

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

**TESE DE DOUTORADO**

**Propriedades de Positividade e  
Estabilidade de Ondas Viajantes  
Periódicas**

por

**Fábio Matheus Amorin Natali** †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

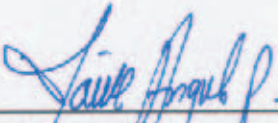
**Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava**

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CNPq.

## Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Fábio Matheus Amorin Natali** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de fevereiro de 2007.



---

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava  
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (UNICAMP).

Prof. Dr. José Luiz Boldrini (UNICAMP).

Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves (UNICAMP).

Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala  
(LNCC/UFRJ).

Prof. Dr. José Felipe Linares Ramirez (IMPA).

Tese, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

*Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094*

Natali, Fábio Matheus Amorin

N191p Propriedades de positividade e estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas/Fábio Matheus Amorin Natali -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador: Jaime Angulo Pava

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais não-lineares. 2. Ondas não-lineares. 3. Funções especiais. I. Pava, Jaime Angulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Positivity properties and stability of periodic travelling wave solutions

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Non-linear differential equations. 2. Non-linear waves. 3. Special functions.

Área de concentração: Análise/Equações diferenciais parciais

Titulação: Doutorado em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. José Felipe Linares Ramirez (IMPA)  
Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala (LNCC/UFRJ)  
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Aloísio Freiria Neves (IMECC-UNICAMP)

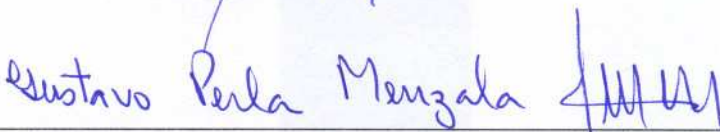
Data da defesa: 14/02/2007


Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de fevereiro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. (a). Dr (a). JAIME ANGULO PAVA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. (a). Dr (a). GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. (a). Dr (a). JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

  
\_\_\_\_\_  
Prof. (a) Dr. (a) JOSÉ LUIZ BOLDRINI

---

# AGRADECIMENTO

Existe uma pessoa muito importante na minha vida o qual eu amo muito e que merece páginas e mais páginas de homenagens, pois ela sempre me ajudou quando eu precisei, estava ao meu lado me dando forças nas horas de turbulência e além disso ela deu sua vida toda para que eu pudesse realizar o meu sonho. O seu amor fez com que ela deixasse de seguir carreira na matemática para que eu pudesse fazer o meu doutorado. Por isso, eu sempre vou repetir para todos que me perguntarem: esta tese quem fez não foi quem vos escreve, pois estudar matemática e desenvolver alguma coisa que contribui para a ciência não causa muito trabalho posto que com esforço e persistência o objetivo de seu desejo neste âmbito é alcançado, mas deixar de realizar sonhos para que outra pessoa possa realizar os seus é uma prova de amor sem limites o qual irá ser quase impossível eu tentar retribuir à altura.

Dedico toda esta tese e a minha vida à minha esposa Katia.

---

# AGRADECIMENTOS

À Deus pelas várias vezes que segurou minha mão quando eu mais precisei e principalmente pela força que me proporcionou para que este trabalho fosse realizado.

São muitas as pessoas que contribuíram para que o meu sonho particular em ser um doutor fosse realizado, jamais poderei deixar de citar meus pais Marcione e Conceição e meus irmãos Lucas e Graziella pela infinita ajuda que me proporcionaram, principalmente meu pai que num dos períodos mais difíceis da minha vida me estendeu a mão e me auxiliou muito, minha filha Rafaela que sempre com seu carinho me dava cada vez mais forças para vencer todos os obstáculos que iam surgindo na minha frente. Enfim, são pessoas que jamais eu poderia deixar de citar e de homenagear.

Ao professor Jaime Angulo Pava pela paciência, dedicação e principalmente pelo voto de confiança que me proporcionou. Espero que esta tese de doutorado não seja apenas um fechamento de um ciclo natural e sim o começo de um longo período de pesquisa e amizade.

Ao professor José Felipe Linares Ramirez, pela amizade e por ter ministrado o curso "*Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*" no verão de 2005 no IMPA, curso este que foi o meu primeiro passo nas equações de evolução do tipo dispersiva. Gostaria também de agradecer ao IMPA pelo apoio estrutural e didático, estes que contribuíram e muito para a realização desta tese.

À minha orientadora de mestrado, professora Valéria Neves Domingos Cavalcanti por tudo que proporcionou e ainda me proporciona. Tenho orgulho de chamá-la de "minha mãe", não só pelo simples fato da sua orientação mas sim pelo companherismo e simplicidade.

À todos os professores e funcionários do IMECC/UNICAMP que de forma direta ou indireta contribuíram para esta tese. Em especial, gostaria de agradecer ao professor José Luiz Boldrini pelas valiosas críticas e sugestões que contribuíram para um melhor esclarecimento do texto da minha tese e a professora Helena Judith Nussenzeig Lopes pelos cursos de Equações Diferenciais Parciais II e Análise Harmônica, cursos que serviram-me de base à minha pesquisa. Gostaria de agradecer em especial aos funcionários da pós graduação Cidinha, Tânia e Ednaldo pela atenção e simpatia.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá pela formação sólida que me proporcionaram no âmbito matemático. Em especial gostaria de citar os professores Marcelo Moreira Cavalcanti e Juan Amadeo Soriano Palomino.

Aos meus amigos do IMECC/UNICAMP e de Campinas, Ademir, Edson, Augusto, Sérgio e sua esposa Maura, Uberlândio, Evandro, Marcelo Furtado e sua esposa Aline, Sr. Benedito e sua esposa Àurea, Mineiro, Valdiane, Josiane, Maristela, Simão, Anderson, Luis Roberto, Lino, Wellington e Mazilio.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante o Doutorado.

---

# ABSTRACT

In this thesis we establish sufficient conditions to obtain the stability of periodic travelling waves solutions for equations of KdV-type

$$u_t + u^p u_x - (Mu)_x = 0, \quad p \in \mathbb{N},$$

with  $M$  being a general pseudo-differential operator, but this operator has special characteristics. Our approach use the theory of totally positive operators, the Poisson summation theorem and the theory of Jacobi elliptic functions. In particular we obtain the stability of a family of periodic travelling waves solutions for the Benjamin-Ono equation and critical Korteweg-de Vries equation. Our techniques give a new way to obtain the existence and stability of cnoidal and dnoidal waves solutions associated to the Korteweg-de Vries and modified Korteweg-de Vries equations respectively. The theory has prospects for the study of periodic travelling waves solutions of other partial differential equations, for instance, the results of stability and instability of periodic standing wave solutions for the critical Schrödinger equation.



---

# RESUMO

Nesta tese estabelecemos condições suficientes para obter a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para equações de tipo KdV

$$u_t + u^p u_x - (Mu)_x = 0, \quad p \in \mathbb{N},$$

com  $M$  sendo um operador pseudo-diferencial geral, porém com características especiais. Nossa abordagem é a de usar a teoria dos operadores totalmente positivos, o Teorema do Somatório de Poisson e a teoria das funções Elípticas de Jacobi. Em particular nós obtemos a estabilidade de uma família de soluções ondas viajantes periódicas para a equação de Benjamin-Ono e a equação KdV crítica. Nossas técnicas fornecem uma nova maneira para obter a existência e a estabilidade das ondas cnoidal e dnoidal associadas as equações de Korteweg-de Vries e modificada Korteweg-de Vries respectivamente. A teoria propõe o estudo de soluções ondas viajantes periódicas para outras equações diferenciais parciais, por exemplo, os resultados de estabilidade e instabilidade de soluções do tipo *standing waves* periódicas para a equação não linear de Schrödinger crítica.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Notações e Resultados Preliminares</b>	<b>25</b>
2.1	Séries de Fourier e Distribuições Periódicas - Teoria Básica . . . . .	25
2.2	Resultados de Boa Colocação . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Espaços Funcionais Básicos e Propriedades de Positividade</b>	<b>33</b>
3.1	Espaços Funcionais Básicos. . . . .	34
3.2	Propriedades de Positividade. . . . .	44
<b>4</b>	<b>Estabilidade de Soluções Ondas Viajantes Periódicas</b>	<b>57</b>
4.1	Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação BO . . . . .	58
4.1.1	Estabilidade de Soluções Constantes para a BO . . . . .	62
4.2	Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação mKdV . . . . .	69
4.2.1	Soluções Ondas Viajantes Periódicas e Existência de Curva Suave . . . . .	69
4.2.2	Prova da Estabilidade . . . . .	75
4.3	Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação KdV . . . . .	77
4.3.1	Estabilidade de Soluções Constantes . . . . .	84
4.4	Propriedades de Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para 4-KdV e CNLS . . . . .	85
4.4.1	Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação 4-KdV . . . . .	85

---

4.4.2	Estabilidade de Soluções Constantes . . . . .	99
4.4.3	Estabilidade e Instabilidade de Soluções Ondas Viajantes Periódicas da Equação CNLS . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Conclusões e Estudos Futuros</b>	<b>103</b>
<b>6</b>	<b>Apêndice</b>	<b>107</b>
6.1	Funções Elípticas de Jacobi . . . . .	107
6.2	Algumas Funções Especiais . . . . .	109
6.2.1	As Funções Téta . . . . .	109
6.2.2	A Função Lambda de Heuman $\Lambda_0(\varphi, k)$ . . . . .	111
6.2.3	A Função Zeta de Jacobi . . . . .	111
6.3	Plano de Fase e Estabilidade . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Comentários</b>	<b>115</b>

---

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

Uma das principais propriedades das equações não lineares do tipo dispersiva é que estas possuem ondas regulares chamadas ondas viajantes. Estas soluções refletem um balanço entre os efeitos da não linearidade e da frequência da dispersão. Como elas dependem de condições de fronteira específicas na forma da onda, por exemplo no caso de ondas que determinam o movimento de ondas d'águas, estes estados de movimento de ondas podem surgir tanto nas ondas solitárias quanto nas ondas periódicas. O estudo destas ondas especiais é essencial para a explicação de muitos fenômenos de ondas observadas na prática, por exemplo, na propagação de ondas em um canal ou na propagação de ondas internas, ou em ondas de águas rasas na superfície oceânica (ver Benjamin [13]-[14], Osborne&Serio&Bergamasco&Cavaleri [48]). Então, questões sobre a estabilidade de ondas viajantes e respectivas existências como soluções exatas são muito importantes.

As ondas solitárias são em geral um cume simples, simétrico e localizadas, cujo perfil de funções hiperbólicas do tipo *sech* são bem conhecidas (ver Ono [47] e Benjamin [16] para a existência de ondas solitárias do tipo algébrico ou com um número finito de oscilações). O estudo da estabilidade não linear ou estabilidade na forma de ondas solitárias tem se desenvolvido, nos últimos anos, de uma forma muito satisfatória. As provas tem sido simplificadas e condições suficientes tem sido obtidas para assegurar a estabilidade para pequenas perturbações localizadas da onda. Estas condições tem mostrado ser efetivas em uma variedade de circunstâncias, veja por exemplo [3], [4], [5], [14], [17], [27], [28], [59] e [60].

A situação para as ondas periódicas é muito diferente. A estabilidade e a existência de fórmulas explícitas deste tipo de ondas tem recebido uma atenção relativamente pequena se compararmos com as ondas solitárias. Um primeiro estudo deste tipo de onda foi feito por Benjamin em [16] com respeito às soluções regulares chamadas *ondas cnoidal*, que foram encontradas inicialmente por Korteweg-de Vries em [36] para a conhecida equação de Korteweg-de Vries (KdV daqui em diante),

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

onde  $u = u(x, t)$  é uma função à valores reais de duas variáveis  $x, t \in \mathbb{R}$ . Benjamin adiantou uma aproximação para estabilidade de ondas do tipo cnoidal na forma

$$\varphi(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k \right),$$

mas não concebeu uma justificação detalhada desta asserção e muitos aspectos parecem não muito claros em sua prova. Recentemente, Angulo&Bona&Scialom em [10] deram uma teoria completa da estabilidade de ondas viajantes cnoidal para (1.1) (veja também [8]). A abordagem para obtenção deste resultado é o uso da teoria moderna de estabilidade concernida por Grillakis&Shatah&Strauss [27], mas adaptada para o caso periódico. Outras fórmulas explícitas de ondas viajantes periódicas baseadas nas funções elípticas de Jacobi do tipo *dnoidal*, junto com sua estabilidade, foi obtida recentemente por Angulo no caso focusing para a equação de Schrödinger e o sistema de Hirota-Satsuma (Angulo [7]-[9]). É de suma importância que em todos estes trabalhos foi necessário o uso de uma teoria espectral elaborada para o problema de autovalor periódico,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \Psi + [\rho - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x; k)] \Psi = 0 \\ \Psi(0) = \Psi(2K(k)), \quad \Psi'(0) = \Psi'(2K(k)), \end{cases} \quad (1.2)$$

com específicos valores de  $n \in \mathbb{N}$ . Em (1.2),  $\operatorname{sn}(\cdot; k)$  denota a função elíptica de Jacobi do tipo senoidal com módulo  $k \in (0, 1)$  e  $K$  representa a integral elíptica completa de primeiro tipo definida por,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Recordemos que a equação diferencial de segunda ordem em (1.2) é conhecida como *a forma de Jacobi da equação de Lamé*.

Na presente tese, nosso ponto será o estudo da existência e estabilidade de ondas viajantes periódicas para equações da forma,

$$u_t + u^p u_x - (Mu)_x = 0, \quad (1.3)$$

onde  $p \geq 1$  é um inteiro e  $M$  é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto de funções periódicas.  $M$  é definido como um operador multiplicador de Fourier por,

$$\widehat{Mg}(k) = \zeta(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

onde o símbolo  $\zeta$  de  $M$  é assumido ser uma função real, mensurável, localmente limitada, par e satisfazendo as condições

$$A_1|n|^{m_1} \leq |\zeta(n)| \leq A_2(1 + |n|)^{m_2} \quad (1.5)$$

para  $m_1 \leq m_2$ ,  $|n| \geq n_0$ ,  $\zeta(n) > b$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c > -b$  e  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . As soluções ondas viajantes periódicas para (1.3) terão a forma

$$u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

onde o perfil  $\varphi_c$  é uma função suave e periódica com um período fundamental *à priori*  $2L$ ,  $L > 0$ . Como a solução onda viajante periódica dependerá eventualmente da velocidade da onda  $c$ , denotemos  $\varphi = \varphi_c$ . Então, substituindo esta forma de  $u$  em (1.3) e integrando uma vez (com constante de integração considerada igual à zero em toda a nossa teoria para efeitos de existência de soluções periódicas positivas), obtemos que  $\varphi = \varphi_c$  é solução da equação

$$(M + c)\varphi - \frac{1}{p+1}\varphi^{p+1} = 0^1. \quad (1.6)$$

Consideremos *à priori* que exista uma solução onda viajante periódica e suave  $\varphi_c$  para a equação (1.6). Desta forma, considere o operador linear, fechado, ilimitado e auto-adjunto  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow L^2_{per}([-L, L])$  definido em um subespaço denso de  $L^2_{per}([-L, L])$  por

$$\mathcal{L}u = (M + c)u - \varphi^p u. \quad (1.7)$$

Da teoria de operadores compactos e simétricos aplicado ao problema de autovalor periódico

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi = \lambda\psi \\ \psi(-L) = \psi(L), \quad \psi'(-L) = \psi'(L), \end{cases} \quad (1.8)$$

---

<sup>1</sup>Notemos que para todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_c(\cdot + y)$  é também solução de (1.6).

é possível ver que o espectro de  $\mathcal{L}$  é um conjunto infinito enumerável de autovalores com

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad (1.9)$$

onde  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  (veja Proposição 3.1.1 à diante para uma prova desta afirmação). Em particular, de (1.6) obtemos que  $\mathcal{L}$  tem zero como um autovalor cuja autofunção associada é  $d\varphi/dx$ . Como é bem conhecido esta propriedade de  $\mathcal{L}$  é deduzida da invariância das soluções de (1.3) por translações na variável espacial.

Um conjunto de condições é disponível na literatura para mostrar a estabilidade da órbita gerada por  $\varphi_c$ , a saber,

$$\Omega_{\varphi_c} = \{\varphi_c(\cdot + y) : y \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, dizemos que  $\varphi_c$  é estável em  $H_{per}^{m_2}([-L, L])$  se  $\Omega_{\varphi_c}$  é estável pelo fluxo periódico gerado pela equação (1.3), mais precisamente, se para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que para  $u_0 \in H_{per}^{m_2}([-L, L])$  com  $d(u_0, \Omega_{\varphi_c}) \equiv \inf_{y \in \mathbb{R}} \|u_0 - \varphi_c(\cdot + y)\|_{H_{per}^{m_2}} < \delta$ , a solução  $u$  de (1.3) com  $u(x, 0) = u_0$  é global no tempo e satisfaz  $d(u(t), \Omega_{\varphi_c}) < \varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, de Benjamin&Bona&Weinstein&Grillakis&Shatah&Strauss as condições que provam a estabilidade de  $\Omega_{\varphi_c}$  são:

( $P_0$ ) existe uma curva suave de soluções periódicas para (1.6) da forma,

$$c \in I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \varphi_c \in H_{per}^{m_2}([-L, L]). \text{ Onde } I \text{ é um intervalo à ser determinado;}$$

( $P_1$ )  $\mathcal{L}$  tem um único autovalor negativo e simples; (1.10)

( $P_2$ ) o autovalor 0 é simples;

$$(P_3) \frac{d}{dc} \int_{-L}^L \varphi_c^2(x) dx > 0.$$

O problema sobre a existência de uma curva não trivial suave de soluções periódicas na forma presente em ( $P_0$ ) acima, apresenta novos e delicados fatos que necessitam ser trabalhados. A possibilidade de encontrar soluções explícitas para (1.6) dependerá naturalmente da forma de  $M$ , se tal é um operador diferencial da forma  $M = -\partial_x^2$  o uso da teoria de funções elípticas tem mostrado ser uma ferramenta fundamental e portanto as soluções dependerão de uma forma geral das funções elípticas de Jacobi do tipo *snoidal*, *cnoidal* e *dnoidal* (veja [7],

[9], [10], [15]). Como o período destas funções dependem da integral elíptica de primeiro tipo  $K(k)$ , temos que o módulo  $k$  dependerá da velocidade da onda  $c$  e portanto teremos *à priori* que o período de  $\varphi_c$  dependerá de  $c$ . Portanto, usando o Teorema da Função Implícita, obteremos em muitos casos um ramo de soluções de onda viajantes periódicas com um período minimal fixado. Notemos que este procedimento em geral não possui maiores dificuldades mesmo quando  $M$  é um operador pseudo-diferencial tal como o operador não local  $\mathcal{H}\partial_x$ , com  $\mathcal{H}$  sendo a transformada de Hilbert. Nesta tese faremos uma abordagem diferente para obter soluções explícitas de (1.6) para específicas formas de  $M$  e valores de  $p$ . Esta abordagem será, em alguns casos, baseada no Teorema clássico do *Somatório de Poisson* (ver [42], [56] e [58]). Ao menos duas vantagens importantes desta abordagem podem ser obtidas, a primeira é que ela pode ser usada para obter soluções quando  $M$  é um operador pseudo-diferencial, por exemplo no caso de  $\mathcal{H}\partial_x$ . A outra vantagem está relacionada com o cálculo da integral em (1.10). Em geral para a obtenção da propriedade  $(P_3)$  é muito difícil no caso periódico como se tem observado nos resultados que aparecem na literatura. O uso de identidades não triviais para integrais elípticas completas de primeiro e de segundo tipo algumas vezes é uma peça fundamental na análise do sinal da integral presente (1.10) e sua verificação pode se tornar trabalhosa. Como veremos na teoria que fora desenvolvida nesta tese, a verificação de  $(P_3)$  pode, em algumas das equações tratadas aqui, ser muito fácil de ser obtida como uma combinação do *Teorema do Somatório de Poisson* e o *Teorema de Parseval*.

Com respeito as condições  $(P_1)$  e  $(P_2)$ , o problema é muito delicado. Um dos resultados mais marcantes na teoria de estabilidade de soluções de ondas solitárias foi dado por Albert e Albert&Bona em [3] e [4], onde foram dadas condições suficientes para se obter as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$ . A vantagem desta abordagem, é que não requer um cálculo explícito do espectro do operador linear (1.7), pois  $(P_1)$  e  $(P_2)$  são obtidas exclusivamente das propriedades de positividade da transformada de Fourier da onda solitária em questão. A presente tese estabelece uma extensão da teoria em [3] e [4] no caso de soluções de tipo ondas viajantes periódicas (ver Teorema 3.2.2). O problema periódico apresenta novos aspectos com os quais não há confronto algum com as ondas solitárias. Esta tese se baseia (como no caso de ondas solitárias em [3] e [4]) no uso de operadores totalmente positivos e a classe  $PF(r)$  definidas por Karlin [33]. Porém nos concentraremos, para o propósito desta tese, somente no caso  $r = 2$  (veja [3]). Nossa teoria permite uma simplificação significativa de algumas provas de estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para equação do



tipo KdV ([7],[8],[10]) tal como nos caso das equações de Korteweg-de Vries e modificada Korteweg-de Vries, pois naqueles casos a verificação das propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  requerem a determinação dos intervalos de instabilidade associados à equação de Lamé em (1.2) e de uma forma explícita de ao menos dos três primeiros autovalores  $\rho$ . Nossa análise não necessita desta informação.

Conforme será mostrado no capítulo 4 a seguir, nossa teoria estabelece a primeira prova de estabilidade das soluções ondas viajantes periódicas encontradas por Benjamin em [15] para a equação de Benjamin-Ono

$$u_t + uu_x - \mathcal{H}u_{xx} = 0, \quad (1.11)$$

onde  $\mathcal{H}$  denota a transformada de Hilbert periódica definida por

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2L} p.v. \int_{-L}^L \cot g \left[ \frac{\pi(x-y)}{2L} \right] f(y) dy.$$

As ondas periódicas associada à (1.11) com período minimal  $2L$  são dadas para  $c > \frac{\pi}{L}$  como sendo

$$\varphi_c(x) = \frac{2\pi}{L} \left( \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma) - \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \right), \quad (1.12)$$

tal que  $\gamma > 0$  satisfaz  $\tanh(\gamma) = \frac{\pi}{cL}$ .

Outros dois fatos completamente novos foram obtidos nesta tese. O primeiro deles é a existência e estabilidade de uma família de ondas viajantes periódicas da equação KdV crítica,

$$u_t + 5u^4u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.13)$$

a qual será denominada na presente tese, daqui em diante, por 4-KdV. Vale ressaltar, neste caso específico, que não faremos uso do *Teorema do Somatório de Poisson* pois se tem uma dificuldade saliente em descobrir uma solução periódica do tipo  $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$  para a equação (1.13) através deste método. Nesta tese, encontramos uma curva de ondas viajantes positivas da forma  $c \in \left( \frac{\pi^2}{L^2}, +\infty \right) \mapsto \varphi_c$ , onde  $\varphi_c$  é dada por,

$$\varphi_c(z) = \sqrt{\eta_3} \frac{\operatorname{dn} \left( \frac{2}{\sqrt{3g}} z; k \right)}{\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sn}^2 \left( \frac{2}{\sqrt{3g}} z; k \right)}}, \quad (1.14)$$

onde  $\eta_3$ ,  $g$  e  $\beta$  são funções suaves com respeito ao parâmetro  $c$  e  $k$  é o módulo (ver Apêndice). Em nossa análise, faremos uso da expansão em série de Fourier da função  $\varphi_c^2$  para determinarmos que  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10) são satisfeitas para o operador  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi_c^4$  e então, obter um resultado de estabilidade para  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  onde  $r : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $r(k) = 4K(k)^2 \sqrt{k^4 - k^2 + 1}$  com  $k_0 \approx 0,3823174965$ . Para o caso  $\left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$  as teorias presentes na literatura e em particular na presente tese não podem ser aplicadas para este caso, porém *conjecturamos* que elas devem ser *instáveis*. O segundo fato relevante é que no caso da equação não linear de Schrödinger crítica (CNLS)

$$iu_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0, \quad (1.15)$$

com  $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$ . As ondas tipo *standing waves* periódicas da forma  $u(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x)$  com  $\varphi_c$  dada por (1.14) resultam ser estáveis para  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  e instáveis para  $c \in \left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$ .

É importante observar que nossos resultados de estabilidade são obtidos por perturbação inicial periódica tendo o mesmo período minimal de nossas soluções ondas viajantes. Nosso método não pode ser estendido para obter resultados de estabilidade com perturbações periódicas mais gerais, por exemplo, por distúrbâncias periódicas de duas vezes o período minimal das soluções periódicas encontradas. Na seção 6 daremos uma explicação deste fato. Ademais, é conjecturado que neste caso as ondas viajantes sejam instáveis (ver Angulo [6]).

Dividiremos esta tese da seguinte forma. No capítulo 2, descreveremos brevemente as notações que serão usadas no decorrer do trabalho, faremos uma explanação sucinta sobre os espaços de Sobolev e apresentaremos alguns resultados preliminares tais como o Teorema do Somatório de Poisson e alguns resultados sobre boa colocação no caso periódico das equações aqui estudadas. O capítulo 3 é voltado a apresentação da teoria completa e relata as propriedades de positividade do núcleo  $\mathcal{K} = \widehat{\varphi_c^p}$ , onde  $\varphi_c$  é uma solução positiva de (1.6) e  $p$  um inteiro positivo. Esta informação de positividade do núcleo  $\mathcal{K}$  servirá para determinar o comportamento dos dois primeiros autovalores do operador  $\mathcal{L}$  em (1.7). Aplicações deste capítulo às ondas viajantes periódicas para as equações de Benjamin-Ono (BO), Korteweg-de Vries (KdV), modificada Korteweg-de Vries (mKdV), generalizada Korteweg-de Vries de quarta ordem (4-KdV, ou ainda Korteweg-de Vries crítica) e a equação não linear de Schrödinger

crítica (CNLS) são apresentadas no capítulo 4. O capítulo 5 apresenta as *conclusões* que foram obtidas nesta tese e eventuais estudos a serem pesquisados posteriormente. No capítulo 6 temos o Apêndice no qual contém propriedades das integrais elípticas que são relevantes para a teoria do capítulo 4 e uma breve introdução à algumas funções especiais usadas nesta tese tais como a função Zeta de Jacobi, Lambda de Heuman e as funções Téta. Além disso, descreveremos uma análise básica dos planos de fase associados às equações KdV, mKdV e 4-KdV. Finalmente, no capítulo 7 apresentaremos comentários importantes sobre a propriedade  $PF(2)$  no caso periódico, considerações sobre a questão da instabilidade das soluções ondas viajantes periódicas segundo o trabalho de Gardner [25], a questão da estabilidade das soluções periódicas em espaços de Sobolev de alta ordem, alguns exemplos de outros "candidatos" à soluções da 4-KdV e sobre a existência de ondas periódicas da equação de Korteweg-de Vries de terceira ordem (3-KdV).

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Notações e Resultados Preliminares

---

### 2.1 Séries de Fourier e Distribuições Periódicas - Teoria Básica

---

Neste capítulo, apresentaremos algumas notações e convenções que serão utilizados no decorrer desta tese.

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é definido como sendo o espaço de funções (mais precisamente, de classes de equivalências) definidas em  $\Omega$  à valores reais ou complexos e mensuráveis à Lebesgue com norma

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

quando  $1 \leq p < \infty$ . Se  $p = \infty$  tem-se

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

O espaço  $L^p(\Omega)$  quando munido com uma das normas acima é um espaço de Banach. Se  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  torna-se um espaço de Hilbert munido do produto interno,

$$(f, g)_2 := (f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Vamos definir neste contexto a transformada de Fourier em  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Definição 2.1.1.** A transformada de Fourier de uma função  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , denotada por  $\widehat{f}$ , é definida como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}.$$

**Observação 2.1.1.** a) No que segue, expressaremos a transformada de Fourier de uma função  $f \in L^1(\mathbb{R})$  como sendo  $\widehat{f}^{\mathbb{R}}$ , para não haver perigo de confusão com a transformada de Fourier no caso periódico, que será definida a seguir.

b) Via Teorema de Plancherel, define-se também a transformada de Fourier de uma função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Denotaremos de forma análoga ao item a), isto é, por  $\widehat{f}^{\mathbb{R}}$  (ver [54]).

Definiremos agora os espaços de Sobolev periódicos. Denote por  $\mathcal{P} = C_{per}^{\infty}$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que são infinitamente diferenciáveis e periódicas de período fixado  $2l > 0$ . A coleção  $\mathcal{P}'$  de todos os funcionais lineares contínuos definidos de  $\mathcal{P}$  em  $\mathbb{C}$  é denominado conjunto das distribuições periódicas. Dado  $\psi \in \mathcal{P}'$  o valor de  $\psi$  em  $\varphi \in \mathcal{P}$  é denotado por,

$$\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Seja  $k \in \mathbb{Z}$  e considere  $\Theta_k(x) = e^{\frac{ik\pi x}{l}}$  para  $x \in \mathbb{R}$ . A transformada de Fourier de  $\psi \in \mathcal{P}'$  é a função  $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{2l} \langle \psi, \Theta_{-k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O espaço das seqüências rapidamente decrescentes, denotada por  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ , é o conjunto de todas as seqüências de valores complexos  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  tais que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |\alpha_k| < \infty \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots$$

A transformada de Fourier inversa de  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$  é a função  $\check{\alpha} \in \mathcal{P}$  dada por,

$$\check{\alpha}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Theta_k(x).$$

Toda função  $\psi \in L^p([-l, l])$ ,  $p \geq 1$  é um elemento de  $\mathcal{P}'$  definido por

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \psi(x) \varphi(x) dx,$$

onde  $\varphi \in \mathcal{P}$ . Se  $\psi \in L^p([-l, l])$ ,  $p \geq 1$ , então para  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \psi(x) e^{-ikx\pi} dx.$$

Dotaremos o espaço  $\mathcal{P}'$  com a topologia fraca estrela usual, porém não há a necessidade de maiores comentários visto que tal fato não será utilizado aqui.

O espaço das seqüências  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de quadrado somável denotado por  $\ell^2$  é definido como sendo

$$\ell^2 = \left\{ \alpha; \|\alpha\|_{\ell^2} := \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Para  $s \in \mathbb{R}$ , o espaço de Sobolev  $H_{per}^s([-l, l]) := H_{per}^s$  é definido como sendo o conjunto de  $f \in \mathcal{P}'$  tal que

$$\|f\|_{H_{per}^s}^2 = 2l \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

A coleção  $H_{per}^s$  é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno,

$$(f, g)_s = 2l \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

Quando  $s = 0$ ,  $H_{per}^0$  será denotado por  $L_{per}^2$ . Temos que  $H_{per}^0$  é um espaço de Hilbert o qual é em verdade  $L_{per}^2([-l, l])$ , munido do produto interno,

$$(f, g) := (f, g)_0 = \int_{-l}^l f(x) \overline{g(x)} dx$$

e norma  $\|\cdot\|_{L_{per}^2([-l, l])}$ . Claramente  $H_{per}^s \hookrightarrow L_{per}^2$  para todo  $s \geq 0$ , e, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , a norma  $\|\cdot\|_{H_{per}^n}$ , definida acima, de um função  $f$  é equivalente à norma,

$$\left( \sum_{j=0}^n \|f^{(j)}\|_{L_{per}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{j=0}^n \int_{-l}^l |f^{(j)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde  $f^{(j)}$  denota a  $j$ -ésima derivada de  $f$  tomada no sentido de  $\mathcal{P}'$ . Ademais,  $(H_{per}^s)'$ , o dual topológico de  $H_{per}^s$ , é isometricamente isomorfo a  $H_{per}^{-s}$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . O par dualidade  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{per}^{-s}, H_{per}^s} := \langle \cdot, \cdot \rangle_s$  é representado para  $f \in H_{per}^{-s}$  e  $g \in H_{per}^s$  por,

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

Desta maneira, se  $f \in L^2_{per}$  e  $g \in H^s_{per}$ ,  $s \geq 0$ , então  $\langle f, g \rangle_s = (f, g)$ . Neste contexto, o Lema de Sobolev nos diz que se  $s > \frac{1}{2}$  e

$$C_{per} := C_{2l} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua e periódica com período } 2l\},$$

então  $H^s_{per} \hookrightarrow C_{2l}$ .

Sejam  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  e  $\beta = (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  duas seqüências de números complexos e  $s \in \mathbb{R}$ .

O espaço  $\ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z}) := \ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z})$  é definido por,

$$\ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}; \|\alpha\|_{\ell^2_{s,2l}} := \left( 2l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

Notemos que  $\ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z})$  é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno,

$$(\alpha, \beta)_{\ell^2_{s,2l}} = 2l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

Segundo a notação dada anteriormente, vemos que  $f \in H^s_{per}$  se, e somente se  $(\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2_{s,2l}$  e, neste caso, tem-se ainda  $\|f\|_s = \|\widehat{f}\|_{\ell^2_{s,2l}}$ . Salvo menção em contrário, quando não houver perigo de confusão quanto ao período  $2l$ , representaremos  $\ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z})$  simplesmente por  $\ell^2_s$ .

A convolução de  $\alpha$  e  $\beta$  é a seqüência  $\alpha * \beta$  definida por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{k-j} \beta_j,$$

sempre que o lado direito da igualdade acima faça sentido.

Será necessário mencionarmos o seguinte caso especial da desigualdade de Young para convoluções no caso de seqüências.

**Proposição 2.1.1.** *Sejam  $\alpha \in \ell^1 = \ell^1(\mathbb{Z})$  e  $\beta \in \ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$ . Então  $\alpha * \beta \in \ell^2$  e além disso,*

$$\|\alpha * \beta\|_{\ell^2} \leq \|\alpha\|_{\ell^1} \|\beta\|_{\ell^2}.$$

*Em particular, para cada  $\alpha \in \ell^1$  fixado, a aplicação  $\beta \in \ell^2 \mapsto \alpha * \beta \in \ell^2$  define um operador linear limitado.*

**Demonstração:** Ver [31].

**Observação 2.1.2.** A desigualdade de Young no caso geral é apresentada como segue.

Sejam  $\alpha \in \ell^p$ ,  $\beta \in \ell^q$  onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$  com  $1 \leq p, q, r \leq \infty$ . Então  $\alpha * \beta \in \ell^r$  e

$$\|\alpha * \beta\|_{\ell^r} \leq \|\alpha\|_{\ell^p} \|\beta\|_{\ell^q}.$$

Apresentaremos agora o Teorema de Parseval que será utilizado no decorrer desta tese. Tal resultado pode ser encontrado por exemplo em Iório&Iório [31]. Denotemos por  $PC_{per}$  o espaço das funções contínuas por partes e periódicas de período  $2l$ . Dado  $f \in PC_{per}$ , a transformada de Fourier de  $f$  é a sequência de números complexos  $\hat{f} = \left(\hat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  definida por

$$\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{ikx\pi}{l}} dx.$$

Os números  $\hat{f}(k) = c_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$  e a série,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{i\pi kx}{l}},$$

é a série de Fourier gerada por  $f$ .

**Teorema 2.1.1.** Seja  $f \in C_{per}$  e suponha que  $f' \in PC_{per}$ . Então a série de Fourier gerada por  $f$  converge uniformemente à  $f$  sobre  $\mathbb{R}$ . Além disso, temos a identidade

$$\|\hat{f}\|_{\ell^2}^2 = \frac{1}{2l} \|f\|_{L_{per}^2}^2.$$

Ou equivalentemente,

$$(\hat{f}, \hat{g})_{\ell^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2l} (f, g)_{L_{per}^2}.$$

A última igualdade é conhecida como identidade de Parseval.

Vamos agora enunciar o Teorema do Somatório de Poisson que será utilizado para descobrirmos a forma explícita de algumas das ondas viajantes periódicas aqui estudadas.

**Teorema 2.1.2.** Sejam  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi xy} dy$  e  $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{+2i\pi xy} dx$  satisfazendo

$$|f(y)| \leq \frac{A}{(1 + |y|)^{1+\delta}} \quad e \quad |\hat{f}(x)| \leq \frac{A}{(1 + |x|)^{1+\delta}},$$



onde  $\delta > 0$  e  $A > 0$  (então  $\hat{f}$  e  $f$  podem ser assumidas contínuas). Então

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2Ln) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{2L}\right) e^{\frac{\pi i n x}{L}}, \quad L > 0.$$

Em particular,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2Ln) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{2L}\right).$$

As quatro séries acima convergem absolutamente.

**Demonstração:** Ver [46] e [58].

---

## 2.2 Resultados de Boa Colocação

---

O problema de valor inicial periódico para as equações de tipo dispersiva (1.3) foi estudado previamente por Abdelouhab&Bona&Felland&Saut em [1] e um resultado global (ou local) em  $H_{per}^s([0, L])$  para  $s \geq \frac{3}{2}$  fora obtido neste trabalho. Nos casos específicos, estudados na presente tese, os resultados foram melhorados de maneira significativa. De fato, para os casos  $p = 1$ ,  $p = 2$  e  $M = -\partial_x^2$ , Colliander *et al.* [23] mostraram um resultado global em  $H_{per}^s([0, L])$  para  $s \geq 1$ . Já para o caso  $p = 1$  e  $M = \mathcal{H}\partial_x$ , Molinet em [43], estabeleceu um resultado *ótimo* de boa colocação global em  $L_{per}^2([0, L])$  e em  $H_{per}^s([0, L])$  para  $s \geq \frac{1}{2}$  (ver [45]). O caso  $M = -\partial_x^2$  e  $p = 4$  se deve a Staffilani em [57] que provou a boa colocação da 4-KdV periódica em  $H_{per}^s([0, L])$ ,  $s \geq 1$  (ver também [22]).

Os resultados de boa colocação global que precisamos neste tese são os seguintes.

Para as equações KdV e mKdV temos,

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $s \geq 1$ . Para cada  $u_0 \in H_{per}^s$  existe uma única solução de (1.3) tal que para  $T > 0$ , pertence à  $C(0, T; H_{per}^s)$ . Além disso, a correspondência  $u_0 \mapsto u$  é uma função analítica entre espaços de funções adequados.*

**Demonstração:** Ver [23].

Já para a equação de Benjamin-Ono tem-se,

**Teorema 2.2.2.** *Seja  $s \geq \frac{1}{2}$ . Para cada  $u_0 \in H_{per}^s$  existe uma única solução de (1.3) para o caso  $p = 1$  e  $M = \mathcal{H}\partial_x$ , tal que para  $T > 0$ , pertence à  $C(0, T; H_{per}^s)$ . Além disso, a correspondência  $u_0 \mapsto u$  é uma função contínua entre espaços de funções adequados.*

**Demonstração:** Ver [45]

Para o caso da 4-KdV, temos o seguinte resultado,

**Teorema 2.2.3.** *Seja  $s \geq 1$ . Para cada  $u_0 \in H_{per}^s$  existe uma única solução de (1.3) para o caso  $p = 4$  e  $M = -\partial_x^2$ , tal que para  $T > 0$ , pertence à  $C(0, T; H_{per}^s)$ . Além disso, a correspondência  $u_0 \mapsto u$  é uma função analítica entre espaços de funções adequados.*

**Demonstração:** Ver [57]

E para o caso da CNLS tem-se o resultado de boa colocação

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $s > \frac{1}{2}$ . Para cada  $u_0 \in H_{per}^s$  existe uma única solução da CNLS (1.15) tal que para  $T > 0$ , pertence à  $C(0, T; H_{per}^s)$ . Além disso, a correspondência  $u_0 \mapsto u$  é uma função analítica entre espaços de funções adequados.*

**Demonstração:** Ver [24].

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# Espaços Funcionais Básicos e Propriedades de Positividade

Neste capítulo apresentaremos a teoria completa que relaciona as *propriedades de positividade* da solução onda viajante periódica  $\varphi = \varphi_c$  de (1.6) e de  $\widehat{\varphi}_c^p$  com a *teoria de estabilidade* presente em [27]. Veremos que a condição de que a onda viajante periódica  $\varphi_c$  seja positiva está intrinsecamente relacionado com a positividade de  $\widehat{\varphi}_c^p$  (ver definição do espaço  $Y$  que será definido antes da Proposição 3.1.3 e comentário presente no capítulo 7). O capítulo que segue é de suma importância, posto que apresentaremos a *teoria completa* que será utilizada nas aplicações que virão no próximo capítulo.

## 3.1 Espaços Funcionais Básicos.

Na presente tese, consideraremos as seguintes equações,

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x - \mathcal{H}u_{xx} &= 0, & \text{Benjamin-Ono (BO)} \\
 u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0, & \text{Korteweg-de Vries (KdV)} \\
 u_t + u^2u_x + u_{xxx} &= 0, & \text{Korteweg-de Vries modificada (mKdV)} \\
 u_t + u^4u_x + u_{xxx} &= 0, & \text{Korteweg-de Vries crítica (4-KdV)} \\
 iu_t + u_{xx} + |u|^4u &= 0, & \text{Schrödinger crítica (CNLS)}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Olhando a forma geral em (1.3) podemos concluir que  $p = 1$  para as duas primeiras,  $p = 2$  para a terceira e  $p = 4$  para a quarta das equações. Apesar da equação CNLS não possuir a forma geral (1.3), obteremos a estabilidade para a solução  $\varphi_c$  dada em (1.14) para  $c \in \left(\frac{\pi}{L}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  e a instabilidade para  $c \in \left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$  posto que um dos operadores, à saber, o operador  $\mathcal{L}$  associado a esta equação, dado por  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi_c^4$ , é o mesmo operador associado à 4-KdV. Assim obtemos através da teoria desenvolvida neste capítulo o comportamento dos dois primeiros autovalores então aplicamos a teoria de Grillakis *et al.* em [27] para obtermos a estabilidade. O operador  $M$  será, para a primeira equação,  $M = \mathcal{H}\partial_x$ , onde  $\mathcal{H}$  representa a transformada de Hilbert  $2L$ -periódica definida por

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2L} \text{v.p} \int_{-L}^L \cotg \left[ \frac{\pi(x-y)}{2L} \right] f(y) dy.$$

Aqui,  $f$  é uma função periódica de período  $2L$ , (ver Iório&Iório [31]). Via transformada de Fourier, temos que  $\widehat{\mathcal{H}f}(n) = -i \text{sgn}(n) \widehat{f}(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Nas três equações seguintes  $M$  será  $M = -\partial_x^2$ .

**Observação 3.1.1.** (a) Nesta tese, considereramos uma forma mais conveniente para a equação mKdV, a saber

$$u_t + 3u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

neste caso teremos que as ondas viajantes periódicas satisfazem,

$$\varphi_c'' + \varphi_c^3 - c\varphi_c = 0 \quad (3.2)$$

e o operador  $\mathcal{L}$  neste caso será  $\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + c - 3\varphi_c^2$ .

Consideraremos também uma forma semelhante para a equação 4-KdV

$$u_t + 5u^4u_x + u_{xxx} = 0,$$

aqui tem-se

$$\varphi_c'' + \varphi_c^5 - c\varphi_c = 0 \quad (3.3)$$

cujos operadores associados são  $\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + c - 5\varphi_c^4$ .

(b) As soluções ondas viajantes periódicas da  $mKdV$ , da  $KdV$  e da  $4-KdV$  serão consideradas de período  $L$ , enquanto que a onda viajante periódica da  $BO$  será considerada de período  $2L$ , somente por conveniência.

(c) No caso específico da equação CNLS as ondas standing waves periódicas à serem consideradas são da forma  $u(x, t) = e^{ict}\varphi_c(x)$ , donde  $\varphi_c$  satisfaz (3.3).

(d) Após um argumento de "bootstrap", podemos concluir que  $\varphi$  pertence à  $H_{per}^s$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Então,  $\varphi$  é infinitamente diferenciável com todas as derivadas pertencentes à  $L_{per}^2$ .

A próxima Proposição trata o problema de autovalores e as respectivas autofunções associadas ao problema de autovalor periódico dado em (1.8) num contexto bem mais geral,

**Proposição 3.1.1.** *O operador  $\mathcal{L}$  definido em (1.7) é fechado, não-limitado e autoadjunto sobre  $L_{per}^2$ . Seu espectro consiste em um número enumerável infinito de autovalores (que se acumulam no infinito), isto é, tem-se  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$  (onde  $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$  denota o espectro essencial do operador  $\mathcal{L}$ ). Em particular,  $\mathcal{L}$  tem o autovalor 0 com autofunção  $\varphi_c'$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que nossas funções periódicas tenham período  $L$ . Claramente  $\mathcal{L}$  definido em  $H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$  é um operador fechado, não-limitado e autoadjunto sobre  $L_{per}^2([0, L])$ . Vamos provar inicialmente que o espectro  $\mathcal{T} := M + c$  é um conjunto infinito e enumerável de autovalores satisfazendo

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots, \quad (3.4)$$

onde  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . De fato, seja  $R_c := (M + c)^{-1}$ , cujo símbolo é  $\frac{1}{c + \zeta(n)}$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $\frac{1}{c + \zeta(n)} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  então existe um único  $G_c \in L^2_{per}([0, L])$  tal que  $\widehat{G}_c(n) = \frac{1}{c + \zeta(n)}$ . Devido a este fato tem-se a ação

$$R_c f(x) = \frac{1}{L} \int_0^L G_c(x - y) f(y) dy,$$

definida em  $L^2_{per}([0, L])$ . Como o intervalo  $[0, L]$  é limitado e pode-se provar que o núcleo  $\widetilde{G}_c(x, y) := G_c(x - y) \in L^2_{per}([0, L] \times [0, L])$ , obtemos que  $R_c$  é um operador compacto sobre  $L^2_{per}([0, L])$  para todo  $c > 0$ . Desta maneira, obtemos (3.4).

O próximo passo é mostrar que existe  $\mu_1$  suficientemente grande de modo que  $\mathcal{M} := (\mathcal{L} + \mu_1)^{-1}$  existe e define um operador limitado, positivo, auto-adjunto e compacto. Com efeito, primeiramente, é fácil ver que  $\mathcal{L}$  é limitado por baixo, isto é, se  $f \in D(\mathcal{L})$  tem-se,  $\langle \mathcal{L}f, f \rangle \geq -\beta \langle f, f \rangle$ , onde  $\beta = \|\varphi_c\|_{L^\infty_{per}} + c$ . Então, podemos escolher um  $\mu_1$  tal que  $\mathcal{L} + \mu_1 > 0$ , isto é,  $\mathcal{M}$  é positivo. Denotemos,  $\mu := \mu_1$  somente por conveniência. Seja  $\nu$  um número positivo tal que  $\nu + \varphi_c - c > 0$  e  $\nu + \mu > 0$ . Logo, para  $\mu > 0$  tem-se,  $f = (\mathcal{L} + \mu)g \Leftrightarrow (I - M)g = \Upsilon f$  onde  $Mg = R_{\mu+\nu}[(\nu + \varphi_c - c)g]$  e  $\Upsilon = R_{\nu+\mu}$ . Denotemos  $h = \nu + \varphi_c - c$ . Agora, do Teorema de Parseval, segue que

$$\|Mg\|_{L^2_{per}} \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{\zeta(n) + \nu + \mu} \right\} \|h\|_{L^\infty_{per}} \|g\|_{L^2_{per}}.$$

Então, podemos escolher,  $\mu$  tal que  $\|M\|_{B(L^2_{per})} < 1$  e  $\mathcal{L} + \mu > 0$ . Então,  $I - M$  é invertível e com isto  $g = (I - M)^{-1} \Upsilon f$ . Assim escrevemos  $\mathcal{M} = (\mathcal{L} + \mu)^{-1} = (I - M)^{-1} \Upsilon$ . Sendo  $\Upsilon$  um operador compacto e  $(I - M)^{-1} \in B(L^2_{per})$  temos que  $\mathcal{M}$  é um operador compacto. Então, existe uma base ortonormal  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  de  $L^2_{per}$  constituída de autofunções de  $\mathcal{M}$  com autovalores não-nulos  $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$  satisfazendo,

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots > 0,$$

e  $\mu_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Como,  $\mathcal{M}\varphi_k = \mu_k \varphi_k \in D(\mathcal{L} + \mu)$  obtemos

$$\mathcal{L}\varphi_k = \left( \frac{1}{\mu_k} - \mu \right) \varphi_k := \lambda_k \varphi_k.$$

Então, existe uma sequência de autovalores de  $\mathcal{L}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ , satisfazendo

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

e  $\lambda_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Este argumento mostra o desejado.

□

Iremos agora nos concentrar no estudo das propriedades espectrais do operador  $\mathcal{L}$ . Para isto, vamos definir duas famílias de operadores lineares que estarão relacionados com  $\mathcal{L}$  com a vantagem de que ambos serão compactos. Os resultados que serão apresentados a seguir são extensões dos trabalhos de Albert [3], e Albert&Bona [4] ao caso periódico.

Consideremos o problema  $\mathcal{L}f = \lambda f$  em (1.8). Dado  $\theta \geq 0$ , então  $(\mathcal{L} + \theta)f = (\lambda + \theta)f \Rightarrow (\zeta(n) + \theta + c)\widehat{f}(n) = (\lambda + \theta + \widehat{\varphi}_c^p)\widehat{f}(n)$ . Logo,  $\lambda = -\theta \Rightarrow (\zeta(n) + \theta + c)\widehat{f}(n) = \widehat{\varphi}_c^p\widehat{f}(n)$ . De posse disto, definamos para cada  $\theta \geq 0$  o operador,  $S_\theta : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  dado por

$$S_\theta \alpha(n) = \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(n-j)\alpha_j = \frac{1}{\omega_\theta(n)}(\mathcal{K} * \alpha)_n, \quad (3.5)$$

onde

$$\omega_\theta(n) = \zeta(n) + \theta + c, \quad \mathcal{K}(n) = \widehat{\varphi}_c^p(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

**Observação 3.1.2.** *Observemos que no caso das equações mKdV e 4-KdV, respectivamente, onde consideramos casos especiais para estas equações, à saber,*

$$u_t + 3u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad e \quad u_t + 5u^4u_x + u_{xxx} = 0,$$

cujos operadores lineares associados tornam-se  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - 3\varphi_c^2$  e  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - 5\varphi_c^4$  respectivamente, o núcleo  $\mathcal{K}$  do operador  $S_\theta$  será nestes casos  $\mathcal{K} = \widehat{3\varphi_c^2}$  e  $\mathcal{K} = \widehat{5\varphi_c^4}$  respectivamente. Porém trabalharemos no decorrer desta tese no caso geral, apenas com  $\mathcal{K} = \widehat{\varphi}_c^p$ , pois não há qualquer mudança na teoria que será apresentada.

Vale observar que sendo  $\omega_\theta$  limitada e supondo  $\varphi_c$  suficientemente regular,  $\mathcal{K} = \widehat{\varphi}_c^p \in \ell^1(\mathbb{Z})$  e  $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$  segue da Proposição 2.1.1 que  $S_\theta \alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ .

No que segue, representaremos o n-ésimo termo da sequência  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  por  $\alpha_n := \alpha(n)$  e denotaremos  $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{Z})$ .

Como  $\omega_\theta$ , definida em (3.6) é positiva, segue que o espaço  $X$  definido por

$$X = \left\{ \alpha \in \ell^2(\mathbb{Z}); \|\alpha\|_{X, \theta} := \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \omega_\theta(n) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

é um espaço de Hilbert com norma  $\|\alpha\|_{X, \theta}$  definida acima e produto interno correspondente

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{X, \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} \omega_\theta(n).$$

**Proposição 3.1.2.** (a) Se  $\alpha \in \ell^2$  é uma autosequência de  $S_\theta$  com autovalor correspondente  $\lambda \neq 0$  então  $\alpha \in X$ .

(b) A restrição de  $S_\theta$  à  $X$  define um operador compacto e autoadjunto.

**Demonstração:** Mostraremos primeiramente que  $S_\theta : X \rightarrow X$ . Com efeito, seja  $\alpha \in X$ . Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_\theta \alpha_n|^2 \omega_\theta(n) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\theta(n)} \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j) \alpha_j \right|^2 \\ &\leq M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{K} * \alpha)(n)|^2 \\ &= M \|\mathcal{K} * \alpha\|_{\ell^2}^2 \leq M \|\mathcal{K}\|_{\ell^1}^2 \|\alpha\|_{\ell^2}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que  $S_\theta(S_\theta \alpha) = S_\theta^2 \alpha \in X$ . Denote, para simplificar a notação, a norma em  $X$  como sendo  $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{X, \theta}$ , o operador  $S_\theta$  simplesmente por  $S$  e  $\mu := \mu_\theta = \frac{1}{\omega_\theta}$ . Pelas desigualdades de Minkowski, Hölder (duas vezes) e Young (nesta ordem) obtemos

$$\begin{aligned} \|S^2 \alpha\|_X &= \left\| \sum_j \mathcal{K}(\cdot - j) \mu(\cdot) S \alpha(j) \right\|_X \\ &= \left\| \sum_j \sum_m \mathcal{K}(\cdot - j) \mu(\cdot) \mathcal{K}(j - m) \mu(j) \alpha(m) \right\|_X \\ &\leq \sum_j \sum_m \|\mathcal{K}(\cdot - j) \mu(\cdot)\|_X \mathcal{K}(j - m) \mu(j) |\alpha(m)| \\ &= \sum_j \sum_m \left[ \sum_n \mathcal{K}(n - j)^2 \mu(n) \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{K}(j - m) \mu(j) |\alpha(m)| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\|S^2\alpha\|_X &\leq \|\mathcal{K}^2 * \mu\|_{\ell^2}^{\frac{1}{2}} \sum_m \left[ \left( \sum_j \mathcal{K}(j-m)^{\frac{4}{3}} \mu(j)^{\frac{1}{2}} \mu(j)^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{3}{4}} |\alpha_m| \right] \\
&\leq \|\mathcal{K}^2 * \mu\|_{\ell^2}^{\frac{1}{2}} \|\mu\|_{\ell^2}^{\frac{3}{2}} \|\mu\|_{\ell^1}^{\frac{1}{4}} \|\mathcal{K}^2 * \mu\|_{\ell^1}^{\frac{5}{4}} \|\alpha\|_{\ell^2} \\
&\leq \|\mathcal{K}^2\|_{\ell^1} \|\mu\|_{\ell^2}^{\frac{1}{2}} \|\mu\|_{\ell^2}^{\frac{3}{2}} \|\mu\|_{\ell^1}^{\frac{1}{4}} \|\mu\|_{\ell^1}^{\frac{5}{4}} \|\alpha\|_{\ell^2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Como  $|\mu(x)| \leq B(1+|x|)^{-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e algum  $B > 0$ , todas as quantidades na última expressão do lado direito da desigualdade em (3.7) são finitas. Como  $\alpha = \frac{1}{\lambda^2} S_\theta^2 \alpha$  temos provado o desejado em (a).

Passemos à prova de que  $S$  determina um operador compacto quando o mesmo está restrita ao conjunto  $X$ . De fato, consideremos  $\tilde{\mathcal{K}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\tilde{\mathcal{K}}(n, j) = \frac{\mathcal{K}(n-j)}{\omega_\theta(n)\omega_\theta(j)}$ . Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$\begin{aligned}
\sum_n \sum_j \tilde{\mathcal{K}}^2(n, j) \omega_\theta(n) \omega_\theta(j) &= \sum_n \sum_j \frac{\mathcal{K}^2(n-j)}{\omega_\theta(n)\omega_\theta(j)} \\
&= \sum_n (\mathcal{K}^2 * \mu)(n) \mu(n) \\
&\leq \|\mathcal{K}^2 * \mu\|_{\ell^2} \|\mu\|_{\ell^2} \\
&\leq \|\mathcal{K}^2\|_{\ell^1} \|\mu\|_{\ell^2}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Isto prova que

$$S_\theta \alpha(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{K}}(n, j) \alpha_n \omega_\theta(j),$$

é um operador de Hilbert-Schmidt e portanto  $S_\theta|_X$  é compacto. Para provar que  $S_\theta$  é autoadjunto basta notar que  $\omega_\theta$  é par e o núcleo  $\mathcal{K}$  além de real, é simétrico *devido a paridade* da sequência  $\widehat{\varphi}_c^p$ .

□

Pela definição do operador  $\mathcal{L}$  em (1.7), temos que se  $\theta \geq 0$  é tal que  $\mathcal{L}f = -\theta f$  então  $S_\theta \widehat{f} = \widehat{f}$ . Devido a este fato temos o seguinte Corolário,

**Corolário 3.1.1.** *Suponha que  $\theta \geq 0$ . Então 1 é autovalor de  $S_\theta$  (visto como operador de  $X$ ) se, e somente se  $-\theta$  é autovalor de  $\mathcal{L}$  (visto como operador de  $L_{per}^2$ ). Mais ainda, ambos autovalores tem a mesma multiplicidade.*

O próximo resultado segue da Proposição 3.1.2 e do Teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos definidos em espaços de Hilbert.

**Corolário 3.1.2.** *Para cada  $\theta \geq 0$ ,  $S_\theta$  tem uma família de autoseqüências  $\{\psi_{i,\theta}\}_{i=0}^\infty$ , formando uma base ortonormal de  $X$  com relação à norma  $\|\cdot\|_{X,\theta}$ . As autoseqüências correspondem a autovalores reais  $\{\lambda_i(\theta)\}_{i=0}^\infty$  cujo único possível ponto de acumulação é o zero.*

Desta maneira, os autovalores  $\lambda_i(\theta)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  podem ser enumerados em ordem decrescente em valor absoluto,

$$|\lambda_0(\theta)| \geq |\lambda_1(\theta)| \geq |\lambda_2(\theta)| \geq \dots$$

A segunda família de operadores que será considerada, é a família  $\{T_\theta\}_{\theta \geq 0}$  dada por

$$T_\theta g = (M + \theta + c)^{-1}(\varphi_c^p g).$$

O operador  $T_\theta$  é visto agindo sobre o espaço de Hilbert,

$$Y = \left\{ g; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ é periódica de período } 2L \text{ e } \|g\|_Y = \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |g(x)|^2 \varphi_c^p(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

o qual é munido com o produto interno,

$$\langle g, h \rangle_Y = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) \overline{h(x)} \varphi_c^p(x) dx.$$

Provemos que se  $g \in Y$  então  $T_\theta g \in Y$ . Ainda mais,  $T_\theta$  é um operador limitado de  $Y$  em  $Y$ . Notemos primeiramente que se  $g \in Y$  temos que  $\varphi_c^p g \in L_{per}^2$  pela limitação de  $\varphi_c$ . Assim  $(M + \theta + c)^{-1} \varphi_c^p g \in L_{per}^2$  pois pela limitação de  $\frac{1}{\omega_\theta}$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |((M + \theta + c)^{-1} \varphi_c^p g)^\wedge(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\omega_\theta(k)} \widehat{\varphi_c^p g}(k) \right|^2 \\ &\leq C_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi_c^p g}(k)|^2 \\ &= \frac{C_1}{2L} \int_{-L}^L |\varphi_c^p(x) g(x)|^2 dx < +\infty. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Plancherel, obtemos que  $(M + \theta + c)^{-1} \varphi_c^p g \in L_{per}^2$  e com isto,

$$\int_{-L}^L |(M + \theta + c)^{-1} (\varphi_c^p(x) g(x))|^2 \varphi_c^p(x) dx \leq C_2 \int_{-L}^L |(M + \theta + c)^{-1} \varphi_c^p(x) g(x)|^2 dx < \infty,$$

onde  $C_2 = \sup_{x \in [-L, L]} |\varphi_c^p(x)|$ .

**Proposição 3.1.3.** (a) Se  $g \in Y$  é uma autofunção de  $T_\theta$  para um autovalor não nulo, então  $g \in L_{per}^2$ .

(b) O operador  $T_\theta$  é um operador compacto e autoadjunto.

**Demonstração:** a) Seja  $\lambda \neq 0$  tal que  $T_\theta g = \lambda g$ . Então para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{\lambda} \widehat{T_\theta g}(n) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\omega_\theta(n)} \widehat{(\varphi_c^p g)}(n).$$

Como  $g \in Y$  implica em  $\varphi_c^p g \in L_{per}^2$  e  $\omega_\theta$  é limitada, temos pelo Teorema de Plancherel que  $g \in L_{per}^2$ .

b) A ação de  $T_\theta$  sobre o espaço  $Y$  é dada por,

$$T_\theta g(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L G_\theta(x-y) g(y) d\nu(y),$$

onde  $d\nu(y) = \varphi_c^p(y) dy$  determina uma medida positiva sobre  $[-L, L]$  e  $G_\theta$  é tal que  $\widehat{G_\theta}(n) = \frac{1}{\omega_\theta(n)}$ , a qual está bem definida pois  $\left( \frac{1}{\omega_\theta(n)} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Por Plancherel temos  $G_\theta \in L_{per}^2([-L, L])$ , donde  $\widetilde{G}_\theta(x, y) = G_\theta(x-y) \in L_{per}^2(d\nu(x) \times d\nu(y))$  e portanto  $T_\theta$  é um operador de Hilbert-Schmidt e desta forma  $T_\theta$  determina um operador compacto. Sendo  $\omega_\theta$  uma função par pois o símbolo de  $M$  é par, segue que  $G_\theta$  é par e como consequência,  $T_\theta$  é autoadjunto, pois se  $g, h \in Y$  então

$$\begin{aligned} \langle h, T_\theta g \rangle_Y &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h(x) \overline{T_\theta g(x)} \varphi_c^p(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h(x) \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L G_\theta(x-y) \overline{g(y)} \varphi_c^p(y) dy \right] \varphi_c^p(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L G_\theta(y-x) h(x) \varphi_c^p(x) dx \right] \overline{g(y)} \varphi_c^p(y) dy \\ &= \langle T_\theta h, g \rangle_Y. \end{aligned}$$

o que prova o desejado. □

A próxima Proposição relaciona os autovalores de  $T_\theta$  com os autovalores de  $S_\theta$ .

**Proposição 3.1.4.** *Suponha que  $\text{Ker}T_\theta = \{0\}$  e seja  $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$  um conjunto ortonormal completo de autofunções de  $T_\theta$  em  $Y$ , com  $T_\theta\xi_i = \lambda_i\xi_i$  para  $i \geq 0$ . Então  $\{\sqrt{|\lambda_i|}\widehat{\xi}_i\}_{i=0}^\infty$  é um conjunto ortonormal completo de autosequências para  $S_\theta$  em  $X$  com  $S_\theta\widehat{\xi}_i = \lambda_i\widehat{\xi}_i$ .*

**Demonstração:** A condição  $\text{Ker}T_\theta = \{0\}$  implica que todos os autovalores de  $T_\theta$  são não identicamente nulos. Por outro lado, pela Proposição 3.1.3 temos que  $\xi_i \in L^2_{\text{per}} \forall i \geq 0$  e portanto pelo Teorema de Plancherel tem-se  $\widehat{\xi}_i \in \ell^2$ . Com isto,

$$\begin{aligned} S_\theta\widehat{\xi}_i(n) &= \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_j \mathcal{K}(n-j)\widehat{\xi}_i(j) \\ &= \widehat{T_\theta\xi_i}(n) = \lambda_i\widehat{\xi}_i. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.2 concluí-se que  $\widehat{\xi}_i \in X$ .

Vamos à prova de que  $\{\sqrt{|\lambda_i|}\widehat{\xi}_i\}_{i=0}^\infty$  forma um conjunto ortonormal completo. De fato, primeiramente vamos mostrar que,

- (i) Se  $\alpha \in X$  então  $\check{\alpha} \in Y$ . (onde  $\check{\alpha}$  denota a transformada de Fourier inversa da sequência  $\alpha$ , ver definição na página 9).
- (ii) Se  $g \in Y$  então  $\widehat{g} \in X$ .

Com efeito, provemos apenas (i), pois a prova de (ii) é análoga. Dado  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$  temos por Parseval, já que  $\alpha \in X \Rightarrow \alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |\check{\alpha}(x)|^2 \varphi_c^p(x) dx &\leq \frac{C_2}{2L} \int_{-L}^L |\check{\alpha}(x)|^2 dx \\ &= C_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < \infty, \end{aligned}$$

o que prova (i).

Seja então  $\alpha \in X$ , por (ii) provado acima e pelo Teorema de Parseval temos,

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha, \widehat{\xi}_i \rangle_{X, \theta} &= \lambda_i^{-1} \langle \alpha, \lambda_i \widehat{\xi}_i \rangle_{X, \theta} = \lambda_i^{-1} \langle \alpha, S_\theta(\widehat{\xi}_i) \rangle_{X, \theta} \\
 &= \lambda_i^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha(n) \overline{S_\theta \widehat{\xi}_i(n)} \omega_\theta(n) \\
 &= \lambda_i^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha(n) \overline{T_\theta \widehat{\xi}_i(n)} \omega_\theta(n) \\
 &= \lambda_i^{-1} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \check{\alpha}(x) \overline{\widehat{\xi}_i(x)} \varphi_c^p(x) dx \\
 &= \lambda_i^{-1} \langle \check{\alpha}, \xi_i \rangle_Y .
 \end{aligned}$$

Considerando  $\alpha = \lambda_j \widehat{\xi}_j$  obtemos pela última expressão,

$$\langle \lambda_j \widehat{\xi}_j, \widehat{\xi}_i \rangle_{X, \theta} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \langle \xi_j, \xi_i \rangle_Y .$$

Suponhamos agora que  $\alpha \in X$  e que

$$\langle \alpha, \widehat{\xi}_i \rangle_{X, \theta} = 0, \quad \forall i \geq 0.$$

Pela relação acima temos

$$\langle \check{\alpha}, \xi_i \rangle_Y = \lambda_i \langle \alpha, \widehat{\xi}_i \rangle_{X, \theta} = 0, \quad \forall i \geq 0.$$

Como  $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$  é um conjunto completo em  $Y$  temos pela última relação que  $\check{\alpha} = 0$  em  $Y$ . Sendo  $\alpha \in X$  pelo item (ii) acima e estamos trabalhando com a transformada de Fourier em  $L_{per}^2([-L, L])$  com  $Y \hookrightarrow L_{per}^2([-L, L])$  temos que se  $\check{\alpha} = 0$  em  $Y$  então  $\check{\alpha} = 0$  em  $L_{per}^2([-L, L])$ , donde  $\alpha = 0$  em  $\ell^2(\mathbb{Z})$  e portanto  $\alpha = 0$  em  $X$ .

□

**Observação 3.1.3.** *Os resultados demonstrados previamente, nos fornecem que a aplicação  $\mathcal{F} : Y \rightarrow X$  onde  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$  (estamos considerando a transformada de Fourier em  $L_{per}^2([0, L])$ ) é um isomorfismo e além disso, os operadores  $T_\theta$  e  $S_\theta$  estão relacionados através desta aplicação.*

## 3.2 Propriedades de Positividade.

Nesta seção daremos condições suficientes para obtermos as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10).

**Definição 3.2.1.** Dizemos que uma sequência de números reais  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  está na classe  $PF(2)$  estrito e discreto (somente  $PF(2)$  discreto daqui por diante, para este caso) se:

- i)  $\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ ,
- ii)  $\alpha_{n_1-m_1}\alpha_{n_2-m_2} - \alpha_{n_1-m_2}\alpha_{n_2-m_1} > 0$  para  $n_1 < n_2$  e  $m_1 < m_2$ .

A definição anterior nada mais é do que uma discretização da definição usual que é tratada no caso contínuo, isto é, quando estamos trabalhando com funções reais  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso, diremos que uma tal função  $g$  está na classe  $PF(2)$  se:

- i)  $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $g(x_1 - y_1)g(x_2 - y_2) - g(x_1 - y_2)g(x_2 - y_1) > 0$  para  $x_1 < x_2$  e  $y_1 < y_2$ .

Para maiores detalhes, veja Karlin [33]. Como exemplo, considere a função  $g(x) = \text{sech}^2(x)$ .

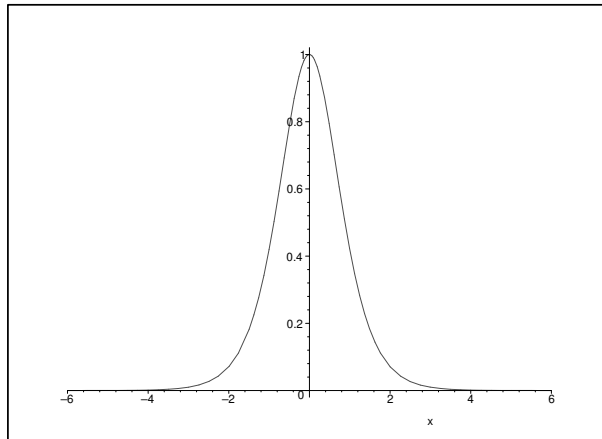


Figura 3.1: Um exemplo de uma função em  $PF(2)$  contínua.

Uma condição suficiente para que uma função  $g$  esteja na classe  $PF(2)$  é tratada em Albert&Bona [4] e enunciada como segue.

**Lema 3.2.1.** Suponha que  $g$  é uma função positiva, duas vezes diferenciável sobre  $\mathbb{R}$  e satisfazendo  $\frac{d^2}{dx^2}(\log g(x)) < 0$  para  $x \neq 0$ . Então  $g \in PF(2)$ .

O Lema 3.2.1 estabelece um critério para decidir quando uma função duas vezes diferenciável é logaritmicamente côncava. Num contexto mais geral (ver [20] e [52]) temos,

**Definição 3.2.2.** *Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positiva é dita ser logaritmicamente côncava se para todos os pares  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  e para cada  $0 < \lambda < 1$  tem-se*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq (f(x_1))^\lambda \cdot (f(x_2))^{1-\lambda}.$$

A definição de uma função que pertence à classe  $PF(2)$  pode ser generalizada como segue. Usaremos alguns resultados concernentes à Karlin [33] capítulos 7, 8 e 9 para que possamos estender o conceito de uma função em  $PF(2)$ .

**Definição 3.2.3.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser de classe  $PF(r)$  (ou uma função Pólya Frequency de ordem  $r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ) se*

$$\begin{vmatrix} f(x_1 - y_1) & f(x_1 - y_2) & \dots & f(x_1 - y_m) \\ f(x_2 - y_1) & f(x_2 - y_2) & \dots & f(x_2 - y_m) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f(x_m - y_1) & f(x_m - y_2) & \dots & f(x_m - y_m) \end{vmatrix} \geq 0,$$

para todos  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ ,  $y_1 < y_2 < \dots < y_m$  com  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq m \leq r$ .

Ademais, diremos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está na classe  $PF(r)$  estrita quando a desigualdade do determinante acima ocorre no sentido estrito e denotaremos  $SPF(r)$ .

**Observação 3.2.1.** *No decorrer deste tese, como estamos interessados apenas no caso de funções pertencentes a  $SPF(r)$ , denotaremos para simplificar, apenas por  $PF(r)$ .*

No nosso caso, como estamos tratando de funções periódicas, seja  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $L > 0$ . Suponha sem perda da generalidade que  $g$  é ao menos diferenciável. Considere a expansão em série de Fourier

$$g(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

onde  $z = e^{\frac{2\pi ix}{L}}$ . Diremos que a sequência dos coeficientes  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  pertence a  $PF(r)$  discreto se, ao denotarmos  $\gamma(n) = a_n$ , então  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  está em  $PF(r)$  no sentido da Definição 3.2.3. Neste caso, diremos que  $g$  é gerada por uma sequência  $PF(r)$ .

No caso particular de sequências pares em  $PF(2)$  discreto, temos o seguinte resultado que será útil mais adiante nas aplicações,

**Teorema 3.2.1.** *A convolução de duas sequências pares em  $PF(2)$  discreto está em  $PF(2)$  discreto.*

**Demonstração:** Ver Karlin [33].

O resultado principal desta tese é apresentado agora,

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $\varphi_c$  uma solução onda viajante periódica positiva e par para (1.6). Assuma que  $\widehat{\varphi}_c > 0$  e  $\mathcal{K} = \widehat{\varphi}_c^p \in PF(2)$  discreto, então  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10) ocorrem para o operador  $\mathcal{L}$ .*

**Demonstração:** Primeiramente será mostrado que os autovalores  $\lambda_0(\theta)$  e  $\lambda_1(\theta)$  de  $S_\theta$  são positivos, distintos e simples.

Provaremos que o autovalor  $\lambda_0(\theta)$  é positivo e simples. Neste ponto, usaremos o fato de que  $\mathcal{K} = \widehat{\varphi}_c^p$  é uma sequência positiva. Notemos que o autovalor  $\lambda_0$  possui o maior valor absoluto e  $S_\theta|_X$  é compacto e autoadjunto, então,

$$\lambda_0(\theta) = \pm \sup_{\|\alpha\|_X=1} | \langle S_\theta \alpha, \alpha \rangle_X | \quad (3.8)$$

Seja  $\psi(\theta) := \psi$  uma autosequência de  $S_\theta$  correspondente à  $\lambda_0(\theta) := \lambda_0$ . Vamos mostrar que  $\psi$  possui apenas um sinal, isto é ou  $\psi(n) \leq 0$  ou  $\psi(n) \geq 0$ . Suponha por absurdo que  $\psi$  assumia valores positivos e negativos. Como o núcleo  $\mathcal{K}$  é positivo temos

$$\begin{aligned} S_\theta |\psi|(n) &= \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j) |\psi(j)| \\ &= \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j) \psi^+(j) + \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j) \psi^-(j) \end{aligned}$$

Então,

$$S_\theta |\psi|(n) > \left| \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j) \psi^+(j) - \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j) \psi^-(j) \right|,$$



onde  $\psi^+$  e  $\psi^-$  denotam, respectivamente, as partes positivas e negativas da autosequência  $\psi$  e o sinal de  $>$  presente na desigualdade acima ocorre pois  $\psi$ , por hipótese, assume valores positivos e negativos. Então,

$$\begin{aligned} S_\theta |\psi|(n) &> \left| \frac{1}{\omega_\theta(n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(n-j)\psi(j) \right| \\ &= |S_\theta \psi(n)| \\ &= |\lambda_0| |\psi(n)| \end{aligned}$$

Desta forma, pela desigualdade acima concluí-se

$$\begin{aligned} \langle S_\theta(|\psi|), |\psi| \rangle_{X,\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_\theta |\psi|(n) |\psi(n)| \omega_\theta(n) \\ &> \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_0| |\psi(n)|^2 \omega_\theta(n) \\ &= |\lambda_0| \|\psi\|_{X,\theta}^2. \end{aligned}$$

Assim, supondo que  $\|\psi\|_X = 1$  obtém-se  $\langle S_\theta(|\psi|), |\psi| \rangle_X > |\lambda_0|$ , o que contradiz (3.8). Com isto, existe  $\psi_0$  autosequência de  $S_\theta$  a qual é digamos, não-negativa. Porém,  $\mathcal{K}$  é uma sequência positiva e  $S_\theta(\psi_0) = \lambda_0 \psi_0$ , então temos  $\psi_0(n) > 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ . Com efeito, sendo  $\psi_0(n) \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , temos que se existisse  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $\psi_0(n_0) = 0$ , obteríamos que  $S_\theta(\psi_0)(n_0) = \lambda_0 \psi_0(n_0) = 0$ . Desta forma teríamos que  $\psi_0(j) = 0$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  o que contradiz o fato de  $\psi_0$  ser uma autosequência associada à  $\lambda_0$ .

Para provarmos que  $\lambda_0$  é simples note que  $\psi_0$  não pode ser ortogonal à qualquer outra autosequência de um único sinal em  $X$ . Se caso  $\lambda_0$  não fosse simples, podemos assumir por exemplo, que  $E_{\lambda_0}$  = autoespaço associado a  $\lambda_0$  é de dimensão 2 (posto que se a dimensão de  $E_{\lambda_0}$  for maior que 2 basta considerar um subespaço de dimensão 2). Sendo  $S_\theta$  autoadjunto e  $S_\theta(E_{\lambda_0}) = E_{\lambda_0}$  (consequentemente,  $S_\theta|_{E_{\lambda_0}}$  seria um operador definido em um espaço de dimensão finita), poderíamos escolher uma base ortogonal  $\{\psi_0, \tilde{\psi}_0\}$  para o autoespaço  $E_{\lambda_0}$  com  $\tilde{\psi}_0 > 0$ , ou seja, teríamos  $E_{\lambda_0} = [\psi_0, \tilde{\psi}_0]$ . Mas isto contradiz o mencionado no início do parágrafo e portanto  $\lambda_0$  é simples.

Provemos agora que  $-\lambda_0$  não pode ser autovalor de  $S_\theta$ . De fato, se caso isto ocorresse então existiria por exemplo  $\psi < 0$ , tal que  $S_\theta \psi = -\lambda_0 \psi$ . Desta maneira  $\langle \psi_0, \psi \rangle_{X,\theta} < 0$ ,

pois  $\psi_0$  fora escolhido como sendo uma autosequência positiva. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \psi_0, \psi \rangle_{X,\theta} &= \frac{1}{\lambda_0} \langle S_\theta \psi_0, \psi \rangle_{X,\theta} = \frac{1}{\lambda_0} \langle \psi_0, -\lambda_0 \psi \rangle_{X,\theta} \\ &= - \langle \psi_0, \psi \rangle_{X,\theta} > 0. \end{aligned}$$

A relação acima nos fornece um absurdo. Provando que  $-\lambda_0$  não é autovalor de  $S_\theta$  e como consequência tem-se  $|\lambda_1| < \lambda_0$ .

Agora iremos estudar o autovalor  $\lambda_1(\theta) := \lambda_1$ . Mas antes, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares e portanto faremos uma pausa na demonstração do Teorema 3.2.2.

Neste momento usaremos o fato de que o núcleo  $\mathcal{K}$  tem a propriedade  $PF(2)$  discreto. Consideremos o conjunto de índices,

$$\Delta = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; n_1 < n_2\}.$$

Denotando-se  $\bar{n} = (n_1, n_2)$  e  $\bar{m} = (m_1, m_2)$ , vamos definir para  $\bar{n}, \bar{m} \in \Delta$  a seguinte sequência,

$$\mathcal{K}_2(\bar{n}, \bar{m}) := \mathcal{K}(n_1 - m_1)\mathcal{K}(n_2 - m_2) - \mathcal{K}(n_1 - m_2)\mathcal{K}(n_2 - m_1).$$

Por hipótese,  $\mathcal{K} \in PF(2)$  e desta forma  $\mathcal{K}_2 > 0$ .

Seja  $\alpha = (\alpha_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \Delta} := (\alpha(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \Delta}$ , o espaço  $\ell^2(\Delta)$  é definido como sendo

$$\ell^2(\Delta) = \left\{ \alpha; \sum \sum_{\Delta} |\alpha_{\bar{n}}|^2 := \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n_1 < n_2 \\ n_2 \in \mathbb{Z}}} |\alpha(n_1, n_2)|^2 < +\infty \right\}$$

Definamos agora o operador  $S_{2,\theta} : \ell^2(\Delta) \rightarrow \ell^2(\Delta)$  dado por,

$$S_{2,\theta} g(\bar{n}) = \sum \sum_{\Delta} G_{2,\theta}(\bar{n}, \bar{m}) g(\bar{m}),$$

$$\text{onde } G_{2,\theta}(\bar{n}, \bar{m}) = \frac{\mathcal{K}_2(\bar{n}, \bar{m})}{\omega_\theta(n_1)\omega_\theta(n_2)}.$$

Consideremos o espaço,

$$W = \left\{ \alpha \in \ell^2(\Delta); \|\alpha\|_{W,\theta} := \left( \sum \sum_{\Delta} |\alpha(\bar{n})|^2 \omega_{\theta}(n_1) \omega_{\theta}(n_2) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

$W$  é um espaço de Hilbert munido da norma  $\|\cdot\|_{W,\theta}$  dada acima e com produto interno correspondente,

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{W,\theta} = \sum \sum_{\Delta} \alpha(\bar{n}) \overline{\beta(\bar{n})} \omega_{\theta}(n_1) \omega_{\theta}(n_2).$$

**Observação 3.2.2.** 1) De maneira análoga ao que foi feito na Proposição 3.1.2, prova-se que  $S_{2,\theta}|_W$  é um operador compacto e autoadjunto. Isto fornece uma sequência de autovalores numeradas em ordem decrescente em valor absoluto,

$$|\mu_0(\theta)| \geq |\mu_1(\theta)| \geq |\mu_2(\theta)| \geq \dots$$

2) Prova-se também, conforme feito anteriormente que  $\mu_0(\theta) := \mu_0$  é positivo, simples,  $|\mu_1| < \mu_0$  e a autosequência associada possuindo um único sinal.

**Definição 3.2.4.** Sejam  $\alpha^1, \alpha^2 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , definimos o produto wedge  $\alpha^1 \wedge \alpha^2$  em  $\Delta$  por

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2)(n_1, n_2) = \alpha^1(n_1) \alpha^2(n_2) - \alpha^1(n_2) \alpha^2(n_1).$$

Com a notação da Definição 3.2.4 temos os seguintes resultados.

**Lema 3.2.2.** *Seja*

$$A = \{ \alpha^1 \wedge \alpha^2; \alpha^1 \wedge \alpha^2 \in \ell^2(\Delta) \text{ desde que } \alpha^1, \alpha^2 \in X \}.$$

Então  $A$  é denso em  $W$ .

**Demonstração:** Veja [32] e [33].

O próximo Lema nos mostra a força do operador  $S_{2,\theta}$ ,

**Lema 3.2.3.** *Sejam  $\alpha^1, \alpha^2 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Então  $S_{2,\theta}(\alpha^1 \wedge \alpha^2) = S_{\theta} \alpha^1 \wedge S_{\theta} \alpha^2$ .*

**Demonstração:** Veja [32] e [33].

No que segue representaremos por  $S_{\theta}^X$  a restrição de  $S_{\theta}$  ao espaço de Hilbert  $X$ . Usaremos agora alguns resultados da teoria espectral contida em Kato [34].

Temos que  $\lambda_0$  é um autovalor isolado de  $S_\theta^X$ . Isto nos fornece uma partição do espectro de  $S_\theta^X$  em  $\Sigma'_\theta$  e  $\Sigma''_\theta$ . Conseqüentemente temos uma decomposição de  $S_\theta^X$  de acordo com a decomposição  $X = M_0 \oplus N$ , onde  $M_0 = [\psi_0]$ , do espaço de tal maneira que o espectro das partes  $S_\theta^X|_{M_0}$ ,  $S_\theta^X|_N$  coincidem com  $\Sigma'_\theta$  e  $\Sigma''_\theta$  respectivamente.  $M_0$  em verdade determina a projeção ortogonal  $P_\theta$  de  $X$  sobre o autoespaço associado à  $\lambda_0$  e  $N = Ker P$ . Tem-se ainda a decomposição de  $S_\theta^X$  da forma

$$S_\theta^X = \lambda_0 P_\theta + Q_\theta,$$

onde  $Q_\theta := S_\theta^X - \lambda_0 P_\theta$  e se satisfazem  $P_\theta Q_\theta = Q_\theta P_\theta = 0$  e  $Q_\theta|_N = S_\theta^X|_N : N \rightarrow N$  (pois,  $Q_\theta|_{M_0} \equiv 0$ ). Além disso  $r(Q_\theta|_N) =$  raio espectral do operador  $Q_\theta|_N = |\lambda_1|$ .

Ademais, ainda pela teoria espectral contida em Kato [34] o autovalor  $\lambda_0 = \lambda_0(\theta)$  é diferenciável com relação à  $\theta \geq 0$  bem como  $\mu_0 = \mu_0(\theta)$ . Como conseqüência,  $\psi_0$  e  $\tau_0 =$  autoseqüência associada a  $\mu_0 = \mu_0(\theta)$  são autoseqüências diferenciáveis em relação à  $\theta$ .

**Lema 3.2.4.** a) Na notação dada anteriormente temos,

$$\frac{(S_\theta^X)^m}{\lambda_0^m} \longrightarrow P_\theta,$$

quando  $m \rightarrow +\infty$  na topologia forte de  $B(X, X)$ .

b) Um resultado análogo ao item a) vale para  $S_{2,\theta}$  no lugar de  $S_\theta$ ,  $\mu_0$  no lugar de  $\lambda_0$  e um operador conveniente no lugar de  $P_\theta$ .

**Demonstração:** Provemos o item a). Consideremos  $P_\theta$  e  $Q_\theta$  conforme mencionado acima. Então,

$$\left\| \left( \frac{S_\theta^X}{\lambda_0} \right)^n - P_\theta \right\| = \left\| \frac{(\lambda_0 P_\theta)^n + Q_\theta^n}{\lambda_0^n} - P_\theta \right\| = \left\| \frac{Q_\theta^n}{\lambda_0^n} \right\|,$$

onde  $\|\cdot\|$  representa a norma em  $B(X, X)$ .

Agora, como  $Q_\theta$  é autoadjunto posto que se tem  $Q_\theta = S_\theta^X - \lambda P_\theta$  com  $S_\theta^X$  e  $P_\theta$  autoadjuntos ( $P_\theta$  é autoadjunto por se tratar de uma projeção ortogonal definida em  $X$ ), temos  $r(Q_\theta) = \|Q_\theta\|$ . Conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left( \frac{S_\theta^X}{\lambda_0} \right)^n - P_\theta \right\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{Q_\theta^n}{\lambda_0^n} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\lambda_1|^n}{\lambda_0^n} = 0.$$

Provando o desejado.

□

**Lema 3.2.5.** a)  $\mu_0(\theta) = \lambda_0(\theta)\lambda_1(\theta)$ . Consequentemente, podemos concluir que  $\lambda_1 > 0$ .  
b)  $\lambda_1$  é simples.

**Demonstração:** a) Temos pelo Lema 3.2.3 que  $\lambda_0\lambda_1$  é autovalor de  $S_{2, \theta}$  cuja autosequência é  $\psi_0 \wedge \psi_1$ , onde  $\psi_1(\theta) := \psi_1$  é a autosequência associada a  $\lambda_1$ .

De fato,

$$S_{2,\theta}(\psi_0 \wedge \psi_1) = S_\theta\psi_0 \wedge S_\theta\psi_1 = \lambda_0\lambda_1(\psi_0 \wedge \psi_1).$$

Assim,  $\mu_0 \geq \lambda_0|\lambda_1|$ . Basta então provar que  $\mu_0 \leq \lambda_0|\lambda_1|$ , pois se tem também que  $-\mu_0$  não pode ser autovalor de  $S_{2, \theta}$ . De fato, se  $|\lambda_1| < \frac{\mu_0}{\lambda_0}$ , vamos considerar  $P_\theta$  de acordo com a decomposição  $X = M_0 \oplus N$ , conforme dito acima. Seja  $\alpha^1 = r_1\psi_0 + \omega\gamma^1$  e  $\alpha^2 = r_2\psi_0 + \omega\gamma^2$ , onde  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  e  $\gamma^1, \gamma^2 \in N$ .

Por um lado, pelo princípio da indução prova-se que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_{2, \theta}}{\mu_0}\right)^m \alpha^1 \wedge \alpha^2(n_1, n_2) &= r_1 \left[ \psi_0(n_1) \left(\frac{S_\theta}{\beta}\right)^m \gamma^2(n_2) - \right. \\ &\quad \left. - \psi_0(n_2) \left(\frac{S_\theta}{\beta}\right)^m \gamma^2(n_1) \right] + \\ &\quad + r_2 \left[ \psi_0(n_2) \left(\frac{S_\theta}{\beta}\right)^m \gamma^1(n_1) - \right. \\ &\quad \left. - \psi_0(n_1) \left(\frac{S_\theta}{\beta}\right)^m \gamma^1(n_2) \right] + \\ &\quad + \left(\frac{S_\theta}{\lambda_0}\right)^m \gamma^1(n_1) \left(\frac{S_\theta}{\beta}\right)^m \gamma^2(n_2) - \\ &\quad - \left(\frac{S_\theta}{\lambda_0}\right)^m \gamma^1(n_2) \left(\frac{S_\theta}{\beta}\right)^m \gamma^2(n_1), \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde  $\beta = \frac{\mu_0}{\lambda_0} > |\lambda_1|$ .

Por outro lado,  $\beta > |\lambda_1| = r(Q_\theta|_N) = \|Q_\theta|_N\|$  e com isto,  $\beta \in \rho(Q_\theta|_N)$  = resolvente de  $Q_\theta|_N$ . Ademais, a série de Neumann

$$R_\beta(Q_\theta|_N) := -\frac{1}{\beta} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{Q_\theta|_N}{\beta}\right)^j,$$

converge absolutamente o que implica em  $\left(\frac{Q_\theta|_N}{\beta}\right)^m = \left(\frac{S_\theta|_N}{\beta}\right)^m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Mas, pelo Lema 3.2.4-a) temos que  $\left(\frac{S_\theta}{\lambda_0}\right)^m \rightarrow P_\theta$  com  $P_\theta|_N \equiv 0$ . Portanto, o lado direito da igualdade (3.9) converge para zero quando  $m \rightarrow +\infty$ . Agora, como o conjunto  $A$  definido no Lema 3.2.2 é denso em  $W$  tem-se,  $\left(\frac{S_{2,\theta}}{\mu_0}\right)^m g \rightarrow 0$ , quando  $m \rightarrow +\infty$ ,  $\forall g \in W$ . O que contradiz o item b) do lema 3.2.4. Provando assim o desejado em a).

b) Vamos então provar que  $\lambda_1(\theta)$  é *simples*. Para isto, mostraremos que  $\psi_1$  é ímpar e  $\psi(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0$ . Escrevamos  $\psi_1 = \psi_1^P + \psi_1^I$ , onde  $\psi_1^P$  e  $\psi_1^I$  denotam respectivamente a parte par e ímpar da autosequência  $\psi_1$ . Afirmamos que  $\psi_1^P \equiv 0$ , isto é,  $\psi_1$  é ímpar. Com efeito, como o núcleo  $\mathcal{K}$  de  $S_\theta$  é simétrico e  $\omega_\theta$  é par, temos que  $S_\theta$  leva sequências pares em pares e ímpares em ímpares e portanto  $\psi_1^P$  e  $\psi_1^I$  satisfazem  $S_\theta \psi_1^P = \lambda_1 \psi_1^P$  e  $S_\theta \psi_1^I = \lambda_1 \psi_1^I$ . Utilizando este fato concluí-se pelo Lema 3.2.3 que  $\psi_0 \wedge \psi_1^P$  satisfaz  $S_{2,\theta}(\psi_0 \wedge \psi_1^P) = \lambda_0 \lambda_1 (\psi_0 \wedge \psi_1^P)$ .

Agora sendo  $\mu_0 > 0$  e simples obtemos,  $\psi_0 \wedge \psi_1^P \in [\tau_0]$ , onde  $\tau_0$  é a autosequência associada a  $\mu_0$ . Então ou  $\psi_0 \wedge \psi_1^P \equiv 0$  ou  $\psi_0 \wedge \psi_1^P \neq 0$  (isto é,  $\psi_0 \wedge \psi_1^P$  tem um único sinal). Deste fato temos que se  $\psi_1^P$  é uma sequência não identicamente nula então ela deverá possuir no máximo um zero. Com efeito, suponha por absurdo que existam  $n_0$  e  $n_1$  pertencentes a  $\mathbb{Z}$  satisfazendo  $\psi_1^P(n_0) = 0$  e  $\psi_1^P(n_1) = 0$ . Vamos assumir, sem perda da generalidade que  $n_0 < n_1$ . Tendo este fato, então  $(n_0, n_1) \in \Delta$  e daí  $(\psi_0 \wedge \psi_1^P)(n_0, n_1) = 0$  donde  $\psi_0 \wedge \psi_1^P \equiv 0$ . Dado  $n \in \mathbb{Z}$ , temos,

$$0 = (\psi_0 \wedge \psi_1^P)(n, n_1) = \psi_1^P(n) \psi_0(n_1) - \underbrace{\psi_1^P(n_1)}_{=0} \psi_0(n).$$

Logo,  $\psi_1^P(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ . O que caracteriza um absurdo, já que estamos assumindo que  $\psi_1^P$  é não identicamente nula. Assim, sendo  $\psi_1^P$  par, ou  $\psi_1^P \equiv 0$  ou ela não possui zeros, exceto possivelmente em  $n = 0$ . Se ocorrer o segundo caso devemos ter que  $\psi_1^P$  é uma autosequência de  $S_\theta$  com  $\psi_1^P(n) \neq 0 \forall n \neq 0$  e desta maneira  $\langle \psi_1^P, \psi_0 \rangle_{X, \theta} \neq 0$  (em verdade temos que considerar três casos,  $\psi_1^P(0) = 0$  ou  $\psi_1^P(0) > 0$  ou  $\psi_1^P(0) < 0$  após feito isso determinar que  $\psi_1^P$  tem apenas um sinal nos dois últimos casos e no primeiro se tem que  $\psi_1^P(n) > 0$  (ou  $\psi_1^P(n) < 0$ ) para todo  $n \neq 0$ ). Mas assim, temos duas autosequências de um operador autoadjunto associadas a autovalores distintos cujo produto interno é não nulo. Isto fornece um absurdo, e, conseqüentemente  $\psi_1^P \equiv 0$ , donde  $\psi_1$  é ímpar. Analogamente, se fizermos a mesma análise para  $\psi_1$  no lugar de  $\psi_1^P$  concluí-se que  $\psi_1$  possui apenas um zero e sendo tal ímpar este deve ocorrer em  $n = 0$ .

A sequéncia  $\psi_1$  exibida anteriormente foi uma autosequéncia arbitrária associada ao

autovalor  $\lambda_1$ . Então fora mostrado que qualquer autoseqüência  $\psi$  associada à  $\lambda_1$  deve ser ímpar e  $\psi(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0$ . Ademais, temos que se  $n > 0$  então  $0 < \psi_0(0)\psi_1(n)$ , donde  $\psi_1(n) > 0$  para todo  $n$  inteiro positivo e se  $n < 0$  segue-se que  $0 < -\psi_0(0)\psi_1(n)$  o que acarreta em  $\psi_1(n) < 0$  para todo  $n$  inteiro negativo. Porém, duas autoseqüências deste tipo não podem ser ortogonais pois o produto delas é par e portanto  $\lambda_1$  é *simples*, provando b).

□

**Retornemos com a prova do Teorema 3.2.2.** Considere  $\|\psi_i(\theta)\|_X, \theta = 1$  para  $i = 0, 1$ . Como pelo Lema 3.2.5,  $\mu_0(\theta) = \lambda_0(\theta)\lambda_1(\theta)$  e já foi mencionado que  $\mu_0$  e  $\lambda_0$  são diferenciáveis com relação à  $\theta$ , temos que  $\lambda_1$  é também diferenciável em relação a este parâmetro, bem como a autoseqüência associada  $\psi_1$ . Em posse deste fato, afirmamos que,

$$\frac{d}{d\theta}\lambda_i(\theta) < 0, \quad i = 0, 1, \quad \theta \geq 0. \quad (3.10)$$

De fato, escrevamos  $\psi_\theta^i(n), i = 0, 1$  ao invés de  $\psi_{i,\theta}(n)$ , apenas por conveniência. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\lambda_i(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(\lambda_i(\theta)\|\psi_\theta^i(n)\|_{X,\theta}^2) = \frac{d}{d\theta}\left(\lambda_i(\theta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_\theta^i(n)^2\omega_\theta(n)\right) \\ &= \frac{d}{d\theta}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_\theta\psi_\theta^i(n)\psi_\theta^i(n)\omega_\theta(n)\right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\lambda_i(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(n-m)\frac{d}{d\theta}\psi_\theta^i(n)\psi_\theta^i(n)+ \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(n-m)\frac{d}{d\theta}\psi_\theta^i(n)\psi_\theta^i(n) \\ &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\theta}\psi_\theta^i(n)S_\theta\psi_\theta^i(n)\omega_\theta(n). \end{aligned}$$

Logo, usando o fato que  $\lambda_i(\theta) > 0$  para todo  $\theta \geq 0$ ,  $i = 0, 1$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \lambda_i(\theta) &= 2\lambda_i(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{d\theta} \psi_{\theta}^i(n) \right) \psi_{\theta}^i(n) \omega_{\theta}(n) \\ &= 2\lambda_i(\theta) \left\{ \frac{d}{d\theta} \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{\theta}^i(n)^2 \omega_{\theta}(n) \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{\theta}^i(n)^2 \right\} \\ &= -\lambda_i(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{\theta}^i(n)^2 < 0, \end{aligned}$$

provando a afirmação.

O próximo passo é mostrar que

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \lambda_0(\theta) = 0.$$

Com efeito, notemos que para  $\theta \geq 0$  tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_0(\theta) &= r(S_{\theta}^X) = \|S_{\theta}^X\|_{B(X,X)} \\ &\leq \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathcal{K}(n-m)}{\omega_{\theta}(n)} \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \mathcal{K}^2 * \frac{1}{\omega_{\theta}^2} \right\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathcal{K}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \left\| \frac{1}{\omega_{\theta}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{\omega_{\theta}} \rightarrow 0$  quando  $\theta \rightarrow +\infty$  e  $\left(\frac{1}{\omega_{\theta}}\right)^2 \in \ell^1$  com  $\left|\frac{1}{\omega_{\theta}}\right|^2 \leq \left(\frac{B}{1+|n|}\right)^2$ , para algum  $B > 0$ , segue que  $\left\| \frac{1}{\omega_{\theta}} \right\|_{\ell^2} \rightarrow 0$  quando  $\theta \rightarrow +\infty$ . E portanto usando um resultado análogo ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para somas infinitas temos,

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \lambda_0(\theta) = 0. \quad (3.11)$$

Provemos agora que

$$\lambda_1(0) = 1. \quad (3.12)$$

Neste momento usaremos o fato que  $\widehat{\varphi}_c > 0$ . Com efeito, temos de (1.6) que  $\frac{d}{d\xi} \varphi_c \equiv \varphi'_c$  é autosequência de  $\mathcal{L}$  com autovalor  $\theta = 0$ . Pelo Corolário 3.1.1,  $\widehat{\varphi}'_c$  é autofunção de  $S_{\theta}$  com autovalor 1. Por outro lado,  $\widehat{\varphi}'_c(n) = in \frac{\pi}{L} \widehat{\varphi}_c(n)$  é uma sequência ímpar que se anula



somente em  $n = 0$  (pois  $\widehat{\varphi}_c(n) > 0$ ). Sendo  $\psi_1$  ímpar e tal que  $\psi_1(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0$  então  $\langle \psi_1, \widehat{\varphi}'_c \rangle_X, \theta \neq 0$ . Desta maneira,  $\psi_1$  e  $\widehat{\varphi}'_c$  não podem ser autoseqüências de  $S_\theta$  para autovalores distintos (pois se caso fossem, teríamos  $\langle \psi_1, \widehat{\varphi}'_c \rangle_X, \theta = 0$ ). Logo,  $\psi_1$  e  $\widehat{\varphi}'_c$  são associados ao mesmo autovalor. Mas  $\widehat{\varphi}'_c$  é associado ao autovalor 1 com  $\theta = 0$  e portanto  $\lambda_1(0) = 1$ .

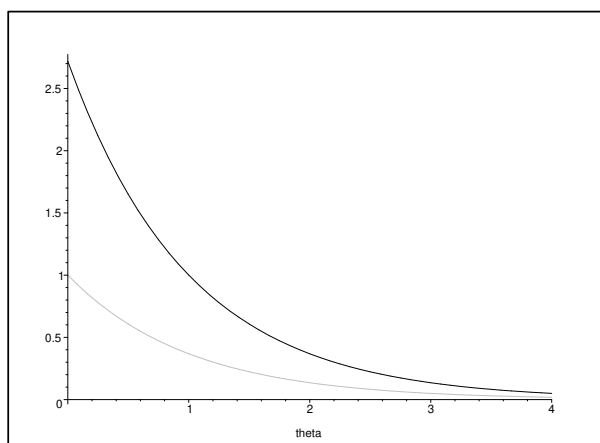


Figura 3.2: Gráfico das funções  $\lambda_0(\theta)$  (em preto) e  $\lambda_1(\theta)$  (em cinza).

Tendo provado este fato, como  $\lambda_0(0) > \lambda_1(0) = 1$  então de (3.10) e (3.11) (veja os gráficos da figura 3.2) segue que existe um único  $\theta_0 \in (0, +\infty)$  tal que  $\lambda_0(\theta_0) = 1$ . Desta forma, pelo Corolário 3.1.1, considerando-se  $\kappa = -\theta_0 < 0$ , temos que  $\mathcal{L}$  possui um autovalor negativo o qual é simples.

Agora, para  $i \geq 1$  e  $\theta > 0$  temos de (3.10) que

$$\lambda_i(\theta) \leq \lambda_1(\theta) < \lambda_1(0) = 1.$$

Vamos agora mostrar que 1 não pode ser autovalor de  $S_\theta$  para todo  $\theta \in (0, +\infty) \setminus \{\theta_0\}$ . De fato, para  $0 < \theta < \theta_0$ , suponha por absurdo que exista  $\theta_1 \in (0, \theta_0)$  tal que 1 é autovalor de  $S_{\theta_1}$ . Então para algum  $i_0 \geq 1$  temos  $\lambda_{i_0}(\theta_1) = 1$  (note que pela unicidade de  $\theta_0$  já se tem  $\lambda_0(\theta_1) \neq 1$ ). Pela relação acima tem-se que

$$\lambda_{i_0}(\theta_1) \leq \lambda_1(\theta_1) < \lambda_1(0) = 1,$$

o que nos fornece um absurdo.

Agora, para  $\theta \in (\theta_0, +\infty)$  se caso existisse  $\theta_2 \in (\theta_0, +\infty)$  tal que 1 é autovalor de  $S_{\theta_2}$

teremos então que  $\lambda_{i_1}(\theta_2) = 1$  para algum  $i_1 \geq 1$  donde, por (3.10)

$$\lambda_{i_1}(\theta_2) \leq \lambda_1(\theta_2) < \lambda_1(\theta_0) < \lambda_0(\theta_0) = 1,$$

o que também é um absurdo.

Logo, obtemos que 1 é autovalor de  $S_\theta$ ,  $\theta \geq 0$  somente para  $\theta = 0$  ou  $\theta = \theta_0$  e com isto, segue que 1 não pode ser autovalor de  $S_\theta$  para todo  $\theta \in (0, +\infty) \setminus \{\theta_0\}$ . Provando que  $\kappa = -\theta_0$  é o único autovalor de  $\mathcal{L}$  que é negativo e se obtém ( $P_1$ ).

Para obter ( $P_2$ ) note que o Corolário 3.1.1 relaciona a multiplicidade de 1 com a de  $\theta$ . Como  $\lambda_1(0) = 1$  e  $\lambda_1$  é simples segue então que  $\theta = 0$  é autovalor simples para  $\mathcal{L}$ , o que prova o Teorema.

□

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Estabilidade de Soluções Ondas Viajantes Periódicas

No presente capítulo, estamos interessados em aplicar a teoria desenvolvida no capítulo 3 para obter a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas associadas a equações KdV, BO, mKdV, 4-KdV e CNLS em (3.1). Começaremos com nossa definição de estabilidade.

**Definição 4.0.5.** *Seja  $\varphi$  uma solução onda viajante periódica com período  $2L$  da equação (1.6) e considere  $\tau_r\varphi(x) = \varphi(x+r)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{R}$ . Definimos o conjunto  $\Omega_\varphi \subset H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$ , a órbita gerada por  $\varphi$ , como sendo,*

$$\Omega_\varphi = \{g; g = \tau_r\varphi, \text{ para algum } r \in \mathbb{R}\},$$

e para qualquer  $\eta > 0$ , defina o conjunto  $U_\eta \subset H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$  por

$$U_\eta = \left\{ f; \inf_{g \in \Omega_\varphi} \|f - g\|_{H_{per}^{\frac{m_2}{2}}} < \eta \right\}.$$

Com esta terminologia, dizemos que  $\varphi$  é orbitalmente estável em  $H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$  pelo fluxo gerado pela equação (1.3) se,

(i) existe  $s_0$  tal que  $H_{per}^{s_0} \subset H_{per}^{\frac{m_2}{2}}$  e o problema de valor inicial associado à (1.3) é globalmente bem posto em  $H_{per}^{s_0}$  (veja Teoremas 2.2.1 e 2.2.2).

(ii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que para cada  $u_0 \in U_\delta \cap H_{per}^{s_0}$ , a solução de (1.3)

com  $u(0, x) = u_0(x)$  satisfaz  $u(t) \in U_\varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

A prova do seguinte Teorema geral de estabilidade pode ser mostrado usando as técnicas de Grillakis et al. [27] (veja também [11]).

**Teorema 4.0.3.** *Seja  $\varphi_c$  uma solução onda viajante periódica de (1.6) e suponha que a parte (i) da definição de estabilidade ocorre. Suponha também que o operador  $\mathcal{L}$  definido anteriormente em (1.7) tem as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10). Escolha  $\chi \in L_{per}^2$  tal que  $\mathcal{L}\chi = \varphi_c$ , e defina  $I = (\chi, \varphi_c)_{L_{per}^2}$ . Se  $I < 0$ , então  $\varphi_c$  é estável.*

**Observação 4.0.3.** *Se mostrarmos a condição  $(P_0)$  em (1.10) temos que  $\chi$  pode ser escolhido como sendo  $\chi = -\frac{d}{dc}\varphi_c$ . Desta forma, temos que*

$$I < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dc} \int_0^L \varphi_c^2(x) dx > 0.$$

---

## 4.1 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação BO

---

Vamos utilizar os resultados obtidos no capítulo anterior para a prova da estabilidade de ondas viajantes periódicas  $\varphi_c$  associadas a equação de Benjamin-Ono dada em (3.1) e satisfazendo,

$$\mathcal{H}\partial_x\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c^2 + c\varphi_c = 0. \quad (4.1)$$

Primeiramente, vamos descobrir uma solução para a equação diferencial (4.1), utilizando-se para isto o Teorema de Somatório de Poisson (ver Teorema 2.1.2). De fato, considere a equação diferencial,

$$\mathcal{H}\phi'_\omega + \omega\phi_\omega - \frac{1}{2}\phi_\omega^2 = 0$$

que determina a onda viajante solitária para a equação BO na reta. A solução da equação vem dada por

$$\phi_\omega(x) = \frac{4\pi}{1 + \omega^2 x^2}, \quad \omega > 0.$$

Sua transformada de Fourier de  $\phi_\omega$  é

$$\widehat{\phi_\omega}^{\mathbb{R}}(x) = 4\pi e^{-\frac{2\pi}{\omega}|x|}.$$

Desta forma, pelo Teorema 2.1.2 obtemos, face a paridade da função  $e^{\frac{-\pi|n|}{\omega L}}$ ,

$$\begin{aligned}\psi_\omega(x) &= \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\pi|n|}{\omega L}} e^{\frac{\pi inx}{L}} \\ &= \frac{2\pi}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{\frac{-\pi n}{\omega L}} \cos \frac{n\pi x}{L},\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Seja  $\varphi_c$ ,  $c > 0$  uma solução da equação (4.1) de período  $2L$  e suficientemente regular. A função  $\varphi_c$  possui expansão em série de Fourier,

$$\varphi_c(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

onde  $a_n = \widehat{\varphi}_c(n)$  é o coeficiente de Fourier associado.

Substituindo a expressão acima na equação (4.1), chega-se à seguinte relação

$$\left[ \frac{\pi|n|}{L} + c \right] a_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} a_m.$$

O Teorema do Somatório Poisson nos fornece uma idéia para se obter uma expressão para a solução  $\varphi_c$ . Com isto, consideremos  $a_n = \frac{2\pi}{L} e^{-\gamma|n|}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} a_m = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|m|+|n-m|)}.$$

Separadamente, analisemos o termo  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|m|+|n-m|)}$ . De fato, de acordo com a notação

acima tem-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|m|+|n-m|)} &= e^{-\gamma n} + e^{-\gamma n} + \underbrace{\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n > m \\ m > 0}} e^{-\gamma m} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n < m \\ m < 0}} e^{+\gamma m}}_{= e^{-\gamma|n|}|n|} \\
 &+ \underbrace{\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n < m \\ m > 0}} e^{-\gamma(-n+2m)} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n > m \\ m < 0}} e^{-\gamma(n-2m)}}_{= 2e^{-\gamma|n|} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\gamma k}}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} a_m &= \frac{4\pi^2}{L^2} e^{-\gamma|n|} \left[ |n| + 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\gamma k} \right] \\
 &= \frac{4\pi^2}{L^2} e^{-\gamma|n|} (|n| + \coth \gamma).
 \end{aligned}$$

Donde se conclui que

$$c + \frac{\pi|n|}{L} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{1}{2} (|n| + \coth \gamma). \quad (4.3)$$

Escolhemos agora  $\gamma = \frac{\pi}{\omega L}$  e consideremos  $c > \frac{\pi}{L}$ . Desta forma, considerando  $\omega := \omega(c) > 0$  de tal modo que  $\tanh(\gamma) = \frac{\pi}{cL}$ , obtemos de (4.2) que  $\psi_{\omega(c)} = \varphi_c$ . Por outro lado, por [46] temos que

$$\begin{aligned}
 \varphi_c(x) &= \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi|n|}{\omega L}} e^{\frac{\pi i n x}{L}} \\
 &= \frac{2\pi}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{-\frac{\pi n}{\omega L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (4.4) \\
 &= \frac{2\pi}{L} \left( \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\omega L}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{\omega L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \right).
 \end{aligned}$$

Logo nosso raciocínio, através do Teorema do Somatório de Poisson produz, segundo Benjamin [14], a função  $\varphi_c$  dada pela relação (4.4) com  $\gamma$  satisfazendo  $\tanh(\gamma) = \frac{\pi}{cL}$  e que

determina uma solução para a equação (4.1). Além disso, como

$$\operatorname{Re} \left[ \coth \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{i\pi x}{2L} \right) \right] = \frac{\sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)},$$

$\forall \lambda > 0$ , então  $\varphi_c$  dada acima pode ser reescrita como

$$\varphi_c(x) = \frac{2\pi}{L} \operatorname{Re} \left[ \coth \left( \frac{\gamma}{2} + i \frac{\pi x}{2L} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Notemos que  $\varphi_c$  é claramente positiva, posto que  $\gamma > 0$  e  $\cosh(\gamma) > 1$ .

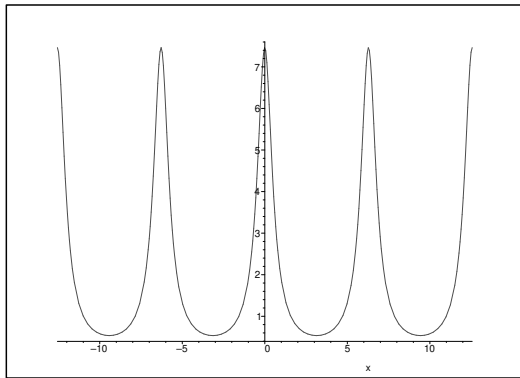


Figura 4.1: Gráfico da função  $\varphi_c$  em (4.4) com período fixado  $L = \pi$  e  $c = 2$ .

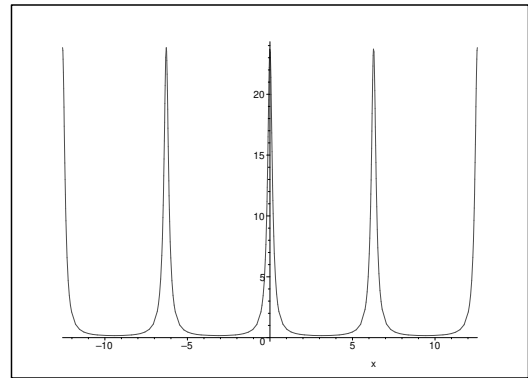


Figura 4.2: Gráfico da função  $\varphi_c$  em (4.4) com período fixado  $L = \pi$  e  $c = 6$ .

Agora, como  $\gamma := \gamma(c) = \tanh^{-1} \left( \frac{\pi}{cL} \right)$  é uma função diferenciável para  $c > \frac{\pi}{L}$ , temos que  $c \in \left( \frac{\pi}{L}, +\infty \right) \mapsto \varphi_c \in H_{per}^1$  determina uma curva regular e portanto podemos escolher  $\chi$ , no Teorema 4.0.3, como sendo  $\chi = -\frac{d}{dc} \varphi_c$ , tal que  $\mathcal{L}\chi = \varphi_c$ . Logo, a quantidade  $I = (\chi, \varphi_c)_{L_{per}^2}$  torna-se,

$$I = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \|\varphi_c\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.6)$$

Estabeleceremos agora o nosso Teorema de estabilidade para a equação de Benjamin-Ono.

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $c \in \left( \frac{\pi}{L}, +\infty \right)$ . Então a onda viajante periódica  $\varphi_c$  dada em (4.4) tal que  $\tanh(\gamma) = \frac{\pi}{cL}$  com  $\gamma = \frac{\pi}{\omega L}$  é estável em  $H_{per}^{\frac{1}{2}}([-L, L])$  pelo fluxo da equação de Benjamin-Ono.*

**Demonstração:** A condição  $(P_0)$  em (1.10) foi verificada acima. Vamos então mostrar que  $I < 0$ . De fato, recordemos que a expansão em série de Fourier de  $\varphi_c$  é,

$$\varphi_c(x) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|n|} e^{\frac{\pi i n x}{L}}. \quad (4.7)$$

Logo, de (4.6), (4.7) e o Teorema de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left( \|\varphi_c\|_{L^2_{per}}^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left( \|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2 \right) \cdot 2L \\
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left( \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma|n|} \right) \cdot 2L \\
&= -\frac{4\pi^3}{c^2 L^3} \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{cL}\right)^2} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| e^{-2\gamma|n|} \right) \cdot 2L < 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Resta provar apenas que  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10) ocorrem para o operador  $\mathcal{L}$ . De fato, temos que

$$\widehat{\varphi}_c(n) = \frac{2\pi}{L} e^{-\gamma|n|}.$$

Assim, como a função  $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ ,  $\gamma > 0$  está na classe  $PF(2)$  no caso contínuo temos que  $\widehat{\varphi}_c$  está na classe  $PF(2)$  discreto. Provando a estabilidade de  $\varphi_c$  pelo fluxo da BO.

□

### 4.1.1 Estabilidade de Soluções Constantes para a BO

A seguir, iremos mostrar que as soluções constantes  $\varphi_c \equiv 2c$  resultam ser estáveis para a BO desde que  $c < \frac{\pi}{L}$ .

Novamente, é considerada a equação,

$$\mathcal{H}\varphi'_c + c\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c^2 = 0. \tag{4.9}$$

Porém, estudaremos o comportamento da estabilidade de soluções constantes não triviais para a equação (4.9) usando a teoria de Grillakis&Shatah&Strauss [27] e a teoria de Benjamin-Bona [16]-[17] esta última como uma ilustração. Desta maneira, se  $\varphi_c(x) \equiv \tau =$  constante temos de (4.9)

$$\tau^2 = 2c\tau.$$

Logo,  $\psi_0 \equiv 2c$  e  $\phi_0 \equiv 0$  são soluções constantes para (4.9). Neste contexto, analisaremos apenas o caso  $\psi_0 \equiv 2c \neq 0$ .

A próxima Proposição resume nossos resultados,



**Proposição 4.1.1.** *Sejam  $L > 0$  e  $c > 0$  dados. Considere  $\psi_0 \equiv 2c$  a solução constante não nula da equação (4.9). Então  $\psi_0$  é estável em  $H_{per}^{\frac{1}{2}}([-L, L])$  pelo fluxo da BO desde que  $c < \frac{\pi}{L}$ .*

**Primeira demonstração:** Provemos que  $\psi_0 \equiv 2c$  é orbitalmente estável para  $c < \frac{\pi}{L}$  utilizando a teoria de Grillakis&Shatah&Strauss [27]. Consideremos  $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \rightarrow L_{per}^2([-L, L])$  definido por

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{H}\partial_x - c,$$

onde  $D(\mathcal{L}_0) = H_{per}^1([-L, L])$ . Mostraremos que  $\mathcal{L}_0$  tem um único autovalor negativo o qual é simples desde que  $c < \frac{\pi}{L}$  e que o resto do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores positivos. De fato, sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f \in D(\mathcal{L}_0)$  tais que  $\mathcal{L}_0 f = \lambda f$ . Então,

$$\begin{cases} \mathcal{H}\partial_x f - cf = \lambda f \\ f(-L) = f(L), f'(-L) = f'(L), \end{cases} \quad (4.10)$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \mathcal{H}\partial_x f = \nu f \\ f(-L) = f(L), f'(-L) = f'(L), \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $\nu = \lambda + c$ .

Neste momento, calcularemos a transformada de Hilbert periódica da função  $\cos\left(\frac{a\pi x}{L}\right)$ , com  $a > 0$  para falarmos a respeito das autofunções associadas a (4.11). Temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\cos\left(\frac{a\pi \cdot}{L}\right)\right)(x) &= \frac{a}{2L} \text{v.p} \int_{-\frac{L}{a}}^{\frac{L}{a}} \cotg\left(\frac{a\pi y}{2L}\right) \cos\left(\frac{a\pi(x-y)}{L}\right) dy \\ &= \frac{1}{2L} \text{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \text{v.p} \int_{-L}^L \cotg\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz. \\ &= \frac{1}{L} \text{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \text{v.p} \int_{-L}^L \cotg\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\cos\left(\frac{a\pi\cdot}{L}\right)\right)(x) &= \frac{1}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right)\int_{-L}^L\cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right)dz \\ &= \frac{1}{2L}\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right)\int_{-L}^L\left(1+\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right)dz \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\cos\left(\frac{a\pi\cdot}{L}\right)\right)(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2L}\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right)\int_{-L}^L\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)dz \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{a\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

De maneira análoga ao feito acima, prova-se que  $\mathcal{H}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi\cdot}{L}\right)\right)(x) = -\cos\left(\frac{a\pi x}{L}\right)$ ,  $a > 0$ . Logo, as autofunções associados ao problema (4.11) são  $f_n^-(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{|n|\pi x}{L}\right)$  e  $f_n^+(x) = \cos\left(\frac{|n|\pi x}{L}\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ , onde  $\mathbb{Z}^* = \{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0\}$ , com autovalor (obtido via transformada de Fourier)  $\nu_n = \frac{\pi|n|}{L}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Notemos que zero é autovalor com autofunção  $f \equiv 1$ . Desta maneira obtemos que  $\lambda_n = \frac{\pi|n|}{L} - c$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . Com isto  $\lambda_0 = -c$  é o primeiro autovalor o qual é negativo e simples com autofunção associada  $f_0 \equiv 1$ . Agora, as autofunções associados aos autovalores duplos  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  são dadas por  $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{|n|\pi\cdot}{L}\right)\right)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  e  $\left(\cos\left(\frac{|n|\pi\cdot}{L}\right)\right)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ . Notemos também pela restrição  $c < \frac{\pi}{L}$  obtemos que  $\lambda_0$  é o único autovalor negativo (ou seja todos os demais  $\lambda_n$ 's são positivos). Além disso, zero não está no espectro de  $\mathcal{L}_0$ .

**Observação 4.1.1.** *Convém notar que o caso  $c = \frac{\pi}{L}$  nos fornece que zero seria um autovalor duplo e portanto não poderíamos aplicar a teoria de Grillakis&Shatah&Strauss [27]-[28].*

Vamos então, para concluirmos a prova da estabilidade, verificar o sinal de  $d''(c) =$

$\frac{d}{dc} \left( \|\psi_0\|_{L^2_{per}}^2 \right)$ . De fato,

$$\begin{aligned} d''(c) &= \frac{d}{dc} \int_{-L}^L 4c^2 dx = 8L \frac{d}{dc} c^2 \\ &= 16Lc > 0. \end{aligned}$$

**Segunda demonstração:** Agora provaremos a estabilidade das soluções constantes não nulas, utilizando a teoria de Benjamin-Bona [16]-[17]. Consideremos os funcionais  $\mathcal{E} : H^{\frac{1}{2}}_{per}([-L, L]) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{F} : H^{\frac{1}{2}}_{per}([-L, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ , os quais são contínuos e definidos por

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \left( D_x^{\frac{1}{2}} u \right)^2 - \frac{1}{3} u^3 \right] dx,$$

e

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L u^2 dx.$$

Como  $H^{\frac{1}{2}}_{per} \hookrightarrow L^q_{per}$  para todo  $q \geq 2$ , temos que  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  estão bem definidos. Provaremos novamente que se  $c < \frac{\pi}{L}$ , então  $\psi_0$  é orbitalmente estável em  $H^{\frac{1}{2}}_{per}$ . Seja  $h = u - \psi_0 \in H^{\frac{1}{2}}_{per}$  e assumamos  $\mathcal{F}(\psi_0) = \mathcal{F}(u_0)$ , onde  $u_0$  é o dado inicial associado ao PVI periódico,

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \mathcal{H}u_{xx} = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Como  $\mathcal{F}$  é invariante, temos

$$0 = \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(\psi_0) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L 2\psi_0 h + h^2 dx. \quad (4.12)$$

Assim, ao calcularmos  $\Delta\mathcal{E} := \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(\psi_0)$ , obteremos de (4.12) a seguinte relação

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (h\mathcal{H}h_x - ch^2) dx - \frac{1}{6} \int_{-L}^L h^3 dx. \quad (4.13)$$

Definamos agora,

$$h^\perp := h - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h dx = h - \bar{h} := h - h^\parallel.$$

Notemos que  $\int_{-L}^L h^\perp dx = 0$ . Este fato será útil para obtermos uma desigualdade tipo Poincaré-Wintinger a saber

$$\int_{-L}^L h^\perp \mathcal{H} h_x^\perp dx \geq \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L (h^\perp)^2 dx. \quad (4.14)$$

Formalizaremos isto em forma de um lema,

**Lema 4.1.1.** *Seja  $f \in H_{per}^{\frac{1}{2}}$  tal que  $\bar{f} := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = 0$ , então a desigualdade (4.14) é satisfeita para a  $f$ .*

**Demonstração:** De fato, primeiramente, consideremos  $f \in \mathcal{P}$ . Desta forma,  $f$  tem expansão em série de Fourier de  $f$  dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

onde  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$ , com  $\hat{f}(0) = 0$ . Desta maneira,

$$\mathcal{H} \partial_x f(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |n| e^{\frac{in\pi x}{L}}.$$

Pela igualdade de Parseval obtemos,

$$\int_{-L}^L f \mathcal{H} \partial_x f dx = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} a_n^2 |n| = 2L \sum_{n \neq 0} \frac{\pi}{L} a_n^2 |n|,$$

e

$$\int_{-L}^L f^2 dx = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 = 2L \sum_{n \neq 0} a_n^2.$$

Logo,

$$\int_{-L}^L f \mathcal{H} \partial_x f dx = 2L \sum_{n \neq 0} \frac{\pi}{L} a_n^2 |n| \geq \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f^2 dx.$$

Usando argumentos de densidade (ver Iório&Iório [31]), podemos mostrar que a desigualdade acima também ocorre para  $f \in H_{per}^{\frac{1}{2}}$ . Provando o lema.

□

De posse disto, podemos concluir

$$\langle \mathcal{L}_0 h^\perp, h^\perp \rangle = \int_{-L}^L [h^\perp \mathcal{H} h_x^\perp - c(h^\perp)^2] dx \geq \left(\frac{\pi}{L} - c\right) \int_{-L}^L (h^\perp)^2 dx,$$

onde a hipótese  $c < \frac{\pi}{L}$  implica em  $B_1 = \frac{\pi}{L} - c > 0$ . E desta forma

$$\langle \mathcal{L}_0 h^\perp, h^\perp \rangle \geq B_1 \|h^\perp\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.15)$$

Notando-se agora que

$$\bar{h} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \bar{h} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h dx,$$

obtemos por (4.12),

$$\bar{h} = -\frac{1}{8cL} \|h\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.16)$$

Assim, pela igualdade (4.16)

$$\int_{-L}^L h^2 dx = \int_{-L}^L (h^\perp)^2 dx + 2L\bar{h}^2 = \int_{-L}^L (h^\perp)^2 dx + \frac{1}{32c^2L} \|h\|_{L_{per}^2}^4. \quad (4.17)$$

Seja  $b \in \mathbb{R}$ , então por (4.15) e (4.16)

$$\begin{aligned} \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + b \|h\|_{L_{per}^2}^2 &\leq \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + 2b \|h^\perp\|_{L_{per}^2}^2 + 2b \|\bar{h}\|_{L_{per}^2}^2 \\ &\leq \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{2b}{B_1} \langle \mathcal{L}_0 h^\perp, h^\perp \rangle + \frac{b}{32c^2L^2} \|h\|_{L_{per}^2}^4 \\ &= \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + B_2 \langle \mathcal{L}_0 h^\perp, h^\perp \rangle + b_c \|h\|_{L_{per}^2}^4 \\ &= \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + b_c \|h\|_{L_{per}^2}^4 + B_2 \int_{-L}^L h^\perp \mathcal{H} h_x^\perp dx \\ &\quad + B_2 \int_{-L}^L (c - \psi_0)(h - \bar{h})^2 dx \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + b \|h\|_{L_{per}^2}^2 &\leq \|D^{\frac{1}{2}} h\|_{L_{per}^2}^2 + b_c \|h\|_{L_{per}^2}^4 + B_2 \int_{-L}^L h^\perp \mathcal{H} h_x^\perp dx \\ &\quad + B_2 \int_{-L}^L (c - \psi_0)[h^2 - 2h\bar{h} + \bar{h}^2] dx, \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|D^{\frac{1}{2}}h\|_{L^2_{per}}^2 + b\|h\|_{L^2_{per}}^2 &\leq \|D^{\frac{1}{2}}h\|_{L^2_{per}}^2 + b_c\|h\|_{L^2_{per}}^4 + B_2 \langle \mathcal{L}h, h \rangle \\
&+ \frac{2B_2}{8cL} \int_{-L}^L (c - \psi_0)h dx + \frac{B_2}{64c^2L^2} \|h\|_{L^2_{per}}^4 \int_{-L}^L (c - \psi_0) \\
&\leq (1 + B_2) \langle \mathcal{L}_0h, h \rangle - \int_{-L}^L (c - \psi_0)h^2 dx \\
&+ B_3\|h\|_{L^2_{per}}^3 + B_4\|h\|_{L^2_{per}}^4 + b_c\|h\|_{L^2_{per}}^4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1 + B_2) \langle \mathcal{L}_0h, h \rangle &\geq \|D^{\frac{1}{2}}h\|_{L^2_{per}}^2 + (b - \|c - \psi_0\|_{L^\infty_{per}}) \|h\|_{L^2_{per}}^2 \\
&- B_3\|h\|_{L^2_{per}}^3 - B_5\|h\|_{L^2_{per}}^4.
\end{aligned}$$

Escolhendo  $b > 0$  de modo que  $b = \|c - \psi_0\|_{L^\infty_{per}} + 1$  obtemos face a imersão  $H^{\frac{1}{2}}_{per} \hookrightarrow L^q_{per}$  para  $q \geq 2$ , a seguinte desigualdade,

$$\langle \mathcal{L}_0h, h \rangle \geq B_6\|h\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}^2 - B_7\|h\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}^3 - B_8\|h\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}^4,$$

onde  $B_6$ ,  $B_7$  e  $B_8$  são constantes positivas.

Definimos agora,

$$f(t) = B_6t^2 - B_7t^3 - B_8t^4.$$

Temos que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 2B_6 > 0$ , donde  $t = 0$  é um mínimo local para  $f$  e  $f$  é convexa numa vizinhança de  $t = 0$ . Além disso,

$$d_1(u(\cdot, t), \psi_0) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \|u(\cdot, t) - \psi_0(\cdot + y)\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}} = \|h\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo,

$$\Delta \mathcal{E} \geq f\left(\|h\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}}\right) = f(d_1(u(\cdot, t), \psi_0)), \quad \forall t \geq 0.$$

E desta forma,  $\psi_0$  é orbitalmente estável.

□

**Observações:** Notemos que se  $c > \frac{\pi}{L}$ , a segunda variação de  $\mathcal{E}$  pode ser negativa. Com efeito, considerando  $h_0 = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ , temos que

$$\delta^2 \mathcal{E}(h_0) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_0 h_0, h_0 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{L} - c \right] \int_{-L}^L h_0^2 dx.$$

Quanto ao caso  $c = \frac{\pi}{L}$  temos o mesmo cenário da parte I pois neste caso

$$\ker \mathcal{L}_0 = \text{span} \left\{ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\}$$

é de dimensão dois. Conclusão: Não podemos concluir se as soluções são estáveis neste caso.

---

## 4.2 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação mKdV

---

### 4.2.1 Soluções Ondas Viajantes Periódicas e Existência de Curva Suave

Nesta seção, iremos aplicar os resultados obtidos no capítulo 3 para a equação periódica mKdV de período  $L$ ,

$$u_t + 3u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (4.18)$$

As equações que determinam as ondas viajantes periódicas associadas a equação (4.18) são,

$$\varphi_c'' + \varphi_c^3 - c\varphi_c = A_{\varphi_c}, \quad (4.19)$$

onde  $A_{\varphi_c}$  é uma constante de integração a qual será assumida identicamente nula. Obteremos uma solução explícita para a equação (4.19) utilizando-se do Teorema do Somatório de Poisson (ver Teorema 2.1.2) e considerando-se a função que determina a solução onda viajante solitária da mKdV

$$\phi_\omega(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}x), \quad \forall \omega > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R},$$

cuja transformada de Fourier é

$$\widehat{\phi}_\omega^{\mathbb{R}}(x) = \sqrt{2\pi} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{\omega}}\right).$$

Pelo Teorema 2.1.2,

$$\psi_\omega(x) = \frac{\sqrt{2}\pi}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \operatorname{sech} \left( \frac{\pi n}{2\sqrt{\omega}L} \right) \cos \left( \frac{2\pi n x}{L} \right), \quad (4.20)$$

onde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

e  $\omega > 0$  é um valor à ser escolhido mais adiante.

Consideremos agora, a expansão em série de Fourier da função elíptica  $\operatorname{dn}$  (ver Apêndice) de período  $L$  (veja [46]) dada por,

$$\frac{2K}{L} \operatorname{dn} \left( \frac{2K\xi}{L}; k \right) = \frac{\pi}{L} + \frac{4\pi}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \left( \frac{2n\pi\xi}{L} \right),$$

onde  $K = K(k)$  denota a integral elíptica completa de primeiro tipo e  $q = e^{(-\frac{\pi K'}{K})}$ , é o chamado "nome". Aqui,  $K(k') = K(\sqrt{1-k^2})$ . Podemos concluir que

$$\frac{q^n}{1+q^{2n}} = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right).$$

Portanto,

$$\frac{2K}{L} \operatorname{dn} \left( \frac{2K\xi}{L} \right) = \frac{\pi}{L} + \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sech} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right) \cos \left( \frac{2n\pi\xi}{L} \right). \quad (4.21)$$

Pela forma da  $\psi_\omega$ , consideremos  $\varphi_c(x) = \eta \operatorname{dn} \left( \frac{\eta x}{\sqrt{2}}; k \right)$ , com  $\eta > 0$  e  $k \in (0, 1)$  fixado, uma solução periódica de período  $L > 0$  para a equação (4.19). Então, usando as relações fundamentais para funções elípticas (ver Apêndice) obtemos, para  $k' = \sqrt{1-k^2}$ ,

$$c = \frac{\eta^2}{2}(1+k'^2) \quad \text{e} \quad \eta = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}. \quad (4.22)$$

Logo, para  $k \in (0, 1)$ , temos que  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c})$  com  $c > \frac{2\pi^2}{L^2}$ . Assim, dado  $k \in (0, 1)$  arbitrário mas fixado de tal forma que o valor de  $c > \frac{2\pi^2}{L^2}$  seja dado por (4.22), podemos escolher  $\omega > 0$  arbitrário,  $\omega = \omega(c) > 0$  tal que

$$\omega = \frac{c}{16(2-k^2)K'^2}.$$



Conseqüentemente, obtemos de (4.20) e (4.21) que  $\psi_{\omega(c)} = \varphi_c$  é uma solução para (4.19).

Notemos que se considerarmos  $\varphi_c(\xi) = \eta \operatorname{dn} \left( \frac{\eta \xi}{\sqrt{2}}; k \right)$  sem um período fixado, temos da primeira igualdade em (4.22) que  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c})$  e que o período fundamental de  $\varphi_c$  vem dado em função de  $\eta$  como sendo

$$T_{\varphi_c}(\eta) = \frac{2K(k(\eta))}{\sqrt{c}} \sqrt{1+k'^2} = \frac{2K(k(\eta))}{\sqrt{c}} \sqrt{2-k^2},$$

onde  $k^2 = 2 - \frac{2c}{\eta^2}$ .

Por outro lado, se  $\eta \rightarrow \sqrt{c}$ , então  $k \rightarrow 0^+$  donde  $T_{\varphi_c}(\eta) \rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$ . E se  $\eta \rightarrow \sqrt{2c}$ , então  $k \rightarrow 1^-$  e portanto  $T_{\varphi_c}(\eta) \rightarrow +\infty$ . Agora, sendo  $\eta \mapsto T_{\varphi_c}(\eta)$  uma função estritamente crescente (provaremos este fato no próximo Teorema), tem-se

$$T_{\varphi_c}(\eta) > \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{c}}. \tag{4.23}$$

A função  $\psi_{\omega(c)} = \varphi_c$  obtida anteriormente, isto é,

$$\varphi_c(\xi) = \eta \operatorname{dn} \left( \frac{\eta}{\sqrt{2}} \xi; k \right), \tag{4.24}$$

é uma função positiva e fora determinada através da periodização da solução onda viajante

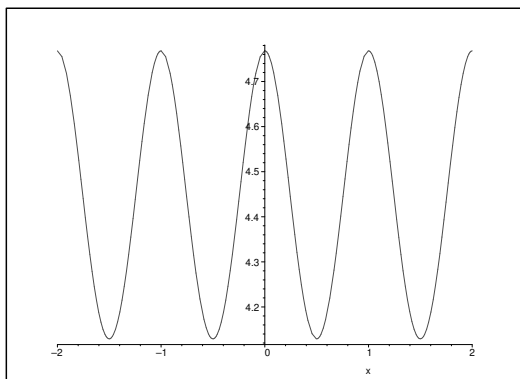


Figura 4.3: Gráfico da função  $\varphi_c$  em (4.24) com período fixado  $L = 1$  e módulo  $k = 0.5$ .

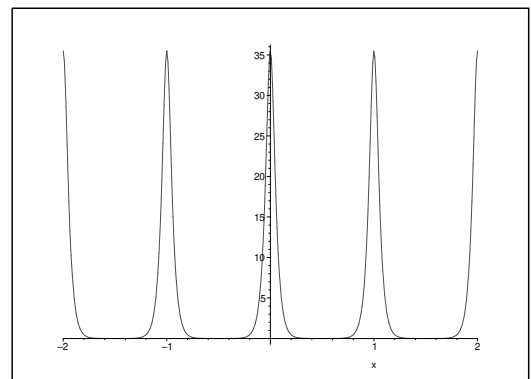


Figura 4.4: Gráfico da função  $\varphi_c$  em (4.24) com período fixado  $L = 1$  e módulo  $k = 0.999999999$ .

solitária associada a (4.18). É natural perguntarmos se podemos obter novamente esta onda

solitária. Tal fato pode ser determinado por (4.24), pois se  $\eta \rightarrow \sqrt{2c}$  então  $k \rightarrow 1^-$  e como  $\text{dn}(u, 1^-) = \text{sech}(u)$  temos que

$$\varphi_c(\xi) = \sqrt{2c} \text{sech}(\sqrt{c} \xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ e } c > 0.$$

O outro caso limite, ou seja, quando  $\eta \rightarrow \sqrt{c}$  temos  $k \rightarrow 0^+$  e como  $\text{dn}(u, 0^+) = 1$  tem-se a solução constante  $\varphi_c(\xi) = \sqrt{c}$ .

Agora, construiremos para um período fixado  $L > 0$ , uma curva regular de soluções ondas dnoidal para a equação (4.19). Começaremos por mostrar a existência de uma família de ondas dnoidal com um período fixado. De fato, seja  $L > 0$  e  $c > 0$  tal que  $\sqrt{c} > \frac{\pi\sqrt{2}}{L}$ . Vimos pela análise feita anteriormente que a função  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c}) \mapsto T_{\varphi_c}(\eta)$  é estritamente crescente e portanto existe um único  $\eta \equiv \eta(c) \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c})$  tal que o período fundamental da onda dnoidal  $\varphi_c$  será  $T_{\varphi_c}(\eta(c)) = L$ . Assim, temos o seguinte Teorema,

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $L > 0$  arbitrário mas fixado. Considere  $c_0 > \frac{2\pi^2}{L^2}$  e único  $\eta_0 = \eta(c_0) \in (\sqrt{c_0}, \sqrt{2c_0})$  tal que  $T_{\varphi_{c_0}} = L$ , então.*

(1) *Existe um intervalo  $I(c_0)$  ao redor de  $c_0$ , um intervalo  $B(\eta_0)$  ao redor de  $\eta_0$  e uma única função regular  $\Lambda : I(c_0) \rightarrow B(\eta_0)$  tal que  $\Lambda(c_0) = \eta_0$  e*

$$\frac{\sqrt{2(1+k'^2)}}{\sqrt{c}} K(k) = L,$$

onde  $c \in I(c_0)$ ,  $\eta = \Lambda(c) \in B(\eta_0)$  e  $k^2 = k^2(c) \in (0, 1)$  é dada por

$$k^2 = 2 - \frac{2c}{\eta^2}.$$

(2) *A solução onda dnoidal dada por (4.24),  $\varphi_c(\cdot; \eta)$ , determinada por  $\eta = \eta(c)$  tem período fundamental  $L > 0$  e satisfaz (4.19). Ademais, a aplicação*

$$c \in I(c_0) \mapsto \varphi_c \in H_{per}^n([0, L]), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

*é uma função regular.*

(3)  *$I(c_0)$  pode ser escolhido como  $\mathcal{I} = \left( \frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty \right)$ .*

**Demonstração:** A prova é baseada nas idéias do Teorema 2.1 em Angulo [7]. Tal fato consiste em usarmos o Teorema da Função Implícita. Com efeito, consideremos o seguinte

conjunto,

$$\Omega = \left\{ (\eta, c) \in \mathbb{R}^2; c > \frac{2\pi^2}{L^2}, \eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c}) \right\}$$

e defina  $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,

$$\Psi(\eta, c) = \frac{2K(k(\eta, c))}{\sqrt{c}} \sqrt{2 - k^2}.$$

Notemos que  $\Psi(\eta_0, c_0) = L$  e provaremos que  $\Psi_\eta(\eta, c) > 0$  para todo  $c > \frac{2\pi^2}{L^2}$ .

De fato,

$$\Psi_\eta(\eta, c) = \frac{2}{\sqrt{c}(2 - k^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dk}{d\eta} \left( \frac{dK(k)}{dk} (2 - k^2) - kK(k) \right).$$

Como  $\frac{dK(x)}{dx} = \frac{E(x) - (1 - x^2)K(x)}{x(1 - x^2)}$  e  $\frac{dk}{d\eta} = \frac{2c}{k\eta^3} > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \Psi_\eta(\eta, c) &= \frac{2}{\sqrt{c}(2 - k^2)^{\frac{1}{2}}(1 - k^2)k} \frac{dk}{d\eta} \{ (E - (1 - k^2)K)(2 - k^2) - k^2(1 - k^2)K \} \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}(1 + k'^2)^{\frac{1}{2}}k'^2k} \frac{dk}{d\eta} \{ (2 - k^2)E - 2(1 - k^2)K \}. \end{aligned}$$

Definamos agora  $\beta^2 = 1 - k^2$  e a função  $f(\beta) = (1 + \beta^2)E(\sqrt{1 - \beta^2}) - 2\beta^2K(\sqrt{1 - \beta^2})$ . Notemos que  $f(1) = 0$  e mostraremos que  $f$  é uma função estritamente decrescente. De fato, como

$$x \frac{dE(x)}{dx} = E(x) - K(x),$$

temos que

$$f'(\beta) < 0 \Leftrightarrow (1 - \beta^2)E(\sqrt{1 - \beta^2}) < (1 + \beta^2)K(\sqrt{1 - \beta^2}).$$

Como,  $E < K$  segue então que  $f'(\beta) < 0$  e portanto, pelo Teorema da Função Implícita segue a existência de uma única função regular  $\Lambda$ , definida em uma vizinhança  $I(c_0)$  de  $c_0$ , de tal forma que  $\Psi(\Lambda(c), c) = L$  para todo  $c \in I(c_0)$ . Pela arbitrariedade de  $c_0$  no intervalo  $\mathcal{I} = \left( \frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty \right)$ , segue da unicidade de  $\Lambda$ , que nós podemos estender  $I(c_0)$  ao intervalo  $\mathcal{I}$ . O que completa a demonstração do Teorema.

□

**Corolário 4.2.1.** *Considere a aplicação  $\Lambda : I(c_0) \rightarrow B(\eta_0)$  determinada pelo Teorema 4.2.1. Então,  $\Lambda$  é uma função estritamente crescente em  $I(c_0)$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.2.1, temos que  $\Psi(\Lambda(c), c) = L$  para todo  $c \in I(c_0)$ . Novamente, pelo Teorema da Função Implícita, tem-se

$$\frac{d}{dc}\Lambda(c) = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial c}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}}.$$

Calcularemos  $\Psi_c(\eta, c)$ . De fato, como  $\frac{dk}{dc} = -\frac{1}{k\eta^2}$ , temos

$$\begin{aligned} \Psi_c(\eta, c) &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2-k^2}} \left( \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dc} (2-k^2) - k \frac{dk}{dc} K \right) - \frac{K\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{c}} \right\} \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2-k^2}\eta^2} \left( -\frac{dK}{dk} \frac{1}{k} (2-k^2) + K \right) - \frac{K\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{c}} \right\} \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2-k^2}\eta^2} \left( -\left( \frac{E-k'^2 K}{k^2 k'^2} \right) (2-k^2) + K \right) - \frac{K\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{c}} \right\} \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2-k^2}\eta^2 k^2 k'^2} \left( -(2-k^2)E + 2(1-k^2)K \right) - \frac{K\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{c}} \right\}. \end{aligned}$$

Pela mesma análise feita no Teorema anterior, obtemos que  $\Psi_c < 0$  e portanto  $\frac{d\Lambda(c)}{dc} > 0$ , o que prova o corolário. □

**Corolário 4.2.2.** Consideremos a aplicação  $\omega : \left( \frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty \right) \mapsto \mathbb{R}$ , dada por

$$\omega = \frac{c}{16(2-k^2)K'^2(k)}, \quad (4.25)$$

onde  $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$ , determinada pela solução  $\psi_{\omega(c)} = \varphi_c$  de (4.19), então  $\frac{d\omega}{dc} > 0$ .

**Demonstração:** Com efeito, temos após derivarmos a expressão (4.25) com respeito à  $c$  que,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dc} &= \frac{16(2-k^2)K'^2 + 32c \frac{dk}{dc} \left( 2K' \frac{dK'}{dk} - k^2 K' \frac{dK'}{dk} - kK'^2 \right)}{256(2-k^2)^2 K'^2} \\ &= \frac{16(2-k^2)K'^2 + 32c \frac{dk}{dc} \left[ (2-k^2)K' \frac{dK'}{dk} - kK'^2 \right]}{256(2-k^2)^2 K'^2}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{dK'}{dk} = -\left(\frac{E' - k^2 K'}{kk'^2}\right)$ , obtemos

$$\frac{d\omega}{dc} = \frac{16(2 - k^2)K'^2 + 32c\frac{K'}{kk'^2}\frac{dk}{dc}[(2 - k^2)E' - k^2 K']}{256(2 - k^2)^2 K'^2}.$$

Para provarmos o desejado, basta mostrarmos que  $\frac{dk}{dc} > 0$  uma vez que  $E' > K'$  implica em  $(2 - k^2)E' - k^2 K' = (1 + k'^2)E' - (1 - k'^2)K' > 0$ .

Desta forma, sendo

$$\frac{dk}{dc} = \frac{2}{\eta^3} \left( 2c \frac{d\eta}{dc} - \eta \right),$$

precisamos analisar o sinal da quantidade  $2c \frac{d\eta}{dc} - \eta$  para podermos concluir o desejado.

Porém faz necessário calcularmos explicitamente o valor de  $\frac{d\eta}{dc}$ . De fato, pelo Corolário 4.2.1 vimos que

$$\frac{d\eta}{dc} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial c}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}}.$$

Como

$$\Psi_\eta(\eta, c) = \frac{2}{\sqrt{c}(1 + k'^2)^{\frac{1}{2}} k'^2 k} \frac{dk}{d\eta} \{(2 - k^2)E - 2(1 - k^2)K\}$$

e

$$\Psi_c(\eta, c) = \frac{1}{c} \left\{ \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2 - k^2} \eta^2 k'^2 k^2} (-(2 - k^2)E + 2(1 - k^2)K) - \frac{K\sqrt{2 - k^2}}{\sqrt{c}} \right\}.$$

Obtemos após uma álgebra

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{\eta}{2c} + \underbrace{\frac{k^2 k'^2 \eta^3 (2 - k^2) K}{\sqrt{c^3} ((2 - k^2) E - 2(1 - k^2) K)}}_{A > 0}.$$

Logo  $2c \frac{d\eta}{dc} - \eta = 2cA$  e portanto como  $g(k) = (2 - k^2)E - 2(1 - k^2)K$  é uma função positiva para  $k \in (0, 1)$  (para verificar este fato, basta proceder como na prova do Teorema 4.2.1) temos provado então que  $\frac{dk}{dc} > 0$ . Provando o Corolário.

□

## 4.2.2 Prova da Estabilidade

Temos o seguinte Teorema de estabilidade para a mKdV.

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $c \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ . Então a solução  $\varphi_c$  dada pelo Teorema 4.2.1 é estável em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo da equação modificada Korteweg-de Vries.*

**Demonstração:** Vamos provar primeiramente que  $(P_1)$  e  $(P_2)$  presentes em (1.10) ocorrem para o operador  $\mathcal{L}$ . De fato, notemos pelo Teorema do Somatório de Poisson (ver Teorema 2.1.2) que

$$\widehat{\varphi}_c(n) = \frac{\sqrt{2}\pi}{L} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi n}{2L\sqrt{\omega(c)}}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

está na classe  $PF(2)$  discreto, uma vez que a função  $f(x) = \mu \operatorname{sech}(\nu x)$ , está na classe  $PF(2)$  caso contínuo (usando o lema 3.2.1), com  $\nu, \mu > 0$  e portanto, a sequência  $\{\varphi(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  está em  $PF(2)$  discreto. Desta forma, concluímos pelo Teorema 3.2.1 que  $K = \widehat{\varphi}_c^2 \in PF(2)$  discreto.

Agora provaremos que  $(P_3)$  em (1.10) ocorre. Com efeito, como a aplicação  $c \mapsto \varphi_c \in H_{per}^n([0, L])$  é suave pelo Teorema 4.2.1, podemos escolher  $\chi = -\frac{d}{dc}\varphi_c$  tal que  $\mathcal{L}\chi = \varphi_c$  no Teorema 4.0.3 e portanto por Parseval,

$$I = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left( \|\varphi_c\|_{L_{per}^2}^2 \right) = -\frac{L}{2} \frac{d}{dc} \left( \|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2 \right).$$

Logo,

$$\|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2 = 2 \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{2\omega(c)}L}\right).$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2 &= 2 \frac{\pi^3}{L^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2\sqrt{\omega(c)}^3 L} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\omega(c)}L}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\omega(c)}L}\right) \frac{d\omega}{dc} \\ &= C_1 \frac{d\omega}{dc} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\omega(c)}L}\right) n \operatorname{tgh}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\omega(c)}L}\right). \end{aligned}$$

Como a sequência  $\left(n \operatorname{tgh}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\omega(c)}L}\right)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  é positiva temos do Corolário 4.2.2 que,

$$\frac{d}{dc} \|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2 > 0.$$

Provando que  $\varphi_c$  é estável pelo fluxo da mKdV.

□

### 4.3 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação KdV

Neste instante, iremos aplicar os resultados obtidos no capítulo anterior para a prova da estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas  $\varphi_c$  de tipo cnoidal associadas à equação

$$\varphi_c'' + \frac{1}{2}\varphi_c^2 - c\varphi_c = 0. \quad (4.26)$$

Vamos obter a solução explícita de (4.26) considerando a função que determina a solução onda viajante solitária da KdV, a saber,

$$g_\omega(x) = 3\omega \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\omega}x}{2}\right),$$

cuja transformada de Fourier é

$$\widehat{g}_\omega^{\mathbb{R}}(x) = \frac{12\pi x}{\sinh\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\omega}}\right)}.$$

Pelo Teorema do Somatório de Poisson (ver Teorema 2.1.2), obtemos a seguinte função periódica de período  $L$ ,

$$\begin{aligned} \psi_\omega(\xi) &= \frac{12\pi}{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi n}{\sqrt{\omega}L}\right) e^{\frac{2\pi i n \xi}{L}} \\ &= \frac{12\sqrt{\omega}}{L} + \frac{24\pi}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi n}{\sqrt{\omega}L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como a velocidade da solução onda viajante solitária da equação KdV é um valor arbitrário  $\omega > 0$ , podemos escolher  $\omega := \omega(k)$  tal que  $\sqrt{\omega(k)} = \frac{K(k)}{K(k')L}$ , onde  $k \in (0, 1)$ ,  $k'^2 \equiv 1 - k^2$ .

Logo,

$$\psi_{\omega(k)}(\xi) = \frac{12\sqrt{\omega}}{L} + \frac{12\pi}{L^2} \sum_{n \neq 0} n \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi n K'}{K}\right) e^{\frac{2\pi i n \xi}{L}}. \quad (4.28)$$

Agora, consideremos a expansão em série de Fourier da função  $\operatorname{dn}^2$  com período  $L$  (veja detalhes em [46]), isto é,

$$K^2 \left[ \operatorname{dn}^2\left(\frac{2K\xi}{L}; k\right) - \frac{E}{K} \right] = 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \cos\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right),$$

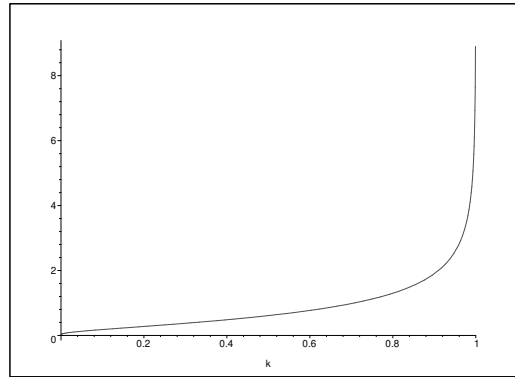


Figura 4.5: Gráfico da função  $\omega(k)$  com período fixo  $L = 1$ .

onde  $q = e^{-\left(\frac{\pi K'}{K}\right)}$  é o "nome". Podemos concluir ainda que,

$$\frac{q^n}{1 - q^{2n}} = \frac{1}{2} \operatorname{cosech} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right).$$

Desta forma, obtemos de (4.28) que,

$$\psi_{\omega(k)}(\xi) = \frac{12\sqrt{\omega(k)}}{L} + \frac{48K^2}{L^2} \left[ \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K\xi}{L}; k \right) - \frac{E}{K} \right], \quad (4.29)$$

para  $k \in (0, 1)$  fixado.

Agora, por causa da igualdade (4.29), consideremos uma solução onda viajante periódica de período  $L$ ,  $\varphi_c$  da equação (4.26) da forma  $\varphi_c(\xi) = a + b \left( \operatorname{dn}^2(d\xi; k) - \frac{E}{K} \right)$ . Então, o seguinte sistema não-linear é obtido,

$$\begin{cases} \frac{b^2}{2} - 6d^2b = 0 \\ 4bd^2(1 + k'^2) + ab - b^2 \frac{E}{K} - cb = 0 \\ \frac{a^2}{2} - \frac{abE}{K} + \frac{b^2}{2} \left( \frac{E}{K} \right)^2 - ac - cb \frac{E}{K} - 2bd^2k'^2 = 0 \end{cases}$$

Desta maneira, como  $\varphi_c$  é periódica de período  $L$ , segue que  $d = \frac{2K(k)}{L}$ . Assim, da primeira equação do sistema acima obtemos que  $b = \frac{48K^2}{L^2}$ . Substituindo estes valores na segunda



equação obtemos,

$$c = \frac{16K}{L^2} \underbrace{[(1 + k'^2)K - 3E]}_{\gamma} + a. \quad (4.30)$$

Podemos observar que  $\gamma$  dado acima tem a mesma forma da velocidade da onda quando estamos considerando ondas cnoidal para a equação KdV com média zero (veja [10]), isto é, soluções da equação diferencial

$$\phi_\gamma'' + \frac{1}{2}\phi_\gamma^2 - \gamma\phi_\gamma = A_{\phi_\gamma}, \quad (4.31)$$

onde  $A_{\phi_\gamma} \neq 0$  e  $\int_0^L \phi_\gamma(\xi)d\xi = 0$ . Uma solução da equação (4.31) foi encontrada por Angulo&Bona&Scialom em [10] na forma

$$\phi_\gamma(\xi) = \frac{48K^2}{L^2} \left( \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K}{L}\xi; k \right) - \frac{E}{K} \right).$$

Mas neste caso o valor do módulo  $k$  pertence ao intervalo  $(k_1, 1)$  onde  $k_1$  pode ser determinado, utilizando-se o programa Maple, como sendo  $k_1 \approx 0,9803823108$ . Para maiores detalhes sobre este fato, veja [10].

Podemos ver de forma clara que se  $\phi_\gamma$  é uma solução com média zero, então  $\varphi_c = \phi_\gamma + a$  é uma solução da equação (4.26) desde que  $c = a + \gamma = \sqrt{\gamma^2 + 2A_{\phi_\gamma}}$ . Desta análise heurística, obtemos uma relação entre a velocidade da onda associada com a solução de média zero e nossa solução positiva  $\varphi_c$ . Da terceira equação do sistema e o valor de  $c$  dado por (4.30) obtém-se a equação quadrática em termos de  $a$ ,

$$a^2 + \frac{32K}{L^2} [(1 + k'^2)K - 3E] a - \frac{(1 + k'^2)1536K^3E}{L^4} + \frac{768K^4k'^2}{L^4} + \frac{2304K^2E^2}{L^4} = 0, \quad (4.32)$$

cuja solução positiva é

$$a = -\frac{16K}{L^2} [(1 + k'^2)K - 3E] + \frac{16K^2}{L^2} \sqrt{1 - k^2 + k^4}.$$

Então, o valor de  $c$  é

$$c = \frac{16K^2}{L^2} \sqrt{1 - k^2 + k^4}.$$

Graficamente,

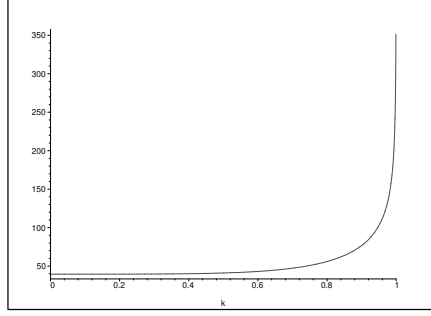


Figura 4.6: Gráfico de  $c$  com período fixo  $L = 1$ .

Portanto, para  $k \in (0, 1)$  temos que  $c \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ . Com isto, usando a identidade  $k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1$  (ver Apêndice), podemos reescrever a expressão de  $\varphi_c$  de uma maneira mais conveniente por,

$$\varphi_c(\xi) = \frac{16K^2}{L^2} \left[ \sqrt{1 - k^2 + k^4} + 1 - 2k^2 \right] + \frac{48K^2 k^2}{L^2} \text{cn}^2 \left( \frac{2K}{L} \xi; k \right).$$

Podemos ver que esta solução positiva é a mesma que fora obtida por Angulo [9] e pode ser reescrita como sendo,

$$\varphi_c(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \text{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k \right), \quad (4.33)$$

onde

$$\beta_2 = \frac{16K^2}{L^2} \left[ \sqrt{1 - k^2 + k^4} + 1 - 2k^2 \right],$$

$$\beta_3 = \frac{16K^2}{L^2} \left[ \sqrt{1 - k^2 + k^4} + 1 + k^2 \right],$$

e  $\beta_1$  é tal que,

$$\beta_3 - \beta_1 = \frac{48K^2}{L^2}.$$

Fazendo uma análise similar do que fora feito no caso da equação mKdV, podemos obter uma curva regular de ondas cnoidal positivas com a forma (4.33),

$$c \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto \varphi_c \in H_{per}^n([0, L]),$$

tal que  $k := k(c)$  é uma função estritamente crescente (veja [9]). Além disso, podemos determinar que para  $k \in (0, 1)$  existe um único  $c \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$  tal que  $k(c) = k$  (veja o

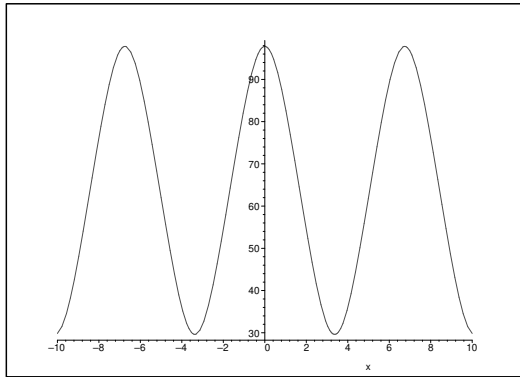


Figura 4.7: Gráfico da função  $\varphi_c$  em (4.33) com período fixado  $L = 1$  e módulo  $k = 0.5$ .

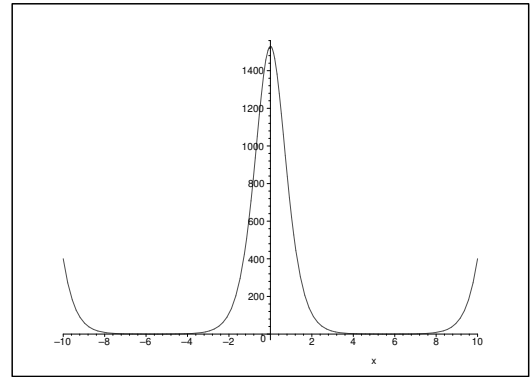


Figura 4.8: Gráfico da função  $\varphi_c$  em (4.33) com período fixado  $L = 1$  e módulo  $k = 0.9999$ .

gráfico da figura 4.6). Portanto, a função  $\omega(k)$  definida acima pode ser expressada como uma função de  $c$ ,  $\omega = \omega(k(c))$  e tal é estritamente crescente (veremos isto mais adiante). Então,  $\omega(k(c)) \in (0, +\infty)$  quando  $c \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ . Portanto obtemos que  $c \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto \psi_{\omega(k(c))} \in H_{per}^n([0, L])$  é uma curva suave.

Assim temos o seguinte Teorema de estabilidade associadas à equação KdV.

**Teorema 4.3.1.** *Seja  $c \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ . Então a onda viajante  $\varphi_c$  em (4.33), solução da equação (4.26), é estável pelo fluxo da KdV.*

**Demonstração:** Primeiramente para relacionar  $\psi_{\omega(k(c))}$  e  $\varphi_c$ , observemos que,

$$\psi_{\omega(k(c))} - \varphi_c = \frac{12\sqrt{\omega(k(c))}}{L} - a(k(c)),$$

onde para  $k = k(c)$ ,

$$a(k) = \frac{16K^2}{L^2} \left[ \sqrt{1 - k^2 + k^4} - 2 + k^2 + 3\frac{E}{K} \right].$$

Então, considerando-se  $s(k(c)) \equiv a(k(c)) - \frac{12\sqrt{\omega(k(c))}}{L}$ , podemos escrever

$$\varphi_c(\xi) \equiv s(k(c)) + \psi_{\omega(k(c))}(\xi).$$

Portanto, obtemos imediatamente que o coeficiente de Fourier de  $\varphi_c$  é,

$$\widehat{\varphi}_c(n) = \begin{cases} a(k), & n = 0 \\ \frac{12\pi}{L^2} n \operatorname{cosech} \left( \frac{\pi n}{\sqrt{\omega(k)}L} \right), & n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Observação 4.3.1.** *Após alguns cálculos, podemos obter que  $s(k)$  é uma função positiva definida em  $(0, 1)$ . Fazendo uso do programa Maple, podemos determinar que  $s(k)$  não tem nenhuma raiz nos extremos do intervalo  $(0, 1)$ . Pode-se determinar também que a função  $a(k)$  é uma função positiva e estritamente crescente (veja figura 4.9 a seguir).*

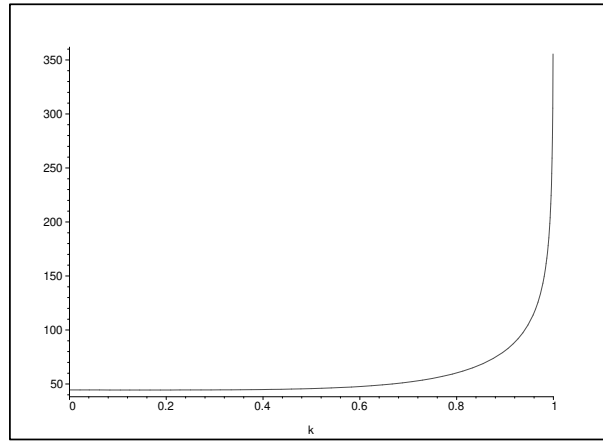


Figura 4.9: Gráfico da função  $a(k)$  com período fixo  $L = 1$ .

Agora, como  $s(k) > 0$  e a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{12\pi}{L^2} x \operatorname{cosech} \left( \frac{\pi x}{\sqrt{\omega}L} \right) \quad (4.34)$$

pertence a  $PF(2)$  no caso contínuo (veja Lema 3.2.1). Então  $\widehat{\varphi}_c$  pertence a  $PF(2)$  no caso discreto. De fato, como

$$a(k) > \frac{12\sqrt{\omega(k)}}{L} = f(0),$$

podemos assim redefinir a função  $f$  dada acima, por uma função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para que tenhamos uma função diferenciável da seguinte forma. Para cada  $k \in (0, 1)$  fixado, considere  $h(0) = a(k)$ ,  $h(x) = f(x)$  sobre  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  e sobre o intervalo  $(-1, 1)$  podemos "completar"  $f$  em uma maneira diferenciável, de tal modo que  $h$  pertença a  $PF(2)$  no caso

contínuo. Portanto, a sequência que fora obtida com base em  $h$  (se olharmos somente no conjunto dos números inteiros),  $h(n) = \widehat{\varphi}_c(n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , estará na classe  $PF(2)$  discreto donde as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10) são satisfeitas.

Provaremos agora  $(P_3)$ . De fato, como no Teorema 4.0.3, seja  $\chi = -\frac{d}{dc}\varphi_c$  tal que  $\mathcal{L}\chi = \varphi_c$ . Pelo Teorema de Parseval, segue que,

$$I = -\frac{L}{2} \frac{d}{dc} (\|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \|\widehat{\varphi}_c\|_{\ell^2}^2 &= C_1 a(k) \frac{da}{dk} \frac{dk}{dc} + \\ &+ \frac{C_2}{\sqrt{\omega(k)^3}} \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{dc} \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} n^3 \operatorname{cosech}^2 \left( \frac{\pi n}{L\sqrt{\omega(k)}} \right) \coth \left( \frac{\pi n}{L\sqrt{\omega(k)}} \right)}_{b_n}, \end{aligned}$$

onde  $C_1 := C_1(L)$ ,  $C_2 := C_2(L) > 0$ . Neste instante, precisamos mostrar somente que as quantidades  $\frac{da}{dk}$  e  $\frac{d\omega}{dk}$  são positivas visto que  $k := k(c)$  é uma função estritamente crescente e  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é obviamente uma sequência positiva. De fato, como  $\omega(k) = \frac{K^2(k)}{K^2(k')L^2}$  então,

$$\frac{d\omega}{dk} = 2 \frac{K \left( \frac{dK}{dk} K' - K \frac{dK'}{dk} \right)}{K'^3 L^2},$$

e sendo  $\frac{dK}{dk} > 0$  e  $\frac{dK'}{dk} < 0$  obtemos  $\frac{d\omega}{dk} > 0$ . Fazendo-se uso de um argumento similar tem-se também que  $\frac{da}{dk} > 0$  e portanto,  $I < 0$ . Logo, as ondas cnoidal positivas  $\varphi_c$  em (4.33) são estáveis pelo fluxo da KdV. Isto mostra o Teorema. □

Para completar o estudo da estabilidade da equação KdV, faremos um breve comentário à respeito da outra raiz que se pode obter através da equação quadrática (4.32). Com efeito, temos que o valor

$$a = -\frac{16K}{L^2} [(1 + k'^2)K - 3E] - \frac{16K^2}{L^2} \sqrt{1 - k^2 + k^4},$$

é outra raiz desta equação porém tal é negativa. Logo, o valor de  $c$  seria

$$c = -\frac{16K^2}{L^2} \sqrt{1 - k^2 + k^4} < 0.$$

Assim a solução neste caso tornaria-se

$$\phi_c(\xi) = \frac{16K^2}{L^2} \left[ -\sqrt{1 - k^2 + k^4} + 1 - 2k^2 \right] + \frac{48K^2k^2}{L^2} \operatorname{cn}^2 \left( \frac{2K}{L} \xi; k \right).$$

Porém, podemos determinar que esta solução tem partes negativas e positivas no intervalo  $[0, L]$ , ou seja,  $\phi_c$  não é uma solução positiva. Tendo este fato, a teoria desenvolvida anteriormente não pode ser aplicada (veja capítulo 7 mais adiante para uma explicação para este fato). Ademais,  $\widehat{\phi}_c(0) = b(k) < 0$ , onde

$$b(k) = \frac{16K^2}{L^2} \left[ -\sqrt{1 - k^2 + k^4} - 2 + k^2 + 3\frac{E}{K} \right].$$

Com isto  $(\widehat{\phi}_c(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  não está em  $PF(2)$  discreto. Ou seja, não podemos aplicar a nossa teoria para saber se esta solução é estável.

### 4.3.1 Estabilidade de Soluções Constantes

A estabilidade de soluções constantes foi estudada em [10] e [15]. Neste caso, tem-se que  $\phi_0 \equiv 2c$  é uma solução constante não trivial para a equação KdV que é orbitalmente estável em  $H_{per}^1([0, L])$  desde que  $c < \frac{4\pi^2}{L^2}$ . A prova da estabilidade de soluções constantes pode ser feita fazendo-se o uso da desigualdade de Poincaré-Wirtinger e utilizando um raciocínio similar ao que fora feito na Subseção 3.1.1 para a equação BO, a saber *para*  $f \in H_{per}^1([0, L])$  tal que  $\int_0^L f(x)dx = 0$  então

$$\int_0^L [f'(x)]^2 dx \geq \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \int_0^L f^2(x) dx.$$

## 4.4 Propriedades de Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para 4-KdV e CNLS

### 4.4.1 Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação 4-KdV

No que segue é considerada a equação de Korteweg-de Vries generalizada de quarta ordem periódica de período  $L > 0$  dada por,

$$u_t + 5u^4u_x + u_{xxx} = 0. \quad (4.35)$$

Consideremos uma solução do tipo  $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$ , isto é, uma solução onda viajante periódica. Substituindo esta forma na equação (4.35) obtemos, após integrarmos uma vez, a seguinte EDO,

$$-c\varphi_c + \varphi_c^5 + \varphi_c'' = 0. \quad (4.36)$$

Antes de estudar a estabilidade de  $\varphi_c$  pelo fluxo da 4-KdV, iremos fazer um breve comentário sobre o *blow-up* em  $H^1(\mathbb{R})$  das soluções associadas a equação da 4-KdV na reta  $\mathbb{R}$  e a questão da instabilidade de soluções ondas viajantes solitárias da mesma, a saber, soluções associadas a seguinte equação,

$$\phi_\omega'' - \omega\phi_\omega + \phi_\omega^5 = 0. \quad (4.37)$$

Merle em [39] provou que existe  $0 < T \leq \infty$  de modo que a solução  $v$  do PVI

$$\begin{cases} v_t + 5v^4v_x + v_{xxx} = 0, & (t, x) \text{ em } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad (4.38)$$

para  $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$  (e satisfazendo as condições do Teorema abaixo) é tal que  $\|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow T$ . Em seu trabalho, Merle usou um reescalamamento da onda viajante solitária  $\phi_\omega(x) = \sqrt[4]{3\omega} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{\omega}x)$  para  $\omega = 1$  (o qual denotaremos por  $Q(x) = \sqrt[4]{3} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2x)$ ) e a identidade de Pohőzaev. Tem-se o seguinte resultado,

**Teorema 4.4.1.** *(Blow up para a equação KdV crítica.) Existe  $\alpha_0 > 0$  tal que a seguinte propriedade é verdadeira. Seja  $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$  e seja  $v(t)$  a solução de (4.38). Assuma que*

$$E(v_0) < 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}} v_0^2(x) dx < \int_{\mathbb{R}} Q(x) dx + \alpha_0.$$

*Então a solução  $v$  tem blow up em  $H^1(\mathbb{R})$  em tempo finito ou infinito. Onde*

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} w_x^2 - \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} w^6,$$

*é uma quantidade conservada.*

Na questão da instabilidade de ondas viajantes solitárias, Merle&Martel [40], provaram um resultado de instabilidade de ondas viajantes solitárias para a equação (4.37) em  $H^1(\mathbb{R})$ . Vamos agora verificar que não se pode usar um argumento clássico para determinar a instabilidade da onda solitária. De fato, considere  $\phi_\omega(x) = \sqrt[4]{3\omega} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{\omega}x)$ . Temos que

$$\widehat{\phi_\omega}(y) = A(\omega) O(y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi y}{4\sqrt{\omega}}}) > 0, \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

onde  $A(\omega) > 0$  (ver [46]). Por outro lado, como a transformada de Fourier da função  $\phi_\omega^4(x) = 3\omega \operatorname{sech}^2(2\sqrt{\omega}x)$  pertence à  $PF(2)$  no caso contínuo por (4.34) temos, pelo Teorema 1 em Albert [3] que  $(P_1)$  e  $(P_2)$  no caso contínuo ocorrem para o operador

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} - \omega + 5\phi_\omega^4.$$

De fato, as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  são deduzidas da *teoria clássica de Sturm-Liouville*.

Agora, como claramente  $\omega \in (0, \infty) \mapsto \phi_\omega \in H^n(\mathbb{R})$  é uma curva suave, obtemos que

$$I = (\chi, \phi_\omega) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \|\phi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

onde  $\chi$  é tal que  $\mathcal{L}\chi = \phi_\omega$ . Mas

$$\|\phi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\phi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \text{cte},$$

ou seja, não podemos falar nada a respeito da instabilidade neste caso.

No caso periódico, a estabilidade em  $H_{per}^1([0, L])$  de uma família de soluções periódicas  $\varphi_c$  para (4.36), com a velocidade  $c$  pertencente ao intervalo  $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  onde  $r(k) =$



$4K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$  (ver (4.61)) e  $k_0$  é um valor específico, será provada utilizando a teoria desenvolvida no capítulo 3. Para a existência de soluções da equação (4.36), não faremos uso do Teorema do Somatório de Poisson para descobirmos uma solução periódica do tipo  $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$ . Este método pode ser muito complicado neste caso.

Multiplicando agora a equação (4.36) por  $\varphi'_c$  e integrando mais uma vez o resultado obtém-se

$$[\varphi'_c]^2 = \frac{1}{3}(-\varphi_c^6 + 3c\varphi_c^2 + 6B_{\varphi_c}), \quad (4.39)$$

onde  $B_{\varphi_c}$  é uma constante de integração. Agora, seja  $\varphi_c = \psi_c^{\frac{1}{2}}$  (isto nos fornece que estamos em busca de soluções positivas). Então (4.39) torna-se,

$$[\psi'_c]^2 = \frac{4}{3}(-\psi_c^4 + 3c\psi_c^2 + 6B_{\psi_c}\psi_c). \quad (4.40)$$

Considere o polinômio  $F(t) = -t^4 + 3ct^2 + 6B_{\varphi_c}t$  e  $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta_3$  suas raízes não nulas. Então, se decomposmos  $F(t) = t(t - \eta_1)(t - \eta_2)(\eta_3 - t)$  (veja figura 4.10), temos que as seguintes relações devem ser satisfeitas,

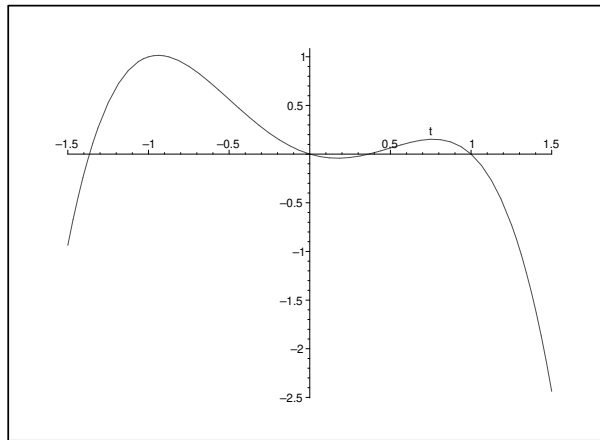


Figura 4.10: Gráfico do polinômio  $F(t)$  com  $c = \frac{1}{2}$  e  $B_{\psi_c} = -\frac{1}{12}$ .

$$\begin{cases} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_3 = -3c \\ \eta_1\eta_2\eta_3 = 6B_{\varphi_c}, \end{cases} \quad (4.41)$$

ou ainda, podemos reescrever a equação (4.40) como sendo,

$$[\psi'_c(\xi)]^2 = \frac{4}{3}F(\psi_c(\xi)). \quad (4.42)$$

Considere, por causa da primeira relação em (4.41), que as raízes satisfaçam

$$\eta_3 > \eta_2 > 0 > \eta_1^1. \quad (4.43)$$

Por (4.42), ou  $\eta_1 \leq \psi_c \leq 0$  (o que não pode ocorrer pois estamos interessados em soluções positivas) ou  $\eta_2 \leq \psi_c \leq \eta_3$ . Vamos aqui considerar o caso

$$\eta_2 \leq \psi_c \leq \eta_3.$$

Então, pela regra de Leibnitz, obtemos por Byrd&Friedman [21],

$$\int_{\eta_2}^{\psi(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{t(\eta_3 - t)(t - \eta_2)(t - \eta_1)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\xi = g \operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sen}\phi(\xi); k), \quad (4.44)$$

onde  $g = \frac{2}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}}$ ,  $k^2 = \frac{-\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}$  e  $\phi(\xi) = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{(\eta_3 - \eta_1)(\eta_3 - \psi(\xi))}{(\eta_3 - \eta_2)(\psi(\xi) - \eta_1)}}$ .

Logo,  $\psi = \psi_c$  vem dada por,

$$\psi_c(\xi) = \frac{\eta_3(\eta_2 - \eta_1) + \eta_1(\eta_3 - \eta_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}g}\xi; k\right)}{(\eta_2 - \eta_1) + (\eta_3 - \eta_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}g}\xi; k\right)}, \quad (4.45)$$

que pode ser reescrita de uma forma mais compacta como sendo,

$$\psi_c(\xi) = \eta_3 \left[ \frac{\operatorname{dn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}g}\xi; k\right)}{1 + \beta^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}g}\xi; k\right)} \right], \quad (4.46)$$

onde  $\beta^2 = -\frac{\eta_3}{\eta_1}k^2 > 0$  e denote,  $\alpha^2 = -\beta^2$  apenas por conveniência. Notemos também que estamos considerando a solução  $\varphi_c$  em (4.46) como sendo de período minimal  $L > 0$ , então devemos ter  $\frac{2}{\sqrt{3}g} = \frac{2K(k)}{L}$ .

Agora, reescreveremos a função  $\psi_c$  dada por (4.46) em termos das integrais Elípticas de terceiro tipo (veja Byrd&Friedman [21]) a saber,

$$\Lambda(u, \alpha, k) = \int_0^u \frac{dv}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 v}, \quad (4.47)$$

---

<sup>1</sup>nos comentários apresentados no capítulo 6, faremos um breve comentário à respeito de outras possibilidades nas quais as raízes  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  possam satisfazer e as "prováveis soluções" que possam surgir.

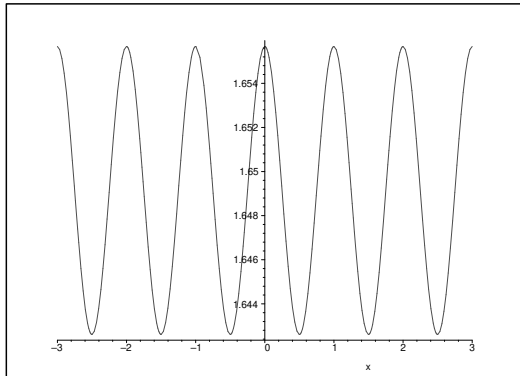


Figura 4.11: Gráfico da função  $\varphi_c$  tal que  $\psi_c = \varphi_c^2$  é dada por (4.46) com período fixado  $L = 1$  e módulo  $k = 0.1$ .

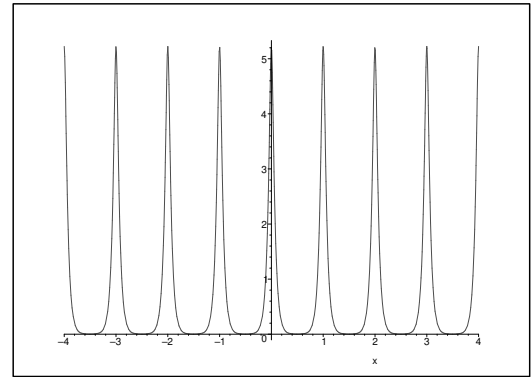


Figura 4.12: Gráfico da função  $\varphi_c$  tal que  $\psi_c = \varphi_c^2$  é dada por (4.46) com período fixado  $L = 1$  e módulo  $k = 0.9999999$ .

onde  $k$  é o módulo e  $\alpha$  é um parâmetro que pode ser dos quatro tipos abaixo

$$\begin{aligned} 0 < \alpha^2 < k^2 < 1, \\ 0 < k^2 < \alpha^2 < 1, \\ \alpha^2 > 1, \\ \alpha^2 = -\beta^2, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

No nosso caso, como  $\alpha^2 = \frac{\eta_3}{\eta_1} k^2 < 0$  e também  $0 < -\alpha^2 < k^2$ , temos por Byrd&Friedman [21], fórmula 431.04, que (iremos considerar as funções elípticas de Jacobi presentes na relação (4.48) abaixo como sendo de período  $\pi$  apenas como uma ilustração)

$$\int_0^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^2(u) du}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2(u)} = C(\alpha, k)(u_1 \Lambda_0(\omega, k) + \Omega_1(u_1)), \quad (4.48)$$

onde

$$C(\alpha, k) = \frac{\pi(k^2 - \alpha^2)}{2\sqrt{\alpha^2(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - k^2)}K(k)},$$

$\omega = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + k^2}}$ ,  $\Omega_1(u_1) = \frac{iK}{\pi} \ln \frac{\vartheta_0(X - iY)}{\vartheta_0(X + iY)}$ , com  $X := X(u_1) = \frac{\pi u_1}{2K}$  e  $Y = \frac{\pi F(\omega, k')}{2K}$ . A função  $\Lambda_0(\omega, k)$  (também conhecida como a função Lambda de

Heuman) é dada em termos das integrais de primeiro e segundo tipo por

$$\begin{aligned}\Lambda_0(\omega, k) &= \frac{2}{\pi} [K(k)E(\omega, k') - K(k)F(\omega, k') + E(k)F(\omega, k')] \\ &= \frac{F(\omega, k')}{K(k')} + \frac{2}{\pi} Z(\omega, k')K(k).\end{aligned}$$

Aqui  $\vartheta_0$  é uma das funções Téta de Jacobi e  $Z(\omega, k')$  é a função Zeta de Jacobi (ver Apêndice ou [21], [38] e [46]).

Agora vamos escrever a função  $L$ -periódica  $\psi_c$  como sendo a derivada da função dada por (4.48), porém considerando a função integral em (4.48) como sendo periódica de período  $L > 0$ . De fato, pondo-se agora  $u_1 = \frac{2}{\sqrt{3g}}\xi$  e usando a regra de Leibnitz em (4.48), segue que  $\psi_c$  pode ser reescrita como sendo

$$\psi_c(\xi) = C(\eta_3, \alpha, k) \left[ \Lambda_0(\omega, k) + \frac{i}{2\pi} \left( \frac{\vartheta_0'(\xi - iY)}{\vartheta_0(\xi - iY)} - \frac{\vartheta_0'(\xi + iY)}{\vartheta_0(\xi + iY)} \right) \right], \quad (4.49)$$

onde neste caso temos  $X = \frac{L}{2K}u_1 = \frac{L}{2K} \frac{2K}{L}\xi = \xi$ ,  $C(\eta_3, \alpha, k) = \eta_3 C(\alpha, k)$  e  $Y = \frac{LF(\omega, k')}{2K}$ .

Podemos ainda, expressar a função  $\psi_c$  dada acima em (4.49) em termos de série de Fourier. Com efeito, do Apêndice temos,

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta_0'(\xi - iY)}{\vartheta_0(\xi - iY)} &= 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n}{L}(\xi - iY) \right) \\ &= 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n\xi}{L} \right) \cos \left( \frac{2\pi niY}{L} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi niY}{L} \right) \cos \left( \frac{2\pi n\xi}{L} \right) \right],\end{aligned}$$

onde  $a_n = \frac{q^n}{1 - q^{2n}} = \frac{1}{2} \operatorname{cosech} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right)$  (ver [46] e [49]). Analogamente,

$$\frac{\vartheta_0'(\xi + iY)}{\vartheta_0(\xi + iY)} = 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n\xi}{L} \right) \cos \left( \frac{2\pi niY}{L} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi niY}{L} \right) \cos \left( \frac{2\pi n\xi}{L} \right) \right].$$

Desta forma, por (4.49) obtemos pela última igualdade, juntamente com os fatos  $Y = \frac{LF(\omega, k')}{2K}$  e  $\operatorname{sen}(ix) = -\frac{1}{i}\operatorname{senh}(x)$  a seguinte relação,

$$\psi_c(\xi) = C(\eta_3, \alpha, k) \left[ \Lambda_0(\omega, k) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{\pi F(\omega, k')n}{K} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right)} \cos \left( \frac{2\pi n\xi}{L} \right) \right]. \quad (4.50)$$

A onda acima dada em (4.46) possui período fundamental dada por,

$$T_\psi = \sqrt{3}gK(k_\psi) = \frac{2\sqrt{3}K(k_\psi)}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}}, \quad (4.51)$$

onde  $k_\psi^2 = \frac{-\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}$ . Agora, seja  $c \in \mathbb{R}$  fixado, por (4.41) podemos determinar que  $\eta_2$  e  $\eta_3$  satisfazem a equação da elipse

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2\eta_3 = 3c. \quad (4.52)$$

Portanto, de (4.52) e o fato que  $\eta_2, \eta_3 > 0$  obtemos que  $c > 0$ . Ademais, tem-se ainda de (4.52) que  $\eta_1 < 0 < \eta_2 < \sqrt{c} < \eta_3 < \sqrt{3c}$ . Ainda de (4.52) podemos obter de (4.51),

$$T_\psi(\eta_3) = \frac{2\sqrt{3}K(k)}{(12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}}. \quad (4.53)$$

Se  $\eta_3 \rightarrow \sqrt{c}$  então pela equação da elipse acima temos  $\eta_2 \rightarrow \sqrt{c}$  e portanto, como  $k^2 = \frac{-\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}$ , obtemos  $k \rightarrow 0$ . Logo, de (4.53),  $T_\psi \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{c}}$ . Por outro lado, como para  $\eta_3 \rightarrow \sqrt{3c}$  tem-se  $\eta_2 \rightarrow 0$  e desta forma,  $k \rightarrow 1$  donde,  $T_\psi \rightarrow \infty$ . Sendo  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{3c}) \mapsto T_\psi(\eta)$  uma função estritamente crescente (provaremos isto mais tarde) temos que

$$T_\psi > \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

Através da equação da elipse podemos determinar que

$$\eta_1 = \frac{-\eta_3 - \sqrt{12c - 3\eta_3^2}}{2} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{-\eta_3 + \sqrt{12c - 3\eta_3^2}}{2}, \quad (4.54)$$

e como  $\eta_3 < \sqrt{3c}$  temos que  $12c - 3\eta_3^2 > 0$ . Podemos obter o módulo  $k$  em função de  $\eta_3$  e  $c$  por

$$k^2 = \frac{3\eta_3^2 + \sqrt{12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4} - 6c}{2\sqrt{12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}. \quad (4.55)$$

Notemos agora que em (4.46) se  $\eta_3 \rightarrow \sqrt{c}$  ( $c > 0$  fixado) então  $k \rightarrow 0$  e  $\psi_c(z) \rightarrow \eta_3 = \sqrt{c}$ , o que nos fornece que  $\sqrt[4]{c}$  é uma solução de (4.36). Por outro lado se  $\eta_3 \rightarrow \sqrt{3c}$  (e portanto  $\eta_1 \rightarrow -\sqrt{3c}$ ) então  $k \rightarrow 1$  e desta forma,  $\psi_c(\xi) \rightarrow f(\xi) = \frac{\tilde{\eta}_1}{\cosh\left(\frac{4\xi}{\sqrt{3g}}\right)}$ , onde  $\tilde{\eta}_1 = -\eta_1 =$

$\sqrt{3c} > 0$  e  $\tilde{g} = \frac{2}{\tilde{\eta}_1}$ . Logo,  $\sqrt{f}$  é a solução onda viajante solitária da equação 4-KdV definida na reta  $\mathbb{R}$ ,

$$\phi_c'' - c\phi_c + \phi_c^5 = 0,$$

cuja solução vem dada por

$$\phi_c(\xi) = \sqrt[4]{3c} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{c}\xi). \quad (4.56)$$

Agora, contruíremos para um período fixado  $L > 0$ , uma curva regular de soluções para a equação (4.36). Como  $\varphi_c^2 = \psi_c$  e a função raiz é diferenciável, analisaremos a curva  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \rightarrow \psi_c \in H_{per}^1([0, L])$ , uma vez que os períodos fundamentais de  $\varphi_c$  e  $\psi_c$  são os mesmos. Começaremos por mostrar a existência de uma família de ondas com um período fixado. De fato, seja  $L > 0$  e  $c > 0$  tal que  $\sqrt{c} > \frac{\pi}{L}$ . Veremos no Teorema 4.4.2 que a função  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{3c}) \mapsto T_{\psi_c}(\eta)$  é estritamente crescente e portanto existe um único  $\eta \equiv \eta(c) \in (\sqrt{c}, \sqrt{3c})$  tal que o período fundamental da função  $\psi_c$  será  $T_{\psi_c}(\eta(c)) = L$ . Após feito isso, obteremos como consequência a dependência do período fundamental em relação aos parâmetros  $k \in (0, 1)$  e  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$  (em verdade o que temos é uma dependência de  $k(c)$ ). Como as raízes  $\eta_i$  com  $i = 1, 2, 3$ , também dependerão da velocidade da onda  $c$ , então a análise feita acima em que a solução onda viajante periódica  $\varphi_c$  da equação (4.36) tende para a solução onda viajante solitária  $\phi_c$  está em certo sentido "incompleta" uma vez que a velocidade da onda  $c$  neste caso está fixada. A seguir, temos o Teorema de existência de uma curva regular,

**Teorema 4.4.2.** *Seja  $L > 0$  fixado mas arbitrário e considere  $c_0 > \frac{\pi^2}{L^2}$  e  $\eta_{3,0} = \eta_3(c_0) \in (\sqrt{c_0}, \sqrt{3c_0})$ , tal que  $T_{\psi_{c_0}} = L$ , então,*

*i) Existe um intervalo  $I(c_0)$  em torno de  $c_0$ , um intervalo  $J(\eta_{3,0})$  em torno de  $\eta_{3,0}$  e uma única função  $\Gamma : I(c_0) \rightarrow J(\eta_{3,0})$  tal que  $\Gamma(c_0) = \eta_{3,0}$  e*

$$\frac{2\sqrt{3}K}{(12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}} = L,$$

*onde  $c \in I(c_0)$ ,  $\eta_3 = \Gamma(c)$ ;  $k = k(c) \in (0, 1)$  vem dado por (4.55).*

*ii) A função  $\psi$  dada em (4.46) por  $\psi = \varphi^2$  tal que  $\varphi$  é solução de (4.36) é determinada pela tripla  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  possui período fundamental  $L$ . Além disso,*

$$c \in I(c_0) \rightarrow \psi_c \in H_{per}^n([0, L]) \text{ é suave } \forall n \in \mathbb{N}.$$

*iii)  $I(c_0)$  pode ser escolhido como  $I = \left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ .*

**Demonstração:** Definamos

$$\Omega = \left\{ (\eta, c) \in \mathbb{R}; \quad c > \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{3c}) \right\},$$

e seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,

$$F(\eta, c) = \frac{2\sqrt{3}K(k(\eta, c))}{(12c\eta^2 - 3\eta^4)^{\frac{1}{4}}},$$

onde  $k^2(\eta, c)$  é dado por (4.55). Considere  $b = 12c\eta^2 - 3\eta^4$ , então,

$$\begin{aligned} F_\eta(\eta, c) &= \frac{2\sqrt{3} \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\eta} b^{\frac{1}{4}} - \frac{2\sqrt{3}K[24c\eta - 12\eta^3]}{4b^{\frac{3}{4}}}}{\sqrt{b}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{b}} \left[ \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\eta} \sqrt[4]{b} - \frac{12K\eta}{4\sqrt[4]{b^3}} [2c - \eta^2] \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{b^5}} \left[ \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\eta} b - 3K\eta [2c - \eta^2] \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Por outro lado, de (4.55) temos que

$$\frac{dk}{d\eta} = \frac{18c^2\eta}{k\sqrt{b^3}} > 0.$$

Como  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{3c})$ , temos dois casos à considerar. Se  $\eta \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c})$  então  $2c - \eta^2 < 0$  donde  $F_\eta(\eta, c) > 0$ . Agora, se caso  $\eta \in (\sqrt{2c}, \sqrt{3c})$  então  $2c - \eta^2 > 0$  e desta forma, podemos obter que  $b(2c - \eta^2)^2 < 36c^4$ . Logo, por (4.57) temos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{b^5}}{6\sqrt{3}\eta} F_\eta(\eta, c) &= \frac{1}{k} \frac{dK}{dk} \frac{6c^2}{\sqrt{b}} - K(2c - \eta^2) = \frac{1}{\sqrt{b}} \left\{ \frac{1}{k} \frac{dK}{dk} 6c^2 - \sqrt{b}K(2c - \eta^2) \right\} \\ &> \frac{1}{\sqrt{b}} \left\{ \frac{1}{k} \frac{dK}{dk} 6c^2 - 6c^2K \right\} = \frac{6c^2}{\sqrt{b}} \left\{ \frac{1}{k} \frac{dK}{dk} - K \right\}. \end{aligned}$$

Agora, seguindo uma análise semelhante ao que fora feito para o caso da mKdV (ver Teorema 4.2.1) temos que  $\frac{1}{k} \frac{dK}{dk} - K > 0$  e desta maneira  $F_\eta(\eta, c) > 0$ . Portanto, pelo Teorema da Função Implícita segue a existência de uma única função regular  $\Gamma$ , definida em uma vizinhança  $I(c_0)$  de  $c_0$ , de tal forma que  $F(\Gamma(c), c) = L$  para todo  $c \in I(c_0)$ . Pela arbitrariedade de  $c_0$  no intervalo  $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ , segue da unicidade de  $\Gamma$ , que podemos estender  $I(c_0)$  ao intervalo  $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ , o que completa a demonstração do Teorema.

□

**Corolário 4.4.1.** *Consideremos  $\Gamma : I(c_0) \rightarrow J(\eta_{3,0})$  determinada pelo Teorema anterior. Então  $\Gamma$  é estritamente crescente.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.4.2, temos que  $F(\Gamma(c), c) = L$  para todo  $c \in I(c_0)$ . Novamente, pelo Teorema da Função Implícita, tem-se

$$\frac{d}{dc}\Gamma(c) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial \eta}}.$$

Calcularemos  $F_c(\eta, c)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} F_c(\eta, c) &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{b}} \left[ \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dc} \sqrt[4]{b} - 3 \frac{K}{\sqrt[4]{b^3}} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{b^5}} \left[ \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dc} b - 3K \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{dk(\eta, c)}{dc}(\eta, c) = -\frac{9\eta^2 c}{k\sqrt{b^3}} < 0$$

Portanto  $F_c(\eta, c) < 0$ , provando o Corolário.

□

**Teorema 4.4.3.** *Consideremos  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$  com  $\eta_3(c) = \Gamma(c)$  e a função módulo*

$$k(c) = \sqrt{\frac{3\eta_3^2 - 6c + \sqrt{12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}}, \quad (4.58)$$

então  $\frac{dk}{dc} > 0$ .

**Demonstração:** Pelo Corolário 4.4.1 vemos que a aplicação  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto \eta_3(c)$  é diferenciável. Pelas relações presentes em (4.54) podemos concluir que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são também funções diferenciáveis com relação a variável  $c$ . Ademais podemos ainda, reescrever a função  $k = k(c)$  dada pela equação (4.58) em termos de  $\eta_2$  da seguinte maneira,

$$k^2(c) = \frac{12c - 6\eta_2^2 - \sqrt{48c\eta_2^2 - 12\eta_2^4}}{12c - 6\eta_2^2 + \sqrt{48c\eta_2^2 - 12\eta_2^4}}. \quad (4.59)$$



Denote  $p := 12c - 6\eta_2^2$  e  $q := 48c\eta_2^2 - 12\eta_2^4$ . Diferenciando a equação (4.59) com respeito à  $c$  obtemos,

$$\begin{aligned} 2k \frac{dk}{dc} &= \frac{576c\eta_2^2 - 48\eta_2^4 - 48\eta_2^5\eta_2' - 1152c^2\eta_2^2\eta_2'}{(p + \sqrt{q})^2} \\ &= \frac{48\eta_2^2(12c - \eta_2^2) - 48\eta_2^5\eta_2' - 1152c^2\eta_2^2\eta_2'}{(p + \sqrt{q})^2}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Como pelo Corolário (4.4.1),  $\eta_3' > 0$ , então podemos determinar através da segunda equação de (4.54) que  $\eta_2' < 0$  e portanto, como claramente  $12c - \eta_2^2 > 0$  segue da equação (4.60) que  $\frac{dk}{dc} > 0$ , provando o Teorema. □

Vamos agora determinar os valores explícitos  $\eta_3$  e  $c$  em função de  $k \in (0, 1)$ . De fato, temos para  $b = 12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4$  que

$$k^2 = \frac{3\eta_3^2 - 6c + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}} \quad \text{e} \quad L^2 = 12 \frac{K^2}{\sqrt{b}}.$$

Então obtém-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 12c\eta_3^2 - 3\eta_3^4 = \frac{144K^4}{L^4} \\ 3\eta_3^2 - 6c = \frac{12K^2}{L^2}(2k^2 - 1). \end{cases}$$

Após uma álgebra, a seguinte equação biquadrada é obtida através do sistema acima,

$$\eta_3^4 - \frac{8K^2}{L^2}(2k^2 - 1)\eta_3^2 - \frac{48K^4}{L^4} = 0,$$

cuja solução (já que  $\eta_3 > 0$ ) é

$$\eta_3 = \frac{K}{L} \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)}.$$

O valor de  $c$  é,

$$c = \frac{4K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{L^2} \equiv \frac{r(k)}{L^2} > 0. \quad (4.61)$$

Podemos determinar, como se tem o valor de  $\eta_3$ , pela relação (4.54) que

$$\eta_2 = \frac{K}{L} \sqrt{4\sqrt{1 - k^2 + k^4} - 2(1 + k^2)} \quad \text{e} \quad \eta_1 = -\frac{K}{L} \sqrt{4\sqrt{1 - k^2 + k^4} + 2(1 + k^2)}.$$

Assim, tem-se o seguinte Teorema de estabilidade para a 4-KdV,

**Teorema 4.4.4.** *Seja  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$ . Então a solução  $\varphi_c$  determinada pelo Teorema 4.4.2 é estável em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo da 4-KdV onde  $k_0 \approx 0,3823174965$ .*

**Demonstração:** Primeiramente provaremos que  $I = (\chi, \varphi_c)_{L_{per}^2} < 0$  para  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$ , onde  $\chi$  é tal que  $\mathcal{L}\chi = \varphi_c$ . De fato, fora provado anteriormente que a aplicação  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, +\infty\right) \mapsto \varphi_c \in H_{per}^n([0, L])$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  é suave (de classe  $C^1$  mais precisamente), então, o valor de  $I$  com  $\chi = -\frac{d}{dc}\varphi_c$  torna-se,

$$I = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \|\varphi_c\|_{L_{per}^2}^2$$

Com isto,

$$\|\varphi_c\|_{L_{per}^2}^2 = \int_0^L |\varphi_c(\xi)|^2 d\xi = \int_0^L \psi_c(\xi) d\xi.$$

Agora, para  $\alpha^2 = \frac{\eta_3}{\eta_1} k^2 = -\beta^2$ , com  $\beta > 0$  temos que  $0 < -\alpha^2 < +\infty$ . Assim, por [21],

fórmula 410.04, temos para  $\omega = \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k^2}}$  que,

$$\int_0^K \frac{\text{dn}^2(x; k)}{1 + \beta^2 \text{sn}^2(x; k)} dx = \frac{(k^2 - \alpha^2)G(\omega, k)}{\sqrt{\alpha^2(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - k^2)}}, \quad (4.62)$$

onde

$$G(\omega, k) := K(k)E(\omega, k') - K(k)F(\omega, k') + E(k)F(\omega, k') = \frac{\pi}{2}\Lambda_0(\omega, k).$$

Podemos concluir pela equação (4.62) e (4.46) que,

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_c(\xi) d\xi &= \eta_3 \int_0^L \frac{\text{dn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{1 + \beta^2 \text{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)} d\xi = \eta_3 \sqrt{3g} \int_0^K \frac{\text{dn}^2(x; k)}{1 + \beta^2 \text{sn}^2(x; k)} dx \\ &= \frac{\sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 - 1} + 2(2k^2 - 1)}\sqrt{1 + f(k)}G(\omega, k)}{\sqrt{f(k)}\sqrt{1 + k^2 f(k)}}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde

$$f(k) := \frac{\sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 - 1} + 2(2k^2 - 1)}}{\sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 - 1} + 2(1 + k^2)}} = -\frac{\eta_3(k)}{\eta_1(k)} > 0$$

Aqui,  $F(\omega, k')$  e  $E(\omega, k')$  são as integrais de primeiro e segundo tipo respectivamente com  $\omega = \text{sen}^{-1} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + k^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{f(k)}}{\sqrt{f(k) + 1}}$  e  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . Com isto, pela igualdade (4.63),

$$\frac{d}{dc} \int_0^L \psi_c(\xi) d\xi = \frac{dm(k)}{dk} \frac{dk}{dc}, \quad (4.64)$$

onde  $m$  dada acima é uma função não dependente do período  $L > 0$  e é dada por,

$$m(k) := \frac{\sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)\sqrt{1 + f(k)}} G(\omega, k)}{\sqrt{f(k)}\sqrt{1 + k^2 f(k)}}. \quad (4.65)$$

Podemos notar, através do programa *Maple* e comando *CriticalPoints*, que a função  $m$  acima é crescente para  $k \in (0, k_0)$  onde  $k_0 \approx 0,3823174965$  (ver gráfico da figura 4.13). Desta forma, pelo Teorema 4.4.3 concluímos de (4.64) que  $\frac{d}{dc} \int_0^L \psi_c(\xi) d\xi > 0$  desde que  $k \in (0, k_0)$  e conseqüentemente tem-se  $\frac{d}{dc} \int_0^L \psi_c(\xi) d\xi > 0$  para  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$ , onde  $r(k) = 4K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$ .

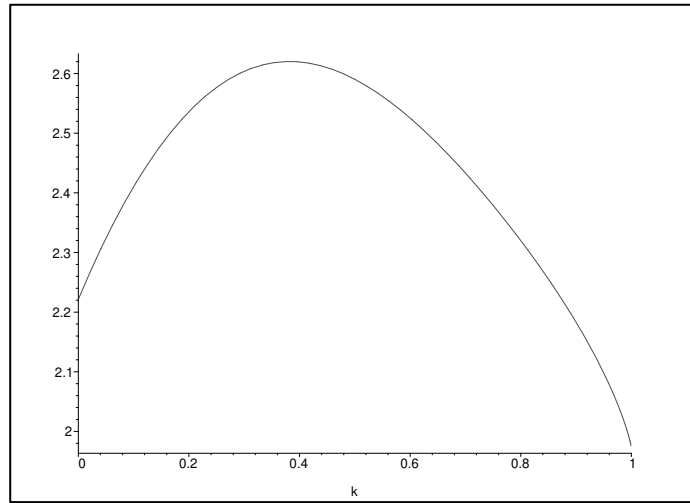


Figura 4.13: Gráfico da função  $m(k)$ .

Agora verificaremos as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  presentes em (1.10). Com efeito, consideremos a expansão em série de Fourier da função  $\varphi_c^2(\xi) = \psi_c(\xi)$  dada em (4.50) por,

$$\psi_c(\xi) = C(\eta_3, \alpha, k) \left[ \Lambda_0(\omega, k) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\pi F(\omega, k')n}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K'}{K}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right) \right],$$

como  $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  temos que  $F(\omega, k') \in [0, K']$  e consequentemente, como a função

$$q(x) = \frac{\sinh(\nu x)}{\sinh(\mu x)},$$

pertence a  $PF(2)$  no caso contínuo desde que  $0 < \nu < \mu$  (veja Lema 3.2.1), temos que a sequência

$$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} := \left( \frac{\sinh\left(\frac{\pi F(\omega, k') n}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n \pi K'}{K}\right)} \right)_{n \in \mathbb{Z}},$$

para  $k \in (0, 1)$  fixo, pertence à  $PF(2)$  no caso discreto. Por outro lado, sendo

$$a_0 = \frac{F(\omega, k')}{K'} < \Lambda_0(\omega, k),$$

pois

$$\Lambda_0(\omega, k) = \frac{F(\omega, k')}{K'(k)} + \frac{2}{\pi} K(k) Z(\omega, k') > \frac{F(\omega, k')}{K'(k)},$$

podemos proceder, conforme fora feito no caso da equação KdV, completando de maneira adequada, para cada  $k \in (0, 1)$  fixado, a função  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tau(x) = \eta_3 C(\alpha, k) \frac{\sinh\left(\frac{\pi F(\omega, k') x}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{x \pi K'}{K}\right)}$$

por uma função diferenciável  $s := s(x)$  tal que  $s(0) = C(g)C(\alpha, k)\Lambda_0(\omega, k)$  e  $s(x) = \tau(x)$  em  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  de modo que  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pertença  $PF(2)$  no caso contínuo e desta forma,  $(\widehat{\psi}_c(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  pertence a  $PF(2)$ . Como convolução de sequências em  $PF(2)$  discreto é uma sequência em  $PF(2)$  discreto (ver Teorema 3.2.1) segue que  $\widehat{\psi}_c^2 = \widehat{\varphi}_c^4$  pertence a  $PF(2)$  discreto.

Vamos analisar agora o comportamento da transformada de Fourier de  $\varphi_c, \widehat{\varphi}_c$ . Com efeito, reescrevendo a função  $\psi_c$  de forma mais adequada obtemos,

$$\psi_c(\xi) = \frac{\eta_3}{1 + \gamma(k) \text{sd}^2\left(\frac{2\xi}{\sqrt{3g}}, k\right)}, \quad (4.66)$$

onde  $\text{sd}(y, k) = \frac{\text{sn}(y, k)}{\text{dn}(y, k)}$  e  $\gamma(k) = \frac{k}{k'}(1 + \beta^2)$ . Como  $1 + \gamma(k) \text{sd}^2\left(\frac{2\xi}{\sqrt{3g}}, k\right) \geq 1$  temos que

$$h_c^2(\xi) := \frac{1}{1 + \gamma(k) \text{sd}^2\left(\frac{2\xi}{\sqrt{3g}}, k\right)} \leq 1 \text{ e então } h_c^2(\xi) \leq h_c(\xi), \text{ onde}$$

$$h_c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma(k) \text{sd}^2\left(\frac{2\xi}{\sqrt{3g}}, k\right)}}.$$

Com isto, suponha por absurdo que exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\widehat{\varphi}_c(n_0) = 0$ . Em particular  $\widehat{h}_c(n_0) = 0$ . Consideremos uma função à valores reais  $b$  suficientemente regular tal que  $b > 0$ ,  $\widehat{b}(n_0) > 0$ ,  $\widehat{b}(n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  com  $n \neq 0$  e  $n \neq n_0$  e satisfazendo  $\widehat{b}(n_0)\widehat{h}_c^2(n_0) > \widehat{b}(0)\widehat{h}_c(0)$ . Vamos demonstrar que existe tal função. Com efeito, seja  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  uma sequência tal que  $a_0 > 0$ ,  $a_{n_0} > 0$  e  $a_n = 0$  para todo  $n \neq 0, n_0$ . Temos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$  donde existe uma função  $b \in \mathcal{P}$  tal que  $\widehat{b}(n) = a_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Pelo Teorema de Fourier (ver Teorema 14 de [31]) podemos escolher  $b > 0^2$ . A condição em que  $\widehat{b}(n_0)\widehat{h}_c^2(n_0) > \widehat{b}(0)\widehat{h}_c(0)$  pode ser obtida fazendo uma escolha conveniente dos coeficientes  $a_0$  e  $a_{n_0}$  de modo que se tenha esta desigualdade. Tendo provado isto por Parseval obtemos,

$$\widehat{b}(0)\widehat{h}_c(0) = \int_0^L b(x)h_c(x)dx \geq \int_0^L b(x)h_c^2(x)dx = \widehat{b}(n_0)\widehat{h}_c^2(n_0) + \widehat{b}(0)\widehat{h}_c^2(0),$$

o que nos fornece um absurdo. De forma inteiramente análoga, prova-se em verdade que  $\widehat{\varphi}_c > 0$ . Portanto, temos provado que  $\varphi_c$  é estável pelo fluxo da 4-KdV desde que  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$ . Isto prova o Teorema. □

#### 4.4.2 Estabilidade de Soluções Constantes

Consideremos novamente a equação 4-KdV,

$$\varphi_c'' + \varphi_c^5 - c\varphi_c = 0, \quad (4.67)$$

As soluções constantes não nulas do tipo  $\varphi_c \equiv \tau = \text{constante}$  para a equação (4.67) são  $\tau_0 = \psi_0 \equiv -\sqrt[4]{c}$  e  $\tau_1 = \psi_1 \equiv \sqrt[4]{c}$ . Se prosseguirmos de forma análoga ao que fora feito no caso da BO na Subseção 3.1.1, utilizarmos a desigualdade de Poincaré-Wirtinger descrita na Subseção 3.3.1 para o caso da estabilidade da solução  $2c$  no caso da KdV e o fato em que  $\frac{\pi^2}{L^2} < \frac{4\pi^2}{L^2}$  obtemos o seguinte resultado para a solução  $\psi_1^3$ ,

**Proposição 4.4.1.** *Sejam  $L > 0$  e  $c > 0$  dados. Considere  $\psi_1 \equiv \sqrt[4]{c}$  a solução constante não nula da equação (4.67). Então  $\psi_1$  é estável em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo da 4-KdV desde que  $c < \frac{\pi^2}{L^2}$ .*

<sup>2</sup>Se porventura  $b$  não for uma função real, basta considerar  $\text{Re}b$  no lugar de  $b$  de tal modo que  $\widehat{\text{Re}b}(n_0)\widehat{h}_c^2(n_0) > \widehat{\text{Re}b}(0)\widehat{h}_c(0)$

<sup>3</sup>estamos considerando a solução  $\psi_1$  posto que a solução não trivial em (1.14) obtida para 4-KdV tende para  $\psi_1 \equiv \sqrt[4]{c}$  ao fazermos o módulo  $k \rightarrow 0$

□

### 4.4.3 Estabilidade e Instabilidade de Soluções Ondas Viajantes Periódicas da Equação CNLS

Neste momento iremos considerar a equação Schrödinger crítica não linear (CNLS) periódica de período  $L > 0$  descrita por,

$$iu_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0, \quad (4.68)$$

com  $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$ ,  $x \in [0, L]$  e  $t \in \mathbb{R}$ . No que segue, consideraremos ondas viajantes periódicas do tipo  $u(x, t) = e^{i\omega t} \varphi_\omega(x)$ , com  $\varphi_\omega$  periódica de período  $L > 0$  e real. Substituindo esta expressão em (4.68) obtemos a seguinte EDO

$$\varphi_\omega'' + \varphi_\omega^5 - \omega \varphi_\omega = 0, \quad (4.69)$$

a qual é a mesma equação diferencial que determina as ondas viajantes periódicas da 4-KdV. Conforme já fora mencionado no início do capítulo 3 temos que a equação CNLS não possui a forma (1.3). Contudo, pelo fato que funções do tipo  $u(x, t) = e^{i\omega t} \varphi_\omega(x)$  são soluções da equação (4.69) e operador não linear associado  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 5\varphi_\omega^4$  são os mesmos que os da 4-KdV<sup>4</sup>, podemos utilizar argumentos similares ao que fora desenvolvido na subseção 4.4.1 (ver Seção 3.4) para obtermos a existência de um ramo de curvas regulares bem como as propriedades de estabilidade e instabilidade quando  $\omega = c$ , onde  $c$  é a velocidade da onda viajante periódica  $\varphi_c$  no caso da 4-KdV descrita por (1.14). A noção de estabilidade para este caso é um pouco diferente pois estamos trabalhando com funções complexas. Primeiramente, considere as leis de conservação

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ |u'|^2 - \frac{1}{6} |u|^6 \right] dx, \quad F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L |u|^2 dx.$$

Além disso, temos que se  $u(x, t)$  é uma solução de (4.68) então  $u(x, t) = e^{i\theta} u(x + y, t)$  é também uma solução para quaisquer  $(y, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  uma vez que esta equação é invariante por translações e rotações. Desta maneira, a noção de estabilidade será módulo

---

<sup>4</sup>em verdade o outro operador linear que surge neste caso é  $\mathcal{L}^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi_c^4$ , porém este é positivo definido.

translações e rotações (estabilidade orbital). De fato, consideremos a órbita gerada por  $\varphi_\omega$

$$\mathcal{O}_{\varphi_\omega} = \{e^{i\theta} \varphi_\omega(\cdot + y), (y, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)\}. \quad (4.70)$$

**Definição 4.4.1.** *Diremos que a órbita gerada por  $\varphi_\omega$  é estável pelo fluxo periódico da equação CNLS se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que se*

$$\inf_{(y, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)} \|u_0 - e^{i\theta} \varphi_\omega(\cdot + y)\|_{H_{per}^1([0, L])} < \delta, \quad (4.71)$$

então a solução  $u(x, t)$  da CNLS (4.68) com dado inicial  $u_0$  satisfaz,

$$\inf_{(y, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)} \|u(\cdot, t) - e^{i\theta} \varphi_\omega(\cdot + y)\|_{H_{per}^1([0, L])} < \varepsilon, \quad (4.72)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

A seguir tem-se o seguinte resultado cuja a demonstração segue da teoria de Grillakis *et al.* em [27] e [28].

**Teorema 4.4.5.** *A órbita gerada por  $\varphi_\omega$  é estável em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo da Schrödinger crítica não linear para  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  e instável para  $c \in \left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$ , onde  $k_0 \approx 0,3823174965$ .*

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## Conclusões e Estudos Futuros

De acordo com esta tese, podemos concluir,

- O uso do *Teorema do Somatório de Poisson* (ver Teorema 2.1.2) para descobrirmos uma onda viajante periódica através de uma onda viajante solitária nos fornece um método mais simples para descobrir ondas periódicas e como consequência, obter os coeficientes de Fourier da onda periódica mais facilmente. Porém, vale ressaltar que nem sempre podemos obter um resultado satisfatório face o grau de dificuldade do coeficiente de Fourier associado a onda solitária (como por exemplo o caso da 4-KdV).
- Em posse do coeficiente de Fourier da onda periódica, podemos deduzir, caso ele satisfaça as hipóteses do Teorema 3.2.2, as propriedades espectrais necessárias, a saber as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10). Com isto não se faz necessário o uso da teoria Floquet clássica (ver [41]) posto que a mesma não se aplica a operadores do tipo não-local como  $\mathcal{H}\partial_x$  presente no caso da equação de Benjamin-Ono. No caso da 4-KdV, o potencial associado ao operador  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - 5\varphi_c^4$ , não é satisfeito por uma equação do tipo *Lamé* como em (1.2).
- O critério desenvolvido no capítulo 3, especialmente o Teorema 3.2.2, estabelece condições suficientes para a prova da estabilidade não linear da solução periódica  $\varphi_c$  da equação de Benjamin-Ono (1.11). Solução esta que até o presente momento poderia ser ou não



estável. A dificuldade até então era o estudo do comportamento dos dois primeiros *autovalores* do operador não-local  $\mathcal{L} = \mathcal{H}\partial_x + c - \varphi_c$ . Este empecilho foi contornada graças a teoria desenvolvida no referido capítulo 3.

- O critério supra citado e juntamente com o *Teorema do Somatório de Poisson* estabelece uma prova alternativa para a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para as equações KdV e mKdV. Tais resultados de estabilidade foram provados por Angulo&Bona&Scialom [10] e Angulo [7] respectivamente.
- Apesar de não fazermos o uso do *Teorema do Somatório de Poisson* para determinar as soluções ondas viajantes periódicas associadas à 4-KdV, utilizamos a expansão em série de Fourier da solução  $\varphi_c$  obtida por meio de *integração direta* em (1.14) e então aplicamos o Teorema 3.2.2. Desta maneira garantimos a estabilidade desta solução para a velocidade  $c$  pertencendo ao intervalo  $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  com  $r(k) = 4K^2(k)\sqrt{1+k^4-k^2}$  e  $k_0 \approx 0,3823174965$ . Este resultado de estabilidade é extremamente interessante posto que as ondas viajantes solitárias associadas à 4-KdV são instáveis conforme determinou Merle&Martel em [40].
- Ao obtermos as propriedades espectrais referentes ao operador  $\mathcal{L}$  obtidas pelo Teorema 3.2.2 e juntamente com os fatos  $\frac{d}{dc} \int_0^L \psi_c(x)dx > 0$  para  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  e  $\frac{d}{dc} \int_0^L \psi_c(x)dx < 0$  para  $c \in \left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$  em (4.64) obtemos, respectivamente, os resultados de estabilidade e a instabilidade da equação CNLS.
- A utilização do programa *Maple* foi de suma importância nesta tese. Além dos gráficos feitos no programa que foram mostrados no decorrer do texto para ilustrar melhor o comportamento das complicadas funções que foram apresentadas, ele foi salutar na apresentação dos valores  $k_1 \approx 0,9803823108$  que surge como limitante inferior para o módulo  $k \in (0,1)$  para que tenhamos a solução (e conseqüentemente a estabilidade - ver Angulo [10])  $\phi_\gamma$  de média zero da equação KdV (4.31) e  $k_0 \approx 0,3823174965$  este como um limitante superior para que as equações 4-KdV e CNLS (1.13) sejam estáveis para o módulo  $k \in (0, k_0)$ . Podemos observar que sem esta ferramenta seria extremamente trabalhoso determinar manualmente estes dois valores, principalmente  $k_0$ , face a dificuldade em derivar a função  $m$  em (4.65) e então determinar que  $k_0$  é o

único ponto de máximo desta função no intervalo  $(0, 1)$ .

- O problema de instabilidade para as ondas periódicas  $\varphi_c$  no caso da 4-KdV para  $\left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$  fica em aberto. As técnicas usadas em Grillakis *et al.* [27]-[28] e Bona&Souganidis&Strauss [18] não podem ser aplicadas em nosso caso. A teoria desenvolvida por Lopes em [37] também não pode ser aplicado uma vez que o operador  $\partial_x$  não é injetor em  $H_{per}^1([0, L])$ .

Para estudos futuros, podemos mencionar,

- Mostrar que de fato temos a instabilidade das ondas viajantes periódicas  $\varphi_c$  para a 4-KdV para  $c \in \left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$ . Neste caso queremos determinar se o uso da função de Evans no caso periódico, através do trabalho de Gardner [26]-[25], pode produzir um resultado de instabilidade linearizada similar ao que fora obtido por Pego&Weinstein em [50] no caso de ondas solitárias.
- Obter um resultado de estabilidade para a equação de *onda longa intermediária* (ILW) periódica de período  $2L$  (ver Ablowitz *et al.* [2] e Parker [49]) dada pela equação

$$u_t + (\delta^{-1} + 2u)u_x + (Hu)_{xx} = 0 \quad (5.1)$$

onde

$$Hf(x) = \frac{1}{2L} \text{v.p} \int_{-L}^L \tilde{H}(x - \xi, \delta, L) f(\xi) d\xi,$$

com

$$\tilde{H}(x, \delta, L) = -\frac{2K(k)}{\pi} \left[ Z\left(\frac{K(k)x}{L}\right) + \text{dn}\left(\frac{K(k)x}{L}\right) \text{cs}\left(\frac{K(k)x}{L}\right) \right],$$

onde  $\text{cs}(u; k) = \frac{\text{cn}(u; k)}{\text{sn}(u; k)}$ .

- Como estabelecemos um critério para a estabilidade de ondas periódicas, estudar outras equações cujos operadores associados possuam as propriedades espectrais  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (1.10) através de nossa teoria e então determinar se as ondas periódicas são estáveis. Como exemplo, as equações do tipo KdV de alta ordem.
- Obter uma expressão exata para o valor  $k_0$  determinado no estudo da estabilidade da 4-KdV e CNLS e não apenas uma aproximação numérica.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## Apêndice

---

### 6.1 Funções Elípticas de Jacobi

---

Estabeleceremos algumas propriedades básicas das integrais elípticas Jacobianas (veja [19] e [21]). A integral elíptica de primeiro tipo é,

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F(\varphi, k),$$

onde  $y = \sin\varphi$ . A integral elíptica de segundo tipo é

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta \equiv E(\varphi, k).$$

O número  $k$  é chamado o módulo e pertence ao intervalo  $(0, 1)$ . O número  $k' = \sqrt{1-k^2}$  é chamado o módulo complementar. O parâmetro  $\varphi$  é chamado o argumento das integrais elípticas. É usualmente entendido que  $0 \leq y \leq 1$  ou ainda que  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Para  $y = 1$ , as integrais acima são ditas ser completas. Neste caso, escrevemos,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K,$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Claramente temos que  $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$ , enquanto que  $E(1) = 1$  e  $K(1) = +\infty$ . Para  $k \in (0, 1)$ , temos  $\frac{dK}{dk} > 0$ ,  $\frac{d^2K}{dk^2} > 0$ ,  $\frac{dE}{dk} < 0$ ,  $\frac{d^2E}{dk^2} < 0$  e  $E(k) < K(k)$ . Além disso,  $E(k) + K(k)$  e  $E(k)K(k)$  são funções estritamente crescentes para cada  $k \in (0, 1)$ . Temos ainda algumas derivadas de integrais completas elípticas  $K$  e  $E$  usadas nesta tese,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2}, \\ \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}. \end{array} \right.$$

As funções Jacobianas elípticas serão definidas como segue. Considere a integral elíptica,

$$u(y_1; k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F(\varphi, k),$$

que é uma função estritamente crescente na variável  $y_1$ . Sua inversa é escrita como sendo  $y_1 = \text{sn}\varphi \equiv \text{sn}(u; k)$  onde  $\varphi = \text{am}(u; k)$  (a função  $\text{am}(u; k)$  é chamada função *amplitude* de  $u$ ). Podemos escrever ainda,  $y_1 = \text{sn}u$  quando não é necessário enfatizar o módulo  $k$ . As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal e a dnoidal são definidas em termos de  $\text{sn}$  por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cn}(u; k) = \sqrt{1 - y_1^2} = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u; k)}, \\ \text{dn}(u; k) = \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)}. \end{array} \right.$$

Notemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de  $\text{sn}(0; k) = 0$ ,  $\text{cn}(0; k) = 1$  e  $\text{dn}(0; k) = 1$ . As funções  $\text{cn}(\cdot; k)$  e  $\text{dn}(\cdot; k)$  são pares enquanto  $\text{sn}(\cdot; k)$  é ímpar. Estas funções são periódicas com

$$\text{sn}(u + 4K; k) = \text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 4K; k) = \text{cn}(u; k), \quad \text{dn}(u + 2K; k) = \text{dn}(u; k).$$

Além disso, as relações,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1, \quad k'^2 \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = \text{dn}^2 u, \\ -1 \leq \text{sn}(u; k) \leq 1, \quad -1 \leq \text{cn}(u; k) \leq 1, \quad k'^2 \leq \text{dn}(u; k) \leq 1, \\ \text{sn}(u + 2K; k) = -\text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 4K; k) = -\text{cn}(u; k), \end{array} \right.$$

ocorrem para todo  $k \in (0, 1)$  e  $u \in \mathbb{R}$ . Também temos os valores explícitos,

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \operatorname{cn}(0) = 1, \operatorname{sn}(K) = 1, \operatorname{cn}(K) = 0.$$

Bem como o comportamento assintótico

$$\operatorname{sn}(u; 0) = \sin u, \operatorname{cn}(u; 0) = \cos u, \operatorname{sn}(u; 1) = \tanh u, \operatorname{cn}(u; 1) = \operatorname{sech} u.$$

Finalmente, tem-se as fórmulas derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial u} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{sn} u.$$

---

## 6.2 Algumas Funções Especiais

---

Nesta seção trataremos de algumas funções especiais que foram utilizadas no decorrer desta tese. Faremos menção destas funções e listaremos algumas propriedades que as mesmas satisfazem. Existem várias referências na literatura que tratam apenas deste tipo de funções. Dentre muitas, podemos citar e sugerir [21] e [46].

### 6.2.1 As Funções Téta

Seja  $z$  um número complexo arbitrário. Se escrevermos,

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

as funções téta de período igual a 1 são definidas por

$$\vartheta_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n q^{n^2} \cos(2\pi n z),$$

$$\vartheta_1(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi z],$$

$$\vartheta_2(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos[(2n+1)\pi z],$$

e

$$\vartheta_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n q^{n^2} \cos(2\pi n z),$$

onde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Escrevemos também  $\vartheta_0(z) \equiv \vartheta_4(z)$ .

O logaritmo das funções téta admitem as seguintes expansões em série de Fourier. Em particular, usamos a expansão em série de Fourier da derivada da função  $\log \vartheta_0$  para descobrirmos a expansão em série de Fourier da solução para 4-KdV dada em (1.14),

$$\log \vartheta_0(z) = \log \gamma - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \frac{\cos(2\pi n z)}{n},$$

$$\log \vartheta_1(z) = \frac{1}{4} \log \gamma + \log(2 \cos(\pi z)) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \frac{\cos(2\pi n z)}{n},$$

$$\log \vartheta_2(z) = \frac{1}{4} \log \gamma + \log(2 \cos(\pi z)) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \frac{\cos(2\pi n z)}{n},$$

$$\log \vartheta_3(z) = \frac{1}{4} \log \gamma - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \frac{\cos(2\pi n z)}{n}.$$

Podemos expressar as funções elípticas de Jacobi através das funções téta como sendo,

$$\operatorname{sn}(z, k) = k^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\frac{1}{2}z}{K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\frac{1}{2}z}{K}\right)},$$

$$\operatorname{cn}(z, k) = \left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{\frac{1}{2}z}{K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\frac{1}{2}z}{K}\right)},$$

e

$$\operatorname{dn}(z, k) = k'^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_3\left(\frac{\frac{1}{2}z}{K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\frac{1}{2}z}{K}\right)}.$$

### 6.2.2 A Função Lambda de Heuman $\Lambda_0(\varphi, k)$

A função Lambda de Heuman,  $\Lambda_0(\varphi, k)$ , é definida em termos das integrais elípticas de primeiro e segundo tipo pela fórmula,

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} [K(k)E(\varphi, k') - K(k)F(\varphi, k') + E(k)F(\varphi, k')] \text{ para } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } k \in (0, 1).$$

Esta função aparece no cálculo de integrais elípticas de terceiro tipo em casos circulares. Foi tabulada primeiro por Carl Heuman.

A função Lambda de Heuman pode ser relacionada com a função  $\vartheta_2$  por

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{\partial}{\partial \omega} \ln[\vartheta_2(i\omega)],$$

onde  $\omega = \frac{\pi F(\varphi, k')}{2K} \in \mathbb{R}$ .

A derivada com respeito ao módulo  $k$  da função  $\Lambda_0$  é

$$\frac{d}{dk} \Lambda_0(\varphi, k) = \frac{2(E(k) - K(k))\text{sen}(\varphi) \cos(\varphi)}{\pi k \sqrt{1 - k'^2 \text{sen}^2(\varphi)}}.$$

Desta relação podemos concluir, pois  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , que a função Lambda de Heuman é estritamente decrescente com relação ao módulo  $k$ .

### 6.2.3 A Função Zeta de Jacobi

A função Zeta de Jacobi é definida por

$$Z(u, k) = \int_0^u \left[ \text{dn}^2(v, k) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] dv,$$

a qual satisfaz, posto que  $\int_0^{2K} \left[ \text{dn}^2(v, k) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] dv = 0$ ,  $Z(u + 2K, k) = Z(u)$ . A conexão com a função  $\vartheta_0$  é

$$Z(u, k) = \frac{d}{du} \ln \vartheta_0 \left( \frac{u}{2K} \right).$$

A função  $Z(u, k)$  pode ser relacionada com a função Lambda de Heuman por

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{F(\varphi, k')}{K'(k)} + \frac{2}{\pi} K(k) Z(\varphi, k'),$$

onde  $\varphi = \text{am}u$ .

## 6.3 Plano de Fase e Estabilidade

Nesta seção, faremos alguns comentários sobre o comportamento dos pontos de equilíbrio e as consequentes órbitas associadas com as seguintes equações

$$\varphi_c'' + \frac{1}{2}\varphi_c^2 - c\varphi_c = 0, \quad (6.1)$$

$$\phi_c'' + \phi_c^3 - c\phi_c = 0 \quad (6.2)$$

e

$$\psi_c'' + \psi_c^5 - c\psi_c = 0, \quad (6.3)$$

os quais foram estudados em 4.2, 4.3 e 4.4 respectivamente. A idéia aqui é determinar as ondas periódicas que estão presentes nos planos de fase associados à respectiva equação. Para isso, estudamos os pontos de equilíbrio e o plano de fase dos três sistemas não lineares associados às equações (6.1), (6.2) e (6.3) respectivamente, à saber,

$$v = \varphi_c', \quad v' = c\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c^2, \quad (6.4)$$

$$u = \phi_c', \quad u' = c\phi_c - \phi_c^3 \quad (6.5)$$

e

$$w = \psi_c', \quad w' = c\psi_c - \psi_c^5. \quad (6.6)$$

Usando o Teorema de Poincaré-Bendixon e suas consequências (veja [29], Teorema II.1.2 e Lemas V.1.1-V.1.5) concluímos que para o sistema (6.4) que os pontos de equilíbrio são os pares  $(0, 0)$  e  $(2c, 0)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Tais pontos são, respectivamente, de sela e de centro. O ponto de centro é estável enquanto o ponto de sela é instável (conforme [29]). Com isto, deste mesmo Teorema, temos a existência de órbitas periódicas em uma vizinhança deste ponto de centro. O ponto de sela garante a existência de uma única órbita solitária passando por este ponto. As outras órbitas existentes são os chamados kink (ou bore).

Usando o programa Maple, podemos plotar o plano de fase associado ao sistema (6.4) para um valor arbitrário de  $c$ , por exemplo,  $c = 1 > 0$ . Neste caso o ponto de centro será  $(2, 0)$ . Podemos considerar também, posto que a velocidade da onda  $c$  está em  $\mathbb{R}$ , o valor



$c < 0$ . Neste caso, se por exemplo  $c = -1$  teremos ponto de centro em  $(-2, 0)$ . Graficamente tem-se uma simetria em relação as órbitas obtidas no caso  $c = 1$ . Veja o gráfico na figura 6.1,

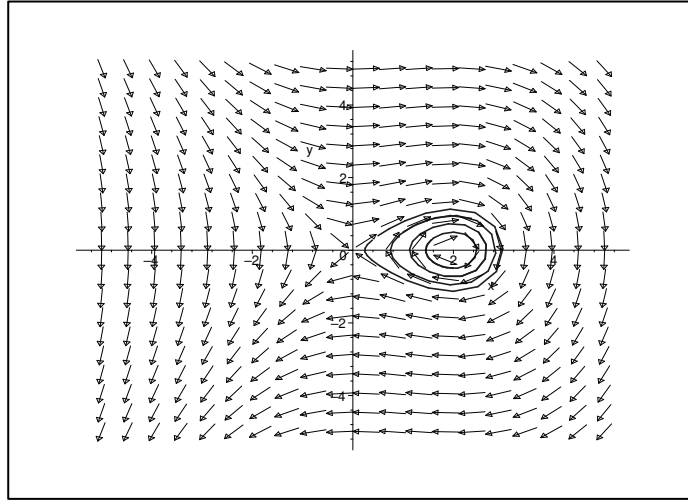
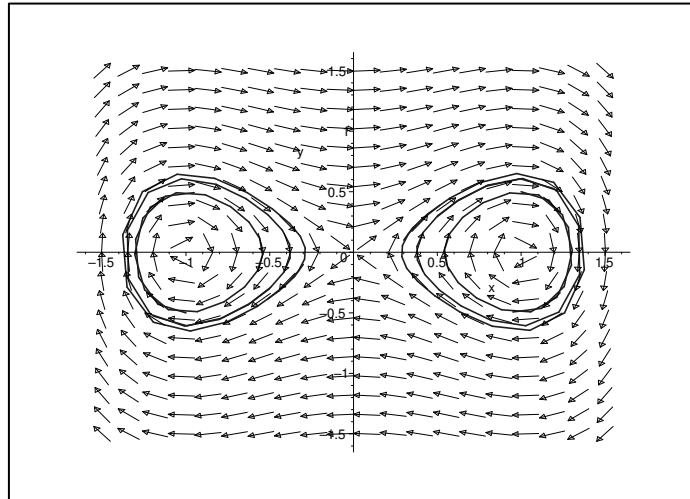
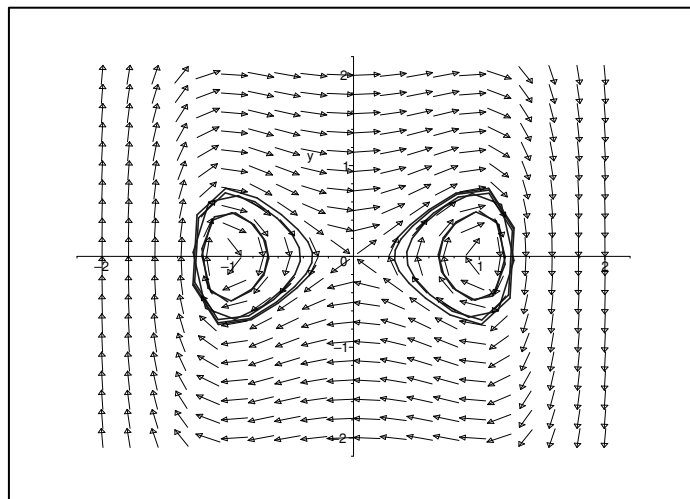


Figura 6.1: Plano de fase do sistema (6.4) com  $c = 1$ .

Para o sistema (6.5), temos três pontos de equilíbrio em  $(-\sqrt{c}, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(\sqrt{c}, 0)$ , para  $c > 0$ . Os pontos  $(-\sqrt{c}, 0)$  e  $(\sqrt{c}, 0)$  são pontos de centro enquanto  $(0, 0)$  é um ponto de sela. O mesmo cenário que fora feito para o caso do sistema (6.4) ocorre neste caso, isto é, tem-se a existência de órbitas periódicas em uma vizinhança dos pontos  $(-\sqrt{c}, 0)$  e  $(\sqrt{c}, 0)$ . Angulo em [7] mostrou que podemos obter dois tipos de soluções ondas viajantes periódicas, as ondas do tipo *dnoidal* e *cnoidal*, mas somente no primeiro caso se tem que elas são estáveis no sentido da teoria que fora desenvolvida nesta tese. O plano de fase deste sistema é dado pela figura 6.2.

Analogamente, no caso do sistema (6.6), temos três pontos de equilíbrio em  $(-\sqrt[4]{c}, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(\sqrt[4]{c}, 0)$ . Neste caso, o comportamento deste pontos é o mesmo que o caso do sistema (6.5), isto é, os pontos  $(-\sqrt[4]{c}, 0)$  e  $(\sqrt[4]{c}, 0)$  são pontos de centro enquanto  $(0, 0)$  é um ponto de sela. Em tais pontos de centro se tem a existência de órbitas periódicas em uma vizinhança desses pontos.

O gráfico neste caso vem dado pela figura 6.3.

Figura 6.2: Plano de fase do sistema (6.5) com  $c = 1$ .Figura 6.3: Plano de fase do sistema (6.6) com  $c = 1$ .

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## Comentários

Neste capítulo faremos algumas observações sobre os resultados descritos nesta tese.

### 1. Perturbações Gerais

Em contraste com o caso de ondas solitárias para os quais a natural classe de perturbações no problema de estabilidade é de perturbações localizadas, para ondas periódicas existem muitas classes de perturbações para os quais a estabilidade precisa ser direcionada. Aqui foi considerada perturbações periódicas tendo o mesmo período fundamental que as ondas viajantes periódicas. Para perturbações, por exemplo com período duplo, resultados de estabilidade continuam em aberto. Se considerarmos a equação KdV, nosso resultado de estabilidade em  $H_{per}^1([0, L])$  foi baseado sobre o espectro do operador  $\mathcal{L}_{cn} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi_c$ , com  $\varphi_c$  dada por (4.33) considerada em  $H_{per}^1([0, L])$ . Agora, se considerarmos a estabilidade de  $\varphi_c$  em  $H_{per}^1([0, 2L])$ , é possível ver neste caso que o número de autovalores negativos de  $\mathcal{L}_{cn}$  será exatamente 3 como foi mostrado por Angulo&Bona&Scialom em [10]. Ademais, segue-se facilmente neste caso que a função  $\frac{d}{dc} \int_0^{2L} \varphi_c^2(x) dx$  é positiva. Então temos que a teoria de Grillakis *et al.* em [27] e [28], não pode ser aplicada. Já no caso da equação de Schrödinger não linear no caso *focusing*,

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0,$$

temos que Angulo em [7], mostrou um resultado de instabilidade de ondas viajantes periódicas quando o período minimal é dobrado. Recentemente, o mesmo autor em [6], mostrou que no caso de soluções do tipo *cnoidal* de média zero para a KdV são instáveis por perturbações duas vezes o período minimal da onda viajante periódica.

## 2. Propriedade $PF(2)$

Faremos menção ao caso da BO (porém este raciocínio servirá também para outras equações a serem estudadas posteriormente). Vimos no decorrer desta tese que as propriedades espectrais do operador  $\mathcal{L} = \mathcal{H}\partial_x + c - \varphi_c$  com  $\varphi_c$  dado por (4.5), são obtidas face o coeficiente de Fourier associado de  $\varphi_c$  satisfazer  $PF(2)$ . Isto porque tal coeficiente é o núcleo  $\mathcal{K}$  do operador  $S_\theta$  cujo autovalor 1 está relacionado com os autovalores não positivos de  $\mathcal{L}$  (veja Corolário 3.1.1). O Teorema do Somatório de Poisson fora usado para descobrir tal onda (seu período minimal é  $2L$ ) e conseqüentemente nos fornece também qual é a forma explícita do coeficiente de Fourier associado. Quando então dobramos o período para  $4L$ , isto é, ao considerarmos,  $\mathcal{L} = \mathcal{H}\partial_x + c - \varphi_c$ , com  $D(\mathcal{L}) = H_{4L}^1$ , a propriedade  $PF(2)$  não é satisfeita para o núcleo  $\tilde{\mathcal{K}} = \widehat{\varphi}_c^{(4L)}$ , onde  $\widehat{\varphi}_c^{(4L)}$  denota a transformada de Fourier<sup>1</sup> da função  $\varphi_c$  mas agora de período  $4L$ . De fato, consideremos a expansão em série de Fourier de  $\varphi_c$  da forma

$$\varphi_c(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{\varphi}_c^{(4L)}(n) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right).$$

Como  $\varphi_c(0) = \varphi_c(2L)$ , temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{\varphi}_c^{(4L)}(n)(\cos(n\pi) - 1) = 0.$$

Então

$$-2 \sum_{\substack{n=2k+1 \\ k \in \mathbb{N}}} \widehat{\varphi}_c^{(4L)}(n) = 0,$$

isto é,  $\tilde{\mathcal{K}} = \widehat{\varphi}_c^{(4L)}$  não pode pertencer à  $PF(2)$  discreto. Donde não se pode afirmar nada sobre a estabilidade da onda  $\varphi_c$  quando este caso é considerado, uma vez que não podemos aplicar o Teorema 3.2.2.

<sup>1</sup>Vale ressaltar que a definição da transformada de Fourier de uma função periódica depende do período considerado. Neste caso, ter-se-emos  $\widehat{\varphi}_c^{(4L)} \neq \widehat{\varphi}_c^{(2L)}$ .

No Teorema 3.2.2, a transformada de Fourier precisa ser calculada no período minimal para a solução  $\varphi_c$ . De fato, seja  $L$  este período minimal e calcularemos a transformada de Fourier de  $\varphi_c^p$  como sendo de período  $2L$ , então,

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_c^p}(k) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varphi_c^p(x) e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varphi_c^p(x+L) e^{-\frac{ik\pi x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \varphi_c^p(y) e^{-\frac{ik\pi y}{L}} e^{i\pi k} dy = (-1)^k \widehat{\varphi_c^p}(k).\end{aligned}$$

Desta forma, para  $k$  variando no conjunto dos números ímpares tem-se  $\widehat{\varphi_c^p}(k) = 0$ . Com isto, não se pode aplicar nossa teoria quando o período minimal não é fixado.

### 3. Propriedade de Positividade das Ondas Viajantes Periódicas

Outro fato que é necessário fazer uma menção especial é sobre a condição que a solução  $\varphi_c$  necessita ser positiva. Na seção 3, o espaço  $Y$  está bem definido uma vez que  $\varphi_c^p > 0$ , donde se tem que  $\nu(x) = \varphi_c^p(x)dx$  é uma medida positiva. Porém é natural perguntar se nossa teoria ainda continua sendo válida mesmo quando  $\varphi_c$  tem ao menos um zero no intervalo  $[-L, L]$  (pois ainda se tem que  $\nu(x) = \varphi_c^p(x)dx$  determina uma medida positiva). O Teorema clássico de Fourier (veja Teorema 14 em [31]) nos diz que isto não é possível. De fato, suponha que sem perda da generalidade que  $\varphi_c(0) = 0$ . Então sendo  $\varphi_c$  regular segue que  $\varphi_c^p$  é regular e

$$\varphi_c^p(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_c^p}(n) = 0.$$

Em outras palavras, alguns coeficientes de Fourier de  $\varphi_c^p$  tem que ser negativos, donde não podemos aplicar a teoria desenvolvida aqui para a questão da estabilidade.

### 4. 4-KdV $\times$ Gardner

Notemos que Gardner em [25] desenvolveu uma teoria para determinar quando uma família de ondas periódicas são linearmente instáveis sempre que o limite destas ondas tendem à onda homoclínica (onda solitária) a qual seja conhecida que é instável. Ele aplicou sua teoria para diversos tipos de equações de evolução não linear em uma variável espacial. No caso da equação generalizada KdV,

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0,$$

$p \in \mathbb{N}$ , e *assumindo* que esta equação admite uma família de ondas viajantes periódicas,  $U^\alpha$ , tal que  $2T_\alpha$  tende ao infinito quando  $\alpha$  tende à zero, é obtido que elas são instáveis sempre que  $p > 4$  e  $\alpha > 0$  é suficiente pequeno (este  $\alpha$  não dependendo da velocidade da onda  $c$ ). No caso da 4-KdV (neste caso,  $p = 4$ ), temos que a onda solitária é instável (ver [40]) porém as ondas periódica obtidas em (4.46) são estáveis desde que  $c \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$  (veja o Teorema 4.4.4). Todavia, podemos *conjecturar* utilizando o Teorema 3.2.2 para conhecer o comportamento dos dois primeiros autovalores do operador  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - 5\varphi_c^4$ , onde  $\varphi_c$  é dada por (1.14), é instável para  $c \in \left(\frac{r(k_0)}{L^2}, +\infty\right)$ .

Apesar disso, podemos mencionar de que no trabalho de Gardner não se tem a construção da curva periódica o qual se diz instável e portanto não podemos deduzir através deste trabalho que  $\varphi_c$  supra citada é instável.

## 5. Estabilidade de Soluções Ondas Viajantes Periódicas em Espaços de Sobolev de Ordem Alta

Em Angulo&Bona&Scialom [10] fora estabelecido a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para equação KdV (1.1) em espaços de Sobolev de alta ordem,  $H_{per}^k([0, L])$  para  $k \geq 1$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Neste trabalho os autores usaram as leis de conservação da hierarquia KdV (pois a equação é um sistema completamente integrável). A idéia é a seguinte: para provar a estabilidade em  $H_{per}^1([0, L])$  usa-se a invariância do fluxo da KdV pelas quantidades conservadas definidas em  $H_{per}^1([0, L])$  e  $L_{per}^2([0, L])$  respectivamente por

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( u_x^2 - \frac{1}{3} u^3 \right) dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx.$$

Logo é natural de se pensar, para obter a estabilidade em  $H_{per}^k([0, L])$ ,  $k \geq 1$ , que se pode fazer uso das leis de conservação da KdV dadas de uma maneira geral pela família de funcionais invariantes pelo fluxo da KdV definidos em  $H_{per}^k([0, L])$  por,

$$I_{k+2}^{KdV}(f) = \int_0^L \{ a_1 (\partial_x^k f)^2 + \dots + a_k f^{k+2} \} dx.$$

Temos assim o seguinte resultado (ver [10]),

**Teorema 7.0.1.** *As ondas cnoidal  $\varphi_c$  dadas em (4.33) são estáveis em  $H_{per}^k([0, L])$  para qualquer inteiro  $k \geq 1$ . Mais precisamente, seja  $L > 0$  fixado e considere  $\{\varphi_c\}$  qualquer ramo de ondas cnoidal que são estáveis em  $H_{per}^1([0, L])$  asseguradas pelo Teorema 4.3.1. Então para  $c > \frac{4\pi^2}{L^2}$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$  tal que se  $\psi \in H_{per}^k([0, L])$  e*

$$d(\psi, \varphi_c) = \inf_{r \in \mathbb{R}} \|\psi - \varphi_c(\cdot + r)\|_{H_{per}^k([0, L])} < \delta,$$

*existe uma função  $C^{k+1}$   $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que se  $u$  é solução da equação KdV (1.1) com dado inicial  $\psi$ , então para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\|u(\cdot, t) - \varphi_c(\cdot - r(t))\|_{H_{per}^k([0, L])} \leq \varepsilon.$$

*Além disso,*

$$r'(t) = -c + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

*quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , uniformemente para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

No caso da mKdV e da 4-KdV podemos obter um resultado similar posto que as quantidades conservadas invariantes nestes dois casos tornariam-se respectivamente (lembrando-se que no caso da 4-KdV temos estabilidade garantida pelo Teorema 4.4.4 somente para a velocidade  $c$  pertencente ao intervalo  $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{r(k_0)}{L^2}\right)$ , onde  $k_0 \approx 0,3823174965$ ),

$$I_{k+3}^{mKdV}(f) = \int_0^L \{b_1(\partial_x^k f)^2 + \dots + b_k f^{k+3}\} dx$$

e

$$I_{k+5}^{4-KdV}(f) = \int_0^L \{p_1(\partial_x^k f)^2 + \dots + p_k f^{k+5}\} dx.$$

Assim, usando tais quantidades conservadas e a imersão  $H_{per}^k([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^q([0, L])$  para todo inteiro  $k \geq 1$  e  $q \geq 2$ , obtemos um resultado similar para estes dois casos do Teorema 7.0.1.

## 6. Candidatos para as Soluções da 4-KdV

No capítulo 3, Seção 4 apresentamos uma solução  $\varphi_c$  dada por (1.14) da equação 4-KdV. Esta solução surge impondo a condição presente em (4.43) sob as raízes  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , do

polinômio  $F(t) = -t^4 + 3ct^2 + 6B_{\varphi_c}t$ . Podemos obter algumas outras soluções impondo condições diferentes sob estas raízes. Por exemplo, uma outra solução seria,

$$\gamma_c(\xi) = \frac{\sqrt{\eta_2\eta_3}}{\sqrt{\eta_3 - (\eta_3 - \eta_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}}. \quad (7.1)$$

Porém esta solução possui uma característica que não é muito interessante. Quando  $k \rightarrow 1$  esta solução não tende para a solução onda solitária dada em (4.56) da 4-KdV e sim para a solução nula. Este fato causa um pouco de desinteresse em estudar a estabilidade ou não da onda periódica.

Podemos impor também por exemplo que  $\eta_3 > \eta_2 > \eta_1 > 0$  mas este caso não nos fornece uma solução da referida equação, posto que as raízes devem satisfazer, para obtermos uma solução,  $\eta_3 + \eta_2 + \eta_1 = 0$ . Fato este que não pode ocorrer com esta imposição de positividade das raízes. Outro caso que poderia ser considerado é  $\eta_3 > 0 > \eta_2 > \eta_1$  mas este caso produz ou função negativa ou uma função que não pode ser solução.

## 7. A Equação de Korteweg-de Vries de Terceira Ordem - 3-KdV

No capítulo 3 estabelecemos as propriedades de estabilidade da KdV, mKdV e da 4-KdV, isto é, estudamos o comportamento da estabilidade para as equações de Korteweg-de Vries de primeira, segunda e quarta ordem respectivamente. Uma pergunta natural que surge é o estudo da estabilidade das soluções periódicas da equação KdV de terceira ordem ou 3-KdV descrita por,

$$u_t + 4u^3u_x + u_{xxx} = 0. \quad (7.2)$$

Neste caso específico há pontos que impedem inicialmente de descobrirmos as soluções periódicas utilizando o método da *integração direta* conforme fora feito no caso da 4-KdV. De fato, se considerarmos soluções do tipo  $u(x, t) = \varphi(x - ct)$  para (7.2) obtemos após integração

$$\varphi_c'' + \varphi_c^4 - c\varphi_c = 0. \quad (7.3)$$

Assim, multiplicando a equação (7.3) por  $\varphi_c'$  e integrando mais uma vez obtém-se

$$[\varphi_c']^2 = \frac{1}{5}(-2\varphi_c^5 + 5c\varphi_c^2 + 10B_{\varphi_c}), \quad (7.4)$$



onde  $B_{\varphi_c}$  é uma constante de integração *não nula*. Desta maneira, ao considerarmos o polinômio  $F(t) = -2t^5 + 5ct^2 + 10B_{\varphi_c}$  pode-se verificar que qualquer combinação entre as raízes de  $F(t)$ , não nos fornecerá uma solução periódica para (7.3) através deste método pois sempre uma das raízes terá que ser nula, o que é um absurdo visto que  $B_{\varphi_c} \neq 0$ . Um outro método para obter soluções que podemos mencionar é o *Teorema do Somatório de Poisson* que foi utilizado para descobrir as soluções periódicas das equações KdV e mKdV, porém este método pode causar dificuldades imensas face a difícil tarefa em determinar o coeficiente de Fourier da solução onda viajante solitária da 3-KdV,  $\phi_\omega(\xi) = C_1(\omega)\operatorname{sech}^{\frac{3}{2}}(C_2(\omega)\xi)$ , onde  $C_i(\omega) > 0$ ,  $i = 1, 2$ , são constantes que dependem de  $\omega > 0$ .

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Abdelouhab, L., Bona, J., Felland, M. and Saut, J.C, *Nonlocal models for nonlinear, dispersive wave*, Phys. D 40 (1989), 360-392.
- [2] Ablowitz, M.J., Fokas, A.S., Satsuma, J. and Segur, H., *On the periodic intermediate long wave equation*, J. Phys. A, 15 (1982) p. 781-786.
- [3] Albert, J.P., *Positivity properties and stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Comm. PDE, 17 (1992) p. 1-22.
- [4] Albert, J.P. and Bona, J.L., *Total positivity and the stability of internal waves in fluids of finite depth*, IMA J. Applied Math. 46 (1991), p. 1-19.
- [5] Albert, J.P., Bona, J.L. and Henry, D., *Sufficient conditions for stability of solitary-wave equation of model equations for long waves*, Physica D 24 (1987), p. 343-366.
- [6] Angulo, J., *Non-linear instability of periodic travelling wave solution for the KdV equation*, preprint (2006).
- [7] Angulo, J., *Non-linear stability of periodic travelling-wave equation for the Schrödinger and modified Korteweg-de Vries equation*, J. of Differential Equations 235 (2007) p. 1-30.
- [8] Angulo, J., *Stability of cnoidal waves to Hirota-Satsuma systems*, Matemática Contemporânea 27 (2004), p. 189-223.

- [9] Angulo, J., *Stability of dnoidal waves to Hirota-Satsuma system*, Differential and Integral Equations 18 (2005), p. 611-645.
- [10] Angulo, J., Bona, J.L. and Scialom, M., *Stability of cnoidal waves*, Advances in Differential Equations 11 p. 1321-1374 (2006).
- [11] Angulo, J., *Existence and stability of solitary wave solutions to non-linear dispersive evolution equations*, Publicações do 24º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (2003).
- [12] Benjamin, T.B., *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. 29 (1967), p. 559-592.
- [13] Benjamin, T.B., *Instability of periodic wavetrain in nonlinear dispersive systems*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 299 (1967), p. 59-75.
- [14] Benjamin, T.B., *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 338 (1972), p. 153-183.
- [15] Benjamin, T.B., *Lectures on linear wave motion, Nonlinear Wave Motion*, A.C. Newell, ed., AMS, Providence, R.I. 15 (1974), p. 3-47.
- [16] Benjamin, T.B., *Solitary and periodic waves of a new kind*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 354 (1996), p. 1775-1806.
- [17] Bona, J.L., *On the stability theory of solitary waves*, Proc Roy. Soc. London Ser. A 344 (1975), p. 363-374.
- [18] Bona, J.L., Souganidis, P.E. and Strauss, W.A., *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 411 (1987) p. 395-412.
- [19] Bowman, F., *Introduction to elliptic functions with applications*, Dover publications, NY, (1961).
- [20] Brascamp, H.J. and Lieb, E.H., *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa Leinder Theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Functional Analysis 22 (1976), p. 366.
- [21] Byrd, P.F. and Friedman, M.D., *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, 2nd ed., Springer, NY, (1971).

- [22] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T., *Multilinear estimates for periodic KdV equations and applications*, J. Functional Analysis, 211 (2004) p. 173-218.
- [23] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T., *Sharp global well-posedness for the KdV and modified KdV on  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{T}$* , J. American Math. Soc. 16 (2003), p. 705-749.
- [24] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T., *A refined global well-posedness for the Schrödinger equations with derivative*, SIAM J. Math. Anal. 34 (2002), p. 64-86.
- [25] Gardner, R. A., *Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications*, J. Für Die Reine und Angewandte Mathematik, 491 (1997), p. 149-181.
- [26] Gardner, R. A., *On the structure of the spectra of periodic travelling waves*, J. Math. Pures Appl., 72 (1993), p. 415-439.
- [27] Grillakis, M., Shatah, J., and Strauss, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Functional Anal., 74 (1987), p. 160-197.
- [28] Grillakis, M., Shatah, J. and Strauss, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Functional Anal., 74 (1990), p. 308-348.
- [29] Hale, K., J., *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, New York.
- [30] Ince E. L., *The periodic Lamé function*, Proc. Roy. Soc., 60, (1940) p. 47-63.
- [31] Iorio, R.J.Jr. and Iorio, V.M.V., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, 70, Cambridge Stud. in Advan. Math. (2001).
- [32] Karlin, S., *The existence of eigenvalues for integral operator*, Trans. Am. Math. Soc., 113, 1, (1964).
- [33] Karlin, S., *Total Positivity*, Stanford University Press, (1968).
- [34] Kato, T., *Perturbation theory for linear Operators*, Springer, Berlin, 2nd ed., (1976).

- [35] Kato, T., *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Appl. Math., Advances in Math. Supplementary Studies, Vol 8, Academic Press, NY (1983), p.93.
- [36] Korteweg, D.J. and de Vries, G., *On the change of form of long wave advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. (5) 39, (1895), p.422.
- [37] Lopes, O., *A linearized instability result for solitary waves*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol 8, (2002) p. 115-119.
- [38] Magnus, W. and Oberhettinger E., *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer, NY, (1986).
- [39] Merle, F., *Existence of blow up solutions in the energy space for the critical generalized KdV*, Journal of the American Mathematical Society, 14, (2001), p. 555-578.
- [40] Merle, F. and Martel, Y., *Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, Geometric and Functional Analysis, 11, (2001) p.74-123.
- [41] Magnus W. and Winkler S., *Hill's equation. Tracts in Pure and Appl. Math.*, 20, Wesley. New York, 1976.
- [42] McKean, H. and Dym, H. *Fourier series and integrals*, Academic Press, NY and London, (1972).
- [43] Molinet, L., *Global well-posedness in  $L^2$  for the periodic Benjamin-Ono equation*, preprint (2006).
- [44] Molinet, L. and Ribaud, F., *Well-Posedness in  $H^1$  for the (generalized) Benjamin-Ono equation on the circle*, preprint.
- [45] Molinet, L., *Global well-posedness in the energy space for the Benjamin-Ono equation on the circle*, preprint (2005).
- [46] Oberhettinger, F., *Fourier expansions: A collection of formulas*, Academic Press, NY and London, (1973).

- [47] Ono, H., *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan 39 (1975), 1082-1091.
- [48] Osborne, A.R., Serio, M., Bergamasco, L. and Cavaleri, L., *Solitons, cnoidal waves and nonlinear interactions in shallow-water ocean surface waves*, Physica D 123 (1998), 64-81.
- [49] Parker, A., *Periodic solutions of the intermediate long-wave equation: a nonlinear superposition principle*, J. Phys. A: Math. Gen. 25 (1992), p. 2005-2032.
- [50] Pego, R. L. and Weinstein, M. I., *Evans' function, Melnikov's integral, and solitary wave instabilities*, Diff. Equations with Applications to Math. Phys., 192, (1993), p. 273-286.
- [51] Ponce, G., *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Diff. Integral Equations 4 (1991), p. 527-542.
- [52] Prékopa, A., *On Logarithmic Concave Measures and Functions*, Acta Sci. Math. (Szeged), 34 (1973), p. 335-343.
- [53] Reed, S. and Simon, B., *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*, vol. I, Academic Press (1975).
- [54] Reed, S. and Simon, B., *Methods of modern mathematical physics: Fourier analysis, self-adjointness*, vol. II, Academic Press (1975).
- [55] Reed, S. and Simon, B., *Methods of modern mathematical physics: Analysis of operators*, vol. IV, Academic Press (1978).
- [56] Stein, E., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1970).
- [57] Staffilani, G., *On solutions for periodic generalized KdV equations*, IMRN 18 (1997), p. 899-917.
- [58] Stein, E.M. and Weiss, G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, New Jersey (1970).

- 
- [59] Weinstein, M.I., *Liapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*. Comm. Pure Appl. Math., v. 39, (1986), p. 51-68.
- [60] Weinstein M.I., *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation*. Comm. PDE., v. 12, (1987) p. 1133-1173.
- [61] Wheeden, R.L. and Zygmund, A., *Measure and integral: An introduction to real analysis*, Marcel Dekker, NY, (1977).
- [62] Whitam, G.B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley, NY, (1974).