y_0) \beta y_0^2 g'(x_0) + \left(-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} - \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)} \right) \quad (4.5)$$

Enquanto que, para o ponto fixo AFP (x, y_0) com $x = x_1$ ou $x = x_2$, temos

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x, y_0) = \frac{\omega'(y_0) \beta y_0^2 g'(x)}{1 - \beta y_0 h(x_0)} + \left(-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} - \frac{h'(x)}{g'(x)} \right) \quad (4.6)$$

com $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Para (α, β) próximo de (α_0, β_0) podemos escrever (4.5) como

$$\omega'(y_0) \frac{\partial}{\partial x} y_1(x_0, y_0) = 2\omega'(y_0) \beta y_0^2 g'(x_0) + \left(-\frac{\alpha}{\beta} y_0^{-2} - \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)} \right) \quad (4.7)$$

Que é a mesma expressão (4.5) multiplicada por -2.

A expressão (4.7) é obtida por expandir $h(x)/g(x)$ em torno de x_0 até termos de ordem dois, e substituindo em (4.6). Podemos também usar o jacobiano expandido da Prop. anterior, isto é,

$$\mathfrak{J}(x - x_0, y_0) = 1 + 2\beta y_0 h'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

Em $x = x_0$ \mathfrak{J} muda de valor, $\mathfrak{J} < 1$ para $\mathfrak{J} > 1$. Assim, levando em conta as observações anteriores, temos da situação (a) para a situação (c):

i) Um ponto elítico transforma-se numa sela com $\mathfrak{J} = 1$, dando origem ao nascimento de um par atrator-repulsor.

ii) Uma sela com $\mathfrak{J} = 1$ transforma-se num ponto fixo elítico, dando origem ao nascimento de duas selas com respectivamente, $\mathfrak{J} < 1$ e $\mathfrak{J} > 1$.

Na situação (b), a bifurcação de Rimmer toma lugar.

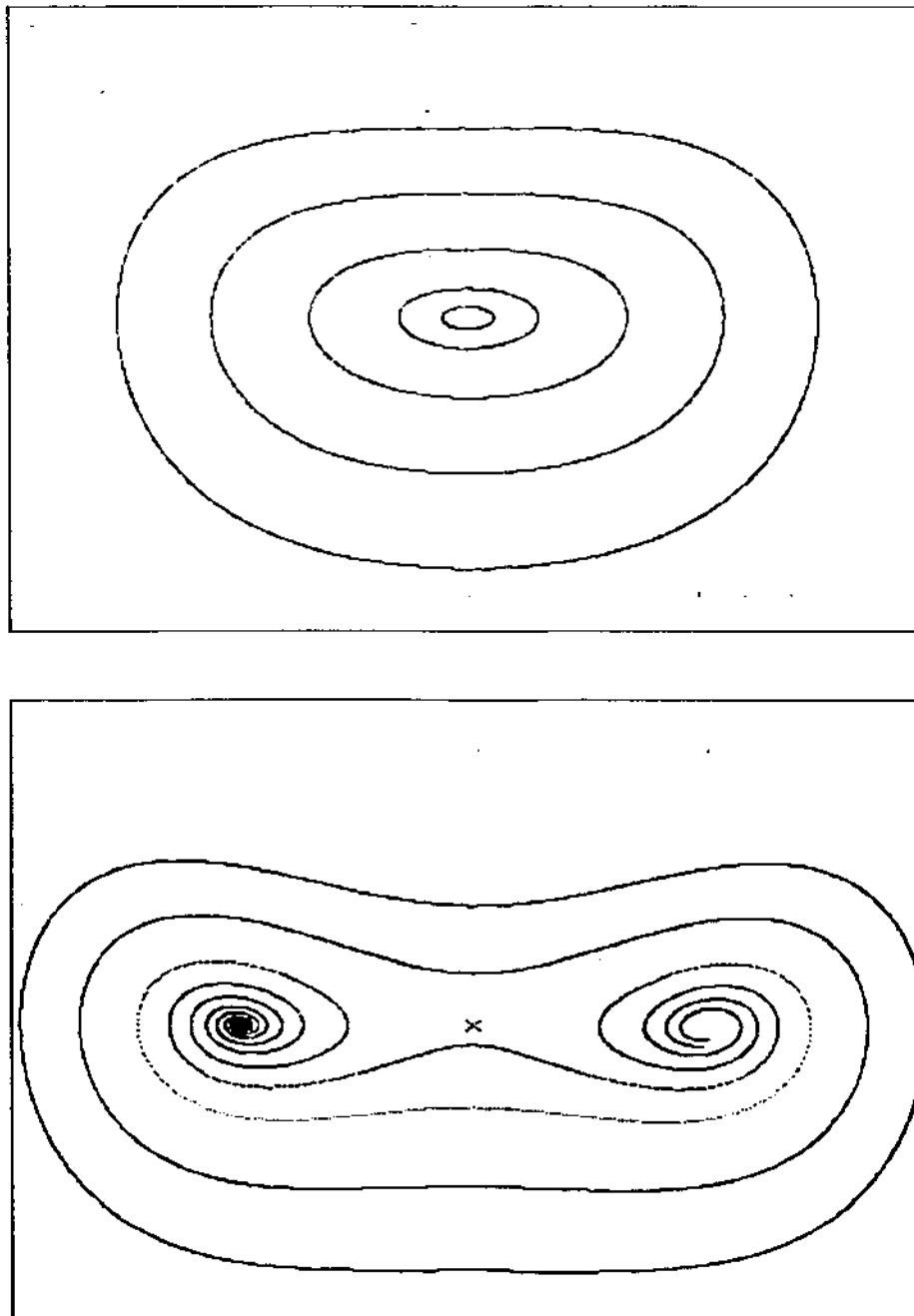


FIG. 4.6

A FIG. 4.6 anterior, ilustra uma bifurcação de Rimmer para a aplicação:

$$T_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} x_1 = x + y \pmod{1} \\ y_1 = \frac{y + \alpha \cos 2\pi x_1}{1 - \beta y \cos 4\pi x_1} \end{cases}$$

onde na parte superior temos o ponto fixo elítico FP1 $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$ e nenhum ponto fixo AFP. Na parte inferior (x_0, y_0) transformou-se numa sela com $\mathfrak{J} = 1$ e ao mesmo tempo nasceram um par atrator-repulsor.

Bifurcações de Rimmer podem ocorrer em aplicações não-reversíveis, bastando exigir apenas reversibilidade local (veja Rimmer [Ri1]).

Referências

- [Ar1] Arecchi, F. T., 1987, The physics of laser chaos, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 2, 13-24.
- [Arn1] Arnold, V. I., 1983 , Geometric Methods in Theory of O. D. E. Springer-Verlag
- [Bo1] Bogdanov, R. I., 1981, Versal deformations of a singularity of a vector field on the plane in case of zero eigenvalues, Selec. Math. Sov. 1, 4.
- [Br1] Broer, H. W., R. Roussarie and C. Simó, 1990, On the Bogdanov-Takens bifurcations for planar diffeomorphisms, (preprint)
- [Ch1] Chirikov, B. V., 1979, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Reports, 52, 265
- [De1] Devaney, R. L., 1976, Reversible diffeomorfisms and flows, Trans. Am. Math. Soc., 218
- [De2] Devaney, R. L., 1984, Homoclinic bifurcations and the area-conserving Hénon mapping, J. Diff. Eq., 51, 254-266
- [Du1] Dumortier, F., P. Rodrigues and R. Roussarie, Germs of Diffeomorfisms of the Plane, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag
- [Fi1] Finn, J. M., 1974, PhD Thesis, Univ. of Maryland
- [Gu1] Guckenheimer, J. and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag
- [Mo1] Montgomery, D. and L. Zippin, 1955, Topological Transformation Groups (Wiley, New York)
- [Pa1] Palis, J. e W. de Melo ,1977, Introdução aos sistemas dinâmicos, Proj. Euclides, IMPA
- [Po1] Post, T., H. W. Capel, G. R. W. Quispel and J. P. van der Weele, 1990, Bifurcations in two-dimensional reversible maps, Phys. A, 164, 625

- [Ri1] Rimmer, R. J., 1983, *Memoirs Am. Math. Soc.*, 272, 1
- [Ro1] Roberts, J. A. G. and G. R. W. Quispel, 1992, *Chaos and time-reversal symmetry*, *Phys. Reports*, 216, 2 & 3
- [Se1] Sevryuk, M. B., 1986, *Reversible Systems*, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1211
- [Ta1] Takens, F., 1974, *Forced oscillations and bifurcations*, *Comm. Math. Inst. University of Utrecht*, 3
- [Ta2] Takens, F., 1973, *Singularities of vector fields*, *I. H. E. S.*, 43
- [Te1] Teixeira, M. A., 1990, *Stability conditions for discontinuous vector fields*, *J. Diff. Equations*, 88, 15-29