COMUTADORES EM VARIEDADES DE MAL'CEV

HENRIQUE LAZARI

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UNICAMP

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PREÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: Henrique Lazari

Nº de Identificação: 795127

Endereço para Correspondência: UNESP/Campus de Rio Claro/Depto. de Mat.

Curso: Matemática Pura

Nome do Orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo

Título da Dissertação ou Tese: Comutadores em Variedades de Mal'cev.

Data proposta para a Defesa:

(O Aluno deverá assinar um dos 3 itens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir desta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

/ /
Data

Henrique Lazari
assinatura do aluno

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

/ /
Data

assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consulte, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o fornecimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a interessados.

/ /
Data

assinatura do aluno

DE ACORDO

Orientador

COMUTADORES EM VARIEDADES DE MAL'CEV

HENRIQUE LAZARI

Orientador
Prof.Dr. Irineu Bicudo

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho/1982

ÍNDICE

agradecimentos:

- ao Prof Irineu Bicudo pela orientação e incentivo.
- aos colegas da UNESP e da UNICAMP que, de algum modo, colaboraram para a realização deste trabalho.

este trabalho é dedicado a:

regina

enedina

os antonios

?

INTRODUÇÃO

Neste trabalho exporemos alguns resultados sobre Centralidade e Comutadores em Variedades de Mal'cev. As ideias de Centralidade nos permitirão introduzir o importante conceito de Comutador que, no reticulado de congruências de uma álgebra, comporta-se como um "produto de ideais", no mesmo sentido que dados um anel A e I,J ideais de A, consideramos o produto (I,J) como o ideal gerado por I.J+J.I, ou dados um grupo G e H,K subgrupos normais de G, consideramos o produto (H,K) (comutador de H e K) como o subgrupo de G gerado pelos elementos da forma $h\cdot k\cdot h^{-1}\cdot k^{-1}$ onde $h\varepsilon H$ e $k\varepsilon K$, Esses dois conceitos intimamente relacionados de centralidade e comutador, nos permitirão, a titulo de aplicação dos resultados obtidos, desenvolver uma teoria de Nilpotência e Não-geradores no contexto das Variedades de Mal'cev. Este trabalho foi baseado principalmente nas referências (4), (5) e (12).

Os ítens estão numerados dentro de cada capítulo, e as citações dentro de um mesmo capítulo serão feitas somente com o ítem a que se referir (Exemplo: Teorema 10), e ítens de outros capítulos conterão a citação completa (Exemplo: Lema II-7).

Fixaremos, nesta introdução, as nossas notações. Serão citados diversos fatos, cujas demonstrações poderão ser encontradas na referência (6) da bibliografia para a Teoria dos Conjuntos e em (3), (8) e (10) para a Álgebra Universal.

Se n é um número inteiro não negativo, A é um conjunto e A^n é o produto cartesiano de n cópias de A, definimos as projeções $\pi_i:A\to A^n$, $\pi_i(a_1,\ldots,a_n)=a_i$ e a diagonal $\Delta_n:A\to A^n$, definida por $\Delta_n(a)=(a,\ldots,a)$. Denotamos usualmente $\Delta_2 A$ por $\hat{A}$. Dadas as aplicações $\theta:A\to A'$, $\theta_i:A_i\to A'_i$, definimos $\theta^n:A^n\to A'^n$ por $\theta^n(a_1,\ldots,a_n)=(\theta a_1,\ldots,\theta a_n)$ e $(\theta_1,\ldots,\theta_n):A_1\times\ldots\times A_n\to A'_1\times\ldots\times A'_n$ por $(\theta_1,\ldots,\theta_n)(a_1,\ldots,a_n)=(\theta_1 a_1,\ldots,\theta_n a_n)$

DEFINIÇÃO- Um <u>Tipo de Álgebras τ</u> é uma $o(\tau)$-sequência $(n_o,n_1,\ldots,n_\gamma,\ldots)$ de inteiros não negativos, $\gamma<o(\tau)$, onde $o(\tau)$ é um ordinal chamado a <u>órdem de τ</u>.

DEFINIÇÃO- Uma <u>Linguagem de Álgebras do Tipo τ</u> é um conjunto $F_\tau=\{f_\gamma:\gamma<o(\tau)\}$ de símbolos funcionais, onde para cada $\gamma<o(\tau)$, f_γ seja um símbolo funcional n_γ-ário.

DEFINIÇÃO- Seja F_τ uma linguagem de álgebras do tipo τ. Uma <u>Álgebra do Tipo τ</u> é um modelo qualquer para F_τ, isto é, um par $\mathcal{A}=\langle A,F\rangle$ onde A é um conjunto não vazio e F uma família de operações $(f_\gamma^{\mathcal{A}})_{\gamma<o(\tau)}$, tal que, para cada $\gamma<o(\tau)$, $f_\gamma^{\mathcal{A}}:A^{n_\gamma}\to A$. $f_\gamma^{\mathcal{A}}$ é dita para cada $\gamma<o(\tau)$, uma <u>realização em $\mathcal{A}$</u> do símbolo funcional f_γ. O conjunto A é dito o <u>universo</u> ou conjunto subjacente de $\mathcal{A}$ e $f_\gamma^{\mathcal{A}}$, as suas <u>operações fundamentais</u>.

Duas álgebras de mesmo tipo são ditas <u>similáres</u>. Uma classe de álgebras similáres é chamada de uma <u>classe de similaridade</u> e, em geral, chamamos de <u>classe de álgebras</u>, a qualquer subclasse de uma classe de similaridade. Sempre que não acarretar ambiguidade, referir-nos-emos a $\langle A,F\rangle$ como a álgebra A. Se A e B são álgebras de um mesmo tipo τ, f_γ denota tanto uma operação em A como uma operação em B.

Se $\theta:A\to B$ é uma aplicação onde A e B são álgebras similares, dizemos que θ é um <u>homomorfismo de A em B</u>, se $\theta(f(a_1,\ldots,a_n))= f(\theta a_1,\ldots,\theta a_n)$ para cada operação n-ária $f\varepsilon F$. Seja A uma álgebra do tipo τ e $\emptyset\neq B\subset A$, então B é uma <u>sub-álgebra</u> de A, se dados $x_1,\ldots, x_n\varepsilon B$ e $f\varepsilon F$ n-ária, temos que $f(x_1,\ldots,x_n)\varepsilon B$. Denotamos tal fato por $B< A$.

Dada uma álgebra A e X um subconjunto de A, chamamos de <u>sub-álgebra gerada por X</u>, e denotamos por $\langle X\rangle$, à menor sub-álgebra de A que contem o conjunto X.

Sejam A uma álgebra e α uma relaão de equivalência em A. Nos denotamos as classes de equivalência de α por $|x|_\alpha$ e o conjunto quociente por A/α, isto é, $A/\alpha=\{|x|_\alpha:x\varepsilon A\}$. Se α tambem for uma sub-álgebra de A^2, então dizemos que α é uma <u>congruência</u> em A. Definimos então o homomorfismo natural $\phi_\alpha:A\to A/\alpha$ por $\phi_\alpha(x)=|x|_\alpha$. A/α tem uma estrutura natural de álgebra colocando-se $f(|a_1|_\alpha,\ldots, |a_n|_\alpha)=|f(a_1,\ldots,a_n)|$. Se $\theta:A\to B$ é um homomorfismo, então $\mathrm{Ker}\theta= \{(x,y)\varepsilon A^2:\theta x=\theta y\}$ é uma congruência em A, chamada de o <u>núcleo</u> de θ, e temos então que $A/\mathrm{Ker}\theta\cong\theta A$.

Seja $(A_i)_{i\varepsilon I}$ uma família de álgebras similares e formemos o produto cartesiano $\prod_{i\varepsilon I} A_i$. Definimos as operaçoẽs f n-árias no produto cartesiano como se segue: se $x_1,\dots,x_n \varepsilon \prod_{i\varepsilon I} A_i$, então pomos $\pi_i(f(x_1,\dots,x_n))=f(\pi_i x_1,\dots,\pi_i x_n)$. Esta álgebra assim construída é o produto direto da família de álgebras $(A_i)_{i\varepsilon I}$.

Definiremos agora, os polinômios (ou têrmos) de uma linguágem de álgebras. Denotando as variáveis individuais por x_1, $\dots,x_n,\dots$ ou $\{x_n : n\varepsilon N\}$ e assumindo que nenhuma variável individual é idêntica a um símbolo funcional, temos o seguinte:

DEFINIÇÃO- O conjunto $T_n(\tau)$ dos termos n-ários do tipo τ é o menor conjunto satisfazendo as seguintes condiçoẽs:

(i) $x_j \varepsilon T_n(\tau)$, $0 \leqslant j < n$, e se $f\varepsilon F_\tau$ é um símbolo funcional 0-ário, então $f\varepsilon T_n(\tau)$.

(ii) Se $p_1,\dots,p_k \varepsilon T_n(\tau)$ e $f\varepsilon F_\tau$ é um símbolo funcional k-ário, então $f(p_1,\dots,p_k)\varepsilon T_n(\tau)$.

O conjunto $T(\tau)$ dos termos do tipo τ é definido por:

$$T(\tau)=\bigcup_n T_n(\tau).$$

$T(\tau)$ e $T_n(\tau)$ tem estruturas naturais de álgebras do tipo τ, pondo $F=F_\tau$ e são chamadas de Álgebras livres tendo $\{x_n : n\varepsilon N\}$ e $\{x_0,\dots,x_n\}$ respectivamente, como conjunto de geradores. A base matemática para o uso dos têrmos é dada por:

TEOREMA (8)- Seja A uma álgebra do tipo τ e $\theta:\{x_0,\dots,x_{n-1}\}\to A$

uma aplicação, então θ pode ser estendida a um único homomorfismo $\Theta: T_n(\tau)\to A$ (ou um único homomorfismo $\Phi: T(\tau)\to A$).

Os termos nos permitirão agora, dar um sentido preciso ao que se entende por "identidade".

DEFINIÇÃO- Uma <u>τ-identidade</u> é uma expressão da forma $p=q$ em que p e q são termos do tipo τ e $=$ é o símbolo de igualdade na linguagem F_τ.

Dada uma álgebra A do tipo τ e $p,q \varepsilon T_k(\tau)$, as seguintes afirmaçoẽs são equivalentes: A <u>satisfaz</u> $p=q$; $p=q$ <u>vale</u> em A; $A \models p=q$; A é um <u>modelo</u> para $p=q$.

DEFINIÇÃO- Chamamos de <u>Variedade de Álgebras</u> ou <u>Classe Equacional</u> ou ainda <u>Classe Primitiva</u>, á classe de todos os modelos de um conjunto fixado de identidades.

TEOREMA- Sejam, A uma álgebra, $p=q$ uma identidade, ambas do tipo τ e além disso $p,q \varepsilon T_n(\tau)$. Nestas condiçoẽs, são equivalentes:

(i) $p=q$ vale em A.

(ii) $p=q$ como elementos de $T_n(\tau)$.

Seja agora, K uma classe de álgebras similares, definiremos três operadores em K, do seguinte modo: $H(K)$, para tomar todas as imagens homomorfas de todos os membros de K. $S(K)$, para tomar todas as sub-álgebras dos membros de K. $P(K)$, para tomar todos os produtos diretos de famílias de membros de K. Com essas notaçoes, temos o importante resultado obtido por Birkhoff:

TEOREMA- Seja K uma classe de álgebras similares, então K é uma variedade se, e somente se, $H(S(P(K)))\subseteq K$.

Veremos agora como exemplo, duas variedades que tem um papel destacado no presente trabalho.

A primeira é a Variedade dos Grupos, denotada por G, que é constituida pelas álgebras do tipo $\langle 2,1,0\rangle$ cujas operaçoes denota- denotadas respectivamente por $.$, $^{-1}$, 1 satisfazem o seguinte conjunto de identidades:

(i) $x.(y.z)=(x.y).z$

(ii) $x.1=x$

(iii) $x.x^{-1}=1$

Com respeito à Teoria dos Grupos, nos reportamos às referências (1) e (11).

A Variedade dos Reticulados, denotada por $\mathfrak{L}$, é constituída pelas álgebras do tipo $\langle 2,2\rangle$ com operaçoes binárias denotadas por $\vee$ e $\wedge$ que satisfazem o seguinte conjunto de identidades:

(i) $x\vee y=y\vee x$ e $x\wedge y=y\wedge x$

(ii) $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ e $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$

(iii) $x\wedge(x\vee y)=x$ e $x\vee(x\wedge y)=x$

Um reticulado é dito <u>distributivo</u>, se satisfizer a identidade adicional:

(D) $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

Um reticulado é dito <u>modular</u>, se satisfizer:

(M) $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=x\wedge((x\wedge y)\vee z)$.

A classe dos reticulados distributivos e a classe dos reticulados modulares constituem variedades. Um reticulado tal que todo subconjunto seu tem supremo e ínfimo é chamado um reticulado <u>completo</u>. Um elemento a de um reticulado completo A é chamado de <u>compacto</u> se, sempre que $a\leq\vee S$, onde $S\subseteq A$, existir $T\subseteq S$, T finito com $a\leq\vee T$. Um reticulado completo A é chamado <u>compactamente gerado</u> ou <u>algébrico</u>, se todo elemento de A é supremo de elementos algébricos. Um reticulado completo A é dito <u>contínuo superiormente</u>, se para todo $a\in A$ e C cadeia em A, vale que $a\wedge\vee C=\bigvee_{x\in C}(a\wedge x)$. Temos então os seguintes resultados:

TEOREMA- Todo reticulado compactamente gerado é contínuo superiormente.

TEOREMA- Se a é um elemento de um reticulado A, contínuo superiormente, $S\leq A$ e $\mathcal{S}$ a classe dos subconjuntos finitos de S, então:

$$a\wedge\vee S=\bigvee_{F\in\mathcal{S}}(a\wedge\vee F).$$

Para a demonstração desses resultados e outras informações sobre reticulados, ver a referência (2).

Se A for uma álgebra, denotamos por C(A), o conjunto das congruências em A. Colocaremos em C(A) uma estrutura de reticulado. Dados $\alpha,\beta\varepsilon C(A)$, definimos $\alpha\wedge\beta=\alpha\cap\beta$ e $\alpha\vee\beta=\{(x,y)\varepsilon A^2$: existe $n\varepsilon N$ e existem $t_0,\dots,t_{2n}\varepsilon A$ com $x=t_0\alpha t_1\beta\dots\alpha t_{2n-1}\beta t_{2n}=y\}$. Nestas condiçoẽs, $(C(A),\vee,\wedge)$ é um reticulado completo, compactamente gerado, chamado o <u>Reticulado das Congruências de A</u>. (Ver (3), §10).

CAPÍTULO I

VARIEDADES DE MAL'CEV

Neste capítulo definiremos Álgebras e Variedades de Mal'cev, e como resultado principal veremos o Teorema de Mal'cev.

1-DEFINIÇÃO- Sejam α e β congruências em uma álgebra A. Chamamos de produto de α e β, denotado por $\alpha\circ\beta$ ao conjunto $\alpha\circ\beta=\{(x,y)\varepsilon A^2: \exists t\varepsilon A: x\alpha t\beta y\}$.

2-PROPOSIÇÃO- Seja A uma álgebra e α e β congruências em A, então $\alpha\circ\beta$ é uma congruência em A (Logo o produto de um número finito de congruências em A é uma congruência em A).

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos $x_i, y_i \varepsilon A$, $i=1,\ldots,n$ e $x_i\alpha t_i\beta y_i$, se f é uma operação n-ária em A, então como α e β são congruências, temos que $f(x_1,\ldots,x_n)\alpha f(t_1,\ldots,t_n)$ e $f(t_1,\ldots,t_n)\beta f(y_1,\ldots,y_n)$, logo $f(x_1,\ldots,x_n)\alpha\circ\beta f(y_1,\ldots,y_n)$ e $\alpha\circ\beta$ é uma congruência na álgebra A.

Vamos agora, reformular a definição do supremo de duas congruências, tendo em vista a Definição 1.

3-PROPOSIÇÃO- Sejam α e β congruências em uma álgebra A. se definimos $s_0=\alpha$, $s_1=\alpha\circ\beta$, $s_2=\alpha\circ\beta\circ\alpha$, $s_3=\alpha\circ\beta\circ\alpha\circ\beta$, ... e $\alpha+\beta=\bigcup_{i\varepsilon N} s_i$, então $\alpha\vee\beta=\alpha+\beta$.

DEMONSTRAÇÃO- Sejam $x_i\alpha+\beta y_i$, $i=1,\dots,n$, onde $x_i,y_i\in A$ e f uma operação n-ária, existe então $j\in N$ de modo que $x_i s_j y_i$, e como s_j é congruência temos: $f(x_1,\dots,x_n)s_j f(y_1,\dots,y_n)$, logo $f(x_1,\dots,x_n)\alpha+\beta f(y_1,\dots,y_n)$ e $\alpha+\beta$ é uma congruência em A. Temos tambem que $\alpha\leq\alpha+\beta$ e $\beta\leq\alpha+\beta$, logo $\alpha\vee\beta\leq\alpha+\beta$. Vamos supor agora que $x,y\in A$ são tais que $x\alpha+\beta y$, então existe $j\in N$ com $x s_j y$. Se j é ímpar, então existem $t_0,\dots,t_{2n}$, de modo que $x=t_0\alpha t_1\beta\dots\alpha t_{2n-1}\beta t_{2n}=y$ e portanto $x\alpha\vee\beta y$. Se j é par, tomamos $x=t_0\alpha t_1\beta\dots\alpha t_{2n-2}\beta t_{2n-1}\beta t_{2n-1}=y$ e tambem $x\alpha\vee\beta y$. Dai resulta que $\alpha+\beta\leq\alpha\vee\beta$ e portanto $\alpha\vee\beta=\alpha+\beta$.

4-COROLÁRIO- Sejam α e β congruências em uma álgebra A. se $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$ então $\alpha\vee\beta=\alpha\circ\beta$.

DEMONSTRAÇÃO- Basta observar que se $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$, como $\alpha\circ\alpha=\alpha$ e $\beta\circ\beta=\beta$, se $i>0$, então $s_i=\alpha\circ\beta$ e portanto $\bigsqcup_{i\in N} s_i=\alpha\circ\beta$.

5-DEFINIÇÃO- Dizemos que duas congruências α e β em uma álgebra A <u>comutam</u> ou <u>permutam</u> se $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$.

6-PROPOSIÇÃO (Birkhoff)- Se todas as congruências em uma álgebra A comutam, então o seu reticulado de congruências é modular.

DEMONSTRAÇÃO- Observamos inicialmente que, dados elementos α,β e γ de um reticulado qualquer , vale sempre que se $\alpha\geq\beta$, então

$\beta\circ(\alpha\wedge\gamma)\leqslant\alpha\wedge(\beta\circ\gamma)$.

Suponhamos agora que α,β e γ sejam congruências em uma álgebra A, com $\alpha\geqslant\beta$. Se $(x,y)\in\alpha\wedge(\beta\circ\gamma)$, então $x(\beta\circ\gamma)y$ e como $\beta\circ\gamma=\gamma\circ\beta$, temos $x\beta\circ\gamma y$ e existe então $s\in A$ com $x\gamma s\beta y$, mas $\beta\leqslant\alpha$, e, assim $s\alpha y$ e como $x\alpha y$, temos que $s\alpha x$, logo $y\beta s(\alpha\wedge\gamma)x$ e $(x,y)\in\beta\circ(\alpha\wedge\gamma)$ e $\alpha\wedge(\beta\circ\gamma)\leqslant\beta\circ(\alpha\wedge\gamma)$.

Finalmente temos que $\alpha\geqslant\beta$ implica que $\alpha\wedge(\beta\circ\gamma)=\beta\circ(\alpha\wedge\gamma)$ e o reticulado das congruências de A é modular.

7-DEFINIÇÃO- Seja $\mathcal{T}$ uma variedade de álgebras tal que cada par de congruências em cada álgebra de $\mathcal{T}$ comute. Então dizemos que $\mathcal{T}$ é uma <u>Variedade de Mal'cev</u>. As álgebras de $\mathcal{T}$ são chamadas de Álgebras de Mal'cev.

Veremos agora, o Teorema de Mal'cev que fornece uma caracterização geral das variedades definidas acima.

8-TEOREMA(Mal'cev)- Seja $\mathcal{T}$ uma variedade de álgebras. Então $\mathcal{T}$ é uma Variedade de Mal'cev se, e somente se, existe uma operação ternária P de modo que $P(x,y,y)=x$ e $P(x,x,z)=z$ são identidades em $\mathcal{T}$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que existe em $\mathcal{T}$ uma operação ternária P nas condiçoẽs do enunciado. Seja A uma álgebra de $\mathcal{T}$ e α,β congruências em A, suponhamos ainda que $x\alpha y\beta z$, onde $x,y,z\in A$, então:

$$x\beta x$$

$$y\beta z$$

$$z\beta z$$

logo: $\overline{P(x,y,z)\beta P(x,z,z)=x}$.

Temos tambem que:

$$x\alpha x$$

$$x\alpha y$$

$$z\alpha z$$

logo $\overline{z=P(x,x,z)\alpha P(x,y,z)}$.

Assim, temos que $x\alpha y\beta z$ implica que $x\beta P(x,y,z)\alpha z$ ou seja, $\alpha\circ\beta\leq\beta\circ\alpha$. De modo análogo, vemos que $\beta\circ\alpha\leq\alpha\circ\beta$ e assim, α e β comutam.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{T}$ é uma Variedade de Mal'cev. Sejam A a $\mathcal{T}$-álgebra livre em três geradores x,y e z, α a menor congruência em A tal que $x\alpha y$ e β a menor congruência em A tal que $y\beta z$. Temos então que $x\alpha y\beta z$. Como $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$, existe um elemento $P(x,y,z)$ de modo que $x\beta P(x,y,z)\alpha z$.

Consideremos agora o homomorfismo $\theta:A\to A$ definido nos geradores livres por $\theta(x)=y$ e $\theta(y)=\theta(z)=x$, temos então que $\theta|\langle x,y\rangle$ é um isomorfismo e portanto, $\mathrm{Ker}\theta\cap\langle x,y\rangle=\widehat{\langle x,y\rangle}$, e assim, como $\beta\subseteq\mathrm{Ker}\theta$, temos que β é trivial na sub-álgebra $\langle x,y\rangle$ e como $x\beta P(x,y,y)$ e $P(x,y,y)\in\langle x,y\rangle$, devemos ter $x=P(x,y,y)$. De modo análogo obtemos que $z=P(x,x,z)$ e assim, $x=P(x,y,y)$ e $z=P(x,x,z)$ sã identidades em $\mathcal{T}$.

9-DEFINIÇÃO- A operação ternária P do teorema anterior é chamada Operação de Mal'cev em $\mathcal{T}$.

O proximo teorema nos diz como devem ser as congruências das álgebras de uma Variedade de Mal'cev.

10-TEOREMA- Seja A uma álgebra em uma variedade de Mal'cev T, então as congruências de A são exatamente as sub-álgebras α de A^2 tais que $\hat{A}\leq\alpha\leq A^2$.

DEMONSTRAÇÃO- Como em uma álgebra A qualquer, toda congruência é uma sub-álgebra reflexiva de A^2, bastara então mostrar que se A é de Mal'cev e α é uma sub-álgebra reflexiva de A^2, então α é simétrica e transitiva.

Suponhamos que $(x,y),(y,z)\in\alpha$. Para a simetria temos que:

$$x\alpha x \qquad \text{pois } \hat{A}\leq\alpha.$$
$$x\alpha y$$
$$y\alpha y$$

logo $\overline{\underline{y=P(x,x,y)\alpha P(x,y,y)=x}}$ e vale $(y,x)\in\alpha$.

Para a transitividade temos que

$$x\alpha y$$
$$y\alpha y$$
$$y\alpha z$$

logo $\overline{\underline{x=P(x,y,y)\alpha P(y,y,z)=z}}$ e vale $(x,z)\in\alpha$.

Diversas variedades de álgebras que ocorrem freqüentemente em Matemática são Variedades de Mal'cev.

11-EXÊMPLO- Consideremos a Variedade dos Grupos. Tomando $P(x,y,z)=x.y^{-1}.z$, temos que $P(x,y,y)=x$ e $P(x,x,z)=z$, e portanto os grupos constituem uma Variedade de Mal'cev. Passando a operação definida acima para a notação aditiva, $P(x,y,z)=x-y+z$, vemos que tambem são Variedades de Mal'cev os Anéis, Módulos, etç.

Uma estrutura um pouco menos comum é a de Quase-grupo. Um quase-grupo Q é uma álgebra do tipo $\langle 2,2,2\rangle$ com as operaçoẽs .(multiplicação), /(divisão à direita) e $\backslash$ (divisão à esquerda), satisfazendo as identidades:

$(x.y)/y=x$

$(x/y).y=x$

$y\backslash(y.x)=x$

$y.(y\backslash x)=x$

Se definirmos $P(x,y,z)=(x/(y\backslash y)).(y\backslash z)$ então temos que $P(x,y,y)=(x/(y\backslash y)).(y\backslash y)=x$ e $P(x,x,z)=(x/(x\backslash x)).(x\backslash z)=$ $(x.(x\backslash x)/(x\backslash x)).(x\backslash z)=x.(x\backslash z)=z$. Portanto as congruências de um quase-grupo comutam.

CAPÍTULO II

CENTRALIDADE

Consideraremos neste capítulo o problema de definir Centralidade em Variedades de Mal'cev, e as principais consequências desta definição.

1-DEFINIÇÃO- Sejam A uma álgebra em uma variedade T (não necessariamente de Mal'cev), β,γ congruências em A e $(\gamma|\beta)$ uma congruência em β. Dizemos então que γ centraliza β por meio da congruência centrante $(\gamma|\beta)$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

C0: $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ implica $x\gamma x'$.

C1: $\forall(x,y)\in\beta, \pi_0:|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}\to|x|_\gamma$ (onde $\pi_0(x',y')=x'$) é uma aplicação bijetora.

RR: $\forall(x,y)\in\gamma$, $(x,x)(\gamma|\beta)(y,y)$.

RS: $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ implica $(y,x)(\gamma|\beta)(y',x')$.

RT: $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e $(y,z)(\gamma|\beta)(y',z')$ então $(x,z)(\gamma|\beta)(x',z')$.

2-EXÊMPLO- No caso da Variedade dos Grupos temos o seguinte: dados um grupo G e H,K sub-grupos normais de G, então H centraliza K (no sentido da Teoria dos Grupos) se dado $h\in H$, $h.k=k.h$ para todo $k\in K$. Verifiquemos que nesta variedade, esta definição e a Definição 1 são equivalentes.

Sejam β e γ as congruências módulo H e módulo K respectivamente, ou seja $x\beta y$ se, e somente se, $y.x^{-1}\in H$ e $x\gamma y$ se, e somente se, $y.x^{-1}\in K$ e então temos que $H=|1|_\beta$ e $K=|1|_\gamma$. Suponhamos então que K centraliza H no sentido da Teoria dos Grupos. Definimos agora, uma relação $(\gamma|\beta)$ em β por:

$(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ se, e somente se, $\exists h\varepsilon H$: $y.x^{-1}=y'.x'^{-1}=h$ e $\exists k\varepsilon K$: $x^{-1}.x'=k$.

Suponhamos que $(x_i,y_i)(\gamma|\beta)(x'_i,y'_i)$ para $i=1,2$, digamos $y_i.x_i^{-1}=y'_i.x'_i{}^{-1}=h_i\varepsilon H$ e $x_i^{-1}.x'_i=k_i\varepsilon K$, temos o seguinte : $y_1.y_2.(x_1.x_2)^{-1}=y_1.y_2.x_2^{-1}.x_1^{-1}=y_1.h_2.x_1^{-1}=h_1.x_1.h_2.x_1^{-1}\varepsilon H$ pois $H \triangleleft G$, alem disso $y'_1.y'_2.(x'_1.x'_2)^{-1}=h_1.x'_1.h_2.x'_1{}^{-1}$ e vale que $x'_1{}^{-1}.x_1.h_2.x_1^{-1}.x'_1=k_1^{-1}.h_2.k_1=h_2$ pois K centraliza H e portanto, $x_1.h_2.x_1^{-1}=x'_1.h_2.x'_1{}^{-1}$ e temos finalmente que: $y_1.y_2.(x_1.x_2)^{-1}=y'_1.y'_2.(x'_1.x'_2)^{-1}$. Alem disso, $(x_1.x_2)^{-1}.(x'_1.x'_2)=x_2^{-1}.x_1^{-1}.x'_1.x'_2=x_2^{-1}.k_1.x_2\varepsilon K$ pois $x_2^{-1}.k_1.x_2\varepsilon K$. Disso resulta que $(x_1.x_2,y_1.y_2)(\gamma|\beta)(x'_1.x'_2,y'_1,y'_2)$. Suponhamos agora que $(x,y)\varepsilon\beta$, então $y.x^{-1}\varepsilon H$ e $x^{-1}.x=1\varepsilon K$, logo $(x,y)(\gamma|\beta)(x,y)$ e temos finalmente que $\hat{\beta}\leqslant(\gamma|\beta)\leqslant\beta^2$ e então, pelo Teorema I-10 vem que $(\gamma|\beta)$ é uma congruência em β.

Verifiquemos agora que $(\gamma|\beta)$ satisfaz efetivamente as condições da Definição 1.

C0: $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ então $x^{-1}.x'\varepsilon K$ ou seja $x\gamma x'$.

C1: $\pi_0:|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}\to|x|_\gamma$, $\pi_0(x',y')=x'$ é bijeção. De fato, se $(x,y)(\gamma|\beta)(x,w)$, então existe h com $y.x^{-1}=wx^{-1}=h$ e portanto $y=w$, logo π_0 é injetôra. Por outro lado seja $z\varepsilon|x|_\gamma$, então se $y'=y.x^{-1}.z$, temos que $y.x^{-1}=y'.z\varepsilon H$ e como $z=x.k$ para algum $k\varepsilon K$, resulta então que $(x,y)(\gamma|\beta)(z,y')$ e $\pi_0(z,y')=z$, logo π_0 é sobre.

RR: Suponhamos que $(x,y)\varepsilon\gamma$, então existe $k\varepsilon K$ com $x=k.y$ e trivialmente temos que $(x,x)(\gamma|\beta)(y,y)$.

RS: Se $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ então $y.x^{-1}=y'x'^{-1}=h\varepsilon H$ e $x^{-1}.x'\varepsilon K$, logo $x.y^{-1}=x'.y'^{-1}=h^{-1}\varepsilon H$ e $y^{-1}.y'=x^{-1}.x'=k\varepsilon K$, logo $(y,x)(\gamma|\beta)(y',x')$.

RT: Vamos supor agora que $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e que $(y,z)(\gamma|\beta)$ (y',z'), então temos que $y.x^{-1}=y'.x'^{-1}=h_1\varepsilon H$, $x^{-1}.x'=k_1\varepsilon K$, $z.y^{-1}=$ $z'.y'^{-1}=h_2\varepsilon H$ e $y^{-1}.y'=k_2\varepsilon K$, temos então que $z.x^{-1}=z.y.y^{-1}.x^{-1}=$ $z'.y'^{-1}.y'.x'^{-1}=z'x'^{-1}\varepsilon H$ e portanto $(x,z)(\gamma|\beta)(x',z')$.

Portanto γ centraliza β no sentido da Definição I.

Reciprocamente, suponhamos que β e γ são congruências em um grupo G, tais que γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$ e sejam $H=|1|_\beta$ e $K=|1|_\gamma$. Tomando $h\varepsilon H$ e $k\varepsilon K$ temos:

$$\begin{array}{cl}(1,h)(\gamma|\beta)(1,h) & \\ (1,1)(\gamma|\beta)(k,k) & \quad RR \\ (1,h^{-1})(\gamma|\beta)(1,h^{-1}) & \\ \hline (1,1)(\gamma|\beta)(k,h.k.h^{-1}) & \end{array}$$

logo, pela transitividade de $(\gamma|\beta)$, temos que $(k,k)(\gamma|\beta)(k,h.k.h^{-1})$ e por C1 temos que $k=h.k.h^{-1}$ e portanto K centraliza H no sentido da Teoria dos Grupos.

No exêmplo anterior pode ser observada na definição de centralização na Teoria dos Grupos uma simetria no sentido de que, se K centraliza H então H centraliza K. Esta simetria ocorre tambem no caso geral, como vemos na proposição seguinte:

3-PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A. Se γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$ então existe uma congruência $(\beta|\gamma)$ em γ de modo que β centraliza γ por meio de $(\beta|\gamma)$.

DEMONSTRAÇÃO- Definimos uma relação $(\beta|\gamma)$ em γ por (x,x') $(\beta|\gamma)(y,y')$ se, e somente se, $(x,y)(\beta|\gamma)(x',y')$. Seja agora f uma operação n-ária e vamos supor que para $i=1,\ldots,n$ temos $(x_i,x'_i)(\beta|\gamma)(y_i,y'_i)$, ou seja $(x_i,y_i)(\gamma|\beta)(x'_i,y'_i)$, e como $(\gamma|\beta)$ $\leqslant\beta^2$ temos que $(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))(\gamma|\beta)(f(x'_1,\ldots,x'_n),$ $f(y'_1,\ldots,y'_n))$ e assim, temos que $(f(x_1,\ldots,x_n),f(x'_1,\ldots,x'_n))$ $(\beta|\gamma)(f(y_1,\ldots,y_n),f(y'_1,\ldots,y'_n))$ e portanto $(\beta|\gamma)\leqslant\gamma^2$.

Tomando agora $(x,x')\varepsilon\gamma$, então por RR para $(\gamma|\beta)$ temos que $(x,x)(\gamma|\beta)(x',x')$ e portanto $(x,x')(\beta|\gamma)(x,x')$ ou seja, $(\beta|\gamma)$ é reflexiva. Se $(x,x')(\beta|\gamma)(y,y')$ então $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e por RS para $(\gamma|\beta)$ temos que $(y,x)(\gamma|\beta)(y',x')$ ou seja $(y,y')(\beta|\gamma)$ (x,x') e $(\beta|\gamma)$ é simétrica. Se tivermos $(x,x')(\beta|\gamma)(y,y')$ e $(y,y')(\beta|\gamma)(z,z')$, então $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e $(y,z)(\gamma|\beta)(y',z')$ e por RT para $(\gamma|\beta)$ temos que $(x,z)(\gamma|\beta)(x',z')$ e assim, $(x,x')(\beta|\gamma)(x',z')$ e $(\beta|\gamma)$ é transitiva. Concluimos então que $(\beta|\gamma)$ é uma relação de congruência em A.

Verificaremos agora que $(\beta|\gamma)$ satisfaz as condições da Definição 1.

C0: Se $(x,x')(\beta|\gamma)(y,y')$ então $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e devemos ter que $x\beta y$ pois $(\gamma|\beta)\leqslant\beta^2$.

C1: Consideremos agora $\pi_0:|(x,x')|_{(\beta|\gamma)}\to|x|_\beta$, onde $\pi_0(x_1,x_2)=x_1$ e seja $y\varepsilon|x|_\beta$, então, temos que $\pi_0:|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}\to|x|_\gamma$ é bijeção por C1 para $(\gamma|\beta)$ e portanto como $x'\varepsilon|x|_\gamma$, existe y' de modo que $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ ou seja, $(x,x')(\beta|\gamma)(y,y')$, logo $\pi_0:|(x,x')|_{(\beta|\gamma)}\to|x|_\beta$ é sobrejetora. Se tivermos $(x,x')(\beta|\gamma)(x,y')$, então $(x,x)(\gamma|\beta)(x',y')$ e como por RR para $(\gamma|\beta)$ temos que

$(x,x)(\gamma|\beta)(y',y')$, resulta da transitividade que $(y',y')(\gamma|\beta)$ (x',y') e por C1 para $(\gamma|\beta)$ vem que $x'=y'$, logo π_0é injetora e vale C1 para $(\beta|\gamma)$.

RR: Suponhamos que $(x,x')\varepsilon\beta$, então como $(\gamma|\beta)$ é reflexiva, temos que $(x,x')(\gamma|\beta)(x,x')$ ou seja, $(x,x)(\beta|\gamma)(x',x')$ e vale RR.

RS: Se $(x,x')(\beta|\gamma)(y,y')$ então $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e com $(\gamma|\beta)$ é simétrica, temos que $(x',y')(\gamma|\beta)(x,y)$ e assim $(x',x)(\beta|\gamma)(y',y)$ e vale RS para $(\beta|\gamma)$.

RT: Se tivermos $(x,x')(\beta|\gamma)(y,y')$ e $(x',x'')(\beta|\gamma)(y',y'')$ então $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e $(x',y')(\gamma|\beta)(x'',y'')$ e como $(\gamma|\beta)$ é transitiva, temos $(x,y)(\gamma|\beta)(x'',y'')$ ou seja $(x,x'')(\beta|\gamma)(y,y'')$ e vale RT para $(\beta|\gamma)$.

Portanto, β centraliza γ por meio de $(\beta|\gamma)$.

Se a variedade T não é de Mal'cev, então γ pode centralizar β por meio de várias congruências centrantes como nos mostra o proximo exêmplo.

4-EXÊMPLO- Seja T a Variedade dos Conjuntos, as suas congruências saõ exatamente as relaçoẽs de equivalência. Seja G um grupo não abeliano. Definimos em G^2 a relação de equivalência $(G^2|G^2)_d$ cujas classes de equivalência são exatamente as classes laterais à direita de $\hat{G}$ e $(G^2|G^2)_e$ definida de modo análogo pelas classes laterais à esquerda de $\hat{G}$. Temos então que $(x,y)(G^2|G^2)_d(x',y')$ se, e somente se, $(x',y')\varepsilon\hat{G}(x,y)$, ou $\exists t\varepsilon G$ com $(x',y')=(t\cdot x,t\cdot y)$. Verifiquemos que G^2 centraliza G^2 por meio de $(G^2|G^2)_d$.

C0: Se $(x,y)(G^2|G^2)_d(x',y')$, trivialmente $(x,x')\varepsilon G^2$.

C1: Seja $\pi_0:|(x,y)|_{(G^2|G^2)_d}\to|x|_{G^2}$ com $(t{\cdot}x,t{\cdot}y)\to t{\cdot}x$ então, se $\pi_0(t{\cdot}x,t{\cdot}y)$ $=\pi_0(t_1{\cdot}x,t_1{\cdot}y)$ pela propriedade do cancelamento para grupos, temos que $t=t_1$ e π_0 é injetora. Se $z\varepsilon G$, existe $t\varepsilon G$ com $t{\cdot}x=z$ (basta tomar $t=z{\cdot}x^{-1}$) e portanto $\pi_0(t{\cdot}x,t{\cdot}y)=z$ e π_0 é sobrejetora. Logo vale C1 para $(G^2|G^2)_d$.

RR: $\forall(x,y)\varepsilon G^2$, $\exists t$: $(x,x)=(t,t)\cdot(y,y)$ e portanto, temos que (x,x) $(G^2|G^2)_d(y,y)$.

RS: Se $(x,y)(G^2|G^2)_d(x',y')$ então $(x,y)=(t,t)\cdot(x',y')$ ou seja, $(y,x)=(t,t)\cdot(y',x')$ e assim, temos $(y,x)(G^2|G^2)_d(y',x')$.

RT: Se $(x,y)(G^2|G^2)_d(x',y')$ e $(y,z)(G^2|G^2)_d(y',z')$, então existem t_1 e t_2 de G, de modo que $(x,y)=(t_1,t_1)\cdot(x',y')$ e $(y,z)=(t_2,t_2)\cdot$ (y',z'), então de $y=t_1{\cdot}y'$ e $y=t_2{\cdot}y'$ resulta que $t_1=t_2$ logo, $(x,z)=$ $(t_1,t_1)\cdot(x',z')$ e assim, $(x,z)(G^2|G^2)_d(x',z')$.

Vimos então que $(G^2|G^2)_d$ satisfaz as condições da Definição 1. De modo análogo, podemos verificar que G^2 centraliza G^2 por meio de $(G^2|G^2)_e$.

Por outro lado, consideremos a situação $(x,y)(G^2|G^2)_d(x',y')$ e $(x,y)(G^2|G^2)_e(x',y')$, teremos então $(x',y')=(t{\cdot}x,t{\cdot}y)$ e por outro lado, existira um único t_1 com $(x',y')=(x{\cdot}t_1,y{\cdot}t_1)$ e teremos então $t=t{\cdot}x{\cdot}x^{-1}=x'{\cdot}x^{-1}=t_1$ pois $x'=x{\cdot}t_1$ e assim, teriamos $tx=xt$ e $ty=yt$. Logo se tivermos $|(x,y)|_{(G^2|G^2)_d}=|(x,y)|_{(G^2|G^2)_e}$ para todo $(x,y)\varepsilon G^2$, viria então que $t{\cdot}x=x{\cdot}t$ e $t{\cdot}y=y{\cdot}t$ para todo $t\varepsilon G$ e G seria um grupo abeliano. Como G foi suposto não abeliano, existe pelo menos um par (x,y) com $|(x,y)|_{(G^2|G^2)_d}\neq|(x,y)|_{(G^2|G^2)_e}$ e assim, $(G^2|G^2)_d\neq(G^2|G^2)_e$.

Como ficou visto pela proposição e pelos exêmplos anteriores, no nível de generalidade em que foi feita a definição de centralidade, a verificação de se uma congruência centraliza outra se torna trabalhosa e não se tem a garantia da unicidade da congruência centrante. Quando nos restringimos às Variedades de Mal'cev, então reduzimos consideràvelmente os ítens a se testar para centralidade e temos a importante propriedade da congruência centrante ser única.

De agora em diante, e até o fim deste trabalho, salvo menção explícita em contrário, todas as álgebras em consideração estarão sempre em uma Variedade de Mal'cev.

5-PROPOSIÇÃO- Sejam A uma álgebra e β,γ congruências em A. Suponhamos que γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)_1$ e $(\gamma|\beta)_2$, então $(\gamma|\beta)_1=(\gamma|\beta)_2$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que $x\beta y$ e $x\gamma x'$, então para i=1,2 temos que:

$$
\begin{array}{l}
(x,y)(\gamma|\beta)_i(x,y)\\
(x,x)(\gamma|\beta)_i(x,x)\\
(x,x)(\gamma|\beta)_i(x',x')\\
\hline
(x,y)(\gamma|\beta)_i(x',P(y,x,x'))
\end{array}
$$

Temos então que se $(x,y)(\gamma|\beta)_1(x',y')$, por C1 para $(\gamma|\beta)_1$, vale que $y'=P(y,x,x')$, e assim temos que $(x,y)(\gamma|\beta)_2(x',y')$ e portanto

$(\gamma|\beta)_1 \leq (\gamma|\beta)_2$. Por simetria, temos a inclusão oposta e portanto $(\gamma|\beta)_1 = (\gamma|\beta)_2$.

Assim, para congruências em álgebras que estão em Variedades de Mal'cev, falamos na congruência centrante.

6- PROPOSIÇÃO- Sejam A uma álgebra, β,γ congruências em A e $(\gamma|\beta)$ uma congruência em β. Então γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$ se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas:

C0: $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ implica $x\gamma x'$.

C3: $\forall x \varepsilon A$, $|(x,x)|_{(\gamma|\beta)} = \Delta|x|_\gamma$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos inicialmente que γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$ e $(y,y)\varepsilon\Delta|x|_\gamma$, então $x\gamma y$ e assim, por RR temos $(x,x)(\gamma|\beta)(y,y)$ ou seja, $(y,y)\varepsilon|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$ e $\Delta|x|_\gamma \subseteq |(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$. Por outro lado, se $(y,z)\varepsilon|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$ então $(y,z)(\gamma|\beta)(x,x)$ e por RR vem que $(x,x)(\gamma|\beta)(y,y)$ e pela transitividade de $(\gamma|\beta)$, $(y,z)(\gamma|\beta)(y,y)$, finalmente C1 nos diz que $y=z$ e $(y,z)\varepsilon\Delta|x|_\gamma$ ou seja $|(x,x)|_{(\gamma|\beta)} \subseteq \Delta|x|_\gamma$ portanto $|(x,x)|_{(\gamma|\beta)} = \Delta|x|_\gamma$.

Reciprocamente, suponhamos que C0 e C3 estão satisfeitas e vamos mostrar que valem as condições da Definição 1.

RR: Da condição C3, temos que se $x\gamma y$, então $(x,x)(\gamma|\beta)(y,y)$ e vale RR.

C1: Seja $\pi_0: |(x,y)|_{(\gamma|\beta)} \to |x|_\gamma$ onde $(x',y') \to x'$. Suponhamos que $(x,y)\varepsilon\beta$ e $z\varepsilon|x|_\gamma$, temos então que:

$$\frac{\begin{array}{c}(x,y)(\gamma|\beta)(x,y)\\(x,x)(\gamma|\beta)(x,x)\\(x,x)(\gamma|\beta)(z,z)\end{array}}{(x,y)(\gamma|\beta)(z,P(x,y,z))}$$

assim, $\pi_0(z,P(x,y,z))=z$ e π_0 é sobrejetora. Se tivermos que $\pi_0(z,z')=\pi_0(z,z'')$ onde $(z,z'),(z,z'')\in|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}$, então:

$$\frac{\begin{array}{c}(z,z')(\gamma|\beta)(z,z'')\\(z,z)(\gamma|\beta)(z,z)\\(z',z)(\gamma|\beta)(z',z)\end{array}}{(z',z')(\gamma|\beta)(z',z'')}$$

e assim, por C3 temos que $z'=z''$ logo π_0 é injetora. Portanto vale C1 para $(\gamma|\beta)$.

RS: Suponhamos que $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$, então por C0, temos que $x\gamma x'$ e conseqüentemente:

$$\frac{\begin{array}{c}(x,y)(\gamma|\beta)(x,y)\\(x,x)(\gamma|\beta)(x,x)\\(x,x)(\gamma|\beta)(x',x')\end{array}}{(x,y)(\gamma|\beta)(x',P(y,x,x'))}$$

e portanto temos que $(x',y')(\gamma|\beta)(x',P(y,x,x'))$ pela transitividade de $(\gamma|\beta)$, e agora, como π_0 é injetora, vale que $y'=P(y,x,x'))$.

Temos tambem que:

$$\frac{\begin{array}{c}y\gamma y\\x\gamma x'\\x'\gamma x'\end{array}}{P(y,x,x')\gamma y}$$

e assim temos que $y\gamma y'$ e

$$\begin{array}{c}
(x,x)(\gamma|\beta)(x',x') \\
(x,y)(\gamma|\beta)(x',y') \\
(y,y)(\gamma|\beta)(y',y') \\
\hline
(y,x)(\gamma|\beta)(y',x') \\
\hline
\end{array}.$$

RT: Suponhamos agora que $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ e $(y,z)(\gamma|\beta)(y',z')$, temos então:

$$\begin{array}{c}
(x,y)(\gamma|\beta)(x',y') \\
(y,y)(\gamma|\beta)(y',y') \\
(y,z)(\gamma|\beta)(y',z') \\
\hline
(x,z)(\gamma|\beta)(x',z') \\
\hline
\end{array}.$$

Portanto, γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$.

7-COROLÁRIO- Nas hipoteses da Proposição 6 temos que γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$ se, e somente se, as duas seguintes condiçoẽs estiverem satisfeitas:

C0: $(x,y)(\gamma|\beta)(x',y')$ implica $x\gamma x'$.

C4: $\forall x\varepsilon A$: $(x,x)(\gamma|\beta)(x,y)$ implica $x=y$.

RR: $x\gamma y$ implica $(x,x)(\gamma,\beta)(y,y)$

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que as condiçoẽs C0, C4 e RR estejam satisfeitas, temos então que:

$$x\gamma y \text{ implica } (x,x)(\gamma,\beta)(y,y)$$

Assim temos que $\Delta|x|_{\gamma}\subseteq|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$. Reciprocamente, se $(y,z)\varepsilon$ $|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$ então $(x,x)(\gamma|\beta)(y,z)$ e por C0 temos que $x\gamma y$ e assim

$(x,x)(\gamma|\beta)(y,y)$ e por transitividade de $(\gamma|\beta)$ temos então que $(y,y)(\gamma|\beta)(y,z)$ e então, C4 nos diz que $y=z$ e portanto $(y,z)\varepsilon$ $\Delta|x|_{\gamma}$ logo $\Delta|x|_{\gamma}\supseteq|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$ e vale C3.

Suponhamos agora que as condiçoẽs C0 e C3 estejam satisfeitas e que $(x,x)(\gamma|\beta)(x,y)$, então $(x,y)\varepsilon|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}=\Delta|x|_{\gamma}$, logo $x=y$ e vale C4.

8- PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A e $(\gamma|\beta)$ uma congruência em β tal que γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta)$. Se β' é uma congruência contida em β, então γ centraliza β' por meio de $(\gamma|\beta')=(\gamma|\beta)\cap\beta'^{2}$.

DEMONSTRAÇÃO- Verifiquemos que $(\gamma|\beta')$ satisfaz as condiçoẽs C0 e C4 do Corolário 7. Se $(x,y)(\gamma|\beta')(x',y')$ então (x,y) $(\gamma|\beta)(x',y')$ e por C0 para $(\gamma|\beta)$ temos $x\gamma x'$ e vale C0 para $(\gamma|\beta')$. Se $(x,x)(\gamma|\beta')(x,y)$ então $(x,x)(\gamma|\beta)(x,y)$ e por C4 para $(\gamma|\beta)$ vem que $x=y$ e vale C4 para $(\gamma|\beta')$ e portanto γ centraliza β por meio de $(\gamma|\beta')$.

9- DEFINIÇÃO- A centralização da Proposição 8 é chamada de <u>Centralização por Restrição</u>.

10- PROPOSIÇÃO- Seja α uma congruência em uma álgebra A, então α centraliza $\hat{A}$.

DEMONSTRAÇÃO- Consideremos a congruência em $\hat{A}$ definida por

$(x,x)(\alpha|\hat{A})(y,y)$ se, e somente se, $x\alpha y$, então C0 decorre da definição de $(\alpha|\hat{A})$ e C4 de $(\alpha|\hat{A})$ ser uma congruência em $\hat{A}$.

11- PROPOSIÇÃO- Sejam β_1,β_2 e γ congruências em uma álgebra A. Se γ centraliza β_1 e β_2 então γ centraliza $\beta_1\circ\beta_2$.

DEMONSTRAÇÃO- Definimos $(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)$ em $\beta_1\circ\beta_2$ por $(x,y)(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)$ (x',y') se, e somente se, existem $t,t'\varepsilon A$ tal que $(x,t)(\gamma|\beta_1)(x',t')$ e $(t,y)(\gamma|\beta_2)(t',y')$. Seja f uma operação n-ária e suponhamos que para $i=1,\dots,n$, $(x_i,y_i)(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)(x'_i,y'_i)$, digamos $(x_i,t_i)(\gamma|\beta_1)$ (x'_i,t'_i) e $(t_i,y_i)(\gamma|\beta_1)(t'_i,y'_i)$ então como $(\gamma|\beta_i)$ é congruência, temos que $(f(x_1,\dots,x_n),f(t_1,\dots,t_n))(\gamma|\beta_1)$ $(f(x'_1,\dots,x'_n),\ f(t'_1,\dots,t'_n))$ e tambem $(f(t_1,\dots,t_n),$ $f(y_1,\dots,y_n))(\gamma|\beta_2)(f(t'_1,\dots,t'_n),f(y'_1,\dots,y'_n))$ e portanto, $(f(x_1,\dots,x_n),f(y_1,\dots,y_n))(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)(f(x'_1,\dots,x'_n),f(y'_1,\dots,y'_n))$ e assim, $(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)\leq(\beta_1\ \beta_2)^2$. Seja agora, $(x,y)\varepsilon\beta_1\circ\beta_2$, digamos $x\beta_1t\beta_2y$, assim por reflexividade temos que $(x,t)(\gamma|\beta_1)(x,t)$ e $(t,y)(\gamma|\beta_2)(t,y)$ e resulta que $(x,y)(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)(x,y)$, logo $\widehat{\beta_1\circ\beta_2}\leq$ $(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)$. Portanto, pelo Teorema I-10, $(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)$ é uma congruência em $\beta_1\circ\beta_2$.

Verificaremos agora, as condiçoẽs do Corolário 7.

C0: $(x,y)(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)(x',y')$, então existem t e t' de modo que (x,t) $(\gamma|\beta_1)(x',t')$ e por C0 para $(\gamma|\beta_1)$ temos que $x\gamma x'$.

C4: Suponhamos que $(x,x)(\gamma|\beta_1\circ\beta_2)(x,y)$, digamos $(x,t)(\gamma|\beta_1)(x,u)$ e $(t,x)(\gamma|\beta_2)(u,y)$, então C1 para $(\gamma|\beta_1)$ mostra que $t=u$ e novamente C1 para $(\gamma|\beta_2)$ nos da que $y=x$.

12-COROLÁRIO- Nas condiçoẽs da proposição anterior, se β_1 e β_2 centralizam γ, então $\beta_1 \circ \beta_2$ centraliza γ.

DEMONSTRAÇÃO- Por simetria de centralização, temos que γ centraliza β_1 e β_2 e então, pela Proposição 11, γ centaliza $\beta_1 \circ \beta_2$ e novamente por simetria, $\beta_1 \circ \beta_2$ centraliza γ.

13- PROPOSIÇÃO- Seja α uma congruência em uma álgebra A. Existe uma única congruência maximal centralizando α.

DEMONSTRAÇÃO- Seja S o conjunto das congruências em A centralizando α , consideremos nos elementos de S a ordem natural do reticulado das congruências de A, então:
(i) $S \neq \emptyset$ pois pela Proposição 10, $\hat{A} \in S$.
(ii) Seja $(\beta_i)_{i \in I}$ uma cadeia qualquer em S e seja $\beta = \bigsqcup_{i \in I} \beta_i$ (como $(\beta_i)_{i \in I}$ é uma cadeia, a sua reunião coincide com o seu supremo). Temos pelo Teorema I-10 que $\hat{A} \leq \beta_i \leq A^2$, $\forall i \in I$ e assim, vale que $\hat{A} \leq \beta_i \leq A^2$ e portanto β é uma congruência em A. Definimos agora, $(x,y)(\alpha|\beta)(x',y')$ se, e somente se, $\exists i \in I$ de modo que $(x,y)(\alpha|\beta_i)(x',y')$ e temos então:
C0: $(x,y)(\alpha|\beta)(x',y')$ implica que $(x,y)(\alpha|\beta_i)(x',y')$ e por C0 para $(\alpha|\beta_i)$ temos que $x\alpha x'$.
C4: $(x,x)(\alpha|\beta)(x,y)$, então $(x,x)(\alpha|\beta_i)(x,y)$ e por C4 para $(\alpha|\beta_i)$ vem que $x=y$. Assim pelo Corolário 7 temos que β centraliza α ou seja, $\beta \in S$.
(iii) Os ítens (i) e (ii) nos dizem que S satisfaz as hipoteses

do Lema de Zorn, e portanto, S tem elementos maximais.

Sejam agora, β' e β'' dois elementos maximais de S, se $\beta' \neq \beta''$, então pelo menos uma delas, digamos β' é tal que $\beta' < \beta' \circ \beta''$, como pela Proposiçao 11, $\beta' \circ \beta''$ centraliza α, β' não pode ser maximal, o que nos mostra que existe uma única congruência maximal centralizando α.

Denotaremos a única congruência maximal centralizando α da proposição acima por $\eta(\alpha)$.

14- EXÊMPLO- Sejam G um grupo e H um sub-grupo normal de G. Chamamos de <u>Centralizador de H em G</u> ao conjunto $C_G(H) = \{a \in G\colon a.h = h.a$ para todo $h \in H\}$, como $H \triangleleft G$, temos que $C_G(H) \triangleleft G$ ([1]). Com as notaçoēs do Exêmplo 2, seja β a congruência modulo H; então se γ centraliza β e $K = |1|_\gamma ; h.k = k.h\ \forall h \in H, k \in K$. Consideremos agora a congruência $\eta(\beta)$ e seja $S = |1|_{\eta(\beta)}$. Dados $x \in S$, como $\eta(\beta)$ centraliza β, temos $x.h = h.x\ \forall h \in H$ e portanto $S \subseteq C_G(H)$, mas do Exêmplo 2 temos que $C_G(H)$ centraliza H no sentido da Teoria dos Grupos e portanto se σ é a congruência modulo $C_G(H)$, $\sigma \leq \eta(\beta)$ ou seja, $C_G(H) \subseteq S$. Assim, temos que se $H = |1|_\beta$, $C_G(H) = |1|_{\eta(\beta)}$.

Suponhamos agora que γ centraliza β em A. Por simetria de centralização, β centraliza γ e por restrição, β e γ centralizam $\beta \cap \gamma$, e assim, pelo Corolário 11, $\beta \circ \gamma$ centraliza $\beta \cap \gamma$. Em particular temos o seguinte:

15- PROPOSIÇÃO- Seja α uma congruência em uma álgebra A, então $\alpha\circ\eta(\alpha)$ centraliza $\alpha\cap\eta(\alpha)$.

16- PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A e suponhamos que γ centraliza β em A, vale o seguinte:

(i) Seja $e_i:\beta/(\gamma|\beta)\to A/\gamma$ dado por $|(x_0,x_1)|_{(\gamma|\beta)}\to |x_i|_\gamma$ para $i=0,1$. Seja $E_i=\mathrm{Ker}\,e_i$, então E_1 centraliza E_0 em $\beta/(\gamma|\beta)$.

(ii) Para uma congruência D em $\beta/(\gamma|\beta)$ centralizando E_0, definimos δ em A por $y\delta y'$ se, e somente se, $\exists x,x'\varepsilon A$ com $|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}D$ $|(x',y')|_{(\gamma|\beta)}$. Então δ é uma congruência em A centralizando β.

(iii) Se $D\geq E_1$, então $\delta\geq\gamma$ e portanto, se $\gamma=\eta(\beta)$, temos que $E_1=\eta(E_0)$.

DEMONSTRAÇÃO- (i) Se $|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}E_0|(x',y')|_{(\gamma|\beta)}$ então temos que $|x|_\gamma=|x'|_\gamma$ ou $x\gamma x'$ e então como $\pi_0:|(x',y')|_{(\gamma|\beta)}|\to|x'|_\gamma$ é bijetora e tem-se que $x\varepsilon|x|_\gamma$, existe $y''\varepsilon A$ de modo que $\pi_0^{-1}(x)=(x,y'')$ e ainda $(x,y'')(\gamma|\beta)(x',y')$. Assim, $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}, |(x',y')|_{(\gamma|\beta)})\varepsilon E_0$ pode ser escrito como $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}, |(x,y'')|_{(\gamma|\beta)})$. Definimos então uma relação $(E_1|E_0)$ sobre E_0 por: $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,z)|_{(\gamma|\beta)})(E_1|E_0)(|(x',y')|_{(\gamma|\beta)}, |(x',z')|_{(\gamma|\beta)})$ se, e somente se, $(y,z)(\gamma|\beta)(y',z')$.

Dado $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,z)|_{(\gamma|\beta)})\varepsilon E_0$, de $(y,z)(\gamma|\beta)(y,z)$, temos que $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,z)|_{(\gamma|\beta)})(E_1|E_0)(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}, |(x,z)|_{(\gamma|\beta)})$ e assim, temos que $\hat{E}_0\leq(E_1|E_0)\leq E_0^2$. e o teorema I-10 nos mostra que $(E_1|E_0)$ é uma congruência em E_0.

Vamos verificar agora as condiçoẽs do Corolário 7 para $(E_1|E_0)$.

C0: Suponhamos que $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,z)|_{(\gamma|\beta)})(E_1|E_0)$
$|(x',y')|_{(\gamma|\beta)},|(x',z')|_{(\gamma|\beta)})$, então temos que $(y,z)(\gamma|\beta)(y',z')$ e por C0 para $(\gamma|\beta)$ temos que $y\gamma y'$ ou seja, $|y|_\gamma=|y'|_\gamma$, mas então $|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}E_1|(x',y')|_{(\gamma|\beta)}$ e vale C0 para $(E_1|E_0)$.

C4: Vamos supor agora que $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,y)|_{(\gamma|\beta)})(E_1|E_0)$
$|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,z)|_{(\gamma|\beta)})$, então $(y,y)(\gamma|\beta)(y,z)$ e por C4 para $(\gamma|\beta)$ temos que $y=z$ e assim, vale C4 para $(E_1|E_0)$. Resulta então que E_1 centraliza E_0 por meio de $(E_1|E_0)$.

(ii) Seja f uma operação n-ária e para $i=1,\dots n$, $y_i\delta y'_i$, então existem x_i,x'_i em A com $|(x_i,y_i)|_{(\gamma|\beta)}D|(x'_i,y'_i)|_{(\gamma|\beta)}$ e como D é congruência temos que $|(f(x_1,\dots,x_n),f(y_1,\dots,y_n))|_{(\gamma|\beta)}D$
$|(f(x'_1,\dots,x'_n),f(y'_1,\dots,y'_n))|_{(\gamma|\beta)}$ ou seja, $f(y_1,\dots,y_n)\delta$
$f(y'_1,\dots,y'_n)$ e vale que $\delta\leq A^2$. Seja agora, $y\in A$, então $|(y,y)|_{(\gamma|\beta)}E_0|(y,y)|_{(\gamma|\beta)}$ e pela reflexividade de $(D|E_0)$, temos $(|(y,y)|_{(\gamma|\beta)},|(y,y)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)$
$|(y,y)|_{(\gamma|\beta)},|(y,y)|_{(\gamma|\beta)})$ e assim, por C0 para $(D|E_0)$ temos $|(y,y)|_{(\gamma|\beta)}D|(y,y)|_{(\gamma|\beta)}$ e portanto, $y\delta y$, ou seja $\hat{A}\leq\delta$ e o Teorema I-10 nos garante então que δ é uma congruência em A.

Definimos agora $(\delta|\beta)$ em β por $(y,x)(\delta|\beta)(y',x')$ se, e somente se, $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)(|(x',y')|_{(\gamma|\beta)},$
$|(x',x')|_{(\gamma|\beta)})$. Suponhamos agora que para $i=1,\dots,n$, tenhamos $(y_i,x_i)(\delta|\beta)(y'_i,x'_i)$ e que f é uma operação n-ária, temos então que $(|(f(x_1,\dots,x_n),f(y_1,\dots,y_n))|_{(\gamma|\beta)},|(f(x_1,\dots,x_n),$
$f(y_1,\dots,y_n))|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)(|(f(x'_1,\dots,x'_n),f(y'_1,\dots,y'_n))|_{(\gamma|\beta)},$
$|(f(x'_1,\dots,x'_n),f(x'_1,\dots,x'_n))|_{(\gamma|\beta)})$ e portanto temos que
$(f(y_1,\dots,y_n),f(x_1,\dots,y_n))(\delta|\beta)(f(y'_1,\dots,y'_n),f(x'_1,\dots,x'_n))$

e assim, temos que $(\delta|\beta)\leqslant\beta^2$. Tomemos agora $(x,y)\varepsilon\beta$, então $|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}E_0|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$ e pela reflexividade de $(D|E_0)$, temos que $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})$ e assim vale que $(y,x)(\delta|\beta)(y,x)$ ou seja, $\hat{\beta}\leqslant(\delta|\beta)$. Concluimos então, pelo Teorema I- 10 que $(\delta|\beta)$ é uma congruência em β.

Verifiquemos agora, que são validas as hipoteses do Corolário 7 para $(\delta|\beta)$.

C0: Suponhamos que $(y,x)(\delta|\beta)(y',x')$, então temos $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}$, $|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)(|(x',y')|_{(\gamma|\beta)},|(x',x')|_{(\gamma|\beta)})$ e por C0 para $(D|E_0)$ temos que $|(x,y)|_{(\gamma|\beta)}D|(x',y')|_{(\gamma|\beta)}$ e portanto $y\delta y'$.

C4: Vamos supor agora que $(x,x)(\delta|\beta)(x,y)$, então temos que $(|(x,x)|_{(\gamma|\beta)},|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)(|(y,x)|_{(\gamma|\beta)},|(y,y)|_{(\gamma|\beta)})$ e por C3 para $(D|E_0)$ vem que $(|(x,x)|_{(\gamma|\beta)},|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)=$ $\Delta(|(x,x)|_{(\gamma|\beta)})_D=$ $(|(y,x)|_{(\gamma|\beta)},|(y,y)|_{(\gamma|\beta)})(D|E_0)$ e devemos ter então $|(y,x)|_{(\gamma|\beta)}=|(y,y)|_{(\gamma|\beta)}$ ou $(y,x)(\gamma|\beta)(y,y)$ e então, C4 para $(\gamma|\beta)$ nos diz que $x=y$. Temos finalmente que δ centraliza β por meio de $(\delta|\beta)$.

(iii) Suponhamos que $(y,y')\varepsilon\gamma$, então $e_1(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)})=|y|_\gamma=|y'|_\gamma=$ $e_1(|(x',y')|_{(\gamma|\beta)})$ e portanto $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x',y')|_{(\gamma|\beta)})\varepsilon E_1$ assim, se $(|(x,y)|_{(\gamma|\beta)},|(x',y')|_{(\gamma|\beta)})\varepsilon D-E_1$ devemos ter $(y,y')\varepsilon$ $\delta-\gamma$ e finalmente se $D>E_1$, então $\delta>\gamma$.

Veremos agora, algumas propriedades do operador η.

17- PROPOSIÇÃO- Seja α uma congruência em uma álgebra A.

(i) Se $B\leqslant A$, então $\eta(\alpha)\cap B^2\leqslant\eta(\alpha\cap B^2)$.

(ii) Se $\theta : A \to \theta A$ é um homomorfismo sobrejetor, então $\theta^2(\eta(\alpha)) \leq \eta(\theta^2\alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO- (i) Temos que α centraliza $\eta(\alpha)$ e $\eta(\alpha) \cap B^2 \leq \eta(\alpha)$ e portanto por restrição α centraliza $\eta(\alpha) \cap B^2$ por meio de $(\alpha|\eta(\alpha) \cap B^2) = (\alpha|\eta(\alpha)) \cap (\eta(\alpha) \cap B^2)^2$. Alem disso $\alpha \cap B^2 \leq \alpha$ e assim $\eta(\alpha) \cap B^2$ centraliza $\alpha \cap B^2$ por meio de $(\alpha \cap B^2 | \eta(\alpha) \cap B^2) = (\alpha|\eta(\alpha) \cap B^2) \cap (\alpha \cap B^2)^2$, como $\alpha \cap B^2 \subseteq \eta(\alpha) \cap B^2$, temos que $(\alpha \cap B^2 | \eta(\alpha) \cap B^2) = (\alpha|\eta(\alpha)) \cap (\eta(\alpha) \cap B^2)^2$ e do fato de $\eta(\alpha) \cap B^2$ centralizar $\alpha \cap B^2$ vem que $\eta(\alpha \cap B^2) \geq \eta(\alpha) \cap B^2$.

(ii) $\hat{A} \leq \alpha \leq A^2$ implica que $\widehat{\theta A} \leq \theta^2\alpha \leq \theta^2 A^2$ e assim, pelo Teorema I- 10, $\theta^2\alpha$ é uma congruência em A. Vamos verificar que as hipoteses do Corolário 7 estão satisfeitas para mostrar que $\theta^2\alpha$ centraliza $\theta^2(\eta(\alpha))$ por meio de $\theta^4(\alpha|\eta(\alpha))$.

C0: Suponhamos que $(x,y)\theta^4(\alpha|\eta(\alpha))(x',y')$, então existem $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}'$ e $\tilde{y}'$ em A de modo que $x = \theta\tilde{x}$, $y = \theta\tilde{y}$, $x' = \theta\tilde{x}'$ e $y' = \theta\tilde{y}'$ e temos que $(\tilde{x},\tilde{y})(\alpha|\eta(\alpha))(\tilde{x}',\tilde{y}')$ pois θ é sobrejetora e assim, por C0 para $(\alpha|\eta(\alpha))$ temos $\tilde{x}\alpha\tilde{x}'$ e portanto $(x,x') \in \theta^2\alpha$.

C4: Se $(x,x)\theta^4(\alpha|\eta(\alpha))(x,y)$ então devemos ter $(\tilde{x},\tilde{x})(\alpha|\eta(\alpha))(\tilde{x},\tilde{y})$ e por C4 para $(\alpha|\eta(\alpha))$ vem que $\tilde{x} = \tilde{x}'$, logo $x = x'$.

Mostramos assim que $\theta^2\alpha$ centraliza $\theta^2(\eta(\alpha))$ por meio de $\theta^4(\alpha|\eta(\alpha))$ e pela Proposição 5 temos que $\theta^4(\alpha|\eta(\alpha)) = (\theta^2\alpha|\theta^2(\eta(\alpha)))$ e assim, $\theta^2(\eta(\alpha)) \leq \eta(\theta^2\alpha)$.

CAPÍTULO III

COMUTADORES

Neste Capítulo veremos a definição e as principais propriedades dos Comutadores. Essa definição é devida a Smith (12) e é uma generalização do conceito de comutador de dois subgrupos de um grupo, para Variedades de Mal'cev em geral. Continuamos supondo, salvo menção em contrário, que todas as álgebras estão em alguma Variedade de Mal'cev.

1 - DEFINIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, seja $K(\beta,\gamma)=\{\hat{A}\leq\delta\leq A^2:\ \phi_\delta^2(\beta\circ\delta)\leq\eta(\phi_\delta^2\gamma)\}$. Definimos então o <u>comutador</u> de β e γ por:

$$[\beta,\gamma]=\bigcap_{\delta\in K(\beta,\gamma)}\delta$$

2- PROPOSIÇÃO- Seja β e γ congruências em uma álgebra A, então $[\beta,\gamma]\leq\beta$.

DEMONSTRAÇÃO- Temos que $\phi_\beta^2\beta=\phi_\beta\widehat{A}\leq\eta(\phi_\beta^2\gamma)$ e portanto, vale que $\beta\in K(\beta,\gamma)$, ou seja $[\beta,\gamma]\leq\beta$.

3- PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, então $[\beta,\gamma]\in K(\beta,\gamma)$.

DEMONSTRAÇÃO- Definimos $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}(\beta)\,|\,\phi^2_{[\beta,\gamma]}(\gamma))$ por $(|x|_{[\beta,\gamma]}, |y|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}(\beta)\,|\,\phi^2_{[\beta,\gamma]}(\gamma))(|z|_{[\beta,\gamma]}, |t|_{[\beta,\gamma]})$ se, e somente se, para cada $\delta\in K(\beta,\gamma)$, vale que $(|x|_\delta, |y|_\delta)(\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)\,|\,\phi^2_\delta(\gamma))(|z|_\delta,$

$|t|_\delta)$. Vamos verificar que $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)$ satisfaz as hipoteses do Corolário II-7.

C0: $(|x|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)(|z|_{[\beta,\gamma]},|t|_{[\beta,\gamma]})$ implica que para todo $\delta\epsilon K(\beta,\gamma)$, $(|x|_\delta,|y|_\delta)(\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)|\phi^2_\delta\gamma)(|z|_\delta,|t|_\delta)$ e por C0 para $(\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)|\phi^2_\delta\gamma)$ temos que $|x|_\delta\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)|z|_\delta$ e como $[\beta,\gamma]\leqslant\beta$, temos então do fato de $[\beta,\gamma]=\bigcap_{\delta\epsilon K(\beta,\gamma)}\delta$ que $|x|_{[\beta,\gamma]}$ $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)|z|_{[\beta,\gamma]}$.

C4: Vamos supor que $(|x|_{[\beta,\gamma]},|x|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)(|x|_{[\beta,\gamma]},$ $|y|_{[\beta,\gamma]})$, então temos que $(|x|_\delta,|x|_\delta)(\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)|\phi^2_\delta\gamma)(|x|_\delta,|y|_\delta)$ para todo $\delta\epsilon K(\beta,\gamma)$ e assim, por C4 para $(\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)|\phi^2_\delta\gamma)$ temos que $|x|_\delta=|y|_\delta$ e portanto $|x|_{[\beta,\gamma]}=|y|_{[\beta,\gamma]}$.

Resulta finalmente que $\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta$ centraliza $\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma$ e portanto $\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta\leqslant\eta(\phi^2_{|\beta,\gamma|}\gamma)$ e assim $[\beta,\gamma]\epsilon K(\beta,\gamma)$.

4- PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A. $[\beta,\gamma]=\hat{A}$ se, e somente se, γ centraliza β.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que $[\beta,\gamma]=\hat{A}$, então da proposição anterior, temos que $\phi^2_{\hat{A}}\beta\leqslant\eta(\phi^2_{\hat{A}}\gamma)$, como $\phi^2_{\hat{A}}\beta=\beta$ e $\phi^2_{\hat{A}}\gamma=\gamma$, temos que γ centraliza β.

Por outro lado, se γ centraliza β, então $\beta\leqslant\eta(\gamma)$ e $\phi^2_{\hat{A}}\beta\leqslant$ $\eta(\phi^2_{\hat{A}}\gamma)$, logo $\hat{A}\epsilon K(\beta,\gamma)$ e portanto $[\beta,\gamma]=\hat{A}$.

5- PROPOSIÇÃO Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, então $[\beta,\gamma]=[\gamma,\beta]$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos $\delta\varepsilon K(\beta,\gamma)$, então $\phi_\delta^2(\beta\circ\delta)$ centraliza $\phi_\delta^2\gamma$, mas $\phi_\delta^2\beta\leq\phi_\delta^2(\beta\circ\delta)$, e assim, por restrição $\phi_\delta^2\gamma$ centraliza $\phi_\delta^2\beta$, mas $\phi_\delta^2\delta=\widehat{\phi_\delta A}$ e pela Proposição II-10, $\phi_\delta^2\beta$ centraliza $\phi_\delta^2\delta$, logo pela Proposição II-11, $\phi_\delta^2\beta$ centraliza $\phi_\delta^2\gamma\circ\phi_\delta^2\delta=\phi_\delta^2(\gamma\circ\delta)$ (pois ϕ_δ é homomorfismo), assim, $\phi\varepsilon K(\gamma,\beta)$ e $K(\beta,\gamma)\subseteq K(\gamma,\beta)$, por simetria temos que $K(\gamma,\beta)\subseteq K(\beta,\gamma)$ e assim, $[\beta,\gamma]=[\gamma,\beta]$.

6- COROLÁRIO- Nas condiçoes da Proposição 5, temos $[\beta,\gamma]\leq \beta\wedge\gamma$.

DEMONSTRAÇÃO- Da Proposição 2 e da Proposição 5, temos que $[\beta,\gamma]\leq\beta$ e $[\beta,\gamma]\leq\gamma$, logo $[\beta,\gamma]\leq\beta\wedge\gamma$.

7- LEMA- Sejam A uma álgebra e $\theta:A\to\theta A=B$ um homomorfismo sobrejetor e sejam α e δ congruências em A. Definimos então $\theta_\delta:A/\delta\to B/\theta^2\delta$ por $\theta_\delta|x|_\delta=|\theta x|_{\theta^2\delta}$. Nestas condiçoes:

(i) θ_δ é um homomorfismo sobrejetor

(ii) $\theta_\delta{}^2\phi_\delta^2\alpha=\phi^2_{\theta^2\delta}(\theta^2\alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO- (i) Sejam f uma operação n-ária e $(x_1,\ldots,x_n)\varepsilon A$. Temos então que

$$\begin{aligned}\theta_\delta f(|x_1|_\delta,\ldots,|x_n|_\delta)&=\theta_\delta|f(x_1,\ldots,x_n)|_\delta\\&=|\theta(f(x_1,\ldots,x_n))|_{\theta^2\delta}\\&=|f(\theta x_1,\ldots,\theta x_n)|_{\theta^2\delta}\\&=f(|\theta x_1|_{\theta^2\delta},\ldots,|\theta x_n|_{\theta^2\delta})\\&=f(\theta_\delta|x_1|_\delta,\ldots,\theta_\delta|x_n|_\delta)\text{ e}\end{aligned}$$

f é um homomorfismo.

Seja agora, $|y|_{\theta^2\delta}\varepsilon B/_{\theta^2\delta}$, então como θ é sobrejetor, existe $x\varepsilon A$ tal que $y=\theta x$ e portanto, $\theta_\delta(|x|_\delta)=|y|_{\theta^2\delta}$ e θ_δ é sobrejetor.

Tomemos $u,v\varepsilon B$ e suponhamos que $|u|_{\theta^2\delta}(\theta^2_\delta\phi^2_\delta\alpha)|v|_{\theta^2\delta}$. Como θ é sobrejetora, $\exists x,y\varepsilon A$: $u=\theta x$ e $v=\theta y$. Logo $|\theta x|_{\theta^2\delta}(\theta^2_\delta\phi^2_\delta\alpha)|\theta y|_{\theta^2\delta}$ se, e somente se, $|x|_\delta\phi^2_\delta\alpha|y|_\delta$ se, e somente se, $x\alpha y$ se, e somente se, $\theta x\theta^2\alpha\theta y$ se, e somente se, $|\theta x|_{\theta^2\delta}[\phi^2_{\theta^2\delta}\theta^2\alpha]|\theta y|_{\theta^2\delta}$ e portanto, $\theta^2_\delta\phi^2_\delta\alpha=\phi^2_{\theta^2\delta}(\theta^2\alpha)$.

8- PROPOSIÇÃO- Sejam A uma álgebra e $\theta:A\to\theta(A)=B$ um homomorfismo sobrejetor, β e γ congruências em A. Nessas condições, $\theta^2[\beta,\gamma]=[\theta^2\beta,\theta^2\gamma]$.

DEMONSTRAÇÃO- Inicialmente pelo Lema 7 e pela Proposição II- 17 (ii) e lembrando que θ^2_δ preserva a ordem, temos que: $\phi^2_{\theta^2\delta}(\theta(\beta\circ\delta))=\theta^2_\delta(\phi^2_\delta(\beta\circ\delta))\leq\theta^2_\delta(\eta(\phi^2_\delta\gamma))\leq\eta(\theta^2_\delta\phi^2_\delta\gamma)=\eta(\phi^2_{\theta^2\delta}(\theta^2\gamma))$, sempre que $\phi^2_\delta(\beta\circ\delta)\leq\eta(\phi^2_\delta\gamma)$. Assim, se $\delta\varepsilon K(\beta,\gamma)$, $\theta^2\delta\varepsilon K(\theta^2\beta,\theta^2\gamma)$ e logo, se $(x,y)\varepsilon[\beta,\gamma]$, então $\theta^2(x,y)\varepsilon[\theta^2\beta,\theta^2\gamma]$ e portanto $\theta^2[\beta,\gamma]\leq[\theta^2\beta,\theta^2\gamma]$.

Reciprocamente, temos o seguinte: $\phi^2_{\theta^2[\beta,\gamma]}(\theta^2\beta\circ\theta^2[\beta,\gamma])=\phi^2_{\theta^2[\beta,\gamma]}(\theta^2(\beta\circ[\beta,\gamma]))=\phi^2_{\theta^2[\beta,\gamma]}(\theta^2\beta)=\theta^2_{[\beta,\gamma]}\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta\leq\theta^2_{[\beta,\gamma]}(\eta(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma))\leq\eta(\theta^2_{[\beta,\gamma]}(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma))=\eta(\phi_{\theta^2[\beta,\gamma]}(\theta^2\gamma))$. E portanto temos que $\theta^2[\beta\ \gamma]\varepsilon K(\theta^2\beta,\theta^2\gamma)$. Logo $\theta^2[\beta,\gamma]\geq[\theta^2\beta,\theta^2\gamma]$. Finalmente resulta que $\theta^2[\beta,\gamma]=[\theta^2\beta,\theta^2\gamma]$.

Lembrando que uma sub-álgebra B de uma álgebra A é <u>totalmente invariante</u> se $\theta(B)\leq B$ para todo homomorfismo $\theta:A\to A$, temos:

9- COROLÁRIO- O comutador de duas congruências totalmente invariantes é uma congruência totalmente invariante.

10- PROPOSIÇÃO- Sejam A uma álgebra e β, γ_i, $i\varepsilon I$ congruências em A. Temos então que $[\beta, \bigvee_{i\varepsilon I} \gamma_i] = \bigvee_{i\varepsilon I} [\beta, \gamma_i]$.

DEMONSTRAÇÃO- Seja $\delta\varepsilon K(\beta, V\gamma_i)$ então temos que $\phi_\delta^2(\beta\circ\delta)$ centraliza $\phi_\delta^2(V\gamma_i)$ e como para cada $j\varepsilon I$, $\gamma_j \leq V\gamma_i$, temos que $\phi_\delta^2\gamma_j \leq \phi_\delta^2(V\gamma_i)$ e por restrição, temos que $\phi_\delta^2(\beta\circ\delta)$ centraliza $\phi_\delta^2\gamma_j$, e portanto $\delta\varepsilon K(\beta,\gamma_j)$ ou seja, $K(\beta, V\gamma_i) \subseteq K(\beta,\gamma_j)$, para todo $j\varepsilon I$ e portanto, $\bigcap K(\beta,\gamma_j) \subseteq \bigcap K(\beta, V\gamma_i)$ ou seja, $[\beta,\gamma_j] \leq [\beta, V\gamma_i]$, como o índice j é arbitrário, temos que $V[\beta,\gamma_i] \leq [\beta, V\gamma_i]$.

Para a recíproca, temos inicialmente que como o reticulado das congruências de A é modular e $[\beta,\gamma_j] \leq [\beta, V\gamma_i]$, $\forall j\varepsilon I$,

$$\begin{aligned}
[\beta, V\gamma_i] \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{n}[\beta,\gamma_j]\right) &= [\beta,\gamma_1] \vee \left([\beta, V\gamma_i] \wedge \bigvee_{j=2}^{n}[\beta,\gamma_j]\right)\\
&= [\beta,\gamma_1] \vee \left([\beta,\gamma_2] \vee \left([\beta, V\gamma_i] \wedge \bigvee_{j=3}^{n}[\beta,\gamma_j]\right)\right)\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= [\beta,\gamma_1] \vee ([\beta,\gamma_2] \vee (\ldots \vee ([\beta, V\gamma_i] \wedge [\beta,\gamma_n])\ldots)\\
&= [\beta,\gamma_1] \vee ([\beta,\gamma_2] \vee \ldots \vee ([\beta,\gamma_n])\ldots)\\
&= \bigvee_{j=1}^{n}[\beta,\gamma_i].
\end{aligned}$$

Usando o fato que o reticulado das congruências de A é continuo superiormente, vem que:

$$[\beta, V\gamma_i] \wedge V[\beta,\gamma_i] = \bigvee_{S\subseteq I} \left([\beta, V\gamma_i] \wedge \bigvee_{k\varepsilon S}[\beta,\gamma_k]\right) = \bigvee_{S\subseteq I}\left(\bigvee_{k\varepsilon S}[\beta,\gamma_k]\right) = \bigvee_{j\varepsilon I}[\beta,\gamma_j]$$

onde $S\subseteq I$ finito, e temos que $[\beta, V\gamma_i] \leq V[\beta,\gamma_i]$, e resulta finalmente $[\beta, V\gamma_i] = V[\beta,\gamma_i]$.

11- LEMA- Sejam $\theta:A\to\theta A$ um homomorfismo e α uma congruência em A. Temos, então que $(\theta^2)^{-1}\theta^2\alpha=\alpha\circ Ker\theta$.

DEMONSTRAÇÃO- Temos o seguinte, $(\theta^2)^{-1}\theta^2\alpha=\{(x,y):(\theta x,\theta y)\varepsilon\ \theta^2\alpha\}$, mas $(\theta x,\theta y)\varepsilon\theta^2\alpha$ se existem $(u,v)\varepsilon\alpha$ com $x=\theta u$ e $y=\theta v$, e temos então $xKer\theta u\alpha vKer\theta y$ e como A é de Mal'cev, $\exists t\varepsilon A$ com $x\alpha tKer\theta y$ e $(x,y)\varepsilon\alpha\circ Ker\theta$. Por outro lado, se $(x,y)\varepsilon\alpha\circ Ker\theta$, digamos $x\alpha tKer\theta y$, então $(\theta x,\theta t)\varepsilon\theta^2\alpha$ ou $(\theta x,\theta y)\varepsilon\theta^2\alpha$ e assim, $(x,y)\varepsilon(\theta^2)^{-1}\theta^2\alpha$. E temos então que $(\theta^2)^{-1}\theta^2\alpha=\alpha\circ Ker\theta$.

12- PROPOSIÇÃO- Sejam α,β e γ congruências em uma álgebra A, então $[\beta,\gamma]\leq\alpha$ se, e somente se, $[\phi_\alpha^2\beta,\phi_\alpha^2\gamma]=\widehat{A/\alpha}$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que $[\phi_\alpha^2\beta,\phi_\alpha^2\gamma]=\widehat{A/\alpha}$, então pela Proposição 8, temos que $\phi_\alpha^2[\beta,\gamma]=\widehat{A/\alpha}$ ou seja, $[\beta,\gamma]\leq Ker\phi_\alpha=\alpha$.

Para a reciproca, consideremos a congruência $(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)$ em $\phi_\alpha^2\gamma$ definida por $(|x|_\alpha,|y|_\alpha)(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)(|x'|_\alpha,|y'|_\alpha)$ se, e somente se $(|x|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)(|x'|_{[\beta,\gamma]},|y'|_{[\beta,\gamma]})$.
Verificaremos agora, as hipoteses do Corolário II-7.

C0: Suponhamos que $(|x|_\alpha,|y|_\alpha)(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)(|x'|_\alpha,|y'|_\alpha)$, então, $(|x|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)(|x'|_{[\beta,\gamma]},|y'|_{[\beta,\gamma]})$ e por C0 para $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)$, temos que $(|x|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})\varepsilon\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta$ e assim, vale que $(\phi^2_{[\beta,\gamma]})^{-1}(|x|_{[\beta,\gamma]},|x'|_{[\beta,\gamma]})\in(\phi^2_{[\beta,\gamma]})^{-1}(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$ $\beta\circ Ker\phi_{[\beta,\gamma]}=\beta\circ[\beta,\gamma]=\beta$, pelo Lema 11 e temos então $x\beta x'$, ou seja $\phi_\alpha^2(x,x')\varepsilon\phi_\alpha^2\beta$ e portanto $|x|_\alpha\phi_\alpha^2\beta|x'|_\alpha$.

C4: Se $(|x|_\alpha,|x|_\alpha)(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)(|x|_\alpha,|y|_\alpha)$, então temos que:

$(|x|_{[\beta,\gamma]},|x|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)(|x|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})$ e por C4 para $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma)$ temos que $|x|_{[\beta,\gamma]}=|y|_{[\beta,\gamma]}$, mas por hipotese $[\beta,\gamma]\leq\alpha$ e assim, $|x|_\alpha=|y|_\alpha$. Temos então que $\phi^2_\alpha\beta$ centraliza $\phi^2_\alpha\gamma$ e pela Proposição 4, $[\phi^2_\alpha\beta,\phi^2_\alpha\gamma]=\widehat{A/\alpha}$.

Da demonstração da proposição anterior, vemos que se $[\beta,\gamma]\leq\alpha$, $\phi^2_\alpha\beta$ centraliza $\phi^2_\alpha\gamma$ e pela Proposição II- 10, $\phi^2_\alpha\alpha=\widehat{A/\alpha}$ centraliza $\phi^2_\alpha\gamma$, e então pelo Corolário II- 12, $\phi^2_\alpha\alpha\circ\phi^2_\alpha\gamma=\phi^2_\alpha\beta\circ\alpha$ centraliza $\phi^2_\alpha\gamma$ e temos:

13- COROLÁRIO- Se $[\beta,\gamma]\leq\alpha$ então $\alpha\varepsilon K(\beta,\gamma)$.

Vamos procurar agora, uma caracterização "interna" do comutador de duas congruências.

14- DEFINIÇÃO- Sejam A uma álgebra e β,γ congruências em A. Definimos então uma congruência $\P(\beta,\gamma)$ em β por $\P(\beta,\gamma)=$ $<\{((x,x),(y,y):x\gamma y\}>$.

15- LEMA- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, então:
(i) $(a,b)\P(\beta,\gamma)(c,d)$ implica $a\gamma c$ e $b\gamma d$.
(ii) $a\gamma b$ implica $(a,a)\P(\beta,\gamma)(b,b)$.
(iii) $(a,b)\P(\beta,\gamma)(c,d)$ implica $(b,a)\P(\beta,\gamma)(d,c)$.

DEMONSTRAÇÃO- (i) Consideremos a relação $\gamma^2|\beta$ em β dada por $(x,x')\gamma^2|\beta(y,y')$ se, e somente se $(x,y)\varepsilon\gamma$ e $(x',y')\varepsilon\gamma$. Se $(x,x')\varepsilon\beta$, então como γ é reflexiva, temos $(x,x),(x',x')\varepsilon\gamma$ e assim $(x,x')\gamma^2|\beta(x,x')$ e $\hat{\beta}\leq\gamma^2|\beta$. Consideremos agora f uma operação n-ária e $(x_i,x'_i)\gamma^2|\beta(y_i,y'_i)$ para $i=1,\ldots n$, temos então $(x_i,y_i),(x'_i,y'_i)\varepsilon\gamma$ e como γ é congruência, $(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))\varepsilon\gamma$ e $(f(x'_1,\ldots,x'_n),f(y'_1,\ldots,y'_n))\varepsilon\gamma$ ou seja $(f(x_1,\ldots,x_n), f(x'_1,\ldots,x'_n))\gamma^2|\beta(f(y_1,\ldots,y_n),f(y'_1,\ldots,y'_n))$ e $\gamma^2|\beta\leq\beta^2$, pelo Teorema I- 10 temos então que $\gamma^2|\beta$ é uma congruência em β. Observamos agora que se H é o conjunto de geradores de $\P(\beta,\gamma)$, $H=\{((x,x),(y,y)): x\gamma y\}$, temos que $H\leq\gamma^2|\beta$ e portanto, se $(a,b)\P(\beta,\gamma)(c,d)$ temos $(a,b)\gamma^2|\beta(c,d)$ e então $a\gamma c$ e $b\gamma d$.

(ii) Se $a\gamma b$, então $((a,a),(b,b))\varepsilon H$, logo $(a,a)\P(\beta,\gamma)(b,b)$.

(iii) Consideremos a aplicação $\theta:\beta\to\beta$ dada por $\theta(x,y)=(y,x)$, como β é uma relação de equivalência, θ é uma aplicação bijetora. Se f é uma operação n-ária e para $i=1,\ldots n$, $(x_i,y_i)\varepsilon\beta$ temos então $f(\theta(x_1,y_1),\ldots,\theta(x_n,y_n))=f((y_1,x_1),\ldots,(y_n,x_n))=(f(y_1,\ldots,y_n), f(x_1,\ldots,x_n))=\theta(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))=\theta(f((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)))$ e θ é um automorfismo de β. O conjunto H é invariante sob θ, e assim $\theta^2\P(\beta,\gamma)\leq\P(\beta,\gamma)$ e portanto, se $(a,b)\P(\beta,\gamma)(c,d)$, então $(b,a)\P(\beta,\gamma)(d,c)$.

16- LEMA- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, e $\alpha=\{(x,y):(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)\}$, então:

(i) $\alpha=\{(x,y): (x,x)\P(\beta,\gamma)(y,x)\}$.

(ii) α é uma congruência em A.

DEMONSTRAÇÃO- (i) Se $(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)$ então pelo Lema 15, temos que $(x,x)\P(\beta,\gamma)(y,x)$ e portanto $\alpha \supseteq \{(x,y):\P(\beta,\gamma)(y,x)\}$.

(ii) Seja $x\varepsilon A$ arbitrário. Então da reflexividade de $\P(\beta,\gamma)$, vem que $(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,x)$ e assim, $x\alpha x$ logo $\hat{A}\leq\alpha$. Seja agora f uma operação n-ária e suponhamos que para $i=1,\ldots,n$, tenhamos $x_i\alpha y_i$, então $(x_i,x_i)\P(\beta,\gamma)(x_i,y_i)$ e como $\P(\beta,\gamma)$ é congruência, $(f(x_1,\ldots,x_n),f(x_1,\ldots,x_n))\P(\beta,\gamma)(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))$ e portanto $(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))\varepsilon\alpha$ e $\alpha\leq A^2$ e o Teorema I- 10 nos da então que α é uma congruência em A.

Estamos agora em condições de fazer a caracterização "interna" de $[\beta,\gamma]$.

17- TEOREMA- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, então: $[\beta,\gamma] = \{(x,y):(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)\}$.

DEMONSTRAÇÃO- Seja $\alpha = \{(x,y):(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)\}$. Definimos agora uma congruência $(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)$ em $\phi_\alpha^2\gamma$ por $(|x|_\alpha,|y|_\alpha)(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)(|x'|_\alpha,|y'|_\alpha)$ se, e soemente se, $(x,x')\P(\beta,\gamma)(y,y')$. Mostremos que $(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)$ sarisfaz as hipoteses do Corolário II- 7.

C0: Se $(|x|_\alpha,|y|_\alpha)(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)(|x'|_\alpha,|y'|_\alpha)$, então $(x,x')\P(\beta,\gamma)(y,y')$ e assim, $x\alpha x'$ e temos $|x|_\alpha \phi_\alpha^2\beta |x'|_\alpha$.

C4: Suponhamos que $(|x|_\alpha,|x|_\alpha)(\phi_\alpha^2\beta|\phi_\alpha^2\gamma)(|x|_\alpha,|y|_\alpha)$, então $(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)$ ou seja, $x\alpha y$ e $|x|_\alpha=|y|_\alpha$. Assim $\phi_\alpha^2\beta$ centraliza $\phi_\alpha^2\gamma$ e pela Proposição 4, vem que $[\phi_\alpha^2\beta,\phi_\alpha^2\gamma]=\widehat{A/\alpha}$ e, pela Proposição 12, temos $[\beta,\gamma]\leq\alpha$.

Por outro lado, seja $H=\{((x,x),(y,y)):x\gamma y\}$ o conjunto de geradores de $\P(\beta,\gamma)$ e consideremos a congruência $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$ em $\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta$. Se $x\gamma y$, então $|x|_{[\beta,\gamma]}\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|y|_{[\beta,\gamma]}$ e por RR temos $(|x|_{[\beta,\gamma]},|x|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)(|y|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})$ ou seja $\phi^4_{[\beta,\gamma]}((x,x),(y,y))\varepsilon(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$ e assim, $\phi^4_{[\beta,\gamma]}(H)\subseteq(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$ o que finalmente nos mostra que $\phi^4_{[\beta,\gamma]}(\P(\beta,\gamma))$ $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$. Suponhamos agora que $x\alpha y$, ou seja $((x,x),(y,y))\in\P(\beta,\gamma)$, então temos $\phi^4_{[\beta,\gamma]}((x,x),(x,y))\in(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$ ou seja $(|x|_{[\beta,\gamma]},|x|_{[\beta,\gamma]})(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)(|x|_{[\beta,\gamma]},|y|_{[\beta,\gamma]})$ e então por C4 para $(\phi^2_{[\beta,\gamma]}\gamma|\phi^2_{[\beta,\gamma]}\beta)$ temos que $|x|_{[\beta,\gamma]}=|y|_{[\beta,\gamma]}$ ou $x[\beta,\gamma]y$, assim $\alpha\leq[\beta,\gamma]$.

Temos portanto que $\alpha=[\beta,\gamma]$.

A expressão para $[\beta,\gamma]$ dada pelo teorema acima é usada para a definição de comutador em Variedades Modulares em (4), e fica assim demonstrada, no contexto das Variedades de Mal'cev, a equivalência das definiçoẽs de (4) e (12).

Usando a representação de Mal'cev para a congrüência gerada por um conjunto ((3), §10) temos o seguinte:

18- PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A, e seja $H=\{((x,x),(y,y):x\gamma y\}$. Então $x[\beta,\gamma]y$ se, e somente se, existem em β elementos $(z_0,z'_0),\ldots,(z_n,z'_n)$, com $(x,x)=(z_0,z'_0)$, $(x,y)=(z_n,z'_n)$ e elementos $((x_i,x_i),(y_i,y_i))\varepsilon H$ e funçoẽs algebricas 1-árias p_i definidas em β, de modo que:

$$\{p_i(x_i,x_i),p_i(y_i,y_i)\}=\{(z_{i-1},z'_{i-1}),(z_i,z'_i)\}.$$

19- PROPOSIÇÃO- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A. Se γ centraliza β, então $(\gamma|\beta)=\P(\beta,\gamma)$.

DEMONSTRAÇÃO- Se γ centraliza β, então pela Proposição 4, temos que $[\beta,\gamma]=\hat{A}$ e vamos verificar que $\P(\beta,\gamma)$ satisfaz as hipoteses do Corolário II- 7.

C0: Lema 15 (i).

C4: Se $(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)$, então $x[\beta,\gamma]y$, mas como $[\beta,\gamma]=\hat{A}$, $x=y$. Temos então que γ centraliza β por meio de $\P(\beta,\gamma)$, então pela Proposição II- 5, $\P(\beta,\gamma)=(\gamma,\beta)$.

20- PROPOSIÇÃO- Sejam α e β congruências em uma álgebra A, se $\alpha\leq\beta$, então $[\alpha,\gamma]\leq[\beta,\gamma]$.

DEMONSTRAÇÃO- Consideremos os conjuntos $H_1=\{((x,x),(y,y)): x\alpha y\}$ e $H_2=\{((x,x),(y,y)):x\beta y\}$ então como $\alpha\leq\beta$, temos que $H_1\subseteq H_2$ e assim, $\P(\gamma,\alpha)=\langle H_1\rangle\leq\langle H_2\rangle=\P(\gamma,\beta)$ e portanto, se $x[\gamma,\beta]y$ então $(x,x)\P(\gamma,\beta)(x,y)$ e logo $(x,x)\P(\gamma,\alpha)(x,y)$ e assim $x[\gamma,\alpha]y$ e finalmente pela Proposição 5, temos $[\alpha,\gamma]\leq[\beta,\gamma]$.

O teorema seguinte, de (5), nos da uma importante caracterização para a centralidade.

21- TEOREMA- Sejam β e γ congruências em uma álgebra A. Então $[\beta,\gamma]=\hat{A}$ se, e somente se, existe uma congruência χ em β de modo que $\{(x,x):x\gamma t\}$ seja uma classe de equivalencia de χ, para $t\varepsilon A$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que $[\beta,\gamma]=\hat{A}$, então um candidato natural para χ é $(\gamma|\beta)$. De fato, seja $B=\{(x,x):x\gamma t\}$ e seja $(x,x)\varepsilon B$ fixado e (x',x') arbitrário em B. Então $x'\gamma t\gamma x$, ou seja $x\gamma x'$ e então por RR para $(\gamma|\beta)$, temos que $(x,x)(\gamma|\beta)(x',x')$ e portanto $(x',x')\varepsilon|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$, logo $B\leq|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$. Suponhamos agora que $(u,v)\in|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$, então $(x,x)(\gamma|\beta)(u,v)$ e por C0 para $(\gamma|\beta)$ temos que $x\gamma u$, logo por RR temos $(x,x)(\gamma|\beta)(u,u)$ e por transitividade $(u,u)(\gamma|\beta)(u,v)$ e agora, por C4 temos $u=v$, mas $t\gamma x\gamma u$, logo $(u,v)\varepsilon B$ e $B\geq|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$. Logo $B=|(x,x)|_{(\gamma|\beta)}$.

Reciprocamente, suponhamos que B não seja classe de equivalência de nenhuma congruência em β, então existem $u\neq v$ de modo que $(x,x)\P(\beta,\gamma)(u,v)$, onde $(x,x)\varepsilon B$. Assim, pelo Lema 15 (i), temos $x\gamma u$ e de novo pelo Lema 15 (ii), temos $(x,x)\P(\beta,\gamma)(u,u)$ e portanto $(u,u)\P(\beta,\gamma)(u,v)$ e pelo Teorema 17, $(u,v)\varepsilon[\beta,\gamma]$, logo $[\beta,\gamma]>\hat{A}$.

O próximo teorema descreve equacionalmente $[\beta,\gamma]=\hat{A}$.

22- TEOREMA- Sejam A uma álgebra e β,γ congruências em A, f uma operação n-ária e P a operação de Mal'cev. Nessas condições, $[\beta,\gamma]=\hat{A}$ se, e somente se, para cada família $\{x_i,y_i,z_i\}\leq A$, com $i=1,\dots,n$ e $x_i\beta y_i\gamma z_i$, tenhamos que: $f(P(x_1,y_1,z_1),\dots,P(x_n,y_n,z_n))=P(f(x_1,\dots,x_n),f(y_1,\dots,y_n),f(z_1,\dots,z_n))$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que vale a segunda condição do enunciado. Definimos uma relação χ em β por $(x,y)\chi(u,z)$ se, e somente se, $x\beta y\gamma z$ e $P(x,y,z)=u$. Temos então que se $(x,y)\varepsilon\beta$, $y\gamma y$ e $P(x,y,y)=x$, logo $(x,y)\chi(x,y)$ e $\hat{\beta}\leq\chi$. Seja agora g uma operação m-ária e suponhamos que $(x_i,y_i)\chi(u_i,z_i)$ para $i=1,\ldots,m$, então temos que $x_i\beta y_i\gamma z_i$ e $P(x_i,y_i,z_i)=u_i$, como β e γ são congruências, $g(x_1,\ldots,x_m)\beta g(y_1,\ldots,y_m)\gamma g(z_1,\ldots,z_m)$ e tambem $P(g(x_1,\ldots,x_m),g(y_1,\ldots,y_m),g(z_1,\ldots,z_m))=g(u_1,\ldots,u_m)$ e $\chi\leq\beta^2$. Portanto pelo Teorema I-10, χ é uma congruência em β. Seja $H=\{((x,x),(y,y)):x\gamma y\}$, então $\P(\beta,\gamma)=\langle H\rangle$, e como $P(x,x,y)=y$, temos $(x,x)\chi(y,y)$, assim $H\leq\chi$ e resulta que $\P(\beta,\gamma)\leq\chi$. Vamos supor agora que $x[\beta,\gamma]y$, então $(x,x)\P(\beta,\gamma)(x,y)$ e assim, $P(x,x,y)=x$, logo $x=y$ e $[\beta,\gamma]=\hat{A}$.

Reciprocamente, vamos supor que $[\beta,\gamma]=\hat{A}$ e consideremos inicialmente a situação $x,y,z\varepsilon A$ com $x\beta y\gamma z$, temos:

$$\begin{array}{ll}
(x,y)\P(\beta,\gamma)(x,y) & \\
(y,y)\P(\beta,\gamma)(y,y) & \\
(y,y)\P(\beta,\gamma)(z,z) & \text{(Lema 15)} \\
\hline
(x,y)\P(\beta,\gamma)(P(x,y,z),z). & (\dagger)
\end{array}$$

Seja agora, f uma operação n-ária e para $i=1,\ldots,n$, $x_i,y_i,z_i\varepsilon A$ com $x_i\beta y_i\gamma z_i$, então por $(\dagger)$ vale que $(x_i,y_i)\P(\beta,\gamma)(P(x_i,y_i,z_i),z_i)$ e como $\P(\beta,\gamma)$ é congruência,

$(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))\P(\beta,\gamma)(f(P(x_1,y_1,z_1),\ldots,P(x_n,y_n,z_n)),f(z_1,\ldots,z_n))$

como temos tambem que $f(x_1,\ldots,x_n)\beta f(y_1,\ldots,y_n)\gamma f(z_1,\ldots,z_n)$, $(\dagger)$ tambem nos diz que:

$(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))\P(\beta,\gamma)(P(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n),f(z_1,\ldots z_n)),f(z_1,\ldots,z_n))$.

Vamos adotar agora, a seguinte notação:

$R=f(z_1,\dots,z_n)$, $S=f(P(x_1,y_1,z_1),\dots,P(x_n,y_n,z_n))$ $T=P(f(x_1,\dots,x_n),$ $f(y_1,\dots,y_n),f(z_1,\dots,z_n))$, temos então que:

$$\begin{array}{c}(S,R)\,\P(\beta,\gamma)\,(T,R)\\(R,R)\,\P(\beta,\gamma)\,(R,R)\\(R,S)\,\P(\beta,\gamma)\,(R,S)\\\hline \underline{(S,S)\,\P(\beta,\gamma)\,(T,S)}\end{array}$$

Temos então pelo Lema 16 (ii) que $S[\beta,\gamma]T$, mas como $[\beta,\gamma]=\hat{A}$, temos finalmente que:

$$f(P(x_1,y_1,z_1),\dots,P(x_n,y_n,z_n))=$$
$$=P(f(x_1,\dots,x_n),f(y_1,\dots,y_n),f(z_1,\dots,z_n)).$$

CAPÍTULO IV

NILPOTÊNCIA

Neste Capítulo, veremos algumas aplicações da teoria desenvolvida anteriormente e o seu objetivo é mostrar que certas tecnicas bastante frutíferas em Teoria dos Grupos tem suas generalizações naturais para Variedades de Mal'cev. Continuamos supondo, a menos de menção em contrário, que todas as álgebras estão em alguma Variedade de Mal'cev.

1- DEFINIÇÃO- Se α é uma congruência em uma álgebra A centralizada por A^2, então α é dita <u>central</u>. A única congruência central maximal $\eta(A^2)$ é chamada <u>congruência centro</u> e denotada por $C(A)$.

2- DEFINIÇÃO- Uma <u>série central</u> em uma álgebra A é uma série $\hat{A}=\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n=A^2$ de congruências em A, de modo que $\phi^2_{\alpha_{i-1}}\alpha_i\leqslant C(\phi_{\alpha_{i-1}}A)$.

Escrevendo $A_0=A^2$, definimos $A_{i+1}=[A_i,A_0]$ e temos então que $A^2=A_0\geqslant A_1\geqslant\ldots$, pondo também $C_0(A)=\hat{A}$ e definindo $C_{i+1}(A)$ por $\phi^2_{C_i}(C_{i+1})=C(\phi_{C_i}(A))$, temos que $\hat{A}=C_0\leqslant C_1\leqslant\ldots$, Nestas condições vale que:

3- PROPOSIÇÃO- Com as notações acima, temos que $A_k\leqslant C_0$ se, e somente se, $A_0'\leqslant C_k$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que $A_j \leq C_i$, como $C_{i-1} \leq C_i$, temos que $A_j \circ C_{i-1} \leq C_i$, e portanto $\phi^2_{C_{i-1}}(A_j \circ C_{i-1}) \leq \phi^2_{C_{i-1}}(C_i) = C(\phi_{C_{i-1}}(A))$ ou seja $C_{i-1} \varepsilon K(A_j, A_0)$ e portanto $C_{i-1} \geq [A_j, A_0] = A_{j+1}$. Temos também que como $A_j \leq C_i$, lembrando que $A_j = [A_{j-1}, A^2]$, temos pelo Corolário III-13 que $C_i \varepsilon K(A_{j-1}, A^2)$ ou seja $\phi^2_{C_i}(A_{j-1} \circ C_i) \leq \eta(\phi^2_{C_i} A^2) = C(\phi_{C_i}(A)) = \phi^2_{C_i} C_{i+1}$, e portanto $A_{j-1} \leq C_{i+1}$. Suponhamos agora que $A_k \leq C_0$, então $A_{k-1} \leq C_1, A_{k-2} \leq C_2, \ldots, A_0 \leq C_k$ e de modo similar, $A_0 \leq C_k$ implica que $A_k \leq C_0$.

4- DEFINIÇÃO- Dizemos que uma álgebra A é <u>nilpotente</u> se existir um número natural k de modo que $A_k = \hat{A}$ ou equivalentemente $C_k = A^2$. Ao menor k nessas condiçoẽs chamamos de <u>classe de nilpotência</u> de A.

5- DEFINIÇÃO- $A_0 \geq A_1 \geq \ldots \geq A_k$ é chamada a <u>série central inferior</u> de A e $C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_k$ é chamada a série <u>central superior</u> de A.

6- PROPOSIÇÃO- Sejam $(A_\lambda)_{\lambda \varepsilon L}$ álgebras nilpotentes de classe de nilpotência $\leq n$. Então se $A = \prod_{\lambda \varepsilon L} A$, A é nilpotente de classe $\leq n$.

DEMONSTRAÇÃO- Vamos denotar $(A_\lambda)_n$ por $A_{\lambda,n}$. Mostraremos por induçao que $\forall i \varepsilon N$, $\pi^2_\lambda A_i \leq A_{\lambda,i}$.

Inicialmente, temos que $\pi^2_\lambda A_1 = \pi^2_\lambda [A^2, A^2] = [\pi^2_\lambda A^2, \pi^2_\lambda A^2]$ pela Proposição III- 8, mas $\pi^2_\lambda A^2 = A^2_\lambda$, e assim $\pi^2_\lambda A_1 = [A^2_\lambda, A^2_\lambda] = A_{\lambda,1}$. Suponhamos agora que $\pi^2_\lambda A_k = A_{\lambda,k}$, então pela proposição III- 8 temos que

$\pi_\lambda^2 A_{k+1} = \pi_\lambda^2[A_k, A_2] = [\pi_\lambda^2 A_k, \pi_\lambda^2 A_2] = [A_{\lambda,k}, A_\lambda^2] = A_{\lambda,k+1}$ e o resultado segue.

Suponhamos agora que os A_λ são nilpotentes de classe $\lesssim n$,ou seja $A_{\lambda,n} = \hat{A}_\lambda$, temos então que $\pi_\lambda^2 A_n = \hat{A}_\lambda$. Resulta então o seguinte, $A_n = \{(x,y) \varepsilon A^2 : \pi_\lambda x = \pi_\lambda y, \forall \lambda \varepsilon L\}$, ou seja $A_n = \hat{A}$ e A é nilpotente de classe $\lesssim n$.

7- LEMA- Seja A uma álgebra, B uma sub-álgebra de A, X,Y subconjuntos de A com $X \subseteq Y$ e $X \subseteq B$. Seja também β uma congruência em A. Nessas condiçoẽs temos que:

(i) $\langle X \rangle_B \subseteq \langle X \rangle_A \subseteq \langle Y \rangle_A$.

(ii) $¶(\beta, A^2) = \langle \hat{A} x \hat{A} \rangle_\beta$.

DEMONSTRAÇÃO- (i) Se $a \varepsilon \langle X \rangle_B$, então por (3),§9 temos que existem $b_1, \ldots, b_n \varepsilon X$ e um polinômio n-ário p sôbre B de modo que $a = p(b_1, \ldots, b_n)$, mas como $B \leqslant A$, então p também é um polinômio sobre A, logo $a \varepsilon \langle X \rangle_A$. Para a outra inclusão, seja $a \varepsilon \langle X \rangle_A$, então $a = p(b_1, \ldots, b_n)$ como acima, mas $X \subseteq Y$. Logo $b_1, \ldots, b_n \varepsilon Y$ e $a \epsilon \langle Y \rangle_A$. Logo $\langle X \rangle_A \subseteq \langle Y \rangle_A$.

(ii) Temos que $¶(\beta, A^2) = \langle \{((x,x),(y,y)) : x A^2 y\} \rangle_\beta = \langle \hat{A} x \hat{A} \rangle_\beta$.

8- PROPOSIÇÃO- Sejam A uma álgebra nilpotente de classe $\lesssim n$ e B uma sub-álgebra de A, nessas condiçoẽs, B é nilpotente de classe $\lesssim n$.

DEMONSTRAÇÃO- Vamos mostrar por indução que se $i \varepsilon N$, $B_i \subseteq A_i$. Inicialmente temos que $B_1 = [B^2, B^2] = \{(x,y) : (x,x) ¶ (B^2, B^2)(x,y)\}$ pelo Teorema III- 17, e então pelo Lema 7 (ii) temos que $[B^2, B^2] =$

$\{(x,y):(x,x)\langle\hat{B}\times\hat{B}\rangle_B 2(x,y)\}$, e se $(x,x,x,y)\varepsilon\langle\hat{B}\times\hat{B}\rangle_B 2$, pelo Lema 7 (i), temos que $(x,x,x,y)\varepsilon\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_A 2$, e assim $(x,y)\varepsilon[A^2,A^2]$, logo $B_1\subseteq A_1$. Suponhamos agora que $B_k\subseteq A_k$, temos então $B_{k+1}=[B_k,B^2]\doteq\{(x,y):$ $(x,x)\langle\hat{B}\times\hat{B}\rangle_{B_k}(x,y)$, mas $\langle\hat{B}\times\hat{B}\rangle_{B_k}\subseteq\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_{A_k}$, assim se $(x,y)\varepsilon B_{k+1}$, $(x,y)\varepsilon A_{k+1}$ e $B_{k+1}\subseteq A_{k+1}$.

Suponhamos agora que $A_n=\hat{A}$, então $B_n\subseteq\hat{A}$, mas B_n é uma congruência em B e como B é de Mal'cev, devemos ter $\hat{B}\leqslant B_n\leqslant B^2\cap\hat{A}=\hat{B}$, logo $B_n=\hat{B}$ e B é nilpotente de classe $\leqslant n$.

9- PROPOSIÇÃO- Seja A uma álgebra nilpotente de classe $\leqslant n$ e seja $\theta:A\to\theta A=B$ um homomorfismo, então B é nilpotente de classe $\leqslant n$.

DEMONSTRAÇÃO- Mostremos por indução que $B_i=\theta^2 A_i$, $\forall i\varepsilon N$. Para $i=1$, temos $A_1=[A^2,A^2]$ e então pela Proposição III- 8 temos que $\theta^2A_1=[\theta^2A^2,\theta^2A^2]=[B^2,B^2]=B_1$. Vamos supor agora que $B_k=\theta^2A_k$, então temos $B_{k+1}=[B_k,B^2]=[\theta^2A_k,\theta^2A^2]=\theta^2[A_k,A^2]=\theta^2A_{k+1}$. Por hipótese, temos que $A_n=\hat{A}$ e então, $A_n\doteq\{(x,x):x\varepsilon A\}$ logo $B_n=\theta^2A_n\doteq\{(\theta x,\theta y):x\varepsilon A\}=\hat{B}$ e B é nilpotente de classe $\leqslant n$.

10- COROLÁRIO- Se A é uma álgebra nilpotente de classe $\leqslant n$, e α é uma congruência em A, então A/α é nilpotente de classe $\leqslant n$.

11- DEFINIÇÃO- Seja T uma Variedade de Mal'cev, chamamos de $N_n(T)$ à classe das T-álgebras nilpotentes de classe $\leqslant n$, Denotamos N_1 por Z.

As Proposições 6, 8 e 9 nos dizem então que $\mathcal{P}(N_n)\subseteq N_n$, $\mathcal{S}(N_n)\subseteq N_n$ e $\mathcal{H}(N_n)\subseteq N_n$ e então o Teorema de Birkhoff nos da o:

12- TEOREMA- Seja $\mathcal{T}$ uma Variedade de Mal'cev, então $N_n(\mathcal{T})$ é uma Variedade de Álgebras (de Mal'cev).

13- PROPOSIÇÃO- Seja α uma congruência em uma álgebra A. Se α é central, então $\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha)\in Z$.

DEMONSTRAÇÃO- Consideremos a aplicação $e_i:\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha)\to\phi_{A^2}(A)$ onde $|(x_0,x_1)|_{(A^2|\alpha)}\to|x_i|_{A^2}$ então temos que $\operatorname{Ker} e_i=(\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha))^2$ e como $\operatorname{Ker} e_1=\operatorname{Ker} e_2$, então pela Proposição II- 16 (i), temos que $(\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha))^2$ centraliza a si mesma ou seja, $C(\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha))=(\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha))^2$ e assim, $\phi_{(A^2|\alpha)}(\alpha)\in Z$.

14- DEFINIÇÃO- Uma sub-álgebra B de uma álgebra A é dita <u>normal</u> e denotada por $B\triangleleft A$ se, B é uma classe de equivalência de $\langle\hat{A},B^2\rangle$, e então denotamos $\phi_{\langle\hat{A},B^2\rangle}A$ por A/B.

15- PROPOSIÇÃO- Uma congruência α em uma álgebra A é central se, e somente se, $\hat{A}\triangleleft\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO- Observemos inicialmente que, pensadas como sub-álgebras de A^4, temos pelo Lema 7 que: $\hat{\alpha}\leq\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_\alpha\subseteq\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_{A^2}\subseteq\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle_{A^2}\subseteq A^4$, como temos também que $\hat{A}\times\hat{A}\leq\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_\alpha$, então $\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle_{A^2}\subseteq\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_\alpha$ e portanto $\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle_{A^2}=\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_\alpha$ como sub-álgebras.

Suponhamos agora que α em A é central, então pela Proposição III- 19 e pelo Lema 7, temos que $(A^2|\alpha)=\P(\alpha,A^2)=\langle\hat{A}\times\hat{A}\rangle_{\alpha}=\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle$, mas por C3 para $(A^2|\alpha)$, temos que $|(x,x)|_{(A^2|\alpha)}=\Delta|x|_{A^2}=\hat{A}$, e assim $\hat{A}$ é uma classe de equivalência de $\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle$ e $\hat{A}\triangleleft\alpha$.

Reciprocamente, se A é uma classe de equivalência de $\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle$, vamos verificar as hipóteses do Corolário II- 7 para $\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle$.

C0: Sejam $(x,y),(x',y')\varepsilon\alpha$, se $(x,y)\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle(x',y')$, então xA^2x'.

C4: Se $(x,x)\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle(x,y)$, então $(x,y)\varepsilon|(x,x)|_{\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle}=\hat{A}$, logo $x=y$.

Temos então que A^2 centraliza α por meio de $\langle\hat{A}\times\hat{A},\hat{\alpha}\rangle$ e α é central.

16- PROPOSIÇÃO- Seja T uma Variedade de Mal'cev. Uma variedade V de T-álgebras é uma sub-variedade de $Z(T)$ se, e somente se, toda sub-álgebra B de toda álgebra A em V é normal em A.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos que toda sub-álgebra de toda álgebra em V é normal. Dada uma V-álgebra A, A^2 é uma V-álgebra e assim, $\hat{A}\triangleleft A^2$ e então pela Proposição 15, A^2 centraliza A^2, logo $A\in Z(T)$.

Reciprocamente, consideremos o conjunto $\acute{\alpha}=\{(a,a')\varepsilon A^2: \exists(b,b')\varepsilon B^2$ com $(a,a')(A^2|A^2)(b,b')\}$. Seja f uma operação n-ária e suponhamos que para $i=1,\ldots,n$, $(a_i,a'_i)\varepsilon\alpha$, digamos $(a_i,a'_i)(A^2|A^2)(b_i,b'_i)$, então temos que $(f(a_1,\ldots,a_n),f(a'_1,\ldots,a'_n))(A^2|A^2)(f(b_1,\ldots,b_n),f(b'_1,\ldots,b'_n))$, e como $B\leq A$, temos que

$f(b_1,\dots,b_n), f(b'_1,\dots,b'_n)\varepsilon B$, portanto $f(a_1,\dots,a_n)\alpha f(a'_1,\dots,a'_n)$ e $\alpha \leq A^2$. Se $(x,x)\varepsilon \hat{A}$, tomando $y\varepsilon B$, por RR para $(A^2|A^2)$ temos que $(x,x)(A^2|A^2)(y,y)$ e assim $x\alpha x$, e $\hat{A}\leq\alpha$, então pelo Teorema I- 10 temos que α é uma congruência em A. Seja agora, $(x,y)\varepsilon B^2$, então pela reflexividade de $(A^2|A^2)$ temos que $(x,y)(A^2|A^2)(x,y)$, ou seja $(x,y)\varepsilon\alpha$ e $B^2\leq\alpha$, temos portanto que $\langle\hat{A},B^2\rangle\leq\alpha$.

Suponhamos agora que $(b,x)\varepsilon\langle\hat{A},B^2\rangle$, onde $b\varepsilon B$ então existem $b',b''\varepsilon B$ com $(b,x)(A^2|A^2)(b',b'')$ e temos:

$$\frac{\begin{array}{c}(b',b'')(A^2|A^2)(b',b'')\\ (b',b')(A^2|A^2)(b',b')\\ (b',b')(A^2|A^2)(b,b)\end{array}}{\underline{(b',b'')(A^2|A^2)(b,P(b'',b',b))}}$$

e temos então que $(b,x)(A^2|A^2)(b,P(b'',b',b))$ e por C1 para $(A^2|A^2)$ temos que $x=P(b'',b',b)\varepsilon B$. Assim B é uma classe de equivalência de $\langle\hat{A},B^2\rangle$, ou seja, $B\triangleleft A$.

17- DEFINIÇÃO- Um elemento x de uma álgebra A é dito um <u>não gerador</u> de A, se $\langle x,S\rangle=A$ implica $\langle S\rangle=A$, onde $S\subseteq A$.

Se não existirem operaçoẽs 0-árias em T, então $\langle\emptyset\rangle=\emptyset$, mas se T tiver uma operação 0-ária e, então e é um não-gerador, pois $e\varepsilon\langle S\rangle$ para todo $S\subseteq A$, inclusive $S=\emptyset$. Isso mostra que todo grupo tem pelo menos um não-gerador que é a identidade, mas em geral, isso não acontece, como mostra o exêmplo seguinte.

18-EXÊMPLO- Seja T a variedade dos quase-grupos e $A=\{1,2,3\}$

com a seguinte tábua de multiplicação:

	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Todo par de elementos de A gera A, mas nenhum deles sozinho o faz, assim, se $x,y\in A$, $\langle x,y\rangle = A$, mas $\langle x\rangle < A$ e $\langle y\rangle < A$ e portanto A não tem não-geradores.

19- DEFINIÇÃO- O conjunto dos não-geradores de uma álgebra A, denotado por $\Phi(A)$ é chamado de Sub-álgebra de Frattini de A. O nome Sub-álgebra de Frattini vem justificado pela Proposição 20.

20- PROPOSIÇÃO- Seja A uma álgebra. $\Phi(A)$ é uma sub-álgebra de A; alem disso $\Phi(A)$ é a intersecção de todas as sub-álgebras maximais de A.

DEMONSTRAÇÃO- Seja f uma operação n-ária, $S\subseteq A$ e $x_1,\dots,x_n \in\Phi(A)$, então se $\langle f(x_1,\dots,x_n),S\rangle = A$, como $f(x_1,\dots,x_n)\in\langle x_1,\dots,x_n,S\rangle$, temos $\langle x_1,\dots,x_n,S\rangle = A$, mas x_1 é não gerador, logo devemos ter que $\langle x_2,\dots,x_n,S\rangle = A,\dots,x_{n-1}$ é não gerador, logo $\langle x_n,S\rangle = A$ e $\langle S\rangle = A$, portanto $f(x_1,\dots,x_n)\in\Phi(A)$ e $\Phi(A)\leqslant A$.

Suponhamos agora que $x\in A$ e M é uma sub-álgebra maximal de A tal que $x\notin M$, então $\langle x,M\rangle = A$, mas $\langle M\rangle = M < A$, assim x não é um não-gerador. Portanto todo não-gerador de A está em toda sub-álgebra maximal de A, logo em sua intersecção.

Reciprocamente, se x está em toda sub-álgebra maximal de A, seja $\langle x,S\rangle = A$ para $S \subseteq A$ e suponhamos que $\langle S\rangle < A$. Temos então que $x \notin S$ pois $\langle x,S\rangle = A$, seja o conjunto $W = \{B \leq A : B \geq \langle S\rangle \text{ e } x \notin B\}$.

(i) $W \neq \emptyset$ pois $\langle S\rangle \in W$.

(ii) Seja C uma cadeia em W, $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$, então $\bigcup C_\lambda \leq A$ e como $\langle S\rangle \leq C_\lambda$, temos que $\langle S\rangle \leq \bigcup C_\lambda$ e de $x \notin C_\lambda, \forall \lambda \in L$, temos que $x \notin \bigcup C_\lambda$ e assim, $\bigcup C_\lambda \in W$.

Pelo Lema de Zorn, existem elementos maximais em W, seja M um desses tais elementos, então $\langle x,M\rangle \geq \langle x,S\rangle = A$. Por construção de M, toda sub-álgebra de A contendo própriamente M deve conter x e assim, seria todo A, e então M seria uma sub-álgebra maximal de A não contendo x, contra a hipótese. Devemos ter então $\langle S\rangle = A$ e x é um não gerador.

Finalmente resulta que $\Phi(A)$ é a intersecção de todas as sub-álgebras maximais de A.

No que segue, se A é uma álgebra, α uma congruência em A, e $B \subseteq A$, então $|B|_\alpha \doteq \{x \in A : \exists b \in B : x \alpha b\}$.

21- PROPOSIÇÃO- Se M é uma sub-álgebra de uma T-álgebra A e todo elemento de A está na $C(A)$-classe de algum elemento de M, ou seja $|M|_C = A$, então $M \trianglelefteq A$ e $A/M \in Z(T)$.

DEMONSTRAÇÃO- Por hipótese, se $a \in A$, existe $m \in M$ de modo que $(a,m) \in C(A)$. Definimos $\alpha \subseteq A^2$ por $(a,a') \in \alpha$ se, e somente se, existem m e m' em M de modo que $(a,m)(A^2|C(A))(a',m')$. Seja f uma operação n-ária e $(a_i,a'_i) \in \alpha$ com $i=1,\dots,n$, digamos $(a_i,m_i)(A^2|C(A))(a'_i,m'_i)$, temos então que $(f(a_1,\ldots,a_n),f(m_1,\ldots,m_n))(A^2|C(A))(f(a'_1,\ldots,a'_n),$ $f(m'_1,\ldots,m'_n))$ ou seja, $(f(a_1,\ldots,a_n),f(a'_1,\ldots,a'_n))\varepsilon\alpha$. Além disso, se $a\varepsilon A$, $\forall m\varepsilon M$, temos que $(a,m)(A^2|C(A))(a,m)$ e logo, $(a,a)\varepsilon\alpha$, temos então que $\hat{A}\leqslant\alpha\leqslant A^2$ e pelo Teorema I- 10 vem que α é uma congruência em A.

Ja vimos que $\hat{A}\leqslant\alpha$; além disso, se $(m,m')\varepsilon M^2$, então temos $(m,m)(A^2|C(A))(m',m')$, logo $(m',m')\varepsilon\alpha$ e $M^2\leq\alpha$, assim $\langle\hat{A},M^2\rangle\leq\alpha$.

Por outro lado, se $(a,a')\varepsilon\alpha$, temos que $(a,m)(A^2|C(A))(a',m')$ e também:

$$\begin{array}{l}(m,a)(A^2|C(A))(m,a)\\(m,m)(A^2|C(A))(m,m)\\(m,m)(A^2|C(A))(m',m')\\\hline (m,a)(A^2|C(A))(m',P(a,m,m'))\end{array}$$

e assim, $(a,m)(A^2|C(A))(P(a,m,m'),m')$ por RS, e por transitividade temos que $(a',m')(A^2|C(A))(P(a,m,m'),m')$ e por C1 para $(A^2|C(A))$, temos que $a'=P(a,m,m')$, assim $(a,a')=P((a,a),(m,m),(m,m'))\varepsilon\langle\hat{A},M^2\rangle$ e $\alpha\leqslant\langle\hat{A},M^2\rangle$. Portanto $\alpha=\langle\hat{A},M^2\rangle$.

Se $(m,m')\varepsilon M^2$, já vimos que $m\alpha m'$. Suponhamos agora que $x\alpha m$, digamos $(x,m'')(A^2|C(A))(m,m')$ temos então que:

$$\begin{array}{l}(m,m')(A^2|C(A))(m,m')\\(m',m')(A^2|C(A))(m',m')\\(m',m')(A^2|C(A))(m'',m'')\\\hline (m',m')(A^2|C(A))(P(m,m',m''),m'')\end{array}$$

e temos então $(x,m'')(A^2|C(A))(P(m,m',m''),m'')$ e por RS e C1 para $(A^2|C(A))$ resulta que $x=P(m,m',m'')\varepsilon M$. Logo M é uma classe de equivalência de $\langle\hat{A},M^2\rangle$ ou seja $M\triangleleft A$.

Como por hipótese, todo elemento de A está na $C(A)$-classe de algum elemento de M, dados $a,a'\varepsilon A$, existem m e m' em M com $aC(A)m$ e $a'C(A)m'$, mas M é uma α-classe de equivalência, logo $aC(A)m\alpha m'C(A)a'$ e como A é de Mal'cev, existe $m''\varepsilon M$ com $aC(A)mC(A)m''\alpha a'$ ou $aC(A)m''\alpha a'$ e $(a,a')\varepsilon\alpha\circ C(A)$, logo $\alpha\circ C(A)=A^2$ e assim, se $(|a|_\alpha,|a'|_\alpha)\varepsilon\phi_\alpha^2A^2$, então $a\alpha bC(A)a'$, ou seja existe $b\varepsilon|a|_\alpha$ de modo que $b\varepsilon|a'|_{C(A)}$, e assim, $(|a|_\alpha,|a'|_\alpha)=(|b|_\alpha,|a'|_\alpha)\varepsilon\phi_\alpha^2C(A)$ e portanto $\phi_\alpha^2C(A)=\phi_\alpha^2A^2$ e como pela Proposição II- 17 (ii) $\phi_\alpha^2C(A)\leq C(\phi_\alpha^2A^2)$, temos que $\phi_\alpha^2A^2=C(\phi_\alpha^2A)$ e $\phi_\alpha^2A=A/M\varepsilon Z(T)$.

22- PROPOSIÇÃO- Se a é nilpotente e tem não-geradores, então $\Phi(A)\triangleleft A$ e $A/\Phi(A)\varepsilon Z(T)$.

DEMONSTRAÇÃO- Suponhamos $A\varepsilon N_k$, então $C_k=A^2$. Seja M uma subálgebra maximal de A, então $|M|_{C_k}=A$, seja então n minimal com respeito á propriedade que $|M|_{C_n}=A$. Temos que $n>0$, pois como $C_0=\hat{A}$, $|M|_{C_0}=M$, além disso, se $i<n$, como $M\leq|M|_{C_i}\leq A$, $|M|_{C_i}<A$ e M é maximal, devemos ter $|M|_{C_i}=M$.

Temos agora o seguinte, $|\phi_{C_{n-1}}M|_{\phi^2_{C_{n-1}}C_n}\leq\phi_{C_{n-1}}A$, e suponhamos que $|x|_{C_{n-1}}\varepsilon\phi_{C_{n-1}}A$, então como $|M|_{C_n}=A$, existe y em M com xC_ny e portanto $|x|_{C_{n-1}}\phi_{C_{n-1}}(C_n)|y|_{C_{n-1}}$, logo $|x|_{C_{n-1}}\varepsilon|\phi_{C_{n-1}}M|_{\phi^2_{C_{n-1}}C_n}$ e portanto $|\phi_{C_{n-1}}M|_{\phi^2_{C_{n-1}}(C_n)}=\phi_{C_{n-1}}(A)$, como $\phi^2_{C_{n-1}}(C_n)=C(\phi_{C_{n-1}}A)$, temos $|\phi_{C_{n-1}}M|_{C(\phi_{C_{n-1}}A)}=\phi_{C_{n-1}}A$ e pela Proposição 21, temos que:

$\phi_{C_{n-1}} M \triangleleft \phi_{C_{n-1}} A$ e $\phi_{C_{n-1}} A/\phi_{C_{n-1}} M \in Z(T)$.

Agora, temos que $\phi_{C_{n-1}} M \triangleleft \phi_{C_{n-1}} A$ significa que $\phi_{C_{n-1}} M$ é uma classe de equivalência de $\langle \widehat{\phi_{C_{n-1}} A}, (\phi_{C_{n-1}} M)^2\rangle$, mas $\widehat{\phi_{C_{n-1}} A} = \phi^2_{C_{n-1}} \hat{A}$, $(\phi_{C_{n-1}} M)^2 = \phi^2_{C_{n-1}} M^2$, logo: $\langle \widehat{\phi_{C_{n-1}} A}, (\phi_{C_{n-1}} M)^2\rangle = \langle \phi^2_{C_{n-1}} \hat{A}, \phi^2_{C_{n-1}} M^2\rangle = \phi^2_{C_{n-1}} \langle \hat{A}, M^2\rangle$ de acôrdo com (10),1.4.11. Suponhamos agora que $m,m' \in M$, então $\phi^2_{C_{n-1}} (m,m') \in \phi^2_{C_{n-1}} \langle \hat{A}, M^2\rangle$, e como $(m,m') \in M^2$, temos que $(m,m') \in \langle \hat{A}, M^2\rangle$; além disso, se dado $x \in A$, temos $(x,m) \in \langle \hat{A}, M^2\rangle$, então $(|x|_{C_{n-1}}, |m|_{C_{n-1}}) \in \phi_{C_{n-1}} \langle \hat{A}, M^2\rangle$ e de $\phi_{C_{n-1}} M \triangleleft \phi_{C_{n-1}} A$, tiramos que $|x|_{C_{n-1}} \in \phi_{C_{n-1}} M$, ou seja $\exists m_1 \in M: |x|_{C_{n-1}} = |m_1|_{C_{n-1}}$, mas $|M|_{C_{n-1}} = M$, logo $x \in M$ e M é uma classe de equivalência de $\langle \hat{A}, M^2\rangle$, logo $M \triangleleft A$.

Temos também o seguinte, por (3),§11, Teorema 4, $\phi_{C_{n-1}} A/\phi_{C_{n-1}} M = \phi_{C_{n-1}} A/\phi_{C_{n-1}} \langle \hat{A}, M^2\rangle \cong A/\langle \hat{A}, M^2\rangle$ e portanto, $A/\langle \hat{A}, M^2\rangle = A/M \in Z(T)$.

Seja agora, $(M_i)_{i\in I}$ o conjunto das sub-álgebras maximais de A, então pela Proposição 20, $\Phi(A) = \bigcap_{i\in I} M_i$. Se $(x,y) \in (\Phi(A))^2$, como $(\Phi(A))^2 \subseteq \langle \hat{A}, (\Phi(A))^2\rangle$, $(x,y) \in \langle \hat{A}, (\Phi(A))^2\rangle$, além disso se $a \in A$ e $x \in \Phi(A)$, e $(x,a) \in \langle \hat{A}, (\Phi(A))^2\rangle$, como $\Phi(A) \subseteq M_i, \forall i \in I$, $(x,a) \in \langle \hat{A}, M_i^2\rangle$ logo $a \in M_i, \forall i \in I$ pois $M_i \triangleleft A$, assim $a \in \bigcap_{i\in I} M_i = \Phi(A)$ e Φ é classe de equivalência de $\langle \hat{A}, \Phi(A)^2\rangle$, logo $\Phi(A) \triangleleft A$.

Consideremos agora, a função $\theta: A/M_i \to A/\Phi(A)$ definida por $\theta(|x|_{\langle \hat{A}, M_i^2\rangle}) = |x|_{\langle \hat{A}, (\Phi(A))^2\rangle}$, se f é uma operação n-ária e $|x_j|_{\langle \hat{A}, M_i^2\rangle} \in A/M_i$, $j=1,\ldots,n$, temos que:

$\theta(f(|x_1|_{\langle\hat{A},M_i^2\rangle},\ldots,|x_n|_{\langle\hat{A},M_i^2\rangle}))=\theta(|f(x_1,\ldots,x_n)|_{\langle\hat{A},M_i^2\rangle})=$
$|f(x_1,\ldots,x_n)|_{\langle\hat{A},(\Phi(A))^2\rangle}=f(|x_1|_{\langle\hat{A},(\Phi(A))^2\rangle},\ldots,|x_n|_{\langle\hat{A},(\Phi(A))^2\rangle})=$
$f(\theta(|x_1|_{\langle\hat{A},M_i^2\rangle}),\ldots,\theta(|x_n|_{\langle\hat{A},M_i^2\rangle}))$, e portanto, θ é um homomorfismo, e como θ é trivialmente sobrejetor, $Z(T)$ é variedade e $A/M_i \in Z(T)$, temos que $A/\Phi(A) \in Z(T)$.

BIBLIOGRAFIA

(1) - H. BECHTELL; The Theory of Groups, Addison-Wesley, Reading Mass. 1971.

(2) - P. CRAWLEY & R. P. DILWORTH; Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall, New Jersey, 1973.

(3) - G. GRATZER; Universal Algebra, D. Van Nostrand, Princeton, 1968.

(4) - H. P. GUMM; An Easy Way to the Commutator in Modular Varieties, Arch. Math. 34(1980) 220-228.

(5) - J. HAGEMANN & C. HERMANN; A Concrete Ideal Multiplication For Algebraic Systems and its Relations to Congruence Distributivity. Arch. Math. 32(1979) 234-245.

(6) - P. R. HALMOS; Teoria Ingênua dos Conjuntos, Polígono, São Paulo, 1976.

(7) - B. JÓNSSON; Algebras Whose Congruence Lattices Are Distributive, Math. Scand. 21(1967) 110-121.

(8) - R. McKENZIE: Algebra and Logic: Universal Algebras and Equational Theories (Notas de Aula Mimeografadas).

(9) - A. I. MAL'CEV; Algebraic Systems, Springer Verlag, Berlim, 1973.

(10) - R. S. PIERCE; Introduction to the Theory of Abstract Algebras, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

(11) - J. J. ROTMAN; The Theory of Groups, Allyn and Bacon, Boston, 1973.

(12) - J. D. H. SMITH; Mal'cev Varieties, Springer Verlag, Berlim, 1976.